Roberto Conti
1942

SALVATORE PINCHERLE

GLI ELEMENTI DELLA TEORIA
DELLE FUNZIONI ANALITICHE

PARTE PRIMA

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE

PREFAZIONE

Con questo volume viene continuata la pubblicazione dei corsi di lezioni che l'Autore va impartendo, da molti anni, nella R. Università di Bologna, e di cui sono comparse da tempo le parti relative all'Algebra complementare, alla Teoria delle equazioni e agli elementi del Calcolo differenziale ed integrale.

Il presente volume, che contiene la redazione della prima parte delle lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche, ha, come i precedenti, scopo essenzialmente didattico. Perciò esso non pretende di gareggiare colle maggiori opere che trattano a fondo di codesto importante corpo di dottrina, opere di cui ha dovizia la letteratura matematica mondiale e che non si tenta qui di enumerare per non incorrere in inevitabili e non giustificabili ommissioni: esso intende soltanto di dare agli studenti una adeguata conoscenza della ammirevole costruzione dovuta al genio di Cauchy, di Riemann e di Weierstrass, e che costituisce uno dei Capitoli più organicamente perfetti e più attraenti dell'Analisi matematica. Con ciò, lo scopo che esso si prefigge è duplice. All'allievo che si propone di proseguire negli studî, di mettersi a giorno dei progressi della scienza e, possibilmente, di contribuirvi, esso vuole dare la preparazione necessaria ad orientarsi in mezzo alla vasta, varia ed ognora crescente produzione che riguarda direttamente la teoria delle

funzioni analitiche o ne presuppone i principî; allo studioso invece che intende di dedicarsi all'insegnamento negli istituti medî, ma che, desideroso di fondare la sua istruzione matematica su basi larghe e sicure, vuole venire a cognizione di quei capitoli più elevati della scienza senza la cui conoscenza la parte elementare non può prospettarsi nella sua vera luce, questo volume aspira a corrispondere ad un tale intento per quello, fra gli accennati capitoli, che è forse il più utile, il più interessante ed il più completo. Il lettore conscio delle difficoltà dell'impresa non voglia essere troppo severo, se il duplice scopo gli sembrerà solo imperfettamente raggiunto.

Da chi intraprende la lettura delle presenti pagine si richiedono solo quelle cognizioni che costituiscono la materia dell'insegnamento matematico del primo biennio nelle nostre Università: se i richiami relativi vengono fatti citando i ricordati volumi di Analisi algebrica e di Calcolo differenziale ed integrale, a questi ci siamo riferiti unicamente in vista dell'uniformità di linguaggio e di metodo che essi hanno in comune colle presenti lezioni.

Lo studio della funzione analitica di una variabile viene fatto, in queste lezioni, tanto al punto di vista di Cauchy e Riemann quanto a quello di Weierstrass: i due metodi si sussidiano a vicenda, e l'indole prevalentemente didattica dell'opera ha consigliato, come corrispondente ad un minore sforzo, l'impiego di un ragionevole eclettismo. Riserrando ad una seconda parte l'accenno alle proposte estensioni del concetto di funzione monogena, in particolare a quella suggerita dal Borel, in questo volume i concetti di funzione monogena e di funzione analitica vanno considerati come coincidenti.

La materia svolta in questa prima parte è divisa in diciotto capitoli. I due primi sono dedicati alle generalità; nei due seguenti si stabiliscono la definizione e le proprietà della funzione analitica al punto di vista di Weierstrass. Il Capitolo V è dedicato alle funzioni razionali e alle trascendenti *elementari; i Capitoli VI, VII ed VIII danno i teoremi fondamentali di Cauchy sugl' integrali curvilinei e ne sviluppano le principali applicazioni. Il Capitolo IX contiene gli elementi della teoria delle funzioni trascendenti intere: si è procurato, pur restando nei limiti imposti dall' indole relativamente elementare di queste lezioni, che il lettore possa acquistare una congrua idea della loro struttura e dei legami che intercedono fra le principali proprietà delle funzioni di genere finito. Ad analoghi requisiti si è cercato che soddisfi il Capitolo seguente, dedicato al classico problema di Mittag-Leffler e che si chiude con alcune brevi indicazioni sullo sviluppo di una funzione in serie di funzioni razionali. Nel Capitolo XI viene trattato delle funzioni implicite al punto di vista analitico; nel seguente ne viene fatta l' applicazione alle funzioni algebriche e si accenna alle superficie di Riemann, di cui uno studio più diffuso dovrebbe trovare posto nella seconda parte; nel Capitolo XIII viene stabilita e discussa la formula di Lagrange, di cui viene fatta l' applicazione a casi speciali particolarmente notevoli. I due seguenti Capitoli sono dedicati all' esposizione dei principi fondamentali della teoria delle funzioni ellittiche e dei loro più importanti sviluppi: sebbene il carattere di queste lezioni non ne consenta una esposizione completa, che il lettore può trovare nelle opere speciali, e nelle eccellenti « Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa » di Luigi Bianchi, pure sembra che il contenuto dei due Capitoli sia sufficiente ad orientare il lettore nella conoscenza di questa interessante classe di trascendenti. Il Capitolo XVI, che tratta delle funzioni determinanti e delle loro generatrici, si può riguardare come una introduzione allo studio della classica trasformazione di Laplace-Abel; il Capitolo XVII studia le funzioni ipergeometriche e, coll' esame della loro equazione differenziale, preludia alla teoria analitica delle equazioni differenziali lineari regolari; infine, coll' ultimo Capitolo, dedicato alle funzioni euleriane, si è cercato di fare intendere quale posto importante occupi, nell' analisi, la classica funzione Gamma.*

Della mentorata teoria analitica delle equazioni differenziali dovrebbe occuparsi più diffusamente la seconda parte di queste lezioni, le quali, se pure l' età e le forze dell' Autore gliene consentiranno la redazione, dovrebbero ancora contenere, oltre agli argomenti cui si è già accennato, una esposizione di alcuni dei metodi che conducono alla risoluzione del classico problema della rappresentazione conforme di una data area sopra un cerchio, ed i principî della teoria delle operazioni lineari applicate ad uno spazio funzionale di cui le funzioni analitiche costituiscono gli elementi.

Licenziando questo volume, l' Autore non può astenersi dal rammentare come, nel redigerlo, egli sia stato costantemente guidato dalla idea, anche se non palese, per cui ogni singola funzione analitica va considerata come una entità a sè, si direbbe quasi come un organismo, il quale da chi per primo lo studia può dirsi scoperto, non già creato nè costruito per un atto arbitrario della sua volontà. Questa idea, che fu già quella di Carlo Hermite, affronta volentieri il rischio di essere tacciata di neo-platonica: ma è forse questo pensiero che vale a spiegare l' attrazione speciale esercitata dallo studio di questa organica classe di enti, rappresentanti delle più delicate associazioni mentali.

L' Autore esprime la sua gratitudine al dott. Belardinelli, suo assistente, per l' aiuto prestatogli nella revisione delle bozze di stampa e nella compilazione dell' indice alfabetico ed alla signorina dott. Toffoletto, che ha pure riveduto le bozze; vuole poi particolarmente ringraziato, per la cura data alla pubblicazione del presente volume, il comm. O. Franchi, sotto la cui solerte direzione la Casa editrice Zanichelli si è resa tanto benemerita della scienza nel nostro paese.

Bologna, Agosto 1922.

INDICE DELLE MATERIE

GLI ELEMENTI DELLA TEORIA
DELLE FUNZIONI ANALITICHE

CAPITOLO PRIMO

LA VARIABILE COMPLESSA

§ I. Il piano rappresentativo.

1. Dall'aritmetica generale sappiamo come il concetto di numero, originariamente limitato alla classe dei numeri assoluti — coincidente con quella degli interi positivi — sia venuta man mano ampliandosi mediante la successiva introduzione dello zero, degli interi con segno, dei razionali, dei reali, e finalmente dei numeri complessi.

Ricordiamo [1] come questi vengano introdotti come coppie o sistemi (a, b) di due numeri reali presi in ordine determinato, il cui calcolo si fonda sulle seguenti definizioni:

a) è $(a, b) = (c, d)$ se, e soltanto se è $a = c$, $b = d$;

b) il numero $(a, 0)$ coincide col numero reale a;

c) è $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;

d) essendo m reale, è $m(a, b) = (ma, mb)$.

Da queste definizioni, equivalenti ad altrettante regole di calcolo formale, risulta che si può scrivere

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1),$$

per modo che unico elemento nuovo è la coppia $(0, 1)$. Questa viene determinata convenendo di chiamare m o l t i p l i c a z i o n e dei numeri complessi (a, b), (c, d) un'operazione il cui risul-

(1) V. le mie *Lezioni di Algebra Complementare*, Cap. IV.

tato sia espresso da

$$(a,\ b)(c,\ d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$

Codesta moltiplicazione gode, come si verifica subito, delle proprietà commutativa, associativa e distributiva; essa dà

$$(0,\ 1)(0,\ 1) = (-1,\ 0) = -1,$$

e soddisfa pure al principio di annullamento del prodotto, poichè se è nullo (a, b), cioè $a=0$, $b=0$, è anche $(ac-bd, ad+bc)=0$; e se questo è nullo e non lo è (a, b), si ha

$$ac - bd = 0, \quad ad + bc = 0 \quad \text{con} \quad a^2 + b^2 > 0,$$

il che non può verificarsi se non per $c=0$, $d=0$, cioè $(c, d)=0$.

Dalla regola precedente si deduce subito che il quoziente dei due numeri (a, b), (c, d), quando il divisore (c, d) non sia nullo, è dato da

$$\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

In conclusione, e ponendo, secondo l'uso $(0, 1)=i$, e quindi indicando d'ora in avanti la coppia (a, b) con $a+bi$, il calcolo dei numeri complessi segue le regole stesse dell'aritmetica ordinaria, cioè del calcolo dei numeri reali, colla sola avvertenza di sostituire i^2 con -1.

2. I numeri complessi, fra cui sono compresi i reali, costituiscono dunque un materiale su cui si opera colle regole della usuale aritmetica. Ma si può vedere, inoltre, che esso è il materiale più ampio che goda di questa proprietà.

Prima di indicare in quale modo si possa rendere ragione di questa asserzione, ci sembra opportuno di dare qualche breve indicazione sulla teoria dei numeri complessi generali, o ad n unità (1).

(1) Rimandiamo il lettore che voglia maggiori particolari sulla teoria dei numeri complessi in generale, o, come viene anche detto, sulla Algebra associativa, all'art. di E. STUDY nell' *Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, T. I, A. 4; il Cap. 21 della *Vorlesungen ueber continuierliche*

Si chiama *numero complesso ad* n *unità* un sistema di n numeri reali $a_1, a_2, \dots a_n$, dati in ordine determinato, o n^{pla} di numeri reali; un tal numero complesso si indicherà, scrivendo la n^{pla} tra parentesi, con

$$\alpha = (a_1,\ a_2, \dots, a_n);$$

i numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$ si diranno rispettivamente *prima*, *seconda*,.... n^{sima} coordinata di α. L'eguaglianza dei due numeri $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ è definita dalle n uguaglianze fra numeri reali:

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n,$$

onde valgono le proprietà logiche dell'uguaglianza. La somma $\alpha+\beta$ sarà la n^{pla} $(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$, onde la proprietà commutativa ed associativa della addizione; onde anche la sottrazione. Elemento *zero* nel campo dei numeri considerati è la n^{pla} $(0, 0, \dots, 0)$, che si indicherà con 0; ne discende subito la proprietà $\alpha+0=\alpha$. Moltiplicazione del numero α per il numero reale m, che si deduce dalla somma per m intero, si definisce in generale come avente per risultato $m\alpha$ la n^{pla} $(ma_1, ma_2, \dots, ma_n)$, onde, essendo n pure reale, la proprietà $m(n\alpha)=mn\alpha=n(m\alpha)$. Ad ogni numero $\alpha=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ compete il numero contrario $-\alpha$, tale che $\alpha+(-\alpha)=0$; esso è dato da $(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$. Si chiameranno *unità* le n^{ple} speciali

$$\varepsilon_1 = (1,\ 0,\ 0, \dots, 0),\quad \varepsilon_2 = (0,\ 1,\ 0, \dots, 0), \dots\quad \varepsilon_n = (0,\ 0, \dots, 0,\ 1);$$

perciò, in base alle precedenti regole, il numero complesso α di coordinate $a_1, a_2, \dots, a_n$, potrà scriversi:

$$(a) \qquad \alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n.$$

I numeri complessi $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ si diranno o no linearmente dipendenti, secondo che esistono, o no, numeri reali $c_1, c_2, \dots c_m$ tali che sia

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_m\alpha_m = 0.$$

Le varie classi di numeri complessi si distinguono in base al modo di definirne la moltiplicazione. Come proprietà formale essenziale della moltiplicazione, si assume la distributiva; si pone inoltre

$$(b) \qquad a_h\varepsilon_h \cdot b_k\varepsilon_k = a_hb_k \cdot \varepsilon_h\varepsilon_k;$$

in seguito a ciò, il prodotto di due numeri qualsiansi della forma (a) sarà una funzione lineare di prodotti $\varepsilon_h\varepsilon_k$ di due unità. Ora, è natural-

Gruppen di LIE-SCHEFFERS, Leipzig, 1893; CARTAN, *Annales de Toulouse* T. 12, 1898; SCHOUTEN, *Math. Ann.* T. 76, 1914, lavoro in cui si trova una estesa bibliografia; SCORZA, *Rendic. del Circolo matem. di Palermo*, T. XLV, 1921, ed il recente libro dello stesso Autore: *Corpi numerici e algebre*, Messina, 1921.

mente da ammettersi che questi n^2 prodotti siano numeri della classe considerata, cioè della forma (a); si è così condotti a porre:

$$(c)\qquad \varepsilon_h\varepsilon_k = c_{hk_1}\varepsilon_1 + c_{hk_2}\varepsilon_2 + \dots + c_{hk_n}\varepsilon_n, \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

Sono i numeri c_{hkr}, $(r = 1, 2, \dots, n)$, detti perciò ***caratteristici***, che servono a caratterizzare il modo della moltiplicazione; ad ogni particolare scelta di questi n^3 numeri corrisponde una particolare classe di numeri complessi, o, come si dice anche, una particolare Algebra.

Questa Algebra è detta *associativa* quando vale appunto, per la moltiplicazione, la proprietà associativa, e basta che essa valga per i prodotti delle unità: deve cioè essere

$$(d)\qquad \varepsilon_h(\varepsilon_k\varepsilon_l) = (\varepsilon_h\varepsilon_k)\varepsilon_l.$$

Da questa, sostituendo ai prodotti $\varepsilon_k\varepsilon_l$, $\varepsilon_h\varepsilon_k$ le corrispondenti espressioni (c), e di nuovo nei prodotti che ne risultano, si viene alle relazioni necessarie e sufficienti fra i numeri caratteristici di un'Algebra associativa:

$$(e)\qquad \sum_{i=1}^{n} c_{kli}\,c_{hij} = \sum_{i=1}^{n} c_{hki}\,c_{ilj}.$$

Per la validità della legge commutativa le condizioni sono semplicemente $c_{hki} = c_{khi}$.

Non è qui il luogo di addentrarsi nello studio dei numeri complessi generali; al nostro scopo basteranno le seguenti osservazioni:

a) Può accadere che in una determinata classe di numeri complessi non valga il principio di annullamento del prodotto. Si possono quindi avere prodotti $\alpha\beta = 0$ senza che nè α, nè β siano zero; questi numeri α, β si dicono allora *divisori dello zero*. Un'algebra che dia luogo a divisori dello zero differisce essenzialmente dalla usuale.

b) Siano numeri complessi a due unità linearmente indipendenti, cioè di cui l'una non si possa ottenere dall'altra mediante moltiplicazione per un numero reale, e di cui una sia quella dei numeri reali: codesti numeri saranno della forma $a + b\varepsilon$, essendo ε la seconda unità e la classe dei numeri sarà stabilita dalla conoscenza di ε^2; sia

$$(f)\qquad \varepsilon^2 = c + c'\varepsilon.$$

Esistono numeri (non reali) nella classe, aventi il quadrato reale; sia infatti $\alpha = a + b\varepsilon$; è, per la (f),

$$\alpha^2 = a^2 + 2ab\varepsilon + b^2\varepsilon^2 = a^2 + b^2c + (2ab + b^2c')\varepsilon,$$

ed essendo b diverso da zero, il quadrato α^2 sarà reale se è

$$2a + bc' = 0.$$

Si hanno dunque, nella classe considerata, infiniti numeri non reali a quadrato reale. Uno di questi numeri, η, con $\eta^2 = k$, si può assumere a

seconda unità, scrivendo i numeri della classe nella forma $p + q\eta$. Se k è negativo, si torna ai numeri complessi ordinari; basta fare $i = \dfrac{\eta}{\sqrt{-k}}$. Se invece k è positivo, essendo $\alpha = a + b\eta$, $\beta = c + d\eta$, si avrà

$$\alpha\beta = ac + bdk + (ad + bc)\eta;$$

ponendo questo prodotto uguale a zero, dovrà essere

$$(g)\qquad ac + bdk = 0, \quad ad + bc = 0,$$

e qui, se il determinante $a^2 - b^2k$ si fa uguale a zero, il che è possibile per valori reali di a e b se è $k > 0$, si soddisfa al sistema (g) senza che nè α nè β siano zero: si ha cioè un'algebra in cui non vale il principio di annullamento del prodotto.

c) Consideriamo ora numeri a tre unità, di cui le due prime siano 1 ed i, sia ε la terza, indipendente linearmente dalle prime due; la moltiplicazione sia commutativa e determinata da

$$(h)\qquad \varepsilon i = i\varepsilon = c + c'i + c''\varepsilon, \quad \varepsilon^2 = c_1 + c_1'i + c_1''\varepsilon.$$

Si formi, mediante le (h), il prodotto di due numeri $p + qi + r\varepsilon$ ed $1 + h\varepsilon$; verrà:

$$(p + qi + r\varepsilon)(1 + h\varepsilon) =$$
$$= p + qhc + rhc_1 + (q + qhc' + rhc_1')i + (r + ph + qhc'' + rhc_1'')\varepsilon.$$

Ponendo questo prodotto uguale a zero, si può soddisfare al sistema

$$\begin{cases} p + chq + c_1hr = 0 \\ (1 + c'h)q + c_1'hr = 0 \\ hp + c''hq + (1 + c_1''h)r = 0 \end{cases}$$

con valori non nulli di p, q, r, qualora il determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & ch & c_1h \\ 0 & 1 + c'h & c_1'h \\ h & c''h & 1 + c_1''h \end{vmatrix}$$

sia nullo: ora, uguagliando il determinante a zero, si ha un'equazione di terzo grado in h la quale ha necessariamente una radice reale: esistono dunque divisori dello zero, cioè per la classe di numeri qui definiti non vale l'algebra ordinaria.

Con ciò è giustificata l'asserzione posta in principio del presente n.°.

3. Ricordiamo ancora la rappresentazione grafica dei numeri complessi. In un piano in cui sono segnati due assi ortogonali orientati come nella usuale Geometria analitica cartesiana, indicando con u l'ascissa e con v l'ordinata, il

[illegible] (reali relativi complessi ordinari [illegible]) [illegible]
prodotto valgono le proprietà distributiva, associativa e di annullamento [illegible]
[illegible] 198-201 [illegible]
[illegible]

punto P di coordinate $u = a$, $v = b$ si fa corrispondere al numero complesso $a + bi$, e reciprocamente. Tale corrispondenza è biunivoca. Il punto P si dice ***indice*** od ***immagine*** del numero complesso [1]. Del numero complesso $a + bi$, il valore positivo ρ di $\sqrt{a^2 + b^2}$ è il modulo; gli archi, congrui fra loro rispetto a 2π, aventi $\frac{a}{\rho}$ come coseno e $\frac{b}{\rho}$ come seno ne sono gli argomenti. Il numero complesso $a + bi$ viene frequentemente scritto nella forma trigonometrica (ρ e θ coordinate polari):

$$a + bi = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

od anche [2]

$$a + bi = \rho e^{i\theta}.$$

Spesso, fra gli archi θ, argomenti di $a + bi$, si considera quello θ compreso fra 0 e 2π (l'estremo 2π escluso); questo valore viene detto *principale*. Gli altri argomenti dello stesso numero sono dati da $\theta = \theta + 2k\pi$, dove k è un numero intero qualsiasi, positivo o negativo.

4. La rappresentazione dei numeri complessi mediante i punti di un piano ha carattere essenziale, tanto che $x = u + iv$ si dirà indifferentemente *numero* x o *punto* x.

Se nel numero complesso $x = u + iv$ (u parte reale, v coefficiente dell'immaginario) u e v si riguardano come variabili, x sarà pure una variabile; la *variabile complessa*. Se per u e v non si pone alcuna limitazione, il punto variabile P, di coordinate u e v, viene a ricoprire tutto il piano, che è così il luogo della variabile complessa x e si dice spesso ***piano complesso***.

Per $u = 0$, $v = 0$, ossia per $\rho = 0$, si ha $x = 0$, per il quale l'argomento è indeterminato; è pure indeterminato l'argomento per $\rho = \infty$. Si conviene di considerare $\rho = \infty$ come individuante un unico punto, *punto all'infinito* del piano complesso: allontanandosi in ciò dal concetto del piano euclideo, in cui, come è noto, i punti all'infinito (punti impropri) vanno considerati come costituenti una retta. La distinzione si pone in rilievo usando la denominazione di *piano-sfera* per il piano complesso.

(1) Per maggiori particolari, v. *Lezioni di Algebra Complementare*, Cap. IV, n.i 107 e seg.

(2) V. le mie *Lezioni di Calcolo infinitesimale*, n.° 197.

Il luogo di variabilità della variabile complessa è un piano in una forma di Geometria ellittica. Rimanendo nella usuale geometria, si può assumere come luogo della variabile complessa una superficie sferica, stabilendo una corrispondenza biunivoca fra i punti della sfera ed i punti propri del piano, mentre ai punti impropri corrisponde un solo punto della sfera: questa corrispondenza è data dalla nota rappresentazione stereografica [1].

Volendo richiamare brevemente questa rappresentazione e le sue proprietà elementari, cominciamo col considerare un sistema di coordinate cartesiane ortogonali u, v, w nello spazio, e la trasformazione di queste in u_1, v_1, w_1, data dalle

$$(a) \qquad u = \frac{u_1}{\rho_1^2}, \quad v = \frac{v_1}{\rho_1^2}, \quad w = \frac{w_1}{\rho_1^2}, \quad \text{con} \quad \rho_1^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2,$$

dalle quali, posto $\rho^2 = u^2 + v^2 + w^2$, risulta subito:

$$(b) \qquad u_1 = \frac{u}{\rho^2}, \quad v_1 = \frac{v}{\rho^2}, \quad w_1 = \frac{w}{\rho^2}, \quad \rho_1 = \frac{1}{\rho};$$

la trasformazione (a) è dunque involutoria. Un punto $P(u, v, w)$ ed il suo trasformato $P_1(u_1, v_1, w_1)$ sono allineati coll'origine O e danno $OP \cdot OP_1 = 1$. La trasformazione (a) è detta *inversione*. Nell'inversione, ad una sfera corrisponde una sfera; infatti

$$a(u^2 + v^2 + w^2) + 2bu + 2cv + 2dw + e = 0$$

si trasforma in

$$a + 2bu_1 + 2cv_1 + 2dw_1 + e(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2);$$

se $e = 0$, alla sfera corrisponda un piano; ad un piano $(a = 0)$ corrisponde una sfera se il piano non passa per l'origine, ed il piano stesso se esso passa per l'origine. Ad un cerchio corrisponde un cerchio; l'inversione è perciò trasformazione *omociclica*.

(1) Questa rappresentazione era probabilmente conosciuta ai tempi di IPPARCO (2do secolo a. C.) e certamente a quelli di TOLOMEO (2do secolo d. C.).

Se γ è una curva, γ' la sua trasformata mediante (a), P e Q una coppia di punti su γ e P', Q' la coppia dei punti corrispondenti (fig. 1), i triangoli OPQ, $OP'Q'$ sono simili, e $\widehat{OQP} = \widehat{OP'Q'}$. Facendo tendere Q a P, Q' tende a P', PQ, $P'Q'$ tendono alle tangenti t, t' rispettive a γ e γ' e si ha, al limite, $\widehat{OPt} = \widehat{OP't'}$. Se ne deduce immediatamente che due

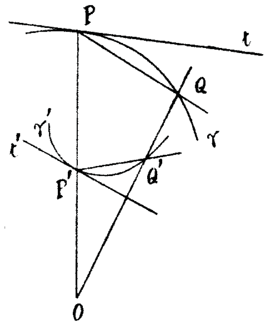


Fig. 1

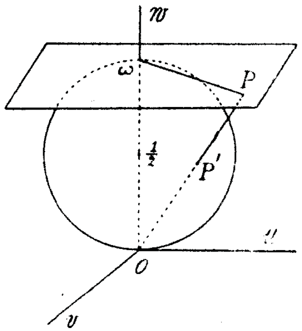


Fig. 2

curve si tagliano sotto lo stesso angolo delle loro trasformate: l'inversione conserva dunque gli angoli, ossia è una trasformazione *isogonale*.

La trasformata del piano $w = 1$ mediante l'inversione (a) è la sfera (fig. 2) $u^2 + v^2 + w^2 = w$, tangente al piano stesso nel punto $\omega(u = 0,\ v = 0,\ w = 1)$. I punti del piano e quelli della sfera sono in corrispondenza biunivoca, omociclica ed isogonale; questa corrispondenza è appunto la proiezione stereografica. All'origine ω nel piano corrisponde sulla sfera la ω medesima: a P corrisponde P', per modo che $OP \cdot OP' = 1$; se P tende all'infinito in qualunque direzione, P' tende ad O, antipodo di ω. Ai numeri complessi si può dare come immagine sulla sfera i corrispondenti P' delle loro immagini P nel piano: si riconosce, in particolare, che l'immagine corrispondente a $x = \infty$ è l'unico punto O.

§ II. Le sostituzioni lineari.

5. Passiamo a studiare alcune semplici trasformazioni della variabile complessa, che ricorrono spesso nelle applicazioni. In queste trasformazioni, ad ogni valore di x corrisponde un determinato valore per una seconda variabile x_1 che si dice *trasformata* della prima. Il piano rappresentativo di x_1 può riguardarsi, o no, come distinto da quello della x: noi li riguarderemo, di norma, come coincidenti, colla stessa origine e cogli stessi assi, reale ed immaginario, ugualmente orientati.

A) Essendo $x = u + iv$ un numero complesso, $\bar{x} = u - iv$ il suo coniugato, si consideri la trasformazione rappresentata da

(1) $$x_1 = \bar{x}.$$ riflessione

Essa è biunivoca, lascia invariati tutti i punti dell'asse reale; coincide, geometricamente, colla simmetria rispetto a quest'asse: come tale, è omociclica ed isogonale. Essa viene spesso designata col nome di *riflessione* rispetto all'asse reale (considerato cioè come traccia di uno specchio piano). La x e la x_1 hanno lo stesso modulo, ed essendo θ un argomento di x, fra quelli di x_1 se ne trova sempre uno θ' tale che $\theta + \theta' = 0$.

B) La trasformazione data da

(2) $$x_1 = x + h$$ traslazione

si opera facendo subire ad x una traslazione, determinata in ampiezza, in direzione ed in senso dal vettore h. Unico punto invariante è $x = \infty$. Ad una figura qualsiasi di x corrisponde in x_1 una figura congruente ed in cui i lati corrispondenti sono paralleli.

C) La trasformazione data da

(3) $$x_1 = kx$$

dà luogo a tre casi distinti, a seconda del carattere aritmetico di k.

a) Se k è reale, i punti x ed x_1 sono allineati coll'origine, e poichè il rapporto delle loro distanze dall'origine è costante, ad una figura descritta da x corrisponde per x_1 una figura omotetica; l'omotetia è diretta od inversa a seconda che k è positivo o negativo.

b) Se k è complesso e di modulo uguale ad uno, $k = e^{i\alpha}$, il vettore x_1 si ottiene facendo ruotare il vettore x di un angolo α intorno all'origine; ad una figura descritta da x corrisponde per x_1 una figura congruente dedotta dalla prima mediante l'anzidetta rotazione.

c) Se infine k è complesso qualsiasi, $k = \rho e^{i\alpha}$ con $\rho \gtrless 1$, la trasformazione si opera mediante l'esecuzione successiva di due trasformazioni, l'una del caso *a*, l'altra del caso *b*. Ad una figura descritta da x corrisponde una figura simile per x_1, e che si riduce ad essere omotetica mediante una rotazione dell'angolo $-\alpha$ intorno all'origine.

Nei tre casi considerati, sono punti invarianti $x=0$ ed $x=\infty$.

È chiaro che tutte le trasformazioni A, B e C trasformano i cerchi in cerchi e conservano gli angoli: sono cioè omocicliche ed isogonali.

D) Nella trasformazione data da

$$x_1 = \frac{1}{x}, \tag{4}$$

ad un x di modulo ρ ed argomento θ corrisponde x_1 di modulo $\frac{1}{\rho}$ e di argomento $-\theta$. Sono invarianti i punti ± 1, mentre sono scambiati fra loro i punti $x=0$ ed $x=\infty$. È chiaro che gli angoli sono conservati. Siccome, posto $x=u+iv$, $x_1=u_1+iv_1$, la (4) dà

$$u_1 = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad v_1 = -\frac{v}{u^2+v^2},$$

così al cerchio $a(u^2+v^2)+2bu+2cv+d=0$ corrisponde il cerchio $a+2bu_1-2cv_1+d(u_1^2+v_1^2)=0$: la trasformazione è dunque omociclica.

Se x_1, y_1, z_1, t_1 sono i trasformati dei punti x, y, z, t, nelle trasformazioni A, B, C, il rapporto di z_1-x_1 a $z-x$ è costante, onde segue

$$\frac{z_1-x_1}{z_1-y_1} = \frac{z-x}{z-y}.$$

Nella trasformazione D, si ha

$$z_1-x_1 = -\frac{z-x}{zx}, \quad \text{onde} \quad \frac{z_1-x_1}{z_1-y_1} = \frac{z-x}{z-y} : \frac{x}{y}.$$

Risulta da ciò che, in tutti i casi, è

$$\boxed{\frac{z_1-x_1}{z_1-y_1} : \frac{t_1-x_1}{t_1-y_1} = \frac{z-x}{z-y} : \frac{t-x}{t-y},} \tag{5}$$

e chiamando birapporto (o rapporto anarmonico) dei quattro punti (o numeri complessi) x, y, z, t il secondo membro della (5), si ha che le trasformazioni A, B, C e D lasciano invariato il birapporto di quattro punti.

6. Si dice che x_1 è dedotto da x mediante una ***sostituzione*** (o trasformazione) lineare, quando è

a, b, c, d reali o complessi

$$x_1 = \frac{ax+b}{cx+d}. \tag{6}$$

L'espressione $ad-bc$ è il ***determinante*** o ***modulo*** della sostituzione; se esso è uguale a zero, ad ogni valore di x corrisponde per x il valore fisso $a:c=b:d$; se è diverso da zero, la (6) stabilisce fra x ed x_1 una corrispondenza biunivoca [1]. La trasformazione (6) può riguardarsi come un'*operazione* S applicata ad x ed il cui risultato è x_1 [2]; essa si indica con

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La sua inversa è $S^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$: date le sostituzioni $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, i loro prodotti sono

$$SS' = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad S'S = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ba'+db' \\ ac'+ca' & bc'+dd' \end{pmatrix};$$

ne segue che il prodotto di due sostituzioni lineari è pure una sostituzione lineare: le sostituzioni lineari formano dunque un gruppo [3], e il modulo (determinante) di un prodotto di sostituzioni è uguale al prodotto dei moduli.

Le trasformazioni B, C, D del numero precedente sono sostituzioni lineari: precisamente

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

(1) La (6), relazione bilineare fra x ed x_1, coincide coll'equazione della proiettività nelle forme di prima specie: la proiettività è degenere quando è $ad-bc=0$.

(2) V. le generalità sulle operazioni in *Algebra Complementare*, T. II, Cap. 17, n.i 338-343.

(3) Loc. cit., n.° 343.

Ogni sostituzione lineare può ottenersi come prodotto di sostituzioni semplici delle forme B, C e D. Se infatti si eseguiscono di seguito le trasformazioni

$$x' = x + \frac{d}{c}, \quad x'' = cx', \quad x''' = \frac{1}{x''},$$

$$x^{(\mathrm{IV})} = (cb - ad)x''', \quad x^{(\mathrm{V})} = x^{(\mathrm{IV})} + a, \quad x_1 = \frac{1}{c} x^{(\mathrm{V})},$$

si ottiene la (6).

Simbolicamente, posto

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} cb - ad & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si ha:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = S_6 S_5 S_4 S_3 S_2 S_1 .$$

Poichè le B, C, D sono omocicliche, isogonali e conservano il birapporto, « le stesse proprietà spettano ad ogni « sostituzione lineare ».

L'omociclia si può dedurre come conseguenza della conservazione del birapporto. Dati quattro punti x, y, z, t, ponendo

$$\frac{z - x}{z - y} : \frac{t - x}{t - y} = re^{i\theta},$$

ed indicando con α, β, γ, δ rispettivamente gli argomenti di $z - x$, $z - y$, $t - x$, $t - y$, si ottiene

$$\alpha - \beta - (\gamma - \delta) = \theta;$$

quindi, condizione necessaria e sufficiente perchè il birapporto sia reale sarà che $\alpha - \beta - (\gamma - \delta)$ sia 0 o π, e quindi, per essere $\alpha - \beta = \widehat{xzy}$, $\gamma - \delta = \widehat{xty}$, che i quattro punti x, y, z, t siano su una circonferenza. Ma poichè la trasformazione lineare conserva il birapporto, se quattro punti sono su una circonferenza, saranno pure su una circonferenza i loro corrispondenti: onde l'omociclia.

