

R. Conti
1943

ENRICO PERSICO

ORDINARIO DI FISICA TEORICA NELLA R. UNIVERSITÀ DI TORINO

INTRODUZIONE

ALLA

FISICA MATEMATICA

REDATTA DAL

DR. TINO ZEULI

SECONDA EDIZIONE RIVEDUTA

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

N° 165



NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA 1943-XXI

Bologna - Tipografia Compositori - 1-1943-XXI

PREFAZIONE

La fisica matematica, nelle nostre Università, è generalmente oggetto di corsi monografici, che svolgono piuttosto ampiamente uno solo dei suoi capitoli. Questa consuetudine, giustificata dal desiderio di condurre gli allievi quanto più in alto è possibile su almeno una delle vie della scienza, presenta tuttavia a mio parere, oltre all'ovvio svantaggio di lasciare i giovani privi di quelle nozioni elementari che stanno a base degli altri capitoli della materia e che sono spesso indispensabili per la comprensione di libri e memorie, un altro inconveniente forse più grave: essa toglie agli allievi la visione di quei ravvicinamenti formali tra fenomeni disparati, e di quella conseguente unità di metodi, che sono tra le più belle e feconde conquiste del pensiero umano. Per questi motivi, nel corso di fisica matematica che da diversi anni svolgo nella Università di Torino, ho introdotto una prima ampia parte di carattere generale e propedeutico, dalla cui elaborazione è nato questo libro.

Il carattere prevalentemente scolastico dell'opera spiega lo sforzo fatto per appianare le piccole difficoltà formali, l'abbondanza dei richiami, il frequente ricorso a nozioni intuitive, la rinuncia a rendere minime le ipotesi e massima la generalità dove ciò sarebbe andato a scapito della chiarezza e della semplicità. In ciascuno dei principali rami della fisica matematica ho introdotto i concetti basilari e, stabilite le equazioni fondamentali, ne ho mostrata l'applicazione a qualche semplice problema, cercando costantemente che l'apparato matematico non offuscasse il significato fisico delle questioni. Perciò, e non solo per brevità, ho evitato di regola quei problemi che si risolvono per mezzo di speciali artifici, o con sviluppi matematici lunghi e complicati: il lettore, che abbia bene assimilato i metodi di più comune applicazione esposti in questo libro, potrà poi meglio gustare, nelle memorie originali dei grandi Maestri, l'arte sottile di aggirare le difficoltà e dissolverle come per incanto.

Le equazioni fondamentali incontrate nei diversi rami della fisica matematica vengono poi riprese in un capitolo di carattere più matematico, destinato a mettere in luce le analogie formali tra i diversi problemi, a classificarli e discuterli dal punto di vista analitico, seguendo il classico ed elegante metodo delle caratteristiche.

Molti argomenti, che pure avrebbero potuto bene inquadrarsi nel piano dell'opera, si sono dovuti omettere per non accrescerne la mole e non ritardarne troppo la pubblicazione, già intralciata in vario modo dalla congiuntura di guerra.

I metodi e i risultati qui esposti sono tutti ormai classici, e ben noti. Un capitolo, nel quale il metodo di esposizione si discosta alquanto da quello tradizionale, è quello sulla teoria ristretta della relatività. La maggiore difficoltà che incontra il principiante in questa materia sta notoriamente nella analisi critica delle nozioni di spazio e di tempo, che è il presupposto necessario della teoria; ma questa difficoltà non si supera, a mio avviso, con tutte quelle considerazioni di carattere filosofico e generico sullo spazio e sul tempo « assoluti », che di solito vengono premesse alla esposizione della teoria della relatività, poichè esse risultano per lo più incomprensibili a chi non conosce ancora la teoria, lo distraggono dal significato concreto di questa, e si prestano a false interpretazioni. Il miglior modo per aiutare il lettore a penetrare in questo non facile terreno mi sembra invece quello di attirare la sua attenzione non sui concetti astratti di spazio e di tempo, ma sulle grandezze fisiche x, y, z, t , relative a un dato evento, e di precisarne il significato fisico nel solo modo possibile, e cioè con la « definizione operativa »: è questo il criterio che mi ha guidato nella presente esposizione. Solo dopo essersi familiarizzato con questi concetti — soprattutto con l'aiuto della rappresentazione quadridimensionale — potrebbe l'allievo intendere il significato di certe affermazioni filosofiche, che hanno dato luogo a tanti malintesi (come quella celebre di Minkowski sulla fusione dello spazio col tempo), ma in questo libro non è stato possibile condurre il lettore fin là.

Debbo ringraziare vivamente il dott. T. Zeuli, mio assistente, che ha raccolto e redatto queste lezioni con intelligenza e con cura appassionata, ed ha cooperato molto diligentemente alla revisione delle bozze.

E. P.

INDICE

PREFAZIONE	pag. v
CAP. I. - Cinematica dei mezzi continui. Campi scalari e vettoriali.	
§ 1. Generalità. Mezzi continui	pag. 1
§ 2. I due punti di vista (lagrangiano ed euleriano) nello studio del moto di un fluido. Moti stazionari	» 2
§ 3. Campi vettoriali e campi scalari	» 4
§ 4. Gradiente	» 6
§ 5. Flusso di un campo vettoriale	» 8
§ 6. Trasformazione di alcuni integrali di volume in integrali di superficie e viceversa. (Lemma di Gauss e teorema della divergenza)	» 9
§ 7. Equazione di continuità	» 11
§ 8. Fluidi incompressibili e campi solenoidali	» 13
§ 9. Operatore di Laplace. Lemma di Green	» 14
§ 10. Sistemi di coordinate curvilinee ortogonali	» 15
§ 11. Componenti del gradiente ed espressione della divergenza in coordinate curvilinee ortogonali	» 17
§ 12. Espressione dell'operatore Δ in coordinate curvilinee ortogonali	» 20
§ 13. Rotore di un vettore. Teorema di Stokes	» 21
§ 14. Studio del moto di un mezzo continuo nell'intorno di un punto	» 25
§ 15. Tensori	» 27
§ 16. Tensori simmetrici	» 29
§ 17. Moti irrotazionali	» 32

CAP. II. - Funzioni armoniche. Rappresentazioni conformi.

FUNZIONI ARMONICHE.

§ 18. Proprietà generali delle funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet e di Neumann	pag. 35
§ 19. Problemi di Dirichlet e di Neumann per uno spazio infinito	» 39
§ 20. La funzione armonica $\frac{1}{r}$	» 41
§ 21. Funzioni armoniche nel piano	» 42

E. PERSICO *Introduzione alla fisica matematica*

FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA.

§ 22. Richiami sulle funzioni di variabile complessa	pag. 43
§ 23. Moti liquidi piani e funzioni di variabile complessa	» 45
§ 24. Alcuni esempi	» 47

RAPPRESENTAZIONI CONFORMI.

§ 25. Rappresentazioni conformi	» 51
§ 26. Rappresentazione conforme di una regione piana su un'altra	» 53
§ 27. Trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano	» 54
§ 28. Invarianza dell'equazione di Laplace in una rappresentazione conforme	» 57

PROBLEMI DI DIRICHLET E DI NEUMANN.

§ 29. Risoluzione del problema di Dirichlet per il cerchio	» 58
§ 30. Risoluzione del problema di Neumann per il cerchio	» 59
§ 31. Sulla risoluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann mediante rappresentazione conforme su un cerchio	» 61
§ 32. Trasformazione per raggi vettori reciproci nello spazio	» 62
§ 33. Formula di Green	» 63
§ 34. Funzione di Green	» 64
§ 35. Esempi: funzioni di Green per la sfera e per il cerchio	» 66
§ 36. Due proprietà della funzione di Green	» 67
§ 37. Funzioni di Green nel piano e rappresentazione conforme in un cerchio	» 69

CAP. III. - Teoria del potenziale.

CAMPO ELETTROSTATICO SENZA CONDUTTORI.

§ 38. Generalità. Leggi di Coulomb e di Newton	pag. 73
§ 39. Campo elettrico dovuto a cariche puntiformi. Teorema di Gauss	» 74
§ 40. Campo elettrico relativo ad una distribuzione spaziale continua di cariche	» 77
§ 41. Alcune applicazioni	» 78
§ 42. Potenziale di cariche puntiformi	» 80
§ 43. Potenziale di una distribuzione spaziale continua di cariche e sue proprietà	» 82
§ 44. Equazione di Poisson	» 85
§ 45. Risoluzione dell'equazione di Poisson col metodo di Green	» 86
§ 46. Ricerca di alcuni potenziali notevoli	» 87
§ 47. Potenziale dovuto ad uno strato sferico	» 90
§ 48. Potenziale di strato semplice	» 92
§ 49. Campi prodotti da un disco e da un piano indefinito	» 95
§ 50. Potenziale di un dipolo	» 96
§ 51. Potenziale di doppio strato	» 98
§ 52. Distribuzioni equivalenti di cariche. Balayage	» 100

CAMPO ELETTROSTATICO CON CONDUTTORI.

§ 53. Conduttori. Correnti elettriche. (Legge di Ohm. Effetto Joule)	pag. 101
§ 54. Teorema di Coulomb	» 105
§ 55. Capacità di un conduttore	» 106
§ 56. Influenza [od induzione] elettrostatica	» 108
§ 57. Influenza di una carica puntiforme su un conduttore limitato da una superficie piana indefinita	» 111
§ 58. Influenza di un campo uniforme su una sfera conduttrice isolata	» 112

DIELETTICI.

§ 59. Polarizzazione dei dielettrici	» 115
§ 60. Teoria fenomenologica della polarizzazione	» 117
§ 61. Induzione elettrica	» 119
§ 62. Strati semplici e conduttori immersi in un dielettrico. Teorema di Coulomb	» 121
§ 63. Comportamento dell'induzione e del campo alla superficie dei dielettrici	» 122
§ 64. Due esempi di polarizzazione in un campo uniforme	» 124
§ 65. Una interpretazione fisica dell'induzione elettrica \mathfrak{D}	» 125
§ 66. Campo in un dielettrico illimitato, normale ed omogeneo	» 126

SISTEMI DI CONDUTTORI.

§ 67. Sistemi di conduttori. [Teorema di reciprocità]	» 127
§ 68. Capacità in un sistema di conduttori	» 130
§ 69. Condensatori	» 132
§ 70. Un esempio di calcolo esatto di un condensatore; condensatore sferico	» 134
§ 71. Energia elettrostatica	» 135
§ 72. Calcolo di forze ponderomotrici	» 140

CENNI DI MAGNETOSTATICA.

§ 73. Cenni di magnetostatica	» 144
-------------------------------	-------

CAP. IV. - Vibrazioni di corde e membrane.

INTRODUZIONE MATEMATICA.

§ 74. Serie di Fourier in forma trigonometrica	pag. 149
§ 75. Due esempi	» 152
§ 76. Serie di Fourier in forma esponenziale	» 154
§ 77. Sviluppi in integrale di Fourier	» 155

VIBRAZIONI DELLE CORDE.

§ 78. Studio generale delle vibrazioni trasversali di una corda. (Equazione di d'Alembert)	» 158
--	-------

§ 79. Interpretazione dell'integrale di d'Alembert e sua espressione mediante i dati iniziali	pag. 161
§ 80. Onde sinusoidali	» 166
§ 81. Vibrazioni di una corda con un estremo fisso. Onde sinusoidali stazionarie	» 164
§ 82. Vibrazioni di una corda cogli estremi fissi	» 166
§ 83. Decomposizione in onde stazionarie del moto di una corda cogli estremi fissi	» 167
§ 84. Integrazione dell'equazione di d'Alembert col metodo della separazione delle variabili	» 170
§ 85. Studio di un caso particolare (corda pizzicata)	» 172

VIBRAZIONI DELLE MEMBRANE.

§ 86. Generalità sulle vibrazioni trasversali delle membrane	» 175
§ 87. Integrazione col metodo della separazione delle variabili	» 177
§ 88. Caso della membrana rettangolare	» 178
§ 89. Caso della membrana quadrata. Degenerazione	» 181
§ 90. Caso della membrana circolare (1ª parte)	» 182
§ 91. Cenni sulle funzioni di Bessel di 1ª specie	» 183
§ 92. Caso della membrana circolare (2ª parte)	» 185

CAP. V. - Teoria dell'elasticità.

§ 93. Generalità	pag. 189
------------------	----------

LE DEFORMAZIONI.

§ 94. Analisi della deformazione nell'intorno di un punto	» 190
§ 95. Tensore delle deformazioni	» 191
§ 96. Formule di trasformazione del tensore delle deformazioni. Dilatazione cubica	» 194

GLI SFORZI.

§ 97. Forze applicate e sforzi	» 195
§ 98. Criterio generale di equilibrio dei corpi deformabili	» 196
§ 99. Formule di Cauchy	» 196
§ 100. Equazioni differenziali dell'equilibrio (per gli sforzi)	» 198
§ 101. Equazioni al contorno (per gli sforzi)	» 201
§ 102. Tensore degli sforzi	» 201
§ 103. Sforzi nei fluidi. Equazioni dell'idrostatica	» 202

LE COSTANTI ELASTICHE.

§ 104. Relazioni fra deformazioni e sforzi interni nei corpi elastici (legge di Hooke)	» 203
§ 105. Limiti per il modulo di Poisson	» 208
§ 106. I fluidi come corpi elastici	» 209

I PROBLEMI DELL'EQUILIBRIO ELASTICO.

§ 107. Equazioni differenziali dell'equilibrio (per gli spostamenti)	pag. 211
§ 108. Generalità sui problemi di equilibrio elastico	» 212
§ 109. Tensione uniforme di una sbarra cilindrica	» 213
§ 111. Cenno sul problema di Saint-Venant	» 218

LE OSCILLAZIONI ELASTICHE.

§ 112. Equazioni delle oscillazioni elastiche	» 219
§ 113. Sullo studio delle oscillazioni sotto l'azione di forze costanti	» 220
§ 114. Oscillazioni a rotazione nulla (onde di condensazione)	» 221
§ 115. Oscillazioni a dilatazione nulla (onde di distorsione)	» 225
§ 116. Oscillazioni di tipo qualsiasi	» 228
§ 117. Proprietà generali dell'equazione delle onde	» 229
§ 118. Velocità di propagazione delle oscillazioni elastiche nei fluidi (velocità del suono)	» 233

CAP. VI. - Elettromagnetismo.

CAMPO MAGNETICO DELLE CORRENTI ELETTRICHE.

§ 119. Generalità. Fondamenti sperimentali	pag. 235
§ 120. Principio di equivalenza	» 237
§ 121. Potenziale e circuitazione del campo magnetico di una spira percorsa da corrente costante	» 238
§ 122. Campo magnetico prodotto da correnti solenoidali stazionarie	» 241
§ 123. Prima equazione di Maxwell (per correnti solenoidali stazionarie)	» 242
§ 124. Prima legge di Laplace	» 243
§ 125. Applicazioni	» 245
§ 126. Deduzione del principio di equivalenza dalla prima legge di Laplace	» 247
§ 127. Correnti di spostamento. Forma generale della prima equazione di Maxwell	» 248

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA.

§ 128. Induzione elettromagnetica. Legge di Neumann	» 250
§ 129. Circuitazione del campo elettrico	» 251
§ 130. Seconda equazione di Maxwell	» 252

FORZE MAGNETICHE SULLE CORRENTI ELETTRICHE.

§ 131. Forza esercitata da un campo magnetico su un conduttore percorso da corrente	» 253
§ 132. Correnti di convezione. Forza di Lorentz	» 256
§ 133. Quadro delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo	» 256

ONDE ELETTROMAGNETICHE.

§ 134. Radiazione elettromagnetica in un mezzo isolante	pag. 258
§ 135. Onde elettromagnetiche piane	» 259
§ 136. Classificazione delle radiazioni elettromagnetiche	» 261
§ 137. Velocità delle radiazioni elettromagnetiche. Indice di rifrazione	» 263
§ 138. Intensità della radiazione (per le onde piane)	» 264
§ 139. Onde elettromagnetiche in un mezzo conduttore	» 265
§ 140. Cenno su ulteriori applicazioni della teoria delle onde elettromagnetiche	» 269

AZIONI MECCANICHE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO.

§ 141. Flusso di energia e vettore di Poynting	» 270
§ 142. Risultante delle forze ponderomotrici. Quantità di moto elettromagnetica	» 272
§ 143. Pressione della radiazione. Massa dell'energia	» 277
§ 144. Meccanismo della pressione della radiazione	» 280

POTENZIALI ELETTROMAGNETICI ED APPLICAZIONI.

§ 145. Potenziali elettromagnetici	» 281
§ 146. Formula di Kirchhoff	» 283
§ 147. Formule dei potenziali ritardati	» 286
§ 148. Irraggiamento di un oscillatore	» 287
§ 149. Cenno sull'irraggiamento di una carica in moto qualsiasi	» 291
§ 150. Il principio di Huygens	» 292
§ 151. L'ottica geometrica dedotta dall'equazione delle onde	» 294

CAP. VII. - Conduzione del calore (e diffusione).

§ 152. Legge elementare della conduzione del calore	pag. 301
§ 153. Equazioni fondamentali della conduzione del calore	» 303
§ 154. Problemi unidimensionali	» 305
§ 155. Propagazione unidimensionale stazionaria	» 306
§ 156. Propagazione delle oscillazioni di temperatura nel suolo	» 306
§ 157. Propagazione in un filo (isolato) limitato, con gli estremi a temperatura costante	» 308
§ 158. Propagazione in un filo (isolato) illimitato	» 310
§ 159. Una interpretazione fisica della soluzione data nel § precedente	» 313
§ 160. Propagazione in un filo non isolato	» 314
§ 161. Propagazione del calore in un mezzo illimitato	» 317

CAP. VIII. - Le equazioni a derivate parziali della fisica matematica.

§ 162. Le analogie formali nella fisica matematica	» 321
§ 163. Proprietà generali delle equazioni della fisica matematica	» 324
§ 164. Problema di Cauchy (in due variabili)	» 326

§ 165. Classificazione delle equazioni della fisica matematica in base alle caratteristiche	pag. 329
§ 166. Riduzione a forma canonica delle equazioni della fisica matematica	» 331
§ 167. Risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle corde vibranti	» 335
§ 168. Significato fisico delle caratteristiche di un'equazione iperbolica	» 339
§ 169. Il problema di Cauchy per l'equazione della propagazione del calore	» 343
§ 170. Classificazione delle equazioni lineari in tre variabili	» 345
§ 171. Cenno sulle equazioni in quattro variabili	» 349

CAP. IX. - Cenni sulla teoria della relatività (ristretta).

ANALISI DI ALCUNI CONCETTI FONDAMENTALI DELLA FISICA.

§ 172. La variabile « tempo »	pag. 351
§ 173. Cambiamento del sistema di riferimento	» 353
§ 174. Fisica classica e fisica relativistica	» 354
§ 175. La trasformazione di Galileo	» 356
§ 176. La propagazione della luce secondo la fisica classica. L'esperienza di Michelson	» 356

FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ.

§ 177. Principio di relatività	» 360
§ 178. Trasformazione di Lorentz	» 362
§ 179. Relatività della contemporaneità	» 366
§ 180. Contrazione di Lorentz	» 368
§ 181. Dilatazione dei tempi	» 369
§ 182. La composizione delle velocità nella cinematica relativistica. Trascinamento della luce	» 370
§ 183. Invarianza delle equazioni della fisica rispetto alla trasformazione di Lorentz	» 373
§ 184. Variabilità della massa	» 374
§ 185. Legge fondamentale della dinamica relativistica	» 378
§ 186. Teorema ed espressione della forza viva	» 379
§ 187. Massa dell'energia	» 381
APPENDICE I.	» 385
APPENDICE II.	» 389
BIBLIOGRAFIA	» 391
INDICE ANALITICO	» 395

CAPITOLO I.

CINEMATICA DEI MEZZI CONTINUI
CAMPI SCALARI E VETTORIALI

§ 1. Generalità. Mezzi continui.

Questo capitolo ed il successivo hanno principalmente lo scopo di introdurre alcuni concetti matematici [campi scalari e campi vettoriali, loro principali relazioni, funzioni armoniche, ecc.] i quali hanno importanza fondamentale in tutta la fisica matematica e dei quali faremo uso costante nel seguito. Ma per non presentare al lettore tali concetti in forma astratta, ed anche per avere occasione di esporre alcune nozioni meccaniche importanti per se stesse, tratteremo in questo capitolo i *fondamenti della cinematica dei mezzi continui* [in particolare dei fluidi] e ne trarremo occasione per presentare, man mano che occorrono, i detti concetti matematici, che in questa teoria trovano la loro più espressiva esemplificazione.

Per « *mezzo continuo* » si intende qualsiasi corpo a tre dimensioni, solido, liquido o gassoso, nel quale si prescinda dalla struttura atomica o molecolare, così da considerarlo come un'estensione continua di materia. Sebbene ciò non corrisponda rigorosamente alla realtà fisica, pure è lecito ed opportuno farlo nello studio di tutti quei fenomeni in cui la struttura discontinua della materia non ha influenza [per es. il moto dell'acqua di un fiume, la deformazione di una molla, etc.].

Noi studieremo qui, dal punto di vista puramente cinematico [cioè senza occuparci delle forze], i movimenti e le deformazioni dei mezzi continui. Rientra naturalmente in questo studio anche il caso particolare dei *moti rigidi* che però supponiamo già noto al lettore dalla meccanica razionale; fissaremo piuttosto l'attenzione sulle deformazioni dei corpi elastici e sui movimenti dei fluidi [gas e liquidi]. La differenza fra i tre casi, dal punto di vista cinematico, è solo questa: in un corpo rigido la distanza fra due punti qualunque o [come diremo sovente

senza tuttavia alludere alla struttura molecolare] tra due *particelle* ⁽¹⁾, si mantiene sempre invariata, in un corpo soggetto a deformazione elastica tale distanza varia ma, nelle condizioni ordinarie, entro limiti ristretti, invece in un fluido la distanza fra due particelle può variare comunque.

§ 2. I due punti di vista (lagrangiano ed euleriano) nello studio del moto di un mezzo continuo. Moti stazionari.

Per descrivere il moto di un mezzo continuo bisogna descrivere il moto delle infinite particelle di cui possiamo pensarlo costituito e ciò può farsi nel modo seguente. Fissato un istante t_0 [che chiameremo convenzionalmente *istante iniziale*], ogni particella del corpo può essere individuata assegnando le coordinate (x_0, y_0, z_0) che essa ha all'istante iniziale, così che i tre numeri x_0, y_0, z_0 rappresentano, per così dire, *il nome* della particella che seguiamo nel suo movimento. Al tempo generico t la particella (x_0, y_0, z_0) avrà delle altre coordinate $x(t), y(t), z(t)$, e se noi conosciamo queste tre funzioni di t conosceremo il suo movimento. Poichè ciò si può ripetere per ogni particella, cioè per ogni terna (x_0, y_0, z_0) , il moto sarà completamente descritto assegnando le tre funzioni

$$(I, 1) \quad \begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

dalle quali, fissando i valori di x_0, y_0, z_0 , si ha la legge del moto di una determinata particella, mentre, fissando t , si ha la legge di corrispondenza tra posizione al tempo t e posizione iniziale per tutte le particelle. Le traiettorie delle particelle costituiscono una famiglia di linee (in generale ∞^3) che si dicono *linee di corrente*.

La *velocità* v della particella (x_0, y_0, z_0) ha, naturalmente, per componenti le derivate delle (I, 1) fatte rispetto a t lasciando costanti x_0, y_0, z_0 :

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = \frac{\partial}{\partial t} x(x_0, y_0, z_0, t), \\ v_y = \dot{y} = \frac{\partial}{\partial t} y(x_0, y_0, z_0, t), \\ v_z = \dot{z} = \frac{\partial}{\partial t} z(x_0, y_0, z_0, t). \end{cases}$$

⁽¹⁾ Bisogna intendere per « *particella* » non una molecola ma una porzione del mezzo continuo abbastanza piccola per poterla considerare puntiforme (rispetto alle dimensioni del corpo ed alle altre lunghezze che intervengono nel problema) ma tuttavia contenente un immenso numero di molecole.

Esse risultano ancora, in generale, funzioni di t e di x_0, y_0, z_0 .

Similmente, l'accelerazione a della particella x_0, y_0, z_0 ha per componenti

$$a_x = \ddot{x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(x_0, y_0, z_0, t)$$

e altre due espressioni analoghe.

Il moto di un mezzo continuo si può studiare, oltre che seguendo una determinata particella [punto di vista « *sostanziale* » o « *lagrangiano* »], anche considerando quanto avviene in un determinato punto dello spazio dove passano successivamente diverse particelle [punto di vista « *locale* » od « *euleriano* »]. Corrispondentemente si hanno per qualsiasi grandezza fisica f relativa al mezzo [per es. temperatura, pressione, componente di velocità] due tipi di derivate rispetto al tempo, secondo che si considera la variazione di f per una determinata particella [e quindi tenendo costanti x_0, y_0, z_0] o per un determinato punto dello spazio [e quindi tenendo costanti x, y, z].

La prima [derivata « *sostanziale* »] si indica di solito con $\frac{df}{dt}$ ⁽¹⁾, la seconda [derivata « *locale* »] con $\frac{\partial f}{\partial t}$. Per trovare la relazione fra le due derivate, si noti che l'espressione

$$f(x_0, y_0, z_0, t)$$

della f [corrispondente al punto di vista sostanziale] si può pensare ottenuta dalla sua espressione

$$(I, 2) \quad f(x, y, z, t)$$

relativa al punto di vista locale sostituendovi per x, y, z le (I, 1); in altre parole, dal punto di vista sostanziale si può assumere per la f l'espressione (I, 2) considerando in essa x, y, z come funzioni di t date appunto dalle (I, 1). La derivata sostanziale di f rispetto a t si otterrà quindi con la nota formula per la derivata totale di una funzione composta, e sarà

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

ovvero, poichè $\frac{dx}{dt}$ ecc., non sono altro che le componenti della velocità,

$$(I, 3) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z.$$

⁽¹⁾ Si noti che si tratta pur sempre di una derivata parziale benchè indicata col d .

Ha particolare importanza il caso del « *moto stazionario* ». Si chiama così il moto di un mezzo quando, dal punto di vista locale, la velocità v è costante rispetto al tempo, vale a dire quando in un qualsiasi punto dello spazio la velocità del mezzo non varia di grandezza nè di direzione col tempo [pur essendo eventualmente diversa da un punto all'altro dello spazio]. Tale condizione è espressa evidentemente da

$$(I, 4) \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

[mentre le derivate sostanziali di v_x , v_y , v_z , ossia le accelerazioni, possono non essere nulle].

§ 3. Campi vettoriali e campi scalari.

Da quanto precede risulta che in ogni istante ed in ogni punto dello spazio occupato da un mezzo continuo è definito in grandezza e direzione un vettore v , velocità del mezzo. Abbiamo così un primo esempio di « *vettore funzione del posto* » o « *campo vettoriale* »: chiamasi così un vettore Φ [di qualsiasi natura] definito in grandezza e direzione in ciascun punto di una data regione dello spazio [eventualmente infinita] ⁽¹⁾. Le sue componenti cartesiane Φ_x , Φ_y , Φ_z risultano funzioni delle coordinate x , y , z [ed eventualmente di t] e le supporremo sempre finite, continue e ad un sol valore. Altri esempi di campi vettoriali sono i campi di forza [gravitazionale, elettrica, magnetica, etc.]. Il campo vettoriale può in particolare essere indipendente da t , come è il campo della velocità nel moto stazionario.

In modo analogo possiamo definire il concetto di *campo scalare* pensando per es., alla distribuzione della densità o della pressione all'interno di un fluido: chiameremo cioè « *campo scalare* » [o anche « *funzione del posto* »] una quantità scalare f definita univocamente in tutti i punti di una data regione dello spazio [eventualmente infinita]. Anche il campo scalare può essere, o no, funzione del tempo.

Si osservi che il concetto di campo scalare non si identifica con quella particolare funzione $f(x, y, z)$ che lo rappresenta rispetto ad un dato sistema di assi, ma bensì è un ente *intrinseco*, cioè indipendente dal sistema di riferimento [come è necessario se deve avere un significato fisico]. Se dunque passiamo dai primitivi assi (ortogonali) x , y , z ad altri assi ortogonali x' , y' ,

⁽¹⁾ Talvolta (e più propriamente) si usa la parola « campo » (vettoriale) per designare la regione entro cui è definito il vettore. Ed analogamente per il « campo scalare » di cui diciamo in seguito.

z' mediante la generica trasformazione ortogonale ⁽²⁾

$$(I, 5) \quad \begin{cases} x = a_{10} + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y = a_{20} + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z = a_{30} + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{cases}$$

e sostituiamo queste espressioni nella $f(x, y, z)$, otteniamo una funzione $F(x', y', z')$ la quale rappresenta lo stesso campo scalare [anche se è una funzione di forma diversa da $f(x, y, z)$]. Se poi avviene che per tutte le trasformazioni (I, 5), o per una certa classe di esse, è $F(x', y', z') = f(x', y', z')$, cioè il risultato della trasformazione è lo stesso che si otterrebbe scrivendo materialmente, nella funzione f , x' , y' , z' al posto di x , y , z , diremo che la f è *invariante* rispetto alla detta classe di trasformazioni. Per es., $f = x^2 + y^2 + z^2$ è invariante rispetto ai cambiamenti di assi che lasciano fissa l'origine; invece $f = x + y + z$ non è invariante rispetto a tali cambiamenti.

Anche per i campi vettoriali si ha, analogamente, che tre funzioni arbitrarie di x , y , z :

$$\Phi_x(x, y, z), \quad \Phi_y(x, y, z), \quad \Phi_z(x, y, z)$$

rappresentano solo una particolare espressione del campo vettoriale, il quale è un ente *intrinseco* che, rispetto ad altri assi x' , y' , z' , è rappresentato da tre altre funzioni $\Phi_{x'}$, $\Phi_{y'}$, $\Phi_{z'}$. Se il cambiamento di assi è quello definito dalle (I, 5), tra le espressioni dello stesso campo vettoriale rispetto ai due sistemi passano le relazioni analoghe

$$(I, 6) \quad \begin{cases} \Phi_x = a_{11}\Phi_{x'} + a_{12}\Phi_{y'} + a_{13}\Phi_{z'}, \\ \Phi_y = a_{21}\Phi_{x'} + a_{22}\Phi_{y'} + a_{23}\Phi_{z'}, \\ \Phi_z = a_{31}\Phi_{x'} + a_{32}\Phi_{y'} + a_{33}\Phi_{z'}. \end{cases}$$

⁽²⁾ Ricordiamo che, nella (I, 5), a_{10} , a_{20} , a_{30} rappresentano le tre coordinate della nuova origine, ed a_{11} , a_{12} , ecc., sono i coseni direttori dei nuovi assi dati dallo specchio:

	x'	y'	z'
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

e sono legati dalle relazioni

$$\sum_{s=1}^3 a_{sr}^2 = 1 \quad \sum_{s=1}^3 a_{rs}a_{ps} = 0 \quad (r, p = 1, 2, 3; r \neq p),$$

ovvero dalle altre, equivalenti,

$$\sum_{s=1}^3 a_{rs}^2 = 1 \quad \sum_{s=1}^3 a_{sr}a_{sp} = 0 \quad (r, p = 1, 2, 3; r \neq p).$$

Supporremo inoltre [come faremo sempre nel seguito] che le terne di assi siano *destrosc* [cioè che sia possibile disporre il pollice, l'indice e il medio della mano destra rispettivamente secondo le direzioni degli assi x , y , z]. In tal caso il determinante delle a_{rs} vale 1 ed, in esso, il complemento algebrico di a_{rs} vale a_{rs} .

[In esse non compaiono le a_{10} , a_{20} , a_{30} , come era da prevedersi pensando che se si spostano gli assi parallelamente a se stessi le componenti del vettore Φ non debbono cambiare]. Le inverse, delle (I, 6) sono [come si ricava tenendo presenti le proprietà della nota 2 di pag. 5.]

$$(I, 6') \quad \begin{cases} \Phi_x' = a_{11}\Phi_x + a_{21}\Phi_y + a_{31}\Phi_z, \\ \Phi_y' = a_{12}\Phi_x + a_{22}\Phi_y + a_{32}\Phi_z, \\ \Phi_z' = a_{13}\Phi_x + a_{23}\Phi_y + a_{33}\Phi_z. \end{cases}$$

§ 4. Gradiente.

Dato un campo scalare espresso [rispetto ad un certo sistema di assi] dalla funzione $f(x, y, z)$, il campo vettoriale che ha per componenti, rispetto a quegli assi ⁽¹⁾

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

si chiama « *gradiente* » del campo scalare f , e si indica con $\text{grad } f$. Qualora la f contenga, oltre alle variabili x, y, z [coordinate del punto generico P , in cui la f è definita] anche le coordinate di altri punti, può essere opportuno, per evitare equivoci, scrivere $\text{grad}_P f$, dove l'indice P sta ad indicare che si deve derivare la f rispetto alle coordinate del punto P , lasciando costanti le coordinate degli altri punti.

Sarebbe facile verificare che il vettore $\text{grad } f$, ora definito, è indipendente dal sistema di assi, di cui ci si è serviti per definirlo, cioè che, se si passa dagli assi x, y, z ad altri assi x', y', z' mediante le formule (I, 5), e si formano le derivate $\frac{\partial f}{\partial x'}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial z'}$, queste rappresentano le componenti, secondo gli assi x', y', z' , dello stesso vettore che ha secondo gli assi x, y, z le componenti $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, [ossia, che le derivate rispetto a x', y', z' sono legate a quelle rispetto a x, y, z dalle (I, 6')]. Ma vedremo fra breve una dimostrazione più diretta del carattere intrinseco del gradiente.

Una notevole proprietà del gradiente è che, se il punto P subisce uno spostamento infinitesimo arbitrario dP ⁽²⁾, la f subisce in corrispondenza un incremento dato [a meno di infinitesimi d'ordine superiore] da

$$(I, 7) \quad df = \text{grad } f \times dP :$$

⁽¹⁾ È sottinteso [come faremo sempre nel seguito] che tutte le funzioni di cui facciamo uso siano derivabili quante volte occorre.

⁽²⁾ Ricordiamo che se x, y, z sono le coordinate di un punto variabile P , si indica con dP il vettore infinitesimo di componenti dx, dy, dz , rappresentante uno spostamento infinitesimo del punto P .

infatti, si ha dal calcolo differenziale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

e questa espressione si identifica col secondo membro della (I, 7). Se poi si indica con \mathbf{n} il versore ⁽³⁾ di dP , e con dn il suo modulo [talchè sia $dP = \mathbf{n}dn$] la (I, 7) si potrà anche scrivere sotto la forma

$$(I, 8) \quad \frac{df}{dn} = \text{grad } f \times \mathbf{n}$$

o anche ⁽⁴⁾

$$(I, 8') \quad \frac{df}{dn} = (\text{grad } f)_{\mathbf{n}} .$$

In parole: la « *derivata direzionale* » ⁽⁵⁾ di una funzione del posto f in una direzione qualsiasi è uguale alla componente, in quella direzione, di $\text{grad } f$.

Di qui discende anzitutto che in ogni punto $\text{grad } f$ è perpendicolare alla superficie $f = \text{cost.}$ che passa per quel punto: difatti, per qualsiasi direzione \mathbf{n} tangente a quella superficie è $df/dn = 0$, quindi, per la (I, 8'), $\text{grad } f$ ha proiezione nulla su tutte queste direzioni, ossia è perpendicolare ad esse. Discende inoltre che la direzione di $\text{grad } f$ è quella nella quale la derivata direzionale ha il massimo valore e precisamente il valore $|\text{grad } f|$. Queste osservazioni si prestano a dare un'altra definizione del gradiente, equivalente alla prima, ma intrinseca, cioè priva di riferimento agli assi. È precisamente: *in ciascun punto, $\text{grad } f$ è il vettore che ha direzione perpendicolare alla superficie $f = \text{cost.}$ che passa per quel punto, è diretto dalla parte delle f crescenti, ed ha per modulo la derivata direzionale di f in quella direzione.*

Semplici proprietà del gradiente [ricavabili immediatamente dalla prima definizione] sono quelle espresse dalle seguenti formule, dove f, g, r

⁽³⁾ Ricordiamo che si chiama « *versore* » di un vettore Φ [e si indica talvolta con $\text{vers } \Phi$] un vettore unitario avente la stessa direzione di Φ : ossia

$$\text{vers } \Phi = \frac{\Phi}{|\Phi|} .$$

⁽⁴⁾ Indicheremo sistematicamente con $\Phi_{\mathbf{n}}$ la proiezione di un vettore Φ su una direzione \mathbf{n} .

⁽⁵⁾ Ricordiamo che, se P è un punto da cui esce una semiretta orientata \mathbf{n} , e su questa si prende un punto variabile Q a distanza δ da P , dicesi « *derivata direzionale* » di f nella direzione \mathbf{n} , e si indica con $\frac{df}{dn}$, lo scalare $\frac{df}{dn} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(Q) - f(P)}{\delta}$.

sono funzioni qualunque del posto ed F è una funzione qualunque di r :

$$\begin{aligned} \text{grad costante} &= 0, \\ \text{grad}(f + g) &= \text{grad } f + \text{grad } g, \\ \text{grad}(f \cdot g) &= f \cdot \text{grad } g + g \cdot \text{grad } f, \\ \text{grad } F(r) &= \frac{dF}{dr} \cdot \text{grad } r. \end{aligned}$$

Osserviamo infine [tornando al moto dei mezzi continui] che, introducendo il gradiente, possiamo dare alla (I, 3) la forma più concisa

$$(I, 9) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \times \text{grad } f.$$

§ 5. Flusso di un campo vettoriale.

Immaginiamo tracciata, nello spazio occupato da un fluido in movimento, una superficie σ fissa ed invariabile e su di essa fissiamo ad arbitrio un verso positivo per la normale \mathbf{n} . Si chiama « *flusso del fluido* » attraverso la superficie σ la massa di fluido che l'attraversa, per unità

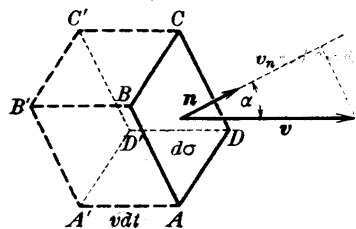


Fig. 1.

di tempo, entrando dalla faccia negativa, meno quella che, in pari tempo, l'attraversa in senso contrario. Il flusso è dunque uno scalare che può risultare positivo o negativo [o nullo], e che cambia di segno se si inverte il verso positivo della normale. Se la superficie σ è chiusa, si suol chiamare « *flusso uscente* » il flusso calcolato orientando la normale verso l'esterno, e « *flusso entrante* » quello

calcolato con la convenzione opposta, ossia il flusso uscente cambiato di segno.

Studieremo dapprima una superficie infinitesima $ABCD$ di area $d\sigma$ (v. fig. 1). Sia \mathbf{v} la velocità delle particelle nell'attraversare $d\sigma$: nel tempo dt ogni particella si sposta di $\mathbf{v}dt$ e quindi le particelle che attraversano $d\sigma$ in questo tempo sono tutte quelle contenute nel prisma $ABCDA'B'C'D'$ ottenuto riportando da tutti i punti di $d\sigma$, nella direzione opposta a \mathbf{v} , dei segmenti di lunghezza $\mathbf{v}dt$. Se α è l'angolo che la normale \mathbf{n} a $d\sigma$ forma con \mathbf{v} , il volume di tale prisma sarà

$$d\sigma \cdot \mathbf{v}dt \cdot \cos \alpha = v_n d\sigma dt$$

[dove v_n è la proiezione, $v \cos \alpha$, di \mathbf{v} sulla normale] e la massa con-

(.) Se la densità ρ è costante il flusso è quello...

tenuta in esso, e che attraversa $d\sigma$ nel tempo dt , sarà [se ρ è la densità del fluido]

$$\rho v_n d\sigma dt :$$

quindi per unità di tempo il flusso attraverso $d\sigma$ sarà

$$\rho v_n d\sigma$$

ed il suo segno sarà quello di v_n .

Il flusso attraverso una superficie finita qualunque è evidentemente dato dall'integrale [superficiale]

$$(I, 10) \quad \int_{\sigma} \rho v_n d\sigma.$$

Questo concetto idrodinamico di flusso ha suggerito una definizione analoga [che si è rivelata assai utile] per il caso di un campo vettoriale Φ qualsiasi. In tal caso, si definisce come « *flusso del vettore Φ* » attraverso una data superficie σ la quantità [scalare]

$$(I, 11) \quad \int_{\sigma} \Phi_n d\sigma.$$

Il « *flusso* » di un fluido è quindi il flusso del vettore $\rho\mathbf{v}$.

Aggiungiamo che si chiamano *linee di flusso* del campo vettoriale Φ le linee che in ogni punto sono tangenti a Φ . Esse costituiscono una famiglia di ∞^2 linee: per ogni punto, in generale, ne passa una ed una sola ⁽¹⁾.

§ 6. Trasformazione di alcuni integrali di volume in integrali di superficie e viceversa. (Lemma di Gauss e teorema della divergenza).

Ricordiamo, ora, le importantissime formule di calcolo integrale note col nome di *lemma di Gauss*. Se la funzione $f(x, y, z)$ è finita e continua, insieme alle sue derivate prime, in uno spazio S , si ha ⁽¹⁾:

$$(I, 12) \quad \int_S \frac{\partial f}{\partial x} dS = \int_{\sigma} f \alpha d\sigma, \quad \int_S \frac{\partial f}{\partial y} dS = \int_{\sigma} f \beta d\sigma, \quad \int_S \frac{\partial f}{\partial z} dS = \int_{\sigma} f \gamma d\sigma.$$

[In esse, come è noto, σ è la superficie che limita lo spazio finito S

⁽¹⁾ Si badi a non confondere le linee di corrente di un fluido (§ 2) con le linee di flusso del campo vettoriale Φ (o $\rho\mathbf{v}$): solo nel caso del moto stazionario (§ 2) le prime si riducono da ∞^3 ad ∞^2 e si identificano colle seconde.

⁽²⁾ Tutte le volte che applicheremo queste trasformazioni ed i teoremi che seguono, ammetteremo tacitamente che le funzioni a cui li applichiamo soddisfino le condizioni richieste.

ed α, β, γ sono i coseni direttori della normale orientata verso l'esterno ⁽²⁾ di S . Le (I, 12) permettono di trasformare certi integrali tripli in integrali doppi: tale possibilità si spiega intuitivamente osservando che sotto il segno di integrale triplo vi è un segno di derivazione che si elimina con una delle integrazioni.

Formule analoghe valgono anche in due dimensioni. Se σ è un'area piana di contorno s ed α, β sono i coseni direttori della normale esterna di s , nelle stesse ipotesi per f , si ha

$$(I, 13) \quad \int_{\sigma} \frac{\partial f}{\partial x} d\sigma = \int_s f \alpha ds, \quad \int_{\sigma} \frac{\partial f}{\partial y} d\sigma = \int_s f \beta ds.$$

Infine osserveremo che l'analogo del lemma di Gauss in una dimensione è l'ovvia formula

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a).$$

Dal lemma di Gauss dedurremo una formula di applicazione frequente nello studio dei campi vettoriali. Sia Φ un vettore funzione del posto e siano $\Phi_x(x, y, z), \Phi_y(x, y, z), \Phi_z(x, y, z)$ le sue componenti [continue, insieme alle loro derivate prime]: dalle (I, 12) si ha

$$(I, 14) \quad \int_S \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dS = \int_{\sigma} \Phi_x \alpha d\sigma, \quad \int_S \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} dS = \int_{\sigma} \Phi_y \beta d\sigma, \\ \int_S \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} dS = \int_{\sigma} \Phi_z \gamma d\sigma$$

e, sommando membro a membro, segue da esse

$$(I, 15) \quad \int_S \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) dS = \int_{\sigma} (\Phi_x \alpha + \Phi_y \beta + \Phi_z \gamma) d\sigma.$$

Questa relazione ha un'importanza maggiore delle (I, 14) perchè la quantità (scalare), che compare nel primo integrale,

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}$$

è invariante per trasformazioni di coordinate cartesiane ortogonali ⁽³⁾:

⁽²⁾ Avvertiamo, una volta per tutte, che quando si tratta di superfici (o linee piane) chiuse, ci atterremo sempre a questa convenzione.

⁽³⁾ Infatti con breve calcolo, tenendo presenti le (I, 5) e le (I, 6), si ha:

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial \Phi_{z'}}{\partial z'}$$

essa si chiama « divergenza del vettore Φ » e si indica con $\text{div } \Phi$ ⁽⁴⁾, cioè si pone

$$\text{div } \Phi = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}.$$

Anche la quantità che compare nel secondo integrale della (I, 15) è invariante essendo la proiezione $\Phi_n = \Phi \times \mathbf{n}$ del vettore Φ sulla direzione della normale \mathbf{n} . Potremo, così, scrivere la (I, 15) nella forma

$$(I, 15') \quad \int_S \text{div } \Phi dS = \int_{\sigma} \Phi_n d\sigma,$$

che ci dice: « l'integrale della divergenza di un vettore Φ , esteso ad uno spazio finito S , dà il flusso del vettore Φ uscente dalla superficie σ che limita S » [teorema della divergenza].

A complemento di quanto si è detto ricorderemo fra le proprietà notevoli, e di facile verifica, della divergenza che, se $f(x, y, z)$ è una funzione scalare, si ha

$$(I, 16) \quad \text{div}(f\Phi) = f \text{div } \Phi + \Phi \times \text{grad } f.$$

§ 7. Equazione di continuità.

La cinematica dei mezzi continui ci offre un primo esempio di applicazione delle formule del § precedente. Per mezzo di esse possiamo infatti tradurre in equazione la condizione della « conservazione della materia » che deve essere soddisfatta nel moto di ogni mezzo continuo, vale a dire la condizione che l'aumento, nell'unità di tempo, della massa contenuta in uno spazio dato deve essere uguale alla massa che nello stesso tempo entra in esso [valutata, col suo segno, col criterio del § 5].

A tal fine tracciamo idealmente nell'interno del mezzo una superficie chiusa qualunque σ [fissa nello spazio] racchiudente un volume S : la massa contenuta in essa sarà

$$\int_S \rho dS,$$

funzione in generale, del tempo [essendo tale ρ]. Il suo incremento nell'unità di tempo sarà

$$\int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} dS,$$

⁽⁴⁾ Se il vettore Φ dipende oltre che da x, y, z anche da altri parametri può essere opportuno scrivere $\text{div}_P \Phi$, dove l'indice P sta ad indicare che si devono derivare le componenti di Φ rispetto alle coordinate x, y, z del punto P , considerando costanti gli altri parametri.

mentre, se \mathbf{n} è, al solito, la normale esterna, per la (I, 10) la massa entrante, sempre nell'unità di tempo, sarà

$$-\int_{\sigma} \rho v_n d\sigma.$$

Uguagliando le due espressioni trovate si ottiene la relazione

$$(I, 17) \quad \int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} dS + \int_{\sigma} \rho v_n d\sigma = 0$$

[che deve valere per qualunque spazio S interno al fluido].

La (I, 17) esprime la condizione cercata; però, per sostituirla con una relazione differenziale, applichiamo al vettore $\rho \mathbf{v}$ il teorema della divergenza, (I, 15'). Avremo (¹)

$$(I, 18) \quad \int_{\sigma} \rho v_n d\sigma = \int_S \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dS$$

e la (I, 17) si potrà scrivere

$$\int_S \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dS = 0:$$

dovendo una tale relazione valere qualunque sia lo spazio S , ed essendo continua la funzione sotto il segno di integrale, dovrà essere in ogni punto (²):

$$(I, 19) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Questa è la condizione cercata: essa va sotto il nome di « equazione di continuità » [dal punto di vista euleriano].

Possiamo dare alla (I, 19) anche un'altra forma in cui invece della

(¹) Dalla (I, 18) ci si può render conto del nome « divergenza » pensando che, per un fluido di densità unitaria, $\operatorname{div} \mathbf{v} dS$ è il flusso uscente nell'unità di tempo dall'elemento di volume dS , e che quindi $\operatorname{div} \mathbf{v}$ rappresenta la quantità di fluido che esce (diverge) dall'unità di volume nell'unità di tempo.

(²) Si fa uso qui (e in altre successive occasioni) della seguente osservazione: se $f(x, y, z)$ è funzione continua in uno spazio S_0 , e $\int_S f dS = 0$ per qualunque parte S di S_0 , necessariamente

è $f = 0$ in tutto S_0 . Difatti, supponiamo che in un punto P di S_0 sia $f \neq 0$, p. es. $f > 0$; per l'ipotesi della continuità, vi sarà allora un intorno di P in tutti i punti del quale sarà $f > 0$, e assumendo come spazio S questo intorno, si avrà $\int_S f dS > 0$, contrariamente all'ipotesi. Similmente si dimostra che non vi può essere nessun punto in cui sia $f < 0$.

derivata locale $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ compare la derivata sostanziale $\frac{d\rho}{dt}$. Osserviamo infatti che, per la (I, 16), è

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{grad} \rho:$$

con essa, tenendo presente la (I, 9), la (I, 19) si può scrivere

$$(I, 19') \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Risulta pure di qui l'invarianza dello scalare $\operatorname{div} \mathbf{v}$ [§ 6, nota 3] essendo certo ρ e $\frac{d\rho}{dt}$, per il loro significato fisico, indipendenti dalla scelta degli assi coordinati.

§ 8. Fluidi incompressibili e campi solenoidali.

Se il fluido è incompressibile (e omogeneo) la sua densità, ρ , sarà costante e l'equazione di continuità [§ prec.] diventerà

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

cioè: in tal caso la velocità è un campo vettoriale a divergenza nulla.

Questi « campi vettoriali a divergenza nulla » hanno una notevole importanza in fisica matematica e si dicono « campi solenoidali » [dal greco *σολήν* = tubo].

Il nome deriva da questa notevole proprietà. Consideriamo le linee di flusso [§ 5] uscenti dai punti di una linea chiusa: esse formano una superficie tubolare, detta « tubo di flusso ». Consideriamone due qualunque sezioni trasversali, con le normali orientate in verso corrispondente: se il campo è solenoidale, il flusso

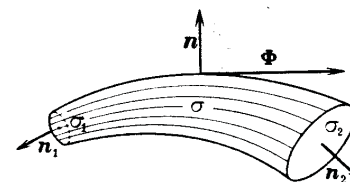


Fig. 2.

attraverso le due sezioni è lo stesso. In altre parole, il flusso di un vettore solenoidale è costante in tutte le sezioni di un tubo di flusso.

Infatti se σ è la porzione di superficie tubolare compresa fra due generiche sezioni trasversali σ_1 e σ_2 (v. fig. 2) ed \mathbf{n} , \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 sono i versori delle normali esterne rispettivamente a σ , σ_1 , σ_2 , applicando allo spazio S compreso fra σ , σ_1 e σ_2 la (I, 15') segue, nella nostra ipotesi di $\operatorname{div} \Phi = 0$,

$$\int_{\sigma_1} \Phi_{n_1} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} \Phi_{n_2} d\sigma_2 + \int_{\sigma} \Phi_n d\sigma = 0.$$

Ma essendo il vettore Φ tangente a σ e quindi ortogonale ad n il terzo integrale sarà nullo e ne seguirà

$$-\int_{\sigma_1} \Phi_{n_1} d\sigma_1 = \int_{\sigma_2} \Phi_{n_2} d\sigma_2,$$

cioè: il flusso entrante in S attraverso σ_1 è eguale al flusso uscente da S attraverso σ_2 , come volevamo dimostrare. Tale flusso, costante per ogni sezione, si dice «*flusso del tubo*».

§ 9. Operatore di Laplace. Lemma di Green.

Consideriamo ora la *divergenza del gradiente* di una funzione del posto f : sarà

$$\text{div grad } f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Il nuovo campo scalare così derivato dal campo scalare f si indica con Δf [talvolta con $\Delta_2 f$], si pone cioè

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \text{— div grad } f$$

ed il simbolo Δ [che equivale a div grad] si chiama «*operatore di Laplace*» ⁽¹⁾. Dalla sua definizione come $\text{div grad } f$ segue che Δf è *invariante* per trasformazioni di coordinate cartesiane ortogonali.

È utile talvolta l'integrale di volume

$$\int_S \Delta f dS$$

[dove S è lo spazio interno ad una superficie chiusa σ]: esso si trasforma immediatamente in integrale superficiale col teorema della divergenza, (I, 15'). Anzi, ricorrendo ad una proprietà del gradiente, (I, 8'), si ha

$$(I, 20) \quad \int_S \Delta f dS = \int_S \text{div grad } f dS = \int_{\sigma} (\text{grad } f)_n d\sigma = \int_{\sigma} \frac{df}{dn} d\sigma.$$

La (I, 20) è un caso particolare di una notevolissima relazione che

⁽¹⁾ Ricordiamo che si chiama, in generale, «*operatore*» ogni simbolo che, anteposto a un simbolo di scalare o di vettore, lo trasforma nel simbolo di un altro scalare o vettore. Così p. es. il simbolo $\frac{\partial}{\partial x}$ è un operatore che trasforma uno scalare in un altro scalare, e tale è anche l'operatore Δ . Invece il simbolo grad è un operatore che trasforma uno scalare in un vettore, il simbolo div è un operatore che trasforma un vettore in uno scalare, e il simbolo rot [che incontreremo a § 13] è un operatore che trasforma un vettore in un altro vettore.

va sotto il nome di «*lemma di Green*». Per stabilirla consideriamo due funzioni del posto f e g regolari all'interno dello spazio S interno ad una superficie chiusa σ : applicando il teorema della divergenza, (I, 15'), al vettore $\Phi = f \text{ grad } g$, poi al vettore $\Psi = g \text{ grad } f$, e ricordando la (I, 16) e la (I, 8'), avremo

$$\int_S \text{div } \Phi dS = \int_S (f \Delta g + \text{grad } g \times \text{grad } f) dS = \int_{\sigma} f \frac{dg}{dn} d\sigma,$$

$$\int_S \text{div } \Psi dS = \int_S (g \Delta f + \text{grad } f \times \text{grad } g) dS = \int_{\sigma} g \frac{df}{dn} d\sigma.$$

Sottraendo poi membro a membro si ha

$$(I, 21) \quad \int_S (f \Delta g - g \Delta f) dS = \int_{\sigma} \left(f \frac{dg}{dn} - g \frac{df}{dn} \right) d\sigma,$$

che è l'espressione del lemma di Green.

Se in essa si pone $g = \text{cost.}$ si ha la (I, 20).

Anche nel piano si definisce un operatore di Laplace Δ , e precisamente

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Per esso, servendosi delle (I, 13), si potrebbero dimostrare le relazioni, analoghe alle (I, 20) e (I, 21),

$$(I, 20_1) \quad \int_{\sigma} \Delta f d\sigma = \int_s \frac{df}{dn} ds,$$

$$(I, 21_1) \quad \int_{\sigma} (f \Delta g - g \Delta f) d\sigma = \int_s \left(f \frac{dg}{dn} - g \frac{df}{dn} \right) ds,$$

in cui σ è l'area interna alla linea chiusa s ed n la normale esterna di s .

§ 10. Sistemi di coordinate curvilinee ortogonali.

Possiamo definire un *sistema di coordinate [curvilinee]* q_1, q_2, q_3 prendendo tre funzioni ad un sol valore di x, y, z ,

$$(I, 22) \quad q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z)$$

invertibili, e considerando come coordinate del punto $P(x, y, z)$ i valori che in esso assumono q_1, q_2, q_3 . Un esempio immediato l'abbiamo nelle coordinate polari: si può prendere, p. es.,

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi.$$

Le tre famiglie di linee che si ottengono facendo variare una sola delle coordinate q_1, q_2, q_3 e tenendo costanti le altre costituiscono le *linee coordinate*. [Per es. nelle coordinate polari (v. fig. 3) esse sono le rette uscenti dal polo O (su esse varia solo r), i cerchi disposti in piani passanti per l'asse polare ed aventi il centro nel polo (su essi varia solo θ), i cerchi disposti in piani normali all'asse polare ed aventi il

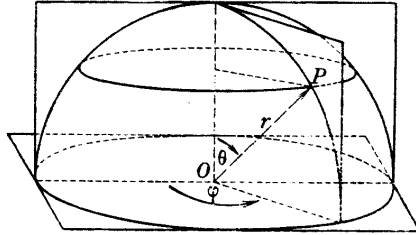


FIG. 3.

centro su esso (su essi varia solo φ). Per ogni punto dello spazio passa una ed una sola linea coordinata di ogni famiglia [salvo eventualmente qualche punto eccezionale, come il polo delle coordinate polari]: noi le diremo linea q_1 , linea q_2 , linea q_3 se su esse varia solo q_1 , oppure q_2 , oppure q_3 , e ci occuperemo solo di

quei sistemi di linee che da ogni punto escono ortogonalmente fra loro (sistemi di coordinate curvilinee *ortogonali*) [come sono, per es., le coordinate polari].

Dato il punto $P(q_1, q_2, q_3)$ se variamo, per es., la coordinata q_i di dq_i , il punto P si sposterà lungo la linea q_i di una lunghezza ds_i , proporzionale (ma, in genere, non eguale) a dq_i . [Nelle coordinate polari, per es., variando q_1 , cioè r , di dr si ha $ds_1 = dr$, ma variando q_2 , cioè θ , di $d\theta$ oppure q_3 , cioè φ , di $d\varphi$ il punto $P(r, \theta, \varphi)$ si sposta non di $d\theta$ oppure di $d\varphi$ ma di $ds_2 = r d\theta$ oppure di $ds_3 = r \sin \theta d\varphi$].

Potremo allora in generale scrivere

$$(I, 23) \quad \begin{cases} ds_1 = H_1(q_1, q_2, q_3) dq_1, & ds_2 = H_2(q_1, q_2, q_3) dq_2, \\ ds_3 = H_3(q_1, q_2, q_3) dq_3. \end{cases}$$

dove le H_i dipendono dal sistema di coordinate scelto. [Per le coordinate cartesiane si ha

$$(I, 23_1) \quad H_1 = H_2 = H_3 = 1,$$

per le polari invece si ha

$$(I, 23_2) \quad H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta].$$

Note le H_i ci sarà facile scrivere anche l'espressione dell'*elemento d'arco*, ds , nel sistema di coordinate prescelto, pensando di variare le tre coordinate q_1, q_2, q_3 rispettivamente di dq_1, dq_2, dq_3 , e poi considerando l'elemento d'arco, $PQ = ds$ (v. fig. 4), descritto dal punto P ,

come diagonale del parallelepipedo infinitesimo di spigoli ds_1, ds_2, ds_3 . Avremo così

$$(I, 24) \quad ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

[Nei casi particolari di coordinate cartesiane o polari abbiano rispettivamente

$$(I, 24_1) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$(I, 24_2) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2].$$

Il volume del parallelepipedo infinitesimo di spigoli ds_1, ds_2, ds_3 sarà l'*elemento di volume*, dS , nel sistema di coordinate q_1, q_2, q_3 e sarà dato, sempre per l'ortogonalità del sistema, da

$$(I, 25) \quad \begin{aligned} dS &= ds_1 ds_2 ds_3 = \\ &= H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned}$$

[Per le coordinate cartesiane e per le coordinate polari si avrà rispettivamente

$$(I, 25_1) \quad dS = dx dy dz,$$

$$(I, 25_2) \quad dS = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi].$$

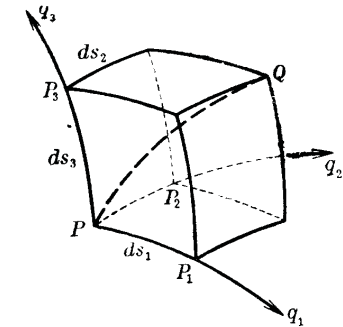


Fig. 4.

Analogamente a quanto si è fatto per lo spazio potremmo definire

sistemi di coordinate curvilinee ortogonali q_1, q_2 nel piano [esempio immediato ne sono le coordinate polari $q_1 = r, q_2 = \theta$] e giungeremo, per l'elemento d'arco ds e l'elemento di superficie $d\sigma$, ai risultati

$$(I, 26) \quad ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2,$$

$$(I, 26') \quad d\sigma = H_1 H_2 dq_1 dq_2.$$

[Per le coordinate polari piane ($H_1 = 1, H_2 = r$) si avrebbe

$$(I, 26_1) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

$$(I, 26'_1) \quad d\sigma = r dr d\theta].$$

§ 11. Componenti del gradiente ed espressione della divergenza in coordinate curvilinee ortogonali.

Dato un sistema di coordinate curvilinee ortogonali q_1, q_2, q_3 , da quanto si è visto nel § prec. si hanno subito le espressioni delle componenti secondo le linee coordinate del gradiente di un campo scalare.

Ricordando, infatti, che per componenti Φ_1, Φ_2, Φ_3 di un vettore Φ [applicato ad un punto P] secondo le linee coordinate si intendono le componenti di Φ secondo le tangenti in P alle tre linee coordinate uscenti da P , per la (I, 8') e le (I, 23) avremo

$$(I, 27) \quad (\text{grad } f)_{q_i} = \frac{df}{ds_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Ad esempio in coordinate polari si ha

$$(I, 27_1) \quad (\text{grad } f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\text{grad } f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (\text{grad } f)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Non è poi difficile ricavare l'espressione in coordinate curvilinee ortogonali della divergenza di un vettore dato $\Phi(q_1, q_2, q_3)$. Serviamoci

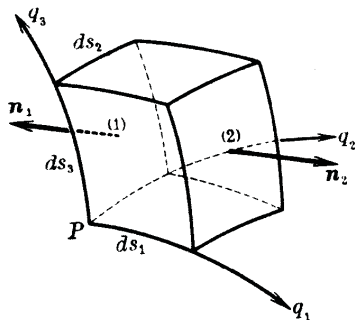


Fig. 5.

per questo del teorema della divergenza, (I, 15'), ed applichiamo all'elemento di volume dS . Otterremo

$$(I, 28) \quad \text{div } \Phi dS = \int_{\sigma} \Phi_n d\sigma$$

[dove σ è la superficie che racchiude dS] e considerando come dS il parallelepipedo infinitesimo formato coi tre elementi ds_i di linee coordinate avremo

$$(I, 28') \quad \text{div } \Phi dS = \sum_1^6 \Phi_n \sigma_i,$$

dove le n_i sono le sei normali alle sei facce σ_i del parallelepipedo di cui sopra. Calcoliamo la somma a secondo membro cominciando dalle due facce opposte, normali alla linea q_1 , che denoteremo cogli indici

$i = 1, 2$ (v. fig. 5). Le loro normali n_1 ed n_2 sono parallele alla direzione della linea q_1 ma n_1 è diretta nel verso negativo di essa. Avremo quindi, indicando con Φ_1, Φ_2, Φ_3 le componenti di Φ secondo le linee coordinate,

$$\Phi_{n_1} = -\Phi_1,$$

ed, essendo (v. fig. 5) $\sigma_1 = ds_2 ds_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3$, il contributo portato al sommatorio della (I, 28') dalla faccia (1) sarà

$$(I, 29) \quad \Phi_{n_1} \sigma_1 = -H_2 H_3 \Phi_1 dq_2 dq_3.$$

Quanto alla faccia (2) potremo procedere analogamente, ma notando che n_2 ha direzione e verso della linea q_1 e quindi non vi sarà il segno —: notiamo inoltre che si passa dalla faccia (1) alla (2) incrementando la q_1 di dq_1 . Il contributo della faccia (2) sarà dunque espresso da una formula ricavabile da (I, 29) cambiando il segno e incrementando q_1 (che figura in H_2, H_3, Φ_1) di dq_1 , ossia sarà

$$\Phi_{n_2} \sigma_2 = \left[H_2 H_3 \Phi_1 + \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 \Phi_1) dq_1 \right] dq_2 dq_3.$$

Il contributo complessivo portato dalle due facce (1) e (2) sarà quindi

$$\Phi_{n_1} \sigma_1 + \Phi_{n_2} \sigma_2 = \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 \Phi_1) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Ripetendo il ragionamento per le altre facce a due a due opposte otterremo

$$\Phi_{n_3} \sigma_3 + \Phi_{n_4} \sigma_4 = \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 \Phi_2) dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$\Phi_{n_5} \sigma_5 + \Phi_{n_6} \sigma_6 = \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 \Phi_3) dq_1 dq_2 dq_3,$$

e la (I, 28') si potrà scrivere

$$\text{div } \Phi dS = \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 \Phi_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 \Phi_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 \Phi_3) \right] dq_1 dq_2 dq_3.$$

Basta ora dividere ambo i membri per dS e ricordare la (I, 25) per ottenere

$$(I, 30) \quad \text{div } \Phi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 \Phi_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 \Phi_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 \Phi_3) \right].$$

Come si vede, per esprimere la divergenza di un vettore è necessario conoscere le funzioni H_1, H_2, H_3 che caratterizzano il sistema di coordinate usato. Si ritrova subito per le coordinate cartesiane, ($H_i = 1$), la nota espressione, e per le coordinate polari, notando che $\sin \theta$ è

indipendente da r e da φ , si ottiene

$$(I, 30_1) \quad \operatorname{div} \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Phi_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \Phi_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi_\varphi}{\partial \varphi}.$$

§ 12. Espressione dell'operatore Δ in coordinate curvilinee ortogonali.

Per avere l'espressione di

$$\Delta f(q_1, q_2, q_3)$$

basta ricorrere alle (I, 27) e (I, 30) del § prec. ricordando che è per definizione (§ 9)

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Si ha quindi

$$(I, 31) \quad \Delta f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right].$$

E così per le coordinate cartesiane ortogonali ($H_i = 1$) si ritrova la nota espressione [v. pag. 14], e per le coordinate polari si ottiene

$$(I, 31_1) \quad \Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

che si può anche scrivere (come è facile verificare), mettendo in altra forma il primo termine,

$$(I, 31_2) \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \dots$$

La ricerca dell'espressione di Δf nel caso di coordinate curvilinee ortogonali nel piano non presenterebbe difficoltà maggiori di quelle incontrate per il caso dello spazio. Un procedimento analogo basato sulle (I, 13), invece che sulle (I, 12), e relativo ad un elemento d'area piana $d\sigma$ porterebbe all'espressione

$$(I, 32) \quad \Delta f = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) \right]$$

ed, in particolare, per le coordinate polari r, θ , ($H_1 = 1$, $H_2 = r$), si avrebbe

$$(I, 32_1) \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

§ 13. Rotore di un vettore. Teorema di Stokes.

Si chiama «rotore», o «rotazione», di un vettore Φ (funzione del posto), e si indica con $\operatorname{rot} \Phi$, il vettore le cui componenti cartesiane sono

$$(I, 33) \quad \begin{aligned} (\operatorname{rot} \Phi)_x &= \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z}, & (\operatorname{rot} \Phi)_y &= \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}, \\ (\operatorname{rot} \Phi)_z &= \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Il vettore così definito è [come si potrebbe verificare, e come si dimostrerà in seguito] indipendente dal sistema di assi scelto per definirlo.

Queste formule si possono ricordare pensandole ottenute, formalmente, estraendo i minori dalla matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix}.$$

Proprietà formali di facile verifica sono, se f è una funzione del posto e Φ, Ψ vettori funzioni del posto,

$$(I, 34) \quad \operatorname{rot} (f\Phi) = f \operatorname{rot} \Phi + \operatorname{grad} f \wedge \Phi,$$

$$(I, 35) \quad \operatorname{div} (\Phi \wedge \Psi) = \operatorname{rot} \Phi \times \Psi - \Phi \times \operatorname{rot} \Psi.$$

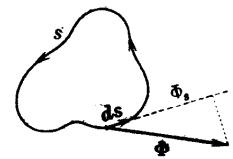


Fig. 6.

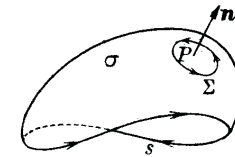


Fig. 7.

Fra le proprietà del rotore la più notevole è data dal teorema di Stokes. Per poterlo enunciare ricordiamo che, data una linea chiusa s , su cui sia fissato un verso positivo (fig. 6), si definisce come «circuizione» di un vettore Φ lungo s l'espressione

$$(I, 36) \quad \int_s \Phi_s ds,$$

dove Φ_s indica la proiezione del vettore Φ sulla tangente ad s [cioè, introducendo il vettore infinitesimo ds di modulo ds ed orientato come

la s , $\Phi_s ds = \Phi \times ds$ e l'integrale va esteso a tutta la linea s . Si ha allora [teorema di Stokes] che: se σ è una superficie qualsiasi che ha per contorno s , se il verso della normale n a σ è legato al verso positivo di s dalla « regola del cavatappi »⁽¹⁾ (fig. 7) e se Φ è un vettore regolare su σ ed s , il flusso del vettore $\text{rot } \Phi$ attraverso σ è uguale alla circuitazione del vettore Φ lungo s , cioè

$$(I, 37) \quad \int_s \Phi_s ds = \int_\sigma (\text{rot } \Phi)_n d\sigma,$$

che possiamo anche scrivere

$$(I, 37') \quad \int_s \Phi \times ds = \int_\sigma (\text{rot } \Phi) \times n d\sigma.$$

Per la dimostrazione, rinviamo ai trattati di calcolo integrale. Qui vogliamo invece osservare che segue subito dal teorema di Stokes l'invarianza del vettore $\text{rot } \Phi$. Infatti applicando il teorema ad un'area infinitesima arbitraria $d\sigma$, di contorno Σ , si avrà

$$\int_\Sigma \Phi \times d\Sigma = (\text{rot } \Phi)_n d\sigma$$

ed essendo il primo membro di tale eguaglianza indipendente dalla scelta degli assi coordinati sarà pure tale $(\text{rot } \Phi)_n$. Dall'arbitrarietà di $d\sigma$, e quindi della direzione n , segue l'invarianza di $\text{rot } \Phi$ ⁽²⁾.

Un'altra notevole proprietà del rotore è che: se f è un campo scalare qualunque, si ha

$$(I, 38) \quad \text{rot grad } f = 0.$$

[Lo si verifica subito ricordando le espressioni delle componenti del rotore e del gradiente]. Vale a dire: il rotore di un gradiente è sempre nullo.

⁽¹⁾ Possiamo precisare tale regola così. Consideriamo un'area infinitesima $d\sigma$ attorno al punto generico P di σ (fig. 7) ed assumiamo sul contorno Σ di $d\sigma$ come verso positivo quello che su esso segneremmo come verso positivo quando per deformazione continua attorno a P , senza mai uscire da σ , Σ venisse portato a coincidere col contorno s . In tal caso la normale n in P va orientata in modo che rispetto ad essa il verso positivo di Σ appaia destro. La faccia da cui esce la normale così orientata sarà chiamata « faccia positiva » della superficie σ .

⁽²⁾ Con un ragionamento del tutto analogo a quello svolto a § 11 per $\text{div } \Phi$, applicando il teorema di Stokes alle facce del parallelepipedo infinitesimo formato coi tre elementi ds_i delle linee coordinate [v. § 10 e fig. 4], si troverebbero facilmente le componenti di $\text{rot } \Phi$ secondo le linee coordinate: esse sono date da

$$(\text{rot } \Phi)_1 = \frac{1}{H_3 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 \Phi_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 \Phi_2) \right] \text{ ecc.}$$

Vale anche il teorema inverso del precedente e cioè: se Φ è un campo vettoriale tale che

$$(I, 38') \quad \text{rot } \Phi = 0$$

esiste un campo scalare U [definito a meno di una costante additiva] di cui Φ è il gradiente. Anzi si può aggiungere che se lo spazio in cui vale la (I, 38') è semplicemente connesso ⁽³⁾ la funzione U è monodroma (cioè ha in ogni punto un sol valore). Una dimostrazione immediata, da cui però non risulta la monodromia della funzione accennata, è la seguente. La (I, 38'), per le (I, 33), equivale a

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_y}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} = 0$$

e quindi, per un noto teorema, l'espressione differenziale

$$\Phi_x dx + \Phi_y dy + \Phi_z dz$$

è il differenziale esatto di una funzione, che indicheremo con $U(x, y, z)$.

Ne segue

$$\Phi_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \Phi_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \Phi_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

cioè

$$\Phi = \text{grad } U, \quad \text{c. d. d.}$$

Possiamo giungere al risultato enunciato anche attraverso il teorema di Stokes che, nell'ipotesi (I, 38'), si riduce a

$$(I, 39) \quad \int_s \Phi \times ds = 0.$$

Consideriamo infatti un punto P_0 comunque fissato nello spazio S in cui è definito il vettore Φ , ed un punto P variabile in quello spazio, e studiamo la quantità

$$(I, 40) \quad \int_{P_0}^P \Phi \times ds$$

⁽³⁾ Ricordiamo che una regione dello spazio si dice *semplicemente connessa* quando ogni linea chiusa in essa contenuta si può, per deformazione continua e senza mai uscire dalla regione, ridurre ad un punto. [Lo spazio interno, o lo spazio esterno, ad una sfera o ad un parallelepipedo costituiscono delle regioni semplicemente connesse]. Quando esiste qualche linea chiusa non riducibile, come sopra, ad un punto, allora la regione si dice *molteplamente connessa*. Lo spazio esterno o lo spazio interno ad un toro (avendo riguardo ad una linea che circonda una sezione meridiana, nel primo caso, e, ad es., alla linea luogo dei centri delle sezioni meridiane nel secondo) oppure lo spazio esterno ad un cilindro indefinito [si pensi ad una linea che circondi una sezione normale] offrono esempi di regioni molteplamente connesse.

dove l'integrazione si suppone eseguita passando da P_0 a P lungo una linea s fissata. Se noi supponiamo lo spazio S semplicemente connesso l'integrale (I, 40) non dipende dalla linea s seguita ma solo dalla posizione del punto P . Infatti, considerando un'altra linea s_1 arbitraria ma avente ancora P_0 e P come estremi [su essa stabiliremo ancora come verso positivo quello da P_0 a P] (fig. 8) ed applicando il teorema di Stokes al cammino chiuso formato dalle linee s ed s_1 , tenendo conto dei versi di circolazione, avremo

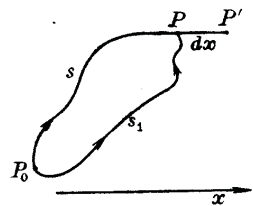


Fig. 8.

$$\int_{P_0}^P \Phi \times ds - \int_{P_0}^P \Phi \times ds_1 = 0,$$

cioè

$$(I, 40') \quad \int_{P_0}^P \Phi \times ds = \int_{P_0}^P \Phi \times ds_1.$$

L'integrale (I, 40) rappresenta dunque una funzione monodroma del punto P , che indicheremo con $U(P)$. Dimostriamo ora che il vettore Φ è il gradiente di tale funzione e cioè che

$$\Phi = \text{grad } U.$$

Supponiamo per questo (v. fig. 8) di dare al punto $P(x, y, z)$ uno spostamento infinitesimo parallelo all'asse x . Se $P'(x + dx, y, z)$ è la nuova posizione di P sarà

$$U(P') = U(P) + \frac{\partial U}{\partial x} dx,$$

ma per definizione è

$$U(P') = \int_{P_0}^{P'} \Phi \times ds,$$

e scegliendo il cammino di integrazione in modo che passi per P , si può scrivere

$$U(P') = \int_{P_0}^P \Phi \times ds + \int_P^{P'} \Phi \times ds = U(P) + \Phi_x dx.$$

Dal confronto di queste due espressioni di $U(P')$ segue

$$\Phi_x = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

In modo analogo si potrebbe dimostrare che

$$\Phi_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \Phi_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Questa dimostrazione ha il pregio di potere essere estesa ad uno spazio molteplicemente connesso, però in tal caso la U non risulta, in generale, monodroma: in un punto P essa è suscettibile di più valori ed assume l'uno o l'altro secondo il cammino che si segue [a partire dal punto fisso P_0] per raggiungere P (*).

Un'ultima importante proprietà del rotore è che la sua divergenza è nulla e cioè

$$(I, 41) \quad \text{div rot } \Phi = 0$$

qualunque sia Φ . La si verifica subito ricordando le (I, 33) e la definizione di divergenza. Si potrebbe far vedere che il teorema è invertibile e cioè che se Ψ è un vettore tale che sia $\text{div } \Psi = 0$ esiste un vettore Φ di cui esso è il rotore. In altre parole, ogni campo solenoidale è il rotore di un campo vettoriale.

§ 14. Studio del moto di un mezzo continuo nell'intorno di un punto.

Consideriamo un punto P di un mezzo continuo in moto e limitiamoci a studiare un suo intorno piccolo del prim'ordine: vogliamo dimostrare che il movimento di questo intorno si può considerare in ciascun istante come la sovrapposizione di un moto rigido e di tre movimenti di dilatazione.

Per vederlo assumiamo tre assi cartesiani ortogonali ξ, η, ζ aventi l'origine in P e paralleli rispettivamente agli assi coordinati x, y, z (fig. 9). Un punto qualsiasi Q dell'intorno di P avrà, rispetto a P , coordinate [piccole del prim'ordine] ξ, η, ζ , e la velocità u del punto Q avrà come componenti le componenti della velocità v del punto P aumentate dell'incremento relativo al passaggio da P a Q e cioè agli incrementi ξ, η, ζ delle coordinate x, y, z . Essendo questi incrementi piccoli del prim'ordine potremo trascurarne

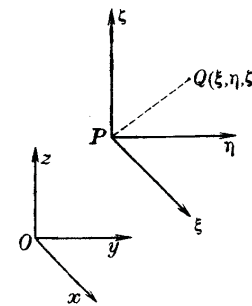


Fig. 9.

(*) Ad esempio, nel caso di una regione piana con una lacuna $U(P)$ assume valori diversi a seconda che si passa da P_0 a P lasciando la lacuna a sinistra od a destra o se si compiono attorno ad essa uno o più giri.

le potenze superiori alla prima ed avremo

$$(I, 42) \quad \begin{cases} u_x = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_x}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_x}{\partial z} \zeta, \\ u_y = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_y}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_y}{\partial z} \zeta, \\ u_z = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_z}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \zeta. \end{cases}$$

Le nove derivate parziali che vi compaiono si intendono calcolate nel punto P e noi le esprimeremo colle nove quantità

$$\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{33}, \Gamma_{23}, \Gamma_{31}, \Gamma_{12}, p, q, r,$$

legate ad esse dalle relazioni

$$(I, 43) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} = \Gamma_{11}, & \frac{\partial v_y}{\partial y} = \Gamma_{22}, & \frac{\partial v_z}{\partial z} = \Gamma_{33}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \Gamma_{23}, & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \Gamma_{31}, & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \Gamma_{12}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = p, & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = q, & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = r. \end{cases}$$

[Le espressioni della seconda riga, essendo simmetriche in x, y, z , si indicano indifferentemente con Γ_{23} o Γ_{31} , Γ_{31} o Γ_{13} , Γ_{12} o Γ_{21}]. Avremo così

$$u_x = v_x + \Gamma_{11} \xi + (\Gamma_{12} - r) \eta + (q + \Gamma_{31}) \zeta,$$

ed analoghe per u_y, u_z , quindi sarà

$$(I, 44) \quad \begin{cases} u_x = (v_x + q\zeta - r\eta) + (\Gamma_{11}\xi + \Gamma_{12}\eta + \Gamma_{31}\zeta), \\ u_y = (v_y + r\zeta - p\eta) + (\Gamma_{12}\xi + \Gamma_{22}\eta + \Gamma_{23}\zeta), \\ u_z = (v_z + p\eta - q\zeta) + (\Gamma_{31}\xi + \Gamma_{23}\eta + \Gamma_{33}\zeta). \end{cases}$$

Il primo gruppo di termini a secondo membro ci dà le componenti della velocità di un moto rigido avente $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ come velocità di traslazione ed $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ come velocità angolare [vettoriale] della rotazione. [Appare così anche il significato di p, q, r dati dalle (I, 43): anzi, possiamo più concisamente scrivere, per le (I, 33),

$$(I, 45) \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}.$$

Quindi dalle (I, 44) appare che, rispetto alla terna ξ, η, ζ , ogni punto Q dell'intorno di P è animato da un moto di rotazione rigida di velocità

angolare $\boldsymbol{\omega}$, a cui si sovrappone un altro moto la cui velocità \mathbf{V} ha per componenti:

$$(I, 46) \quad \begin{cases} V_\xi = \Gamma_{11}\xi + \Gamma_{12}\eta + \Gamma_{13}\zeta, \\ V_\eta = \Gamma_{21}\xi + \Gamma_{22}\eta + \Gamma_{23}\zeta, \\ V_\zeta = \Gamma_{31}\xi + \Gamma_{32}\eta + \Gamma_{33}\zeta. \end{cases}$$

Ora, come è noto dall'Analisi e come vedremo dettagliatamente in seguito [§ 16], per la simmetria del determinante delle Γ_{ik} , esiste una terna di assi ξ^0, η^0, ζ^0 , coll'origine ancora in P , tale che se si assumono questi come nuovi assi coordinati le (I, 4) si riducono alla forma

$$(I, 47) \quad V_{\xi^0} = \Gamma_{11}^0 \xi^0, \quad V_{\eta^0} = \Gamma_{22}^0 \eta^0, \quad V_{\zeta^0} = \Gamma_{33}^0 \zeta^0.$$

indicando con $\Gamma_{11}^0, \Gamma_{22}^0, \Gamma_{33}^0$ i nuovi coefficienti.

È allora immediata l'interpretazione cercata. Dalla prima delle (I, 47) si rileva che ogni punto Q dell'intorno di P si sposta parallelamente all'asse ξ^0 con velocità proporzionale a ξ^0 [cioè come se il fluido attorno a P si dilatasse nella direzione dell'asse ξ^0]: a questo movimento si sovrappongono, per le rimanenti (I, 47), altri due movimenti analoghi e paralleli agli assi η^0 e ζ^0 . Abbiamo così che il movimento del punto Q rispetto agli assi x, y, z risulta dovuto, oltre che ad un moto rigido [composto della traslazione \mathbf{v} e della rotazione $\boldsymbol{\omega}$], a tre moti di dilatazione secondo tre direzioni ortogonali fra loro.

§ 15. Tensori.

Le formule che abbiamo incontrato nel § prec., considerate sotto l'aspetto puramente analitico [indipendentemente, cioè, dal loro significato fisico] ci offrono l'occasione di definire un concetto matematico di fondamentale importanza: quello di « *tensor* » [e, in particolare, quello di « *tensor* simmetrico »]. Perciò dedichiamo questo § ed il seguente allo sviluppo di tale concetto, rimandando al § 17 il seguito delle considerazioni fisiche sul moto dei mezzi continui.

Le formule (I, 46) stabiliscono una particolare relazione fra i due vettori $\mathbf{r} = (\xi, \eta, \zeta)$ e $\mathbf{V} = (V_\xi, V_\eta, V_\zeta)$, consistente nel fatto che le componenti di \mathbf{V} sono funzioni lineari ed omogenee delle componenti di \mathbf{r} . Questo tipo di relazione fra due vettori si chiama *omografia vettoriale* e vogliamo ora studiarne alcune proprietà.

Consideriamo perciò un vettore Φ [che pensiamo, per ora, uscente da un determinato punto, ma variabile comunque in grandezza e direzione] e supponiamo che ad esso sia legato un altro vettore Ψ [uscendo dallo stesso punto] con questa legge: che, in un dato sistema di rife-

mento, le componenti di Ψ sono date, in funzione di quelle di Φ , dalle relazioni lineari ed omogenee (1)

$$(I, 48) \quad \Psi_i = \sum_k p_{ik} \Phi_k, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Osserviamo anzitutto che, se ci riferiamo ad un nuovo sistema di assi, le nuove componenti Ψ'_i e Φ'_i di Ψ e Φ si esprimeranno linearmente ed omogeneamente in funzione delle antiche Ψ_i e Φ_i [§ 3], cosicchè anche tra di esse passeranno relazioni lineari analoghe alle (I, 48) e cioè

$$(I, 49) \quad \Psi'_j = \sum_i p'_{ji} \Phi'_i$$

con nuovi coefficienti p' . Ciò può vedersi esplicitamente effettuando il calcolo, che ci condurrà anche a trovare l'espressione delle p'_{ji} in funzione delle p_{ik} .

Se assumiamo le (I, 5) come formule per il cambiamento degli assi, sappiamo che le componenti Φ_k si esprimono in funzione delle Φ'_i mediante le formule (I, 6), che scriveremo ora brevemente

$$(I, 50) \quad \Phi_k = \sum_i a_{ki} \Phi'_i$$

ed, analogamente, per le formule inverse (I, 6'),

$$(I, 50') \quad \Psi'_j = \sum_i a_{ij} \Psi_i$$

Sostituendo in questa la (I, 48) e la (I, 50) si ha

$$\Psi'_j = \sum_{i,k} p_{ik} a_{ij} a_{ki} \Phi'_i$$

che è appunto della forma (I, 49), con

$$(I, 51) \quad p'_{ji} = \sum_{k,l} p_{ik} a_{lj} a_{kl} p_{il}$$

La linearità delle relazioni fra le componenti dei due vettori è dunque una proprietà *intrinseca* della relazione fra i due vettori [cioè vale in un qualunque sistema di riferimento]. Tale relazione è definita, in ciascun sistema di riferimento, da nove quantità

$$\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array}$$

e si dice che esse sono le *componenti* (rispetto a quel sistema di assi) di un « *tenso* », volendo con ciò intendere che, in un cambia-

(1) Qui e nel seguito indicheremo le coordinate anche con ξ_1, ξ_2, ξ_3 , invece che solo con x, y, z ed useremo gli indici 1, 2, 3 per designare le componenti di un vettore sui tre assi; le lettere i, j, k, l, \dots che figurano come indici si intende assumano sempre i valori 1, 2, 3.

mento di assi, si trasformano secondo le (I, 51) (2). Il tensore è dunque [analogamente a quanto si disse per il concetto di vettore] un ente *intrinseco*, che, in ogni sistema di riferimento, è caratterizzato da un dato sistema di 9 « componenti ». Ogni omografia vettoriale è caratterizzata da un tensore.

Colle (I, 51) si vede facilmente che la somma delle tre componenti diagonali di un tensore, cioè lo scalare

$$p = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \sum_j p_{jj}$$

non varia comunque si cambino gli assi. Difatti calcolandola nei nuovi assi ζ' , mediante le (I, 51), sarà

$$\sum_j p'_{jj} = \sum_{i,k,l} a_{ij} a_{kl} p_{ik} = \sum_{i,k} p_{ik} \sum_j a_{ij} a_{ki};$$

ma, per note proprietà dei coseni a_{ik} [cfr. nota 2, § 3], $\sum_j a_{ij} a_{ki}$ è 0 se $i \neq k$ ed 1 se $i = k$, quindi nell'ultima espressione restano solo i termini con $i = k$ e si ha

$$\sum_j p'_{jj} = \sum_i p_{ii},$$

che è quanto volevamo dimostrare. Lo scalare p si dice « *invariante lineare* » del tensore considerato (3).

In tutto quanto si è detto si sono considerati solo vettori uscenti da un determinato punto, ma, potendosi ripetere le stesse cose per ogni punto dello spazio, si può pensare il tensore p_{ik} funzione del posto [cioè avente le componenti funzioni di ξ_1, ξ_2, ξ_3] senza mutare in nulla le formule precedenti.

§ 16. Tensori simmetrici.

Dimostriamo ora che se in un particolare sistema di riferimento è

$$(I, 52) \quad p_{22} = p_{32}, \quad p_{31} = p_{13}, \quad p_{12} = p_{21},$$

tale proprietà vale in qualunque altro sistema, così che essa è una

(2) Sotto l'aspetto mnemonico, le (I, 51) si possono ricordare notando che p_{ij} si trasforma come si trasformerebbe il prodotto $\Phi_i \Phi_j$ di due componenti di un vettore Φ .

(3) Notiamo di stuggita che oltre all'invariante *lineare* il tensore ha pure un *invariante quadratico*, dato da

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{33} & p_{31} \\ p_{13} & p_{11} \end{vmatrix}$$

ed un *invariante cubico* dato dal determinante

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

proprietà caratteristica del tensore, che in tal caso si dice « *simmetrico* ». Infatti la (I, 51), scambiando gli indici j ed l tra loro e gli indici i e k fra loro (1), si può scrivere

$$(I, 53) \quad p'_{ij} = \sum_{i,k} a_{ki} a_{il} p_{kj};$$

ma, se valgono le (I, 52), cioè se $p_{ik} = p_{ki}$, i secondi membri di (I, 51) e (I, 53) sono identici e quindi è $p'_{ij} = p'_{ji}$.

Ad esempio, le Γ_{ik} che abbiamo incontrato nel § 14 costituiscono un tensore simmetrico. Parimente simmetrici saranno tutti i tensori che incontreremo nel seguito.

Un tensore simmetrico è evidentemente caratterizzato da 6 [e non 9] componenti distinte.

Una proprietà importante dei tensori simmetrici è la seguente: se p_{ik} è simmetrico esistono tre assi ortogonali $\xi_1^o, \xi_2^o, \xi_3^o$ tali che rispetto ad essi è

$$(I, 54) \quad p_{23}^o = p_{31}^o = p_{12}^o = 0.$$

Tali assi si dicono « *assi principali* » del tensore e, riferendosi ad essi, le (I, 48) assumono la forma più semplice

$$\Psi_1^o = p_{11}^o \Phi_1^o, \quad \Psi_2^o = p_{22}^o \Phi_2^o, \quad \Psi_3^o = p_{33}^o \Phi_3^o,$$

[indicando con Ψ_1^o, Φ_1^o , ecc., le componenti di Ψ e Φ sugli assi principali].

Per dimostrare l'esistenza degli assi principali consideriamo il prodotto scalare dei due vettori Φ e Ψ legati dalle (I, 48):

$$\Phi \times \Psi = \sum_i \Phi_i \Psi_i = \sum_{i,k} p_{ik} \Phi_i \Phi_k$$

e ricordiamo che tale espressione è invariante rispetto ad ogni cambiamento di assi: quindi, se prendiamo nuovi assi ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 , sarà anche

$$\Phi \times \Psi = \sum_{i,k} p'_{ik} \Phi'_i \Phi'_k.$$

Ora, detto $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ un punto generico, ed O l'origine degli assi, assumiamo come Φ il vettore $P-O$: avremo allora $\Phi_i = \xi_i$, e quindi

$$\Phi \times \Psi = \sum_{i,k} p_{ik} \xi_i \xi_k,$$

così che $\Phi \times \Psi$ si può considerare come una funzione [scalare] del

(1) Ricordiamo che è indifferente la designazione degli indici con una lettera o con l'altra dato che ogni indice, comunque designato, assume i tre valori 1, 2, 3.

punto P . Il luogo dei punti in cui tale funzione ha il valore 1 ha per equazione

$$\sum_{i,k} p_{ik} \xi_i \xi_k = 1$$

ossia

$$(I, 55) \quad p_{11} \xi_1^2 + p_{22} \xi_2^2 + p_{33} \xi_3^2 + 2p_{23} \xi_2 \xi_3 + 2p_{31} \xi_3 \xi_1 + 2p_{12} \xi_1 \xi_2 = 1,$$

ed è, perciò, una quadrica di centro P [che chiameremo « *quadrica caratteristica* » del tensore]. E se cambiamo sistema di riferimento, per l'asserzione già fatta, i coefficienti della nuova equazione della quadrica rappresentano le nuove componenti del tensore. Ma, come si sa dalla geometria analitica, una quadrica a centro ha sempre tre assi [ortogonali] $\xi_1^o, \xi_2^o, \xi_3^o$, rispetto ai quali la sua equazione ha la forma, mancante dei termini misti,

$$p_{11}^o \xi_1^{o2} + p_{22}^o \xi_2^{o2} + p_{33}^o \xi_3^{o2} = 1.$$

Se, dunque, assumiamo come assi coordinati gli assi della quadrica caratteristica, saranno soddisfatte le (I, 54): si vede così che gli assi della quadrica sono gli assi principali del tensore. Se la quadrica è rotonda, essa, e per conseguenza il tensore, ammette infinite terne di assi principali.

Il tensore è completamente individuato quando ne sono noti una terna [o la terna] di assi principali e le tre componenti $p_{11}^o, p_{22}^o, p_{33}^o$ ad essa relative. Difatti le componenti relative ad un'altra terna qualunque si ottengono con le formule seguenti [ottenute dalla (I, 51) sostituendo le p' con le p e le p con le p^o]:

$$(I, 56) \quad p_{ji} = \sum_i a_{ij} a_{ii} p_{ii}^o,$$

essendo i coseni, a_{ik} , definiti dallo specchio seguente:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3
ξ_1^o	a_{11}	a_{12}	a_{13}
ξ_2^o	a_{21}	a_{22}	a_{23}
ξ_3^o	a_{31}	a_{32}	a_{33}

È poi ovvio che se il tensore è funzione del posto, esso sarà caratterizzato in ogni punto da una diversa quadrica.

La quadrica (I, 55) permette di rappresentare geometricamente altre proprietà del tensore: per es., essa fornisce una semplice relazione geometrica fra la direzione del vettore Φ e la direzione del vettore dipendente Ψ . Difatti sia

M (v. fig. 10) il punto dove la retta d'azione, PQ , del vettore Φ taglia la quadrica: le coordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3 di M saranno proporzionali a Φ_1, Φ_2, Φ_3 , cioè sarà

$$(I. 57) \quad \xi_1 = x \Phi_1, \quad \xi_2 = x \Phi_2, \quad \xi_3 = x \Phi_3.$$

La normale in M alla quadrica ha [come è noto dalla geometria analitica] coseni direttori proporzionali alle derivate parziali del primo membro della (I. 55),

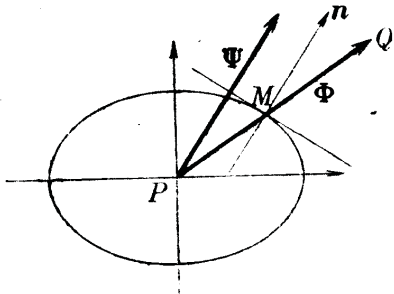


Fig. 10.

cioè a $2(p_{11}\xi_1 + p_{12}\xi_2 + p_{13}\xi_3)$, $2(p_{21}\xi_1 + p_{22}\xi_2 + p_{23}\xi_3)$, $2(p_{31}\xi_1 + p_{32}\xi_2 + p_{33}\xi_3)$ che, per le (I. 57), possiamo scrivere

$$2x(p_{11}\Phi_1 + p_{12}\Phi_2 + p_{13}\Phi_3), \quad 2x(p_{21}\Phi_1 + p_{22}\Phi_2 + p_{23}\Phi_3), \\ 2x(p_{31}\Phi_1 + p_{32}\Phi_2 + p_{33}\Phi_3),$$

ossia

$$2x\Psi_1, \quad 2x\Psi_2, \quad 2x\Psi_3.$$

Dunque la detta normale ci dà la direzione del vettore Ψ . È, poi, geometricamente evidente che le direzioni degli assi della quadrica sono quelle per cui è Ψ parallelo a Φ , il che ci dà un'altra definizione degli assi principali di un tensore.

§ 17. Moti irrotazionali.

Abbiamo visto nel § prec. che se v è il vettore velocità di un moto fluido, il vettore $\frac{1}{2} \text{rot } v$ è legato alla rotazione delle particelle fluide e ne rappresenta la velocità angolare ω . Nei casi in cui $\text{rot } v$, e quindi ω , è nullo il moto si dice « irrotazionale » od anche « non vorticoso ». Esiste allora [v. § 13] una funzione φ [detta « potenziale delle velocità », monodroma se il campo del moto è semplicemente connesso] di cui v è il gradiente, cioè tale che

$$v = \text{grad } \varphi$$

Lo studio dei moti non vorticosi è dunque semplificato dal fatto che basta conoscere una sola funzione scalare $\varphi(x, y, z, t)$ per conoscere il moto, cioè il campo vettoriale v .

Se poi si considera un fluido incompressibile l'equazione di continuità, che per esso [v. § 7] è

$$\text{div } v = 0,$$

diverrà, per definizione dell'operatore di Laplace,

$$\Delta \varphi = 0.$$

Una funzione che soddisfa questa equazione [equazione di Laplace] dicesi *funzione armonica*. Si ha quindi che nel moto irrotazionale di un fluido incompressibile il potenziale delle velocità è una funzione armonica. Siamo così condotti a studiare le proprietà delle funzioni armoniche.

CAPITOLO II.

FUNZIONI ARMONICHE. RAPPRESENTAZIONI CONFORMI

FUNZIONI ARMONICHE

§ 18. Proprietà generali delle funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet e di Neumann.

L'equazione di Laplace

$$\Delta V = 0,$$

ossia, in coordinate cartesiane,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

[dove V è funzione del posto], ha importanza fondamentale in fisica matematica poichè si presenta in molte questioni di natura svariatisima. Ogni sua soluzione si chiama *funzione armonica* ⁽¹⁾.

Avvertiamo subito che sottintenderemo, di regola, che le funzioni armoniche di cui ci occupiamo siano sempre finite e continue [colle loro derivate prime] nello spazio S in cui le consideriamo.

Una prima ed importante proprietà è la seguente: *la media, \bar{V}_σ , dei valori che una funzione armonica V assume su di una sfera qualsiasi, interna ad S , è uguale al valore che essa assume nel centro di tale sfera* [teorema della media per le funzioni armoniche]. Cioè se P , r , σ sono rispettivamente centro, raggio e superficie della sfera considerata e $V(P)$ è il valore di V nel centro P , e se si pone

$$(II, 1) \quad V_\sigma = \frac{1}{4\pi r^2} \int_\sigma V d\sigma.$$

il teorema afferma che \bar{V}_σ è indipendente da r e, precisamente, si ha

$$(II, 2) \quad \bar{V}_\sigma = V(P).$$

⁽¹⁾ Come primo esempio semplicissimo di funzione armonica si può pensare ad una qualsiasi funzione lineare delle coordinate x, y, z . Un altro esempio più interessante si vedrà al § 20.

Assumiamo, per dimostrarlo, coordinate polari r, θ, φ con centro P e ricordiamo che sulla sfera σ è [§ 10]

$$d\sigma = ds_2 ds_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3 = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi;$$

avremo quindi

$$\bar{V}_\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi V \sin \theta d\theta.$$

Questa quantità, fissato il punto P , risulterà funzione, tutt'al più di r : derivandola abbiamo

$$\frac{d\bar{V}_\sigma}{dr} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\partial V}{\partial r} \sin \theta d\theta,$$

da cui, osservando che la direzione del raggio r coincide con la normale esterna, n , a σ ,

$$\frac{d\bar{V}_\sigma}{dr} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{dV}{dn} \sin \theta d\theta = \frac{1}{4\pi r^2} \int \frac{dV}{dn} d\sigma.$$

D'altra parte la (I, 20) applicata alla V , tenendo conto che $\Delta V = 0$, ci dà

$$\int_\sigma \frac{dV}{dn} d\sigma = 0;$$

ne segue $\frac{d\bar{V}_\sigma}{dr} = 0$, ossia

$$\bar{V}_\sigma = c,$$

designando con c una costante [rispetto ad r]. Per determinare il valore di c possiamo passare al limite per $r \rightarrow 0$: \bar{V}_σ dovrà tendere a $V(P)$ e ne segue

$$c = V(P)$$

cioè la (II, 2), che volevamo dimostrare.

Corollario notevole è che $V(P)$ è pure la media dei valori che V assume nei punti interni alla sfera σ . Basta infatti supporre di calcolare tale media servendosi di strati sferici di spessore infinitesimo e concentrici alla sfera σ .

Un altro corollario molto importante è che una funzione V , armonica e regolare in uno spazio S , non può avere all'interno dello spazio S punti di massimo o di minimo (1). Infatti se nel punto P interno ad S

(1) Se lo spazio S si estende sino all' ∞ , si devono considerare i punti all' ∞ come appartenenti al contorno.

vi fosse, per es., un massimo, esisterebbe un intorno di P tale che in tutti i suoi punti sarebbe $V < V(P)$, e quindi per una sferetta di centro P ed interna ad esso si avrebbe $\bar{V}_\sigma < V(P)$, contrariamente al teorema dimostrato. Il massimo ed il minimo dei valori di V in S dovranno dunque necessariamente trovarsi sul contorno di S .

Da tale corollario e dalla continuità di V segue che se V ha un valore costante su tutta una superficie chiusa σ essa ha quello stesso valore in tutto lo spazio interno S . In particolare, se V è zero su tutta σ è zero in tutto S .

Data la grande importanza di quest'ultimo teorema ne daremo un'altra dimostrazione che si presta meglio ad essere estesa anche a casi analoghi. Applichiamo, per questo, il teorema della divergenza (I, 15') al vettore $V \text{ grad } V$, ottenendo

$$\int_S \text{div} (V \text{ grad } V) dS = \int_\sigma V \frac{dV}{dn} d\sigma,$$

e ricordiamo che, per la (I, 16)

$$\text{div} (V \text{ grad } V) = V \Delta V + (\text{grad } V)^2$$

e che $\Delta V = 0$: se ne deduce

$$(II, 3) \quad \int_S (\text{grad } V)^2 dS = \int_\sigma V \frac{dV}{dn} d\sigma.$$

Se, ora, è $V = 0$ su tutta σ , si annullerà il secondo integrale e si avrà

$$\int_S (\text{grad } V)^2 dS = 0$$

e quindi

$$\text{grad } V = 0 \quad \text{ossia} \quad V = \text{cost.}, \quad (\text{in } S).$$

Tale cost. è zero essendo al contorno $V = 0$.

Si può ora dimostrare il teorema [di unicità]: se di una funzione, V , armonica e regolare nello spazio finito S , si assegnano i valori sul contorno σ , V è univocamente determinata all'interno dello spazio S . Infatti supponiamo esistano due funzioni V_1 e V_2 , regolari, tali che, se F è una funzione assegnata su σ , sia

$$V_1 = F, \quad V_2 = F, \quad \text{su } \sigma,$$

e che sia inoltre

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = 0, \quad \text{in } S.$$

La loro differenza $W = V_1 - V_2$ sarà una funzione armonica e rego-

lare in S e si annullerà su σ : ne seguirà, per il teorema precedente,

$$W = 0, \quad \text{cioè} \quad V_1 = V_2 \quad \text{in } S.$$

Il problema di *determinare* una funzione V armonica e regolare in uno spazio finito S quando sono noti i valori che V assume sul suo contorno σ va sotto il nome di « *problema di Dirichlet* ». Il teorema precedente ci dice che questo problema non può ammettere più di una soluzione. Si può dimostrare rigorosamente, sotto certe restrizioni assai generali relative al contorno, l'esistenza di una tale V , ma non esiste un metodo generale che ci indichi le operazioni da eseguirsi sui valori dati al contorno per ottenere V . Esistono però alcuni metodi che in molti casi portano alla soluzione oppure suggeriscono la via per trovarla. Naturalmente la difficoltà varia colla forma del contorno e coi valori dati su esso.

Servendosi della (II, 3) è pure possibile dare un altro teorema di unicità e precisamente: *se di una funzione V armonica e regolare nell'intero spazio finito S si assegnano i valori della derivata normale $\frac{dV}{dn}$ sul contorno σ , la V è determinata all'interno dello spazio S a meno di una costante additiva arbitraria*. Riprendiamo per questo la (II, 3) e consideriamo anzitutto una funzione armonica e regolare W tale che sia

$$\frac{dW}{dn} = 0, \quad \text{su } \sigma;$$

con un ragionamento analogo a quello di poco sopra si trova che è

$$W = \text{cost.} \quad \text{in } S.$$

però ora non possiamo precisare il valore di tale cost. non conoscendo il valore della W in alcun punto. Supponiamo, poi, che esistano due funzioni V_1 e V_2 nelle condizioni dell'enunciato e cioè tali che, se F è una funzione assegnata su σ , sia

$$\frac{dV_1}{dn} = F, \quad \frac{dV_2}{dn} = F, \quad \text{su } \sigma,$$

e che inoltre sia

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = 0, \quad \text{in } S.$$

La loro differenza $W = V_1 - V_2$ sarà armonica e regolare in S e la sua derivata normale sarà nulla sul contorno σ . Si avrà quindi

$$W = \text{cost.}, \quad \text{in } S,$$

cioè

$$V_1 = V_2 + \text{cost.}, \quad \text{in } S,$$

che è quanto si voleva dimostrare.

È importante osservare che la scelta della funzione F , assegnata sul contorno σ come valore della derivata normale di V , non è del tutto arbitraria: ricordiamo infatti che, per la (I, 20),

$$\int_{\sigma} \frac{dV}{dn} d\sigma = 0,$$

e che quindi deve essere

$$(II, 4) \quad \int_{\sigma} F d\sigma = 0.$$

Il problema [analogo al problema di Dirichlet] di determinare una funzione V armonica e regolare in S , dati i valori della derivata normale su σ , va sotto il nome di *problema di Neumann*.

§ 19. Problemi di Dirichlet e di Neumann per uno spazio infinito.

Vediamo se è possibile estendere i teoremi del § precedente al caso in cui invece di uno spazio finito si considera lo spazio infinito S esterno ad una superficie chiusa, σ , data.

Occorrerà naturalmente precisare il comportamento all'infinito della funzione V . Noi ammetteremo che per essa siano soddisfatte le condizioni seguenti, che chiameremo « *condizioni normali all'infinito* »: se r_0 è la distanza del punto P [che va all'infinito] da un qualsiasi punto O , fisso, (fig. 11),

$$(II, 5) \quad \begin{cases} \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0 V(P) = \alpha, \\ \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0^2 \frac{dV}{dr_0} = \beta. \end{cases}$$

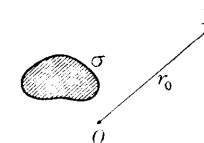


Fig. 11.

dove α, β sono quantità finite o nulle. Per conseguenza, ammetteremo che la funzione V e la sua derivata prima nella direzione r_0 siano infinitesime per $r_0 \rightarrow \infty$ [e, precisamente, la V di ordine ≥ 1 , la sua derivata di ordine ≥ 2].

Si può verificare che, sotto queste ipotesi, vale ancora per la funzione V la (II, 3). Basta per questo applicare il teorema della divergenza (I, 15') al vettore $V \text{ grad } V$ limitandosi allo spazio finito S' compreso fra la superficie σ data ed una sfera Ω di raggio r che la racchiuda (fig. 12), e quindi

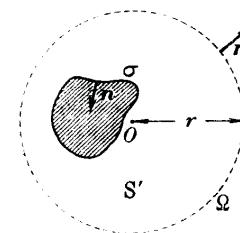


Fig. 12.

passare al limite per $r \rightarrow \infty$ ricordando le (II, 5). Infatti, applicando il teorema citato ad S' ed essendo ora il contorno costituito dalle due superfici σ ed Ω , avremo

$$\int_{S'} \operatorname{div} (V \operatorname{grad} V) dS' = \int_{\sigma} V \frac{dV}{dn} d\sigma + \int_{\Omega} V \frac{dV}{dr} d\Omega$$

[dove \mathbf{n} è la normale di σ esterna ad S' e, quindi, rivolta verso l'interno di σ , e la direzione del raggio r coincide con quella della normale esterna di Ω , \mathbf{n}_1]. E, sviluppando come al § precedente, otterremo

$$(II, 6) \quad \int_{S'} (\operatorname{grad} V)^2 dS' = \int_{\sigma} V \frac{dV}{dn} d\sigma + \int_{\Omega} V \frac{dV}{dr} d\Omega.$$

Ma, se applichiamo all'ultimo integrale il teorema del valor medio ed indichiamo con la soprilineatura il valor medio, abbiamo

$$\int_{\Omega} V \frac{dV}{dr} d\Omega = 4\pi r^2 \overline{\left(V \frac{dV}{dr} \right)} = 4\pi \left(r \overline{V} \cdot r^2 \overline{\frac{dV}{dr}} \right) \frac{1}{r},$$

e se si passa al limite per $r \rightarrow \infty$, per le (II, 5), si ottiene

$$(II, 7) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega} V \frac{dV}{dr} d\Omega = 4\pi \alpha \beta \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} = 0.$$

Basta allora nella (II, 6) passare al limite per $r \rightarrow \infty$ osservando che è

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S' = S$$

e tener conto della (II, 7), per avere ancora, come al § prec., [(II, 3)],

$$\int_S (\operatorname{grad} V)^2 dS = \int_{\sigma} V \frac{dV}{dn} d\sigma.$$

Ne potremo dedurre, come prima, che una funzione V armonica e regolare nello spazio infinito S e soddisfacente le condizioni normali all'infinito è univocamente determinata quando si assegnino sul contorno σ i valori della funzione oppure quelli della sua derivata normale $\frac{dV}{dn}$.

Si noti che [a differenza di quanto abbiamo detto nel caso dello spazio interno a σ] nel caso dello spazio esterno si ha che, anche se su σ sono assegnati i valori di $\frac{dV}{dn}$ e non di V , la V è pienamente determinata. Infatti, riprendendo la dimostrazione del § prec., si può ora aggiungerci che se è $W = \text{cost.}$ in ogni punto di S , essendo all'infinito $W = 0$, sarà in ogni punto $W = 0$.

Aggiungiamo inoltre che in questo caso scompare la limitazione (II, 4) a cui dovevano essere assoggettati i valori superficiali della derivata normale.

Tutte le considerazioni fatte valgono evidentemente anche se la superficie σ , che limita lo spazio infinito S , è costituita da un numero finito di superfici chiuse.

§ 20. La funzione armonica $\frac{1}{r}$.

Se O è un punto fisso ed r è la distanza da esso di un punto generico P , la funzione di P

$$(II, 8) \quad V = \frac{1}{r}$$

è armonica. Lo si potrebbe verificare considerando un sistema di coordinate cartesiane con centro O e calcolando il Δ di

$$V = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

È più espressivo ed immediato servirsi di coordinate polari con polo in O . In tal caso, essendo la (II, 8) funzione solo di r , il suo Δ , (I, 31₂), si riduce a

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV)$$

ed, essendo $rV = 1$, sarà $\Delta V = 0$.

Si noti che la V non è regolare in tutto lo spazio poichè ha una singolarità in O , dove diviene infinita. Essa soddisfa alle condizioni normali all'infinito, essendo per qualunque r [e quindi anche per $r \rightarrow \infty$]

$$rV = 1 \quad \text{ed} \quad r^2 \frac{dV}{dr} = -1.$$

La (II, 8) è tipica come funzione armonica a simmetria sferica: infatti se cerchiamo la più generale funzione armonica a simmetria sferica, integrando l'equazione

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV(r)) = 0,$$

troviamo come integrale generale

$$(II, 8_1) \quad V(r) = a + b \frac{1}{r}$$

[con a e b costanti].

§ 21. Funzioni armoniche nel piano.

Anche nel piano si può fare uno studio del tutto analogo a quello svolto per lo spazio nei §§ prec. e considerare le soluzioni dell'equazione di Laplace, $\Delta V = 0$, che in questo caso, in coordinate cartesiane, è

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Tali soluzioni si dicono pure *funzioni armoniche [piane]* e per il loro studio ci si vale, invece che delle (I, 12), (I, 15') e (I, 20), delle analoghe formole (I, 13), (I, 20₁). Noi ci limiteremo ad enunciare i risultati sempre considerando funzioni armoniche finite e continue [colle loro derivate prime] nell'area piana σ in cui le consideriamo. Essi sono:

1° - La media dei valori che una funzione V armonica e regolare in σ assume su una circonferenza s qualsiasi [di raggio r] interna al campo σ , è eguale al valore che essa assume nel centro P di tale circonferenza e cioè

$$(II, 9) \quad V(P) = \frac{1}{2\pi r} \int_s V ds;$$

$V(P)$ è pure eguale alla media dei valori che V assume nei punti interni alla circonferenza s [teoremi della media].

2° - Una funzione V armonica e regolare in σ non può avere nell'interno dell'area σ punti di massimo o minimo, e quindi se V è costante [o nulla] su tutta una linea chiusa s essa è costante [o nulla] in tutta l'area interna ad s .

3° - Se di una funzione V armonica e regolare nell'area finita σ si assegnano i valori sul contorno s , la funzione è univocamente determinata all'interno dell'area σ , se invece si assegnano sul contorno s i valori F della derivata normale $\frac{dV}{dn}$, colla limitazione

$$(II, 10) \quad \int_s F ds = 0,$$

la V è determinata all'interno dell'area σ a meno di una costante additiva arbitraria.

Come ultima osservazione notiamo che nel piano la funzione $\frac{1}{r}$, dove r è la distanza da un punto fisso O del punto generico P , non è armonica, ma è tale, invece, la funzione

$$(II, 11) \quad V = \log r.$$

Ed infatti, assumendo un sistema di coordinate polari con polo in O , essendo la (II, 11) funzione solo di r , il suo Δ , (I, 32₁), si riduce a

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right)$$

ed, essendo $r \frac{dV}{dr} = 1$, sarà $\Delta V = 0$. Però la (II, 11) non è regolare in tutto il piano poichè ha una singolarità in O ; inoltre, a differenza della funzione $\frac{1}{r}$ nello spazio, essa non si annulla all'infinito anzi vi diventa infinita. La (II, 11), poi, è tipica come funzione armonica [piana] a simmetria circolare: infatti se cerchiamo la più generale funzione armonica piana a simmetria circolare, integrando l'equazione

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV(r)}{dr} \right) = 0$$

otteniamo come integrale generale

$$(II, 12) \quad V(r) = a + b \log r$$

[con a e b costanti].

FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

§ 22. Richiami sulle funzioni di variabile complessa.

Ricordiamo che se $z = x + iy$ è una variabile complessa e

$$(II, 13) \quad W = U + iV$$

una sua funzione [nel senso che $U = U(x, y)$, $V = V(x, y)$], si dice che tale funzione è *monogena*, o *analitica*, quando sono soddisfatte le due condizioni (1) [di Cauchy-Riemann]

$$(II, 14) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Se queste condizioni non sono soddisfatte non si può parlare di una derivata della funzione W rispetto a z e vengono a mancare le principali proprietà della teoria delle funzioni: perciò in pratica si prendono in considerazione solo le funzioni analitiche.

(1) Inoltre sottintenderemo, come sempre, che U , V siano funzioni finite e continue di x , y , insieme alle loro derivate prime.

Ricordiamo anche che se la W è ottenuta da z mediante un numero finito di operazioni di somma o differenza, prodotto, quoziente, seno, coseno, esponenziale, logaritmo, essa risulta automaticamente analitica. [Per es., se $W = z^2$, si ha (svolgendo il quadrato di $x + iy$ e separando il reale dall'immaginario) $U = x^2 - y^2$, $V = 2xy$ e si verifica subito che sono soddisfatte le (II, 14)]. Inoltre, se W è funzione analitica di z e T lo è di W , anche T è funzione analitica di z .

È ora importante per noi osservare, che la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione analitica di $z = x + iy$, sono entrambe funzioni armoniche di x ed y . Ciò risulta immediatamente derivando la prima delle (II, 14) rispetto ad x , la seconda rispetto ad y e sommando: si ha infatti $\Delta U = 0$. Analogamente si dimostra che è $\Delta V = 0$.

Inoltre, data una qualunque funzione armonica $U(x, y)$ è sempre possibile determinare un'altra funzione V , pure armonica, tale che $U + iV$ sia una funzione analitica di $x + iy$ [anzi la V resta determinata a meno di una costante additiva]. Difatti, data la U restano determinate le sue derivate parziali, che denoteremo con

$$\frac{\partial U}{\partial x} = Y(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -X(x, y);$$

il problema si riduce quindi a trovare una funzione V che soddisfi le condizioni (II, 14) [che possiamo ora scrivere

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X(x, y), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Y(x, y).$$

con $X(x, y)$, $Y(x, y)$ funzioni assegnate] ossia tale che sia

$$dV = X dx + Y dy.$$

Ora, si sa dal calcolo integrale che la soluzione di tale problema [integrazione di un differenziale totale] esiste se, e solo se, le due funzioni X ed Y soddisfano alla relazione

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y},$$

che nel nostro caso, per l'armonicità di U , è identicamente soddisfatta.

Analoghe considerazioni si possono svolgere cambiando U con $-V$ e V con U , poichè tale sostituzione non altera le (II, 14).

Le funzioni U e V si dicono coniugate od associate.

§ 23. Moti liquidi piani e funzioni di variabile complessa.

Consideriamo il moto stazionario piano di un liquido omogeneo incompressibile, vale a dire un moto stazionario [§ 2] in cui il liquido ha dappertutto velocità parallele ad un piano fisso, che assumiamo come piano (x, y) , ed inoltre tale che in tutti i piani paralleli al piano fisso il movimento è lo stesso, cosicchè basta studiare il moto nel piano (x, y) [piano del moto].

È utile definire il « flusso » del liquido attraverso una linea s del piano (x, y) su cui sia fissato [ad arbitrio] il verso positivo della normale: esso è dato dalla quantità

$$(II, 15) \quad \rho \int_s v_n ds. \quad (v_n = v \times n)$$

[dove v è la velocità delle particelle liquide, n il versore della normale ad s e ρ la densità (costante)] che rappresenta il flusso, nel senso del § 5, per unità di spessore del liquido. È immediato dimostrare [ricordando quanto si è visto nel § 8] che, date nel piano (x, y) due linee qualsiasi s_1 ed s_2 aventi gli stessi estremi, A, B , il flusso che attraversa s_1 è eguale a quello che attraversa s_2 [supponendo di aver scelto i versi positivi delle normali in modo concorde, per es. entrambi verso la destra di chi va da A a B].