7. La A (n.° 5) non è una sostituzione lineare. Se però alle sostituzioni lineari associamo la A, cioè prendiamo a considerare operazioni formate dal prodotto di sostituzioni lineari

gruppo ampliato $= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, T = AS\right]$
– 1ª specie 2ª specie

e della A, otterremo trasformazioni T della forma

$$(7) \qquad \boxed{x_1 = \frac{a\bar{x} + b}{c\bar{x} + d}} \text{ (1)}.$$

$T = AS$
gruppo ampliato

Il prodotto di due simili trasformazioni è evidentemente una sostituzione lineare; da T, T', rappresentate rispettivamente da

$$x_1 = \frac{a\bar{x} + b}{c\bar{x} + a}, \quad x_1 = \frac{a_1\bar{x} + b_1}{c_1\bar{x} + a_1},$$

segue per TT' l'espressione

$$x_1 = \frac{(a\bar{a}_1 + b\bar{c}_1)x + a\bar{b}_1 + b\bar{d}_1}{(c\bar{a}_1 + d\bar{c}_1)x + c\bar{b}_1 + d\bar{d}_1}.$$

$TT' = S$
$TS = T$

Invece il prodotto di una sostituzione lineare e di una trasformazione (7) è una trasformazione (7). L'insieme delle (6) e (7) costituisce dunque un gruppo, che si dice ***gruppo ampliato*** delle sostituzioni lineari; le sostituzioni (7) si dicono ***sostituzioni lineari di seconda specie***, mentre la (6) si diranno ***di prima specie***. Queste formano un gruppo (sottogruppo nel gruppo ampliato) mentre non formano un gruppo quelle di seconda specie.

Poichè la A è omociclica, isogonale e conserva il birapporto, lo stesso sarà di ogni trasformazione del gruppo ampliato.

Il prodotto delle operazioni A e D dà la trasformazione di seconda specie

$$x_1 = \frac{1}{\bar{x}},$$

la quale non è altro che la ben nota inversione per raggi vettori reciproci.

8. Si aggiungano alcune osservazioni sulle sostituzioni lineari.

a) Data la (6), un punto corrispondente a sè stesso, o punto *invariante* od *unito* deve soddisfare all'equazione

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0;$$

$x = \frac{ax + b}{cx + d}$

---

(1) Rimane stabilito che il numero complesso coniugato del numero a viene rappresentato con $\bar{a}$.

2 punti invarianti $\begin{cases} 0 \ \infty & S \equiv C \\ \infty = \infty & S \equiv B \end{cases}$

vi sono dunque due punti invarianti od uno solo (due coincidenti) secondo che $(d-a)^2+4bc$ è diverso da zero od uguale a zero. Se i due punti invarianti sono l'uno zero, l'altro infinito, è $c=0$, $b=0$ e la S si riduce alla forma C; se i due punti invarianti sono coincidenti e all'infinito, è $c=0$, $d=a$, e la S si riduce alla forma B: è una traslazione. Vi possono essere tre punti invarianti solo se $c=0$, $a=d$, $b=0$: ma allora S si riduce ad $x_1=x$, cioè all'identità, ed ogni punto del piano è punto invariante.

b) Data una trasformazione $x_1=S(x)$, si può operare contemporaneamente su x ed x_1 un'altra trasformazione $x=T(y)$, $x_1=T(y_1)$, per modo che y ed y_1 sono legate da

$$T(y_1)=ST(y), \quad \text{ossia} \quad y_1=T^{-1}ST(y).$$

La sostituzione $S'=T^{-1}ST$ si dice la *trasformata* di S mediante T; S e T essendo sostituzioni lineari, lo stesso è di questa trasformata.

Se α è punto invariante per S, $T^{-1}(\alpha)$ lo è per S'. Se α e β sono i punti invarianti (distinti) di S, basta fare $T=\begin{pmatrix}\beta & -\alpha \\ 1 & -1\end{pmatrix}$, ossia $y=\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}$, perchè i punti invarianti di T siano 0 ed ∞, ed S' prende la forma C; se α e β sono coincidenti, si fa $T=\begin{pmatrix}\alpha & p \\ 1 & q\end{pmatrix}$ ed S' prende la forma B, qualunque siano p e q.

c) Ad un cerchio passante per i punti invarianti α e β di S, la S fa corrispondere un cerchio passante per gli stessi punti: onde il fascio di cerchi passanti per α e β è trasformato in sè da S, e per l'isogonalità, sarà trasformato in sè anche il fascio dei cerchi ortogonali a quello. In particolare, per la C questi fasci sono rispettivamente quello dei raggi per l'origine e dei cerchi concentrici col centro nella origine stessa.

d) Se la (1) si applica due volte di seguito, si ottiene l'identità; così se si applica due volte di seguito la (4): si esprime questo fatto dicendo che quelle sostituzioni sono *involutorie*. Per scrivere che una sostituzione S è involutoria, si pone $S^2=1$ [1]. Se S è involutoria, lo è ogni sua trasformata. Una traslazione non può evidentemente essere involutoria se h non è zero, onde non lo può essere una sostituzione non identica di prima specie a punti invarianti coincidenti, trasformata di una traslazione.

Una sostituzione a punti invarianti distinti si può trasformare in una $x_1=kx$, il cui *quadrato* sarà dato da $x_1=k^2x$, essa sarà quindi involutoria se è $k^2=1$. Escludendo naturalmente l'identità, viene $k=-1$, onde una sostituzione involutoria è trasformata della simmetria rispetto all'origine.

e) Si cerchi infine se vi siano sostituzioni di seconda specie involutorie. Sia tale la

$$x_1=\frac{a\bar{x}+b}{c\bar{x}+d}, \tag{7}$$

[1] *Algebra Complementare*, n.° 341.

ne viene che x sarà pure dato da $x=\dfrac{a\bar{x}_1+b}{c\bar{x}_1+d}$, ossia sarà $x_1=\dfrac{-\bar{d}x+\bar{b}}{\bar{c}x-\bar{a}}$, e perciò

$$-\frac{a}{\bar{d}}=\frac{b}{\bar{b}}=\frac{c}{\bar{c}}=-\frac{d}{\bar{a}}$$

ed indicato con k questo rapporto comune, si ha $ad=k^2\bar{a}\bar{d}$, onde $k=\pm 1$. Si può fare senz'altro $k=1$, poichè si passa al caso $k=-1$ cambiando a, b, c, d in ia, ib, ic, id. Si ha dunque $a=m+in$, $d=-(m-in)$, mentre b e c sono reali, e la trasformazione (7) può scriversi, escludendo il caso $c=0$:

$$c\left(x_1-\frac{m+in}{c}\right)\left(\bar{x}-\frac{m-in}{c}\right)=\frac{m^2+n^2}{c}+b,$$

dove $\dfrac{m^2+n^2}{c}+b$ è diverso da zero per essere il determinante della (7). Posto $x-\dfrac{m+in}{c}=y$, la relazione prende la forma $y_1\bar{y}=q$, essendo q una costante reale. Se essa è positiva, la trasformazione è una inversione per raggi vettori reciproci, in cui rimangono invarianti i punti della circonferenza di centro $y=0$ e di raggio $\sqrt{q}$; una tale trasformazione viene detta *riflessione* rispetto a questa circonferenza. Se è $q<0$, y_1 è il simmetrico rispetto all'origine del trasformato di y per raggi vettori reciproci relativo alla circonferenza di centro $y=0$ e di raggio $\sqrt{-q}$, ed ogni punto della circonferenza viene trasformato nel punto diametralmente opposto; la trasformazione è detta *riflessione impropria* rispetto alla circonferenza.

Nel caso $c=0$, la relazione (7) prende la forma, se $a=\rho e^{i\alpha}$, e per essere $d=-\bar{a}$:

$$\rho e^{-i\alpha}x_1+\rho e^{i\alpha}\bar{x}+b=0,$$

e se si pone $x=e^{i\alpha}y$, $x_1=e^{i\alpha}y_1$, viene

$$y_1+\bar{y}=-\frac{b}{\rho}$$

ossia, per $y=u+iv$, $y_1=u_1+iv_1$,

$$v-v_1=0, \quad u+u_1=-\frac{b}{\rho}.$$

Queste uguaglianze esprimono che i punti y, y_1 sono simmetrici rispetto ad una parallela all'asse immaginario passante per il punto $-\dfrac{b}{2\rho}$; si ha dunque una effettiva riflessione rispetto a questa parallela.

CAPITOLO SECONDO

FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA

§ I. Aggregati di punti. — Connessione.

9. Sia a un punto nel piano (piano-sfera) della variabile complessa $x = u + iv$. Con *intorno* (a, r) del punto a intenderemo l'insieme dei punti interni al cerchio di centro a ed avente per raggio il numero positivo r.

Dicendo *intorno qualunque* di a, intenderemo che r può prendersi arbitrariamente piccolo.

Con *intorno* (∞, R) *dell'infinito*, intenderemo l'insieme dei punti esterni al cerchio di centro $x=0$ avente per raggio il numero positivo R. Dicendo *intorno qualunque* dell'infinito, intenderemo che R si può prendere arbitrariamente grande.

Ricordando che la distanza di due punti a, b, è data dal modulo del vettore $a - b$, ne viene che per un punto x dell'intorno (a, r) di a è verificata la $|x - a| < r$; per un punto x dell'intorno (∞, R), si ha $|x| > R$.

La scrittura *cerchio* (a, r) servirà d'ora in poi ad indicare il cerchio di centro a e raggio r; quando il centro è nell'origine, scriveremo semplicemente *cerchio* (r). Le circonferenze di questi cerchi si designeranno con *circonferenza* (a, r), *circonferenza* (r).

10. Sia dato un aggregato A di punti nel piano complesso; $a, a', a'',\ldots$ siano punti generici dell'aggregato.

a) L'aggregato A si dirà *limitato* quando si può determinare un numero positivo R tale che per ogni a, sia $|a| < R$;

in altri termini, si può assegnare un intorno dell'infinito in cui non cade alcun punto dell'aggregato.

b) *Punto limite* p dell'aggregato è un punto tale che in qualunque intorno di p cade qualche punto di A, diverso da p. Ne consegue che ne cadono infiniti.

In alcuni casi, quando in un aggregato A uno stesso punto comparisce infinite volte, può essere conveniente di considerare questo punto come uno dei punti limiti dell'aggregato; in tale caso, non vale necessariamente la conseguenza precedente.

c) Quando l'aggregato non è limitato, $x = \infty$ è un suo punto limite. Il punto $x = \infty$ del piano-sfera verifica infatti la definizione data a *b*).

11. *a*) Dal postulato della continuità della retta si deduce [1] il seguente

Teorema. « Avendosi nel piano una successione di rettan-
« goli a lati paralleli, ognuno interno al precedente, e in cui
« tende a zero la successione delle basi e quella delle altezze,
« esiste un punto, unico, interno a tutti i rettangoli ».

b) Mediante questa proposizione si dimostra facilmente [2] il

Teorema. « Ogni aggregato di infiniti punti nel piano
« ammette almeno un punto limite (principio di Bolzano-
« Weierstrass) ».

c) Fra gli aggregati, meritano particolare menzione le *successioni*, aggregati i cui elementi sono posti in corrispondenza biunivoca coi numeri naturali: corrispondenza che viene di solito messa in evidenza mediante un indice apposto all'elemento: così, la successione $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ Come è noto, le successioni costituiscono un caso particolare degli aggregati ordinati [3]; ad una successione dà luogo ogni aggregato *numerabile* [4].

---

[1] V. *Algebra Complementare*, n.° 135.
[2] Ibid., n.° 137.
[3] Ibid., n.i 126, 138.
[4] Ibid., n.° 46.

Ogni aggregato che ammette un solo punto limite è numerabile; l'aggregato si può ordinare in una successione che *ha per limite* [1] quel punto. Zermelo

La successione è detta allora regolare. Non è escluso che il punto limite sia il punto all'infinito.

Per indicare che il punto p è limite della successione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, scriveremo talvolta $a_n \rightarrow p$; si legge a_n *tende a* p_n.

12. *a*) *Aggregato derivato* A' di un aggregato A è l'insieme dei punti limiti di A. Per una successione regolare, l'aggregato derivato consta di un solo punto.

b) Quando l'aggregato A' fa parte di A, questo si dice *chiuso*. $A' \subset A$

c) Quando l'aggregato A fa parte di A', A si dice *denso in sè*.

d) Quando A ed A' coincidono, A è chiuso e denso in sè ad un tempo, e si dice *perfetto*.

e) Un aggregato A si dice *denso* nell'aggregato B, quando ogni punto di B appartiene ad A'. $B \subset A'$

Il derivato di A' si indica con A'', quello di A'' con A''',... quello di $A^{(n-1)}$ con $A^{(n)}$.

Ogni punto di A'' appartiene evidentemente ad A', quindi ogni aggregato derivato è chiuso.

13. Un punto x di un aggregato A si dice *interno* all'aggregato quando tutti i punti di un intorno (n.° 9) di x appartengono ad A.

Un punto x si dice *esterno* ad A quando non appartiene ad A nè x, nè alcun punto di un suo intorno preso abbastanza piccolo.

Il punto x si dice *isolato* se appartiene ad A, ma non vi appartiene alcun altro punto di un intorno di x abbastanza piccolo.

Un punto x si dice infine *al contorno* di A, se in qualunque intorno di x si trovano tanto punti interni ad A quanto punti non interni ad A.

---

[1] Ibid., n.° 138, *a*) e *b*).

Il punto non interno ad A potrebbe essere x medesimo; esso è allora *punto isolato* del contorno.

L'insieme dei punti interni ad A costituisce un'*area aperta*; l'insieme dei punti interni e dei punti al contorno costituisce un'*area chiusa*.

Così, l'aggregato dei punti x pei quali è $|x| < r$ è costituito da soli punti interni; i punti al contorno sono dati da $|x| = r$, ma non appartengono all'aggregato, che è pertanto un'area aperta. Invece l'aggregato dei punti tali che $|x| \leq r$ contiene il contorno, e costituisce un'area chiusa.

Ogni area, a meno che non comprenda l'intero piano, ammette un contorno.

14. Sia t una variabile reale data nell'intervallo $t_0 t'$; siano $u(t)$, $v(t)$ funzioni di t date, e continue in quell'intervallo. L'insieme dei punti $x = u(t) + iv(t)$ costituisce una *linea* nel piano x (linea di JORDAN).

La linea avrà un *punto doppio* $\bar{u} + i\bar{v}$ quando per due valori t_1, t_2 di t, compresi fra t_0 e t', sia

$$u(t_1) = u(t_2) = \bar{u}, \quad v(t_1) = v(t_2) = \bar{v};$$

la linea sarà chiusa se è

$$u(t_0) = u(t'), \quad v(t_0) = v(t'),$$

aperta nel caso contrario.

Si faccia nell'intervallo $t_0 \dots t'$ una suddivisione ζ mediante i punti $t_1, t_2, \dots t_n$, indi si consideri, posto

$$x_h = u(t_h) + iv(t_h), \quad x' = u(t') + v(t'), \quad (h = 0, 1, 2, \dots n),$$

la somma $|x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_n - x'|$: questa dà il perimetro p di una poligonale inscritta nella curva. Se, nell'aggregato ordinato delle suddivisioni ζ [1], l'insieme delle p ammette limite (al tendere a zero del massimo intervallino

finito (il limite finito o no c'è sempre e coincide coll'estremo superiore (Scheeffer))

[1] Cfr. *Calcolo infinitesimale*, n.° 308.

in ζ), questo limite si assume come lunghezza della curva, come è noto, e la curva stessa si dice *rettificabile* [1].

Di norma, noi considereremo in seguito curve di JORDAN rettificabili e prive di punti doppi, e le diremo *curve regolari*.

È chiaro che una curva regolare non può avere punti *interni* nel senso definito al n.° 13.

15. *a*) Una linea, od un'area si dicono *limitate* quando si può descrivere un cerchio (R) tale che tutti i punti della linea o dell'area siano interni ad (R) (n.° 10, *a*).

b) Un'area limitata T si dice *connessa* quando, presi due suoi punti x, y ad arbitrio, è possibile di congiungerli mediante una linea regolare di cui tutti i punti siano interni all'area. Un'area connessa si dice anche *di un solo pezzo.*

La congiungente di x, y può, in particolare, essere una spezzata a lati rettilinei.

Le aree che qui consideriamo verranno riguardate come chiuse (n.° 13) quando non sia dichiarato il contrario.

c) Sia T un'area connessa, a e b due punti del suo contorno. Si congiungano a e b mediante una linea l tutta costituita da punti interni, e si convenga di *escludere* dall'area i punti di questa linea. Si dirà con ciò che si è fatto un *taglio* l nell'area T. Non è escluso che a e b possano coincidere.

Materializzando questa operazione, si può considerare il taglio come avente due lembi; e se si immagina un osservatore, in piedi sul piano, che cammini lungo il taglio fatto da a a b, alla destra e alla sinistra di questo osservatore corrisponderà rispettivamente il lembo *destro* ed il lembo *sinistro* del taglio. Fatto un taglio in un'area, i suoi lembi possono considerarsi come facenti parte del contorno dell'area tagliata, e quindi si possono fare nuovi tagli fra due punti (distinti o coincidenti) del taglio già eseguito.

[1] Condizione necessaria e sufficiente a ciò, come sa il lettore che ha cognizione della teoria delle funzioni di variabile reale, è che le funzioni $u(t)$, $v(t)$ siano a variazione limitata (v. JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2ème ed., T. I, n.i 67-72, 105-111). v. anche [illegible]

(·) Si può anche definire dicendo che una qualunque linea chiusa appartenente all'area può ridursi per deformazione continua ad un punto, senza uscire dalle area

16. *a*) Un'area connessa T si dice ***semplicemente connessa*** quando qualsiasi taglio (n.° 15, *c*) eseguito nell'area stessa le toglie la connessione. (·) v. anche pag 93 e pag 99

Tali sono, ad esempio, l'area di un rettangolo, di un triangolo, di un cerchio, di un'ellisse. Invece l'area di una corona circolare non è semplicemente connessa, come si vede facendo un taglio che unisca un punto della circonferenza maggiore ad un punto della minore.

b) Sia T un'area connessa, ma non semplicemente. Se un solo taglio la può ridurre semplicemente connessa, si dice che T ha *l'ordine* 1 *di connessione*; se occorrono p tagli a rendere T semplicemente connessa, si dice che T ha *l'ordine* p *di connessione*. In un'area dell'ordine p di connessione, $p+1$ tagli comunque eseguiti tolgono sempre la connessione.

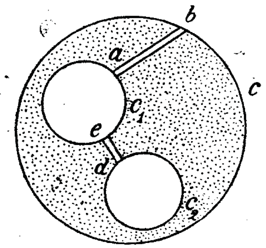


Fig 3

Come esempî, una corona circolare ha l'ordine 1 di connessione: infatti, essa si rende semplicemente connessa mediante un taglio che va da un punto dell'una circonferenza di contorno ad un punto dell'altra. L'area chiusa (fig. 3) da una circonferenza C esterna e da due circonferenze C_1, C_2 interne ha l'ordine di connessione 2; infatti è resa semplicemente connessa mediante i due tagli *ab*, *ed*.

c) Però, a giustificare la precedente definizione, occorre dimostrare che il numero di tagli con cui una data area T si rende semplicemente connessa è costante, comunque siano scelti i tagli stessi. A questo effetto, premettiamo: 1°) che se due tagli *ab*, *cd* (fig. 4) s'incrociano, si vengono a costituire tre tagli: il taglio *cd* o t, ed i due t_1, t_2 derivanti da *ab*, nei due pezzi separati da t; 2°) che un'area semplicemente connessa è divisa da m tagli in $m+1$ pezzi: infatti, un taglio la divide in due pezzi: supposto che m tagli la dividano in $m+1$ pezzi, un taglio di più dividerà uno di questi pezzi in due, e quindi l'enunciato, ammesso per m, è vero per $m+1$.

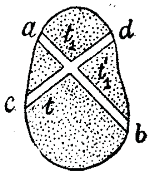


Fig. 4

Ciò premesso, siano A, B due sistemi, l'uno formato da p, l'altro da q tagli, ognuno dei quali valga a rendere semplicemente connessa una data area T. Si eseguisca in T dapprima il sistema A di tagli, poi il sistema B, e vi siano fra i primi ed i secondi s punti d'intersezione; per quanto si è detto, il numero totale dei tagli così formato è $p+q+s$: ma, poichè coi tagli A la T è resa semplicemente connessa, i $q+s$ rimanenti tagli la decompongono in $q+s+1$ pezzi. Si eseguisca invece in T dapprima il sistema B di tagli, poi il sistema A: coi primi q la T è resa semplicemente connessa, e quindi coi rimanenti $p+s$, è decomposta in $p+s+1$ pezzi. Ma comunque si operi, il numero dei pezzi ottenuti è sempre quello, onde $p+s+1=q+s+1$, cioè $p=q$. Il numero dei tagli occorrenti a rendere una data T semplicemente connessa è dunque fisso, il che giustifica il concetto di *ordine di connessione*.

d) Un'area (piana) di ordine di connessione p ha $p+1$ contorni (senza punti comuni) e reciprocamente. Ciò si vede facilmente mediante il passaggio da $p-1$ a p, ammesso come postulato che l'area semplicemente connessa ha un solo contorno. postulato

17. Data un'area limitata, chiusa, T, supponiamo che ad ogni suo punto x corrisponda un cerchio γ, cui x sia interno, e per ogni punto del quale sia soddisfatta una certa proprietà Q_x relativa ad x. Ne viene subito che descritto il cerchio γ_x', di centro x e tangente internamente a γ, per tutti i punti del cerchio γ_x' viene soddisfatta la proprietà Q_x: ad ogni punto x di T corrisponde dunque un cerchio avente x come centro, in cui la detta proprietà è verificata.

Sia ρ_x il raggio di γ_x; dico che il limite inferiore dei raggi ρ_x non è nullo [1]. Sia infatti ρ questo limite inferiore: esiste [2], per un noto teorema di WEIERSTRASS, almeno un punto v in T tale che per ogni intorno di v, il limite inferiore di ρ_x per i punti di questo intorno è ancora ρ. Ma se si descrive il cerchio γ_v, di raggio ρ_v, indi il cerchio concen-

[1] Ciò è, in sostanza, una forma del noto principio di HEINE-BOREL per il piano. La dimostrazione data nel testo, risale al 1882 (PINCHERLE, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche*, nelle Mem. dell'Acc. delle Scienze di Bologna, S. IV, T. III, § 5).

[2] *Algebra Complem.*, n.° 207.

infatti tutto può ridursi a dimostrare che:
Dato un insieme chiuso piano e un insieme di cerchi tali che ogni punto dell'insieme sia interno ad almeno uno di essi è possibile

trico di raggio metà, è chiaro che per ogni punto x interno a questo ultimo cerchio il raggio ρ_x è per lo meno $\frac{1}{2}\rho_v$; onde è $\rho \geq \frac{1}{2}\rho_v$ e quindi non è nullo. Si conclude pertanto che, nell'ipotesi fatta, « esiste un numero ρ tale che per « ogni punto x di T, la proprietà Q_x è verificata entro il « cerchio di centro x e raggio ρ ».

18. Come conseguenza del n.° precedente, notiamo quanto segue. Si circondi l'area T di un quadrato coi lati paralleli agli assi, cui l'area stessa sia tutta interna; indi si divida questo quadrato, mediante parallele ai lati, in tanti quadratini il cui lato non superi $\frac{1}{4}\rho\sqrt{2}$. Preso un punto x arbitrario in T, se esso si trova interno ad uno dei quadratini di questa rete, entro tutto il quadratino sarà verificata la proprietà Q_x; se si trova su un lato, essa sarà verificata in tutto il rettangolo formato dai due quadratini contigui lungo questo lato; infine, se x si trova su un vertice, la proprietà è verificata in tutto il quadrato costituito dai quattro quadrati concorrenti in quel vertice. L'area è dunque decomposta in un numero finito di parti, in ciascuna delle quali la proprietà è soddisfatta relativamente ai punti della parte stessa.

§ II. Funzioni di variabile complessa. — Integrali curvilinei.

19. *a*) Una variabile y si dice *funzione ad un valore* dei punti di un aggregato o campo A dato nel piano della variabile complessa x, quando ad ogni punto di A corrisponde un valore determinato per y.

È funzione *a più valori* quando ad ogni x corrispondono più valori determinati per y.

In questo caso, si ammette però che la legge di corrispondenza sia tale da permettere di scegliere, per ogni x, uno fra i valori corrispondenti di y; fatta la scelta su tutto l'aggregato A, si dice che si è scelto un *ramo ad un valore* della funzione data. In tutto il presente capitolo si tratterà esclusivamente o di funzioni ad un valore o, ciò che torna lo stesso, di rami ad un valore di funzioni date.

b) Conviene distinguere se A è aperto o chiuso. Dicendo che y è funzione di x nel campo aperto A, il valore di y non è dato nei punti dell'aggregato derivato A', mentre è dato nei punti di A' quando y è funzione di x nel campo chiuso A.

In ciò che segue, A costituirà generalmente una linea od un'area nel piano x; y sarà allora detta funzione dei punti della linea, o dell'area. Non si esclude che l'area possa comprendere tutto il piano-sfera della x.

c) Se i valori di y sono esclusivamente reali, y è funzione reale della variabile complessa; se possono essere complessi, y è funzione complessa della variabile complessa.

20. *a*) Per la funzione reale di variabile complessa valgono i concetti, noti al lettore [1], di funzione limitata o no, di limite superiore ed inferiore dei valori della funzione, ed il noto teorema di Weierstrass relativo al limite superiore od inferiore.

b) Per la funzione reale come per la funzione complessa di variabile complessa è noto pure il concetto di continuità: « la y è continua in un punto x_0 della linea (dell'area) « in cui è data se, essendo posto $y = f(x)$ ed essendo ε un « numero positivo arbitrario, corrisponde ad ε un numero « positivo δ tale che per ogni x_1 della linea (dell'area) per il « quale è $|x_1 - x_0| < \delta$, consegue $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$ ». La funzione è poi continua su tutta la linea (in tutta l'area) se è continua in ogni punto della linea (dell'area).

c) Dalla proposizione del n.° 17 segue immediatamente che se $y = f(x)$ è una funzione continua in un campo A (linea compresi gli estremi o area chiusa), essa è continua *uniformemente*, cioè, preso ε positivo arbitrario, ad esso corrisponde un δ positivo e tale che diviso il piano in quadrati di lato δ e considerati quei quadrati in cui cadono punti di A, se x, x' sono due punti appartenenti allo stesso quadrato, è $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Heine

d) Una funzione continua in un campo chiuso A è limitata, ed ammette in quel campo il suo limite superiore come massimo ed il suo limite inferiore come minimo.

[1] V. *Calcolo*, n.i 83 a 86.

21. *a*) Se $y = f(x)$ è una funzione reale di variabile complessa, se ne può dare una rappresentazione grafica innalzando nel punto x del campo A dove è data la funzione, perpendicolarmente al piano delle x, una ordinata xM misurata dal valore di y, e superiormente od inferiormente al piano (supposto orizzontale) secondo che y è positivo o negativo. Il luogo dei punti M darà la grafica della funzione. Nei casi usuali, questo luogo sarà una linea se A è una linea, una superficie se A è una superficie.

b) Se $y = f(x)$ è funzione complessa di variabile complessa, data in un'area, si potrà rappresentare y in un piano riferito a due assi ortogonali, ponendo $y = \xi + i\eta$ come si è posto $x = u + iv$, e la relazione fra x ed y equivarrà alle due relazioni

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v)$$

che danno ξ ed η come funzioni di u e v. Se le ξ, η sono, nel campo superficiale A, derivabili ed il loro determinante funzionale è, in questo campo, diverso da zero [1], le relazioni precedenti, equivalenti ad $y = f(x)$, danno una rappresentazione del piano x sul piano y, per la quale ad un'area contenuta in A corrisponde un'area nel piano y.

22. Sia data nel piano x una linea l rettificabile limitata, di cui l sia la lunghezza, a e b i punti estremi, in modo che la curva si intende percorsa positivamente da a verso b. Le equazioni parametriche della curva siano, $u(t)$ e $v(t)$ essendo funzioni integrabili [2]:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \tag{1}$$

a corrispondendo al valore t_0 e b al valore t_1 del parametro: le coordinate di a e b sono cioè rispettivamente $u(t_0)$, $v(t_0)$ ed $u(t_1)$, $v(t_1)$.

Non si esclude che la curva possa essere chiusa, nel quale caso le funzioni $u(t)$, $v(t)$ riprendono lo stesso valore per t_0 e t_1, ed i punti estremi a e b coincidono.

---

[1] *Calcolo*, n.i 269, e 448, *b*) e *c*).

[2] La l essendo supposta rettificabile (n.° 14), le $u(t)$, $v(t)$ sono a variazione limitata e quindi integrabili (JORDAN, loc. cit.).

Sia $f(x) = \xi(u, v) + i\eta(u, v)$ una funzione complessa dei punti della linea l, e pertanto della variabile reale t. Supposte $\xi[u(t), v(t)]$ ed $\eta[u(t), v(t)]$ integrabili nell'intervallo $t_0 \dots t_1$, definiremo l'espressione

$$\int_{(l)} f(x)dx \tag{2}$$

che diremo « integrale della funzione $f(x)$ esteso alla linea l » come la somma degli integrali curvilinei [1]

$$\int_{(l)} \xi(u, v)du - \int_{(l)} \eta(u, v)dv + i\int_{(l)} \xi(u, v)dv + i\int_{(l)} \eta(u, v)du, \tag{3}$$

ognuno dei quali ha, come è noto, un significato perfettamente determinato. Se alle ipotesi fatte sulle u, v aggiungiamo quelle che siano derivabili nell'intervallo $t_0 \dots t_1$, e indichiamo con $u'(t)$, $v'(t)$ le derivate, gl'integrali che figurano in (3) si potranno esprimere mediante gl'integrali semplici di variabile reale:

$$\int_{t_0}^{t} \xi[u(t), v(t)]u'(t)dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} \eta[u(t), v(t)]v'(t)dt, \dots \tag{4}$$

23. Dalla definizione di (2) risultano facilmente le osservazioni seguenti:

a) Se la linea l viene percorsa da b ad a anzichè da a a b, l'integrale (2) muta di segno.

b) Se m, n, p sono tre punti della linea l — dove m può eventualmente coincidere con a e p con b — e si indica con l_1 il tratto di linea fra m ed n, l_2 quello fra n e p, l_3 quello fra m e p, si ha

$$\int_{(l_3)} f(x)dx = \int_{(l_1)} f(x)dx + \int_{(l_2)} f(x)dx, \tag{5}$$

che esprime la proprietà additiva degli integrali curvilinei (2); e si possono ripetere qui le osservazioni che si

---

[1] *Calcolo*, n.° 404.

fanno [1], a proposito di questa proprietà, per gl' integrali semplici di funzioni di variabile reale.

c) L' integrale

$$\int_{(l)} |dx|$$

non differisce da $\int_{(l)} \sqrt{du^2 + dv^2}$, e rappresenta quindi la lunghezza della linea l.

d) Se M è il limite superiore dei valori della funzione $f(x)$ lungo l, si ha immediatamente, dall' osservazione precedente:

(6) $$\left| \int_{(l)} f(x) dx \right| < Ml.$$

e) Essendo $f(x)$, $g(x)$ due funzioni complesse dei punti della linea l e c una costante, valgono le uguaglianze

(7) $$\int_{(l)} [f(x) + g(x)] dx = \int_{(l)} f(x) dx + \int_{(l)} g(x) dx, \qquad \int_{(l)} c f(x) dx = c \int_{(l)} f(x) dx,$$

che stabiliscono la proprietà distributiva per gl' integrali (2).

f) Infine, se $f_1(x)$, $f_2(x)$,... $f_n(x)$,... è una successione di funzioni integrabili lungo la linea l, e la serie $\Sigma f_n(x)$ è convergente uniformemente su tutta la linea stessa, la medesima dimostrazione che si dà per le funzioni di variabile reale (v. *Calcolo*, n.° 354) vale a provare che $\Sigma f_n(x)$ è integrabile, e che l' integrale della somma è uguale alla somma della serie (convergente) degli integrali delle $f_n(x)$.

24. *a*) Come applicazione, si consideri l' integrale

$$\int_{(l)} dx = \int_{(l)} (du + idv);$$

esso equivale ad

$$\int_{t_0}^{t_1} u'(t) dt + i \int_{t_0}^{t_1} v'(t) dt = u(t_1) + iv(t_1) - u(t_0) - iv(t_0) = b - a.$$

[1] Ibid., n.i 319-320.

b) Analogamente, l' integrale

$$\int_{(l)} x dx = \int_{(l)} (udu - vdv) + i \int_{(l)} (udv + vdu)$$

dà, passando alla variabile t:

$$\frac{1}{2} [u^2(t_1) - v^2(t_1) + 2iu(t_1) v(t_1)] -$$
$$- \frac{1}{2} [u^2(t_0) - v^2(t_0) + 2iu(t_0) v(t_0)] = \frac{1}{2} (b^2 - a^2).$$

c) Assumendo come linea l la circonferenza (r) col centro in $x = 0$ e di raggio r, si ha

(8) $$\int_{(r)} x^m dx = 0 \ (m \text{ intero e} \gtrless -1); \qquad \int_{(r)} \frac{dx}{x} = 2\pi i.$$

Infatti, posto $x = re^{it}$, onde $dx = ire^{it} dt$, l' integrale $\int_{(r)} x^m dx$ equivale a

$$ir^{m+1} \int_0^{2\pi} \cos (m+1) t dt - r^{m+1} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} (m+1) t dt,$$

e l' integrazione dà per risultato lo zero per ogni m intero, salvo il caso $m = -1$, per il quale si ottiene $2\pi i$.

Si osservi infine che negli integrali (2) non è da escludersi il caso della linea l infinita, o del valore $\pm \infty$ per il parametro t, o della $f(x)$ non limitata, purchè esistano, in questi casi, i rispettivi integrali impropri [1] nelle espressioni (4) corrispondenti.

§ III. Monogeneità.

25. Data la funzione $y = f(x)$ complessa della variabile complessa x nell' area A, e posto al solito $x = u + iv$ ed

(1) $$y = \xi + i\eta = \xi(u, v) + i\eta(u, v),$$

[1] *Calcolo*, n.i 338-369.

si suppongano ***differenziabili*** (1) nel punto (u, v) le funzioni $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$. Dato allora ad x l'incremento h, cioè posto

$$x + h = u + s + i(v + t),$$

$h = s + it$

dove s e t si riguardano come infinitesimi, si formi il rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\xi(u+s,\, v+t) + i\eta(u+s,\, v+t) - \xi(u, v) - i\eta(u, v)}{s + it};$$

per la supposta differenziabilità di ξ ed η ne risulterà, ε essendo infinitesimo di ordine superiore ad h:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{\partial\xi}{\partial u}s + \frac{\partial\xi}{\partial v}t + i\frac{\partial\eta}{\partial u}s + i\frac{\partial\eta}{\partial v}t + \varepsilon}{s + it},$$

e, posto $t = \alpha s$:

$$(2) \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{\partial\xi}{\partial u} + i\frac{\partial\eta}{\partial u} + \alpha\left(\frac{\partial\xi}{\partial v} + i\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)}{1 + \alpha i} + \frac{\varepsilon}{h}.$$

Facendo ora tendere h (o, ciò che è lo stesso, s) a zero, il primo membro tende al limite λ_α dato da

$$(3) \qquad \boxed{\lambda_\alpha = \frac{1}{1 + \alpha i}\left[\frac{\partial\xi}{\partial u} + i\frac{\partial\eta}{\partial u} + \alpha\left(\frac{\partial\xi}{\partial v} + i\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)\right].}$$

derivata

Il caso $\alpha = 0$ non fa eccezione, il limite essendo in tale caso $\frac{\partial\xi}{\partial u} + i\frac{\partial\eta}{\partial u}$, e neppure il caso $\alpha = \infty$, essendo allora il limite $-i\frac{\partial\xi}{\partial v} + \frac{\partial\eta}{\partial v}$.

In generale, il limite del rapporto incrementale esiste dunque, determinato per ogni valore di α e variabile con α, quando le ξ, η sono funzioni differenziabili; inoltre, per essere la (2) della forma $\frac{A + B\alpha}{C + D\alpha} = \lambda_\alpha$, essa non può dare uno stesso valore (λ) per due diversi valori di α, a meno che non

(1) *Calcolo*, n.° 234.

Se f è reale $f(x) = \xi + i.0$ essa non può esser monogena se u è una costante (cioè rappresentata da un piano ∥ al piano

rappresenti fra α e λ_α una proiettività degenere, cioè a meno che non sia $AD = BC$. In questo caso, il valore di λ risulta indipendente da α; il rapporto incrementale ha limite unico qualunque sia la direzione secondo cui l'incremento h tende a zero; e la condizione $AD = BC$ equivale a

$$i\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{\partial\eta}{\partial u} = \frac{\partial\xi}{\partial v} + i\frac{\partial\eta}{\partial v},$$

da cui, separando le parti reali e le immaginarie:

$$(4) \qquad \boxed{\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{\partial\eta}{\partial v}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial v} = -\frac{\partial\eta}{\partial u}.}$$

Condiz. di monogeneità
cioè indipendenza della
derivata dalla direzione

Queste equazioni — a derivate parziali — danno la condizione necessaria e sufficiente perchè il limite del rapporto incrementale di $f(x)$ sia indipendente dalla direzione dell'incremento dato ad x.

« Una funzione $f(x)$ di variabile complessa si dice ammettere derivata in un punto x quando $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tende « ad uno stesso limite, qualunque sia la direzione secondo cui « l'incremento h dato ad x tende a zero; quel limite è la « derivata $f'(x)$ di $f(x)$ in quel punto ».

« Una funzione $f(x)$ che in tutti i punti di un campo ammette derivata si dice *monogena* (Cauchy) in quel campo ».

« La condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f = \xi + i\eta$ sia monogena in un campo è che siano « verificate le (4) in tutto il campo ».

Le relazioni (4) si dicono perciò *condizioni di monogeneità*.

26. *a*) Essendo $f(x)$ monogena nel campo A, il valore di λ si può avere facendo $\alpha = 0$, od $\alpha = \infty$ in (2), e così si ha, per la derivata:

$$(5) \qquad \boxed{f'(x) = \frac{\partial\xi}{\partial u} + i\frac{\partial\eta}{\partial u} = -i\frac{\partial\xi}{\partial v} + \frac{\partial\eta}{\partial v}.}$$

derivata di una funzione monogena

b) Dalle (4) risulta subito che « una funzione mono- « gena non può essere reale in tutto un campo, a meno di

« ridursi ad una costante reale; non può essere puramente « immaginaria in un campo, a meno di ridursi ad una co- « stante immaginaria ».

c) Dove è $f'(x)=0$ in un campo dove $f(x)$ è monogena, sono nulle le quattro derivate parziali $\frac{\partial\xi}{\partial u}, \frac{\partial\xi}{\partial v}, \frac{\partial\eta}{\partial u}, \frac{\partial\eta}{\partial v}$ e reciprocamente.

27. La $y=f(x)$, monogena nell'area A, fa corrispondere a questa area del piano x un campo nel piano y. Tale corrispondenza è data dalle $\xi=\xi(u, v)$, $\eta=\eta(u, v)$, il cui determinante funzionale è, per le (4), $\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2$ e non può quindi essere nullo se non è $\frac{\partial\xi}{\partial u}=0$, $\frac{\partial\xi}{\partial v}=0$, e conseguentemente $f'(x)=0$: perciò [1] « ad ogni area C contenuta in A ed entro cui la $f'(x)$ « non si annulla, la $y=f(x)$ fa corrispondere un'area nel « piano y ».

28. a) Se le ξ, η ammettono le derivate seconde [2] e se vale l'inversione delle derivazioni, risulta subito dalle (4) che è

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}=0, \qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial v^2}=0. \tag{6}$$

Le parti reale ed immaginaria di una funzione monogena soddisfano dunque alla nota equazione di LAPLACE, ossia sono *funzioni armoniche* delle due variabili reali u e v. Inversamente, una funzione armonica α, soddisfacente cioè all'equazione di LAPLACE $\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}=0$, può riguardarsi sempre come parte reale di una funzione monogena. Infatti, si può determinare una funzione β (all'infuori di una costante additiva) dalle $\frac{\partial\beta}{\partial u}=-\frac{\partial\alpha}{\partial v}$, $\frac{\partial\beta}{\partial v}=\frac{\partial\alpha}{\partial u}$, compatibili poichè l'equazione di

(1) *Calcolo*, n.i 269 e 448, b) e c).

(2) Come si vedrà più avanti (n.° 93) l'esistenza delle derivate seconde e di tutte le successive è conseguenza dell'ipotesi della monogeneità.

LAPLACE costituisce la condizione di integrabilità, e la $\alpha+i\beta$ è allora funzione monogena.

b) Le (4) esprimono che « le espressioni $\xi du-\eta dv$, « $\eta du+\xi dv$ sono differenziali esatti ».

c) Data, di una funzione monogena, la parte reale, la parte immaginaria risulta determinata dalle (4) all'infuori di una costante.

d) Se la parte reale di una funzione monogena è costante in un'area, o lungo una linea, è ivi costante, per le (4), anche la parte immaginaria, e quindi la funzione stessa.

e) Posto

$$u=r\cos\theta, \quad v=r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

le condizioni di monogeneità sono espresse — in coordinate polari — da

$$r\frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{\partial\eta}{\partial\theta}, \quad r\frac{\partial\eta}{\partial r}=-\frac{\partial\xi}{\partial\theta}. \tag{4'}$$

f) Dalle (4) risulta ancora

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}+\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}=0, \tag{7}$$

relazione che indica come « le linee $\xi(u, v)=c$, $\eta(u, v)=c'$, « dove c e c' sono costanti arbitrarie, costituiscono nel piano x « due sistemi fra loro ortogonali ».

g) Le equazioni

$$\xi=\xi(u, v), \quad \eta=\eta(u, v)$$

si possono riguardare come rappresentanti due superficie riferite agli assi u e v nel piano x, e ad un asse perpendicolare nell'origine al piano stesso. I punti delle due superficie aventi la medesima proiezione (u, v) nel piano x, si possono dire *corrispondenti*. Ora, i coseni degli angoli della normale alla prima superficie sono proporzionali a $\frac{\partial\xi}{\partial u}, \frac{\partial\xi}{\partial v}, -1$, e quelli della normale alla seconda, per le (4), sono proporzionali a $-\frac{\partial\xi}{\partial v}, \frac{\partial\xi}{\partial u}, -1$: ne viene che con una rotazione di 90° intorno all'asse perpendicolare al piano x, l'una normale si riduce parallela all'altra.

Il lettore può facilmente verificare che la **curvatura totale (inversa del prodotto dei raggi di curvatura principali) è la medesima per le due** superficie nei punti corrispondenti.

29. « Se nel punto x le derivate $\frac{\partial\xi}{\partial u}$, $\frac{\partial\xi}{\partial v}$ sono continue e « la $f(x)$ ammette la derivata $f'(x)$, il **rapporto incrementale** « di $f(x)$ tende uniformemente alla derivata [1] ».

Ciò significa che, preso ε positivo arbitrario, si può, in corrispondenza, determinare un numero positivo δ tale che per ogni x' pel quale sia $|x' - x| < \delta$, risulta

$$\left|\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

Anzitutto, dalla continuità delle $\frac{\partial\xi}{\partial u}$, $\frac{\partial\xi}{\partial v}$,... segue [2] la differenziabilità di ξ, η e quindi la validità delle (4). Posto $h = s + it$, si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \frac{1}{s+it}[\xi(u+s, v+t) - \xi(u, v+t) + \xi(u, v+t) - \xi(u, v) +$$
$$+ i(\eta(u+s, v+t) - \eta(u, v+t) + \eta(u, v+t) - \eta(u, v))]$$

da cui, per il teorema del valor medio, ed indicando $\frac{\partial\xi}{\partial u}$ con ξ_u', $\frac{\partial\eta}{\partial u}$ con η_u', ecc., si ha:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{s}{s+it}\xi_u'(u+\theta_1 s, v+t) + \frac{t}{s+it}\xi_v'(u, v+\theta_2 t) +$$
$$+ \frac{is}{s+it}\eta_u'(u+\theta_3 s, v+t) + \frac{it}{s+it}\eta_v'(u, v+\theta_4 t),$$

dove θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 sono numeri positivi compresi fra 0 ed 1.

---

[1] V. A. PRINGSHEIM, *Sitzungsber. der k. bayer. Akad. der Wissensch.*, T. 25. 1895.

[2] Calcolo, n.° 235.

Formiamo ora

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x);$$

essendo, dalla (5), $f'(x) = \xi_u' + i\eta_u'$ e moltiplicando e dividendo $f'(x)$ per $s + it$, viene, tenendo conto delle (4):

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \frac{s}{s+it}(\xi_u'(u+\theta_1 s, v+t) - \xi_u'(u, v)) -$$
$$- \frac{t}{s+it}(\eta_u'(u, v+\theta_2 t) - \eta_u'(u, v)) +$$
$$+ \frac{is}{s+it}(\eta_u'(u+\theta_3 s, v+t) - \eta_u'(u, v)) +$$
$$+ \frac{it}{s+it}(\xi_u'(u, v+\theta_4 t) - \xi_u'(u, v)).$$

Ma le ξ_u', η_u' si sono supposte continue in (u, v); onde, preso il numero arbitrario positivo ε, si può determinare δ tale che per $p^2 + q^2 < \delta^2$, sia

$$|\xi_u'(u+p, v+q) - \xi_u'(u, v)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |\eta_u'(u+p, v+q) - \eta_u'(u, v)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

E poichè le frazioni $\frac{s}{s+it}$, $\frac{t}{s+it}$ sono, in modulo, non maggiori dell'unità, si ha in conseguenza, per ogni $|h| < \delta$:

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

30. *a*) Segue dalla proposizione precedente che in qualunque modo x' tenda ad x, anche non seguendo una determinata direzione, o tendendo ad x assintoticamente [1], il rapporto incrementale $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ tende sempre ad $f'(x)$.

b) Ne segue pure, per la proposizione del n.° 17, che se $f(x)$ è tale che le derivate prime di ξ ed η siano continue in tutta l'area chiusa A, e tali da soddisfare alle (4), si potrà, preso ε, determinare un δ valevole per ogni punto x del-

---

[1] Per esempio, seguendo una spirale logaritmica di polo x.

$\frac{s}{s+it} = \frac{s^2 - ist}{s^2+t^2}$

l'area A, in guisa che per tutti i punti x' dell'area interni al cerchio di centro x e di raggio δ, sia

$$\left| \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} - f'(x) \right| < \varepsilon.$$

31. Una corrispondenza, punto per punto, fra due superficie o porzioni di superficie dicesi *conforme*, quando da essa viene conservata la similitudine nelle parti infinitesime, cioè l'uguaglianza degli angoli corrispondenti, e la costanza nel rapporto dei segmenti infinitesimi la quale risulta come conseguenza della isogonalità. Sull'argomento della rappresentazione conforme fra due piani, è fondamentale la seguente proposizione:

« Una funzione $y = f(x)$ monogena in un'area connessa « del piano x nella quale $f'(x)$ non si annulla, dà una rap- « presentazione conforme dell'area A sul piano y. Recipro- « camente, se è conforme la trasformazione

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v) \tag{8}$$

« dove ξ, η sono due funzioni differenziabili a determinante « funzionale non nullo date nell'area A, una delle due fun- « zioni $\xi + i\eta$ o $\xi - i\eta$ è monogena nell'area stessa ».

Date le (8), sia $v = v(u)$ una curva l nell'area A; posto $\dfrac{dv}{du} = k$, l'elemento d'arco di l è ds

$$ds = \sqrt{1 + k^2}\, du. \tag{9}$$

La curva l' che corrisponde ad l, mediante le (8), nel piano ξ, η, avrà come elemento d'arco

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2},$$

con

$$d\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + k\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) du, \quad d\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} + k\frac{\partial \eta}{\partial v}\right) du,$$

da cui

$$d\sigma^2 = \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)k + \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2\right]k^2\right] du^2. \tag{10}$$

Condizione necessaria e sufficiente per la similitudine nelle parti infinitesime in un punto generico u, v di A, è che il rapporto $\dfrac{d\sigma}{ds}$ risulti indipendente dalla linea l passante per il punto: questa indipendenza porta infatti la conservazione e degli angoli e dei rapporti dei segmenti infinitesimi: il rapporto $\dfrac{d\sigma}{ds}$ deve dunque risultare indipendente da k, coefficiente angolare di l nel punto considerato, e perciò occorre e basta che sia:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} = 0. \tag{11}$$

Ora, se $y = f(x) = \xi + i\eta$ è monogena, in base alle (4) le (11) saranno certamente soddisfatte. Inversamente, se sono soddisfatte le (11), si ricava dalla seconda di esse

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} : \frac{\partial \eta}{\partial v} = \lambda, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} : \frac{\partial \eta}{\partial u} = -\frac{1}{\lambda}, \tag{12}$$

onde, sostituendo nella prima:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\right)^2 (\lambda^2 - 1) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right),$$

la quale, per il segno diverso nei due membri, non è possibile se non è $\lambda = \pm 1$: e per $\lambda = +1$ è monogena la $\xi + i\eta$, per $\lambda = -1$ è monogena la $\xi - i\eta$.

32. Se $f(x)$, $g(x)$ sono due funzioni monogene date in un'area comune A e se $f'(x)$, $g'(x)$ sono le loro derivate:

a) la somma $f(x) + g(x)$ è monogena in A, e la derivata della somma è data dalla somma delle derivate;

b) il prodotto $f(x)g(x)$ è monogeno in A, e la derivata del prodotto è data da $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

c) il quoziente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, posto che $g(x)$ non si annulli entro A, è monogeno in A e la sua derivata è data da $\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f^2(x)}$;

d) essendo $y = f(x)$ funzione monogena di x in A, la quale fa corrispondere ad A l'area B nel piano y, ed essendo $z = \varphi(y)$ funzione monogena di y in B, sarà z funzione monogena $F(x)$ di x in A, e la derivata di $F(x)$ rispetto ad x è data da $F'(x) = \varphi'(y) f'(x)$.

Le proposizioni *a*) e *b*) si estendono al caso di più funzioni monogene, purchè in numero finito.

Tutte le proposizioni precedenti si dimostrano, parola per parola, come le analoghe proposizioni relative alle funzioni di variabile reale [1].

33. Poichè, da

$$\frac{x^m - x'^m}{x - x'} = x^{m-1} + x^{m-2}x' + \ldots + x'^{m-1},$$

risulta, per ogni x a distanza finita nel piano complesso e per ogni m intero positivo,

$$\lim_{x' \to x} \frac{x^m - x'^m}{x - x'} = m x^{m-1},$$

in qualunque modo

così x^m è monogena in tutto il piano complesso, ad eccezione di $x = \infty$. Ne risulta, applicando le proposizioni del n.° precedente, che ogni funzione razionale intera è monogena in ogni regione finita del piano, e che ogni funzione razionale fratta è monogena in ogni regione finita del piano non contenente radici del denominatore.

---

[1] *Calcolo*, n.i 145, 146, 149 e 151.

Capitolo Terzo

SERIE DI POTENZE E FUNZIONI ANALITICHE

§ I. Le serie di potenze.

34. Il lettore sa già, dall'Analisi algebrica ed infinitesimale, quale importanza abbiano, per lo studio e per il calcolo delle funzioni, le serie procedenti per le potenze intere positive di una o più variabili, serie che si diranno brevemente ***serie di potenze*** delle variabili stesse.

Nel presente Capitolo, ci occupiamo delle serie di potenze di una sola variabile.

La forma generale di una serie di potenze della variabile x è

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n + \ldots ;$$

la serie è ***data*** quando è data la successione dei suoi coefficienti $a_0, a_1, \ldots$.

Richiamiamo qui le proposizioni principali della teoria elementare delle serie di potenze, proposizioni che avremo frequentemente da applicare in ciò che segue [1].

1°) Data la serie di potenze (1), se esistono due numeri positivi M ed s tali che sia, da un indice n in avanti

$$|a_n| < \frac{M}{s^n},$$

---

[1] Per le dimostrazioni, v. *Calcolo*, Cap. II, §§ II e III.

la serie è convergente assolutamente per tutti i valori di x, reali o complessi, per i quali è $|x| < s$ (CAUCHY).

Se ne deduce subito che se una serie di potenze è convergente per un valore $\bar{x}$ della variabile, è convergente per tutti i valori x tali che sia $|x| < |\bar{x}|$.

2°) Ad ogni serie (1) corrisponde un numero positivo o nullo, r, tale che la serie stessa *converge* (ed inoltre assolutamente) per ogni $|x| < r$, mentre *non converge* per ogni $|x| > r$. Il numero r viene detto *raggio di convergenza*, il cerchio e la circonferenza (r) si dicono rispettivamente *cerchio* e *circonferenza di convergenza* della serie stessa.

Il raggio di convergenza risulta determinato dalla successione dei coefficienti [1]. Esso può essere nullo, come nelle serie $\Sigma n!\,x^n$, $\Sigma n^n x^n$; può essere infinito, come in $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n^n}}$; può infine avere qualunque valore positivo fra 0 ed ∞, come in $\Sigma a^n x^n$, in cui è uguale ad $\frac{1}{|a|}$. Sulla circonferenza di convergenza, la serie di potenze può, a seconda dei casi, essere sempre convergente, anche assolutamente, o sempre divergente, o in alcuni punti convergente, in altri no. Le serie $\sum \frac{x^n}{n^2}$, $\Sigma n x^n$, $\sum \frac{x^n}{n}$, tutte aventi $r = 1$ come raggio di convergenza, danno esempio rispettivamente dei tre casi. teorema di Cauchy Hadamard

Non è da confondere l'espressione *cerchio in cui converge* una serie di potenze coll'altra *cerchio di convergenza* della serie. Se la serie (1) converge nel cerchio (r_1), ciò vuole dire che converge per $|x| < r_1$, ma non è escluso che possa convergere per valori di x maggiori in modulo di r_1, mentre quando (r) è il cerchio di convergenza di (1), ciò vuole dire che converge per $|x| < r$, ma non converge per alcun valore maggiore in modulo di r.

3°) La somma ed il prodotto di due date serie di potenze sono pure serie di potenze, ed esse convergono in ogni cerchio in cui convergono le due serie date. Lo stesso vale per la somma ed il prodotto di più serie di potenze date, in numero finito.

4°) Una serie di potenze è *uniformemente* convergente entro ogni cerchio (r_1), in cui r_1 è minore del raggio di con-

[1] V. più avanti, n.° 36.

principio di identità per le serie di potenze

vergenza della serie. Essa rappresenta, per conseguenza, in quel cerchio, una funzione continua della variabile x [1].

5°) Una serie di potenze, di raggio non nullo di convergenza, non può assumere il valore zero in un aggregato di punti aventi $x = 0$ come punto limite, senza ridursi ad avere tutti i coefficienti zero, il che si esprime dicendo che è *identicamente* nulla. Ne segue subito che se due serie assumono ugual valore (sono fra loro uguali) in tutti i punti di un aggregato di punti aventi $x = 0$ come punto limite — a *fortiori*, in tutta un'area comprendente $x = 0$ — esse saranno *identiche*, cioè avranno uguali, ciascuno a ciascuno, i coefficienti delle medesime potenze di x. Questa proposizione costituisce il *principio d'identità* delle serie.

Su questo principio si fonda il noto metodo detto *dei coefficienti indeterminati* [2].

6°) Se $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n, \dots$ è una successione di numeri i cui moduli sono compresi fra due numeri m positivo o nullo, M positivo, $(0 \leqq m < |\mu_n| < M)$, le due serie di potenze $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma \mu_n a_n x^n$, hanno il medesimo raggio di convergenza. In particolare hanno il medesimo raggio di convergenza le serie $\Sigma a_n x^n$ e $\Sigma |a_n| x^n$.

7°) Relativamente al comportamento della serie sulla sua circonferenza di convergenza, ricordiamo [3] che « se la « serie converge in un punto ξ della sua circonferenza di « convergenza, essa converge uniformemente lungo il raggio « che unisce 0 a ξ, estremo ξ incluso, e quindi, se a è la « somma della serie nel punto ξ, è continua la funzione defi- « nita per tutto il raggio 0ξ dal valore dato dalla serie di « potenze, cioè da a nel punto ξ ». teorema di Abel

8°) Si noti infine che se una serie di potenze è assolutamente convergente in un punto della circonferenza di convergenza, essa è tale su tutta la detta circonferenza.

[1] V. *Calcolo*, n.° 110, 112.
[2] V. Calcolo, n.° 104.
[3] Ibid., n.° 113. Questa proposizione è nota sotto il nome di *teorema di* ABEL.

La (3) è una serie doppia $\sum_n a_n \sum_s \binom{n}{s} |u|^{n-s} |v|^s$ convergente; quindi la serie doppia $\sum_n a_n \sum_s \binom{n}{s} u^{n-s} v^s$ converge assolutamente. Si potrebbe procedere rapidamente dicendo che allora la sua somma può calcolarsi tanto per orizzontali ($\sum a_n (u+v)^n = \sum a_n x^n = f(x)$) quanto per verticali $\sum_s \frac{v^s}{s!} \sum_n n(n-1)\dots(n-s+1) a_n u^{n-s} = \sum_s \frac{v^s}{s!} f^{(s)}(u)$ da cui $f(x) = \sum_s \frac{v^s}{s!} f^{(s)}(u)$

35. Entro il suo cerchio di convergenza considerato aperto, cioè circonferenza esclusa, una serie di potenze rappresenta dunque (n°. 34, 4°) una funzione continua della variabile x, funzione che indicheremo con $f(x)$; porremo dunque

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

La funzione è definita continua anche sulla circonferenza di convergenza, in virtù del n.° 34, 7°, se, r essendo il raggio di convergenza, è convergente assolutamente la serie $\Sigma a_n r^n$.

Si ponga ora, in (1), $x = u + v$, sotto la condizione

$$(2) \qquad |u| + |v| < r;$$

la serie a termini positivi $\Sigma |a_n| (|u| + |v|)^n$ risultando convergente, è applicabile alla serie

$$(3) \quad f(u+v) = \Sigma a_n (u+v)^n = \Sigma a_n \left(u^n + n u^{n-1} v + \binom{n}{2} u^{n-2} v^2 + \ldots + v^n \right)$$

il noto teorema sulla convergenza assoluta delle serie doppie [1] ed è lecito, senza alterare la somma, ordinare i termini della serie come meglio aggrada. In particolare, si può ordinare secondo le potenze crescenti di v, e si ottiene

$$(4) \quad f(u+v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n + v \sum_{n=1}^{\infty} n a_n u^{n-1} + \frac{v^2}{1 \cdot 2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n u^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{v^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-s+1) a_n u^{n-s} + \ldots.$$

Qui, i coefficienti delle successive potenze di v sono serie di potenze di u, le quali, in seguito alla (2), in cui $|v|$ si può supporre piccolo a piacere, convergono per $|u| < r$. Fissato u, la (4) è una serie di potenze di v convergente per $|v| < r - |u|$; il suo primo termine non è altro che $f(u)$, onde

$$\frac{f(u+v) - f(u)}{v} = \Sigma n a_n u^{n-1} + \frac{v}{2} \Sigma n(n-1) a_n u^{n-2} + \ldots$$

[1] *Alg. Complem.*, n.° 165, *i*).

(1) Mentre vale anche nel campo complesso il teor. del limite ... analogo a quello valido nel campo reale, così non è del teor. di derivazione per serie il quale nel campo reale si appoggia sul teor. del valor medio. v. anche Levi Analisi 2° pag 18

per la quale, lemma 2 ... tendono a 0 con v

e da questa, per la continuità della serie di potenze che costituisce il secondo membro, si deduce

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(u+v) - f(u)}{v} = \Sigma n a_n u^{n-1}.$$

Da tutto ciò si conclude:

a) « La funzione $f(x)$ definita da (1) è monogena « (n.° 25) entro tutto il suo cerchio di convergenza ».

Ne risulta, in particolare, che nè la parte reale, nè l'immaginaria, nè il modulo di $f(x)$ possono essere costanti in tutta un'area del cerchio di convergenza, a meno che la $f(x)$ si riduca alla costante a_0.

b) « La derivata $f'(x)$ di $f(x)$ è una serie di potenze, « convergente entro lo stesso cerchio, e che si ottiene da (1) « applicando la derivazione termine a termine ».

Il cerchio di convergenza di $f'(x) = \Sigma n a_n x^{n-1}$ è lo stesso (r); infatti la $f'(x)$ converge in questo cerchio, come si è visto, e se convergesse in un cerchio maggiore (r'), la $f(x)$, i cui coefficienti si deducono da quelli di $f'(x)$ dividendo per n, dovrebbe pure convergere in (r').

c) « I coefficienti di $\frac{v^2}{2}, \frac{v^3}{3!}, \ldots \frac{v^s}{s!}, \ldots$, nella (4), sono la de- « rivata seconda $f''(u)$, terza $f'''(u)$,...: s^{sima} $f^{(s)}(u)$,... di $f(u)$, tutte « monogene e date da serie aventi r come raggio di con- « vergenza; lo sviluppo (4) è quello di Taylor relativo « alla $f(u)$, ed è (1)

$$(5) \qquad f(u+v) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{v^s}{s!} f^{(s)}(u),$$

« valido sotto la condizione (2) ». $|u|+|v|<r$

d) Ponendo in (5) $u = \alpha$, $v = x - \alpha$, sotto la condizione

$$(6) \qquad |x - \alpha| < r - |\alpha|,$$

si ha lo sviluppo che, seguendo l'uso, si dirà di Maclaurin:

$$(7) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\alpha) \frac{(x-\alpha)^n}{n!};$$

(1) nel campo reale una funzione dotata delle derivate di tutti gli ordini ... finite non è senz'altro sviluppabile in serie di Taylor

(¹) per altri teoremi al riguardo v. anche Vivanti: Elem. analitiche Hoepli

in particolare, facendo $\alpha = 0$:

(8) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\,\frac{x^n}{n!}.$$

I coefficienti della serie di potenze $\Sigma a_n x^n$ rappresentante la funzione $f(x)$ entro il suo cerchio di convergenza, sono dunque dati da

(9) $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

36. Come si è ricordato al n. 34, 2.^{do}, il raggio r di una serie di potenze è determinato dalla successione dei coefficienti. Un teorema dovuto a Cauchy, ed il cui enunciato è stato precisato da Hadamard [1], dà il modo assai semplice di questa determinazione.

Conviene ricordare che, dato un aggregato A di numeri reali, si definisce come *limite massimo* dell'aggregato quel numero λ tale che, comunque preso il numero positivo ε, vi sono infiniti elementi dell'aggregato superiori a $\lambda - \varepsilon$, ma solo un numero finito di elementi superiori a $\lambda + \varepsilon$. Segue immediatamente da questa definizione che λ è il massimo dell'aggregato A' derivato di A. Se in particolare l'aggregato A è costituito da una successione $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ ed è λ il limite massimo, preso ε, si può determinare un $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ è $a_n < \lambda + \varepsilon$, mentre, per grande che sia $\bar{n}$, vi è qualche $n > \bar{n}$ tale che sia $a_n > \lambda - \varepsilon$. Non si esclude che, nella successione, infiniti elementi possano essere uguali fra loro: così, nella successione definita da $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$, $a_{2n+1} = 2$, è $\lambda = 2$.

Ogni aggregato limitato di numeri reali ammette un limite massimo, il quale è uguale od inferiore al limite superiore. Analogamente al limite massimo, si definisce il *limite minimo*, per il quale valgono analoghe osservazioni. Per un aggregato non limitato superiormente, il limite massimo è $+\infty$. Il limite massimo di a_n si indica con $\overline{\lim}\, a_n$.

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 23 janvier 1888.

Ciò posto, il teorema di Cauchy-Hadamard stabilisce che « essendo λ il limite massimo della successione $|\sqrt[n]{a_n}|$, $\frac{1}{\lambda}$ è il raggio di convergenza della serie $\Sigma a_n x^n$ ».

Infatti, preso ε positivo arbitrario, da un indice $\bar{n}$ in poi è

$$|\sqrt[n]{a_n}| < \lambda + \varepsilon, \quad \text{onde} \quad |a_n| < (\lambda + \varepsilon)^n;$$

Cauchy

ne viene (n.° 34, 1°), che la serie $\Sigma a_n x^n$ converge per $|x| < \frac{1}{\lambda + \varepsilon}$, e quindi, per l'arbitrarietà di ε, essa converge per ogni $|x| < \frac{1}{\lambda}$.

D'altra parte, esistono infiniti valori ν dell'indice n pei quali è

$$|\sqrt[\nu]{a_\nu}| > \lambda - \varepsilon, \quad \text{onde} \quad |a_\nu|\,|x^\nu| > |x(\lambda - \varepsilon)|^\nu;$$

ne viene che, per $|x(\lambda - \varepsilon)| > 1$, infiniti termini della serie $\Sigma a_n x^n$ si mantengono superiori ad un numero maggior d'uno, e quindi la serie stessa non è convergente per $|x| > \frac{1}{\lambda - \varepsilon}$ e di conseguenza, per l'arbitrarietà di ε, non è convergente per alcun $|x| > \frac{1}{\lambda}$. Pertanto $\frac{1}{\lambda}$ è il raggio di convergenza.

Quando una successione è regolare, il suo limite coincide col limite massimo. Ne viene che se esiste il limite σ di $|\sqrt[n]{a_n}|$ per $n \to \infty$, $\frac{1}{\sigma}$ è il raggio di convergenza di $\Sigma a_n x^n$. E poichè è noto che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

quando esiste il secondo membro [1], così se è $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \rho$, è ρ il raggio di convergenza di $\Sigma a_n x^n$.