Possiamo, poi, definire le linee di corrente [linee di flusso nel piano (x, y) , (§ 5, nota 1)] in modo molto più espressivo che nello spazio, così. Se P_0 è un punto fisso e P un punto generico del piano del moto, il flusso attraverso una qualunque linea s avente gli estremi in P_0 e P [con la convenzione precedente per la normale], essendo indipendente da s , è funzione solo del punto P : lo indicheremo quindi con $\rho\psi(P)$ ponendo

$$(II, 16) \quad \psi(P) = \int_{P_0}^P v_n ds.$$

Abbiamo allora che le linee di corrente sono quelle lungo cui è $\psi(P) = \text{cost}$. Siano infatti P e P' due punti di una stessa linea di corrente l , e P_0 un punto fisso del piano (v. fig. 13): avremo

$$\psi(P') = \int_{P_0}^{P'} v_n ds.$$

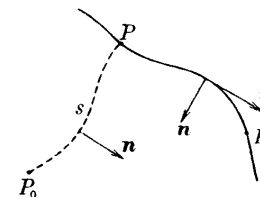


Fig. 13.

Se supponiamo di eseguire l'integrazione andando da P_0 a P' lungo un cammino, $P_0 P P'$, arbitrario da P_0 a P , lungo la l da P a P' , sarà

$$\psi(P') = \int_{P_0}^P v_n ds + \int_P^{P'} v_n ds = \psi(P) + \int_P^{P'} v_n ds,$$

cioè

$$\psi(P') = \psi(P),$$

perchè, essendo l linea di corrente, lungo essa è $v_n = 0$.

Per tale ragione la funzione ψ si dice *funzione di corrente* [o funzione di Stokes].

Se invece di scegliere come punto fisso P_0 si scegliesse un altro punto P_1 , la nuova funzione di corrente ψ_1 differirebbe dalla ψ precedente solo per una costante additiva, e precisamente sarebbe

$$\psi_1(P) = \int_{P_1}^P v_n ds = \int_{P_1}^{P_0} v_n ds + \int_{P_0}^P v_n ds = \psi(P) + \int_{P_1}^{P_0} v_n ds.$$

Volendo calcolare le derivate della funzione ψ possiamo ragionare così. Supponiamo di spostare il punto generico P di una quantità infinitesima dx , parallelamente all'asse x [e sia P' la sua nuova posizione (v. fig. 14)], oppure di una quantità infinitesima dy , parallelamente all'asse y [e la nuova posizione sia P'']. La ψ varia, nel primo caso, di

$$d\psi = \int_P^{P'} v_n ds = -v_y dx,$$

e nel secondo caso di

$$d\psi = \int_P^{P''} v_n ds = v_x dy;$$

se ne deduce che ⁽¹⁾

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x.$$

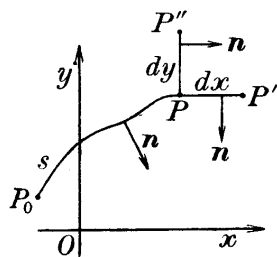


Fig. 14.

⁽¹⁾ Se avessimo fatto per il verso positivo di n la convenzione contraria avremmo ottenuto

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x.$$

Il che porta alle stesse conclusioni.

Se supponiamo che il moto sia irrotazionale [§ 17] la velocità v sarà il gradiente del potenziale di velocità $\varphi(x, y)$, cioè sarà [non interessanti della componente v_z , nulla per ipotesi]

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Otteniamo quindi che, in tal caso, potenziale di velocità, φ , e funzione di corrente, ψ , sono legati fra loro dalle relazioni

$$(II, 17) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

che sono pure le condizioni di monogeneità (II, 14) per le funzioni di variabile complessa

$$\varphi + i\psi, \quad -\psi + i\varphi.$$

Abbiamo così fra l'idrodinamica dei moti piani stazionari ed irrotazionali e le funzioni di variabile complessa questa relazione: la parte reale U ed il coefficiente dell'immaginario V di una funzione analitica $W = U + iV$ possono venire interpretati come potenziale di velocità e come funzione di corrente nel moto piano, stazionario ed irrotazionale di un liquido incompressibile. Ed abbiamo le due interpretazioni:

$$(II, 18) \quad \begin{cases} U = \varphi = \text{pot. di velocità}, & U = \text{cost.}: \text{linee equipotenziali.} \\ V = \psi = \text{funz. di corrente}, & V = \text{cost.}: \text{» di corrente,} \end{cases}$$

oppure

$$(II, 19) \quad \begin{cases} V = \varphi = \text{pot. di velocità}, & V = \text{cost.}: \text{linee equipotenziali,} \\ -U = \psi = \text{funz. di corrente}, & U = \text{cost.}: \text{» di corrente.} \end{cases}$$

Dalle (II, 17), poi, indipendentemente dalla interpretazione idrodinamica si ottiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

che è manifesta condizione di ortogonalità delle due famiglie di linee equipotenziali e di corrente.

§ 24. Alcuni esempi.

Consideriamo ora alcune funzioni $W = U + iV$ della variabile complessa $z = x + iy$ e vediamo le interpretazioni idrodinamiche.

1. - Se consideriamo la funzione $W = az$ [con a costante reale] avremo

$$U + iV = ax + iay,$$

cioè

$$U = ax, \quad V = ay.$$

Le $U = \text{cost.}$ sono rette parallele all'asse y e le $V = \text{cost.}$ sono rette parallele all'asse x . Nell'interpretazione [II, 18] abbiamo un moto per cui le linee di corrente sono le parallele all'asse x (fig. 15) ed il liquido scorre con velocità costante ed eguale ad a : infatti si ha

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Nell'interpretazione [II, 19] le linee di corrente sono rette parallele all'asse y ed il fluido scorre, con velocità a , parallelamente a tale asse.

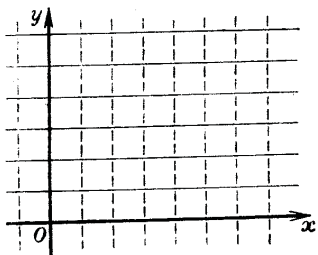


Fig. 15.

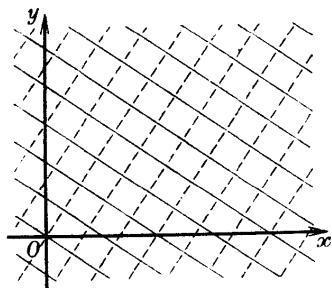


Fig. 16.

Se supponessimo complessa la costante a , e precisamente

$$a = \alpha + i\beta.$$

avremmo

$$U + iV = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y),$$

cioè

$$U = \alpha x - \beta y, \quad V = \beta x + \alpha y.$$

Le $U = \text{cost.}$ sarebbero ancora rette parallele, ma inclinate sull'asse x [di $\theta_0 = \text{arctg } \alpha/\beta$] e le $V = \text{cost.}$ sarebbero le rette ad esse ortogonali (fig. 16).

2. - Dalla funzione $W = az^2$ [con a costante reale] abbiamo

$$U + iV = a(x + iy)^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy,$$

cioè

$$U = a(x^2 - y^2), \quad V = 2axy.$$

Le $U = \text{cost.}$ sono iperboli equilateri aventi per assi gli assi coordinati x, y , e le $V = \text{cost.}$ sono le iperboli equilateri, loro traiettorie ortogonali, aventi gli

assi coordinati per asintoti (fig. 17). Avremo, nelle interpretazioni idrodinamiche, due moti fluidi definiti da

$$\varphi = U, \quad \psi = V,$$

e, rispettivamente,

$$\varphi = V, \quad \psi = -U,$$

in cui le linee di corrente e le linee equipotenziali sono le iperboli equilateri di cui sopra.

3. - Consideriamo ora la funzione $W = a \log z$ con a costante reale: con-

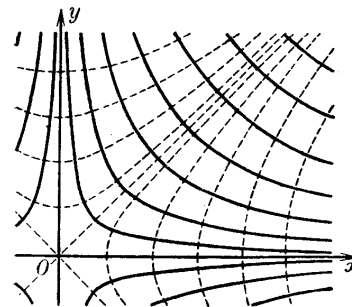


Fig. 17.

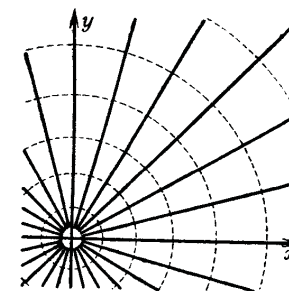


Fig. 18.

viene per essa usare coordinate polari r, θ di centro l'origine O . La variabile z sarà espressa da $z = re^{i\theta}$ ed avremo

$$U + iV = a \log r + ia(\theta + 2k\pi),$$

[con k intero arbitrario], cioè

$$U = a \log r, \quad V = a(\theta + 2k\pi).$$

Le $U = \text{cost.}$ sono i cerchi con centro nell'origine O e le $V = \text{cost.}$ sono le rette uscenti da O .

Nella interpretazione idrodinamica [II, 18] le linee di corrente sono le rette uscenti da O (fig. 18) e la velocità in un punto generico, $v = \text{grad } \varphi$, ha come direzione quella del raggio vettore nel verso delle r crescenti, e come valore

$$v = v_r = (\text{grad } \varphi)_r = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{a}{r}.$$

Il moto fluido è un moto di fuga del liquido dal centro O : questo è un punto di singolarità per la φ . In esso non è soddisfatta l'equazione di continuità [§ 7] perchè $\text{div } v$ non vi ha valore finito. Il flusso attraverso una linea chiusa, s , che

giri (una sola volta) attorno all'origine O è lo stesso (come è facile vedere) qualunque sia tale linea. Esso vale $2\pi a$ e per vederlo basta prendere come linea s un cerchio di centro O [e raggio r]: si trova così

$$\text{flusso} = \int_s v_s ds = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} r d\theta = 2\pi a.$$

Si dice perciò che O è una « sorgente » e $2\pi a$ si dice « portata » della sorgente. Se invertiamo il movimento [considerando la funzione $W = -a \log z = a \log \frac{1}{z}$] abbiamo il moto di un liquido che da ogni punto del piano del moto scorre verso il punto O . In esso c'è ancora una singolarità ma di segno contrario alla precedente e si dice che O è un « pozzo ».

La interpretazione idrodinamica [II, 19] ci porta invece a considerare un moto particolare in cui le linee di corrente sono i cerchi di centro O e le rette per O sono linee equipotenziali (fig. 19). Il moto del liquido è rotatorio attorno ad O e la velocità v ha in un punto generico P la direzione s della tangente al cerchio di raggio $r = OP$ ed è *inversamente* (1) proporzionale ad r [come si vede notando che è

$$v = v_s = (\text{grad } \varphi)_s = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{a}{r},$$

diventando infinita nel centro O . In questo caso, come poco sopra per il flusso, sarebbe facile vedere che la circuitazione I della velocità [§ 13] lungo una linea chiusa qualsiasi che giri (una sola volta) attorno all'origine O è costante. Valendosi, come

sopra, di un cerchio di centro O e raggio r si trova

$$I = \int_s v_s ds = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} r d\theta = 2\pi a.$$

In O la φ non è più regolare quindi non è più $\text{rot } v = \text{rot grad } \varphi = 0$ [v. (I, 38)] [anzi è ∞]. Si dice che O è un « vortice » e la circuitazione I lungo una qualsiasi linea chiusa intorno ad O si dice « intensità del vortice ».

4. - La funzione $W = a \log(z - z_0)$ non ci porterebbe nulla di nuovo. Come si può vedere con una traslazione di assi che porti l'origine nel punto $z = z_0$, è il caso precedente quando la singolarità invece che nell'origine sia nel punto $z = z_0$.

(1) Si noti che se v fosse direttamente proporzionale ad r , il liquido si muoverebbe come una ruota rigida: anche questo movimento è evidentemente possibile, ma non è irrotazionale.

Osservazione.

Per l'ipotesi che il moto sia stazionario [§ 2] ogni linea di corrente è fissa nel piano del moto: noi potremmo [senza alterare il moto] pensarne due materializzate con pareti rigide e considerare solo la regione di piano compresa fra esse: otteniamo così la soluzione del problema del moto di un liquido limitato da due pareti rigide aventi l'andamento di due linee della famiglia considerata. Così, il moto studiato nel primo esempio precedente porta al moto di un liquido limitato da due pareti rettilinee parallele, il moto relativo al secondo esempio [essendo gli assi coordinati, nella prima interpretazione, delle linee di corrente] porta al moto di una corrente *guidata* da un angolo retto (xy) oppure al moto di un liquido limitato da due pareti rigide parallele a sezione iperbolica, il terzo esempio, infine [nella seconda interpretazione], porta al moto irrotazionale di una corrente in una corona circolare.

RAPPRESENTAZIONI CONFORMI

§ 25. Rappresentazioni conformi.

Consideriamo la corrispondenza biunivoca fra due piani [distinti o sovrapposti] che si ottiene individuando un punto generico $P(x, y)$ del primo piano colla variabile complessa $z = x + iy$, un punto $P(U, V)$ generico del secondo piano colla variabile $W = U + iV$ e supponendo z e W legate da una relazione analitica

$$(II, 20) \quad W = f(z).$$

Questa particolare maniera di stabilire una corrispondenza fra i punti di due piani (1) ha notevoli proprietà.

Se P descrive una curva l nel suo piano, il punto P' , che corrisponde a P nell'altro piano, descrive pure una curva l' [«corrispondente» della curva l]: in particolare, a un elemento d'arco PQ di l corrisponderà un elemento d'arco $P'Q'$ di l' . Se P, Q rappresentano rispettivamente i valori z e $z + dz$, l'elemento PQ sarà rappresentato da dz e, similmente l'elemento $P'Q'$ sarà rappresentato da

$$dW = \frac{df}{dz} dz.$$

Si ha quindi che l'elemento $P'Q'$ si può ottenere dall'elemento PQ moltiplicandolo per il fattore [complesso] $\frac{df}{dz}$. [Notiamo che tale fat-

(1) Per semplicità supporremo la funzione f ad un sol valore ed escluderemo dalle nostre considerazioni i punti dove la sua derivata si annulla [punti nei quali cessano di valere alcune delle proprietà di cui parliamo].

tore dipende *solo* dalla posizione del punto P nel suo piano e non dalla lunghezza o dalla direzione dell'elemento dz . Se poi scriviamo $\frac{df}{dz}$, mettendone in evidenza il modulo ρ e l'argomento θ , sotto la forma $\rho e^{i\theta}$, troviamo ⁽²⁾ che l'elemento dW si può pensare ottenuto dal corrispondente elemento dz moltiplicandone la lunghezza per $\rho = \left| \frac{df}{dz} \right|$ e ruotandolo dell'angolo $\theta = \arg \frac{df}{dz}$.

Si ha, così, che due elementi infinitesimi uno di P e l'altro di P' si possono ottenere l'uno dall'altro per mezzo di uno spostamento rigido e di una dilatazione uniforme in tutte le direzioni cioè, in altre parole,

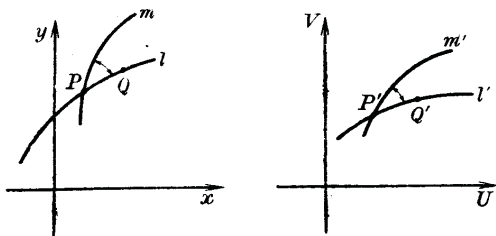


Fig. 20.

la corrispondenza, per quanto riguarda due intorni infinitesimi, è una similitudine di « modulo » $\frac{df}{dz}$ [variabile in generale da punto a punto].

Ne segue, inoltre, che prese per un punto qualsiasi P del primo piano due linee qualunque l ed m (fig. 20), l'angolo delle due linee in P è uguale [anche in segno] all'angolo delle linee corrispondenti l' ed m' , del secondo piano, uscenti dal secondo punto P' . Per tale proprietà, che è esclusiva delle corrispondenze definite dalla (II, 20), queste si chiamano « rappresentazioni [o trasformazioni] conformi dirette ».

Esistono altre corrispondenze che conservano gli angoli in valore assoluto ma ne mutano il segno: le chiameremo « rappresentazioni [o trasformazioni] conformi inverse ». La più semplice di esse è la « simmetria rispetto ad una retta del piano » ed è esprimibile [assumendo tale retta come asse x] colla relazione [non analitica] ⁽³⁾

$$W = z^* .$$

⁽²⁾ Sarà inutile ricordare che il prodotto di due quantità complesse ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.

⁽³⁾ Indicheremo ora ed in seguito col segno * la coniugata di una data quantità complessa: quindi se è

$$Z = X + iY = Re^{i\theta}, \quad \text{sarà} \quad Z^* = X - iY = Re^{-i\theta} .$$

Si riconosce facilmente che la più generale trasformazione conforme inversa si può ricondurre ad una combinazione [prodotto] di una trasformazione conforme diretta con una simmetria, e si può quindi esprimere con una relazione del tipo

$$W = f(z^*) .$$

Vedremo un esempio di quest'ultimo tipo al § 27.

§ 26. Rappresentazione conforme di una regione piana su un'altra.

Un problema che ha notevoli applicazioni in fisica matematica è il seguente. Sia σ una regione piana limitata da un contorno s formato da una sola linea chiusa, e σ' una regione di un altro piano [sovrapposto o no al primo] limitata anch'essa da una sola linea chiusa s' : si vuole stabilire fra i punti delle due regioni una rappresentazione conforme in modo tale che a punti di s corrispondano punti di s' e viceversa. Si dirà allora che si è *rappresentata conformemente* la regione σ su σ' [o viceversa].

È stato dimostrato che il problema è sempre risolubile, anzi, in infiniti modi, vale a dire si possono imporre delle condizioni supplementari; per es., si può imporre che ad un dato punto P interno a σ corrisponda un dato P' interno a σ' e inoltre a un dato punto M su s corrisponda un dato M' su s' , e che la trasformazione sia diretta [con tali condizioni la soluzione è unica].

Per risolvere il problema bisogna trovare la funzione di variabile complessa $f(z)$ che dà luogo alla voluta trasformazione: non esiste un procedimento semplice e di applicazione generale per trovarla ma si conoscono molte soluzioni particolari relative alle forme geometriche più comuni delle aree σ e σ' . Si noti poi che il problema di rappresentare σ su σ' si può sempre scindere nei due problemi di rappresentare separatamente σ e σ' su una terza regione σ_0 di forma qualsiasi [per es. su un cerchio o su un semipiano].

Esempi.

Osserviamo anzitutto che le funzioni considerate al § 24 ci forniscono altrettanti esempi di rappresentazione conforme del piano (U, V) [o di una sua parte] sul piano (x, y) [o su di una sua parte] e che le linee del piano (x, y) tracciate nelle figure 15, 16, 17, 18, 19 corrispondono, nel piano (U, V) , alle rette parallele agli assi. Quindi un rettangolo del piano (U, V) limitato da quattro di queste rette corrisponde nel piano (x, y) all'area limitata dalle quattro linee corrispondenti: per es., dalla fig. 18 si vede come la funzione $W = \log z$ permetta di trasformare conformemente un rettangolo in un settore di corona circolare [in modo che i quattro vertici corrispondano ai quattro vertici] ed, in particolare

la striscia [illimitata] compresa tra le rette $V=0$ e $V=\pi$ viene trasformata nell'intero semipiano $y > 0$.

Mostriamo ora una rappresentazione di un *semipiano su un cerchio*. Essa si può ottenere mediante la funzione

$$W = \frac{z}{z-2a}.$$

Infatti, scrivendo $x+iy$ al posto di z e separando la parte reale dall'immaginaria si ha [supposto per semplicità a reale]

$$U = \frac{x^2 + y^2 - 2ax}{(x-2a)^2 + y^2}, \quad V = \frac{-2ay}{(x-2a)^2 + y^2}.$$

Di qui si vede che: all'origine [$x=y=0$] corrisponde l'origine [$U=V=0$], all'asse $y=0$ corrisponde l'asse $V=0$, al cerchio $x^2+y^2-2ax=0$ [avente

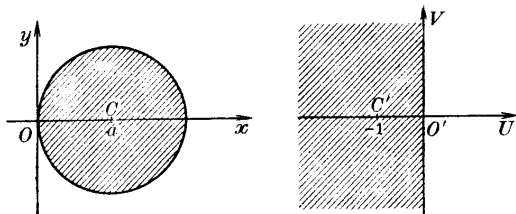


Fig. 21.

il centro nel punto $x=a, y=0$ e passante per l'origine] corrisponde l'asse $U=0$ ed a tutta l'area interna a questo cerchio [$x^2+y^2-2ax < 0$] corrisponde il semipiano $U < 0$. Il centro del cerchio corrisponde al punto $U=-1, V=0$ (fig. 21).

Un altro esempio di rappresentazioni conformi, [a cui sostanzialmente si potrebbe ricondurre anche questo] verrà studiato al § seguente. Qui ci limitiamo ad aggiungere che è possibile [mediante opportune funzioni trascendenti] rappresentare qualunque poligono in un cerchio: ciò sembra paradossale perchè sembrerebbe che un contorno angoloso non potesse trasformarsi *conformemente* in uno non angoloso, ma il paradosso si spiega col fatto che nei vertici del poligono la funzione che fornisce la trasformazione ha derivata infinita [cfr. § 25, nota 1] e quindi quei punti rappresentano punti eccezionali dove la trasformazione non è conforme [tale è, per es., l'origine nella fig. 18].

§ 27. Trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano.

Consideriamo la rappresentazione conforme definita da

(II, 21),

$$W = \frac{1}{z^*}.$$

Supporremo i due piani z e W sovrapposti e riferiti allo stesso sistema di coordinate.

Al punto generico P di coordinate polari (r, θ) e, quindi, individuato da $z = re^{i\theta}$ corrisponderà il punto P' individuato da

$$W = \frac{1}{re^{-i\theta}} = \frac{1}{r} e^{i\theta},$$

cioè il punto del piano W di coordinate $(\frac{1}{r}, \theta)$. Si ha così, che *punti P, P' corrispondenti sono allineati coll'origine O* [« polo di inversione »] e *tali che si abbia, anche in segno,*

$$(II, 21') \quad OP \cdot OP' = 1,$$

il che permette di definire la corrispondenza in questione in modo puramente geometrico ed indipendente dalle funzioni di variabile complessa.

È chiaro che tutti i punti del cerchio Γ di raggio 1 [cerchio fondamentale] sono mutati in se stessi, che tutti i punti interni a Γ sono mutati in punti esterni [e viceversa] e che all'origine O [convenendo di attribuire al piano un unico punto improprio] corrisponde il punto all'infinito del piano.

Questa trasformazione è nota in geometria come « trasformazione per raggi vettori reciproci » od anche « inversione rispetto al cerchio Γ » (1). Il punto O si dice « polo » o « centro di inversione » ed il punto P' si dice « immagine » di P rispetto a Γ , e viceversa.

La proprietà più notevole di questa corrispondenza è che essa *trasforma cerchi in cerchi* [purchè anche le rette si considerino come cerchi di raggio infinito e passanti per il punto all'infinito del piano]. Lo si può vedere osservando che l'equazione di un cerchio generico nel piano z è (2)

$$(II, 22) \quad azz^* + \alpha z + \alpha^* z^* + d = 0$$

(1) Se non si vuol prendere come unità di misura il raggio del cerchio, e questo invece risulta di lunghezza K , occorre sostituire alle (II, 21) e (II, 21') le relazioni

$$W = \frac{K^2}{z^*} \quad \text{ed} \quad OP \cdot OP' = K^2.$$

(2) Ricordiamo che se

$$z = x + iy, \quad z^* = x - iy$$

$$x^2 + y^2 = zz^*, \quad x = (z + z^*)/2, \quad y = (z - z^*)/2i;$$

l'equazione di un cerchio generico

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0$$

si potrà quindi scrivere

$$azz^* + b(z + z^*) - ic(z - z^*) + d = 0$$

e, ponendo $b - ic = \alpha$ (e quindi $b + ic = \alpha^*$), si ha per essa la forma (II, 22).

[in cui le rette rientrano come casi particolari $a = 0$]: trasformata colla (II, 21) dà

$$a + \alpha W + \alpha^* W^* + dW W^* = 0$$

che è ancora un'equazione della forma (II, 22). Essa se $d \neq 0$ rappresenta un cerchio [passante per O se $a = 0$ cioè se la (II, 22) è l'equazione di una retta], rappresenta una retta se $d = 0$ [cioè se il cerchio, o la retta, (II, 22) passa per O].

Se, poi, $ds' = P'Q'$ (fig. 22) è un elemento d'arco infinitesimo del piano W , corrispondente all'elemento d'arco $ds = PQ$ del piano z , per quanto si è visto al § 25 e per la (II, 21), si ha

$$ds' = |dW| = \left| \frac{dW}{dz^*} dz^* \right| = \frac{|dz^*|}{|z^*|^2} = \frac{|dz|}{|z|^2},$$

cioè

$$(II, 23) \quad ds' = \frac{ds}{OP^2}.$$

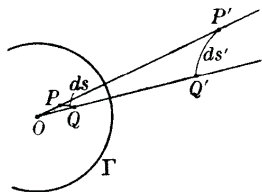


Fig. 22.

Nella inversione un cerchio γ [di raggio R] si trasforma in un cerchio γ' [di raggio R'], ma il centro C del primo non si trasforma nel centro D' del secondo. Possiamo vedere quale punto D interno a γ

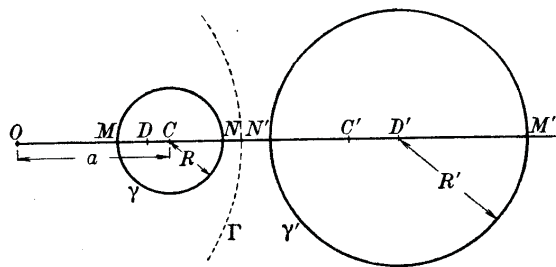


Fig. 23.

si trasforma nel centro D' di γ' . Sia (fig. 23) O il polo d'inversione e C' il trasformato di C : i punti C, C', D, D' saranno allineati con O e la OC taglierà γ e γ' in punti, pure corrispondenti, M e M', N e N' . Se, per maggior chiarezza, indichiamo con a la distanza, OC , del centro C di γ dal polo O , potremo scrivere

$$OM' = \frac{1}{OM} = \frac{1}{a-R}, \quad ON' = \frac{1}{ON} = \frac{1}{a+R}$$

e quindi

$$OD' = \frac{OM' + ON'}{2} = \frac{a}{a^2 - R^2}, \quad OD = \frac{1}{OD'} = a - \frac{R^2}{a}.$$

Si avrà così per la distanza dal centro C di γ del punto D

$$(II, 24) \quad CD = a - OD = \frac{R^2}{a}.$$

I punti O e D sono dunque l'uno l'immagine dell'altro rispetto a γ . Si può pure avere facilmente il valore del raggio R' di γ' in funzione di R ed a : infatti

$$(II, 25) \quad R' = \frac{OM' - ON'}{2} = \frac{R}{a^2 - R^2}.$$

§ 28. Invarianza dell'equazione di Laplace in una rappresentazione conforme.

Sia F una funzione armonica e monodroma definita nel piano (x, y) : se noi rappresentiamo conformemente il piano (x, y) sul piano (U, V) e consideriamo la trasformata \mathcal{F} di F [cioè la funzione che nel punto P' del piano (U, V) assume lo stesso valore che la funzione F assume nel punto P] questa nuova funzione \mathcal{F} è ancora armonica. In altre parole: l'equazione di Laplace

$$\Delta F = 0$$

è invariante per trasformazioni conformi.

Infatti, per le simmetrie la proprietà è evidente. Per le trasformazioni conformi dirette, poi, osserviamo che, se G è la funzione associata ad F [§ 22], la funzione $F + iG$ è una funzione analitica di z e quindi, trasformata colla (II, 20), dà una funzione $\mathcal{F} + i\mathcal{G}$, funzione analitica di W , di cui \mathcal{F} è la parte reale. Si ha così che, nel piano (U, V) , la funzione \mathcal{F} è la parte reale di una funzione analitica di W e perciò è una funzione armonica.

Per le trasformazioni conformi inverse il teorema risulta dal fatto che esse si possono considerare [v. § 25] come prodotti di una simmetria e una trasformazione conforme diretta.

Se, per es., consideriamo fra due piani, che possiamo supporre sovrapposti, la corrispondenza definita da

$$W = mz$$

[con m costante reale], cioè

$$U = mx, \quad V = my,$$

otterremo una *similitudine*, di modulo, m , costante in tutto il piano. Se $F(x, y)$ è una funzione armonica nel piano (x, y) , la sua trasformata

$$\mathcal{F}(U, V) = F\left(\frac{U}{m}, \frac{V}{m}\right)$$

è ancora armonica. La verifica è, in questo caso, immediata, poichè

$$\Delta \mathcal{F} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial U^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial V^2} = \frac{1}{m^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = \frac{\Delta F}{m^2} = 0.$$

PROBLEMI DI DIRICHLET E DI NEUMANN

§ 29. Risoluzione del problema di Dirichlet per il cerchio.

Servendoci della trasformazione per inversione [§ 27] e del teorema della media per le funzioni armoniche piane (II, 9), risolveremo il problema di Dirichlet [§ 18] per il cerchio: *dato un cerchio ed assegnati i*

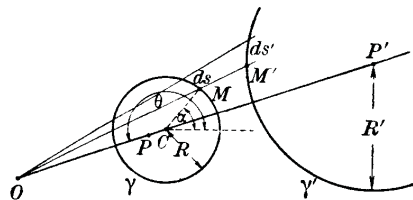


Fig. 24.

valori che una funzione armonica e regolare V assume sul contorno γ di esso, determinare i valori della funzione V all'interno di γ . E lo risolveremo trasformando per inversione il cerchio γ in modo che il punto generico P in cui si vuole determinare il valore di V si trasformi nel centro P' del nuovo cerchio γ' ottenuto. La funzione armonica V si trasformerà [§ prec.] in una nuova funzione \mathcal{Q} ancora armonica che assumerà in P' il valore $V(P)$. Potremo quindi calcolare $V(P)$ calcolando $\mathcal{Q}(P')$ che è dato [v. (II, 9)] dalla media dei valori che \mathcal{Q} assume sul contorno γ' .

Siano r, θ le coordinate polari del punto generico P interno a γ , quando si assuma come polo di esse il centro C di γ [e si fissi a piacere un asse polare]. Per trasformare γ [di raggio R] in un cerchio γ' con una inversione che muti P nel centro P' di γ' dovremo prendere

il polo di inversione O sulla retta PC (v. fig. 24) e ad una distanza a da C tale che sia [v. (II, 24)]

$$r = CP = R^2/a :$$

sarà quindi

$$(II, 26) \quad a = R^2/r.$$

D'altra parte, per il teorema della media delle funzioni armoniche, (II, 9), [se ds' è l'elemento d'arco ed R' il raggio di γ'] sarà

$$(II, 27) \quad \mathcal{Q}(P') = \frac{1}{2\pi R'} \int_{\gamma'} \mathcal{Q} ds'$$

e questo, per quanto si è detto, è pure il valore $V(P)$ cercato. Per averlo in funzione degli elementi di γ basterà esprimere con essi R' e ds' , dato che, per definizione, se M è il punto generico variabile su γ ed M' il suo corrispondente su γ' , si ha $\mathcal{Q}(M') = V(M)$. Indichiamo perciò con α l'anomalia di M : si avrà $ds = R d\alpha$ ed

$$OM^2 = MC^2 + CO^2 - 2MC \cdot CO \cos(\theta - \alpha) = R^2 + a^2 - 2Ra \cos(\theta - \alpha)$$

e quindi dalla (II, 23) seguirà, ricordando la (II, 26).

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(M') ds' &= \frac{V(M) ds}{OM^2} = \frac{V(M) R d\alpha}{R^2 + a^2 - 2Ra \cos(\theta - \alpha)} = \\ &= \frac{V(M) r^2 d\alpha}{R[r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)]}. \end{aligned}$$

Avremo, così, dalla (II, 27), ricordando l'espressione (II, 25) di R' ,

$$(II, 28) \quad V(P) = V(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{V(R, \alpha) d\alpha}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)}$$

Essa è la formula [di *Poisson*] risolutiva del problema di Dirichlet per il cerchio. [Come è ovvio, facendo in essa $r = 0$ ritroviamo che il valore di V nel centro C è la media dei valori al contorno].

§ 30. Risoluzione del problema di Neumann per il cerchio.

Ci è facile, ora, risolvere per il cerchio il problema di Neumann [§ 18] poichè esso si può ridurre al problema di Dirichlet.

Cominciamo coll'osservare che se r, θ sono coordinate polari nel piano e se v è una funzione di r, θ armonica [e cioè, per la (I, 32)] tale che

$$(II, 29) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0,$$

la quale inoltre si annulla per $r = 0$, allora la funzione

$$V = \int_0^r \frac{v}{r} dr$$

è armonica ⁽¹⁾. Infatti, essendo

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{v}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \int_0^r \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \frac{dr}{r}$$

dalla (I, 32), si ha

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \int_0^r \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \frac{dr}{r} = \frac{1}{r^2} \int_0^r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right] dr$$

che per la (II, 29) è uguale a zero.

Tornando al problema di Neumann, indichiamo con V la richiesta funzione armonica e regolare all'interno del cerchio γ (di raggio R) e con $F(\alpha)$ [se α è l'argomento del punto generico P di γ] la funzione assegnata che ci dà i valori che deve assumere *sul contorno* γ del cerchio la derivata normale, $\frac{dV}{dn}$, di V [$F(\alpha)$ deve esser data colla restrizione, (II, 10),

$$(II, 30) \quad \int_0^{2\pi} F d\alpha = 0 \quad] .$$

Per determinare la V all'interno di γ possiamo calcolarci colla formula di Poisson (II, 28) la funzione v armonica e regolare, tale che sia

$$\begin{cases} v = RF(\alpha), & \text{su } \gamma, \\ \Delta v = 0, & \text{entro } \gamma. \end{cases}$$

Otteniamo, se r e θ sono le coordinate polari del punto generico P relative al centro O del cerchio:

$$v(P) = \frac{R(R^2 - r^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\alpha) d\alpha}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)}$$

⁽¹⁾ Si osservi che l'integrale è convergente benché il denominatore della funzione da integrarsi si annulli nel limite inferiore, perchè abbiamo ammesso che ivi si annulli anche r , e quindi v/r o resta finito o diviene infinito di ordine minore di 1.

e, notiamo, se in essa si fa $r = 0$ si ottiene, per la (II, 30),

$$v(O) = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} F d\alpha = 0.$$

Possiamo allora costruire la funzione

$$V(P) = V(r, \theta) = \int_0^r \frac{v}{r} dr + \text{cost.} =$$

$$= \frac{R}{2\pi} \int_0^r \frac{(R^2 - r^2) dr}{r} \int_0^{2\pi} \frac{F(\alpha) d\alpha}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)} + \text{cost.}$$

la quale risolve il nostro problema. Essa infatti è armonica e regolare entro γ [come si è dimostrato poco sopra] e su γ la sua derivata normale vale

$$\left(\frac{dV}{dn} \right)_\gamma = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{(v)_\gamma}{R} = F(\alpha).$$

§ 31. Sulla risoluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann mediante rappresentazione conforme su un cerchio.

Dato che le trasformazioni conformi conservano l'armonicità delle funzioni [§ 28] segue ovviamente da tutta la trattazione precedente che noi sapremo risolvere il problema di Dirichlet per un'area σ qualsiasi che si sappia rappresentare conformemente [§ 26] sul cerchio. Infatti in tal caso, se P' è il corrispondente del punto generico P di σ , la funzione armonica V del problema si trasformerà in una nuova funzione \mathcal{Q} , ancora armonica, che assumerà in P' il valore $V(P)$, e si potrà ottenere $V(P)$ calcolando per mezzo della (II, 28) [in cui a V va sostituito \mathcal{Q}] il valore in P' di \mathcal{Q} . I valori che a \mathcal{Q} devono in tal caso essere assegnati nei punti M' del contorno γ del cerchio sono quelli che V assume nei corrispondenti punti M del contorno di σ .

Anche per il problema di Neumann si possono svolgere considerazioni analoghe. Però occorre notare che se, anche qui, \mathcal{Q} è la trasformata della funzione V che si vuole determinare ed M e M' sono punti corrispondenti rispettivamente del contorno s di σ e del contorno γ del cerchio, il valore, F , assegnato per $\frac{dV}{dn}$ in M non può essere assunto come valore di $\frac{d\mathcal{Q}}{dn'}$ in M' . Infatti ricordando [§ 25] che la tra-

sformazione f è [localmente] una affinità di modulo $\left| \frac{df}{dz} \right|$ si ha

$$dn' = \left| \frac{df}{dz} \right| dn$$

e, quindi,

$$\frac{dQ}{dn'} = \frac{dV}{dn} \cdot \left| \frac{df}{dz} \right|;$$

ne segue che se F è la funzione assegnata su s come valore della derivata normale $\frac{dV}{dn}$, la funzione che dà i corrispondenti valori di $\frac{dQ}{dn'}$ su γ deve essere

$$F \cdot \left| \frac{df}{dz} \right|.$$

§ 32. Trasformazione per raggi vettori reciproci nello spazio.

Una parte di tutto ciò che si è detto nei §§ precedenti si può trasportare dal caso del piano a quello dello spazio; però nello spazio non vi è una interpretazione altrettanto semplice attraverso funzioni di variabile complessa.

Possiamo, come esempio, definire la *trasformazione per raggi vettori reciproci* od *inversione rispetto ad una sfera* [«sfera fondamentale»] come quella corrispondenza biunivoca fra due spazi sovrapposti che si ottiene fissando un punto O [polo o centro d'inversione] e facendo corrispondere ad ogni punto P il punto P' [detto «immagine» di P rispetto alla sfera] allineato con P ed O e tale che, preso come unità il raggio della sfera fondamentale, si abbia [anche in segno] ⁽¹⁾

$$OP \cdot OP' = 1.$$

Essa è *conforme* e trasforma la regione interna alla sfera fondamentale nella regione esterna [e viceversa], ed i punti di tale sfera in se stessi. Ad ogni sfera [comprendendo in questa denominazione anche i piani, considerati come sfere di raggio infinito] fa corrispondere una sfera; ciò si riconosce subito se si osserva che in qualunque piano passante per O la detta trasformazione si riduce alla inversione nel piano, già studiata.

Però, ora, una funzione armonica $V(P)$, trasformata per inversione, *non* si muta in una funzione armonica $\mathcal{Q}(P')$. È invece la funzione $rV(P)$ [dove $r = OP$] che si muta in una funzione armonica.

⁽¹⁾ Se non si vuol prendere come unità di misura il raggio della sfera, e questo è di lunghezza K , occorre sostituire, a questa, la condizione $OP \cdot OP' = K^2$.

Tenendo presente questa considerazione si può risolvere, in modo analogo a quello seguito per il cerchio, il problema di Dirichlet per la sfera e, se la funzione V_γ dà i valori che la funzione armonica e regolare $V(P)$ assume sul contorno γ della sfera [di raggio R], si giunge per $V(P)$ alla formula [analogo a quella di Poisson]

$$(II, 31) \quad V(P) = V(r, \theta, \varphi) = \frac{R(R^2 - r^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{V_\gamma \sin \alpha \, d\alpha \, d\psi}{[r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)]^{3/2}},$$

ove r, θ, φ sono le coordinate polari del punto P rispetto al centro della sfera ed R, α, ψ quelle di un punto generico del contorno γ .

§ 33. Formula di Green.

Vogliamo nei §§ seguenti esporre un altro metodo per trattare il problema di Dirichlet, metodo che si fonda sull'uso della cosiddetta *funzione di Green*. Poichè questo metodo serve tanto per il problema in tre dimensioni quanto per quello in due, lo esporremo per il caso di tre dimensioni ed accenneremo brevemente alle formule relative al caso di due.

Dobbiamo premettere una importante formula, dovuta a Green, che serve a calcolare una funzione armonica e regolare V in un qualsiasi punto *interno* ad uno spazio S conoscendo i valori di V e della sua derivata normale al contorno σ di S [dati sovrabbondanti poichè, come sappiamo (§ 18), bastano i valori di V sul contorno per determinare i valori di V all'interno di S].

Per questo riprendiamo la formula (I, 21) e, fissato un punto P interno ad S ed indicata con r_P la distanza da P di un punto M generico variabile in S , applichiamo alle due funzioni V ed $\frac{1}{r_P}$. Osserviamo, però,

che la funzione $\frac{1}{r_P}$ non è regolare in tutto S [perchè in P diventa infinita] e perciò non possiamo applicare la (I, 21) integrando in tutto S : considereremo soltanto lo spazio S' che si ottiene da S escludendo P con una sferetta di centro P , raggio ε e superficie σ_0 , notando che il contorno di S' è costituito da σ e da σ_0 (fig. 25). Avremo:

$$(II, 32) \quad 0 = \int_{\sigma + \sigma_0} \left(V \frac{d}{dn} \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_P} \frac{dV}{dn} \right) d\sigma.$$

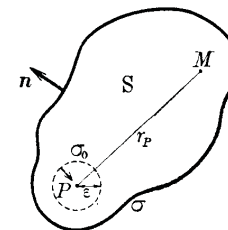


Fig. 25.

Ci è facile trasformare l'integrale esteso a σ_0 notando che su σ_0 è $r_P = \varepsilon$, $d\sigma_0 = \varepsilon^2 d\omega$ [se $d\omega$ è l'elemento superficiale della sfera di raggio 1 (1)] e

$$\left(\frac{d}{dn}\right)_{\sigma_0} = -\left(\frac{d}{dr_P}\right)_{\sigma_0} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

si ha così

$$(II, 33) \quad \int_{\sigma_0} \left(V \frac{d}{dn} \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_P} \frac{dV}{dn} \right) d\sigma_0 = \int_{\sigma_0} \left(V + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial r_P} \right) d\omega = 4\pi \bar{V} + 4\pi \frac{\partial \bar{V}}{\partial r_P} \varepsilon,$$

dove \bar{V} e $\frac{\partial \bar{V}}{\partial r_P}$ denotano i valori medi di V e $\frac{\partial V}{\partial r_P}$ su σ_0 il primo dei quali è uguale a $V(P)$ [v. § 18]. Se, ora, facciamo tendere ε a zero, $\frac{\partial \bar{V}}{\partial r_P}$ si mantiene finito per ipotesi, quindi l'ultimo termine della (II, 33) tende a zero e l'integrale (II, 33) tende al valore $4\pi V(P)$: avremo dunque dalla (II, 32)

$$(II, 34) \quad V(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left(\frac{1}{r_P} \frac{dV}{dn} - V \frac{d}{dn} \frac{1}{r_P} \right) d\sigma,$$

che è la *formula di Green*.

Osserviamo ancora che sarebbe facile vedere che la (II, 34) vale anche se S è lo spazio *esterno* a σ purchè V soddisfi alle condizioni *normali* all'infinito (II, 5).

In modo perfettamente analogo, nel piano [usando la funzione $-\log r_P$ ossia $\log 1/r_P$ invece di $1/r_P$ (cfr. § 21)] per una funzione V , armonica e regolare all'interno di un'area σ di contorno s , e per un punto P interno a σ , si troverebbe

$$(II, 34_1) \quad V(P) = \frac{1}{2\pi} \int_s \left(\log \frac{1}{r_P} \cdot \frac{dV}{dn} - V \frac{d \log \frac{1}{r_P}}{dn} \right) ds.$$

§ 34. Funzione di Green.

Per potere utilizzare le formule del § precedente per risolvere il problema di Dirichlet bisogna trovar il modo di eliminare da esse i valori della derivata normale. A tale scopo introduciamo una nuova funzione H a cui per ora imponiamo soltanto di essere armonica e regio-

lare all'interno dello spazio S . Se applichiamo ad H e V il lemma di Green (I, 21) avremo, per la loro armonicità,

$$(II, 35) \quad 0 = \int_{\sigma} \left(H \frac{dV}{dn} - V \frac{dH}{dn} \right) d\sigma;$$

moltiplicando poi ambo i membri di questa relazione per $\frac{1}{4\pi}$ e sommando membro a membro alla (II, 34) si ottiene

$$(II, 36) \quad V(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[\left(H + \frac{1}{r_P} \right) \frac{dV}{dn} - V \frac{d \left(H + \frac{1}{r_P} \right)}{dn} \right] d\sigma;$$

basta ora imporre ancora alla H di valere, su σ , $-1/r_P$ perchè la (II, 36) diventi

$$(II, 37) \quad V(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[V \frac{d \left(H + \frac{1}{r_P} \right)}{dn} \right] d\sigma.$$

in cui non compare più la derivata normale della V .

Di solito si introduce la funzione

$$G = H + \frac{1}{r_P}$$

[funzione di Green] e la formula precedente diventa

$$(II, 37') \quad V(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} V \frac{dG}{dn} d\sigma.$$

Il problema di Dirichlet è così ricondotto a quello di determinare una funzione G che goda delle seguenti proprietà:

- sia *armonica* in tutto lo spazio S ,
- sia *regolare* in tutto lo spazio S *eccettuato il punto* P in cui ha un infinito della forma $H + \frac{1}{r_P}$ [con H finito],
- si *annulli* sul contorno σ di S .

La funzione di Green dipende [oltre che dal punto P] *soltanto dal contorno* σ e non dai valori di V su esso assegnati, quindi essa serve a risolvere le infinite varietà del problema di Dirichlet relative al contorno dato.

Una analoga trattazione nel piano, fatta servendosi delle (I, 21₁) e (II, 34₁) invece che delle (I, 21) e (II, 34), porterebbe alla formula

$$(II, 38) \quad V(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_s V \frac{dG}{dn} ds,$$

(1) Cfr. per questo la nota 1 del § 39.

in cui G è la *funzione di Green* [nel piano] che in questo caso gode delle proprietà di

- essere armonica in tutta l'area σ interna ad s ;
- essere regolare in tutta l'area σ eccettuato il punto P in cui

ha un infinito logaritmico e, precisamente, è della forma $H + \log \frac{1}{r_P}$ con H finito;

- annullarsi sul contorno s di σ .

Anche in questo caso la funzione di Green dipende [oltre che dal punto P] soltanto dal contorno γ di σ e non dai valori su esso assegnati.

§ 35. Esempi: funzioni di Green per la sfera e per il cerchio.

Studiamo il caso in cui il campo S , considerato nei §§ precedenti, è limitato da una sfera σ , di raggio R e centro O . Sia P il punto generico prefissato di S , r la sua distanza da O e P' il punto posto sulla OP e tale che sia [anche in segno]

$$(II, 39) \quad OP \cdot OP' = R^2$$

[cioè P' sia il *punto immagine* di P rispetto alla sfera σ (§ 32)]. Sia, poi, M (fig. 26) un altro punto generico variabile nel campo S ed $r_P, r_{P'}$, le sue distanze da P e P' .

La funzione di Green relativa alla sfera è data da

$$(II, 40) \quad G(M) = \frac{1}{r_P} - \frac{R}{r} \frac{1}{r_{P'}};$$

infatti essa:

- è armonica in tutto lo spazio S , in quanto sono tali $\frac{1}{r_P}$ ed $\frac{1}{r_{P'}}$ [§ 20];

- è regolare in tutto S eccettuato il punto P in cui diventa infinita della forma voluta;

- si annulla sul contorno σ di S , in quanto se M va su σ (fig. 26), per la (II, 39), i due triangoli MOP, MOP' [aventi l'angolo \widehat{O} in comune] divengono simili e si ha

$$r : r_P = R : r_{P'}$$

ossia

$$\frac{1}{r_P} = \frac{R}{r} \frac{1}{r_{P'}}.$$

Applicando quindi la (II, 37') e calcolando la derivata normale che vi compare si potrebbe giungere alla formula che risolve il problema e si ritroverebbe la (II, 31).

Nel piano invece, se γ è un cerchio di raggio R e centro O , P un punto generico prefissato, P' il punto *immagine* di P rispetto a γ [e cioè tale che sia, anche

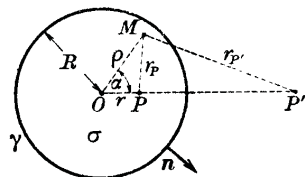


FIG. 26.

in segno (§ 27), $OP \cdot OP' = R^2$], M il punto generico variabile entro γ , r ed r' le distanze di P e P' da O , r_P ed $r_{P'}$ le distanze di M da P e P' (fig. 27), le stesse considerazioni svolte poco sopra per la sfera ci porterebbero a verificare che la funzione di Green è in questo caso

$$G(M) = \log \frac{1}{r_P} - \log \left(\frac{R}{r} \frac{1}{r_{P'}} \right).$$

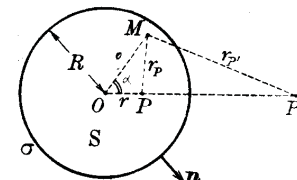


Fig. 27.

Applichiamo ora la (II, 38) e sviluppiamo tutto il calcolo della derivata normale di G che in essa compare. Per questo osserviamo che se ρ e α sono le coordinate polari di M rispetto ad O [assumendo OP come asse polare] (v. fig. 27) è

$$r^2_P = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \alpha,$$

$$r^2_{P'} = \rho^2 + r'^2 - 2\rho r' \cos \alpha = \rho^2 + \frac{R^4}{r^2} - 2\rho \frac{R^2}{r} \cos \alpha$$

e che su γ è

$$\frac{d}{dn} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)_{\rho=R},$$

quindi, con qualche trasformazione, dato che

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \log r_P = \frac{1}{r_P} \frac{\partial r_P}{\partial \rho} = \frac{\rho - r \cos \alpha}{r^2_P}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \log r_{P'} = \frac{\rho - \frac{R^2}{r} \cos \alpha}{r^2_{P'}}$$

e che sul cerchio è $r_{P'} = r_P R/r$, si ha

$$\left(\frac{dG}{dn} \right)_{\gamma} = \left(\frac{\frac{r^2}{R^2} \rho - \rho}{r^2_P} \right)_{\rho=R} = \frac{1}{R} \frac{r^2 - R^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}.$$

Sostituendo nella (II, 38) si ottiene così

$$V(P) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi R} \int_{\gamma} \frac{V ds}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{V d\alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}$$

che è la formula di Poisson (II, 28) già trovata col metodo d'inversione.

§ 36. Due proprietà della funzione di Green.

È facile vedere che la *funzione di Green* è positiva in tutto lo spazio S in cui è definita.

Infatti, dato che $G (= H + \frac{1}{r_P})$ in P tende a $+\infty$, potremo sempre trovare un intorno S_0 di P tale che in esso e sul suo contorno σ_0 la G sia positiva. Nello spazio residuo S' , poi, la G è regolare ed armonica, quindi [§ 18] avrà i suoi massimi e minimi sul contorno [costituito da σ e σ_0]. Per questo la G , essendo positiva su σ_0 e nulla su σ , avrà come valore minimo lo zero, e quindi anche in S' sarà positiva.

Si dimostra pure facilmente un'altra notevole proprietà della funzione di Green.

La funzione G è funzione del punto generico variabile M [le cui coordinate figurano in H ed in $r_P (= MP)$] ma dipende anche dal punto P finora considerato fisso: possiamo mettere in evidenza questo indicandola con

$$G_P(M).$$

Dimosteremo che essa è funzione *simmetrica* di M e P ossia che il valore in M della funzione di Green, G_P , relativa al punto P , è uguale al valore in P della funzione di Green, G_M , relativa al punto M , ossia

$$(II, 41) \quad G_P(M) = G_M(P).$$

Per vederlo osserviamo dapprima che G_P e G_M hanno una singolarità, in P la prima ed in M la seconda. Se escludiamo P e M da S con due sferette di raggio ε , di centro P e M e di contorno σ_1 e σ_2 (v. fig. 28), nello spazio residuo S' , G_P e G_M sono armoniche e regolari, quindi applicando ad esse il lemma di Green (I, 21) avremo

$$(II, 42) \quad \int_{\sigma} (G_P \frac{dG_M}{dn} - G_M \frac{dG_P}{dn}) d\sigma + \int_{\sigma_1} (\dots) d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} (\dots) d\sigma_2 = 0.$$

Su σ , G_P e G_M si annullano, quindi il primo integrale che compare nella (II, 42) è nullo. Quanto al secondo, osservando che su σ_1 è

$$\frac{d}{dn} = -\frac{\partial}{\partial r_P}, \quad G_P = H_P + \frac{1}{r_P}, \quad \frac{dG_P}{dn} = -\left(\frac{\partial H_P}{\partial r_P} - \frac{1}{r_P^2}\right),$$

otterremo

$$\int_{\sigma_1} (\dots) d\sigma_1 = -\int_{\sigma_1} \left[\left(H_P + \frac{1}{r_P} \right) \frac{\partial G_M}{\partial r_P} - G_M \left(\frac{\partial H_P}{\partial r_P} - \frac{1}{r_P^2} \right) \right] d\sigma_1$$

ed applicando il teorema del valor medio [colla solita sopralineatura

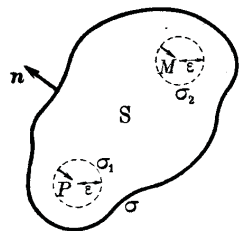


Fig. 28.

per indicare i valori medi] e notando che, su σ_1 , $r_P = \varepsilon$, avremo

$$\int_{\sigma_1} (\dots) d\sigma_1 = -\left(H_P \frac{\partial G_M}{\partial r_P} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial G_M}{\partial r_P} - G_M \frac{\partial H_P}{\partial r_P} + G_M \frac{1}{\varepsilon^2} \right) 4\pi\varepsilon^2.$$

E se si passa al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha che $\overline{G_M} \rightarrow G_M(P)$ e si ottiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_1} (\dots) d\sigma_1 = -4\pi G_M(P).$$

Con analogo ragionamento si potrebbe poi dimostrare che per il terzo integrale a primo membro della (II, 42) si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_2} (\dots) d\sigma_2 = 4\pi G_P(M):$$

quindi passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ nella (II, 42) si ottiene la (II, 41).

Ripetendo gli stessi ragionamenti in due dimensioni si troverebbe che le proprietà dimostrate valgono anche per la funzione di Green nel piano.

§ 37. Funzione di Green nel piano e rappresentazione conforme in un cerchio.

Abbiamo già visto che il problema di Dirichlet per un'area piana σ qualsiasi si sa risolvere quando si sappia trovare una funzione $f(z)$, [$z = x + iy$], che

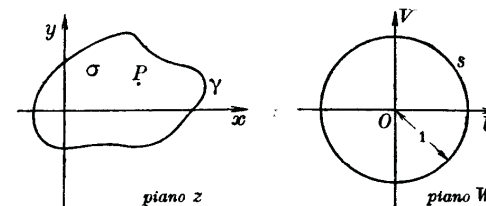


Fig. 29.

permetta di rappresentare conformemente l'area σ su un cerchio [§ 31]. Abbiamo, poi, visto poco sopra [§ 34] che la ricerca della soluzione del problema di Dirichlet si riduce alla ricerca della funzione di Green, G .

Dimosteremo ora direttamente che i due problemi [ricerca della f o della G] sono equivalenti.

Pensato il piano di σ come quello della variabile complessa $z = x + iy$ ed il piano del cerchio [che supporremo di centro l'origine e raggio 1] come quello della variabile $W = U + iV$, (fig. 29), sia

$$W = f(z)$$

la funzione che definisce la trasformazione conforme accennata. Ad ogni punto z del piano (x, y) corrisponderà un punto W del piano (U, V) in modo che se z è interno a σ , W è interno al cerchio e che se z è sul contorno γ di σ , W è sul contorno s del cerchio [cioè $|W_s| = |f(z_s)| = 1$]: noi imporremo l'ulteriore condizione [cosa sempre possibile (§ 26)] che un punto P prefissato di σ si trasformi nel centro del cerchio [cioè che sia $f(z_P) = 0$].

Dimostriamo ora che è

$$G_P = -\log |f(z)|.$$

Anzitutto, posta la f sotto la forma

$$f(z) = (z - z_P)F(z),$$

osserviamo che, essendo la trasformazione biunivoca, la funzione $f(z)$ deve essere invertibile ed, in particolare, deve essere

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_P \neq 0:$$

quindi, poichè

$$\frac{df}{dz} = F(z) + (z - z_P) \frac{dF}{dz},$$

sarà

$$F(z_P) \neq 0.$$

Premesso ciò facciamo vedere che la funzione $-\log |f(z)|$ soddisfa a tutte le condizioni richieste per G_P [§ 34]:

a) la sua *armonicità* discende immediatamente dall'essere essa la parte reale della funzione analitica $-\log f$, poichè, detto α l'argomento di f , cioè posto $f = |f|e^{i\alpha}$, si ha $-\log f = -\log |f| - i(\alpha + 2k\pi)$;

b) essendo

$$-\log |f(z)| = -\log (|z - z_P| |F(z)|) = -\log r_P - \log |F(z)|$$

[dove $r_P = |z - z_P|$] essa è *regolare* in ogni punto eccetto che in P dove ha una singolarità del tipo $H + \log 1/r_P$ [con H finito];

c) essa è *nulla sul contorno* γ perchè su esso è $|f(z)| = 1$ e quindi $-\log |f(z)| = 0$.

Viceversa se è nota la funzione di Green $G_P = H_P + \log 1/r_P$ è facile trovare la funzione $f(z)$ che realizza la trasformazione conforme suddetta poichè, se Γ_P è la funzione coniugata di G_P [§ 22], la funzione $f(z)$ è data da

$$(II, 43) \quad f(z) = e^{-(G_P + i\Gamma_P)}$$

Infatti:

essa muta tutti i punti del contorno γ di σ in punti del contorno s del cerchio, perchè se z è su γ è $G_P = 0$ e si ha

$$W = f(z) = e^{-i\Gamma_P}$$

e quindi è $|W_s| = 1$:

il punto P si trasforma nell'origine, perchè, essendo

$$W = f(z) = e^{-(H_P + i\Gamma_P) - \log 1/r_P} = r_P e^{-(H_P + i\Gamma_P)}$$

se si passa al limite per $r_P \rightarrow 0$, mantenendosi finita la quantità $H_P + i\Gamma_P$, si ha $z_P = 0$.

Resterebbe ancora da far vedere che la corrispondenza determinata dalla (II, 43) è biunivoca, cosa che, per brevità, tralascieremo.

CAPITOLO III.

TEORIA DEL POTENZIALE

CAMPO ELETTROSTATICO SENZA CONDUTTORI

§ 38. Generalità. Leggi di Coulomb e di Newton.

Si chiama « *teoria del potenziale* » la teoria matematica delle forze che si esercitano fra cariche elettriche in riposo, o fra poli magnetici in riposo, od anche fra masse materiali in virtù dell'attrazione newtoniana: i tre ordini di fenomeni sono sotto l'aspetto matematico pressochè identici.

Fondamentale per tutta la teoria è la legge [di Coulomb]: *la forza F che si esercita fra due cariche elettriche, o magnetiche, puntiformi ⁽¹⁾ e_1 ed e_2 , in quiete, poste alla distanza r , ha la direzione della congiungente le due cariche ed è data da*

$$(III, 1) \quad F = k \frac{e_1 e_2}{r^2}, \quad (k = \text{costante positiva}),$$

purchè si faccia corrispondere il segno + ad una azione repulsiva, il segno - ad una attrattiva. Si ha cioè che se le due cariche sono di egual segno la forza è repulsiva, se sono di segno contrario, invece, è attrattiva.

Il valore della costante k che vi compare dipende dalle unità di misura che si adottano. Si può definire l'unità di carica elettrica in modo che sia $k = 1$ per l'elettricità e si può derivarne un sistema di unità di misura detto « *elettrostatico* »; si può invece definire l'unità di intensità di un polo magnetico in modo che sia $k = 1$ per il magnetismo e si giunge al sistema « *elettromagnetico* ». Noi adotteremo per tutte le grandezze elettriche, salvo indicazione contraria, le *unità elettrostatiche assolute* [cioè del sistema C.G.S.] e le indicheremo col simbolo *u.e.s.a.*,

⁽¹⁾ Intenderemo con questo che le dimensioni delle cariche siano trascurabili rispetto alla loro mutua distanza.

per le grandezze magnetiche invece useremo le *unità elettromagnetiche assolute* del sistema C.G.S. [u.e.m.a.]⁽²⁾.

Una legge analoga alla (III, 1) [legge di Newton] vale, salvo una differenza di segno, per le masse gravitazionali: se m_1 ed m_2 sono due masse ed r è la loro distanza, l'intensità della forza F che si esercita fra loro è

$$F = -f \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (f = \text{costante positiva}).$$

[vi compare il segno — perchè, colla convenzione di poco sopra, qui F è sempre negativa cioè la forza è sempre attrattiva]. Essa differisce da quella di Coulomb per la costante, $-f$, e perchè si deve escludere il caso di masse negative. Ne segue che la teoria delle azioni gravitazionali è contenuta in quella delle azioni elettriche e magnetiche ma non viceversa. Quanto al valore di f si potrebbe definire l'unità di massa in modo che sia $f = 1$ [ed in tal caso si dovrebbe assumere come massa unitaria quella di 3870 grammi circa, se r si esprime in cm]; in pratica non lo si fa ed il valore di f è, nel sistema C. G. S. ⁽³⁾,

$$f = 6,66 \cdot 10^{-8}.$$

Noi svolgeremo tutta la trattazione riferendoci, generalmente, alle cariche elettriche, ma tutti i risultati ottenuti [salvo indicazione contraria] valgono anche per poli magnetici [espressi in u.e.m.a.] e, colla limitazione di cui sopra, per masse gravitazionali [esprese nelle unità per cui è $f = 1$].

§ 39. Campo elettrico dovuto a cariche puntiformi. Teorema di Gauss.

Dicesi « *campo elettrico* » in un punto generico P , la forza \mathbf{E} che si eserciterebbe su una carica elettrica positiva unitaria in quiete posta in P . Esso è quindi un campo vettoriale.

⁽²⁾ L'u.e.s.a. di carica elettrica è la carica che posta ad un cm da una carica eguale la respinge con la forza di una dina (nel sistema di unità detto *sistema pratico*, invece, l'unità di carica elettrica è il *coulomb* che vale $3 \cdot 10^9$ u.e.s.a.). Analogamente l'u.e.m.a. di quantità di magnetismo è quella che posta ad un cm da una quantità eguale la respinge colla forza di una dina.

⁽³⁾ È stato adottato in questi ultimi tempi un nuovo sistema di unità di misura proposto dal prof. Giorgi. In esso si assumono quattro unità fondamentali:

lunghezza: *metro*; massa: *kg*; tempo: *secondo*; carica elettr.: *coulomb*;

[l'ultima unità può essere sostituita da altre, p. es. dall'unità di resistenza (*ohm*) assunta come fondamentale]. Con esso la formula di Coulomb ha un coefficiente k diverso secondo che si tratta di elettricità o di magnetismo: precisamente si ha

$$k_{el} = 8,9871 \cdot 10^9, \quad k_{mag} = 6,3326 \cdot 10^4, \quad f = 6,66 \cdot 10^{-11}.$$

Si dicono « *linee di forza* » e « *tubi di forza* » le linee di flusso ed i tubi di flusso del campo \mathbf{E} [§ 8].

Il più semplice di tutti i campi è quello dovuto ad una carica puntiforme e [posta in un punto fisso O] (fig. 30). La sua grandezza, per la (III, 1), sarà [scrivendo, come faremo di regola, \mathcal{E} per $|\mathbf{E}|$]

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r^2}, \quad (r = OP),$$

ed, introducendo il vettore $\mathbf{r} = P - O$, la sua espressione vettoriale è [§ 4, nota 3]

$$(III, 2) \quad \mathbf{E} = \frac{e}{r^2} \text{vers } \mathbf{r} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r}.$$

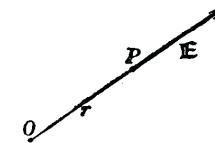


Fig. 30.

Le linee di forza sono date dai raggi uscenti da O , se la carica e è positiva, convergenti in O nel caso opposto. I tubi di forza sono coni col vertice in O .

Consideriamo ora un tubo di forza infinitesimo ed una superficie σ che lo tagli (fig. 31); sia $d\sigma$ l'area infinitesima tagliata su essa dal

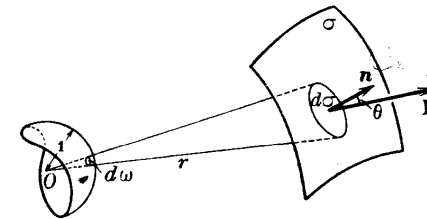


Fig. 31.

tubo, r la distanza di $d\sigma$ da O ed \mathbf{n} il versore della normale a $d\sigma$. Il flusso, $d\Phi$, di \mathbf{E} attraverso $d\sigma$ sarà [§ 5]

$$d\Phi = \mathcal{E}_n d\sigma, \quad (\mathcal{E}_n = \mathbf{E} \times \mathbf{n}),$$

[positivo o negativo secondo che l'angolo $\widehat{\mathbf{n}\mathbf{E}}$ è acuto od ottuso] e, se $d\omega$ è l'angolo solido ⁽¹⁾ sotto cui da O è vista $d\sigma$, ed è $\theta = \widehat{\mathbf{n}\mathbf{E}}$, otterremo

$$(III, 3) \quad d\Phi = \mathcal{E} \cos \theta d\sigma = e \frac{\cos \theta}{r^2} d\sigma = e d\omega.$$

Il flusso è dunque lo stesso attraverso una qualsiasi sezione del tubo

⁽¹⁾ Si definisce come « *angolo solido sotto cui da un punto O si vede un elemento superficiale $d\sigma$* » l'area, tagliata sulla sfera di raggio unitario e centro O dal cono che dal centro proietta il con-

di forza cioè [§ 8] *il campo elettrico è un campo solenoidale* ⁽²⁾ [eccettuato il punto occupato dalla carica, dove è $\text{div } \mathbf{E} = \infty$].

Se ora consideriamo una superficie chiusa σ qualsiasi, il flusso totale del vettore \mathbf{E} che l'attraversa, per la (III, 3), sarà dato da

$$\Psi = \int_{\sigma} e d\omega = e\omega_0,$$

dove ω_0 è l'angolo solido relativo ad O ed a σ . Se O è interno a σ si ha [nota 1], $\omega_0 = 4\pi$ e quindi

$$\Psi = 4\pi e$$

[costante ed indipendente dalla posizione della carica all'interno di σ]; se O è sulla superficie σ [in un punto dotato di piano tangente unico] è $\omega_0 = 2\pi$ e quindi

$$\Psi = 2\pi e;$$

se, infine, O è esterno a σ si ha $\omega_0 = 0$ e quindi

$$\Psi = 0$$

torno di $d\sigma$, presa col segno + o - secondo che da O si vede la faccia negativa o rispettivamente positiva di $d\sigma$.

È immediata la sua espressione analitica: infatti, [fig. 31], indicando con $d\omega$ l'angolo solido relativo ad O e $d\sigma$ e con θ l'angolo $\widehat{r\sigma}$, si ha

$$r^2 d\omega = d\sigma \cos \theta$$

e quindi (in valore e segno)

$$(*) \quad d\omega = \frac{\cos \theta}{r^2} d\sigma.$$

Per una superficie finita σ si ha, quindi, come valore dell'angolo solido ω_0 ad essa relativo:

$$(**) \quad \omega_0 = \int_{\sigma} \frac{\cos \theta}{r^2} d\sigma = - \int_{\sigma} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma.$$

È immediato ricavare da essa che, colla solita convenzione per la normale [positiva verso l'esterno], per una superficie chiusa si ha

$$\omega_0 = 4\pi, \quad \omega_0 = 2\pi, \quad \omega_0 = 0,$$

a seconda che O è interno, sul contorno [in un punto dotato di piano tangente unico] od esterno a σ . Se si fosse fatta per la normale la convenzione contraria si troverebbe rispettivamente -4π , -2π , 0 .

⁽²⁾ È facile del resto verificare direttamente che è $\text{div } \mathbf{E} = 0$ infatti assumendo coordinate polari di centro O e ricordando l'espressione (I, 30₁) della divergenza in coordinate polari si ha

$$(*) \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \mathcal{E}) = \frac{1}{r^2} \frac{de}{dr} = 0.$$

Inversamente, l'unica legge di forza [di tipo centrale] per cui il campo è solenoidale è la coulombiana: difatti se vale la (*), cioè $\frac{d}{dr} (r^2 \mathcal{E}) = 0$, se ne ricava $r^2 \mathcal{E} = \text{cost.}$

Riassumendo: il flusso, uscente da una superficie chiusa qualsiasi σ , del campo prodotto da una carica puntiforme e , vale $4\pi e$, zero, $2\pi e$, a seconda che la carica è interna, esterna oppure su σ [teorema di Gauss per una carica puntiforme].

Se invece di una sola abbiamo più cariche puntiformi e_1, e_2, \dots, e_N , il campo complessivo \mathbf{E} ad esse dovuto è dato dalla somma vettoriale,

$$\mathbf{E} = \sum_1^N \mathbf{E}_i,$$

dei singoli campi \mathbf{E}_i , e quindi il flusso Ψ del vettore \mathbf{E} è la somma dei flussi dei singoli vettori \mathbf{E}_i . Applicando i risultati di poco sopra otteniamo che anche qui il campo del vettore \mathbf{E} è solenoidale [all'infuori che nei punti occupati dalle cariche dove la $\text{div } \mathbf{E}$ è infinita] e che il flusso Ψ uscente da una superficie chiusa qualsiasi σ è dato da

$$(II, 4) \quad \Psi = 4\pi \sum_{\text{int.}} e_i + 2\pi \sum_{\text{sup.}} e_i,$$

dove il primo sommatorio è esteso a tutte le cariche interne a σ , ed il secondo a tutte quelle che sono su σ [teorema di Gauss per cariche puntiformi].

§ 40. Campo elettrico relativo ad una distribuzione spaziale continua di cariche.

Nel caso di una distribuzione spaziale continua di cariche è necessario introdurre il concetto di « densità spaziale di carica, ρ » [analogo alla densità di massa]. Se de è la carica contenuta in un elemento di volume dS , ρ è definita da

$$(III, 5) \quad de = \rho dS;$$

brevemente si dice, di solito, ρ è la carica per unità di volume ⁽¹⁾.

Il campo \mathbf{E} in un punto qualunque è la risultante dei campi dovuti agli infiniti elementi di carica de [considerato ognuno come carica puntiforme] e le sue componenti quindi si possono calcolare come integrali tripli: vedremo però più oltre un metodo più semplice per tale calcolo [§ 43]. Osserviamo fin d'ora che [come si dimostrerà in seguito (§ 43)] il vettore \mathbf{E} è finito anche nello spazio occupato dalle cariche.

Calcoliamo ora il flusso uscente da una superficie σ quando si abbia una distribuzione spaziale S di carica (fig. 32). Anche per esso potremo pensare di decomporre S in tanti elementi dS di carica de , carica che

⁽¹⁾ Le cariche puntiformi si possono considerare come punti dello spazio nei quali ρ è infinita.

La forma più generale è a pag. 120

potremo supporre, senza mutare in nulla il flusso uscente, concentrata in un punto P di dS . Applicando allora il teorema di Gauss [§ prec.] e sommando gli elementi di carica col simbolo di integrale avremo, per il flusso Ψ uscente da σ , l'espressione

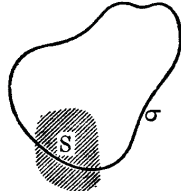


Fig. 32.

$$(III, 6) \quad \Psi = 4\pi \int_S \rho dS = 4\pi \int_S de = 4\pi e_{int}$$

[dove e_{int} indica la carica totale interna a σ . Quindi eventuali distribuzioni spaziali di carica esterne a σ non influiscono sul valore di Ψ . Ed anche se σ taglia la zona dove sono distribuite le cariche (fig. 32), le distribuzioni spaziali su σ non contribuiscono al flusso purchè la densità ρ sia finita in ogni punto di σ , come supponiamo.]

La (III, 6) vale, così, per una qualsiasi distribuzione spaziale di carica e ci dà il teorema di Gauss in una forma più generale.

Aggiungiamo che ad essa possiamo dare forma differenziale ricordando il teorema della divergenza (I, 15'). Infatti si ha che, qualunque sia lo spazio S è, [v. (III, 6)],

$$\int_S \text{div } \mathbf{E} dS = \Psi = 4\pi \int_S \rho dS,$$

cioè

$$\int_S (\text{div } \mathbf{E} - 4\pi\rho) dS = 0.$$

Ne segue, per l'arbitrarietà dello spazio S [v. § 7, nota 2]

(III, 7)

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

In particolare nei punti dove non esistono cariche ($\rho = 0$) il campo è solenoidale [come abbiamo già avuto occasione di notare per il caso di cariche puntiformi (§ prec.)].

§ 41. Alcune applicazioni.

Il teorema di Gauss può servire in qualche caso a calcolare il campo elettrico \mathbf{E} senza ricorrere direttamente alla legge di Coulomb.

Faremo due applicazioni per distribuzioni a densità, ρ , costante.

1. - Sfera piena omogenea. Lo spazio S con carica sia quello interno ad una sfera Σ di raggio R (fig. 33). Il campo elettrico \mathbf{E} , per simmetria, sarà costante su qualsiasi sfera concentrica a Σ ed inoltre sarà diretto secondo i raggi uscenti

da O . Avremo così per il flusso totale Ψ uscente da una tale sfera, σ , passante per il punto generico P

$$\Psi = \mathcal{G} 4\pi r^2, \quad (r = OP).$$

Ora, se P è esterno ad S , ($r > R$), e quindi tutte le cariche restano interne a σ , avremo per il teorema di Gauss

$$\Psi = 4\pi e$$

[dove e è la carica totale di S , $\frac{4}{3}\pi R^3\rho$] e ne segue

$$(III, 8) \quad \mathcal{G} = \frac{e}{r^2} \quad \text{ed} \quad \mathbf{E} = \frac{e}{r^2} \text{vers } \mathbf{r}.$$

Confrontando questa espressione colla (III, 2) vediamo che la sfera S agisce su un punto P esterno come se la carica fosse tutta concentrata nel centro ⁽¹⁾.

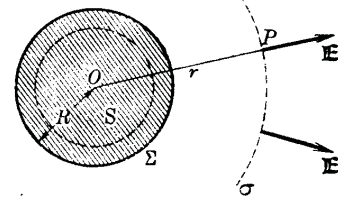


Fig. 33.

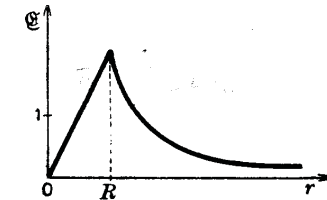


Fig. 34.

Se, invece, il punto P è interno ad S , ($r < R$), sempre per il teorema di Gauss e notando che la carica totale interna è solo quella interna alla sfera σ [e cioè $\frac{4}{3}\pi r^3\rho$], avremo

$$\Psi = 4\pi \cdot \frac{4}{3}\pi r^3\rho.$$

Ne segue

$$(III, 9) \quad \mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi r\rho \text{vers } \mathbf{r},$$

cioè all'interno della sfera il campo è direttamente proporzionale alla distanza dal centro.

Sulla superficie Σ della sfera S , poi, [$r = R$], i due valori (III, 8) e (III, 9), come ci si poteva attendere, coincidono. Il diagramma di \mathcal{G} , in funzione della distanza r dal centro, è quello della fig. 34.

⁽¹⁾ Questo ragionamento e questo risultato valgono anche [come si riconosce immediatamente] se ρ , anziché essere costante, è funzione della distanza dal centro, poichè anche in tal caso sussiste la simmetria sferica. Essi si estendono poi anche, come è ovvio, al caso della gravitazione. In particolare, poichè il Sole e i pianeti si possono, in prima approssimazione, ritenere dotati di simmetria sferica, si trova qui la giustificazione dei buoni risultati che si ottengono in meccanica celeste sostituendo il Sole e i pianeti con masse puntiformi poste nei loro centri.

[Ricordando che il ragionamento fatto vale anche, in particolare, per masse gravitazionali, abbiamo che la (III, 9) ci dà pure il modo di variare della forza di gravità all'interno della Terra supposta sferica ed omogenea].

2. - *Sfera cava omogenea.* Passiamo ora al caso di una distribuzione di carica S tutta compresa fra due sfere concentriche di raggi R_1 ed R_2 (fig. 35).

Analogamente a quanto sopra potremmo tracciare una sfera σ di centro O passante per il punto generico P e considerare, per quanto si è visto, l'azione

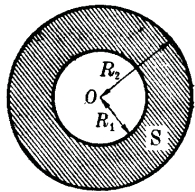


Fig. 35.

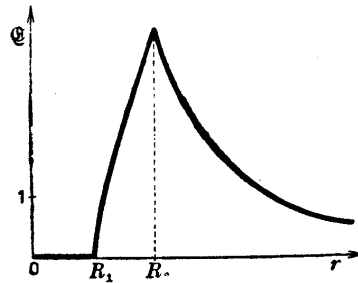


Fig. 36.

in P come dovuta a tutte le cariche interne a σ supposte concentrate in O . Otterremo così:

$$(III, 10) \quad \mathfrak{E} = \begin{cases} 0 & \text{all'interno della cavità,} \\ \frac{4}{3}\pi\rho \frac{r^3 - R_1^3}{r^2} & \text{» » distribuzione S,} \\ \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} & \text{all'esterno.} \end{cases}$$

Il diagramma di \mathfrak{E} in funzione di r è quello della fig. 36.

§ 42. Potenziale di cariche puntiformi.

Consideriamo, nel punto generico P , il campo

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^2} \text{vers } r$$

prodotto da una carica *puntiforme* e ; esso si può esprimere col gradiente della funzione di P

$$(III, 11) \quad V(P) = \frac{e}{r}$$

ponendo

$$(III, 12) \quad \mathbf{E} = -\text{grad } V :$$

infatti $\text{grad } V$ è diretto [§ 4] normalmente alle superficie $V = \text{cost.}$ [cioè nella direzione di r] nel verso secondo cui la V cresce [quindi verso la carica e e se e è positivo, nel verso opposto, se e è negativo]-ed il suo modulo è

$$|\text{grad } V| = \left| \frac{dV}{dr} \right| = \frac{|e|}{r^2} = \mathfrak{E}.$$

La (III, 12) equivale a notare che (eccettuato il punto $r = 0$) è $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ cioè il campo elettrico è irrotazionale [v. (I, 38)]. Questa funzione scalare $V(P)$ si chiama « *potenziale prodotto dalla carica e nel punto P* » [punto *potenziato*] ⁽¹⁾.

Evidentemente si potrebbe aggiungere a $V(P)$ una costante arbitraria e la (III, 12) seguirebbe a valere: si usa però definire come *potenziale* la funzione $V(P)$ che oltre a soddisfare la (III, 12) si annulla all'infinito ⁽²⁾: essa resta allora univocamente determinata.

Si nota subito che il *significato* di $V(P)$ è quello di *lavoro*, L_P^∞ , che la forza \mathbf{E} del campo esegue quando l'unità di carica positiva viene portata dal punto P all'infinito. Infatti essendo, per la (I, 7), $\mathbf{E} \times dP = -\text{grad } V \times dP = -dV$, tale lavoro sarà

$$L_P^\infty = -\int_P^\infty dV = -[V_\infty - V(P)] = V(P).$$

In altre parole si può dire che $V(P)$ misura il lavoro che si deve compiere contro la forza elettrica per portare l'unità di carica positiva dall' ∞ al punto P . Tale lavoro è, come si vede, indipendente dal cammino seguito per trasportare la carica.

È chiaro poi che per il trasporto di una carica e_0 , non unitaria il lavoro sarebbe $e_0 V$ ⁽³⁾.

Si può esprimere colla V il lavoro L_P^Q compiuto dalla forza elettrica quando la carica unitaria si porti dal punto P ad un altro punto Q : infatti, andando da P all' ∞ lungo una linea s passante per Q si ha $V(P) = L_P^\infty + V(Q)$ e quindi

$$(III, 13) \quad L_P^Q = \int_P^Q \mathfrak{E}_s ds = V(P) - V(Q).$$

⁽¹⁾ Ricordiamo che nel sistema di unità pratiche l'unità di potenziale è il volt, che vale 1/300 della u.e.s.a. qui adottata.

⁽²⁾ Talvolta si assume come zero il potenziale della Terra [e di tutti i corpi conduttori ad essa collegati come i muri, ecc.]: quando si adotta questa convenzione si deve sostituire in tutto ciò che segue la parola « Terra » alla parola « infinito ».

⁽³⁾ In meccanica razionale, invece, si chiama *potenziale*, U , l'energia potenziale cambiata di segno [senza specificarne la costante additiva]: nel caso nostro sarebbe $U = -e_0 V + \text{cost.}$

Osserviamo infine che la funzione $V(P)$ è armonica e regolare [tranne che nel punto occupato dalla carica e] e soddisfa alle condizioni normali all'infinito [§ 19]: e, precisamente, si ha, chiamando r_0 la distanza da un punto fissato a piacere [per es. dall'origine]

$$(III, 14) \quad \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0 V = e, \quad \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0^2 \frac{dV}{dr_0} = -e.$$

Anche nel caso in cui il campo elettrico \mathbf{E} è quello dovuto a *più cariche puntiformi* esiste una funzione V tale che $\mathbf{E} = -\text{grad } V$ [cioè anche in questo caso il campo elettrico è irrotazionale]: essa è data dalla somma dei potenziali V_i prodotti dalle singole cariche. Con essa lo studio del campo

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = -\text{grad } \sum_i V_i$$

è reso più facile perchè la somma, *vettoriale*, $\sum_i \mathbf{E}_i$ dei campi \mathbf{E}_i è ricondotta alla somma, *scalare*, dei relativi potenziali.

Il suo significato fisico è ancora quello di lavoro che si deve compiere contro la forza elettrica per portare l'unità di carica positiva dall'infinito al punto potenziato.

È evidente che anche in questo caso $V(P)$ è armonica e regolare [tranne che nei punti occupati da cariche] e soddisfa alle condizioni normali all'infinito: precisamente si ha, chiamando, al solito, r_0 la distanza da un punto fissato a piacere,

$$(III, 15) \quad \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0 V = \sum_i e_i, \quad \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0^2 \frac{dV}{dr_0} = -\sum_i e_i.$$

Aggiungeremo a questo proposito l'osservazione generale che le superfici $V = \text{cost.}$ si chiamano «*superfici equipotenziali*» e che le «*linee di forza*» sono le loro traiettorie ortogonali, come risulta subito dal fatto che \mathbf{E} , essendo $-\text{grad } V$, è normale alle superfici $V = \text{cost.}$ [§ 4].

§ 43. Potenziale di una distribuzione spaziale continua di cariche e sue proprietà.

Ci è ora facile estendere il concetto di potenziale ad una *distribuzione spaziale continua di cariche* [di densità ρ che supporremo dovunque finita]. Infatti decomponendo al solito lo spazio S , occupato da cariche, in tanti elementi dS di carica $de = \rho dS$ e considerando tali elementi come puntiformi, avremo per il potenziale prodotto da un elemento dS generico l'espressione

$$\frac{de}{r} = \frac{\rho dS}{r}$$

1) in una distribuzione continua $V(P)$ è finito ovunque, sia dentro che fuori

[dove r è la distanza del punto potenziato P da un punto M di dS] e per il potenziale complessivo

$$(III, 16) \quad V(P) = \int_S \frac{\rho dS}{r}$$

Per scrivere in modo esplicito tale integrale possiamo indicare con x, y, z le coordinate del punto potenziato P e con ξ, η, ζ quelle del punto generico M di S : avremo così

$$(III, 16') \quad V(x, y, z) = \iiint_S \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

Daremo ora alcune proprietà del potenziale $V(P)$ dovuto ad una distribuzione spaziale continua di cariche.

a) *Il potenziale $V(P)$ è finito in tutto lo spazio.*

Infatti, se P è *esterno* allo spazio delle cariche S , l'integrale (III, 16) è senza dubbio convergente, perchè r in tal caso non si annulla mai e ρ è, per ipotesi, sempre finita; quindi $V(P)$ è finito. Potrebbe invece nascere il dubbio che se il punto P è *interno* ad S [oppure sul suo contorno], il potenziale $V(P)$ sia ∞ , perchè nel caso di cariche puntiformi si è visto che $V(P)$ diviene ∞ quando P coincide con un punto occupato da una delle cariche. Ma, invece, l'integrale (III, 16) è convergente anche in questo caso, benchè la funzione integranda divenga infinita nel punto P [perchè ivi è $r = 0$]: lo si può vedere prendendo un sistema di coordinate polari di centro P . Infatti, l'integrale assume allora la forma seguente [v. (I, 25₂)]

$$(III, 17) \quad V(P) = \iiint \rho \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi}{r} = \iiint \rho r \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

e si nota che per $r = 0$ non vi è singolarità. [La singolarità nel caso di carica puntiforme proviene dal fatto che in quel caso la densità spaziale ρ , nel punto occupato dalla carica, è ∞].

b) *Il potenziale $V(P)$ è continuo in tutto lo spazio.*

Infatti se P è *esterno* ad S ciò è evidente. Se invece P è *interno*, consideriamo, in S , oltre a P un altro punto P' ed uno spazio S_1 che li contenga; sia S_2 lo spazio residuo di S e siano V_1 e V_2 i valori dei potenziali prodotti dalle cariche dei due spazi S_1 ed S_2 [con che $V = V_1 + V_2$]. Essendo P e P' esterni ad S_2 , V_2 è certo continuo in P e P' , possiamo quindi occuparci solo di V_1 . Sia r_1 la massima dimen-

sione di S_1 e ρ_1 il limite superiore di ρ in S_1 : si avrà, ricordando la (III, 17) ed osservando che è $r < r_1$,

$$V_1(P) = \iiint_{S_1} \rho r \sin \theta dr d\theta d\varphi \leq 4\pi\rho_1 \int_0^{r_1} r dr = 2\pi\rho_1 r_1^2$$

ed, analogamente, per P' si potrebbe vedere che è

$$V_1(P') \leq 2\pi\rho_1 r_1^2;$$

quindi

$$|V_1(P) - V_1(P')| \leq |V_1(P)| + |V_1(P')| \leq 4\pi\rho_1 r_1^2.$$

Se noi facciamo tendere P' a P , r_1 può tendere a zero ed avremo che, fissato un ε piccolo a piacere, da un certo punto in poi sarà sempre $4\pi\rho_1 r_1^2 < \varepsilon$ e quindi

$$|V_1(P) - V_1(P')| < \varepsilon.$$

Dunque V_1 , e di conseguenza V , è continuo in tutto S .

Anzi avendo imposto come unica condizione che la ρ sia finita [condizione certo soddisfatta per tutti i punti esterni ad S ($\rho = 0$)], il nostro ragionamento vale anche per i punti della superficie che limita S : quindi $V(P)$ è continuo anche attraverso la superficie limite [dove è discontinua la ρ].

c) *Le derivate prime di $V(P)$ sono finite e continue in tutto lo spazio.*

Lo si potrebbe vedere considerando, ad es., per la $\frac{\partial V}{\partial x}$, la funzione

$$V^{(1)} = \int_S \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} dS = - \int_S \rho \frac{x - \xi}{r^3} dS$$

e dimostrando, con un procedimento analogo a quello sopra seguito per $V(P)$, che essa è finita e continua in tutto lo spazio. Si farebbe, poi, vedere, calcolando $\frac{\partial V}{\partial x}$ come

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h, y, z) - V(x, y, z)}{h},$$

che è

$$V^{(1)} = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Quindi la (III, 16) è derivabile sotto il segno di integrale e le sue derivate prime rappresentano sempre le componenti del campo, che risulta così finito e continuo in ogni punto, ed anche attraverso la superficie limite.

d) *Se le cariche sono tutte a distanza finita, $V(P)$ soddisfa alle condizioni normali all'infinito (II, 5).*

Per verificarlo indichiamo rispettivamente con r_1 ed r_2 la massima e la minima distanza da P del punto generico M di S : sarà

$$\frac{1}{r_1} \int_S \rho dS < V(P) < \frac{1}{r_2} \int_S \rho dS$$

cioè, indicando con e la carica totale di S ,

$$\frac{e}{r_1} < V(P) < \frac{e}{r_2}.$$

Chiamiamo poi r_0 la distanza di P da un qualunque punto fisso [al finito] per es. l'origine, e moltiplichiamo la precedente per r_0 : avremo

$$e \frac{r_0}{r_1} < r_0 V(P) < e \frac{r_0}{r_2}.$$

Notiamo ora che, se il punto P si allontana indefinitamente, cioè se r_0 tende all'infinito, si ha [come si vede subito geometricamente] $\lim r_0/r_1 = \lim r_0/r_2 = 1$: quindi, passando al limite, le disuguaglianze precedenti danno

$$(III, 18) \quad \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0 V(P) = e.$$

Con ragionamento analogo si troverebbe

$$(III, 19) \quad \lim_{r_0 \rightarrow \infty} r_0^2 \frac{dV}{dr_0} = -e.$$

Vedremo nel § seguente un'altra notevole proprietà di $V(P)$.

§ 44. Equazione di Poisson.

Il potenziale di una distribuzione continua di cariche soddisfa una notevole equazione differenziale.

Per vederlo riprendiamo la (III, 7) ed osserviamo che, per essere

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V,$$

essa può venire scritta sotto la forma

$$\text{div grad } V = -4\pi\rho$$

ossia [§ 9]

$$(III, 20) \quad \Delta V = -4\pi\rho.$$

È questa l'equazione di Poisson che comprende, come caso particolare [$\rho = 0$], l'equazione di Laplace [§ 18]

$$(III, 20') \quad \Delta V = 0.$$

Da essa, evitando il calcolo diretto, possiamo, fra l'altro, dedurre che i valori delle derivate seconde della funzione potenziale V , pur essendo finiti, non sono tutti continui attraverso la superficie che limita lo spazio S delle cariche [perchè la loro somma passa bruscamente dal valore $-4\pi\rho$ al valore zero] e che, analogamente a quanto si è visto per cariche puntiformi, nei punti non occupati da carica la V è armonica.

L'equazione di Poisson è una conseguenza dell'espressione (III, 16) data per V . Viceversa se imponiamo alla funzione V , che ad essa soddisfa, di essere

I) monodroma, finita e continua, colle sue derivate prime, in tutto lo spazio,

II) normale all'infinito [v. (II, 5)], allora essa equivale alla (III, 16), cioè la V è da tali condizioni univocamente determinata. Infatti se esistesse un'altra funzione U soddisfacente alle condizioni sopra enunciate, la funzione $v = U - V$ [monodroma, finita e continua colle sue derivate prime in tutto lo spazio] soddisferebbe all'equazione $\Delta v = 0$ ed, annullandosi all'infinito, sarebbe [§§ 18, 19] in ogni punto eguale a zero.

Il legame fra le cariche ed il potenziale da esse prodotto può essere dunque espresso in due modi del tutto equivalenti: la (III, 16) [esprimente la legge di Coulomb] e la (III, 20) colle condizioni supplementari I) e II).

§ 45. Risoluzione dell'equazione di Poisson col metodo di Green.

Nel § prec. si è verificato che l'unica soluzione dell'equazione di Poisson, con le condizioni supplementari I) e II), è data dal potenziale coulombiano (III, 16). Tale soluzione si può trovare anche direttamente partendo dalla equazione di Poisson ed applicando un metodo, dovuto al Green, che, essendo suscettibile di altre applicazioni in casi analoghi, merita di essere ricordato.

Sia dunque data l'equazione (III, 20), dove ρ è una funzione del posto finita dovunque, e si voglia trovare la funzione V che soddisfa essa e le condizioni I) e II). Per determinare la V in un punto generico P , consideriamo accanto alla V la funzione armonica a simmetria sferica $1/r$, dove r è la distanza da P , ed applichiamo alle due funzioni il lemma di Green, (I, 21), nello spazio S' compreso fra due sfere, una, σ_0 , di centro P e di raggio ε [che faremo poi tendere a zero], l'altra, Ω , di centro P e di raggio R [che tenderà ad ∞] (fig. 37).

Il lemma è applicabile essendo entrambe le funzioni regolari in S' . Si ha, tenuto conto della (III, 20) e della $\Delta(1/r) = 0$,

$$(III, 21) \quad - \int_{S'} \frac{4\pi\rho}{r} dS' = \int_{\sigma_0+\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dn} - V \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma.$$

Consideriamo ora i due integrali superficiali che compaiono a secondo membro: su σ_0 è

$$r = \varepsilon, \quad \frac{d}{dn} \frac{1}{r} = \left(- \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right)_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

e su Ω si ha

$$r = R, \quad \frac{d}{dn} \frac{1}{r} = \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \right)_{r=R} = - \frac{1}{R^2},$$

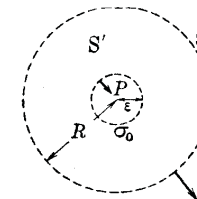


Fig. 37.

quindi, applicando il teorema del valor medio ed indicando con la soprallineatura i valori medi, avremo

$$\int_{\sigma_0} (\dots) d\sigma_0 = 4\pi\varepsilon \left(\frac{dV}{dn} \right)_{\sigma_0} - 4\pi(\bar{V})_{\sigma_0}$$

ed

$$\int_{\Omega} (\dots) d\Omega = 4\pi R \left(\frac{dV}{dn} \right)_{\Omega} + 4\pi(\bar{V})_{\Omega}.$$

Basta ora, nella (III, 21), passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ ed $R \rightarrow \infty$ osservando che [per la continuità di V , e per le condizioni all'infinito (II, 5)]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\bar{V})_{\sigma_0} = V(P), \quad \lim_{R \rightarrow \infty} (\bar{V})_{\Omega} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{dV}{dn} \right)_{\Omega} = 0$$

e che in tal caso S' tende ad S , per avere da essa

$$(III, 21_1) \quad V(P) = \int_S \rho \frac{dS}{r}.$$

§ 46. Ricerca di alcuni potenziali notevoli.

1. - *Sfera piena omogenea.* Consideriamo il caso di una carica elettrica [o di una massa gravitazionale] sferica omogenea ($\rho = \text{cost.}$) e calcoliamone il poten-

ziale senza però servirci della (III, 16) o del campo, (III, 8) e (III, 9), ad essa relativo ma partendo dall'equazione di Poisson (III, 20) e dalle condizioni supplementari I) II) del § 44.

Se il punto potenziato è *esterno* alla sfera la funzione potenziale ad esso relativa, che indicheremo con V_e , soddisfa alla (III, 20), in cui sia $\rho = 0$,

$$\Delta V_e = 0$$

cioè è armonica, ed essendo, per simmetria, funzione della sola distanza r dal centro della sfera sarà [§ 20] della forma

$$V_e = a + b \frac{1}{r}$$

dove a e b sono costanti da determinarsi. Le condizioni normali all'infinito [II] nel § 44, espresse dalle (III, 18) e (III, 19), danno poi, se R è il raggio della sfera,

$$a = 0, \quad b = c = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho :$$

quindi si ha

$$(III, 22) \quad V_e = \frac{c}{r} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{1}{r}.$$

Come era da attendersi [§ 41], il potenziale dovuto alla sfera è quello che si avrebbe se la carica fosse tutta concentrata nel centro.

Se invece si considera un punto *interno* alla sfera il relativo potenziale V_i deve soddisfare all'equazione di Poisson

$$\Delta V_i = -4\pi\rho$$

che, essendo, per simmetria, V_i funzione della sola r , si potrà scrivere [(I, 31),]

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV_i}{dr} \right) = -4\pi\rho.$$

Integrando si trova successivamente

$$\frac{dV_i}{dr} = -\frac{4}{3} \pi \rho r + \frac{c_1}{r^2},$$

$$V_i = -\frac{2}{3} \pi \rho r^2 - \frac{c_1}{r} + c_2,$$

dove c_1 e c_2 sono costanti di integrazione da determinarsi in base alle condizioni I) II) del § 44, che si impongono alla V_i . E dalla prima di esse [per la quale V_i e la sua derivata si devono raccordare con continuità a V_e e alla sua derivata alla superficie della sfera] si ha

$$\left(\frac{dV_i}{dr} \right)_{r=R} = \left(\frac{dV_e}{dr} \right)_{r=R} \quad \text{e} \quad (V_i)_{r=R} = (V_e)_{r=R}.$$

da cui si ricava $c_1 = 0$ (1) e $c_2 = 2\pi\rho R^2$: quindi è

$$(III, 23) \quad V_i = 2\pi\rho \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

Servendoci della (III, 22) e della (III, 23) è facile tracciare il diagramma (fig. 38) della $V(P)$ relativa alla sfera omogenea in funzione della distanza r dal suo centro. Ed è facile verificare che derivando V_i o V_e rispetto ad r si è ricondotti alle (III, 8) e (III, 9).

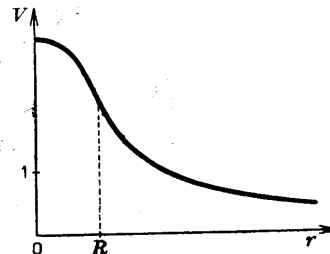


Fig. 38.

2. - *Sfera cava omogenea.* Servendoci dei risultati relativi al caso precedente possiamo facilmente calcolare l'espressione del potenziale V dovuto ad una sfera cava omogenea, di raggi R_1 ed R_2 [$R_1 < R_2$, v. fig. 35]. Basta considerare tale potenziale come differenza fra il potenziale V^{II} prodotto da una sfera piena omogenea di raggio R_2 [sfera R_2] ed il potenziale V^{I} prodotto da una sfera piena omogenea di raggio R_1 [sfera R_1], potenziali che, secondo le notazioni ed i risultati del caso precedente, sono dati da

$$V_e^{\text{I}} = \frac{4}{3} \pi \rho R_1^3 \frac{1}{r}, \quad V_i^{\text{I}} = 2\pi\rho \left(R_1^2 - \frac{r^2}{3} \right),$$

$$V_e^{\text{II}} = \frac{4}{3} \pi \rho R_2^3 \frac{1}{r}, \quad V_i^{\text{II}} = 2\pi\rho \left(R_2^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

E così, se il punto potenziato P è *esterno* alla sfera cava [cioè esterno alla sfera R_2] il relativo potenziale, V_e , sarà

$$(III, 24) \quad V_e = V_e^{\text{II}} - V_e^{\text{I}} = \frac{4}{3} \pi \rho (R_2^3 - R_1^3) \frac{1}{r} = \frac{e}{r},$$

[dove e è la carica totale].

Se P è *interno allo spazio delle cariche* [cioè interno alla sfera R_2 ma esterno alla sfera R_1] il potenziale relativo, che indicheremo con V_d , sarà

$$(III, 25) \quad V_d = V_i^{\text{II}} - V_e^{\text{I}} = 2\pi\rho \left(R_2^2 - \frac{r^2}{3} \right) - \frac{4}{3} \pi \rho \frac{R_1^3}{r}.$$

Se, infine, P è *interno alla cavità* [cioè interno alla sfera R_1] il potenziale relativo sarà

$$(III, 26) \quad V_i = V_i^{\text{II}} - V_i^{\text{I}} = 2\pi\rho (R_2^2 - R_1^2).$$

(1) Ciò si poteva anche ricavare osservando che per $r = 0$ la V_i non può diventare infinita.

Quest'ultimo risultato ci dice che in tutta la cavità il potenziale è costante [come potevamo prevedere essendo ivi nullo il campo (§ 41)].

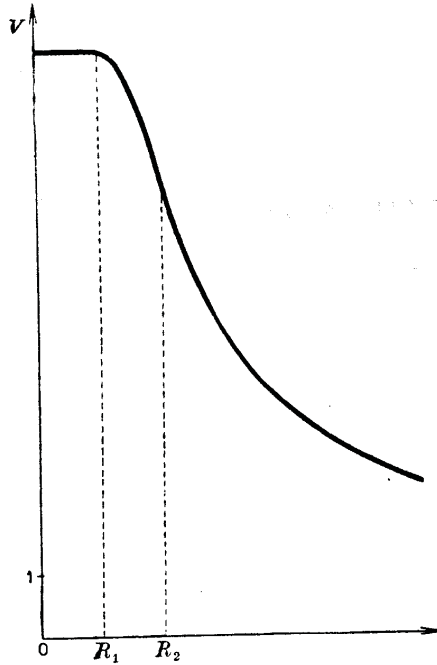


Fig. 39.

Il diagramma della $V(P)$ in funzione della distanza r dal centro O è quello dato dalla figura 39.

§ 47. Potenziale dovuto ad uno strato sferico.

Consideriamo la sfera cava studiata al § precedente e supponiamo di fare tendere R_1 ad R_2 mantenendo, però, costante la carica totale compresa fra le due sfere [e quindi facendo tendere ad ∞ la densità spaziale ρ]. Otterremo uno «strato sferico» infinitamente sottile con carica elettrica finita e distribuita in modo uniforme e, non avendo più interesse la densità spaziale ρ [infinita], introdurremo una «densità

superficiale ρ_σ » definita da

$$de = \rho_\sigma d\sigma.$$

dove de è la quantità di carica relativa all'elemento superficiale $d\sigma$ dello strato.

Si può effettuare il calcolo ponendo

$$R_1 = R, \quad R_2 = R + \delta$$

e trattando δ come infinitesimo, cioè trascurando la potenze di δ superiori alla prima. Si ha allora

$$R_2^3 \approx R^3 + 3R^2\delta, \quad R_2^3 - R_1^3 \approx 3R^2\delta$$

e quindi come espressione della carica totale,

$$e = \frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3),$$

si trova

$$e = 4\pi R^2\rho\delta.$$

Per la definizione di densità superficiale avremo quindi

$$\rho_\sigma = \frac{e}{4\pi R^2} = \rho\delta.$$

Tenendo presente ciò, è facile ricavare dalle (III, 24) e (III, 26) le espressioni del potenziale V_e , all'esterno, e V_i , all'interno dello strato:

$$(III, 27) \quad V_e = \frac{e}{r}, \quad V_i = 2\pi\rho \cdot 2R\delta = \frac{e}{R}$$

e notiamo che esse per $r = R$ hanno lo stesso valore [continuità di $V(P)$ attraverso lo strato].

Il campo \mathbf{E} nei punti P esterni allo strato sferico ($r > R$) sarà parallelo alla retta OP e sarà [in grandezza e segno]

$$(III, 28) \quad \mathfrak{E}_r = -\frac{dV_e}{dr} = \frac{e}{r^2} = 4\pi\rho_\sigma \frac{R^2}{r^2};$$

nei punti interni ($r < R$) invece sarà

$$(III, 29) \quad \mathfrak{E}_r = -\frac{dV_i}{dr} = 0;$$

come si vede, \mathbf{E} è discontinuo attraverso lo strato.

Per caratterizzare meglio questa discontinuità conveniamo di indicare con \mathfrak{E}_{n+} ed \mathfrak{E}_{n-} le componenti secondo la normale allo strato [componenti normali] del campo \mathbf{E} in due punti, presi sulla normale

stessa infinitamente vicini allo strato ma uno esterno ed uno interno.

Avremo per le (III, 28) e (III, 29)

$$(III, 30) \quad \mathcal{E}_{n+} - \mathcal{E}_{n-} = 4\pi\rho_\sigma.$$

cioè la componente normale del campo elettrico è discontinua attraverso lo strato e tale discontinuità è proporzionale alla densità superficiale. La componente di \mathbf{E} secondo il piano tangente [componente tangenziale] è invece continua [in quanto vale zero da entrambe le parti].

Ci si può render conto intuitivamente del come nasca la discontinuità (III, 30) pensando il diagramma

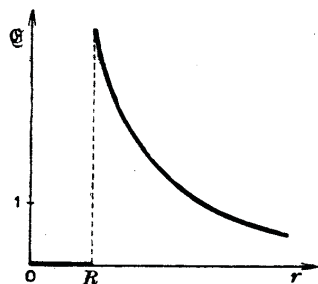


Fig. 40.

di \mathcal{E} in funzione di r relativo allo strato sferico (fig. 40) come ottenuto da quello relativo alla sfera cava (fig. 36) facendo tendere in esso R_2 ad R_1 .

§ 48. Potenziale di strato semplice.

Il caso studiato nel § prec. ci dà un esempio di potenziale prodotto da una distribuzione di carica su una superficie. Consideriamo ora il caso generale di una distribuzione di carica su una superficie σ qualsiasi [chiusa o no] con una densità [superficiale] ρ_σ finita [«potenziale di strato semplice»] ⁽¹⁾.

Il potenziale prodotto nel punto generico P da un elemento $d\sigma$ di σ [di carica $de = \rho_\sigma d\sigma$] sarà [v. (III, 11)]

$$\frac{de}{r} = \rho_\sigma \frac{d\sigma}{r}.$$

se r è la distanza di P da $d\sigma$ (fig. 41); quindi il potenziale complessivo $V(P)$ dovuto a σ sarà

$$(III, 31) \quad V(P) = \int \rho_\sigma \frac{d\sigma}{r}.$$

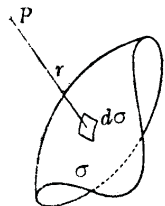


Fig. 41.

La funzione $V(P)$ è finita in tutto lo spazio. Infatti se il punto potenzializzato P non appartiene alla superficie σ ciò è evidente [essendo ρ_σ finita ed r mai nullo]. Se invece P appartiene a σ possiamo conside-

⁽¹⁾ Strati semplici di elettricità si presentano in realtà molto frequentemente: sui corpi isolanti elettrizzati per strofinio, sui conduttori [cfr. § 53], ecc.

rare dapprima il caso particolare in cui σ è una superficie piana e scrivere l'espressione di V servendoci di un sistema di coordinate polari piane di centro P : avremo allora [essendo $d\sigma = r dr d\theta$],

$$V(P) = \iint \rho_\sigma dr d\theta$$

ed essa risulta finita in ogni punto di σ [P compreso]. Se, poi, σ è una superficie affatto qualsiasi, isoliamo P [che supponiamo non sia un punto singolare] con un'areola infinitesima σ_1 e siano σ_2 l'ulteriore parte di σ . V_1 il potenziale dovuto a σ_1 e V_2 quello dovuto a σ_2 [e quindi $V = V_1 + V_2$]. Se pensiamo di sostituire σ_1 con un elemento del piano tangente a σ in P , dal ragionamento di poco sopra segue subito che V_1 è sempre finita. Quanto a V_2 essa è certo finita essendo P esterno a σ_2 .

Un ragionamento analogo ci porterebbe a vedere che $V(P)$ è, pure, continua in ogni punto [anche attraverso σ], come, del resto, abbiamo già dimostrato nel caso particolare dello strato sferico.

Invece le derivate prime di $V(P)$, e quindi le componenti del campo \mathbf{E} , non sono tutte continue attraverso la superficie σ , e, precisamente la discontinuità ha luogo per la componente normale di \mathbf{E} mentre la componente tangenziale \mathbf{E}_t [componente di \mathbf{E} secondo il piano tangente a σ] è continua [come

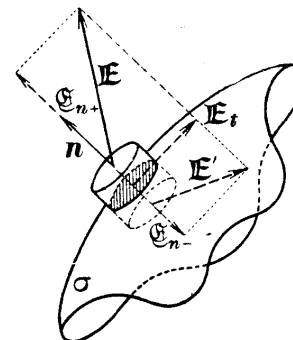


Fig. 42.

abbiamo già visto nel caso dello strato sferico]. Infatti, indichiamo con \mathcal{E}_n la proiezione di \mathbf{E} sulla normale [arbitrariamente orientata] e con \mathcal{E}_{n+} ed \mathcal{E}_{n-} il valore di \mathcal{E}_n in due punti della normale infinitamente vicini a σ e da bande opposte di essa. Consideriamo quindi su σ un elemento $d\sigma$ e costruiamo un cilindretto, di altezza infinitesima del secondo ordine [rispetto al perimetro di $d\sigma$], colle generatrici parallele alla normale a $d\sigma$ ed avente $d\sigma$ come sezione mediana (fig. 42) Il flusso totale uscente da esso è

$$\mathcal{E}_{n+}d\sigma - \mathcal{E}_{n-}d\sigma$$

[perchè il flusso attraverso la superficie laterale è un infinitesimo di

ordine superiore e lo possiamo trascurare], la carica totale ad esso interna è $\rho_\sigma d\sigma$ quindi, per il teorema di Gauss, (III, 6), sarà

$$(III, 32) \quad \mathfrak{C}_{n+} - \mathfrak{C}_{n-} = 4\pi\rho_\sigma$$

[come avevamo già trovato nel caso dello strato sferico (§ prec.)]. Mettendo in evidenza il potenziale potremo anche scrivere la (III, 32) nella forma

$$(III, 32') \quad \left(\frac{dV}{dn}\right)_+ - \left(\frac{dV}{dn}\right)_- = -4\pi\rho_\sigma.$$

Invece, la componente tangenziale \mathbf{E}_t è continua. Infatti, essendo \mathbf{E} gradiente di una funzione monodroma, è nulla la sua circuitazione

$$\int_s \mathfrak{C}_s ds$$

relativa ad una qualsiasi linea chiusa s [§ 13]. Applichiamo tale proprietà al rettangolo infinitesimo $ABCD$ (fig. 43) che si ottiene tagliando il cilindretto di poco sopra con un piano qualsiasi per la normale: indichiamo con ds le lunghezze AB , CD e con \mathfrak{C}_{s+} , \mathfrak{C}_{s-} rispettivamente le componenti di \mathbf{E}_+ ed \mathbf{E}_- (³) [ossia di \mathbf{E}_{t+} ed \mathbf{E}_{t-} poichè la componente normale non contribuisce] secondo BA e CD . Essendo \mathbf{E} finito in ogni punto le circuitazioni relative ai lati BC ed AD sono infinitesimi d'ordine superiore quindi, tenendo conto del verso positivo fissato su s , si avrà

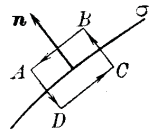


Fig. 43.

$$\mathfrak{C}_{s+} ds - \mathfrak{C}_{s-} ds = 0.$$

cioè $\mathfrak{C}_{s+} = \mathfrak{C}_{s-}$. Data, poi, l'arbitrarietà del piano normale e , quindi, della direzione di AB e CD , se ne deduce che

$$\mathbf{E}_{t+} = \mathbf{E}_{t-}.$$

Osserviamo infine che per tutti i punti dello spazio non appartenenti a σ la (III, 31) può venire derivata una o più volte sotto il segno di integrale. Si ha quindi

$$(III, 33) \quad \Delta V = \int \rho_\sigma \Delta \left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = 0,$$

cioè nei punti non appartenenti allo strato la funzione V è armonica. E si potrebbe verificare anche qui [cfr. § 43] che, se le cariche sono tutte a distanza finita, la V si comporta normalmente all'infinito.

Aggiungiamo che l'equazione di Laplace (III, 33), insieme al valore

(³) Nella fig. 42, \mathbf{E}_+ ed \mathbf{E}_- sono indicati rispettivamente con \mathbf{E} ed \mathbf{E}' .

$-4\pi\rho_\sigma$ della discontinuità della derivata normale su σ ed alle condizioni normali all'infinito, determina in modo univoco la V : e, infatti, se vi fosse un'altra funzione U soddisfacente a tutte queste condizioni, la funzione $v = U - V$ risulterebbe armonica, regolare e normale all'infinito e quindi nulla.

§ 49. Campi prodotti da un disco e da un piano indefinito.

Studiamo il campo dovuto ad un elemento superficiale generico $d\sigma$ di un piano avente una densità superficiale ρ_σ . Se P è il punto potenziato ed r è la

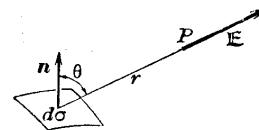


Fig. 44.

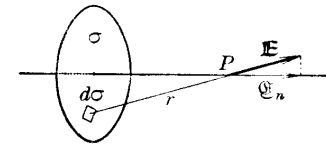


Fig. 45.

sua distanza da $d\sigma$ (fig. 44), il campo \mathbf{E} sarà parallelo alla retta r e la sua proiezione su questa retta [contata positivamente nel verso da $d\sigma$ a P] sarà

$$\mathfrak{C}_r = \frac{de}{r^2} = \rho_\sigma \frac{d\sigma}{r^2}:$$

la sua componente \mathfrak{C}_n , secondo la normale \mathbf{n} a $d\sigma$ sarà

$$\mathfrak{C}_n = \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \rho_\sigma \frac{\cos \theta d\sigma}{r^2}, \quad (\theta = \angle \mathbf{E}\mathbf{n}).$$

Indicando con $d\omega$ l'angolo solido sotto cui da P è visto $d\sigma$ [§ 39, nota 1] si trova (III, 34)

$$\mathfrak{C}_n = \rho_\sigma d\omega,$$

cioè \mathfrak{C}_n è proporzionale a tale angolo solido.

È facile colla (III, 34) studiare l'azione di un disco circolare σ [con distribuzione uniforme di carica] su un punto P del suo asse (fig. 45). Basta considerare le azioni dei singoli elementi superficiali e comporle: anzi, per la simmetria della distribuzione rispetto all'asse del disco, basta tener conto delle sole componenti normali di esse. Si avrà quindi, se $(\mathfrak{C})_P$ è il campo totale in P [contato come positivo se di repulsione dal disco, negativo se di attrazione],

$$(\mathfrak{C})_P = \int \mathfrak{C}_n d\sigma = \rho_\sigma \int d\omega = \rho_\sigma \omega_P$$

dove ω_P è l'angolo solido sotto cui da P è visto il disco.

Se facessimo avvicinare indefinitamente P a σ oppure facessimo diventare infinitamente grande il raggio del disco, ottenendo così un piano indefinito, ω_P tenderebbe a 2π ed $(\mathfrak{C})_P$ al valore

$$[(\mathfrak{C})_P = 2\pi\rho_\sigma,$$

quindi l'azione di un piano indefinito su un punto qualsiasi P [praticamente l'azione di una superficie piana finita su un punto la cui distanza dalla superficie sia piccola rispetto alle distanze dai bordi di essa] non dipende dalla distanza del punto P dal piano ⁽¹⁾. Questo si può intuitivamente spiegare osservando che se, per es., P si allontana dal piano, diminuisce [per la maggiore distanza] l'azione degli elementi vicini a P ma aumenta [per la minore inclinazione] l'effetto degli elementi lontani.

§ 50. Potenziale di un dipolo.

Siano $+e$ e $-e$ due cariche puntiformi poste rispettivamente nei punti A e B : il potenziale da esse prodotto nel punto generico P sarà

$$(III, 35) \quad V(P) = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2},$$

se r_1 ed r_2 sono le distanze di P da A e da B . Le superfici equipotenziali [$V(P) = \text{cost.}$] sono superfici di rotazione attorno alla retta AB

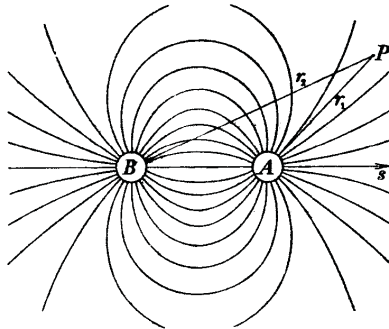


Fig. 46.

e le linee di forza, loro traiettorie ortogonali, hanno l'andamento segnato nella fig. 46: una di esse è la stessa retta AB , che indichiamo con s e supponiamo orientata dalla carica negativa alla positiva.

⁽¹⁾ Osserviamo che lo stesso calcolo può servire allo studio dell'illuminazione prodotta da una parete luminosa piana essendo l'intensità dell'illuminazione dovuta ad un elemento ds data da una legge analoga alla (III, 34). Ne segue il risultato paradossale, ma vero, che il riverbero di un muro illuminato dal sole è lo stesso a qualunque distanza da esso (purché piccola rispetto alla estensione del muro).

Se supponiamo di far tendere a zero la distanza $AB = \delta$, ma facendo contemporaneamente tendere e ad ∞ in modo che sia

$$e\delta = m$$

con m finito, il potenziale diventa, [§ 4, nota 5],

$$(III, 36) \quad V(P) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(e\delta \cdot \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = m \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = m \frac{d}{ds} \frac{1}{r}.$$

Il sistema di cariche ottenuto nel punto $A[\equiv B]$ con questo particolare passaggio al limite si dice « *dipolo* » ⁽¹⁾ e la (III, 36) ne dà il potenziale: la costante m si dice « *momento del dipolo* ». Il campo rela-

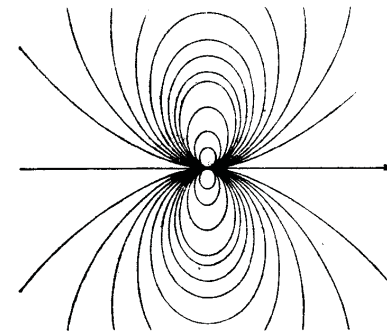


Fig. 47.

tivo si può pensare ottenuto, passando al limite, dal precedente e le sue linee di forza hanno l'andamento mostrato nella fig. 47.

Introduciamo ora il vettore m avente per modulo m e per direzione quella dalla carica negativa alla positiva ed osserviamo che [§ 4]

$$\frac{d}{ds} \frac{1}{r} = \left(\text{grad}_A \frac{1}{r} \right)_s;$$

potremo scrivere la (III, 36) sotto la forma

$$(III, 36') \quad V(P) = m \times \text{grad}_A \frac{1}{r}$$

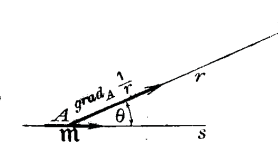


Fig. 48.