37. Si consideri una serie ordinata per le potenze intere negative di x:

(10) $$P(x) = \frac{b_0}{x} + \frac{b_1}{x^2} + \ldots + \frac{b_n}{x^{n+1}} + \ldots;$$

(¹) V. p. es. Cesaro, *Analisi algebrica*, pag. 100 (Torino, 1894).

se $\left(\frac{1}{x}\right)$ si riguarda come variabile, si ha una ordinaria serie di potenze (intere positive) che supporremo di raggio di convergenza non nullo. Indicato con $\frac{1}{R}$ questo raggio, la (10) converge per $|x|>R$; il suo campo di convergenza è l'esterno del cerchio (R) o, se si vuole, l'interno della calotta del pianosfera avente per polo $x=\infty$ e definita da $|x|>R$: questo campo si può dire *calotta di convergenza* delle (10). Si ponga ora, nella (10), $x=u-v$, sotto la condizione

(11) $$|u|>R+|v|;$$

la (10) diviene con ciò

(12) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{u^{n+1}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{u^{n+1}}\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{n+\nu}{\nu}\left(\frac{v}{u}\right)^{\nu}}_{\text{serie binomiale}}.$$

Ma poichè la (10) è assolutamente convergente per $|x|>R$ mentre le u e v soddisfano alla (11), la (12) rimane assolutamente convergente nel senso delle serie doppie, e quindi, come è noto [1], vi si possono ordinare i termini nell'ordine che si vuole, senza alterarne la somma. Ordinando, in particolare, per le potenze di v, si ottiene

$$P(u-v)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{v^{\nu}}{\nu!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+\nu)b_n}{u^{n+\nu+1}},$$

e se si indica con $P^{(\nu)}(x)$ la serie ottenuta derivando ν volte *formalmente* termine a termine la (10), serie la cui convergenza per $|x|>R$ risulta appunto da quanto abbiamo ora esposto, si ottiene

(13) $$\boxed{P(u-v)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}v^{\nu}}{\nu!}P^{(\nu)}(u).}$$ Taylor sulla calotta

Inoltre, fissato u e considerata, sotto la condizione (11),

[1] *Algebra Complementare*, n.° 165, *i*.

la (13) come serie di potenze di v, viene

$$\lim_{v=0}\frac{P(u-v)-P(u)}{v}=-P'(u),$$

e pertanto le $P'(x)$, $P''(x)$,... sono le derivate successive di $P(x)$ nel senso del n.° 25, e $P(x)$ è, per $|x|>R$, funzione monogena. Infine, ponendo a al posto di u ed $x-a$ al posto di v, con che la (11) viene a scriversi

(14) $$|x-a|<R-|a|,\quad |a|>R,$$

la (13) diviene

(15) $$P(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}P^{(\nu)}(a)(x-a)^{\nu},$$

sviluppo valido entro un cerchio di centro a e tangente esternamente al cerchio (R).

Notiamo per incidenza che se la (12) si ordina per le potenze decrescenti di u, i coefficienti di $u^{-1}, u^{-2},\dots, u^{-(n+1)},\dots$, vengono ad essere

$$b_0,\ b_0v+b_1,\ b_0v^2+2b_1v+b_2,\dots,\ b_0v^n+nb_1v^{n-1}+\binom{n}{2}b_2v^{n-2}+\dots+b_n,\dots,$$

polinomî che hanno presentato notevole interesse in varie ricerche e sono stati detti polinomî di APPELL [1].

§ II. Il concetto di funzione analitica.

38. Ci gioveremo ora delle considerazioni svolte in ciò che precede, ed in particolare nel n.° 35, per esporre succintamente i concetti sui quali il WEIERSTRASS ha fondata la sua definizione di funzione analitica, definizione che per opera sua e della sua scuola ha contribuito a conferire ad uno dei capitoli più essenziali dell'analisi delle funzioni un assetto interamente soddisfacente, tanto dal lato estetico come da quello del rigore.

[1] V. APPELL, *Sur une classe de polynômes* (Ann. Éc. Norm. Sup., C. II, T. 9, 1880); PINCHERLE e AMALDI, *Operazioni distributive*, pag. 130-139 (Bologna, 1901).

Sia data una serie di potenze $\Sigma a_n x^n$, che indicheremo con $p(x)$, e di cui non sia nullo il raggio r di convergenza. Entro il cerchio (r), la $p(x)$ rappresenta una funzione ad un valore, monogena, quindi con tutte le proprietà derivanti, per i n.i 34 e seg., da questo suo carattere. Se alla $p(x)$ si applica, relativamente ad un punto a dell'interno del cerchio (r), lo sviluppo di MACLAURIN secondo la formula (7) del n.° 35, si ottiene uno sviluppo in serie di potenze di $x - a$, convergente certamente entro tutto il cerchio $(a, r - |a|)$ e che, entro quel cerchio, rappresenta la medesima funzione della $p(x)$, di cui dà, per conseguenza, una seconda espressione analitica. Questo sviluppo verrà indicato con $p(x|a)$; esso si dirà *dedotto immediatamente* da $p(x)$, relativamente al punto a. Ad ogni punto a dell'interno di (r) corrisponde dunque uno sviluppo dedotto relativo al punto stesso; ed il valore della funzione in un punto qualunque $\bar{x}$ di (r) si può calcolare, sia mediante la serie data $p(x)$, sia mediante uno qualunque degli sviluppi dedotti relativamente a quelli infiniti punti q di (r) pei quali $\bar{x}$ è interno al cerchio $(q, r - |q|)$ (1).

Ora, lo sviluppo $p(x|a)$, che converge certamente entro il cerchio $(a, r - |a|)$, può però avere un raggio di convergenza r_a superiore ad $r - |a|$. In questo caso, nella regione S_a del piano esterno alla circonferenza (r) ma interna ad (a, r_a) la serie $p(x)$ non converge, mentre ivi converge la $p(x|a)$ che, nella parte comune ai due cerchi, dà, punto per punto, lo stesso valore di $p(x)$. Si dirà, col WEIERSTRASS, che lo sviluppo $p(x|a)$ dà, nella regione S_a, la *continuazione analitica* della funzione rappresentata in (r) da $p(x)$. Si prenda ora un punto b entro il cerchio (a, r_a), e si applichi a $p(x|a)$ lo sviluppo di MACLAURIN, ottenendosi lo sviluppo dedotto immediatamente da $p(x|a)$ relativamente a b; questo sviluppo sarà una serie di potenze di $x - b$, che si indicherà con $p(x|a|b)$, e che si dirà *dedotto mediatamente da* p(x) *per mezzo di* a; e qui vi sono da distinguere due casi:

a) se b appartiene ~~ad~~ r, si può dedurre immediatamente da $p(x)$ lo sviluppo relativo a b, e questo, $p(x|b)$,

(1) È facile vedere che questi punti q sono interni all'ellisse avente per fuochi i punti o ed $\bar{x}$, e per asse maggiore il raggio r.

avendo entro tutto il cerchio $(b, r - |a| - |b - a|)$ lo stesso valore di $p(x)$ e quindi di $p(x|a)$ e per conseguenza anche di $p(x|a|b)$, coincide (n.° 34, 5) con questo: lo sviluppo dedotto mediatamente da $p(x)$ coincide dunque con quello dedotto immediatamente;

b) se invece b appartiene ad $(a, r - |a|)$ ma non ad (r), ed è r_b il raggio di convergenza di $p(x|a|b)$, sarà $r_b \geq r_a - |b - a|$: e nel caso della disuguaglianza, esiste (v. fig. 5) una regione S_b esterna ad (a, r_a) ed interna a (b, r_b), nella quale nè la $p(x)$ nè la $p(x|a)$ hanno significato poichè non convergenti, mentre ha significato la $p(x|a|b)$. Si dirà allora che quest'ultima serie dà la continuazione analitica, in S_b, della funzione rappresentata in (r) da $p(x)$.

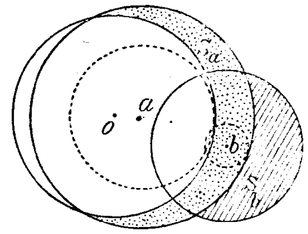


Fig. 5

c) Il procedimento così indicato si può proseguire, conducendo a successive regioni del piano per i cui punti q esistono serie di potenze di $x - q$, dedotte, mediatamente od immediatamente, dalla serie di potenze primitivamente data $p(x)$. L'insieme delle regioni cui così si giunge costituisce nel piano x un'area aperta V, area contradistinta dal fatto che ogni suo punto $\bar{x}$ è interno al cerchio di convergenza di qualcuna delle serie dedotte da $p(x)$, e se codesta serie procede per le potenze di $x - q$, $\bar{x}$ è alla sua volta centro del cerchio di convergenza dello sviluppo $p(x|a|\ldots q|\bar{x})$, di raggio almeno uguale ad $r_q - |q - \bar{x}|$.

d) Ad ogni punto x di V corrispondono dunque i valori y dati da quelle serie dedotte al cui cerchio di convergenza il punto x appartiene: questa corrispondenza definisce y come funzione di x, funzione la cui espressione, per mezzo di serie di potenze, conferisce le note proprietà riassunte al n.° 35. È però subito da notare che y non sarà necessariamente funzione ad un valore di x, poichè non è da escludersi che due sviluppi dedotti mediatamente da $p(x)$ e relativi al medesimo punto q, l'uno $p(x|a|b|\ldots n|q)$, l'altro $p(x|a'|b'|\ldots n'|q)$, possano non coincidere se ottenuti mediante due catene diverse $a, b, \ldots n$ ed $a'\ b' \ldots n'$ di punti intermedî.

monogeneità, derivabilità termine a termine, sviluppabilità in s. di Taylor

(1°) Proprietà simmetrica (valgono anche la riflessiva e transitiva (v. Anal. I° p. 2)

39. « Se $p(x|a)$ è uno sviluppo dedotto immediatamente « da $p(x)$, reciprocamente $p(x)$ può riguardarsi come dedotto « (immediatamente o mediatamente) da $p(x|a)$ ».

a) Supponiamo dapprima che $x=0$ sia interno al cerchio di convergenza di $p(x|a)$. Si può allora formare lo sviluppo dedotto di $p(x|a)$ relativo ad $x=0$, e si avrà così uno sviluppo $p(x|a|0)$ che, in ogni punto di un intorno di $x=0$, assume lo stesso valore di $p(x|a)$ e quindi di $p(x)$. Pertanto, per il principio di identità, i due sviluppi $p(x)$ e $p(x|a|0)$ devono coincidere. (Una prima linea è dedotta da dedotta)

b) Supponiamo invece che $x=0$ non sia interno al cerchio di convergenza di $p(x|a)$, e sarà opportuno supporre che non sia interno al cerchio $(a, r-|a|)$. Si congiunga $0a$, e sia $r-|a|$ contenuto in $\overline{0a}$ meno di n volte: si divida allora il segmento $\overline{0a}$ in n parti uguali e siano $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ i punti di divisione, da a verso 0. Il punto b_1 è allora interno al cerchio $(a, r-|a|)$, il punto b_2 è interno al cerchio $(b_1, |r-b_1|), \ldots$ il punto 0 è interno al cerchio $(b_{n-1}, |r-b_{n-1}|)$. Pertanto $x=0$ trovandosi rispetto a b_{n-1} nel caso precedente, è dedotto da $p(x|a|\ldots b_{n-1})$; questo è dedotto da $p(x|a|\ldots b_{n-2}), \ldots, p(x|a|b_1)$ è dedotto da $p(x|a)$, onde $p(x)$ è dedotto, mediatamente, da $p(x|a)$.

40. « Se $p(x|b|c\ldots h|a)$ è comunque dedotto da $p(x)$, « reciprocamente $p(x)$ può riguardarsi come dedotto da « $p(x|b|\ldots h|a)$ ».

Infatti $p(x|b|\ldots h)$ può (n.° 39) riguardarsi come dedotto da $p(x|b|\ldots h|a)$, e così via, finchè $p(x|b)$ può riguardarsi come dedotto da $p(x|b|c)$, ed infine $p(x)$ come dedotto da $p(x|b)$, onde $p(x)$ è dedotto (mediatamente) da $p(x|b|\ldots h|a)$.

41. « Abbiansi due serie di potenze intere positive, « l'una $p(x-a)$ della variabile $x-a$, l'altra $P(x-b)$ della « variabile $x-b$, ed i loro cerchi di convergenza abbiano « una regione comune S. Si supponga che per un punto c « di S, coincidano gli sviluppi relativi dedotti tanto da $p(x-a)$ « che da $P(x-b)$; sia cioè $p(x-a|c)=P(x-b|c)$. Allora:

« *a*) i due sviluppi $p(x-a)$, $P(x-b)$ si possono ri- « guardare come dedotti l'uno dall'altro;

(1) è un caso particolare del principio di permanenza

« *b*) coincidono gli sviluppi dedotti $p(x-a|d)$, $P(x-b|d)$ « relativi ad ogni altro punto d di S ».

La prima parte si vede immediatamente: poichè $P(x-b|c)$ è dedotta da $P(x-b)$, viceversa questa si può riguardare come dedotta da $P(x-b|c)=p(x-a|c)$, e quindi come dedotta mediatamente da $p(x-a)$.

In quanto alla seconda parte, si congiunga cd, e sia λ la minima distanza di cd dal contorno di S; sia λ contenuto in $\overline{cd}$ meno di n volte. Dividendo allora $\overline{cd}$ in n parti uguali, si trova, col ragionamento fatto al n.° 39, *b*), che $p(x-a|d)$ si può riguardare come dedotto da $p(x-a|c)$ e quindi da $P(x-b|c)$, e quindi $p(x-a|d)$ e $P(x-b|d)$ coincidono.

42. In base alle considerazioni del n.° 38, ed ai teoremi dei n.i 39-41, dovuti al WEIERSTRASS, possiamo ora porre le seguenti definizioni:

a) Una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ e tutte quelle che se ne possono dedurre, immediatamente o mediatamente, si diranno *elementi di una stessa funzione analitica*.

b) Risulta dal n.° 37 che anche da una serie $\sum_{0}^{\infty} \frac{b_n}{x^{n+1}}$ si possono *dedurre* sviluppi $\Sigma c_n(x-a)^n$; questi, insieme colla serie da cui sono dedotti, si diranno pure *elementi* di una stessa funzione analitica [1].

c) *Funzione analitica* è l'insieme degli elementi che si possono dedurre da un elemento dato. La funzione analitica è *data* quando ne sia dato un elemento; tutti gli altri si possono dedurre da questo col procedimento del n.° 38.

Si dice pertanto che la funzione analitica è *definita* da uno qualunque dei suoi elementi.

Per la (7) (n.° 35) la funzione analitica è dunque definita dal valore di essa e delle sue derivate successive in un solo

$\sum_0^\infty f^{(n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^n}{n!}$

[1] In ciò che segue, non distingueremo partitamente il caso delle serie di potenze intere negative: rimanga inteso (WEIERSTRASS) che quando a coincide con $x=\infty$, $x-a$ si sostituisce con $\frac{1}{x}$.

punto a, purchè la serie (7) stessa abbia un raggio non nullo di convergenza.

d) Se y è il valore assunto da un elemento di una funzione analitica in un punto, y si dice *valore* della funzione analitica in quel punto.

e) La porzione del piano (*aperta*) costituita dai punti interni ai cerchi di convergenza dei varî elementi di una funzione analitica è il *campo di regolarità* della funzione stessa.

L'area V definita al n.° 38 *c*), è campo di regolarità di una funzione analitica.

La funzione analitica è monogena in tutto il suo campo di regolarità.

f) Una funzione analitica si dice *regolare* in ogni punto del suo campo di regolarità; i punti del campo si dicono anche *punti regolari* per la funzione. Tutti i punti di un intorno abbastanza piccolo di un punto regolare sono regolari.

g) *Punti singolari* di una funzione analitica sono i punti del contorno del suo campo di regolarità. I punti regolari e singolari costituiscono nel loro insieme un aggregato chiuso. Un punto singolare a dicesi *polo di ordine* m, m essendo un numero intero positivo, se il prodotto della funzione per $(x-a)^m$ è regolare, mentre non lo è il prodotto della funzione stessa per $(x-a)^{m-1}$. Un polo dicesi anche *punto singolare non essenziale*.

Come si è già osservato al n.° 38, ogni punto del campo di regolarità è centro del cerchio di convergenza di un elemento. Il punto $x=\infty$ può appartenere al campo di regolarità (o essere regolare) in base al *b*) del presente n.°. Il cerchio di convergenza è sostituito, il quel caso, dalla calotta sferica di cui al n.° 37.

h) Una funzione analitica si dice *uniforme* quando in ogni punto del suo campo di regolarità essa ammette un unico valore; *multiforme*, nel caso contrario.

Si è già notato (n.° 38, *d*) che due sviluppi, dedotti da $p(x)$ mediante due sistemi diversi di punti intermedi (mediante due *catene* diverse) relativamente ad uno stesso punto q, come $p(x \mid a \mid b \mid \dots n \mid q)$ e $p(x \mid a' \mid b' \mid \dots n' \mid q)$, possono non coincidere. Ciò accade per le funzioni multiformi, mentre per una funzione uniforme lo sviluppo $p(x \mid a \mid \dots q)$ dedotto da $p(x \mid a \mid)$ è unico, qualunque sia la catena secondo cui si è fatta la deduzione.

(*) poichè se f è analitica anche $1/f$ lo è ( ) [illegible] non sono punti singolari per lo reciproca

i) Se, essendo V il campo di regolarità di una funzione analitica, A è una regione contenuta in V, nella quale, presi due punti qualunque a e q, lo sviluppo relativo a q dedotto da un $p(x \mid a)$ è unico, qualunque sia la via, semprechè interna ad A, con cui è fatta la deduzione, si dice di avere in A un *ramo ad un valore* o *ramo monodromo* della funzione; si dice anche che la funzione è ad un valore o monodroma nell'area A, mentre si dice *a più valori* o *polidroma* in A nel caso contrario.

Una funzione uniforme è monodroma in tutto il suo campo di regolarità. Per una funzione multiforme, si possono sempre, nel campo di validità, assegnare aree in cui è monodroma: per esempio, il cerchio di convergenza di uno qualunque dei suoi elementi per gli sviluppi dedotti dall'elemento stesso.

j) Un punto singolare α è *isolato* quando si può dal centro α descrivere un cerchio di cui tutti i punti, α eccettuato, sono punti regolari per la funzione. Se in quel cerchio la funzione è monodroma, ed il punto non è un polo, esso si dice *punto singolare essenziale isolato*; se nel cerchio la funzione è multiforme, il punto α dicesi *punto critico*. (*) o di diramazione

punti regolari – interni [illegible]
singolari – del contorno [illegible] essenziale isolato critico

(*) v. esempi di punti di diramazione algebrici e non algebrici [illegible] pag. 489

– Il raggio di convergenza di $p(x \mid c)$ è compreso tra i cerchi di centro c tangenti internamente ed esternamente al cerchio di convergenza di $p(x)$ [illegible]

CAPITOLO QUARTO

PRIME PROPRIETÀ GENERALI DELLE FUNZIONI ANALITICHE

§ I. Ulteriori osservazioni sulle serie di potenze.

43. Abbiasi una serie di potenze dal raggio di convergenza non nullo

(1) $$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

e sia r un numero positivo inferiore a quel raggio di convergenza.

La $p(x)$ sarà continua (n.° 34, 4.°) sulla circonferenza (r), e tale sarà quindi anche $|p(x)|$, che ammetterà quindi il proprio limite superiore M come massimo.

Per essere convergente uniformemente lungo la circonferenza (r), la (1) può integrarsi termine a termine [1], anche dopo di averla moltiplicata per x^{-m-1}: integrando, si ha:

$$\int_{(r)} \frac{p(x)dx}{x^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{(r)} x^{n-m-1} dx\,;$$

ora, ricordando il risultato del n.° 24, c), gl'integrali del secondo membro sono tutti nulli, ad eccezione del termine in

[1] *Calcolo*, n.° 353.

(·) v. anche Vivanti § 71

cui è $n = m$, il quale si riduce a $2\pi i$. Si ottiene così la seguente notevole espressione pei coefficienti della serie (1):

(2) $$\boxed{a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{p(x)\,dx}{x^{m+1}},} \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\dots).$$

44. *a*) Nell'integrale nel secondo membro di (2) si ponga $x = re^{i\theta}$; esso viene a scriversi

$$\frac{i}{r^m}\int_0^{2\pi} p(re^{i\theta})e^{-mi\theta}\,d\theta,$$

il cui valore assoluto è non maggiore di $\frac{2\pi M}{r^m}$. Ne viene

(3) $$\boxed{|a_m| < \frac{M}{r^m},} \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\dots)$$

disuguaglianza di uso frequente e che dà, come si suole dire, un valore *maggiorante* di a_m.

b) In particolare, per $m = 0$ e notando che $a_0 = p(0)$, viene

$$|p(0)| \leq M:$$

quindi il valore assoluto della funzione $p(x)$ nel centro del cerchio di convergenza non può superare il massimo valore assoluto assunto dalla funzione su una circonferenza qualsiasi concentrica ed interna al cerchio di convergenza.

c) Se $p(x)$ converge entro il cerchio (r), circonferenza compresa, essa non può assumere entro (r) un valore assoluto superiore al massimo valore assoluto di $p(x)$ sulla circonferenza. Se infatti in un punto interno a fosse $|p(a)| = \mu > M$, su ogni circonferenza di centro a contenuta in (r) vi sarebbe qualche punto a_1 con $|p(a_1)| \geq \mu$; su ogni circonferenza contenuta in (r) e coi centri a_1, qualche punto a_2 con $|p(a_2)| \geq \mu$, e così via. L'insieme dei punti $a_1, a_2, \dots$, avrebbe qualche punto limite ξ sulla circonferenza, in cui sarebbe $|p(\xi)| \geq \mu > M$, contro l'ipotesi.

45. « Se la serie di potenze (1) converge nel cerchio (r) [1], « e se, formate le serie dedotte da (1) relativamente ai punti « di (r), queste hanno come limite inferiore dei loro raggi « di convergenza un numero $h > 0$, il raggio di convergenza « di (1) è almeno $r + h$ ».

Preso k positivo e minore di h, si descriva la circonferenza $(r + k)$ e si consideri (fig. 6) un punto $\bar{x}$ della corona circolare C compresa fra (r) ed $(r + k)$. Il cerchio $(\bar{x}, k)$ interseca la circonferenza (r), ed $\bar{x}$ si trova nel cerchio di raggio k descritto da un punto qualunque c del settore comune ai due cerchi (r) ed $(\bar{x}, k)$; in questo cerchio converge, per l'ipotesi, la serie

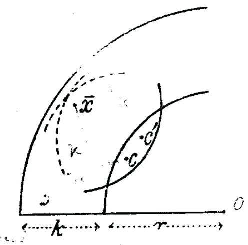


Fig. 6

(4) $$p(x \mid c) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(c)\,\frac{(x-c)^n}{n!},$$

ed il valore che dà questo sviluppo per il punto $\bar{x}$ di C è indipendente dalla scelta di c in quel settore. Ed infatti, preso un secondo punto c' in quel settore e formata $p(x \mid c')$, le $p(x \mid c)$, $p(x \mid c')$ sono dedotte l'una dall'altra (n.i 39-41) perchè le $p(x \mid c' \mid 0)$, $p(x \mid c \mid 0)$ coincidono con $p(x)$; per il punto $\bar{x}$, come per ogni punto del settore comune a (c, k), (c', k), l'una o l'altra di queste serie definiscono dunque una funzione — continua — di x, indipendentemente dalla scelta di c o c' nel settore comune ad (r), $(\bar{x}, k)$. Si indichi con $f(x)$ la funzione definita entro (r) da $p(x)$, e in C, compresa la circonferenza (r), dalle varie $p(x \mid c)$, e sia M il massimo valore assoluto di questa funzione. Applicando alla (4), convergente in (c, k) (circonferenza compresa) il risultato del n.° 44 sul valore maggiorante dei coefficienti, si ha

$$\frac{1}{n!}\,|p^{(n)}(c)| \leq \frac{M}{k^n}.$$

Ma essendo

$$\frac{1}{n!}\,p^{(n)}(c) = a_n + \binom{n+1}{1}a_{n+1}c + \binom{n+2}{2}a_{n+2}c^2 + \dots \binom{\nu}{n}a_\nu c^{\nu-n} + \dots,$$

[1] V. l'osservazione alla fine del n.° 34, 2°.

viene, applicando nuovamente il risultato del n.° 44:

$$\binom{\nu}{n} | a_\nu | \leq \frac{M}{k^n r^{\nu-n}}. \tag{5}$$

Preso ora k' positivo e minore di k per tanto poco quanto si vuole, si deduce da (5):

$$\binom{\nu}{n} | a_\nu | k'^n r^{\nu-n} \leq M\left(\frac{k'}{k}\right)^n,$$

e sommando da $n=0$ a ν,

$$| a_\nu | (k'+r)^\nu \leq M \sum_{n=0}^{\nu} \left(\frac{k'}{k}\right)^n < \frac{Mk}{k-k'}.$$

Ora da questa disuguaglianza consegue (n.° 34, 1°) che la serie (1) converge per $|x| < k'+r$; ma k' è prossimo a k e questo prossimo ad h quanto si vuole, onde il raggio di convergenza di (1) è almeno $r+h$.

46. « Sulla circonferenza di convergenza di una serie di « potenze, esiste almeno un punto singolare per la funzione « analitica definita dalla serie stessa ».

Sia $p(x)$ la serie di potenze, r il suo raggio di convergenza, r_a i raggi di convergenza delle serie dedotte $p(x|a)$ relative ai punti a di (r). Il limite inferiore delle r_a è nullo, altrimenti, per il n.° precedente, il raggio di convergenza di $p(x)$ sarebbe superiore ad r. Esiste, per un noto teorema di Weierstrass [1], nel cerchio r o sul contorno, almeno un punto v tale che, in qualunque suo intorno, il limite inferiore degli r_a relativi ai punti di codesto intorno è ancora nullo. Se ora questo punto v è interno ad (r), sarà $r_v = r - |v|$ almeno, e descritto il cerchio di centro v e di raggio $\frac{1}{2}(r - |v|)$, per tutti i punti dell'interno di questo cerchio i raggi di convergenza delle serie dedotte non potrebbero essere inferiori ad $\frac{1}{2}(r - |v|)$: contro il fatto che il loro limite

(1) *Algebra complementare*, n.° 207, *b*).

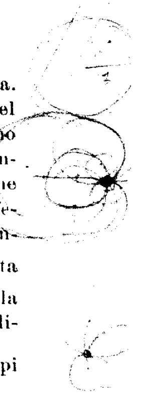
Un punto singolare può definirsi anche come punto in ogni intorno del quale lim inf $r_a = 0$ (Vivanti 1??)

inferiore è zero. Pertanto v è al contorno di (r): se ora fosse punto regolare per la funzione analitica definita da $p(x)$, si avrebbe uno sviluppo dedotto $p(x|v)$ con raggio di convergenza ρ non nullo: ma allora per tutti i punti dell'interno del cerchio $\left(v, \frac{\rho}{2}\right)$, il raggio di convergenza delle serie dedotte da $p(x|v)$, sarebbe per lo meno $\frac{\rho}{2}$, e sarebbe cioè tale anche il raggio di convergenza delle serie dedotte da $p(x)$ — coincidenti con quelle — per i punti a del settore comune ai cerchi (r) e $\left(v, \frac{\rho}{2}\right)$, contro il fatto che il limite inferiore delle r_a è nullo. Onde v non è punto regolare, ed appartenendo al contorno del campo di regolarità della funzione analitica definita da $p(x)$, è (n.° 42, g) punto singolare per la funzione stessa.

47. *Esempi.* *a*) La serie Σx^n, convergente nel cerchio $|x| < 1$, definisce una funzione analitica che si può continuare mediante la deduzione colla formula di Maclaurin. La somma della serie essendo $\frac{1}{1-x}$, la deduzione immediata dà

$$\sum \frac{(x-a)^n}{(1-a)^{n+1}} \tag{a}$$

per ogni punto a del cerchio $|x| < 1$ di convergenza della seria primitiva. La (a) ha per cerchio di convergenza $(a, |1-a|)$, e al variare di a nel cerchio $|x| < 1$, l'insieme di questi cerchi ricopre una regione del piano limitata da una curva chiusa, avente per $x=1$ una cuspide e cui è interno ogni altro punto della circonferenza $|x|=1$. Si vede da ciò che per la funzione definita dall'elemento Σx^n, tutti i punti della circonferenza di convergenza sono regolari, ad eccezione di $x=1$: il che è confermato dall'espressione $\frac{1}{1-x}$ di questa funzione. La deduzione mediata dà, per ogni punto del piano, ad eccezione di $x=1$, un elemento della forma (a); infine $x=\infty$ è regolare per la funzione, poichè il procedimento del n.° 37 applicato a $-\sum_0^\infty \frac{1}{x^{n+1}}$ dà, come serie dedotte, sviluppi della forma (a). Il campo di regolarità della funzione è dunque costituito da tutto il piano-sfera, eccettuato il punto $x=1$; le circonferenze di convergenza di tutti i suoi elementi passano tutte per quel punto.



b) Qualora ci si limitasse al campo reale di variabilità della x, il carattere della funzione $\frac{1}{1+x^2}$, sviluppabile nell'intervallo fra -1 e $+1$ nella serie

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \tag{b}$$

v. anche $p(x) = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$ Vivanti § 97 pag 148 non darebbe ragione del fatto che la convergenza della serie è limitata precisamente a quell'intervallo. Il teorema del n.° 46 ne dà invece ragione, poichè nel piano complesso la funzione non è regolare nei punti $x = \pm i$, posti appunto sulla circonferenza di convergenza della serie (*b*).

c) Il teorema del n.° 46 insegna che sulla circonferenza di convergenza di una serie di potenze esiste *almeno* un punto singolare per la funzione analitica definita dalla serie. Un esempio semplice mostra come possa accadere che tutti i punti della circonferenza siano singolari, per modo che la funzione non ammette continuazione fuori di quella circonferenza. Si consideri, all'uopo, la serie

$$(c) \qquad x + x^2 + x^4 + x^8 + \dots + x^{2^n} + \dots,$$

di cui $|x| = 1$ è manifestamente la circonferenza di convergenza. Sulla circonferenza esiste almeno un punto singolare; sia esso $q = e^{i\alpha}$. Si ponga ora $x = hz$, con $h = e^{\frac{ki\pi}{2^{m-1}}}$, k ed m interi qualsivogliano; la (*c*) si trasforma in

$$(d) \qquad hz + h^2z^2 + \dots + h^{2^{m-1}}z^{2^{m-1}} + z^{2^m} + z^{2^{m+1}} + \dots + z^{2^n} + \dots,$$

poichè $h^{2^r} = 1$ per $r \geq m$. Ma poichè la (*d*) non differisce dalla (*c*) se non per un polinomio razionale intero, essa ammette la stessa singolarità q della *c*, quindi la (*c*) ammette hq come singolarità, cioè $e^{i\left(\alpha + \frac{k\pi}{2^{m-1}}\right)}$; ora questa espressione, al variare di k, dà i vertici di un poligono regolare di 2^m lati inscritto nella circonferenza $|x| = 1$, e variando poi m, dà un insieme ovunque denso di punti sulla detta circonferenza: punti che sono quindi tutti singolari per la (*c*).

E poichè (n.° 42, *f*) tutti i punti di un intorno di un punto regolare sono regolari, ne viene che nessun punto della circonferenza $|x| = 1$ può essere regolare per la funzione analitica definita da (*c*).

Il cerchio $|x| < 1$ costituisce dunque tutto il campo di regolarità della funzione data da (*c*); la circonferenza $|x| = 1$ è, per essa, luogo di punti singolari e si dice anche *linea singolare*; non vi è, per la funzione, alcuna continuazione analitica fuori del cerchio; infine, le serie dedotte per i punti a interni al cerchio hanno precisamente $1 - |a|$ come raggio di convergenza, il quale tende a zero per $|a|$ tendente ad 1.

48. Il seguente teorema si riferisce ad un caso in cui è possibile di precisare la posizione di un punto singolare sulla circonferenza di convergenza.

« Il punto della circonferenza di convergenza posto sul « semiasse reale positivo è, per ogni serie di potenze a « coefficienti positivi (o in parte nulli) necessariamente sin- « golare [1] ». (v. anche Vivanti 693)

Abbiasi infatti la serie $\Sigma a_n x^n$, $a_n \geq 0$, di raggio r di convergenza: se $\Sigma a_n r^n$ diverge, essendo $\lim\limits_{u=r} \Sigma a_n u^n = \infty$, il punto r non può essere regolare. Se la serie converge ed il punto r è regolare, la serie dedotta relativamente a quel punto esiste ed ammette un raggio non nullo ρ di convergenza, e detto $f(r)$ il valore della serie in r, questa serie dedotta è

$$\Sigma f^{(n)}(r) \frac{(x - r)^n}{n!}.$$

Preso ora sulla circonferenza (r) un punto $q = re^{i\alpha}$ diverso da r, l'espressione $f^{(n)}(q) = \Sigma \nu(\nu - 1) \dots (\nu - n + 1) a_\nu q^\nu$ è formata colle stesse operazioni di $f^{(n)}(r)$, previa sostituzione di q ad r, e siccome i termini di $f^{(n)}(r)$ sono tutti positivi, è $|f^{(n)}(q)| \leq f^{(n)}(r)$. La serie dedotta relativa al punto q ammette dunque per lo meno lo stesso raggio ρ di convergenza della dedotta relativa ad r, e con ciò nessun punto della circonferenza (r) sarebbe singolare, contro il teorema del n.° 46. Il punto reale positivo della circonferenza di convergenza è dunque singolare per la funzione definita da $\Sigma a_n x^n$.

Si verifica subito che il teorema è ancora vero se i coefficienti della serie di potenze hanno tutti il medesimo argomento. Esso si estende anche facilmente al caso che i coefficienti siano complessi, con un argomento compreso fra $-\beta$ ed α, con $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

49. « La successione $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$ dei coefficienti di « una serie di potenze $\Sigma a_n x^n$ sia formata da numeri positivi, « decrescenti e tendenti a zero. La serie converge allora per « ogni punto della circonferenza $|x| = 1$, eccettuato al più « il punto $x = 1$ [2] ».

---

[1] Questo teorema, enunciato per la prima volta da G. Vivanti (*Rivista di matematica*, T. 3, p. 112, 1893) è stato dimostrato dal Pringsheim (*Math. Ann.*, T. 44, p. 42, 1894) e, in modo diverso, dal Landau (Ibid., T. 61, p. 535, 1905).

[2] Picard, *Traité d'Analyse*, T. II, p. 74 (Paris, 1893).

Il raggio di convergenza della serie $\Sigma a_n x^n$ è, per l'ipotesi $a_n \to 0$, maggiore d'uno o uguale ad uno; ma solo in quest'ultimo caso vi è d'uopo di dimostrazione. Si consideri l'identità

$$1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \dots e^{ni\alpha} = \frac{1 - e^{(n+1)i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}};$$

se ne ricava, separando la parte reale e l'immaginaria mediante la formula di EULER ([1]), e con facili riduzioni trigonometriche:

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha + \dots + \operatorname{sen} n\alpha = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{(n+1)\alpha}{2}\operatorname{sen}\dfrac{(n-1)\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}},$$

cioè queste somme, per ogni arco α per cui sia escluso il valore 0 o i valori congrui a zero rispetto a 2π, sono limitate. Ne viene ([2]) che le serie $\Sigma a_n \cos n\alpha$, $\Sigma a_n \operatorname{sen} n\alpha$ sono convergenti, e siccome queste non sono altro che la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario in $\Sigma a_n x^n$ per $x = e^{i\alpha}$, ne segue che questa serie è convergente, escluso al più i valori $\alpha \equiv 0$ (mod. 2π), cioè il punto $x = 1$.

50. Fra le serie di potenze, sono da segnalare quelle il cui raggio di convergenza è infinito. Una tale serie rappresenta una funzione analitica regolare per ogni punto del piano sfera, eccettuato al più il punto all'infinito. Una funzione rappresentata da una serie il cui raggio di convergenza è infinito si dice *funzione intera*; fra le funzioni intere sono comprese le razionali intere, in cui i coefficienti delle serie sono nulli da un indice in poi: quando ciò non sia, la funzione intera si dice *trascendente*. Una funzione intera è manifestamente uniforme.

([1]) *Calcolo*, n.° 197.
([2]) *Algebra Complementare*, n.° 175, IV.

Se la serie $\Sigma a_n x^n$ converge per ogni valore finito di x, essa avrà un massimo valore assoluto M sulla circonferenza (R), dove R si è preso arbitrariamente grande, e si avrà (n.° 44)

$$(6) \qquad |a_n| < \frac{M}{R^n}.$$

Viceversa, se, preso R arbitrario, esiste corrispondentemente un numero positivo M tale che sia verificata la (6), la serie converge per ogni x finito e rappresenta una funzione intera. Una successione di numeri a_n dotata della proprietà (6) — dove R è arbitrario, M corrispondente ad R — può dirsi *ologena*.

Sono successioni ologene, ad esempio, $\frac{1}{n^n}$, $\frac{1}{n!}$, $\frac{a^n}{n!}$ per ogni a, $\frac{1}{(n!)^\alpha}$ per ogni numero positivo α.

Segue dal n.° 36 che « condizione necessaria e sufficiente « perchè la successione a_n sia ologena, è che il limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$ « sia nullo ».

Tutti gli elementi di una funzione intera hanno il raggio di convergenza infinito; perciò, se $f(x)$ è intera, è ologena la successione

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

qualunque sia a. Inversamente, « se nel campo di validità « di una funzione analitica $f(x)$ esiste un punto c tale « che la successione $\frac{1}{n!} f^{(n)}(c)$ sia ologena, la $f(x)$ è funzione « intera ». Ne consegue anche che « se per un punto c del « campo di regolarità di una funzione analitica $f(x)$, la successione delle derivate è limitata, od anche se è $|f^{(n)}(c)| < q^n$, « dove q è un numero positivo qualsiasi, la $f(x)$ è funzione « intera ».

51. « Il valore assoluto di una funzione intera non può, « qualora essa non si riduca ad una costante in tutto il piano, « rimanere inferiore ad un numero positivo assegnabile ».

Se infatti fosse m questo numero, si avrebbe $|a_n| < \frac{m}{R^n}$, m fisso qualunque sia R, onde $|a_n|$ sarebbe piccolo a piacere per ogni $n \geq 1$ e quindi nullo. Ne verrebbe $f(x) = a_0$, cioè la $f(x)$ si ridurrebbe ad una costante.

Segue da ciò che se si indica con $M(r)$ il massimo valore assoluto di una funzione intera sulla circonferenza r, è

$$\lim_{r \to \infty} M(r) = \infty.$$

§ II. Alcune proposizioni generali sulle funzioni analitiche.

52. « Sia A un'area semplicemente connessa, tutta interna « al campo di regolarità di una funzione analitica. Se, par- « tendo da un elemento della funzione relativo ad un punto a « di A, se ne fa la continuazione analitica senza uscire da A, « si ottiene un ramo monodromo della funzione ».

In altri termini, se dall'elemento relativo ad a si ottiene, mediante catene che non escano da A, lo sviluppo dedotto relativo ad un qualsiasi punto q di A, questo sviluppo è unico, qualunque sia la catena seguita per la deduzione.

Osserviamo dapprima che gli elementi dedotti per i varî punti di A hanno un limite inferiore ρ non nullo per i loro raggi di convergenza. Descritto allora un quadrato comprendente A, e diviso questo, mediante parallele ai lati, in tanti quadratini di lato inferiore ad $\frac{1}{4}\rho\sqrt{2}$, consideriamo quattro quadratini contigui δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 (fig. 7), di cui δ_1 contenga a e sia b un punto di δ_3. Detto $p(x-a)$ l'elemento da cui si parte, relativo ad a, siccome il cerchio (a, ρ) include i quadrati δ_2, δ_3 e δ_4, gli sviluppi $p(x-a|c|b)$ e $p(x-a|c'|b)$ coincideranno; ed applicando reiteratamente questa osservazione, qualunque sia il punto q di A, si giungerà a q con uno sviluppo dedotto unico $p(x-a|c \ldots |q)$, quando si sia seguita una via che non esca da A.

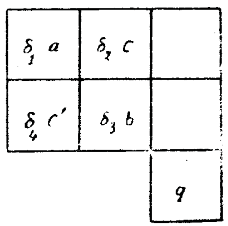


Fig. 7

53. « Una funzione analitica non può avere per campo « di regolarità tutto il piano-sfera, a meno di ridursi ad una « costante ».

Sia $f(x)$ regolare su tutto il piano-sfera. Il punto $x=0$ essendo un punto regolare, sarà $f(x) = \Sigma a_n x^n$, dove la serie è convergente in un cerchio di raggio r, ma se r fosse finito, la circonferenza (r) dovrebbe contenere un punto singolare almeno (n.° 46), contro l'ipotesi che il campo di regolarità di $f(x)$ si estende a tutto il piano. È dunque $r = \infty$, ed $f(x)$ è una funzione intera, e pertanto uniforme. Ma essendo regolare anche per $x = \infty$, si ha, in un intorno $|x| > R$ dell'infinito, uno sviluppo $f(x) = \sum \frac{b_n}{x^n}$, e per $|x| \geq R' > R$ questo sviluppo darà, per il modulo di $f(x)$, un massimo valore M. D'altra parte, lo sviluppo $\Sigma a_n x^n$ dà per il modulo di $f(x)$, entro un cerchio di raggio R'' con $R'' \geq R' > R$, un massimo valore M'; onde $|f(x)|$, su tutto il piano-sfera, non oltrepassa il maggiore dei due numeri M, M'. Perciò, per il n.° 51, la $f(x)$ si riduce ad una costante.

Segue dal teorema precedente che ogni funzione analitica che non si riduce a costante, ammette qualche punto singolare, o a distanza finita o all'infinito; ne segue pure che ogni funzione intera ha un unico punto singolare, che è $x = \infty$.

54. Se, in un punto α del suo campo di regolarità, una funzione analitica $f(x)$ assume il valore zero, quel punto si dice ***zero*** o ***radice*** della funzione. L'elemento corrispondente della funzione ha allora la forma

$$a_s(x-\alpha)^s + a_{s+1}(x-\alpha)^{s+1} + \ldots,$$

dove s è intero e positivo. La radice α si dice dell'ordine s; è detta radice *semplice* se è $s=1$, multipla (s ordine di multiplicità) se è $s>1$. Condizione necessaria e sufficiente perchè α sia radice dell'ordine s di $f(x)$, è che sia radice anche di $f'(x)$, di $f''(x)$,..., fino ad $f^{(s-1)}(x)$, ma non di $f^{(s)}(x)$ [1].

[1] È già noto il caso particolare di questa proposizione per le funzioni razionali intere (*Algebra complementare*, n.° 444).

55. Se in un punto α del proprio campo di regolarità, una funzione si annulla insieme a tutte le sue derivate, quella funzione si riduce identicamente a zero. Infatti, è identicamente zero l'elemento relativo ad α, e quindi sono tali tutti gli elementi dedotti.

56. *a*) Data una funzione analitica $f(x)$, sia A un'area semplicemente connessa, interna insieme al suo contorno al campo di regolarità di $f(x)$. Entro A non può esservi che un numero finito di radici di $f(x)$ [1], a meno che $f(x)$ non sia identicamente zero.

Se infatti $f(x)$ avesse in A un numero infinito di radici, queste avrebbero in A o al contorno (e per conseguenza entro il campo di regolarità di $f(x)$) almeno un punto limite β, per il quale varrebbe, entro un intorno (β, r), un elemento della funzione. Ma in questo intorno cadrebbero infinite radici della funzione, e quindi (n.° 34, 5°) l'elemento (e perciò anche la funzione) sarebbe identicamente zero.

Risulta da ciò che l'aggregato derivato dell'aggregato degli zeri di una funzione analitica appartiene al contorno del campo di regolarità; in altre parole, « un punto limite « di radici di una funzione analitica (non identicamente nulla) « è punto singolare per la funzione ».

b) Considerando la $f(x) - c$ invece della $f(x)$, essendo c una costante qualsivoglia, si conclude che l'aggregato dei punti dove la funzione $f(x)$ prende il valore c (*punti di livello*) ha il proprio aggregato derivato al contorno del campo di regolarità della $f(x)$; in altri termini « ogni punto limite di « punti di livello della $f(x)$ è punto singolare per la $f(x)$, « quando questa non si riduca identicamente a costante ».

teorema Riemann

c) Da ciò, in particolare, la proposizione [2]: « Una « funzione analitica non può mantenersi costante, entro il « proprio campo di regolarità, lungo un tratto di linea per « quanto piccolo, senza ridursi identicamente a costante ».

---

[1] S'intende sempre di riferirsi al ramo monodromo della funzione dedotto da un suo elemento in A (v. n.° 52).

[2] Detta *teorema di* RIEMANN.

Trasformazione di una serie di funzioni in serie di potenze.

Convergenza di una successione (o serie) di funzioni analitiche a una funzione analitica.

§ III. Il teorema di Weierstrass.

l'enunciato (Weierstrass)

57. « Sia data una successione di serie di potenze

$$(1) \qquad u_1(x),\ u_2(x), \dots\ u_n(x), \dots,$$

« convergenti entro un cerchio comune (R), e sia

$$u_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} x^\nu.$$

serie di serie

« Sulla circonferenza (r), con $0 < r < R$, la serie

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

« sia uniformemente convergente. Sotto queste ipotesi:

1°) « la serie $\Sigma u_n(x)$ è convergente entro tutto il cer- « chio (r), ed uniformemente;

2°) « la sua somma è, in questo cerchio, una funzione « analitica regolare $S(x)$, il cui sviluppo in serie (di potenze di x) è dato, « in (r), da

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu, \quad \text{con} \quad A_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n\nu} \text{ ».}$$

a) A dimostrare questa proposizione, dovuta al WEIERSTRASS [1], osserviamo anzitutto come dall'ipotesi della convergenza uniforme della $\Sigma u_n(x)$ per $|x| = r$ risulti che, preso ε arbitrariamente piccolo, si può determinare un $\bar{n}$ tale che per ogni $m > \bar{n}$ sia, per tutta la circonferenza (r):

$$|R_m| = \left| \sum_m^{\infty} u_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e quindi, per ogni intero positivo k,

$$(2) \qquad |R_m - R_{m+k}| \left| \sum_m^{m+k} u_n(x) \right| < \varepsilon.$$

---

[1] *Zur Funktionenlehre* (Monatsbericht der k. Akad. der Wissenschaften zu Berlin, agosto 1880).

- Abel $\nu_n = \sum_\nu \frac{x^\nu}{\nu^n}$ $\Sigma u_\nu = \Sigma$

Ma avendosi in (2) la somma di un numero finito di serie di potenze, essa può ordinarsi in un'unica serie di potenze

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{m+k} a_{n\nu}x^{\nu},$$

il cui valore assoluto lungo la (r) è inferiore ad ε, e perciò (n.° 44, a) si ha

$$(3)\qquad \left|\sum_{n=m}^{m+k} a_{n\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{r^{\nu}}.$$

b) Da questa risulta intanto la convergenza, per ogni ν, della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n\nu}$; indicheremo con A_{ν} la rispettiva somma ($\nu = 0, 1, 2,\ldots$); inoltre, poichè la $\sum_{m}^{m+k} u_n(x)$, essendo funzione regolare entro il cerchio (r), in valore assoluto non può superare (n.° 44, c) il massimo valore assoluto al contorno, così è entro tutto (r) soddisfatta la (2), e quindi

$$(4)\qquad \left|\sum_{m}^{\infty} u_n(x)\right| \leq \varepsilon$$

per $|x| < r$: pertanto la convergenza uniforme della $\Sigma u_n(x)$, ammessa per ipotesi per $|x| = r$, vale per tutto $|x| < r$.

c) Si ponga ora

$$A_{\nu} = A_{\nu}' + A_{\nu}'',\quad \text{con}\quad A_{\nu}' = \sum_{n=1}^{m} a_{n\nu},\quad A_{\nu}'' = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{n\nu}.$$

In seguito alla (3), è

$$|A_{\nu}''| \leq \frac{\varepsilon}{r^{\nu}}:$$

considerando allora la serie

$$(5)\qquad P(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu}x^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu}'x^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu}''x^{\nu},$$

la seconda sommatoria è, per $|x| \leq r_1 < r$, minore in valore assoluto di $\dfrac{\varepsilon r}{r - r_1}$. Formando per $|x| \leq r_1$ la differenza

$$P(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu}'x^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu}''x^{\nu} - \sum_{n=1}^{m} u_n(x) - \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n(x),$$

la prima e la terza serie del secondo membro si distruggono, la seconda è in valore assoluto minore di $\varepsilon r : (r - r_1)$, la quarta è, per la (4), minore di ε in valore assoluto, onde è

$$\left|P(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right| < \frac{2r - r_1}{r - r_1}\,\varepsilon,$$

quindi piccola a piacere per m abbastanza grande, e perciò nulla poichè il primo membro è indipendente da m. Ne viene

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x);$$

la serie $\Sigma u_n(x)$ si può dunque scrivere in forma di serie di potenze di x, convergente entro tutto (r), i cui coefficienti sono le serie formate coi coefficienti dei rispettivi termini simili nelle $u_n(x)$ [1].

58. a) Al teorema precedente si può dare un enunciato alquanto diverso nella forma, ma equivalente nella sostanza, nei termini seguenti:

« Se una successione di serie di potenze

$$(6)\qquad p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu}x^{\nu},\quad (n = 1, 2, 3,\ldots)$$

« convergenti entro un cerchio comune (R), tende uniformemente ad un limite $P(x)$ per i valori di x tali che sia $|x| = r$, $r < R$, le $p_n(x)$ ammettono in tutto il cerchio $|x| \leq r$ un limite, al quale esse tendono uniformemente, e che nel cerchio (r) è dato da una serie di potenze convergente

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu}x^{\nu},\quad \text{con}\quad B_{\nu} = \lim_{n\to\infty} b_{n\nu}\ ».$$

[1] Di questo teorema si darà più innanzi una dimostrazione più breve (n.° 120) ma che richiede mezzi più complessi, quali il teorema di CAUCHY. Si è creduto di conservare qui la dimostrazione di WEIERSTRASS (alquanto modificata) sia per il suo carattere istruttivo, sia per le conseguenze che dal teorema si possono ricavare fin d'ora.

A giustificare questo enunciato, basta osservare che le $p_n(x)$ non sono altro che le somme parziali della serie

$$p_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}[p_{n+1}(x) - p_n(x)],$$

la quale, per le ipotesi, si trova nelle condizioni del teorema del n.° precedente.

b) In particolare, un prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} q_n(x)$, i cui fattori siano serie di potenze convergenti entro un cerchio (R), e che converga uniformemente lungo la circonferenza $|x| = r < R$, convergerà uniformemente in tutto (r), ed il suo limite sarà una serie di potenze convergente in (r). Ed infatti i prodotti parziali del prodotto infinito, $\prod_1^m q_n(x)$, costituiscono una successione aventi le proprietà della (6).

59. Tutte le volte che, data una serie $\Sigma u_n(x)$ di serie di potenze $u_n(x)$, si può assegnare una successione di numeri μ_n positivi tali che la serie $\Sigma\mu_n$ sia convergente, e che sia, in tutto (r),

$$|u_n(x)| < \mu_n, \tag{7}$$

è applicabile il teorema del n.° 57, e la somma delle serie è rappresentata da una serie di potenze convergente entro (r). Questo criterio è di frequente applicazione pratica.

Il teorema del n.° 57 è una proposizione sulle serie doppie, avente un campo di applicazione assai più esteso del teorema elementare su queste serie [1] e relativo alla convergenza assoluta. In particolare, la condizione (7), che permette di ordinare la $\sum_n\sum_\nu a_{n\nu}x^\nu$ per le potenze di x, non porta affatto alla conseguenza che la condizione posta nel ricordato teorema elementare abbia ad essere verificata.

60. Dal teorema precedente (n.° 57), risultano altre conseguenze importanti.

a) Abbiasi, in un'area chiusa e connessa A, una successione di funzioni analitiche, monodrome in A,

$$f_1(x),\quad f_2(x),\ldots\quad f_n(x),\ldots$$

al cui campo comune di regolarità appartenga l'area A, e per ogni punto α di A esista un cerchio, di raggio non nullo r, entro il quale la $\Sigma f_n(x)$ converga uniformemente [1]. Vi sarà allora, per la proposizione del n.° 17, un raggio ρ che servirà per tutti i punti α a dare un cerchio (α, ρ) di convergenza uniforme, ed applicando allora la conclusione del n.° 18, risulta immediatamente che A è decomponibile in un numero finito di parti in ciascuna delle quali la $\Sigma f_n(x)$ è uniformemente convergente, e quindi che essa converge uniformemente in tutta l'area A.

b) La somma $F(x)$ della $\Sigma f_n(x)$ dà, per ogni cerchio (α, ρ), una serie di potenze convergente entro il cerchio stesso, $P(x-\alpha)$, dalla quale si può ricavare lo sviluppo dedotto $P(x-\alpha \mid \beta)$ per un punto β interno al detto cerchio. Ma la somma $F(x)$ dà, entro il cerchio (β, ρ), una serie di potenze $P_1(x-\beta)$, che in un intorno di β coincide punto per punto con $P(x-\alpha \mid \beta)$. Queste due serie, procedenti entrambe per le potenze di $x-\beta$, sono dunque identiche, e perciò « le varie « serie di potenze $P(x-\alpha)$ relative ai vari punti α di A sono « elementi di una stessa funzione analitica; in altri « termini, la $\Sigma f_n(x)$ rappresenta, in A, un ramo monodromo « di funzione analitica ».

61. Data la serie $\Sigma f_n(x) = F(x)$, sotto le ipotesi del n.° precedente, si ha per un intorno di un punto qualsiasi α di A:

$$f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_n^{(\nu)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^\nu}{\nu!},\qquad F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F^{(\nu)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^\nu}{\nu!},$$

e per il teorema del n.° 57 si può scrivere

$$F(x) = \sum f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(\nu)}(\alpha)\Big]\frac{(x-\alpha)^\nu}{\nu!},$$

[1] *Algebra Complementare*, n.° 165; *Calcolo*, n.i 54-55.

[1] Basta a ciò, per il teorema del n.° 57, che la convergenza uniforme abbia luogo sulla circonferenza.

onde — ponendo ora x in luogo di α: generico

$$(8) \qquad \boxed{F^{(\nu)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(\nu)}(x).}$$

Rimane così dimostrato che « nell'ipotesi della conver-
« genza uniforme in A, la serie $F(x) = \Sigma f_n(x)$ può derivarsi
« termine a termine entro A, per qualsiasi indice di deriva-
« zione ».

Di più, poichè la $F(x)$, definita nell'area chiusa A, ammette in questa un massimo valore assoluto M, e poichè vi è un ρ che vale per qualsiasi punto a dare la convergenza uniforme in (α, ρ), si può, preso ε arbitrario, determinare un $\bar{n}$ tale che per $m > \bar{n}$ e per k arbitrario, sia in ogni α (n.° 44, *a*)

$$\left| \frac{1}{\nu!} \sum_{n=m}^{m+k} f_n^{(\nu)}(\alpha) \right| < \frac{\varepsilon}{\rho^\nu}.$$

Da questo risulta la convergenza uniforme in tutto A del secondo membro della (8).

62. *Esempi. a*) Sia $p(x)$ una serie di potenze $a_1x + a_2x^2 + \ldots$, priva del termine indipendente. Esisterà un cerchio (ρ) nel quale sarà dunque, per la continuità di $p(x)$,

$$|p(x)| < k < 1.$$

Si potrà dunque sviluppare $(1 - p(x))^{-1}$ in progressione geometrica di ragione $p(x)$

$$(a) \qquad \frac{1}{1 - p(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n(x)$$

per tutti i valori di x del cerchio (ρ), e per essere $|p^n(x)| < k^n$, è applicabile l'osservazione del n.° 59, ed il secondo membro della (a) può, entro (ρ), svilupparsi in una serie di potenze $\Sigma A_\nu x^\nu$, il cui coefficiente A_ν è la somma della serie formata dai coefficienti di x^ν nelle $(a_1x + a_2x^2 + \ldots)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$: in modo che $(1 - p(x))^{-1}$ è funzione analitica regolare entro (ρ).

b) Un ragionamento analogo applicato alla funzione

$$\frac{1}{(1 - p(x))^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m + n - 1}{n} p^n(x)$$

dimostra che anche questa è analitica regolare entro il medesimo cerchio (ρ): ed il raggio di convergenza della relativa serie di potenze contiene almeno un punto su cui è $|p(x)| = 1$.

c) Si consideri la serie

$$(b) \qquad L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}.$$ serie di Lambert

Preso $|x| < \rho < 1$, è $|1 - x^n| \geq 1 - \rho^n \geq 1 - \rho$, onde la serie ha il suo termine n^{simo} minore in valore assoluto di $\frac{\rho^n}{1 - \rho}$. La serie converge dunque per $|x| < 1$; non converge invece per $|x| > 1$ poichè il suo termine generale non tende a zero. Dalla disuguaglianza stabilita per il termine generale per $|x| < \rho$, risulta soddisfatta la condizione del n.° 59, e quindi la (b) converge uniformemente entro (ρ); essa è dunque trasformabile in una serie di potenze, che si ottiene ordinando secondo le potenze crescenti di x la

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots x^{qn} + \ldots),$$

il che dà

$$(c) \qquad \boxed{L(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots + \sigma_n x^n + \ldots}$$

dove σ_n rappresenta il numero dei divisori di n. La serie (b) è nota sotto il nome di *serie di* Lambert [1].

d) Sia c_n una successione di numeri tali che Σc_n sia assolutamente convergente; a_n una successione arbitraria di numeri, soggetta solo alla condizione di non essere densa in tutto il piano. Se allora A è una regione connessa del piano, non contenente nè nell'interno nè sul suo contorno nessun punto nè dell'aggregato degli a_n nè del suo aggregato derivato, la serie

$$(d) \qquad \sum \frac{c_n}{x - a_n}$$

rappresenta in tutto A un ramo monodromo di funzione analitica. Infatti, esiste, per le ipotesi fatte, un numero positivo η tale che il limite inferiore delle distanze dei punti a_n dai punti di A è superiore ad η: onde il termine generale della serie (d) è, in valore assoluto, inferiore a $\frac{|c_n|}{\eta}$ in tutto A: è dunque soddisfatta la condizione del n.° 59, e perciò la (d) è effettivamente analitica, regolare, e ad un valore entro A. Variando la disposizione dei punti a_n nel piano, si ha, ad esempio:

1°) se i punti a_n hanno un numero finito di punti limiti, una funzione analitica uniforme il cui campo di regolarità è costituito da tutto il piano sfera, eccettuati i punti a_n ed i loro punti-limiti;

2°) se i punti a_n sono densi su un arco di linea che non limiti un'area, p. es. su di un segmento $a \ldots b$, la (d) dà una funzione analitica uniforme il cui campo di regolarità è costituito da tutto il piano sfera, ad eccezione del segmento $a \ldots b$. È facile verificare che anche $x = \infty$ appartiene, in questo caso, al campo di regolarità;

(1) *Beiträge zur Mathematik*, Berlin, 1765-1772.

3°) se i punti a_n sono densi su una linea chiusa semplice, che separa il piano in due aree C, C', l'una interna e l'altra esterna alla linea, la serie (d) rappresenta *due* funzioni analitiche di cui non si può dire che l'una sia continuazione analitica dell'altra: l'una ha C, l'altra C' come campo di regolarità. v. l'esempio di Tannery p. 62.

§ IV. Espressioni analitiche. (v. anche Vivanti pp. 126-

63. [1] Per gli analisti del secolo XVIII e della prima metà del XIX, e segnatamente per i seguaci di EULER, il concetto di funzione si confondeva con quello di espressione analitica: intendendo con ciò un complesso di operazioni elementari [2] e di passaggi al limite: pur essendosi fin da allora presentato il concetto di funzione data arbitrariamente in un intervallo [3], concetto precisato dal FOURIER, poi dal DIRICHLET, il quale ha formulata la definizione che di *funzione in senso generale* si dà anche oggidì. Ma gli elementi della matematica danno esempio di funzioni quali entità a sè, dotate di un complesso organico di proprietà che scaturiscono da un minimo di condizioni atto a definirle: tali sono le funzioni razionali intere, le fratte, l'esponenziale, le funzioni circolari. Questo carattere di *organismo a sè* che non è insito nell'espressione analitica (come ne porge esempio, fra tante, l'espressione [4]

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^{2n+2}+1+\log x^2}{1+x^{2n}}$$

che è, x essendo positivo, $1+\log x^2$ per $x<1$, 1 per $x=1$, x^2 per $x>1$) fu intravisto da CAUCHY, poi da RIEMANN, ma esso è stato introdotto in modo preciso nella scienza dal Weierstrass, mediante il concetto di continuazione analitica: l'organismo è costituito dall'insieme degli elementi dedotti da uno dato (n.° 42): esso è la funzione analitica. Non è da tacere che il nome di *funzione analitica* è dovuto al LAGRANGE [5], il quale ha in certi punti il carattere di precursore del WEIERSTRASS, ma non ha potuto giungere all'essenza della funzione analitica per il fatto che al suo tempo si limitavano le considerazioni dell'Analisi prevalentemente alle variabili reali.

Questa premessa di carattere storico giova a rendere ragione della definizione che verrà dato nel seguente numero.

---

[1] V. nella *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, T. II, 1, il § I dell'articolo di PRINGSHEIM e MOLK.

[2] Somme, moltiplicazioni, divisioni, soluzioni di equazioni algebriche.

[3] Ad esempio nella celebre discussione (EULER, D'ALEMBERT, D. BERNOUILLI) sul problema delle corde vibranti.

[4] Articolo citato dalla *Encyclopédie*, pag. 8.

[5] *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, V^ve Courcier, 1813.

v. anche l'art. del Pincherle in Enc. delle mat. el. parte 2ª ... 1°

ad. es. se si ha una funz. capace di assumere due soli valori (v. ad es. funz. di Pringsheim) la sua inversa ha per campo di validità l'insieme di quei due valori.

64. Di un'espressione analitica [1] relativa ad una variabile x diremo *campo di validità* l'insieme dei punti x in cui, eseguendo le operazioni indicate dall'espressione, si ottengono, come valori dell'espressione, uno o più numeri determinati. Se, ad esempio, l'espressione è costituita da una serie, solo i valori di x pei quali la serie è convergente appartengono al campo di validità dell'espressione stessa. Nel suo campo di validità, l'espressione rappresenta una funzione — in senso generale — della x: funzione che può essere ad uno o più valori.

Importa appena di notare che non sempre un'espressione rappresenta una funzione analitica. Basta osservare l'esempio dato al n.° precedente. Così, $f(x)$ essendo una funzione analitica, l'espressione $|f(x)|$ non è tale perchè suscettibile di soli valori reali. Invece, per ogni funzione analitica esistono espressioni che ne forniscono il valore, e basta pensare alle serie di potenze che ne costituiscono gli elementi (n.° 42); ma, in generale, il campo di validità dell'espressione non coincide col campo di regolarità della funzione analitica. Ad esempio, le tre espressioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}, \quad \frac{1}{1-x}$$

forniscono i valori di una stessa funzione analitica: ma la prima, solo per $|x|<1$, la seconda, per $|x-3|<2$, la terza in tutto il piano-sfera, ad eccezione di $x=1$: per questa ultima soltanto il campo di validità coincide col campo di regolarità della funzione.

65. In base alle precedenti osservazioni, diremo che:

Def

« Un'espressione analitica *rappresenta* una funzione analitica $f(x)$ in una parte C del proprio campo di validità, « se, C appartenendo al campo di regolarità di $f(x)$, il valore « dato dall'espressione in ogni punto di C coincide col valore « in quel punto della funzione analitica (con *uno* dei valori « se la funzione è multiforme) ».

---

[1] È stato ripetutamente osservato che sarebbe più appropriata la dicitura *espressione aritmetica*.

l'insieme delle espressioni analitiche può ... combinazioni con ... in sottoinsieme ... delle ... analitiche, ma non viceversa.

Funzione analitica è organismo a sè costituito dal complesso de suoi elementi dedotti l'uno dall'altro, campo di regolarità l'insieme de punti interni ai suoi cerchi. Espressione analitica un complesso di operazioni elementari ed fun. limite ecc. Campo di validità quello in cui eseguendo tali operazioni si ottengono uno o più valori determinati de punti

« Quando C costituisce ad un tempo *tutto* il campo di « validità dell'espressione e *tutto* il campo di regolarità della « funzione analitica $f(x)$, se l'espressione rappresenta la fun- « zione in C, l'espressione stessa si dirà *genuina* per la fun- « zione; *non genuina* nel caso contrario ».

Così, la serie Σx^n non è espressione genuina per la funzione $\frac{1}{1-x}$; così ogni elemento di una funzione, che sia continuabile (n.° 38) fuori del proprio cerchio di convergenza, non è espressione genuine per la funzione. Invece un polinomio razionale intero, uno qualunque degli elementi di una funzione intera (n.° 50) sono espressioni genuine per le funzioni analitiche da essi rappresentate: così pure la serie Σx^{2^n}, considerata al n.° 47, *c*), è espressione genuina della funzione che essa rappresenta.

66. Ma, a dimostrare quanto siano discosti i due concetti di espressioni analitica e di funzione analitica, v'ha di più: non solo una espressione può non rappresentare alcuna funzione analitica, non solo essa può rappresentare una funzione analitica per una sola parte del campo di regolarità di questa, ma può anche darsi, come lascia prevedere il caso 3° dell'es. *d*) del n.° 62, che una medesima espressione, in due regioni diverse del suo campo di validità, rappresenti due funzioni analitiche distinte.

Valga in proposito l'esempio classico seguente, dovuto a J. Tannery [1]. Si consideri l'espressione analitica

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}}.$$

Essa equivale alla serie

$$(2) \qquad \frac{1+x}{1-x}+\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{1+x}{1-x}\right)+\dots+\left(\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}}-\frac{1+x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^{n-1}}}\right)+\dots,$$

il cui termine generale, dopo facile riduzione, è, dal secondo in poi,

$$(3) \qquad \frac{2x^{2^{n-1}}}{x^{2^n}-1}; \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\dots).$$

[1] Riportato dal Weierstrass (che del fatto che qui si segnala aveva già dato un esempio, ma più complicato) in *Monatsber. der k. Akad. der Wissenschaften*, Berlin, feb. 1881.

Ora, per $|x|<\rho<1$, si ha $|x^2-1|>1-\rho^{2^n}>1-\rho$, onde il termine precedente è in valore assoluto minore di $2\rho^{2^{n-1}}:(1-\rho)$ e quindi la serie (2) è, nel cerchio (ρ), uniformemente convergente, e rappresenta pertanto (n.° 57), per $|x|<1$, un ramo ad un valore di funzione analitica regolare. Ma il limite (1) è, per $|x|<1$, uguale a $+1$; quella funzione analitica si riduce dunque alla costante $+1$. Invece, per $|x|>\rho'>1$, il termine (3), che si può scrivere

$$\frac{2}{x^{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{x^{2^{n-1}}}\right)},$$

è minore in valore assoluto di $2\rho'^{1-2^{n-1}}:(\rho'-1)$, e quindi anche per $|x|>\rho'$ la serie è uniformemente convergente e rappresenta per $|x|>1$ un ramo ad un valore di funzione analitica: e questa si riduce alla costante -1, come si vede immediatamente dal limite di (1) per $|x|>1$. L'espressione (1), il cui campo di validità consta dell'interno e dell'esterno della circonferenza $|x|=1$, — la circonferenza stessa esclusa — rappresenta dunque nell'interno la costante 1, nell'esterno la costante -1. linea di punti ...

Sia ora A un'area semplicemente connessa, contenente nel suo interno il cerchio $|x|\le 1$, e sia B la parte di A esterna al cerchio stesso. Siano poi $f(x)$, $g(x)$ due rami ad un valore di funzioni analitiche, il cui campo di regolarità comprenda, per entrambe, l'area A. Indicando con $\omega(x)$ l'espressione (1), si formi la nuova espressione

$$(4) \qquad \frac{1}{2}[f(x)+g(x)+\omega(f(x)-g(x))].$$

Questa rappresenta entro il cerchio $|x|=1$, la $f(x)$; nell'area esterna B, la $g(x)$. Si vede da ciò come « una me- « desima espressione analitica possa rappresentare, in due « regioni contigue del piano, due funzioni (o rami di fun- « zioni analitiche) distinte e senza alcun legame fra loro ».