⁽¹⁾ Il concetto di *dipolo* ha un grande interesse specialmente nel magnetismo: quando le dimensioni di una calamita sono trascurabili rispetto alle distanze che si considerano si può sostituire al campo della calamita quello, più maneggevole, di un dipolo. Hanno però anche interesse fisico, come vedremo, i dipoli elettrici.

e, se θ è l'angolo che il vettore $P - A$ forma con m (fig. 48), sarà

$$(III, 36'') \quad V(P) = m \left| \text{grad}_A \frac{1}{r} \right| \cos \theta = m \frac{\cos \theta}{r^2}.$$

Come si vede il vettore m [da pensare applicato nel punto A] definisce completamente il dipolo, e chiamasi suo *momento (vettoriale)*. Il potenziale del dipolo è inversamente proporzionale al quadrato della distanza ed è positivo nel semispazio in cui è $\theta < \frac{\pi}{2}$, negativo nell'altro.

Le componenti \mathfrak{E}_r ed \mathfrak{E}_θ del campo secondo le linee coordinate r e θ [v. § 11] sono

$$\mathfrak{E}_r = -(\text{grad}_r V)_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 2m \frac{\cos \theta}{r^3},$$

$$\mathfrak{E}_\theta = -(\text{grad}_r V)_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = m \frac{\sin \theta}{r^3}.$$

Appare, così, che il campo \mathfrak{E} è inversamente proporzionale al cubo della distanza, cioè tende a zero, se r tende ad ∞ , molto più rapidamente del campo dovuto ad una carica sola.

§ 51. Potenziale di doppio strato.

Sia σ una superficie qualsiasi [chiusa o no] per cui si sia fissata, arbitrariamente, la direzione positiva della normale n , e sia σ' la superficie, ad essa infinitamente vicina, ottenuta riportando da ogni punto di σ nella direzione positiva di n un segmentino infinitesimo δ . Eseguiamo una distribuzione di cariche di densità $-\rho_\sigma$ su σ e $+\rho_\sigma$ su σ' (v. fig. 49 in cui è $\rho_\sigma > 0$) in modo che sugli elementi superficiali corrispondenti agli estremi di uno stesso δ le cariche dei due strati siano eguali in valore assoluto. Se

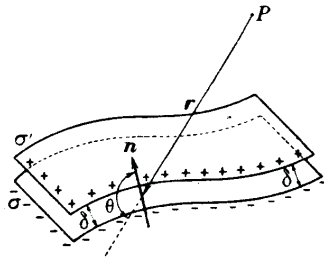


Fig. 49.

passiamo al limite per $\delta \rightarrow 0$ ma facendo contemporaneamente tendere ad ∞ il valore assoluto della densità di distribuzione ρ_σ in modo che sia in ogni punto

$$\rho_\sigma \delta = \mathfrak{M},$$

con \mathfrak{M} finito, noi diremo di avere ottenuto su σ un « doppio strato » ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Un doppio strato magnetico si chiama più spesso « lamina magnetica ».

di « potenza » \mathfrak{M} ; se \mathfrak{M} , in particolare, ha lo stesso valore in ogni punto il doppio strato si dice *uniforme*.

Per trovare l'espressione del relativo potenziale osserviamo che ogni elemento $d\sigma$ del doppio strato [con le sue due cariche $\pm \rho_\sigma \delta d\sigma = \pm \mathfrak{M} d\sigma$] si può assimilare ad un dipolo avente un momento di grandezza $\mathfrak{M} d\sigma$ e direzione normale a $d\sigma$ [nel verso n se $\mathfrak{M} > 0$, $-n$ se $\mathfrak{M} < 0$]; calcoliamo quindi il potenziale V come quello dovuto a tutti questi dipoli. Otterremo così, per la (III, 36),

$$(III, 37) \quad V(P) = \int_{\sigma} \mathfrak{M} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma$$

od anche, introducendo l'angolo $\theta = \widehat{rn}$, [cfr. § 39, nota 1],

$$(III, 37') \quad V(P) = - \int_{\sigma} \mathfrak{M} \frac{\cos \theta}{r^2} d\sigma.$$

Nel caso particolare di un doppio strato *uniforme*, se ω_P è l'angolo solido sotto cui dal punto P è veduta la superficie σ [§ 39, nota 1] si avrà

$$(III, 38) \quad V(P) = - \mathfrak{M} \int_{\sigma} \frac{\cos \theta}{r^2} d\sigma = - \mathfrak{M} \omega_P,$$

ed il segno di V dipenderà da quello di ω_P e di \mathfrak{M} , e precisamente sarà positivo o negativo secondo che verso P sono affacciate solo cariche positive o solo cariche negative. In particolare, se σ è una superficie chiusa, e la normale n è, al solito, orientata verso l'esterno, nei punti esterni ad essa sarà $V = 0$ e nei punti interni $V = -4\pi \mathfrak{M}$. Si vede così che il potenziale di doppio strato è discontinuo attraverso la superficie e precisamente [se indichiamo con V_+ e V_- il valore di V in due punti della normale a σ in P , infinitamente vicini uno dalla parte positiva della normale, l'altro dalla parte negativa] si ha

$$V_+ - V_- = 4\pi \mathfrak{M}.$$

Però anche se il doppio strato *non* è uniforme e *non* è chiuso si ha tale discontinuità di V : lo si potrebbe vedere isolando il punto P di σ con un'areola infinitesima σ_1 [e sia \mathfrak{M}_P la potenza in P del doppio strato] e considerando soltanto la discontinuità del potenziale dovuto a σ_1 , dato che il potenziale della parte residua è certo continuo in P . La discontinuità di V in σ_1 è, evidentemente, quella stessa che si avrebbe se σ_1 invece di appartenere a σ appartenesse ad un qualsiasi

doppio strato chiuso ed uniforme di potenza \mathfrak{N}_P : quindi, per il ragionamento precedente, V è discontinua in P e precisamente si ha

(III, 39)

$$V_+ - V_- = 4\pi \mathfrak{N}_P.$$

§ 52. Distribuzioni equivalenti di cariche. Balayage.

Dalla conoscenza del campo generato nei punti esterni ad una superficie chiusa σ da distribuzioni di cariche interne a σ non possiamo in genere risalire alla conoscenza di tali distribuzioni ⁽¹⁾. Basta pensare, per es., ad una sfera nel cui interno le cariche siano distribuite per strati concentrici: sappiamo [§ 41] che qualunque sia la legge, $\rho(r)$, di questa distribuzione il campo all'esterno della sfera è sempre lo stesso e, precisamente, quello di una carica puntiforme uguale alla carica totale e posta nel centro della sfera. In particolare, lo stesso campo si potrebbe ottenere distribuendo tutta la carica in superficie, cioè con uno strato semplice.

Ci si può ora chiedere se questo fatto è generale, cioè se, per una qualunque superficie chiusa σ , contenente al suo interno delle cariche comunque distribuite, è possibile trovare una distribuzione *superficiale* di cariche su σ , di eguale carica totale, *equivalente* [agli effetti del campo esterno] alla distribuzione interna a σ : si può dimostrare che questo è sempre possibile. Intuitivamente lo si può vedere pensando di sostituire la carica contenuta in un elemento di volume dS [pensato come puntiforme] con uno strato semplice distribuito su una sfera avente il centro in dS e tangente alla superficie σ . Con ciò si porta in superficie una parte della carica di dS : ripetendo l'operazione infinite volte e per tutti gli elementi di volume possiamo [si dimostra] addirittura portare su σ tutte le cariche interne, ottenendo così uno strato semplice ad esse equivalente ed avente la stessa carica totale [balayage]. Il problema di determinare la densità ρ_σ di una tale distribuzione superficiale ammette sempre soluzione. Le stesse considerazioni possono farsi nel caso in cui le masse sono esterne a σ ed i punti in cui è noto il campo ad esse dovuto sono quelli interni a σ . Noi tralasciamo la dimostrazione di questo teorema e ci limitiamo a far osservare che il problema analogo, di sostituire le cariche interne [od esterne] a σ con uno strato semplice ed un doppio strato distribuiti su σ equivalenti a quelle cariche agli effetti del campo esterno [o, rispettivamente, interno], è risolto

⁽¹⁾ È quindi impossibile [nel caso di masse non elettriche ma gravitazionali] determinare con sole misure di gravità la distribuzione delle masse all'interno della Terra. Si può invece affrontare questo studio aggiungendo opportune ipotesi, per es. che all'interno si abbiano masse fluide e vi sia equilibrio idrostatico.

da la formula di Green [§ 33]: difatti il secondo membro della (II, 34) si può considerare formato con un potenziale di strato semplice di densità

$$\rho_\sigma = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV}{dn} \right)_\sigma$$

ed uno di doppio strato di potenza

$$\mathfrak{N} = - \frac{(V)_\sigma}{4\pi}.$$

CAMPO ELETTROSTATICO CON CONDUTTORI

§ 53. Conduttori. Corrente elettrica. (Legge di Ohm. Effetto Joule). ⁽¹⁾

Finora abbiamo supposto che le cariche elettriche non possano muoversi. Però esistono, come è noto, dei corpi [conduttori] nei quali le cariche elettriche possono muoversi, anzi, tali corpi hanno la proprietà che, se nell'interno di essi esiste un campo elettrico \mathbf{E} , nasce in essi un flusso di cariche elettriche [corrente elettrica] ⁽²⁾. Qui, e nel seguito, ci riferiremo, salvo indicazione contraria, a conduttori omogenei e a temperatura uniforme.

Si definisce come «densità di corrente, \mathbf{j} » il vettore [funzione del posto] che ha direzione opposta al moto delle cariche elettriche negative [cfr. nota 2] e per modulo il valore della quantità di elettricità che passa per unità di tempo attraverso l'unità di superficie normale alla direzione di \mathbf{j} ⁽³⁾. Se si applicasse al vettore \mathbf{j} il ragionamento fatto al § 7 per il vettore $\rho\mathbf{v}$, si otterrebbe l'equazione di continuità per la corrente

⁽¹⁾ Questo §. e i successivi che parlano di «conduttori», non si applicano, naturalmente, né al magnetismo né alla gravitazione.

⁽²⁾ La corrente elettrica nasce anche in un conduttore non elettrizzato, perché nei conduttori sono contenute particelle positive e negative, ordinariamente in quantità eguali (se il conduttore non ha carica elettrica). Sotto l'azione di un campo elettrico le particelle di elettricità positiva tendono a muoversi nel senso del campo e le negative in senso opposto. Nel caso dei metalli, però, le cariche positive [nuclei atomici] sono fisse e quindi sono solo cariche negative [elettroni liberi] a muoversi; invece negli elettroliti si muovono tanto le cariche positive quanto quelle negative [ioni positivi e negativi]. E si tenga presente che in ogni caso il moto delle cariche negative nel verso opposto al campo equivale al moto di altrettante cariche positive nel verso del campo e quindi si considera come una corrente nel verso del campo. Perciò, nei metalli, il verso della corrente è opposto al verso in cui si muovono gli elettroni.

⁽³⁾ Misurando, come noi facciamo, la quantità di elettricità che passa in u.e.s.a., si ha la \mathbf{j} espressa in u.e.s.a. di densità di corrente. Ricordiamo che l'unità pratica di densità di corrente è l'ampère per cm², che vale $3 \cdot 10^9$ u.e.s.a.

elettrica [analoga alla (I, 19) per i fluidi]

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0;$$

essa esprime, in sostanza, che la carica elettrica non si crea e non si distrugge [conservazione della elettricità].

La legge sperimentale che lega al campo \mathbf{E} la densità di corrente \mathbf{j} [legge elementare di Ohm] è

(III, 40)

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}.$$

dove γ è uno scalare caratteristico del mezzo conduttore [dipendente però dalla sua temperatura] detto «conduttività [o conducibilità] elettrica». Il suo inverso $1/\gamma$ si chiama «resistività» o «resistenza specifica». Non è privo d'interesse osservare che γ può variare entro limiti estesissimi [per es. per l'argento $\gamma = 0,56 \cdot 10^{18}$ u.e.s.a., per la paraffina $\gamma = 3 \cdot 10^{-7}$ u.e.s.a.]. I corpi per cui $\gamma = 0$ [in pratica γ molto piccolo (v. pag. 104)] si dicono «isolanti».

Applichiamo la (III, 40) ad un conduttore filiforme, cioè di sezione σ [eventualmente variabile da punto a punto] abbastanza piccola da poterlo considerare come una linea: sia s l'ascissa curvilinea contata da un punto fisso qualunque. Se escludiamo che vi sia accumulo o diradamento di cariche elettriche in qualche punto del filo, la quantità di elettricità che per unità di tempo attraversa una sezione qualunque del filo dovrà essere la stessa per tutte le sezioni, e la chiameremo I [intensità di corrente], contandola positivamente se nel verso delle s crescenti. Sarà allora $j_s = I/\sigma$, e quindi la (III, 40), proiettata sulla direzione s , darà

$$(III, 40') \quad \frac{I}{\gamma \sigma} = \mathcal{E}_s.$$

Moltiplicando per ds e integrando fra due punti qualunque, A , B , del filo, si avrà

$$(III, 40_1) \quad IR = \int_A^B \mathcal{E}_s ds$$

dove si è posto

$$(III, 40_2) \quad R = \int_A^B \frac{ds}{\gamma \sigma},$$

[R chiamasi «resistenza» del tratto AB di filo].

Ricordando poi la (III, 13), si vede che la (III, 40₁) si può scrivere

$$(III, 40_3) \quad IR = V_A - V_B.$$

che è la legge di Ohm nella nota forma applicabile ai conduttori filiformi.

Poichè noi vogliamo studiare i problemi di equilibrio elettrico, dovremo imporre la condizione che nei conduttori sia $\mathbf{j} = 0$ e quindi $\mathbf{E} = -\text{grad } V = 0$. Ne viene, quindi, che, in condizioni di equilibrio elettrico, il potenziale all'interno dei conduttori è costante e che la superficie di ogni conduttore è una superficie equipotenziale.

Tutto ciò vale soltanto per conduttori omogenei [anche quanto alla temperatura]. In un conduttore che non sia tale le particelle elettrizzate possono essere sollecitate a muoversi [e quindi a produrre una corrente] oltre che dal campo elettrico anche da forze di origine meccanica [urti dovuti all'agitazione termica, etc.] le quali quindi equivalgono, agli effetti della corrente, a un campo \mathbf{E}^* da aggiungersi al vero campo elettrico \mathbf{E} , per cui la (III, 40) dovrà essere sostituita da

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*).$$

Questo vettore \mathbf{E}^* [che taluno chiama «forza impressa»] dipende dalla disomogeneità del conduttore: per es. in un elettrolito è proporzionale al gradiente del logaritmo della concentrazione, in un metallo a temperatura non uniforme, al gradiente della temperatura, etc.: nel caso di due metalli a contatto, \mathbf{E}^* è localizzato al sottilissimo strato di passaggio da un metallo all'altro.

In tutti questi casi, l'equilibrio ($\mathbf{j} = 0$) si ha evidentemente non per $\mathbf{E} = 0$ ma per $\mathbf{E} = -\mathbf{E}^*$, ossia per $\text{grad } V = \mathbf{E}^*$; quindi in condizioni di equilibrio vi è, fra due punti A , B del conduttore, una differenza di potenziale data da

$$V_A - V_B = \int_B^A \mathcal{E}_s^* ds.$$

Di tale natura è la differenza di potenziale di contatto tra due metalli scoperta da Volta. Nel seguito prescinderemo generalmente da tali differenze di potenziale.

Si noti poi che la (III, 40'), per includervi i conduttori non omogenei, dovrà essere così generalizzata

$$\frac{I}{\gamma \sigma} = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_s^*.$$

Interessa applicare questa formula a un filo s chiuso su sè stesso: moltiplicandola per ds e integrandola lungo tutto il filo, detta R la resistenza totale di questo definita dalla (III, 40₂), si ottiene

$$(III, 40_3) \quad IR = E,$$

dove si è posto

$$(III, 40_4) \quad E = \int_s (\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_s^*) ds.$$

Questo E dicesi «forza elettromotrice» operante nel circuito s . Nel caso statico, essendo per ogni linea chiusa $\int_s \mathcal{E}_s ds = 0$, la forza elettromotrice si riduce a $\int_s \mathcal{E}_s^* ds$ ed è dovuta solo alle disomogeneità del circuito [pile, etc.].

Torniamo ora ad occuparci [come faremo sempre in seguito] di conduttori omogenei. Dall'equazione di Poisson (III, 20) segue che [in condizioni di equilibrio] all'interno dei conduttori la densità elettrica è nulla [in superficie, però, vi può essere un addensarsi di cariche elettriche e, quindi, una densità superficiale non-nulla]: se si genera per qualche motivo una carica elettrica all'interno, la sua densità [spaziale] ρ tende a zero e la carica si distribuisce in superficie.

La rapidità con cui ρ tende a zero dipende da γ e la si calcola facilmente per mezzo dell'equazione di continuità [v. poco sopra] che, se il conduttore si suppone omogeneo ($\gamma = \text{cost}$), per la (III, 40), diventa

$$\gamma \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Ne segue, per la (III, 7), (*)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -4\pi\gamma\rho.$$

da cui

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \left[\tau = \frac{1}{4\pi\gamma} \right]$$

[dove ρ_0 è il valore di ρ per $t = 0$], cioè la densità spaziale ρ decresce con legge esponenziale. Le dimensioni di τ sono quelle di un tempo: esso rappresenta il tempo che occorre perchè ρ si riduca nel rapporto $1/e$ [tempo di rilassamento] ed il suo valore [proporzionale alla resistività] è, nei metalli, dell'ordine di 10^{-18} sec. [per es. per l'argento è $\tau = 1,4 \cdot 10^{-18}$ sec.] mentre nella paraffina è $\tau = 2,6 \cdot 10^5$ sec. cioè circa 3 giorni. Un corpo deve esser considerato isolante o conduttore secondo che il suo tempo di rilassamento è molto grande o molto piccolo rispetto alla durata che interessa nell'esperienza.

Effetto Joule.

Quando un conduttore è percorso da corrente, in esso, come è noto, si sviluppa calore. L'energia occorrente è fornita dal lavoro che fa la forza elettrica sulle cariche contenute nel conduttore ed il cui moto costituisce la corrente: esso può esser calcolato così.

Consideriamo un elemento $d\sigma$ di superficie equipotenziale [che essendo normale ad \mathbf{E} , per la (III, 40), è normale a \mathbf{j}]: attraverso ad esso, nel tempo dt , passa la quantità di elettricità $\mathcal{E} d\sigma dt$ sulla quale il campo esercita una forza $\mathcal{E} \mathbf{j} d\sigma dt$ [§ 39]. Quando questa quantità

(*) Veramente si dovrebbe applicare la (III, 61) e quindi scrivere $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{4\pi\gamma}{\epsilon} \rho$ e $\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\gamma}$.

dove ϵ è la « costante dielettrica »; ma questa è, per i metalli, assai mal conosciuta, e non si commette un grosso errore assumendola eguale ad 1. Nel caso della paraffina, τ ne resta raddoppiato.

si sposta di δ il campo compie su di essa il lavoro $\mathcal{E} \delta \cdot \mathbf{j} d\sigma dt$ e, poichè $\delta \cdot d\sigma$ è il volume dS entro il quale è compiuto il lavoro, si può scrivere $\mathcal{E} \mathbf{j} dS dt$. Quindi il lavoro trasformato in calore per unità di volume nell'unità di tempo è

$$(III, 41) \quad q = \mathcal{E} \mathbf{j},$$

od anche, per la (III, 40),

$$(III, 41') \quad q = \gamma \mathcal{E}^2 = \frac{1}{\gamma} j^2.$$

Nel caso di un conduttore filiforme, il calore totale sviluppato per unità di tempo in un tratto AB , espresso in unità di lavoro (*), è evidentemente [v. (III, 40₂)]

$$(III, 41_1) \quad \mathcal{Q} = \int_A^B q \sigma ds = \int_A^B \frac{1}{\gamma} j^2 \sigma ds = I^2 \int_A^B \frac{ds}{\gamma \sigma} = RI^2,$$

e questa è la ben nota « legge di Joule ».

§ 54. Teorema di Coulomb.

È assai notevole il fatto che il campo \mathbf{E} in un punto nelle immediate vicinanze di un conduttore dipende soltanto dalla densità superficiale locale e non dai valori della densità sul rimanente del conduttore, nè dalle cariche eventualmente esistenti su altri corpi (*). Per dimostrarlo cominciamo coll'osservare che esso è normale alla superficie σ del conduttore poichè questa è [§ prec.] una superficie equipotenziale: detta poi \mathcal{E}_n la sua grandezza presa col segno + se \mathbf{E} è diretto verso l'esterno del conduttore e - se verso l'interno, è facile averne il valore considerando la distribuzione di carica come uno strato semplice su σ . Possiamo allora ricordare che il campo \mathbf{E} ha, attraverso σ , la discontinuità, [v. (III, 32)],

$$\mathcal{E}_{n+} - \mathcal{E}_{n-} = 4\pi\rho_0$$

ed, essendo nel nostro caso $\mathcal{E}_{n+} = \mathcal{E}_n$ ed $\mathcal{E}_{n-} = 0$ [§ prec.], avremo

$$(III, 42) \quad \mathcal{E}_n = 4\pi\rho_0,$$

(*) Per avere \mathcal{Q} o q espressi in calorie, si dovrebbero ancora moltiplicare per l'equivalente termico dell'unità di lavoro [$2,4 \cdot 10^{-8}$, nel sistema C.G.S., usando piccole calorie].

(*) Questo fatto, a prima vista paradossale, non stupisce se si pensa che a sua volta il valore locale della densità superficiale è influenzato da tutte le altre cariche esistenti sul conduttore o altrove [v. § 56].

che potremo anche scrivere

$$(III, 42') \quad \left(\frac{dV}{dn} \right)_\sigma = -4\pi\rho_\sigma$$

E questo il teorema di Coulomb.

§ 55. Capacità di un conduttore.

Abbiamo osservato che all'interno di un conduttore S in equilibrio elettrico il potenziale è costante [§ 53]. Supponiamo, ora, S posto in uno spazio dove non esistano altri conduttori, nè altre cariche elettriche, e cerchiamo il valore della carica totale necessaria per portarlo ad un potenziale W prefissato.

Il problema si riduce subito ad un problema di Dirichlet [§ 19]: infatti occorre trovare l'espressione del potenziale, V , regolare e armonico all'esterno di S , normale all'infinito e che sulla superficie σ di S assume il valore W . Noto V , poi, la densità ρ_σ di distribuzione superficiale sarà, per il teorema di Coulomb [§ prec.],

$$(III, 43) \quad \rho_\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV}{dn} \right)_\sigma$$

e la carica totale sarà

$$(III, 44) \quad e = \int_\sigma \rho_\sigma d\sigma = -\frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{dV}{dn} d\sigma$$

Anzi, questo problema si può sempre ridurre a quello in cui è $W = 1$, perchè se V° è il potenziale relativo a quest'ultimo caso sarà

$$V = WV^\circ$$

in quanto tale funzione soddisfa le condizioni richieste per V ; per le (III, 43) e (III, 44), poi, sarà

$$\rho_\sigma = W\rho_\sigma^\circ, \quad \left[\rho_\sigma^\circ = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV^\circ}{dn} \right)_\sigma \right],$$

$$e = We^\circ, \quad \left[e^\circ = \int_\sigma \rho_\sigma^\circ d\sigma \right];$$

in esse, notiamo, V° , ρ_σ° , e° dipendono soltanto dalle caratteristiche geometriche del conduttore.

Si vede, così, che la carica e da comunicare al conduttore è direttamente proporzionale al potenziale W che si vuole ottenere: la costante di proporzionalità e° , carica necessaria per portare da zero ad 1 il poten-

ziale del conduttore [determinabile in base ai soli elementi geometrici del conduttore], si indica con C e si ha

$$(III, 45) \quad e = CW, \quad \left[C = -\frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{dV^\circ}{dn} d\sigma \right];$$

essa si chiama « capacità del conduttore » ⁽¹⁾.

Per determinare la capacità di un conduttore si deve quindi risolvere un problema di Dirichlet.

Come esempio determiniamo la capacità di una sfera conduttrice di raggio R . La funzione V° , dovendo essere armonica ed, evidentemente, a simmetria sferica, sarà [§ 20]

$$V^\circ = a + b \frac{1}{r}$$

con a e b costanti che, dovendo V° annullarsi all'infinito ed assumere sulla sfera il valore 1, valgono rispettivamente 0 ed R : cioè si ha

$$V^\circ = \frac{R}{r}$$

La densità di distribuzione ρ_σ° , essendo

$$\left(\frac{dV^\circ}{dn} \right) = \left(\frac{dV^\circ}{dr} \right)_{r=R} = -\frac{1}{R},$$

sarà

$$\rho_\sigma^\circ = \frac{1}{4\pi R}$$

e quindi per la capacità, C , si avrà l'espressione ⁽²⁾

$$C = \int_\sigma \rho_\sigma^\circ d\sigma = R,$$

cioè, in u.e.s.a., la capacità di una sfera è misurata dal suo raggio [ciò che si poteva anche ricavare più brevemente dalla (III, 27)].

Osserviamo infine che il problema di determinare il potenziale V prodotto in un punto qualunque dello spazio da un conduttore isolato di cui sia nota la carica totale e si riduce facilmente al precedente: infatti

⁽¹⁾ Notiamo che nel sistema elettrostatico, da noi adottato, la « capacità » ha le dimensioni di una lunghezza.

⁽²⁾ A tale risultato si potrebbe giungere subito, per altra via, osservando che il potenziale è lo stesso per tutti i punti interni e quindi può venire calcolato nel centro dove, essendo tutte le cariche a distanza R , è

$$W = \int_\sigma \frac{e_\sigma}{R} = \frac{1}{R} \int_\sigma e_\sigma d\sigma = \frac{e}{R}.$$

Segue allora dalla (III, 45): $C = R$.

determinata la capacità C si ha, colle notazioni precedenti, $W = e/C$ e quindi

$$V = \frac{e}{C} V^o$$

Sarà, poi, $\rho_o = e\rho_o^o/C$.

Si potrebbe, inoltre, far vedere che se il conduttore presenta dei punti dove la curvatura [convessa] della sua superficie è ∞ [punte o spigoli] ivi ρ_o risulta ∞ e, quindi, anche \mathcal{C}_o è ∞ . Ne segue che il campo è particolarmente intenso nelle vicinanze delle punte e degli spigoli, il che, nell'aria, può dar luogo a passaggio di debole corrente con fenomeni luminosi [effluvio] e movimenti d'aria [vento elettrico]. Analoghi fenomeni avvengono nell'aria, sempre a causa della forte curvatura, alla superficie di fili sottili elettrizzati [effetto corona].

§ 56. Influenza [od induzione] elettrostatica.

Nello studio precedente abbiamo supposto il conduttore S in uno spazio privo di altri conduttori e cariche elettriche; vediamo ora cosa avviene quando invece esso si trova in presenza di corpi elettrizzati.

In tal caso il conduttore viene a trovarsi in un campo \mathbf{E}_o , campo influenzante, [che possiamo pensare, come primo esempio, dovuto ad una carica puntiforme positiva e_o] e le particelle elettrizzate contenute nel conduttore, appena questo è immerso nel campo, sono sollecitate a muoversi [§ 53, nota 2]: si ha così una corrente elettrica che produce un addensarsi di cariche negative sulla parte rivolta verso la carica e_o ed un diradarsi di cariche negative [od un addensarsi di cariche positive] sulla parte opposta. Questa distribuzione superficiale di cariche [indotte] produce nell'interno un campo \mathbf{E} , diretto in senso opposto al

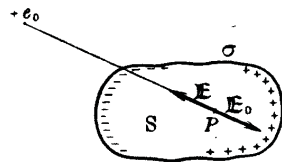


Fig. 50.

campo influenzante \mathbf{E}_o , così che, man mano che si formano le cariche indotte, diminuisce il campo risultante interno fino a che questo si annulla [fig. 50]. Allora cessa il movimento di elettricità e si ha l'equilibrio. Ciò avviene in un tempo dell'ordine di τ [v. § 53] e cioè nei metalli in una piccolissima frazione di secondo.

Il fenomeno dell'influenza elettrostatica si presenta dunque, in condizioni di equilibrio, così: alla superficie del conduttore appaiono delle cariche elettriche tali che in ogni punto del conduttore il campo da esse prodotto è eguale ed opposto al campo influenzante. Se il conduttore è isolato, la somma algebrica di tali ca-

riche è evidentemente zero, ossia il conduttore conserva la stessa carica che aveva prima di essere sottoposto alla influenza.

Se, poi, il conduttore è cavo il campo si annulla anche nell'interno della cavità: difatti ivi il potenziale deve essere armonico e al contorno della cavità, cioè alla superficie interna del conduttore, deve assumere valore costante, quindi [cfr. § 18] è costante in tutta la cavità. Ne segue che i punti interni alla cavità non risentono nessuna azione da cariche elettriche esterne: perciò si dice che un conduttore cavo costituisce uno *schermo elettrostatico* (1) perfetto. Tale fenomeno è utilizzato nella pratica [«gabbia di Faraday»].

Per studiare il campo e la densità di distribuzione delle cariche indotte indichiamo con $v(P)$ il loro potenziale e con $w(P)$ quello delle cariche elettriche influenzanti [nel caso di cui sopra $w = e_o/r$], cariche che vogliamo supporre fisse ed assegnate: sia inoltre W il potenziale [costante] a cui si trova il conduttore S , dopo essere stato introdotto nel campo influenzante. Il potenziale $V(P)$ in un punto generico P esterno ad S sarà

$$(III. 46) \quad V(P) = w + v$$

e, sulla superficie, σ , di S , dovrà essere

$$w_o + v_o = W,$$

Supporremo dapprima che W debba avere un valore assegnato [il che si può realizzare collegando il conduttore col suolo attraverso una «pila» della voluta f.e.m. (2)]. La funzione $v(P)$ dovrà:

essere regolare ed armonica all'esterno di S [perchè ivi non si trova nessuna delle cariche indotte cui è dovuto $v(P)$ (§ 44)];
comportarsi normalmente all'infinito;

assumere su σ il valore $W - w_o$ [funzione nota del posto].

Essa si potrà quindi determinare risolvendo un problema di Dirichlet e sarà, così, noto il potenziale complessivo $V(P)$: di conseguenza, la densità di distribuzione superficiale sarà [v. (III, 42')]

$$\rho_o = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV}{dn} \right)_o.$$

(1) La parola «schermo» non deve suggerire l'idea errata che, in certo modo, attraverso il conduttore non si trasmettano le forze coulombiane delle cariche influenzanti: queste si trasmettono sempre, come vedremo [§ 66], indipendentemente dai corpi interposti, ma ad esse si sovrappongono le azioni delle cariche che nascono su questi corpi e che, nel caso dello «schermo», agiscono in senso contrario in modo da annullarle esattamente.

(2) Si noti che, in questo caso, l'influenza può modificare la carica del conduttore perchè una certa quantità di elettricità può passare dal suolo al conduttore o viceversa.

Si noti che ρ_σ si può decomporre in due parti, corrispondentemente alla (III, 46),

$$-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dw}{dn} \right)_\sigma, \quad -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dv}{dn} \right)_\sigma.$$

La prima dà luogo ad una carica totale nulla, perchè [essendo le cariche influenzanti al di fuori del conduttore] la w è armonica in S [§ 44] e quindi, per la (I, 20), è, essendo S finito [cfr. § 19],

$$\int_\sigma \frac{dw}{dn} d\sigma = 0 :$$

resta quindi come carica totale del conduttore

$$(III, 47) \quad e = \int_\sigma \rho_\sigma d\sigma = -\frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{dv}{dn} d\sigma.$$

Supponiamo ora invece che il conduttore S soggetto all'influenza sia *isolato*, così che sia assegnato non il suo potenziale W ma la sua carica totale e . In tal caso si può risolvere prima il problema precedente prendendo per W un valore qualsiasi, per es. $W = 0$; e sia $V'(P)$ [$=v' + w$, se v' è in questo caso il potenziale delle cariche indotte e w , al solito, quello del campo influenzante] il potenziale trovato, ρ_σ' la relativa distribuzione su σ ed e' la corrispondente carica totale. Si risolve poi [§ prec.] il problema di trovare quale sarebbe [in assenza di cariche influenzanti] il potenziale $V''(P)$ dovuto ad una distribuzione ρ_σ'' di una carica $e - e'$ comunicata al conduttore: la somma

$$V(P) = V'(P) + V''(P) = v' + w + V''(P)$$

dà il potenziale V cercato. Infatti la funzione

$$v = V - w = v' + V''$$

è regolare ed armonica all'esterno del conduttore [in quanto v' e V'' sono prodotti da cariche che si trovano sul conduttore], normale all'infinito, ed inoltre su σ [essendo, per costruzione, $V_\sigma' = 0$, quindi $v_\sigma = -w_\sigma$, e $V_\sigma'' = \text{cost.} = W_0$] assume il valore $W_0 - w_\sigma$; inoltre, poichè l'integrale della densità ρ_σ' su tutta σ vale e' e quello della ρ_σ'' vale $e - e'$, la densità risultante $\rho_\sigma = \rho_\sigma' + \rho_\sigma''$ darà luogo alla carica totale $e' + (e - e') = e$. La v soddisfa quindi tutte le condizioni richieste per il potenziale delle cariche indotte, e, per conseguenza, la funzione $V = v + w$ è il potenziale richiesto.

§ 57. Influenza di una carica puntiforme su un conduttore limitato da una superficie piana indefinita.

Come prima applicazione di quanto si è visto nel § precedente, trattiamo il problema dell'influenza di una carica e_0 concentrata in un punto A , su un conduttore S limitato da un piano indefinito σ (fig. 51). [In pratica S può essere una lamiera, od un pezzo di metallo qualsiasi con una faccia piana σ , purchè la distanza a di A da σ sia molto piccola rispetto alle dimensioni di σ]. La superficie σ è una superficie equipotenziale ed, estendendosi fino all'infinito dove il potenziale è zero, il suo potenziale, W , è zero.

In questo caso, colle notazioni del § precedente, sarà

$$w(P) = \frac{e_0}{r},$$

dove r è la distanza del punto generico P da A , e si tratterà di trovare una funzione $v(P)$ regolare ed armonica nel semispazio limitato da σ che contiene A , normale all'infinito e tale che in ogni punto M di σ sia

$$v_\sigma = W - w_\sigma = -\frac{e_0}{AM}.$$

È chiaro che tali condizioni sono soddisfatte prendendo

$$v(P) = -\frac{e_0}{r'}.$$

dove r' è la distanza del punto generico P dal punto A' simmetrico del punto A rispetto a σ (fig. 51). Quindi sarà

$$V(P) = e_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right),$$

e se ne deduce che la carica indotta agisce [nel semispazio che contiene A] come una carica $-e_0$ posta in A' [« immagine elettrica » della carica e_0 rispetto al piano σ]. La densità di distribuzione su σ è, così,

$$\rho_\sigma = -\frac{e_0}{4\pi} \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right).$$

Ma, detti r_σ la distanza di A dal punto generico M di σ , α l'angolo che MA forma colla normale \mathbf{n} , ed essendo $\cos \alpha = a/r_\sigma$, si ha

$$\left(\frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right)_\sigma = \left(-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dn} \right)_\sigma = \left(\frac{1}{r^2} \cos \alpha \right)_\sigma = \frac{a}{r_\sigma^3},$$

$$\left(\frac{d}{dn} \frac{1}{r'} \right)_\sigma = -\left(\frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right)_\sigma;$$

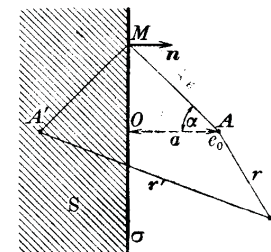


Fig. 51.

risulta quindi

(III, 48)

$$\rho_\sigma = -\frac{e_0}{2\pi} \frac{a}{r_\sigma^3}$$

Per la carica totale e , indotta su σ , si ha, poi, con facile integrazione,

$$e = -e_0 a$$

§ 58. Influenza di un campo uniforme su una sfera conduttrice isolata.

Come secondo esempio di calcolo di un fenomeno di influenza studiamo il caso in cui il campo inducente \mathbf{E}_0 è uniforme ⁽¹⁾ ed il conduttore influenzato è una sfera isolata di cui supponiamo data la carica totale e .

Ricordando quanto si è detto a § 56, ed usando le notazioni là adottate, risolveremo dapprima il problema colla condizione $W = 0$ ed e non assegnato.

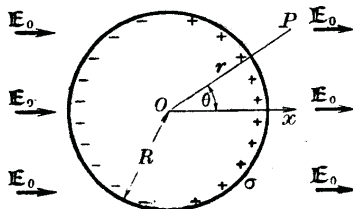


FIG. 52.

Preso un asse, x , con origine nel centro O della sfera e diretto come \mathbf{E}_0 , [fig. 52] osserviamo anzitutto che il campo uniforme \mathbf{E}_0 si può considerare come derivato dal potenziale

$$w = -\mathfrak{C}_0 x$$

[come si verifica subito poichè

$$-\frac{\partial w}{\partial x} = \mathfrak{C}_0, \quad -\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} = 0]$$

e che esprimendo w mediante le coordinate r [distanza del punto generico P da O] e θ [angolo che OP forma coll'asse x] si ha $x = r \cos \theta$ e quindi

$$w = -\mathfrak{C}_0 r \cos \theta$$

Dovremo allora cercare la funzione v' definita dall'essere:

armonica all'esterno della sfera,

normale all'infinito,

tale che sulla superficie σ della sfera, ($r = R$), sia $v'_\sigma = W - w_\sigma = \mathfrak{C}_0 R \cos \theta$.

⁽¹⁾ Tale è, per es., il campo nello spazio compreso fra due piani paralleli con distribuzioni uniformi ed eguali di cariche, positive per l'uno e negative per l'altro.

Ricordando le proprietà del potenziale di un dipolo [§ 50] si vede che queste condizioni si possono soddisfare prendendo per v' il potenziale di un dipolo di momento m [che ci riserviamo di determinare] posto nel centro e diretto [come è ovvio, per ragioni di simmetria] come \mathbf{E}_0 : ossia

$$v' = \frac{m}{r^2} \cos \theta$$

ti esso soddisfa evidentemente le due prime condizioni: quanto alla terza basta prendere $m = \mathfrak{C}_0 R^3$ perchè sia identicamente soddisfatta. Il problema per $W = 0$ è così risolto: il potenziale, V' , in un punto esterno alla sfera sarà

$$(III, 49) \quad V' = v' + w = \mathfrak{C}_0 \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \cos \theta$$

e quindi la densità di distribuzione superficiale ρ_σ' e la carica totale, e' , saranno

$$(III, 50) \quad \rho_\sigma' = \frac{3\mathfrak{C}_0 \cos \theta}{4\pi}, \quad e' = 0$$

[perchè, per ragioni di simmetria è $\int \cos \theta d\sigma = 0$].

Questa è dunque anche la soluzione per il caso $e = 0$, cioè per una sfera scarica ed isolata portata in un campo uniforme.

Se ora consideriamo il caso in cui la sfera ha una carica assegnata e , dobbiamo trovare il potenziale $V''(P)$ che si ha [in assenza di cariche influenzanti] quando si comunica alla sfera (isolata) la carica e . Per cose note [§ 46] esso è

$$V''(P) = \frac{e}{r}$$

e la corrispondente densità di distribuzione su σ è

$$\rho_\sigma'' = \frac{e}{4\pi R^2}$$

Abbiamo, così, in definitiva,

$$V(P) = \mathfrak{C}_0 \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \cos \theta + \frac{e}{r}$$

$$\rho_\sigma = \frac{3\mathfrak{C}_0 \cos \theta}{4\pi} + \frac{e}{4\pi R^2}$$

Daremo ora anche un modo diretto di vedere, nel caso di carica totale nulla, che la densità di distribuzione ρ_σ' , data dalla (III, 50), produce all'interno della sfera un campo \mathbf{E}' uguale ed opposto al campo influenzante \mathbf{E}_0 .

Consideriamo due sfere di egual raggio R , di centri O_1, O_2 , e riempiamo la prima con una distribuzione uniforme di elettricità, di densità $+\rho$, la seconda con una distribuzione uniforme di densità $-\rho$: supponiamo poi che la distanza $\delta = O_1 O_2$ sia $< R$ [v. fig. 53], così che le due sfere abbiano una parte comune,

nella quale la densità risulta nulla. Il campo \mathbf{E}_1 , prodotto dalla prima sfera nel punto generico P della regione comune, ha per modulo, [v. (III, 9)],

$$\mathcal{E}_1 = \frac{4}{3} \pi \rho r_1, \quad (r_1 = O_1 P),$$

ed è diretto da O_1 verso P ; il campo \mathbf{E}_2 , prodotto nello stesso punto dalla seconda sfera, ha per modulo

$$\mathcal{E}_2 = \frac{4}{3} \pi \rho r_2, \quad (r_2 = O_2 P),$$

ed è diretto da P verso O_2 . Dimostriamo che il campo \mathbf{E}' [in figura $C-P$], risultante di \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 , prodotto dalle due distribuzioni di cariche è paral-

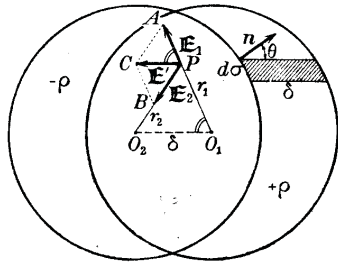


Fig. 53.

lelo alla congiungente. $O_1 O_2$, dei centri, ed è costante. Infatti, componendo vettorialmente \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 [in figura $A-P$ e $B-P$] si viene a costruire un triangolo rettangolo APC simile al triangolo $PO_1 O_2$ [perchè $O_2 P O_1 = \widehat{A}$ per costruzione ed $r_1/r_2 = PA/AC$ ($= \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$)] e quindi è $\widehat{APC} = \widehat{O_1}$, cioè PC , e quindi \mathbf{E}' , è sempre parallelo ad $O_1 O_2$; inoltre, essendo $\mathcal{E}' = PC$, da $PC/PA = = \delta/r_1$ segue

$$(III, 51) \quad \mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}_1 \delta}{r_1} = \frac{4}{3} \pi \rho \delta = \text{cost.}$$

Se ora facciamo tendere δ a zero e contemporaneamente ρ ad ∞ , ma in modo che il prodotto $\rho \delta$ si mantenga costante e finito, otterremo, al limite, uno strato semplice distribuito su una sfera, σ , di raggio R , in modo da avere all'interno un campo costante \mathbf{E}' . Per calcolare la densità, ρ'_σ , di tale distribuzione osserviamo che su un elemento superficiale generico $d\sigma$ (v. fig. 53) viene a distribuirsi tutta la carica contenuta nel cilindretto [obliquo] di base $d\sigma$ e di lato δ : tale carica è data da $\rho \delta \cos \theta d\sigma$ [se θ è l'angolo che la normale \mathbf{n} a $d\sigma$ forma colla direzione $O_2 O_1$] quindi avremo, [§ 47],

$$\rho'_\sigma = \rho \delta \cdot \cos \theta$$

e, per la (III, 51),

$$\rho'_\sigma = \frac{\mathcal{E}' \cos \theta}{\frac{4}{3} \pi}$$

che, confrontata con la (III, 50) dà $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_0$. Osserviamo che se $(\rho'_\sigma)_{\max}$ è il valore massimo $\rho \delta$ della densità superficiale ρ'_σ , per la (III, 51) il campo \mathcal{E}' ha il valore, costante,

$$\mathcal{E}' = \frac{4}{3} \pi (\rho'_\sigma)_{\max}.$$

Quanto al campo esterno, ricordando che una sfera omogenea agisce, all'esterno, come una carica concentrata nel centro [§ 41], avremmo potuto pensare di sostituire, alle due sfere del ragionamento di poco sopra, due cariche puntiformi poste nei rispettivi centri O_1, O_2 : col passaggio al limite eseguito, tenendo presente la (III, 51), avremmo ottenuto un dipolo di momento

$$m = -\mathbf{E}' R^3.$$

Ritroviamo così, essendo $-\mathbf{E}' = \mathbf{E}_0$, il risultato di poco sopra.

DIELETTRICI

§ 59. Polarizzazione dei dielettrici ⁽¹⁾.

Vediamo ora cosa avviene nei corpi non conduttori [isolanti] quando sono immersi in un campo elettrico.

Per fissare le idee pensiamo ad una sfera, S , non conduttrice [ad es. di ebanite], originariamente senza carica elettrica, posta in presenza

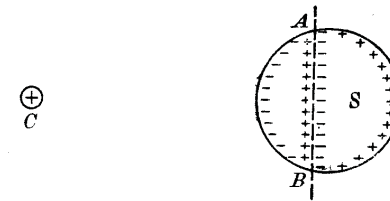


Fig. 54.

di un corpo, C , elettrizzato, per es., positivamente (fig. 54): sulla superficie di S appaiono delle cariche elettriche, negative sulla parte rivolta

⁽¹⁾ Quanto si espone in questo e nei §§ seguenti vale anche, con lievi cambiamenti, per campi magnetici [v. § 73], ma non per campi gravitazionali.

verso C , positive sulla parte opposta. Il fenomeno si chiama *polarizzazione*. Esso sembra, a prima vista, uguale a quello dell'influenza elettrostatica [§ 56] che si verificherebbe se S fosse un conduttore, ma invece è di tutt'altra natura. Difatti, oltre ad essere soggetto a leggi quantitative diverse da quelle dell'influenza [come vedremo], ne differisce perchè, nel caso dell'influenza, se tagliamo il conduttore S in due parti, una delle due parti risulta carica positivamente e l'altra negativamente e conservano tali cariche anche se si allontana il corpo influenzante, invece, nel caso della polarizzazione, se tagliamo analogamente la sfera isolante S appaiono sulle superfici del taglio (fig. 54) delle distribuzioni di elettricità tali che in ciascuna delle due parti la carica totale è nulla: e lo stesso se suddividiamo ancora le due parti ottenute e così via. Quindi nell'isolante polarizzato ciascun elemento di volume presenta due cariche distinte, la cui somma algebrica è zero ⁽²⁾, cosicchè lo si può considerare come un *dipolo* [§ 50]. Da ciò si comprende che la polarizzazione non consiste in un trasporto di cariche da un punto all'altro del corpo [come l'influenza] ma in una modificazione di struttura di tutta la massa del dielettrico, modificazione che del resto si ripercuote sulle altre proprietà fisiche di esso [elasticità, rifrangenza ottica, ecc.].

Per comprendere meglio la natura del fenomeno conviene ricordare l'interpretazione che ne dà la teoria atomica. Secondo questa vi sono due diverse cause che danno luogo alla polarizzazione, una delle quali agisce in tutti gli isolanti, mentre l'altra [concomitante colla prima e, generalmente, assai più cospicua] si presenta solo in una categoria di sostanze dette *sostanze polari*.

La prima causa è la proprietà che hanno tutti gli atomi di divenire dipoli elettrici quando sono immersi in un campo elettrico [«polarizzabilità»]. Infatti un atomo si può schematizzare come un *nucleo* centrale, O , carico positivamente, circondato da una nube di elettroni negativi [rappresentata in fig. 55 dall'area interna al cerchio]. In condizioni normali tale nube agisce, all'esterno dell'atomo, come una carica negativa puntiforme in O che compensa esattamente la carica del nucleo: l'atomo quindi non produce all'esterno campo elettrico. Ma se esso è posto in un campo \mathbf{E} (fig. 56) questo produce uno spostamento della nube di cariche negative rispetto al nucleo, per cui il centro della nube non è più in O

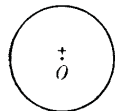


Fig. 55.

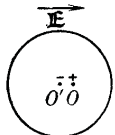


Fig. 56.

ma in un altro punto, O' : l'atomo equivale allora ad un *dipolo*, di cui la carica positiva è in O e quella negativa in O' . Il momento del dipolo è proporzionale alla distanza OO' e questa è [di regola] proporzionale al campo \mathbf{E} . La pola-

$$m = kE$$

⁽²⁾ Escludiamo, come si è detto in principio, che l'isolante abbia carica elettrica indipendente dal fenomeno di polarizzazione.

Nei dielettrici si trova E ancora una polarizzazione formata indipendentemente da un campo esterno dipolo atomico, una polarizzazione che ha origine in una temperatura oscillante e che è molto alta.

rizzazione degli atomi spiega la polarizzazione dell'isolante, perchè ogni elemento di volume di questo equivale ad un dipolo avente per momento la somma dei momenti di tutti i dipoli atomici che lo costituiscono.

La seconda causa dipende da una proprietà non degli atomi ma di talune molecole, e si può manifestare solo in corpi composti [ma non in tutti]. Vi sono delle molecole, dette «*polari*», che sono dei dipoli elettrici anche indipendentemente dalla presenza di un campo. Tale è, per es., la molecola del sale NaCl , in cui l'atomo di Na ha una carica positiva e quello di Cl una negativa, tale è anche la molecola H_2O , etc.; invece altre molecole, come CH_4 , CCl_4 , e tutte quelle formate di atomi eguali [O_2 , H_2 , etc.], non hanno momento elettrico. Ordinariamente in un isolante costituito da molecole polari gli assi di queste sono orientati a caso in tutte le direzioni cosicchè il momento elettrico risultante è nullo. Ma se il dielettrico è sottoposto ad un campo elettrico \mathbf{E} questo tende ad orientare le molecole con l'asse parallelo ad \mathbf{E} . Tale tendenza è contrastata dall'agitazione termica che tende a ristabilire il disordine, così che non si ha l'orientamento perfetto ma solo una prevalenza delle direzioni vicine a quella parallela (fig. 57) tanto più marcata quanto più intenso è il campo e quanto più bassa è la temperatura ⁽³⁾. Questa prevalenza fa sì che l'insieme delle molecole di ogni elemento di volume si comporti come un dipolo parallelo ad \mathbf{E} .

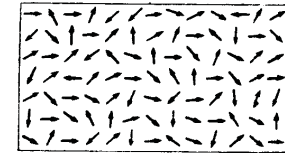


Fig. 57.

Si riserva il nome di «*dielettrici*» ai corpi, in genere, quando si voglia mettere in evidenza per essi il fenomeno della polarizzazione. Questo fenomeno avviene anche nei corpi conduttori quando in essi esista un campo elettrico [e quindi (§ 53) una corrente]: in essi, però, è assai difficile da rivelare sperimentalmente, soprattutto per la difficoltà di mantenere in essi un campo sufficientemente intenso.

§ 60. Teoria fenomenologica della polarizzazione.

Vediamo ora di stabilire la teoria matematica della polarizzazione senza preoccuparci del meccanismo atomico che ne è l'origine [teoria «fenomenologica»]. Il fondamento di tutto è che ogni elemento di volume dS va considerato come un dipolo il cui momento dm è proporzionale a dS . Sarà quindi

$$(III, 52)$$

$$dm = \mathbf{P} dS$$

⁽³⁾ La polarizzazione dovuta ai momenti molecolari si distingue sperimentalmente da quella dovuta alla polarizzazione degli atomi appunto perchè dipende dalla temperatura, mentre l'altra ne è indipendente.

ed il vettore \mathbf{P} , *momento dell'unità di volume*, si chiama «*polarizzazione*» del dielettrico: nella maggior parte dei casi, nelle sostanze isotrope⁽¹⁾, esso si può ritenere proporzionale al campo elettrico \mathbf{E} esistente in quel punto del dielettrico, cioè

(III, 53)

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$$

La costante χ , caratteristica del dielettrico, si dice «*suscettività elettrica*» ed è sempre positiva. Per brevità chiameremo dielettrici *normali* quelli per cui vale la (III, 53) [con χ costante]. Spesso, poi, considereremo anche il vuoto [e, praticamente, anche l'aria] come un dielettrico, di suscettività nulla [infatti in esso è $\mathbf{P} = 0$ per qualunque campo \mathbf{E}].

Ogni elemento di volume dS , polarizzato, produrrà nel punto generico P un potenziale dV^* , dato da [v. (III, 36')]

$$dV^* = \mathbf{P} \times \text{grad}_M \frac{1}{r} \cdot dS.$$

[dove M è un punto di dS ed r la distanza di P da esso], ed il potenziale V^* dovuto alla polarizzazione di tutto il volume S sarà quindi

(III, 54)

$$V^*(P) = \int_S \mathbf{P} \times \text{grad}_M \frac{1}{r} \cdot dS.$$

Possiamo metterlo sotto altra forma ricordando che, per la (I, 16) [cfr. § 6, nota 2], è

$$\text{div}_M \left(\frac{1}{r} \mathbf{P} \right) = \frac{1}{r} \text{div}_M \mathbf{P} + \mathbf{P} \times \text{grad}_M \frac{1}{r},$$

per cui, ricordando la (I, 15'), si ha

$$\begin{aligned} \text{(III, 54')} \quad V^*(P) &= \int_S \left[\text{div}_M \left(\frac{1}{r} \mathbf{P} \right) - \frac{1}{r} \text{div} \mathbf{P} \right] dS = \\ &= \int_S \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{r} d\sigma - \int_S \frac{\text{div} \mathbf{P}}{r} dS. \end{aligned}$$

Il potenziale, V^* , dovuto alla polarizzazione, si può quindi pensare come dovuto ad una distribuzione di carica sulla superficie del dielettrico con densità superficiale [v. (III, 31)]

$$\rho_n^* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

⁽¹⁾ Ricordiamo che si chiamano *isotropi* i corpi che non presentano nelle loro proprietà differenze dipendenti dalla direzione. Nel caso dei dielettrici anisotropi [cristalli] generalmente si può ritenere che la relazione tra \mathbf{E} e \mathbf{P} sia un'omografia vettoriale (§ 15), così che la suscettività χ è sostituita da un tensore simmetrico.

e ad una distribuzione all'interno con densità di volume [v. (III, 16)]

$$\rho^* = -\text{div} \mathbf{P}.$$

Tali cariche, per distinguerle dalle altre, che si chiamano di solito «*cariche vere*»⁽²⁾, si dicono «*cariche di polarizzazione*».

Questo risultato è facilmente giustificabile nel caso della polarizzazione *uniforme* [$\mathbf{P} = \text{cost.}$ e quindi, notiamo, $\text{div} \mathbf{P} = 0$]. Infatti decomponiamo allora il dielettrico S in tanti cilindretti paralleli a \mathbf{P} di sezione infinitesima $d\Sigma$, e dividiamo ognuno di essi in elementi di lunghezza δ (fig. 58). Ogni elemento costituisce un dipolo, di momento, $\mathbf{P} \delta S = \mathbf{P} \delta \cdot d\Sigma$, per cui il valore assoluto delle due cariche che lo costituiscono è [§ 50] $\mathcal{P} d\Sigma$, però l'azione complessiva dovuta a tutto un cilindretto, elidendosi a due a due le azioni delle cariche affacciate dei dipoli contigui, è quella di due cariche contrarie, di valore assoluto $\mathcal{P} d\Sigma$, distribuite sulle facce terminali del cilindretto. Se $d\sigma$ è una di queste e se θ è l'angolo che la normale \mathbf{n} a $d\sigma$ forma con \mathbf{P} , sarà $d\Sigma = d\sigma \cos \theta$ e quindi la carica totale su $d\sigma$ sarà $\mathbf{P} d\sigma \cos \theta$ e la densità superficiale, ρ_n^* , sarà

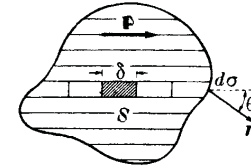


Fig. 58.

$$\frac{\mathcal{P} \cos \theta d\sigma}{d\sigma} = \mathcal{P} \cos \theta = \rho_n^*.$$

Meno facile ad intuirsi è l'origine della densità di volume ρ^* ; osserviamo solo che se \mathbf{P} non è costante può avvenire che le cariche di un dipolo elementare non si compensino con quelle adiacenti e così anche all'interno si può ottenere una densità elettrica. E possiamo aggiungere che, come risulterà dalla (III, 64), se il dielettrico è normale e non contiene cariche «*vere*», è sempre $\rho^* = 0$.

§ 61. Induzione elettrica.

Notiamo ora che il campo *totale* \mathbf{E} esistente in ogni punto dello spazio non è soltanto il campo \mathbf{E}_0 , che vi sarebbe in assenza del dielettrico [cioè quello dovuto alle cariche vere] ma è

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^*$$

dove \mathbf{E}^* è il campo dovuto alle cariche di polarizzazione. Ciò vale anche nell'interno del dielettrico, quindi il campo a cui è dovuta la polarizzazione [quello che figura nella (III, 53)] non è immediatamente calcolabile quando sia dato \mathbf{E}_0 [o le cariche vere], poichè su esso reagisce anche la polarizzazione da esso stesso prodotta. [In genere entro il dielettrico risulta $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$, cioè le cariche di polarizzazione

⁽²⁾ Questa denominazione non deve far credere che le cariche di polarizzazione non abbiano anch'esse un'esistenza reale.

tendono a *diminuire* il campo all'interno del dielettrico; perciò \mathbf{E}^* si chiama « *campo depolarizzante* ». In presenza di dielettrici non è generalmente facile calcolare il campo \mathbf{E} , e la polarizzazione \mathbf{D} , prodotti da una data distribuzione di cariche vere (¹). Tuttavia è possibile, come ora dimostreremo, definire un altro vettore \mathbf{D} , che è legato in modo semplice alle cariche vere.

L'equazione, (III, 7), $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$ deve ora venire sostituita dalla equazione

$$(III, 55) \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho^*) = 4\pi(\rho - \text{div } \mathbf{D})$$

e quindi, se introduciamo il vettore

$$(III, 56) \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{D}, \quad \text{Spostamento}$$

detto « *induzione elettrica* » o « *spostamento* », avremo

$$(III, 57) \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

in cui la (III, 7) rientra come caso particolare [$\mathbf{D} = 0$]. Ad essa possiamo dare forma integrale integrandola in un qualunque spazio finito S , limitato da una superficie σ , ed applicando il teorema della divergenza, (I, 15'): troviamo allora

$$(III, 58) \quad \int_{\sigma} \mathbf{D}_n d\sigma = 4\pi e,$$

dove e è la carica vera totale contenuta in S . La (III, 58) ci dice che il *flusso del vettore* \mathbf{D} , uscente da una superficie chiusa qualsiasi σ , è dato da $4\pi e$, dove e è la carica vera totale interna a σ . Ed è questa la forma più generale del teorema di Gauss [§§ 39, 40].

Per dielettrici normali [§ prec.] la (III, 56) dà

$$(III, 59) \quad \mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E},$$

dove si è introdotto lo scalare

$$(III, 60) \quad \epsilon = 1 + 4\pi\chi, \quad \text{Costante dielettrica}$$

che si dice *costante dielettrica* (²) [e risulta sempre > 1]: se ne deduce che nei dielettrici normali anche \mathbf{D} è proporzionale ad \mathbf{E} . Se, inoltre, il dielettrico è omogeneo [con che $\epsilon = \text{cost.}$], si potrà scrivere la (III, 57) nella forma

$$(III, 61) \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon}\rho$$

(¹) Vedremo in seguito [§ 64] due casi semplici e particolarmente interessanti di tale calcolo.

(²) Ecco alcuni valori: vuoto 1; aria 1,00059; paraffina 2; acqua 81.

e quindi il flusso del campo \mathbf{E} uscente da una superficie chiusa σ è dato da

$$(III, 62) \quad \int_{\sigma} \mathbf{E}_n d\sigma = \frac{4\pi}{\epsilon} e$$

e l'equazione di Poisson, (III, 20), diventa

$$(III, 63) \quad \Delta V = -\frac{4\pi}{\epsilon}\rho.$$

Si noti pure che dalla (III, 55) e dalla (III, 61) si ricava, eliminando $\text{div } \mathbf{E}$,

$$(III, 64) \quad \rho^* = \rho\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) \quad \epsilon = \frac{\rho}{\rho + \rho^*}$$

e quindi se $\rho = 0$ è anche $\rho^* = 0$.

§ 62. Strati semplici e conduttori immersi in un dielettrico. Teorema di Coulomb.

Vediamo, ora, quali relazioni vanno sostituite alla (III, 32), sulla discontinuità della componente normale del campo elettrico attraverso uno strato semplice, ed al teorema di Coulomb, (III, 42), nel caso di uno strato semplice o di un conduttore immersi in un dielettrico.

Se consideriamo uno strato semplice σ , di densità ρ_σ , immerso in un dielettrico, ripetendo il ragionamento svolto a § 48 ma servendosi del teorema di Gauss nella forma (III, 58) si troverebbe, in luogo della (III, 32),

$$(III, 65) \quad \mathcal{D}_{n+} - \mathcal{D}_{n-} = 4\pi\rho_\sigma,$$

formula che, se il dielettrico è normale ed omogeneo, diviene

$$(III, 65') \quad \mathcal{E}_{n+} - \mathcal{E}_{n-} = \frac{4\pi}{\epsilon}\rho_\sigma.$$

Se, poi, si considera la superficie σ di un conduttore immerso nel dielettrico, si ha [ripetendo il ragionamento del § 54] come generalizzazione del *teorema di Coulomb*,

$$(III, 66) \quad \mathcal{D}_\sigma = 4\pi\rho_\sigma,$$

e, per dielettrici normali ed omogenei,

$$(III, 66') \quad \mathcal{E}_\sigma = \frac{4\pi}{\epsilon}\rho_\sigma.$$

Essendo $\epsilon > 1$, il campo in vicinanza del conduttore resta diminuito

[a parità di ρ_σ] quando il conduttore è immerso in un dielettrico: questo fatto lo si spiega osservando che sulla faccia del dielettrico a contatto col conduttore si ha una densità di carica di polarizzazione ρ_σ^* di segno opposto a ρ_σ che, quindi, produce un campo in senso contrario.

§ 63. Comportamento dell'induzione e del campo alla superficie dei dielettrici.

Merita particolare attenzione quanto avviene alla superficie di separazione di due dielettrici [uno dei quali può essere il vuoto] che denoteremo cogli indici (1) e (2). Sia σ tale superficie e sia \mathbf{n} la normale ad essa, orientata arbitrariamente, per es. da (1) verso (2) (fig. 59). Se indichiamo con \mathcal{P}_{n-} e \mathcal{P}_{n+} la componente normale della polarizzazione \mathbf{P} in due punti della normale, infinitamente vicini alla superficie, ma in (1) il primo ed in (2) il secondo, la densità di carica di polarizzazione che si ha su σ a causa del dielettrico (1) sarà [§ 60]

$$(\rho_\sigma^*)_1 = \mathcal{P}_{n-}$$

e quella che vi si ha a causa del dielettrico (2) sarà

$$(\rho_\sigma^*)_2 = -\mathcal{P}_{n+}$$

avremo quindi su σ , [supponendo che non vi siano cariche vere superficiali], uno strato semplice di densità

$$\rho_\sigma^* = (\rho_\sigma^*)_1 + (\rho_\sigma^*)_2 = \mathcal{P}_{n-} - \mathcal{P}_{n+}.$$

Ne viene che attraverso σ il campo \mathbf{E} ha, nella componente normale, la discontinuità [§ 48]

$$\mathcal{E}_{n+} - \mathcal{E}_{n-} = 4\pi(\mathcal{P}_{n-} - \mathcal{P}_{n+}).$$

Ricordando la (III, 56) questa relazione si può scrivere

$$(III, 67) \quad \mathcal{D}_{n+} = \mathcal{D}_{n-}$$

ossia: *mentre la componente normale del campo elettrico \mathbf{E} è discontinua attraverso σ , vi è continua la componente normale dell'induzione elettrica \mathbf{D}* . Si ha dunque una discontinuità della componente normale del campo non solo [§ prec.] sugli strati semplici di cariche vere ma anche sulle superfici dei dielettrici, a causa degli strati semplici di polarizzazione che vi si formano.

Invece, essendo [§ 48] continua la componente tangenziale \mathbf{E}_t di \mathbf{E} ,

ne segue che la componente tangenziale \mathbf{D}_t di \mathbf{D} è discontinua attraverso σ .

Nel caso di dielettrici normali [§ 60] la (III, 67) si può scrivere, indicando con ϵ_1 ed ϵ_2 le costanti dielettriche di (1) e (2),

(III, 67')

$$\epsilon_2 \mathcal{E}_{n+} = \epsilon_1 \mathcal{E}_{n-}$$

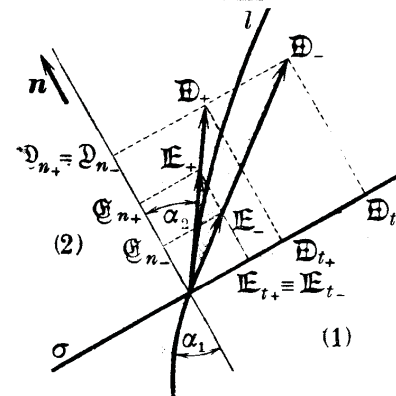


Fig. 60.

Quanto alle componenti tangenziali, invece, si ha, per la (III, 59),

$$\mathcal{D}_{t+} = \epsilon_2 \mathcal{E}_{t+}, \quad \mathcal{D}_{t-} = \epsilon_1 \mathcal{E}_{t-},$$

e quindi, essendo $\mathcal{E}_{t+} = \mathcal{E}_{t-}$,

$$(III, 68) \quad \mathcal{D}_{t+} - \mathcal{D}_{t-} = \mathcal{E}_t(\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

e

$$(III, 69) \quad \mathcal{D}_{t+} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \mathcal{D}_{t-}$$

Si ha quindi, attraverso σ , una deviazione [rifrazione] delle linee di flusso dell'induzione \mathbf{D} [che sono anche linee di forza], ed è facile trovarne le leggi. Infatti, se consideriamo una linea d'induzione l e chiamiamo α_1 ed α_2 gli angoli che essa forma colla normale dalle due parti di σ (fig. 60), osserviamo anzitutto che tali angoli giacciono nello stesso piano. [perchè \mathcal{D}_{t+} e \mathcal{D}_{t-} sono sulla stessa retta]; notiamo poi che, avendosi $\text{tg } \alpha_1 = \mathcal{D}_{t-}/\mathcal{D}_n$, $\text{tg } \alpha_2 = \mathcal{D}_{t+}/\mathcal{D}_n$, per la (III, 69), si ha la legge

$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

Nella fig. 62 si vede chiaramente questa cosiddetta « rifrazione » [che avviene però, come si vede, con legge diversa da quella ottica].

§ 64. Due esempi di polarizzazione in un campo uniforme.

1. - Consideriamo una *lastra dielettrica* omogenea indefinita a facce piane posta fra le due armature di un condensatore piano (v. fig. 61) e siano \mathbf{E}_0 il campo [uniforme] dovuto al condensatore ed \mathbf{E}^* il campo depolarizzante [§ 61].

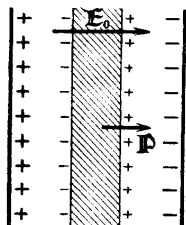


Fig. 61.

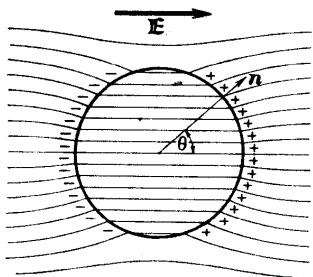


Fig. 62.

Le linee di forza [che evidentemente sono anche le linee di flusso della polarizzazione \mathbf{D}] sono normali alle armature del condensatore ed alle facce del dielettrico, quindi [§ 61] la densità di polarizzazione $\rho_\sigma^* = \mathcal{D}_n$ sarà $-\mathcal{D}$ su una faccia e $+\mathcal{D}$ sull'altra faccia del dielettrico, e produrrà all'interno di esso [§ 49] il campo \mathbf{E}^* dato in valore e direzione da

$$\mathbf{E}^* = -4\pi\mathbf{D}.$$

Sarà quindi

$$\mathbf{D} = \chi\mathbf{E} = \chi(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^*) = \chi(\mathbf{E}_0 - 4\pi\mathbf{D})$$

e si ricava, tenendo presente la (III, 60),

$$(III, 70) \quad \mathbf{D} = \frac{\chi}{1 + 4\pi\chi} \mathbf{E}_0 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\mathbf{E}_0}{4\pi}$$

la densità sulle due facce della lastra sarà, poi,

$$(III, 71) \quad \rho_\sigma^* = \pm \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\mathcal{C}_0}{4\pi}$$

2. - Passiamo ora allo studio di una *sfera dielettrica* che venga immersa in un campo uniforme \mathbf{E}_0 . Mostreremo che anche in questo caso [come in quello precedente] si produce una polarizzazione uniforme parallela ad \mathbf{E}_0 . A tale scopo verifichiamo che è possibile soddisfare a tutte le condizioni del problema con una polarizzazione \mathbf{D} *uniforme* di valore opportuno. Se θ è l'angolo che la

normale \mathbf{n} alla sfera, σ , forma con la direzione del campo \mathbf{E}_0 e, di conseguenza, con quella di \mathbf{D} [fig. 62], sarà, sulla sfera uniformemente polarizzata,

$$\rho_\sigma^* = \mathcal{D}_n = \mathcal{D} \cos \theta:$$

ricordando i risultati ottenuti a § 58 per una tale distribuzione superficiale, si ha che il campo depolarizzante \mathbf{E}^* è uniforme ⁽¹⁾ ed è dato da

$$(III, 72) \quad \mathbf{E}^* = -\frac{4}{3}\pi\mathbf{D}.$$

L'essere \mathbf{E}^* uniforme fa sì che sia tale anche $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}^*$ e quindi permette di soddisfare la condizione (III, 53) con una \mathbf{D} uniforme [in accordo con l'ipotesi di partenza]. E, precisamente, sarà

$$\mathbf{D} = \chi\mathbf{E} = \chi \left[\mathbf{E}_0 - \frac{4}{3}\pi\mathbf{D} \right]$$

e, di conseguenza,

$$(III, 73) \quad \mathbf{D} = \frac{\chi}{1 + \frac{4}{3}\pi\chi} \mathbf{E}_0 = \frac{3\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0$$

e

$$(III, 74) \quad \rho_\sigma^* = \frac{3\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon + 2} \mathcal{C}_0 \cos \theta.$$

Notiamo che quest'ultima formula è analoga a quella trovata a § 58, per l'influenza su una sfera conduttrice, e che, formalmente, ad essa si riduce se si passa al limite per $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Aggiungiamo ancora che per quanto riguarda lo spazio esterno, sempre per ciò che si è visto a § 58, la sfera polarizzata agisce come un dipolo di momento $\mathbf{m} = -\mathbf{E}^*R^3$ posto nel centro.

§ 65. Una interpretazione fisica dell'induzione elettrica \mathbf{D} .

L'induzione elettrica \mathbf{D} ha un'interessante interpretazione fisica.

Se si tracciano all'interno di un dielettrico le linee di flusso di \mathbf{D} [che per un dielettrico normale sono anche le linee di forza] e si considera una cavità scavata lungo un tubo di flusso infini-

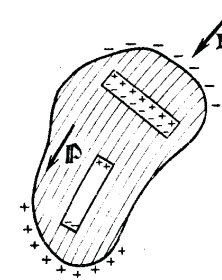


Fig. 63.

⁽¹⁾ Si noti che, *in generale*, una polarizzazione uniforme non produce un campo depolarizzante uniforme: ciò vale solo se il corpo ha forma ellissoidica o sferica. Quindi solo per tali forme si può applicare il metodo qui esposto. Un corpo di un'altra forma, immerso in un campo \mathbf{E}_0 uniforme, in genere non si polarizza uniformemente.

tesimo, all'interno di essa il campo è \mathbf{E} ; se invece si considera una cavità piatta compresa fra due superfici infinitamente vicine ma normali alle linee di flusso di \mathbf{D} , all'interno di questa il campo è \mathbf{D} .

Infatti nel primo caso l'azione delle cariche di polarizzazione [distribuite (v. fig. 63) sulle basi infinitesime della cavità] è infinitesima rispetto ad \mathbf{E} : quindi le cariche di polarizzazione rese libere con lo scavare la cavità non modificano il campo. Nel secondo caso, invece, tale azione non è trascurabile ed è quella di due distribuzioni, una con densità $+\mathfrak{D}$, su una faccia, e l'altra con densità $-\mathfrak{D}$, sull'altra faccia della cavità [§ 60]. Tale azione, essendo le due facce infinitamente vicine, è equivalente a quella esercitata da due piani paralleli con densità contrarie $+\mathfrak{D}$, $-\mathfrak{D}$ ed è quindi data in valore e direzione [§ 49] da $4\pi\mathbf{D}$. Il campo complessivo all'interno della cavità è di conseguenza $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{D}$ ossia \mathbf{D} .

§ 66. Campo in un dielettrico illimitato, normale ed omogeneo.

Supponiamo ora che il dielettrico *omogeneo e normale* occupi tutto lo spazio [escluso, naturalmente, quello occupato dai conduttori ⁽¹⁾]: valgono allora in tutto lo spazio le (III, 61), (III, 65'), (III, 66') che, introducendo il potenziale V , si potranno scrivere

$$(III, 75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta V = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \\ \left(\frac{dV}{dn}\right)_+ - \left(\frac{dV}{dn}\right)_- = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_\sigma, \quad (\text{sugli strati sempl.}) \\ \left(\frac{dV}{dn}\right)_\sigma = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho_\sigma. \quad (\text{sui conduttori}). \end{array} \right.$$

Se il dielettrico fosse il vuoto [$\varepsilon = 1$], le stesse cariche ρ e ρ_σ produrrebbero un potenziale V_0 soddisfacente, invece delle precedenti, le equazioni

$$(III, 75') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta V_0 = -4\pi\rho, \\ \left(\frac{dV_0}{dn}\right)_+ - \left(\frac{dV_0}{dn}\right)_- = -4\pi\rho. \quad (\text{sugli strati sempl.}) \\ \left(\frac{dV_0}{dn}\right)_\sigma = -4\pi\rho_\sigma. \quad (\text{sui conduttori}). \end{array} \right.$$

Noi sappiamo [§ 44] che queste condizioni [insieme alle condizioni normali all'infinito] determinano univocamente la V_0 , quindi le (III, 75) determineranno univocamente le V ed, anzi, come si verifica, è

$$(III, 76) \quad V = V_0/\varepsilon.$$

⁽¹⁾ In pratica basta che occupi tutta la regione dove è sensibile il campo elettrico.

Ne segue che il campo \mathbf{E} si ottiene da quello \mathbf{E}_0 , che nelle stesse condizioni si avrebbe nel vuoto, dividendolo per ε , cioè

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\varepsilon.$$

Per questo si suole dire che *in uno spazio infinito tutto occupato da dielettrico normale ed omogeneo [di costante dielettrica ε] ogni fenomeno elettrico avviene come se il coefficiente della legge di Coulomb, (III, 1), invece di 1 [in u.e.s.a.] fosse $1/\varepsilon$ ⁽²⁾.*

Conseguenza immediata è che la *capacità*, C , di un conduttore immerso in un dielettrico omogeneo illimitato è *maggiore* della capacità C_0 del conduttore nel vuoto, e precisamente, per le (III, 45) e (III, 76).

$$C = \varepsilon C_0$$

[per es. nel caso della sfera si ha $C = \varepsilon R$]. Per questo il Faraday diede ad ε il nome [oggi disusato] di « *capacità induttiva specifica* ».

SISTEMI DI CONDUTTORI

§ 67. Sistemi di conduttori. [Teorema di reciprocità] ⁽¹⁾.

Consideriamo un numero finito di conduttori, che denoteremo cogli indici 1, 2, ..., N , (fig. 64), di cui indicheremo con $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ le superfici e con W_1, W_2, \dots, W_N i potenziali: supponiamo che all'infuori delle loro cariche, e_1, e_2, \dots, e_N , non esistano altre cariche.

Per determinare il potenziale complessivo $V(P)$ ad essi dovuto, e quindi la densità elettrica e la carica totale di ognuno di essi, quando se ne conoscano i singoli potenziali, W_i , dobbiamo risolvere un problema di Dirichlet, perchè

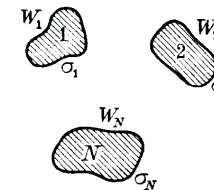


Fig. 64.

⁽²⁾ Talvolta si dice che la costante della formula di Coulomb (III, 1), dipende dal mezzo interposto fra le cariche. Ma usando questa espressione si rinuncia a trattare tutti i casi in cui il dielettrico occupa solo una parte dello spazio, o non è omogeneo. In realtà la legge di Coulomb è valida qualunque siano i corpi interposti, purché, naturalmente, si tenga anche conto delle cariche di polarizzazione.

⁽¹⁾ In questo § ed in seguito ammetteremo che conduttori e cariche si trovino nel vuoto, rimandando al § prec. per il caso più generale in cui siano immersi in un dielettrico indefinitamente esteso.

dobbiamo determinare una funzione V regolare ed armonica all'esterno dei conduttori, normale all'infinito e tale che sia

$$V = W_1, \text{ (su } \sigma_1); \quad V = W_2, \text{ (su } \sigma_2); \quad \dots; \quad V = W_n, \text{ (su } \sigma_n).$$

La densità superficiale di ognuno di essi sarà poi

$$\rho_{\sigma_i} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV}{dn} \right)_{\sigma_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

e la carica totale sarà

$$e_i = \int_{\sigma_i} \rho_{\sigma_i} d\sigma_i.$$

Però questo problema si può scindere in tanti altri problemi di Dirichlet più semplici, e precisamente negli N problemi di determinare le funzioni

$$V_1, V_2, \dots, V_N$$

regolari e armoniche all'esterno dei conduttori, normali all'infinito e tali che sia

$$V_i = \begin{cases} 1, & \text{su } \sigma_i \\ 0, & \text{sugli altri conduttori.} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Infatti, note le V_i , la loro combinazione lineare

$$V = W_1 V_1 + W_2 V_2 + \dots + W_N V_N$$

soddisfa evidentemente le condizioni volute ed è quindi la [unica] soluzione. Avremo allora su qualunque superficie

$$\frac{dV}{dn} = W_1 \frac{dV_1}{dn} + W_2 \frac{dV_2}{dn} + \dots + W_N \frac{dV_N}{dn},$$

da cui, moltiplicando per $-1/(4\pi)$ ed integrando su $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, si ha

$$(III, 77) \quad \begin{cases} e_1 = a_{11} W_1 + a_{12} W_2 + \dots + a_{1N} W_N, \\ e_2 = a_{21} W_1 + a_{22} W_2 + \dots + a_{2N} W_N, \\ \dots \\ e_N = a_{N1} W_1 + a_{N2} W_2 + \dots + a_{NN} W_N, \end{cases}$$

dove i coefficienti

$$(III, 77') \quad a_{ik} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_i} \frac{dV_k}{dn} d\sigma_i,$$

dependono solo da forma, grandezza e posizione dei conduttori, cioè solo dagli elementi *geometrici* del problema.

Un altro tipo di problema è quello in cui, invece dei potenziali W_1, W_2, \dots, W_N , sono date le cariche e_1, e_2, \dots, e_N dei singoli conduttori. Esso si riconduce facilmente al problema precedente perchè, dati gli elementi geometrici dei conduttori, si hanno, come si è visto, le a_{ik} , ed allora dalle cariche, risolvendo le (III, 77), si può risalire ai potenziali W_i : e, precisamente, se A è il determinante della a_{ik} ed A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik} , posto $b_{ik} = A_{ik}/A$, si ha ⁽²⁾

$$(III, 78) \quad \begin{cases} W_1 = b_{11} e_1 + b_{12} e_2 + \dots + b_{1N} e_N, \\ W_2 = b_{21} e_1 + b_{22} e_2 + \dots + b_{2N} e_N, \\ \dots \\ W_N = b_{N1} e_1 + b_{N2} e_2 + \dots + b_{NN} e_N. \end{cases}$$

È facile vedere che il determinante A [e quindi quello delle b_{ik}] è *simmetrico*, servendosi di un notevole *teorema di reciprocità* dovuto al Green. Cominciamo, per vederlo, col dimostrare il seguente lemma, relativo ad un sistema di cariche puntiformi:

« se il sistema di cariche puntiformi e_1, e_2, \dots, e_N , poste nei punti P_1, P_2, \dots, P_N , produce nei punti P_1, P_2, \dots, P_N i potenziali $W_{(1)}, W_{(2)}, \dots, W_{(N)}$ [intendendo che $W_{(s)}$ sia il potenziale prodotto in P_s da tutte le cariche *esclusa* la e_s] e se il sistema delle cariche e'_1, e'_2, \dots, e'_N poste negli stessi punti produce analogamente potenziali $W'_{(1)}, W'_{(2)}, \dots, W'_{(N)}$, si ha

$$(III, 79) \quad \sum_1^N e_i W'_{(i)} = \sum_1^N e'_i W_{(i)}.$$

Infatti, essendo

$$W_{(i)} = \sum_{k \neq i}^N \frac{e_k}{r_{ik}}, \quad W'_{(i)} = \sum_{k \neq i}^N \frac{e'_k}{r_{ik}}$$

[dove r_{ik} è la distanza $P_i P_k$ e la notazione $k \neq i$ sta ad indicare che nella sommatoria k assume tutti i valori da 1 ad N escluso i] il primo ed il secondo membro della (III, 79) si possono rispettivamente scrivere

$$\sum_{k \neq i}^N \frac{e_i e'_k}{r_{ik}}, \quad \sum_{k \neq i}^N \frac{e'_i e_k}{r_{ik}}$$

⁽²⁾ Il determinante A è certo diverso da zero perchè [a parte la dimostrazione analitica che si potrebbe darne] è fisicamente evidente che ad un sistema di cariche e_1, e_2, \dots, e_N corrisponde sempre uno ed un sol sistema di potenziali W_1, W_2, \dots, W_N .

[intendendo, con la notazione $k \neq i$, che dalle sommatorie vadano esclusi i termini con $i = k$]. Ora, scambiando in una di queste espressioni la designazione degli indici i e k , essa si muta nell'altra, quindi le due espressioni sono equivalenti ed è dimostrata la (III, 79).

Ne viene subito il *teorema di reciprocità* relativo ad un sistema di conduttori:

se le cariche totali e_1, e_2, \dots, e_N dei conduttori di un sistema producono ⁽³⁾ su essi i potenziali W_1, W_2, \dots, W_N e se le cariche e'_1, e'_2, \dots, e'_N producono analogamente i potenziali W'_1, W'_2, \dots, W'_N , allora si ha

$$(III, 80) \quad \sum_1^N e_i W'_i = \sum_1^N e'_i W_i.$$

Per vederlo basta pensare di scomporre tutte le cariche e_1, e_2, \dots, e_N nelle cariche elementari $\rho_\sigma d\sigma$ dei diversi elementi superficiali dei conduttori e considerare queste come cariche puntiformi: la dimostrazione è così ricondotta a quella di poco sopra.

È conseguenza immediata che il determinante A delle a_{ik} è *simmetrico*: infatti se consideriamo due sistemi di cariche e_i ed e'_i tali che il primo dia

$$W_1 = 1, \quad W_2 = W_3 = \dots = W_N = 0,$$

e il secondo

$$W'_2 = 1, \quad W'_1 = W'_3 = \dots = W'_N = 0,$$

dalla (III, 80) otterremo $e'_1 = e_2$ cioè [essendo, per le (III, 77), $e'_1 = a_{12}, e_2 = a_{21}$]

$$a_{12} = a_{21};$$

e analogamente si dimostra, per ogni altra coppia di conduttori, che

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Le a_{ii} [in numero di n] si chiamano *coefficienti di capacità*, [per la ragione che si vedrà nel § seguente], le a_{ik} ($i \neq k$) [in numero di $n(n-1)/2$] si chiamano *coefficienti di induzione*.

§ 68. Capacità in un sistema di conduttori.

La definizione data per la capacità di un conduttore, quando è solo, [§ 55], non può venire senz'altro estesa al caso di un conduttore

⁽³⁾ In questo enunciato W_i è il potenziale prodotto sul conduttore i -esimo da tutte le cariche compresa la propria [e così W'_i].

in presenza di altri perchè, considerando, per es., il conduttore (1) di un sistema, si avrebbe per la sua capacità, C_1 , l'espressione

$$C_1 = \frac{e_1}{W_1} = a_{11} + a_{12} \frac{W_2}{W_1} + a_{13} \frac{W_3}{W_1} + \dots + a_{1N} \frac{W_N}{W_1},$$

ed essa verrebbe a dipendere dai potenziali degli altri conduttori. Bisogna dunque aggiungere, alla definizione della capacità, una convenzione riguardante lo stato degli altri conduttori: in genere si conviene di chiamare *capacità, C_i , del conduttore i -esimo* del sistema il rapporto fra la sua carica ed il suo potenziale quando gli altri conduttori sono a potenziale zero. Si ottiene così [§ prec.]

$$C_i = a_{ii} = - \frac{1}{4\pi} \int_{a_i} \frac{dV_i}{dn} d\sigma_i,$$

e questo giustifica il nome dato alle a_{ii} . Come si vede, la C_i così definita dipende solo dalle caratteristiche geometriche del sistema di conduttori e non dai loro potenziali.

Non è difficile vedere che la capacità, C , di un conduttore quando è solo è *minore* della capacità, C' , dello stesso conduttore quando appartenga ad un sistema ⁽¹⁾. Difatti, supponiamo dapprima che il conduttore sia solo e portiamolo al potenziale 1: con che la sua carica [positiva] sarà $e = C$. Portiamo ora in presenza di questo conduttore degli altri conduttori *mantenuti* al potenziale 0: su questi si produrranno delle cariche indotte che modificheranno il potenziale del conduttore dato, così che, per riportare questo al potenziale 1, bisognerà comunicargli un'altra carica e' : la nuova capacità C' del conduttore dato sarà $C' = e + e'$. Dimostriamo che $e' > 0$. Osserviamo perciò che, quando il conduttore dato è al potenziale 1 e gli altri al potenziale zero, il potenziale in ogni punto dello spazio deve essere compreso fra zero ed 1 [poichè, essendo armonico, non può avere massimi o minimi che in punti del contorno (§ 19) e quindi il suo massimo sarà 1 ed il suo minimo 0]. Da ciò segue che su tutti i conduttori a potenziale 0 la ρ_σ è negativa o nulla: poichè se in un punto fosse positiva ivi sarebbe, per il teorema di Coulomb [§ 54], $\frac{dV}{dn} < 0$ e quindi, allontanandosi lungo la normale, V dovrebbe scendere al disotto di 0, il che abbiamo escluso. Ora, se le densità delle cariche indotte sono

⁽¹⁾ Si potrebbe pure dimostrare che il rapporto e/W di un conduttore S cresce anche [sebbene in misura minore] avvicinando ad esso un altro conduttore S_0 isolato con carica zero. Ciò si comprende intuitivamente, poichè su S_0 nascono due distribuzioni eguali ed opposte di cariche indotte, e la distribuzione di segno contrario a quello della carica e di S è più vicina ad S dell'altra. Il potenziale prodotto su S dalle cariche indotte su S_0 è, così, di segno opposto al potenziale iniziale W di S .

dovunque zero o negative, il potenziale da esse prodotto sul conduttore dato sarà negativo e quindi la carica e' , necessaria per compensare il loro effetto, sarà positiva.

§ 69. Condensatori.

La proprietà per cui si accresce la capacità di un conduttore avvicinando ad esso altri conduttori a potenziale zero [§ prec.] è sfruttata nei « condensatori ». Un condensatore è un sistema di due conduttori [armature] affacciati a breve distanza per una vasta superficie in modo che se una delle armature è mantenuta a potenziale zero l'altra acquista una capacità notevole [assai maggiore, in genere, di quella che si potrebbe ottenere con un conduttore solo di pari dimensioni]. Spesso tra le due armature vi è un dielettrico il che, come vedremo, aumenta ancora la detta capacità.

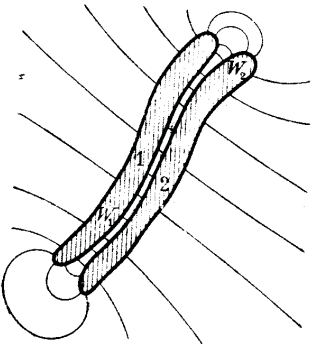


Fig. 65.

Un condensatore essendo dunque un sistema di due conduttori, ad esso si applica la teoria generale del § 67; le (III, 77) divengono

$$(III, 81) \quad \begin{cases} e_1 = a_{11}W_1 + a_{12}W_2, \\ e_2 = a_{21}W_1 + a_{22}W_2. \end{cases}$$

Mostreremo ora che se il condensatore è « sottile » [cioè se la distanza fra le armature, che supponiamo parallele, è piccola rispetto alle loro dimensioni (v. in fig. 65 la sezione)] si ha approssimativamente

$$(III, 82) \quad a_{11} = a_{22}$$

e quindi [§ prec.] la capacità, a_{11} , della 1ª armatura [essendo la 2ª a potenziale zero] è uguale alla capacità, a_{22} , della 2ª armatura [essendo la 1ª a potenziale zero], così che entrambe si possono designare come la capacità C del condensatore. Inoltre dimostreremo che, nella stessa approssimazione, è

$$(III, 83) \quad a_{12} = -a_{11}$$

e, quindi, che

$$e_1 = -e_2 = C(W_1 - W_2) :$$

e ne segue che allora la capacità può anche definirsi come

$$(III, 84) \quad C = \frac{e_1}{W_1 - W_2} \quad \text{oppure} \quad C = \frac{e_2}{W_2 - W_1}$$

Cominciamo coll'osservare che nello spazio compreso fra le due armature le linee di forza si possono identificare con segmenti rettilinei normali alle due superfici affacciate, e nello spazio esterno hanno un andamento come quello segnato in figura 65. Però il campo \mathbf{E} è particolarmente intenso nello spazio compreso fra i conduttori perchè, se W_1 e W_2 sono, come si è detto, i potenziali delle armature, l una linea di forza ed \mathcal{C} il valor medio di \mathcal{C} lungo essa, si ha [cfr. § 42] [supposto per es. $W_2 > W_1$]

$$W_2 - W_1 = \int \mathcal{C}_l dl = \overline{\mathcal{C}} l,$$

ed $\overline{\mathcal{C}}$ risulta inversamente proporzionale alla lunghezza di l . Risulta quindi che il campo nello spazio compreso tra le armature si può ritenere di intensità uniforme uguale a

$$\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} = \frac{W_2 - W_1}{s}$$

[dove s è la distanza tra le due armature], mentre nel rimanente dello spazio si può ritenere nullo. Da ciò segue, per il teorema di Coulomb, che la carica elettrica delle armature è praticamente concentrata tutta sulle parti affacciate delle loro superfici, dove ha il valore

$$\rho_{\sigma_1} = -\frac{1}{4\pi} \mathcal{C} = -\frac{1}{4\pi} \frac{W_2 - W_1}{s}, \quad \rho_{\sigma_2} = \frac{1}{4\pi} \mathcal{C} = \rho_{\sigma_1}$$

Le cariche e_1, e_2 dei due conduttori sono allora, detta S l'area delle superfici affacciate,

$$e_1 = \rho_{\sigma_1} S = -\frac{1}{4\pi} \frac{W_2 - W_1}{s} S,$$

$$e_2 = -\rho_{\sigma_1} S = -e_1,$$

e, confrontando con le (III, 81), avremo

$$a_{11} = a_{22} = \frac{S}{4\pi s}, \quad a_{21} = a_{12} = -\frac{S}{4\pi s}$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Si ha inoltre che la capacità, C , del condensatore « sottile » è

$$(III, 85) \quad C = \frac{S}{4\pi s}$$

Se poi un condensatore, di capacità C , viene immerso in un dielettrico illimitato di costante ϵ , per quanto si è detto al § 66, la sua nuova capacità C' è

$$C' = \epsilon C :$$

ad es., per il condensatore sottile si avrà

(III, 85')

$$C' = \varepsilon \frac{S}{4\pi s}$$

Però, dato che, come si è detto, il campo è praticamente limitato allo spazio tra le due armature e quasi nullo fuori, in pratica si usa la stessa regola anche quando, come nei condensatori ordinari, il dielettrico riempie solo lo spazio compreso fra le due armature. (2)

§ 70. Un esempio di calcolo esatto di un condensatore: condensatore sferico.

Se non ci si accontenta delle approssimazioni del § precedente [che sono tanto più valide quanto più il condensatore è sottile] non valgono più, in generale, le (III, 82) e (III, 83) e quindi le quattro definizioni di capacità del condensatore come

$$\left(\frac{e_1}{W_1}\right)_{W_2=0}, \quad \left(\frac{e_2}{W_2}\right)_{W_1=0}, \quad W_1 - W_2, \quad W_2 - W_1$$

non sono più in generale equivalenti. Il calcolo rigoroso dei coefficienti a_{11} , a_{22} , a_{12} , dipende, come sappiamo, da un problema di Dirichlet, si sa quindi fare solo in casi particolari. Il più semplice è il *condensatore sferico*.

Esso è costituito da due sfere concentriche conduttrici, costituenti le due armature. Assegniamo l'indice (1) all'interna e siano R_1 , R_2 i raggi (fig. 66). Le cariche e_1 , e_2 saranno distribuite uniformemente e quindi [v. § 47] la e_1 produrrà, all'esterno della sfera (1) e a distanza r dal centro, il potenziale e_1/r , mentre la e_2 produrrà, all'interno della sfera (2), il potenziale costante e_2/R_2 ; dunque nello spazio compreso fra le due sfere il potenziale sarà

$$V_d = \frac{e_1}{r} + \frac{e_2}{R_2}$$

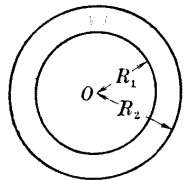


Fig. 66.

Facendo $r = R_1$ od $r = R_2$ si hanno i potenziali delle due armature in funzione delle cariche

$$\begin{cases} W_1 = \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}, \\ W_2 = \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}. \end{cases}$$

(2) I condensatori più usati nella pratica sono quelli *piani*, cioè formati da due lastre, piane e parallele [distanti s fra loro]: in tal caso la formula (III, 85') è quella nota dalla fisica elementare.

Risolvendo, e ponendo $R_2 - R_1 = s$, si ha poi

$$\begin{cases} e_1 = \frac{R_1 R_2}{s} (W_1 - W_2), \\ e_2 = -\frac{R_1 R_2}{s} W_1 + \frac{R_2^2}{s} W_2, \end{cases}$$

che sono le (III, 81) relative al nostro caso. Si ha dunque

$$a_{11} = -a_{12} = \frac{R_1 R_2}{s}, \quad a_{22} = \frac{R_2^2}{s}$$

e si verifica che è, [come sempre], $a_{12} = a_{21}$.

La capacità a_{11} dell'armatura interna è dunque

$$(III, 86) \quad \frac{R_1 R_2}{s} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

[e questa si assume in genere come capacità del condensatore sferico]. La capacità a_{22} della armatura esterna è invece maggiore e, precisamente,

$$\frac{R_2^2}{s} = \frac{R_2^2}{R_2 - R_1} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} + R_2 = a_{11} + R_2$$

Si noti che se è $s \ll R_1$ si può ritenere $R_2 = \sim R_1$ e quindi

$$a_{11} = \sim a_{22} = \sim \frac{R_1^2}{s}$$

che rientra nella formula del condensatore sottile [§ prec.] [essendo l'area delle armature $S = 4\pi R_1^2$].

§ 71. Energia elettrostatica.

È noto [§ 42] che l'energia di una carica puntiforme e posta in un punto P a potenziale V_0 prodotto da altre cariche [che supponiamo fisse e delle quali non ci occupiamo], cioè il lavoro che si deve compiere contro la forza del campo per portare la carica e dall' ∞ in P , è (1)

$$(III, 87) \quad \mathcal{U}_0 = e V_0.$$

Possiamo calcolare ora l'energia mutua \mathcal{U} di più cariche puntiformi e_1, e_2, \dots, e_N , poste nei punti P_1, P_2, \dots, P_N , cioè il lavoro che occorrerebbe per portarle dall' ∞ alle loro posizioni vincendo le reciproche azioni. Il caso differisce dal precedente perchè le forze agenti su ciascuna carica, quando la si porta dall' ∞ alla sua posizione, non

(1) Si sottintende [e così in tutto il §] che sono esclusi i casi in cui parte del lavoro si trasforma in calore [per es. attraverso fenomeni di isteresi] o in altre forme di energia.

sono dovute a cariche fisse ed esterne al sistema ma alle altre cariche dello stesso sistema che si trasportano.

Per calcolare Q , immaginiamo di portare le cariche [inizialmente a distanza infinita l'una dall'altra] una per volta al loro posto. Il trasporto della prima, e_1 , dall'∞ a P_1 non richiede lavoro, perchè si effettua in un campo nullo. Il trasporto della seconda, e_2 , dall'∞ a P_2 si effettua nel campo generato da e_1 e richiede quindi il lavoro

$$\frac{e_1 e_2}{r_{12}}$$

[indicando con $r_{ik} = r_{ki}$ la distanza $P_i P_k$]. Il trasporto di e_3 [nel campo generato da e_1 ed e_2] richiede analogamente il lavoro

$$\frac{e_1 e_3}{r_{13}} + \frac{e_2 e_3}{r_{23}}$$

e così via. L'energia Q sarà la somma di queste $N - 1$ espressioni, cioè una somma di termini del tipo $\frac{e_i e_k}{r_{ik}}$ in cui entrano tutte le coppie i, k [con $i \neq k$], ciascuna una volta sola. Ora, se chiamiamo V_i il potenziale prodotto in P_i da tutte le cariche esclusa la e_i , sarà

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{e_2}{r_{12}} + \frac{e_3}{r_{13}} + \dots + \frac{e_N}{r_{1N}}, \\ V_2 &= \frac{e_1}{r_{21}} + \frac{e_3}{r_{23}} + \dots + \frac{e_N}{r_{2N}}, \\ &\dots \dots \dots \\ V_N &= \frac{e_1}{r_{N1}} + \frac{e_2}{r_{N2}} + \dots + \frac{e_{N-1}}{r_{N-1N}} \end{aligned}$$

e se moltiplichiamo ordinatamente per e_1, e_2, \dots, e_N e sommiamo, al primo membro avremo $\sum_1^N e_i V_i$, ed al secondo una somma di termini del tipo $\frac{e_i e_k}{r_{ik}}$, in cui entrano tutte le coppie i, k [con $i \neq k$], ciascuna due volte. Tale somma sarà dunque $2Q$, quindi potremo scrivere ⁽²⁾

$$(III, 88) \quad Q = \frac{1}{2} \sum_1^N e_i V_i$$

Se invece di avere cariche puntiformi si ha una *distribuzione continua*, con densità ρ , di cariche spaziali, ripetendo lo stesso ragiona-

⁽²⁾ Questa formula, e le seguenti di questo §, valgono anche, come si riconosce facilmente (v. § 66) se le cariche sono immerse in un dielettrico illimitato, normale ed omogeneo.

mento per ogni elemento di volume di tutto lo spazio, che indicheremo con S_∞ , si trova

$$(III, 89) \quad Q = \frac{1}{2} \int_{S_\infty} V \rho dS$$

[dove V è il potenziale prodotto in dS da tutta la distribuzione spaziale di cariche in questione], e se esistono anche *strati semplici*, con densità ρ_σ , detto σ il complesso delle superfici su cui sono distribuiti gli strati, si ha

$$(III, 90) \quad Q = \frac{1}{2} \int_{S_\infty} V \rho dS + \frac{1}{2} \int_\sigma V \rho_\sigma d\sigma$$

[dove V è il potenziale complessivo prodotto sia dalle cariche spaziali che dagli strati]. Se gli strati semplici sono quelli esistenti alla superficie di più conduttori $1, 2, \dots, N$ di carica totale e_1, e_2, \dots, e_N ed a potenziale W_1, W_2, \dots, W_N , avremo

$$(III, 90') \quad Q = \frac{1}{2} \int_{S_\infty} V \rho dS + \frac{1}{2} \sum_i^N \int_{\sigma_i} W_i \rho_{\sigma_i} d\sigma_i = \frac{1}{2} \int_{S_\infty} V \rho dS + \frac{1}{2} \sum_1^N e_i W_i$$

dove con S_∞ si intende tutto lo spazio esterno ai conduttori [lo spazio interno darebbe un contributo nullo]. Nel caso di *solidi conduttori*, ($\rho = 0$), si ha

$$(III, 90'') \quad Q = \frac{1}{2} \sum_1^N e_i W_i$$

In particolare, nel caso di un *conduttore solo*, di carica e e potenziale W , ricordando che la capacità, C , è data, [(III, 45)], da e/W , si può dare alla sua energia elettrostatica Q una delle espressioni

$$Q = \frac{1}{2} e W = \frac{1}{2} C W^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}$$

Q è quindi proporzionale al quadrato della carica [o del potenziale] del conduttore.

E nel caso di un *condensatore sottile*, se W_1 e W_2 sono i potenziali, $-e$ e $+e$ le cariche delle armature e $C = e/(W_1 - W_2)$ la capacità [v. § 69], avremo dalla (III, 90'')

$$Q = \frac{1}{2} e(W_1 - W_2) = \frac{1}{2} C(W_1 - W_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}$$

All'espressione (III, 90') dell'energia Q di un sistema di cariche spaziali e di conduttori si può dare un'altra forma molto notevole

introducendo l'induzione elettrica \mathbf{D} e ricordando, [(III, 57)], che $\rho = \text{div } \mathbf{D}/4\pi$. Sostituendo nel primo termine della (III, 90') e utilizzando la (I, 16) si ha

$$\int_{S_\infty} V \rho dS = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} V \text{div } \mathbf{D} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \text{div } (V \mathbf{D}) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \mathbf{D} \times \text{grad } V dS = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \text{div } (V \mathbf{D}) dS + \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \mathbf{D} \times \mathbf{E} dS.$$

Il primo di questi integrali si può trasformare col teorema della divergenza [applicato come al § 19] in uno esteso alla superficie σ di S_∞ , cioè al complesso delle superfici σ_i dei singoli conduttori. Avremo allora, indicando con \mathbf{n}_i la normale a σ_i esterna ad S_∞ [e quindi rivolta verso l'interno del conduttore],

$$(III, 91) \quad \int_{S_\infty} V \rho dS = \frac{1}{4\pi} \sum_i^N \int_{\sigma_i} V \mathcal{D}_i d\sigma_i + \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \mathbf{D} \times \mathbf{E} dS.$$

Ma per il teorema di Coulomb (III, 66) [badando che ora \mathbf{n}_i ha verso opposto al solito] si ha $\mathcal{D}_i = -4\pi\rho_i$ e quindi

$$\int_{S_\infty} V \rho dS = - \sum_i^N \int_{\sigma_i} W_i \rho_i d\sigma_i + \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \mathbf{D} \times \mathbf{E} dS.$$

Sostituendo ora nella (III, 90') si ottiene ⁽³⁾

$$(III, 92) \quad \mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} \mathbf{D} \times \mathbf{E} dS.$$

Se avessimo considerato il caso più generale di cariche spaziali e strati semplici qualsiasi, e quindi fossimo partiti dalla (III, 90) invece che dalla (III, 90'), con analogo ragionamento saremmo giunti ancora alla (III, 92) che è quindi la più generale espressione di \mathcal{U} . Abbiamo, dunque, per l'energia due espressioni equivalenti, la (III, 90) e la (III, 92), di cui la prima mette in evidenza le singole cariche ed i rispettivi potenziali, la seconda invece il campo \mathbf{E} e l'induzione elettrica \mathbf{D} in tutto lo spazio. Per comodità di linguaggio [non avendo evidentemente senso pensare che l'energia abbia una localizzazione spaziale] noi diremo che la (III, 90) localizza l'energia sulle cariche e che la (III, 92) la localizza nel campo. In questo senso andrà intesa la defi-

⁽³⁾ Questa formula, e la (III, 93), valgono anche per i dielettrici anisotropi considerati nella nota 1 al § 60.

nizione di « densità con cui l'energia è distribuita nello spazio » o, brevemente, « densità di energia », data da

(III, 93)

$$\frac{\mathbf{D} \times \mathbf{E}}{8\pi}$$

Se $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ [dielettrici normali (§ 60)] ad essa si può dare la forma

(III, 93')

$$\frac{\epsilon E^2}{8\pi}$$

che mette in evidenza la sua proporzionalità al quadrato del campo.

Osserviamo, però, che se il sistema considerato è posto in un campo assegnato [cioè dovuto a cariche fisse, non appartenenti al sistema] \mathbf{E}_0 , per avere l'energia totale occorre aggiungere ad \mathcal{U} l'energia \mathcal{U}_0 dovuta all'azione del campo \mathbf{E}_0 sul sistema, cioè, se V_0 è il potenziale del campo \mathbf{E}_0 , nel caso di più cariche puntiformi, e_i , poste nei punti P_i , per la (III, 87),

$$\mathcal{U}_0 = \sum_i e_i V_0(P_i)$$

e, nel caso di una distribuzione spaziale di densità ρ e di una distribuzione superficiale di densità ρ_σ ,

$$\mathcal{U}_0 = \int_{S_\infty} V_0 \rho dS + \int_{\sigma} V_0 \rho_\sigma d\sigma.$$

Esempi.

1. - Nel caso di uno strato sferico omogeneo posto in un campo prodotto da cariche esterne alla sfera σ su cui lo strato è distribuito [con densità $\rho_\sigma = \text{cost.}$], \mathcal{U}_0 è dato da

$$\mathcal{U}_0 = \int_{\sigma} V_0 \rho_\sigma d\sigma = \rho_\sigma \int_{\sigma} V_0 d\sigma.$$

Ma, per l'ipotesi fatta, la V_0 è armonica e regolare sulla sfera σ ed al suo interno e quindi [§ 18], indicando con $V_0(C)$ il valore di V_0 nel centro C di essa, sarà $\int_{\sigma} V_0 d\sigma = V_0(C) \cdot \sigma$: perciò, [osservando anche che $\rho_\sigma \sigma$ è la carica totale e] si avrà

$$\mathcal{U}_0 = \rho_\sigma V_0(C) \sigma = e V_0(C),$$

ossia: anche riguardo all'energia \mathcal{U}_0 lo strato sferico si comporta come se tutta la sua carica fosse concentrata nel suo centro.

Ed allo stesso risultato si giungerebbe nel caso analogo di una sfera piena con distribuzione uniforme od, almeno, a simmetria sferica.

2. - Energia \mathcal{U}_0 di un dipolo posto in un campo assegnato \mathbf{E}_0 . Si pensi il dipolo, come a § 50, ottenuto da due cariche $+e, -e$ poste in due punti, A, B ,

ad una distanza δ [fig. 67] che poi si fa tendere a zero mentre e tende ad ∞ in modo che si mantenga $e\delta = m$ [con m costante]: sarà allora [cfr. § 50], se s è la direzione AB ,

$$U_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} [eV_0(A) - eV_0(B)] = \lim_{\delta \rightarrow 0} m \frac{V_0(A) - V_0(B)}{\delta} = m \frac{dV_0}{ds}.$$

Ricordando poi che è, [(I, 8')],

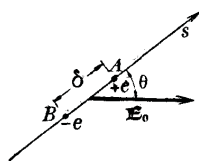


Fig. 67.

$$\frac{dV_0}{ds} = (\text{grad } V_0)_s = -(\mathcal{E}_0)_s,$$

si ottiene

$$U_0 = -m(\mathcal{E}_0)_s,$$

od anche, introducendo il vettore \mathbf{m} [§ 50] e l'angolo $\theta = m\mathbf{E}_0$,

$$(III, 94) \quad U_0 = -\mathbf{m} \times \mathbf{E}_0 = -m\mathcal{E}_0 \cos \theta.$$

[Non si dimentichi che questa è solamente l'energia dovuta all'azione fra il dipolo ed il campo, esclusa cioè l'energia interna del dipolo].

3. - Energia U_0 di un doppio strato posto in un campo assegnato \mathbf{E}_0 . Ogni elemento $d\sigma$ del doppio strato [§ 51] è un dipolo di momento $\mathbf{m} = \mathfrak{M}d\sigma\mathbf{n}$ [dove \mathbf{n} è il versore della normale]: la sua energia è quindi, per la (III, 94),

$$-\mathfrak{M}d\sigma\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 = -\mathfrak{M}\mathcal{E}_{0n}d\sigma$$

e l'energia U_0 di tutto il doppio strato è

$$U_0 = -\int \mathfrak{M}\mathcal{E}_{0n}d\sigma.$$

Se il doppio strato è uniforme [$\mathfrak{M} = \text{cost.}$] la formula si semplifica perchè diviene

$$(III, 95) \quad U_0 = -\mathfrak{M} \int \mathcal{E}_{0n}d\sigma = -\mathfrak{M}\Psi,$$

dove Ψ è il flusso di \mathbf{E}_0 attraverso σ .

§ 72. Calcolo di forze ponderomotrici.

Lo studio fatto ci permette di calcolare facilmente le forze che si esercitano sui corpi elettrizzati immersi in un campo elettrico \mathbf{E}_0 [forze ponderomotrici].

È noto dalla meccanica razionale che, se le forze che agiscono su un corpo od un sistema di corpi derivano da un potenziale meccanico U [§ 42, nota 3], le cosiddette componenti lagrangiane Q_1, Q_2, \dots, Q_N

delle forze, corrispondenti alle coordinate lagrangiane q_1, q_2, \dots, q_N , sono date da (1)

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N);$$

quindi le componenti lagrangiane delle forze ponderomotrici, essendo nel nostro caso $U = -\mathcal{U}_T$ [dove \mathcal{U}_T è l'energia elettrostatica totale] saranno

$$(III, 96) \quad Q_i = -\frac{\partial \mathcal{U}_T}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Esempi.

1. - Nel caso di una carica puntiforme e posta in un campo di potenziale $V_0(x, y, z)$, se le q_i sono le coordinate cartesiane x, y, z , essendo $\mathcal{U}_T = eV_0$, le componenti della forza agente, secondo gli assi x, y, z , saranno [cfr. nota 1]

$$Q_x = -e \frac{\partial V_0}{\partial x} = e\mathcal{E}_{0x}, \quad Q_y = e\mathcal{E}_{0y}, \quad Q_z = e\mathcal{E}_{0z};$$

si ritrovano così formule ben note [§ 39].

Il caso di uno strato sferico o di una sfera omogenea, si riduce, per ciò che si è detto sopra, a quello di una carica puntiforme concentrata nel centro.

2. - Molto più interessante si presenta il caso di un dipolo di dato momento \mathbf{m} posto nel campo \mathbf{E}_0 assegnato (2).

Assumeremo come coordinate lagrangiane le coordinate x, y, z del punto P in cui si trova il dipolo e le coordinate θ e φ [se θ è l'angolo $\mathbf{E}_0\mathbf{m}$ e φ l'angolo che il piano per P parallelo ad \mathbf{E}_0 e \mathbf{m} forma con un piano fisso passante per la retta (P, \mathbf{E}_0) che individuano la direzione di \mathbf{m} [fig. 68].

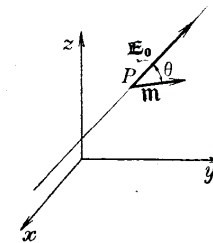


Fig. 68.

Notiamo che l'energia totale \mathcal{U}_T si compone dell'energia interna del dipolo e di quella U_0 dovuta all'azione del campo su di

(1) Ricordiamo che Q_1, Q_2, \dots, Q_N sono i secondi membri delle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q_i} \right) = Q_i$$

[dove $\mathcal{C}(q, \dot{q})$ è la forza viva del sistema] e che, nel caso che q_i sia una ordinaria coordinata cartesiana, la Q_i si identifica con la corrispondente componente cartesiana della forza; nel caso invece che q_i sia un angolo di rotazione intorno ad un asse, Q_i si identifica col momento delle forze rispetto a quell'asse.

(2) Noi svolgiamo questo esempio riferendoci ad un dipolo elettrico, per uniformità con quanto precede, ma la principale applicazione pratica si ha nel caso di un dipolo magnetico posto in un campo magnetico (p. es. ago di bussola nel campo terrestre, oppure atomo con momento magnetico nella esperienza di Stern e Gerlach). Le formule si applicano senz'altro a questi casi, interpretando \mathbf{m} come momento magnetico ed \mathcal{E}_0 come campo magnetico.

esso: la prima è però indipendente dalle coordinate e perciò [v. (III, 96)] terremo conto solo della seconda che è [v. (III, 94)]

$$(III, 97) \quad U_0 = -m\mathcal{E}_0 \cos \theta = -\mathbf{m} \times \mathbf{E}_0 = -(m_x \mathcal{E}_{0x} + m_y \mathcal{E}_{0y} + m_z \mathcal{E}_{0z}).$$

ed, assumendo come asse x la direzione di \mathbf{m} [con che $m_x = m$ ed $m_y = m_z = 0$] si ha

$$(III, 97') \quad U_0 = -mE_{0x}.$$

Allora le forze lagrangiane Q_x, Q_y, Q_z , componenti secondo gli assi x, y, z della forza che si esercita sul dipolo, saranno

$$(III, 98) \quad Q_x = m \frac{\partial \mathcal{E}_{0x}}{\partial x}, \quad Q_y = m \frac{\partial \mathcal{E}_{0x}}{\partial y}, \quad Q_z = m \frac{\partial \mathcal{E}_{0x}}{\partial z},$$

od' anche [ricordando che $\text{rot } \mathbf{E}_0 = 0$ e tenendo presenti le (I, 33)]

$$(III, 98') \quad Q_x = m \frac{\partial \mathcal{E}_{0x}}{\partial x}, \quad Q_y = m \frac{\partial \mathcal{E}_{0y}}{\partial x}, \quad Q_z = m \frac{\partial \mathcal{E}_{0z}}{\partial x}.$$

Le altre due forze lagrangiane Q_θ, Q_φ , relative alle coordinate angolari θ e φ [che (cfr. nota 1) hanno significato di momenti delle forze] sono, per la (III, 97),

$$Q_\theta = -m\mathcal{E}_0 \sin \theta, \quad Q_\varphi = 0,$$

cioè: il momento delle forze agenti sul dipolo rispetto ad un asse normale al piano $(\mathbf{E}_0, \mathbf{m})$ è proporzionale al seno dell'angolo \mathbf{E}_0, \mathbf{m} , ed il momento rispetto alla direzione di \mathbf{E}_0 è nullo. Tutto ciò lo si può riassumere nella relazione vettoriale

$$(III, 99) \quad \mathcal{M} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{E}_0$$

dove \mathcal{M} è il momento delle forze agenti sul dipolo, rispetto al punto P ⁽³⁾. Se il campo \mathbf{E}_0 è uniforme risulta $Q_x = Q_y = Q_z = 0$ cioè la risultante delle

⁽³⁾ Questi risultati si possono ritrovare per altra via ripensando il dipolo come un sistema di due cariche $+e, -e$, poste rispettivamente nei punti A e B ad una distanza infinitesima δ [fig. 69]. Se \mathbf{E}_0 è il campo in B ed $\mathbf{E}_0 + d\mathbf{E}_0$ quello in A , le forze agenti sul sistema sono: $-e\mathbf{E}_0$, applicata in B , ed $e(\mathbf{E}_0 + d\mathbf{E}_0)$, applicata in A . Tale sistema equivale, come si sa dalla meccanica razionale, ad una forza, applicata in A , eguale alla risultante $\mathbf{Q} = -e\mathbf{E}_0 + e(\mathbf{E}_0 + d\mathbf{E}_0) = e d\mathbf{E}_0$ e ad una coppia di momento $\mathcal{M} = (B - A) \wedge (-e\mathbf{E}_0)$. Se assumiamo l'asse x parallelo a BA , le componenti di $d\mathbf{E}_0$ saranno

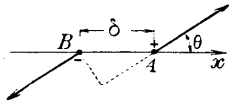


Fig. 69.

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{0x}}{\partial x} \delta, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_{0y}}{\partial x} \delta, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_{0z}}{\partial x} \delta.$$

quindi per le componenti di \mathbf{Q} [ricordando che $e\delta = m$] si ritrovano le (III, 98'). Quanto ad \mathcal{M} basta notare che $-e(B - A) = \mathbf{m}$ per ritrovare la (III, 99).

forze agenti è nulla [cosa prevedibile dato che in tal caso il sistema delle forze agenti si riduce ad una coppia]. In questo caso dall'espressione (III, 94) dell'energia si deduce che si hanno posizioni di equilibrio [posizioni di energia potenziale massima o minima] per $\theta = 0$ [stabile] e $\theta = \pi$ [instabile].

3. - Per terminare studiamo l'attrazione esercitata da corpi elettrizzati su corpi neutri isolanti o conduttori [es. esperienza del pendolino elettrico].

Schematizziamo il problema e ricerchiamo la forza che una carica puntiforme e esercita su di una sferetta dielettrica S sotto l'ipotesi che il raggio R di essa, rispetto alla distanza del centro dalla carica e [fig. 70], sia abbastanza piccolo da poter considerare il campo \mathbf{E}_0 di e all'interno di S come uniforme [ed eguale al valore

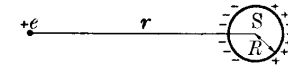


Fig. 70.

$$\frac{e}{r^2} \text{ vers } \mathbf{r}$$

che assume nel centro].

In tal caso la sferetta S si può considerare polarizzata uniformemente [§ 64] e per quanto riguarda il campo esterno si comporta come un dipolo di momento $\mathbf{m} = -\mathbf{E}^* R^3$ se \mathbf{E}^* è il campo [uniforme] generato entro S dalle cariche di polarizzazione. Essendo \mathbf{E}^* dato, per la (III, 72), da

$$\mathbf{E}^* = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{e}{r^2} \text{ vers } \mathbf{r},$$

avremo

$$\mathbf{m} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{eR^3}{r^2} \text{ vers } \mathbf{r}$$

e quindi l'energia U_0 , per la (III, 94), sarà

$$U_0 = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{eR^3}{r^2} \frac{e}{r^2} = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{e^2 R^3}{r^4}.$$

La forza F agente sulla sferetta, diretta per simmetria secondo r , sarà, così, [ricordando la nota 1. e quanto si è detto per l'energia di un dipolo nell'esempio 2],

$$(III, 100) \quad F = F_r = -\frac{\partial U_0}{\partial r} = -4 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{e^2 R^3}{r^5}$$

cioè [essendo $\epsilon > 1$] sarà sempre attrattiva [qualunque sia il segno di e] ed inversamente proporzionale alla quinta potenza della distanza.