Capitolo Quinto

LE FUNZIONI RAZIONALI E LE TRASCENDENTI ELEMENTARI

§ I. Quoziente di due funzioni analitiche.

67. *a*) La funzione $\frac{a}{(x-\alpha)^m}$, dove m è un intero positivo, è analitica uniforme e regolare su tutto il piano sfera, ad eccezione del punto $x=\alpha$ (cfr. n.° 47, *a*). Essa tende all'infinito per x tendente ad α, e, precisamente tende all'infinito *uniformemente*: ciò significa che preso un numero M positivo arbitrario, si può determinare corrispondentemente un numero positivo δ tale che per $|x-\alpha|<\delta$, è

$$\left|\frac{a}{(x-a)^m}\right| > M;$$

basta prendere δ inferiore a $\sqrt[m]{|a|:M}$. Da ciò risulta subito che ogni funzione della forma

$$\varphi(x,\alpha)=\frac{a_0}{(x-\alpha)^m}+\frac{a_1}{(x-\alpha)^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{x-\alpha} \tag{1}$$

è pure analitica uniforme e regolare su tutto il piano sfera, ad eccezione di $x=\alpha$, e che essa tende parimente all'infinito, ed uniformemente, per x tendente ad α.

b) Sia ora $f(x)$ una funzione analitica, regolare e monodroma in un area A connessa del piano x, e sia α un punto di A, che non sia radice di $f(x)$. Essendo r il raggio di convergenza dell'elemento di $f(x)$ relativo ad α, si avrà entro il cerchio (α, r):

$$(2)\qquad \frac{f(x)}{(x-\alpha)^m} = \frac{f(\alpha)}{(x-\alpha)^m} + \frac{f'(\alpha)}{(x-\alpha)^{m-1}} + \dots$$
$$+ \dots \frac{f^{(m-1)}(\alpha)}{\overline{m-1}\,!\,(x-\alpha)} + \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m\,!} + \frac{f^{(m+1)}(\alpha)}{\overline{m+1}\,!}(x-\alpha) + \dots;$$

la funzione $\dfrac{f(x)}{(x-\alpha)^m}$ è dunque una somma della forma

$$\varphi(x, \alpha) + p(x-\alpha),$$

dove p è simbolo di serie di potenze intere positive di $x-\alpha$; pertanto la (2) è funzione analitica regolare in tutto (α, r), ad eccezione del punto α, e poichè in un'intorno di α la $p(x-\alpha)$ si mantiene inferiore in valore assoluto ad un numero fisso assegnabile, così la (2) tende all'infinito, uniformemente, per x tendente ad α.

68. *a*) Sappiamo (n.° 42, *g*) che « un punto α si dice « *polo* od *infinito di ordine* m [1] (m intero positivo) per una « funzione $g(x)$, quando il prodotto $g(x)(x-\alpha)^m$ è analitico « regolare in un intorno di $x=\alpha$, ma non lo è $g(x)(x-\alpha)^{m-1}$ ».

Se dunque α è polo di ordine m per $g(x)$, si può scrivere $g(x)$ nella forma

$$g(x) = \frac{a_0}{(x-\alpha)^m} + \frac{a_1}{(x-\alpha)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{x-\alpha} + p(x-\alpha), \text{ con } |a_0| > 0;$$

la funzione si riduce dunque regolare in α sottraendo da essa una determinata funzione della forma (1).

b) Risultano subito, dalla definizione, le seguenti ovvie osservazioni:

1.° Se $g(x)$ ha un polo per $x=\alpha$, essa tende uniformemente all'infinito per x tendente ad α.

[1] Weierstrass dà anche ad un polo il nome di ***punto singolare non essenziale*** (*unwesentlich*). Un polo può anche essere detto zero (o radice) di ordine negativo.

2.° Tutti i punti di un intorno del polo α sono punti regolari per la funzione: ciò risulta subito dalla forma (2) della funzione e dal n.° 67. *a*).

3.° Un polo non può essere punto limite nè di poli, nè di radici, nè di punti di livello (n.° 56, *b*) della funzione: non di poli, per la precedente osserv. 2.a; non di zeri o di punti di livello, per la tendenza uniforme di $g(x)$ all'infinito per x tendente ad α.

c) « Il punto $x=\infty$ si dice *polo* (*infinito*) *di ordine* m « (m intero positivo) per una funzione $g(x)$, quando il quo« ziente $g(x):x^m$ è regolare in un intorno di $x=\infty$, ma non « è regolare $g(x):x^{m-1}$ ». Risulta dunque dal n.° 42, *b*) che la $g(x)$ avrà, in un intorno di $x=\infty$, la forma

$$(3)\qquad g(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots a_{m-1}x + p\left(\frac{1}{x}\right), \text{ con } |a_0| > 0,$$

dove $p\left(\dfrac{1}{x}\right)$ è serie di potenze intere positive di $\dfrac{1}{x}$. La $g(x)$ tende uniformemente all'infinito per x tendente all'infinito, nel senso che, preso il numero positivo arbitrario M, si può determinare in corrispondenza un numero R tale che per ogni $|x| > R$ sia $|g(x)| > M$. La $g(x)$ si riduce regolare per $x=\infty$ sottraendo da essa il polinomio razionale intero di grado m, $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x$.

Valgono del resto le osservazioni 2.a e 3.a fatte a *b*).

69. *a*) Essendo

$$(4)\qquad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

una serie di potenze di raggio r di convergenza, il cui primo termine a_0 si suppone dapprima differente da zero, se ne consideri la reciproca. Poichè essa può scriversi

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{a_0\left(1 + \dfrac{a_1}{a_0}x + \dfrac{a_2}{a_0}x^2 + \dots\right)}$$

dove il secondo membro, all'infuori di un fattore costante, è del tipo considerato al n.° 62, *a*), così si può concludere che questa reciproca è funzione analitica regolare in un intorno di $x=0$, determinato dalle condizioni di essere contenuto in (r), e dell'essere in esso

$$\left|\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\dots\right|<1.$$

b) Sia invece $a_0=0$, e sia a_m il primo coefficiente diverso da zero nello sviluppo (4). Sarà allora

$$\frac{1}{p(x)}=\frac{1}{a_m x^m\left(1+\frac{a_{m-1}}{a_m}x+\dots\right)};$$

e qui ci si riconduce alla considerazione di *a*) moltiplicando per x^m; la reciproca di $p(x)$ ha dunque, in questo caso, un polo di ordine m in $x=0$.

c) I coefficienti dello sviluppo in serie di $\frac{1}{p(x)}$ si ottengono facilmente, in virtù del principio di identità delle serie di potenze, mediante il noto metodo dei coefficienti indeterminati (n.° 34, 5.°). Nel caso *a*), posto

$$\frac{1}{p(x)}=g_0+g_1x+g_2x^2+\dots,$$

le g_n sono determinate dal sistema ricorrente

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0g_0=1,\quad a_1g_0+a_0g_1=0,\quad a_2g_0+a_1g_1+a_0g_2=0,\dots \\ \qquad\dots,\ a_ng_0+a_{n-1}g_1+\dots+a_0g_n=0,\dots \end{array}\right.$$

In particolare, $g_0=\frac{1}{a_0}$, $g_1=-\frac{a_1}{a_0^2}$,.... Le (5) determinano le g_n univocamente.

Nel caso *b*), si porrà

$$\frac{1}{p(x)}=\frac{g_0}{x^m}+\frac{g_1}{x^{m-1}}+\dots\frac{g_{m-1}}{x}+g_m+g_{m+1}x+\dots,$$

e la determinazione univoca delle g_n si avrà dal sistema

$$a_mg_0=1,\quad a_{m+1}g_0+a_mg_1=0,\quad a_{m+2}g_0+a_{m+1}g_1+a_mg_2=0,\dots$$

70. Dal n.° precedente risulta subito che, date due serie di potenze convergenti in un cerchio comune (r),

$$p(x)=\Sigma a_nx^n,\quad q(x)=\Sigma b_nx^n,$$

se è $a_0\neq 0$, il quoziente $q(x):p(x)$ è esprimibile mediante una serie di potenze di x, convergente in un cerchio (r'), con $r'\leq r$ e tale che per $|x|<r'$, sia

$$\left|\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\dots\right|<1;$$

i coefficienti di questa serie si ottengono univocamente determinati dal sistema ricorrente

$$a_0g_0=b_0,\quad a_1g_0+a_0g_1=b_1,\quad a_2g_0+a_1g_1+a_0g_2=b_2,\dots$$

Lo stesso ha luogo se, essendo $a_0=a_1=\dots a_{m-1}=0$, la prima delle b_n che non è nulla ha un indice non minore di m. Se invece la prima delle b_n non nulla ha un indice m' inferiore ad m, il quoziente ha per $x=0$ un polo di ordine $m-m'$.

In modo del tutto analogo si vede che date le due serie

$$q(x)=b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\dots,\quad p(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\dots,$$

il quoziente $q(x):p(x)$ è sviluppabile, per $|x|>R$ ed R abbastanza grande, in serie ordinata per le potenze di $\frac{1}{x}$: e se è $a_0=a_1=\dots=a_{m-1}=0$ e la prima delle b_n non nulla ha indice $m'<m$, il quoziente ha un polo di ordine $m-m'$ per $x=\infty$.

71. Le osservazioni precedenti permettono di dare il carattere analitico del quoziente $g(x):f(x)$ di due funzioni analitiche $f(x)$ e $g(x)$, regolari e monodrome entro un'area chiusa e connessa A.

Essendo α un punto dell'area A il quale, o non sia radice di $f(x)$, o, se lo è, sia radice di ordine non inferiore per $g(x)$, il quoziente $\varphi(x)=g(x):f(x)$ è sviluppabile, in un intorno di α, in serie di potenze $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ di $x-\alpha$; il raggio di convergenza di questa serie è il minore fra i due numeri r ed r', dove r è il limite inferiore delle distanze di α dal contorno di A, ed r' la distanza di α dalla più prossima delle altre radici di $f(x)$ che non sia radice di ordine non inferiore per $g(x)$. Preso un punto β entro questo cerchio di convergenza di $p(x-\alpha)$, si ottiene un analogo sviluppo $p(x-\beta)$ in serie di potenze di $x-\beta$ per il quoziente $\varphi(x)$, ed è manifesta l'identità di questo sviluppo con quello $p(x-\alpha \mid \beta)$ dedotto da $p(x-\alpha)$. Per un punto γ di A, che sia radice di ordine m di $f(x)$ e non sia radice di $g(x)$, o quanto meno ne sia radice di ordine m' inferiore ad m, il quoziente $\varphi(x)$ ammette un polo di ordine $m-m'$. Onde $\varphi(x)$ è, in tutto A, funzione analitica regolare monodroma di x, ad eccezione dei punti γ, dove ammette poli, ed essa si ottiene in tutto A dalla continuazione analitica di uno qualunque degli sviluppi $p(x-\alpha)$.

Si dice talvolta che una funzione analitica *ha*, entro una data area chiusa A, *carattere razionale intero*, per esprimere che essa è in tutto A regolare monodroma [1]; si dice che ha *carattere razionale*, per esprimere che è in tutto A regolare monodroma ad eccezione di un numero arbitrario di poli. Il numero di questi poli è però finito, poichè senza di ciò essi ammetterebbero in A [2] qualche punto limite, il quale (n.° 68, *b*, 3°) non può essere un polo.

Usando questa dicitura, si può riassumere il presente n.° dicendo che « il quoziente di due funzioni a carattere razionale intero in una « data area ha, in questa area, carattere razionale ».

§ II. Le funzioni razionali. (numero finito di poli)

72. Ogni funzione razionale intera è regolare su tutto il piano sfera, ad eccezione del punto $x=\infty$ dove essa ha un polo (n.° 68, *c*) di ordine uguale al suo grado. Reciprocamente:

« Una funzione analitica $f(x)$, regolare su tutto il piano « sfera, ad eccezione del punto $x=\infty$ dove essa ammette « un polo di ordine m, è una funzione razionale intera di « grado m ».

Intanto, essa è una funzione intera (n.° 50); ma poichè essa ha un polo di ordine m per $x=\infty$, essa può svilupparsi

(1) Alcuni autori francesi usano come sinonima la dicitura *olomorfa*; altri invece usano *olomorfa* nel senso di *funzione intera* (trascendente).

(2) Per essere l'area chiusa.

cioè è rappresentata da una serie di potenze con raggio di convergenza infinito

(n.° 68, *c*) per un intorno $|x|>R$ di $x=\infty$, nella forma

$$f(x)=c_0x^m+c_1x^{m-1}+\ldots+c_{m-1}x+c_m+\frac{c_{m+1}}{x}+\frac{c_{m+2}}{x^2}+\ldots;$$

talchè la funzione

$$f(x)-c_0x^m-c_1x^{m-1}-\ldots-c_{m-1}x$$

viene ad essere regolare su tutto il piano sfera, compreso $x=\infty$.

Essa si riduce pertanto (n.° 53) ad una costante: con ciò la proposizione enunciata viene ad essere dimostrata.

73. La circostanza di essere dovunque regolare, all'infuori di $x=\infty$, e di avere un polo di ordine m in quel punto, caratterizza dunque la funzione razionale intera. Sostituendo, in una funzione razionale intera di z, nulla per $z=0$,

$$P(z)=a_1z+\ldots a_mz^m,$$

la z con $\dfrac{1}{x-\alpha}$, si ottiene

$$P\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)=\frac{a_1}{x-\alpha}+\ldots+\frac{a_m}{(x-\alpha)^m};$$

questa funzione è una *frazione razionale semplice* [1]. Carattere della frazione razionale semplice è di essere uniforme regolare su tutto il piano sfera, ad eccezione di un solo polo, il cui ordine dà il grado della funzione. È noto [2] come ogni funzione razionale sia esprimibile come somma di un polinomio razionale intero e di un numero finito di frazioni razionali semplici, e ciò in modo unico. (scomposizione)

74. *a*) « Una funzione analitica la quale, su tutto il « piano sfera, ammette poli come sole singolarità, è funzione « razionale ».

Dapprima, poichè la funzione non ammette altre singolarità, il numero dei poli è finito, poichè un punto limite di

(1) O *frazione semplice*.

(2) *Calcolo*, n.i 92-94.

poli non può essere nè polo (n.° 68, *b*, 3°), nè punto regolare. Sia dunque $f(x)$ una funzione analitica, regolare su tutto il piano sfera, e siano

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \quad \alpha_p, \quad \infty$$

i poli, di ordine rispettivo

$$m_1, \quad m_2, \ldots \quad m_p, \quad m.$$

Poichè per $x=\alpha_1$ la funzione ammette un polo di ordine m_1, così si potrà scrivere (n.° 68, *a*), le $a_{11}, a_{12}, \ldots$ essendo costanti:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{a_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{a_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{a_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + f_1(x),$$

dove $f_1(x)$ è una funzione regolare per $x=\alpha_1$, e indicando con $P_{\alpha_1}(x)$ la funzione razionale semplice scritta nel secondo membro, è $f_1(x) = f(x) - P_{\alpha_1}(x)$, donde segue che $f_1(x)$ ammette come poli tutti e soli i punti $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_p, \infty$, degli ordini rispettivi $m_2, m_3, \ldots m_p, m$. Analogamente, $f_1(x)$ avendo per $x=\alpha_2$ un polo di ordine m_2, si avrà

$$(2) \quad f_1(x) = \frac{a_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{a_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{a_{2m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}} + f_2(x) = P_{\alpha_2}(x) + f_2(x),$$

dove $f_2(x)$ ammette come poli i soli punti $\alpha_3, \ldots \alpha_p, \infty$ degli ordini $m_3, \ldots m_p, m$, ed è altrove ovunque regolare. Così continuando, si giunge ad una

$$(3) \qquad f_{p-1}(x) = \frac{a_{p1}}{x-\alpha_p} + \frac{a_{p2}}{(x-\alpha_p)^2} + \ldots + \frac{a_{pm_p}}{(x-\alpha_p)^{m_p}} + f_p(x),$$

dove $f_p(x)$ è regolare su tutto il piano sfera, meno $x=\infty$ dove ha un polo di ordine m, ed è per conseguenza (n.° 72) un polinomio razionale intero di grado m. Sommando le (1), (2),... (3), viene

$$(4) \qquad \boxed{f(x) = P_{\alpha_1}(x) + P_{\alpha_2}(x) + \ldots + P_{\alpha_p}(x) + f_p(x),}$$

che dimostra che $f(x)$ è funzione razionale, e ne dà contemporaneamente la decomposizione in frazioni semplici.

b) Siccome è evidente che una funzione razionale non ammette altre singolarità che poli — ciò consegue tanto dalla decomposizione della funzione nelle sue frazioni semplici, quanto dal n.° 71 — così si ha che « carattere determinativo delle funzioni razionali è quello di non avere « altre singolarità che poli ».

§ III. Le serie ricorrenti.

75. *a*) Per quanto precede, ogni funzione razionale

$$(5) \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomî razionali interi primi fra loro, ammette per ogni punto α del piano-sfera che non sia radice di $Q(x)$, uno sviluppo

$$(6) \quad f(x) = c_0 + c_1(x-\alpha) + c_2(x-\alpha)^2 + \ldots + c_\nu(x-\alpha)^\nu + \ldots,$$

e per una radice α di $Q(x)$, di ordine m, uno sviluppo

$$(6') \quad f(x) = c_m'(x-\alpha)^{-m} + c_{m-1}'(x-\alpha)^{-m+1} + \ldots$$
$$\ldots + c_1'(x-\alpha)^{-1} + c_0 + c_1(x-\alpha) + \ldots;$$

ciò vale anche per il punto α all'infinito, sostituendo (n.° 42, *b*) ad $x-\alpha$, la $\frac{1}{x}$. Ora, posto

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n,$$

i coefficienti c_ν di (6) e di (6') soddisfano, da un indice ν in poi, ad una relazione della forma

$$(7) \qquad \boxed{a_0 c_{\nu+n} + a_1 c_{\nu+n-1} + \ldots + a_n c_\nu = 0,}$$

come si vede dal n.° 70; la (7) è una relazione ricorrente [1]

[1] Nella nomenclatura del Calcolo delle differenze finite, la (7) è un'equazione lineare omogenea ed a coefficienti costanti alle differenze, di ordine n, ed è nota la forma della sua soluzione (od integrale) generale: V. ad es. *Alg. Complem.*, n.i 457-462.

lineare a coefficienti costanti (indipendenti da ν), ragione per cui alle serie (6) o (6') è stato dato il nome di ***serie ricorrenti***.

b) Reciprocamente, ogni serie ricorrente, cioè ogni serie di potenze $\Sigma c_\nu x^\nu$ i cui coefficienti c_ν sono, da un indice $\bar\nu$ in poi, legati da una relazione lineare della forma (7), a coefficienti $a_0, a_1, ..., a_n$ indipendenti dall'indice, rappresenta un elemento di una funzione razionale, di cui gli altri elementi si hanno dalla continuazione analitica della serie stessa. Ciò si verifica sia direttamente, mostrando che il prodotto della serie per $a_0 + a_1 x + ... a_n x^n$ è un polinomio razionale intero; sia sostituendo a c_ν la sua forma generale ([1]) in base alla (7): forma da cui risulta anche la decomposizione della funzione razionale rappresentata dalla serie nelle sue frazioni semplici.

Trascendenti elementari

§ IV. Funzioni esponenziale e circolari.

76. Allo studio delle funzioni razionali dovrebbe succedere quello delle funzioni algebriche, cioè di una funzione y (implicita) di x definita da un'equazione

$$F(x, y) = 0,$$

il cui primo membro è un polinomio razionale intero in x ed y. Ma questo studio richiedendo ulteriori cognizioni, esso verrà trattato più avanti (Cap. XII), e ci occuperemo qui di funzioni trascendenti, cioè non razionali nè algebriche, che però, sia perchè si presentano fino dagli elementi della matematica, sia perchè rappresentano una parte essenziale in tutte le questioni relative alla scienza dei numeri, sono state dette ***elementari***: esse sono la funzione esponenziale e le funzioni circolari.

Dai noti sviluppi in serie ([2])

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1}$$

([1]) *Alg. Complem.*, formule (13) e (19) del Cap. XXIV.

([2]) V. *Calcolo*, n.i 117-119 per l'esponenziale e n.° 196 per le funzioni circolari.

perchè $a_n \neq 0$ per qualunque n
perchè Σ converge in tutto il piano, eccetto

per l'esponenziale e

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} \tag{2}$$

per le funzioni circolari seno e coseno (alle quali si collegano il seno ed il coseno iperbolici) segue che tanto e^x quanto il seno ed il coseno (circolari ed iperbolici) sono funzioni trascendenti intere (n.° 50): perciò uniformi ed aventi l'intero piano, ad eccezione del punto $x = \infty$, come campo di regolarità. Il punto $x = \infty$ è solo punto singolare; esso costituisce il contorno del campo di regolarità.

Fra le proprietà di queste funzioni, ben note al lettore, rammentiamo:

a) quella di soddisfare ad equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

$$y' - y = 0, \quad y'' - y = 0, \quad y^{(\mathrm{IV})} - y = 0, \tag{3}$$

rispettivamente per l'esponenziale, per le iperboliche, per le circolari;

b) quella di ammettere un teorema d'addizione: dicendosi che una funzione $f(x)$ ammette un teorema d'addizione quando vi è una relazione algebrica fra i valori della funzione per x, y, ed $x + y$. Questo teorema è dato da

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x+y) = f(x)f(y), \quad f(x+y) = f(x)\sqrt{1+f^2(y)} + f(y)\sqrt{1+f^2(x)} \\ f(x+y) = f(x)\sqrt{1-f^2(y)} + f(y)\sqrt{1-f^2(x)}, \end{array} \right. \tag{4}$$

rispettivamente per l'esponenziale, per il seno iperbolico, per il seno;

c) la relazione (di Euler) fra l'esponenziale e le funzioni circolari:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \tag{5}$$

nonchè quella fra l'esponenziale e le funzioni iperboliche:

$$e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x. \tag{5'}$$

77. La funzione esponenziale non ammette radici nel suo campo di regolarità. Il coseno iperbolico non ha radici reali; il seno iperbolico ha $x = 0$ come sola radice reale. Il seno ha, come radici reali, tutti e soli i punti della forma $x = k\pi$, k intero; non ha altre radici, poichè se è $\operatorname{sen}(\alpha + i\beta) = 0$, α e β essendo numeri reali, deve essere, per la (5):

$$(6) \qquad (e^\beta - e^{-\beta}) \cos \alpha = 0, \quad (e^\beta + e^{-\beta}) \operatorname{sen} \alpha = 0;$$

ma, non potendo essere contemporaneamente $\cos \alpha = 0$ e $\operatorname{sen} \alpha = 0$, e $e^\beta + e^{-\beta}$ non essendo nullo ed $e^\beta - e^{-\beta}$ essendolo solo per $\beta = 0$, il sistema (6) si può soddisfare solo con $\beta = 0$, $\alpha = k\pi$, k intero. Analogamente il coseno ha sole radici reali, che sono tutti i numeri $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, k intero. Tanto gli zeri del seno quanto quelli del coseno sono del primo ordine.

78. Risulta da quanto precede che la funzione $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ ha carattere razionale in tutto il piano, ad eccezione del punto $x = \infty$; gli zeri $k\pi$ del denominatore sono, per la cotangente, poli del primo ordine. La cotangente, e così la tangente, la secante e la cosecante sono funzioni analitiche uniformi, aventi a distanza finita soltanto singolarità polari, ed un punto singolare essenziale per $x = \infty$; come tali, esse appartengono alla classe delle funzioni analitiche dette *trascendenti fratte* o *funzioni meromorfe*.

§ V. La funzione logaritmica.

79. La funzione logaritmica è definita come inversa dell'esponenziale; la scrittura $y = \log x$ equivale dunque ad $x = e^y$. Ne risulta

$$\frac{dx}{dy} = x, \quad \text{onde} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

e siccome questa equazione differenziale è, per x finito e diverso da zero, nelle condizioni stabilite da un noto teorema di esistenza [1], si può ottenere l'integrale mediante l'inte-

[1] *Calcolo*, n.i 620-621.

grazione termine a termine della serie, convergente nel cerchio $(\alpha, |\alpha|)$:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} - \frac{x-\alpha}{\alpha^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{\alpha^3} - \ldots.$$

Si ottiene così, C essendo la costante d'integrazione:

$$y = C + \frac{x-\alpha}{\alpha} - \frac{(x-\alpha)^2}{2\alpha^2} + \frac{(x-\alpha)^3}{3\alpha^3} - \ldots,$$

e la costante si determina facendo $x = \alpha$, onde $C = \log \alpha$. Ma se si pone $\alpha = \rho e^{i\theta}$, il logaritmo di α ha infiniti valori, dati da

$$\log \alpha = \overline{\log \rho} + i\theta + 2k\pi i,$$

dove $\overline{\log \rho}$ è il logaritmo reale del modulo ρ di α, θ è l'argomento determinato da $0 \leq \theta < 2\pi$, e k è un intero arbitrario [1]. Si fissi il valore di $\log \alpha$ prendendo, ad esempio, $k = 0$, e si ha così lo sviluppo di $\log x$, valido entro il detto cerchio (α, ρ):

$$(7) \qquad \log x = \overline{\log \rho} + i\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-\alpha)^n}{n\alpha^n}.$$

80. Si faccia ora ruotare il raggio 0α di un angolo acuto β nel senso delle rotazioni positive (fig. 8), e si prenda su di

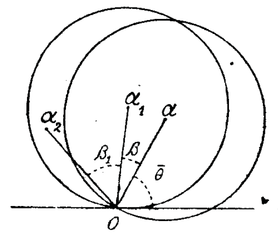


Fig. 8

esso un punto α_1 interno al cerchio $(\alpha, |\alpha|)$. Lo sviluppo dedotto immediatamente da (7) relativamente al punto α_1 coinciderà con

$$(8) \qquad \log x = \log \alpha_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-\alpha_1)^n}{n\alpha_1^{\,n}},$$

[1] Ibid., n.° 199.

dove $\log \alpha_1$ ha per parte immaginaria $i(\theta + \beta)$; lo sviluppo (8) converge entro il cerchio $(\alpha_1, |\alpha_1|)$. Prendendo in questo cerchio un punto α_2 colle medesime avvertenze, ed essendo β_1 l'angolo acuto di cui $0\alpha_1$ ha ruotato positivamente per venire in $0\alpha_2$, si otterrà come sviluppo dedotto relativo ad α_2 la serie analoga a (8), in cui il termine indipendente sarà quella determinazione di $\log \alpha_2$ la cui parte immaginaria è $i(\theta + \beta + \beta_1)$. Così si può continuare, finchè si giunge ad un punto α_n preso entro il cerchio $(\alpha_{n-1}, |\alpha_{n-1}|)$ e tale che, essendo l'angolo $\widehat{\alpha_n 0 \alpha}$ acuto positivo, il punto di partenza α venga a trovarsi entro il cerchio $(\alpha_n, |\alpha_n|)$: ciò accadrà dopo un numero finito di volte. Lo sviluppo dedotto che ne verrà relativamente ad α avrà, per termine indipendente da $x - \alpha$, quella determinazione di $\log \alpha$ data da $\overline{\log \rho} + i(\theta + 2\pi)$.

Ripetendo il procedimento per un secondo, per un terzo,... giro, si dedurranno relativamente ad α elementi differenti fra loro solo per il termine indipendente, il quale sarà rispettivamente

$$\overline{\log \rho} + i(\theta + 4\pi), \quad \overline{\log \rho} + i(\theta + 6\pi), \ldots,$$

e così, girando nel senso delle rotazioni negative, si otterrebbero relativamente ad α sviluppi dedotti differenti solo per il termine indipendente, che dopo uno, due,.... giri, sarebbe

$$\overline{\log \rho} + i(\theta - 2\pi), \quad \overline{\log \rho} + i(\theta - 4\pi), \ldots$$

Da ciò si conclude che « $\log x$ è una funzione analitica « il cui campo di regolarità è costituito da tutto il piano, ad « eccezione dei punti $x = 0$ ed $x = \infty$; essa è multiforme, e « ad ogni punto α del campo di regolarità corrispondono infiniti elementi, differenti fra loro solo per il termine indipen« dente da $x - \alpha$: la differenza è un multiplo intero di $2\pi i$ ».

Per la definizione data al n.° 42, *j*), $x = 0$ è, per $\log x$, un ***punto critico***. o punto di diramazione non algebrico (v. anche Landau n° 48

mentre esempio di punto critico (algebrico) è dato da $x = 0$ per $\sqrt{x}$

CAPITOLO SESTO

I TEOREMI DI CAUCHY

§ I. Il teorema integrale di Cauchy.

81. Entro un'area A semplicemente connessa del piano della variabile complessa x, e sul contorno, sia data una funzione monogena e ad un valore $f(x)$; in ogni punto di A e del contorno sono pertanto soddisfatte le proprietà enunciate al n.° 25.

Sarà sempre supposto che il contorno (c) di A sia una linea di JORDAN rettificabile: sia l la sua lunghezza.

Per l'ipotesi che A è connessa, la linea c è priva di nodi. Per l'ipotesi che A è semplicemente connessa, *la linea* c *è riducibile ad un punto in* A *mediante deformazione continua*; s'intende con ciò di esprimere che è possibile (ed in infiniti modi) di costruire, partendo da c, una successione

$$c, \quad c_1, \quad c_2, \ldots, \quad c_n, \ldots$$

di linee analoghe a c, ognuna racchiudente una parte semplicemente connessa di A ed ognuna inclusa nella precedente, tali che il limite inferiore delle distanze di ogni punto di c_n da quelli di c_{n-1} sia inferiore ad un numero assegnato ε, e tali infine che da un n in poi siano tutte racchiuse entro un cerchio avente il centro in un punto di A e raggio arbitrariamente piccolo.

Sotto queste ipotesi, vale la seguente proposizione, nota sotto il nome di *Teorema integrale di* CAUCHY: « L'integrale « curvilineo di $f(z)$ esteso al contorno c, è nullo » [1].

dimostrazione

82. Questa proposizione si può dimostrare con molta facilità quando si applichi la nota formula di GREEN (v. *Calcolo*, n.^{i} 449-452): cioè quando, posto $x = u + iv$, $f(z) = \xi + i\eta$, oltre al supporre continue le derivate parziali di ξ, η, si ammetta che il contorno di A sia incontrato da ogni parallela agli assi u e v in un numero finito di punti. Si ha infatti

$$\int_{(c)} f(x)dx = \int_{(c)} (\xi du - \eta dv) + i\int_{(c)} (\eta du + \xi dv);$$

ma, per la ricordata formula, è

$$\int_{(c)} (\xi du - \eta dv) = -\iint_{(A)} \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial v}\right) du dv,$$

$$\int_{(c)} (\eta du + \xi dv) = \iint_{(A)} \left(-\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) du dv;$$

ora, gl'integrali doppi che qui compaiono sono nulli per la relazione di monogeneità (n.° 25); si ha dunque

$$(1) \qquad \int_{(c)} f(x)dx = 0,$$

ed il teorema è così dimostrato.

motivazione

83. Dello stesso teorema conviene però dare una dimostrazione diretta che non richieda la conoscenza della formula di GREEN e che valga sotto ipotesi meno restrittive [2].

---

(1) Questa proposizione, la cui importanza non si saprebbe valutare abbastanza, è stata data per la prima volta dal CAUCHY nella sua celebre memoria del 1823: *Sur un nouveau genre de Calcul analogue au Calcul infinitésimal* (Oeuvres complètes, S. II, T. VI, p. 23).

(2) La dimostrazione originaria di CAUCHY, e quelle date dalla sua scuola (v. p. es. BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, Paris, 1875, p. 128) non sono al riparo da obbiezioni. Varî Autori si sono proposti di rendere la dimostrazione rigorosa; citiamo M. FALK (*Bulletin des sciences mathématiques*, S. II, T. VII, 1883) ed E. GOURSAT (*Acta Math.*, T. IV, p. 197); questo ultimo ha perfezionato la dimostrazione, sotto la sola ipotesi della continuità delle derivate parziali di ξ ed η, delle relazioni di monogeneità e della rettificabilità del contorno, nelle *Transact. of the American Mathem. Society*, T. I, p. 14, 1900 e nel *Cours d'Analyse* T. II, p. 82, Paris 1904. (V. anche A. PRINGSHEIM, *Trans. of the Americ. Math. Soc.*, T. II, p. 413, 1901). La dimostrazione che diamo qui è in sostanza quella del GOURSAT, cui reca semplificazione l'applicazione del principio generale del n.° 17 e la sua conseguenza data al n.° 18. Al RIEMANN (*Inaugural Dissertation*, Gottingen, 1851; *Gesamm. Werke*, Leipzig, 1876, p. 12) risale la dimostrazione, dopo di lui frequentemente ripetuta, fondata sull'applicazione della formula di GREEN.

Cominciamo col ricordare (n.° 29) che se $f'(x)$ è la derivata di $f(x)$, preso arbitrariamente il numero positivo ε, ad ogni punto $\bar{x}$ di A corrisponde un numero positivo $\delta_{\bar{x}}$ tale che per ogni punto x del cerchio $(\bar{x}, \delta_{\bar{x}})$ è soddisfatta la relazione

$$(2) \qquad \left|\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f'(\bar{x})\right| < \varepsilon.$$

cioè il rapporto incrementale converge uniformemente alla funzione

Poichè l'area A è *interna* al campo in cui la $f(x)$ è monogena, e poichè la (2) è verificata entro un cerchio relativo ad ogni punto di A, è dunque applicabile il principio del n.° 17 e la sua conseguenza data al n.° 18: si può cioè descrivere una rete o sistema (Q) di quadrati di lato λ, coi lati paralleli agli assi, includente l'area A, e tale che, fissato ε, entro ogni quadrato q_k del sistema esiste un punto $\bar{x}$ pel quale la (2) è verificata. Essa sarà in particolare verificata prendendo $\bar{x}$ sul perimetro del quadrato q_k; e se si considerano quei quadrati, attraversati da parte del contorno c di A (fig. 9) essa sarà pure verificata sul perimetro della parte smussata (ombreggiata nella figura e che diremo q_k') di un tale quadrato. Osserviamo infine che la rete dei quadrati può essere rinchiusa in un rettangolo, coi lati paralleli agli assi, di area finita R. Indicando ora con p_k il perimetro del quadrato q_k, con p_k' quello del quadrato smussato q_k', consi-

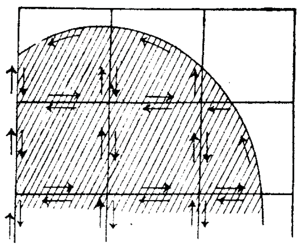


Fig. 9

deriamo dapprima la somma, estesa ai perimetri dei quadrati q_k contenuti in A e a quelli dei quadrati smussati q_h

$$\sum\nolimits_k \int_{(p_k)} f(x)dx + \sum\nolimits_h \int_{(p_h')} f(x)dx,$$

dove l'integrazione è fatta, sul contorno di ogni quadrato, nel senso delle rotazioni positive (indicato dalle freccie). Notando le parti che si distruggono, per essere integrali presi due volte in senso contrario, la sommatoria si riduce all'integrale di $f(x)$ esteso al contorno c di A; si ha dunque:

$$\int_{(c)} f(x)dx = \sum\nolimits_k \int_{(p_k)} f(x)dx + \sum\nolimits_h \int_{(p_h')} f(x)dx. \tag{3}$$

Ma poichè in ogni quadrato q_k, od ogni quadrato smussato (q_h'), esiste un punto x_k tale che, per ogni x del perimetro, sia verificata la (2), si potrà scrivere:

$$f(x) = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k) + \eta_k(x)(x - x_k), \tag{4}$$

dove è $|\eta_k(x)| < \varepsilon$. Onde,

$$\int_{(p_k)} f(x)dx = f(x_k)\int_{(p_k)} dx + f'(x_k)\int_{(p_k)} xdx - x_k f'(x_k)\int_{(p_k)} dx + \int_{(p_k)} \eta_k(x)(x - x_k)dx,$$

ed analogamente per p_h'.

Ma, in forza delle osservazioni *a*) e *b*) del n.° 24, i tre primi termini del secondo membro sono nulli, per essere estesi ad un contorno chiuso; rimane dunque

$$\int_{(c)} f(x)dx = \sum_k \int_{(p_k)} \eta_k(x)(x - x_k)dx + \sum_h \int_{(p_h')} \eta_h(x)(x - x_h)dx. \tag{5}$$

In ognuno degli integrali della prima sommatoria del secondo membro di (5), è $|x - x_k| < \lambda\sqrt{2}$, $|\eta_k(x)| < \varepsilon$, onde l'integrale è in valore assoluto minore di $4\lambda^2\varepsilon\sqrt{2}$, e poichè λ^2 è l'area di uno dei quadrati e la somma di queste aree è minore di quella del rettangolo indicato con R, così la prima sommatoria è, in valore assoluto, minore di $4\varepsilon R\sqrt{2}$. In uno degli integrali della seconda sommatoria, indicando con l_h la

lunghezza dell'arco della linea c compreso entro q_h', il contorno d'integrazione è minore di $4\lambda + l_h'$; uno degli integrali è quindi minore di $4\lambda^2\varepsilon\sqrt{2} + l_h'\lambda\varepsilon\sqrt{2}$, e quindi il valore assoluto della seconda sommatoria è inferiore a

$$\sum\nolimits_h (4\lambda^2 + l_h'\lambda)\varepsilon\sqrt{2} < 4\varepsilon R\sqrt{2} + \lambda\varepsilon l\sqrt{2},$$

l essendo la lunghezza di c. Ne viene

$$\left|\int_{c} f(x)dx\right| < 8\varepsilon R\sqrt{2} + \lambda\varepsilon l\sqrt{2}.$$

Ma il primo membro ha un valore fisso, il secondo è arbitrariamente piccolo in relazione alla scelta di ε, onde si conclude quanto si doveva dimostrare, cioè:

$$\int_{(c)} f(x)dx = 0.$$

§ II. Prime conseguenze del teorema di Cauchy.

84. In ciò che segue, avremo spesso da indicare l'integrale, esteso ad un contorno designato da più lettere $a, b, c, \ldots, h$ poste sul suo percorso, di una data funzione $f(x)$. Quando non vi possa essere ambiguità, ommetteremo di scrivere l'elemento $f(x)dx$ sotto il segno, e, per comodità di scrittura, rappresenteremo semplicemente l'integrale con $\int (abc \ldots l)$.

Sia $f(x)$ una funzione monogena e ad un valore in un campo T. Se l è una linea chiusa, contenuta in T, che non interseca sè stessa e che racchiude una porzione semplicemente connessa di T, l'integrale $\int_{(l)} f(x)dx$ è nullo per il teorema di Cauchy. Supponiamo ora che la linea si intersechi in un punto c, in modo da costituire (fig. 10) due linee chiuse *cabc* e *cdec*, contenenti ciascuna una parte sem-

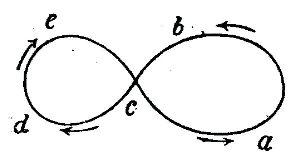


Fig. 10

plicemente connessa di T; sarà:

$$\int_{(l)} f(x)dx = \int(cabc) + \int(cedc);$$

ma questi due ultimi sono nulli, essendo nelle condizioni del n.° precedente, onde $\int_{(l)} f(x)dx = 0$.

Lo stesso vale se la linea l ha un numero arbitrario di punti di incrocio, quando essa si divida in questi punti in tante parti chiuse, ognuna delle quali contenga una porzione semplicemente connessa di T.

85. Entro il precedente campo T siano tracciate due linee amb, anb terminanti nei medesimi estremi a, b; esse possano anche intersecarsi in un numero finito di punti, ma in modo da racchiudere sempre, fra due loro punti d'intersezione, porzioni semplicemente connesse di T. Considerando allora la linea chiusa costituita da $ambna$, si ha per il teorema di Cauchy e l'osservazione fatta al n.° precedente

$$\int(ambna) = 0,$$

onde (n.° 23)

$$\int(amb) + \int(bna) = 0,$$

e infine

(1) $$\int(amb) = \int(anb).$$

Onde « se entro una parte semplicemente connessa del « campo T, dove la $f(x)$ è monogena e ad un valore, si descri- « vono due linee aventi i medesimi estremi, l'integrale di $f(x)$, « esteso ad una o all'altra delle linee, ha il medesimo valore ».

In altri termini: « Se, presi due punti a, b in una por- « zione semplicemente connessa di T, si uniscono questi due « punti con una linea arbitraria tutta contenuta in questa por- « zione, il valore dell'integrale è indipendente dalla scelta « della linea stessa ».

Questo valore dipende dunque solo dai punti estremi; esso si può dunque indicare con $\int_a^b f(x)dx$, qualora sia inteso

che la linea d'integrazione congiungente a con b, pur essendo arbitraria, non esce da una porzione semplicemente connessa di T.

Si esprime talora il fatto che due linee congiungenti a, b racchiudono fra loro una porzione semplicemente connessa di T, dicendo che una di esse si può ridurre all'altra mediante una deformazione continua che non la faccia uscire da T. Vedasi su ciò la osservazione al n.° 81.

86. Sia ora T un campo, connesso, ma non più semplicemente connesso, sul quale, compreso il contorno, la $f(x)$ è monogena ad un valore, e vediamo in quale modo si applichi, in questo caso, il teorema di Cauchy.

Premettiamo che quando una linea chiusa c' forma parte del contorno di un'area, diremo che c' è percorsa *in senso positivo* quando, per l'osservatore che si immagina percorrerla, l'interno dell'area rimane a sinistra. In corrispondenza, si dirà che l'integrazione lungo c è fatta in senso positivo. Non è da confondere questa dicitura con quella « senso delle *rotazioni positive* »: questo va sempre inteso come il senso sinistrorso, cioè contrario a quello in cui ruotano le lancette dell'orologio.

Per fissare le idee, il campo T abbia 2 come ordine di connessione; ciò significa (n.° 16) che con due tagli [1] esso si rende semplicemente connesso. Il campo sia chiuso dai tre contorni c, c', c'' (fig. 11), e siano ab, np i due tagli che lo rendono semplicemente connesso: si dica T' il campo così modificato. Questo campo T' essendo semplicemente connesso, ed $(amnpqpurabsba)$ [2] essendo il suo contorno, percorso nel senso delle rotazioni positive, gli sarà applicabile il teorema di Cauchy e si avrà

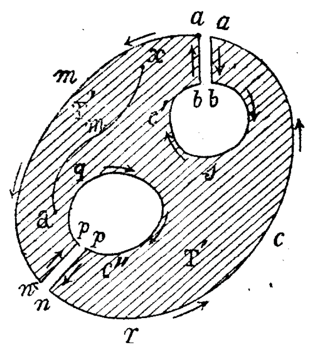


Fig. 11

$$\int(amnpq...sba) = 0.$$

[1] Circa al significato dei tagli, v. sopra, n.° 15, c.
[2] Si parte dal punto a segnato sulla figura in modo più marcato.

Ma questa integrazione si decompone in

$$\int(amn)+\int(np)+\int(pqp)+\int(pn)+\int(nra)+\int(ab)+\int(bsb)+\int(ba)$$

e poichè il secondo ed il quarto integrale si distruggono, e così il sesto e l'ottavo, viene, le integrazioni essendo fatte nel senso indicato dalle freccie:

$$\int(amnra)+\int(pqp)+\int(bsb)=0$$

o anche

$$\int_{(c)} f(x)dx+\int_{(c')} f(x)dx+\int_{(c'')} f(x)dx=0,$$

dove le integrazioni sono fatte nel senso definito come positivo, cioè lasciando a sinistra l'interno dell'area T.

Le considerazioni precedenti potendosi ripetere qualunque sia l'ordine di connessione, cioè qualunque sia il numero dei contorni che racchiudono l'area T, si può enunciare il

Teorema. « Se T è un'area del piano x, dell'ordine p di « connessione, se $c_0, c_1, \ldots c_p$ sono i suoi contorni, e se $f(x)$ è « una funzione monogena, ad un valore entro T, contorni « compresi, si ha

$$\sum_{h=0}^{p}\int_{(c_h)} f(x)dx=0, \tag{2}$$

« i contorni essendo percorsi tutti ~~in senso positivo~~ (cioè la- « sciando a sinistra l'interno dell'area) ».

87. *a*) Ne viene immediatamente che se il contorno c_0 abbraccia gli altri $c_1, c_2, \ldots c_p$, si avrà, invertendo in questi ultimi il senso della rotazione che era per essi, nella (2), quello delle rotazioni negative:

$$\int_{(c_0)} f(x)\,dx=\sum_{h=1}^{p}\int_{(c_h)} f(x)\,dx, \tag{3}$$

le integrazioni essendo ora fatte, nei due membri, nel senso delle rotazioni positive.

b) In particolare, se l'area ha l'ordine di connessione 2 ed è chiusa dai due contorni c e c', ferme le ipotesi precedenti, si ha

$$\int_{(c)} f(x)\,dx=\int_{(c')} f(x)\,dx, \tag{4}$$

i due integrali essendo percorsi nel senso delle rotazioni positive.

88. Si noti che, poichè ogni funzione analitica è monogena nel proprio campo di regolarità (n.° 42, *e*), tutte le proposizioni date nel presente Capitolo, come pure le loro conseguenze, si applicano alle funzioni analitiche in aree in cui esse siano regolari ed entro le quali ne venga considerato (n.° 42, *i*) un ramo monodromo. v. ad es. [illegible] 160

§ III. Primitiva di una funzione monogena.

89. Sia data ancora una funzione $f(x)$ monogena e ad un valore entro l'area semplicemente connessa A, ferme restando le condizioni enunciate al n.° 81. Siano a, x due punti della area; per il n.° 85, se a ed x si uniscono mediante una linea m tutta contenuta nell'area, l'integrale $\int_{(amx)} f(t)dt$ è indipendente dalla scelta di questa linea e dipende solo dagli estremi a ed x. Convenendo di tenere fisso a, l'integrale precedente, che, come si è detto (n.° 85) si indicherà con $\int_a^x f(t)dt$, viene ad essere una funzione di x data in tutta A, ad un valore, e nulla per $x=a$; essa si indicherà con $F(x)$.

Poichè x è interno ad A, si può descrivere un cerchio (x, δ_1) tutto interno ad A, e poichè $f(x)$ è monogena, essendo $f'(x)$ la sua derivata, si può, preso ε arbitrario, determinare un $\delta \leq \delta_1$ per modo che per ogni t_1 interno ad (x, δ) sia (n.° 29)

$$\frac{f(x+t_1)-f(x)}{t_1}-f'(x)=\eta(t_1), \tag{1}$$

con $|\gamma(t_1)| < \varepsilon$. Preso h in (x, δ), si ha

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

dove nel secondo membro si può assumere il segmento $x \ldots x+h$ come linea di integrazione, e posto $t = x + t_1$, viene, per la (1),

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^h f(x+t_1)dt_1 =$$

$$= \int_0^h (f(x) + t_1 f'(x) + \gamma(t_1)t_1)dt_1,$$

e, tenuto conto delle osservazioni *a*) e *b*) del n.° 24:

$$(2) \qquad F(x+h) - F(x) = hf(x) + \frac{h^2}{2}f'(x) + \int_0^h \gamma(t_1)t_1 dt_1,$$

dove l'ultimo integrale è manifestamente minore di $\varepsilon|h|$ in valore assoluto. Dalla (2) risulta:

a) la continuità di $F(x)$;

b) dividendo per h e passando al limite, la derivabilità di $F(x)$, di cui la $f(x)$ è la derivata. Si ha così che « se $f(x)$ è « monogena e ad un valore nell'area semplicemente con- « nessa A, il suo integrale definito $F(x)$ è pure monogeno « nell'area stessa, ed ammette ivi la $f(x)$ stessa come derivata ».

Il « teorema fondamentale » del Calcolo integrale [1] è così esteso, per le funzioni monogene, al campo complesso, e la $F(x)$ può dirsi funzione *integrale* o *primitiva* di $f(x)$.

90. Si supponga ora la $f(x)$ data monogena e ad un valore in un area T (contorno compreso) che non sia più semplicemente connessa (fig. 11bis). Presi in T due punti a, x, e tenuto fisso a, si uniscano a ed x mediante due linee amx, anx:

[1] *Calcolo*, n.° 335.

se queste racchiudono una parte semplicemente connessa di T, sarà (n.° 85)

$$\int_{(amx)} f(t)dt = \int_{(anx)} f(t)dt$$

e questo integrale darà una funzione $F(x)$ di x: funzione che rimarrà indipendente dalla linea di integrazione finchè questa non oltrepassa alcuno dei contorni interni di T, cioè finchè la linea anx si può, « con deformazione continua che non « la faccia uscire da T, ricondurre ad amx ».

Se il campo T si riduce a T', semplicemente connesso, mediante opportuni tagli (v. fig. 11), allora ogni linea di T che unisce a ad x può ridursi ad amx mediante deformazione continua senza uscire da T'; vale quanto è detto nel n.° precedente circa alla $F(x)$ come funzione integrale di $f(x)$. Ma se T non viene ridotta semplicemente connessa, e si considerano due linee di integrazione non riducibili l'una all'altra mediante una deformazione continua che non esca da T, le $\int_{(amx)} f(t)dt$ ed $\int_{(anx)} f(t)dt$, entrambe monogene e primitive di $f(x)$, non saranno necessariamente identiche. Ed invero, considerando il campo di ordine 1 di connessione racchiuso da $amxna$ e da c' (fig. 11bis), si ha, per la (4) del n.° 87, le integrazioni essendo eseguite nel senso delle rotazioni positive:

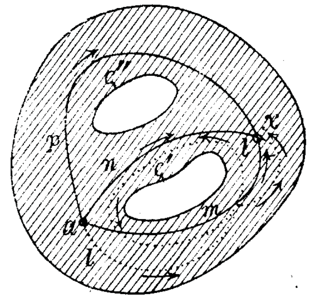


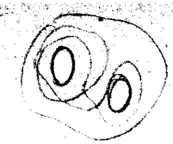
Fig. 11 bis

$$\int_{(amxna)} f(t)dt = \int_{(c')} f(t)dt,$$

ma qui l'integrale del secondo membro è una costante determinata C, onde

$$\int_{(anx)} f(t)dt = \int_{(amx)} f(t)dt + C.$$

Parimente, indicando C' l'integrale $\int_{(c'')} f(t)dt$, si ha dal n.° 87,



come mostra la figura:

$$\int_{(apx)} f(t)dt = \int_{(amx)} f(t)dt + C + C'.$$

Se una linea l, congiungente a con x e tutta contenuta in T, circonda (c') con r giri e c'' con r' giri, tutti in senso positivo, sarà analogamente

$$\int_{(l)} f(t)dt = \int_{(amx)} f(t)dt + (r+1)C + (r'+1)C'. \text{ [1].}$$

Ovvia modificazione se la linea l fà intorno a (c'), o (c''), o ad entrambi, un certo numero di giri negativi, ognuno dei quali annulla un giro positivo.

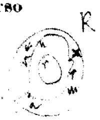
primitiva in area pluriconnessa

Riassumendo, « una $f(x)$ monogena ad un valore in un « campo T di ordine p di connessione ammette, come primi- « tiva, la funzione monogena $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, dove l'integra- « zione è estesa ad una congiungente arbitraria di a con x « contenuta in T; ma la $F(x)$ non è più ad un valore, ed i « suoi valori in un punto x di T possono differire per mul- « tipli arbitrari di costanti determinate $C_1, C_2, \dots C_p$, che « sono gl'integrali di $f(x)$ presi lungo i contorni interni di T ».

Alle costanti $C_1, C_2, \dots$, si dà il nome di *moduli di periodicità*.

Vivanti 163

91. Si consideri, come esempio, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ entro una corona circolare T compresa fra le circonferenze di raggi r ed R, essendo r piccolo a piacere ed R arbitrariamente grande. Il campo T, di cui 1 è l'ordine di connessione, è nelle condizioni del n.° precedente: se dunque a ed x sono due punti di T e si uniscono con due linee amx, anx comprendenti fra loro la circonferenza (r) — per modo che sia $amxna$ il percorso nel senso delle rotazioni positive — si avrà



R

$$\int_{(amx)} \frac{dx}{x} = \int_{(anx)} \frac{dx}{x} + \int_{(r)} \frac{dx}{x},$$

dove il secondo integrale del secondo membro è il modulo di periodicità. Ma, come si è veduto al n. 24, c), quest'integrale è uguale a $2\pi i$.

---

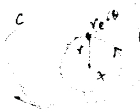
[1] Nella figura, si ha $r = 1$, $r' = 0$, per la linea l punteggiata.

(1) oppure $f = u + iv$ è monogena; dunque $\Delta_2 u = \Delta_2 v = 0$, e vale il teor. della media per le funz. armoniche, perciò $\int_{(1)} \frac{f}{t-x} dt = i \int_0^{2\pi} (u+iv) d\theta$ dà $i\int_0^{2\pi}(u+iv)d\theta = f(z) \cdot 2\pi i$, da cui la (2)

Perciò la primitiva di $\frac{1}{x}$, che è $\log x$ quando le si attribuisce il valore 0 per $x = 1$, ammette infiniti valori differenti fra loro per multipli di $2\pi i$ per ogni valore di x; in altri termini, se, partendo da un punto $\bar{x}$ prossimo ad 1 col valore $\log \bar{x}$ prossimo a zero dato da $\bar{x} - \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{x}^3}{3} - \dots$, la variabile x descrive una linea che gira p volte, in senso positivo, intorno alla circonferenza r e torna in $\bar{x}$, all'arrivo la funzione assumerà il valore $\log \bar{x} + 2p\pi i$. Si ritrova così, per altra via, la multiplicità di valori del logaritmo già notata al n.° 80.

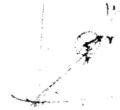
§ IV. Integrale di Cauchy e sue conseguenze.

92. *a*) Sia $f(x)$ una funzione monogena e ad un valore nell'area semplicemente connessa A, compreso il contorno c; sia x un punto interno ad A. La funzione della variabile complessa t



$$\frac{f(t)}{t-x},$$

è monogena in tutta l'area A del piano t, ad eccezione del punto $t = x$; se dunque si descrive il cerchio (x, r), di raggio arbitrariamente piccolo e in ogni modo tutto interno ad A, si avrà, per il n.° 87, b):



(1) $$\int_{(c)} \frac{f(t)dt}{t-x} = \int_{(r)} \frac{f(t)dt}{t-x}.$$

(1)

Posto, sulla circonferenza (x, r), $t - x = re^{i\theta}$, si può, per la continuità di $f(x)$, prendere r abbastanza piccolo perchè sia, sulla detta circonferenza (x, r):

$$f(t) = f(x) + \varepsilon(\theta),$$

dove è $|\varepsilon(\theta)| < \varepsilon$, essendo ε prefissata arbitrariamente. Ne viene

$$\int_{(r)} \frac{f(t)dt}{t-x} = f(x) \int_{(r)} \frac{dt}{t-x} + i \int_0^{2\pi} \varepsilon(\theta) d\theta,$$

e poichè il primo integrale del secondo membro è (n.° 24, c)

uguale a $2\pi i$, mentre il secondo è, in valore assoluto, minore di $2\pi\varepsilon$, si ha da (1):

$$\left| \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(t)dt}{t-x} - f(x) \right| < \varepsilon ;$$

ma i due termini della differenza nel primo membro essendo determinati, mentre ε è arbitrariamente piccolo, si conclude:

(2) $$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(t)dt}{t-x}.}$$ formula integrale di Cauchy

La formula così stabilita è della massima importanza. Essa mostra come « il valore di una funzione monogena « entro un'area A dipenda esclusivamente dai valori al con- « torno ». Anzi, codesto valore dipende solo dai valori della parte reale — o dell'immaginaria — al contorno, poichè, all'infuori di una costante addittiva, dall'una delle due parti si deduce l'altra per mezzo delle relazioni di monogeneità (n.° 25) [1]. Alla (2) si dà il nome di *formula integrale di* CAUCHY [2].

b) Sia ora $f(x)$ funzione monogena ad un valore entro un'area T connessa, ma non più semplicemente; siano c il suo contorno esterno, $c_1, c_2, \dots c_p$ i contorni interni. Considerando ancora la funzione $\dfrac{f(t)}{x-t}$, monogena e ad un valore in T del piano t qualora si escluda il punto x, interno a T, con un cerchio (x, r) di raggio arbitrariamente piccolo, si ottiene, come precedentemente, fondandosi ancora sul teorema del n.° 87:

p connessa

(3) $$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(t)dt}{t-x} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{p}\int_{(c_j)} \frac{f(t)dt}{t-x};}$$

[1] Ammessa la continuità della parte reale di $f(t)$ sul contorno c, basta la semplice conoscenza di questa parte su un aggregato numerabile, purchè denso su tutto c. Non sarebbe però facile trattare il quesito della determinazione del minimo aggregato su cui basta la conoscenza della funzione monogena $f(t)$, perchè sia nota in tutto A.

[2] Data dal CAUCHY, per la prima volta, nelle *Memorie* di Torino, 1831, e ripresa poi negli *Exercices d'Analyse*, 2, 1841.

v. anche 62 e)
v. anche Severi 92.363

tutti gl'integrali essendo intesi percorsi nel senso delle rotazioni positive.

93. *a*) Riprendendo la funzione $f(x)$ monogena ad un valore nell'area semplicemente connessa A, sia α un punto qualunque interno ad A e sia δ il limite inferiore delle sue distanze dal contorno c di A; si descriva poi il cerchio (α, r) di centro α e di raggio $r < \delta$. Essendo x un punto interno al detto cerchio e quindi ad A, si avrà

(4) $$\frac{1}{t-x} = \frac{1}{t-\alpha-(x-\alpha)} = \sum \frac{(x-\alpha)^n}{(t-\alpha)^{n+1}}$$

dove t è preso sul contorno c: per essere

$$|x-\alpha| < r, \quad |t-\alpha| \geq \delta, \quad r:\delta < 1,$$

la serie del secondo membro è uniformemente convergente per tutte le coppie t, x di valori di t sul contorno c e di x entro il cerchio (α, r). È dunque lecita l'integrazione termine a termine (n.° 23, *f*) lungo c, e quindi, sostituendo la (4) nel secondo membro di (2), si ha:

(5) $$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(x-\alpha)^n\int_{(c)} \frac{f(t)dt}{(t-\alpha)^{n+1}}.}$$ sviluppo in serie di una funzione monogena, il quale deve coincidere con Mc Laurin (93 c)

Anche questo risultato [1] è della massima importanza. Esso dimostra come « ogni funzione monogena ad un valore « entro un campo A, sia sviluppabile in serie di potenze « di $x-\alpha$ nell'intorno di ogni punto α del campo, e sia per « conseguenza funzione analitica regolare in ogni tale punto α. « E poichè si è già veduto (n.° 42, *e*) come ogni funzione « analitica sia monogena entro il proprio campo di regola- « rità, così rimane ormai dimostrata la coincidenza dei due « concetti di funzione *analitica* secondo WEIERSTRASS e di « funzione *monogena* secondo CAUCHY ».

Per questa identità dei due concetti, abbandoneremo quindi innanzi la dicitura di funzione monogena, ritenendo solo quella di funzione analitica.

[1] CAUCHY, *Résumés analytiques* di Torino. (Oeuvres complètes, S. II, T. X).

b) Sappiamo che una funzione monogena la cui parte reale è costante, si riduce a costante (n.° 28, *d*); sappiamo pure (n.° 56, *c*) che se una funzione analitica è costante lungo un tratto di linea, per quanto piccolo, del proprio campo di regolarità, essa si riduce a costante. Onde « una funzione « analitica la cui parte reale (od immaginaria) è costante « lungo un tratto per quanto piccolo di linea nel suo campo « di regolarità si riduce a costante in tutto il campo ».

E poichè, posto $f(x) = Re^{i\varphi}$, è $\log f(x) = \log R + i\varphi$, pure analitica (n.° 79, n.° 32, *d*), ne viene che « se il modulo di una « funzione analitica è costante lungo un tratto per quanto « piccolo di linea nel campo di regolarità, la funzione si ri- « duce a costante in tutto il campo ».

c) La $f(x)$, essendo analitica regolare in ogni punto di A, ammette in questi punti tutte le derivate successive e, per la (5) stessa, lo sviluppo di Maclaurin: e quindi l'integrale che dà il coefficiente di $(x-\alpha)^n$ in (5) non differisce da $\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(\alpha)$. Mutando la lettera α in x, si ha dunque l'espressione integrale della derivata n^sima^ di $f(x)$:

estendo lo svilup- unico

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{n+1}}, \tag{6}$$

che si può ottenere **formalmente** da (2) mediante la derivazione successiva rispetto ad x sotto il segno.

È degno di attenzione il fatto che l'ipotesi della monogeneità, cioè dell'esistenza della prima derivata nel campo complesso, porta all'esistenza di tutte le derivate successive e della sviluppabilità in serie di Taylor.

d) Dalla (6) si noti che se è

$$f(x) = \Sigma a_n x^n,$$

viene

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(t)dt}{t^{n+1}}, \tag{6'}$$

espressione dei coefficienti che coincide con la (2) di pag. 56

essendo (c) una linea chiusa qualunque circondante l'origine e contenuta entro il cerchio di convergenza della serie.

Ciò che non è nel campo reale (v. Severi 2° fogli)

in contorna monogeneità e analiticità equivalgono a $\int_c = 0$

e) L'ipotesi della connessione semplice per A non è essenziale. Se il campo T dove è data la $f(x)$ — ad un valore in T — è chiuso da più contorni, le formule (5) e (6) valgono ugualmente, perchè s'intenda con c l'insieme dei varî contorni, percorsi tutti nel senso positivo rispetto a T (cioè lasciando a sinistra l'interno dell'area).

X **94.** A questo punto possiamo dare un'interessante proposizione dovuta al Morera ([1]), che può riguardarsi come la reciproca del teorema di Cauchy (n.° 81). Essa pone in luce il fatto che « se una funzione $f(x)$ della variabile complessa x in senso generale, continua in un'area sempli- « cemente connessa A, è tale che il suo integrale esteso a « qualsiasi linea chiusa di lunghezza finita contenuta in A « sia nullo, questa funzione è analitica regolare in A ». Morera

Poichè l'integrale esteso ad una linea chiusa è nullo, se due punti a, x di A sono uniti da due linee amx, anx tutte contenute in A, sarà nullo l'integrale esteso ad $amxna$, e quindi sarà:

$$\int_{(amx)} f(t)dt = \int_{(anx)} f(t)dt;$$

pertanto l'integrale dipende solo dai punti estremi a, x, e quindi si può riguardare, ritenendo a fisso ed x variabile in A, come una funzione di x; porremo

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{7}$$

Per essere $f(x)$ continua, preso ε positivo arbitrario, esisterà un δ tale che per $|t_1| < \delta$, è

$$|f(x) - f(x+t_1)| < \varepsilon,$$

e quindi

$$f(x+t_1) = f(x) + \varepsilon(t_1), \quad |\varepsilon(t_1)| < \varepsilon. \tag{8}$$

([1]) *Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa.* Rend. dell'Istituto Lombardo, S. 2, T. 19, 1886.

Sia ora $|h| < \delta$, e si formi

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = \int_0^h f(x+t_1)dt_1\,;$$

ne viene, per (8):

$$F(x+h) - F(x) = hf(x) + \int_0^h \varepsilon(t_1)dt,$$

da cui

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon.$$

Se ne conclude che $f(x)$ è il limite del rapporto incrementale di $F(x)$, qualunque sia l'argomento dell'incremento di x: la $F(x)$ è dunque monogena, e quindi analitica, e perciò è tale (n.° 93, c) anche la $f(x)$, che ne è la derivata.

Si può prescindere dall'ipotesi dell'area semplicemente connessa, supponendo l'ipotesi del teorema di MORERA verificata per ogni curva chiusa nell'area e racchiudente una porzione semplicemente connessa dell'area stessa.

95. Per dare un'applicazione del teorema di MORERA, si consideri in un'area connessa T una serie $\Sigma u_n(x)$ i cui termini siano funzioni analitiche regolari ad un valore in T; la serie sia uniformemente convergente e sia $S(x)$ la sua somma. Si può vedere con grande facilità come la $S(x)$ sia analitica in T.

Preso infatti ε positivo arbitrario, si può determinare un $\bar{n}$ tale che per $m < \bar{n}$ sia

$$|R_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{dove è} \quad R_m(x) = u_{m+1}(x) + u_{m+2}(x) + \ldots.$$

Essendo

$$S(x) = \sum_1^m u_n(x) + R_m(x), \tag{9}$$

si integrino i due membri della (9) lungo una linea chiusa qualsivoglia c, avente lunghezza c, tutta contenuta in T e

Una serie unif. conv. di funz. an. è analitica

racchiudente una porzione semplicemente connessa di T. Per il teorema integrale di CAUCHY, sarà

$$\int_{(c)} S(x)dx = \int_{(c)} R_m(x)dx,$$

e quindi

$$\left| \int_{(c)} S(x)dx \right| < c\varepsilon\,; \tag{10}$$

ma il primo membro della (10) essendo determinato, esso deve essere nullo, e perciò, per il teorema di MORERA, la $S(x)$ è analitica.

È da notare che, ponendosi la convergenza uniforme di $\Sigma u_n(x)$ in T, si è stabilita una condizione più restrittiva che nel teorema del n.° 57, in cui si impone la convergenza uniforme solo lungo una circonferenza. Ciò nonostante, la proposizione del presente n.° meritava di essere riportata per l'estrema semplicità della dimostrazione. Una condizione più larga non solo di questa, ma di quella del n.° 57, verrà data ulteriormente (n.° 120). cf. 57

96. Più generalmente, si può dedurre dal teorema di Morera la seguente proposizione generale. « Sia t una variabile reale data fra t_1 e t_0, ed $F(x, t)$ una funzione che « per ogni t tale che sia $t_1 \leq t < t_0$ sia analitica regolare « in un campo T semplicemente connesso del piano x. « Per $t \to t_0$, $F(x, t)$, in tutto T, tenda uniformemente ad « una funzione $F(x)$. Sotto queste ipotesi, $F(x)$ è funzione « analitica regolare in T, ed anche per le derivate d'in- « dice m si ha

$$« \lim_{t \to t_0} F^{(m)}(x, t) = F^{(m)}(x) ».$$

Per l'ipotesi, preso ε positivo arbitrario, gli corrisponde un δ tale che per ogni t per cui sia $|t - t_0| < \delta$, è $|F(x, t) - F(x)| < \varepsilon$. Considero in T una curva chiusa semplice (c) di lunghezza finita c; si ha

$$\left| \int_{(c)} F(x, t)dx - \int_{(c)} F(x)dx \right| \leq \int_{(c)} |F(x, t) - F(x)|\,|dx| < \varepsilon c,$$

il limite di una ~~successione~~ famiglia di funzioni analitiche uniformemente conv. quale è una funzione analitica ma è, per l'analiticità di $F(x, t)$,

$$\int_{(c)} F(x,\ t) = 0,$$

Morera

onde, ε essendo arbitrario, sarà $\boxed{\int_{(c)} F(x)dx = 0,}$ e quindi (n.° 94), $F(x)$ è analitica regolare in T.