Se la sferetta S fosse conduttrice si produrrebbe, anziché un fenomeno di polarizzazione, uno di influenza, ma l'effetto sarebbe sempre quello di trasformare la sferetta in un dipolo [§ 58] il quale, trovandosi in un campo non uniforme, è soggetto ad una forza calcolabile come sopra. Il calcolo, del tutto

analogo al precedente, porta ad una forza [sempre attrattiva] espressa da

$$(III, 101) \quad F = -\frac{4e^2 R^3}{r^5}$$

[ed anche qui, come per la (III, 74) si potrebbe, formalmente, ottenere questa espressione dalla (III, 100) passando al limite per $\epsilon \rightarrow \infty$] (*).

CENNI DI MAGNETOSTATICA

§ 73. Cenni di magnetostatica.

La *magnetostatica* [cioè la teoria dei campi magnetici costanti e non dovuti a correnti elettriche ma a *calamite*] si può considerare parzialmente analoga ad una parte della elettrostatica che abbiamo svolto precedentemente, purchè però si tenga conto di alcune notevoli differenze tra i due ordini di fenomeni.

Il *campo magnetico* \mathbf{D} si definisce in modo analogo al campo elettrico \mathbf{E} [§ 39] e deriva anch'esso [cfr. § 42] da un « *potenziale magnetico* », \mathcal{F} , così che si può scrivere

$$(III, 102) \quad \mathbf{D} = -\text{grad } \mathcal{F} \quad \text{Campo magnetico}$$

Ma una differenza fondamentale fra elettricità e magnetismo è che, mentre in elettrostatica si hanno cariche « vere » e cariche « di polarizzazione », [§ 60], non esistono invece cariche magnetiche « vere »: tutti i campi magnetici [esclusi quelli prodotti da correnti elettriche] sono dovuti a cariche di *polarizzazione magnetica*. Perciò per passare dalla elettrostatica alla magnetostatica dovremo anzitutto porre in tutte le equazioni $\rho = 0$, $\rho_\sigma = 0$. Invece della (III, 7) avremo dunque per il campo magnetico [nel vuoto]:

$$(III, 103) \quad \text{div } \mathbf{D} = 0$$

Poichè non vi è l'analogo magnetico delle cariche elettriche « vere » non vi è nemmeno l'analogo magnetico della corrente elettrica e dei corpi conduttori. Vi è invece, naturalmente, [ed ha grande importanza] il fenomeno analogo alla polarizzazione dei dielettrici [§§ 59, 60] ed è la « *polarizzazione magnetica* » o « *magnetizzazione* » (†) che consiste in una modificazione [cui possono essere assoggettate tutte le sostanze]

(*) Si spiega così il fatto ben noto che i corpi elettrizzati attirano il pendolino (o un altro corpicciolo leggerissimo) non elettrizzato, qualunque sia il segno della loro carica, e che il ferro è attirato da entrambi i poli della calamita.

(†) Si noti che la « *magnetizzazione* » non è, come potrebbe far credere la parola, il fenomeno magnetico analogo alla *elettrizzazione* (il quale non esiste).

$$\rightarrow \mathcal{F} : E \rightarrow H \quad P \rightarrow F \quad D \rightarrow B \quad \epsilon \rightarrow \mu$$

per la quale ogni elemento di volume dS si comporta come un « *dipolo magnetico* » [o « *magnetino elementare* »] di momento $\mathcal{F} dS$ [il vettore \mathcal{F} , analogo al \mathbf{D} della elettrostatica, si chiama « *magnetizzazione* »]: ne consegue [con ragionamento analogo a quello del § 60] una densità spaziale P^* e una densità superficiale P_σ^* di cariche magnetiche

$$P^* = -\text{div } \mathcal{F}, \quad P_\sigma^* = \mathcal{F}_n$$

Introducendo il vettore

$$(III, 104) \quad \mathbf{B} = \mathbf{D} + 4\pi\mathcal{F}$$

[« *induzione magnetica* », analogo a \mathbf{D} (§ 61)] si ha, analogamente alle (III, 57) e (III, 65) [notando che qui gli analoghi di ρ e ρ_σ sono nulli]

$$(III, 105) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

e

$$\mathbf{B}_n - \mathbf{B}_n = 0.$$

Ma il fenomeno della polarizzazione magnetica differisce dall'analogo elettrico per una maggior varietà di comportamento delle varie sostanze. Difatti mentre in elettrostatica di regola vale la proporzionalità $\mathbf{D} = \chi \mathbf{E}$ [χ , « *suscettività elettrica* », costante e sempre positiva] [§ 61], nei riguardi del magnetismo le sostanze si possono invece dividere in tre categorie:

« *paramagnetiche* » per cui

$$(III, 106) \quad \mathcal{F} = \kappa \mathbf{D},$$

con κ [« *suscettività magnetica* »] positiva e quindi

$$(III, 107) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{D}, \quad (\mu = 1 + 4\pi\kappa),$$

con μ [« *permeabilità magnetica* »] analoga alla ϵ (§ 61) maggiore di 1: tali sostanze sono quindi analoghe ai dielettrici normali; tali sono, per es., l'alluminio ($\kappa = 1,8 \cdot 10^6$), il platino ($\kappa = 29 \cdot 10^6$), i sali di ferro:

« *diamagnetiche* » per cui valgono la (III, 106) e la (III, 107) ma con κ negativo e quindi $\mu < 1$ [per es., il mercurio ($\kappa = -2 \cdot 10^{-6}$), l'oro ($\kappa = -3 \cdot 10^{-6}$), la grafite ($\kappa = -8 \cdot 10^{-6}$), e, in modo spiccatissimo, il bismuto ($\kappa = -14 \cdot 10^{-6}$)]; tali corpi [che non hanno l'analogo in elettrostatica] vengono respinti da un polo magnetico, come si vedrebbe ripetendo il ragionamento di § 72 [3° esempio] e sostituendo nella (III, 100) ad ϵ un $\mu < 1$;

« *ferromagnetiche* » [ferro, acciaio, cobalto, nichel e qualche altro] caratterizzate da una suscettività κ positiva ed eccezionalmente elevata [anche dell'ordine del migliaio] e inoltre, ciò che è più importante, non costante, così che non vi è proporzionalità fra \mathcal{F} ed \mathbf{D} [né fra \mathbf{B}

ed \mathbf{D}]. Anzi, generalmente non si può dire nemmeno che \mathfrak{F} sia funzione di \mathbf{D} perchè \mathfrak{F} dipende non solo dal valore attuale di \mathbf{D} , ma anche dai valori per cui è passato precedentemente [« isteresi »], così che è possibile riportare il campo al valore zero senza che si annulli la magnetizzazione. Si ottiene così un « *magnete permanente* » o « *calamita* »: l'esistenza delle calamite è dunque resa possibile dal fenomeno dell'isteresi [presentato specialmente dall'acciaio] ⁽¹⁾.

Sulla superficie di un magnete vi sono regioni dove le linee di magnetizzazione entrano e dove quindi è $P_m^* < 0$, e altre dove escono, e quindi ivi $P_m^* > 0$: le prime si chiamano « *poli negativi* » o « *sud* », le seconde « *poli positivi* » o « *nord* » [vedi fig. 71 che rappresenta, con il

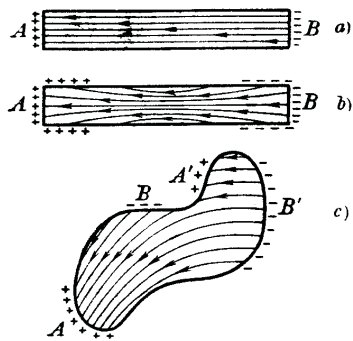


Fig. 71.

relativo andamento delle linee di magnetizzazione: a) una sbarretta di acciaio magnetizzata uniformemente, b) una sbarretta magnetizzata come lo è nel caso più comune, c) un magnete qualunque: A, A' sono i poli magnetici positivi, B, B' quelli negativi]. Si può pensare inoltre a P_m^* interna [ma, naturalmente, la somma algebrica del magnetismo interno e di quello superficiale è sempre zero]. Notiamo infine che un corpo può essere magnetizzato senza presentare poli e quindi senza produrre nessun campo ma-

gnético: ciò avviene se le linee di magnetizzazione sono tutte chiuse [come si potrebbe ottenere, per es., piegando ad anello il magnete della fig. 71, a), in modo che gli estremi A e B coincidano].

Una trattazione matematica rigorosa dei fenomeni magnetici nei quali interviene l'isteresi presenta notevoli difficoltà, e richiede in molti casi l'uso di strumenti matematici più elevati delle equazioni differenziali [come le equazioni integrali]; d'altra parte in una trattazione di magnetostatica non si può prescindere completamente dall'isteresi perchè questa fornisce le sole cause produttrici di un campo magnetico [oltre alle correnti elettriche]. Conviene perciò introdurre l'isteresi in forma estremamente schematizzata [ma praticamente sufficiente in molti casi] considerando i magneti permanenti come corpi aventi una

(1) Si può ottenere l'analogo elettrico di un magnete, per mezzo di sostanze resinose fatte solidificare in un campo elettrico: si ottiene così un dielettrico che resta polarizzato anche quando è tolto dal campo [« *elettrete* »].

magnetizzazione « rigida », cioè indipendente dal campo nel quale il magnete si trova. Così, nel seguito, noi considereremo soltanto due specie di corpi: quelli *magneticamente normali* [cioè aventi una permeabilità μ costante, sia > 1 (paramagnetici), sia < 1 (diamagnetici)], e quelli *magneticamente rigidi* (calamite). I primi sono, dal punto di vista matematico, analoghi ai « *dielettrici normali* » (§ 60) [salvo il fatto che ϵ è sempre ≥ 1 mentre μ può essere < 1 , il che però non introduce nessuna difficoltà matematica]. I secondi, essendone assegnata la magnetizzazione, possiedono dei poli magnetici di densità P_m^* , P_m^{*s} assegnate ed indipendenti dal campo, i quali hanno quindi lo stesso ufficio matematico delle cariche di densità ρ e ρ_s che può avere un dielettrico nella elettrostatica. Schematizzando in varia forma questo concetto si giunge ai *poli magnetici puntiformi* [analoghi alle cariche elettriche puntiformi] di cui abbiamo parlato a proposito della legge di Coulomb (§ 38), ai *dipoli magnetici* ed ai *doppi strati magnetici* [o *lamine magnetiche*], i quali saranno quindi sempre concepiti come magneticamente rigidi.

Vogliamo far notare che se un polo magnetico puntiforme si trova immerso in un mezzo magneticamente normale di permeabilità μ [omogeneo ed esteso a tutto lo spazio dove è sensibile il campo] il campo da esso generato [analogamente a quanto si è visto nell'elettrostatica (§ 66)] è uguale a quello che sarebbe generato nel vuoto, diviso per μ . E altrettanto può dirsi per il campo di un dipolo e di una lamina magnetica.

Possiamo infine estendere al magnetismo le considerazioni sull'energia elettrostatica fatte al § 71: troveremo così per l'energia del campo magnetico [dovuto a magneti rigidi, immersi in mezzi magneticamente normali] l'espressione

$$(III, 108) \quad \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} \mathfrak{H} \times \mathbf{D} \, dS$$

e, quindi, per la densità di energia

$$(III, 109) \quad \frac{\mathfrak{H} \times \mathbf{D}}{8\pi} = \mu \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}.$$

VIBRAZIONI DI CORDE E MEMBRANE

INTRODUZIONE MATEMATICA

§ 74. Serie di Fourier in forma trigonometrica.

Premetteremo allo studio delle vibrazioni alcuni richiami analitici sulla *serie di Fourier*.

È noto dall'Analisi che, sotto condizioni molto generali ⁽¹⁾, una funzione generica $f(x)$ può essere rappresentata, nell'intervallo $(-l, l)$, dalla serie [integrabile termine a termine nel detto intervallo]

$$(IV, 1) \quad f(x) = \sum_n \left(a_n \cos n\pi \frac{x}{l} + b_n \sin n\pi \frac{x}{l} \right),$$

[*serie di Fourier*], in cui i coefficienti a_n, b_n [come si può vedere facilmente ⁽²⁾ moltiplicando ambo i membri della (IV, 1) per $\cos n\pi \frac{x}{l} dx$ oppure per $\sin n\pi \frac{x}{l} dx$ ed integrando fra $-l$ ed l] sono dati da

$$(IV, 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n\pi \frac{x}{l} dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n\pi \frac{x}{l} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{array} \right.$$

Per valori di x esterni all'intervallo $(-l, l)$ la serie ripete periodicamente i valori di questo intervallo, quindi se $f(x)$ è periodica con periodo $2l$ la serie la rappresenta completamente, se invece $f(x)$ non

⁽¹⁾ Basta che l'intervallo $(-l, l)$ sia divisibile in un numero finito di tratti in cui la $f(x)$ è continua e monotona (condizioni di Dirichlet).

⁽²⁾ Questo procedimento serve anche ad assicurare che, data la $f(x)$, i coefficienti a_n e b_n sono determinati in modo unico.

è periodica la serie rappresenta una funzione periodica che nell'intervallo $(-l, l)$ coincide con $f(x)$ (*).

Se $f(x)$ è una funzione *pari*, cioè se è $f(-x) = f(x)$, lo sviluppo precedente si semplifica notevolmente in quanto che, essendo in tal caso

$$\int_{-l}^0 f(x) dx = \int_0^l f(x) dx, \quad \int_{-l}^0 f(x) \cos n\pi \frac{x}{l} dx = \int_0^l f(x) \cos n\pi \frac{x}{l} dx,$$

$$\int_{-l}^0 f(x) \sin n\pi \frac{x}{l} dx = -\int_0^l f(x) \sin n\pi \frac{x}{l} dx,$$

si ha dalle (IV, 2)

$$(IV, 3) \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos n\pi \frac{x}{l} dx, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

e $b_n = 0$: lo sviluppo di $f(x)$ nell'intervallo $(-l, l)$ sarà quindi

$$(IV, 4) \quad f(x) = \sum_0^{\infty} a_n \cos n\pi \frac{x}{l},$$

[sviluppo in serie di soli coseni]. Se invece $f(x)$ è una funzione *dispari*, cioè se è $f(-x) = -f(x)$, con analogo calcolo si può vedere che è $a_0 = a_n = 0$ e

$$(IV, 5) \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin n\pi \frac{x}{l} dx, \quad (n = 1, 2, \dots):$$

si ha quindi per la $f(x)$ lo sviluppo in serie di soli seni

$$(IV, 6) \quad f(x) = \sum_1^{\infty} b_n \sin n\pi \frac{x}{l}.$$

Si noti, poi, che non è una restrizione ammettere che l'intervallo di definizione sia quello compreso fra $-l$ e l , dato che con facile cambiamento di variabile (4) ci si può ricondurre al caso di un intervallo (a, b) qualsiasi. Ad esempio se si considera l'intervallo, ancora di ampiezza $2l$, $(\alpha, \alpha + 2l)$ le formule (IV, 1) e (IV, 2) valgono immutate, purchè i limiti degli integrali che vi compaiono siano α ed $\alpha + 2l$

(*) Notiamo che le condizioni di Dirichlet non escludono che la $f(x)$ possa avere dei punti di discontinuità (ma in numero finito). In tal caso, si dimostra che in tali punti la serie di Fourier ha per somma la *media aritmetica* dei due limiti (destro e sinistro) di $f(x)$.

(4) E precisamente $x = \frac{(2x' - b - a)l}{b - a}$.

invece che $-l$ ed l . Se invece si vuole considerare il caso in cui l'intervallo di definizione è di ampiezza l e, supponiamo, cogli estremi in 0 ed l , si ottiene, per la serie di Fourier (IV, 1), l'espressione

$$(IV, 7) \quad f(x) = \sum_0^{\infty} \left(A_n \cos 2n\pi \frac{x}{l} + B_n \sin 2n\pi \frac{x}{l} \right)$$

e per i relativi coefficienti

$$(IV, 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos 2n\pi \frac{x}{l} dx, \\ B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin 2n\pi \frac{x}{l} dx. \end{array} \right.$$

E' utile talvolta considerare una funzione $f(x)$, definita in un intervallo $(0, l)$, come una parte di una funzione $F(x)$ definita in un intervallo più grande, poniamo $(-l, l)$, in modo che nell'intervallo $(0, l)$

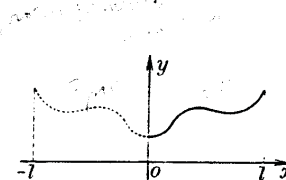


Fig. 72.

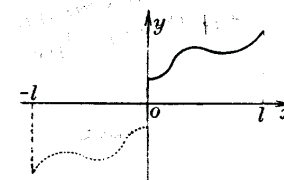


Fig. 73.

coincida con $f(x)$ e nel rimanente sia definita arbitrariamente: si dice allora che la $f(x)$ viene *prolungata* nell'intervallo $(-l, 0)$. Hanno notevole importanza il prolungamento *simmetrico*, o *con legge pari*, in cui la funzione $F(x)$ è una funzione *pari* [e cioè si assume $F(-x) = F(x) = f(x)$ (v. fig. 72)], ed il prolungamento *antisimmetrico*, o *con legge dispari*, in cui la $F(x)$ è una funzione *dispari* [e cioè si assume $F(-x) = -F(x) = -f(x)$ (v. fig. 73)]. Con questo si hanno notevoli semplificazioni nello sviluppo della $f(x)$ in serie di Fourier, in quanto possiamo svilupparla, per quanto si è detto poco sopra, in serie di soli seni o di soli coseni a nostro piacere. Così, se la $f(x)$ è assegnata solo nell'intervallo $(0, l)$, si può sempre svilupparla sia con le formule (IV, 5) e (IV, 6), sia con le formule (IV, 3) e (IV, 4) [oltre che con le (IV, 7) e (IV, 8)].

§ 75. Due esempi.

È utile ed interessante farsi un'idea intuitiva di come la serie di Fourier converga verso la funzione che si sviluppa: per questo considereremo due semplici esempi.

1. - Sviluppiamo la funzione [costante]

$$f(x) = \frac{\pi}{4}$$

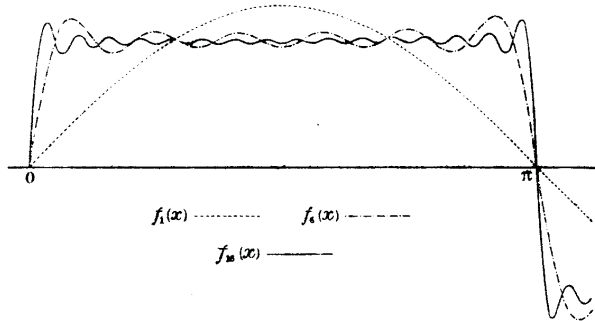


Fig. 74.

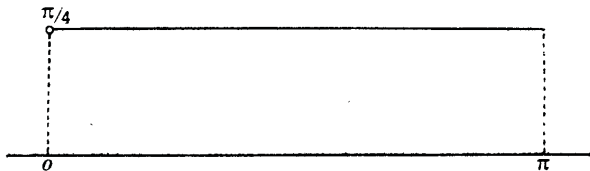


Fig. 75.

nell'intervallo $(0, \pi)$, servendoci dello sviluppo in serie di soli seni. La (IV, 5) darà allora

$$b_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin nx dx = \begin{cases} 1/n & \text{per } n \text{ dispari,} \\ 0 & \text{per } n \text{ pari,} \end{cases}$$

e quindi lo sviluppo (IV, 6) darà

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots$$

Se arrestiamo questa serie al 1°, la 6°, oppure al 16° termine otteniamo rispettivamente le funzioni

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_6(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{11} \sin 11x,$$

$$f_{16}(x) = \sin x + \dots + \frac{1}{31} \sin 31x,$$

i cui diagrammi sono quelli rappresentati nella fig. 74: essi mettono in evidenza come via via la serie vada convergendo verso la funzione data $f = \pi/4$ (fig. 75).

2. - Un altro istruttivo esempio è fornito dallo sviluppo, nell'intervallo $(0, l)$, della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{h}{L} x & \text{per } 0 < x < L, \\ h \frac{l-x}{l-L} & \text{per } L < x < l, \end{cases}$$

[dove h, L sono due costanti ($0 < L < l$)], rappresentata nella fig. 76. Anche per esso sceglieremo lo sviluppo in serie di soli seni.

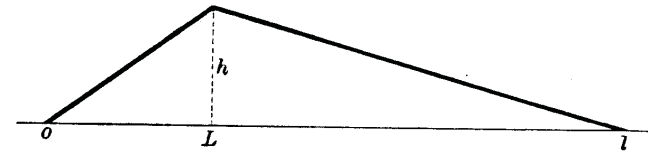


Fig. 76.

Si ha abbastanza facilmente [spezzando gli integrali che compaiono nelle IV, 5) in due parti, da 0 ad L e da L ad l]

$$b_n = \frac{2hl^2}{n^2\pi^2} \frac{1}{L(l-L)} \sin n\pi \frac{L}{l}.$$

Vogliamo far vedere, in un caso particolare, come lo sviluppo converga verso a funzione. Supponiamo, per es., $h = L = l/2 = \pi/2$ [v. fig. 78]: abbiamo allora

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2} \sin n \frac{\pi}{2}$$

le lo sviluppo (IV, 6) diventa

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots \right).$$

Arrestando questa serie al 1° oppure al 2° termine si ottengono le due funzioni

$$f_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin x, \quad f_2(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{9} \sin 3x \right),$$

i cui diagrammi sono rappresentati nella fig. 77. Come si vede, in questo caso anche la somma di due soli termini dello sviluppo approssima già abbastanza bene la funzione [rappresentata nella fig. 78].

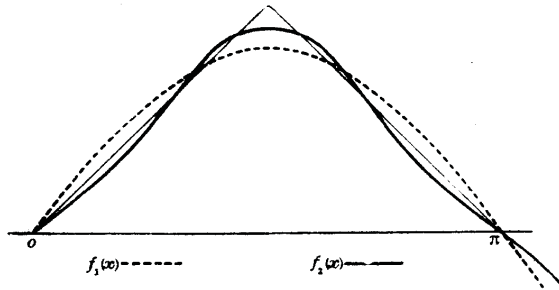


Fig. 77.

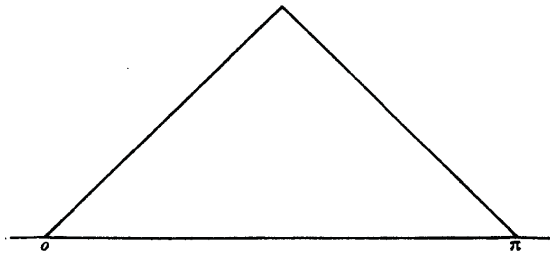


Fig. 78.

§ 76. Serie di Fourier in forma esponenziale.

Usando gli esponenziali ad esponente immaginario è facile dare allo sviluppo in serie di Fourier una forma più compatta.

Infatti, se ricordiamo che è

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}),$$

la (IV, 1) diviene

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_n \left[\left(a_n + \frac{b_n}{i} \right) e^{in\pi \frac{x}{l}} + \left(a_n - \frac{b_n}{i} \right) e^{-in\pi \frac{x}{l}} \right]$$

e, posto

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b_n}{i} \right), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{b_n}{i} \right),$$

(con $n \neq 0$), si ha per essa la forma

$$(IV, 9) \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi \frac{x}{l}},$$

in cui n assume anche il valore zero e i valori negativi, e i coefficienti, per le (IV, 2), sono dati tutti (anche per $n = 0$), dall'unica formula

$$(IV, 10) \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi \frac{x}{l}} dx.$$

È superfluo osservare che le c_n risultano in generale complesse in modo che nella (IV, 9), a calcoli fatti, si elimina la i [come è necessario essendo f reale].

§ 77. Sviluppi in integrale di Fourier.

Le formule precedenti permettono di sviluppare in serie di Fourier una funzione $f(x)$ arbitrariamente data nell'intervallo $(-l, l)$. Poiché la lunghezza $2l$ di questo intervallo è arbitraria si intuisce che, facendo crescere indefinitamente l , si possa giungere a formule che permettono di rappresentare una funzione $f(x)$ data arbitrariamente ⁽¹⁾ da $-\infty$ a $+\infty$; e così è difatti. Ma bisogna notare che i singoli termini della serie di Fourier rappresentano funzioni periodiche con « pulsazioni » ⁽²⁾

$$0, \quad \frac{\pi}{l}, \quad 2\frac{\pi}{l}, \quad 3\frac{\pi}{l}, \quad \dots$$

che costituiscono una progressione aritmetica di ragione π/l : si capisce dunque che, col tendere di l ad ∞ , questi valori si avvicinino indefi-

⁽¹⁾ Supporremo però che la f , oltre a soddisfare le condizioni di Dirichlet [v. § 74, nota 1]

in ogni intervallo finito, si annulli all'infinito in modo tale, che esista l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f| dx$.

⁽²⁾ Chiamasi così il coefficiente ω in una funzione trigonometrica di ωt , dove t è una variabile qualsiasi (p. es. $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, etc.): la funzione è periodica in t col periodo $T = 2\pi/\omega$, e quindi la pulsazione è legata al periodo da $\omega = 2\pi/T$. Se t è il tempo, si dice *frequenza* la quantità

$$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi};$$

come si vede essa è proporzionale alla pulsazione.

nitamente e finiscano per dar luogo ad una variabile continua. Perciò con tale passaggio al limite la serie si trasforma in un integrale e in luogo dell'indice di sommazione n si ha una variabile d'integrazione ω .

Precisiamo le considerazioni precedenti ⁽³⁾. Partiamo dalla serie di Fourier nella forma esponenziale (IV, 9) e poniamo

$$\omega_n = n \frac{\pi}{l};$$

possiamo considerare le ω_n come valori equidistanti [a distanza $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \pi/l$] di una variabile continua ω . Poniamo inoltre

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

così che la (IV, 10) si possa scrivere

$$c_n = \frac{\pi}{l} \varphi(\omega_n) = \varphi(\omega_n) \Delta\omega,$$

e quindi la (IV, 9)

$$(IV, 11) \quad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega.$$

Se ora facciamo tendere l ad ∞ , e quindi $\Delta\omega$ a zero, $\varphi(\omega)$ tende alla funzione

$$(IV, 12) \quad \Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

e la (IV, 11) diviene

$$f(x) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega.$$

Ricordando la definizione di integrale definito (nel senso di Riemann) si comprende che questo limite non è che l'integrale, tra $-\infty$ e ∞ , della funzione $\Phi(\omega) e^{i\omega x}$: si ottiene così la formula seguente [*integrale di Fourier in forma esponenziale*], analoga in certo modo alla (IV, 9):

$$(IV, 13) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

dove la funzione $\Phi(\omega)$ è data dalla (IV, 12), che è analoga alla (IV, 10).

⁽³⁾ Il procedimento che segue (che è sostanzialmente quello di Fourier) ha soprattutto valore euristico: per una giustificazione rigorosa, se pur meno intuitiva, vedasi, per es., L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, pag. 402 (ed. Zanichelli, 1928).

In modo analogo si può trovare, partendo dalle (IV, 1) e (IV, 2), l'*integrale di Fourier in forma trigonometrica* [che si potrebbe anche ricavare facilmente dal precedente], e che è

$$(IV, 14) \quad f(x) = \int_0^{\infty} [\alpha(\omega) \cos \omega x + \beta(\omega) \sin \omega x] d\omega,$$

dove si è posto

$$(IV, 14_1) \quad \begin{cases} \alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi, \\ \beta(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi. \end{cases}$$

Si noti che se $f(x)$ è funzione *dispari* risulta $\alpha(\omega) = 0$ e lo sviluppo

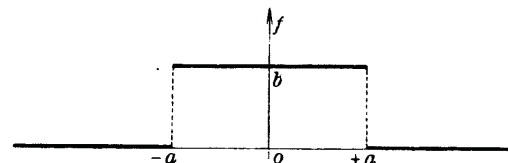


Fig. 79.

(IV, 14) si riduce al solo integrale dei seni, se invece $f(x)$ è funzione pari è $\beta(\omega) = 0$ e lo sviluppo si riduce al solo integrale dei coseni.

Talvolta all'integrale di Fourier si dà la forma seguente

$$(IV, 15) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega(x - \xi) d\xi,$$

che si ottiene dalla (IV, 14) sostituendo ad $\alpha(\omega)$ e $\beta(\omega)$ i loro valori (IV, 14₁).

Esempio.

Consideriamo la funzione $f(x)$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{per } -a \leq x \leq a, \\ 0 & \text{per } x < -a \text{ e } x > a, \end{cases}$$

[dove a e b sono due costanti], il cui diagramma è rappresentato nella fig. 79.

Sviluppandola in integrale di Fourier nella forma (IV, 14) sarà $\beta(\omega) = 0$, essendo $f(x)$ funzione pari, e si avrà, quindi,

$$f(x) = \int_0^{\infty} \alpha(\omega) \cos \omega x d\omega,$$

con

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a b \cos \omega \xi d\xi = 2 \frac{b}{\pi} \frac{\sin \omega a}{\omega}.$$

La spezzata della fig. 79 si può dunque considerare come sovrapposizione di infinite cosinusoidi illimitate di tutti i possibili periodi $T[= 2\pi/\omega]$ e di ampiezza α data, per ciascuno di essi, dall'ultima formula: esse si distruggono reciprocamente per «interferenza» al di fuori dell'intervallo $(-a, a)$. Sostituendo la seconda espressione nella prima si ha la seguente espressione, che rappresenta con un'unica formula la funzione discontinua $f(x)$, da $-\infty$ a $+\infty$:

$$f(x) = \frac{2b}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega a \cdot \cos \omega x}{\omega} d\omega.$$

VIBRAZIONI DELLE CORDE

§ 78. Studio generale delle vibrazioni trasversali di una corda. (Equazione di d'Alembert).

Sia AB una corda omogenea, flessibile ed inestendibile, tesa [ad es., fissata ad un estremo A e tesa da un peso P (fig. 80) ⁽¹⁾]: se è spostata e poi lasciata a sè, dando o no ai suoi punti una velocità iniziale, essa oscilla attorno alla sua configurazione [rettilinea] di equilibrio. Ci proponiamo di studiare questo tipo di oscillazioni [vibrazioni].

Assumeremo l'asse x coincidente colla corda nella sua posizione di equilibrio e ci limiteremo a studiare le piccole vibrazioni, cioè quelle in cui la corda si scosta così poco dall'andamento rettilineo da poter ammettere, nella ricerca delle equazioni

⁽¹⁾ Le stesse considerazioni valgono per una corda elastica che sia tesa fra punti fissi, come sono le corde degli strumenti musicali.

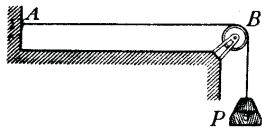


Fig. 80.

differenziali del movimento, che l'angolo, α , formato dalla tangente alla corda coll'asse x , sia dovunque molto piccolo [cioè tale da potersi sostituire $\sin \alpha$ con α e $\cos \alpha$ con 1] ⁽¹⁾.

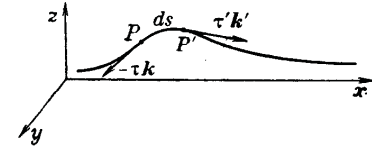


Fig. 81.

Se consideriamo un trattino di corda PP' , di lunghezza ds , (fig. 81), le forze che agiscono su esso [trascurando il peso] sono quelle dovute alla parte della corda a sinistra di P ed alla parte a destra di P' [tensioni in P e P']: indicando con τ e τ' il loro valore assoluto e con k e k' i versori della tangente in P e P' , [orientata nel verso della corda che, in riposo, coincide col verso positivo dell'asse x] esse saranno rispettivamente

$$-\tau k, \quad \tau' k'.$$

La forza totale F agente sul tratto PP' in un istante qualunque sarà quindi

$$F = \tau' k' - \tau k = \frac{\tau' k' - \tau k}{ds} ds = \frac{d}{ds} (\tau k) ds,$$

di componenti

$$F_x = \frac{d}{ds} (k_x \tau) ds, \quad F_y = \frac{d}{ds} (k_y \tau) ds, \quad F_z = \frac{d}{ds} (k_z \tau) ds:$$

quindi, se $\rho_s ds$ è la massa del tratto PP' [ρ_s = densità lineare ossia massa per unità di lunghezza], le equazioni del movimento saranno [indicando, come faremo sempre, con punti le derivazioni rispetto al tempo]

$$\frac{d}{ds} (\tau k_x) ds = \rho_s ds \ddot{x} \quad (\text{etc.})$$

cioè

$$(IV, 16) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} (\tau k_x) = \rho_s \ddot{x}, \\ \frac{d}{ds} (\tau k_y) = \rho_s \ddot{y}, \\ \frac{d}{ds} (\tau k_z) = \rho_s \ddot{z}. \end{cases}$$

Nelle nostre ipotesi possiamo sostituire k_x , cioè $\cos \alpha$, con 1 e ds [= $dx/\cos \alpha$] con dx , perciò la prima delle (IV, 16) ci darà

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho_s \ddot{x}.$$

⁽¹⁾ Nelle figure, per maggior chiarezza, non si è tenuto conto di questa limitazione.

Essa lega la variazione locale della tensione alle oscillazioni longitudinali della corda e, nella nostra ipotesi di vibrazioni puramente trasversali [$\dot{x} = 0$ e, quindi, $\ddot{x} = 0$], essa ci dice che τ non dipende dalla x e, cioè, che la tensione della corda è la stessa in ogni punto. Ne segue che, essendo

$$k_y = \frac{dy}{ds} = \sim \frac{\partial y}{\partial x}, \quad k_z = \frac{dz}{ds} = \sim \frac{\partial z}{\partial x},$$

le ultime (IV, 16) si possono scrivere

$$(IV, 17_1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$(IV, 17_2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

dove si è posto

$$(IV, 18) \quad v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_s}}.$$

Esse definiscono il moto delle proiezioni della corda sui piani (x, y) , (x, z) ed hanno la stessa forma [equazione di d'Alembert]. Per questo noi limiteremo il nostro studio ad una sola di esse, la seconda, il che corrisponde a studiare il caso in cui la corda vibra nel piano (x, z) .

Si può facilmente ottenere l'integrale generale della (IV, 17₂) col cambiamento di variabili definito da [v. anche § 166]

$$x + vt = \xi, \quad x - vt = \eta.$$

Infatti la (IV, 17₂) diviene, allora,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

e, scritta nella forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = 0,$$

ci dice che $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ non dipende da η , ossia che essa è una funzione della sola ξ :

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = c(\xi).$$

Di qui, integrando rispetto a ξ e indicando con $\varphi(\xi)$ un integrale indefinito della $c(\xi)$, si ha

$$z = \varphi(\xi) + f,$$

dove f non dipende da ξ ma può, naturalmente, dipendere da η . Dunque l'integrale generale è

$$z = \varphi(\xi) + f(\eta)$$

[dove f e φ sono funzioni del tutto arbitrarie, purchè derivabili due volte]; quindi si ha, in definitiva,

$$(IV, 19) \quad z = f(x - vt) + \varphi(x + vt)$$

[integrale di d'Alembert].

§ 79. Interpretazione dell'integrale di d'Alembert e sua espressione mediante i dati iniziali.

Per vedere bene il significato della (IV, 19) supponiamo dapprima la corda illimitata dalle due parti, e studiamo il caso particolare $\varphi = 0$, cioè

$$(IV, 20_1) \quad z = f(x - vt).$$

La z dipende allora solo dalla combinazione $x - vt$, la quale non si altera dando a t un qualunque incremento τ , purchè si incrementi insieme la x di $v\tau$: quindi, se nell'istante t_0 la z ha il valore z_0 nel punto $x = x_0$, essa avrà lo stesso valore z_0 nell'istante $t_0 + \tau$, ma nel punto $x_0 + v\tau$. Valendo ciò per ogni punto, abbiamo che la forma della corda nell'istante $t_0 + \tau$ è la stessa forma che la corda ha nell'istante t_0 ma spostata di $v\tau$ nel senso delle x positive (fig. 82): in altre parole un osservatore che si muovesse lungo la corda con velocità v vedrebbe sempre la corda colla stessa forma. Quindi la forma della corda si sposta nella direzione positiva dell'asse x con velocità v : diremo che la soluzione (IV, 20) corrisponde ad onde progressive ⁽¹⁾.

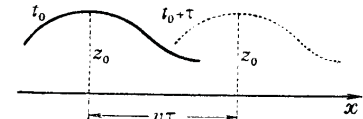


Fig. 82.

La soluzione

$$(IV, 20_2) \quad z = \varphi(x + vt)$$

corrisponde invece ad onde regressive, e la soluzione generale (IV, 19) ad una sovrapposizione dei due sistemi di onde.

In generale solo se la deformazione è limitata ad un tratto finito della corda l'occhio può seguire i due sistemi di onde e la loro propa-

⁽¹⁾ La parola «onde» non deve far pensare ad una forma determinata [p. es. sinusoidale]; si chiama così una deformazione qualsiasi che si propaghi senza variare di forma.

gazione [per es. nella fig. 83 si vede una deformazione iniziale ($t=0$) ed i due sistemi di onde dopo un tempo t_0]. Se però tutta la corda è deformata all'istante iniziale, i due sistemi di onde non si possono più distinguere ad occhio e si vede soltanto la corda cambiare di forma in modo più o meno complicato.

Per determinare la f e la φ in casi concreti occorre conoscere, oltre allo spostamento iniziale, $z_0 = z_0(x)$, dei singoli punti della corda, anche

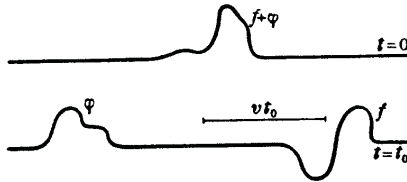


Fig. 83.

la velocità iniziale in ogni punto di essa, $\dot{z}_0 = \dot{z}_0(x)$. Infatti, note z_0 e \dot{z}_0 , dalla (IV, 19), e dalla sua derivata rispetto a t , per $t=0$ avremo ⁽²⁾

$$(IV, 21) \quad z_0(x) = f(x) + \varphi(x), \quad \frac{\dot{z}_0(x)}{v} = -f'(x) + \varphi'(x)$$

e derivando la prima di esse rispetto ad x e sommandola, o sottraendola, alla seconda si ottiene

$$(IV, 22) \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\dot{z}_0}{v} + \frac{dz_0}{dx} \right),$$

$$(IV, 23) \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{z}_0}{v} + \frac{dz_0}{dx} \right).$$

Di qui, integrando tra un limite fisso arbitrario a ed il limite generico x , si ha

$$(IV, 22') \quad f(x) = -\frac{1}{2v} \int_a^x \dot{z}_0(x) dx + \frac{1}{2} z_0(x) + C_1,$$

$$(IV, 23') \quad \varphi(x) = \frac{1}{2v} \int_a^x \dot{z}_0(x) dx + \frac{1}{2} z_0(x) + C_2,$$

⁽²⁾ Con l'apice indichiamo sempre la derivazione delle funzioni f e φ rispetto al loro argomento $x \pm vt$ considerato come un'unica variabile. Quindi, per es.,

$$\frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial x} = f'(x \pm vt), \quad \text{ma} \quad \frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial t} = \pm v f'(x \pm vt).$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti di integrazione, che vanno determinate in modo che siano soddisfatte le (IV, 21): si ottiene subito, con questo, $C_1 = -C_2$. Basta ora sostituire la x della (IV, 22') con $x-vt$, la x della (IV, 23') con $x+vt$ e sommare membro a membro per giungere all'espressione della z mediante le condizioni iniziali:

$$(IV, 24) \quad z = \frac{1}{2} [z_0(x-vt) + z_0(x+vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \dot{z}_0(x) dx.$$

§ 80. Onde sinusoidali.

Studiamo ora le onde progressive di una corda illimitata nel caso particolare in cui la f della (IV, 20₁) è una funzione sinusoidale, vale a dire nel caso in cui è

$$(IV, 25) \quad z = f(x-vt) = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x-vt) - \theta \right],$$

dove A , λ e θ sono costanti arbitrarie, di cui l'ultima [costante di fase] possiamo sempre rendere uguale a zero, scegliendo convenientemente l'origine dei tempi ⁽¹⁾.

Questo caso si potrebbe realizzare [come si può verificare con la (IV, 24)] imponendo le condizioni iniziali

$$(IV, 26) \quad \begin{cases} z_0(x) = A \sin \left(2\pi \frac{x}{\lambda} - \theta \right), \\ \dot{z}_0(x) = -\frac{2\pi v}{\lambda} A \cos \left(2\pi \frac{x}{\lambda} - \theta \right) = -v \frac{dz_0}{dx}, \end{cases}$$

e cioè che all'istante iniziale la forma della corda sia una senoide, e che la velocità trasversale impressa ad ogni punto sia proporzionale [col coefficiente $-v$] al coefficiente angolare della tangente alla senoide in quel punto.

Il significato della costante λ è quello di *lunghezza d'onda* [distanza fra due creste successive della senoide], mentre A rappresenta l'*ampiezza di vibrazione* [poiché in ogni punto la z varia col tempo, sinusoidalmente, con ampiezza A] (fig. 84).

Per quanto si è detto nel § precedente la forma sinusoidale della corda si sposta verso destra (fig. 84) con velocità v [onde sinusoidali progressive].

⁽¹⁾ L'interesse di questo caso particolare sta nel fatto che anche la soluzione più generale, sviluppando in serie od in integrale di Fourier le funzioni f e φ , può ridursi ad una somma [o integrale] di soluzioni di questo tipo.

La z espressa dalla (IV, 25) è una funzione sinusoidale sia di x che di t , con periodo λ rispetto ad x e con periodo

$$(IV, 27) \quad T = \frac{\lambda}{v}$$

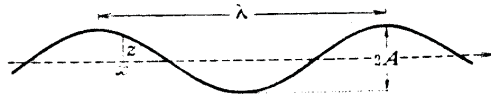


Fig. 84.

rispetto a t . Per mettere in evidenza questo si usa spesso per essa l'espressione

$$z = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \theta \right].$$

Se si prende, invece, la (IV, 20₂) con

$$\varphi = A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x + vt) - \theta \right],$$

si ottengono ancora onde sinusoidali di lunghezza d'onda λ ed ampiezza A ma *regressive*.

Notiamo che si può anche studiare il caso particolare in cui le condizioni (IV, 26) valgono *solo* per un tratto limitato della corda e per il resto si ha $z_0 = \dot{z}_0 = 0$. Si ottiene allora un *gruppo d'onde* [sinusoidali] che si propaga lungo la corda, mentre questa, nelle parti rimanenti, rimane rettilinea.

§ 81. Vibrazioni di una corda con un estremo fisso. Onde sinusoidali stazionarie.

Per studiare le vibrazioni di una corda con un estremo fisso [e illimitata dall'altra parte] dobbiamo riprendere la formula generale del § 78 ed aggiungere la condizione che un punto della corda, che assumiamo come origine [$x = 0$], si mantenga fisso, ed inoltre considerare soltanto i punti da una parte dell'origine, per es., dalla parte $x > 0$. La legge del moto sarà allora data ancora dalla (IV, 19) quando però le si imponga una condizione esprimente che per $x = 0$ è $z = 0$ per qualunque t , il che, posto $u = vt$, si traduce nella condizione funzionale

$$0 = f(-u) + \varphi(u),$$

ossia

$$(IV, 28) \quad \varphi(u) = -f(-u)$$

[per qualsiasi valore di u].

Dunque, in questo caso la soluzione generale è data da

$$(IV, 29) \quad z = f(x - vt) - f(-x - vt)$$

e contiene una sola funzione arbitraria invece di due.

Se in particolare scegliamo per la $f(x - vt)$ l'espressione (IV, 25), la soluzione sarà

$$(IV, 30) \quad z = A \left\{ \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) - \theta \right] + \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x + vt) + \theta \right] \right\}$$

e ci fa vedere che nel caso di una corda con un estremo fisso non si possono avere onde sinusoidali solo progressive [o solo regressive]: la presenza delle une è indissolubilmente legata a quella delle altre [con eguali lunghezza d'onda ed ampiezza e con opposta costante di fase]. Ciò può interpretarsi dicendo che le onde che arrivano all'estremo fisso si riflettono e percorrono di nuovo la corda in senso inverso. Tale « riflessione » è ben visibile se le onde costituiscono un gruppo di lunghezza limitata.

Alla (IV, 30), sviluppando con le note formule trigonometriche per il seno di una somma o di una differenza, e usando la (IV, 27), possiamo anche dare la forma

$$(IV, 31) \quad z = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \left(2\pi \frac{v}{\lambda} t + \theta \right)$$

essa ci dice che la z in ogni punto varia sinusoidalmente col tempo, e che l'ampiezza di oscillazione varia da punto a punto con la legge

$$2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

In particolare tale ampiezza è zero nei punti in cui x vale

$$0, \quad \frac{\lambda}{2}, \quad 3 \frac{\lambda}{2}, \quad \dots, \quad n \frac{\lambda}{2}, \quad \dots,$$

i quali perciò rimangono fermi. Questi punti si dicono « *nodi* », mentre si chiamano « *ventri* » i punti [intermedi ai nodi] nei quali l'ampiezza di oscillazione è massima. Considerando poi nella (IV, 31) la dipendenza da x [per un t fissato] si vede che la corda ha in ogni istante la forma di una sinusoide che non scorre lungo la corda, ma ha una ampiezza variabile col tempo, data da

$$2A \cos \left(2\pi \frac{v}{\lambda} t + \theta \right)$$

scegliendo come origine dei tempi un istante di massima ampiezza

della sinusoide [ossia di velocità nulla] si può rendere $\theta = 0$ e scrivere la (IV, 31) nella forma

$$(IV, 31') \quad z = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

Il periodo è [v. (IV, 27)]

$$T = \frac{\lambda}{v}$$

e la frequenza [§ 77, nota 2]

(IV, 32)

$$\nu = \frac{v}{\lambda}$$

Riassumendo, possiamo avere due interpretazioni per queste vibrazioni, una [espressa dalla (IV, 30)] come sovrapposizione di onde sinusoidali progressive e regressive, l'altra [espressa dalla (IV, 31)] come



Fig. 85.

vibrazioni in cui la forma della corda è una sinusoide che non si sposta lungo la corda ma varia di ampiezza al variare del tempo [v. fig. 85 che rappresenta la forma della corda in istanti successivi t_0, t_1, t_2, t_3]. Da questo punto di vista le onde in esame si chiamano « onde stazionarie ».

§ 82. Vibrazioni di una corda cogli estremi fissi (1).

Supponiamo ora che la corda, di lunghezza l , abbia i due estremi fissi [che supporremo nei punti $x = 0$ ed $x = l$], problema che ha note applicazioni acustiche.

Dovremo, alla formula generale (IV, 19), imporre due condizioni esprimenti che per $x = 0$ ed $x = l$ è $z = 0$ per qualunque t . La prima condizione è quella già studiata nel § prec. e conduce alla (IV, 28). La seconda ci dà, analogamente, scrivendo ancora u per vt ,

$$0 = f(l - u) + \varphi(l + u)$$

per u arbitraria. Utilizzando la (IV, 28), questa si può scrivere

$$0 = f(l - u) - f(-l - u)$$

(1) Per il caso generale degli estremi mobili con legge assegnata cfr. § 167.

ed indicando con w la quantità [parimenti arbitraria] $l - u$

$$w = l - u$$

$$(IV, 33) \quad f(w) = f(w - 2l).$$

Questa relazione, dovendo valere per qualunque w , esprime che f è una funzione periodica a periodo $2l$. Tale risulta quindi anche φ , per la (IV, 28).

La soluzione più generale del problema della corda coi due estremi fissi si scrive, dunque, come nel caso del § prec.

$$(IV, 34) \quad z = f(x - vt) - f(-x - vt),$$

ma ora f è una funzione periodica a periodo $2l$, per il resto arbitraria.

Se sono assegnate forma e velocità iniziali della corda, cioè le funzioni $z_0(x)$ e $\dot{z}_0(x)$ nell'intervallo $(0, l)$, la funzione f resta determinata completamente, per ogni valore del suo argomento da $-\infty$ a $+\infty$, e quindi resta determinata completamente la soluzione (IV, 34). Difatti, la (IV, 22') e la (IV, 23') danno immediatamente le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ nell'intervallo $(0, l)$, e dalla seconda di esse la (IV, 28) permette di ricavare i valori di $f(x)$ nell'intervallo $(-l, 0)$: conoscendosi così la $f(x)$ tra $-l$ ed l , ed essendo essa periodica a periodo $2l$, la si conosce da $-\infty$ a $+\infty$, e quindi la $f(x - vt)$ e la $f(-x - vt)$ [che interessano per $0 < x < l$] sono note per qualunque valore di t .

§ 83. Decomposizione in onde stazionarie del moto di una corda cogli estremi fissi.

Poichè, nel caso della corda finita con estremi fissi [§ prec.], la funzione f è periodica a periodo $2l$, si può svilupparla in serie di Fourier, per es. sotto la forma (IV, 1). La (IV, 34) diviene allora

$$z = \sum_0^{\infty} \left[a_n \cos n\pi \frac{x - vt}{l} + b_n \sin n\pi \frac{x - vt}{l} - a_n \cos n\pi \frac{x + vt}{l} + b_n \sin n\pi \frac{x + vt}{l} \right]$$

e, sviluppando i seni e i coseni di somma e differenza con le note formule trigonometriche, si ha

$$(IV, 35) \quad z = \sum_1^{\infty} \left[2a_n \sin n\pi \frac{vt}{l} + 2b_n \cos n\pi \frac{vt}{l} \right] \sin n\pi \frac{x}{l}$$

[dove si è escluso il valore $n = 0$, perchè evidentemente il termine corrispondente è nullo].

L'espressione tra parentesi quadra, nella (IV, 35), si può mettere nella forma equivalente

$$c_n \cos \left(n\pi \frac{v}{l} t + \theta_n \right)$$

dove

$$c_n = 2\sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = -\operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n}.$$

Si può scrivere dunque

$$(IV, 36) \quad z = \sum_1^{\infty} c_n \sin n\pi \frac{x}{l} \cos \left(n\pi \frac{v}{l} t + \theta_n \right).$$

Le costanti a_n e b_n , e quindi le c_n e θ_n , dipendono evidentemente dalle condizioni iniziali [cioè da $z_0(x)$ e $\dot{z}_0(x)$] e ne sono univocamente determinate [v. nota 2 al § 74].

Si noti che è

$$\dot{z}_0 = (\dot{z})_{t=0} = -\sum_1^{\infty} n\pi \frac{v}{l} c_n \sin n\pi \frac{x}{l} \sin \theta_n$$

e, quindi, se la velocità iniziale è nulla tutte le θ_n si annullano e si ha

$$(IV, 35') \quad z = \sum_1^{\infty} c_n \sin n\pi \frac{x}{l} \cos n\pi \frac{v}{l} t.$$

La (IV, 36) ci fa vedere che la più generale vibrazione della corda si può considerare come la sovrapposizione di vibrazioni del tipo

$$(IV, 37) \quad z_n = c_n \sin n\pi \frac{x}{l} \cos \left(n\pi \frac{v}{l} t + \theta_n \right)$$

ognuna delle quali rappresenta un possibile ma particolare modo di vibrare della corda [corrispondente al caso in cui uno solo dei coefficienti c_n è diverso da zero] caratterizzato dal fatto che la z è funzione sinusoidale del tempo. Confrontando la (IV, 37) con la (IV, 31), si vede che esse sono della stessa forma, purchè si faccia

$$(IV, 38) \quad \lambda = \frac{2l}{n} :$$

dunque la (IV, 37) rappresenta delle onde stazionarie, di lunghezza d'onda data dalla (IV, 38) e di frequenza [v. (IV, 32)]

$$(IV, 39) \quad v = n \frac{v}{2l} \cdot \frac{l}{n}$$

La (IV, 38) si può interpretare dicendo che nella lunghezza l della

corda è sempre compreso un numero intero [n] di semilunghezze d'onda, il che diviene intuitivo se si osserva che gli estremi della corda, essendo fissi, devono coincidere con due nodi. La (IV, 39) ci dice poi che, quando la corda vibra sinusoidalmente, la sua frequenza è necessariamente un multiplo intero ⁽¹⁾ della frequenza «fondamentale» data [v. (IV, 18)] da

$$(IV, 40) \quad v_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\tau}{\rho_s}},$$

la quale corrisponde al caso in cui la corda vibra senza nodi intermedi (fig. 86, a). In tal caso la corda, comunicando all'aria le sue vibrazioni, produce una nota di frequenza v_1 che dicesi «nota fondamentale»

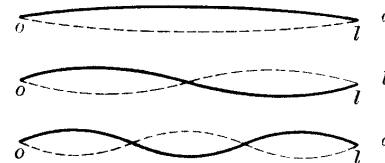


Fig. 86.

della corda. [La (IV, 40) contiene le note leggi sull'altezza della nota emessa dalla corda, in funzione della sua lunghezza, densità e tensione]. Quando invece la corda vibra sinusoidalmente con un nodo nel mezzo (fig. 86, b) si ha la soluzione z_2 , con la frequenza $v_2 = 2v_1$ e l'emissione della nota di frequenza doppia della fondamentale [«ottava superiore» della fondamentale], detta «primo armonico» della corda; per $n = 3$ si hanno due nodi intermedi (fig. 86, c), $v = 3v_1$, e l'emissione del «secondo armonico» e così via.

Torniamo ora a considerare la soluzione generale (IV, 36). Essa rappresenta un movimento della corda in cui, in generale, non vi sono punti fissi all'infuori degli estremi, e la legge del moto di ogni punto non è sinusoidale, ma comunque complicata. Tuttavia, come abbiamo dimostrato, è sempre possibile considerare questo movimento come la sovrapposizione di moti sinusoidali di frequenze $v_1, 2v_1, 3v_1, \dots$, in numero finito o infinito. E l'interesse principale di questa decomposizione [che si applica, come è naturale, non solo alle vibrazioni della corda, ma anche a quelle che essa comunica all'aria] sta nel fatto che l'orecchio umano è capace [entro certi limiti] di reagire con una particolare sensazione a

⁽¹⁾ In realtà le frequenze che si ottengono da una corda vibrante non sono esattamente multiple intere di quella fondamentale perchè una corda reale non è mai perfettamente flessibile, come si è supposto.

ciascuno dei termini della somma (IV, 36), ossia di percepire i singoli suoni « puri » [o vibrazioni sinusoidali] che compongono il suono complesso: la frequenza di ciascun termine della somma (IV, 36) determina l'altezza del suono puro corrispondente, e il quadrato della ampiezza c_n ne determina l'intensità, mentre la fase θ_n non ha nessun equivalente fisiologico.

§ 84. Integrazione dell'equazione di d'Alembert col metodo della separazione delle variabili.

Vi è un altro metodo, molto istruttivo, per giungere alla soluzione generale del problema della corda vibrante: il *metodo delle soluzioni semplici o della separazione delle variabili*, che si applica anche a molti altri problemi dipendenti da equazioni lineari ed omogenee alle derivate parziali. Esso consiste nel cercare dapprima tutte le soluzioni $z(x, t)$ che sono il prodotto di una funzione $X(x)$ della sola x per una funzione $\Theta(t)$ della sola t [soluzioni semplici od a variabili separate] e quindi, osservando che, per la linearità e l'omogeneità dell'equazione data e delle condizioni agli estremi, una combinazione lineare a coefficienti costanti di esse è ancora una soluzione, ottenere un integrale più generale sommando tali soluzioni moltiplicate per altrettante costanti. Poniamo, quindi, nella (IV, 17)

$$(IV, 41) \quad z = X(x) \cdot \Theta(t)$$

cercando se è possibile di ridurre l'equazione all'eguaglianza di una espressione contenente solo funzioni di x con una espressione contenente solo funzioni di t [separazione delle variabili]. Colla (IV, 41) la (IV, 17₂) si può scrivere

$$X''\Theta = \frac{1}{v^2} X\ddot{\Theta}$$

e per « separare le variabili » basta dividere ambo i membri per il prodotto $X\Theta$: con questo si ha

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{\ddot{\Theta}}{\Theta}.$$

In essa il primo membro è funzione della sola x ed il secondo membro della sola t , quindi per essere identicamente eguali dovranno entrambi essere eguali ad una costante, λ ⁽¹⁾, e potremo scrivere

$$(IV, 42) \quad X'' = \lambda X, \quad \ddot{\Theta} = \lambda v^2 \Theta :$$

⁽¹⁾ Difatti, poichè x e t sono variabili indipendenti, si pensi di dare un valore fisso a t e far variare comunque x : il secondo membro si mantiene costante e quindi il primo non deve variare al variare di x .

l'equazione a derivate parziali in esame viene così sostituita da due equazioni alle derivate ordinarie. Si ha subito che la costante λ deve essere negativa perchè, in caso contrario, si avrebbero soluzioni di tipo esponenziale che darebbero, per $t = \infty$ oppure per $t = -\infty$, uno spostamento infinitamente grande. Porremo perciò $\lambda = -\omega^2$ ed allora le (IV, 42) diverranno

$$X'' = -\omega^2 X, \quad \ddot{\Theta} = -\omega^2 v^2 \Theta$$

ed avremo da esse

$$X(x) = \alpha \sin \omega x + \beta \cos \omega x, \quad \Theta(t) = A \sin \omega v t + B \cos \omega v t,$$

[dove α, β, A, B sono costanti d'integrazione]. Il prodotto di queste due espressioni ci dà la più generale soluzione a variabili separate, che dipende, come si vede, da 4 costanti arbitrarie indipendenti. Effettuando il prodotto ed usando note formule di trigonometria, questa soluzione si può mettere sotto la forma

$$z = M \sin [\omega(x - vt) - \gamma] + N \sin [\omega(x + vt) - \delta]$$

dove M, N, γ, δ sono costanti legate ad α, β, A, B da semplici relazioni che non ci interessano, poichè ci basta rilevare che sono anch'esse 4 costanti arbitrarie indipendenti. Si riconosce così [cfr. § 80] che la più generale soluzione a variabili separate può ottenersi sovrapponendo una onda sinusoidale progressiva con una regressiva di pari frequenza. Tale frequenza è [v. § 77, nota 2: si badi che qui la « pulsazione » è ωv]

$$v = \frac{\omega v}{2\pi}.$$

Se vogliamo la soluzione relativa ad una corda con gli estremi fissi [e ne siano, al solito, $x = 0$ ed $x = l$ gli estremi] dovremo imporre ancora condizioni esprimenti che per $x = 0$ ed $x = l$ è $z = 0$ per qualunque valore di t : esse si traducono in

$$X(0) = X(l) = 0$$

e portano a

$$\beta = 0 \quad \text{ed} \quad \omega = \omega_n = n \frac{\pi}{l}$$

[con n intero qualsiasi]. Vediamo così che il problema ammette soluzioni solo se la costante ω viene scelta non del tutto arbitrariamente, ma fra i multipli di $\omega_1 = \pi/l$. Tali valori [infiniti, ma discreti] si chiamano « autovalori » del problema. La frequenza v sarà per conseguenza un multiplo di $v_1 = v/(2l)$.

Concludendo, nel caso in esame, sarà

$$X(x) = \alpha \sin n\pi \frac{x}{l}, \quad \Theta(t) = A \sin n\pi \frac{v}{l} t + B \cos n\pi \frac{v}{l} t,$$

e la z , per la (IV, 41), posto $a = \alpha A$, $b = \alpha B$, sarà

$$z = \left(a \sin n\pi \frac{v}{l} t + b \cos n\pi \frac{v}{l} t \right) \sin n\pi \frac{x}{l}$$

[dove n è un intero arbitrario]. Troviamo, così, per ognuno degli infiniti valori di n , una soluzione « semplice », contenente due costanti arbitrarie, a e b . Fissando poi in ciascuna di queste soluzioni due valori arbitrari, $2a_n$ e $2b_n$, per tali costanti, e sommando, si ottiene la serie

$$z = \sum_1^{\infty} \left(2a_n \sin n\pi \frac{v}{l} t + 2b_n \cos n\pi \frac{v}{l} t \right) \sin n\pi \frac{x}{l},$$

che, se convergente, è ancora una soluzione [contenente infinite costanti arbitrarie]. Anzi, riconosciamo ora in essa la soluzione più generale (IV, 35).

§ 85. Studio di un caso particolare (corda pizzicata).

Consideriamo una corda di lunghezza l fissata nei due estremi [che, al solito, supponiamo nei punti $x = 0$, $x = l$] e supponiamo che venga pizzicata in un punto

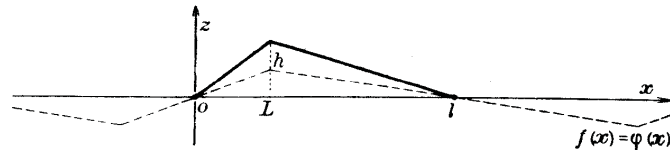


Fig. 87.

generico [di ascissa $x = L$], cioè tale punto venga spostato di una quantità h ⁽¹⁾ e poi venga abbandonato a sé. [Ciò si realizza negli strumenti a plettro, nell'arpa, ecc.]. Vogliamo studiare il moto della corda.

Possiamo partire dall'integrale di d'Alembert (IV, 19) e servirci delle considerazioni svolte a § 82. Dobbiamo così determinare le due funzioni f e φ colle condizioni che gli estremi siano fissi e che per $t = 0$ la corda abbia la forma indicata in fig. 87, cioè sia

$$(IV, 43) \quad z_0(x) = \begin{cases} \frac{hx}{L} & \text{per } x < L, \\ \frac{h(l-x)}{l-L} & \text{per } x > L, \end{cases}$$

e $\dot{z}_0(x) = 0$.

⁽¹⁾ Si intende [cfr. § 78] che h deve essere assai piccolo rispetto ad l . Nelle figure, per maggior chiarezza, questa condizione non è rispettata.

Si ha allora dalle (IV, 22') e (IV, 23'), per $0 < x < l$,

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2} z_0(x)$$

e, quindi, $f(x) = \varphi(x)$ è la funzione rappresentata dalla spezzata tratteggiata in fig. 87, ottenuta congiungendo il punto $(L, h/2)$ cogli estremi: essa poi

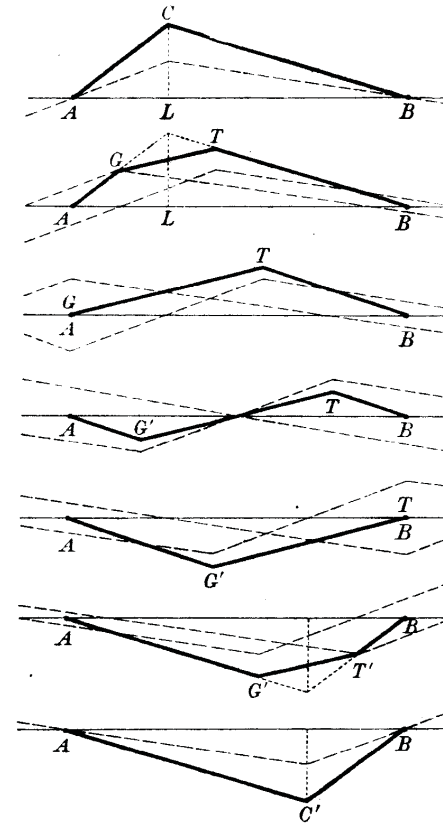


Fig. 88.

deve essere prolungata per antisimmetria [$f(-x) = -f(x)$] nell'intervallo $(-l, 0)$, per soddisfare la (IV, 28), ed infine prolungata indefinitamente da una parte e dall'altra tenendo conto che [§ 82] $f(x)$ è periodica di periodo $2l$.

Per avere la forma della corda dopo un tempo τ dovremo (§ 79) spostare di $v\tau$ verso destra la spezzata che dà $f(x)$, di $v\tau$ verso sinistra quella [di ugual forma] che dà $\varphi(x)$ e sommare algebricamente le ordinate. Si vede così, ripetendo la costruzione per vari istanti successivi, che le forme assunte dalla corda nel primo semiperiodo sono quelle date in fig. 88. La corda [come si può verificare elementarmente] assume la forma di una spezzata trilatera, i cui vertici G , T , restando equidistanti dalla retta $x = L$, si muovono uniformemente lungo i tratti GA , TB , i quali mantengono la loro direzione iniziale finchè i vertici G e T raggiungono gli estremi A e B della corda: in A e B si ha poi una riflessione del movimento, come si vede nella 4^a e 6^a parte della fig. 88. Il punto C' che subisce il massimo spostamento dall'altra parte della posizione di equilibrio è, notiamo, il simmetrico del punto pizzicato C rispetto al punto di mezzo della corda.

Si è ottenuta così con gran semplicità la forma che la corda assume durante la vibrazione; nulla però si può per questa via conoscere riguardo al suono emesso. È necessario per questo ricorrere all'espressione di z in serie di Fourier.

Essendo $z_0 = 0$, la z è data dalla (IV, 35'), cioè è

$$z = \sum_1^{\infty} c_n \sin n\pi \frac{x}{l} \cos n\pi \frac{v}{l} t,$$

dove i coefficienti c_n si determinano osservando che per $t = 0$ questa formula si deve ridurre allo sviluppo di $z_0(x)$, (IV, 43), in serie di soli seni, sviluppo che è stato trovato nel 2° esempio del § 75; si ottiene così

$$c_n = \frac{2kl^2}{n^2\pi^3} \frac{1}{L(l-L)} \sin n\pi \frac{L}{l}.$$

Ora, dato che c_n rappresenta l'ampiezza di vibrazione corrispondente all' n -mo armonico, il coefficiente $1/n^2$ che in esso compare fa sì che l'ampiezza dei singoli armonici vada diminuendo col quadrato del numero d'ordine [quindi l'intensità, che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza (§ 83), diminuisce colla quarta potenza di n]. Però i valori di tali ampiezze dipendono da n anche pel tramite del fattore sinusoidale, il quale contiene L , che dipende dal punto in cui la corda viene pizzicata: ad esempio, se L è la k -esima parte della lunghezza l [con k intero], saranno nulle le ampiezze di tutti gli armonici di ordine

$$k, 2k, 3k, \dots$$

cioè [per dirlo in modo più espressivo] nel suono emesso mancheranno tutte le frequenze corrispondenti ad onde stazionarie che hanno un nodo nel punto in cui la corda viene pizzicata. In sostanza, l'ampiezza c_n degli armonici è determinata da due fattori

$$\frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad \sin n\pi \frac{L}{l}$$

dei quali il primo fa decrescere c_n col crescere di n ed il secondo produce massimi e minimi secondari distribuiti periodicamente fra i vari armonici del suono fondamentale.

VIBRAZIONI DELLE MEMBRANE

§ 86. Generalità sulle vibrazioni trasversali delle membrane.

Vogliamo studiare ora le vibrazioni trasversali di una membrana perfettamente flessibile, tesa in una cornice fissa e piana.

Precisiamo anzitutto il concetto di « tensione », che definiremo [analogamente a quella di una corda] così: supponiamo tagliata la membrana lungo una linea s che la divida in due parti (A), (B) ed ammettiamo che l'azione che la parte (A), prima del taglio, esercitava sulla (B) possa esser sostituita applicando alla parte (B) delle forze distribuite con continuità lungo il margine del taglio in modo che ad ogni elemento di lunghezza ds sia applicata una forza τds , diretta secondo la normale ad s nel piano tangente alla membrana, e nel verso da (B) verso (A). Lo scalare τ [che rappresenta, si può dire, la « forza per unità di lunghezza »] si dice « tensione » relativa al punto ed alla direzione considerati. Noi ci limiteremo a studiare membrane tese uniformemente in tutte le direzioni, vale a dire supporremo, in ciascun punto, τ indipendente dalla direzione del taglio.

Passiamo ora alle equazioni del movimento della membrana. Prendiamo come piano (x, y) quello in cui giace la membrana in posizione di riposo, poi in un punto generico $P(x, y)$ di questo prendiamo due versori \mathbf{h} , \mathbf{k} che, quando la membrana è in riposo, siano paralleli rispettivamente agli assi x ed y , e pensiamoli collegati alla membrana in modo che, quando questa si muove, essi la seguano, mantenendosi sempre tangenti ad essa e paralleli rispettivamente ai piani (z, x) e (z, y). Noi supporremo che, vibrando, la membrana si sposti poco dalla sua posizione di riposo e che quindi \mathbf{h} e \mathbf{k} si mantengano sensibilmente paralleli agli assi x, y , con che sarà in ogni istante

$$\cos(\mathbf{h}, x) = \sim 1, \quad \cos(\mathbf{h}, y) = 0,$$

$$\cos(\mathbf{h}, z) = \sin(\mathbf{h}, x) = \sim \operatorname{tg}(\mathbf{h}, x) = \frac{\partial z}{\partial x},$$

e similmente per \mathbf{k} [scambiando x con y]: perciò per le loro componenti possiamo assumere i valori

$$(IV, 44) \quad \begin{cases} h_x = 1, & h_y = 0, & h_z = \frac{\partial z}{\partial x}, \\ k_x = 0, & k_y = 1, & k_z = \frac{\partial z}{\partial y}. \end{cases}$$

Prendiamo ora sulla membrana un rettangolino infinitesimo $PP'Q'Q$ che abbia, in riposo, i lati $PQ = dx$, $PP' = dy$, paralleli agli assi (fig. 89): le forze che si esercitano su di esso in un istante qualunque sono

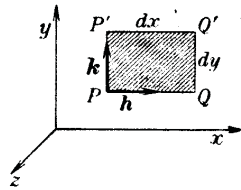


Fig. 89.

$-\tau h dy$
attraverso PP' e

$$\left[\tau h + \frac{\partial}{\partial x} (\tau h) dx \right] dy$$

attraverso QQ' : quindi la forza complessiva che si esercita attraverso i due lati PP' e QQ' è

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau h) dx dy.$$

Analogamente, attraverso gli altri due lati PQ e $P'Q'$ si esercita la forza

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tau k) dx dy :$$

così la forza totale F agente sull'elemento d'area $PP'Q'Q$ [trascurando il peso] sarà

$$F = \left[\frac{\partial}{\partial x} (\tau h) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau k) \right] dx dy.$$

D'altra parte la massa del rettangolino, chiamando ρ_s la « densità superficiale della membrana » [cioè la massa per unità di superficie] è $\rho_s dx dy$, quindi la legge fondamentale della Meccanica, detta a l'accelerazione, ci dà

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau h) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau k) = \rho_s a.$$

Proiettando sui tre assi, tenendo conto delle (IV, 44) ed indicando al solito con \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} le componenti di a , avremo le equazioni del movimento

(IV, 45)

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho_s \ddot{x} & \frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho_s \ddot{y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \rho_s \ddot{z}. \end{cases}$$

Nell'ipotesi di vibrazioni puramente *trasversali* [$\ddot{x} = \ddot{y} = 0$] le prime due, insieme, dicono che τ non dipende da x nè da y , cioè che *nelle vibrazioni trasversali la tensione è la stessa in tutti i punti della mem-*

brana: l'ultima equazione allora si semplifica e diventa l'equazione fondamentale della membrana vibrante:

$$(IV, 46) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\rho_s}{\tau} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

ossia, introducendo il simbolo Δ [in due dimensioni] [§ 9] e la costante $v = \sqrt{\tau/\rho_s}$,

(IV, 46')

$$\Delta z = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Essa è l'analogia, in tre variabili, dell'equazione di d'Alembert per la corda vibrante [§ 78].

§ 87. Integrazione col metodo della separazione delle variabili.

Per cercare una soluzione generale della (IV, 46') ricorriamo al metodo della separazione delle variabili [§ 84], cioè cerchiamo dapprima le soluzioni particolari del tipo

$$(IV, 47) \quad z = Z(x, y)\Theta(t),$$

dove Z è funzione solo di x, y , e Θ solo di t . Sostituendo nella (IV, 46') abbiamo

$$\Delta Z \cdot \Theta = \frac{1}{v^2} Z \cdot \ddot{\Theta}$$

e, col solito ragionamento visto a § 84, avremo

$$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = -\omega^2 t^2, \quad \frac{\Delta Z}{Z} = -\omega^2, \quad (\omega = \text{cost.}),$$

ossia

$$(IV, 48_1)$$

$$(IV, 48_2)$$

$$\begin{cases} \ddot{\Theta} = -\omega^2 t^2 \Theta \\ \Delta Z = -\omega^2 Z \end{cases}$$

La prima equazione ci dà subito

$$(IV, 48'_1)$$

$$\Theta = A \cos(\omega t - \alpha)$$

[con A ed α costanti di integrazione]: sostituendo nella (IV, 47) si riconosce che un punto generico x, y oscilla, parallelamente all'asse z , con moto armonico di ampiezza Z , variabile da punto a punto, e di periodo T e di frequenza $\nu = [1/T]$ legati alla costante ω da [§ 77, nota 1]

$$(IV, 49)$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

La seconda equazione, che concerne l'ampiezza di vibrazione $Z(x, y)$, è più complicata, essendo ancora una equazione a derivate parziali, e va risolta tenendo conto delle condizioni al contorno che, nel nostro caso, sono: «*sul contorno* $z = 0$, per t qualsiasi,» cioè: «*sul contorno*, $Z = 0$ ». Ora, si dimostra che un tale problema ammette soluzioni [all'infuori della soluzione banale $Z = 0$] solo se il parametro ω che figura nell'equazione assume certi valori discreti che si dicono «*autovalori*» dell'equazione differenziale (IV, 48₂) ⁽¹⁾ e che dipendono dalla forma del contorno: tali valori, per la (IV, 49), fissano le frequenze delle possibili vibrazioni semplici. Le soluzioni $Z(x, y)$ ad essi corrispondenti si chiamano «*autofunzioni*».

Aggiungiamo ancora che nello studio della vibrazione hanno notevole interesse le linee $Z(x, y) = 0$; nei loro punti la z è costantemente nulla e perciò esse si dicono *linee nodali* ⁽²⁾.

Noi non risolveremo il problema in generale ma tratteremo solo i casi particolari del contorno rettangolare o circolare.

§ 88. Caso della membrana rettangolare.

Vediamo di integrare la (IV, 48₂) nel caso in cui il contorno [fisso] della membrana è un rettangolo, che supporremo coi lati a, b paralleli agli assi x, y . Ci serviremo ancora del metodo della separazione delle variabili [§ 84] cercando anzitutto una soluzione Z del tipo

$$Z = X(x) \cdot Y(y),$$

prodotto di una funzione X della sola x per una funzione Y della sola y . Si ottiene, così, sostituendo nell'equazione in esame,

$$X''Y + XY'' = -\omega^2 XY,$$

[con ω costante arbitraria], ossia

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\omega^2;$$

e questa relazione, col solito ragionamento [§ 84], si scinde nelle due

$$X'' = -p^2 X, \quad Y'' = -q^2 Y,$$

⁽¹⁾ Ciò è perfettamente analogo a quanto si è visto per l'equazione di d'Alembert [§ 84].

⁽²⁾ Le linee nodali si mettono in evidenza sperimentalmente cospargendo la membrana di sabbia sottile: questa viene fatta saltellare dalle vibrazioni e finisce per allontanarsi gradualmente dalle parti che vibrano e raccogliersi lungo le linee nodali, che divengono così visibili (*figure di Chladni*).

dove p e q sono due costanti legate dalla relazione

$$(IV, 50) \quad p^2 + q^2 = \omega^2.$$

Integrando si ha

$$(IV, 51_1) \quad X(x) = M \cos px + N \sin px,$$

$$(IV, 51_2) \quad Y(y) = R \cos qy + S \sin qy,$$

[con M, N, R, S costanti di integrazione].

Imponiamo ora la condizione che Z sia nulla sul contorno rettangolare e cioè che sia

$$Z = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} x = 0, & x = a, \\ y \text{ qualsiasi,} \end{cases} \quad \text{e per} \quad \begin{cases} x \text{ qualsiasi,} \\ y = 0, & y = b, \end{cases}$$

il che si traduce in

$$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0:$$

avremo allora dalle (IV, 51₁) e (IV, 51₂)

$$M = 0 \quad \text{e} \quad p = m \frac{\pi}{a}, \quad (m = 1, 2, \dots),$$

$$R = 0 \quad \text{e} \quad q = n \frac{\pi}{b}, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

e quindi

$$X(x) = N \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad Y(y) = S \sin n\pi \frac{y}{b}.$$

La soluzione cercata sarà perciò

$$Z = C \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}$$

[avendo indicata con C la costante arbitraria NS], e dalla (IV, 50) e dalle espressioni di p e q si ha

$$(IV, 52) \quad \omega^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

Si vede così, come avevamo annunciato, che il parametro ω può avere solo certi valori discreti, che indicheremo con $\omega_{m,n}$ perchè dipendenti dai due indici interi m, n ; gli *autovalori*, per la membrana rettangolare, sono dunque

$$(IV, 53) \quad \omega_{m,n} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

A ciascuno di questi corrisponde una soluzione ⁽¹⁾ [autofunzione] della (IV, 48₂), che distingueremo ancora cogli indici m , n , e precisamente

$$Z_{m,n} = C_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad \text{autofunzione}$$

La vibrazione della membrana caratterizzata da questa particolare soluzione è, per la (IV, 47) e la (IV, 48₁),

$$(IV, 54) \quad z_{m,n} = D_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \cos (\omega_{m,n} t - \alpha_{m,n})$$

[dove $D_{m,n}$ ed $\alpha_{m,n}$ sono due costanti arbitrarie].

Le linee nodali, date da $Z_{m,n} = 0$, ossia da

$$\sin m\pi \frac{x}{a} = 0 \quad \text{e} \quad \sin n\pi \frac{y}{b} = 0,$$

sono le rette, parallele agli assi y ed x , di equazioni

$$x = h \frac{a}{m}, \quad y = k \frac{b}{n}, \quad (k, h, \text{ interi.})$$

Non potendo nel nostro caso x superare a nè y superare b segue che k non potrà superare n nè h superare m ; potremo così ottenere le linee nodali dividendo il lato a in m parti uguali, il lato b in n e tracciando dai punti di divisione le parallele agli assi [in fig. 90 sono tracciate le linee nodali relative alla soluzione $Z_{3,4}$]. La membrana risulta così divisa in mn rettangoli ciascuno dei quali vibra come se avesse il contorno fissato al piano (x, y) , e vibra in opposizione di fase rispetto ai rettangoli adiacenti [in fig. 90 ciò è messo in evidenza col tratteggio].

Fissati m ed n , cioè fissato il reticolato delle linee nodali, restano fissate, per la (IV, 53), anche $\omega_{m,n}$ e la frequenza di vibrazione [v. (IV, 49)]

$$(IV, 55) \quad \nu_{m,n} = \frac{\omega_{m,n}}{2\pi} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

si ha così, in generale, che per ogni coppia di valori (m, n) si ottiene una particolare frequenza di vibrazione e, quindi, viene emesso un particolare suono puro. La frequenza più bassa è quella per cui $m = n = 1$ e si dice *fondamentale*; le altre, però, [a differenza di quanto

⁽¹⁾ Tale soluzione è definita a meno di un fattore costante; però non si considerano distinte due soluzioni che differiscano solo per un fattore costante [ossia che non siano *indipendenti*].

avviene nella corda (§ 83)], non sono multiple di essa e quindi non danno i suoni armonici del fondamentale.

Essendo l'equazione (IV, 46') lineare, una combinazione lineare di più soluzioni del tipo (IV, 54) è ancora una soluzione, ed anche una serie, formata con infinite soluzioni corrispondenti a tutti i valori di m, n ,

$$z = \sum_1^{\infty} D_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b} \cos (2\pi\nu_{m,n}t - \alpha_{m,n})$$

è, se convergente, ancora una soluzione. Non si vede, così, che questa è la *più generale soluzione*, ma sarebbe facile dimostrarlo con sviluppi in serie di Fourier, e si vedrebbe che, assegnate configurazione e velocità iniziali della membrana in ogni punto, restano perfettamente determinate le costanti $D_{m,n}$ ed $\alpha_{m,n}$. Dunque, secondo il modo con cui le vibrazioni sono eccitate, si avrà una vibrazione semplice [con emissione di un suono puro e formazione di linee nodali] od una combinazione di più vibrazioni semplici [che, in generale, non ammette linee nodali].

§ 89. Caso della membrana quadrata. Degenerazione.

Il caso di una membrana quadrata, pur essendo contenuto nella trattazione precedente, merita di esser rilevato perchè offre un esempio di una particolarità analitica che si presenta in diversi problemi e che dicesi « *degenerazione* ». Essa consiste nel fatto che ad uno stesso autovaleore corrispondono *due* autofunzioni *indipendenti fra loro* [§ prec., nota 1].

Riprendiamo la (IV, 55) e facciamo in essa $a = b$: avremo

$$\nu_{m,n} = \frac{v}{2a} \sqrt{m^2 + n^2}$$

e quindi

$$\nu_{m,n} = \nu_{n,m}.$$

Ne segue che, se la membrana è quadrata, per ogni coppia di numeri (m, n) vi sono *due* soluzioni semplici *indipendenti* [e cioè $z_{m,n}$ e $z_{n,m}$] che danno luogo alla *stessa* frequenza.

Una soluzione più generale si ottiene sommando queste due soluzioni colla stessa fase [che, scegliendo opportunamente l'istante iniziale, possiamo supporre zero]: essa è

$$z = \left(D_{m,n} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{a} + D_{n,m} \sin n\pi \frac{x}{a} \sin m\pi \frac{y}{a} \right) \cos 2\pi\nu_{m,n}t$$

ed è facile la ricerca delle linee nodali relative. Infatti, esse sono date dall'equazione

$$\sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{a} + \mu \sin n\pi \frac{x}{a} \sin m\pi \frac{y}{a} = 0,$$

dove si è posto $\mu = D_{n,m}/D_{m,n}$; in essa compare ancora una costante arbitraria, μ , e dal suo valore dipende la forma delle linee nodali, che,

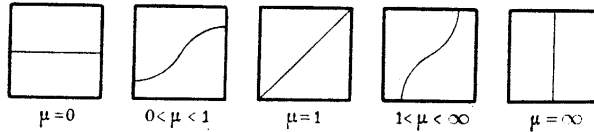


Fig. 91.

in genere, non sono più rette. Per es., nel caso $m = 1$, $n = 2$ al variare di μ abbiamo le linee nodali rappresentate nella fig. 91.

§ 90. Caso della membrana circolare (1ª parte).

Nel caso di una membrana circolare conviene servirsi di coordinate polari (r, θ) col centro nel centro della membrana: la (IV, 48₂) si scrive allora [v. (I, 32,)]

$$(IV, 56) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} = -\omega^2 Z,$$

e la condizione al contorno è che per $r = R$ [raggio della membrana] sia $Z = 0$.

Anche qui usiamo il metodo della separazione delle variabili, cercando le soluzioni del tipo

$$(IV, 57) \quad Z(r, \theta) = Y(r)\Psi(\theta).$$

Sostituendo questa espressione nella (IV, 56) e moltiplicando per $r^2/Y\Psi$ allo scopo di separare le variabili, si ottiene

$$(IV, 58) \quad \frac{r}{Y} \frac{d}{dr} (rY') + \omega^2 r^2 = -\frac{\Psi''}{\Psi}.$$

Poiché il primo membro non contiene la θ nè il secondo la r , essi [§ 84, nota 1] devono entrambi essere eguali ad una costante x . Il secondo membro ci dà, così,

$$\Psi'' = -x\Psi.$$

da cui

$$\Psi = B \sin(\sqrt{x}\theta - \beta)$$

[con B e β costanti arbitrarie]. Ma poichè Ψ deve evidentemente essere funzione periodica di θ , a periodo 2π , dovrà \sqrt{x} essere un numero intero m , ossia $x = m^2$ e quindi

$$(IV, 59) \quad \Psi = B \sin(m\theta - \beta), \quad (m = \text{intero}).$$

Riprendendo la (IV, 58) e sostituendo il secondo membro con x , cioè m^2 , si ha per Y l'equazione

$$(IV, 60) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rY') + \left(\omega^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) Y = 0,$$

che contiene i due parametri ω ed m . Per lo studio matematico conviene ridurla ad una forma contenente il solo parametro m , il che può farsi introducendo in luogo di r una variabile x legata ad r da

$$(IV, 61) \quad r = \frac{x}{\omega}.$$

Con ciò l'equazione diviene

$$(IV, 62) \quad \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dY}{dx} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) Y = 0,$$

ovvero

$$(IV, 62') \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dY}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) Y = 0.$$

È questa una equazione differenziale che si presenta in parecchi problemi di fisica matematica e che prende il nome di *equazione di Bessel*. Prima di proseguire lo studio del nostro problema daremo alcune brevi notizie su quelle soluzioni di questa equazione che più interessano per le applicazioni.

§ 91. Cenno sulle funzioni di Bessel di 1ª specie.

Si chiama *funzione di Bessel [o cilindrica] di 1ª specie*, e di ordine m , la funzione $J_m(x)$ definita dalla serie

$$(IV, 63) \quad J_m(x) = \frac{x^m}{2^m} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} \cdot n! (m+n)!} = \\ = \frac{x^m}{m! 2^m} \left(1 - \frac{x^2}{2(2m+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2m+2)(2m+4)} - \dots \right).$$

serie, come si verifica facilmente, convergente per qualunque valore di x . Noi ci limiteremo a considerare le funzioni con x reale ed m intero e non negativo.

Sostituendo la (IV, 63) al posto di Y in (IV, 62) o (IV, 62') si verifica che l'equazione è soddisfatta: la funzione di Bessel d'ordine m è dunque un integrale particolare della equazione di Bessel col parametro m . La sua importanza risiede principalmente nel fatto che le sole soluzioni della detta equazione che siano finite per $x = 0$ sono del tipo CJ_m con C costante arbitraria.

Delle funzioni di Bessel esistono tavole assai estese, per molti valori di m . L'andamento delle funzioni di Bessel di prima specie di ordiue

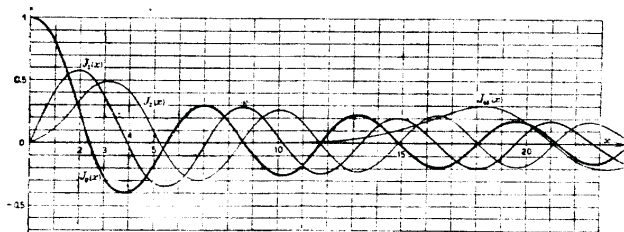


Fig. 92.

0, 1, 2, 16 è rappresentato in fig. 92: la figura è tracciata solo per $x > 0$, perchè, come si vede dalla (IV, 63), $J_m(x)$ è funzione pari di x se m è pari, funzione dispari se m è dispari, vale a dire si ha in ogni caso

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x).$$

Come si vede, le $J_m(x)$ hanno andamento oscillante, ma non periodico, poichè l'ampiezza delle oscillazioni va decrescendo col crescere di x e inoltre le intersezioni coll'asse x [o «zeri»] non sono equidistanti. È utile per talune applicazioni conoscere i valori di questi zeri, ossia le infinite radici dell'equazione trascendente $J_m(x) = 0$: diamo qui una tabella [con tre decimali] dei primi zeri per le tre funzioni di Bessel J_0 , J_1 , J_2 :

J_m	—	$x_m^{[1]}$	$x_m^{[2]}$	$x_m^{[3]}$	$x_m^{[4]}$	$x_m^{[5]}$
$J_0 = 0$ per $\pm x =$	—	2,405	5,520	8,654	11,792	14,931
$J_1 = 0$ per $\pm x =$	0	3,832	7,016	10,173	13,323	16,470
$J_2 = 0$ per $\pm x =$	0	5,135	8,417	11,620	14,796	17,960

Si noterà che l'intervallo fra due zeri consecutivi al crescere di x tende ad un valore finito e precisamente a π . Infatti si dimostra che per x abbastanza grande [sia rispetto ad 1 che rispetto ad m] la $J_m(x)$ si può approssimare colla sua espressione asintotica

$$J_m(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - m\frac{\pi}{2}\right).$$

Si vede di qui, in particolare, che tutte le $J_m(x)$ tendono a zero [oscillando] per $x \rightarrow \infty$. Quanto al comportamento delle J_m in vicinanza dell'origine, è da notare che, come si vede dalla (IV, 63), $J_0(0) = 1$, mentre ogni altra J_m [$m \neq 0$] ha in $x = 0$ uno zero d'ordine m : la curva ha, quindi, con l'asse x un contatto d'ordine m . Per m assai elevato la curva ha, prima della prima arcata, un lungo tratto in cui si scosta pochissimo dall'asse x (v. fig. 92).

Tra le proprietà notevoli delle J_m ci limitiamo a citare:

I) la formula ricorrente fra funzioni di diversi ordini:

$$J_{m-1} + J_{m+1} = \frac{2m}{x} J_m;$$

II) le formule di derivazione:

$$\frac{dJ_0}{dx} = -J_1, \quad \frac{dJ_m}{dx} = -\frac{m}{x} J_m + J_{m-1}, \quad (m > 0):$$

III) le espressioni mediante integrali definiti:

$$J_m(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \varphi) \cos m\varphi d\varphi, \quad (m \text{ pari}):$$

$$J_m(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin \varphi) \sin m\varphi d\varphi. \quad (m \text{ dispari}).$$

Vi sono, inoltre, parecchi altri integrali definiti che si esprimono mediante le funzioni di Bessel.

§ 92. Caso della membrana circolare (2ª parte).

Riprendiamo ora il problema della membrana circolare, e notiamo che la Y , oltre a soddisfare l'equazione di Bessel (IV, 62'), deve evidentemente esser finita per $x = 0$ [ossia nel centro della membrana]: essa dunque, per quanto si è detto al § prec., deve identificarsi con una J_m [a meno di un fattore costante] ossia deve essere

$$(IV, 64) \quad Y = CJ_m(x) = CJ_m(\omega r);$$

La condizione al contorno impone che per $r = R$ la $J_m(\omega r)$ abbia uno zero, ossia che

(IV, 65)

$$\omega R = x_m^{[n]},$$

$\omega = R^{-1} x_m^{[n]}$ *autov.*

essendo $x_m^{[n]}$ l' n -esimo degli zeri della J_m [non contando quello che nell'origine si ha per $m \neq 0$]; ciò fissa i valori possibili del parametro ω [autovalori della (IV, 60)] i quali vengono quindi a dipendere da due indici [interi positivi arbitrari] n ed m , e corrispondentemente si hanno le frequenze proprie della membrana [v. (IV, 49)]

$$v_{n,m} = \frac{\omega v}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R} x_m^{[n]} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{\tau}{\rho_n}} x_m^{[n]}.$$

Come si vede, una data membrana può vibrare sinusoidalmente con ∞^2 frequenze diverse, le quali [a differenza di quanto avviene nelle corde] non sono in rapporti semplici tra loro: perciò i suoni corrispondenti non si chiamano « armonici », ma « parziali ». Il suono più basso corrisponde a $n = 1, m = 0$ ed ha quindi la frequenza

$$v_{1,0} = \frac{2,405...}{2\pi R} \sqrt{\frac{\tau}{\rho_n}}.$$

esso dicesi « fondamentale ».

In due membrane di uguali τ e ρ_n , ma di raggio diverso, le frequenze fondamentali [come pure quelle dei parziali di uguali n ed m] sono, come si vede, inversamente proporzionali ad R .

Per ogni coppia, n ed m , si ha un modo di vibrare sinusoidalmente, caratterizzato dalla Z che si ottiene sostituendo (IV, 59) e (IV, 64) in (IV, 57): indicando con $C_{n,m}$ la costante arbitraria BC e tenendo conto della (IV, 65) si ha

$$Z = Z_{n,m} = C_{n,m} J_m \left(x_m^{[n]} \frac{r}{R} \right) \sin (m\theta - \beta).$$

Moltiplicando per il fattore temporale (IV, 48₁) si ottiene la più generale soluzione a variabili separate

$$(IV, 66) \quad z = z_{n,m} = D_{n,m} J_m \left(x_m^{[n]} \frac{r}{R} \right) \sin (m\theta - \beta) \cos \left(\frac{v_{n,m}^{[n]}}{R} t - \alpha \right),$$

[dove si è posto $C_{n,m} A = D_{n,m}$].

Quanto alle linee nodali [$Z = 0$], ve ne sono, come si vede, due famiglie:

$$J_m \left(x_m^{[n]} \frac{r}{R} \right) = 0 \quad \text{e} \quad \sin (m\theta - \beta) = 0.$$

La prima equazione equivale ad

$$x_m^{[n]} \frac{r}{R} = x_m^{[i]}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

e rappresenta gli n cerchi di raggi

$$r_i = R \frac{x_m^{[i]}}{x_m^{[n]}}$$

[dei quali l'ultimo ($i = n$) coincide col contorno della membrana] ⁽¹⁾. La seconda equazione equivale ad

$$m\theta - \beta = k\pi, \quad (k = 1, \dots, 2m),$$

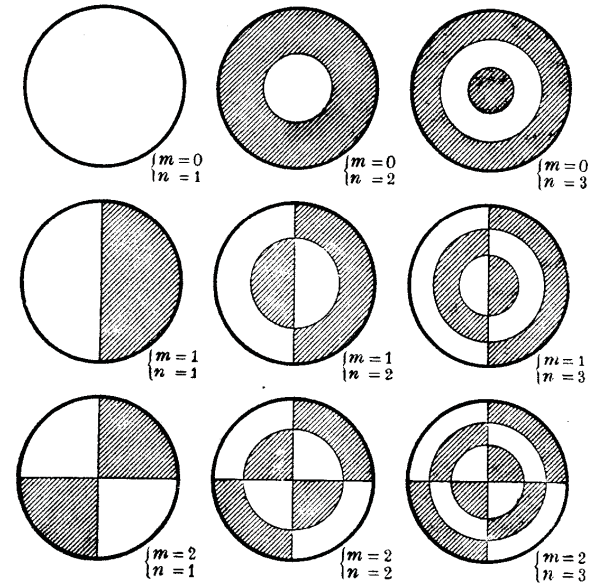


Fig. 93.

e rappresenta $2m$ raggi che dividono il cerchio in altrettanti settori uguali [variando la costante β , che resta arbitraria, il sistema di linee nodali ruoterebbe mantenendosi inalterato: si ha dunque anche qui, come nella membrana quadrata (§ 89), un caso di degenerazione]. Come si vede l'indice n fissa il numero dei cerchi nodali [compreso il contorno] e l'indice m quello dei raggi nodali. La fig. 93 rappresenta le

⁽¹⁾ Quando $m \neq 0$ la J_m si annulla anche per $r = 0$, ma questo non dà niente di nuovo poiché in questi casi il centro della membrana appartiene già alle linee nodali dell'altra famiglia.

linee nodali per diversi casi: il primo [$m = 0, n = 1$] corrisponde alla frequenza più bassa, o fondamentale. Le parti tratteggiate vibrano in opposizione di fase rispetto alle altre.

Le soluzioni a variabili separate (IV, 66) sono le sole nelle quali ogni punto della membrana vibra sinusoidalmente [con la stessa frequenza] e la membrana emette un suono puro: la soluzione generale [analogamente a quanto si è detto per le corde] si ottiene formando la serie doppia

$$z = \sum_{n,m} D_{n,m} z_{n,m}$$

dove i coefficienti $D_{n,m}$ delle singole $z_{n,m}$ [v. (IV, 66)] sono arbitrari, purchè tali da rendere la serie convergente: essi si possono determinare quando sono assegnate le condizioni iniziali [spostamento e velocità in tutti i punti]. A tale soluzione non corrispondono, in generale, linee nodali, nè una frequenza determinata: il suono emesso non è puro, ma contiene una miscela di più suoni parziali.

Le membrane dei timpani, dei tamburi e delle grancasse [eccitate per percussione] emettono, oltre alla nota fondamentale, numerosi parziali di intensità non trascurabile.

CAPITOLO V.

TEORIA DELL'ELASTICITÀ

§ 93. Generalità.

È noto che i corpi solidi non sono mai perfettamente rigidi [come conviene spesso considerarli in Meccanica] poichè, sotto l'azione di forze applicate, si deformano. Tali deformazioni, trascurabili in certi ordini di fenomeni, assumono invece in altri casi interesse pratico grandissimo o per la loro entità [deformazione delle molle, etc.] o per il loro collegamento a questioni di resistenza alla rottura [deformazioni delle travi, dei ponti, etc.]: lo studio di tali deformazioni in relazione alle forze che le producono [che è il fondamento della « Scienza delle Costruzioni »] dicesi « teoria dell'elasticità ».

Le deformazioni si dicono « elastiche » se, al cessare delle forze applicate, scompaiono ed il corpo torna alla forma e dimensioni primitive: altrimenti si dicono « permanenti ». Nella maggior parte dei solidi le deformazioni, se inferiori ad un certo limite, sono elastiche e noi limiteremo il nostro studio a questo tipo di deformazioni: anzi, nei corpi suscettibili di deformazioni elastiche assai ampie [come, per es., il caucciù] imporreemo ad esse un limite ancora più ristretto, considerando in ogni caso solo deformazioni assai piccole, come sarà precisato nel § seguente.

I fluidi [liquidi e gas] possono anch'essi presentare dei movimenti in cui la deformazione di ogni loro parte si mantiene piccola [come avviene, per es., nelle vibrazioni sonore]: lo studio di tali movimenti si può, con qualche avvertenza, far rientrare in quello del moto dei solidi elastici, considerando, in certo modo, i fluidi come casi limiti di solidi elastici. Perciò, nelle considerazioni che seguono, ci riferiremo in generale ad un mezzo continuo qualunque, intendendo che, se si tratta di un fluido, si considerano solo i moti del tipo descritto, escludendo i moti più generali, oggetto dell'« Idrodinamica ».

LE DEFORMAZIONI

§ 94. Analisi della deformazione nell'intorno di un punto.

Iniziamo ora lo studio puramente geometrico della distribuzione degli spostamenti e delle deformazioni nell'intorno di un mezzo continuo deformato, introducendo più oltre la considerazione delle forze che producono la deformazione. Nel Capitolo I abbiamo già fatto uno studio di questo genere per la distribuzione delle velocità [§ 14], ma ora vogliamo, invece, fissare l'attenzione sulla distribuzione degli *spostamenti* in un determinato istante che consideriamo fissato.

Sia $P(x, y, z)$ un punto generico del corpo in esame non deformato [ossia nella sua configurazione che diremo « naturale »] e $P^*(x^*, y^*, z^*)$ la nuova posizione di P dopo la deformazione: lo « spostamento del punto P » sarà il vettore [funzione del punto P]

$$\mathbf{s} = P^* - P,$$

ed indicheremo con s_1, s_2, s_3 le sue componenti secondo gli assi x, y, z . Ammetteremo sempre che gli spostamenti e le loro derivate prime siano abbastanza piccoli da poterne trascurare i quadrati [e, più precisamente, che siano trascurabili i quadrati degli spostamenti rispetto a quelli delle dimensioni del corpo, ed i quadrati delle loro derivate rispetto ad 1].

Possiamo studiare la distribuzione degli spostamenti attorno a P in modo perfettamente analogo a quanto si è fatto al § 14 per lo studio della distribuzione delle velocità. Assumiamo quindi tre assi cartesiani ortogonali ξ_1, ξ_2, ξ_3 aventi l'origine in P e paralleli rispettivamente agli assi x, y, z , con che ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono le coordinate [rispetto a P] di un punto generico Q , che supporremo appartenere ad un intorno di P piccolo del primo ordine. Se s_1^Q, s_2^Q, s_3^Q sono le componenti dello spostamento \mathbf{s}^Q di Q , analogamente a quanto si è visto a § 14 per \mathbf{u} , si trovano le relazioni

$$(V, 1) \quad \begin{cases} s_1^Q = s_1 + \frac{\partial s_1}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial s_1}{\partial y} \xi_2 + \frac{\partial s_1}{\partial z} \xi_3, \\ s_2^Q = s_2 + \frac{\partial s_2}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial s_2}{\partial y} \xi_2 + \frac{\partial s_2}{\partial z} \xi_3, \\ s_3^Q = s_3 + \frac{\partial s_3}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial s_3}{\partial y} \xi_2 + \frac{\partial s_3}{\partial z} \xi_3, \end{cases}$$

dove le nove derivate parziali che vi compaiono si intendono calcolate

nel punto P . Ed, introducendo le nove quantità

$$\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12} (= \gamma_{21}), \gamma_{13} (= \gamma_{31}), \gamma_{23} (= \gamma_{32}), \pi, \chi, \rho$$

date da

$$(V, 2) \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \frac{\partial s_1}{\partial x}, & \gamma_{22} = \frac{\partial s_2}{\partial y}, & \gamma_{33} = \frac{\partial s_3}{\partial z}, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_1}{\partial y} + \frac{\partial s_2}{\partial x} \right), & \gamma_{13} = \gamma_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_1}{\partial z} + \frac{\partial s_3}{\partial x} \right), \\ \gamma_{23} = \gamma_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_2}{\partial z} + \frac{\partial s_3}{\partial y} \right), \end{cases}$$

$$(V, 3) \quad \pi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_3}{\partial y} - \frac{\partial s_2}{\partial z} \right), \quad \chi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_1}{\partial z} - \frac{\partial s_3}{\partial x} \right), \quad \rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_2}{\partial x} - \frac{\partial s_1}{\partial y} \right),$$

in cui le derivate si intendono calcolate nel punto P , le (V, 1) si possono scrivere

$$(V, 4) \quad \begin{cases} s_1^Q = s_1 + \chi \xi_3 - \rho \xi_2 + [\gamma_{11} \xi_1 + \gamma_{12} \xi_2 + \gamma_{13} \xi_3], \\ s_2^Q = s_2 + \rho \xi_1 - \pi \xi_3 + [\gamma_{21} \xi_1 + \gamma_{22} \xi_2 + \gamma_{23} \xi_3], \\ s_3^Q = s_3 + \pi \xi_2 - \chi \xi_1 + [\gamma_{31} \xi_1 + \gamma_{32} \xi_2 + \gamma_{33} \xi_3]. \end{cases}$$

Queste relazioni ci danno la distribuzione cercata. Si ha subito, ad es., che se le γ_{ik} sono tutte nulle lo spostamento dell'intorno del punto P è uno spostamento dovuto ad un moto rigido [di cui s_1, s_2, s_3 sono le componenti della traslazione e π, χ, ρ quelle della rotazione] e sarebbe immediato verificare che, inversamente, se lo spostamento è « rigido » le γ_{ik} sono tutte nulle. Le (V, 4) ci dicono quindi che lo spostamento di un punto Q qualsiasi dell'intorno di P è composto di una parte dovuta ad un moto rigido, e di una parte [espressa mediante le γ_{ik}] dovuta alla deformazione. Le γ_{ik} si chiamano perciò *componenti della deformazione*.

Si noti che, essendo le (V, 4) funzioni lineari di ξ_1, ξ_2, ξ_3 , punti allineati si conservano allineati e punti complanari si conservano complanari.

§ 95. Tensore delle deformazioni.

Le singole γ_{ik} hanno un notevole significato fisico. Per vederlo cominciamo col supporre nullo lo spostamento rigido dell'intorno di P [il che potrà sempre ottenersi imprimendo a tutto il corpo una traslazione di componenti $(-s_1, -s_2, -s_3)$ ed una rotazione di compo-

nenti $(-\pi, -\gamma, -\rho)$: allora lo spostamento di un punto generico Q dell'intorno di P sarà dovuto alla sola deformazione e sarà dato da

$$(V, 5) \quad \begin{cases} s_1^Q = \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \gamma_{13}\xi_3, \\ s_2^Q = \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \gamma_{23}\xi_3, \\ s_3^Q = \gamma_{31}\xi_1 + \gamma_{32}\xi_2 + \gamma_{33}\xi_3. \end{cases} \quad \text{Deformazione}$$

Osserviamo anzitutto che queste formule, poichè legano linearmente le componenti del vettore s a quelle del vettore $r = Q - P \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, ci dicono che le γ_{ik} sono le componenti di un tensore simmetrico [§ 16] [funzione del posto]: esso si dice « *tensore delle deformazioni* ». Osserviamo poi che, sempre per tale linearità, possiamo considerare la deformazione generale come ottenuta sovrapponendo tante deformazioni particolari che studieremo singolarmente.

Consideriamo per prima una deformazione caratterizzata da tutte le γ_{ik} nulle, *eccetto* γ_{11} . Gli spostamenti corrispondenti saranno

$$(V, 6) \quad s_1^Q = \gamma_{11}\xi_1, \quad s_2^Q = s_3^Q = 0,$$

e perciò il punto Q , che prima dello spostamento aveva coordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3 , si sposterà nel punto Q^* , di coordinate

$$\xi_1^* = \xi_1(1 + \gamma_{11}), \quad \xi_2^* = \xi_2, \quad \xi_3^* = \xi_3,$$

ossia si sposterà parallelamente all'asse ξ_1 , e quindi all'asse x , di una quantità proporzionale a ξ_1 . Ciò significa che tutti i segmenti paralleli all'asse x si dilatano nel rapporto $1 + \gamma_{11}$, mentre quelli ad esso ortogonali restano invariati. Tale deformazione è, dunque, una *pura dilatazione* nel senso dell'asse x , e γ_{11} rappresenta il *coefficiente di dilatazione [lineare] nella direzione dell'asse x , nel punto P* . Analogamente si vede che γ_{22} e γ_{33} rappresentano i coefficienti di dilatazione nelle direzioni degli assi y e z [nel punto P].

Consideriamo ora, invece, una deformazione caratterizzata da tutte le γ_{ik} nulle *eccetto* γ_{23} [= γ_{32}]. Gli spostamenti corrispondenti saranno

$$(V, 7) \quad s_1^Q = 0, \quad s_2^Q = \gamma_{23}\xi_3, \quad s_3^Q = \gamma_{23}\xi_2.$$

Essi ci dicono che Q si sposta in un piano perpendicolare all'asse x [o ξ_1] e che il suo spostamento non dipende da ξ_1 : potremo quindi limitarci a studiare il fenomeno nel piano (ξ_2, ξ_3) [fig. 94]. In questo piano i punti dell'asse ξ_2 , ($\xi_3 = 0$), appartenenti all'intorno, si portano sulla retta PA^* , di equazione $\xi_3 = \gamma_{23}\xi_2$, quindi inclinata sull'asse ξ_2 di un angolo $\delta\varphi = \text{arctg } \gamma_{23} \approx \gamma_{23}$ e, similmente, l'asse ξ_3 si inclina in senso opposto, di un angolo eguale. Quindi si può dire che $2\gamma_{23}$

rappresenta il decremento che subisce, per effetto della deformazione, l'angolo degli assi ξ_2, ξ_3 uscenti da P . Una deformazione di questo tipo si chiama « *scorrimento* » parallelo al piano (ξ_2, ξ_3) . Analogamente si definirebbero gli scorrimenti paralleli agli altri due piani coordinati: perciò le γ_{ik} con indici diseguali si chiamano « *coefficienti di scorrimento* ».

La deformazione più generale, (V, 5), si può dunque considerare come sovrapposizione di tre dilatazioni parallele agli assi e di tre scorrimenti. Si ricordi però che, per la simmetria del tensore, esiste sempre, in ogni punto, una terna di assi principali $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ [assi principali del tensore delle deformazioni] rispetto ai quali [indicando con lo $(^0)$

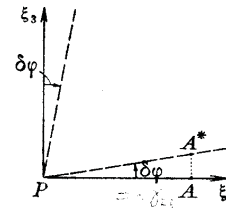


Fig. 94.

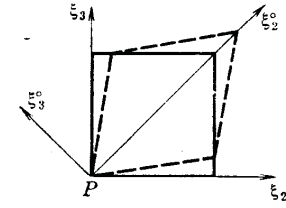


Fig. 95.

le quantità relative agli assi principali] si ha $\gamma_{23}^0 = \gamma_{31}^0 = \gamma_{12}^0 = 0$ [cfr. § 16]: la deformazione più generale può quindi venir decomposta in tre dilatazioni parallele ai tre assi principali [senza scorrimenti].

Mostriamo, per es., come la seconda delle deformazioni particolari sopra studiate, e cioè quella che rispetto agli assi ξ_1, ξ_2, ξ_3 appare come uno scorrimento puro, si possa considerare come risultato di due dilatazioni [una positiva ed una negativa, cioè contrazione] rispetto alle direzioni degli assi ξ_2^0, ξ_3^0 , che in questo caso sono le bisettrici dell'angolo $\xi_2\xi_3$. Prendendo infatti queste bisettrici come nuovi assi ξ_2^0 e ξ_3^0 e l'asse ξ_1^0 coincidente con l'asse ξ_1 , si ha per le (I, 5), (I, 6) e (V, 7)

$$\xi_1^0 = \xi_1, \quad \xi_2^0 = \frac{\xi_2 + \xi_3}{\sqrt{2}}, \quad \xi_3^0 = \frac{-\xi_2 + \xi_3}{\sqrt{2}}.$$

$$[s_1^Q]^0 = s_1^Q = 0,$$

$$[s_2^Q]^0 = \frac{s_2^Q + s_3^Q}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma_{23}}{\sqrt{2}}(\xi_3 + \xi_2) = \gamma_{23}\xi_2^0,$$

$$[s_3^Q]^0 = \frac{-s_2^Q + s_3^Q}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma_{23}}{\sqrt{2}}(-\xi_3 + \xi_2) = -\gamma_{23}\xi_3^0.$$

e quindi, confrontando colle (V, 5),

$$\gamma_{11}^0 = 0, \quad \gamma_{22}^0 = \gamma_{23}, \quad \gamma_{33}^0 = -\gamma_{23}, \quad \gamma_{23}^0 = \gamma_{31}^0 = \gamma_{12}^0 = 0.$$

La fig. 95 mostra come si deforma un quadrato coi lati paralleli agli assi ξ_2 , ξ_3 e rende intuitivo come lo scorrimento equivalga ad una dilatazione $1 + \gamma_{23}$ parallela a ξ_2 ed una contrazione $1 - \gamma_{23}$ parallela a ξ_3 .

§ 96. Formule di trasformazione del tensore delle deformazioni. Dilatazione cubica.

In un cambiamento d'assi, le γ_{ik} si trasformano secondo le formule generali dei tensori date al § 15; vogliamo però qui scrivere esplicitamente tali formule per il caso che si passi dagli assi principali $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ ad assi qualunque x, y, z . Si ha dunque dalle (I, 51)

$$(V, 8) \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \gamma_{11}^0 a_{11}^2 + \gamma_{22}^0 a_{21}^2 + \gamma_{33}^0 a_{31}^2, \\ \gamma_{22} = \gamma_{11}^0 a_{12}^2 + \gamma_{22}^0 a_{22}^2 + \gamma_{33}^0 a_{32}^2, \\ \gamma_{33} = \gamma_{11}^0 a_{13}^2 + \gamma_{22}^0 a_{23}^2 + \gamma_{33}^0 a_{33}^2, \\ \gamma_{23} = \gamma_{32} = \gamma_{11}^0 a_{12} a_{13} + \gamma_{22}^0 a_{22} a_{23} + \gamma_{33}^0 a_{32} a_{33}, \\ \gamma_{31} = \gamma_{13} = \gamma_{11}^0 a_{13} a_{11} + \gamma_{22}^0 a_{23} a_{21} + \gamma_{33}^0 a_{33} a_{31}, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{11}^0 a_{11} a_{12} + \gamma_{22}^0 a_{21} a_{22} + \gamma_{33}^0 a_{31} a_{32}, \end{cases}$$

essendo i coseni, a_{ik} , definiti dallo specchio di § 16.

Ricordiamo che la quantità

$$(V, 9) \quad \gamma = \text{div } \mathbf{s} = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = \gamma_{11}^0 + \gamma_{22}^0 + \gamma_{33}^0$$

è un invariante [§ 3]. Essa si dice *invariante lineare di deformazione* ed ha un notevole significato fisico che ora mostreremo.

Consideriamo gli assi principali ed un parallelepipedo infinitesimo coi lati $d\xi_1^0, d\xi_2^0, d\xi_3^0$ ad essi paralleli (fig. 96): il suo volume sarà

$$V_0 = d\xi_1^0 d\xi_2^0 d\xi_3^0.$$

Esso nella deformazione [v. § prec.] diverrà un parallelepipedo di lati

$$(1 + \gamma_{11}^0) d\xi_1^0, \quad (1 + \gamma_{22}^0) d\xi_2^0, \quad (1 + \gamma_{33}^0) d\xi_3^0.$$

e perciò di volume

$$V = (1 + \gamma_{11}^0)(1 + \gamma_{22}^0)(1 + \gamma_{33}^0) d\xi_1^0 d\xi_2^0 d\xi_3^0;$$

quindi si ha [sviluppando e trascurando i prodotti delle γ_{ik} , in base a quanto si è detto sulle derivate degli spostamenti, a § 94]

$$V = (1 + \gamma) V_0,$$

da cui si vede che γ è il «coefficiente di dilatazione cubica» nel punto P . Brevemente γ si chiama «dilatazione cubica».

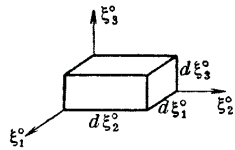


Fig. 96.

GLI SFORZI

§ 97. Forze applicate e sforzi.

Passiamo ora allo studio delle forze che agiscono sui corpi elastici.

Ad un corpo, S , possono venire applicate forze agenti su ogni elemento di massa del corpo, ossia «forze di massa», [come è per es. il peso] e forze agenti solo sulla superficie di esso, ossia «forze superficiali». La forza di massa agente sull'elemento di massa dm è dell'ordine di dm e si può esprimere con $F dm$, dove F è un vettore finito [forza agente sull'unità di massa], oppure, introducendo la densità ρ , con che $dm = \rho dS$, con

$$\rho F dS.$$

La forza superficiale agente sull'elemento $d\sigma$ si esprime invece con

$$\Psi d\sigma,$$

dove Ψ è un vettore finito [forza per unità di superficie].

Oltre a questi due tipi di forze vi sono forze che si esercitano fra le varie parti del corpo [es.: pressioni o tensioni interne] che precisiamo introducendo il concetto di «sforzo». Immaginiamo tracciato, all'interno del corpo, un elemento superficiale generico, $d\sigma$, e su esso fissiamo una faccia positiva [e quindi una negativa] o , cioè che è lo stesso, un verso positivo per la normale. La risultante di tutte le forze che le particelle del corpo situate dalla parte della faccia negativa esercitano sulle particelle situate dalla parte opposta, attraverso $d\sigma$, dicesi «sforzo sulla faccia negativa di $d\sigma$ ». Esso è dell'ordine di $d\sigma$ e si può esprimere con

$$\Phi d\sigma,$$

dove Φ è un vettore finito e si chiama «sforzo specifico⁽¹⁾» sulla faccia negativa dell'elemento $d\sigma$. [Esso si dice anche «pressione» se l'angolo che Φ forma colla normale positiva è acuto, «tensione» se è ottuso]. Le sue dimensioni sono quelle del vettore Ψ delle forze superficiali, ed esso dipende dalla posizione e dall'orientamento di $d\sigma$.

Se si osserva che anche qui vale il «principio di azione e reazione» si ha senz'altro che gli sforzi relativi a facce opposte di uno stesso elemento di superficie sono eguali ed opposti.

(1) L'aggettivo «specifico» sta a ricordare che si tratta dello sforzo per unità di superficie.

§ 98. Criterio generale di equilibrio dei corpi deformabili.

È noto dalla meccanica razionale che « *condizione necessaria di equilibrio di qualunque sistema meccanico è che la risultante delle forze esterne agenti sul sistema ed il momento risultante delle stesse forze, rispetto ad un punto qualsiasi, siano nulli* ». Ora, lo studio dell'equilibrio dei corpi deformabili è fondato sull'osservazione che, se il corpo è in equilibrio, le condizioni di cui sopra devono essere soddisfatte non solo per il corpo nel suo insieme, ma anche per qualsiasi parte di esso, considerata come un sistema a sè [badando, naturalmente, che quando una parte del corpo viene considerata come un sistema a sè, le forze esercitate su di essa dalle rimanenti parti del corpo devono essere computate tra le forze esterne]. In questo modo, sfruttando l'arbitrarietà della porzione del corpo, cui si applicano le condizioni di equilibrio, si giunge, come vedremo [§ 100], a delle equazioni, per le componenti degli sforzi specifici, che devono essere soddisfatte in ogni punto del corpo.

§ 99. Formule di Cauchy.

Consideriamo per un punto generico P interno al corpo tre elementi superficiali paralleli ai piani coordinati e siano

$$(V, 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = (\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}), \\ \Phi_2 = (\Phi_{21}, \Phi_{22}, \Phi_{23}), \\ \Phi_3 = (\Phi_{31}, \Phi_{32}, \Phi_{33}). \end{array} \right.$$

gli sforzi specifici che si esercitano, rispettivamente, sull'elemento normale all'asse x , su quello normale all'asse y e su quello normale all'asse z [in fig. 97 sono rappresentati solo l'elemento normale all'asse x , e Φ_1 con le sue tre componenti]. Notiamo che ciascuno degli sforzi specifici Φ_1, Φ_2, Φ_3 si può pensare come risultante di tre sforzi specifici, uno normale all'elemento considerato e due tangenziali, misurati dalle corrispondenti Φ_{ik} : ad es., Φ_1 si può considerare come risultante di uno sforzo specifico normale, misurato da Φ_{11} , e di due tangenziali, misurati da Φ_{12}, Φ_{13} , rispettivamente paralleli agli assi y e z (v. fig. 97). Per questo $\Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33}$ si chiamano, di solito, *sforzi specifici normali* e le Φ_{ik} con indici diseguali si dicono *sforzi specifici tangenziali* o *di taglio*.

Sia ora Φ lo sforzo specifico relativo ad un elemento comunque orientato passante per P . Possiamo far vedere che le componenti di Φ sono legate in modo assai semplice alle componenti Φ_{ik} degli sforzi specifici Φ_1, Φ_2, Φ_3 .

Per questo consideriamo in P tre rette parallele agli assi coordinati e tracciamo un piano infinitamente vicino a P che tagli tali rette formando un tetraedro [infinitesimo]: siano A, B, C gli ulteriori ver-

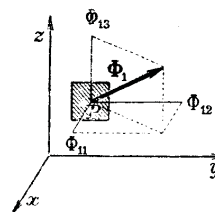


Fig. 97.

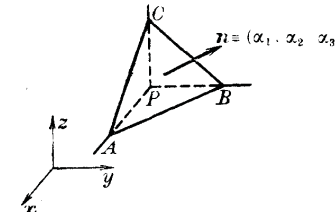


Fig. 98.

tici di tale tetraedro ed $\mathbf{n} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ il versore della normale alla faccia ABC orientata verso l'esterno del tetraedro [v. fig. 98]

Le facce PBC, PCA, PAB sono tre elementi superficiali per P , paralleli ai piani coordinati, quindi manterremo le notazioni (V, 10) per gli sforzi specifici ad esse relativi ed indicheremo con

$$\Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z)$$

lo sforzo specifico relativo alla faccia obliqua. Converremo di assumere come direzione positiva della normale alle facce uscenti da P quelle degli assi coordinati ad esse ortogonali.

Se, sotto l'azione delle forze esterne, il corpo è in equilibrio, per quanto si è detto nel § prec. il tetraedro $PABC$ dovrà soddisfare alle condizioni necessarie per l'equilibrio e quindi potremo scrivere che la risultante $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ di tutte le forze, che dall'esterno si esercitano sul tetraedro, è nulla. Tali forze sono: la forza di massa ⁽¹⁾

$$\rho \mathbf{F} dS = (\rho F_x dS, \rho F_y dS, \rho F_z dS)$$

[se dS è il volume infinitesimo del tetraedro] e gli sforzi

$$\Phi_1 d\sigma_1, \Phi_2 d\sigma_2, \Phi_3 d\sigma_3, -\Phi d\sigma$$

[se $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma$ sono le aree infinitesime delle facce PBC, PCA, PAB, ABC]. Avremo quindi

$$(V, 11) \quad R_x = \rho F_x dS + \Phi_{11} d\sigma_1 + \Phi_{21} d\sigma_2 + \Phi_{31} d\sigma_3 - \Phi_x d\sigma = 0$$

⁽¹⁾ il ragionamento si può estendere al caso in cui il corpo elastico è in movimento sostituendo alla forza di massa $\rho \mathbf{F} dS$ la « forza perduta » $(\rho \mathbf{F} - \dot{\mathbf{a}}) dS$ (principio di d'Alembert). ma, poichè le forze di massa non figurano nel risultato, questo rimane invariato e potremo usare le (V, 12) anche nello studio delle oscillazioni dei corpi elastici.

[ed analoghe per gli assi y e z]. Osservando che, se h è l'altezza del tetraedro relativa ad ABC , si ha $dS = d\sigma \cdot h/3$ e che

$$d\sigma_1 = d\sigma \cdot \alpha_1, \quad d\sigma_2 = d\sigma \cdot \alpha_2, \quad d\sigma_3 = d\sigma \cdot \alpha_3,$$

si ottiene

$$(V, 11') \quad R_x = \left(\rho F_x \frac{h}{3} + \Phi_{11}\alpha_1 + \Phi_{21}\alpha_2 + \Phi_{31}\alpha_3 - \Phi_x \right) d\sigma = 0$$

[ed analoghe].

Passando, poi, al limite per $h \rightarrow 0$ la faccia ABC diventa un elemento superficiale passante per P e di orientazione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, e dalle (V, 11') si hanno le *formule di Cauchy*:

$$(V, 12) \quad \begin{cases} \Phi_x = \Phi_{11}\alpha_1 + \Phi_{21}\alpha_2 + \Phi_{31}\alpha_3, \\ \Phi_y = \Phi_{12}\alpha_1 + \Phi_{22}\alpha_2 + \Phi_{32}\alpha_3, \\ \Phi_z = \Phi_{13}\alpha_1 + \Phi_{23}\alpha_2 + \Phi_{33}\alpha_3, \end{cases}$$

che ci danno lo sforzo specifico relativo ad un elemento superficiale, comunque orientato, in funzione degli sforzi specifici che si esercitano su tre elementi normali agli assi di riferimento.

§ 100. Equazioni differenziali dell'equilibrio (per gli sforzi).

Consideriamo ora una regione qualsiasi, S , interna al corpo deformato e siano σ la superficie che la limita ed $\mathbf{n} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ il versore della normale ad essa [orientata verso l'esterno]. Se S è in condizioni di equilibrio e se chiamiamo \mathbf{R} la risultante ed \mathbf{M} il momento risultante [rispetto all'origine] delle forze che si esercitano dall'esterno verso l'interno di S , sarà necessariamente, [§ 98], $\mathbf{R} = 0$ ed $\mathbf{M} = 0$, cioè

$$(V, 13) \quad R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

ed

$$(V, 14) \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0.$$

Calcoliamo ora esplicitamente la prima delle (V, 13). Su ogni elemento dS si esercita la forza di massa $\rho \mathbf{F} dS$, quindi le forze di massa agenti su S avranno come componente secondo l'asse x

$$\int_S \rho F_x dS.$$

Attraverso ogni elemento superficiale $d\sigma$, poi, dall'interno verso

l'esterno si esercita uno sforzo $\Phi d\sigma$, quindi la componente x degli sforzi che dall'esterno si esercitano verso l'interno sarà

$$-\int_{\sigma} \Phi_x d\sigma.$$

La R_x sarà la somma di queste due espressioni, quindi la prima delle (V, 13) si potrà scrivere

$$\int_S \rho F_x dS - \int_{\sigma} \Phi_x d\sigma = 0,$$

ossia, per le (V, 12),

$$\int_S \rho F_x dS - \int_{\sigma} (\Phi_{11}\alpha_1 + \Phi_{21}\alpha_2 + \Phi_{31}\alpha_3) d\sigma = 0,$$

e, trasformando il secondo integrale in un integrale di volume colle (I, 14),

$$\int_S \left[\rho F_x - \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial z} \right] dS = 0.$$

Essa, colle analoghe che si ricavano dalla seconda e terza delle (V, 13), deve valere qualunque sia lo spazio S , quindi [cfr. § 7, nota 2] sarà in ogni punto

$$(V, 15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial z} = \rho F_x, \\ \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial z} = \rho F_y, \\ \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial z} = \rho F_z. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni differenziali a cui soddisfano gli sforzi specifici in condizioni di equilibrio. Esse sono chiamate talvolta « *equazioni indefinite dell'equilibrio* » [volendosi colla parola « indefinite » contrapporle alle equazioni al contorno di cui al § seg.].

Vediamo ora a cosa ci portano le (V, 14); studiamone solo la prima e scomponiamo M_x in due parti, una, M'_x , relativa alle sole forze di massa e l'altra, M''_x , alle sole forze superficiali.

Il momento M'_x , rispetto all'origine, delle sole forze di massa sarà

$$(V, 16) \quad M'_x = \int_S (yF_z - zF_y) \rho dS;$$

quello M_x'' dei soli sforzi che dall'esterno si esercitano verso l'interno sarà

$$(V, 17) \quad M_x'' = - \int_{\sigma} (y\Phi_x - z\Phi_y) d\sigma,$$

sarà

$$(V, 18) \quad M_x = M_x' + M_x''.$$

Trasformiamo M_x' . Ricordando le (V, 12), la (V, 17) diviene

$$M_x' = - \int_{\sigma} [y(\Phi_{13}\alpha_1 + \Phi_{23}\alpha_2 + \Phi_{33}\alpha_3) - z(\Phi_{12}\alpha_1 + \Phi_{22}\alpha_2 + \Phi_{32}\alpha_3)] d\sigma$$

e, trasformando colle (I, 14),

$$\begin{aligned} M_x' &= - \int_S \left[\frac{\partial}{\partial x} (y\Phi_{13} - z\Phi_{12}) + \frac{\partial}{\partial y} (y\Phi_{23} - z\Phi_{22}) + \frac{\partial}{\partial z} (y\Phi_{33} - z\Phi_{32}) \right] dS = \\ &= - \int_S \left[y \left(\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial z} \right) + \Phi_{23} - z \left(\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial z} \right) - \Phi_{32} \right] dS. \end{aligned}$$

ossia, per le (V, 15) e la (V, 16),

$$M_x' = - \int_S [(yF_x - zF_y)\rho + \Phi_{23} - \Phi_{32}] dS = - M_x' + \int_S (\Phi_{23} - \Phi_{32}) dS.$$

Sostituendo in (V, 18), M_x' si elide e resta

$$M_x = \int_S (\Phi_{23} - \Phi_{32}) dS.$$

Ora, in virtù delle (V, 14) questa espressione deve annullarsi qualunque sia lo spazio S , il che richiede [§ 7, nota 2] che sia dovunque

$$(V, 19_1) \quad \Phi_{23} = \Phi_{32}.$$

Analogamente dalle altre (V, 14) segue (1)

$$(V, 19_2) \quad \Phi_{12} = \Phi_{21} \quad \text{e} \quad \Phi_{13} = \Phi_{31}.$$

Le (V, 15) vanno quindi sempre considerate assieme alle (V, 19₁) e (V, 19₂), che riducono da 9 a 6 distinte le Φ_{ik} .

(1) Le (V, 19₁) e (V, 19₂) valgono non solo in condizioni di equilibrio ma anche nel movimento [cfr. nota 1, § 99].

§ 101. Equazioni al contorno (per gli sforzi).

Per studiare gli sforzi in un corpo deformato non bastano le (V, 15) colle (V, 19) ma occorrono anche le condizioni alla superficie del corpo deformato.

È facile ottenerle osservando che, per l'equilibrio, la forza $\Psi \equiv (\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z)$, che supponiamo applicata sulla faccia esterna dell'unità di superficie, deve, per il principio di azione e reazione [v. § 97] essere uguale e opposta allo sforzo specifico che il corpo, deformato, esercita contro la faccia interna della superficie stessa: dovrà quindi essere sul contorno [assumendo come normale positiva quella esterna]

$$\Phi_x = -\Psi_x, \quad \Phi_y = -\Psi_y, \quad \Phi_z = -\Psi_z.$$

Valendoci delle (V, 12) avremo così le « equazioni al contorno »:

$$(V, 20) \quad \begin{cases} \Phi_{11}\alpha_1 + \Phi_{21}\alpha_2 + \Phi_{31}\alpha_3 = -\Psi_x, \\ \Phi_{12}\alpha_1 + \Phi_{22}\alpha_2 + \Phi_{32}\alpha_3 = -\Psi_y, \\ \Phi_{13}\alpha_1 + \Phi_{23}\alpha_2 + \Phi_{33}\alpha_3 = -\Psi_z. \end{cases}$$

in cui, ricordiamo [§ prec.], è $\Phi_{ik} = \Phi_{ki}$.

§ 102. Tensore degli sforzi.

Dalle formule di Cauchy, (V, 12), essendo Φ_x, Φ_y, Φ_z le componenti di un vettore ed $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ quelle di un altro vettore \mathbf{n} , si vede [v. § 15] che le Φ_{ik} sono le componenti di un *tensore* [funzione del posto]: esso si chiama « *tensore degli sforzi* ». Per le (V, 19) esso è *simmetrico*, quindi [§ 16] ammette in ogni punto una terna di *assi principali* $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$: ciò significa che lo stato di sollecitazione del mezzo in un dato punto può essere rappresentato come la sovrapposizione di tre sforzi normali [di pressione o di trazione] $\Phi_{11}^0, \Phi_{22}^0, \Phi_{33}^0$, diretti secondo le tre direzioni principali del tensore nel punto considerato e non accompagnati da sforzi di taglio [*sforzi specifici principali*].

Le componenti degli sforzi specifici relative ad un altro sistema qualsiasi di assi ortogonali x, y, z , si ricavano dalle componenti principali, $\Phi_{11}^0, \Phi_{22}^0, \Phi_{33}^0$, mediante le formule (I, 51) che scriviamo qui esplicitamente

$$(V, 21) \quad \begin{cases} \Phi_{11} = \Phi_{11}^0 a_{11}^2 + \Phi_{22}^0 a_{21}^2 + \Phi_{33}^0 a_{31}^2, \\ \Phi_{22} = \Phi_{11}^0 a_{12}^2 + \Phi_{22}^0 a_{22}^2 + \Phi_{33}^0 a_{32}^2, \\ \Phi_{33} = \Phi_{11}^0 a_{13}^2 + \Phi_{22}^0 a_{23}^2 + \Phi_{33}^0 a_{33}^2, \\ \Phi_{23} = \Phi_{32} = \Phi_{11}^0 a_{12} a_{13} + \Phi_{22}^0 a_{22} a_{23} + \Phi_{33}^0 a_{32} a_{33}, \\ \Phi_{31} = \Phi_{13} = \Phi_{11}^0 a_{13} a_{11} + \Phi_{22}^0 a_{23} a_{21} + \Phi_{33}^0 a_{33} a_{31}, \\ \Phi_{12} = \Phi_{21} = \Phi_{11}^0 a_{11} a_{12} + \Phi_{22}^0 a_{21} a_{22} + \Phi_{33}^0 a_{31} a_{32}, \end{cases}$$

formule del tutto analoghe alle (V, 8) valide per le γ_{ik} .

Indicando poi con Φ l'invariante lineare [§ 16] del tensore degli sforzi, si ha

$$(V, 22) \quad \Phi = \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} = \Phi_{11}^0 + \Phi_{22}^0 + \Phi_{33}^0.$$

§ 103. Sforzi nei fluidi. Equazioni dell'idrostatica.

Le considerazioni svolte fin qui si applicano in generale ad ogni mezzo continuo; potremo in particolare applicarle ai fluidi [liquidi e gas]. Se si prescinde dalla viscosità [cioè se si considerano come fluidi « perfetti » ⁽¹⁾], essi sono caratterizzati dalla proprietà che lo sforzo $\Phi d\sigma$ su un elemento di superficie $d\sigma$ qualsiasi tracciato entro il fluido è sempre normale a $d\sigma$. In altre parole, in un fluido perfetto, non esistono sforzi di taglio: quindi rispetto a qualsiasi sistema di assi si ha

$$(V, 23) \quad \Phi_{23} = \Phi_{31} = \Phi_{12} = 0.$$

Ciò significa che qualunque sistema di assi è un sistema di assi principali per il tensore degli sforzi, e, se si ricorda [v. § 16] che gli assi principali sono gli assi della quadrica caratteristica del tensore, se ne deduce che tale quadrica è una sfera. Ma affinché l'equazione

$$\Phi_{11}\xi_1^2 + \Phi_{22}\xi_2^2 + \Phi_{33}\xi_3^2 = 1$$

rappresenti una sfera si deve avere

$$(V, 24) \quad \Phi_{11} = \Phi_{22} = \Phi_{33} :$$

dunque, in un fluido perfetto i tre sforzi principali, relativi ad un dato punto, sono uguali fra loro.

Un altro modo di dedurre le (V, 24) dalla validità delle (V, 23) per qualsiasi sistema di assi, è il seguente. Lo sforzo specifico su un elemento $d\sigma$ qualsiasi la cui normale abbia i coseni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ è dato, a norma delle (V, 12) e delle (V, 23), da

$$(V, 24') \quad \Phi_x = \Phi_{11}\alpha_1, \quad \Phi_y = \Phi_{22}\alpha_2, \quad \Phi_z = \Phi_{33}\alpha_3.$$

Ma affinché tale sforzo risulti normale a $d\sigma$, le sue componenti devono essere proporzionali ad $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ossia devono valere le (V, 24).

Dalle (V, 24) si deduce l'importantissimo « principio di Pascal »: in un fluido, la grandezza Φ_n dello sforzo specifico [normale] su $d\sigma$ è indipendente dalla orientazione di $d\sigma$. Per vederlo basta osservare che è

$$\Phi_n = \Phi_x\alpha_1 + \Phi_y\alpha_2 + \Phi_z\alpha_3$$

⁽¹⁾ Si può aggiungere che i fluidi reali, anche viscosi, si comportano come perfetti quando sono in equilibrio, poichè la viscosità si manifesta solo nel movimento.

e che, per le (V, 24'), se indichiamo con P il valore comune di $\Phi_{11}, \Phi_{22}, \Phi_{33}$, si ha

$$\Phi_n = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)P = P.$$

La P si chiama « pressione » ed è, in generale, funzione del posto.

Le (V, 15) applicate al caso di un fluido, tenendo conto delle relazioni precedenti, ci danno le equazioni fondamentali dell'idrostatica

$$(V, 25) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \rho F_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho F_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho F_z$$

a cui possiamo dare la forma vettoriale, più concisa,

$$(V, 25') \quad \text{grad } P = \rho F.$$

Esse ci dicono, in particolare, che se mancano le forze di massa la pressione è la stessa in tutti i punti.

LE COSTANTI ELASTICHE

§ 104. Relazioni fra deformazioni e sforzi interni nei corpi elastici (legge di Hooke).

Il legame esistente fra deformazioni e sforzi dipende dalla natura del corpo elastico che si considera e quindi deve essere dato dall'esperienza. Tuttavia si può prevedere, in base a pure considerazioni teoriche e fondandosi su plausibili postulati, quale forma avranno, in prima approssimazione, le leggi che stabiliscono questo legame.

Il più naturale postulato che si possa ammettere è che le γ_{ik} siano funzioni analitiche delle Φ_{ik} e che sviluppandole in serie, per piccole deformazioni, ci si possa limitare ai termini lineari. Se poi supponiamo che nello stato naturale del corpo [in cui le γ_{ik} sono nulle] gli sforzi interni siano nulli ⁽¹⁾, le γ_{ik} saranno anche funzioni omogenee delle Φ_{ik} . Potremo quindi ammettere la seguente legge di Hooke:

⁽¹⁾ In certi casi questa condizione non è verificata. Può avvenire infatti che vi siano degli sforzi interni anche in un corpo non soggetto a forze esterne [es. vetro temprato]: in tal caso può convenire assumere come « stato naturale » quello in cui sono nulle le forze applicate [e non gli sforzi interni]. Inoltre, in altri casi (p. es., se si tratta di fluidi) può convenire assumere come « stato naturale » uno stato in cui tanto le forze applicate che gli sforzi interni non sono nulli [v. § 106]. In tutti questi casi si possono applicare le formule che diamo sopra, purchè si intendano per Φ_{ik} le differenze fra gli sforzi specifici nello stato che si considera e quelli nello « stato naturale ». È evidente, per la legge di Hooke, che le γ_{ik} sono funzioni lineari omogenee di tali differenze.

le componenti di deformazione sono funzioni lineari ed omogenee delle componenti degli sforzi specifici.

Tale legge rende conto dei risultati sperimentali per deformazioni che non superano un certo limite [limite di proporzionalità]: noi considereremo sempre deformazioni comprese in questo limite.

Per scrivere le espressioni delle sei γ_{ik} come funzioni lineari omogenee delle sei Φ_{ik} occorrono 36 coefficienti, caratteristici della sostanza che si studia: vedremo però che nei corpi isotropi (§ 60, nota 1) [ed in ciò che segue ci riferiremo sempre a corpi isotropi] essi si possono esprimere in funzione di due soli coefficienti indipendenti (1). Anzi, come ora mostreremo, si possono ottenere direttamente le relazioni lineari così semplificate analizzando pochi casi, particolarmente semplici, di sollecitazione elastica.

Il tipo fondamentale di sollecitazione elastica è quello di pura compressione [o trazione] longitudinale e uniforme cioè, ad es., $\Phi_{11} \neq 0$ e costante, $\Phi_{22} = \Phi_{33} = \Phi_{23} = \Phi_{31} = \Phi_{12} = 0$. Per studiarlo pensiamo ad un prisma o cilindretto [retto] con l'asse parallelo all'asse x , e cerchiamo a quali forze dobbiamo sottoporlo perchè nell'interno di esso siano realizzate le dette condizioni [con $\Phi_{11} > 0$, per es.]. Le (V, 15) ci dicono che devono esser nulle le forze di massa e le (V, 20) ci dicono che bisogna applicare alle due basi del cilindro delle pressioni uniformemente distribuite, lasciando libere da forze le superfici laterali. Ora, l'esperienza

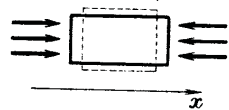


Fig. 99.

ci dice che il cilindretto si contrae [come è intuitivo] nella direzione dell'asse x ed, in generale, si dilata nelle direzioni ad esso normali [v. fig. 99], cioè che, in queste condizioni, $\gamma_{11} < 0$, $\gamma_{22} > 0$, $\gamma_{33} > 0$ e $\gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{12} = 0$. Inoltre, essendo tutto simmetrico rispetto all'asse x , dovrà essere $\gamma_{22} = \gamma_{33}$. Tutto questo,

per la legge di Hooke, deve esprimersi con relazioni lineari omogenee fra le γ_{ik} e le Φ_{ik} che, essendovi soltanto $\Phi_{11} \neq 0$, si riducono a semplici relazioni di proporzionalità fra γ_{11} , γ_{22} , γ_{33} e la Φ_{11} . Si avrà quindi, anzitutto,

$$(V, 26) \quad \gamma_{11} = -\frac{1}{E} \Phi_{11},$$

dove E è un coefficiente positivo caratteristico della sostanza, detto *modulo di elasticità* o di *Young*. Inoltre, si avrà $\gamma_{22} = \gamma_{33} = \text{cost.} \cdot \Phi_{11}$.

(1) Anche per i corpi anisotropi (cristalli) i 36 coefficienti non sono tutti indipendenti tra loro: essi si riducono, nel caso più generale, a 21 indipendenti.

$\gamma_{22} = \gamma_{33} = \nu \frac{1}{E} \Phi_{11}$
 $\nu = \frac{\gamma_{22}}{\Phi_{11}} = \frac{\gamma_{33}}{\Phi_{11}}$

relazioni che scriveremo sotto la forma seguente

$$(V, 27) \quad \gamma_{22} = \gamma_{33} = \frac{\nu}{E} \Phi_{11}$$

[equivalente, per la (V, 26), a porre $\gamma_{22} = \gamma_{33} = -\nu \gamma_{11}$], introducendo così una seconda costante, ν , caratteristica della sostanza ed esprimendo il rapporto tra la dilatazione trasversale e il simultaneo accorciamento longitudinale: tale costante si chiama *modulo* (o *coefficiente*) di *Poisson*. Poichè queste formule, unitamente alle

$$\gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{12} = 0,$$

esprimono la legge di Hooke, esse valgono anche per $\Phi_{11} < 0$ [trazione] nel qual caso, naturalmente, si ha allungamento longitudinale accompagnato da contrazione trasversale.

Le due costanti E e ν definiscono completamente le proprietà elastiche del corpo isotropo [entro il «limite di proporzionalità»]. Difatti, come ora mostreremo, gli sforzi, anche nel caso più generale, si possono ricondurre a sovrapposizione di sforzi di pura compressione [o trazione] come quello che abbiamo considerato ora, e, in virtù della legge di Hooke, le deformazioni si possono calcolare come somma delle deformazioni che sarebbero prodotte dai singoli sforzi che si sovrappongono.

Cominceremo col considerare il caso di un parallelepipedo soggetto a sforzi di compressione [o trazione] su tutte e tre le coppie di facce, che assumeremo parallele ai piani coordinati, e quindi supponiamo sia $\Phi_{11} \neq 0$, $\Phi_{22} \neq 0$, $\Phi_{33} \neq 0$ e $\Phi_{23} = \Phi_{31} = \Phi_{12} = 0$. Lo sforzo Φ_{11} da solo darebbe, come si è visto, la deformazione espressa da

$$\gamma_{11}' = -\frac{1}{E} \Phi_{11}, \quad \gamma_{22}' = \frac{\nu}{E} \Phi_{11}, \quad \gamma_{33}' = \frac{\nu}{E} \Phi_{11},$$

lo sforzo Φ_{22} da solo darebbe [come si vede dalle formule precedenti, scambiando l'asse x coll'asse y]

$$\gamma_{11}'' = \frac{\nu}{E} \Phi_{22}, \quad \gamma_{22}'' = -\frac{1}{E} \Phi_{22}, \quad \gamma_{33}'' = \frac{\nu}{E} \Phi_{22},$$

e, similmente, per Φ_{33} si avrebbe

$$\gamma_{11}''' = \frac{\nu}{E} \Phi_{33}, \quad \gamma_{22}''' = \frac{\nu}{E} \Phi_{33}, \quad \gamma_{33}''' = -\frac{1}{E} \Phi_{33};$$

gli scorrimenti sono, in tutti e tre i casi, nulli. Sommando si ha, come deformazione dovuta a tutti e tre gli sforzi [introducendo l'invariante

degli sforzi, Φ , (V, 22)]

$$(V, 28) \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \frac{-\Phi_{11} + \kappa(\Phi_{22} + \Phi_{33})}{E} = \frac{\kappa\Phi - (1 + \kappa)\Phi_{11}}{E}, \\ \gamma_{22} = \frac{\kappa\Phi - (1 + \kappa)\Phi_{22}}{E}, \\ \gamma_{33} = \frac{\kappa\Phi - (1 + \kappa)\Phi_{33}}{E}, \\ \gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{12} = 0. \end{cases}$$

Passiamo, ora, al caso generale.

Per avere le formule che legano le γ_{ik} alle Φ_{ik} in un punto generico P nel caso di sforzi *qualsiasi* possiamo valerci dello studio precedente, riferendoci agli assi principali, $\xi_1^o, \xi_2^o, \xi_3^o$, del tensore degli sforzi relativo a P . Consideriamo attorno a P (fig. 100) un parallele-

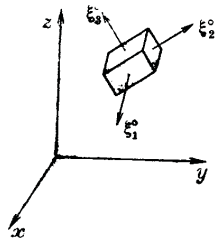


Fig. 100.

pipedo cogli spigoli paralleli a $\xi_1^o, \xi_2^o, \xi_3^o$ ed abbastanza piccolo per poter considerare, entro esso, gli sforzi come uniformi ed eguali al valore che hanno in P . Riferendoci a tali assi, in base a quanto si è visto al § 102, gli sforzi di taglio sono nulli e quindi possiamo pensarci ancora nelle condizioni del caso precedente: le formule che legano le componenti di deformazione alle componenti degli sforzi sono, perciò, ancora le (V, 28) quando alle $\gamma_{ik}, \Phi_{ik}, \Phi$ si sostituiscono le $\gamma_{ik}^o, \Phi_{ik}^o, \Phi^o$ relative agli assi principali ξ_i^o . Però gli assi ξ_i^o variano di direzione,

in generale, da punto a punto, mentre è necessario potersi riferire ad un unico sistema di assi x, y, z . Per ottenere questo possiamo servirci delle (V, 8) e (V, 21), dove a_{ik} [variabili da punto a punto] sono i coseni direttori degli assi principali. Avremo così, per es., [ricordando che, per la (V, 22), è $\Phi^o = \Phi$]

$$\gamma_{11} = \gamma_{11}^o a_{11}^2 + \gamma_{22}^o a_{21}^2 + \gamma_{33}^o a_{31}^2 = \frac{1}{E} [\kappa\Phi^o(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) - (1 + \kappa)(\Phi_{11}^o a_{11}^2 + \Phi_{22}^o a_{21}^2 + \Phi_{33}^o a_{31}^2)] = \frac{\kappa\Phi - (1 + \kappa)\Phi_{11}}{E};$$

otteniamo dunque

$$(V, 29) \quad \begin{cases} \gamma_{11} = \frac{\kappa\Phi - (1 + \kappa)\Phi_{11}}{E}, \\ \gamma_{22} = \frac{\kappa\Phi - (1 + \kappa)\Phi_{22}}{E}, \\ \gamma_{33} = \frac{\kappa\Phi - (1 + \kappa)\Phi_{33}}{E}, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{23} = \gamma_{32} = -\frac{(1 + \kappa)}{E}\Phi_{23}, \\ \gamma_{31} = \gamma_{13} = -\frac{(1 + \kappa)}{E}\Phi_{31}, \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = -\frac{(1 + \kappa)}{E}\Phi_{12}. \end{cases}$$

Queste sono le formule cercate, che esprimono la legge di Hooke per i corpi isotropi. [Si può, su di esse, osservare che gli sforzi di taglio influiscono solo sui coefficienti di scorrimento].

È facile per mezzo delle (V, 29) esprimere la dilatazione cubica γ [§ 96] colle componenti degli sforzi: infatti si ha da esse

$$(V, 30) \quad \gamma = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = \frac{3\kappa\Phi - (1 + \kappa)\Phi}{E} = \frac{2\kappa - 1}{E}\Phi,$$

cioè «la dilatazione cubica è proporzionale all'invariante degli sforzi». Caso particolarmente interessante è quello della *compressione uniforme*, cioè

$$\Phi_{11} = \Phi_{22} = \Phi_{33} = P, \quad \Phi_{23} = \Phi_{31} = \Phi_{12} = 0.$$

Esso si può realizzare in un corpo di forma qualsiasi, immergendolo in un fluido a pressione uniforme P [trascurando il peso]. In tal caso è $\Phi = 3P$ e la (V, 30) diviene

$$(V, 30') \quad \gamma = -\alpha P,$$

dove si è posto

$$\alpha = \frac{3(1 - 2\kappa)}{E}$$

[costante che chiamasi *compressibilità*]. Si è messo in evidenza il segno - perchè, come è intuitivo, a $P > 0$ corrisponde una diminuzione di volume, e quindi $\alpha > 0$.

Si hanno, poi, facilmente dalle (V, 29) le formule che, inversamente, ci danno le Φ_{ik} in funzione delle γ_{ik} : infatti dalla (V, 30) si ha

$$\Phi = \frac{E}{2\kappa - 1}\gamma$$

e, con essa, le (V, 29) ci danno

$$\begin{cases} \Phi_{11} = \frac{\kappa E}{(1 + \kappa)(2\kappa - 1)}\gamma - \frac{E}{1 + \kappa}\gamma_{11}, & \text{ed analoghe,} \\ \Phi_{12} = \Phi_{21} = -\frac{E}{(1 + \kappa)}\gamma_{12}, & \text{" " " } \end{cases}$$

che, introducendo le costanti [dette di Lamé]

$$(V, 31) \quad \lambda = \frac{\kappa E}{(1 + \kappa)(1 - 2\kappa)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \kappa)},$$

si possono scrivere sotto la forma più usata

$$(V, 32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{11} = -\lambda\gamma - 2\mu\gamma_{11}, \\ \Phi_{22} = -\lambda\gamma - 2\mu\gamma_{22}, \\ \Phi_{33} = -\lambda\gamma - 2\mu\gamma_{33}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{23} = \Phi_{32} = -2\mu\gamma_{23}, \\ \Phi_{31} = \Phi_{13} = -2\mu\gamma_{31}, \\ \Phi_{12} = \Phi_{21} = -2\mu\gamma_{12}. \end{array} \right.$$

§ 105. Limiti per il modulo di Poisson.

Supponiamo di avere un piccolo parallelepipedo cogli spigoli paralleli agli assi coordinati ed in equilibrio, in assenza di forze di massa, sotto lo sforzo di taglio definito da

$$\Phi_{23} > 0, \quad \Phi_{11} = \Phi_{22} = \Phi_{33} = \Phi_{12} = \Phi_{13} = 0.$$

Le equazioni fondamentali dell'equilibrio (V, 15) ci danno subito che Φ_{23} [= Φ_{32}] deve essere lo stesso in ogni punto e quindi anche in

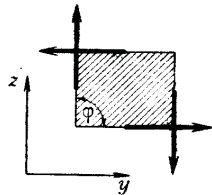


Fig. 101.

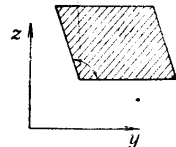


Fig. 102.

superficie: dunque, come si ricava dalle (V, 20), il parallelepipedo dovrà essere soggetto, sulle quattro facce parallele all'asse x , a forze superficiali tangenziali agenti come mostra [in sezione] la figura 101.

È intuitivo che un blocchetto di qualsiasi sostanza, sollecitato in tal modo, si deforma nel modo indicato [in sezione] dalla fig. 102, da cui si vede che l'angolo $\varphi = \gamma z$ subisce un incremento $\delta\varphi$ positivo, quindi è [cfr. § 95]

$$\gamma_{23} < 0.$$

Si ottiene, così, che a sforzi di taglio *positivi* corrispondono coefficienti di scorrimento *negativi* e quindi dalle (V, 32) si deduce ⁽¹⁾

$$\mu > 0.$$

⁽¹⁾ Osserviamo che, se μ è molto grande, sforzi di taglio notevoli producono deformazioni piccole: quindi μ ci dice in che modo il corpo resiste a sforzi di taglio e per questo prende il nome di *modulo di rigidità*.

Dall'espressione (V, 31) di μ , essendo E sempre positivo segue, allora, una prima limitazione per α , e precisamente

$$\alpha > -1.$$

In pratica si trova sempre $\alpha > 0$.

Un'altra limitazione si ha osservando che un corpo uniformemente compresso *diminuisce* di volume e quindi la « compressibilità » $\alpha = -3(1-2\alpha)/E$ [v. § prec.] è sempre positiva: ne segue ⁽²⁾

$$\alpha < \frac{1}{2}.$$

Le misure del modulo di Poisson hanno dato, difatti, sempre valori compresi fra 0 e 0,5: per la maggior parte dei metalli è $\alpha \approx 0,3$. Casi estremi sono il sughero che ha $\alpha \approx 0$ ed il caucciù che ha $\alpha \approx 0,5$ e quindi la compressibilità α quasi nulla ⁽³⁾.

§ 106. I fluidi come corpi elastici.

Nel caso di fluidi [per i quali, come si è visto al § 103, $\Phi_{11} = -\Phi_{22} = \Phi_{33} = P$, $\Phi_{23} = \Phi_{31} = \Phi_{12} = 0$] la legge di Hooke non può avere altro significato se non che P è una funzione lineare delle γ_{ik} . Ma per determinarne i coefficienti in funzione delle costanti elastiche caratteristiche della sostanza non si possono applicare senz'altro i ragionamenti del § 104, poichè il tipo fondamentale di sollecitazione colà introdotto [pressione lungo l'asse x] non si può applicare ad un fluido. Basterà invece osservare che la proprietà fondamentale che caratterizza i fluidi dal punto di vista elastico è che non si richiede alcuno sforzo per cambiarne la forma, purchè non si alteri il volume. Da ciò segue, che nella formula che lega P alle γ_{ik} queste dovranno entrare soltanto attraverso la loro combinazione $\gamma = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}$, che rappresenta [v. § 96] il coefficiente di dilatazione cubica: tale formula sarà dunque del tipo

$$(V, 33) \quad P = -\frac{1}{\alpha}\gamma + P_0,$$

dove P_0 è la pressione nello stato dal quale si contano le deformazioni ⁽⁴⁾, e α è un coefficiente positivo che caratterizza il fluido dal

⁽²⁾ Si noti che il ragionamento vale solo per corpi isotropi, e difatti si conoscono dei corpi non isotropi per cui è $\alpha > 0,5$ [per es., il filo di seta].

⁽³⁾ Ciò vale, naturalmente, entro i limiti di validità della legge di Hooke, mentre le deformazioni elastiche di cui è capace il caucciù superano ampiamente tali limiti.

⁽⁴⁾ Nel caso dei gas, lo stato di pressione nulla corrisponderebbe a un gas infinitamente rarefatto: conviene dunque contare le deformazioni a partire da uno stato in cui la pressione ha un valore P_0 , non nullo, ben determinato [per es., un'atmosfera] [cfr. nota 1. § 104].

punto di vista elastico. Se si pone $p = P - P_0$ [cioè se si chiama p l'eccesso di pressione sullo stato naturale] la precedente formula si scrive ⁽²⁾

$$(V, 34) \quad p = -\frac{1}{\alpha} \gamma,$$

ovvero

$$(V, 34') \quad \gamma = -\alpha p.$$

Confrontandola con la (V, 30') si vede che α ha il significato di « compressibilità » del fluido [per pressioni prossime a P_0]. Tale costante si può ricavare quando si conosce l'« equazione di stato » del fluido [cioè la relazione tra P , il volume V e la temperatura T] e quando sono precisate le condizioni termiche in cui avviene la deformazione [per es. condizioni isoterme, o adiabatiche]: in tal caso infatti l'equazione di stato fornisce una relazione

$$(V, 35) \quad P = f(V).$$

Ora, se il volume occupato dal fluido alla pressione P_0 è V_0 , e quello occupato alla pressione $P = P_0 + p$ è [v. § 96] $V = V_0(1 + \gamma)$ [con $\gamma \ll 1$], dovrà aversi

$$P_0 = f(V_0), \quad P_0 + p = f(V_0 + V_0\gamma)$$

e quindi, sviluppando la seconda con la serie di Taylor e trascurando le potenze di γ superiori alla prima,

$$p = \left(\frac{df}{dV} \right)_{V=V_0} V_0 \gamma.$$

Confrontando con la (V, 34) si ha

$$(V, 36) \quad \frac{1}{\alpha} = - \left(\frac{df}{dV} \right)_{V=V_0}.$$

Esempi.

1. - *Gas perfetto in condizioni adiabatiche.* La (V, 35) è in tal caso

$$P = CV^{-k}$$

⁽²⁾ Si può osservare che se nelle formule (V, 32), che esprimono la legge di Hooke per i solidi, si pone $\mu = 0$, si ottiene

$$\phi_{11} = \phi_{22} = \phi_{33} = -2\gamma, \quad \phi_{23} = \phi_{31} = \phi_{12} = 0.$$

vale a dire, si ottengono le relazioni che caratterizzano gli sforzi nei fluidi, e la costante di Lamé λ viene a identificarsi con $1/\alpha$. Si possono dunque considerare i fluidi, almeno formalmente, come casi limiti di solidi, nei quali il modulo di rigidità, μ , è nullo (in conformità con la loro proprietà caratteristica di non ammettere sforzi di taglio).

[con $C = \text{cost.}$] dove $k = c_p/c_v$ è il rapporto dei calori specifici a pressione costante ed a volume costante [$k \sim 1,66$ per i gas monoatomici, $k \sim 1,4$ per l'aria e per i gas biatomici]. Si trova, con la (V, 36),

$$\frac{1}{\alpha} = CkV_0^{-k} = kP_0.$$

2. - *Gas perfetto in condizioni isoterme.* La (V, 35) è data dalla legge di Boyle

$$P = CV^{-1}$$

e quindi si può far rientrare nel caso precedente con $k = 1$. Si trova dunque

$$\frac{1}{\alpha} = P_0.$$

3. - *Liquidi.*

Per i liquidi la costante α si determina misurando col « piezometro » la compressibilità [di solito in condizioni isoterme, ma per i liquidi la compressione adiabatica non differisce molto da questa]. Si trova che α è, entro certi limiti, indipendente dalla pressione, diversa per i diversi liquidi e molto più piccola che per i gas. [Ad es. per l'acqua, a 15°, $\alpha = 4,8 \cdot 10^{-11}$ unità C.G.S.].

I PROBLEMI DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

§ 107. Equazioni differenziali dell'equilibrio (per gli spostamenti).

Le (V, 32) esprimono, come si è visto, le proprietà elastiche del corpo, cioè ci dicono come il corpo reagisce alle deformazioni. Da esse, sostituendo nelle (V, 15) e nelle (V, 20), è facile ottenere le equazioni differenziali e le equazioni al contorno che, in condizioni di equilibrio, legano le deformazioni alle forze agenti.

Con facili passaggi dalle (V, 15) si ottiene così

$$(V, 37) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \mu \Delta s_1 + \rho F_x = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \mu \Delta s_2 + \rho F_y = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \mu \Delta s_3 + \rho F_z = 0. \end{cases}$$

che costituiscono le « equazioni differenziali dell'equilibrio » [per gli spostamenti]. Ad esse si può dare una forma più concisa, vettoriale, intro-

ducendo la notazione $(1) \Delta \mathbf{s} \equiv (\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3)$ e ricordando che $\gamma = \text{div } \mathbf{s}$: si ha allora

$$(V. 38) \quad (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{s} + \mu \Delta \mathbf{s} + \rho \mathbf{F} = 0$$

Di qui, prendendo la div dei due membri, si ricava subito un'equazione per la sola γ : si ha infatti

$$(V. 39) \quad (\lambda + 2\mu)\Delta\gamma + \text{div}(\rho\mathbf{F}) = 0$$

da cui si vede che *in assenza di forze di massa la dilatazione cubica γ è una funzione armonica* [e quindi, nella stessa ipotesi, per le (V, 37), s_1, s_2, s_3 sono funzioni biarmoniche, cioè tali che $\Delta\Delta s_i = 0$, etc.].

Dalle (V, 20), poi, sempre colle (V, 32), si ottengono le equazioni al contorno [per gli spostamenti]

$$(V. 40) \quad \begin{cases} (\lambda\gamma + 2\mu\gamma_{11})\alpha_1 + 2\mu\gamma_{12}\alpha_2 + 2\mu\gamma_{13}\alpha_3 = \Psi_x, \\ 2\mu\gamma_{12}\alpha_1 + (\lambda\gamma + 2\mu\gamma_{22})\alpha_2 + 2\mu\gamma_{23}\alpha_3 = \Psi_y, \\ 2\mu\gamma_{13}\alpha_1 + 2\mu\gamma_{23}\alpha_2 + (\lambda\gamma + 2\mu\gamma_{33})\alpha_3 = \Psi_z. \end{cases}$$

§ 108. Generalità sui problemi di equilibrio elastico.

Accenneremo brevemente ai più importanti tipi di problemi di equilibrio elastico.

Un primo tipo di problema è quello di *cercare la deformazione subita da un corpo soggetto a forze di massa e di superficie* (2) *assegnate punto per punto.*

I dati non sono indipendenti ma devono soddisfare le condizioni necessarie per l'equilibrio dei sistemi: *Risultante* $= 0$, *Momento risultante* $= 0$ [§ 98]. Supposto ciò, come è intuitivo dal lato fisico e come si potrebbe dimostrare rigorosamente dal lato analitico, le (V, 15) e (V, 20) permettono di determinare univocamente gli sforzi in ogni punto, e quindi [per le (V, 29)] le componenti di deformazione γ_{ik} . Da queste si possono poi ricavare [ricordando le (V, 2)] gli spostamenti *a meno* di uno spostamento rigido.

Un altro tipo di problema è quello di *determinare la deformazione di un corpo quando sono assegnate le forze di massa in ogni punto ed [invece delle forze superficiali] gli spostamenti superficiali.*

(1) Facciamo cioè la convenzione che l'operatore Δ , applicato ad un vettore Φ , dia il vettore di componenti $\Delta\Phi_x, \Delta\Phi_y, \Delta\Phi_z$. Dalle (I, 6) segue immediatamente che il vettore così ottenuto è indipendente dagli assi.

(2) Nella maggior parte dei casi pratici, la sola forza di massa che interviene è il peso, che ha spesso un effetto secondario rispetto alle forze applicate in superficie. Del resto, vi è un metodo generale (che per brevità omettiamo) per ricondurre ogni problema di equilibrio elastico con date forze di massa ad uno con forze di massa nulle.

In questo caso si dimostra [ed è, del resto, intuitivo] che, anche per spostamenti in superficie del tutto arbitrari, sono univocamente determinati non solo gli sforzi e le deformazioni in ogni punto, ma anche gli spostamenti.

Si possono poi avere problemi *misti*, in cui su una parte del contorno sono assegnati gli spostamenti e sull'altra le forze superficiali.

Nella maggior parte dei casi non è possibile risolvere questi problemi per via diretta, cioè trovando l'integrale generale delle equazioni differenziali e poi determinando le funzioni arbitrarie che esso contiene per mezzo delle condizioni al contorno. Si deve, invece, per lo più ricorrere al *metodo inverso* [cioè partire da deformazioni date a priori e calcolare le forze necessarie a produrle] oppure al *metodo semi-inverso*, che è quello di cercare per tentativi [prendendo a guida le condizioni al contorno] un tipo di deformazione che soddisfi una parte delle condizioni volute e che contenga alcune funzioni o alcuni parametri indeterminati, e poi determinare, se possibile, queste funzioni o questi parametri in modo da soddisfare le rimanenti condizioni. I teoremi di unicITÀ a cui abbiamo accennato sopra assicurano poi che la soluzione, comunque trovata, è l'unica soluzione possibile.

Mostreremo ora qualcuno dei casi più semplici di applicazione di questi metodi.

§ 109. Torsione uniforme di una sbarra cilindrica.

Consideriamo una sbarra cilindrica [cioè un cilindro circolare retto] di raggio R e lunghezza l , di cui una delle basi viene tenuta fissa, mentre l'altra è ruotata di un angolo θ_0 intorno all'asse del cilindro: ammettiamo non vi siano forze di massa, nè forze superficiali sulla superficie laterale.

È questo un problema del tipo *misto*, poichè sono assegnati gli spostamenti delle due basi e le forze [nulle] sulla superficie laterale. Lo risolveremo *col metodo semi-inverso* cercando, se è possibile, di soddisfare tutte le condizioni con una deformazione di pura torsione, vale a dire consistente in una rotazione di ciascuna sezione intorno all'asse del cilindro [che assumiamo come asse z] di un angolo $\theta(z)$, funzione di z che ci riserviamo di determinare.

Se la base fissa del cilindro corrisponde a $z = 0$ e l'altra a $z = l$ dovrà essere

$$(V. 41) \quad \theta(0) = 0, \quad \theta(l) = \theta_0.$$

Inoltre, la condizione alla superficie laterale è, per le (V, 20), notando che i coseni direttori della normale sono $\alpha_1 = x/R, \alpha_2 = y/R, \alpha_3 = 0$,

$$(V. 42) \quad \begin{cases} \Phi_{11}x + \Phi_{21}y = 0, \\ \Phi_{12}x + \Phi_{22}y = 0, \\ \Phi_{13}x + \Phi_{23}y = 0. \end{cases} \quad (x^2 + y^2 = R^2).$$

Determiniamo gli spostamenti, e quindi le componenti di deformazione, lasciando ancora indeterminata la funzione $\theta(z)$. In una sezione generica, la rotazione infinitesima θ produce nel punto $P(x, y)$ uno spostamento di ampiezza $r\theta$ [se $r = OP$] perpendicolare ad OP : le sue componenti sono, come si vede facilmente dalla fig. 103,

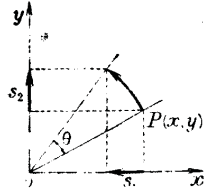


Fig. 103.

$$(V. 43) \quad s_1 = -\theta y, \quad s_2 = \theta x, \quad s_3 = 0.$$

Di qui, con le (V. 2), ponendo $\theta' = d\theta/dz$, si ricava

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{33} &= 0, \\ \gamma_{23} = \frac{1}{2}\theta'x, \quad \gamma_{31} &= -\frac{1}{2}\theta'y, \quad \gamma_{12} = 0. \end{aligned}$$

[Dalle formule della prima riga si vede che in una pura torsione la dilatazione cubica, γ , è nulla]. Passando dalle deformazioni agli sforzi mediante le (V. 32) avremo

$$(V. 44) \quad \left. \begin{aligned} \Phi_{11} = \Phi_{22} = \Phi_{33} &= 0, \\ \Phi_{23} = -\mu\theta'x, \quad \Phi_{31} &= \mu\theta'y, \quad \Phi_{12} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Si verifica, intanto, che le condizioni (V. 42) sono soddisfatte qualunque sia θ' . Le equazioni differenziali (V. 15) si riducono: a $\theta'' = 0$ le prime due, e ad una identità la terza; ne segue che θ è una funzione lineare di z e precisamente, tenuto conto delle (V. 41),

$$(V. 45) \quad \theta = \frac{z}{l} \theta_0.$$

Una torsione cosiffatta si dice *uniforme*: le rette parallele all'asse del cilindro si trasformano in eliche.

La deformazione è così perfettamente individuata. È interessante ora calcolare quali forze si devono applicare alle basi per ottenere la detta torsione. Consideriamo, per es., la base $z = l$, ed applichiamo le (V. 20) notando che la normale [esterna] alla base ha per coseni $(0, 0, 1)$: avremo che la forza Ψ applicata sull'unità di superficie è data da

$$\Psi_x = -\Phi_{31} = -\mu\theta'y, \quad \Psi_y = -\Phi_{32} = \mu\theta'x, \quad \Psi_z = -\Phi_{33} = 0,$$

e, per la (V. 45),

$$\Psi_x = -\mu \frac{\theta_0}{l} y, \quad \Psi_y = \mu \frac{\theta_0}{l} x, \quad \Psi_z = 0.$$

Notando che sulla base in questione è $\theta = \theta_0$, le Ψ si possono esprimere cogli spostamenti (V. 43) così:

$$\Psi_x = \frac{\mu}{l} s_1, \quad \Psi_y = \frac{\mu}{l} s_2, \quad \Psi_z = 0,$$

ossia è

$$\Psi = \frac{\mu}{l} \mathbf{s}.$$

La forza da applicare in ogni punto della base è dunque *tangenziale* e proporzionale [in grandezza e direzione] allo spostamento di quel punto.

Ha interesse pratico il *momento delle forze applicate alla base*, che è evidentemente diretto secondo l'asse z ed ha per grandezza

$$M = \int (x\Psi_y - y\Psi_x) d\sigma = \frac{\mu\theta_0}{l} \int (x^2 + y^2) d\sigma.$$

L'ultimo integrale non è che il « momento d'inerzia » ⁽¹⁾ del cerchio base rispetto all'asse e vale $\pi R^4/2$; quindi

$$M = \frac{\pi}{2} \frac{\mu R^4}{l} \theta_0.$$

formula che contiene le cosiddette *leggi della elasticità di torsione*.

Per l'altra base si troverebbero naturalmente forze e momento opposti.

§ 110. Flessione uniforme di un trave.

Chiameremo « *trave* » un prisma [o un cilindro] retto, lungo rispetto alle sue dimensioni trasversali, a sezione qualsiasi che supporremo fornita di un piano

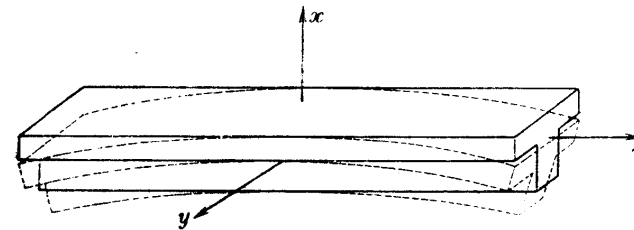


Fig. 104.

di simmetria. Chiamasi « *asse del trave* » la retta su cui giacciono [nello stato non deformato] i baricentri delle sue sezioni normali, e lo assumeremo come asse z : prenderemo poi l'asse x nel piano di simmetria [v. fig. 104 che rappresenta un trave a Γ]. Vogliamo studiare un tipo particolarmente semplice di deformazione che chiamasi « *flessione uniforme* » e che è così caratterizzato:

⁽¹⁾ Ricordiamo che per « momento d'inerzia » di un'area piana rispetto a una retta si intende il momento d'inerzia che avrebbe rispetto a quella retta una lamiera di densità superficiale 1, avente la forma dell'area data.

a) l'asse si incurva restando nel piano (x, z) [piano di flessione], e le sezioni normali si conservano piane e normali all'asse incurvato;

b) gli sforzi interni sono tutti nulli tranne Φ_{33} ossia

$$(V, 46) \quad \Phi_{11} = \Phi_{22} = \Phi_{23} = \Phi_{31} = \Phi_{12} = 0,$$

il che significa che ogni « fibra » [cilindro infinitamente sottile parallelo all'asse] è soggetta solo ad una trazione o compressione nel senso longitudinale, ma non esercita alcuno sforzo sulle fibre contigue;

c) la pressione [o trazione] totale su ogni sezione normale, σ , è nulla, vale a dire

$$(V, 47) \quad \int_{\sigma} \Phi_{33} d\sigma = 0,$$

il che vuol dire che complessivamente il trave non è soggetto a trazione o compressione longitudinale.

Ricerchiamo se una deformazione siffatta è possibile e quali forze occorre applicare in superficie per produrla [considerando, come al solito, nulle le forze di massa].

• Sostituiamo anzitutto le (V, 46) nelle equazioni differenziali dell'equilibrio (V, 15) [con $\mathbf{F} = 0$]: vediamo che le prime due sono identicamente soddisfatte, e la terza si riduce a

$$\frac{\partial \Phi_{33}}{\partial z} = 0$$

ed è quindi soddisfatta se si prende Φ_{33} indipendente da z . Calcoliamo ora le componenti di deformazione mediante le (V, 29), notando che $\Phi = \Phi_{33}$; troviamo

$$(V, 48) \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{11} = \gamma_{22} &= \frac{z}{E} \Phi_{33}, \\ \gamma_{33} &= -\frac{1}{E} \Phi_{33}, \\ \gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{12} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Tutti gli elementi sono così espressi mediante l'unica funzione incognita $\Phi_{33}(x, y)$: determiniamola tenendo conto della condizione a). A tale scopo, consideriamo le sezioni normali in due punti P, Q dell'asse, infinitamente vicini, a distanza l_0 : dopo la deformazione (v. fig. 105) esse non sono più parallele, ma formano un angolo [infinitesimo] φ , ed i loro piani si tagliano in una retta di cui indicheremo con C l'intersezione

col piano (x, z) . C sarà dunque il centro di curvatura dell'asse relativo al punto P , ed il raggio di curvatura dell'asse in P sarà $CP = R$. Un tratto di fibra, come MN , compreso fra le due sezioni, che originariamente aveva la

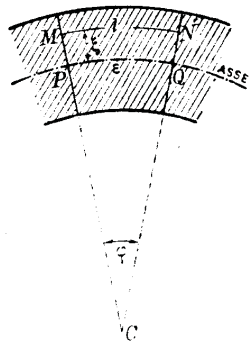


Fig. 105.

lunghezza l_0 , detta ε la nuova lunghezza del tratto PQ di asse, ha ora una lunghezza

$$l = MN = (R + \xi)\varphi = \varepsilon + \varphi\xi,$$

dove ξ è la distanza [con segno] di M dal piano normale a PC in P . La sua dilatazione lineare è dunque

$$(V, 49) \quad \gamma_{33} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\varepsilon - l_0 + \varphi\xi}{l_0}.$$

Ora, essendo [per la seconda delle (V, 48)] Φ_{33} proporzionale a γ_{33} , la (V, 47) può anche scriversi

$$\int_{\sigma} \gamma_{33} d\sigma = 0,$$

ossia, per la (V, 49),

$$\frac{\varepsilon - l_0}{l_0} \sigma + \frac{\varphi}{l_0} \int \xi d\sigma = 0.$$

Ma poichè, per ipotesi, il baricentro della sezione σ è sull'asse, l'ultimo integrale è nullo e ne segue $\varepsilon = l_0$, vale a dire che l'asse non subisce nè dilatazioni nè compressioni ossia è una fibra *neutra* [e con essa tutte quelle del piano (z, y)]. Tenendo conto di ciò, la (V, 49) ci dà come valore di γ_{33} nel punto $P(x, y, z)$, notando che $\varphi/l_0 = \varphi/\varepsilon = 1/R$,

$$\gamma_{33} = \frac{1}{R} x,$$

e quindi, dalla seconda delle (V, 48),

$$(V, 50) \quad \Phi_{33} = -\frac{E}{R} x.$$

Gli sforzi interni sono, così, completamente determinati. Notiamo che, dovendo Φ_{33} essere indipendente da z , tale risulta anche R , il che significa che l'asse prende la forma di un arco di cerchio [onde il nome di flessione « uniforme »].

Dai valori che assumono le Φ_{ik} in superficie possiamo ora, mediante le (V, 20) calcolare le forze da applicarsi in superficie per ottenere la deformazione studiata. Sulla superficie laterale, essendo $\alpha_3 = 0$, si trova

$$\Psi_x = \Psi_y = \Psi_z = 0.$$

Sulla base rivolta alla parte negativa dell'asse z , essendo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$, si trova, ricordando la (V, 50),

$$\Psi_x = \Psi_y = 0, \quad \Psi_z = -\frac{E}{R} x$$

e sull'altra base i valori opposti. Vale a dire, su ciascuna delle due basi si de-

vono applicare sforzi di trazione nella metà superiore [$x > 0$] e di pressione nella inferiore [$x < 0$]: la risultante è nulla [conformemente all'ipotesi c], mentre il loro momento risultante è parallelo all'asse y e vale

$$(V, 51) \quad M = \int -xY_z d\sigma = \int \frac{E}{R} x^2 d\sigma = \frac{E}{R} J, \quad \text{Saint-Venant}$$

indicando con J il « momento d'inerzia » [v. § prec. nota 1] della sezione rispetto all'asse y .

Si può dimostrare [ed è del resto intuitivo] che la deformazione di un trave dipende praticamente solo dalle risultanti e dai momenti risultanti delle forze applicate alle basi, ed è pressochè indipendente [salvo che per due brevi tratti agli estremi] dalla effettiva distribuzione delle forze sui vari punti delle basi. Si può quindi realizzare la flessione uniforme applicando comunque alle basi due coppie di momenti [normali al piano di simmetria del trave] uguali ed opposti.

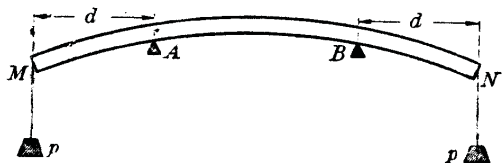


Fig. 106.

Un modo per ottenere ciò è rappresentato dalla fig. 106: i due pesi uguali p esercitano sulle sezioni corrispondenti agli appoggi A e B due coppie opposte [di momento $M = pd$] che producono nel tratto AB della trave una flessione uniforme. Invece nei tratti AM e BN [come nel caso di un trave incastrato ad un estremo e sollecitato da un peso all'altro] la flessione è di un tipo più complesso.

La formula (V, 51), [che serve nello studio della flessione in generale], è fondamentale nella Scienza delle Costruzioni, e dice che il momento M necessario a produrre una data curvatura $1/R$ è proporzionale ad EJ : quindi *un trave di dato materiale si flette, a pari sollecitazione, tanto meno quanto maggiore è il momento d'inerzia, J , della sua sezione rispetto all'asse baricentrico normale al piano di flessione.* Per questa ragione, per es., un tubo resiste meglio di un cilindro pieno formato con la stessa quantità di materiale per unità di lunghezza. Si noti inoltre che nella flessione le proprietà elastiche del materiale intervengono solo attraverso il modulo di elasticità E , quello stesso cioè che interviene nella sollecitazione di pura trazione [o compressione] longitudinale.

§ 111. Cenno sul problema di Saint-Venant.

Un tipo più generale di problema che si riesce a risolvere completamente col metodo semi-inverso è il seguente [problema di Saint-Venant].

Sia dato un trave elastico, di sezione qualunque, a cui siano applicate delle forze date sulle due basi, mentre la superficie laterale è libera da forze e man-

cano forze di massa: trovare la deformazione. Si riesce a risolvere il problema limitando la ricerca delle deformazioni con la restrizione, a priori,

$$\Phi_{11} = \Phi_{22} = \Phi_{12} = 0,$$

[avendo posto l'asse z parallelo all'asse del trave indeformato].

In questa categoria rientrano i problemi, assai interessanti per la tecnica, della torsione e della flessione di travi, alberi di macchine, ecc., ed, in particolare, i due problemi trattati nei due §§ precedenti.

LE OSCILLAZIONI ELASTICHE

§ 112. Equazioni delle oscillazioni elastiche.

Passiamo ora ad occuparci delle deformazioni elastiche variabili col tempo.

Poichè conserviamo l'ipotesi che gli spostamenti si mantengano sempre piccoli, limiteremo il nostro studio ai casi in cui ogni punto del corpo elastico si muove mantenendosi sempre vicino alla sua posizione naturale: siffatti movimenti [piccoli moti] si presentano in innumerevoli casi di grande interesse scientifico e tecnico.

Il passaggio dalle equazioni della statica a quelle della dinamica si fa, come insegna la Meccanica, col « principio di d'Alembert », sostituendo, nelle condizioni di equilibrio, alle forze le forze perdute e quindi, nel nostro caso, a

$$\rho F dS \quad \text{la forza perduta} \quad \rho F dS - \rho \ddot{s} dS,$$

cioè ad

$$F_x, F_y, F_z \quad \text{le} \quad F_x - \ddot{s}_1, F_y - \ddot{s}_2, F_z - \ddot{s}_3.$$

Abbiamo così dalle (V, 37) le equazioni fondamentali delle oscillazioni elastiche

$$(V, 52) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \mu \Delta s_1 + \rho F_x = \rho \ddot{s}_1, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \mu \Delta s_2 + \rho F_y = \rho \ddot{s}_2, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \mu \Delta s_3 + \rho F_z = \rho \ddot{s}_3, \end{cases}$$

riassumibili nella equazione vettoriale

$$(V, 53) \quad (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{s} + \mu \Delta \mathbf{s} + \rho \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{s}}.$$

Le equazioni al contorno restano le stesse (V, 20) o (V, 40) poichè in esse non figurano le forze di massa. Inoltre saranno ancora valide le relazioni (V, 32) fra sforzi e deformazioni.

Bisogna, infine, notare che nei problemi di movimento si devono assegnare, oltre alle forze di massa e superficiali [eventualmente dipendenti dal tempo] anche gli spostamenti e le velocità iniziali in tutti i punti, o dati equivalenti.

Vi sono dei casi in cui le forze dipendono anche dalla velocità [*forze dissipative*]: tale è per es. la resistenza che l'aria oppone alle vibrazioni di un diapason. Noi li escluderemo dalla nostra trattazione. Sotto questa condizione, i piccoli moti hanno sempre carattere oscillatorio, e perciò si chiamano « *oscillazioni elastiche* ».

§ 113. Sullo studio delle oscillazioni sotto l'azione di forze costanti.

Quando le forze, di massa e di superficie, sono indipendenti dal tempo, esse determinano una configurazione di equilibrio, prossima [per le ipotesi consuete] alla configurazione naturale: quindi, se il corpo oscilla, i suoi punti si sostano poco non solo dalla loro posizione naturale ma anche da quella che sarebbe la loro posizione di equilibrio sotto l'azione delle dette forze. Nello studio di queste oscillazioni è conveniente contare gli spostamenti [e le deformazioni] non dalla posizione naturale ma da quella di equilibrio, ciò che è lecito [come si è osservato a § 104] purchè anche dalle Φ_{ik} si sottraggano i loro valori relativi allo stato di equilibrio. Ciò porta il vantaggio, come mostremo subito, di eliminare dalle equazioni le forze sia di massa che di superficie.

Infatti, indicando con \mathbf{s}_0 lo spostamento in condizioni di equilibrio e con \mathbf{s} lo spostamento durante il moto, lo spostamento \mathbf{s}^* dalla posizione di equilibrio sarà

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{s} - \mathbf{s}_0$$

e ad esso corrisponderanno le componenti di deformazione e la dilatazione cubica

$$\gamma_{ik}^* = \gamma_{ik} - (\gamma_{ik})_0 \quad \text{e} \quad \gamma^* = \gamma - \gamma_0.$$

Dovendo \mathbf{s} soddisfare alla (V, 53) ed \mathbf{s}_0 alla (V, 38), la loro differenza \mathbf{s}^* soddisferà all'equazione

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{s}^* + \mu \Delta \mathbf{s}^* = \rho \ddot{\mathbf{s}}^*$$

[ottenuta sottraendo membro a membro la (V, 38) dalla (V, 53)] che è del tipo della (V, 53) ma con forze di massa *nulla*. Nello stesso modo

si dimostra che le γ_{ik}^* soddisfano le equazioni al contorno (V, 40) quando in esse le Ψ siano nulle.

Noi supporremo sempre, in seguito, che le forze siano costanti e siano state eliminate nel modo ora detto; porremo quindi senz'altro $\mathbf{F} = \Psi = 0$ ed intenderemo per \mathbf{s} , γ_{ik} , γ [tralasciando l'asterisco] i valori contati a partire dalla configurazione di equilibrio.

§ 114. Oscillazioni a rotazione nulla (onde di condensazione).

Prima di considerare il problema delle oscillazioni elastiche in generale cominceremo con lo studiare due casi particolarmente semplici. E considereremo, intanto, un mezzo elastico illimitato, così da non avere da preoccuparci delle condizioni al contorno.

In questo § tratteremo il caso [particolarmente interessante in acustica] che lo spostamento \mathbf{s} sia un vettore *irrotazionale*, cioè che sia

$$(V, 54) \quad \text{rot } \mathbf{s} = 0.$$

Sappiamo allora [§ 13] che esiste uno scalare $\varphi(x, y, z, t)$ [che possiamo chiamare *potenziale degli spostamenti*] di cui \mathbf{s} è il gradiente: avremo cioè

$$(V, 55) \quad \mathbf{s} = \text{grad } \varphi.$$

Osserviamo, anzi, che a φ si può aggiungere una arbitraria funzione $c(t)$ del tempo, purchè costante rispetto ad x, y, z : potremo sempre, quindi, scrivere $\varphi + c(t)$ in luogo di φ , riservandoci di determinare la c in modo da soddisfare una ulteriore condizione. Sostituendo la (V, 55) nell'equazione del movimento (V, 53) questa [postovi $\mathbf{F} = 0$ per quanto si è detto al § prec.] diverrà

$$(\lambda + \mu) \text{grad } \Delta \varphi + \mu \Delta \text{grad } \varphi = \rho \frac{d^2(\text{grad } \varphi)}{dt^2}.$$

ossia

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad } \Delta \varphi = \rho \text{grad } \ddot{\varphi},$$

che, introducendo la costante

$$(V, 56) \quad b = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},$$

possiamo anche scrivere

$$\text{grad } \left(\Delta \varphi - \frac{1}{b^2} \ddot{\varphi} \right) = 0;$$

da questa si ha, infine,

$$\Delta\varphi - \frac{1}{b^2} \ddot{\varphi} = C(t),$$

dove $C(t)$ è una funzione solo di t [costante rispetto ad x, y, z]. Possiamo ora approfittare dell'arbitrarietà della $c(t)$ che si può aggiungere a φ , per ottenere che sia $C = 0$ [basta perciò aggiungere a φ una $c(t)$ tale che sia $\ddot{c} + b^2 C = 0$]. Così l'equazione cui soddisfa φ si scrive

(V, 57)

$$\Delta\varphi = \frac{1}{b^2} \ddot{\varphi}$$

Questa equazione è la naturale estensione al caso tridimensionale dell'equazione che abbiamo incontrato per le corde e le membrane vibranti [v. (IV, 17) e (IV, 46)]: come vedremo, tutti i fenomeni di carattere ondulatorio nello spazio sono governati da un'equazione di questo tipo e b rappresenta [come si vedrà meglio in seguito] la velocità di propagazione delle oscillazioni.

Osserviamo che non soltanto φ , ma anche ciascuna delle componenti di \mathbf{s} soddisfa una equazione analoga: infatti, derivando la (V, 57) rispetto ad x, y, z , si ottengono le tre equazioni

$$(V, 58) \quad \Delta s_1 - \frac{1}{b^2} \ddot{s}_1 = 0, \quad \Delta s_2 - \frac{1}{b^2} \ddot{s}_2 = 0, \quad \Delta s_3 - \frac{1}{b^2} \ddot{s}_3 = 0.$$

Analogamente si vedrebbe che la dilatazione cubica, $\gamma = \text{div } \mathbf{s} = \Delta\varphi$, soddisfa l'equazione

$$\Delta\gamma - \frac{1}{b^2} \ddot{\gamma} = 0.$$

Ciò significa che anche le condensazioni e rarefazioni del mezzo si propagano con velocità b .

Le oscillazioni caratterizzate dalla (V, 54) si chiamano «*onde di condensazione*». Come vedremo in seguito [§ 118], esse sono le sole che possano propagarsi in un fluido, e quando hanno frequenza adatta a impressionare l'orecchio costituiscono le «*onde sonore*».

Onde di condensazione piane [onde piane longitudinali].

Consideriamo ora il caso semplice che φ dipenda solo da x, t e non da y e z . Si ha allora

$$s_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad s_2 = s_3 = 0,$$

da cui si vede che lo spostamento di ogni punto è parallelo all'asse x . Inoltre è chiaro che anche s_1 dipende solo dalla x e dalla t : quindi ciascun piano normale

all'asse x si sposta [oscillando] nella direzione dell'asse x come se fosse rigido (fig. 107). Questi piani [in ciascuno dei quali in un dato istante lo spostamento è per tutti i punti lo stesso] sono le «*superfici d'onda*» di questo particolare tipo di vibrazioni [v. a § 117 la definizione generale].

La prima delle (V, 58) diviene poi

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = 0,$$

ossia diviene la ben nota equazione di d'Alembert [§ 78], il cui integrale generale è

$$(V, 59) \quad s_1 = f(x - bt) + g(x + bt),$$

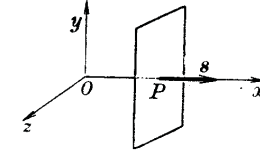


Fig. 107.

con f e g funzioni arbitrarie: il primo termine, come sappiamo [§ 79], rappresenta onde progressive, il secondo onde regressive, entrambe propagantesi parallelamente all'asse x con velocità b , data dalla (V, 56). Poichè le superfici d'onda sono piani, si dice che il moto avviene per onde *piane*, e siccome lo spostamento \mathbf{s} è parallelo alla direzione di propagazione delle onde [cioè normale alla superficie d'onda] si dice che tali onde sono *longitudinali*. Come si è visto per le corde vibranti [§ 80], basta considerare il caso delle onde *sinusoidali*, in cui la (V, 59) ha la forma

$$(V, 60) \quad s_1 = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} [(x - bt) - \theta],$$

[o l'analogia con $x + bt$], perchè la soluzione generale si riduce ad una somma [od un integrale] di soluzioni di questo tipo, scomponendo f e g in serie od in integrale di Fourier [§§ 74, 77]. Nel caso della (V, 60) ciascun piano normale all'asse x oscilla di moto armonico semplice, con l'ampiezza A : le oscillazioni si propagano da un piano all'altro con la velocità b . La dilatazione cubica del mezzo è data da

$$\gamma = \text{div } \mathbf{s} = \frac{\partial s_1}{\partial x} = \frac{2\pi}{\lambda} A \cos \frac{2\pi}{\lambda} [(x - bt) - \theta];$$

come si vede, anch'essa, in un dato punto, varia sinusoidalmente col tempo e, in un dato istante, varia sinusoidalmente con x , cosicchè si ha lungo la direzione x una successione di semionde condensate [$\gamma < 0$] e semionde rarefatte [$\gamma > 0$], che si spostano con velocità b . Le onde sonore provenienti da una sorgente lontana [considerate in una regione non troppo estesa] sono precisamente di questa natura.

Onde di condensazione sferiche [onde sferiche longitudinali].

Consideriamo ora il caso che il potenziale degli spostamenti φ abbia simmetria sferica rispetto ad un punto O [che assumiamo come polo di un sistema di coordinate polari] cioè che sia della forma

$$\varphi = \varphi(r, t)$$

indipendente dalle altre due coordinate polari. L'equazione (V, 57), ricordando l'espressione (I, 31₂) del Δ in coordinate polari, si può allora scrivere

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} - \frac{1}{b^2} \varphi = 0,$$

ossia, posto $r\varphi = \psi$,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Si ha di qui [§ 78]

$$\psi = F(r - bt) + G(r + bt)$$

[con F e G funzioni arbitrarie] e quindi

$$(V, 61) \quad \varphi = \frac{F(r - bt) + G(r + bt)}{r}$$

Lo spostamento \mathbf{s} [anch'esso, evidentemente, a simmetria sferica] sarà dato, per la (V, 55), da

$$\mathbf{s} = s_r \text{ vers } \boldsymbol{\tau},$$

in cui [indicando con l'apice le derivazioni rispetto ad r] si ha

$$s_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{F'(r - bt) + G'(r + bt)}{r} - \frac{F(r - bt) + G(r + bt)}{r^2}.$$

Vi è dunque, anche in questo caso, una sovrapposizione di onde progressive [ossia « divergenti » dall'origine] rappresentate dai termini

$$(V, 62) \quad \frac{F'(r - bt)}{r} - \frac{F(r - bt)}{r^2},$$

e di onde regressive [o « convergenti » verso l'origine] rappresentate dai termini

$$\frac{G'(r + bt)}{r} - \frac{G(r + bt)}{r^2}.$$

In ogni punto lo spostamento \mathbf{s} giace lungo il raggio vettore $\boldsymbol{\tau}$, ossia è parallelo alla direzione di propagazione del movimento, e perciò si tratta di onde *longitudinali*: ogni sfera col centro nell'origine pulsa gonfiandosi e restringendosi [tali sfere sono le « superfici d'onda » (§ 117)] ed il moto si propaga lungo il raggio vettore con velocità b . Si noti, però, che la presenza dei denominatori r ed r^2 nelle formule precedenti dà luogo ad una differenza sostanziale dal caso delle onde piane. E cioè [pensando, per es., al caso delle onde divergenti], se al tempo t ad una certa distanza r la s_r ha un certo valore, al tempo $t + \tau$ ed alla distanza $r + b\tau$ i denominatori della (V, 62) riacquistano lo stesso valore, ma, essendo aumentati i denominatori, la s_r si trova diminuita: vale a

dire, le onde si attenuano coll'allontanarsi da O . Similmente si riconosce che le onde convergenti si esaltano avvicinandosi ad O ⁽¹⁾.

Le onde sonore emesse da una sorgente a simmetria sferica [come sarebbe una sfera pulsante ⁽²⁾] sono appunto onde sferiche longitudinali divergenti, cioè del tipo

$$s_r = \frac{F'(r - bt)}{r} - \frac{F(r - bt)}{r^2}.$$

Per r piccolo prevale il secondo termine, per r grande il primo: perciò ad una certa distanza dalla sorgente si può assumere

$$s_r = \frac{F'(r - bt)}{r}$$

e per ciascuna componente sinusoidale

$$s_r = \frac{A}{r} \sin \frac{2\pi}{\lambda} [(r - bt) - 0].$$

Poichè l'ampiezza varia come $1/r$, l'intensità del suono [proporzionale al quadrato dell'ampiezza] decresce con la distanza come $1/r^2$ [eccetto che in vicinanza della sorgente, dove influisce sull'ampiezza anche il termine in $1/r^2$].

§ 115. Oscillazioni a dilatazione nulla [onde di distorsione].

Consideriamo ora un altro tipo di moto di un mezzo elastico, quello in cui è

$$(V, 63) \quad \text{div } \mathbf{s} = 0,$$

ossia $\gamma = 0$, il che significa che in nessun punto vi è compressione o rarefazione. La (V, 53) [con $F = 0$ per quanto si è detto al § 113], ponendo

$$(V, 64) \quad \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = a,$$

diviene in tal caso

$$(V, 65) \quad \Delta \mathbf{s} = \frac{1}{a^2} \mathbf{s}$$

chè equivale a tre equazioni scalari della stessa forma per s_1, s_2, s_3 . Tali equazioni, come si vede, sono della forma delle (V, 58) rela-

⁽¹⁾ Si potrebbe far vedere che le onde convergenti giungendo ad O ne ripartono come onde divergenti ma con spostamenti invertiti.

⁽²⁾ Ad una distanza dalla sorgente abbastanza grande, rispetto alle dimensioni della sorgente stessa, si possono praticamente assimilare a queste anche le onde emesse da molte sorgenti senza simmetria sferica, per es. da un altoparlante [a diffusore].

tive alle onde di condensazione, salvo il coefficiente a invece di b : esse dunque rappresentano onde che si propagano con velocità a e si chiamano « onde di distorsione ».

Lo spostamento \mathbf{s} non deriva in questo caso da un potenziale scalare, ma si può introdurre un cosiddetto « potenziale vettoriale », ricordando [§ 13] che ogni campo solenoidale è un rotore. La (V, 63) ci autorizza quindi a scrivere

(V, 66)

$$\mathbf{s} = \text{rot } \mathbf{\Omega}$$

e resta ancora la possibilità di aggiungere a $\mathbf{\Omega}$ il gradiente di una funzione arbitraria χ [essendo, (I, 38), $\text{rot grad } \chi = 0$]. Sostituendo la (V, 66) nella (V, 65) si ha

$$\text{rot} \left(\Delta \mathbf{\Omega} - \frac{1}{a^2} \ddot{\mathbf{\Omega}} \right) = 0,$$

da cui si ricava

$$\Delta \mathbf{\Omega} - \frac{1}{a^2} \ddot{\mathbf{\Omega}} = \text{grad } \psi$$

[dove ψ è una funzione arbitraria]. Ma si può immaginare, una volta scelta la ψ , di sostituire $\mathbf{\Omega}$ con $\mathbf{\Omega} + \text{grad } \chi$, dove χ è tale che

$$\Delta \chi - \frac{1}{a^2} \ddot{\chi} = \psi,$$

ed allora la $\mathbf{\Omega}$, così precisata, soddisfa l'equazione

(V, 67)

$$\Delta \mathbf{\Omega} - \frac{1}{a^2} \ddot{\mathbf{\Omega}} = 0.$$

Onde di distorsione piane [onde piane trasversali].

Studiamo il caso particolare in cui le componenti di \mathbf{s} dipendono solo da x e t , non da y e z . In questo caso è superfluo l'uso del potenziale vettoriale. La (V, 63) e la (V, 65) danno

$$(V, 68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \ddot{s}_1, \quad \frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \ddot{s}_2, \quad \frac{\partial^2 s_3}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \ddot{s}_3. \end{array} \right.$$

Dalle prime due si ricava $\dot{s}_1 = 0$, ossia $s_1 = c_1 t + c_2$ [con c_1, c_2 costanti], ma poichè per ipotesi s_1 deve mantenersi piccolo per qualunque valore di t , deve essere $c_1 = 0$: siccome poi prescindiamo da uno spostamento rigido di tutto il corpo potremo prendere anche $c_2 = 0$, cioè $s_1 = 0$. Dunque lo spostamento \mathbf{s} è un vettore perpendicolare all'asse x , cioè alla direzione di propagazione delle onde (fig. 108): perciò tali onde si chiamano *trasversali*. Ciascuno dei piani nor-

mali all'asse x oscilla strisciando su se stesso: tali piani sono le « superfici d'onda » di questo moto [§ 117].

Le rimanenti due equazioni (V, 68) ci dicono poi che s_2 ed s_3 soddisfano entrambe l'equazione di d'Alembert e quindi [§ 78] hanno come espressione generale

$$s_2 = f_2(x-at) + g_2(x+at),$$

$$s_3 = f_3(x-at) + g_3(x+at).$$

Delle quattro funzioni arbitrarie f_2, f_3, g_2, g_3 , supponiamo dapprima nulle f_3 e g_3 . È allora $s_3 = 0$ ed ogni punto oscillerà parallelamente all'asse y : le onde si dicono allora « polarizzate rettilineamente » ed il piano (x, y) si chiama « piano di vibrazione ». Come già sappiamo, il termine $f_2(x-at)$ rappresenta onde progressive, il termine $g_2(x+at)$ onde regressive, e la velocità di propagazione è a . Similmente, per $s_2 = 0$, si hanno onde polarizzate rettilineamente, col piano di vibrazione (x, z) . Nel caso generale [s_2 ed s_3 entrambi diversi da zero] lo spostamento \mathbf{s} forma col piano (x, y) un angolo θ tale che $\text{tg } \theta = s_3/s_2$: se le f_2, f_3, g_2, g_3 sono scelte in modo che $s_3/s_2 = \text{cost.}$, le onde saranno ancora polarizzate rettilineamente, altrimenti saranno, in generale, non polarizzate [cioè θ varierà in modo qualsiasi con x e con t]. Se, però, s_2 ed s_3 sono funzioni sinusoidali di eguale frequenza, le onde risultano polarizzate « ellitticamente » [od, in particolare, « rettilineamente » o « circolarmente »].

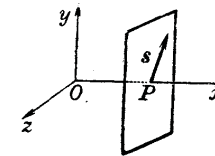


Fig. 108.

Onde di distorsione sferiche [onde sferiche trasversali].

Adottiamo ora coordinate polari e supponiamo $\mathbf{\Omega}$ funzione soltanto di r e di t . Per ciascuna sua componente varrà quanto si è detto per la φ della (V, 61) [salvo la sostituzione di b con a], ossia vi è una propagazione lungo il raggio vettore [smorzata od esaltata secondo che si tratta di onde divergenti o convergenti, analogamente a quanto si è visto al § prec.], con velocità a . Si ha poi, essendo $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, etc.,

$$s_1 = \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \Omega_y}{\partial z} = \frac{\partial \Omega_x}{\partial r} \frac{y}{r} - \frac{\partial \Omega_y}{\partial r} \frac{z}{r},$$

$$s_2 = \frac{\partial \Omega_x}{\partial r} \frac{z}{r} - \frac{\partial \Omega_z}{\partial r} \frac{x}{r}, \quad s_3 = \frac{\partial \Omega_y}{\partial r} \frac{x}{r} - \frac{\partial \Omega_x}{\partial r} \frac{y}{r},$$

e, posto

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_x}{\partial r} = -\Theta_x, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_y}{\partial r} = -\Theta_y, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_z}{\partial r} = -\Theta_z,$$

le tre formule si riassumono in

$$\mathbf{s} = \Theta \wedge (P - O)$$

[dove P è il punto considerato ed O l'origine].

Di qui si vede che \mathbf{s} è normale a $P-O$, quindi si tratta di onde *trasversali*. Inoltre, derivando rispetto a t si ha per la velocità, \mathbf{v} , l'espressione ⁽¹⁾

$$\mathbf{v} = \dot{\Theta} \wedge (P-O),$$

formula uguale a quella che dà la velocità in un moto rigido di rotazione attorno ad un asse passante per O , di cui $\dot{\Theta}$ definisce l'asse e la velocità angolare: però in questo caso $\dot{\Theta}$ è funzione di r_P , quindi non *tutta* la massa vibrante si muove rigidamente, ma ciascuna sfera di centro O oscilla rigidamente ruotando intorno ad O [sono però in generale diversi, per ciascuna sfera, l'asse e la velocità angolare]. Tali onde elastiche si dicono *onde sferiche trasversali*.

§ 116. Oscillazioni di tipo qualsiasi.

Il tipo più generale di oscillazione si riconduce facilmente ad una combinazione dei due casi precedenti decomponendo il relativo spostamento \mathbf{s} nella somma di due spostamenti $\mathbf{s}^{(1)}$ ed $\mathbf{s}^{(2)}$, uno irrotazionale e l'altro solenoidale. E questo è sempre possibile: infatti si può sempre determinare una funzione φ tale che sia ⁽²⁾

$$(V, 69) \quad \Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{s};$$

ne segue

$$\operatorname{div} (\mathbf{s} - \operatorname{grad} \varphi) = 0$$

cioè [§ 13] si può trovare un vettore $\boldsymbol{\Omega}$ tale che

$$\mathbf{s} - \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega};$$

basta, quindi, assumere

$$\mathbf{s}^{(1)} = \operatorname{grad} \varphi \quad \text{ed} \quad \mathbf{s}^{(2)} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}$$

perchè $\mathbf{s}^{(1)}$ risulti irrotazionale ed $\mathbf{s}^{(2)}$ solenoidale.

Si vede, così, che il *più generale tipo di oscillazione è dato dalla sovrapposizione dei due tipi di onde studiati*. E di solito, salvo casi particolari, i due tipi di onde si presentano contemporaneamente [anzi la riflessione di onde di un tipo può produrre anche onde dell'altro tipo].

Tutta la teoria svolta ha importanti applicazioni nella *Sismologia*, e dalla misura delle velocità a , b con cui si propagano le onde sismiche

⁽¹⁾ Il termine $\Theta \wedge P$ è piccolo del 2° ordine e quindi si trascura.

⁽²⁾ Si osservi che la (VI, 69) è la nota equazione di Poisson [§ 44] con $-\operatorname{div} \mathbf{s}/4\pi$ al posto di ϱ , e di essa si conosce l'integrale

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\operatorname{div}_P \mathbf{s}}{r} dS.$$

nella Terra si ricavano notevoli deduzioni sui mezzi che esse attraversarono. Aggiungiamo, a questo riguardo, che lungo la superficie del corpo elastico si possono propagare onde che interessano solo lo strato superficiale [*onde di Rayleigh*]. Esse si propagano con velocità diversa da a e b e si producono nella riflessione delle onde dei tipi studiati sopra.

§ 117. Proprietà generali dell'equazione delle onde.

Abbiamo visto che l'equazione che governa le oscillazioni elastiche è della forma ⁽¹⁾

$$(V, 70)$$

$$\Delta\psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

dove ψ si identifica con una qualunque delle componenti dello spostamento [o col « potenziale degli spostamenti » φ della (V, 55), o con una componente dell' $\boldsymbol{\Omega}$ della (V, 66)], e v con a o con b .

Di questa equazione abbiamo studiato le soluzioni particolari che rappresentano onde piane od onde sferiche [§§ 114, 115] ed abbiamo visto che v ne è la velocità di propagazione. Ma la (V, 70) ammette soluzioni molto più generali. Ci limiteremo qui a dire che hanno particolare importanza le soluzioni della forma

$$(V, 71) \quad \psi = A(x, y, z)F(f(x, y, z) - vt)$$

che rappresenta una forma più generale di propagazione per onde. In essa rientrano le soluzioni da noi studiate: per $A = 1$, $f = \pm x$, F arbitraria, si hanno onde *piane* parallele al piano (y, z) , per $A = 1/r$, $f = \pm r$, F arbitraria si hanno onde *sferiche*. Le superfici $f(x, y, z) = \text{cost.}$ si chiamano « *superfici d'onda* » e le loro traiettorie ortogonali « *raggi* ». In generale lo spostamento elastico \mathbf{s} ha una orientazione qualunque rispetto al raggio: le onde « longitudinali » e « trasversali » sono soltanto casi particolari.

Lasciando da parte lo studio della (V, 71), vogliamo dimostrare una proprietà generale di tutte le soluzioni [regolari] della equazione (V, 70), proprietà che è la generalizzazione del « teorema della media » per le funzioni armoniche [§ 18].

Consideriamo perciò un punto qualsiasi P e tracciamo una sfera σ

⁽¹⁾ La (V, 70), usando il simbolo [d'Alembertiano] $\square_\sigma = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, viene scritta sovente

$$\square_\sigma \psi = 0.$$

di centro P e raggio r : chiameremo $\bar{\psi}(r, t)$ il valor medio di ψ sulla superficie σ al tempo t ; porremo, cioè,

$$(V, 72) \quad \bar{\psi}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int \psi d\sigma,$$

ovvero, usando coordinate polari r, θ, φ di polo P , e ponendo per brevità $\sin \theta d\theta d\varphi = d\omega$, così che $d\sigma = r^2 d\omega$ [$d\omega$ rappresenta, dunque, l'elemento di angolo solido (cfr. § 39, nota 1)]

$$(V, 72') \quad \bar{\psi}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int \psi d\omega,$$

[il doppio integrale intendendosi esteso da 0 a 2π per φ e da 0 a π per θ].

Vogliamo ora ricavare dalla (V, 70) una equazione differenziale per $\bar{\psi}$. A tal uopo moltiplichiamo la (V, 70) per l'elemento di volume dS ed integriamo a tutto il volume S interno a σ : trasformando il primo membro con la (I, 29) avremo

$$\int \frac{d\bar{\psi}}{dn} d\sigma = \frac{1}{r^2} \int \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} dS,$$

ovvero, notando che $\frac{d}{dn} = \frac{\partial}{\partial r}$ e che $dS = r^2 d\omega dr$,

$$r^2 \int \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} d\omega = \frac{1}{r^2} \int_0^r r^2 dr \int \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} d\omega.$$

In questa formula le derivazioni rispetto ad r e t si possono scambiare con le integrazioni rispetto a θ e φ [cioè a $d\omega$], quindi, introducendo la (V, 72'), si può scrivere

$$r^2 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \int_0^r r^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} dr$$

e, derivando rispetto ad r e poi dividendo per r^2 ,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2}.$$

Il primo membro ha la forma del 1° termine del Δ in coordinate polari [v. (I, 31)], quindi si può scrivere [v. (I, 31)] sotto la forma $\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\bar{\psi})$,

così che l'equazione diviene

$$(V, 73) \quad \frac{\partial^2 (r\bar{\psi})}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\bar{\psi})}{\partial t^2}.$$

Dunque la funzione [di r e t] « $r\bar{\psi}$ » soddisfa l'equazione delle corde vibranti [§ 78].

Di qui possiamo ricavare una formula notevole, dovuta al Poisson, che dà la soluzione generale della (V, 70) [supposta valida in uno spazio illimitato] quando siano assegnati i valori iniziali ψ_0 e $\dot{\psi}_0$ di ψ e $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ in tutto lo spazio. Infatti l'integrale generale della (V, 73) è, come sappiamo [§ 78],

$$r\bar{\psi} = f(r + vt) + g(r - vt),$$

ma, se vogliamo che $\bar{\psi}$ sia dappertutto finita, il 2° membro dovrà annullarsi per $r = 0$, e quindi dovrà essere, per qualunque valore di t , $f(vt) = -g(-vt)$: le due funzioni arbitrarie si riducono dunque ad una sola e si può scrivere

$$(V, 74) \quad r\bar{\psi} = f(r + vt) - f(-r + vt).$$

Se ora facciamo tendere r a zero evidentemente $\bar{\psi}$ tenderà a $\psi_P(t)$, valore della ψ in P ; potremo quindi scrivere

$$\psi_P(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r + vt) - f(-r + vt)}{r}$$

e, sviluppando [cfr. § 79, nota 2]

$$f(vt \pm r) = f(vt) \pm f'(vt) \cdot r + \dots,$$

si ha

$$(V, 75) \quad \psi_P(t) = 2f'(vt).$$

Per determinare, ora, la funzione f' mediante i dati iniziali, poniamo $t = 0$ nella (V, 74) e nella sua derivata rispetto a t : avremo

$$r\bar{\psi}_0(r) = f(r) - f(-r),$$

$$\frac{1}{r} r\dot{\bar{\psi}}_0(r) = f'(r) - f'(-r).$$

La prima, derivata rispetto ad r , dà

$$\frac{d}{dr} [r\bar{\psi}_0(r)] = f'(r) + f'(-r)$$

e, sommata membro a membro con la seconda, dà

$$\frac{1}{v} r \dot{\bar{\psi}}_0(r) + \frac{d}{dr} [r \bar{\psi}_0(r)] = 2f(r).$$

Sostituendo nella (V, 75) questa espressione di $2f'$ [con vt in luogo di r] abbiamo la *formula di Poisson*

$$(V, 76) \quad \psi_P(t) = \bar{\psi}_0(vt) + \frac{d}{dt} [t \bar{\psi}_0(vt)].$$

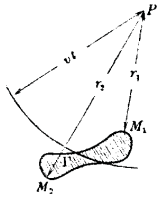


Fig. 109.

Come si vede, per conoscere il valore di ψ in P nell'istante generico t , si utilizzano, delle funzioni date ψ_0 e $\dot{\psi}_0$, soltanto i valori medi sopra una sfera di centro P e raggio vt . Ciò significa che sulla condizione del mezzo in P al tempo t influiscono solo le condizioni iniziali del mezzo nei punti che distano da P di vt . Per vedere che cosa ciò significhi, supponiamo, per es., che inizialmente sia $\psi_0 = \dot{\psi}_0 = 0$ dappertutto tranne che in una certa regione limitata Γ (fig. 109), e siano r_1 ed r_2 rispet-

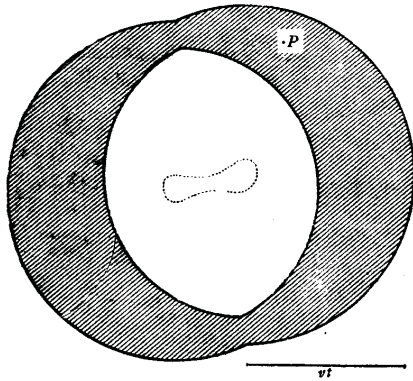


Fig. 110.

tivamente la minima e la massima distanza di P dai punti di Γ . È chiaro che solo se

$$\frac{r_1}{v} < t < \frac{r_2}{v}$$

la sfera di raggio vt taglierà Γ , e quindi solo in tal caso le medie che intervengono nella (V, 76) potranno non essere nulle: per t fuori di que-

sti limiti la (V, 76) dà $\psi_P = 0$. Dunque la ψ in P varierà col tempo nel modo seguente: sarà nulla da $t=0$ fino a $t=r_1/v$, poi cesserà di esserlo fino a $t=r_2/v$, poi sarà nulla di nuovo per sempre. Ciò significa, ovviamente, che le perturbazioni prodotte inizialmente in Γ cominciano a giungere in P [dal punto M_1 , ad esso più vicino] al tempo r_1/v [il che mostra che si propagano con velocità v] poi continuano a giungere dall'interno di Γ , finché, passate quelle provenienti dal punto più lontano M_2 , il punto P torna allo stato naturale, il che prova che le onde non lasciano nessuna perturbazione residua dietro di sé. [La fig. 110 dà, nell'area tratteggiata, tutta la zona perturbata all'istante t , supposto che al tempo 0 la perturbazione sia limitata alla regione Γ di fig. 109].

Così è chiarito nel modo più generale il significato del coefficiente v della (V, 70) come velocità di propagazione.

§ 118. Velocità di propagazione delle oscillazioni elastiche nei fluidi (velocità del suono).

Volendo studiare la velocità di propagazione delle oscillazioni elastiche nei fluidi possiamo riprendere le (V, 64) e (V, 56) e porre in esse $\mu = 0$ [cfr. § 106, nota 2].

Otteniamo così, dalla (V, 64),

$$a = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 0,$$

cioè nei fluidi non si possono propagare onde di distorsione [cosa intuitiva, almeno per gli esempi considerati di onde piane e sferiche, in quanto i fluidi non trasmettono sforzi di taglio].

Quanto alla (V, 56), limitandoci allo studio della propagazione delle onde di condensazione in un gas perfetto [in particolare, onde sonore], oltre che $\mu = 0$, potremo porre in essa, in base a quanto si è visto a § 106, $\lambda = \frac{1}{\alpha} = kP_0$ [dato che le compressioni e rarefazioni sono così rapide da potersi considerare adiabatiche]: si ottiene così

$$b = \sqrt{k \frac{P_0}{\rho}}.$$

Ora, poichè vale l'equazione di stato ⁽¹⁾

$$(V, 77) \quad \frac{P_0}{\rho} = \frac{R}{m} T$$

⁽¹⁾ Si scrive di solito $P_0 V_0 = RT$ dove V_0 è il volume occupato da una molecola-grammo del gas, cioè da m grammi di esso: notando che $\rho = m/V_0$ si giunge subito alla (V, 77).

[R = (costante universale) = $8,313 \cdot 10^7$ in unità C.G.S., m = peso molecolare, T = temperatura assoluta], si ha

$$b = \sqrt{k \frac{R}{m} T}$$

Esplora

Come si vede, se la temperatura non varia, la velocità b di propagazione è indipendente dalla pressione. Si può far figurare nell'espressione di b la temperatura centigrada $t^{\circ} = T - 273,2$; la formula allora diviene

$$b = b_0 \sqrt{1 + \frac{t^{\circ}}{273,2}}$$

dove b_0 è la velocità del suono a 0° centigradi.

CAPITOLO VI.

ELETTROMAGNETISMO

CAMPO MAGNETICO DELLE CORRENTI ELETTRICHE

§ 119. Generalità. Fondamenti sperimentali.

Il fondamento dell'elettromagnetismo è il fatto sperimentale [scoperto da Oersted nel 1820] che una corrente elettrica produce un campo magnetico. Una conseguenza di questo fatto è [come dimostreremo] che un campo magnetico variabile produce un campo elettrico [induzione



Fig. 111.

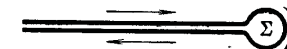


Fig. 112.

elettromagnetica]. Questi due fatti fondamentali, combinati insieme, danno luogo alla svariatissima serie dei fenomeni elettromagnetici.

Cominceremo col precisare quantitativamente le leggi del campo magnetico prodotto da correnti elettriche limitandoci dapprima al caso di correnti lineari [ossia che percorrono fili sottili] e chiuse su se stesse, ed escludendo per il momento lo studio del campo magnetico nell'interno dei conduttori percorsi da corrente: poi procederemo per successive generalizzazioni.

Fra le innumerevoli esperienze eseguite per determinare le leggi del campo magnetico prodotto da correnti elettriche assumeremo come fondamentali le seguenti.

a) Un filo [con rivestimento isolante] venga piegato strettamente su se stesso in modo che la corrente percorra sensibilmente la stessa linea all'andata ed al ritorno (fig. 111). Si constata che tale conduttore non ha nessun effetto sull'ago magnetico, ossia non produce campo magnetico.

b) La piegatura del conduttore anzidetto venga allargata in modo da formare un piccolo cappio, Σ , di forma qualsiasi (fig. 112). Si constata che questo conduttore agisce su un ago magnetico [a distanza grande rispetto alle dimensioni del cappio] come agirebbe un dipolo magnetico [cfr. § 50], posto nell'interno del cappio, di momento \mathbf{m} , normale a questo, orientato, rispetto al verso in cui circola la corrente nel cappio Σ , colla regola del cavatappi [§ 13, nota 1], e dato in modulo da

(VI, 1)

$$m = \frac{1}{c} I \sigma,$$

dove σ è l'area del cappio ed I l'intensità di corrente. Il coefficiente $1/c$ [determinabile sperimentalmente con questa o con altre esperienze equivalenti] è caratteristico dei fenomeni elettromagnetici come la costante f della legge di Newton è caratteristica di quelli gravitazionali: se si misura m in u.e.m.a., σ in cm^2 , I in unità elettrostatiche assolute ⁽¹⁾ si trova, quasi esattamente ⁽²⁾,

$$c = 3 \cdot 10^{10}.$$

c) Si abbiano due o più circuiti che si possono a volontà far percorrere da altrettante correnti. Si constata che, in ogni punto, il campo magnetico prodotto da tutte le correnti è la somma vettoriale di quelli che sarebbero prodotti da ciascuna di esse separatamente.

Quanto precede si riferisce ad un conduttore immerso nel vuoto [o, praticamente, nell'aria] senza corpi magnetizzabili in vicinanza. Supponiamo invece che il conduttore si trovi in un mezzo di permeabilità μ , omogeneo ed esteso a tutta la regione dove è sensibile il campo: l'esperienza dimostra che il campo magnetico generato dalla corrente è indipendente dalla permeabilità del mezzo. Invece, come sappiamo [§ 73], in queste condizioni il campo generato da un magnete sarebbe inversamente proporzionale a μ : perciò il magnete equivalente alla corrente dovrà essere preso di momento μ volte maggiore che nel vuoto, ossia alla (VI, 1) si dovrà sostituire

(VI, 1')

$$m = \frac{\mu}{c} I \sigma$$

D'ora in poi, per maggiore generalità, ci riferiremo a questa formula anziché alla (VI, 1).

⁽¹⁾ Ricordiamo che l'unità elettromagnetica assoluta di intensità di corrente si definisce in modo da rendere eguale ad 1 il coefficiente della (VI, 1) e vale quindi c u.e.s.a. Usando u.e.m.a. la (VI, 1) si scriverebbe, dunque, $m = cI$: ma noi continueremo ad esprimere tutte le grandezze elettriche in u.e.s.a.

⁽²⁾ Il valore più attendibile c : $c = 2,99776 \cdot 10^{10}$.

Aggiungiamo che questi risultati sperimentali sono ottenuti usando correnti costanti o lentamente variabili [si possono considerare tali anche le correnti alternate di frequenza industriale], mentre per correnti rapidamente variabili [alta frequenza] si troverebbero risultati diversi, dei quali parleremo più oltre [§ 145 e segg.].

§ 120. Principio di equivalenza.

Possiamo ora, dai fatti sperimentali descritti sopra, dedurre l'espressione del campo prodotto da una corrente costante [o lentamente variabile] percorrente una « spira » l ⁽¹⁾. Difatti, immaginiamo tracciata una superficie σ che abbia per contorno l [ma, del resto, di forma arbitraria] e su di essa immaginiamo tracciata una fitta rete di linee, che la divida in maglie piccolissime [v. fig. 113]. Pensiamo ora di materializzare ciascuna di queste maglie con un filo chiuso percorso da una corrente, della stessa intensità di quella che percorre l , e ruotante nello stesso verso, e di sostituire questo insieme di correnti a quella lungo l . È chiaro che il lato comune a due maglie contigue è percorso da due correnti uguali ed opposte e quindi [per l'esperienza a) del § prec.] non produce campo magnetico; invece i lati facenti parte del contorno l vengono percorsi da una corrente dello stesso verso ed intensità di quella data, e quindi producono complessivamente lo stesso campo di quella. Si conclude che, agli effetti del campo magnetico prodotto, la corrente I percorrente l può essere sostituita da un sistema di correnti di intensità I percorrenti le singole maglie. Ma ognuna di queste correnti produce [esperienza b)], nei punti non immediatamente vicini ad essa, lo stesso campo di un dipolo, normale a σ , di momento

$$dm = \frac{\mu}{c} I d\sigma$$

[dove $d\sigma$ è l'area della maglia, che si può pensare piccola quanto si vuole] e l'insieme di questi dipoli, quando si pensi la rete infinitamente fitta, costituisce un « doppio strato magnetico », o « lamina magnetica » [cfr. § 51], uniforme, di potenza

(VI, 2)

$$\mathcal{M} = \frac{\mu}{c} I \sigma$$

⁽¹⁾ Chiamasi « spira » un conduttore lineare chiuso, di forma qualsiasi.

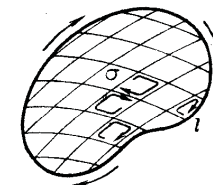


Fig. 113.

Possiamo dunque enunciare il seguente «*principio di equivalenza*» [dovuto ad Ampère]:

la corrente I [costante o lentamente variabile] che percorre la spira l equivale, agli effetti del campo magnetico, ad una lamina magnetica avente per contorno la linea l, avente la faccia positiva dalla parte legata al verso della corrente dalla regola del cavatappi [cfr. § prec.] ed avente potenza uniforme data dalla (VI, 2).

È da notare che l'equivalenza non sussiste per i punti appartenenti alla superficie σ ⁽²⁾, ma, poichè la forma di questa è arbitraria, ciò non porta nessun inconveniente, potendosi sempre calcolare il campo in quei punti, per mezzo di un'altra lamina con lo stesso contorno ⁽³⁾.

Si noti infine che, essendo il potenziale di doppio strato una funzione armonica [§ 51], segue dal principio di equivalenza che il campo \mathbf{H} dovuto alla corrente è solenoidale [§ 8], cioè

$$(VI, 3) \quad \text{div } \mathbf{H} = 0.$$

E segue, in modo analogo, che ogni componente di \mathbf{H} soddisfa le condizioni normali all' ∞ (§ 19) [supposto che la spira sia tutta al finito].

Per calcolare le forze che si esercitano tra una corrente ed un magnete [o fra due correnti] è utile ricordare l'espressione (III, 95) della energia potenziale di una lamina magnetica immersa in un campo, espressione che, per la lamina equivalente alla corrente I , diviene

$$u_0 = - \mathfrak{N} \varphi = - \frac{\mu}{c} I \varphi$$

[essendo φ il flusso di \mathbf{H} concatenato alla spira] e quindi, detto $\Phi = \mu \varphi$ il flusso del vettore \mathfrak{B} [flusso d'induzione (cfr. § 73)],

$$(VI, 4) \quad u_0 = - \frac{I}{c} \Phi.$$

§ 121. Potenziale e circuitazione del campo magnetico di una spira percorsa da corrente costante.

Ricordiamo [§§ 51, 73] che il campo dovuto ad un doppio strato di potenza \mathfrak{N} , in un mezzo di permeabilità μ , deriva da un potenziale

$$\mathcal{F}(P) = - \frac{1}{\mu} \mathfrak{N} \omega_P,$$

⁽²⁾ Poichè lo spazio al quale non è applicabile la (VI, 1') è, come si è detto, dell'ordine di grandezza delle dimensioni della maglia, e questa si può pensare piccola quanto si vuole, in definitiva restano esclusi solo i punti appartenenti alla superficie σ .

⁽³⁾ Restano però sempre esclusi i punti appartenenti alla spira: ivi il campo ha delle singularità, di cui non ci occupiamo.

dove ω_P è l'angolo solido sotto cui dal punto potenziato P si vede il doppio strato. Nel caso nostro \mathcal{F} rappresenterà il potenziale magnetico dovuto ad una spira percorsa da corrente, e si potrà scrivere il relativo campo magnetico \mathbf{H} sotto la forma

$$(VI, 5) \quad \mathbf{H} = - \text{grad } \mathcal{F}.$$

Bisogna però osservare che, nel caso attuale, essendo definito solo il contorno e non la forma del doppio strato, l'angolo solido ω_P [e quindi il potenziale \mathcal{F}] non ne resta determinato in modo unico. Ciò si può comprendere considerando la figura schematica 114 dove L_1 ed L_2 sono le intersezioni della spira l col piano del disegno e le linee (1), (2), (3) rappresentano le sezioni di tre possibili lamine magnetiche aventi per contorno l , con l'indicazione della faccia positiva [determinata dal verso della corrente in l]. Se chiamiamo $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ gli angoli solidi sotto cui tali superfici sono viste dal punto P , osservando che P è interno alla superficie chiusa formata dalle lamine (1) e (2) [e ricordando la convenzione relativa al segno di ω_P (§§ 39, 51)] si ha $-\omega_1 + \omega_2 = 4\pi$ e quindi $\omega_2 = \omega_1 + 4\pi$: ed analogamente, per le lamine (2) e (3), si ottiene $\omega_3 = \omega_2 + 4\pi$.

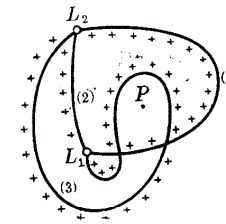


Fig. 114.

Se dunque chiamiamo ω_0 uno qualunque degli angoli solidi in questione [per es. il più piccolo dei positivi] il potenziale in P si può scrivere

$$\mathcal{F} = - \frac{1}{\mu} \mathfrak{N} (\omega_0 + 4\pi n) = - \frac{I}{c} \omega_0 - 4\pi n \frac{I}{c},$$

dove n è un intero arbitrario: abbiamo dunque un potenziale polidromo ⁽¹⁾ [ad infiniti valori]. Naturalmente il secondo termine, essendo costante, non interviene nella (VI, 5), e quindi il campo \mathbf{H} è univocamente determinato.

La polidromia del potenziale porta però una conseguenza importante nei riguardi della circuitazione del campo \mathbf{H} lungo una linea s qualsiasi di estremi A e B , data, come si sa [v. (I, 36)], da

$$e = \int_A^B \mathfrak{H} \cdot ds = - \int_A^B \frac{d\mathcal{F}}{ds} ds = \mathcal{F}(A) - \mathcal{F}(B),$$

⁽¹⁾ La polidromia del potenziale è possibile in quanto lo spazio nel quale esiste il potenziale [cioè tutto lo spazio esclusa la linea l] non è semplicemente connesso [§ 13, nota 3].

cioè dalla differenza di potenziale magnetico fra i due estremi A e B di s . Infatti, scelto uno degli infiniti valori del potenziale in A , $\mathcal{F}_0(A)$, per calcolare la differenza $\mathcal{F}(A) - \mathcal{F}(B)$ dovremo evidentemente scegliere fra i valori che \mathcal{F} assume in B quello che si ricollega con continuità ad $\mathcal{F}_0(A)$ lungo la linea s , poichè, essendo \mathbf{D} sempre finito, il potenziale lungo s non può avere discontinuità. Ma se supponiamo che B coincida con A , ossia che la linea s sia chiusa, può avvenire, come ora mostreremo, che il valore $\mathcal{F}(B)$ così determinato non coincida con $\mathcal{F}_0(A)$, ma con un altro dei valori del potenziale in A , e quindi può avvenire che la circuitazione \mathcal{C} lungo la linea chiusa s non sia nulla ma eguale ad un multiplo di $4\pi I/c$.

Siano infatti (fig. 115) L_1 ed L_2 le intersezioni col piano del disegno della spira l percorsa da corrente e si consideri una linea chiusa come s la quale è « concatenata » [una volta (*)] alla corrente. Scegliamo una qualunque, σ , delle lamine magnetiche che possono definire il potenziale ed osserviamo che la linea s la attraversa necessariamente una volta: assumiamo poi come verso positivo su s quello che attraversa la lamina uscendone dalla faccia positiva e siano M ed N due punti di s infinitamente vicini, rispettivamente, alla faccia positiva ed alla negativa della lamina, e \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 le circuitazioni rispettivamente corrispondenti al tratto MAN ed al trattino infinitesimo NM : sarà $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$.

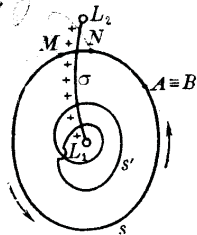


FIG. 115.

Poichè il campo \mathbf{D} della corrente coincide con quello della lamina lungo tutto il percorso MAN , potremo calcolare \mathcal{C}_1 come differenza del potenziale dovuto alla lamina in M ed in N , ossia come discontinuità del potenziale attraverso la lamina; tale discontinuità, per la (III, 39), tenuto conto della permeabilità del mezzo, è $4\pi \mathcal{M}/\mu = 4\pi I/c$. Quanto a \mathcal{C}_2 potremmo calcolarlo in modo analogo mediante un'altra lamina che tagliasse s in un altro punto e troveremmo, naturalmente, che l'integrale si riduce al solo elemento $\mathcal{S} \cdot MN$ e tende a zero col tendere di M ad N . Resta quindi, per una linea s concatenata una sola volta colla spira,

(VI, 6)

$$\int_s \mathcal{S} \cdot ds = 4\pi \frac{I}{c}.$$

Se la linea chiusa s fosse concatenata n volte con l [come per es. la s' ,

(*) Ciò significa che qualunque superficie avente per contorno l taglia almeno una volta s ; se la tagliasse necessariamente almeno n volte diremmo che s è concatenata n volte con l .

Annali della fisica...
C. Long I

in fig. 115, per cui $n = 2$] essa attraverserebbe n volte nello stesso senso la lamina e quindi si troverebbe, per la circuitazione, il valore $4\pi n I/c$. Per una linea non concatenata col circuito, la circuitazione risulta evidentemente zero, come nel campo elettrostatico. Dunque in ogni caso la circuitazione del campo lungo una linea chiusa concatenata n volte con la corrente e percorsa nel verso positivo è $4\pi n I/c$. (*)

§ 122. Campo magnetico prodotto da correnti solenoidali stazionarie.

La (VI, 6) si presta ad un'ovvia generalizzazione.

Supponiamo che la corrente, anzichè percorrere un filo sottile, percorra un conduttore di forma e dimensioni qualunque, e sia \mathbf{j} la densità di corrente [§ 53] (funzione del posto). Ci limiteremo per ora al caso che \mathbf{j} sia costante nel tempo, cioè $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0$, e che inoltre sia solenoidale, cioè $\text{div } \mathbf{j} = 0$: se si ricorda l'« equazione di continuità » [§ 53]

$$(VI, 7) \quad \text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

si vede che ciò equivale ad ammettere che sia $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, cioè che anche la densità di carica elettrica sia dappertutto costante nel tempo, e quindi che tutto il fenomeno sia stazionario.

Consideriamo, ora, un tubo di flusso del vettore \mathbf{j} : il flusso attraverso esso sarà lo stesso in tutte le sezioni [cfr. § 8] e rappresenterà l'intensità di corrente che percorre il tubo [il quale di conseguenza dovrà essere chiuso su se stesso]. Potremo dunque pensare decomposto il conduttore in un fascio di tubi di flusso infinitamente sottili [« filetti di corrente »] ed assimilare ognuno di essi alla spira dei §§ precedenti: in virtù del risultato sperimentale c) del § 119 potremo calcolare il campo magnetico in un qualunque punto come risultante dei campi dovuti ai singoli filetti di corrente. Serviamoci di questa considerazione per calcolare la circuitazione lungo una linea chiusa s che circonda il conduttore [concatenandosi ad esso una volta]: essa sarà la somma delle circuitazioni relative ai singoli filetti di corrente, ossia $4\pi/c$ per la somma delle loro intensità di corrente. Ma questa somma è l'intensità totale I che percorre il conduttore, dunque la detta circuitazione è ancora uguale a $4\pi I/c$, come per il conduttore lineare.

(*) Questo ha per conseguenza che se ad un polo magnetico viene fatta percorrere una linea chiusa concatenata colla corrente, il campo magnetico compie un lavoro non nullo: ciò non contraddice il principio della conservazione dell'energia, perchè il detto lavoro è fatto (ed assorbito) dalla sorgente che alimenta la corrente elettrica.

Tutto quanto abbiamo detto fin qui riguarda il campo magnetico *all'esterno* del conduttore che lo produce, poichè le esperienze da cui siamo partiti sono fatte in queste condizioni. Tuttavia l'esperienza dimostra indirettamente che ciò si può estendere ai punti *interni* al conduttore, osservando che se la linea s decorre [in tutto od in parte] nell'interno del conduttore, soltanto alcuni dei filetti saranno concatenati con essa, ed il campo magnetico dovuto ad essi avrà come circuitazione $4\pi I/c$, dove I è la loro intensità complessiva, mentre il campo dovuto agli altri filetti avrà lungo s una circuitazione nulla. Potremo dunque dire in ogni caso che

se la corrente è dappertutto solenoidale e costante, vale dappertutto la (VI, 3), e per qualunque linea chiusa s vale la (VI, 6), dove per I si deve intendere l'intensità della corrente che è concatenata colla linea s [cioè il flusso di j attraverso una superficie avente per contorno s].

§ 123. Prima equazione di Maxwell (per correnti solenoidali stazionarie).

La legge della circuitazione che abbiamo enunciato alla fine del § prec., può essere facilmente tradotta in una equazione differenziale.

Infatti, esprimendo la corrente I come flusso di j attraverso una qualsiasi superficie σ avente per contorno s ⁽¹⁾, si può scrivere [§ 5]

$$I = \int_{\sigma} \mathfrak{S}_s ds = \frac{4\pi}{c} \int_{\sigma} j_n d\sigma.$$

Per mezzo del teorema di Stokes [(I, 37)], il 1° membro si può trasformare in un integrale esteso a σ , e si può quindi scrivere

$$\int_{\sigma} \left[\text{rot } \mathfrak{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right]_n d\sigma = 0.$$

Infine, poichè la superficie σ è arbitraria, si conclude [§ 7, nota 2] che la funzione sotto il segno di integrale è nulla, ed, essendo pure arbitraria la direzione n , segue che è nullo il vettore fra [], ossia che

$$(VI, 8) \quad \text{rot } \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

È questa l'equazione differenziale cercata, dovuta a Maxwell. Essa è una relazione vettoriale e quindi equivale a tre equazioni differenziali scalari che si scriverebbero immediatamente [cfr. § 13].

⁽¹⁾ Il verso positivo della normale a σ deve essere legato al verso positivo su s dalla solita regola « del cavatappi » [§ 13, nota 2].

Dalla (VI, 8) si ricava il risultato, già noto, che dove è $\mathbf{j} = 0$ il campo magnetico ammette un potenziale [poichè ivi $\text{rot } \mathfrak{H} = 0$, v. § 13]. Si noti però che nei punti interni a conduttori percorsi da corrente il campo, invece, non ammette potenziale.

§ 124. Prima legge di Laplace.

Possiamo dalla (VI, 8) [unitamente alla (VI, 3) ed alle condizioni all'infinito] ricavare un'espressione esplicita di \mathfrak{H} . Infatti dalla (VI, 8), applicando l'operatore rot ad ambo i membri ed osservando che per qualsiasi vettore Φ vale l'identità ⁽¹⁾

$$(VI, 9) \quad \text{rot rot } \Phi = \text{grad div } \Phi - \Delta \Phi,$$

si ha

$$\text{grad div } \mathfrak{H} - \Delta \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j},$$

e, per la (VI, 3),

$$\Delta \mathfrak{H} = - \frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}.$$

Questa equivale a tre equazioni scalari per $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$, ognuna delle quali è della forma dell'equazione di Poisson (§ 44) [con $(\text{rot } \mathbf{j})_x/c, (\text{rot } \mathbf{j})_y/c, (\text{rot } \mathbf{j})_z/c$ al posto di ρ ed $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$ al posto di V]. Ma sappiamo [v. § 45] che la sola soluzione dell'equazione di Poisson che sia regolare e soddisfi le condizioni normali all'infinito è $V(P) = \int_S \frac{\rho dS}{r}$: quindi varranno per le componenti di \mathfrak{H} tre formule analoghe che possiamo riassumere vettorialmente in

$$(VI, 10) \quad \mathfrak{H}(P) = \frac{1}{c} \int_S \frac{\text{rot } \mathbf{j} dS}{r},$$

dove lo spazio S è tutto lo spazio percorso da correnti, r è la distanza fra P e il punto M , variabile in S , e \mathbf{j} è funzione delle coordinate di M .

Da questa espressione di \mathfrak{H} se ne può ricavare un'altra di più facile interpretazione intuitiva.

⁽¹⁾ Si verifica infatti subito, per quanto riguarda ad esempio la componente secondo l'asse x [cfr. (I, 33)], che

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) = \Delta \Phi_x.$$

Ricordando, infatti, la (I, 34), possiamo scrivere, considerando r e j funzioni del punto variabile $M(\xi, \eta, \zeta)$,

$$\text{rot}_M \left(\frac{1}{r} \mathbf{j} \right) = \frac{\text{rot}_M \mathbf{j}}{r} + \text{grad}_M \frac{1}{r} \wedge \mathbf{j}.$$

Ora, la funzione integranda nella (VI, 10) è proprio $(\text{rot}_M \mathbf{j})/r$: si può quindi scrivere

$$(VI, 10') \quad \mathbf{H}(P) = \frac{1}{c} \int_S \text{rot}_M \left(\frac{1}{r} \mathbf{j} \right) dS - \frac{1}{c} \int_S \text{grad}_M \frac{1}{r} \wedge \mathbf{j} dS.$$

Il primo integrale poi si può trasformare, col lemma di Gauss [(I, 12)], in uno esteso alla superficie σ che limita S : infatti, considerandone per es. la componente x , si ha

$$\int_S \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} j_x \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r} j_y \right) \right] dS = \int_{\sigma} (j_x \beta - j_y \gamma) \frac{d\sigma}{r}.$$

E poichè σ deve contenere nel suo interno tutti i punti percorsi da corrente [escludiamo il caso che vi siano correnti a distanza infinita] su σ si ha $\mathbf{j} = 0$ e quindi il primo integrale della (VI, 10') è nullo. In definitiva, ponendo $M - P = \mathbf{r}$ e ricordando che

$$\text{grad}_M \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

la (VI, 10') si può scrivere

(VI, 11)

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int_S \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{j}}{r^3} dS.$$

Questo risultato diviene particolarmente espressivo se si applica al caso di una corrente percorrente una spira l . In tal caso, detta σ la sezione del filo e dl un elemento di lunghezza di esso, si può porre $dS = \sigma dl$; inoltre, introducendo il vettore infinitesimo $d\mathbf{l}$ [tangente al filo, nella direzione che si è assunta (arbitrariamente) come positiva, e di modulo dl] si può scrivere

$$j\sigma dl = I d\mathbf{l}$$

[dove I è l'intensità $j\sigma$, considerata positiva se percorre la spira nel verso positivo]. Si ha dunque in definitiva

(VI, 12)

$$\mathbf{H} = \frac{I}{c} \int_l \frac{\mathbf{r} \wedge d\mathbf{l}}{r^3},$$

formula che, presentando \mathbf{H} come integrale curvilineo esteso a tutta la spira, può essere interpretata dicendo che ogni elemento dl del circuito percorso da una corrente I produce in P un campo

(VI, 13)

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{c} \frac{\mathbf{r} \wedge d\mathbf{l}}{r^3}.$$

È questa la cosiddetta *prima legge di Laplace*, secondo cui $d\mathbf{H}$ è ortogonale ad \mathbf{r} e $d\mathbf{l}$, diretto in modo che \mathbf{r} , $d\mathbf{l}$, $d\mathbf{H}$ costituiscano, in quest'ordine, una terna destrorsa, e di grandezza

$$d\mathcal{H} = \frac{I}{c} \frac{dl \sin \theta}{r^2},$$

chiamando θ l'angolo tra \mathbf{r} e $d\mathbf{l}$ [v. fig. 116 in cui è messo in evidenza il piano che contiene \mathbf{r} e $d\mathbf{l}$].

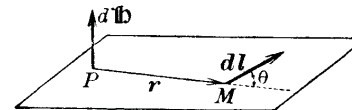


Fig. 116.

Si noti però che la decomposizione di \mathbf{H} in elementi dovuti ai singoli dl è puramente fittizia, essendo impossibile attribuire un significato fisico ad un elemento dl di corrente stazionaria isolato dal resto del circuito.

§ 125. Applicazioni.

Il calcolo del campo magnetico prodotto da date correnti si può fare con l'una o con l'altra delle leggi che abbiamo enunciato [principio di equivalenza, formula della circuitazione, formula (VI, 10) e legge di Laplace], la scelta essendo suggerita da criteri di opportunità. Mostriamo due esempi importanti.

1. - *Campo di una corrente rettilinea indefinita.* La corrente I_0 percorra un conduttore cilindrico di raggio R e di lunghezza illimitata: la densità di corrente [se il conduttore è omogeneo] sarà uniforme in tutta la sezione. Il campo \mathbf{H} in un punto P qualsiasi a distanza r dall'asse sarà normale al piano determinato da P e dall'asse [come si riconosce pensando, anche solo qualitativamente, alla legge di Laplace] così che le linee di forza saranno cerchi aventi per asse l'asse del conduttore (fig. 117). Inoltre, per ragioni di simmetria, \mathcal{H} sarà costante lungo uno di questi cerchi, il che ci permette di calcolarlo assai semplicemente mediante la formula (VI, 6) della circuitazione. Infatti, la circuitazione lungo

il detto cerchio di raggio r è $2\pi r \mathfrak{S}$, la corrente concatenata col cerchio è $I = I_0$ se $r > R$, $I = I_0 r^2 / R^2$ se $r < R$: applicando la (VI, 6) si ha dunque

$$(VI, 14) \quad \mathfrak{S} = \frac{2}{c r} I_0, \quad \text{per i punti esterni al conduttore, } (r > R),$$

$$(VI, 14') \quad \mathfrak{S} = \frac{2}{c} \frac{r}{R^2} I_0, \quad \text{» » » interni » » } (r < R).$$

La prima di queste formule esprime la cosiddetta *legge di Biot e Savart*. Il conduttore rettilineo indefinito rappresenta naturalmente un caso limite:

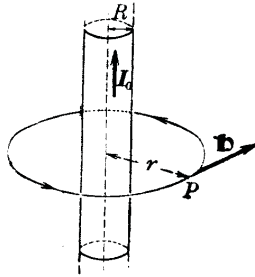


Fig. 117.

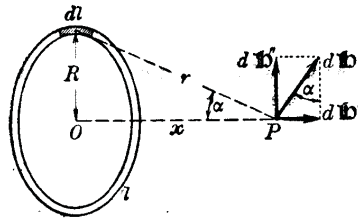


Fig. 118.

le formule (VI, 14) e (VI, 14') sono praticamente applicabili purchè la distanza di P dalla parte non rettilinea sia grande rispetto ad r .

2. - *Campo di una spira circolare in un punto dell'asse*. Per calcolare il campo \mathfrak{B} di una spira circolare, l , di raggio R [v. fig. 118] in un punto P del suo asse, a distanza x dal centro, conviene servirsi della legge di Laplace. L'elemento dl di spira produce un campo di intensità

$$d\mathfrak{S} = \frac{I_0 dl}{c r^2},$$

[essendo in tal caso $\theta = 90^\circ$ lungo tutta la spira] che possiamo decomporre in una componente lungo l'asse, di intensità $d\mathfrak{S}' = d\mathfrak{S} \cdot \sin \alpha$, ed in una normale all'asse, di intensità $d\mathfrak{S}'' = d\mathfrak{S} \cdot \cos \alpha$. Nel sommare i contributi di tutti gli elementi della spira, le componenti $d\mathfrak{S}''$ si elidono tra loro per simmetria [quindi \mathfrak{B} giace lungo l'asse] e resta

$$\mathfrak{S} = \int_i d\mathfrak{S}' = \frac{I_0 \sin \alpha}{c r^2} \int_i dl = \frac{I_0}{c r^2} 2\pi R \sin \alpha,$$

ovvero, poichè $\sin \alpha = R/r$ ed $r = \sqrt{R^2 + x^2}$,

$$(VI, 15) \quad \mathfrak{S} = \frac{I_0 2\pi R^2}{c r^3} = 2\pi \frac{I_0}{c} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

In particolare il campo nel centro O della spira [$x = 0$] è

$$(VI, 15') \quad \mathfrak{S} = \frac{I_0 2\pi}{c R}$$

[formula che è fondamentale nella teoria dell'antico strumento detto *bussola delle tangenti*], che serviva a misurare I_0 confrontando \mathfrak{S} col campo magnetico terrestre].

Il calcolo del campo in punti fuori dell'asse è notevolmente più complicato.

§ 126. Deduzione del principio di equivalenza dalla prima legge di Laplace.

La legge di Laplace è stata da noi dedotta partendo dal principio di equivalenza attraverso successive trasformazioni e generalizzazioni che hanno condotto alla (VI, 11) e poi, particolarizzando, alla (VI, 12). Non sarà inutile far vedere come, inversamente, da questa si possa ricavare il principio di equivalenza.

Partiamo dalla legge di Laplace nella forma (VI, 12) e calcoliamo, per es., la componente \mathfrak{S}_x del campo nel punto generico $P(x, y, z)$. A tale scopo indichiamo con \mathbf{i} un vettore unitario parallelo all'asse x : avremo

$$\mathfrak{S}_x = \mathbf{i} \times \mathfrak{B} = \frac{I}{c} \int_i \frac{\mathbf{i} \times \mathbf{r} \wedge d\mathbf{l}}{r^3}$$

e, per una nota proprietà di calcolo vettoriale,

$$\mathfrak{S}_x = \frac{I}{c} \int_i \frac{\mathbf{i} \wedge \mathbf{r} \times d\mathbf{l}}{r^3}.$$

Introducendo il vettore

$$(VI, 16) \quad \mathbf{\Gamma} = \frac{\mathbf{i} \wedge \mathbf{r}}{r^2},$$

potremo scrivere

$$\mathfrak{S}_x = \frac{I}{c} \int_i \mathbf{\Gamma} \times d\mathbf{l} = \frac{I}{c} \int_i \mathbf{\Gamma}_i dl.$$

Trasformiamo questo integrale col teorema di Stokes, (I, 37), chiamando σ una superficie arbitraria avente l per contorno, \mathbf{n} la sua normale [orientata colla solita regola] ed $M(\xi, \eta, \zeta)$ il punto generico variabile su σ : avremo

$$(VI, 17) \quad \mathfrak{S}_x = \frac{I}{c} \int_\sigma (\text{rot}_M \mathbf{\Gamma})_n d\sigma.$$

Per calcolarlo notiamo che la (VI, 16) si può scrivere

$$(VI, 18) \quad \mathbf{\Gamma} = -\mathbf{i} \wedge \text{grad}_M \frac{1}{r} = \left(0, \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r}, -\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} \right),$$

e per definizione di rot_M [(I, 33)], e per essere $\Delta \frac{1}{r} = 0$, si ha subito

$$\text{rot}_M \mathbf{\Gamma} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{r}, \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{r}, \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{1}{r} \right) = \text{grad}_M \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r}$$

e quindi [(I, 8')], essendo r funzione di ξ ed x solo nella combinazione $\xi - x$,

$$(\text{rot}_M \mathbf{\Gamma})_n = \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} = - \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{d}{dn} \frac{1}{r}.$$

Sostituendo nella (VI, 17) e portando l'operatore $\frac{\partial}{\partial x}$ fuori del segno di integrale [si ricordi che l'integrazione è fatta tenendo costanti x, y, z e variando ξ, η, ζ] si ottiene

$$\mathfrak{S}_x = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{I}{c} \int_a \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma.$$

Operando analogamente per \mathfrak{S}_y ed \mathfrak{S}_z si vede che si può scrivere

$$(VI, 19) \quad \mathbf{b} = - \text{grad}_P \mathcal{F},$$

con

$$\mathcal{F} = \frac{I}{c} \int_a \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma,$$

e questa è proprio l'espressione del potenziale [in un mezzo di permeabilità μ] di un doppio strato uniforme di potenza $\mu I c$, distribuito sulla superficie σ [v. § 51].

§ 127. Correnti di spostamento. Forma generale della prima equazione di Maxwell.

La (VI, 8) è stata da noi stabilita con la restrizione che \mathbf{j} sia costante nel tempo e solenoidale. Che quest'ultima condizione sia necessaria, si riconosce immediatamente prendendo la div dei due membri della (VI, 8) e ricordando, [(I, 41)], che $\text{div rot } \mathbf{b} = 0$. Dunque quando la densità di corrente \mathbf{j} non è solenoidale, il campo da essa prodotto dovrà soddisfare un'equazione diversa dalla (VI, 8), che però deve contenere questa come caso particolare. Questa generalizzazione della (VI, 8) fu genialmente intuuta dal Maxwell e si può trovare con la guida del seguente ragionamento.

La densità di corrente \mathbf{j} soddisfa, anche nel caso più generale, l'equazione di continuità, (VI, 7),

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

che si può scrivere, poichè ρ è legato all'induzione elettrica \mathbf{D} dalla (III, 57),

$$(VI, 20) \quad \text{div} \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Dunque, anche se non è solenoidale il vettore \mathbf{j} , è sempre tale il vettore $\mathbf{j} + \mathbf{j}^*$ con

$$(VI, 21) \quad \mathbf{j}^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

ciò suggerisce l'ipotesi che, per generalizzare la (VI, 8) a correnti del tutto qualsiasi, si debba sostituire $\mathbf{j} + \mathbf{j}^*$ a \mathbf{j} , cioè scrivere

$$(VI, 22) \quad \text{rot } \mathbf{b} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

È questa la forma più generale della *prima equazione di Maxwell*, che si riduce alla (VI, 8) se \mathbf{D} è indipendente da t [nel qual caso, come risulta dalla (VI, 20), il vettore \mathbf{j} è solenoidale]. L'ipotesi che essa contiene si deve oggi ritenere sperimentalmente provata, e ciò non solo per \mathbf{j} costante, ma anche se \mathbf{j} varia comunque nel tempo, [v. p. es., § 148].

Per meglio comprendere l'ipotesi che ci ha condotto alla (VI, 22), esaminiamo il significato del campo vettoriale \mathbf{j}^* .

Il vettore \mathbf{j}^* , come si vede dalla definizione (VI, 21), è diverso da zero in tutti i punti dove vi è un campo elettrico variabile: se nel vuoto

$$\mathbf{j}^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

se in un dielettrico normale [§ 60] di costante dielettrica ϵ

$$\mathbf{j}^* = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Consideriamo, per es., un condensatore (fig. 119) che, inizialmente carico, viene scaricato attraverso un filo conduttore l . Finchè dura la scarica, l è percorso da una corrente I , che ci dà l'esempio di una *corrente aperta*, poichè essa non percorre un circuito chiuso [essa, infatti, è dovuta a cariche che, accumulate

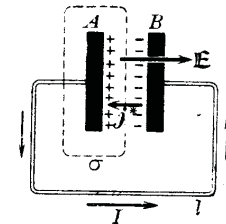


FIG. 119.

in una delle armature, passano all'altra]. Ciò val quanto dire che la densità di corrente \mathbf{j} non è dappertutto continua e solenoidale, come si riconosce immaginando tracciata una superficie chiusa σ che circonda una delle armature, per es. la positiva, ed osservando che il flusso di \mathbf{j} attraverso σ non è zero [infatti, vi è un flusso uscente attraverso la parte di σ che taglia il conduttore l , non compensato da alcun flusso entrante]: ciò proviene dal fatto che \mathbf{j} è discontinuo sulle facce delle armature. Ma nello spazio fra le due armature il campo elettrico \mathbf{E} diminuisce man mano che il condensatore si scarica: vi è dunque ivi un campo vettoriale \mathbf{j}^* diretto in senso opposto ad \mathbf{E} , cioè verso l'armatura positiva. Ed un semplice calcolo prova ⁽¹⁾ che il flusso di \mathbf{j}^* entrante in σ è uguale ad I e quindi compensa il flusso uscente di \mathbf{j} , in modo che il flusso totale di $\mathbf{j} + \mathbf{j}^*$ è nullo. Da ciò si vede che il vettore \mathbf{j}^* , pur non rappresentando una vera corrente, costituisce in certo modo la continuazione della corrente attraverso lo spazio fra le due armature. È per questo che \mathbf{j}^* vien detto « corrente di spostamento » [la parola « spostamento » si riferisce ad un modello meccanico ormai abbandonato]. E l'ipotesi che ci ha condotto alla (VI, 22) consiste nell'ammettere che le correnti di spostamento producano gli stessi effetti delle vere correnti elettriche.

Questa ipotesi è confermata a posteriori dalla esistenza e dalle proprietà delle onde elettromagnetiche, nelle quali il campo magnetico, come vedremo, è prodotto unicamente da correnti di spostamento.

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

§ 128. Induzione elettromagnetica. Legge di Neumann.

È noto il fenomeno [scoperto da Faraday nel 1831] che se una spira conduttrice si trova in un campo magnetico variabile, oppure si muove, o si deforma, in un campo magnetico, nasce in essa una corrente indotta.

Ammissa, sulla base dell'esperienza, l'esistenza di tale fenomeno, possiamo dedurne la legge quantitativa dalle precedenti leggi elettromagnetiche e dal principio della conservazione dell'energia. Conside-

⁽¹⁾ Facciamo il calcolo supponendo il condensatore « sottile » (§ 69) ed $\epsilon = 1$. Allora, detta S l'area delle armature e Q la carica dell'armatura positiva al tempo t , la densità superficiale è $e_\sigma = Q/S$, ed il campo fra le armature è uniforme e, preso l'asse x ad esso parallelo, è dato da $\mathcal{C} = \mathcal{C}_x = 4\pi e_\sigma = 4\pi Q/S$ (§ 49); quindi $i_x^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{C}_x}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t}$, e poichè [per la definizione di intensità di corrente] la quantità $-dQ$ di elettricità che passa attraverso il circuito nel tempo dt [dall'armatura positiva alla negativa] vale $I dt$, si ha $i_x^* = -\frac{I}{S}$, mentre fuori dello spazio fra le armature è $i^* = 0$. Il flusso di \mathbf{j}^* che entra in σ entra dunque solo attraverso l'area S e vale $-S i_x^* = I$.

riamo infatti una spira di resistenza R che si trovi in presenza di un magnete in movimento, in modo che il flusso Φ del relativo vettore $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ [flusso di induzione] vada crescendo col tempo: sia I l'intensità della corrente indotta che nasce nella spira e supponiamo che, per il tempo che consideriamo, I si mantenga costante. Questa corrente crea a sua volta un campo magnetico che agisce sul magnete, così che per mantenere questo in movimento occorre compiere un certo lavoro; d'altra parte nella spira si sviluppa del calore per effetto Joule. Per il principio della conservazione dell'energia il lavoro compiuto deve essere l'equivalente del calore sviluppato ⁽¹⁾. Ora, tale calore, espresso in erg, è, nel tempo dt [v. (III, 41)],

$$(VI, 23) \quad RI^2 dt.$$

D'altra parte il lavoro compiuto nel tempo dt si può calcolare, per il principio di equivalenza, come se si trattasse del moto di un magnete in presenza di una lamina magnetica, ed è quindi uguale all'aumento dQ_0 della relativa energia potenziale (VI, 4): quindi è $-Id\Phi/c$. Eguagliando alla (VI, 23), e sopprimendo il fattore comune I [per ipotesi $\neq 0$], si ricava

$$(VI, 24) \quad I = -\frac{1}{Rc} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Se ricordiamo [v. § 53] che per i circuiti chiusi vale la legge di Ohm nella forma $IR = E$, dove E è la « forza elettromotrice » operante nel circuito, vediamo che la (VI, 24) si può interpretare dicendo che la variazione del flusso d'induzione concatenato alla spira crea in questa una « forza elettromotrice indotta » data dalla legge [di Neumann]

$$(VI, 25) \quad E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

[dove il verso positivo per E e quello per Φ si intendono legati dalla solita « regola del cavatappi » (§ 13, nota 1)].

Questa formula, che abbiamo dimostrato nell'ipotesi che la spira sia rigida ed immersa in un mezzo illimitato e privo d'isteresi, ha validità generale [anche se il flusso cambia per effetto di una deformazione della spira].

§ 129. Circuitazione del campo elettrico.

Ricordiamo ora, dal § 53, la definizione generale (III, 40₄) di forza elettromotrice operante in un circuito chiuso, ed osserviamo che nel caso presente, essendo la spira omogenea, la « forza impressa » $\mathbf{E} \times$ è dappertutto nulla. Vediamo così che la forza elettromotrice indotta si

⁽¹⁾ Si potrebbe dimostrare che l'energia del campo magnetico totale non varia (v. Appendice I).

può esprimere con

$$(VI, 26) \quad E = \int_s \mathfrak{E}_s ds,$$

vale a dire, essa rappresenta la circuitazione del campo elettrico presa lungo tutta la spira. Con ciò la (VI, 25) diviene

$$(VI, 27) \quad \int_s \mathfrak{E}_s ds = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Si vede così che un campo elettrico può essere generato non solo dall'azione coulombiana di cariche elettriche [come tutti quelli che abbiamo considerato finora] ma anche dalla variazione di un campo magnetico, e in tal caso esso in generale *non deriva da un potenziale*, come mostra il fatto che la sua circuitazione lungo una linea chiusa può non essere nulla. Si vedrà al § 145 quale formula si debba sostituire in generale alla formula dell'elettrostatica $\mathfrak{E} = -\text{grad } V$.

Il fenomeno dell'induzione elettromagnetica può dar luogo a una differenza di potenziale, che si rende manifesta nel modo seguente. Si interrompa la spira in un punto, lasciando gli estremi A, B affacciati a brevissima distanza. Quando varia il flusso Φ , si produce, in luogo di una corrente indotta [che non potrebbe circolare a causa dell'interruzione] una *differenza di potenziale indotta* tra A e B , che si potrebbe misurare con un elettrometro, e che uguaglia il valore della circuitazione di \mathfrak{E} lungo la spira [trascurando il brevissimo tratto AB], ossia è uguale ad E .

Bisogna ora osservare che nella legge dell'induzione sotto la forma (VI, 27) non figura affatto la resistenza della spira [la quale influisce sulla corrente I ma non sul campo \mathfrak{E}]. Se quindi pensiamo la spira costituita da un filo isolante, anziché conduttore, abbiamo che le variazioni di Φ producono nell'interno di esso un campo elettrico \mathfrak{E} soddisfacente la (VI, 27). Ma è chiaro allora che la presenza materiale del filo è inutile per la validità della (VI, 27) e che essa deve valere anche se s è una linea ideale, tracciata attraverso qualsiasi corpo conduttore od isolante, o attraverso il vuoto.

§ 130. Seconda equazione di Maxwell.

La (VI, 27), generalizzata come si è detto, rappresenta una relazione fondamentale fra campi elettrici e magnetici, che può venire tradotta in equazione differenziale con processo analogo a quello del § 123. Infatti, ricordando il significato di Φ , essa si può scrivere

$$\int_s \mathfrak{E}_s ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_o \mathfrak{B}_n d\sigma$$

[dove σ è una qualsiasi superficie avente per contorno s] ed, applicando al 1° membro il teorema di Stokes (I, 37),

$$\int_o \left(\text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right)_n d\sigma = 0.$$

Dovendo questa relazione valere per qualunque superficie σ , se ne ricava [§ 7, nota 2]

$$(VI, 28) \quad \text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Questa relazione vettoriale [equivalente a tre equazioni differenziali scalari] è la *seconda equazione di Maxwell*.

Confrontando la (VI, 28) con la (VI, 22) si trovano suggestive analogie facendo corrispondere \mathfrak{E} ad \mathfrak{H} e \mathfrak{B} a $-\mathfrak{D}$. Manca in essa il termine corrispondente a $\frac{4\pi}{c} \mathfrak{j}$ [e ciò in accordo col fatto che non esistono correnti di magnetismo] ma il termine $-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ è del tutto analogo al termine $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ della (VI, 22), proveniente dalla corrente di spostamento. Questo ci autorizza a chiamare « *corrente di spostamento magnetica* » il vettore $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$ [definito analogamente alla (VI, 21)] e ad interpretare il fenomeno dell'induzione elettromagnetica dicendo: *una corrente [di spostamento] magnetica genera un campo elettrico con la stessa legge [salvo il segno] con cui una corrente elettrica genera un campo magnetico.*

FORZE MAGNETICHE SULLE CORRENTI ELETTRICHE

§ 131. Forza esercitata da un campo magnetico su un conduttore percorso da corrente.

L'esperienza dimostra che se un filo conduttore percorso da corrente si trova in un campo magnetico esso, per questo fatto, è sollecitato da una forza normale al filo ed al campo [è questo, come è noto, il fondamento dei motori elettrici]. Mostriamo ora che questo fatto è una conseguenza dei principi già ammessi precedentemente e troveremo, così, anche la legge quantitativa del fenomeno.

Consideriamo una spira percorsa da una corrente I [generata, per es., da una pila A (v. fig. 120)] immersa in un campo magnetico, in un mezzo di permeabilità μ . Una lamina magnetica σ , ad essa equivalente,

avrebbe l'energia potenziale [v. (VI, 4)]

$$Q_0 = -\frac{I}{c} \Phi,$$

dove Φ è, al solito, il flusso d'induzione concatenato alla spira. Supponiamo ora che un elemento infinitesimo della spira, dl , sia mobile [senza interrompere il circuito elettrico: per es. per mezzo di due contatti striscianti su due guide g, g'] e supponiamo di dargli una traslazione infinitesima τ [mentre si provvede a mantenere costante la corrente I]. Se dF è la forza che il campo magnetico esercita su dl , il lavoro necessario per spostarlo sarà $-\tau \times dF$: ammettendo che esso sia pari al lavoro necessario per produrre la stessa variazione sul contorno della lamina equivalente, cioè all'aumento dQ_0 di energia potenziale che deriverebbe dallo spostamento, si ha

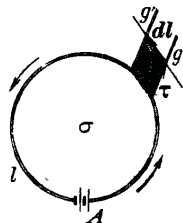


FIG. 120.

$$-\tau \times dF = dQ_0.$$

Ora, $dQ_0 = -I d\Phi/c$ dove $d\Phi$ è il flusso d'induzione attraverso l'elemento $d\sigma$ di area che si genera per lo spostamento, quindi [§ 5]

$$dQ_0 = -\frac{I}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{n} d\sigma,$$

essendo \mathbf{n} la normale a σ orientata nel solito modo. Ma, per definizione di prodotto vettoriale, $\tau \wedge dl = \mathbf{n} d\sigma$, quindi

$$dQ_0 = -\frac{I}{c} \mathbf{B} \times \tau \wedge dl = \frac{I}{c} \mathbf{B} \times dl \wedge \tau = \frac{I}{c} \mathbf{B} \wedge dl \times \tau.$$

Sostituendo nella (VI, 29) e notando che l'uguaglianza deve sussistere per qualunque τ , si ha

$$dF = -\frac{I}{c} \mathbf{B} \wedge dl,$$

ovvero, se il mezzo è magneticamente normale [§ 73],

(VI, 30)

$$dF = \mu \frac{I}{c} dl \wedge \mathbf{H}.$$

È questa la legge cercata [seconda legge di Laplace] ed è in perfetto accordo coi risultati dell'esperienza. Essa esprime che la forza dF esercitata da un campo magnetico \mathbf{H} su un elemento lineare dl di corrente è normale ad \mathbf{H} e dl , diretta in modo che dl, \mathbf{H}, dF costituiscano, in quest'ordine, una terna destrorsa, ed ha grandezza

$$dF = \mu \frac{I}{c} dl \mathcal{H} \sin \theta,$$

se θ è l'angolo fra dl ed \mathbf{H} [v. fig. 121 in cui è messo in evidenza il piano che contiene dl ed \mathbf{H}].

Se invece di un filo la corrente percorre uno spazio a tre dimensioni, si può considerare ogni tubetto di flusso infinitamente sottile della densità di corrente \mathbf{j} come una corrente lineare; su un trattino di esso di sezione $d\sigma$ [normale a \mathbf{j}] e lunghezza dl [quindi di volume $dS = d\sigma dl$] agisce una forza dF data dalla (VI, 30), che, poichè $I dl = \mathbf{j} d\sigma dl = \mathbf{j} dS$, diviene

(VI, 31)

$$dF = \frac{\mu}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{H} dS.$$

Se, poi, oltre al campo magnetico \mathbf{H} , si ha un campo elettrico \mathbf{E} , e ρ

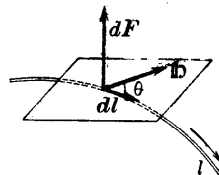


Fig. 121.

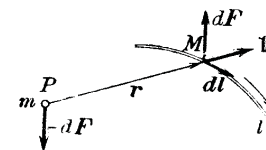


Fig. 122.

è la densità di carica in dS , la forza totale cui è soggetto l'elemento dS sarà

(VI, 31₁)

$$dF = (\rho \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{H}) dS.$$

Supponiamo che su un elemento di spira dl [v. fig. 122] agisca solo il campo \mathbf{H} dovuto ad un polo magnetico m posto in P : detto M un punto di dl ed \mathbf{r} il vettore $M - P$, sarà, per la legge di Coulomb [cfr. § 73],

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} m \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

quindi la forza esercitata sull'elemento di corrente dl sarà

$$dF = \frac{I}{c} m \frac{dl \wedge \mathbf{r}}{r^3}.$$

ed è, si noti, indipendente da μ .

D'altra parte, secondo la (VI, 13), l'elemento dl esercita su m una forza

$$m d\mathbf{H} = m \frac{I}{c} \frac{\mathbf{r} \wedge dl}{r^3} = -dF.$$

Come si vede le due forze sono eguali ed opposte [ma non giacciono, in generale, sulla stessa retta]. Se ne conclude che la convenzione che ha condotto alla (VI, 13), benchè non sia l'unica possibile, ha il vantaggio di conservare nell'elettromagnetismo, sia pure in una forma più generale che nella ordinaria Meccanica, il principio di azione e reazione.

§ 132. Correnti di convezione. Forza di Lorentz.

Supponiamo che un corpo con densità elettrica ρ si muova con velocità \mathbf{v} : il flusso di carica elettrica attraverso un elemento di superficie $d\sigma$ fisso nello spazio si potrà calcolare come il flusso di un fluido [§ 5] e sarà $\rho \mathbf{v} \cdot d\sigma$: poichè d'altra parte esso deve essere eguale ad $j_n d\sigma$ per la definizione di \mathbf{j} [§ 53], si conclude che la carica in moto equivale ad una corrente di densità

$$(VI, 32) \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}.$$

Queste correnti, dette « di convezione », producono gli stessi effetti magnetici delle correnti di conduzione e risentono dal campo magnetico gli stessi effetti, come è provato sperimentalmente. Perciò, se il corpo carico si muove in un campo \mathbf{H} , esso ne risentirà una forza che potremo calcolare colla (VI, 31) tenendo presente la (VI, 32). Avremo quindi che un elemento di volume dS del corpo in movimento subisce una forza

$$(VI, 33) \quad d\mathbf{f} = \frac{\mu}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \rho dS;$$

essa si chiama « forza di Lorentz ». ⁽¹⁾ E se, oltre al campo magnetico \mathbf{H} , si ha un campo elettrico \mathbf{E} , la forza totale a cui è soggetto l'elemento di volume dS è, evidentemente,

$$(VI, 34) \quad d\mathbf{f} = \left(\mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \right) \rho dS.$$

Se il corpo si riduce a una carica puntiforme e , in moto con velocità \mathbf{v} , la forza che su esso agisce sarà

$$(VI, 34') \quad \mathbf{f} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \right).$$

§ 133. Quadro delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo.

Tutti i fenomeni elettromagnetici sono dunque governati dalle equazioni fondamentali (III, 57), (III, 105), (VI, 22) e (VI, 28) che qui riscriviamo ⁽²⁾

$$(VI, 35) \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (VI, 36) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$(VI, 37) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (VI, 38) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

⁽¹⁾ Questa forza, normale alla direzione del moto ed al campo, è quella che fa deviare gli elettroni dei raggi catodici in un campo magnetico.

⁽²⁾ Le (VI, 35) e (VI, 36) sono state dimostrate per campi statici, ma valgono anche per campi variabili col tempo.

Se i mezzi in cui si studiano i fenomeni sono omogenei e normali [§§ 60, 73] si possono eliminare da esse \mathbf{D} e \mathbf{H} colle relazioni $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \mu \mathbf{I}$ [(III, 59), (III, 107)] e, supponendo inoltre [come faremo, in genere, in seguito] che la costante dielettrica ϵ e la permeabilità magnetica μ siano costanti rispetto ad x, y, z, t , potremo scriverle nella forma seguente (di cui diamo pure la forma scalare equivalente):

$$(VI, 35')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho,$$

$$(VI, 35_1')$$

$$\text{cioè} \quad \frac{\partial \mathcal{C}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{C}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}_z}{\partial z} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho,$$

$$(VI, 36')$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$(VI, 36_1')$$

$$\text{cioè} \quad \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z} = 0.$$

$$(VI, 37')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$(VI, 37_1')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{C}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_y + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{C}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{C}_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$(VI, 37_2')$$

$$\text{cioè} \quad \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_y + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{C}_y}{\partial t},$$

$$(VI, 37_3')$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{C}_z}{\partial t},$$

$$(VI, 38')$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

$$(VI, 38_1')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{C}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{C}_y}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{C}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{C}_z}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{C}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{C}_x}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$(VI, 38_2')$$

$$\text{cioè} \quad \frac{\partial \mathcal{C}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{C}_z}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t}.$$

$$(VI, 38_3')$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{C}_x}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t}.$$

A queste si deve aggiungere la (VI, 30), o la (VI, 34), per le forze esercitate dal campo elettromagnetico.

ONDE ELETTROMAGNETICHE

§ 134. Radiazione elettromagnetica in un mezzo isolante.

Vogliamo ora studiare, in particolare, il campo elettromagnetico in un mezzo omogeneo e normale non conduttore e privo di cariche elettriche: porremo dunque nelle equazioni del § prec. $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, ottenendo

$$\begin{aligned} \text{(VI, 35'')} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \text{(VI, 36'')} \quad \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \text{(VI, 37'')} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \text{(VI, 38'')} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Osserviamo anzitutto che le equazioni sono soddisfatte se \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono costanti nel tempo, purchè siano irrotazionali e solenoidali: si ritrovano così i noti risultati dell'elettrostatica e della magnetostatica. Notiamo poi che, essendo le equazioni «lineari», potremo sempre aggiungere a qualunque soluzione un campo statico. Fissiamo, quindi, la nostra attenzione sui campi variabili col tempo.

Cominciamo con l'eliminare \mathbf{H} fra la (VI, 37'') e la (VI, 38''), per trovare un'equazione cui soddisfa \mathbf{E} . Applicando ai due membri della (VI, 37'') l'operatore $\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ ed a quelli della (VI, 38'') l'operatore rot , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{aligned}$$

ed osservando che i due operatori suddetti sono invertibili, e quindi il primo membro della prima equazione è uguale al secondo membro della seconda, si ha

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

dove si è posto

$$\text{(VI, 39)} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Ricordando ora la (VI, 9) e tenendo presente la (VI, 35''), si trova

$$\text{(VI, 40)} \quad \Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Con procedimento analogo si potrebbe eliminare \mathbf{E} fra la (VI, 37'') e la (VI, 38'') e si troverebbe

$$\text{(VI, 41)} \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

La (VI, 40) [e così la (VI, 41)] equivale a tre equazioni scalari della forma (V, 70): esse ci dicono dunque che il campo elettrico e quello magnetico si propagano per onde con velocità v data dalla (VI, 39). Nel vuoto tale velocità si identifica col coefficiente elettromagnetico c , e vale, quindi, $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, ossia 300.000 km/sec. La concordanza di questo numero colla velocità della luce misurata da Fizeau e da Foucault (1) indusse il Maxwell a ritenere che la luce fosse un fenomeno elettromagnetico. Questa ipotesi, confermata da numerosi argomenti [come in parte si vedrà nel seguito] ed estesa poi ad altre radiazioni non luminose, conferì particolare importanza allo studio del fenomeno, al quale dedichiamo, perciò, alcuni dei §§ seguenti.

§ 135. Onde elettromagnetiche piane.

Supponiamo che \mathbf{E} e \mathbf{H} dipendano solo da x e da t , cioè che le onde elettromagnetiche siano *piane* [cfr. § 115]: allora le equazioni (VI, 40) e (VI, 41) si riducono alla equazione delle corde vibranti [§ 78] e se ne ricava che ogni componente di \mathbf{E} e di \mathbf{H} è della forma dell'integrale di d'Alembert, (IV, 19). Figurano dunque in tal caso nella soluzione generale di (VI, 40) e (VI, 41) dodici funzioni arbitrarie. Ma le equazioni (VI, 40) e (VI, 41) sono ricavate dalle equazioni fondamentali (VI, 35''), (VI, 36''), (VI, 37''), (VI, 38''), con un processo di eliminazione, per cui, se è vero che ogni soluzione delle equazioni fondamentali soddisfa le (VI, 40) e (VI, 41), non è necessariamente vero il reciproco: le dette dodici funzioni non possono dunque essere scelte tutte arbitrariamente se si vuole soddisfare le equazioni fondamentali. Dobbiamo perciò risalire a queste e vedere che cosa divengono nella ipotesi particolare che \mathbf{E} ed \mathbf{H} dipendano solo da x e t . Esse si scrivono allora [cfr. § 133]

$$\begin{aligned} \text{(VI, 42)} \quad \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} &= 0, & \text{(VI, 43)} \quad \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} &= 0, \\ \text{(VI, 44}_1\text{)} \quad \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t} &= 0, & \text{(VI, 45}_1\text{)} \quad \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t} &= 0, \\ \text{(VI, 44}_2\text{)} \quad -\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t}, & \text{(VI, 45}_2\text{)} \quad \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial t}, \\ \text{(VI, 44}_3\text{)} \quad \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t}, & \text{(VI, 45}_3\text{)} \quad \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

(1) Il valore più attendibile di c dato al § 119 [Nota 2] è quello risultante dalle migliori determinazioni della velocità della luce [ridotta al vuoto] di cui si dispone oggi.

Dalle prime quattro si ricava, intanto, che \mathcal{C}_x ed \mathcal{S}_y sono costanti [sia rispetto ad x che a t], quindi, per l'osservazione fatta al principio del § prec., potremo prescindere da questi campi costanti, occupandoci solo della parte variabile dei campi, e porre

$$\mathcal{C}_x = 0, \quad \mathcal{S}_y = 0.$$

Ciò significa che il campo elettrico e quello magnetico sono ortogonali alla direzione di propagazione, ossia che le onde sono « trasversali ».

Supponiamo ora che \mathcal{C}_y abbia la forma caratteristica delle onde progressive [§ 79]

$$\mathcal{C}_y = f(x - vt)$$

[con f funzione arbitraria]. Le (VI, 44₂) e (VI, 45₃) ci danno allora

$$\frac{\partial \mathcal{S}_z}{\partial x} = \frac{\epsilon r}{c} f'(x - vt), \quad \frac{\partial \mathcal{S}_z}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} f'(x - vt),$$

cioè

$$d\mathcal{S}_z = f'(x - vt) \left(\frac{\epsilon r}{c} dx - \frac{c}{\mu} dt \right).$$

Ma, per la (VI, 39), $c/\mu = \epsilon r^2/c$, così che

$$d\mathcal{S}_z = \frac{\epsilon r}{c} f'(x - vt) d(x - vt)$$

e, con una immediata integrazione [fatta considerando $(x - vt)$ come una sola variabile] ⁽²⁾,

$$\mathcal{S}_z = \frac{\epsilon r}{c} f(x - vt) = \left| \frac{\epsilon}{\mu} \right. \mathcal{C}_y.$$

[prendendo uguale a zero la costante arbitraria additiva, che rappresenta un campo costante].

Similmente si troverebbe che \mathcal{C}_z ed \mathcal{S}_y sono legati da

$$\mathcal{S}_y = - \left| \frac{\epsilon}{\mu} \right. \mathcal{C}_z.$$

Data la linearità delle equazioni, potremo considerare la soluzione generale come combinazione lineare di due soluzioni particolari, una con $\mathcal{C}_z = \mathcal{S}_y = 0$, [cioè con \mathbf{E} parallelo all'asse y ed \mathbf{H} all'asse z], l'altra con $\mathcal{C}_y = \mathcal{S}_z = 0$, [cioè con \mathbf{E} parallelo all'asse z ed \mathbf{H} all'asse y].

Il piano determinato dalla direzione di propagazione e dal vettore \mathbf{E} si dice « piano di vibrazione » [cfr. § 115], quello determinato

⁽²⁾ La possibilità di questa integrazione deriva dall'aver scelto per \mathcal{C}_y una forma soddisfacente la (VI, 40) che rappresenta la condizione di integrabilità del $d\mathcal{S}_z$.

dalla direzione di propagazione e dal vettore \mathbf{H} si dice « piano di polarizzazione ». Noi studieremo in particolare le onde piane « polarizzate » nel piano (x, z) ed, in genere, nei §§ seguenti, ci riferiremo ad esse.

Decomponendo in serie od in integrale di Fourier [Cap. IV] la funzione f , possiamo considerare la soluzione in studio come somma od integrale di soluzioni sinusoidali del tipo

$$(VI, 46) \quad \mathcal{C}_y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt), \quad \mathcal{C}_x = \mathcal{C}_z = 0.$$

$$(VI, 47) \quad \mathcal{S}_z = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt), \quad \mathcal{S}_x = \mathcal{S}_y = 0.$$

e delle analoghe con cos al posto di sin. Ha quindi particolare interesse lo studio di queste soluzioni, che rappresentano « onde monocromatiche » di lunghezza d'onda λ , periodo $T = \lambda/c$, e frequenza

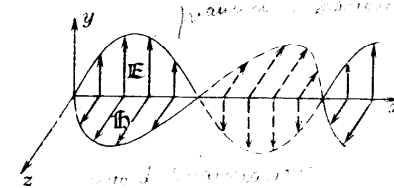


Fig. 123.

$\nu = c/\lambda$ [§ 77, nota 1]. I campi elettrico e magnetico in un dato istante nei vari punti dell'asse x [o di qualunque retta ad esso parallela] hanno per esse l'andamento dato nella figura 123: le due sinusoidi si spostano solidalmente verso destra con velocità v . I moduli dei due vettori \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono, in ogni punto ed in ogni istante, proporzionali (nel vuoto, uguali).

Le onde regressive, e quelle [progressive o regressive] polarizzate nel piano (x, y) , hanno struttura del tutto analoga: in ogni caso, come si riconosce facilmente, i vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} e la direzione di propagazione formano, in quest'ordine, una terna destrorsa.

Circa le onde naturali [cioè non polarizzate] e quelle polarizzate ellitticamente o circolarmente si può ripetere quanto si è detto, a § 115, a proposito delle onde elastiche trasversali.

§ 136. Classificazione delle radiazioni elettromagnetiche.

Le onde elettromagnetiche di cui abbiamo parlato nei §§ precedenti hanno proprietà fisiche diverse secondo la lunghezza d'onda, la quale può variare entro limiti amplissimi. I nomi che si danno ad

esse corrispondono, più che a determinati intervalli di lunghezza d'onda, al modo di produzione o di rivelazione di esse: e così avviene, per es., che vi sia un intervallo di lunghezze d'onda che appartiene tanto ai raggi X che ai raggi γ perchè tali radiazioni si possono ottenere sia da tubi a raggi X che da sostanze radioattive [e naturalmente sono, a pari lunghezza d'onda, fisicamente identiche].

I limiti approssimativi dei diversi campi sono i seguenti ⁽¹⁾:

Onde hertziane	da vari km	a	82 μ
Raggi infrarossi od ultrarossi	» 420 μ	»	0,8 μ (= 8000 Å)
Luce visibile	» 8000 Å	»	4000 Å
Raggi ultravioletti	» 4000 Å	»	100 Å
Raggi X	speciali di Holwek	»	493 Å
	dei tubi ordinari	»	12 Å
Raggi γ	» 0,4 Å	»	0,005 Å

Non vi è nessuna ragione teorica perchè non esistano radiazioni di lunghezza d'onda maggiore o minore di quelle indicate nella tabella.

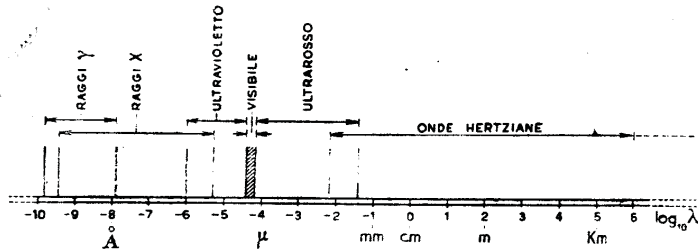


Fig. 124.

anzi, ad es., è presumibile che esistano radiazioni ultragamme nei raggi cosmici.

Per dare uno schema grafico di questa classificazione (fig. 124) penseremo le varie radiazioni distribuite lungo una retta in ordine di lunghezza d'onda, ottenendo così lo « spettro » delle radiazioni elettromagnetiche. Esso non è altro che lo « spettro solare » prolungato dalla parte del rosso fino alle onde hertziane e da quella del violetto fino

⁽¹⁾ Ricordiamo che il micron (μ) vale 10^{-4} cm e l'Ångström (Å) vale 10^{-7} cm. Gli intervalli indicati sono, naturalmente, soggetti a modifiche in dipendenza dei progressi della tecnica di produzione e rivelazione delle varie radiazioni.

$\mu = 10^{-4} \text{ cm}$
 $\text{Å} = 10^{-7} \text{ cm}$

ai raggi γ . [Per comodità grafica, nella figura 124, si è assunto come ascissa il *logaritmo* decimale della lunghezza d'onda in cm: quindi non c'è proporzionalità fra ascissa e lunghezza d'onda, ma passando da un punto dello spettro ad un altro spostato di un'unità a destra (o a sinistra) si trova un valore di λ che è 10 volte maggiore (o minore)].

§ 137. Velocità delle radiazioni elettromagnetiche. Indice di rifrazione.

Secondo la teoria, come si è visto [§ 135], tutte le radiazioni elettromagnetiche devono avere nel vuoto [ϵ , praticamente, nell'aria] velocità c , e ciò è in perfetto accordo con le misure dirette di velocità non solo della luce, ma anche delle onde hertziane e dei raggi X. Invece, in un mezzo di costante dielettrica ϵ e permeabilità μ , la velocità v deve essere quella data dalla (VI, 39), il che val quanto dire che l'« indice di rifrazione » n [cioè il rapporto c/v] deve essere legato ad ϵ e μ dalla relazione

(VI, 48)

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}$$

o, per corpi non ferromagnetici [che sono quelli che interessano in pratica], sensibilmente da

(VI, 48')

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

[relazione di Maxwell]. Ma bisogna osservare che i valori di ϵ e di μ che entrano in questa formula possono essere diversi da quelli della elettrostatica e della magnetostatica: infatti in un campo rapidamente alternato [come quello delle radiazioni elettromagnetiche] le polarizzazioni elettrica e magnetica [§§ 59, 73] avvengono con legge diversa da quella di un campo statico, ed il rapporto fra polarizzazione e campo è, in generale, funzione della frequenza. Si dovrà dunque porre, nelle (VI, 48) e (VI, 48'), i valori di ϵ e μ corrispondenti alla frequenza ν della radiazione, e ne seguirà che anche n sarà funzione della frequenza, come infatti di regola avviene [« dispersione »]. E poichè, come è logico, ϵ tende al valore elettrostatico per $\nu \rightarrow 0$ ossia per $\lambda \rightarrow \infty$, è da presumere che la (VI, 48') sia verificata tanto meglio quanto maggiore è λ : difatti le onde hertziane la verificano già abbastanza bene, mentre la luce, in generale, no. Ad es., si ha

	$\sqrt{\epsilon}$ (elettrostatico)	n (onde hertziane)	n (luce gialla)
acqua	8,9	9	1,33
benzolo	1,514	1,510	1,502
allume	2,58	2,5	1,46

Però nei gas [che presentano una dispersione assai piccola] la relazione di Maxwell è verificata abbastanza bene anche per le frequenze luminose: si ha per es.

	v (elettrostatico)	n (luce gialla)
aria	1,000 295	1,000 294
idrogeno	1,000 132	1,000 138
anidride carbonica	1,000 473	1,000 450

§ 138. Intensità della radiazione (per le onde piane).

Si chiama « intensità » di una radiazione l'energia che per unità di tempo ⁽¹⁾ attraversa un'unità di superficie fissa nello spazio e disposta normalmente alla direzione di propagazione. Tale intensità è facilmente misurabile, almeno concettualmente, facendo assorbire la radiazione da un corpo che la trasformi in calore e misurando la quantità di calore prodotta.

L'intensità, \mathcal{J} , nel caso delle onde piane di cui al § 135, si calcola facilmente osservando che, poichè tutto il campo si sposta parallelamente all'asse x con velocità v , l'energia che nell'unità di tempo attraversa l'area unitaria σ normale all'asse x è tutta quella contenuta in un cilindro che ha per base σ e per altezza v . Ora, essendo la « densità di energia » del campo elettrico e magnetico [§§ 69, 73] data, nel nostro caso, per le (VI, 46) e (VI, 47), da ⁽²⁾

$$\frac{1}{8\pi} (\varepsilon \mathcal{E}_x^2 + \mu \mathcal{H}_y^2) = \frac{\varepsilon}{4\pi} A^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt),$$

[e si noti che l'energia risulta per metà elettrica e per metà magnetica], il suo valor medio, in uno spazio comprendente un numero intero di lunghezze d'onda [o anche, ciò che è praticamente lo stesso, un gran numero di lunghezze d'onda] risulta ⁽³⁾

$$\frac{\varepsilon}{8\pi} A^2,$$

⁽¹⁾ Si suppone sempre l'unità di tempo assai grande rispetto al periodo della radiazione.

⁽²⁾ Le formule (III, 93) e (III, 109), che abbiamo dimostrato in elettrostatica e magnetostatica, valgono anche nel caso di campi variabili.

⁽³⁾ Se con la soprallineatura designiamo il valor medio di una funzione periodica preso su un periodo, è evidente che si avrà $\sin^2 \theta = \cos^2 \theta$: quindi da $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ si deduce:

$$\overline{\sin^2 \theta} = \overline{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2}.$$

e, moltiplicandolo per il volume v del cilindro, si ha

$$(VI, 49) \quad \mathcal{J} = \frac{\varepsilon v}{8\pi} A^2 = \frac{c}{8\pi} \left| \frac{\varepsilon}{\mu} \right| A^2.$$

Come si vede, l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza.

Il calcolo dell'intensità nel caso più generale verrà fatto al § 141.

§ 139. Onde elettromagnetiche in un mezzo conduttore.

Finora si è supposto che il mezzo in cui si propaga la radiazione sia perfettamente isolante [e perciò si è posto, nella (VI, 37), $\mathbf{j} = 0$]. Studiamo ora invece il caso in cui il mezzo presenta una certa conducibilità γ [per es., si tratti di un metallo]: vedremo che ciò porta per conseguenza che il mezzo *assorbe* la radiazione, il che spiega perchè i metalli siano fortemente opachi alle radiazioni elettromagnetiche ⁽¹⁾, magnetiche ⁽¹⁾.

Se il mezzo è conduttore, il campo elettrico variabile \mathbf{E} della radiazione produce, per la legge di Ohm (III, 40), una corrente [pure variabile] di densità $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$: quindi la (VI, 37') ci darà, invece della (VI, 37''), l'equazione

$$(VI, 50) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \gamma \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

mentre le altre equazioni (VI, 35''), (VI, 36''), (VI, 38'') restano inalterate.

Per vedere nel modo più rapido l'effetto del nuovo termine introdotto, conviene considerare onde monocromatiche ed applicare il « metodo degli esponenziali complessi », che è assai usato in problemi riguardanti grandezze che variano sinusoidalmente [correnti alternate, etc.] ed è il seguente.

Consideriamo dapprima, come precedentemente, un mezzo isolante ed osserviamo che con la soluzione (VI, 46) e con quella analoga avente « cos » al posto di « sin » si può formare la combinazione lineare complessa

$$(VI, 51) \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{E}}_x = \tilde{\mathcal{E}}_z = 0, \\ \tilde{\mathcal{E}}_y = A \left[\cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + i \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right] = A e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)}. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Notiamo incidentalmente che l'assorbimento può essere prodotto, oltre che dalla conducibilità, da un'altra causa di cui qui non ci occupiamo (smorzamento degli oscillatori elettronici): di questa specie sono l'« assorbimento selettivo » delle sostanze colorate e l'opacità alla luce di molti isolanti [per es., ebanite].

la quale è anch'essa una soluzione delle equazioni (VI, 35''), (VI, 36''), (VI, 37''), (VI, 38'') (*); benchè essa non abbia un significato fisico diretto, hanno un significato fisico la sua parte reale ed il coefficiente dell'immaginario, che rappresentano due soluzioni fisicamente possibili. Introducendo la frequenza ν e la velocità $v = \lambda\nu = c/\sqrt{\epsilon\mu}$, le (VI, 51) si scrivono

$$(VI, 51') \quad \tilde{\mathcal{C}}_x = \tilde{\mathcal{C}}_z = 0, \quad \tilde{\mathcal{C}}_y = A e^{i2\pi\nu\left(\frac{x}{v} - t\right)} = A e^{i2\pi\nu\left(\frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{c}x - t\right)}$$

Quanto al campo magnetico associato a questo campo elettrico, esso, per ciò che si è detto a § 135, è dato da

$$(VI, 52) \quad \tilde{\mathcal{S}}_x = \tilde{\mathcal{S}}_z = 0, \quad \tilde{\mathcal{S}}_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \tilde{\mathcal{C}}_y$$

Ora, queste soluzioni complesse [oltre ad avere alcune proprietà analitiche più semplici di quelle reali] possono spesso venire estese a tipi di equazioni più generali: per es., nel caso presente possiamo soddisfare le equazioni (VI, 50), etc., relative ad un mezzo conduttore, con una $\tilde{\mathbf{E}}$ ed una $\tilde{\mathbf{H}}$ della forma (VI, 51') e (VI, 52). Basterà poi prenderne la parte reale od il coefficiente dell'immaginario per avere soluzioni aventi significato fisico. Da (VI, 51') si ha infatti

$$(VI, 53) \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} = -i2\pi\nu \tilde{\mathbf{E}}$$

e, ricavandone $\tilde{\mathbf{E}}$ e sostituendolo in (VI, 50) al posto di \mathbf{E} (e sostituendo \mathbf{h} con $\tilde{\mathbf{h}}$), si ha

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{h}} = \left(-\frac{2\gamma}{icv} + \frac{\epsilon}{c}\right) \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

la quale, posto

$$(VI, 54) \quad \epsilon' = \epsilon + i\frac{2\gamma}{v}$$

si può scrivere

$$(VI, 55) \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{h}} = \frac{\epsilon'}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

La (VI, 55) è formalmente identica alla (VI, 37''), salvo che in luogo di ϵ vi è il numero complesso ϵ' : essa sarà dunque soddisfatta da (VI, 52) e (VI, 51') se in esse in luogo di ϵ porremo la ϵ' definita

(* Questo metodo è applicabile, come è chiaro, solo quando le equazioni differenziali sono lineari ed omogenee.

dalla (VI, 54). Osserviamo che con ciò il coefficiente di ix nelle (VI, 51') diviene un numero complesso che scriveremo sotto la forma $\alpha + i\beta$ ponendo

$$(VI, 56) \quad \alpha + i\beta = \frac{2\pi\nu}{c} \sqrt{\epsilon'\mu},$$

e quindi si ha

$$\tilde{\mathcal{C}}_y = A e^{-\beta x} e^{i(\alpha x - 2\pi\nu t)}$$

che, posto

$$(VI, 57) \quad v' = \frac{2\pi\nu}{\alpha},$$

si può scrivere

$$(VI, 58) \quad \tilde{\mathcal{C}}_y = A e^{-\beta x} e^{i2\pi\nu\left(\frac{x}{v'} - t\right)}$$

Passiamo al calcolo del campo magnetico mediante le (VI, 52). Sostituendo ϵ con ϵ' esse divengono

$$\tilde{\mathcal{S}}_x = \tilde{\mathcal{S}}_z = 0, \quad \tilde{\mathcal{S}}_y = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu}} \tilde{\mathcal{C}}_y$$

e se chiamiamo r e θ il modulo e l'argomento di $\sqrt{\epsilon'}$, cioè poniamo

$$(VI, 59) \quad \sqrt{\epsilon'} = r e^{i\theta},$$

ossia [v. (VI, 56)]

$$r = \frac{c}{2\pi\nu\sqrt{\mu}} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = \text{arctg } \frac{\beta}{\alpha}$$

si ha

$$(VI, 60) \quad \tilde{\mathcal{S}}_y = \frac{Ar}{\sqrt{\mu}} e^{-\beta x} e^{i\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{v'} - t\right) + \theta\right]}$$

Delle due soluzioni reali contenute nella soluzione (VI, 58), (VI, 60) sceglieremo quella analoga alla (VI, 46), (VI, 47), cioè

$$(VI, 61) \quad \mathcal{C}_y = A e^{-\beta x} \sin 2\pi\nu\left(\frac{x}{v'} - t\right),$$

$$(VI, 62) \quad \mathcal{S}_y = \frac{Ar}{\sqrt{\mu}} e^{-\beta x} \sin \left[2\pi\nu\left(\frac{x}{v'} - t\right) + \theta\right]$$

Come si vede, la presenza di una parte immaginaria in ϵ' [cioè di β nella (VI, 56)] si è tradotta in un fattore $e^{-\beta x}$ che comporta un pro-

gressivo decremento della ampiezza con l'avanzare delle onde, ossia un *assorbimento*. Poiché l'intensità della radiazione è proporzionale al quadrato dell'ampiezza [§ 138], essa decresce come $e^{-2\beta x}$: quindi $k=2\beta$ è il « *coefficiente di assorbimento* » [inverso dello spessore che riduce l'intensità ad $1/e$ del valore iniziale]. Inoltre, il campo magnetico non è più in fase col campo elettrico ma è sfasato rispetto ad esso di θ , e la velocità di propagazione non è più v ma v' data dalla (VI, 57), quindi l'indice di rifrazione n è

(VI, 63)

$$n = \frac{c}{v'} = \frac{c\alpha}{2\pi v}$$

Per calcolare k , θ ed n bisogna ricavare α e β dalla (VI, 56). Elevandola a quadrato ed eguagliando parti reali e coefficienti dell'immaginario, tenuto conto della (VI, 54), avremo

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4\pi^2 v^2}{c^2} \mu \varepsilon, \quad \alpha\beta = \frac{4\pi^2 v}{c^2} \mu \gamma,$$

da cui

$$(VI, 64) \quad \alpha = \frac{2\pi v}{c} \sqrt{\frac{\mu}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4\gamma^2}{v^2}} + \varepsilon \right)},$$

$$(VI, 65) \quad \beta = \frac{2\pi v}{c} \sqrt{\frac{\mu}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4\gamma^2}{v^2}} - \varepsilon \right)}.$$

Si ha dunque

$$(VI, 66) \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4\gamma^2}{v^2}} + \varepsilon \right)},$$

$$(VI, 67) \quad k = \frac{4\pi v}{c} \sqrt{\frac{\mu}{2} \left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{4\gamma^2}{v^2}} - \varepsilon \right)},$$

$$(VI, 68) \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{c}{4\pi v} \frac{k}{n}.$$

Per quanto riguarda le applicazioni numeriche notiamo anzitutto, come già al § 137, che ε , μ ed, ora, anche γ sono in generale funzioni della frequenza ν . La permeabilità μ si può ritenere eguale ad 1 anche per i corpi ferromagnetici [§ 73], poiché l'esperienza prova che la magnetizzazione non segue le variazioni di un campo magnetico rapidamente alternato quale quello delle onde elettromagnetiche, ma si adegua al suo valor medio [che è zero]. Quanto ad ε e γ , essi per frequenze basse [onde hertziane] sono prossimi ai valori statici, ma se ne allontanano spesso notevolmente col crescere della frequenza ⁽³⁾. Per i metalli,

⁽³⁾ Così si spiega, per es., che le soluzioni elettrolitiche, pur essendo buone conduttrici di corrente continua, sono trasparenti alla luce: infatti la loro conducibilità è dovuta non ad elet-

in genere, γ è così grande [almeno per tutte le lunghezze d'onda maggiori di quelle dell'ultravioletto (§ 136)] che nelle (VI, 66) e (VI, 67) si può trascurare ε rispetto a $2\gamma/v$ ⁽⁴⁾: quindi [prendendo $\mu = 1$] le formule si riducono a

(VI, 66')

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{c}{v}}$$

(VI, 67')

$$k = \frac{4\pi}{c} \sqrt{\frac{c}{v}}$$

e sono, quindi, *indipendenti* da ε . Questo fa sì che il valore della costante dielettrica dei metalli influisca poco sul loro comportamento, e sia quindi difficilmente determinabile. Per dare un'idea dell'assorbimento che risulta dalla conducibilità riportiamo i seguenti dati relativi alle onde hertziane nel rame. La conducibilità [ricavata da misure elettrostatiche, il che è lecito per le onde hertziane] è $\gamma = 5,14 \cdot 10^{17}$: con essa, dalla (VI, 66'), si ottengono i seguenti valori di $1/k$ [spessore che riduce l'intensità di radiazione ad $1/2,72$] in funzione della lunghezza d'onda nel vuoto, λ :

per $\lambda =$	0,01	1	100	10.000 m.
$1/k =$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$ cm.

Come si vede, una lamina di rame, anche piuttosto sottile, è uno schermo quasi perfetto per tutte le onde hertziane.

§ 140. Cenno su ulteriori applicazioni della teoria delle onde elettromagnetiche.

La teoria di Maxwell, di cui abbiamo esposto i concetti fondamentali, ha ricevuto un immenso sviluppo al quale non possiamo accennare che di sfuggita. Tra le applicazioni più importanti citeremo la spiegazione dei fenomeni di riflessione e rifrazione, che si verificano quando le onde elettromagnetiche attraversano la superficie di separazione di due mezzi [per es., entrano od escono dal vuoto in un dielettrico od in un metallo]. Imponendo allora ai campi elettrico e magnetico dalle due parti della superficie di separazione di soddisfare le condizioni del § 63 e le analoghe magnetiche, si trovano anzitutto le classiche leggi geometriche sugli angoli di riflessione e di rifrazione, ed inoltre le leggi che danno l'intensità e lo stato di polarizzazione delle

troni, ma a *ioni*, che hanno una notevole inerzia, e perciò non possono seguire le rapide alteranze del campo elettrico della luce. Quindi per le onde luminose il γ di tali corpi è circa eguale a zero.

⁽⁴⁾ La valutazione dell'ordine di grandezza del rapporto γ/v , che figura nelle (VI, 66), (VI, 67) e (VI, 68'), è resa immediata dall'osservazione che esso vale $\frac{T}{4\pi r}$, dove r è il « tempo di rilassamento » (§ 53) e $T = 1/\nu$ il periodo delle onde.

onde riflesse e rifratte, e si spiegano, per es., la riflessione totale ed i noti fenomeni di polarizzazione per riflessione e per rifrazione. Particolare importanza ha il calcolo, fatto su queste basi, del potere riflettente dei metalli, che si presta bene a controllo sperimentale e permette di verificare il collegamento teorico delle proprietà ottiche dei metalli con quelle elettriche.

Quanto alla dipendenza di ε e γ dalla frequenza, dipendenza particolarmente importante nel campo delle onde ultraviolette e dei raggi X, il suo studio, come è naturale, non può essere fondato sulle sole equazioni di Maxwell, poichè coinvolge le proprietà strutturali delle diverse specie di atomi: esso quindi richiede l'uso di una teoria della struttura della materia, il che fa parte della « fisica atomica ».

AZIONI MECCANICHE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

§ 141. Flusso di energia e vettore di Poynting.

Abbandoniamo ora lo studio delle onde piane e torniamo al campo elettromagnetico più generale (1).

Sappiamo [§ 138, nota 2] che tale campo possiede una energia che possiamo considerare distribuita nello spazio con densità

$$(VI, 69) \quad \mathcal{W} = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2);$$

vogliamo stabilirne il bilancio, tenendo presente il principio della conservazione dell'energia.

La diminuzione di \mathcal{W} per unità di tempo è

$$-\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \left(\varepsilon \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right),$$

ma per le (VI, 37') e (VI, 38') è

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}, \quad \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E},$$

(1) Escludiamo tuttavia, per semplicità, corpi presentanti *isteresi*, magnetica o dielettrica. Avvertiamo inoltre, una volta per tutte, che se nello spazio considerato si trovano delle distribuzioni superficiali di elettricità (strati semplici) esse vanno considerate come casi *limiti* di distribuzioni spaziali.

quindi

$$-\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}) + \mathbf{E} \times \mathbf{j}.$$

Per la (I, 35), poi, l'espressione fra parentesi è $\operatorname{div} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$, cosicchè, introducendo il vettore

(VI, 70)

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H},$$

*Vettore di Poynting
intensità di irradiazione*

si può scrivere

$$-\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \mathbf{E} \times \mathbf{j}$$

e, considerando che \mathbf{j} si compone, in generale, di una corrente di conduzione [§ 53] $\mathbf{j}_1 = \gamma \mathbf{E}$ ed una di convezione [§ 132] $\mathbf{j}_2 = \rho \mathbf{v}$ dovuta all'eventuale moto di corpi elettrizzati, avremo infine

$$-\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{j}_1^2 + \rho \mathbf{E} \times \mathbf{v}.$$

Se ora moltiplichiamo ambo i membri per dS ed integriamo in tutto lo spazio S interno ad una superficie chiusa qualsiasi σ , abbiamo, col teorema della divergenza (I, 15'),

$$(VI, 71) \quad -\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{W} dS = \int_{\sigma} \Pi_n d\sigma + \int_S \frac{1}{\gamma} \mathbf{j}_1^2 dS + \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{v}_\rho dS.$$

Al 2° membro il 2° termine è [v. (III, 41')] il calore, \mathcal{Q} , sviluppato nell'unità di tempo per effetto Joule nello spazio S , e il 3° termine è il lavoro totale, L , fatto, per unità di tempo, dalla forza elettromagnetica sulle cariche in moto contenute in S (2). Potremo dunque scrivere

$$(VI, 72) \quad -\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{W} dS = \int_{\sigma} \Pi_n d\sigma + \mathcal{Q} + L.$$

Il 1° membro rappresenta evidentemente la diminuzione, per unità di tempo, dell'energia elettromagnetica contenuta in S .

Dunque si vede che l'energia elettromagnetica che scompare da S non viene tutta ritrovata come calore Joule, \mathcal{Q} , e come lavoro meccanico L : una parte, e precisamente $\int_{\sigma} \Pi_n d\sigma$, deve essere considerata come uscita

dalla superficie σ sotto forma di energia raggiante, ed il fatto che essa sia espressa [§ 5] dal flusso attraverso σ del vettore $\mathbf{\Pi}$, induce ad interpretare $\Pi_n d\sigma dt$ come l'energia che fluisce nel tempo dt attraverso

(2) Difatti, la forza elettromagnetica $d\mathbf{F}$ che si esercita sull'elemento di volume dS è data dalla (VI, 34) ma [essendo la forza di Lorentz normale allo spostamento $\mathbf{v}dt$] il lavoro da essa compiuto nell'unità di tempo è dovuto solo al campo elettrico ed è $d\mathbf{F} \times \mathbf{v} = \mathbf{E} \times \mathbf{v}_\rho dS$.

l'elemento $d\sigma$ e, quindi, Π [« *vettore di Poynting* »] come un vettore rappresentante, con la sua direzione, la direzione in cui si propaga l'energia, e con la sua grandezza la « *intensità istantanea* » della energia raggiante ⁽³⁾. L'*intensità*, \mathcal{J} , nel senso ordinario della parola [cfr. § 138] è il valor medio di Π fatto su un periodo.

È facile verificare che, nel caso delle onde piane (VI, 46), (VI, 47), la (VI, 70) dà

$$\Pi_x = \frac{c}{4\pi} \left| \frac{\varepsilon}{\mu} A^2 \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \right., \quad \Pi_y = \Pi_z = 0$$

e quindi, indicando con una soprilineatura il valor medio e ricordando la nota 3 del § 138,

$$\overline{\Pi}_x = \frac{c}{8\pi} \left| \frac{\varepsilon}{\mu} A^2 \right., \quad \overline{\Pi}_y = \overline{\Pi}_z = 0.$$

Si ritrova cioè l'espressione dell'intensità \mathcal{J} trovata a § 138.

§ 142. Risultante delle forze ponderomotrici. Quantità di moto elettromagnetica.

Consideriamo uno spazio S , limitato da una superficie chiusa σ , contenente cariche in moto qualsiasi, e supponiamo che in esso ε e μ siano uguali ad 1 ⁽⁴⁾. Su ogni elemento di volume dS il campo elettromagnetico esercita una forza $d\mathbf{F}$ data dalla (VI, 31) e quindi la risultante \mathbf{R} di tutte le forze ponderomotrici esercitate dal campo elettromagnetico sui corpi contenuti in S è

$$(VI, 73) \quad \mathbf{R} = \int_S \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{H} \right) dS.$$

Cerchiamo di trasformare questo integrale di volume in un integrale di superficie più uno di volume [analogamente a quanto si è fatto nel § prec.].

Ricaviamo anzitutto ρ e \mathbf{j} dalle (VI, 35') e (VI, 37')

$$\rho = \frac{\varepsilon}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right);$$

⁽³⁾ Notiamo, però, che questa interpretazione, se è la più semplice, non è l'unica possibile: se, difatti, alla espressione (VI, 70) di Π si aggiungesse un vettore solenoidale qualunque, il flusso attraverso ogni superficie chiusa resterebbe lo stesso e quindi varrebbe ancora la (VI, 72). Notiamo inoltre che resta impregiudicata la questione se il flusso di energia attraverso una superficie σ avvenga effettivamente attraverso ogni punto di essa, o sia localizzato in punti staccati (teoria dei quanti).

⁽⁴⁾ Queste condizioni presentano interesse soprattutto dal punto di vista della *teoria elettronica* che, come è noto, considera la materia come costituita di cariche puntiformi (nuclei ed elettroni) separate da spazio vuoto.

sostituendo nella (VI, 73) [e facendo $\varepsilon = \mu = 1$] avremo

$$\mathbf{R} = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \left(\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \wedge \mathbf{H} \right] dS.$$

Possiamo mettere questo integrale in una forma più simmetrica tenendo conto delle altre due equazioni fondamentali (VI, 36') e (VI, 38'), in virtù delle quali l'espressione

$$\mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} + \left(\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \wedge \mathbf{E},$$

analogo a quella fra [], è nulla. Aggiungendo questa quantità nulla all'espressione entro [] e notando che per la (VI, 70) è

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \wedge \mathbf{H} + \mathbf{E} \wedge \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \wedge \mathbf{E} \right),$$

si ha

$$\mathbf{R} = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} + (\operatorname{rot} \mathbf{H}) \wedge \mathbf{H} + (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \wedge \mathbf{E} \right] dS - \frac{d}{dt} \int_S \frac{1}{c^2} \Pi dS.$$

Il primo integrale si può trasformare in un integrale superficiale. Osserviamo a tal uopo che per qualsiasi vettore Φ vale l'identità ⁽²⁾

$$\begin{aligned} [\Phi \operatorname{div} \Phi + (\operatorname{rot} \Phi) \wedge \Phi]_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} (\Phi_x^2 - \Phi_y^2 - \Phi_z^2) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} [\Phi_x \Phi_y] + \frac{\partial}{\partial z} [\Phi_x \Phi_z], \end{aligned}$$

e poniamo inoltre

$$(VI, 74) \quad \begin{cases} \varphi_{11} = -\frac{1}{8\pi} (\mathcal{E}_x^2 - \mathcal{E}_y^2 - \mathcal{E}_z^2) - \frac{1}{8\pi} (\mathcal{H}_x^2 - \mathcal{H}_y^2 - \mathcal{H}_z^2), \\ \varphi_{22} = -\frac{1}{8\pi} (\mathcal{E}_y^2 - \mathcal{E}_x^2 - \mathcal{E}_z^2) - \frac{1}{8\pi} (\mathcal{H}_y^2 - \mathcal{H}_x^2 - \mathcal{H}_z^2), \\ \varphi_{33} = -\frac{1}{8\pi} (\mathcal{E}_z^2 - \mathcal{E}_x^2 - \mathcal{E}_y^2) - \frac{1}{8\pi} (\mathcal{H}_z^2 - \mathcal{H}_x^2 - \mathcal{H}_y^2), \\ \varphi_{23} = \varphi_{32} = -\frac{1}{4\pi} (\mathcal{E}_y \mathcal{E}_z + \mathcal{H}_y \mathcal{H}_z), \\ \varphi_{31} = \varphi_{13} = -\frac{1}{4\pi} (\mathcal{E}_z \mathcal{E}_x + \mathcal{H}_z \mathcal{H}_x), \\ \varphi_{12} = \varphi_{21} = -\frac{1}{4\pi} (\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y + \mathcal{H}_x \mathcal{H}_y), \end{cases}$$

⁽²⁾ Scriviamo qui la sola relazione per l'asse x (facilmente verificabile attraverso le definizioni di div e rot (§§ 6, 13]). Relazioni analoghe sussistono per gli assi y e z e si ottengono da essa con permutazioni circolari degli indici.

Con ciò, la componente x dell'integrale in questione si scrive (indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i coseni direttori della normale esterna a σ [cfr. (I, 12)]:

$$\frac{1}{4\pi} \int_S [\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} + \dots] dS = - \int_S \left[\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial z} \right] dS =$$

$$= - \int_S (\varphi_{11} \alpha_1 + \varphi_{12} \alpha_2 + \varphi_{13} \alpha_3) d\sigma$$

e quindi

$$R_x = - \int_S (\varphi_{11} \alpha_1 + \varphi_{12} \alpha_2 + \varphi_{13} \alpha_3) d\sigma - \frac{d}{dt} \int_S \Pi_x dS.$$

ed analogamente per gli assi y e z . Se diciamo \mathbf{F} il vettore di componenti ⁽²⁾

$$(VI, 75) \quad \begin{cases} F_x = - \int_S (\varphi_{11} \alpha_1 + \varphi_{12} \alpha_2 + \varphi_{13} \alpha_3) d\sigma, \\ F_y = - \int_S (\varphi_{12} \alpha_1 + \varphi_{22} \alpha_2 + \varphi_{23} \alpha_3) d\sigma, \\ F_z = - \int_S (\varphi_{13} \alpha_1 + \varphi_{23} \alpha_2 + \varphi_{33} \alpha_3) d\sigma. \end{cases}$$

e poniamo

$$(VI, 76) \quad Q^* = \int_S \Pi dS,$$

possiamo, infine, scrivere

$$(VI, 77) \quad \mathbf{R} = \mathbf{F} - \frac{dQ^*}{dt}.$$

Campi statici.

Per interpretare questo risultato, consideriamo dapprima il caso statico, in cui, quindi, $\frac{dQ^*}{dt} = 0$ e resta

$$\mathbf{R} = \mathbf{F},$$

cioè

$$(VI, 78) \quad R_x = - \int_S (\varphi_{11} \alpha_1 + \varphi_{12} \alpha_2 + \varphi_{13} \alpha_3) d\sigma, \text{ etc.}$$

⁽²⁾ Che le (VI, 75) definiscano un vettore \mathbf{F} indipendentemente dagli assi, risulta immediatamente dalla (VI, 77), dato che \mathbf{R} e Q^* hanno una definizione intrinseca.

(1) Da ciò risulta la ammissibilità dell'uso del teorema di Poincaré, come è noto.

Ciò significa che la risultante delle forze ponderomotrici agenti nell'interno di S si può calcolare conoscendo i campi elettrico e magnetico solo al contorno σ . Ed il calcolo è formalmente identico a quello con cui, in teoria dell'elasticità, si calcolerebbe la risultante degli sforzi che in un mezzo elastico si esercitano, attraverso σ , dalle parti esterne sulle parti interne: in luogo degli sforzi elastici si hanno qui le φ_{ik} definite dalle (VI, 74) [che costituiscono, come si riconoscerebbe facilmente, un tensore simmetrico [§ 16] detto «tensore degli sforzi elettromagnetici»] ⁽⁴⁾. Ciò significa che le azioni ponderomotrici elettriche e magnetiche, pur esercitandosi a distanza, senza necessità di intermediari materiali, equivalgono a delle azioni meccaniche trasmesse da punto a punto in un mezzo elastico di cui le φ_{ik} rappresenterebbero gli sforzi specifici.

Esempio.

Siano date due cariche puntiformi $+e$ e $-e$ poste a distanza $2a$ [e precisamente nei punti A e B di coordinate $(-a, 0, 0)$, $(+a, 0, 0)$ [v. fig. 125 in cui il piano del disegno è il piano (x, y)]. Calcoliamo la forza \mathbf{R} che si esercita sulla carica $+e$, mediante gli sforzi φ_{ik} agenti sulla superficie σ costituita dal piano (y, z) e da una semisfera Ω con centro nell'origine O e raggio d che faremo tendere ad ∞ . Nelle (VI, 78) l'integrale esteso a σ si scinde, allora, in due integrali, uno esteso ad Ω e l'altro alla porzione di piano (y, z) che limita Ω . Ora, su Ω , \mathcal{E} è dell'ordine di $1/d^2$ e quindi le φ_{ik} sono dell'ordine di $1/d^4$, mentre la superficie di Ω è dell'ordine di d^2 : perciò passando al limite per $d \rightarrow \infty$ l'integrale esteso ad Ω tende a zero. L'integrale superficiale delle (VI, 78) si riduce, così, effettuando il passaggio al limite, ad un integrale esteso a tutto il piano (y, z) , in cui, per comodità di calcolo, assumeremo un sistema di coordinate polari r, θ di polo O . Se P è un punto generico del piano (y, z) , detto α l'angolo PAB , si ha in P

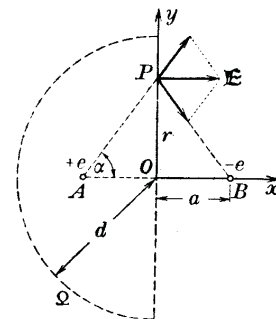


Fig. 125.

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E} = 2 \frac{e}{A^2} \cos \alpha = 2 \frac{ea}{A^3} = 2 \frac{ea}{(\sqrt{a^2 + r^2})^3}, \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_z = 0,$$

$$\varphi_{11} = - \frac{e^2 a^2}{2\pi (a^2 + r^2)^3}, \quad \varphi_{22} = \varphi_{33} = \varphi_{12} = \varphi_{23} = \varphi_{31} = 0,$$

⁽⁴⁾ È superfluo avvertire che l'interesse di questo teorema, nei casi statici, non sta nel fornire un metodo pratico di calcolo delle forze ponderomotrici (le quali, nella maggior parte dei casi, si trovano più semplicemente col metodo del § 72), ma nel mettere in luce una suggestiva analogia con la teoria dell'elasticità.

ed, essendo in tutto il piano $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, troviamo

$$R_x = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \varphi_{11} r dr = e^2 a^3 \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^3} = \frac{e^2}{4a^2},$$

ed, evidentemente, $R_y = R_z = 0$. Si ritrova così la forza coulombiana.

Analogamente per cariche dello stesso segno. In tal caso nei punti del piano (x, z) è $R_x = 0$ e

$$\varphi_{11} = \frac{e^2}{2\pi} \frac{r^2}{(a^2 + r^2)^3}, \quad \varphi_{12} = \varphi_{13} = 0,$$

[le altre φ_{ik} non interessano in quanto esse compaiono nelle (VI, 78) come coefficienti di α_2 ed α_3 che nel nostro calcolo sono nulli, mentre è $\alpha_1 = 1$]: si ottiene allora

$$R_x = \frac{e^2}{4a^2}, \quad R_y = R_z = 0.$$

Campi non statici.

Per interpretare la (VI, 77) nel caso generale, osserviamo che, se Q è la quantità di moto totale delle masse contenute in S , e se supponiamo per semplicità che su queste non si esercitino forze esterne che non siano di natura elettromagnetica, si ha, per il principio meccanico della quantità di moto,

$$\frac{dQ}{dt} = R$$

e, sostituendo nella (VI, 77),

(VI, 79)

$$\frac{d}{dt} (Q + Q^*) = F$$

Di qui si vede che il vettore Q^* , definito dalla (VI, 76), può essere considerato anche esso come una quantità di moto [dovuta però non al moto di masse materiali ma al campo elettromagnetico: « quantità di moto elettromagnetica »], distribuita, sempre per la (VI, 76), con una « densità » [« densità di quantità di moto elettromagnetica »]

(VI, 80)

$$\frac{1}{c^2} \Pi$$

Si può, allora, interpretare la (VI, 79), in perfetta analogia con una delle leggi fondamentali della Meccanica, dicendo che: *la risultante degli sforzi elettromagnetici che si esercitano sul contorno di S è uguale alla derivata della quantità di moto totale [meccanica ed elettromagnetica] della materia e del campo contenuti in S .*

Per vedere più chiaramente l'opportunità di considerare Q^* come una quantità di moto, basta pensare al caso in cui attraverso σ non si esercitano sforzi

elettromagnetici [per es. se σ è abbastanza lontana dalle cariche e dalle correnti perchè ivi i campi si possano ritenere nulli]. Allora la (VI, 79) ci dice che la somma $Q + Q^*$ si mantiene costante, mentre, se il campo elettromagnetico varia, in generale non si mantiene costante Q^* e quindi nemmeno Q . Dunque, se non si tenesse in conto di quantità di moto anche Q^* , si dovrebbe rinunciare alla validità del teorema della conservazione della quantità di moto quando vi sono campi elettromagnetici variabili. Un esempio di queste circostanze lo vedremo nel § seguente.

§ 143. Pressione della radiazione. Massa dell'energia.

L'esperienza dimostra che la luce, cadendo su un corpo assorbente o riflettente, esercita su di esso una pressione ⁽¹⁾. Questa è assai tenue, ma misurabile: per es., la luce solare, incidendo normalmente su una superficie nera, esercita una pressione di circa mezzo milligrammo per m². Ora immaginiamo la seguente esperienza ideale: un carrello, mobile senza attrito su un binario orizzontale, porta un tubo a fondo cieco, perfettamente nero sulla superficie interna, e contenente una sorgente luminosa L (v. fig. 126). Se inizialmente il carrello è fermo e la lampada è spenta, e poi si accende la lampada, la pressione della luce sul fondo del tubo ⁽²⁾

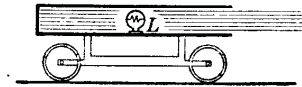


Fig. 126.

metterà in moto verso sinistra il carrello la cui velocità, e quindi la quantità di moto meccanica, andrà sempre crescendo. Ma il carrello costituisce un sistema isolato su cui non agiscono forze esterne: se vale il principio della conservazione della quantità di moto, la sua quantità di moto dovrebbe mantenersi costantemente nulla come era inizialmente. La contraddizione scompare se si tien conto anche della quantità di moto elettromagnetica contenuta nel fascio luminoso che esce dalla bocca del tubo: via via che questo fascio si allunga [colla velocità della luce] aumenta la quantità di moto elettromagnetica, diretta verso destra, in esso contenuta, e questo aumento compensa l'aumento di quantità di moto meccanica, diretta verso sinistra, della massa materiale, così che la quantità di moto totale resta sempre nulla. Come si vede, il fenomeno è del tutto analogo al « rinculo » di un'arma da fuoco.

Questa considerazione si può precisare quantitativamente e ci for-

⁽¹⁾ L'esistenza di questa pressione è una conseguenza necessaria dei due principi della Termodinamica, come è stato dimostrato dal Bartoli, che ne prevede l'esistenza prima (1875) che le esperienze di Poynting ed altri la verificassero.

⁽²⁾ Le forze sulle pareti laterali si elidono tra loro, per evidenti ragioni di simmetria (supposta la sorgente nel centro del tubo).

nisce un mezzo semplice per calcolare la pressione della radiazione. Per semplicità supponiamo il tubo abbastanza lungo e stretto da poter considerare come normale l'incidenza sul fondo e come parallelo il fascio che esce dalla bocca ⁽³⁾: se σ è la sezione del tubo e p la pressione della radiazione sul fondo, la forza che sollecita il carrello è $p\sigma$, e quindi nel tempo dt la quantità di moto meccanica, verso sinistra, aumenta di $p\sigma dt$. D'altra parte, se $\mathcal{J} = \bar{\Pi}$ è l'intensità del fascio [§ 141], la quantità di moto elettromagnetica [media] per unità di volume è, per la (VI, 80), \mathcal{J}/c^2 , e poichè il fascio nel tempo dt si allunga di cdt e quindi il suo volume aumenta di $\sigma c dt$, l'aumento di quantità di

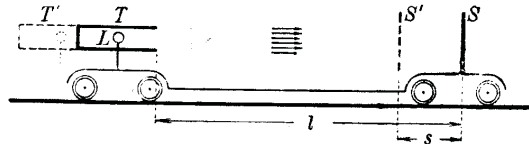


Fig. 127.

moto elettromagnetica, verso destra, è $(\mathcal{J}/c^2)\sigma c dt = \mathcal{J}\sigma dt/c$. Eguagliando si ha

(VI, 81)

$$p = \frac{\mathcal{J}}{c}$$

E questa la pressione della radiazione per incidenza normale su uno schermo perfettamente assorbente.

Su uno schermo perfettamente riflettente si troverebbe invece una pressione doppia: cioè $p = 2\mathcal{J}/c$ [e questo è anche il risultato del ragionamento termodinamico (v. nota 1)].

Con ragionamenti altrettanto semplici si calcola la pressione della radiazione per incidenza obliqua, e si trattano similmente i casi di assorbimento o riflessione parziali.

Mostriamo ora come l'esistenza della quantità di moto elettromagnetica induca ad attribuire all'energia una certa massa, di cui calcoleremo il valore.

Supponiamo, perciò, che il tubo T sia rigidamente collegato ad uno schermo assorbente S e sia l la distanza di T da S (fig. 127): il tutto sia nel vuoto. Se accendiamo la lampada per un tempo τ molto breve, un cilindro di luce di lunghezza $c\tau$ [che supponiamo piccola rispetto ad l] parte da T verso lo schermo S portando con sé una certa quan-

⁽³⁾ Questo potrebbe ottenersi rigorosamente con opportune lenti, ma è più semplice pensare al caso limite del tubo infinitamente lungo e sottile.

tà di moto elettromagnetica Q^* , diretta verso destra, ed il carrello riceve, come si è detto, una eguale quantità di moto verso sinistra, per cui, cessata l'emissione della luce, esso continua a muoversi in questa direzione con una velocità [costante] v , tale che $Mv = Q^*$ [dove M è la massa totale del carrello]. Calcoliamo questa velocità. Se σ è la sezione del fascio di luce, e quindi $\sigma c\tau$ è il volume occupato dalla radiazione, la quantità di moto Q^* della radiazione, per la (VI, 80), sarà

$$Q^* = \frac{\bar{\Pi}}{c^2} \sigma c\tau.$$

Ma, per il significato energetico del vettore di Poynting [§ 141], l'energia W di tutta la radiazione emessa sarà

$$W = \bar{\Pi} \sigma \tau$$

e quindi, in definitiva, possiamo scrivere

$$Q^* = \frac{W}{c}$$

Per il principio della conservazione della quantità di moto avremo allora

$$Mv = \frac{W}{c}$$

e quindi

$$v = \frac{W}{Mc}$$

Quando poi la luce arriva sullo schermo S , esercita su di esso una pressione che rallenta il moto del carrello, e finisce per arrestarlo del tutto, perchè gli comunica una quantità di moto uguale e opposta a quella che esso possiede. Così, quando la luce è stata tutta assorbita, il carrello si trova, fermo, in una posizione $T'S'$, spostata verso sinistra rispetto alla posizione primitiva. Calcoliamo questo spostamento, s . Poichè il carrello si è mosso con velocità v durante tutto il tempo in cui il cilindro di luce è passato da T ad S' , e cioè per un tempo $(l-s)/c$, lo spostamento sarà

$$(VI, 82) \quad s = v \frac{l-s}{c} = \frac{W(l-s)}{Mc^2}.$$

Riassumendo: prima dell'esperienza il carrello era fermo e l'energia W si trovava in T sotto una forma qualsiasi, dopo l'esperienza l'energia W si trova nello schermo in S' ed il carrello si trova spostato verso sinistra di s . Essendo il sistema isolato ed inizialmente in quiete, il suo baricentro, per il principio della conservazione della quantità di moto, non

può essersi spostato: se ne deve concludere che lo spostamento della massa del carrello verso sinistra deve essere stato compensato dallo spostamento di un'altra massa verso destra. Si è così portati ad attribuire all'energia W una massa \mathcal{M} tale che il suo spostamento di $l - s$ verso destra compensi staticamente lo spostamento della massa M di s verso sinistra, ossia tale che si abbia

$$Ms = \mathcal{M}(l - s).$$

E si ha, così, per la massa \mathcal{M} dell'energia W l'espressione

$$\mathcal{M} = \frac{Ms}{l - s},$$

ossia, per la (VI, 82),

(VI, 83)

$$\mathcal{M} = \frac{W}{c^2}.$$

§ 144. Meccanismo della pressione della radiazione.

Si può rendere intuitiva la ragione per cui la radiazione esercita una pressione su un mezzo assorbente ragionando nel modo che segue.

Consideriamo una carica puntiforme e che si muova comunque nel vuoto con velocità \mathbf{v} e sia investita dalle onde elettromagnetiche piane studiate al § 135. Il campo elettrico e magnetico di tali onde eserciterà su di essa una forza \mathbf{F} data dalla (VI, 34') (con $\mu = 1$): la componente di questa forza nella direzione di propagazione delle onde è

$$(VI, 84) \quad \mathcal{F}_z = e\mathcal{E}_z + \frac{e}{c}(v_y\mathcal{H}_x - v_x\mathcal{H}_y),$$

che, per le (VI, 46) e (VI, 47), si riduce a

$$(VI, 84') \quad \mathcal{F}_z = \frac{e}{c}v_z\mathcal{H}_z.$$

D'altra parte, il lavoro che la forza \mathbf{F} compie sulla particella nel tempo dt è

$$dL = \mathbf{F} \times \mathbf{v} dt = e\mathcal{E}_v v_v dt.$$

Ora, poichè nel vuoto è $\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_v$, si ha tra \mathcal{F}_z e dL la semplice relazione

$$(VI, 85) \quad \mathcal{F}_z = \frac{1}{c} \frac{dL}{dt}.$$

Ma $\frac{dL}{dt}$ è l'energia che la particella sottrae alla radiazione per unità di tempo

[cioè la *potenza assorbita*], e la (VI, 85) fa vedere che se la particella assorbe energia dalla radiazione, essa ne risente una forza diretta nel verso in cui la radiazione si propaga, e proporzionale, col coefficiente $1/c$, alla potenza assorbita. E ciò vale, si noti, comunque si muova la particella, dunque anche se essa è vincolata o soggetta ad altre forze, come può essere un elettrone in un atomo.

Ora, dal punto di vista della teoria elettronica [v. § 142, nota 1], un corpo assorbente in tanto assorbe la radiazione in quanto questa compie sugli elettroni in esso contenuti un lavoro [che viene generalmente trasformato in calore]: se dunque su uno schermo perfettamente nero cade perpendicolarmente una radiazione di intensità \mathcal{J} , gli elettroni contenuti in una unità di superficie dello schermo assorbono complessivamente una potenza \mathcal{J} , e quindi risentono complessivamente, secondo la (VI, 85), una forza \mathcal{J}/c nel verso della propagazione della radiazione.

POTENZIALI ELETTROMAGNETICI ED APPLICAZIONI

§ 145. Potenziali elettromagnetici.

Riprendiamo ora le equazioni di Maxwell per un mezzo omogeneo normale [(VI, 35') (VI, 38')] e vediamo se è possibile ridurre il numero delle incognite che in esse compaiono [$\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z, \mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z$] introducendo, come in elettrostatica [§§ 42, 43], dei «potenziali».

Essendo $\mu \mathbf{D}$, per la (VI, 36), un vettore «solenoidale», possiamo sempre trovare [§ 13] un campo vettoriale \mathbf{u} tale che sia

(VI, 86)

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{u};$$

questo vettore \mathbf{u} lo chiameremo «potenziale vettore». Con esso la (VI, 38') diventa

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{u},$$

ossia

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0,$$

e, poichè un vettore a rotazione nulla deriva da un potenziale [§ 13], potremo introdurre un «potenziale scalare», V , ponendo

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad } V$$

[nel caso statico, $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$, V si riduce al noto potenziale elettrostatico]: il campo elettrico \mathbf{E} sarà quindi dato da

(VI, 87)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Le (VI, 86), (VI, 87) ci fanno vedere come le sei grandezze scalari $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z, \mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z$ si possano ottenere con derivazioni da quattro

grandezze scalari u_x, u_y, u_z, V , grandezze che non sono, però, determinate in modo unico, perchè si può aggiungere alla \mathbf{u} il gradiente di una funzione arbitraria φ , purchè si aggiunga a V la quantità $-\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, senza, con ciò, alterare \mathbf{D} nè \mathbf{E} .

Se, ora, sostituiamo, nelle (VI, 37'), (VI, 35'), ad \mathbf{D} ed \mathbf{E} le loro espressioni (VI, 86), (VI, 87), otteniamo

$$(VI, 88) \quad \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} V - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$(VI, 89) \quad -\Delta V - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho,$$

e, trasformando la (VI, 88) mediante la (VI, 9), abbiamo

$$(VI, 90) \quad \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \frac{4\pi \mu}{c} \mathbf{j} + \Delta \mathbf{u} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

Approfittiamo, allora, dell'arbitrarietà accennata per \mathbf{u} per far sì che sia ⁽¹⁾

$$(VI, 91) \quad \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial V}{\partial t} = 0;$$

otterremo così dalle (VI, 89) e (VI, 90), ricordando la (VI, 39), che \mathbf{u} e V soddisfano alle equazioni

$$(VI, 92) \quad \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \mathbf{j},$$

$$(VI, 93) \quad \Delta V - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho.$$

Ricavati dall'integrazione di esse, con le debite condizioni supplementari, \mathbf{u} e V , si hanno subito, dalle (VI, 86) e (VI, 87) \mathbf{E} ed \mathbf{D} .

Naturalmente le (VI, 93) e (VI, 92) contengono come caso particolare $\left[\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right]$ le corrispondenti equazioni dell'elettro- e magnetostatica

$$\Delta V = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \Delta \mathbf{u} = -\frac{4\pi \mu}{c} \mathbf{j}.$$

⁽¹⁾ Se \mathbf{u}_0 è una delle possibili determinazioni di \mathbf{u} e V_0 una di V , è facile determinare una funzione φ tale che

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \operatorname{grad} \varphi, \quad V = V_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

verifichino la (VI, 91): infatti sostituendo in essa si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_0 + \Delta \varphi + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial V_0}{\partial t} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

ciò

$$\Delta \varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\operatorname{div} \mathbf{u}_0 - \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial V_0}{\partial t}$$

e quest'è un'equazione della forma della (VI, 94), la quale ammette certo degli integrali come si vedrà al paragrafo seguente.

[la prima è la (III, 63) e la seconda, essendo in questo caso, per la (VI, 91), $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ e quindi, per la (VI, 9), $\Delta \mathbf{u} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$, è la (VI, 8)].

§ 146. Formula di Kirchhoff.

La ricerca dei potenziali \mathbf{u} e V , quando siano date le cariche e le correnti che generano il campo, dipende dunque dalle equazioni (VI, 92) e (VI, 93) cioè da quattro equazioni scalari della forma

$$(VI, 94) \quad \Delta f - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \varphi, \quad \square \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \varphi$$

[in cui f è funzione « regolare » e φ una funzione nota, finita dovunque]. equazione già incontrata nel caso particolare $\varphi = 0$, e cioè sotto la forma [omogenea]

$$(VI, 95) \quad \Delta f - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

nello studio della propagazione ondosa [§ 117]. Per integrare la (VI, 94), ci serviremo di un integrale particolare, a simmetria sferica, della (VI, 95), rappresentante onde sferiche convergenti.

Cominciamo coll'osservare che ci possiamo limitare allo studio del caso in cui φ è una funzione sinusoidale del tempo, dato che per la linearità della (VI, 94) il caso generale si può ottenere come sovrapposizione di tali soluzioni [sviluppo in serie od in integrale di Fourier (§§ 74-77)]; anzi, pensando quegli sviluppi scritti in forma esponenziale, potremo prendere φ della forma

$$(VI, 96) \quad \varphi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) e^{-i\omega t}.$$

[dove Φ non è funzione di t]. Si vede subito allora che si può soddisfare alla (VI, 94) con una funzione di forma analoga

$$(VI, 97) \quad f(x, y, z, t) = F(x, y, z) e^{-i\omega t};$$

infatti sostituendo in essa e semplificando si ha

$$(VI, 98) \quad \Delta F + k^2 F = \Phi, \quad [k = \omega/r];$$

dunque la (VI, 97) è soluzione della (VI, 94) se F soddisfa alla (VI, 98). Questa equazione è una generalizzazione dell'equazione di Poisson [che rientra in essa per $k = 0$] e potremo risolverla generalizzando il metodo del § 45.

A tale scopo, per calcolare la F in un punto generico $P(x, y, z)$ al tempo generico t , prendiamo P come polo di un sistema di coordinate

polari r, ϑ, φ , e consideriamo, accanto alla F , la funzione

(VI, 99)
$$F^* = \frac{e^{ikr}}{r}$$

che, come si verifica subito, è un integrale particolare a simmetria sferica dell'equazione

(VI, 100)
$$\Delta F^* + k^2 F^* = 0.$$

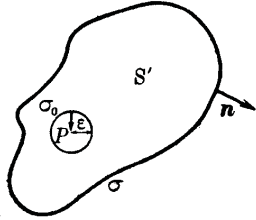


Fig. 128.

Se prendiamo uno spazio finito S che comprenda il punto generico P [$r = 0$] [e ne sia σ il contorno ed n la relativa normale esterna] ed escludiamo da esso il punto P , in cui F^* diventa infinita, con una sferetta σ_0 di centro P e raggio ε (fig. 128), nello spazio S' compreso fra σ e σ_0 , F ed F^* saranno regolari e potremo loro applicare il lemma di Green (I, 21): avremo così

(VI, 101)
$$\int_{S'} [F^* \Delta F - F \Delta F^*] dS' = \int_{\sigma + \sigma_0} \left[F^* \frac{dF}{dn} - F \frac{dF^*}{dn} \right] d\sigma.$$

Osserviamo, poi, che, se moltiplichiamo la (VI, 98) per F^* , la (VI, 100) per F e sottraiamo membro a membro, otteniamo

$$F^* \Delta F - F \Delta F^* = \Phi F^* ;$$

potremo dunque scrivere la (VI, 101) così:

(VI, 102)
$$\int_{S'} \Phi F^* dS' = \int_{\sigma} \left(F^* \frac{dF}{dn} - F \frac{dF^*}{dn} \right) d\sigma + \int_{\sigma_0} \left(F^* \frac{dF}{dn} - F \frac{dF^*}{dn} \right) d\sigma_0.$$

Consideriamo ora l'integrale esteso a σ_0 e notiamo che in esso è $\frac{d}{dn} = -\frac{\partial}{\partial r}$ (v. fig. 128) ed inoltre che $\frac{\partial F^*}{\partial r} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr}$; sarà perciò

$$\int_{\sigma_0} (\dots) d\sigma_0 = - \int_{\sigma_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{ik}{r} F + \frac{1}{r^2} F \right) e^{ikr} d\sigma_0,$$

ed, osservando che su σ_0 è $r = \varepsilon$, ed introducendo i valori medi \bar{F} e $\frac{\partial \bar{F}}{\partial r}$ di F e $\frac{\partial F}{\partial r}$ su σ_0 , avremo

$$\int_{\sigma_0} (\dots) d\sigma_0 = 4\pi \varepsilon^2 e^{ik\varepsilon} \left(-\frac{\partial \bar{F}}{\partial r} + ik\bar{F} \right) - 4\pi \bar{F} e^{ik\varepsilon}$$

che per $\varepsilon \rightarrow 0$ tende a $-4\pi F(P)$.

Riprendiamo ora la (VI, 102) e passiamo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$; per quanto si è visto otterremo

$$\int_S \Phi F^* dS = \int_{\sigma} \left(F^* \frac{dF}{dn} - F \frac{dF^*}{dn} \right) d\sigma - 4\pi F(P)$$

da cui, ricordando l'espressione di F^* e di $\partial F^* / \partial r$, si ha

(VI, 103)
$$F(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{dF}{dn} - \left(\frac{ik}{r} F - \frac{F}{r^2} \right) \frac{dr}{dn} \right] e^{ikr} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\Phi}{r} e^{ikr} dS.$$

È questa una formula [analoga a quella di Green (II, 34)] che ci dà la soluzione della (VI, 98) in un punto $P(x, y, z)$ qualsiasi interno ad S , noti su σ i valori di F e della sua derivata normale, ed in tutto S i valori di Φ .

Nota $F(P)$ colla (VI, 103), si passa subito alla f moltiplicando per $e^{-i\omega t}$ e si ha

(VI, 104)
$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{dF}{dn} - \left(\frac{ik}{r} F - \frac{F}{r^2} \right) \frac{dr}{dn} \right] e^{i(kr - \omega t)} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\Phi}{r} e^{i(kr - \omega t)} dS.$$

Ad essa si può dare un'altra forma più espressiva introducendo la notazione

$$\psi_{t-r/v} \quad \text{per} \quad \psi \left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{v} \right),$$

cioè per una funzione ψ calcolata nel punto generico $M(\xi, \eta, \zeta)$ non nell'istante t ma nell'istante anteriore $t - r/v$: allora, essendo [(VI, 98)] $k = \omega/v$ e quindi $e^{i(kr - \omega t)} = e^{-i\omega(t - r/v)}$, avremo, per le (VI, 96) e (VI, 97),

$$\frac{dF}{dn} e^{i(kr - \omega t)} = \left(\frac{df}{dn} \right)_{t-r/v}, \quad ik F e^{i(kr - \omega t)} = \frac{i\omega}{v} F e^{-i\omega(t - r/v)} = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t-r/v},$$

$$F e^{i(kr - \omega t)} = f_{t-r/v}, \quad \Phi e^{i(kr - \omega t)} = \varphi_{t-r/v},$$

e potremo scrivere la (VI, 104) sotto la forma definitiva [formula di Kirchhoff]:

(VI, 105)
$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{df}{dn} + \left(\frac{1}{vr} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{r^2} f \right) \frac{dr}{dn} \right]_{t-r/v} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\varphi_{t-r/v}}{r} dS.$$

Tutto questo lo si è dedotto nel caso in cui la φ sia una funzione sinusoidale del tempo, con periodo $2\pi/\omega$; se invece la φ è una funzione

qualsiasi di t , come abbiamo accennato, potremo svilupparla in serie od in integrale di Fourier e pensare corrispondentemente sviluppata la f . Poichè nel secondo membro della (VI, 105) non compare ω , questa formula si applica a ciascun termine di f [col solo termine corrispondente di φ nell'integrale di volume]: ne segue, per la linearità della (VI, 94), che anche nel caso generale la f è data dalla (VI, 105).

Si rammenti che, per la validità della (VI, 105), la f deve essere regolare in tutto S [quindi, ad es., nel caso di radiazioni emananti da sorgenti puntiformi queste dovranno essere escluse da S poichè in esse f avrebbe delle singolarità]: come superficie σ si può quindi scegliere una qualunque superficie chiusa che circondi P ed escluda gli eventuali punti di singolarità. Ma si può anche scegliere una superficie chiusa che circondi le singolarità ed escluda P [ed in tal caso la normale \mathbf{n} va presa verso l'interno] purchè si imponga alla f di soddisfare opportune condizioni di annullamento all'infinito: per persuadercene basta pensare di assumere dapprima come S lo spazio compreso fra la detta σ ed una sfera σ' comprendente nel suo interno σ e P , e poi far tendere il raggio di questa sfera all' ∞ con che il contributo dell'integrale superficiale relativo a σ' , per le condizioni imposte ad f , tende a zero.

Diremo dunque, per comprendere entrambi i casi, che nella (VI, 105) σ è una qualsiasi superficie chiusa che separa P dai punti di singolarità e che \mathbf{n} è la sua normale diretta dalla parte di tali punti.

La formula di Kirchhoff (VI, 105) si presta a dedurre due ordini di conseguenze, secondo che venga specializzata mandando la superficie σ all' ∞ , ed imponendo alla f convenienti condizioni all' ∞ [con che essa si riduce al solo integrale di volume], o supponendo $\varphi = 0$ in tutto S [con che resta il solo integrale di superficie]. Studieremo nei §§ seguenti questi due casi particolari.

§ 147. Formule dei potenziali ritardati.

Specializziamo la (VI, 105) supponendo che la superficie σ vada all' ∞ [ed imponiamo ad $f_{t-r/v}$, $(\frac{df}{dv})_{t-r/v}$, $(\frac{\partial f}{\partial t})_{t-r/v}$ di annullarsi almeno come $1/r$ per $r \rightarrow \infty$]: allora l'integrale superficiale si annulla e resta

$$(VI, 106) \quad f(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \frac{\varphi_{t-r/v}}{r} dS,$$

che dà, per l'equazione (VI, 94), una soluzione analoga alla soluzione (III, 21) dell'equazione di Poisson.

Applicando alle (VI, 92), (VI, 93) ed ammettendo le dette condizioni all' ∞ , si ottengono le seguenti espressioni per il potenziale vettore \mathbf{u} ed il potenziale scalare V prodotti da date correnti e date cariche.

$$(VI, 107) \quad \mathbf{u}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{\epsilon} \int_{S_\infty} \frac{\mathbf{j}_{t-r/v}}{r} dS,$$

$$(VI, 108) \quad V(x, y, z, t) = \frac{1}{\epsilon} \int_{S_\infty} \frac{\rho_{t-r/v}}{r} dS.$$

La (VI, 108) ricorda l'espressione del potenziale elettrostatico [§ 43]: da essa, però, risulta che il potenziale scalare dV prodotto dall'elemento dS nel punto P [distanza r da dS] al tempo t , non è quello dovuto alla carica $\rho(t)dS$ che dS ha al tempo t , ma quello dovuto alla carica $\rho(t-r/v)dS$ che dS aveva al tempo $t-r/v$; cioè [essendo r/v il tempo necessario per percorrere con velocità v la distanza r] il potenziale si produce con un ritardo, come se si trasmettesse con velocità v . Lo stesso si potrebbe dire per il potenziale vettore \mathbf{u} . Per questo \mathbf{u} e V si dicono « potenziali ritardati » e le (VI, 107), (VI, 108) si dicono « formule dei potenziali ritardati ». Si potrebbe poi verificare che le espressioni (VI, 107) e (VI, 108) soddisfano la relazione (VI, 91).

§ 148. Irraggiamento di un oscillatore.

Applicheremo ora le formule dei potenziali ritardati a studiare il campo elettromagnetico di un « oscillatore » che è, come vedremo, la più tipica sorgente di onde elettromagnetiche.

Chiameremo « oscillatore » un dipolo elettrico [§ 50] il cui momento, $\mathbf{m} = e\delta$, sia variabile sinusoidalmente col tempo, il che può avvenire sia perchè varia δ restando costante e , sia viceversa. Il primo caso si può realizzare mediante una

carica puntiforme $-e$ fissa in un punto O ed una carica puntiforme $+e$ che oscilli armonicamente, con ampiezza δ_0 , su un segmento avente per punto medio O : è questo il modello di oscillatore di cui si serve spesso la fisica atomica [« elettroni oscillanti »]. Il secondo caso si può realizzare, per es., mediante l'oscillatore di Hertz che è costituito [v. fig. 129] di due sfere metalliche, A , B ,

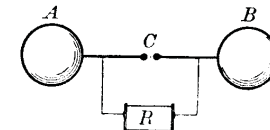


Fig. 129.

congiunte da un conduttore, interrotto in un punto C . Stabilendo, mediante un rocchetto di Ruhmkorff, R , una forte differenza di potenziale tra le due sfere, scocca in C una scintilla che momentaneamente stabilisce una comunicazione fra A e B , così da formare un solo conduttore, il quale, per un noto fenomeno di autoinduzione, viene ad essere percorso da una corrente alternata aperta

[« scarica oscillante »], per cui la carica elettrica di ognuna delle due sfere varia sinusoidalmente nel tempo, in opposizione con quella dell'altra. Le due cariche costituiscono dunque, in ogni istante, un dipolo di cui δ è costante [distanza AB] ed e [carica di una sfera] varia sinusoidalmente.

Noi calcoleremo il campo [nel vuoto] dell'oscillatore realizzato nel primo modo e ci limiteremo a considerare i punti P la cui distanza r da O è grande rispetto a δ_0 , poichè questo è il caso di maggior interesse. Si può dimostrare che in tali punti il campo risulterebbe lo stesso anche se l'oscillatore fosse realizzato nel secondo modo o in qualsiasi altra forma purchè il suo momento m risulti la stessa funzione sinusoidale di t . Porremo dunque, adottando la convenzione degli esponenziali immaginari [§ 139] ⁽¹⁾,

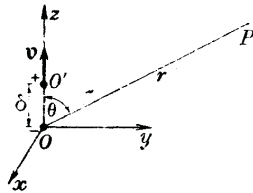


Fig. 130.

$$(VI, 109) \quad \delta = \delta_0 e^{-i\omega t}$$

e quindi

$$(VI, 110) \quad m = m_0 e^{-i\omega t}.$$

Assumeremo poi, per comodità, come asse z l'asse OO' del dipolo (fig. 130).

Calcolo del potenziale vettore.

Per calcolare il potenziale vettore \mathbf{u} mediante la (VI, 107) osserviamo che l'unico elemento di volume che contribuisce all'integrale è quello dove si trova, nell'istante considerato, la carica e mobile con velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}_z = \dot{\delta} = -i\omega\delta_0 e^{-i\omega t}$, che, come sappiamo [§ 132], equivale a un elemento di corrente tale che $\mathbf{j}dS = e\mathbf{v}$. D'altra parte, essendosi supposto $\delta \ll r$, si può identificare OP con r e quindi scrivere

$$(VI, 111) \quad \begin{cases} u_x = u_y = 0, & u_z = -i \frac{\omega}{c} m_0 \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} = -i \frac{\omega}{c} m_0 g. \end{cases}$$

avendo posto

$$(VI, 112) \quad g(r) = \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}.$$

Calcolo del campo magnetico.

Dalle (VI, 111) ricaviamo, colla (VI, 86) [con $\mu = 1$], le componenti del campo magnetico \mathfrak{H} che risultano

$$(VI, 113) \quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} = -i \frac{\omega}{c} m_0 g' \frac{y}{r}, \\ \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial u_z}{\partial x} = i \frac{\omega}{c} m_0 g' \frac{x}{r}, \\ \mathfrak{H}_z = 0. \end{cases}$$

⁽¹⁾ In questo § e nel seg. la lettera e designa tanto la carica elettrica quanto la base dei logaritmi neperiani. Non è parso necessario cambiare tali notazioni (che sono tradizionali) essendo impossibile ogni equivoco [basti notare che la base dei logaritmi vi figura sempre con esponente immaginario].

\mathfrak{H} è quindi in ogni punto ortogonale all'asse z . Per veder meglio come \mathfrak{H} vari, essendovi simmetria attorno all'asse z , basta studiare quanto avviene nel piano $x=0$. Avremo allora

$$\mathfrak{H}_x = -i \frac{\omega}{c} m_0 g' \sin \theta, \quad \mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}_z = 0,$$

[dove $\sin \theta = \sin \widehat{rz}$], cioè \mathfrak{H} è, in questo caso, normale al piano $x=0$ ed il suo modulo varia come $\sin rz$, annullandosi nei punti dell'asse z ed essendo massimo in quelli dell'asse y . Le linee di forza magnetica sono poi, per simmetria, dei cerchi aventi per asse l'asse z .

Calcolo del potenziale scalare.

Per calcolare il potenziale scalare V potremmo utilizzare la (VI, 108), ma è più comodo ricordare che tra V ed \mathbf{u} passa la relazione (VI, 91) che nel caso attuale si scrive

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -c \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

ossia

$$\frac{\partial V}{\partial t} = i\omega m_0 g' \frac{z}{r}.$$

Ora [v. (VI, 112)]

$$(VI, 114) \quad g' = \left(i \frac{\omega}{c} - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r} = \left(i \frac{\omega}{c} - \frac{1}{r} \right) g;$$

sostituendo ed integrando rispetto a t si ha

$$(VI, 115) \quad V = -m_0 \left(i \frac{\omega}{c} - \frac{1}{r} \right) g \frac{z}{r} + V_0 = -m_0 g' \frac{z}{r} + V_0,$$

dove V_0 è indipendente da t e quindi rappresenta il potenziale di un campo elettrostatico. Esso sarà evidentemente indipendente dalla frequenza dell'oscillatore e quindi potremo calcolarlo osservando che, per $\omega \rightarrow 0$, V deve tendere al potenziale elettrostatico di un dipolo di momento m_0 , cioè [§ 50] ad $m_0 z^2/r^3$; da ciò si ricava $V_0 = 0$.

Calcolo del campo elettrico.

Dalle espressioni (VI, 111), (VI, 115) di V ed \mathbf{u} ricaviamo, colla (VI, 87), le componenti del campo elettrico, che risultano

$$(VI, 116) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = m_0 \left(\frac{g}{r} \right)' \frac{zx}{r}, \\ \mathfrak{E}_y = m_0 \left(\frac{g}{r} \right)' \frac{zy}{r}, \\ \mathfrak{E}_z = m_0 \frac{g'}{r} + m_0 \left(\frac{g'}{r} \right)' \frac{z^2}{r} + m_0 \frac{\omega^2}{c^2} g. \end{cases}$$

Considerando, come sopra, un punto del piano $x=0$ si vede che ivi è

$\mathcal{E}_x = 0$, ossia che \mathbf{E} è contenuto nel piano $x = 0$: dunque [per la simmetria] in ogni punto \mathbf{E} è contenuto nel piano meridiano ed è quindi normale ad \mathbf{b} .

Le formule precedenti per \mathbf{E} [e così pure le (VI, 113) per \mathbf{b}] si potrebbero esplicitare scrivendo per $g, g', \left(\frac{g'}{r}\right)'$ le loro espressioni che sono date dalle (VI, 112), (VI, 114) e da

$$(VI, 117) \quad \left(\frac{g'}{r}\right)' = \left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} - i\frac{3\omega}{cr^2} + \frac{3}{r^3}\right)g.$$

Delle formule finali si deve poi, beninteso, prendere la sola parte reale.

Campo elettrico e magnetico a grande distanza dall'oscillatore.

Supponiamo che r sia grande non solo rispetto alle dimensioni dell'oscillatore, ma anche rispetto alla quantità $\lambda = 2\pi c/\omega$ [lunghezza d'onda della radiazione emessa] così che nelle formule precedenti si possa trascurare $1/r$ rispetto ad ω/c : resta allora

$$g' = i\frac{\omega}{c}g,$$

$$\left(\frac{g'}{r}\right)' = -\frac{\omega^2}{c^2 r}g.$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x &= \frac{\omega^2}{c^2} m_0 g \frac{y}{r}, & \mathcal{S}_y &= -\frac{\omega^2}{c^2} m_0 g \frac{x}{r}, & \mathcal{S}_z &= 0, \\ \mathcal{E}_x &= -\frac{\omega^2}{c^2} m_0 g \frac{x^2}{r^2}, & \mathcal{E}_y &= -\frac{\omega^2}{c^2} m_0 g \frac{yz}{r^2}, & \mathcal{E}_z &= \frac{\omega^2}{c^2} m_0 g \frac{x^2 + y^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Prendiamo, come sopra, il punto P nel piano $x = 0$, con che $y/r = \sin \theta$, $z/r = \cos \theta$: le formule precedenti allora, sostituendo per g la sua espressione, prendendo la sola parte reale e ponendo

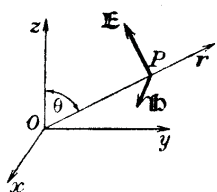


FIG. 131.

$$\mathcal{E} = \frac{\omega^2}{c^2} m_0 \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right),$$

danno

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x &= \mathcal{E}, & \mathcal{S}_y &= 0, & \mathcal{S}_z &= 0, \\ \mathcal{E}_x &= 0, & \mathcal{E}_y &= -\mathcal{E} \cos \theta, & \mathcal{E}_z &= \mathcal{E} \sin \theta. \end{aligned}$$

Poichè i coseni direttori del raggio vettore OP sono $0, \sin \theta, \cos \theta$, si verifica subito che \mathbf{b} ed \mathbf{E} sono normali ad OP [oltre che normali fra loro]. Inoltre si riconosce subito che la \mathcal{E} , introdotta poco sopra, rappresenta il modulo di \mathbf{E} [il che giustifica la notazione scelta] e che i due campi sono eguali fra loro in grandezza e disposti come in fig. 131.

Calcolo dell'intensità di radiazione.

Da quanto si è visto si ha subito che il vettore di Poynting [§ 141] è diretto come OP ed ha per modulo

$$\Pi = \frac{c}{4\pi} \mathcal{E}^2 = \frac{\omega^4 m_0^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c}\right),$$

quindi l'intensità di radiazione \mathcal{J} [cfr. § 141, e § 138, nota 3] sarà

$$(VI, 118) \quad \mathcal{J} = \frac{\omega^4 m_0^2}{8\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2};$$

come era da attendersi, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

È da notarsi che l'oscillatore non irradia in ogni direzione egualmente ma con la legge di proporzionalità a $\sin^2 \theta$: quindi l'intensità è nulla nella direzione dell'asse.

Calcolo della potenza dell'oscillatore.

Per avere l'energia totale \mathcal{Q} irradiata per unità di tempo dall'oscillatore [« potenza dell'oscillatore »] potremo integrare l'espressione (VI, 118) di \mathcal{J} relativamente a tutta una sfera σ di centro O [e raggio r qualsiasi, ma il risultato sarà indipendente da r]. Usando coordinate polari r, θ, φ , aventi per polo O e per asse l'asse z , avremo

$$(VI, 119) \quad \mathcal{Q} = \iint_{\sigma} \mathcal{J} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\omega^4 m_0^2}{8\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\omega^4 m_0^2}{3c^3}.$$

§ 149. Ceno sull'irraggiamento di una carica in moto qualsiasi.

Si osservi che la carica oscillante e , di cui al § precedente, ha in ogni istante l'accelerazione $a = \dot{\delta} = -\omega^2 \delta$, il cui quadrato medio è [§ 138, nota 3]

$$\bar{a}^2 = \omega^4 \bar{\delta}^2 = \frac{1}{2} \omega^4 \delta_0^2 = \frac{\omega^4 m_0^2}{2e^2}.$$

Quindi l'espressione (VI, 119) della potenza irradiata si può scrivere

$$\mathcal{Q} = \frac{2e^2 \bar{a}^2}{3c^3},$$

Questa formula ha una portata assai più generale di quanto risulta dal particolare problema che abbiamo trattato. Infatti si può dimostrare [basandosi sulle espressioni dei potenziali ritardati] che, se una carica e si muove di moto qualunque, anche non rettilineo, essa irradia in ogni istante, sotto forma di onde elettromagnetiche, una potenza data [in prima approssimazione] da

$$\mathcal{Q} = \frac{2e^2 a^2}{3c^3},$$

dove a è il modulo della sua accelerazione. Se ne deduce, in particolare, che si

ha irraggiamento se la carica si muove di moto rettilineo accelerato o ritardato, ed anche se si muove di moto uniforme ma curvilineo, per es. circolare [in tal caso α è l'accelerazione centripeta]: solo se il moto è rettilineo ed uniforme esso non dà luogo ad irraggiamento.

§ 150. Il principio di Huygens.

Specializziamo ora la formula di Kirchhoff (VI, 105) col fare in essa $\vec{z} = 0$: essa risolverà allora l'equazione generale delle onde (VI, 95), che qui riscriviamo,

(VI, 120)
$$\Delta f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

e diverrà

(VI, 121)
$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{df}{dn} + \left(\frac{1}{vr} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{r^2} f \right) \frac{dr}{dn} \right]_{t-r/v} d\sigma$$

Tale formula ci dà dunque la soluzione della (VI, 120) quando siano assegnati i valori di f , e di $\frac{df}{dn}$, in funzione del tempo, per tutti i punti di una superficie chiusa σ che separi P dalle sorgenti (1). Ed essa è suscettibile di una notevolissima interpretazione fisica sia in acustica che in ottica.

Ricordiamo infatti che nella (VI, 120) f si può interpretare come una qualunque delle componenti s_1, s_2, s_3 dello spostamento delle particelle d'aria [interpretazione acustica, § 114] o come una qualunque delle componenti dei campi elettrico o magnetico [interpretazione ottica]. Usando, per es., il linguaggio della prima interpretazione, la (VI, 121) dice che lo spostamento delle particelle d'aria in P al tempo t risulta dalla sovrapposizione di infiniti contributi, ciascuno dei quali proviene da un elemento $d\sigma$ della superficie σ ed è determinato dallo stato di questo elemento al tempo $t - r/v$. Più intuitivamente si può dire che il contributo di ciascun elemento $d\sigma$ allo spostamento in $P(x, y, z)$ si propaga da $d\sigma$ a P con la velocità v . La formula (VI, 121) esprime così in forma matematica precisa e completa il celebre « principio di Huygens » di cui sono note le numerose applicazioni acustiche ed ottiche.

Ricordiamo che il principio di Huygens, nella forma in cui fu enunciato da Huygens, affermava che se σ è, in un certo istante, una superficie d'onda, ogni suo punto si può considerare come una sorgente di onde sferiche secondarie (fig. 132): queste, al tempo t , avranno un raggio vt , e si ammette che producano

(1) Nella (VI, 121) rientra, come caso particolare, la formula di Poisson (V, 76) [§ 117]: basta prendere come superficie σ la sfera di centro P e raggio vt .

acustica s_1, s_2, s_3
 ottica E, H, \dots

si può considerare ogni punto di una superficie d'onda come sorgente di onde secondarie

effetto solo nei punti di contatto col loro involuppo, il quale (2) costituisce la nuova superficie d'onda al tempo t . [Questo principio, benchè non giustificato logicamente, rendeva conto esattamente delle cosiddette leggi dell'ottica geometrica (propagazione rettilinea, riflessione, rifrazione, etc.) che, come è noto, rappresentano bene i fatti sperimentali nei casi in cui si può prescindere dalla diffrazione].

Il principio di Huygens fu, poi, completato da Fresnel, il quale [considerando la luce come un fenomeno oscillatorio analogo al suono] ammise che l'onda secondaria partendo da un punto M di σ :

I) partisse da M colla stessa fase che ha l'onda σ ,

II) avesse ampiezza diversa nelle diverse direzioni, e precisamente che l'ampiezza fosse una funzione decrescente dell'angolo θ , che la normale esterna di σ in M forma colla direzione considerata, nulla per $\theta > \pi/2$ [con che resta eliminata l'onda retrograda e su P agiscono soltanto gli elementi $d\sigma$ affacciati a P (in fig. 132, in sezione, quelli dell'arco ACB)].

Ammise poi, come è naturale, che in ogni punto le singole onde secondarie si componessero colle ordinarie regole dell'interferenza. Così completato, il principio « principio di Huygens-Fresnel » diveniva meno insoddisfacente e rendeva conto quasi esattamente, oltre che dei fenomeni di cui sopra, anche di quelli di diffrazione, il cui studio si fonda generalmente anche oggi su tale principio. Tuttavia [oltre a non essere, nemmeno in tal forma, logicamente giustificato] il principio di Huygens-Fresnel (à in taluni casi risultati contrari all'esperienza. (Ciò dipende dal fatto che i postulati I) e II) non sono veri, come si dimostra applicando la formula di Kirchhoff.

La formula di Kirchhoff, essendo dedotta matematicamente dall'equazione delle onde, senza ulteriori postulati, è logicamente inattaccabile. Essa mostra che l'idea fondamentale del principio di Huygens-Fresnel, di considerare ogni punto di una superficie d'onda come sorgente di nuove onde e di sostituire alle sorgenti date l'insieme di queste sorgenti secondarie, è sostanzialmente giusta, anzi, mostra che tale idea è applicabile non solo ad una superficie d'onda, ma ad una qualunque superficie chiusa σ che separi il punto P dalle sorgenti. Ma se si applica la formula di Kirchhoff prendendo per σ una superficie d'onda, si trova che le onde secondarie che partono da σ non hanno in partenza la stessa fase di σ [contrariamente al I postulato di Fresnel]; inoltre la loro ampiezza non si annulla (3) per $\theta > \pi/2$. Quindi in P giungono [se non vi sono ostacoli] non solo le onde secondarie del tratto d'onda ACB (fig. 132), ma anche quelle del rimanente tratto ADB , che Fresnel arbitrariamente escludeva.

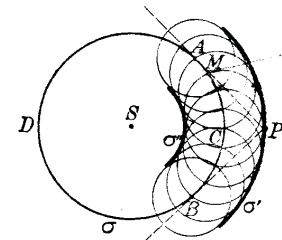


Fig. 132.

(2) Più esattamente, soltanto una falda (σ') di tale involuppo, mentre l'altra (σ'') costituirebbe un'onda regressiva che non esiste in realtà, senza che il principio di Huygens, nella forma primitiva, ne dia la spiegazione.

(3) La mancanza di onde regressive è automaticamente assicurata dal fatto che, dietro l'onda σ , le onde secondarie si distuggono per interferenza.

Huygens non spiega nulla in realtà, come si vede

§ 151. L'ottica geometrica dedotta dall'equazione delle onde.

È noto che moltissimi fenomeni ottici si possono ritenere in prima approssimazione governati dalle leggi sperimentali dell'«ottica geometrica» che sono [come si è accennato]: la propagazione rettilinea della luce in un mezzo omogeneo [e, per un mezzo non omogeneo, un'altra legge che determina la forma dei raggi (principio di Fermat, v. oltre)], le due leggi della rifrazione, le due leggi della riflessione. Queste leggi, però, in cui è essenziale il concetto di «raggio luminoso», sono soltanto approssimate e divengono del tutto inapplicabili in tutti quei casi [passaggio della luce attraverso aperture di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda λ , etc.] in cui assumono importanza i fenomeni di «difrazione» e perde significato il concetto di raggio ⁽¹⁾. Poichè i fenomeni di difrazione sono tanto meno cospicui quanto più piccolo è λ , potremo dire che l'«ottica geometrica» è il caso limite dell'«ottica ondulatoria» per $\lambda \rightarrow 0$. Faremo ora vedere come dall'equazione delle onde si possano effettivamente ricavare le leggi dell'ottica geometrica come prima approssimazione, valida per lunghezze d'onda assai brevi.

Indicando, al solito, con f una qualunque componente del campo elettrico o magnetico, e considerando per semplicità radiazioni monocromatiche di pulsazione ω , la f sarà della forma (VI, 97) e la relativa $F(x, y, z)$ [«ampiezza complessa»] soddisferà la (VI, 98) [con $\Phi = 0$]. Introducendo l'indice di rifrazione $n = c/v$ [che ammettiamo possa essere anche funzione del posto] e ponendo

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

[con che $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ rappresenta la lunghezza d'onda della radiazione nel vuoto] si ha per la k della (VI, 98) il valore $k = k_0 n$ e quindi la (VI, 98) si scrive

$$(VI, 122) \quad \Delta F + k_0^2 n^2 F = 0.$$

La soluzione corrispondente ad onde piane parallele al piano yz è, come si riconosce facilmente [§§ 114, 115], $F = A e^{ik_0 n x}$, con A costante:

(1) Ciò che qui si dice per l'ottica si potrebbe anche applicare all'acustica, dove tuttavia ha minore interesse, essendo raro il caso che siano trascurabili i fenomeni di difrazione [a causa della maggior lunghezza d'onda]. È per questo che si parla più spesso di «onde» sonore che di «raggi» sonori. Analoga osservazione si potrebbe fare per le «onde» hertziane. Al contrario, nel caso delle piccole lunghezze d'onda i fenomeni di difrazione sono più difficili da mettere in evidenza, donde le denominazioni di «raggi» X, γ .

ciò suggerisce di cercare nel caso generale una soluzione approssimata del tipo

$$(VI, 123) \quad F = A e^{ik_0 L},$$

con $A(x, y, z)$, $L(x, y, z)$ funzioni reali del posto, di cui la prima, che supporremo «quasi costante», rappresenta l'ampiezza, e la seconda determina la «fase» in ciascun punto. Calcolando il ΔF [per es., mediante l'espressione cartesiana del Δ] e sostituendo nella (VI, 122) si trova

$$k_0^2 A [n^2 - (\text{grad } L)^2] + ik_0 [2 \text{ grad } A \times \text{grad } L + A \Delta L] + \Delta A = 0,$$

ossia, moltiplicando per $\frac{1}{k_0^2} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}$,

$$(VI, 124) \quad A [n^2 - (\text{grad } L)^2] + \frac{i\lambda_0}{2\pi} [2 \text{ grad } A \times \text{grad } L + A \Delta L] + \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2} \Delta A = 0.$$

Supponiamo ora che λ_0 sia assai piccola così che si possa trascurare il termine in λ_0^2 , e cerchiamo di soddisfare l'equazione determinando A ed L in modo da annullare separatamente gli altri due termini, cioè in modo che sia

$$(VI, 125) \quad n^2 - (\text{grad } L)^2 = 0,$$

$$(VI, 126) \quad 2 \text{ grad } A \times \text{grad } L + A \Delta L = 0.$$

La (VI, 125) [che non contiene A] si può scrivere

$$(VI, 127) \quad |\text{grad } L| = n,$$

od anche

$$(VI, 127') \quad \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = n^2.$$

La funzione L si chiama «iconale» e la (VI, 127') dicesi perciò «equazione dell'iconale»: essa determina l'andamento dei «raggi luminosi», che come vedremo coincidono con le linee di flusso del vettore $\text{grad } L$, e contiene perciò il fondamento dell'ottica geometrica.

Indicando con s l'ascissa curvilinea contata lungo una di tali linee di flusso, la (VI, 126) si può scrivere, tenendo presente la (VI, 127),

$$(VI, 128) \quad 2n \frac{dA}{ds} + A \Delta L = 0,$$

ovvero

$$(VI, 128') \quad \frac{dA}{ds} = -A \frac{\Delta L}{2n}$$

Questa equazione determina la legge di variazione dell'ampiezza A lungo ciascuna linea s . A noi basta osservare che da essa risulta che, se in un punto P è $A = 0$, ivi è anche $\frac{dA}{ds} = 0$ e quindi A si conserva nulla lungo tutta la linea s passante per P . Ciò chiarisce il significato fisico delle linee s . Difatti consideriamo un fascio di luce e supponiamo che al di fuori di esso non vi sia luce, cioè sia dovunque $A = 0$: è chiaro, per quanto si è detto ora, che nessuna linea s può passare dal fascio allo spazio buio o viceversa: quindi la superficie laterale che limita il fascio è una superficie tubulare costituita da linee s [analoga ai «tubi di flusso» del § 8]. Ne segue che, se il fascio è abbastanza sottile da poterlo considerare come una linea, esso deve identificarsi con una linea s : e poichè in tal caso il fascio prende il nome di «raggio luminoso», è dimostrato che le linee s sono i raggi luminosi (2). In ogni punto, dunque, la direzione del raggio è definita dal vettore $\text{grad } L$ ed è quindi normale alle superfici $L = \text{cost.}$. Tali superfici [superfici di egual fase della f] sono le superfici d'onda [v. § 117] (3). Dunque i raggi luminosi sono le traiettorie ortogonali delle superfici d'onda.

Se conveniamo di prendere come verso positivo sulle linee s quello in cui L cresce, la (VI, 127') si può scrivere

$$(VI, 129) \quad \frac{dL}{ds} = n,$$

ovvero

$$(VI, 130) \quad ds = \frac{dL}{n} = \frac{dL}{c} v$$

e si interpreta geometricamente così. Consideriamo due superfici

(2) Si noti che, in realtà, il fascio non è mai limitato da una superficie netta, a causa della diffrazione, e che il diametro del fascio non si può far tendere a zero, poichè deve sempre mantenersi grande rispetto a λ_0 , altrimenti non vale più l'approssimazione adottata. Il concetto di «raggio» è dunque di necessità definito *fisicamente* con una certa imprecisione (tanto minore, però, quanto più piccolo λ_0): è naturale dunque che la definizione *matematica* data poco sopra [linee s o traiettorie ortogonali delle superfici d'onda] abbia significato fisico solo nella approssimazione da noi adottata.

(3) Difatti sostituendo la (VI, 123) nella (VI, 97) si ha

$$f = A e^{i(k_0 L - \omega t)}$$

che è un'espressione della forma della (V, 71) con $f = k_0 r L / \omega$.

d'onda σ, σ' infinitamente vicine, definite da due valori di L differenti per dL , e sia ds la loro distanza in un punto qualsiasi [fig. 133]: la (VI, 130) ci dice che la distanza fra le due superfici d'onda σ, σ' varia, da un punto all'altro di esse, proporzionalmente a v . Quindi, data la superficie σ , la σ' si può costruire geometricamente come involuppo di sfere aventi i centri su σ e raggi dLv/c , sfere che si possono interpretare come onde parziali partite dai punti di σ e propagatesi per un tempo [uguale per tutte] dL/c . Si giustifica così [entro i limiti di approssimazione dell'ottica geometrica] il successo del principio di Huygens nella sua prima forma.

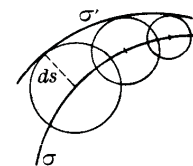


FIG. 133.

In particolare, se il mezzo è omogeneo [$n = \text{cost.}$], per la (VI, 130) le superfici d'onda risultano parallele. Ne segue (4) che le linee s sono rette, come ritroveremo per altra via [«propagazione rettilinea della luce»].

Tornando al caso generale, assegnato l'indice di rifrazione n in funzione del posto, la forma dei raggi luminosi può essere determinata mediante il «principio di Fermat» che dice: «presi due punti qualsiasi A e B [appartendenti ad uno stesso raggio luminoso] tra tutte le linee che li congiungono il «raggio» è quella [od una di quelle] per la quale la durata del percorso [fatto con velocità in ogni punto inversamente proporzionale ad n] è minima». (5) In particolare, se n è costante

(4) Infatti, detti α, β, γ i coseni direttori della tangente ad una linea s , sarà per la (VI, 129)

$$\alpha = \frac{1}{n} \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \beta = \frac{1}{n} \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{1}{n} \frac{\partial L}{\partial z}.$$

Vediamo allora come varia, per es., α quando ci si sposta lungo la linea s di un ds : sarà

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \beta + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \gamma = \\ &= \frac{1}{n^2} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \frac{\partial L}{\partial z} \right] = \frac{1}{2n^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

e per la (VI, 127'), e per l'ipotesi che n sia costante, risulta

$$\frac{d\alpha}{ds} = 0.$$

Similmente si troverebbe $\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} = 0$. Ciò significa che la direzione di una linea s non varia spostandosi lungo di essa, e quindi che tale linea è retta.

(5) Può darsi il caso che vi siano più linee s , passanti sia per A che per B : in tal caso, il tempo di percorso è lo stesso per tutte.

la durata è proporzionale alla lunghezza e quindi la luce segue la via più corta, ossia la retta.

Noi possiamo dedurre il « principio di Fermat » dalla (VI, 127). Difatti prendiamo due punti A e B su una stessa linea s [e sia $s_B > s_A$] e chiamiamo s' un'altra qualsivoglia linea che congiunga A con B , ma che non sia una linea s [fig. 134]. Il tempo impiegato dalla luce a percorrere la linea s da A a B sarà

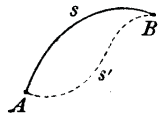


Fig. 134.

$$\int_A^B \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_A^B n ds$$

e si tratta di far vedere che questa espressione è minore della espressione analoga calcolata per s' , cioè che

(VI, 131)

$$\int_A^B n ds < \int_A^B n ds'$$

principio di Fermat

Osserviamo per questo che, per la (VI, 129),

$$\int_A^B n ds = \int_A^B \frac{dL}{ds} ds = L_B - L_A$$

e che anche

$$\int_A^B \frac{dL}{ds'} ds' = L_B - L_A,$$

cosicchè

$$(VI, 132) \quad \int_A^B n ds = \int_A^B \frac{dL}{ds} ds = \int_A^B \frac{dL}{ds'} ds' \leq \int_A^B \left| \frac{dL}{ds'} \right| ds'$$

Ora, $\frac{dL}{ds'}$ è la proiezione su s' di grad L [§ 4], e quindi è in modulo certo minore od eguale a $|\text{grad } L|$, ossia [v. (VI, 127)]

$$\left| \frac{dL}{ds'} \right| \leq n.$$

E si noti che almeno in qualche punto di s' deve valere il segno $<$, perchè altrimenti la linea s' sarebbe dovunque tangente a grad L .

ossia sarebbe una linea s . Dunque

$$\int_A^B \left| \frac{dL}{ds'} \right| ds' < \int_A^B n ds'$$

e sostituendo nella (VI, 132) si ha la (VI, 131).

Aggiungiamo, senza dimostrarlo, che dalla (VI, 127) si possono dedurre anche le note leggi geometriche della riflessione e della rifrazione dei raggi luminosi alla superficie di separazione di due mezzi [ed anche in tali casi vale, opportunamente modificato, il « principio di Fermat » (*)].

In conclusione è dimostrato che il concetto di « raggio luminoso » e le leggi dell'ottica geometrica non soltanto non sono in contraddizione con la concezione ondulatoria della luce [come potrebbe a prima vista sembrare] ma, anzi, vi si inquadrano perfettamente. E ciò vale, naturalmente, non solo per la luce ma anche per ogni altra radiazione.

(*) È interessante notare che queste leggi sono del tutto analoghe alle leggi meccaniche che determinano la traiettoria di un punto in un campo di potenziale assegnato [che nell'analogia corrisponde all'indice di rifrazione]. Per es., in assenza di forze [potenziale = cost.] la traiettoria è rettilinea, come è rettilineo il raggio in un mezzo omogeneo [$n = \text{cost.}$]. E si può approfondire questa analogia confrontando il principio di Fermat dell'ottica col principio della minima azione della meccanica del punto, il quale afferma che, in un campo di potenziale $U(x, y, z)$, un punto libero avente l'energia assegnata E , per andare da un punto A a un punto B segue la traiettoria s per la quale

$$\delta \int_V E - U ds \approx 0.$$

dove il simbolo δ indica la « variazione » dell'integrale conseguente a una deformazione infinitesima della linea s , arbitraria ma che ne lasci immutati gli estremi A e B .

CONDUZIONE DEL CALORE (E DIFFUSIONE)

§ 152. Legge elementare della conduzione del calore ⁽¹⁾.

A fondamento di tutta la teoria porremo il caso più semplice di conduzione che è quello della propagazione del calore attraverso una parete piana indefinita le cui facce siano mantenute a temperature diverse, e costanti, u_1, u_2 [e sia $u_2 < u_1$] (v. fig. 135).

L'esperienza insegna che vi è, in tal caso, passaggio di calore dalla faccia più calda a quella più fredda e che la quantità q di calore che passa attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo [densità di corrente termica] è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura $u_1 - u_2$ ed inversamente allo spessore s della parete, cioè

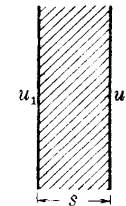


Fig. 135.

(VII, 1)

$$q = \alpha \frac{u_1 - u_2}{s}$$

densità di corrente termica

il coefficiente di proporzionalità α [coefficiente di conducibilità termica interna] dipende dalla sostanza di cui il muro è composto.

Da questo caso si passa facilmente a quello più generale della propagazione del calore per conduzione attraverso un corpo solido qualsiasi. Osserviamo, infatti, che in ogni istante la temperatura del corpo è una funzione $u(x, y, z)$ dei suoi punti e che, prese due superfici isoterme [superfici $u(x, y, z) = \text{cost.}$] infinitamente vicine, corrispondenti

⁽¹⁾ Osserviamo che la legge della conduzione del calore nei solidi diviene quella della diffusione dei liquidi nei liquidi e dei gas nei gas quando alla temperatura si sostituisca la concentrazione di uno dei liquidi [o gas] nell'altro [numero di molecole del primo per 100 molecole del miscuglio] ed alla quantità di calore la massa della sostanza che si diffonde. Noi però parleremo sempre di conduzione del calore, benché tutte le considerazioni svolte si possano applicare alla diffusione.

Calore
conduzione
superficie
quantità di calore

densità di corrente termica
muro

ai valori u ed $u + du$ [fig. 136], possiamo trattare lo strato solido fra esse compreso come la parete del caso precedente. Fissato quindi [arbitrariamente] un verso per la normale s alla superficie isoterma $u = \text{cost.}$, la densità della corrente termica che l'attraversa è data dalla (VII, 1) quando in essa si sostituisca ad s la distanza ds fra le due superfici e ad $u_1 - u_2$ la differenza $u - (u + du) = -du$: avremo allora

$$q_s = -\kappa \frac{du}{ds},$$

ed il segno $-$ ci dice che se la temperatura cresce nel senso di s la corrente termica va in senso opposto [come è ovvio].

Consideriamo ora un elemento superficiale $d\sigma$ comunque orientato [v. fig. 137 in cui AB è la sezione di $d\sigma$] e sia n la sua normale [ar-

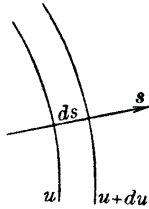


Fig. 136.

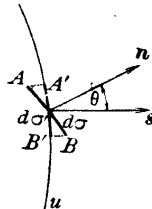


Fig. 137.

bitrariamente orientata], θ l'angolo di essa con s . La quantità di calore che per unità di tempo attraversa $d\sigma$ è quella stessa che attraversa $d\sigma'$, proiezione normale di $d\sigma$ sulla isoterma, cioè [per quanto precede] è $-\kappa \frac{du}{ds} d\sigma'$: e, poichè $d\sigma' = d\sigma \cos \theta$ e $\frac{du}{ds} \cos \theta = \frac{du}{dn}$, essa è

$$-\kappa \frac{du}{dn} d\sigma.$$

Si può quindi definire il vettore

(VII, 2)

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad } u,$$

che dà la «densità di corrente termica», con che la corrente termica attraverso un elemento superficiale qualsiasi, di normale n , è data da $q_n d\sigma$ (2).

(2) Tutto ciò è analogo alla legge di Ohm per l'elettricità [§ 53]: \mathbf{q} corrisponde a \mathbf{j} , u a V , κ a γ .

§ 153. Equazioni fondamentali della conduzione del calore (1).

Vediamo ora di esprimere il «principio della conservazione della quantità di calore» per un mezzo omogeneo ed isotropo.

Consideriamo per questo una porzione S qualsiasi del mezzo, limitata da una superficie σ (2), e notiamo che, se c è il «calore specifico», dato che la temperatura nel tempo dt aumenta di $\frac{\partial u}{\partial t} dt$, l'aumento della quantità di calore contenuta nell'elemento di massa ρdS [$\rho =$ densità] è $c\rho dS \frac{\partial u}{\partial t} dt$, e quello della quantità di calore contenuta in S è quindi

$$\int_S c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dS dt:$$

l'incremento di tale quantità di calore riferito all'unità di tempo è dunque

$$\int_S c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dS.$$

Poichè escludiamo che vi sia creazione o distruzione di calore, questo incremento deve essere uguale al flusso di corrente termica entrante attraverso la superficie σ : detta n la normale esterna di tale superficie, questo flusso per l'elemento di superficie $d\sigma$ è [v. § prec.] $-q_n d\sigma = \kappa \frac{du}{dn} d\sigma$: in totale esso è quindi

$$\kappa \int_\sigma \frac{du}{dn} d\sigma.$$

Uguagliando questa all'espressione precedente troviamo

$$(VII, 3) \quad \int_S c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dS = \kappa \int_\sigma \frac{du}{dn} d\sigma.$$

A questa relazione integrale possiamo sostituire una relazione differenziale. Infatti, trasformando l'integrale superficiale in integrale di volume colla (I, 20), otteniamo

$$\int_S (c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \Delta u) dS = 0,$$

(1) In tutto ciò che segue escluderemo sempre che il calore si trasformi in altre forme di energia o viceversa [come, per es., avverrebbe, se il corpo fosse percorso da corrente elettrica, per l'effetto Joule e per l'effetto Thomson].

(2) Escludiamo che σ coincida, anche in parte, con la superficie che limita il mezzo.

da cui, per l'arbitrarietà dello spazio S [v. § 7, nota 2], si ha

(VII. 4)

$$\Delta u = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t},$$

dove si è posto

(VII. 5)

$$D = \frac{\kappa}{c_p},$$

la (VII. 4) si chiama « *equazione differenziale della conduzione del calore* » ⁽²⁾.

Nel caso di temperature « *stazionarie* » [conduzione regolata in modo che in ogni punto la temperatura non vari col tempo] la (VII. 4) diverrà

(VII. 6)

$$\Delta u = 0,$$

cioè « *la temperatura u è una funzione armonica* ».

Se, poi, consideriamo un corpo limitato occorrerà definire anche le « *condizioni al contorno* ». Supponendo che il corpo sia a contatto con altri corpi [per es., aria] a temperatura u_0 conosciuta in ogni punto [eventualmente funzione di t], l'esperienza dimostra che, escluso uno scambio di calore per « *irraggiamento* » e supposta non grande la differenza $u - u_0$ fra la temperatura u della superficie σ del corpo e la temperatura esterna u_0 , la densità q_0 di corrente termica uscente è proporzionale a tale differenza: si ha quindi

$$q_0 = \gamma(u - u_0),$$

dove la costante di proporzionalità γ [coefficiente di conducibilità superficiale] dipende dalla natura della superficie σ [ed anche dalla eventuale velocità rispetto al corpo del fluido in cui esso può essere immerso]. Sostituendo a q_0 la sua espressione $-\kappa \left(\frac{du}{dn}\right)_0$ e ponendo $\gamma/\kappa = h$ avremo la condizione

(VII. 7)

$$\frac{du}{dn} = -h(u - u_0),$$

Come si vede, essendo nota solo u_0 , questa condizione non determina direttamente la u in superficie, ma una combinazione di essa colla sua derivata normale.

In casi particolari la (VII. 7) assume una forma molto più semplice.

(2) Nella teoria della diffusione [cfr. § 152, nota 1] l'equazione fondamentale è ancora la (VII. 4) in cui, però, D è il coefficiente di diffusione.

Ad esempio, se γ è molto grande o κ molto piccolo la (VII. 7) dà ⁽³⁾

(VII. 7')

$$u = u_0, \quad \text{su } \sigma,$$

cioè « *la temperatura della superficie del corpo è sensibilmente eguale a quella del mezzo con cui è a contatto* ».

Se invece la conducibilità superficiale γ è trascurabile [corpo termicamente isolato] si ha

(VII. 7'')

$$\frac{du}{dn} = 0, \quad \text{su } \sigma.$$

Il problema fondamentale nella teoria della conduzione è quello di determinare in ogni punto di un corpo dato, S , la temperatura, u , in funzione del tempo t , quando siano note le condizioni della superficie di S in ogni istante fra 0 e t e la temperatura iniziale in tutti i punti di S . Si può dimostrare che queste condizioni determinano in modo unico la soluzione [come è, del resto, intuitivo].

Il caso di conduzione unidimensionale è quello in cui la temperatura u dipende solo da una coordinata x e dal tempo t .

§ 154. Problemi unidimensionali.

La (VII. 4) si semplifica notevolmente quando si studia la propagazione in un mezzo omogeneo in cui le superfici isoterme sono piani paralleli [come, p. es., nel caso della parete di cui al § 152]. In tal caso, assunto l'asse x normale a tali piani, la (VII. 4) diventa

(VII. 8)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t},$$

e, nel caso di temperature stazionarie,

(VII. 8')

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0.$$

Si dice allora che la propagazione è *unidimensionale*: ed è utile notare che il suo studio risolve anche il problema della propagazione in un filo rettilineo, omogeneo ed a sezione costante, lateralmente isolato ⁽¹⁾ [cioè in un filo circondato da materiali non conduttori che impediscono

(3) E lo si può vedere scrivendo la (VII. 7) sotto la forma

$$\frac{1}{h} \frac{du}{dn} = -(u - u_0)$$

e, quindi, passando al limite per $h \rightarrow \infty$.

(1) Osserviamo che evidentemente la forma del filo isolato non influisce sulla quantità di calore che lo attraversa né sulla sua temperatura e che, quindi, la soluzione ottenuta per il filo rettilineo vale anche quando tale filo abbia una forma qualsiasi, purché x rappresenti l'ascissa curvilinea contata lungo il filo.

la propagazione del calore attraverso la sua superficie laterale]. Per questo, in seguito, parleremo di propagazione unidimensionale « in un filo isolato » od « in una parete » solo per fissare le idee, intendendo, però, che quanto viene detto per l'uno valga anche per l'altro.

§ 155. Propagazione unidimensionale stazionaria.

Una prima ed immediata applicazione di quanto si è detto può essere lo studio della propagazione unidimensionale « stazionaria ».

Dovremo allora servirci della (VII, 8') che integrata dà

$$(VII, 9) \quad u = c_1 x + c_2,$$

con c_1 e c_2 costanti di integrazione, che si determinano subito in base alle « condizioni agli estremi ».

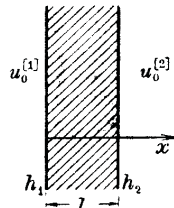


Fig. 138.

Ad es., se le facce della parete, $x=0$ ed $x=l$, sono mantenute a temperature costanti e assegnate u_1 ed u_2 , si ha subito $c_2 = u_1$, $c_1 = (u_2 - u_1)/l$ e quindi

$$(VII, 9') \quad u = \frac{u_2 - u_1}{l} x + u_1.$$

Se invece si considerano condizioni più generali, per esempio pensando ad una parete le cui facce [di conducibilità superficiale h_1 ed h_2] sono rispettivamente a contatto con ambienti a temperature costanti assegnate $u_0^{[1]}$ ed $u_0^{[2]}$ (v. fig. 138), si hanno le due condizioni

$$\left(-\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = h_1(u_0^{[1]} - u_1), \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = h_2(u_0^{[2]} - u_2),$$

ossia, per la (VII, 9),

$$-c_1 = h_1(u_0^{[1]} - c_2), \quad c_1 = h_2(u_0^{[2]} - c_1 l - c_2).$$

da esse si possono ricavare c_1 e c_2 e si trova

$$(VII, 9'') \quad u = \frac{(u_0^{[2]} - u_0^{[1]})x + \frac{u_0^{[2]}}{h_1} + \frac{u_0^{[1]}}{h_2} + lu_0^{[1]}}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + l}.$$

§ 156. Propagazione delle oscillazioni di temperatura nel suolo.

Un tipo di problema che presenta qualche affinità con quelli delle temperature stazionarie è quello in cui la temperatura è in ogni punto funzione sinu-

soidale di t : difatti in tali problemi si riesce ad eliminare la t ed a ridursi alla determinazione di una funzione solo di x, y, z . Tratteremo qui un problema unidimensionale di questo tipo e cioè quello della propagazione in un mezzo occupante un intero semispazio (fig. 139) limitato da un piano [che assumeremo come piano $x=0$] al quale è assegnata una temperatura uniforme funzione sinusoidale del tempo.

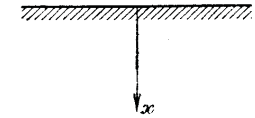


Fig. 139.

In questo caso la (VII, 4) assumerà la forma (VII, 8) e dovremo imporre, invece della (VII, 7), la condizione

$$u = A \cos \omega t, \quad \text{per } x = 0,$$

[con $A = \text{cost.}$] od anche, per servirci del « metodo degli esponenziali complessi » [§ 139],

$$(VII, 10) \quad u = A e^{i\omega t}, \quad \text{per } x = 0.$$

Cerchiamo allora una soluzione della forma

$$(VII, 11) \quad u(x, t) = v(x) e^{i\omega t},$$

cioè tale che in ogni punto la temperatura vari sinusoidalmente colla stessa frequenza della temperatura superficiale: verificheremo che con tale forma di u si possono soddisfare tutte le condizioni del problema.

Vediamo di determinare $v(x)$: sostituendo la (VII, 11) nella (VII, 8) otteniamo l'equazione

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = i \frac{\omega}{D} v,$$

che integrata dà (1)

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{i \frac{\omega}{D}} x} + c_2 e^{-\sqrt{i \frac{\omega}{D}} x} = c_1 e^{\sqrt{\frac{\omega}{2D}} (1+i)x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} (1+i)x}.$$

E le costanti c_1 e c_2 si determinano ricordando che u , e quindi v , deve essere finita, anche per $x \rightarrow \infty$, e che per $x = 0$ deve valere la (VII, 10) e quindi deve essere $v(0) = A$: si ha così

$$c_1 = 0, \quad c_2 = A,$$

da

$$u(x, t) = A e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} x} e^{i\omega \left(t - \frac{x}{\sqrt{2D\omega}}\right)},$$

(1) Ricordiamo che $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ e quindi $\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

od anche, passando alla forma trigonometrica, e prendendo la parte reale ⁽²⁾,

$$(VII, 12) \quad u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} \cos \omega \left(t - \frac{x}{\sqrt{2D\omega}} \right).$$

Ne viene che, ad una qualsiasi profondità x , la temperatura u è funzione sinusoidale di t con ampiezza

$$Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}$$

minore dell'ampiezza A in superficie, e la riduzione è tanto maggiore quanto maggiore è la profondità e quanto maggiore è la frequenza delle oscillazioni. La fase delle oscillazioni varia da punto a punto, e, precisamente, le oscillazioni si risentono verso l'interno con un ritardo $x/\sqrt{2\omega D}$ proporzionale alla distanza x dalla superficie, cosa che si può esprimere dicendo che le oscillazioni di temperatura si propagano nell'interno con velocità $\sqrt{2\omega D}$ (tanto maggiore quindi quanto maggiore è la frequenza ω). ⁽³⁾

Il problema trattato ha qualche interesse nella Geofisica per lo studio della propagazione nel sottosuolo delle variazioni diurne e stagionali della temperatura. Si trova così che l'assorbimento è la velocità di propagazione delle oscillazioni diurne sono maggiori di quelle delle oscillazioni annue. Ad esempio, per un ordinario terreno umido [$D = 0,0049$] una escursione diurna di 20° si riduce a $0,86^\circ$ a soli 36 cm di profondità [dove le oscillazioni sono opposte a quelle superficiali] ed a $0,004^\circ$ ad un metro: una escursione annua di 20° , invece, si ridurrebbe a $17,5^\circ$ a 30 cm, a $12,7^\circ$ ad un metro ed a $0,2^\circ$ a 10 metri. [A tale profondità dunque si può ritenere che la temperatura resti praticamente costante, ciò che si verifica effettivamente]. Quanto alle velocità di propagazione esse, nel caso considerato, sono di 3,04 cm all'ora per le oscillazioni diurne e di 3,8 cm al giorno per quelle annue.

§ 157. Propagazione in un filo (isolato) limitato, con gli estremi a temperature costanti.

Consideriamo un filo «isolato», omogeneo, a sezione costante e di lunghezza finita, l , che per semplicità supponiamo rettilineo [v. § 154, nota 1] ed assumiamo come asse x la sua direzione; un estremo del filo sia in $x = 0$ e l'altro in $x = l$.

Per avere la temperatura $u(x, t)$ del filo, oltre alla temperatura iniziale

$$(VII, 13) \quad u(x, 0) = f(x),$$

⁽²⁾ Si noti l'analogia formale della (VII, 12) colla (VI, 61), dove $\sqrt{\omega/(2D)}$ corrisponde a β e $\sqrt{2D\omega}$ a v' .

⁽³⁾ Ne deriva, in particolare, che per $x = \pi\sqrt{2D/\omega}$ le oscillazioni sono in opposizione di fase con quelle alla superficie [e ridotte di ampiezza nel rapporto $e^{-\pi} = 0,043\dots$].

dobbiamo dare le condizioni agli estremi, e supporremo, per ora, che esse siano

$$(VII, 14) \quad u = 0, \quad \text{per } x = 0, x = l \text{ e } t \text{ qualsiasi } (1).$$

Si tratta di trovare un integrale della (VII, 8) che soddisfi le condizioni (VII, 13) e (VII, 14).

Useremo nella ricerca di $u(x, t)$ il metodo della separazione delle variabili [§ 84], cercando delle soluzioni semplici del tipo

$$(VII, 15) \quad u(x, t) = X(x)\Theta(t)$$

e costruendoci poi con esse la soluzione richiesta.

Sostituendo nella (VII, 8) la (VII, 15) e separando le variabili abbiamo

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{D} \frac{\Theta}{\Theta}$$

da cui, colle solite considerazioni [cfr. § 84], si ottiene ⁽²⁾

$$X'' = -\omega^2 X \quad \text{e} \quad \Theta = -\omega^2 D \Theta. \quad [\omega = \text{cost.}]$$

si ha, così,

$$X = A \cos \omega x + B \sin \omega x, \quad \Theta = Ce^{-\omega^2 Dt}$$

e quindi

$$(VII, 16) \quad u = (a \cos \omega x + b \sin \omega x)e^{-\omega^2 Dt}$$

[con a, b costanti arbitrarie]. Le condizioni agli estremi (VII, 14) precisano le costanti a ed ω ; infatti esse si traducono in

$$a = 0 \quad \text{ed} \quad \omega l = n\pi, \quad (n \text{ intero}).$$

Si ha così la più generale soluzione a variabili separate che si annulli agli estremi: essa è [scrivendo b_n per b]

$$(VII, 17) \quad u_n = b_n \sin n\pi \frac{x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} Dt}$$

Possiamo servirci di essa per formare la soluzione cercata osservando che, per essere la (VII, 8) lineare ed omogenea, ed omogenee le condizioni (VII, 14), la funzione

$$(VII, 18) \quad u(x, t) = \sum_1^\infty b_n \sin n\pi \frac{x}{l} \cdot e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2} Dt},$$

⁽¹⁾ Essendo in nostro arbitrio la scelta di una origine per le temperature, questa condizione equivale alla: $u = \text{cost.}$ per $x = 0, x = l$ e t qualsiasi.

⁽²⁾ Se si prendesse $+\omega^2$ invece di $-\omega^2$, le condizioni agli estremi porterebbero subito ad una u identicamente nulla.

se la serie converge, è ancora una soluzione e contiene le infinite costanti arbitrarie b_n . Basterà quindi determinare le b_n in modo da soddisfare l'ulteriore condizione (VII, 13), che diviene

$$(VII, 19) \quad \sum_1^{\infty} b_n \sin n\pi \frac{x}{l} = f(x),$$

ossia le b_n devono essere i coefficienti dello sviluppo di $f(x)$ in serie di soli seni [§ 74], e sono quindi date dalla (IV, 5).

Passiamo ora al caso, più generale, in cui gli estremi del filo siano mantenuti a due temperature diverse ma costanti [di cui una, per es. $(u)_{x=0}$ si può assumere eguale a zero (v. nota 1)] e cioè al caso in cui le (VII, 14) vengano sostituite da

$$(VII, 20) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{per } x = 0 \quad \text{e } t \text{ qualsiasi,} \\ u = u^0 \quad \text{» } x = l \quad \text{» » »} \end{array} \right.$$

In tal caso il problema si risolve [approfittando della linearità della (VII, 8) e delle condizioni al contorno] decomponendo la u nella somma di due funzioni $u^{(1)}$ ed $u^{(2)}$,

$$u = u^{(1)} + u^{(2)},$$

di cui $u^{(1)}$ soddisfa le (VII, 14) mentre $u^{(2)}$ soddisfa le (VII, 20) ed è, inoltre, stazionaria. La $u^{(2)}$ è data, per la (VII, 9'), da

$$u^{(2)} = \frac{u^0}{l} x.$$

Quanto alla $u^{(1)}$, dovendo aversi per $t = 0$

$$u^{(1)} = f(x) - \frac{u^0}{l} x,$$

la sua ricerca è ricondotta a quella poco sopra eseguita, con $f - u^0 x/l$ al posto di f .

§ 158. Propagazione in un filo (isolato) illimitato.

Il problema della propagazione in un filo [isolato, omogeneo ed a sezione costante] *illimitato* non differisce da quello studiato all'inizio del § prec. se non in quanto che alla condizione (VII, 14) va sostituita la condizione che u sia dappertutto finita. Possiamo quindi riprendere il ragionamento fatto e giungere, così, alla soluzione a variabili separate (VII, 16) che contiene gli elementi arbitrari a, b, ω . Soltanto, ora [cfr. § 77], invece di una infinità *discreta* di soluzioni semplici otterremo una infinità *continua* di tali soluzioni. Considerando ω come

variabile continua e prendendo per ogni valore di ω un valore [arbitrario] di a ed uno di b [cioè considerando a e b funzioni arbitrarie di ω], potremo, allora, sostituire il « sommatorio », Σ , con un « integrale » e assumere la soluzione nella forma

$$(VII, 21) \quad u(x, t) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x] e^{-\omega^2 D t} d\omega,$$

in cui compaiono le due funzioni arbitrarie $a(\omega)$ e $b(\omega)$, che dovremo determinare in modo da soddisfare alla condizione

$$u(x, 0) = f(x)$$

[se $f(x)$ è la funzione, preventivamente assegnata, che dà la distribuzione iniziale della temperatura]. Per $t = 0$ la (VII, 21) dà, allora,

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x] d\omega,$$

quindi la $f(x)$ dovrà essere sviluppabile in integrale di Fourier [§ 77] e le funzioni $a(\omega)$, $b(\omega)$ saranno date dalle note formule [(IV, 14),]

$$(VII, 22) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi, \\ b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi. \end{array} \right.$$

La soluzione richiesta $u(x, t)$, data dalla (VII, 21), risulta, così, completamente determinata. Possiamo, però, metterla sotto una forma più semplice e più notevole sostituendo ad $a(\omega)$ e $b(\omega)$ le loro espressioni (VII, 22) e supponendo, nell'integrale doppio così ottenuto, di potere invertire l'ordine di integrazione [cosa sempre possibile se, come supporremo, $f(x)$ tende a 0 abbastanza rapidamente per $|x| \rightarrow \infty$]. Si ha così

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [\cos \omega \xi \cos \omega x + \sin \omega \xi \sin \omega x] d\xi \right) e^{-\omega^2 D t} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} \cos \omega(x - \xi) e^{-\omega^2 D t} d\omega, \end{aligned}$$

ed allora è possibile eseguire l'integrazione rispetto ad ω ⁽¹⁾ ottenendo in definitiva

$$(VII, 23) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi$$

Con essa si verifica facilmente che $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$: infatti, prendendo come nuova variabile d'integrazione $\alpha = \frac{x-\xi}{\sqrt{Dt}}$, si ha subito

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \alpha\sqrt{Dt}) e^{-\frac{\alpha^2}{4}} d\alpha$$

e, passando al limite per $t \rightarrow 0$, e utilizzando la formula (*) della nota 1,

⁽¹⁾ Esponiamo qui in breve il calcolo dell' $\int_0^{\infty} \cos \omega(x-\xi) e^{-\omega^2 Dt} d\omega$. Posto $\omega^2 Dt = y^2$ ed $\alpha = \frac{x-\xi}{\sqrt{Dt}}$ esso diviene

$$\frac{1}{\sqrt{Dt}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} \cos \alpha y dy,$$

quindi il calcolo è ricondotto a quello dell'integrale

$$\mathcal{J}(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-y^2} \cos \alpha y dy,$$

che per $\alpha = 0$ si riduce al noto integrale geodetico

$$(*) \quad \mathcal{J}(0) = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Derivando $\mathcal{J}(\alpha)$ rispetto ad α con la derivazione sotto segno di integrale (che si può legittimare) e poi integrando per parti, prendendo $\sin \alpha y$ come fattore finito, si ottiene

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} = \left[\frac{1}{2} e^{-y^2} \sin \alpha y \right]_0^{\infty} - \frac{\alpha}{2} \int_0^{\infty} e^{-y^2} \cos \alpha y dy$$

che, annullandosi la quantità entro [] per $y = 0$ ed $y = \infty$, dà

$$\frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{2} \mathcal{J} \quad \text{da cui} \quad \mathcal{J}(\alpha) = \mathcal{J}(0) e^{-\frac{\alpha^2}{4}}.$$

Sostituendo ad $\mathcal{J}(0)$ il suo valore (*) e ad α la sua espressione, si ottiene così

$$\mathcal{J}(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}$$

e con esso si ha la (VII, 23).

si ha

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{\alpha^2}{4}} d\alpha = f(x) \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} d\alpha = f(x).$$

§ 159. Una interpretazione fisica della soluzione data nel § precedente.

Studiamo l'integrale (VII, 23) nel caso in cui inizialmente sia $u = 0$ in ogni punto del filo tranne che nel trattino infinitesimo da $x = \xi$ ad $x = \xi + d\xi$: esso si riduce al solo elemento

$$(VII, 24) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi = \frac{C}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}},$$

dove si è posto $C = f(\xi) d\xi$.

Per $t \rightarrow 0$ esso tende a zero se $x \neq \xi$ e tende ad ∞ se $x = \xi$, per $t \neq 0$ esso ha un andamento come quello che è segnato in fig. 140 per due diversi valori di t [di cui $t_2 > t_1$]; se poi $t \rightarrow \infty$ esso tende a zero per qualsiasi valore di x ed il suo diagramma si schiaccia sull'asse x .

È notevole il fatto che l'area compresa fra la curva e l'asse x è data da [v. formula (*), nota 1, § prec.]

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dx = \frac{C}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} dx = \frac{2C}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = C,$$

ossia è indipendente dal tempo. Vediamone ora l'interpretazione fisica calcolando la quantità di calore Q contenuta in tutto il filo al tempo t ⁽¹⁾. Se σ è la sezione, ρ la densità e c il calore specifico, sarà

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} c \rho \sigma dx \cdot u = c \rho \sigma \int_{-\infty}^{\infty} u dx = c \rho \sigma C.$$

La costanza di C significa dunque che Q , quantità di calore contenuta nel filo, non varia col tempo, ma nell'istante $t = 0$ è concentrata nel trattino $(\xi, \xi + d\xi)$ [filo riscaldato in un punto], poi si diffonde nel filo coll'andamento dato dalla fig. 140 ⁽²⁾.

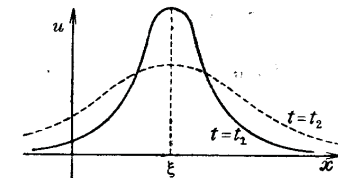


FIG. 140.

⁽¹⁾ Intenderemo con ciò la quantità di calore necessaria per portare il filo dalla temperatura 0 alla temperatura $u(x, t)$.

⁽²⁾ Osserviamo che dopo un tempo qualsiasi, per quanto breve, dall'istante iniziale, la temperatura è alterata in ogni punto del filo: non vi è dunque una velocità di propagazione finita, come nel caso della corda vibrante e delle onde elettromagnetiche.

Lo studio di questo caso particolare ci chiarisce il significato della soluzione generale (VII, 23). Essa infatti si può pensare ottenuta come somma di infinite soluzioni del tipo (VII, 24), ognuna delle quali rappresenta la propagazione della quantità di calore $Q_\xi = c\rho\sigma f(\xi)d\xi$ che al tempo zero era concentrata in un elementino $d\xi$ del filo: tali quantità di calore si diffondono nel filo, ciascuna secondo la legge ora vista, sovrapponendosi senza disturbarsi [cioè con legge puramente additiva].

§ 160. Propagazione in un filo non isolato. *(un filo immerso in un ambiente)*

Il caso della propagazione in un filo *non isolato*, immerso in un ambiente a temperatura assegnata $u_0(x, t)$, non rientra nei problemi unidimensionali studiati al § 154. Per studiarlo, non si può applicare la (VII, 4), poichè essa è stata stabilita ammettendo di poter considerare nell'interno del corpo uno spazio S a tre dimensioni non contiguo alla superficie, il che è manifestamente impossibile in questo caso: dovremo dunque rifare, con le opportune modifiche, il ragionamento che ci ha condotto alla (VII, 4), prendendo le mosse dal principio della conservazione della quantità di calore [ammesso, come precedentemente, che non vi siano trasformazioni di energia termica in altre forme di energia o viceversa].

Siano, quindi, x l'ascissa che individua i vari punti del filo e σ l'area della sua sezione che supponiamo uniforme: applichiamo il principio della conservazione del calore al tratto di filo compreso fra due sezioni qualunque di ascisse x_0, x [con $x_0 < x$]. Poichè l'aumento di temperatura, u , nel tempo dt è $\frac{\partial u}{\partial t} dt$, per ogni elemento dx la quantità di calore aumenterà in dt di $c\rho\sigma dx \frac{\partial u}{\partial t} dt$ [dove, al solito, c e ρ sono rispettivamente calore specifico e densità del filo (costanti)]: la quantità di calore nel tratto considerato aumenterà dunque, nel tempo dt , di

$$\int_{x_0}^x c\rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t} dx dt,$$

e, nell'unità di tempo, di

$$\int_{x_0}^x c\rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t} dx.$$

D'altra parte, il flusso di calore che entra, nel tratto di filo, per la sezione in x_0 nell'unità di tempo è [§ 152]

$$-\left(x \frac{\partial u}{\partial x} \sigma\right)_{x_0},$$

quello che esce per la sezione in x

$$x \frac{\partial u}{\partial x} \sigma,$$

e quello che esce attraverso la superficie laterale di un elemento dx di filo, se s è il perimetro di σ , colle solite notazioni [§ 153], è

$$\gamma(u - u_0) s dx.$$

Quindi la quantità totale di calore che entra, nell'unità di tempo, nel tratto considerato, sarà

$$x\sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \left(x\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0} - \int_{x_0}^x \gamma(u - u_0) s dx :$$

e, dovendo essere eguale al corrispondente incremento della quantità di calore, si avrà

$$\int_{x_0}^x c\rho\sigma \frac{\partial u}{\partial t} dx = x\sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \left(x\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0} - \int_{x_0}^x \gamma(u - u_0) s dx.$$

Per sostituire a questa relazione una equazione differenziale, basta derivare rispetto ad x : così, posto

(VII, 25)

$$\frac{x}{c\rho} = D \quad \text{e} \quad \frac{\gamma s}{x\sigma} = \alpha,$$

si ottiene

(VII, 26)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(u - u_0),$$

che è l'equazione fondamentale del nostro problema.

Temperatura ambiente costante ed uniforme. Esperienza di Ingenhousz.

Se il filo è immerso in un ambiente a temperatura u_0 costante ed uniforme, che possiamo assumere eguale a 0 [v. nota 1, § 157], e se supponiamo che le condizioni siano tali che la temperatura del filo sia stazionaria, cioè $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, la (VII, 26) diventerà

$$(VII, 26') \quad \frac{d^2 u}{dx^2} - \alpha u = 0.$$

Da essa, integrando, si ha

$$u = c_1 e^{\sqrt{\alpha} x} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha} x},$$

dove c_1 e c_2 sono costanti di integrazione da determinarsi colle condizioni agli estremi. Studiamo, in particolare, il caso di un filo illimitato da una parte,

mentre dall'altra parte il suo estremo è mantenuto ad una temperatura costante u_1 : è intuitivo [e si potrebbe dimostrarlo] che dopo un tempo sufficientemente lungo la temperatura si potrà considerare stazionaria e si potrà applicare la formula precedente. Tenendo conto delle condizioni « *u finita in ogni punto* » ed « *u = u_1 per x = 0* », le costanti si precisano subito in

$$c_1 = 0 \quad \text{e} \quad c_2 = u_1.$$

Si ha così

$$(VII, 27) \quad u = u_1 e^{-\sqrt{\alpha x}},$$

cioè la temperatura lungo il filo va decrescendo con legge esponenziale. Questa legge si può comodamente verificare, scaldando ad un estremo una sbarra metallica lungo la quale sono disposti ad intervalli eguali dei termometri.

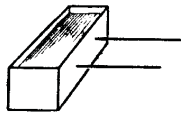


Fig. 141.

Possiamo applicare questo risultato alla nota esperienza di Ingenhousz che serve ad una misura grossolana, ma rapida, del rapporto delle conducibilità termiche κ_1, κ_2 di due sostanze solide. Queste vengono foggiate a sbarrette uguali, rivestite di paraffina ed infilate in fori praticati in una cassetta che si riempie di acqua bollente (fig. 141): si osserva che su ciascuna sbarretta la fusione della paraffina progredisce fino ad una certa distanza dalla cassetta, poi si arresta. Se α_1 ed α_2 sono i valori di α relativi alle due sbarrette ed l_1, l_2 le lunghezze dei tratti su cui la paraffina è fusa [misurate nello stato stazionario] per la (VII, 27) abbiamo

$$\sqrt{\alpha_1} l_1 = \sqrt{\alpha_2} l_2,$$

da cui, ricordando l'espressione (VII, 25) di α , si ha

$$l_1^2 : l_2^2 = \frac{\gamma_2}{\kappa_2} : \frac{\gamma_1}{\kappa_1},$$

e potendosi, in generale, ritenere eguali le conducibilità superficiali delle due sbarrette, si ricava

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2}.$$

Aggiungiamo ancora che lo studio generale della propagazione del calore in un filo non isolato, immerso in un mezzo a temperatura costante ed uniforme [che si può assumere uguale a 0] si riconduce facilmente a quello del filo isolato [§§ 157-158] ponendo

$$u = v(x, t) e^{\lambda t},$$

dove $v(x, t)$ è una funzione di x e t e λ una costante che ci riserviamo di determinare opportunamente: infatti, sostituendo tale espressione nella (VII, 26) [con $u_0 = 0$], si ha

$$e^{\lambda t} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{D} e^{\lambda t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda v + \alpha D v \right)$$

e, precisando λ col porre

$$\lambda = -\alpha D,$$

si ottiene per $v(x, t)$ l'equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial v}{\partial t},$$

che è quella incontrata nello studio del filo isolato.

§ 161. Propagazione del calore in un mezzo illimitato.

Dei problemi a tre dimensioni studieremo solo quello relativo alla propagazione del calore in un mezzo isotropo illimitato quando si supponga data la distribuzione iniziale della temperatura, $f(x, y, z)$.

Riprendiamo perciò l'equazione fondamentale (VII, 4) ed, ispirandoci all'interpretazione fisica del § 159, cerchiamo dapprima una soluzione corrispondente al caso di una quantità di calore finita concentrata inizialmente in un solo punto M dello spazio [dove, quindi, la temperatura iniziale sarà ∞] e lasciata poi diffondersi. In tal caso, essendo isotropo il mezzo, la soluzione cercata dovrà essere a simmetria sferica attorno al punto M , quindi, assumendo coordinate polari di polo M , la (VII, 4) potrà scriversi [(I, 31₂)]

$$(VII, 28) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t},$$

od anche, ponendo $v = ru$,

$$(VII, 28') \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial v}{\partial t},$$

che è della forma (VII, 8). Essa ammette, dunque, come si è visto al § 159, la soluzione particolare [analoga alla (VII, 24)]

$$v_1 = \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}$$

e la (VII, 28), in corrispondenza, avrà la soluzione

$$u_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{1}{r} \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}}.$$

Tale soluzione per $t = 0$ è nulla dovunque, tranne in M dove è ∞ , ma tuttavia non è la soluzione cercata, perchè continua ad essere ∞

in M anche per $t > 0$ ⁽¹⁾. Però, essendo la (VII, 28') « omogenea », non solo v_1 ma anche tutte le sue derivate rispetto ad r ne sono soluzioni: consideriamo fra queste la soluzione

$$v_2 = \frac{\partial v_1}{\partial r} = \frac{\Phi}{r^{3/2}} r e^{-\frac{r^2}{4Dt}}, \quad \left(\Phi = -\frac{C}{2D} \right)$$

da cui si ottiene

$$u_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{\Phi}{r^{5/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}};$$

u_2 è una soluzione particolare che per $t = 0$ è nulla in ogni punto tranne che nel punto M , in cui è infinita; inoltre per $t > 0$ è finita dappertutto [e, moltiplicata per $e^{\rho^2} 4\pi r^2 dr$ ed integrata fra 0 ed ∞ , dà $e^{\rho^2} 8\Phi(\pi D)^{3/2}$ cioè una quantità di calore indipendente da t]. Essa è dunque la soluzione cercata.

Introducendo coordinate cartesiane, se ξ, η, ζ sono le coordinate del punto M , e x, y, z quelle del punto dove si vuol calcolare la u , potremo scrivere u_2 sotto la forma

$$(VII, 29) \quad \frac{\Phi}{r^{5/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4Dt}}$$

Potremo ora ottenere una soluzione più generale sovrapponendo le infinite soluzioni particolari che si possono ottenere dalla (VII, 29) facendo variare (ξ, η, ζ) in tutto lo spazio e scegliendo per ogni punto un valore di Φ , cioè considerando Φ come funzione $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ dei punti dello spazio. Si ottiene così la soluzione

$$(VII, 30) \quad u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\xi, \eta, \zeta)}{r^{5/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4Dt}} d\xi d\eta d\zeta.$$

Essa contiene la funzione arbitraria $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, che, nel caso nostro, si deve determinare in modo che per $t = 0$ sia

$$(VII, 31) \quad u(x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

A tale scopo poniamo

$$\frac{x-\xi}{2\sqrt{Dt}} = \alpha, \quad \frac{y-\eta}{2\sqrt{Dt}} = \beta, \quad \frac{z-\zeta}{2\sqrt{Dt}} = \gamma,$$

⁽¹⁾ Essa corrisponde al caso in cui M sia una sorgente puntiforme che seguita a sviluppare calore: infatti, se si calcola la quantità di calore presente in un istante qualunque t in tutto il mezzo, moltiplicando la u_1 per $e^{\rho^2} 4\pi r^2 dr$ ed integrando fra 0 ed ∞ , si trova $e^{\rho^2} 8\pi CD\sqrt{t}$, cioè una quantità di calore crescente con t .

con che la (VII, 30) diventa

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - 2\alpha\sqrt{Dt}, y - 2\beta\sqrt{Dt}, z - 2\gamma\sqrt{Dt}) e^{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(4Dt)^{3/2}} d\alpha d\beta d\gamma,$$

e passiamo al limite per $t \rightarrow 0$, ottenendo così [v. (*) nota 1, § 158]

$$u(x, y, z, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, z) (4D)^{3/2} e^{-\alpha^2} e^{-\beta^2} e^{-\gamma^2} d\alpha d\beta d\gamma = (4\pi D)^{3/2} \Phi(x, y, z).$$

Perchè valga la (VII, 31) Φ dovrà essere dunque tale che

$$(4\pi D)^{3/2} \Phi(x, y, z) = f(x, y, z).$$

Sostituendo nella (VII, 30) si ha così per la soluzione del nostro problema l'espressione

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4Dt}} d\xi d\eta d\zeta.$$

**LE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI
DELLA FISICA MATEMATICA**

§ 162. Le analogie formali nella fisica matematica.

Si è visto nei capitoli precedenti come avvenga spesso che fenomeni fisicamente diversi siano retti da equazioni della stessa forma, differenti solo per il significato fisico dei simboli. Così, per es., un'equazione della forma

(VIII, 1)
$$\Delta u = 4\pi\varphi(x, y, z)$$

si è presentata:

a) nella cinematica dei fluidi incompressibili [(§ 17), $u =$ potenziale delle velocità, $\varphi = 0$],

b) nella teoria dell'attrazione newtoniana [(§ 44), $u =$ potenziale della gravitazione, $\varphi =$ densità di massa],

c) nell'elettrostatica e magnetostatica [(§§ 44, 73), $u =$ potenziale elettrico, $\varphi =$ densità elettrica, oppure $u =$ potenziale magnetico, $\varphi = 0$].

Un'equazione della forma

(VIII, 2)
$$\Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\pi\varphi(x, y, z)$$

si è presentata:

a) nelle oscillazioni dei corpi elastici [(§§ 114, 115), $u =$ componente di spostamento o potenziale degli spostamenti, $v = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ oppure $v = \sqrt{\mu/\rho}$, $\varphi = 0$],

b) nell'elettromagnetismo [(§ 134), $u =$ componente del campo elettrico o magnetico, $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\varphi = 0$].

c) nell'elettromagnetismo [(§ 145), $u =$ potenziale scalare o componente del potenziale vettore $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\varphi =$ densità elettrica (divisa per ε) o componente della densità di corrente (moltiplicata per μ/c)].

L'equazione

(VIII, 3)
$$\Delta u = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}$$

si è presentata:

a) nella conduzione del calore [(§ 153), $u =$ temperatura, $D = \kappa/(c\rho)$].

b) nella diffusione di gas o liquidi [(§ 153), $u =$ concentrazione, $D =$ coefficiente di diffusione].

Questo fatto permette di raggruppare molti fenomeni, fisicamente diversissimi, in pochi tipi di problemi matematici, fondamentali, che conviene dunque studiare dal punto di vista puramente analitico, prescindendo dal significato fisico delle quantità che vi figurano: ed è ciò che ci proponiamo di fare brevemente in questo capitolo.

L'esistenza delle suddette analogie formali ha poi un'altra conseguenza di grande importanza, come dimostra la storia della fisica. Essa difatti fa sì che talvolta un gruppo di fenomeni fisici possa ricevere diverse interpretazioni teoriche, cioè essere « spiegato » con due o più modelli, ognuno dei quali rende egualmente conto dei risultati sperimentali nell'ambito di quel gruppo di fenomeni. Ampliando, però, progressivamente il gruppo di fenomeni osservati [o studiandoli con maggior precisione] si giunge spesso a scoprire dei fatti che sono incompatibili con una, o più, delle teorie, le quali quindi devono essere escluse come rappresentazione della realtà fisica, pur conservando valore pratico e didattico come sintesi di una parte dei risultati sperimentali.

Un esempio di questo fatto ci è offerto dalle teorie della luce. Come abbiamo visto, quella che meglio rappresenta il complesso dei fenomeni di *propagazione* della luce, e che rende conto del valore numerico della velocità e spiega le analogie con le onde hertziane, etc., è la teoria elettromagnetica, i cui fondamenti abbiamo esposto nel Capitolo VI. Ma buona parte dei risultati di questa teoria li abbiamo dedotti dall'equazione (VI, 120), la quale è della forma (VIII, 2), identica, cioè, a quella della propagazione delle onde elastiche, sia di condensazione [§ 114] che di distorsione [§ 115] [salvo il valore del coefficiente r]: valgono dunque, anche per le onde elastiche, la formula di Kirchhoff [§ 146] e, per λ sufficientemente piccolo, la nozione di raggio, il principio di Fermat, le leggi della riflessione e rifrazione, ecc. Ciò spiega perchè molti fenomeni ottici si possano spiegare non solo con la teoria elettromagnetica ma anche con la *teoria elastica della luce*, secondo la quale la luce consiste in *vibrazioni trasversali* [o, meglio, onde di distorsione, (§ 115)] di un mezzo elastico, detto « *etere* », riempiente tutto lo spazio compresi gli interstizi fra gli atomi, ed avente modulo di rigidità μ [§ 105, nota 1] e densità ρ tali che la velocità di propagazione delle onde trasversali, $\sqrt{\mu/\rho}$, risulti numericamente eguale a c .

Se poi escludiamo dal gruppo dei fenomeni ottici considerati tutti quelli connessi con la polarizzazione, possiamo interpretare i rimanenti non soltanto mediante le onde eterie trasversali, ma anche con onde eterie longitudinali [o, meglio, di condensazione (§ 114)], analoghe a quelle che nell'aria costituiscono il suono. Difatti, anche queste onde obbediscono ad un'equazione della forma (VIII, 2): bisogna però allora attribuire all'etere costanti elastiche tali che $\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = c$ [in particolare si può supporre fluido, $\mu = 0$, ciò che non

è lecito nella teoria delle onde trasversali]. Infine, se ignoriamo i fenomeni di diffrazione ed interferenza, e ci restringiamo a quelli dell'ottica geometrica [come è lecito per lunghezze d'onda assai piccole] troviamo, come si è visto [§ 151], che l'equazione delle onde [tanto elettromagnetiche che elastiche] conduce alle leggi della propagazione dei raggi riassurgibili nel principio di Fermat, leggi che sono analoghe a quelle della meccanica di un punto materiale [v. § 151, nota 6]. Tali fenomeni, dunque, rientrano non solo nella teoria elettromagnetica, in quella delle onde elastiche trasversali ed in quella delle onde elastiche longitudinali, ma anche in una teoria *corporeolare*, che, cioè, concepisce la luce come costituita di minutissime particelle materiali, lanciate con grande velocità dalle sorgenti luminose, e soggette alle ordinarie leggi meccaniche. Le quattro teorie sono [al limite per lunghezza d'onda tendente a zero] perfettamente equivalenti.

Queste quattro teorie sono state effettivamente adottate dai fisici, in ordine cronologico presso a poco inverso di quello in cui le abbiamo nominate. Difatti Descartes nel 1637 mostrò che con una teoria corporeolare si rendeva conto bene delle leggi ottiche allora note, che erano quelle dell'ottica geometrica; siffatta teoria fu, più tardi (1704), ripresa, ampliata e sostenuta da Newton. Nel frattempo, però, sorgeva, per opera principalmente del P. Grimaldi e di Huygens, la teoria elastica di tipo longitudinale, la quale nel campo dell'ottica geometrica serviva egualmente bene. Ma nello stesso tempo si erano scoperti i fenomeni di diffrazione, ed alcuni fenomeni di interferenza [anelli di Newton] e, poichè numerosi tentativi di Newton e dei suoi successori per spiegarli con la teoria corporeolare ebbero scarso successo, i fisici si vennero gradatamente accostando sempre di più alla teoria elastica. Nel 1810 Malus scoprì le leggi della polarizzazione, fenomeno inesplicabile finchè si ammette che le onde siano longitudinali: ben presto quindi si riconobbe la necessità di abbandonare l'idea delle onde longitudinali e sostituirla con quella delle onde trasversali [Fresnel (1816-1821)], benchè essa obbligasse ad attribuire all'etere le proprietà elastiche di un solido, cioè $\mu \neq 0$ [v. § 118], anzichè quelle di un fluido, che fino allora era sembrato ovvio attribuirgli. Si riconobbe poi [Stokes, 1845] che tale difficoltà non era insormontabile, essendovi sostanze, come la pece, che si comportano come solidi nella trasmissione delle vibrazioni, e come fluidi viscosi nei movimenti lenti: l'etere fu allora concepito sul modello di tali sostanze, ma i numerosi tentativi, durati circa un quarantennio, di precisare questa ipotesi con opportuni valori delle costanti e trame le leggi ottiche sperimentalmente osservate, non ebbero successo. Ma nel 1865 Maxwell creò la teoria elettromagnetica, che spiegava, oltre al resto, anche la coincidenza numerica della velocità della luce, nel vuoto, col coefficiente c caratteristico dei fenomeni elettromagnetici: nel 1887 furono scoperte le onde hertziane, ed in seguito si scoprirono successivamente tanti altri legami tra fenomeni ottici e fenomeni elettromagnetici, che la teoria di Maxwell finì per imporsi. Essa usava, però, ancora un linguaggio tolto alla teoria della elasticità, e ciò era suggerito a Maxwell principalmente dalla analogia formale che sussiste [§ 142] fra le formule delle forze ponderomotrici elettromagnetiche e quelle della teoria dell'elasticità. Tuttavia, la teoria di Maxwell, nella sua struttura logica, era sostanzialmente indipendente da ogni modello elastico: il concetto di « *etere* »

Teoria corporeolare (Newton) 1704, Huygens 1690, Grimaldi 1665, Descartes 1637, Fermat 1657, Malus 1810, Fresnel 1816-1821, Stokes 1845, Maxwell 1865, Hertz 1887.

interveniva in modo essenziale soltanto nei problemi di elettrodinamica dei corpi in movimento, dove il suo ufficio si riduceva a fornire un sistema di riferimento privilegiato [detto «sistema assoluto» (v. § 176)]. Questa indipendenza logica non fu riconosciuta che lentamente, e soltanto in seguito all'esperienza di Michelson [di cui parleremo al § 176] ed alle altre consimili che dimostrarono l'inesistenza di un sistema di riferimento privilegiato e diedero origine alla teoria della relatività (1905). Si riconobbe, così, gradatamente, che era assai più semplice inquadrare in uno schema logico i fenomeni elettromagnetici, ed in particolare quelli ottici, fondandosi esclusivamente sui concetti di campo elettrico e campo magnetico [come si è fatto in questo libro] e sulle equazioni che li legano, anziché ricercarne una rappresentazione intuitiva in un «etere», che aveva ormai perduto, per adattarsi ai risultati dell'esperienza, ogni analogia colla materia ordinaria.

Aggiungeremo, infine, che il processo storico da noi brevemente accennato non si può considerare chiuso, poichè la fisica degli ultimi anni ha indotto a ritenere che le equazioni di Maxwell non siano valide nell'interno e nelle immediate vicinanze delle particelle elementari che costituiscono la materia [elettroni, protoni, etc.]: si deve quindi pensare che esse rappresentino un caso particolare di leggi più generali ancora non conosciute.

§ 163. Proprietà generali delle equazioni della fisica matematica.

Le equazioni che abbiamo passato in rassegna all'inizio del § prec., al pari della maggior parte delle equazioni che intervengono in fisica matematica, sono equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, lineari rispetto alla funzione incognita ed alle sue derivate (1). Ad esse vanno poi sempre associate, nei singoli problemi, delle condizioni supplementari [per es. condizioni iniziali, condizioni al contorno, etc.].

Il fatto che le equazioni della fisica matematica sono a derivate parziali anzichè a derivate ordinarie come quelle della meccanica [dove l'unica variabile indipendente è il tempo] imprime ai procedimenti della fisica matematica una fisionomia completamente diversa da quella della meccanica razionale. Infatti i problemi di meccanica si risolvono, generalmente, cercando l'integrale generale delle equazioni differenziali, e poi determinando le costanti arbitrarie, che in esso figurano, per mezzo delle condizioni supplementari del problema [per es., posizioni e velocità iniziali], il che conduce a porre delle equazioni algebriche o trascendenti ma sempre con un numero finito di incognite. Invece, quando si tratta di equazioni a derivate parziali, l'integrale generale contiene delle funzioni arbitrarie, e quindi, anche se si riesce a trovarlo, per determinare poi queste funzioni per mezzo delle condizioni supple-

(1) Per brevità chiameremo tali equazioni «equazioni della fisica matematica», benchè naturalmente in alcuni problemi di fisica matematica si presentino anche equazioni di altri tipi.

mentari si devono risolvere, generalmente, problemi matematici di elevato grado di difficoltà [per es., equazioni integrali]. Si preferisce quindi assai spesso tener conto fin dall'inizio delle condizioni supplementari, o di una parte di esse, in modo da ricercare non l'integrale generale dell'equazione differenziale, ma solo un integrale di un grado limitato di generalità [per es. contenente alcune costanti arbitrarie]. Un esempio di questo procedimento si è visto in elasticità (§§ 109, 110).

La linearità delle equazioni differenziali della fisica matematica [e generalmente anche delle condizioni supplementari] ha pure delle conseguenze assai importanti. Se le dette equazioni sono anche omogenee [come, per es., l'equazione di Laplace, o le equazioni dell'elasticità in assenza di forze, o quelle dell'elettromagnetismo in assenza di cariche e di correnti, o quella della propagazione del calore] si ha la proprietà fondamentale che: «ogni combinazione lineare [a coefficienti costanti] di più soluzioni è ancora una soluzione» (2). Questa proprietà permette, quando si è trovato un certo numero [eventualmente infinito] di integrali particolari indipendenti, di costruire un integrale, più generale, contenente altrettante costanti arbitrarie [come si è fatto, per es., al § 84]. Inoltre, se si è trovato un integrale, per es. $u(x, y, z, t, k)$, dipendente da una costante k non additiva, nè moltiplicativa, si può ricavarne un integrale $U(x, y, z, t)$ di maggiore generalità prendendo una funzione arbitraria [salvo restrizioni qualitative] $f(k)$ e ponendo

$$U(x, y, z, t) = \int_a^b f(k) u(x, y, z, t, k) dk.$$

[a e b essendo limiti costanti]: questo procedimento non è che una generalizzazione del precedente, potendosi considerare u come l'insieme di infiniti integrali particolari corrispondenti agli infiniti valori di k , ed U , quindi, come una loro combinazione lineare. Alcuni esempi di applicazione di questo procedimento si sono visti nei §§ 158, 161. Ed inoltre dall'integrale $u(x, y, z, t, k)$ si possono ricavare altri integrali particolari derivando una o più volte rispetto a k .

Se, poi, una delle variabili, per es. la x , non figura nei coefficienti dell'equazione [in particolare, se questa è a coefficienti costanti] da un integrale particolare $u(x, \dots)$ si ottengono, sempre in virtù della linearità, altri integrali particolari derivando una o più volte rispetto ad x [v., per es., § 161].

Quando poi le equazioni sono lineari ma non omogenee [per es., l'equazione di Poisson (§ 44)] è utile ricordare che da qualsiasi loro

(2) Una conseguenza fisica di questo fatto analitico è che, per es., due fasci di luce possono incrociarsi senza perturbarsi reciprocamente: e così per il suono.

Esistono sempre infinite soluzioni particolari per ogni equazione differenziale lineare omogenea di ordine n .
Esistono sempre infinite soluzioni particolari per ogni equazione differenziale lineare non omogenea di ordine n .

Integrale generale = somma di una soluzione particolare + somma di n soluzioni particolari omogenee.
Integrale particolare = soluzione particolare + somma di n soluzioni particolari omogenee.

integrale particolare si può ottenere quello generale aggiungendovi l'integrale generale della corrispondente equazione omogenea.

§ 164. Problema di Cauchy (in due variabili).

Studieremo ora alcune proprietà delle equazioni differenziali lineari a derivate parziali del 2° ordine, limitandoci per ora al caso di due sole variabili indipendenti x, y , che interpreteremo come coordinate cartesiane in un piano [prescindendo dal significato fisico che possono avere nei singoli problemi: per es., nel problema della corda vibrante la y si deve identificare col tempo]. Le equazioni che studiamo sono dunque, nel caso più generale, della forma

$$(VIII, 4) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0,$$

dove i coefficienti A, B, \dots sono reali e dipendono eventualmente da x e da y , e almeno uno dei primi tre non è identicamente nullo.

Si chiama « *problema di Cauchy* » il seguente: *dato nel piano* (x, y) *un arco di curva* γ [su cui indicheremo con s l'ascissa curvilinea, e supporremo fissato il verso positivo della normale n] *e date due funzioni* $\varphi(s), \psi(s)$ *dei punti di* γ , *trovare un integrale della* (VIII, 4) *che sia analitico in una regione del piano contenente* γ , *e che, su* γ , *soddisfi le condizioni* ⁽²⁾

$$(VIII, 5) \quad u = \varphi,$$

$$(VIII, 6) \quad \frac{du}{dn} = \psi.$$

Osserviamo subito che dare su γ la u e la sua derivata normale equivale a dare ivi la u e le sue due derivate prime. Infatti, detti α, β i coseni direttori della tangente a γ , e quindi $\beta, -\alpha$ quelli della normale [supposta orientata in un certo verso: altrimenti sarebbero $-\beta, \alpha$, ma si potrebbe ragionare in modo analogo] si ha

$$(VIII, 7) \quad \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \beta, \quad \frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial x} \beta - \frac{\partial u}{\partial y} \alpha.$$

⁽²⁾ Tutte le considerazioni relative all'integrale della (VIII, 4) possono essere anche enunciate in forma geometrica riferendosi ad uno spazio a tre dimensioni, in cui si considerano come coordinate cartesiane ortogonali x, y, u . In tale rappresentazione ogni funzione $u = u(x, y)$ può di regola essere interpretata mediante una superficie, e gli integrali della (VIII, 4) costituiscono, dunque, una infinità di superfici [superfici integrali della (VIII, 4)]. La (VIII, 5) impone alla superficie integrale richiesta di passare per una data curva nello spazio [di cui γ è la proiezione sul piano (x, y)] e la (VIII, 6) assegna inoltre il piano tangente alla superficie integrale in ogni punto di detta curva.

e quindi, dalle (VIII, 5) e (VIII, 6),

$$\frac{\partial u}{\partial x} \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \beta = \varphi'(s), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \beta - \frac{\partial u}{\partial y} \alpha = \psi(s),$$

da cui si possono sempre ricavare $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$, poichè il determinante dei coefficienti non è nullo [essendo uguale a -1]. Si potrebbe dunque enunciare il problema di Cauchy sostituendo alla (VIII, 6) due condizioni del tipo

$$(VIII, 6') \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \psi_1(s), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \psi_2(s),$$

[si noti, però, che le funzioni φ, ψ_1 e ψ_2 non si potrebbero assegnare ad arbitrio, dovendo soddisfare la condizione $\varphi'(s) = \psi_1(s) + \psi_2(s)$].

Dimostriamo ora che in generale il problema di Cauchy non può ammettere più di una soluzione, a meno che la curva γ soddisfi certe condizioni che preciseremo.

Supponiamo infatti che vi siano due soluzioni, u_1, u_2 , del problema di Cauchy: posto

$$w(x, y) = u_1 - u_2,$$

la w sarà una funzione analitica in una regione contenente γ . Scrivendo poi che u_1 ed u_2 soddisfano le (VIII, 4), (VIII, 5) (VIII, 6), e sottraendo membro a membro, si vede che w soddisfa la

$$(VIII, 4_1) \quad A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D \frac{\partial w}{\partial x} + E \frac{\partial w}{\partial y} + Fw = 0,$$

ed inoltre che, su γ ,

$$(VIII, 5_1) \quad w = 0,$$

$$(VIII, 6_1) \quad \frac{dw}{dn} = 0.$$

Da queste discendono, per quanto si è detto sopra, le due condizioni $(\frac{\partial w}{\partial x})_\gamma = (\frac{\partial w}{\partial y})_\gamma = 0$, che scriveremo [indicando con W_x, W_y i valori che assumono su γ le derivate prime di w]

$$(VIII, 8) \quad W_x = W_y = 0.$$

Con ciò [usando una notazione analoga per le derivate seconde di w su γ] la (VIII, 4₁) nei punti di γ ci dà

$$(VIII, 9) \quad 4W_{xx} + 2BW_{xy} + CW_{yy} = 0.$$

Associamo a questa le due relazioni che si ottengono derivando le

(VIII, 8) rispetto ad s [cfr. (VIII, 7)], e cioè

$$(VIII, 10) \quad \alpha W_{xx} + \beta W_{xy} = 0,$$

$$(VIII, 11) \quad \alpha W_{xy} + \beta W_{yy} = 0.$$

Le (VIII, 9), (VIII, 10), (VIII, 11) costituiscono un sistema di tre equazioni lineari omogenee in W_{xx} , W_{xy} , W_{yy} , di cui il determinante dei coefficienti è

$$(VIII, 12) \quad \mathcal{D} = \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2.$$

Dobbiamo ora distinguere due casi, secondo che \mathcal{D} è, o no, identicamente nullo lungo tutta la linea γ [ciò che dipende unicamente dalla scelta della curva γ].

Se è $\mathcal{D} \neq 0$, le tre equazioni (VIII, 9), (VIII, 10), (VIII, 11) non ammettono altra soluzione che

$$(VIII, 13) \quad W_{xx} = W_{xy} = W_{yy} = 0.$$

Ora, si può far vedere che in tal caso anche tutte le successive derivate parziali di w , di qualsiasi ordine, si annullano su γ . Per mostrare, per es., che si annullano le derivate terze, riprendiamo la (VIII, 4) e deriviamola rispetto ad x : otterremo

$$\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \dots + A \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2B \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \dots = 0.$$

Applicandola ad un punto di γ , e tenendo presenti le (VIII, 8) e (VIII, 13), essa si riduce a

$$(VIII, 14) \quad A W_{xxx} + 2B W_{xxy} + C W_{xyy} = 0.$$

Prendiamo poi le prime due delle (VIII, 13) e deriviamole rispetto ad s , ottenendo

$$(VIII, 15) \quad \alpha W_{xxy} + \beta W_{xyy} = 0,$$

$$(VIII, 16) \quad \alpha W_{xyy} + \beta W_{yyy} = 0.$$

Le (VIII, 14), (VIII, 15), (VIII, 16) costituiscono un sistema identico a (VIII, 9), (VIII, 10), (VIII, 11), salvo che tutte le W vi figurano

con un ulteriore indice x , mentre i coefficienti sono gli stessi: essendosi supposto $\mathcal{D} \neq 0$, se ne conclude che è

$$W_{xxx} = W_{xxy} = W_{xyy} = 0.$$

Similmente, utilizzando la terza delle (VIII, 13), si troverebbe che anche $W_{yyy} = 0$.

Ripetendo il procedimento si può dimostrare che sono nulle le derivate quarte, e così via.

Ora, se w e tutte le sue derivate sono nulle su γ , ne segue [essendo w una funzione analitica in una regione contenente γ] che w è identicamente nulla, e quindi che $u_1 = u_2$, in tutta questa regione.

Supponiamo ora, invece, che la curva γ sia tale che su di essa è dappertutto $\mathcal{D} = 0$. In tal caso il sistema (VIII, 9), (VIII, 10), (VIII, 11) può essere soddisfatto con valori non tutti nulli di W_{xx} , W_{xy} , W_{yy} , e quindi non si può concludere che sia $w = 0$ in tutta una regione contenente γ . Concludendo:

«condizione necessaria perchè il problema di Cauchy ammetta due soluzioni analitiche distinte, è che la curva γ soddisfi la condizione $\mathcal{D} = 0$, ossia

$$(VIII, 17) \quad A\beta^2 - 2B\alpha\beta + C\alpha^2 = 0,$$

che si può scrivere, ricordando che $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$,

$$(VIII, 18) \quad \left[A(dy)^2 - 2B dx dy + C(dx)^2 = 0 \right]$$

Le curve che soddisfano questa equazione differenziale si chiamano «*caratteristiche*» dell'equazione differenziale (VIII, 4) ed hanno proprietà assai notevoli: come si vede esse dipendono solo dai termini di 2° ordine dell'equazione a derivate parziali data (3).

È stato anche dimostrato [ma ci limitiamo ad enunciarlo] che, sotto certe condizioni qualitative, se γ non è una caratteristica il problema di Cauchy ammette sempre una soluzione.

§ 165. Classificazione delle equazioni della fisica matematica in base alle caratteristiche.

Studiamo ora più da vicino l'equazione delle caratteristiche, (VIII, 18). Supponiamo dapprima che almeno uno dei coefficienti A e C

(3) Nella interpretazione geometrica di cui alla nota 2 di questo §, la proprietà fondamentale delle caratteristiche si enuncia così: due superfici integrali della (VIII, 4) non possono essere tangenti fra loro lungo tutta una curva se la proiezione di questa sul piano (x, y) non è una caratteristica.

*questo risultato lo possiamo vedere
di nuovo, con un'altra dimostrazione.*

[diciamo A] non sia identicamente nullo. Allora dalla (VIII, 18), che si può scrivere

$$(VIII, 18') \quad A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0,$$

si ricava

$$(VIII, 19) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Questa rappresenta, se $B^2 \neq AC$, due equazioni differenziali del tipo $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. È ben noto che gli integrali di un'equazione di questo tipo rappresentano una famiglia di curve tale che per ogni punto del piano ne passa una: le caratteristiche dell'equazione (VIII, 4) costituiscono dunque due famiglie siffatte, e quindi per ogni punto del piano passano due caratteristiche. Tali curve saranno reali nelle regioni del piano dove $B^2 > AC$, e l'equazione (VIII, 4) dicesi, in quelle regioni, di tipo *iperbolico*, saranno immaginarie dove $B^2 < AC$, ed ivi l'equazione dicesi di tipo *ellittico*. Dove poi $B^2 = AC$, la (VIII, 19) dà per $\frac{dy}{dx}$ un solo valore reale e vi è, quindi, una sola famiglia di caratteristiche [reali]: ivi l'equazione (VIII, 4) dicesi di tipo *parabolico*.

Se, come avviene per es. quando la (VIII, 4) è a coefficienti costanti, in tutto il piano è $B^2 > AC$ oppure $B^2 < AC$, o $B^2 = AC$, l'equazione (VIII, 4) chiamasi senz'altro equazione di tipo *iperbolico*, *ellittico* o *parabolico*.

Resta da esaminare il caso che sia $A = C = 0$ [e quindi $B \neq 0$]: in tal caso l'equazione delle caratteristiche (VIII, 18) si riduce a

$$dx dy = 0,$$

e quindi rappresenta le due famiglie di linee

$$x = \text{cost.} \quad y = \text{cost.}$$

ossia le parallele agli assi. Tale caso si deve dunque assimilare a quello dell'equazione iperbolica. Si può dunque dire che, in ogni caso, dove $B^2 > AC$ le caratteristiche sono reali e distinte e l'equazione (VIII, 4) è ivi iperbolica.

La classificazione delle equazioni a derivate parziali del tipo (VIII, 4) in iperboliche, ellittiche e paraboliche corrisponde, come vedremo, a profonde differenze nella natura dei problemi relativi a tali equazioni.

Ci danno alcuni esempi dei tre tipi:

a) l'equazione di Laplace [§ 21]

$$(VIII, 20) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

che è del tipo *ellittico*, ed ha per equazione delle caratteristiche [immaginarie]

$$(VIII, 21) \quad \frac{dy}{dx} = \pm i, \quad \text{ossia} \quad y \pm ix = \text{cost.}$$

le sue caratteristiche sono, come si vede, le rette isotrope del piano:

b) l'equazione delle corde vibranti [§ 78], che possiamo scrivere [ponendo $y = Vt$]

$$(VIII, 22) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

essa è del tipo *iperbolico* ed ha per caratteristiche le due famiglie di rette

$$(VIII, 23) \quad \frac{dy}{dx} = \pm 1, \quad \text{ossia} \quad y \pm x = \text{cost.}$$

cioè le parallele alle bisettrici degli assi:

c) l'equazione della propagazione del calore [§ 154], che scriveremo [ponendo $y = Dt$]

$$(VIII, 24) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

essa è del tipo *parabolico* ed ha per caratteristiche l'unica famiglia

$$(VIII, 25) \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ossia} \quad y = \text{cost.},$$

cioè le parallele all'asse x .

§ 166. Riduzione a forma canonica delle equazioni della fisica matematica.

Se si sostituiscono alle variabili x ed y altre due variabili ξ, η mediante relazioni invertibili del tipo

$$(VIII, 26) \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

l'equazione (VIII, 4) si trasformerà in una nuova equazione lineare

$$(VIII, 27) \quad A' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D' \frac{\partial u}{\partial \xi} + E' \frac{\partial u}{\partial \eta} + F'u + G' = 0$$

[con A', B', \dots funzioni di ξ, η], le cui caratteristiche soddisfano l'equazione [v. (VIII, 18)]

$$(VIII, 28) \quad A'(d\eta)^2 - 2B'd\xi d\eta + C'(d\xi)^2 = 0.$$

Ma si osservi che [per la definizione di caratteristiche] queste curve

devono rappresentare, nel piano ξ, η , le curve corrispondenti [attraverso la corrispondenza (VIII, 26)] delle caratteristiche nel piano (x, y) ⁽¹⁾. Di questa proprietà si può trarre profitto per scegliere la trasformazione (VIII, 26) in modo da ridurre la (VIII, 4) ad una forma più semplice.

Supponiamo dapprima che la (VIII, 4) sia [nella regione che interessa] *iperbolica*, e siano

$$f_1(x, y) = \text{cost.}, \quad f_2(x, y) = \text{cost.},$$

le due famiglie di caratteristiche. Prendiamo come trasformazione (VIII, 26) la seguente

$$\xi = f_1(x, y), \quad \eta = f_2(x, y).$$

Le equazioni delle caratteristiche nelle variabili ξ, η dovranno dunque essere [per l'osservazione fatta poco sopra] $\xi = \text{cost.}, \eta = \text{cost.}$, il che significa che la (VIII, 28) dovrà essere soddisfatta sia da $d\xi = 0$, sia da $d\eta = 0$: da ciò si conclude che deve essere $A' = C' = 0$. Con ciò la (VIII, 27), divisa tutta per $2B'$ [che è certo $\neq 0$] e posto $D'/(2B') = -a$, etc., assume la forma

(VIII, 29)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + d.$$

Ogni equazione iperbolica può quindi ridursi a questa forma. che riguarderemo come « *forma canonica* » delle equazioni iperboliche. Si dice anche che l'equazione (VIII, 29) è « riferita alle sue caratteristiche », perchè la trasformazione adottata equivale ad assumere un nuovo sistema di coordinate ξ, η , tale che le caratteristiche dell'equazione ne siano le linee coordinate. [Un caso particolare di questa trasformazione si è già visto al § 78, dove si è utilizzata per trovare l'integrale generale della equazione delle corde vibranti].

Se la (VIII, 4) è *ellittica* si potrebbe eseguire una trasformazione formalmente analoga, ma con funzioni f_1, f_2 complesse coniugate, e quindi il vantaggio della riduzione alla forma (VIII, 29) sarebbe compensato dalla perdita della realtà delle variabili ξ, η . Si può, invece, porre la (VIII, 4) ellittica sotto una forma più semplice restando nel campo reale, con la trasformazione

$$\xi = f_1(x, y) + f_2(x, y), \quad \eta = \frac{f_1(x, y) - f_2(x, y)}{i}.$$

⁽¹⁾ Se ne deduce, in particolare, che se la (VIII, 26) è, come supponiamo, una trasformazione reale e biunivoca e se l'equazione (VIII, 4) è di tipo iperbolico, ellittico o parabolico, è dello stesso tipo l'equazione trasformata (VIII, 27), vale a dire: il « tipo » rappresenta una proprietà *intrinseca* dell'equazione (VIII, 4) [nel campo reale].

da cui $2f_1 = \xi + i\eta$, $2f_2 = \xi - i\eta$. Le equazioni delle caratteristiche devono dunque identificarsi con $\xi \pm i\eta = \text{cost.}$, e perciò la (VIII, 28) deve essere soddisfatta per $d\xi$ arbitrario e $d\eta = \pm i d\xi$. Ciò può essere solo se $A' = C'$, $B' = 0$. Quindi la (VIII, 27), divisa per A' e posto $D'/A' = -a$, etc., assume la forma

$$(VIII, 30) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu + d,$$

che si può considerare come la forma canonica delle equazioni ellittiche.

Se la (VIII, 4) è *parabolica*, sia

$$(VIII, 31) \quad f(x, y) = \text{cost.}$$

l'equazione della famiglia delle sue caratteristiche. Eseguiremo in tal caso una trasformazione del tipo

$$(VIII, 32) \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = f(x, y),$$

dove $\xi(x, y)$ è una funzione qualunque [scelta, però, in modo che la trasformazione sia biunivoca]. Dovendo l'equazione essere parabolica anche nelle nuove variabili, sarà

$$B'^2 = A'C'.$$

Ora, per la (VIII, 31) e la seconda delle (VIII, 32), le caratteristiche devono essere le curve $\eta = \text{cost.}$, ossia $d\eta = 0$: perchè tali curve soddisfino la (VIII, 28) deve essere $C' = 0$ e, quindi, in conseguenza dell'ultima formula, anche $B' = 0$. La (VIII, 27) si riduce dunque [dividendola per A' , e ponendo $D'/A' = -a$, etc.] alla forma

$$(VIII, 33) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + c.$$

È questa la forma canonica per le equazioni paraboliche.

Da quanto si è detto risulta che una equazione di tipo ellittico si può formalmente assimilare ad una di tipo iperbolico rinunciando alla realtà delle variabili. Ciò porta, però, un cambiamento assai profondo nella natura della soluzione: ce ne possiamo render conto discutendo brevemente un esempio particolare.

L'equazione di Laplace (VIII, 20), col cambiamento di variabili

$$(VIII, 34) \quad \xi = x, \quad \eta = iy,$$

diviene

$$(VIII, 35) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

che è formalmente identica all'equazione delle corde vibranti. Si può utilizzare questa circostanza per trovare l'integrale generale della (VIII, 20): difatti l'integrale generale della (VIII, 35) è [integrale di d'Alembert (§ 78)]

$$u = f(\xi + \eta) + \varphi(\xi - \eta),$$

con f e φ funzioni arbitrarie [purché derivabili due volte]: introducendo le (VIII, 34) questo diviene

$$(VIII, 36) \quad u = f(x + iy) + \varphi(x - iy),$$

ma, affinché abbia senso, bisogna, come si vede, che le funzioni f e φ siano funzioni non solo derivabili due volte nel campo reale, ma anche analitiche. La (VIII, 36) dà l'integrale generale dell'equazione di Laplace nel piano. Però essa è di scarsa utilità pratica, poiché nei problemi di fisica matematica, come si è visto in varie occasioni, l'equazione di Laplace è generalmente associata a condizioni supplementari relative ad un contorno chiuso [problema di Dirichlet, problema di Neumann e simili (Cap. II)], e non è agevole determinare le funzioni f e φ in modo da soddisfare queste condizioni.

Vogliamo a questo proposito osservare che il teorema di esistenza relativo al problema di Cauchy assicura che, assegnati ad arbitrio i valori di u e $\frac{du}{dn}$ su una curva s , che ora vogliamo supporre chiusa, esiste generalmente, in una regione contenente s , una soluzione analitica della (VIII, 4) che soddisfa tali condizioni: non assicura però che tale soluzione esista in tutta l'area σ racchiusa da s , poiché la detta regione potrebbe avere delle lacune all'interno di σ . Si può anzi facilmente riconoscere che, fissati ad arbitrio i valori della u , soltanto una determinata scelta [sempre possibile] dei valori della derivata normale di u assicura l'esistenza di una u regolare in tutto σ : difatti, si è già dimostrato [§ 18] che una funzione armonica e regolare in σ è determinata in modo unico dai suoi valori al contorno. Se quindi si assegnassero ad arbitrio i valori al contorno di u e $\frac{du}{dn}$, si troverebbe bensì una soluzione della (VIII, 20), ma essa non sarebbe, in genere, regolare [tanto meno, quindi, analitica] in tutta σ (2).

(2) Ciò può rendersi intuitivo colla seguente osservazione [dovuta ad una comunicazione verbale di F. Tricomi]. Il problema analogo a questo, in una dimensione, sarebbe quello di trovare una $u(x)$ che in un segmento AB [l'analogo dell'area σ] soddisfi l'equazione

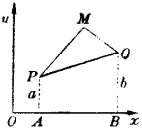


Fig. 142.

$$(*) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0,$$

e che ai due estremi A e B [che corrispondono al contorno s] soddisfici le condizioni

$$u(x_A) = a, \quad u(x_B) = b, \quad u'(x_A) = \alpha, \quad u'(x_B) = \beta,$$

essendo a , b , α , β costanti assegnate. Poiché la (*) è soddisfatta da tutte e sole le funzioni lineari di x (rappresentate graficamente da rette o da spezzate rettilinee), se si richiede anche la regolarità, la $u(x)$ dovrà essere rappresentata da una retta (v. fig. 142), che non potrà

§ 167. Risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle corde vibranti.

Riprendiamo l'equazione delle corde vibranti

$$(VIII, 37) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

le cui caratteristiche, come risulta dalla (VIII, 23), sono le rette $x \pm vt = \text{cost.}$, cioè le rette inclinate di $\pm \theta$ sull'asse delle ordinate t , con θ tale che

$$(VIII, 38) \quad \text{tg } \theta = v.$$

Chiameremo caratteristiche « della famiglia ξ » quelle di equazione $x + vt = \text{cost.}$, « della famiglia η » le $x - vt = \text{cost.}$ Prima di studiare il problema di Cauchy per la (VIII, 37) vogliamo ricavare da essa una formula, fondamentale per ciò che seguirà (1).

Se s è una linea chiusa qualsiasi, che racchiude un'area σ entro la quale u è regolare, moltiplicando la (VIII, 37) per $d\sigma$ ed integrando in tutta σ , si ha, per il lemma di Gauss (I, 13), detti α e β i coseni della normale esterna,

$$(VIII, 39) \quad \int_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \alpha - \frac{1}{v^2} \frac{\partial u}{\partial t} \beta \right) ds = 0$$

Se conveniamo che s sia percorso nel verso antiorario, e chiamiamo α' e β' i coseni della sua tangente, sarà $\alpha = \beta'$, $\beta = -\alpha'$, e quindi la (VIII, 39) si potrà scrivere [moltiplicandola per v]

$$(VIII, 39') \quad \int_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\alpha'}{v} + \frac{\partial u}{\partial x} v \beta' \right) ds = 0.$$

È importante notare che se un tratto di s si identifica con una caratteristica ξ [percorsa in un verso o nell'altro], su di esso è $\alpha' = -v\beta'$

essere che quella passante per i due punti $P(x_1, a)$, $Q(x_2, b)$, la quale dovrebbe ivi avere inclinazioni assegnate α , β : è chiaro pertanto che queste condizioni sono incompatibili a meno che sia $\alpha = \beta = \frac{b-a}{x_2-x_1}$. Ma se si rinuncia alla continuità della derivata prima di $u(x)$, la soluzione può anche essere rappresentata da una spezzata, come, per es., la PMQ , ed in tal caso si possono assegnarne ad arbitrio le inclinazioni α , β nei punti P e Q .

(1) Si potrebbe semplificare, almeno nella forma, la trattazione seguente, riducendo la (VIII, 37) alle sue caratteristiche col cambiamento di variabili $\xi = x + vt$, $\eta = x - vt$ [§ 78]: preferiamo non farlo, per conservare alle variabili il loro significato fisico.

e quindi l'integrando della (VIII, 39') diviene, per quel tratto,

$$(VIII, 40) \quad (\dots) ds = -\left(\frac{\partial u}{\partial t} \beta' + \frac{\partial u}{\partial x} \alpha'\right) ds = -\frac{du}{ds} ds = -du.$$

Similmente si vede che su un tratto di caratteristica η [dove $\alpha' = v\beta'$] è

$$(VIII, 40_1) \quad (\dots) ds = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \beta' + \frac{\partial u}{\partial x} \alpha'\right) ds = \frac{du}{ds} ds = du.$$

Studiamo ora il problema di Cauchy per la (VIII, 37). Sia dato un arco di curva γ [che per ora supponiamo tale che nessuna caratteristica abbia con esso più di un punto in comune] e su di esso siano assegnati i valori di u e $\frac{\partial u}{\partial x}$. Dagli estremi A e B di γ (fig. 143)

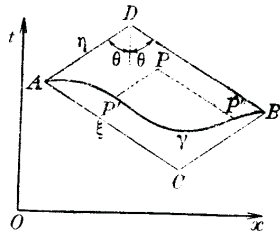


Fig. 143.

conduciamo le caratteristiche, le quali delimitano un parallelogrammo $ACBD$: mostreremo che i dati determinano una sola soluzione regolare entro tale parallelogrammo, e potremo anzi scriverne l'espressione esplicita.

Preso un punto P qualsiasi, interno al detto parallelogrammo, conduciamo da esso le caratteristiche, e siano P', P'' le loro intersezioni con γ : preso come contorno s il triangolo mistilineo $PP'P''$, applichiamo ad esso la (VIII, 39'), notando che sul lato PP' si può applicare la (VIII, 40), e su $P''P$ la

(VIII, 40): avremo

$$[u(P') - u(P)] + \int_{P'}^{P''} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\alpha'}{v} + \frac{\partial u}{\partial x} v\beta'\right) ds - [u(P) - u(P'')] = 0,$$

da cui, risolvendo rispetto ad $u(P)$, si ottiene

$$(VIII, 41) \quad u(P) = \frac{u(P') + u(P'')}{2} + \frac{1}{2} \int_{P'}^{P''} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\alpha'}{v} + \frac{\partial u}{\partial x} v\beta'\right) ds.$$

È questa la formula risolutiva del nostro problema.

Prendiamo in particolare come curva γ l'asse delle x . Nel caso della corda vibrante [Cap. IV] ciò significa assegnare per $t = 0$, ed in ogni punto della corda, la u [spostamento iniziale] e la $\frac{\partial u}{\partial t}$ [velocità iniziale]: è dunque il problema già risolto al § 79. E difatti, se si osserva che in questo caso i punti P' e P'' della

costruzione precedente vengono ad essere (fig. 144) i punti dell'asse x di ascissa $x \pm vt$, e che lungo $P'P''$ è $\alpha' = 1, \beta' = 0, ds = dx$, si riconosce che la (VIII, 41) si identifica colla (IV, 24).

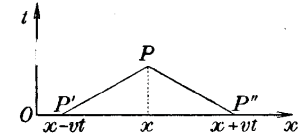


Fig. 144.

Il problema più generale cui si riferisce la fig. 143 si presenterebbe, nello studio della corda vibrante, qualora fossero assegnati spostamenti e velocità di ogni punto della corda, o di un tratto di essa, non nell'istante iniziale ma in un istante diverso da punto a punto [definito, per ogni x , dalla corrispondente ordinata della curva γ].

Passiamo ora al caso in cui la curva γ è tale che alcune caratteristiche hanno con essa in comune più punti: per es. (fig. 145) supponiamo che vi sia una caratteristica ξ che la incontra in due punti, P', P'' . Condotte da P' e P'' le caratteristiche η , e preso su di esse [dalla stessa parte] un segmento di lunghezza arbitraria ε , formiamo il parallelogrammo $P'P''Q''Q'$ ed applichiamo ad esso la (VIII, 39'). Tenuto conto che sui lati $P'P''$ e $Q'Q''$ vale la (VIII, 40), e sugli altri due la (VIII, 40₁), si ha

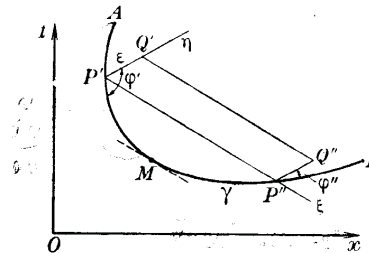


Fig. 145.

$$- [u(P'') - u(P')] + [u(Q'') - u(P'')] - [u(Q') - u(P')] + [u(P') - u(Q')] = 0,$$

cioè, dividendo per 2ε ,

$$\frac{u(Q'') - u(P'')}{\varepsilon} = \frac{u(Q') - u(P')}{\varepsilon}.$$

Se ora facciamo tendere ε a zero, i due membri di questa uguaglianza tendono alle derivate di u nella direzione η , rispettivamente in P' e P'' ; quindi troviamo

$$(VIII, 42) \quad \left(\frac{du}{d\eta}\right)_{P'} = \left(\frac{du}{d\eta}\right)_{P''},$$

ovvero, detto φ l'angolo $\widehat{s\eta}$ ed n la direzione della normale [rivolta a destra del verso positivo di s],

$$(VIII, 42') \quad \left(\frac{du}{ds} \cos \varphi - \frac{du}{dn} \sin \varphi\right)_{P'} = \left(\frac{du}{ds} \cos \varphi - \frac{du}{dn} \sin \varphi\right)_{P''}.$$

Questo risultato ci dice che, nel caso che consideriamo, i dati del problema di Cauchy [se si vuole che la u sia regolare] non possono essere

presi ad arbitrio ⁽²⁾, poichè deve sussistere la relazione (VIII, 42') fra le derivate prime di u nei due punti di γ che sono sulla stessa caratteristica. Quindi, nel caso, per es., della fig. 145, assegnati ad arbitrio u e $\frac{du}{dn}$ nel tratto AM [essendo M il punto dove γ ha per tangente una caratteristica ξ] sul tratto MB si può assegnare ad arbitrio soltanto la u , mentre $\frac{du}{dn}$ resta determinata dalla (VIII, 42').

Un'applicazione delle cose dette si ha nel problema delle vibrazioni di una corda limitata i cui estremi siano assoggettati a movimenti assegnati [problema che è la generalizzazione del problema del § 82, in cui gli estremi erano fissi]. Più precisamente, supponiamo che siano assegnati: la configurazione e la velocità iniziali, cioè u e $\frac{\partial u}{\partial t}$ per $t = 0$ e per $0 < x < l$ [essendo l la lunghezza della corda] ed inoltre lo spostamento dei due estremi in funzione del tempo, cioè

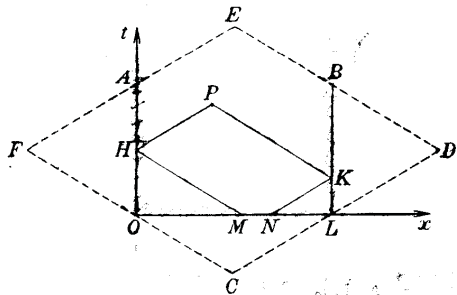


Fig. 146.

$u(0, t)$ ed $u(l, t)$, per un certo intervallo di tempo $0 < t < T$. Nel diagramma (x, t) [v. fig. 146] ciò significa: assumere come curva γ la spezzata $AOLB$ [in cui $OL = l$, $AO = LB = T$], ed assegnare su OL la u e la $\frac{du}{dn}$ [ossia $\frac{\partial u}{\partial t}$], e su

AO ed LB la u . [Su questi ultimi lati si può assegnare solo la u , e non $\frac{du}{dn}$, perchè questa resta determinata dalla (VIII, 42'): infatti una almeno delle due caratteristiche condotte da un punto qualunque di AO o BL taglia la spezzata in un altro punto]. Ciò premesso, per determinare la u in un punto P , conduciamo

⁽²⁾ Assegnati ad arbitrio u e $\frac{du}{dn}$ su tutta γ , esiste naturalmente una soluzione del problema di Cauchy, come vuole il teorema generale enunciato al § 164, ma tale soluzione presenta in genere delle discontinuità [di u o delle sue derivate prime] entro il parallelogramma, coi lati paralleli alle caratteristiche, circoscritto alla curva γ . Ciò è analogo a quanto si è detto al § prec. per l'equazione ellittica.

da P le caratteristiche: se incontrano entrambe il lato OL siamo ricondotti al caso precedente, e le condizioni agli estremi non intervengono. Supponiamo invece [come in fig. 146] che una delle caratteristiche tagli AO in H e l'altra LB

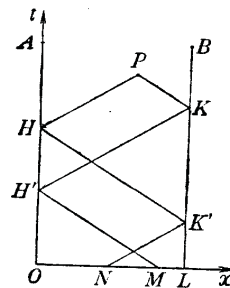


Fig. 147.

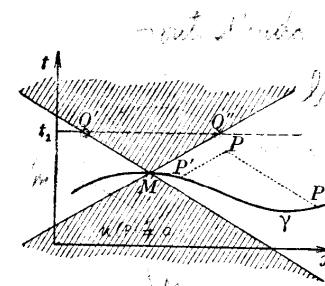


Fig. 148.

in K : condotte da H e K le caratteristiche dell'altra famiglia queste tagliano OL in M ed N . Applichiamo la (VIII, 39') al poligono $PHMNK$, ricordando che (VIII, 40) ed (VIII, 40₁) e notando che su MN è $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, $ds = dx$: troviamo

$$[u(H) - u(P)] - [u(M) - u(H)] + [u(K) - u(N)] - [u(P) - u(K)] + \int_M^N \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} dx = 0,$$

da cui la formula risolutiva

$$(VIII, 43) \quad u(P) = u(H) + u(K) - \frac{u(M) + u(N)}{2} + \frac{1}{2v} \int_M^N \frac{\partial u}{\partial t} dx.$$

Se le caratteristiche condotte da H e K non tagliano OL ma OA ed OB (v. fig. 147) la costruzione si ripete quante volte occorre ed il procedimento si estende in modo abbastanza ovvio.

§ 168. Significato fisico delle caratteristiche di un'equazione iperbolica.

Si osservi ora, sulla (VIII, 41), che a determinare il valore di u in P non intervengono tutti i dati del problema, ma solo quelli relativi ad un tratto, $P'P''$, della curva γ [nel caso della fig. 144: a determinare lo stato della corda nel punto x al tempo t , intervengono solo i dati iniziali relativi al tratto di corda fra $x - vt$ ed $x + vt$]. Questo fatto, come ora mostreremo, è la traduzione analitica della natura di «propagazione ondosa» dei fenomeni governati dalla equazione (VIII, 37).

Le caratteristiche sono le linee di propagazione delle perturbazioni e sono parallele alle diagonali del parallelogramma.

Per comprenderlo intuitivamente, supponiamo che i dati del problema siano i seguenti: $u = 0$ e $\frac{du}{dn} = 0$ lungo tutta γ eccettuato un punto M (fig. 148) [ciò può realizzarsi, per es., percuotendo in un solo punto, x_M , al tempo t_M , una corda inizialmente in riposo]. Da M conduciamo le caratteristiche, le quali divideranno il piano in due regioni, quella tratteggiata e quella bianca. E chiaro che se applichiamo la (VIII, 41) ad un punto P compreso nella regione bianca, il tratto $P'P''$ di curva γ che interviene nella formula non contiene il punto M , quindi su di esso [e nei suoi estremi] u e le sue derivate sono dovunque nulle e risulta perciò $u(P) = 0$; se invece P è compreso nella regione tratteggiata risulta, in genere, $u(P) \neq 0$. Dunque, se consideriamo la corda in un istante qualsiasi t_1 (¹), dovremo tracciare la retta $t = t_1$, ed avremo che solo il tratto di corda corrispondente al segmento $Q'Q''$, interno alla zona tratteggiata, risente della perturbazione impressa in M , mentre tutto il resto della corda è ancora in quiete: come si vede, col crescere di t_1 tale segmento si dilata progressivamente: i suoi estremi Q' , Q'' [detti « fronti d'onda »] procedono lungo la corda, l'uno con velocità $+v$, l'altro con velocità $-v$ [determinate dall'inclinazione delle caratteristiche]; le due caratteristiche che limitano la zona tratteggiata sono le « linee orarie » dei due fronti d'onda.

Considerazioni analoghe si possono fare per una corda cogli estremi fissi, la quale sia inizialmente in quiete e riceva un impulso in un punto M : in tal caso dovremo applicare la costruzione della fig. 149 con $u = 0$ su OA ed LB , ed $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ su tutta OL tranne un punto M . Da M tracciamo le caratteristiche fino ad incontrare OA ed LB in H e K , di qui tracciamo le nuove caratteristiche HK' , KH' , etc.; veniamo così a definire una serie di parallelogrammi, che nella figura sono tratteggiati. Se ora applichiamo la (VIII, 43) ad un punto che sia fuori delle zone tratteggiate, si riconosce facilmente [come nel caso precedente] che risulta $u(P) = 0$, cosicchè in un istante qualunque t_1 la corda è perturbata solo in un tratto $Q'Q''$ i cui estremi [fronti d'onda] hanno per linee orarie le spezzate MKH' , ..., MHK' , ...: essi dunque partono da M con velocità $\pm v$, e si « riflettono » ogni volta che giungono ad un estremo della corda.

Se ora torniamo a considerare il caso in cui γ è una linea qualunque, e su essa u e $\frac{du}{dn}$ sono assegnati comunque, potremo decomporre γ in tratti infinitesimi e [ricordando la linearità dell'equazione] considerare la soluzione come la somma [più propriamente l'integrale]

(¹) La fig. 148 suppone $t_1 > t_M$: la zona tratteggiata al disotto di M corrisponderebbe a perturbazioni che dovrebbero precisarsi nella corda, affinché al tempo t_M si producesse spon-taneamente nel punto x_M quella perturbazione che abbiamo supposto assegnata.

delle soluzioni corrispondenti ai casi in cui uno solo degli elementi infinitesimi della curva γ ha u e $\frac{du}{dn}$ diversi da zero: vale a dire, nel problema della corda, considerare separatamente i movimenti che sarebbero prodotti nella corda perturbandone, al tempo t_M , un solo punto M , e sovrapporli. Si può dunque pensare che da ciascun punto della corda partano due fronti d'onda [uno progressivo ed uno regressivo], propagantisi con velocità $\pm v$: le caratteristiche dell'equazione differenziale hanno il significato di linee orarie di tali fronti d'onda.

Questa conclusione si può estendere a qualsiasi equazione omogenea di tipo iperbolico, anche a coefficienti non costanti e quindi a

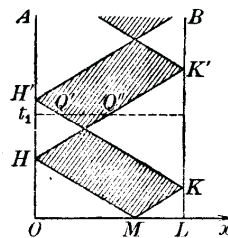


Fig. 149.

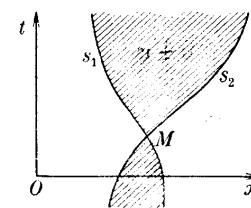


Fig. 150.

caratteristiche non rettilinee (²). Consideriamo, infatti, una soluzione $u(x, t)$ che sia diversa da zero entro una regione limitata da due linee s_1 , s_2 (fig. 150) mentre al di fuori è (³) $u = 0$: per definizione s_1 , s_2 saranno le linee orarie dei « fronti d'onda »: supponiamo inoltre [come è generalmente richiesto da ragioni fisiche] che la u sia continua insieme alle sue derivate prime, dappertutto, anche attraverso s_1 ed s_2 . Se interpretiamo geometricamente la u come una superficie, essa coinciderà col piano (x, t) nella zona non tratteggiata, mentre se ne staccherà nella zona tratteggiata, ma sarà tangente a tale piano lungo s_1 ed s_2 . Ora, si è dimostrato al § 164 [nota 3], che due superfici integrali non possono essere tangenti lungo una linea se questa non è una caratteristica: poichè il piano (x, t) è anch'esso una superficie integrale, ne segue che s_1 ed s_2 debbono essere due caratteristiche della equazione differenziale.

(²) Una tale equazione si presenta, per es., nel problema delle vibrazioni di una corda di spessore non uniforme.

(³) Essendosi supposta l'equazione omogenea, essa è soddisfatta da $u = 0$.

Studiamo ora, nel caso unidimensionale, il tipo di propagazione ondosa descritto dalla (V, 71) del § 117: esso corrisponde a prendere la u della forma

$$(VIII, 44) \quad u = g(x)/[\varphi(x) - t]$$

[dove la forma della funzione f dipende in genere dalle condizioni iniziali, mentre le funzioni g e φ dipendono dalla natura del mezzo]. In questa formula rientrano, in particolare, le onde progressive o regressive di una corda vibrante [in tal caso $g = 1$, $\varphi = \pm x/v$], e le onde in mezzo assorbente studiate al § 139 [g rappresentando il fattore esponenziale di assorbimento]. Ora, generalizzando il ragionamento fatto a § 79, si può osservare che, nel caso $g(x) = \text{cost.}$, se si considera un punto che si muova con la legge

$$(VIII, 45) \quad \varphi(x) - t = c, \quad \text{linee orarie}$$

[con c costante], in questo punto la u ha sempre lo stesso valore: si può dunque dire che nel piano (x, t) le linee rappresentate dalla (VIII, 45) sono le « linee orarie » della propagazione, e che la velocità di questa è $1/\varphi'(x)$. Per naturale estensione, anche quando la $g(x)$ non è costante, si definiscono le (VIII, 45) come linee orarie della propagazione, e la $1/\varphi'(x)$ come velocità di questa.

Vogliamo ora far vedere che, se la u del tipo (VIII, 44), con f arbitraria [salvo restrizioni qualitative] soddisfa un'equazione della forma (VIII, 4), che qui riscriviamo con t al posto di y ,

$$(VIII, 46) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu + G = 0,$$

le linee orarie della propagazione devono identificarsi con caratteristiche di tale equazione. Ciò si può dimostrare richiamandosi al teorema dato poco sopra, e notando che, se si prende la funzione $f(\xi)$ tale che sia $f(\xi) \neq 0$ per $\xi < c$ e $f(\xi) = 0$ per $\xi > c$, il punto, il cui moto è definito dalla (VIII, 45), è in ogni istante un fronte d'onda; ma si può anche verificarlo direttamente col calcolo seguente.

Supponiamo che la (VIII, 46) ammetta soluzioni del tipo (VIII, 44) con f arbitraria: sostituendo in (VIII, 46) ed ordinando i termini secondo le derivate di f si ha

$$(A\varphi'^2 - 2B\varphi' + C)gf'' + (\dots)f' + (\dots)f + G = 0,$$

dove i puntini rappresentano espressioni [che non contengono f nè le sue derivate] delle quali non ci interessa la forma. Perchè questa sia soddisfatta per f arbitraria, deve anzitutto essere $G = 0$ [ossia l'equazione deve essere omogenea] e poi anche [essendo da escludere che g sia identicamente nullo] deve essere

$$(VIII, 47) \quad A\varphi'^2 - 2B\varphi' + C = 0.$$

Ora, si ha dalla (VIII, 18') che le caratteristiche della (VIII, 46) hanno per equazione

$$A \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dt}{dx} + C = 0,$$

e, confrontando con la (VIII, 47), si vede che φ' deve identificarsi col $\frac{dt}{dx}$ di una delle due famiglie di caratteristiche, e quindi che le linee (VIII, 45) devono appartenere ad una di tali famiglie.

§ 169. Il problema di Cauchy per l'equazione della propagazione del calore.

Passiamo ora a considerare l'equazione

$$(VIII, 48) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

che è, come si è detto, di tipo parabolico ed ha per caratteristiche le rette $t = \text{cost.}$. Anche in questo caso [come per l'equazione iperbolica] avviene che se la curva γ , cui si riferisce il problema di Cauchy, è tale che alcune caratteristiche la tagliano in più di un punto, e se inoltre si impongono alla u le consuete condizioni di regolarità, non si possono assegnare ad arbitrio, su γ , la u e la $\frac{du}{dn}$. Precisamente dimostreremo che:

« se la curva γ ha gli estremi A, B su una stessa caratteristica $t = t_0$ ed è posta tutta al disotto di essa (fig. 151), e se si impone alla u di essere regolare in tutta l'area σ racchiusa da γ e dalla detta caratteristica, la soluzione resta univocamente determinata in tutta σ assegnando su γ soltanto i valori della u [la $\frac{du}{dn}$ resta quindi determinata da questi] ».

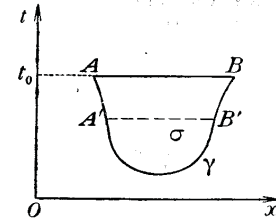


Fig. 151.

Per dimostrarlo, supponiamo che vi siano due soluzioni u_1, u_2 della (VIII, 48), entrambe regolari in σ ed assumenti su γ gli stessi valori: la loro differenza $w = u_1 - u_2$ sarà pure regolare in σ , si annullerà su γ e soddisferà l'equazione

$$(VIII, 49) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Il nostro teorema sarà dimostrato se dimostreremo che da ciò segue $w = 0$ in tutta σ . Moltiplicata per w , la (VIII, 49) si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w^2}{2} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

Moltiplichiamo per $d\sigma$ ed integriamo in tutta σ : applicando il lemma

di Gauss, (I, 13), ai primi due termini, avremo [detti α, β , al solito, i coseni direttori della normale esterna ed s il contorno chiuso costituito da γ e dal segmento AB]

$$(VIII, 50) \quad \int_s w \frac{\partial w}{\partial x} \alpha ds - \frac{1}{D} \int_s \frac{w^2}{2} \beta ds - \int_\sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\sigma = 0.$$

Ma poichè su γ è $w = 0$, i primi due integrali si estendono al solo tratto AB , su cui è $\alpha = 0, \beta = 1$; resta quindi

$$(VIII, 51) \quad \frac{1}{2D} \int_{AB} w^2 ds + \int_\sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\sigma = 0.$$

Poichè ciascuno di questi integrali è costituito di elementi che, essendo dei quadrati, non possono essere negativi, esso non potrà essere negativo, e quindi la somma non potrà esser nulla se non è nullo ciascun integrale, anzi ciascun elemento di ciascun integrale: dovrà dunque essere

$$w = 0 \quad \text{su } AB, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{in } \sigma.$$

La seconda di queste ci dice che w è costante su ogni retta $A'B'$ parallela ad x ed interna a σ (fig. 151), ed, essendo $w = 0$ agli estremi, sarà $w = 0$ su tutta $A'B'$: quindi $w = 0$ in tutta σ .

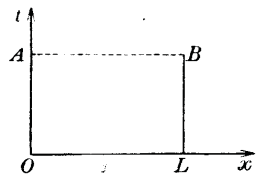


Fig. 152.

Il teorema precedente si applica, per es., nel seguente problema di conduzione del calore. Di un filo [lateralmente isolato] di lunghezza l siano assegnate: la distribuzione iniziale della temperatura, e le temperature ai due estremi per tutto un intervallo di tempo $0 < t < T$. Costruita nel piano (x, t) la spezzata $AOLB$ (fig. 152), con $OL = l, OA = LB = T$, i dati

del problema assegnano la u su tutta questa spezzata. Il teorema asserisce che ne resta univocamente determinata la u in tutto il rettangolo $AOLB$, cioè la temperatura di un punto qualunque del filo per qualunque istante fra 0 e T .

Si noti che la dimostrazione data sopra non potrebbe applicarsi se la curva γ fosse *al disopra* della caratteristica AB : difatti in tal caso nella (VIII, 51) il 1° integrale avrebbe segno opposto al 2° [perchè su AB sarebbe $\beta = -1$] e dall'annullarsi della differenza di due quantità ≥ 0 non si può concludere che si annulla ciascuna di esse. Quindi, nei problemi di propagazione del calore [come quello precedente], se invece di assegnare la distribuzione iniziale di temperatura, u , lungo il filo si assegnasse la distribuzione *alla fine* del tempo T [oltre i

valori agli estremi per $0 < t < T$], nulla si potrebbe concludere circa la distribuzione nei tempi anteriori. In questo i fenomeni di propagazione del calore si comportano in modo diverso dai fenomeni meccanici [come, per es., le vibrazioni delle corde] per i quali le condizioni in un certo istante possono servire tanto a determinare il movimento in istanti successivi, quanto nei precedenti [cfr. nota 1, § 168]. Ciò deriva dal fatto che i fenomeni meccanici sono *reversibili* mentre la propagazione del calore è un fenomeno tipicamente *irreversibile*. E questa differenza è rispecchiata nelle equazioni differenziali che governano i due tipi di fenomeni, poichè quelle dei fenomeni reversibili [come l'equazione delle corde vibranti] non si alterano cambiando di segno t , mentre quelle dei fenomeni irreversibili [come l'equazione della propagazione del calore] si alterano in modo essenziale.

§ 170. Classificazione delle equazioni lineari in tre variabili.

Per un'equazione del tipo

$$(VIII, 52) \quad A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2A_{23} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2A_{31} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + 2A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_3 \frac{\partial u}{\partial z} + A_0 = 0,$$

[dove le A sono costanti o funzioni di x, y, z], il problema di Cauchy si enuncia nel modo seguente: « data nello spazio (x, y, z) una superficie Γ , di equazione

$$(VIII, 53) \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

[su cui sia fissato un verso per la normale positiva] e date due funzioni φ e ψ dei punti di Γ , trovare una funzione $u(x, y, z)$, analitica in una regione dello spazio contenente Γ , che soddisfi la (VIII, 52) e tale che su Γ sia $u = \varphi, \frac{du}{dn} = \psi$.

Si può dimostrare che [come nel caso di due variabili] questo problema, in generale, ammette una ed una sola soluzione, eccetto il caso che la Φ soddisfi l'equazione differenziale [del 1° ordine]

$$(VIII, 54) \quad A_{11} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + A_{22} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + A_{33} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + 2A_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + 2A_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2A_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0.$$

Se Φ soddisfa questa equazione, la superficie Γ si dice una « *superficie caratteristica* » dell'equazione (VIII, 52). Come si vede, i termini di ordine inferiore al 2° della (VIII, 52) non intervengono nella formazione dell'equazione delle caratteristiche.

Se si opera un generico cambiamento di variabili

$$(VIII, 55) \quad x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta)$$

è evidente che le $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ si esprimono linearmente in funzione di $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$, così che, in un dato punto x, y, z , una trasformazione (VIII, 55) subordina una trasformazione lineare sulle derivate prime di Φ . Ora, il primo membro della (VIII, 54) è una forma quadratica in tali derivate, ed è noto che una tale forma si può sempre ridurre, con una trasformazione lineare, ad assumere la forma « canonica », contenente soli quadrati con coefficienti ± 1 , ossia che la (VIII, 54) si può ridurre, in un dato punto, alla forma

$$(VIII, 56) \quad \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 + \varepsilon_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)^2 = 0,$$

dove ciascuna delle ε_i è uguale a ± 1 od a 0. Poichè questa dovrà ancora rappresentare l'equazione differenziale delle caratteristiche, vuol dire che la stessa trasformazione (VIII, 55) riduce la (VIII, 52) [nel punto considerato] alla *forma canonica*

$$(VIII, 57) \quad \varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varepsilon_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + a_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial u}{\partial \zeta} + a_0 = 0,$$

dove a_1, a_2, a_3, a_0 sono, in generale, funzioni di ξ, η, ζ .

Ma si noti che [a differenza del caso di due variabili] non è in generale possibile trovare una trasformazione (VIII, 55) che riduca la (VIII, 52) a forma canonica *in tutti* i punti dello spazio x, y, z [od anche di una sua regione]. La cosa però è possibile se la (VIII, 52) è [almeno nella parte di 2° ordine] a coefficienti costanti: per semplicità ci limiteremo a questo caso.

L'equazione delle caratteristiche nella forma (VIII, 56) fornisce un criterio di classificazione delle equazioni del tipo (VIII, 52). Supposto dapprima che nessuno dei tre coefficienti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sia nullo, potranno presentarsi i seguenti casi (1).

a) Tutti e tre i coefficienti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sono dello stesso segno [che

(1) È superfluo rilevare che, se l'equazione non ha coefficienti costanti, potrà avvenire che in alcune regioni appartenga ad un tipo e in altre ad un altro.

si potrà sempre assumere positivo]: vale a dire l'equazione differenziale in forma canonica è

$$(VIII, 57_1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + a_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial u}{\partial \zeta} + a_0 = 0,$$

e quindi l'equazione delle caratteristiche è

$$(VIII, 56_1) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)^2 = 0.$$

In tal caso, poichè la (VIII, 56₁) non ammette altra soluzione reale che $\Phi = \text{cost.}$, non vi sono caratteristiche reali. L'equazione si dice di tipo « *ellittico* ». Esempi: l'equazione di Poisson e quella di Laplace.

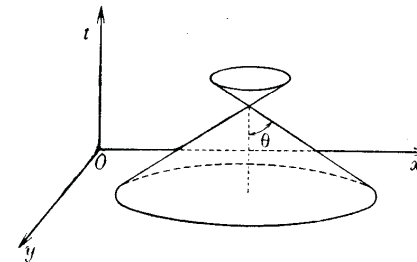


Fig. 153.

b) Due coefficienti sono di un segno [che si può sempre assumere positivo] ed uno dell'altro, ossia l'equazione differenziale è della forma

$$(VIII, 57_2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + a_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial u}{\partial \zeta} + a_0 = 0,$$

e quindi l'equazione delle caratteristiche è

$$(VIII, 56_2) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)^2 = 0.$$

Se si osserva che le tre derivate prime di Φ sono proporzionali ai coseni α, β, γ della normale alla superficie caratteristica, la (VIII, 56₂) si può scrivere

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$$

e, combinata con la $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, ci dà $\gamma = \pm 1/\sqrt{2}$. Dunque le superfici caratteristiche sono tutti i coni circolari di apertura 90° aventi l'asse parallelo all'asse ζ : ogni punto ξ, η, ζ si può assumere come

vertice di uno di tali coni. L'equazione in tal caso è di tipo « iperbolico ». Esempio: l'equazione delle membrane vibranti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

che, posto $\zeta = vt$, si riduce alla forma canonica. Le superfici caratteristiche sono, nello spazio x, y, t (v. fig. 153), i coni di apertura 2θ con $\operatorname{tg} \theta = v$, i quali hanno ufficio analogo a quello delle rette $x \pm vt = \text{cost.}$ del § 167.

c) Consideriamo, infine, il caso che uno o due dei coefficienti ε , siano nulli [per il che è necessario e sufficiente, come è noto dalla teoria delle forme quadratiche, che si annulli il determinante delle A_{ik} , detto « discriminante » della forma quadratica (VIII, 54)]. In tal caso l'equazione dicesi « parabolica » e può avere una delle seguenti forme [salvo scambi inessenziali delle lettere ζ, η, ζ].

Prima forma:

$$(VIII, 57_3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial u}{\partial \zeta} + a_0 = 0,$$

cui corrisponde l'equazione delle caratteristiche

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 = 0,$$

vale a dire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0.$$

Quindi Φ è funzione della sola ζ e le caratteristiche sono i piani $\zeta = \text{cost.}$

Questa equazione si presenterebbe nel problema della propagazione del calore in una piastra a facce isolate, che conduce [come si troverebbe con metodo analogo a quello del § 153] a

$$(VIII, 58) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

I piani $t = \text{cost.}$ sono le superfici caratteristiche ed hanno ufficio analogo a quello delle rette $t = \text{cost.}$ nel § 169.

Seconda forma:

$$(VIII, 57_3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial u}{\partial \zeta} + a_0 = 0,$$

con l'equazione delle caratteristiche

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 = 0,$$

il cui integrale generale è $\Phi = f(\xi \pm \eta, \zeta)$, con f arbitraria. Le caratteristiche sono dunque tutte le superfici cilindriche con generatrici parallele alle bisettrici degli assi ξ, η .

Terza forma:

$$(VIII, 57_3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial u}{\partial \zeta} + a_0 = 0,$$

con le caratteristiche

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)^2 = 0,$$

vale a dire $\Phi = \Phi(\eta, \zeta)$: le caratteristiche sono tutte le superfici cilindriche con generatrici parallele all'asse ξ .

§ 171. Cenno sulle equazioni in quattro variabili.

Il problema di Cauchy, ed il concetto di « caratteristica » che ne deriva, si possono estendere facilmente dall'equazione (VIII, 52) alla analoga in quattro variabili indipendenti x, y, z, t . Però in questo caso il linguaggio geometrico [benchè possa essere adoperato, e con vantaggio] non è traducibile in immagini visive, perchè esso conduce a considerare la $u(x, y, z, t)$ come funzione del posto in uno spazio a quattro dimensioni, e le « caratteristiche » [definite da equazioni del tipo $\Phi(x, y, z, t) = 0$] come «ipersuperfici» [cioè in questo caso come spazi a tre dimensioni] immerse nello spazio a quattro.

Anche tali equazioni, considerate in un dato punto x, y, z, t , si classificano [con criterio analogo a quello del caso precedente] nei tipi ellittico, iperbolico e parabolico, di cui il primo ha caratteristiche immaginarie, il secondo caratteristiche reali ed il terzo reali o immaginarie: se i coefficienti delle equazioni sono costanti, l'equazione è dello stesso tipo in ogni punto e può, con un opportuno cambiamento di variabili, essere ridotta ad una « forma canonica », cioè priva di derivate miste e con coefficienti delle altre derivate seconde eguali a ± 1 od a 0.

Le sole equazioni in quattro variabili che abbiamo incontrato nei capitoli precedenti sono:

a) l'equazione dei potenziali ritardati [§ 145]

$$(VIII, 59) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, y, z, t),$$

in cui rientra come caso particolare, corrispondente ad $f = 0$, l'equa-

zione delle onde, sia elastiche [v. (V, 70)] che elettromagnetiche [v. (VI, 40) e (VI, 41)]: essa è di tipo iperbolico;

b) l'equazione della propagazione del calore [§ 153]

$$(VIII, 60) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

che è di tipo parabolico.

CAPITOLO IX.

CENNI SULLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ (RISTRETTA)

ANALISI DI ALCUNI CONCETTI FONDAMENTALI DELLA FISICA

§ 172. La variabile « tempo ».

Nei problemi di fisica matematica intervengono generalmente le quattro variabili indipendenti x, y, z, t : le prime definiscono un punto dello spazio, la t definisce un istante. Una quaterna di valori x, y, z, t definisce un « punto-istante » [cioè un punto dello spazio considerato in un determinato istante]: per comodità si chiamano spesso « coordinate spaziali » x, y, z , « coordinata temporale » t , così che un punto-istante è definito da quattro « coordinate ». Chiameremo « evento » [e lo designeremo con una lettera maiuscola A, B, \dots] un qualsiasi fenomeno che si svolga in uno spazio talmente ristretto ed in un tempo così breve, da poterlo considerare caratterizzato dal punto-istante in cui avviene: un evento A ha dunque quattro coordinate che indicheremo spesso con x_A, y_A, z_A, t_A .

Esaminiamo ora più da vicino come si devono intendere definite fisicamente le quantità x, y, z, t che caratterizzano un evento, cioè esaminiamo quali esperienze [sia pure *ideali*, cioè eseguite con una precisione impossibile in pratica] si devono immaginare effettuate per dare un significato ai numeri x, y, z, t .

Per le coordinate spaziali x, y, z , la cosa è abbastanza semplice. Immagineremo scelto un sistema di riferimento costituito da tre aste rigide ortogonali [« assi »] uscenti da un punto O , ed una unità di misura costituita da un regolo rigido. Condotta da P la PP_0 (v. fig. 154)

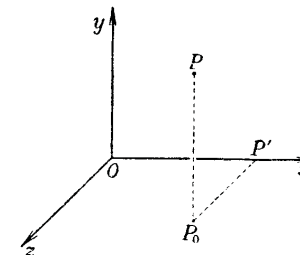


Fig. 154.

poi la P_0P' , riportando il regolo [od una sua parte aliquota] su OP' si ha x , e così per y e z .

Per la t occorre un'analisi più delicata.

Si può, in molti modi, immaginare realizzato un *orologio*, cioè un sistema meccanico di cui un organo [per es., una lancetta] si muove di moto uniforme. Per mezzo di esso potremo definire l'unità di tempo [per es. la durata di un giro della lancetta] e, fissata a piacere l'origine dei tempi, potremo leggere sull'orologio la t di qualsiasi evento che si svolga nel luogo stesso dove l'orologio si trova. Ma è essenziale osservare che, se trasportiamo l'orologio da un posto all'altro, non possiamo esser certi che il trasporto non influisca sul moto della lancetta, perchè non sappiamo « a priori » come il moto d'insieme di un sistema meccanico influisca sui suoi movimenti interni. Se dunque non vogliamo introdurre postulati arbitrari, dovremo immaginare collocati tanti orologi identici in tutti i punti dello spazio dove si svolgono degli eventi di cui ci interessa il tempo, e leggere la t di ogni evento sempre sull'orologio locale. Poichè gli orologi sono identici essi avranno lo stesso andamento, ma è evidente che l'origine dei tempi si potrà fissare arbitrariamente su un orologio solo [per es., quello dell'origine degli assi O], mentre gli altri dovranno essere regolati inizialmente su quello. Sorge dunque il problema di « trasportare l'ora » da un posto all'altro, cioè di *definire la contemporaneità* di due eventi distanti nello spazio. Nella vita pratica la questione non si presenta perchè o si trascura l'eventuale influenza del trasporto sull'andamento dell'orologio, e si trasporta addirittura l'orologio, o si ricorre alla trasmissione di segnali radio-telegrafici o [per piccole distanze] si guarda addirittura l'orologio lontano, cioè si ricorre alla trasmissione della luce: e sia le onde hertziane che la luce si considerano nella pratica come *messaggeri istantanei*. Ma in realtà non lo sono, nè siamo autorizzati a postulare che vi siano in natura fenomeni che si propagano istantaneamente in senso rigoroso. E quindi, per dare una definizione concettualmente soddisfacente della variabile t , bisogna tener conto del tempo impiegato dalla propagazione anche per piccole distanze.

Si potrebbe ricorrere alla propagazione del suono, o di un fenomeno meccanico qualunque [trazione di un filo, etc.] purchè si tenga conto della sua velocità, ma preferiremo sempre servirei, nei ragionamenti, di propagazioni luminose [o di qualsiasi radiazione elettromagnetica] e ciò non per la loro maggiore velocità [questo può essere un criterio di scelta per i casi pratici, non per la definizione teorica] ma perchè è la sola propagazione che non faccia intervenire intermediari materiali. E vedremo in seguito l'importanza di ciò.

Per conoscere la correzione da apportarsi alle letture, a causa del tempo di propagazione della luce, bisogna conoscere la velocità, c , di

questa. Ma non possiamo pensare di misurarla, facendo andare un segnale luminoso da un punto A ad un punto B e misurando il tempo impiegato, perchè dovremmo aver già definito il criterio per confrontare l'orologio di B con quello di A . Dovremo invece [ed è ciò che si fa anche in pratica, per es. nel metodo di Foucault] far riflettere il segnale su uno specchio in B , farlo tornare in A e misurare [sull'orologio di A] il tempo di andata e ritorno. Ciò presuppone che la *velocità sia la stessa nei due sensi*: vedremo al § 176 come questa eguaglianza della velocità nei due sensi possa accertarsi sperimentalmente. Ammettiamo per ora che sia verificata. Allora l'esperienza [per es. di Foucault] ci permette di misurare la velocità c , e quindi possiamo trasportare l'ora dall'orologio campione O a qualsiasi altro orologio P : potremo, per es., far partire da O un segnale luminoso quando l'orologio di O segna zero c , quando il segnale giunge in P , mettere la lancetta dell'orologio P sull'ora OP/c .

Così è definita la variabile t in qualsiasi punto dello spazio.

Si riconosce che questo equivale a dare il seguente criterio per definire la contemporaneità di due eventi in due punti distanti O e P : si facciano partire due segnali luminosi da O e da P quando si verificano i due eventi: se questi segnali giungono contemporaneamente nel punto medio del segmento OP i due eventi si diranno contemporanei.

§ 173. Cambiamento del sistema di riferimento.

Ci proponiamo ora lo studio comparativo dei fenomeni fisici, come appaiono a due osservatori K, K' , in moto rettilineo ed uniforme uno rispetto all'altro [per es., uno fermo su una strada, l'altro su un treno in moto rettilineo e uniforme]. Per precisare questa idea introdurremo due sistemi di assi, un sistema K [origine O , assi x, y, z] ed un sistema K' [origine O' , assi x', y', z'] in moto uno rispetto all'altro: per comodità li disporremo come in figura 155 [assi x ed x' coincidenti, assi y ed y' paralleli e così z e z'] e supporremo che O' scorra lungo l'asse x con velocità costante v . Ciascun osservatore riferisce i fenomeni al proprio sistema, e, per trattare i due osservatori in modo simmetrico, dobbiamo supporre che ciascuno misuri le coordinate con un proprio regolo unità:

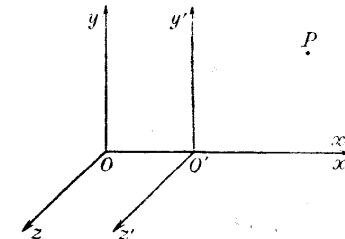


Fig. 155.

i due regoli però dovranno essere « uguali », con che intendiamo di identica costituzione fisica e chimica ⁽¹⁾ e, naturalmente, nelle stesse condizioni fisiche rispetto al relativo osservatore. Restano così definite, per ciascun evento, le coordinate spaziali relative a K (x, y, z) e quelle relative a K' (x', y', z').

Analogamente, per definire le coordinate temporali, supporremo che ciascun osservatore abbia un proprio sistema di orologi [fissi rispetto ai propri assi e distribuiti in tutto lo spazio] di identica struttura e regolati su un proprio orologio campione [che può essere, per es., per K un orologio posto in O , per K' uno posto in O']: fisseremo le origini dei tempi in modo che i due orologi campione segnino zero all'istante in cui O' passa per O . La regolazione degli orologi lontani con l'orologio campione deve poi essere fatta da ciascun osservatore con le precauzioni accennate al § prec. In ogni punto dello spazio potrà quindi trovarsi un orologio del sistema K ed uno del sistema K' [mobile rispetto a quello] ed un evento qualsiasi avrà quindi una coordinata temporale t per l'osservatore K ed una t' per K' : essendosi definiti separatamente i significati di t e t' non possiamo a priori affermare che risulti $t = t'$.

Il problema che ci proponiamo si può ora precisare così: trovare le relazioni analitiche tra le coordinate x, y, z, t di un evento e le coordinate x', y', z', t' dello stesso evento.

§ 174. Fisica classica e fisica relativistica.

L'analisi rigorosa del significato delle variabili x, y, z, t , fatta nei §§ precedenti, è stata introdotta da Einstein nel 1905, ed, insieme ad altre considerazioni, ha messo in luce che la fisica costruita fino allora [la cosiddetta « fisica classica »] era stata inavvertitamente fondata su alcuni postulati che venivano ammessi senza nemmeno enunciarli ma che, enunciati e sottoposti ad un attento esame, non appaiono affatto evidenti. Uno di questi [che era implicito nell'uso fatto fino allora della variabile t] era il postulato che dovesse esistere [benchè non conosciuto] un modo per trasmettere a distanza dei segnali con velocità infinita: in tal caso la definizione del tempo nei vari luoghi non richiederebbe alcuna discussione, e, per i due sistemi di riferimento K, K' in moto l'uno rispetto all'altro, darebbe senz'altro $t = t'$. La fisica classica considerava *evidente* che dovesse essere $t = t'$, ma tale evidenza non ha altra ragione psicologica se non quella che esiste un agente fisico

⁽¹⁾ Si può pensare, p. es., di servirsi degli spigoli di due cristalli cubici di salgemma costruiti dello stesso numero di atomi.

[la luce] la cui propagazione nella esperienza della vita comune [su cui si forma la nostra intuizione] si può *praticamente* considerare istantanea.

Per ragioni analoghe, la fisica classica ammetteva tacitamente il postulato che, se i due osservatori K e K' del § precedente fanno simultaneamente delle misure di lunghezza sopra lo stesso oggetto, essi debbono trovare lo stesso risultato. Ma riflettendo un poco su questo postulato ci si accorge che la sua apparente evidenza è del tutto illusoria e che non vi è invece alcuna ragione logica per cui esso debba essere vero. Si tratti, per es., della lunghezza di una sbarra rigida, disposta lungo l'asse x ed accompagnante l'osservatore K' . Per questi l'operazione consiste semplicemente nel riportare lungo la sbarra data il regolo unità, od una sua parte aliquota, il numero necessario di volte: per K , invece, l'operazione consiste nel segnare sull'asse x la posizione dei due estremi della sbarra *in uno stesso istante*, e poi misurare [col proprio regolo unità] la distanza fra i due segni [come si vede, la definizione è collegata alla definizione di contemporaneità]. Si tratta dunque di operazioni essenzialmente diverse e [poichè una grandezza fisica è definita dal procedimento che serve a misurarla] se si vuole dare un senso preciso alle parole « lunghezza della sbarra » si deve adottare per definirne uno solo dei due procedimenti: per es. quello dell'osservatore che accompagna la sbarra [la « lunghezza » così definita chiamasi « lunghezza di quiete »]. L'altro procedimento definisce, a rigore, un'altra grandezza fisica [« lunghezza della sbarra in moto con velocità v »] e non vi è a priori nessuna ragione perchè debba dare lo stesso risultato.

Il punto di vista della « fisica relativista » consiste nel lasciare, in principio, impregiudicata la questione della validità o meno dei detti postulati, [e quindi definire, come abbiamo fatto, la contemporaneità, la lunghezza, etc., in modo indipendente da essi] e nell'introdurre poi, in luogo di essi, due altri postulati, direttamente suggeriti dall'esperienza, ma non da quella grossolana dei sensi, bensì da raffinatissime esperienze di laboratorio. Le conseguenze che si deducono, nei vari campi della fisica, dai postulati della teoria della relatività differiscono in generale da quelle della fisica classica, ma le differenze sono, per lo più, di entità piccolissima [benchè di grande interesse teorico] così che la fisica classica conserva il suo valore *pratico* nella maggioranza dei casi. In certi casi, però, il divario fra le due teorie diviene accessibile all'esperienza, ed i risultati sperimentali non hanno finora mai smentito le previsioni della teoria della relatività.

§ 175. La trasformazione di Galileo.

Del problema enunciato, al § 173 daremo anzitutto la soluzione [del resto ben nota] secondo la fisica classica. Essa si fonda, come abbiamo detto, sul postulato che per qualsiasi evento sia $t = t'$, e che inoltre qualunque tratto dell'asse x presenti, misurato da K , la stessa lunghezza che misurato da K' .

Ammesso questo, si potrà ragionare [come si fa ordinariamente in meccanica razionale] così: al tempo t [non occorre precisare di quale orologio] le due origini O ed O' distano di vt , [e non occorre precisare da quale dei due osservatori è fatta la misura di questa distanza]: quindi le relazioni tra x, y, z ed x', y', z' si ricavano, per via puramente geometrica, dalla fig. 155 e sono le seguenti [cui associamo, per completezza, la relazione fra t e t']:

$$(IX, 1) \quad x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'.$$

Risolvendole, si hanno le formule inverse

$$(IX, 1') \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Queste formule, su cui è fondata tutta la cinematica classica, costituiscono la «trasformazione di Galileo».

Una ben nota conseguenza ne è la legge di «composizione delle velocità». Consideriamo un punto in moto, e sia V la sua velocità per l'osservatore K , V' la sua velocità per K' : le componenti di questi vettori sono, per definizione:

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dy}{dt}, \quad V_z = \frac{dz}{dt}, \\ V'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad V'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad V'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Differenziando le (IX, 1) si trova subito che

$$(IX, 2) \quad V_x = V'_x + v, \quad V_y = V'_y, \quad V_z = V'_z,$$

vale a dire [introducendo il vettore v , velocità del sistema K' rispetto a K]

$$(IX, 2') \quad V = V' + v.$$

§ 176. La propagazione della luce secondo la fisica classica. L'esperienza di Michelson.

Applichiamo la legge classica di composizione delle velocità (IX, 2') ad un segnale luminoso che si propaghi nel vuoto nella direzione dell'asse x , e supponiamo che, per un osservatore K , esso si muova

con velocità c : per un osservatore K' esso si muove con velocità $c - v$ se la propagazione avviene nel verso positivo dell'asse x , con velocità $c + v$ se la propagazione avviene nel verso opposto. Quindi, se per l'osservatore K la luce si propaga con la stessa velocità nei due versi, non è così per l'osservatore K' . Viceversa, se per K la propagazione avviene con una velocità c_1 nel verso positivo ed una velocità diversa c_2 nel verso negativo, basterà che K' abbia la velocità $v = \frac{1}{2}(c_1 - c_2)$ [in valore e segno] perchè rispetto a K' la luce si propaghi con eguale velocità nei due versi. Estendendo il ragionamento agli altri due assi, si conclude che, secondo la cinematica classica, deve esistere un sistema di riferimento, ed uno solo ⁽¹⁾, rispetto al quale la luce di una data sorgente si propaga nel vuoto con eguale velocità in tutte le direzioni. Ad un tale sistema di riferimento daremo il nome di «sistema otticamente isotropo».

Si potrebbe pensare che per ciascuna sorgente fosse otticamente isotropo il sistema di riferimento nel quale la sorgente stessa è in quiete, come avverrebbe se la luce fosse costituita da proiettili materiali lanciati dalla sorgente [e perciò questa ipotesi chiamasi «ipotesi balistica»]. Tale ipotesi è smentita da varie osservazioni ed esperienze.

Ci limiteremo tra queste a ricordare una famosa osservazione, dovuta a De Sitter, relativa alle cosiddette «stelle doppie». Una stella doppia [fig. 156] è costituita da due stelle, S ed S' , ruotanti intorno al comune baricentro [per semplicità supponiamo che S sia ferma rispetto alla Terra, T , e che S' ruoti con velocità v intorno ad S in un piano passante per T (condizioni realizzate effettivamente da qualche stella doppia: negli altri casi il ragionamento è un po' più complicato)]. Se valesse l'ipotesi balistica, la velocità della luce emessa da S' verso la Terra sarebbe $c + v$ quando v è diretta verso la Terra, $c - v$ nel caso opposto. Ora, anche una piccola differenza di velocità, su una distanza grande come è quella della stella dalla Terra, dovrebbe portare a notevoli differenze di tempo nel percorso, e quindi a notevoli deformazioni apparenti nella legge del moto della stella: ciononostante, anche colle più accurate osservazioni non se ne sono riscontrate.

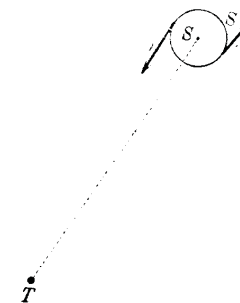


Fig. 156.

(1) Qui e nel seguito, parlando di «unicità» di un sistema di riferimento, consideriamo solo i cambiamenti cinematici di assi, prescindendo dalla ovvia possibilità di passare a nuovi assi solidali coi primitivi.

Si deve dunque ritenere sperimentalmente provato che, rispetto ad un dato sistema di riferimento, la velocità di un segnale luminoso è indipendente da quella della sorgente (*principio della costanza della velocità della luce*). E quindi un sistema di riferimento otticamente isotropo deve essere tale per luce di qualunque origine. Un tale sistema si presenterebbe dunque come fisicamente privilegiato rispetto a tutti gli altri sistemi di riferimento, e perciò gli è stato dato il nome di « *riferimento assoluto* ».

Sorge allora la questione di sapere se e come la Terra si muova rispetto al sistema di riferimento assoluto, questione a cui deve essere possibile rispondere con esperienze ottiche eseguite sulla Terra e dirette a ricercare se la velocità della luce, rispetto alla Terra (2), è o no la stessa in tutte le direzioni. La più celebre di queste esperienze è quella eseguita per la prima volta da *Michelson* nel 1879 e poi ripetuta da lui e da vari altri con precisione sempre maggiore e con diverse varianti. Ecco in che cosa consiste.

Un pennello luminoso, monocromatico [di cui disegniamo solo un raggio, *SO*, (fig. 157)] viene ad incontrare una lastra di vetro debol-

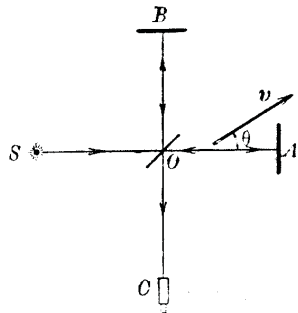


Fig. 157.

mente argentata, *O*, sotto un angolo di 45°: esso in parte l'attraversa, in parte si riflette. I due raggi *OA*, *OB* in cui si divide *SO* vengono riflessi su se stessi da due specchi *A*, *B* e rinviiati sulla lastra semiargentina, dove ciascuno di essi si divide ancora in altri due raggi. Ci interessano solo i due raggi sovrapposti che escono in direzione *OC* [uno dei quali ha fatto il percorso *SOAOC* e l'altro *SOBOC*]. I fenomeni di interferenza a cui essi danno luogo [osservabili sotto forma di frange in *C* (3)] permettono di determinare la differenza di tempo impiegato dalla luce a percorrere i due tratti *OAO* e *OBO*.

Supponiamo ora che la Terra si muova rispetto al sistema di riferimento assoluto, e sia *v* la componente di tale velocità secondo il piano *SABC* dell'apparecchio, e θ l'angolo che *v* forma con *OA* :

(2) Più esattamente: rispetto ad un sistema di assi aventi l'origine nel centro della Terra e orientazione costante rispetto alle stelle fisse (quindi partecipanti al moto di rivoluzione terrestre ma non a quello di rotazione).

(3) Le frange si formano a causa di una lievissima inclinazione degli specchi (o di uno solo di essi) rispetto alla posizione della figura.

poniamo inoltre (secondo l'uso)

$$(IX, 3) \quad \frac{v}{c} = \beta.$$

quantità che, come diremo, si deve ritenere al massimo dell'ordine di grandezza di 10^{-4} , così che potremo trascurarne le potenze superiori alla seconda. In questa approssimazione, il tempo τ_1 che la luce impiega complessivamente ad andare da *O* ad *A* e a tornare in *O*, posto *OA* = *l*, risulta (v. Appendice II)

$$\tau_1 = \frac{2l}{c} \left(1 + \beta^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \sin^2 \theta \right).$$

Il tempo τ_2 , impiegato dall'altro raggio di luce a percorrere il tragitto *OBO*, sarà evidentemente dato da una formola analoga in cui θ è sostituito dal suo complemento, cioè

$$\tau_2 = \frac{2l}{c} \left(1 + \beta^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \cos^2 \theta \right).$$

La differenza di tempo, da cui dipendono gli effetti di interferenza, sarebbe dunque

$$\tau = \tau_1 - \tau_2 = \frac{l}{c} \beta^2 \cos 2\theta.$$

Se, ora, si fa ruotare tutto l'apparecchio attorno ad *O*, variando θ varierebbe τ e quindi si sposterebbero le frange di interferenza: dall'entità del loro spostamento si deduce β e quindi *v*. Ora, l'esperienza, eseguita ripetutamente con estrema precisione e in diverse ore del giorno [quindi con diversi orientamenti del piano dell'apparecchio rispetto alle stelle fisse], ha dato sempre per risultato $\tau = 0$, entro i limiti dell'errore sperimentale [che in certi casi non superavano i 0,3 km/sec].

Aggiungeremo che il risultato dell'esperienza di *Michelson* ha avuto varie conferme indirette da altre esperienze [Trouton e Noble, Des Coudres, Trouton e Rankine, etc.] su fenomeni elettromagnetici, i quali, secondo la teoria classica, dovrebbero venire influenzati [al pari dei fenomeni ottici] dal moto della Terra rispetto all'eventuale sistema di riferimento assoluto. Anche queste esperienze hanno dato tutte risultato negativo.

Si deve dunque ritenere sperimentalmente provato che il sistema di riferimento collegato alla Terra è otticamente isotropo. Ora, se si

ammettono i postulati della cinematica classica [da cui discende, come si è visto, l'unicità del sistema otticamente isotropo] si deve concludere che l'esperienza di Michelson e le altre a cui abbiamo accennato conferiscono alla Terra una posizione di privilegio fisico nell'universo, piuttosto sorprendente dal punto di vista copernicano. Ma vi è di più: se si ammette che l'unico sistema otticamente isotropo sia quello collegato alla Terra, diviene inesplicabile il fenomeno della *aberrazione astronomica* (3), che trova invece una spiegazione elementare ben nota nell'ipotesi che il sistema otticamente isotropo sia collegato al Sole, e quindi la Terra si muova rispetto ad esso con la velocità del suo moto di rivoluzione ($v = 30$ km/sec, $\frac{v}{c} = 10^{-4}$), cioè 100 volte superiore ai limiti di sensibilità dell'esperienza di Michelson [la quale fu eseguita appunto con l'intenzione di ricercare questo effetto] (4).

In conclusione, l'unicità del sistema otticamente isotropo, richiesta dalla cinematica classica, porta a conseguenze incompatibili coi fatti sperimentali, e insoddisfacenti anche da un punto di vista speculativo. Ricordando quanto vi sia di arbitrario nei postulati che stanno a base di quella cinematica [v. § 174], appare giustificato abbandonare quei postulati e fondare la cinematica su basi diverse, come si vedrà nei §§ seguenti.

FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ

§ 177. Principio di relatività.

La legge fondamentale della Meccanica classica,

$$F = ma.$$

è « invariante » rispetto alla trasformazione di Galileo. Con ciò si vuol significare [§ 3] che se, nel sistema di riferimento K , essa si esprime con

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

(3) Ricordiamo che l'aberrazione astronomica consiste nel fatto che ogni stella (indipendentemente dalla sua distanza) descrive apparentemente nel cielo, in un anno, una piccola ellissi [il cui semiasse maggiore ha una lunghezza apparente di $20''{,}5$, uguale al rapporto tra la velocità orbitale terrestre (30 km/sec) e la velocità della luce], come se il moto della Terra rispetto al Sole avesse per effetto di spostare un poco *in avanti* la direzione apparente della stella, rispetto alla direzione in cui si trovava la stella quando ha emesso la luce.

(4) L'aberrazione si spiegherebbe anche se il Sole si muovesse, rispetto al sistema assoluto, di moto rettilineo uniforme; ma anche in tal caso l'esperienza di Michelson dovrebbe dare risultato nettamente positivo.

applicando ad x, y, z, t la trasformazione di Galileo (IX, 1) queste equazioni si mutano [come si vede subito] in

$$F_{x'} = m \frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad F_{y'} = m \frac{d^2y'}{dt'^2}, \quad F_{z'} = m \frac{d^2z'}{dt'^2}.$$

che sono della stessa forma salvo la sostituzione materiale di x, y, z, t con x', y', z', t' . Il significato fisico di questa invarianza è che tutti i fenomeni meccanici si svolgono con le stesse leggi sia per l'osservatore K che per K' . È questo un fatto sperimentale ben noto e già rilevato da Galileo: se in una cabina di una nave, la quale si muove di moto rettilineo uniforme su acqua tranquilla, si esegue una qualunque esperienza meccanica [caduta di corpi, oscillazioni di pendoli, etc.] non si constata nessuna differenza dal risultato che si avrebbe se la nave fosse ferma. In altre parole, *non è possibile rivelare* il moto [rettilineo uniforme] della nave con sole esperienze meccaniche eseguite su corpi partecipanti a questo moto. È questo il cosiddetto *principio di relatività galileiano*.

Si badi bene però che, per la fisica classica, tale principio si applicava bensì ai fenomeni meccanici ma *non* a quelli elettromagnetici e, in particolare, ottici. Difatti, per questi fenomeni la fisica classica ammetteva, come si è detto, l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato, e quindi, per es., esperienze ottiche [come quella di Michelson] eseguite sulla nave di cui sopra, avrebbero dovuto permettere di misurare la velocità della nave rispetto a tale sistema di riferimento.

Quando, in seguito all'esito negativo dell'esperienza di Michelson e delle altre consimili, si è abbandonata l'idea di un riferimento privilegiato per i fenomeni elettromagnetici, è divenuto naturale estendere il principio di relatività a *tutti* i fenomeni, non solo meccanici, ma elettromagnetici e di qualsiasi altra natura, vale a dire ammettere il postulato che: *tutte le leggi fisiche devono avere la stessa forma, sia che si riferiscano al sistema K che al sistema K'* [principio di relatività einsteiniano]. In altre parole, a tutti gli effetti fisici è indifferente considerare K fermo e K' in movimento, o viceversa. Tale principio è detto *della relatività ristretta* perchè è limitato ai sistemi di riferimento animati l'uno rispetto all'altro da una *traslazione rettilinea uniforme* (1).

Per evitare equivoci facciamo notare che il principio ora enunciato non significa che, se gli osservatori K e K' fanno simultaneamente delle misure di grandezze fisiche [per es. di dimensioni, temperatura, carica elettrica, etc.] sopra lo stesso oggetto, essi debbono trovare lo stesso risultato: ciò, anzi, è, in generale, falso. Il principio di relatività significa invece che se gli osservatori K e K'

(1) La teoria della relatività « generale » considera invece cambiamenti di riferimento più generali, quindi anche moti accelerati e moti rotatori di un sistema rispetto all'altro.

eseguoano eguali esperimenti su *oggetti eguali e nelle stesse condizioni di moto o di quiete rispetto all'osservatore* [per es., se entrambi misurano la carica dell'elettrone, ma ciascuno servendosi di un elettrone in quiete rispetto ai propri apparecchi] essi debbono trovare lo stesso risultato.

Il *principio di relatività* e quello della *costanza della velocità della luce* [v. § 176] costituiscono i due postulati fondamentali della teoria della relatività ristretta: da essi dedurremo ora i più importanti risultati di questa teoria.

Notiamo intanto subito che dalla combinazione dei due principi scaturisce una notevole generalizzazione del principio della costanza della velocità della luce. Infatti, consideriamo due sorgenti luminose di cui una, S , in quiete rispetto a K , l'altra, S' , in quiete rispetto a K' , e supponiamo che ciascuna emetta un segnale luminoso: per il principio testè ricordato i due segnali si propagano, rispetto a K , con la stessa velocità. Ma d'altra parte, per il principio di relatività, la velocità rispetto a K' della luce di S' deve essere uguale alla velocità rispetto a K della luce di S , quindi anche uguale alla velocità rispetto a K della luce di S' . Si vede così che uno *stesso* segnale luminoso (quello di S') ha la stessa velocità sia per l'osservatore K che per K' . Lo stesso potrebbe dirsi, naturalmente, per il segnale emesso da S .

§ 178. Trasformazione di Lorentz.

Abbandonati ora i postulati classici su cui è fondata la trasformazione di Galileo, sostituiamoli coi due postulati della teoria della relatività ristretta e vediamo quali relazioni fra x, y, z, t ed x', y', z', t' si devono sostituire a quelle di Galileo per esprimere il passaggio dal riferimento K al riferimento K' .

Anzitutto osserviamo che, dovendo valere il principio di relatività, in particolare, per la legge d'inerzia, le relazioni che legano x, y, z, t ad x', y', z', t' devono essere *lineari*. Infatti, se un punto materiale non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme per l'osservatore K , e cioè se si ha

$$x = a_1 t + b_1, \quad y = a_2 t + b_2, \quad z = a_3 t + b_3,$$

si deve avere un moto rettilineo uniforme anche per l'osservatore K' , e cioè deve aversi

$$x' = \alpha_1 t' + \beta_1, \quad y' = \alpha_2 t' + \beta_2, \quad z' = \alpha_3 t' + \beta_3;$$

ciò è possibile solo se x', y', z', t' sono funzioni lineari di x, y, z, t . Inoltre tali relazioni devono essere *omogenee*, in quanto si è convenuto

che nell'istante iniziale le due origini O ed O' coincidano e quindi che per $x = y = z = t = 0$ sia $x' = y' = z' = t' = 0$.

Riassumendo, le relazioni cercate devono essere del tipo

$$(IX, 4) \quad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t. \end{cases}$$

e si tratta di determinare i 16 coefficienti che in esse compaiono.

Anzitutto osserviamo che abbiamo scelto coincidenti i piani coordinati $y = 0$ ed $y' = 0$, quindi per $y = 0$ [x, z, t qualsiasi] si dovrà avere $y' = 0$: nella seconda delle (IX, 4) dovranno quindi essere nulli tutti i coefficienti all'infuori di a_{22} . Similmente, considerando le z e z' , si trova che nella terza delle (IX, 4) devono essere nulli tutti i coefficienti all'infuori di a_{33} . I coefficienti a_{22} ed a_{33} , poi, essendo gli assi y e z trattati allo stesso modo, devono essere uguali tra loro: indicheremo il loro valore comune [che eventualmente sarà una funzione di v] con $\lambda(v)$, e così la seconda e la terza delle (IX, 4) si ridurranno a

$$(IX, 5) \quad y' = \lambda(v)y, \quad z' = \lambda(v)z.$$

Ed è pure semplice determinare $\lambda(v)$: infatti, per il principio di relatività, è la stessa cosa dire che K' si muove rispetto a K con velocità v o che K si muove rispetto a K' con velocità $-v$. In altre parole, le formule inverse alle (IX, 4) [quelle cioè che esprimono linearmente x, y, z, t in funzione di x', y', z', t'] devono essere identiche alle (IX, 4) salvo lo scambio di v con $-v$ e, naturalmente, di x, y, z, t con x', y', z', t' . Quindi, in particolare, le inverse delle (IX, 5) devono essere

$$y = \lambda(-v)y', \quad z = \lambda(-v)z',$$

che, confrontate colle (IX, 5), portano a

$$(IX, 6) \quad \lambda(v)\lambda(-v) = 1.$$

D'altra parte, se si fissasse il verso positivo di x ed x' nell'altro senso si dovrebbe sostituire $-v$ a v ma nulla muterebbe nei riguardi di y e z : ed avendosi in tal caso

$$y' = \lambda(-v)y, \quad z' = \lambda(-v)z,$$

che devono coincidere colle (IX, 5) si avrà

$$\lambda(v) = \lambda(-v)$$

e, per la (IX, 6),

$$[\lambda(v)]^2 = 1.$$

ossia

$$\lambda = \pm 1.$$

È possibile subito decidere per il segno + osservando che si sono scelti gli assi y ed y' orientati dalla stessa parte [e così z e z']. La seconda e la terza delle (IX, 4) si riducono quindi a

$$(IX, 7) \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Quanto alle altre due equazioni (IX, 4), osserviamo che il piano (y', z') , che per l'osservatore K' ha equazione $x' = 0$, è per l'osservatore K un piano parallelo al piano (y, z) a distanza vt ed ha, quindi, come equazione $x - vt = 0$. La prima delle (IX, 4) deve quindi essere tale da ridursi a $x' = 0$ quando è $x - vt = 0$ [qualunque siano y e z]: essa non dovrà quindi dipendere da y e z e dovrà essere della forma

$$(IX, 8) \quad x' = \mu(v)(x - vt).$$

Invocando anche qui il principio di relatività per il moto di K' rispetto a K si vede che la formula inversa corrispondente a questa dovrà essere

$$x = \mu(-v)(x' + vt').$$

da cui, risolvendo rispetto a t' e ponendo per comodità

$$(IX, 9) \quad v(v) = \frac{1}{v} \left[\frac{1}{\mu(-v)} - \mu(v) \right],$$

si ha, tenendo conto della (IX, 8),

$$(IX, 10) \quad t' = v(v)x + \mu(v)t$$

che è la quarta delle (IX, 4).

La determinazione di $\mu(v)$ e quindi di $v(v)$ la si fa ricorrendo al principio della costanza della velocità della luce nella forma generalizzata datagli alla fine del § precedente.

Supponiamo perciò che K [e quindi anche K'] sia un sistema otticamente isotropo, e che, all'istante in cui le origini O ed O' dei due sistemi K e K' coincidono, parta da esse un segnale luminoso. Il suo fronte d'onda, all'istante t , sarà per l'osservatore K una sfera di centro O e raggio ct e quindi di equazione

$$(IX, 11) \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0.$$

Per l'osservatore K' , in virtù del principio testè ricordato, lo stesso fronte d'onda deve esser la sfera

$$(IX, 12) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0.$$

Affinchè le due equazioni possano coesistere si dovrà avere che, sostituendo nella (IX, 12) ad x' , y' , z' , t' le loro espressioni (IX, 8), (IX, 7), (IX, 10), la nuova equazione ottenuta

$$\mu^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2(vx + \mu t)^2 = 0$$

e la (IX, 11) siano equivalenti. Per questo, detto γ un coefficiente di proporzionalità, dovrà essere identicamente

$$(IX, 13) \quad \mu^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2(vx + \mu t)^2 = \gamma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2).$$

Ora, dall'eguaglianza dei coefficienti di y^2 [e di z^2] nei due membri si ottiene

$$\gamma = 1,$$

e da quella dei coefficienti di t^2 ,

$$\mu^2 - c^2 - v^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right),$$

da cui

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Osserviamo, infine, che, essendosi scelti gli assi x ed x' diretti dalla stessa parte, per $v = 0$ la (IX, 8) si deve ridurre ad $x' = x$ e quindi μ deve ridursi ad 1: dunque il segno da prendersi è il +. Si ottiene così

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

e, di conseguenza, dalla (IX, 9),

$$v = \frac{-\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{c}{c}.$$

Si verifica subito che con questi valori di μ e v anche i coefficienti di x^2 , e quelli di xt , nei due membri della (IX, 13), risultano eguali.

Riunendo ora i risultati ottenuti, troviamo, per le (IX, 4), la forma definitiva

$$(IX, 14) \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Queste relazioni costituiscono la « trasformazione di Lorentz » che sostituisce la trasformazione di Galileo. Le formule inverse si possono ottenere sia risolvendo il sistema (IX, 14) rispetto ad x , y , z , t , sia,

più semplicemente, [per il principio di relatività] scambiando x, y, z, t con x', y', z', t' , e c con $-v$: esse sono quindi

$$(IX, 14') \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{\beta}{c}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dalle (IX, 14) e (IX, 14') appare che, per la realtà della trasformazione, deve essere $|\beta| < 1$ ossia $|v| < c$.

Una importante osservazione è che se in queste formule si fa tendere c ad ∞ [e quindi β a 0] esse si identificano con le formule (IX, 1), (IX, 1') della trasformazione di Galileo. Ciò è conforme all'osservazione già fatta che, se i segnali luminosi si propagassero istantaneamente, varrebbe la trasformazione di Galileo [e quindi tutta la meccanica classica]. Se ne deduce anche che, finchè $|v| \ll c$ [come avviene nella maggior parte dei casi pratici] e quindi $|\beta| \ll 1$, la trasformazione di Galileo rappresenta una buona approssimazione della trasformazione di Lorentz, e quindi la meccanica classica [in tutti i casi in cui non intervengono movimenti di velocità confrontabile con c] è una buona approssimazione della meccanica relativistica.

§ 179. Relatività della contemporaneità.

Una prima conseguenza notevole della trasformazione di Lorentz è che la contemporaneità di due eventi [non coincidenti anche nel luogo] è relativa al sistema di riferimento, vale a dire, due eventi che per l'osservatore K sono contemporanei [ma che avvengono in luoghi diversi] non sono in genere contemporanei per K' , e viceversa.

Supponiamo infatti, per semplicità, che per l'osservatore K uno dei due eventi, A , accada in O [$x_A = y_A = z_A = 0$], l'altro, B , in un punto di coordinate x_B, y_B, z_B , entrambi al tempo $t_A = t_B = 0$. Gli stessi eventi avranno, per K' , le coordinate $x'_A, y'_A, z'_A, t'_A, x'_B, y'_B, z'_B, t'_B$, ricavabili dalle precedenti con le formule (IX, 14), di cui, in particolare, l'ultima ci dà

$$t'_A = 0, \quad t'_B = \frac{-\frac{\beta}{c}x_B}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Come si vede, in generale non risulta $t'_B = t'_A$. Soltanto se $x_B = 0$, cioè se i due punti dove avvengono gli eventi hanno la stessa ascissa, o in particolare coincidono, i due eventi contemporanei per K lo sono anche per K' .

Questo risultato si può rendere intuitivo col seguente ragionamento [v. fig. 158]. Sia, per es., K un osservatore fermo a terra, K' un osservatore su un treno $A'B'$ in moto uniforme da sinistra a destra. I due eventi siano l'accensione di due lampade, una alla testa, B' , ed una alla coda, A' , del treno, i quali punti negli istanti dell'accensione coincidono coi punti A e B della strada. Le due accensioni siano simultanee per K . Ciò significa, per definizione [v. § 172] che i due segnali luminosi giungono contemporaneamente in C , punto medio di AB [nella fig. 158 i due segnali luminosi sono indicati con due asterischi; la figura a) rappresenta la posizione del treno e della luce all'istante dell'accensione delle lampade, la figura b) all'istante dell'arrivo della luce in C . Le figure sono fatte dal punto di vista di K (1)]. Ma poichè, quando i due segnali si incontrano in C , il treno si è spostato, il loro incontro non avviene nel punto medio, C' , del treno ma più verso A' ; quindi, per l'osservatore K' , i due eventi non soddisfano la definizione di contemporaneità: la lampada A' è stata accesa dopo B' .

Questo risultato è uno dei più sorprendenti della teoria della relatività, ma esso appare paradossale soltanto per l'abitudine che abbiamo di considerare istantanea la propagazione della luce. Del resto, il fatto che l'identità di tempo di due eventi [in luoghi diversi] sia relativa al sistema di riferimento, è abbastanza analogo all'altro fatto, generalmente accettato senza difficoltà, che

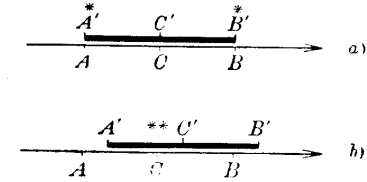


Fig. 158.

l'identità di luogo di due eventi [non simultanei] è relativa al sistema di riferimento [se, per es., una lampada di un treno viene accesa e poi spenta, i due eventi avvengono « nello stesso luogo » per un osservatore che si riferisca al treno, e « in luoghi diversi » per chi si riferisce alla Terra].

Possiamo ora porci il seguente problema. Siano A e B due eventi che per l'osservatore K non sono simultanei [per es., B segue A , cioè $t_B > t_A$] ed avvengono per K in due punti diversi [che per semplicità supponiamo entrambi sull'asse x]. È possibile trovare un sistema di riferimento K' tale che riferendosi ad esso B preceda A , cioè $t'_B < t'_A$?

Dalla quarta delle (IX, 14) si ha

$$t'_A = \frac{t_A - \frac{\beta}{c}x_A}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t'_B = \frac{t_B - \frac{\beta}{c}x_B}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

(1) Poichè una figura di questo genere rappresenta lo stato delle cose in un determinato istante, essa ha senso soltanto per uno dei due osservatori: per l'altro, le varie parti della figura rappresentano posizioni non contemporanee. Naturalmente si potrebbero disegnare i diagrammi analoghi dal punto di vista di K' , ma nel primo di essi non si potrebbero collocare i due asterischi in A' e B' .

e se si vuole che sia $t'_B < t'_A$ bisogna determinare β in modo che

$$t_B - \frac{\beta}{c} x_B < t_A - \frac{\beta}{c} x_A,$$

ossia, posto

$$\frac{x_B - x_A}{c} = \tau_{AB},$$

si deve prendere

$$\beta = \frac{t_B - t_A}{\tau_{AB}}.$$

Poichè si è già osservato [§ 178] che deve in ogni caso essere $|\beta| < 1$, si vede che il nostro problema ha soluzione se, e solo se,

$$(IX, 15) \quad t_B - t_A < \tau_{AB}.$$

Si noti che τ_{AB} rappresenta il tempo che impiegherebbe la luce per percorrere la distanza AB .

Si vede dunque che vi sono coppie di eventi per cui l'ordine di successione nel tempo è lo stesso per qualsiasi sistema di riferimento, altre per cui non lo è.

Un corollario della (IX, 15) è che: *nessun agente fisico può propagarsi con velocità maggiore di c* [intendendosi per « agente » ciò che può produrre degli effetti fisici]. Difatti, supponiamo che l'evento B sia provocato dall'evento A per mezzo della trasmissione di un agente fisico: se questo agente si trasmettesse con velocità maggiore di c sarebbe soddisfatta la (IX, 15), e quindi si potrebbe trovare un sistema di riferimento K' in cui l'evento B [effetto] precede l'evento A [causa], il che è manifestamente assurdo.

§ 180. Contrazione di Lorentz.

Un'altra conseguenza della trasformazione di Lorentz riguarda la misura della lunghezza di corpi in movimento.

Supponiamo, come a § 174, che K e K' misurino entrambi una sbarra parallela all'asse x , ed in quiete per K' . Come si è già detto, l'osservatore K , rispetto a cui la sbarra si muove con velocità v , dovrà in un dato istante, segnare sull'asse x le posizioni simultanee dei due estremi di essa, e poi misurare la distanza fra i due segni [o compiere operazioni equivalenti a queste]. Chiamiamo A e B i due eventi costituiti dal tracciamento dei segni da parte dell'osservatore K e supponiamo che essi avvengano nell'istante 0 degli orologi di K : sia

cioè $t_A = t_B = 0$. La lunghezza l della sbarra misurata da K sarà

$$l = x_B - x_A$$

[supposto $x_B > x_A$]. Per K' invece la lunghezza sarà

$$l' = x'_B - x'_A.$$

Dalla prima delle (IX, 14) si ha

$$x'_A = \frac{x_A}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'_B = \frac{x_B}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e quindi

$$x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

ossia

$$(IX, 16) \quad l = l' \sqrt{1-\beta^2}.$$

Dunque: la « lunghezza della sbarra in movimento » è minore della sua « lunghezza di quiete ». Ciò si suole esprimere [alquanto impropriamente] dicendo che la sbarra in movimento « si contrae » nel rapporto $\sqrt{1-\beta^2}$ [contrazione di Lorentz]. Con un calcolo analogo si vede subito che, invece, per una sbarra avente direzione normale a quella del moto non vi deve essere differenza fra i risultati delle due misure.

Naturalmente il fenomeno è perfettamente simmetrico per i due osservatori, e cioè l'osservatore K' , misurando una sbarra rigidamente fissata al sistema K , troverebbe una lunghezza minore di quella che trova K .

Non occorre poi dire che la contrazione risulta assai piccola [come tutti gli effetti relativistici] per tutte le velocità ordinarie, per le quali $\beta \ll 1$ e quindi $\sqrt{1-\beta^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2$ è assai prossimo ad 1. Per es., prendendo per v la velocità orbitale della Terra [30 km/sec, cioè più di 50 volte quella di un proiettile di cannone] si ha $\beta = 10^{-4}$ e quindi $\sqrt{1-\beta^2} \approx 1 - 0,5 \cdot 10^{-8}$, cioè un accorciamento di mezzo milionesimo per cento. Per un osservatore fisso rispetto al Sole la sfera terrestre sarebbe schiacciata, nella direzione del movimento, di soli 6,3 cm.

§ 181. Dilatazione dei tempi.

Un'altra conseguenza della trasformazione di Lorentz è questa:

« l'intervallo di tempo tra due eventi non risulta in generale lo stesso per l'osservatore K e per l'osservatore K' ».

Infatti, supponiamo per es. che i due eventi avvengano entrambi nello stesso luogo per l'osservatore K' , e precisamente in O' , uno

all'istante zero e uno all'istante τ' : il primo avrà dunque, per K' , le coordinate

$$t'_1 = 0, \quad x'_1 = 0$$

e il secondo, pure per K' , avrà le coordinate

$$t'_2 = \tau', \quad x'_2 = 0.$$

Gli stessi eventi, rilevati da K , avvengono ai tempi [v. (IX, 14')]

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{\beta}{c} x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 0, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{\beta}{c} x'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

ossia la durata, $\tau = t_2 - t_1$, letta sugli orologi di K sarà

$$(IX, 17) \quad \tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Si vuol dire [anche qui piuttosto impropriamente] che « nei corpi in movimento le durate si allungano », al contrario di quanto avviene per le lunghezze. Per es., le vibrazioni luminose emesse da una sorgente in movimento devono avere frequenza minore di quelle della stessa sorgente ferma: tale fenomeno è però praticamente impossibile da rivelare spettroscopicamente perchè mascherato dall'effetto Doppler.

§ 182. La composizione delle velocità nella cinematica relativistica. Trascinamento della luce.

Proponiamoci ora di vedere qual'è la velocità, V , con cui si muove rispetto a K un punto, che sia in moto con velocità V' rispetto a K' , cioè quale legge va sostituita alle (IX, 2) della meccanica classica per la composizione delle velocità.

Per definizione si ha

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad V'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad \text{etc.},$$

dovremo quindi differenziare le (IX, 14'), ottenendo

$$(IX, 18) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy = dy', \\ dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{\beta}{c} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{array} \right.$$

e così si ricava

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{\beta}{c} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{\beta}{c} \frac{dx'}{dt'}},$$

ossia

$$(IX, 19) \quad V_x = \frac{V'_x + v}{1 + \frac{\beta V'_x}{c}}$$

Analogamente si trova

$$(IX, 20) \quad V_y = \frac{V'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{\beta V'_x}{c}}$$

$$(IX, 21) \quad V_z = \frac{V'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{\beta V'_x}{c}}$$

che, insieme alla (IX, 19), sostituiscono le (IX, 2) [a cui si riducono passando al limite per $c \rightarrow \infty$].

Se, per fissare le idee, si pensa ad un moto avente, per K' , la direzione ed il verso dell'asse x [e cioè $V'_y = V'_z = 0$, $V'_x > 0$] si ha, dalle (IX, 20), (IX, 21), $V_y = V_z = 0$ e, dalla (IX, 19),

$$V_x < V'_x + v,$$

cioè « la velocità risultante è minore della somma delle velocità componenti ».

Anzi si può dimostrare che: « qualunque valore abbiano le velocità componenti [minori di c] non si può mai ottenere come risultante una velocità maggiore di c ». Infatti, se è

$$V'_x < c, \quad v < c,$$

si ha

$$(c - V'_x)(c - v) > 0,$$

ossia

$$c^2 - c(V'_x + v) + V'_x v > 0.$$

Di qui, dividendo ambo i membri per c^2 e portando a secondo membro il secondo addendo, si deduce

$$1 + \frac{V'_x v}{c^2} > \frac{V'_x + v}{c},$$

da cui segue

$$c > \frac{V_x + v}{1 + \frac{\beta V_x}{c}}$$

cioè, per la (IX, 19),

$$c > V_x.$$

Non sarebbe difficile, considerando anche le (IX, 20) e (IX, 21), estendere la verifica al caso di velocità dirette in un senso qualunque.

È interessante esaminare il caso limite in cui una delle due velocità è la velocità della luce: si trova come risultante ancora la velocità c , come deve essere, per l'osservazione fatta alla fine del § 177.

Il teorema della composizione delle velocità ha una verifica sperimentale notevole in una esperienza dovuta al Fizeau (1851), che si era

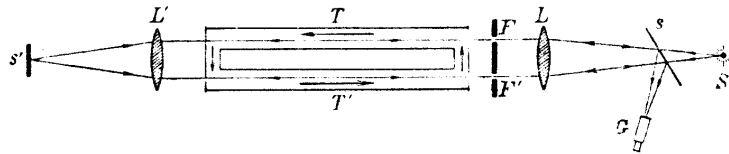


Fig. 159.

proposto di cercare con che velocità si propaga la luce in un mezzo materiale in movimento. Tale esperienza è poi stata ripetuta, con diverse varianti, da altri sperimentatori.

L'esperienza di Fizeau è la seguente [v. fig. 159]. S è una sorgente luminosa, s una lastra di vetro debolmente argentata, L ed L' due lenti, F ed F' due fenditure, T e T' tubi di vetro, limitati agli estremi da lastre piane, in cui circola acqua nel verso segnato, s' uno specchio. Un pennello luminoso uscente da S e passante per F percorre il tubo T , poi, riflesso da s' percorre T' ed, attraverso F' , riflettendosi su s raggiunge l'osservatore G ; un altro pennello luminoso di S percorre il cammino inverso F', T', s', T, F, s, G . I due pennelli attraversano dunque l'acqua dei tubi uno sempre nel senso del movimento, l'altro sempre nel senso opposto. Se l'acqua è ferma i due pennelli all'arrivo in G , sovrapponendosi, danno certe frange d'interferenza. Se l'acqua si mette in movimento tali frange *si spostano*, e questo è dovuto al fatto che il movimento dell'acqua aumenta la velocità di un raggio che si muova secondo la corrente e diminuisce quella di un raggio che vada contro corrente: diventa quindi diverso il tempo impiegato dai

due raggi a percorrere il loro cammino e quindi essi arrivano in O con una differenza di fase. Misurando questa [dallo spostamento delle frange] si ricava la velocità della luce nell'acqua in movimento. Si è trovato, sperimentalmente, che, se

$$V' = \frac{c}{n}$$

[n = indice di rifrazione] è la velocità della luce nell'acqua ferma, la velocità V nell'acqua in movimento con velocità v è data dalla legge

$$(IX, 22) \quad V = V' \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v$$

[valendo il segno + o - a seconda del senso in cui si muove l'acqua]. Fizeau enunciava questo risultato dicendo che:

quando la luce si propaga in un mezzo in movimento, alla velocità della luce si somma [o si sottrae] solo una frazione di quella del mezzo in movimento e, precisamente, la frazione $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, che dicesi «coefficiente

di trascinato». [Per l'acqua $n = \sim \frac{4}{3}$, $1 - \frac{1}{n^2} = \sim \frac{7}{16}$].

Ora, questo risultato è spiegato dalla teoria della relatività come una conseguenza immediata della legge relativistica della composizione delle velocità, purchè la velocità v del mezzo sia piccola rispetto a c [e tale era, naturalmente, in tutte le esperienze fatte: per es. nell'esperienza di Fizeau la velocità v dell'acqua era di 7 m/sec, quindi $\beta = 2,3 \cdot 10^{-8}$]. Infatti sviluppando in serie il denominatore della (IX, 19) e trascurando β^2 e le potenze superiori, si ha

$$V_x = \sim (V_x' + v) \left(1 - \frac{\beta V_x'}{c}\right) = \sim V_x' + v - \frac{\beta V_x'^2}{c}$$

e, posto $V_x' = c/n$, se ne deduce

$$(IX, 23) \quad V_x = V_x' + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v,$$

che è appunto la (IX, 22) [nel caso di v positiva].

§ 183. Invarianza delle equazioni della fisica rispetto alla trasformazione di Lorentz.

L'espressione matematica del principio di relatività einsteiniana è evidentemente che «tutte le equazioni della fisica devono essere invarianti rispetto alla trasformazione di Lorentz» [nel senso spiegato al § 175 per la trasformazione di Galileo]. Questo principio permette di

determinare le leggi di trasformazione degli enti fisici nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro [come abbiamo visto in particolare per le lunghezze, i tempi e le velocità]; inoltre esso serve di guida alla ricerca delle modificazioni da apportare alle leggi della fisica classica perchè divengano conformi al principio di relatività, e in taluni casi le modifiche suggerite da questo criterio sono state confermate dall'esperienza. Si tratta sempre, beninteso, di modifiche quantitativamente lievissime [almeno finchè non intervengono velocità assai elevate] e le leggi classiche conservano sempre valore, come casi limiti delle leggi relativistiche.

Ora, è un fatto assai notevole che le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, quali le abbiamo date nel Cap. VII, sono già, senza alcuna modifica, invarianti rispetto alla trasformazione di Lorentz ⁽¹⁾ [mentre non lo sono rispetto a quella di Galileo]: quindi l'elettromagnetismo di Maxwell soddisfa al principio di relatività einsteiniano. La verifica [che implica la legge di trasformazione dei campi elettrici e magnetici nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro] esce dai limiti della nostra trattazione.

§ 184. Variabilità della massa.

La legge fondamentale della dinamica classica è, come si è visto, invariante rispetto alla trasformazione di Galileo, ma non lo è rispetto a quella di Lorentz: la dinamica relativistica dovrà dunque essere fondata su una legge diversa [di cui quella classica rappresenterà una approssimazione valida per piccole velocità]. Per trovarla rapidamente, e senza entrare in considerazioni che ci porterebbero troppo lontano, ricorremo al metodo seguente. Ammetteremo ⁽²⁾ che valga anche nella meccanica relativistica il « principio della quantità di moto » [cioè che la risultante delle forze esterne agenti su un sistema sia eguale alla derivata della sua quantità di moto] ed inoltre ammetteremo che la quantità di moto di un punto materiale animato da velocità V sia un vettore diretto come V , cioè della forma mV , dove, però, m , anzichè essere necessariamente una costante, come in meccanica classica, può essere [e vedremo che lo è difatti] funzione, che ammettiamo monotona, del modulo V di V : cioè $m = m(V)$.

Ciò premesso, applichiamo il principio della quantità di moto all'urto di due sfere elastiche nelle condizioni seguenti. Le due sfere, A e B , siano eguali [quando sono tutte e due in quiete, o animate dalla stessa

⁽¹⁾ E, anzi, per questa via che si è pervenuti storicamente alla trasformazione di Lorentz.

⁽²⁾ Questi postulati potrebbero essere sostituiti da altri meno restrittivi, ma si dovrebbe in tal caso seguire un ragionamento più lungo.

velocità] e perfettamente lisce. Una di esse, A , viene lanciata dall'osservatore K parallelamente all'asse y [nel verso opposto a questo], con una certa velocità u , così che essa, per K , descrive con moto uniforme una retta r parallela all'asse y , e le componenti della sua velocità V_A sono [v. fig. 160]

$$(IX, 24) \quad V_{Ax} = 0, \quad V_{Ay} = -u.$$

La sfera B , invece, viene lanciata dall'osservatore K' lungo l'asse y' [e nel verso di questo] con velocità u rispetto al sistema K' : essa dunque ha, per K' , la velocità V'_B di componenti

$$(IX, 25) \quad V'_{Bx} = 0, \quad V'_{By} = u.$$

Ma per K questo moto si compone con quello del sistema K' , e quindi la sfera B ha, rispetto a K , una velocità, V_B , inclinata rispetto all'asse y come nella fig. 160 a) [le figure 160 sono fatte dal punto di vista di K] e le componenti di V_B sono, per le (IX, 25) e le (IX, 19), (IX, 20),

$$(IX, 26) \quad V_{Bx} = v, \quad V_{By} = u\sqrt{1-\beta^2},$$

e quindi sarà

$$(IX, 26') \quad \bar{V}_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2} = \sqrt{v^2 + u^2(1-\beta^2)}.$$

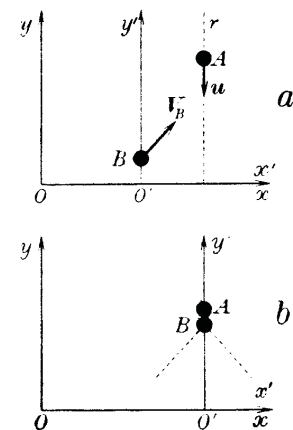


Fig. 160.

Gli istanti iniziali dei lanci siano regolati in modo che quando l'asse y' viene a coincidere con la retta r le due sfere si urtano nella posizione mostrata nella fig. 160 b). Essendo le sfere lisce, la forza che ciascuna esercita sull'altra è normale alla superficie di contatto cioè parallela all'asse y , quindi la componente x della quantità di moto di ciascuna sfera non varia nell'urto. Indicando con una soprallineatura le quantità dopo l'urto, ciò porta a scrivere

$$m(\bar{V}_A) \cdot \bar{V}_{Ax} = m(V_A) \cdot V_{Ax}, \quad m(\bar{V}_B) \cdot \bar{V}_{Bx} = m(V_B) \cdot V_{Bx},$$

cioè, per le (IX, 24), (IX, 26),

$$(IX, 27) \quad \bar{V}_{Ax} = 0,$$

$$(IX, 28) \quad m(\bar{V}_B) \cdot \bar{V}_{Bx} = m(V_B) \cdot v.$$

La (IX, 27) ci dice che, per l'osservatore K , la sfera A torna su se

stessa scorrendo di nuovo sulla retta r . Poichè lo stesso ragionamento potrebbe farsi dal punto di vista di K' [scambiando A con B], si conclude che $\bar{V}'_{Bx} = 0$ [cioè la B , dopo l'urto, ripercorre in senso inverso l'asse y'], da cui si ricava [come precedentemente per V_{Bx}] che $\bar{V}_{Bx} = v$.

La (IX, 28) ci dà, tenuto conto di questo,

$$m(\bar{V}_B) \cdot v = m(V_B) \cdot c$$

vale a dire

$$(IX, 29) \quad \bar{V}_B = V_B,$$

cioè $\bar{V}^2_{Bx} + \bar{V}^2_{By} = V^2_{Bx} + V^2_{By}$, ed, essendo [come si è visto] $V_{Bx} = \bar{V}_{Bx}$,

$$\bar{V}_{By} = \pm V_{By}.$$

Poichè per piccole velocità la meccanica relativistica deve tendere alla meccanica classica, secondo la quale la componente y della velocità di ciascuna sfera cambia di segno dopo l'urto, si dovrà adottare il segno $-$, e sarà

$$(IX, 30) \quad \bar{V}_{By} = -V_{By}.$$

Analogamente, scambiando K con K' ed A con B , si troverebbe che $\bar{V}'_{Ay} = -V'_{Ay}$ e quindi anche $\bar{V}_{Ay} = -V_{Ay}$, cioè

$$(IX, 31) \quad \bar{V}_{Ay} = u$$

e, per le (IX, 24) e (IX, 27),

$$(IX, 32) \quad \bar{V}_A = V_A = u.$$

Scriviamo ora che la componente y della quantità di moto totale, rispetto a K , deve essere costante [non essendovi forze esterne]. Avremo

$$m(\bar{V}_A) \cdot \bar{V}_{Ay} + m(\bar{V}_B) \cdot \bar{V}_{By} = m(V_A) \cdot V_{Ay} + m(V_B) \cdot V_{By},$$

e cioè

$$m(u) \cdot u - m(V_B) \cdot V_{By} = -m(u) \cdot u + m(V_B) \cdot V_{By};$$

quindi, usando la seconda delle (IX, 26), otterremo

$$m(u) = m(V_B) \cdot \sqrt{1 - \beta^2},$$

ovvero, per la (IX, 26'),

$$m(u) = m(\sqrt{v^2 + u^2(1 - \beta^2)}) \cdot \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Facendo ora tendere a zero u , e scrivendo m_0 invece di $m(0)$, si trova

$$(IX, 33) \quad m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right).$$

È questa la legge con cui varia la massa in funzione della velocità: la fig. 161 la rappresenta graficamente. Come si vede, per velocità piccole rispetto a c ($\beta \ll 1$) la m è quasi costante e si identifica praticamente con m_0 [la differenza non supera il milionesimo finchè v non

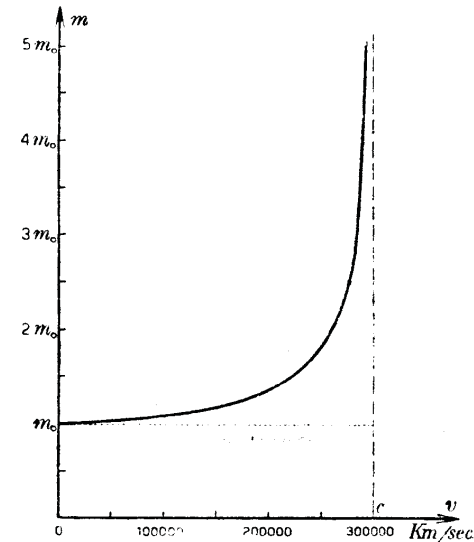


Fig. 161.

supera i 400 km/sec]. Quindi m_0 non è altro che la massa del corpo secondo la meccanica classica: essa chiamasi « massa di quiete ». Col crescere della velocità la massa aumenta e tende all' ∞ per $v \rightarrow c$: ne segue, come vedremo meglio al § 186, che è fisicamente impossibile comunicare ad un corpo la velocità della luce. Si noti, però, che gli elettroni dei « raggi catodici » e dei « raggi β » possono raggiungere velocità confrontabili con c ed anche assai prossime a c , quindi per essi m può differire molto da m_0 : per es., per i raggi β del Radio C [$v = 297\,000$ km/sec, $v/c = 0.990$] risulta $m = 7.09 m_0$. Ciò ha per-

messo di sottoporre a verifica sperimentale la legge della variabilità della massa, verifica eseguita con diversi metodi ed in un ampio intervallo di velocità, con risultati in perfetto accordo con la (IX, 33).

§ 185. Legge fondamentale della dinamica relativistica.

Passiamo ora a stabilire la legge fondamentale della dinamica del punto fondandoci sul postulato [contenuto in quello ammesso al § prec.] che valga, come in meccanica classica, la legge fondamentale: « la forza è eguale alla derivata della quantità di moto ». Scriveremo dunque

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}).$$

Si noti ora che, mentre in meccanica classica questa legge si può anche mettere nella forma, più comune, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ [dove $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$], in meccanica relativistica questo passaggio non si può fare perché m non è costante ma funzione di t per il tramite di v . Sviluppando la derivata avremo dunque

$$(IX, 34) \quad \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dr} \frac{dr}{dt}.$$

Per discuterla un po' da vicino consideriamo un istante generico t ed assumiamo l'asse x diretto come è diretta in quell'istante \mathbf{v} : avremo allora, proiettando la (IX, 34) sugli assi x, y, z ,

$$(IX, 35) \quad \begin{cases} F_x = m \frac{dv_x}{dt} + v \frac{dm}{dr} \frac{dr}{dt} \\ F_y = m \frac{dv_y}{dt} \\ F_z = m \frac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

ovvero, introducendo le componenti della accelerazione \mathbf{a} ,

$$(IX, 35') \quad \begin{cases} F_x = ma_x + v \frac{dm}{dr} \frac{dr}{dt} \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$$

Vediamo così che le due componenti « trasversali », F_y, F_z , della forza sono legate alle analoghe componenti dell'accelerazione da un'equazione della forma di quella della dinamica classica [ma con m funzione di v , data dalla (IX, 33)]. Quanto alla componente « longitudinale », F_x , osserviamo che, avendosi da

$$r^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\begin{cases} F_x = m_l a_x \\ F_y = m a_y \\ F_z = m a_z \end{cases} \quad \text{Sic } F_x = m_l a_x = F_x \cdot w$$

la relazione

$$v \frac{dr}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt},$$

ed essendo nell'istante considerato

$$v_x = v, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0,$$

la prima delle (IX, 35') si scrive

$$F_x = \left[m + v \frac{dm}{dr} \right] a_x;$$

ossia il rapporto F_x/a_x non è eguale ad m ma vale

$$m_1 = m + v \frac{dm}{dr} = m_0 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + v \frac{\beta}{(\sqrt{1-\beta^2})^3} \right],$$

ossia

(IX, 36)

$$m_1 = \frac{m_0}{(\sqrt{1-\beta^2})^3}.$$

La prima delle (IX, 35') si può dunque scrivere

(IX, 37)

$$F_x = m_1 a_x,$$

dove m_1 , data dalla (IX, 36), è diversa dalla m che figura nelle altre due relazioni analoghe. Ciò significa che la forza e l'accelerazione non hanno, in generale, la stessa direzione [a meno che la forza non sia perpendicolare o parallela alla direzione della velocità]. Ed il rapporto F/a dipende dalla direzione della forza: se \mathbf{F} è parallela alla direzione di \mathbf{v} quel rapporto vale m_1 [e dicesi « massa longitudinale »], se \mathbf{F} è perpendicolare a \mathbf{v} , esso vale m [che può chiamarsi « massa trasversale » e coincide colla massa « inerziale » (IX, 33) che entra nell'espressione della quantità di moto].

Osserviamo che nelle esperienze accennate sopra, relative alla misura della massa di elettroni in movimento per mezzo delle deviazioni in un campo elettrico o magnetico, operandosi con campi di forza « trasversali », la massa messa in evidenza doveva necessariamente essere la massa trasversale m , e difatti, come si è detto, l'esperienza ha confermato la (IX, 33).

§ 186. Teorema ed espressione della forza viva.

Stabiliamo ora il « teorema della forza viva » della meccanica relativistica ragionando in modo analogo a quello della meccanica classica.

Partendo dalla definizione di lavoro elementare, $\delta\mathcal{L}$, eseguito dalla

forza F in un tempo dt , abbiamo

$$\begin{aligned} \delta L &= \mathbf{F} \times \mathbf{v} dt = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \times \mathbf{v} dt = \\ &= \left(\frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \times \mathbf{v} dt = v^2 dm + \frac{m}{2} d(v^2). \end{aligned}$$

Osserviamo, ora, che dalla (IX, 33) si ha

$$(IX, 38) \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{m^2}$$

e di qui differenziando si ricava

$$d(v^2) = 2c^2 \frac{m_0^2}{m^3} dm :$$

avremo perciò

$$\delta L = v^2 dm + c^2 \frac{m_0^2}{m^2} dm = \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{m_0^2}{m^2} \right) c^2 dm .$$

Ma l'espressione in parentesi, per la (IX, 38), vale 1, quindi

$$\delta L = c^2 dm = d(mc^2)$$

e ne concludiamo che il lavoro elementare è il differenziale esatto della quantità mc^2 . Perciò il lavoro L relativo ad un intervallo di tempo finito (t_1, t_2) sarà, integrando fra t_1 e t_2 ,

$$(IX, 39) \quad L = (mc^2)_{t_2} - (mc^2)_{t_1} .$$

Come espressione della forza viva, \mathcal{C} , dovremo quindi assumere la

$$mc^2 + C$$

dove C è una costante, che è naturale scegliere in modo che per $v = 0$ sia $\mathcal{C} = 0$. Sarà perciò $C = -m_0c^2$ e, di conseguenza, la forza viva sarà data da

$$(IX, 40) \quad \mathcal{C} = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) m_0c^2 .$$

È facile verificare che per piccole velocità la (IX, 40) si riduce alla nota espressione della meccanica classica: infatti, sviluppando in serie e trascurando nello sviluppo le potenze di β superiori alla seconda, si ottiene

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

e quindi, dalla (IX, 40),

$$\mathcal{C} \approx \frac{1}{2} \beta^2 m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 .$$

Si rileva dalla (IX, 40) che la forza viva va crescendo e tende ad ∞ per v tendente a c , e questo fatto ci spiega per altra via perchè sia non solo praticamente ma anche teoricamente impossibile portare un

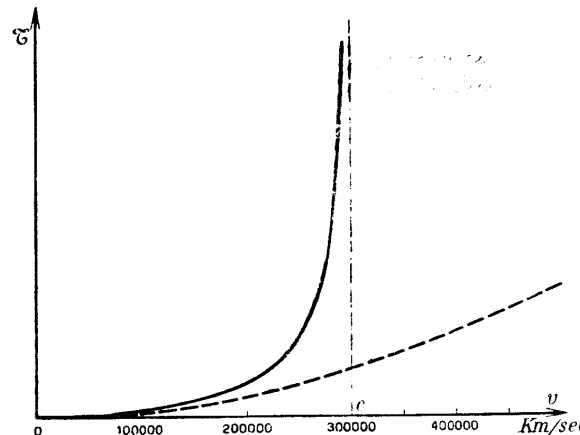


Fig. 162.

corpo alla velocità c : occorrerebbe per questo compiere un lavoro infinito.

La fig. 162 rappresenta graficamente la funzione $\mathcal{C}(v)$ secondo la meccanica relativistica [linea piena] e secondo quella classica [linea tratteggiata].

§ 187. Massa dell'energia.

L'espressione (IX, 40) dell'energia cinetica \mathcal{C} porta ad una constatazione molto interessante: l'aumento di massa dovuto alla velocità v è proporzionale all'energia cinetica \mathcal{C} posseduta dal corpo in moto e, precisamente, si ha

$$(IX, 40') \quad m - m_0 = \frac{\mathcal{C}}{c^2} .$$

Questo suggerisce di attribuire una massa all'energia cinetica, massa

misurata da \mathcal{E}/c^2 . Ma, più in generale, possiamo vedere che quando ad un corpo viene comunicata una energia W di qualsiasi natura la sua massa aumenta di

(IX. 41)

$$m = \frac{W}{c^2}$$

così che: « a qualsiasi forma di energia si deve attribuire una massa data dalla (IX. 41) » (1). Infatti, cominciamo col supporre che l'energia W sia energia termica. La massa m_0 di quiete di un corpo è data dalla somma delle masse delle singole molecole, ma poichè le molecole sono in moto incessante per effetto del calore, come massa di ciascuna va presa non la massa di quiete ma la massa corrispondente alla velocità termica da essa posseduta (2). Ora, per quanto è noto dalla Termodinamica, un aumento di energia termica si traduce in un aumento di forza viva e quindi in un aumento di massa delle singole molecole: e se l'energia termica comunicata è W , la forza viva complessiva delle molecole aumenta di W e quindi la massa complessiva aumenta di W/c^2 . La massa [di quiete] del corpo riscaldato diviene così

$$m_0^* = m_0 + \frac{W}{c^2}$$

Supponiamo ora di considerare un corpo, od un sistema di corpi, di massa m_0 , e di comunicargli una energia, W , di qualsiasi forma: fatto ciò isoliamolo dall'esterno in modo che siano impossibili scambi di energia nè, tanto meno, di materia. Ora, è noto che in qualunque sistema [anche se isolato] ogni forma di energia si può trasformare in calore. Trasformando W in calore si ottiene lo stesso stato finale che si sarebbe ottenuto comunicando al sistema l'energia W sotto forma di calore: quindi alla fine la massa del sistema dovrà essere

$$m_0 + \frac{W}{c^2}$$

e così si mette in evidenza, rispetto alla massa iniziale m_0 , un aumento W/c^2 che, non potendo essere avvenuto quando il sistema era isolato, deve necessariamente essere avvenuto nel comunicare al sistema l'energia W .

(1) Questo risultato è in perfetto accordo con quanto si è visto al § 143 per l'energia elettromagnetica. Ciò è naturale in quanto, come abbiamo notato a § 183, l'elettromagnetismo di Maxwell, e quindi i risultati a cui con esso si perviene, soddisfano al principio di relatività einsteiniano.

(2) Ciò si potrebbe dimostrare rigorosamente. (v. p. es. H. A. LORENTZ: *Lectures on Theoretical Physics*, vol. III, pag. 236 (London, 1931)), ma per brevità lo ammettiamo come evidente.

È questa una delle conseguenze più importanti della teoria della relatività. Da essa segue che in un sistema isolato l'energia W e la massa materiale m non si conservano separatamente costanti come ammette la fisica classica, ma ciò che si conserva costante è la combinazione $m_0 + W/c^2$, mentre la massa materiale può [almeno in parte] trasformarsi in energia e viceversa.

Per renderci conto degli ordini di grandezza osserviamo che una piccola calorìa equivale a $4,186 \cdot 10^7$ erg: la sua massa si ottiene dunque dalla (IX. 41) ponendovi $W = 4,186 \cdot 10^7$, $c = 3 \cdot 10^{10}$ e risulta di $0,46 \cdot 10^{-13}$ grammi. Consideriamo a titolo d'esempio la combustione del carbone [per le altre reazioni chimiche gli ordini di grandezza sono gli stessi]: il calore svolto è di circa 7000 piccole calorie per grammo di carbone e quindi la massa dell'energia calorifica svolta risulta di circa $3,2 \cdot 10^{-10}$ grammi per grammo di combustibile. Non si può quindi sperare di verificare la (IX. 41) pesando il carbone e l'ossigeno prima della combustione e confrontando questo peso con quello dei prodotti della combustione, poichè si dovrebbe rivelare una diminuzione di peso dell'ordine di 1 su 5 miliardi. Invece la verifica è possibile nel campo dei fenomeni radioattivi poichè, per es., l'energia cinetica delle particelle α e β emesse da un grammo di uranio nel trasformarsi in piombo equivale a $4,3 \cdot 10^9$ calorie e quindi possiede una massa che è circa 1/5000 di quella dell'uranio emittente: il rapporto è dunque un milione di volte più favorevole che nel caso della combustione, e difatti si è potuto verificare, almeno qualitativamente, che il peso complessivo dei prodotti di disintegrazione dell'uranio è lievemente inferiore al peso dell'uranio stesso. Vi è dunque trasformazione di una parte della massa in energia. Ma assai più favorevole è il rapporto nel caso di elementi radioattivi leggeri [« radioattività artificiale »] come il litio, per cui il detto rapporto è dell'ordine di 1/500, e, quindi, ha consentito una verifica anche quantitativa della (IX. 41).

Si può inoltre osservare che l'irraggiamento del Sole e delle altre stelle deve produrre [qualunque sia la sua origine] una graduale diminuzione di massa di questi corpi, ma tale diminuzione è lentissima. Difatti, nel caso del Sole, per es., l'energia irradiata in un giorno corrisponde ad una diminuzione di massa di circa $37 \cdot 10^{10}$ tonnellate, che è soltanto $1/(5 \cdot 10^{15})$ della attuale massa del Sole. Occorreranno dunque circa 13 milioni di anni perchè la massa del Sole diminuisca di un milionesimo.

APPENDICE I.

Sull'energia mutua tra correnti elettriche e magneti (v. § 128).

Consideriamo un circuito percorso da corrente, in presenza di uno o più magneti rigidi (v. § 73), e calcoliamo l'energia potenziale magnetica U di questo sistema. Per la (III, 108) essa è data da

$$(A. 1) \quad U = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} \mathfrak{B} \times \mathfrak{H} \, dS,$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio, e $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$, con μ eventualmente funzione del posto ma indipendente da \mathfrak{H} , poichè escludiamo che vi siano sostanze ferromagnetiche.

Il campo magnetico \mathfrak{H} , in un punto qualsiasi, è la risultante del campo \mathfrak{H}_m prodotto dai magneti e del campo \mathfrak{H}_c prodotto dalla corrente; similmente si ha $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m + \mathfrak{B}_c$, con

$$(A. 2) \quad \mathfrak{B}_m = \mu \mathfrak{H}_m, \quad \mathfrak{B}_c = \mu \mathfrak{H}_c;$$

quindi la (A, 1) si può scrivere

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} (\mathfrak{B}_m + \mathfrak{B}_c) \times (\mathfrak{H}_m + \mathfrak{H}_c) \, dS.$$

Eseguendo il prodotto, e notando che, per le (A, 2), $\mathfrak{B}_c \times \mathfrak{H}_m = \mathfrak{B}_m \times \mathfrak{H}_c$, si vede che la U si spezza nel modo seguente

$$(A. 3) \quad U = U_m + U_c + U_{mc}$$

dove

$$(A. 4) \quad U_m = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} \mathfrak{B}_m \times \mathfrak{H}_m \, dS$$

$$(A. 5) \quad U_c = \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty} \mathfrak{B}_c \times \mathfrak{H}_c \, dS$$

$$(A. 6) \quad U_{mc} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \mathfrak{B}_c \times \mathfrak{H}_m \, dS.$$

Se la corrente non vi fosse, sarebbe $U_c = U_{mc} = 0$, $U = U_m$: dunque U_m rappresenta l'energia potenziale del sistema dei soli magneti: simil-

mente si vede che \mathcal{U}_c rappresenta l'energia potenziale del campo magnetico della corrente (la quale si chiama anche « *energia intrinseca della corrente* », e si rende manifesta nei fenomeni di « *autoinduzione* »). Resta da considerare il termine \mathcal{U}_{mc} , che si può chiamare « *energia potenziale mutua tra la corrente e i magneti* »: dimostreremo ora che esso è nullo.

Cominciamo con l'osservare che la (III, 105) si può applicare al campo magnetico dovuto alla sola corrente, e ci dà $\operatorname{div} \mathbf{H}_c = 0$: ora, per una osservazione fatta alla fine del § 13, ciò significa che esiste un campo vettoriale \mathbf{u} tale che $\mathbf{H}_c = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ (il vettore \mathbf{u} , opportunamente specificato, si chiama *potenziale vettore*, v. § 145). Aggiungiamo che esso può essere scelto in modo che all'infinito tenda a zero (come si può vedere dalla (VI, 107)). Potremo dunque scrivere la (A, 6) nella forma

$$(A, 7) \quad \mathcal{U}_{mc} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_x} \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{H}_m \, dS.$$

Per trasformare l'integrando, notiamo che dalla (I, 35) si ha

$$\operatorname{div} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{H}_m) = \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{H}_m - \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}_m;$$

ma \mathbf{H}_m , essendo un campo magnetostatico, deriva da un potenziale e quindi $\operatorname{rot} \mathbf{H}_m = 0$: resta quindi

$$\operatorname{div} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{H}_m) = \operatorname{rot} \mathbf{u} \wedge \mathbf{H}_m.$$

La (A, 7) si può dunque scrivere

$$\mathcal{U}_{mc} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_x} \operatorname{div} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{H}_m) \, dS.$$

Consideriamo dapprima l'integrale esteso ad uno spazio finito S limitato da una superficie sferica σ , e trasformiamolo col teorema della divergenza (§ 6): avremo

$$\int_S \operatorname{div} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{H}_m) \, dS = \int_{\sigma} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{H}_m)_n \, d\sigma.$$

Facciamo poi tendere all'infinito il raggio R della sfera. Poiché \mathbf{H}_m soddisfa le condizioni normali all'infinito (§ 19), il suo modulo tenderà a zero almeno come $1/R^2$, e poiché anche \mathbf{u} , come si è detto, tende a zero, l'integrando del secondo membro è infinitesimo di ordine maggiore di quello di $1/R^2$, mentre il campo di integrazione è infinito dell'ordine di R^2 . Ne segue che l'integrale tende a zero, ossia

$$\int_{S_x} \operatorname{div} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{H}_m) \, dS = 0.$$

e quindi

$$(A, 8) \quad \mathcal{U}_{mc} = 0,$$

come avevamo annunciato.

Possiamo dunque concludere che non vi è energia potenziale mutua tra la corrente elettrica e i magneti. Ne segue che, se si cambia la posizione del circuito rispetto ai magneti, l'energia \mathcal{U} del sistema non varia, poichè \mathcal{U}_m dipende solo dalla posizione reciproca dei magneti, e \mathcal{U}_c solo dalla forma e dalla intensità della corrente. È questo il risultato di cui si è fatto uso nel § 128.

L'assenza di energia potenziale mutua tra corrente e magneti può apparire paradossale per il fatto che, sostituendo la corrente con la lamina magnetica equivalente, si avrebbe invece una energia potenziale mutua tra questa e i magneti (come è chiaro, poichè la lamina magnetica è essa stessa un magnete). La spiegazione è la seguente. Se ad una lamina magnetica si avvicina un magnete, portandolo da distanza infinita, si deve compiere su questo magnete un certo lavoro (positivo o negativo: per fissare le idee supponiamolo positivo), il quale rimane accumulato nel sistema come energia potenziale. Se invece il magnete si avvicina ad un circuito percorso da corrente, equivalente alla lamina agli effetti del campo prodotto, si deve compiere evidentemente sul magnete lo stesso lavoro, ma questo non si accumula sotto forma di energia potenziale, bensì si trasforma in calore nel circuito. Difatti, l'avvicinamento del magnete produce nel circuito una forza elettromotrice indotta tendente ad aumentare l'intensità di corrente, così che se si vuole che questa si mantenga costante (come costante si manterrebbe, nel caso della lamina, la potenza di questa) si deve diminuire la forza elettromotrice del generatore della corrente, e quindi fargli erogare una potenza minore, mentre la potenza che si dissipa in calore per effetto Joule rimane la stessa: la differenza è appunto la potenza fornita dalle forze meccaniche che muovono il magnete. E se si fa compiere a questo il tragitto inverso, è vero che si ricava da questo movimento tanto lavoro quanto se ne è speso la prima volta, ma questo lavoro non è ricavato dall'energia del campo magnetico, bensì fornito dal generatore di corrente, il quale, per mantenere invariata l'intensità, deve ora erogare una potenza maggiore.

La radice del paradosso sta dunque in questo, che l'analogia tra lamina magnetica e circuito elettrico non si estende al comportamento in un campo magnetico variabile, poichè manca nella lamina magnetica un fenomeno corrispondente alla forza elettromotrice indotta che si produce nel circuito.

APPENDICE II.

Sul calcolo dell'esperienza di Michelson (v. § 176).

Per calcolare τ_1 , supponiamo che il vettore V del modulo V (fig. A1) rappresenti la velocità, relativa all'apparecchio, della luce che va da O ad A (fig. 157), mentre il vettore c , di modulo c , rappresenti la velocità assoluta della stessa luce: per la legge di composizione delle velocità sarà $c = V + v$ (cioè i tre vettori formeranno un triangolo come in figura). Ora, detto φ l'angolo tra c e V , sarà, come si vede facilmente,

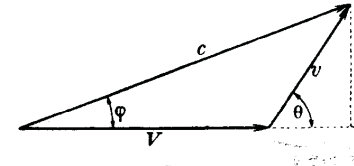


Fig. A1.

$$(A, 9) \quad V = c \cos \varphi - v \cos \vartheta,$$

e quindi il tempo impiegato dalla luce a percorrere il tratto OA , di lunghezza l , sarà

$$\frac{l}{V} = \frac{l}{c \cos \varphi - v \cos \vartheta}.$$

Similmente si trova che la velocità nel percorso inverso è $c \cos \varphi + v \cos \vartheta$, e quindi il tempo per il percorso AO è

$$\frac{l}{c \cos \varphi + v \cos \vartheta}.$$

Sommando, si trova per il tempo totale il valore

$$\tau_1 = \frac{2l}{c} \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \varphi - \beta^2 \cos \vartheta}.$$

Ora, dal triangolo della fig. A1, applicando il teorema dei seni si ha

$$\sin \varphi = \beta \sin \vartheta,$$

da cui

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta}.$$

BIBLIOGRAFIA

Indichiamo alcune tra le molte opere che possono servire a completare ed approfondire gli argomenti svolti in questo libro.

a) TRATTATI DI ANALISI O DI FISICA MATEMATICA.

1. COURANT R. e HILBERT D., *Methoden der Mathematischen Physik* (Berlin, 1937, 2 voll.).
2. GOURSAT E., *Cours d'analyse mathématique* (Paris, 1910-15, 3 voll.).
3. HADAMARD J., *Cours d'analyse* (Paris, 1925).
4. MADELUNG E., *Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers* (Berlin, 1936).
5. PICARD E., *Traité d'analyse* (Paris, 1901, 3 voll.).
6. RIEMANN-WEBER, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, herausgegeben von P. FRANK und R. v. MISES (Braunschweig, 1930-35, 2 voll.).
7. TRICOMI F., *Lezioni di analisi matematica* (Padova, 1939, 2 voll.).
8. WHITTAKER e WATSON, *A Course of Modern Analysis* (Cambridge, 1935).

b) OPERE RIGUARDANTI ARGOMENTI SPECIALI.

CAP. I.

9. BURGATTI P., *Elementi di calcolo vettoriale e omografico* (Milano, 1937).
- 9bis. CISOTTI U., *Lezioni di meccanica razionale* (Milano, 1941).
10. LEVI-CIVITA T. e AMALDI U., *Compendio di meccanica razionale* (Bologna 1938, 2 voll.).

CAP. II.

11. BIEBERBACH L., *Einführung in die konforme Abbildung* (Berlin e Leipzig, 1915).
12. CISOTTI U., *Idromeccanica piana* (Milano, 1922).

CAP. III.

13. BETTI E., *Teoria delle forze newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo* (Pisa, 1879).
14. JEANS J. H., *Electricity and Magnetism* (Cambridge, 1908).

15. MAGGI G. A., *Teoria fenomenologica del campo elettromagnetico* (Milano, 1931).
 16. MAXWELL J. C., *Traité d'électricité et de magnétisme* (traduz.; Paris, 1885-89, 2 voll.).
 17. POINCARÉ H., *Théorie du potentiel newtonien* (Paris, 1899).

CAP. IV.

18. GREY o MATHEWS, *Bessel Functions and their Applications* (London, 1895).
 19. KRALL G., *Meccanica tecnica delle vibrazioni* (Bologna, 1940, 2 voll.).
 19bis. WATSON G. N., *Theory of Bessel Functions* (Cambridge, 1922).
 20. WEYRICH R., *Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen* (Leipzig, 1937).

CAP. V.

21. COLONNETTI G., *La statica delle costruzioni*, vol. I (Torino, 1928).
 22. KRALL G., (vedi n. 19).
 23. MARCOLONGO R., *Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici* (Milano, 1904).

CAP. VI.

24. BATEMAN H., *The Mathematical Analysis of Electrical and Optical Wave Motion* (Cambridge, 1915).
 25. FRENKEL J., *Lehrbuch der Elektrodynamik* (Berlin, 1926-28, 2 voll.).
 26. JEANS J. H., (v. n. 14).
 27. MAGGI G. A., (v. n. 15).
 28. MAXWELL J. C., (v. n. 16).
 29. BORN M., *Optik* (Berlin, 1933).
 30. PLANCK M., *Electromagnétisme* (trad. E. Labin; Paris, 1939).
 31. POINCARÉ H., *Electricité et optique* (Paris, 1890-92, 2 voll.).

CAP. VII.

32. FOURIER J. B. J., *Théorie analytique de la chaleur* (in « Oeuvres », t. I. Paris, 1888).
 33. POINCARÉ H., *Théorie analytique de la propagation de la chaleur* (Paris, 1895).

CAP. VIII.

34. BATEMAN H., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* (Cambridge, 1932).
 35. FORSYTH A. R., *Trattato sulle equazioni differenziali* (trad. A. Arbibone; Livorno, 1901).
 36. HADAMARD J., *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* (Paris, 1932).
 37. HADAMARD J., *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* (Paris, 1903).

38. VOLTERRA V., *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles* (Upsal, 1906).

CAP. IX.

39. BECKER R., *Théorie des électrons* (trad. E. Labin; Paris, 1938).
 40. BORN M., *La théorie de la relativité d'Einstein et ses bases physiques* (traduz.; Paris, 1923).
 41. EDDINGTON A. S., *Espace, temps et gravitation* (trad. I. Rossignol; Paris, 1921).
 42. v. LAUE M., *Die Relativitätstheorie* (Braunschweig, 1921, 2 voll.).
 43. LEVI-CIVITA T., *Fondamenti di meccanica relativistica* (Bologna, 1928).
 44. MARCOLONGO R., *Relatività* (Messina, 1921).
 45. REICHENBACH H., *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre* (Braunschweig, 1924).

INDICE ANALITICO

(I numeri si riferiscono alle pagine)

A

Aberrazione astronomica. 360.
Altezza di un suono. 169.
Ampiezza di vibrazione. 103.
Analitiche (Funzioni). 43.
Armonica (Funzione). 35, 42.
Armonici superiori (Suoni). 169.
Assi principali di un tensore. 30.
Associate (Funzioni armoniche). 44.
Assoluto (Riferimento). 358.
Assorbimento delle onde elettromagnetiche. 268.
Autofunzioni. 178, 180, 181.
Autovalori. 171, 178, 179.

B

Balayage. 100.
BESSEL (Equazione di). 183.
— (Funzioni di). 183.
BIOT e SAVART (Legge di). 246.

C

Calamita. 146.
Campo elettrico. 74, 84, 126.
— magnetico. 144.
— scalare. 4.
— vettoriale. 4.
Canonica (Forma — delle equazioni della fisica matematica). 331, 345.
Capacità (Coefficienti di). 130.
— di un conduttore. 106, 127, 131.

Capacità di un condensatore. 132, 134.
— induttiva specifica. 127.
Caratteristica (Curva). 329.
— (Superficie). 346.
Caratteristiche (Equazione delle). 329, 345.
CAUCHY (Formule di). 198.
— (Problema di). 326, 335, 343, 345.
Cavatappi (Regola del). 22.
CHLADNI (Figure di). 178.
Circuitazione. 21.
— (Formula della). 240.
Cilindriche (Funzioni). 163.
Classica (Fisica). 354.
Componenti di un vettore. 18.
Composizione delle velocità. 356, 371.
Compressibilità. 207.
Condensatore. 132, 134.
Condensazione (Onde di). 221, 228.
Conducibilità termica interna. 301, 314.
— — superficiale. 304.
Conduttività. 102.
Conduttore. 101.
Conduttori (Sistemi di). 127.
Condizione del calore (Equazione della). 304.
Conforme (Rappresentazione). 51, 53, 57, 69.
Coniugate (Funzioni armoniche). 44.
Contemporaneità. 353, 366.
Continuità (Equazione di). 11, 101.
Continuo (Mezzo). 1.
Convezione (Corrente di). 256.
Coordinate (Linee). 16.

Coordinate curvilinee, 15.
 Corona (Effetto), 108.
 Corrente (Funzione di), 46.
 — (Linee di), 2, 45.
 — elettrica, 101.
 Costanza della velocità della luce (Principio della), 358.
 COULOMB (Legge di), 73, 126.
 — (Teorema di), 105, 121.

D

D'ALEMBERT (Equazione di), 160.
 — (Integrale di), 161.
 Dalembertiano, 229.
 Deformazione elastica, 189.
 — — (Componenti della), 191.
 Deformazioni (Tensore delle), 192, 194.
 Degenerazione, 181.
 Densità di carica elettrica, 77, 90.
 — di corrente elettrica, 101.
 — corrente termica, 301, 302.
 — di energia elettrica, 129.
 — di energia magnetica, 147.
 Depolarizzante (Campo), 120.
 Diamagnetica (Sostanza), 145.
 Dielettrica (Costante), 120.
 Dielettrici, 117.
 Diffusione, 301, 304.
 Dilatazione cubica, 194.
 — dei tempi, 370.
 — lineare (Coefficiente di), 192.
 Dipolo, 96, 145.
 Direzionale (Derivata), 7.
 DIRICHLET (Problema di), 38, 39, 58, 61.
 Disco conduttore, 95.
 Dispersione, 263.
 Distorsione (Onde di), 225, 228.
 Divergenza, 11, 12.
 — (Espressione generale della), 19.
 — (Teorema della), 11.
 Doppio strato, 98.

E

Effluvio, 108.
 Elasticità (Modulo di), 204.

Elettrete, 146.
 Elettronica (Teoria), 272.
 Ellittica (Equazione differenziale), 330, 332, 347.
 Energia elettrostatica, 135.
 — magnetostatica, 147.
 Equilibrio elastico (Equazioni dell'), 199, 201, 211, 212.
 Equivalenza (Principio di), 237, 247.
 Esponenziali complessi (Metodo degli), 265.
 Etere, 322.
 Euleriano (Punto di vista), 2.
 Evento, 351.

F

Fase (Costante di), 103.
 FERMAT (Principio di), 297.
 Ferromagnetica (Sostanza), 145.
 Flessione, 215.
 Flusso, 8, 45.
 — (Linee di), 9.
 Forza (Linee, tubi di), 75.
 — elettromotrice, 103.
 — — indotta, 251.
 — impressa, 103.
 — viva, 380.
 FOURIER (Integrale di), 155.
 — (Serie di), 149, 154.
 Frequenza, 150.
 — fondamentale, 169, 180, 186.
 Fronte d'onda, 340.

G

GALILEO (Trasformazione di), 356.
 GAUSS (Lemma di), 9.
 — (Teorema di), 77, 78, 120.
 Gradiente, 6.
 — (Componenti del), 18.
 GREEN (Formula di), 63.
 — (Funzione di), 65, 66, 67, 69.
 — (Lemma di), 15.
 Gruppo d'onde, 164.

H

HERTZ (Oscillatore di), 287.
 HOOKE (Legge di), 203.
 HUYGENS (Principio di), 292.
 HUYGENS-FRESNEL (Principio di), 293.

I

Iconale (Equazione dell'), 295.
 Idrostatica (Equazioni fondamentali dell'), 203.
 Indotte (Cariche), 108.
 Induzione (Coefficienti di), 130.
 — elettrica, 119, 125.
 — elettromagnetica, 250.
 — magnetica, 145.
 Influenza (od induzione elettrostatica), 108, 111, 112.
 INGENOUZ (Esperienza di), 316.
 Intensità di corrente, 102.
 — di radiazione, 264, 272.
 Invariante degli sforzi, 202.
 — di deformazione, 194.
 Invarianti di un tensore, 29.
 Invarianza, 5.
 Inversione, 54, 62.
 Inverso (Metodo), 213.
 Iperbolica (Equazione differenziale), 330, 332, 339, 348.
 Irraggiamento di una carica in moto, 291.
 Irrotazionale (Moto), 32.
 Isolanti, 102, 104.
 Isoterma (Superficie), 301.
 Isotropi (Corpi), 118.
 Isotropo (Sistema otticamente), 357, 358.
 Isteresi magnetica, 146.

J

JOULE (Effetto), 104.

K

KIRCHHOFF (Formula di), 285.

L

LAGRANGE (Equazioni di), 141.
 Lagrangiano (Punto di vista), 2.
 LAMÉ (Costanti di), 207.
 Lamina magnetica, 98.
 LAPLACE (Equazione di), 35, 57, 331, 333.
 — (Espressione generale dell'operatore di), 20.
 — (Prima legge di), 243, 247.
 — (Operatore di), 14.
 — (Seconda legge di), 254.
 Lastra dielettrica polarizzata, 124.
 Locale (Derivata), 3.
 Longitudinali (Onde), 222, 223, 229.
 LORENTZ (Contrazione di), 369.
 — (Forza di), 256.
 — (Trasformazione di), 365, 374.
 Luce (Teorie della), 322.
 Lunghezza d'onda, 103.

M

Magnetizzazione, 144.
 Massa (Variabilità della), 377.
 — dell'energia, 280, 381.
 — di quiete, 377.
 — inerziale, 377.
 — longitudinale, 379.
 — trasversale, 379.
 MAXWELL (Prima equazione di), 223, 248.
 — (Seconda equazione di), 252.
 Media (Teorema della), 35.
 MICHELSON (Esperienza di), 358.
 Momento di un dipolo, 97.

N

NEUMANN (Legge di), 251.
 — (Problema di), 38, 39, 59, 61.
 NEWTON (Legge di), 74.
 Nodale (Linea), 178.
 Nodo, 165.
 Normali (Condizioni all'infinito), 39.
 — (Corpi magnetici), 147.
 — (Dielettrici), 118.

- O
- OHM (Legge di), 102.
 Omografia vettoriale, 27.
 Onde (Equazione delle), 229.
 Operatore, 14.
 Oraria (Linea), 340, 342.
 Orologio, 352.
 Oscillatore, 287.
 Oscillazioni di temperatura nel suolo, 307.
 — elastiche (Equazioni delle), 219.
 Ottica geometrica, 293.
- P
- Parabolica (Equazione differenziale), 330, 333, 348.
 Paramagnetica (Sostanza), 145.
 PASCAL (Principio di), 202.
 Perfetti (Fluidi), 202, 209.
 Permeabilità magnetica, 145.
 Piani (Moti liquidi), 46.
 Piano conduttore, 95.
 Pizzicata (Corda), 172.
 POISSON (Equazione di), 85, 86.
 — (Formula di — per il problema di Dirichlet), 59.
 — (Formula di — per l'equazione delle onde), 232.
 — (Modulo di), 205, 208.
 Polari (Sostanze), 116.
 Polarizzabilità, 116.
 Polarizzate (Onde), 227, 261.
 Polarizzazione (Cariche di), 119.
 — (Densità di), 118, 119.
 — (Piano di), 261.
 — dei dielettrici, 115, 118.
 — magnetica, 144.
 Poli magnetici, 146, 147.
 Ponderomotrici, (Forze), 140, 272.
 Potenza di un doppio strato, 99.
 Potenziale degli spostamenti, 221.
 — delle velocità, 32.
 — elettrico, 81, 82, 92, 96.
 — magnetico, 144.
 — scalare, 281.
- Potenziale vettore, 281.
 Potenziali ritardati, 287.
 POYNTING (Vettore di), 272.
 Pozzo, 50.
 Pressione, 195, 203, 209.
 — della radiazione, 277, 280.
 Progressive (Onde), 161.
 Propagazione del calore in un filo isolato, 308, 310.
 — del calore in un filo non isolato, 314.
 — del calore in un mezzo illimitato, 317.
 Proporzionalità (Limite di), 204.
 Pulsazione, 150.
 Punto-istante, 351.
- Q
- Quadrica caratteristica di un tensore, 31.
 Quantità di moto elettromagnetica, 276.
- R
- Radiazioni elettromagnetiche, 262.
 Raggio, 229.
 — luminoso, 295, 296.
 RAYLEIG (Onde di), 229.
 Reciprocità (Teorema di), 129.
 Regressive (Onde), 161.
 Relativistica (Fisica), 355.
 Relatività galileiana (Principio di), 361.
 — generale, 361.
 — ristretta (Principio di), 361.
 Resistenza elettrica, 102.
 Resistività, 102.
 Rifrazione (Indice di), 263.
 — delle linee di forza, 123.
 Rigidi (Magnet), 147.
 Rigidità (Modulo di), 208.
 Rilassamento (Tempo di), 104.
 Rotore, 21.
 — (Componenti del), 22.
- S
- SAINT-VENANT (Problema di), 218.
 Schermo elettrostatico, 109.
 Scorrimento (Coefficiente di), 193.

- Semi-inverso (Metodo), 213.
 Separazione delle variabili (Metodo della), 170.
 Sfera cava conduttrice, 80, 89.
 — conduttrice, 76, 87.
 — dielettrica polarizzata, 124.
 Sforzi (Tensore degli), 201.
 — elettromagnetici, 275.
 Sforzo di taglio, 196.
 — specifico, 195.
 Sinusoidali (Onde), 163.
 Solenoidale (Campo), 13.
 Solido (Angolo), 75.
 Sorgente, 50.
 Sostanziale (Derivata), 3.
 Spira, 237, 238.
 — circolare, 246.
 Spostamento, 120.
 — (Correnti di), 150, 253.
 — elastico, 190.
 Stato naturale, 203.
 Stazionari (Moti liquidi), 4.
 — (— — piani), 45.
 Stazionarie (Onde sinusoidali), 164, 167.
 — (Temperature), 304, 315.
 STOKES (Funzione di), 46.
 — (Teorema di), 21.
 Strato semplice, 92.
 — sferico conduttore, 90.
 Suono (Velocità del), 233.
- Superficie d'onda, 229.
 Suscettività elettrica, 118.
 — magnetica, 145.
- T
- Tensione, 159, 175, 195.
 Tensore, 27.
 — simmetrico, 29.
 Torsione, 213.
 Trascinamento della luce, 272.
 Trasversali (Onde), 226, 227, 229.
 Tubo di flusso, 13.
- U
- Unidimensionale (Propagazione del calore), 305, 306.
 Unità (Sistemi di), 73, 74.
- V
- Variabile complessa (Funzioni di), 43.
 Ventre, 165.
 Vibrazione (Piano di), 227, 260.
 Vortice, 50.
- Y
- YOUNG (Modulo di), 204.