Si consideri un punto z interno all'area racchiusa da (c) e tale che la sua distanza dai punti di (c) sia superiore ad un numero λ (non nullo). Si ha (n.° 93, c) essendo $F(z, t)$, $F(z)$ analitiche

$$F^{(m)}(z, t) = \frac{m!}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{F(x, t)dx}{(x-z)^{m+1}}, \quad F^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{F(x)dx}{(x-z)^{m+1}},$$

onde

$$|F^{(m)}(z, t) - F^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{2\pi i}\int_{(c)} \left| \frac{F(x, t) - F(x)}{(x-z)^{m+1}} dx \right| < \frac{m!\,\varepsilon c}{2\pi\lambda^m};$$

e per essere ε arbitrario, $\lim_{t \to t_0} F^{(m)}(z, t) = F^{(m)}(z)$.

La proposizione vale ugualmente se a t_0 si sostituisce l'infinito, p. es. positivo; la convergenza uniforme richiede allora che preso ε, si possa trovare un μ tale che per ogni $t > \mu$, sia $|F(x, t) - F(x)| < \varepsilon$ per ogni x di T.

97. *a*) Dalla (6) risulta che se M è il massimo valore assoluto di $f(t)$ lungo il contorno c, essendo ancora δ la minima distanza di x dal contorno, e c la lunghezza del contorno stesso, si ha:

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mc}{2\pi\delta^{n+1}}. \tag{11}$$

L'uguaglianza non può avere luogo che se $|f(t)| = M$ su tutto il contorno, da cui seguirebbe (n.° 93, *b*) la costanza di $f(x)$ in tutto A. In particolare, escludendo il caso di $f(x) = \text{cost.}$,

$$|f(x)| < \frac{Mc}{2\pi\delta}. \tag{12}$$

Assumendo come contorno la circonferenza di centro x e raggio δ, viene:

$$|f(x)| < M,$$

onde (cfr. n.° 44, *c*): « se una funzione analitica è regolare « entro un cerchio, essa non può assumere il massimo valore « assoluto se non sulla circonferenza ».

b) In modo analogo si deduce facilmente che « una « funzione analitica monodroma regolare in un campo sem- « plicemente connesso T non può assumere il suo massimo « valore assoluto se non al contorno del campo ».

c) Posto $x = u + iv$, $f(x) = \xi(u, v) + i\eta(u, v)$ la funzione monodroma regolare in T ha per valore assoluto $e^{\xi(u, v)}$; questa, e quindi $\xi(u, v)$, non può pertanto assumere il proprio massimo nell'interno di T. Lo stesso essendo di $|e^{-if(x)}|$ e perciò di $\eta(u, v)$, si ha che « la parte reale ed il coefficiente del- « l'immaginaria di una funzione analitica monodroma rego- « lare in T non possono assumere il massimo nell'interno « di T ».

d) E poichè (n.° 28, *a*) ogni funzione armonica può assumersi come parte reale (o coefficiente dell'immaginaria) di una funzione analitica, ne segue che « una funzione ar- « monica continua insieme alle sue derivate in un campo « connesso T_1 non può assumere il proprio valore massimo « nell'interno del campo ». funz. armonica

in accordo col teorema della media per le funzioni armoniche

CAPITOLO SETTIMO

APPLICAZIONI DEI TEOREMI DI CAUCHY

§ I. Il teorema di Laurent.

98. Il presente capitolo ed il successivo sono destinati ad indicare alcune delle numerosissime applicazioni che si possono fare, in diverse direzioni, dei teoremi fondamentali esposti nel capitolo precedente.

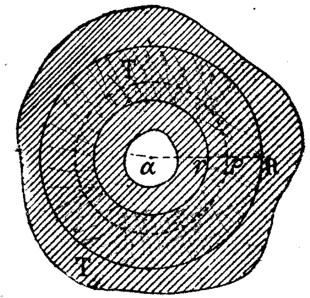


Fig. 12

Consideriamo dapprima, in un'area connessa (non semplicemente) T, una funzione analitica regolare monodroma $f(x)$, e si possa descrivere nell'area una corona circolare chiusa dalle circonferenze (α, r), (α, R) di centro α e di raggi r ed R, con $R > r$: le circonferenze e la corona che esse racchiudono appartenendo a T (fig. 12), mentre non appartenga a T un'area contenuta nel cerchio minore.

Essendo x un punto interno alla corona circolare, si applichi alla corona stessa la formula (3) del n.° 92; si avrà:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(R)} \frac{f(t)dt}{t - x} - \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(t)dt}{t - x};$$

ponendo ora $t - x = t - \alpha - (x - \alpha)$, e sostituendo alla fra-

$\frac{x - \alpha}{t - \alpha} < 1$

zione $\dfrac{1}{t-x}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\alpha)^n}{(t-\alpha)^{n+1}}$$

convergente sulla prima circonferenza, e la serie

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-\alpha)^n}{(x-\alpha)^{n+1}}$$

convergente sulla seconda, si ottiene lo sviluppo

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(x-\alpha)^n, \tag{1}$$

dove

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(R)}\frac{f(t)dt}{(t-\alpha)^{n+1}} \tag{2}$$

Sviluppo di Laurent in una corona circolare

per n nullo od intero positivo, e

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}f(t)(t-\alpha)^{-n-1}dt \tag{2'}$$

per n intero negativo. Le integrazioni, come è stabilito, sono fatte nel senso delle rotazioni positive. Si ha dunque che « una funzione analitica, regolare e monodroma entro una « corona circolare di centro α, è sempre sviluppabile in serie « di potenze intere positive e negative (esponente zero compreso) della variabile $x-\alpha$ ». Questa proposizione è nota sotto il nome di *teorema di* LAURENT [1]; e si dà il nome di *serie di* Laurent ad uno sviluppo ordinato per le potenze di una variabile, ad esponente intero variabile da $-\infty$ a $+\infty$.

99. Si può modificare come segue la forma dei coefficienti dello sviluppo (1). Notando che l'integrazione si può estendere, in (2) e (2′), anzichè alle circonferenze (α, r) ed (α, R), ad una qualunque linea chiusa l tutta contenuta entro la co-

[1] *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, T. XVII, p. 938 (1843).

rona circolare e circondante la circonferenza minore (n.° 87) (ad esempio, ad una circonferenza (α, ρ) con $r\leq\rho\leq R$) si potrà sostituire alle (2) e (2′) la

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)}\frac{f(t)dt}{(t-\alpha)^{n+1}}, \tag{2''}$$

valida per tutti i valori interi di n, da $-\infty$ a $+\infty$.

100. *a*) Uno sviluppo di LAURENT, $\sum_{-\infty}^{\infty}c_nx^n$ [1], può scriversi nella forma $p(x)+q\left(\frac{1}{x}\right)$, dove $p(x)$ contiene ordinatamente i termini ad esponente intero positivo (zero compreso) e $q\left(\frac{1}{x}\right)$ ordinatamente i termini ad esponente intero negativo di x; la $p(x)$ converge dunque entro un cerchio (R), la $q\left(\frac{1}{x}\right)$ fuori di un cerchio (r) (n.° 37). Se è $R=r$, la serie non ha senso in alcuna parte del piano; se è $R<r$, può convergere in punti della circonferenza, ma può non avere validità ai sensi della teoria delle funzioni analitiche; se è infine $R>r$, essa rappresenta una funzione analitica regolare monodroma entro la corona circolare limitata dalle due circonferenze.

b) Una serie di LAURENT convergente nella corona circolare compresa fra (R) ed (r), è uniformemente convergente nella corona circolare compresa fra le circonferenze ($R-\varepsilon$) ed ($r+\varepsilon'$), essendo ε ed ε' numeri positivi arbitrariamente piccoli.

c) Se $L_1(x)$, $L_2(x)$,... $L_n(x)$,... è una successione di serie di LAURENT, convergente, entro una corona circolare comune compresa fra le circonferenze (α, r), (α, R), ad una funzione limite $A(x)$, e se la convergenza è uniforme su una circonferenza (α, ρ) con $r<\rho<R$, la convergenza avrà luogo entro tutta la corona compresa fra le circonferenze (α, $r+\varepsilon$) ed (α, $R-\varepsilon'$), ε ed ε' arbitrariamente piccoli, e $A(x)$ sarà, nella primitiva corona, analitica regolare e monodroma: sviluppabile perciò essa pure in una serie di LAURENT in cui il

[1] Non vi è restrizione essenziale nello scrivere x in luogo di $x-\alpha$.

coefficiente di x^ν è il limite, per $n = \infty$, dei coefficienti di x^ν nella serie $L_n(x)$. Ciò consegue immediatamente dal teorema di Weierstrass che forma l'oggetto del § III del Cap. IV.

101. *a*) Essendo $f(x)$ regolare monodroma in una corona circolare di centro α, non è escluso che il raggio R della circonferenza maggiore possa essere infinito, o che quello r della circonferenza minore possa essere zero. Nel primo caso, la $f(x)$ è regolare in tutta l'area $|x| > r$, escluso il punto $x = \infty$ che è singolare isolato; nel secondo caso, la $f(x)$ è regolare in tutto il cerchio $|x| < R$, eccettuato il punto $x = 0$, pure singolare isolato. Verificandosi contemporaneamente i due casi, la $f(x)$ è uniforme, regolare su tutto il piano-sfera, eccettuati i due punti singolari isolati $x = 0$, $x = \infty$.

In questa ultima ipotesi, la $f(x)$ è rappresentabile mediante una serie

(3)
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x-\alpha)^n;$$

posto

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-\alpha)^n; \quad q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(x-\alpha)^n},$$

la $p(x)$ è funzione intera, razionale o trascendente secondo che i coefficienti sono, oppure no, nulli da un indice $n = m$ in poi; il punto $x = \infty$ è, in corrispondenza, polo o punto singolare essenziale. La $q(x)$ è tale che $q\left(\frac{1+x\alpha}{x}\right)$ è funzione intera, razionale o trascendente di x secondo che i coefficienti c_{-n} sono, o no, nulli da un indice in poi; in corrispondenza, $x = \alpha$ è, per $q(x)$, polo o punto singolare essenziale rispettivamente.

b) Se una funzione analitica è regolare monodroma in un'area T, ad eccezione di un punto α interno a T (punto singolare essenziale isolato secondo la definizione del n.° 42, *j*) essa è sviluppabile in una serie di Laurent valida in una corona circolare di centro α, di cui la circonferenza minore ha raggio arbitrariamente piccolo, e la maggiore ha per raggio la minima distanza di α dal contorno di T. La $f(x)$ può dunque scriversi

$$\boxed{f(x) = p(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(x-\alpha)^n},}$$

dove $p(x)$ è regolare per $x = \alpha$, mentre la sommatoria è regolare su tutto il piano sfera, ad eccezione di $x = \alpha$. La sommatoria stessa, della forma $F\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$ dove $F(z)$ è funzione intera, viene detta *quasi intera*; si dice anche che essa ***caratterizza*** la singolarità di $f(x)$ per $x = \alpha$. Con ciò s'intende che sottraendo da $f(x)$ la $F\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$, la differenza risulta regolare in α.

Se $F(z)$ si riduce razionale, la $F\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$ è la funzione razionale semplice (n.° 73) che caratterizza il polo della $f(x)$ per $x = \alpha$.

§ II. I residui.

102. *a*) Quando α è punto singolare isolato di una funzione analitica $f(x)$ che sia, in un'area T contenente α ed all'infuori del punto α stesso, regolare monodroma, la $f(x)$ ammette in un intorno di α lo sviluppo di Laurent (n.° 101, *b*). Il coefficiente di $(x-\alpha)^{-1}$ in questo sviluppo, si dice, con Cauchy, ***residuo*** di $f(x)$ per $x = \alpha$.

b) Questo residuo c_{-1} è dato (n.° 98) da

(1)
$$\boxed{c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} f(t)\,dt,}$$

essendo (c) una linea chiusa semplice [1] arbitraria, contenuta in T e circondante α; l'integrazione intendendosi inoltre eseguita nel senso delle rotazioni positive, e quindi anche in senso positivo (n.° 86) rispetto all'area chiusa da (c).

Come esempio, se $P(x)$, $Q(x)$ sono polinomî razionali interi,

$$P(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m, \quad Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

con $m < n$, e se $Q(x)$ ha le radici semplici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, i residui della frazione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nei suoi poli α_h sono, come è noto, $\frac{P(\alpha_h)}{Q'(\alpha_h)}$ [2], con $h = 1, 2, \ldots n$.

---

[1] S'intende con ciò che l'argomento del vettore che unisce α ad un punto t della linea varia, quando t percorra la linea stessa, da 0 a 2π.

[2] *Calcolo*, n.° 93, *b*).

Def

c) Se $x = \infty$ è un punto singolare isolato della $f(x)$, del resto regolare e monodroma in un intorno di $x = \infty$, varrà per la funzione uno sviluppo di LAURENT in una corona la cui circonferenza maggiore ha raggio infinito: come *residuo* di $f(x)$ per $x = \infty$ si definisce il coefficiente di x^{-1} nello sviluppo, preso con segno cambiato.

Ciò è conforme alla espressione (1) del residuo assumendo il senso positivo d'integrazione secondo il n.° 86, che corrisponde, per un intorno di $x = \infty$, al senso delle rotazioni negative.

Per l'esempio precedente, il residuo, se $m = n - 1$, è $-\frac{a_0}{b_0}$ per $x = \infty$.

d) Si noti che le (2) e (6) ai n.i 92 e 93 esprimono che $\boxed{f(\alpha)}$ è il residuo di $\frac{f(x)}{x-\alpha}$, e $\cancel{n!}\,f^{(n)}(\alpha)$ quello di $\frac{f(x)}{(x-\alpha)^{n+1}}$ rispetto al punto α, nelle ipotesi fatte a quei n.i.

103. *a*) Entro un'area T semplicemente connessa e sul contorno c di essa sia data una funzione $f(x)$ analitica, monodroma, regolare all'infuori di aree $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_p$ interne a T: esse possano anche ridursi a punti, tutte od in parte, dando luogo così a punti singolari isolati di $f(x)$. Le τ_h siano circondate da linee (c_h) semplici chiuse, tutte contenute in T ed escludentisi per modo che ognuna di esse sia esterna a tutte le altre.

Def

L'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} f(t)\,dt$$

è detto *residuo integrale* di $f(x)$ rispetto all'area T.

cioè complessivo

Esso coincide col residuo definito al n.° precedente se le lacune τ_h si riducono ad un solo punto α.

b) Supponendo che ognuna delle τ_p si riduca ad un punto, si avrà, dalla formula (3) del n.° 87, cioè da

$$\int_{(c)} f(t)\,dt = \sum_{h=1}^{p} \int_{(c_h)} f(t)\,dt, \tag{2}$$

che « il residuo integrale rispetto a T è uguale alla somma dei residui relativi ai punti singolari, supposti isolati ed in numero finito, interni a T ».

Nel caso della funzione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ considerata al n.° 102, se (c) è una linea chiusa, contorno di un'area semplicemente connessa contenente tutte le radici di $Q(x)$, la relazione precedente dà

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} f(t)\,dt = \sum_{h=1}^{n} \frac{P(x_h)}{Q'(x_h)}. \tag{3}$$

104. *a*) Siano $f(x)$, $g(x)$ analitiche monodrome in un campo T comune, ad eccezione di un punto α che sia singolare isolato per la sola $f(x)$. Alla $f(x)$ è applicabile, in un intorno di α, lo sviluppo di LAURENT (n.° 101) e la parte ordinata per le potenze negative di $x - \alpha$,

$$F\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) = \frac{a_0}{x-\alpha} + \frac{a_1}{(x-\alpha)^2} + \dots, \tag{4}$$

pag 119

è la funzione quasi-intera che ne caratterizza (n.° 101) la singolarità. Per la $g(x)$, vale in α lo sviluppo

$$g(x) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \dots, \tag{5}$$

e dal prodotto delle (4) e (5) si ottiene subito il coefficiente di $(x-\alpha)^{-1}$ nello sviluppo di LAURENT di $f(x)g(x)$, cioè il residuo di $f(x)g(x)$ per $x = \alpha$. Se dunque (α) è una linea chiusa semplice circondante α e sufficientemente prossima ad α, si ha che questo residuo è dato da

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} f(t)g(t)\,dt = a_0 g(\alpha) + a_1 g'(\alpha) + \frac{a_2}{2!}g''(\alpha) + \dots + \frac{a_n}{n!}g^{(n)}(\alpha) + \dots} \tag{6}$$

Residuo di fg

È spesso conveniente assumere come linea α un cerchio di centro α e di raggio sufficientemente piccolo.

b) Nel caso particolare in cui $f(x)$ ha per $x = \alpha$ un polo di prim'ordine, il residuo in α del prodotto $f(x)g(x)$ è dato da $\boxed{a_0 g(\alpha)}$.

$F\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) = \frac{a_0}{x-\alpha}$

$\frac{f}{t-x}$

105. Si ponga, in particolare, al posto di $g(t)$ la funzione $\frac{1}{t-x}$, essendo x un punto interno a T ed esterno alla circonferenza (α); essendo $|t-\alpha| < |x-\alpha|$, la (5) sarà ora

$\frac{|t-\alpha|}{|x-\alpha|} < 1$

$$\frac{1}{t-x} = -\frac{1}{x-\alpha} - \frac{t-\alpha}{(x-\alpha)^2} - \ldots,$$

$t - x = t - \alpha - (x-\alpha)$

onde viene

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(\alpha)} \frac{f(t)dt}{t-x} = -F\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) = -\frac{a_0}{x-\alpha} - \frac{a_1}{(x-\alpha)^2} - \ldots$$

« Il residuo di $\frac{f(t)}{t-x}$ relativo ad un punto singolare isolato α di $f(t)$ nel cui intorno $f(t)$ è monodroma, è dunque « la funzione quasi intera che caratterizza la singolarità, « presa con segno contrario ».

106. Sia ora la $f(x)$ data in un'area semplicemente connessa T di contorno c, e regolare monodroma in T, fatta eccezione per i punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$; sia $F_h\left(\frac{1}{x-\alpha_h}\right)$ la funzione quasi intera che caratterizza la singolarità di $f(x)$ (n.° 101) per $x = \alpha_h$. Essendo x un punto interno a T e distinto dagli α_h, la funzione della variabile complessa t

$$(8) \qquad \frac{f(t)}{t-x}$$

è regolare monodroma in T, eccezione fatta per il punto $t = x$ e per i punti $t = \alpha_h$, $(h = 1, 2, \ldots p)$; ora, il residuo della (8) per $t = x$ è $f(x)$, quelli relativi ai punti α_h sono dati dalla precedente (7), onde, poichè il residuo integrale di (8) è uguale (n.° 103, *b*) alla somma dei residui nei punti singolari, verrà:

$$(9) \qquad \boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(t)dt}{t-x} = f(x) - \sum_{h=1}^{p} F_h\left(\frac{1}{x-\alpha_h}\right).}$$

102 d)

Applicazione della (9)

Questa formula, che ha dato luogo a numerose applicazioni [1], è assai notevole. Mostreremo qui, in particolare, come da essa si possa dedurre, la nota decomposizione di una frazione razionale in frazioni semplici [2].

Sia, a questo effetto, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, essendo $P(x)$, $Q(x)$ due polinomî razionali interi primi fra loro, il primo di grado m, il secondo di grado $n > m$ ed avente le radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ degli ordini di multiplicità $r_1, r_2, \ldots r_p$. Sviluppando $P(x)$, $Q(x)$ per le potenze di $x - \alpha_h$ ed eseguendo la divisione, si avrà la somma di termini a potenze negative di $x - \alpha_h$:

$$G_h\left(\frac{1}{x-\alpha_h}\right) = \frac{a_{h_1}}{x-\alpha_h} + \frac{a_{h_2}}{(x-\alpha_h)^2} + \ldots \frac{a_{hr_h}}{(x-\alpha_h)^{r_h}},$$

frazione semplice che caratterizza il polo di $f(x)$ per $x = \alpha_h$.

Estendendo, in (9), l'integrazione ad una circonferenza (R) che racchiuda tutti i punti α_h, la (9) darà

$$(10) \qquad f(x) = \sum_{h=1}^{p} G_h\left(\frac{1}{x-\alpha_h}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{(R)} \frac{f(t)dt}{t-x}.$$

Ora l'ultimo integrale è il residuo, preso con segno contrario, di $\frac{f(t)}{t-x}$ relativo a $t = \infty$ (n.° 102, *c*), cioè il coefficiente di $\frac{1}{t}$, cambiato di segno, nello sviluppo di $\frac{P(t)}{Q(t)(t-x)}$ in serie di potenze intere negative di t. Ma questo coefficiente è nullo, poichè per $t = \infty$ il quoziente precedente è infinitesimo di ordine ≥ 2; onde l'integrale è nullo, e si ha

$$(11) \qquad \boxed{f(x) = \sum_{h=1}^{p} G_h\left(\frac{1}{x-\alpha_h}\right),}$$

che dà appunto l'indicata decomposizione.

La formula (10) vale anche per il caso $m \geq n$; in tale caso però il termine integrale rappresenta, come è facile vedere, un polinomio intero di grado $m - n$, che è il quoziente della divisione di $P(x)$ per $Q(x)$. $\frac{P}{Q} = H + R$

La formula medesima si estende pure al caso in cui $f(x)$ è il quoziente di due funzioni analitiche regolari e monodrome entro l'area T di contorno c. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sono gli zeri del denominatore, $f(x)$ sarà composta del termine integrale esteso a c, più le p frazioni semplici che caratterizzano i poli che $f(x)$ ammette nelle radici del denominatore.

---

[1] V. p. es. E. Lindelöf, *le Calcul des résidus et ses applications*, Paris, 1905.

[2] *Calcolo*, n.i 92-94.

§ III. Derivata logaritmica.

107. *a*) Sia $f(x)$ regolare per $x=\alpha$, e sia

$$f(x)=a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+\dots$$

il suo sviluppo. Se è $a_0=a_1=\dots=a_{r-1}=0$, $a_r\neq 0$, α è per la $f(x)$ uno zero (radice) dell'ordine r di multiplicità, ed è per la derivata $f'(x)$ uno zero dell'ordine $r-1$. Il quoziente $f'(x):f(x)$, che si dice *derivata logaritmica* di $f(x)$ per essere uguale alla $\frac{d}{dx}\log f(x)$, avrà per $x=\alpha$ un polo del primo ordine, e poichè è

$$f(x)=a_r(x-\alpha)^r+\dots,\quad f'(x)=ra_r(x-\alpha)^{r-1}+\dots,$$

il polo sarà caratterizzato dalla frazione semplice $\frac{r}{x-\alpha}$ (n.° 69).

« La derivata logaritmica di $f(x)$ ha dunque un polo di « prim'ordine dove $f(x)$ ha una radice, ed ha per corrispon-« dente residuo l'ordine di multiplicità della radice stessa ».

b) La $f(x)$ abbia, per $x=\beta$, un polo di ordine m; sia cioè:

$$f(x)=a_0(x-\beta)^{-m}+a_1(x-\beta)^{-m+1}+\dots;$$

verrà

$$f'(x)=-ma_0(x-\beta)^{-m-1}-(m-1)a_1(x-\beta)^{-m}-\dots,$$

e quindi $f'(x):f(x)$ avrà per $x=\beta$ un polo del prim'ordine, col residuo uguale a $-m$.

c) Sia ora $f(x)$ monodroma entro un'area connessa T, contorno c compreso, e regolare all'infuori di poli $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p$, degli ordini $m_1, m_2, \dots m_p$ rispettivamente; la $f(x)$ abbia in T le radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_q$, degli ordini rispettivi $n_1, n_2, \dots n_q$ [1]. La derivata logaritmica $f'(x):f(x)$ sarà allora regolare in tutto T, ad eccezione dei punti α_h e dei punti β_k, nei quali avrà poli

[1] La $f(x)$ essendo regolare anche al contorno di T, il numero degli zeri e dei poli in T è necessariamente finito.

Il residuo integrale della derivata logaritmica si dice indice logaritmico

di primo ordine coi residui rispettivi n_h e $-m_k$; quindi, per il teorema del n.° 103, *b*, si avrà:

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f'(t)\,dt}{f(t)}=n_1+n_2+\dots n_q-(m_1+m_2+\dots m_p).$$

Teorema dell'indice logaritmico

Si ha quindi « che l'integrale, esteso al contorno di T, « della derivata logaritmica di $f(x)$ divisa per $2\pi i$ [1], è neces-« sariamente un numero intero, uguale alla differenza fra il « numero degli zeri e quello dei poli di $f(x)$ entro l'area: « convenendosi di contare ogni zero ed ogni polo per tanti « quante sono le unità del rispettivo ordine di multiplicità ».

Data una funzione a carattere razionale in un'area, si definisce talvolta come *ordine della funzione* in ogni punto x dell'area: lo zero, se la funzione è regolare e non nulla in x; l'ordine della radice x, se la funzione si annulla in x; l'ordine del polo preso con segno negativo, se la funzione ha un polo in x. Fatta questa convenzione, si può enunciare il teorema precedente dicendo che « l'indice logaritmico esteso ad un con-« torno è uguale alla somma degli ordini della funzione nei punti del-« l'area racchiusa dal contorno, posto che la funzione abbia carattere « razionale in quell'area ».

108. *a*) Ferme le notazioni e le ipotesi del *c*) del n.° precedente, sia $g(x)$ una funzione regolare monodroma entro la stessa area T. La funzione $\frac{g(t)f'(t)}{f(t)}$ sarà pure regolare nell'area, ad eccezione dei punti α_h e β_k in cui avrà poli di prim'ordine, ed il suo residuo sarà (n.° 104, *b*) $n_h g(\alpha_h)$ nel punto α_h, $-m_k g(\beta_k)$ nel punto β_k. prodotto

$\theta \cdot f'/f$

Ne viene dunque:

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{g(t)f'(t)\,dt}{f(t)}=\sum_{h=1}^{q}n_h g(\alpha_h)-\sum_{k=1}^{p}m_k g(\beta_k).$$

b) In particolare, si noti che $g=t$

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{tf'(t)\,dt}{f(t)}=n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+\dots+n_q\alpha_q-m_1\beta_1-m_2\beta_2-\dots-m_p\beta_p.$$

$t \cdot f'/f$

[1] Si dà spesso a questa espressione (primo membro della (1)) il nome di *indice logaritmico* della $f(x)$.

(1) v. una deduzione da questo teorema del teorema fondamentale dell'algebra in Severi Analisi 2° pag 216

c) Se la $f(t)$ è priva di poli entro T, l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{t^r f'(t)dt}{f(t)} \tag{4}$$

è uguale alla somma delle potenze r^{sime} delle radici di $f(t)$ comprese entro T.

109. La proprietà dell'indice logaritmico permette di dare una dimostrazione assai luminosa del teorema fondamentale dell'Algebra, ricavandone immediatamente l'esistenza non solo di una radice, ma addirittura delle n radici per l'equazione algebrica di grado n.

Dato infatti il polinomio razionale intero di grado n

$$f(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n,$$

è noto che esso non può avere radici per valori di t superiori in modulo ad

$$l = 1 + \frac{A}{|a_0|},$$

dove A è il massimo fra i moduli di $a_1, a_2, \ldots a_n$ [1]; è noto pure (n.° 70) che per $|t| > l$ il quoziente

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{n a_0 + \dfrac{(n-1)a_1}{t} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{t^{n-1}}}{t\left(a_0 + \dfrac{a_1}{t} + \ldots + \dfrac{a_n}{t^n}\right)}$$

è sviluppabile nella serie di potenze di t^{-1}:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{n}{t} + \ldots\ldots \tag{5}$$

Calcolando ora $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{(R)} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$ mediante l'integrazione termine a termine della serie precedente lungo la circonferenza (R), si ottiene (n.° 24, *c*) come risultato n, onde segue (n.° 108) che l'equazione $f(t) = 0$ ha appunto n radici.

---

[1] *Alg. Comp.*, n.° 220 e 398, *g*.

§ IV. Calcolo di integrali definiti.

110. È noto che scarse sono le espressioni di cui si può dare l'integrale definito in forma semplice. La regola generale, di calcolare l'integrale indefinito e di limitarlo, è applicabile solo a classi ristrette di funzioni quando non si voglia ricorrere all'integrazione per serie; perciò sono preziosi quei metodi indiretti che possono servire al calcolo di integrazioni definite, e fra questi metodi, non ve n'ha che uguagli in efficacia quello fondato sul teorema integrale di CAUCHY e sulla conseguente teoria dei residui.

In ciò che segue si daranno varî esempî — alcuni dei quali classici [1] — di determinazioni di integrali definiti eseguite mediante i teoremi di CAUCHY; conviene però premettere alcune ovvie osservazioni, che serviranno utilmente nello sviluppo di quegli esempi.

a) Se $f(x)$ ha per $x = \alpha$ una radice semplice, $\dfrac{1}{f'(\alpha)}$ è il residuo di $\dfrac{1}{f(x)}$ per $x = \alpha$.

b) Se $f(x)$ tende a zero dell'ordine $1 + \varepsilon$ (ε positivo) uniformemente quando x tende all'infinito, l'integrale $\int f(x)dx$ esteso ad un arco qualsiasi della circonferenza (R) tende a zero per $R \to \infty$.

c) Se $f(x)$ tende all'infinito, dell'ordine $1 - \varepsilon$ (ε positivo) uniformemente quando x tende a zero, l'integrale $\int f(x)dx$ esteso ad un arco qualsiasi della circonferenza (r) tende a zero per $r \to 0$.

d) Se $f(x)$ è limitata per x tendente all'infinito, l'integrale $\int e^{ix} f(x)dx$ esteso alla semicirconferenza di raggio R compresa fra gli argomenti 0 e π, è limitato per $R \to \infty$.

---

[1] V. p. es. BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 141 e seg. (Paris, 1875); GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, T. II, p. 118 e seg. (Paris, 1904); JORDAN, *Cours d'Analyse*, T. II, p. 280 e seg. (Paris, 1894); OSGOOD, *Lehrbuch der Functionentheorie*, p. 245 e seg. (Leipzig, 1907), ecc.

Sia infatti $|f(x)| < M$ per R abbastanza grande. Posto $x = Re^{i\theta}$ sulla semicirconferenza, l'integrale è

$dx = iRe^{i\theta}d\theta$

$$iR\int_0^{\pi} e^{iR\cos\theta - R\,\mathrm{sen}\,\theta} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta,$$

in valore assoluto minore di

$$MR\int_0^{\pi} e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta = 2MR\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta .$$

Ma siccome $\mathrm{sen}\,\theta : \theta$ è decrescente nel primo quadrante ed è quindi $\geq \frac{2}{\pi}$, così l'integrale è in valore assoluto non maggiore di

$$2MR\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = 2MR\left(-\frac{\pi}{2R}\right)\left(e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = M\pi(1 - e^{-R}),$$

il che dimostra che l'integrale è limitato.

e) La stessa dimostrazione prova che se $f(x)$ tende a zero per $R \to \infty$, l'integrale $\int e^{ix} f(x) dx$, esteso alla detta semicirconferenza, tende a zero. Lo stesso vale per l'integrale esteso ad un arco qualunque di quella semicirconferenza.

f) Con dimostrazione del tutto analoga, si ha che se $f(x)$ è limitata per $|x| \to \infty$, l'integrale $\int e^{ix^2} f(x) dx$ esteso al quadrante della circonferenza (R) compreso fra gli argomenti 0 e $\frac{\pi}{2}$, e l'integrale $\int e^{-x^2} f(x) dx$ esteso al semiquadrante della stessa circonferenza compreso fra gli argomenti 0 e $\frac{\pi}{4}$, tendono a zero per $R \to \infty$.

111. *Es.* 1.° Calcolare l'integrale definito di $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ esteso ai valori reali di x fra $-\infty$ e $+\infty$.

Si consideri all'uopo l'area T racchiusa fra il segmento dell'asse reale compreso fra $-R$ ed R e la semicirconferenza c descritta su questo segmento come diametro, superiormente all'asse reale — cioè nel semipiano in cui il coefficiente dell'immaginario di x è positivo. Il residuo

integrale di $f(x)$, relativo al contorno di quest'area percorsa positivamente,

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^4} + \int_{(c)}\frac{dx}{1+x^4}\right)$$

radici 4e dell'unità

è uguale alla somma dei residui di $f(x)$ relativi ai poli compresi entro T: ora questi sono i punti $e^{\frac{i\pi}{4}}$ ed $e^{\frac{3i\pi}{4}}$, i cui residui sono dati (n.° 110, *a*) da

$$\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} \quad \text{ed} \quad \frac{1}{4e^{\frac{\pi i}{4}}};$$

$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{4x^3}$

la (1) è dunque uguale a $-\frac{i\sqrt{2}}{4}$. Passando al limite per $R \to \infty$, il secondo integrale di (1) tende a zero (n.° 110, *b*), e si ottiene

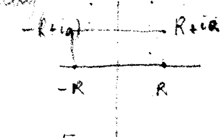
$$(2) \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \text{ [1]}$$

Da questa quadratura se ne possono ricavare varie altre con opportuni cambiamenti di variabile; così, ponendo $x = \mathrm{tg}\, u$, si ottiene senza difficoltà

$dx = \frac{du}{\cos^2 u}$

$$(3) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 u\, du}{\cos^4 u + \mathrm{sen}^4 u} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}, \qquad \int_0^{\pi}\frac{1+\cos u}{1+\cos^2 u}du = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

112. *Es.* 2.° Entro l'area del rettangolo di vertici R, $-R$, $R+ia$, $-R+ia$, la funzione e^{-x^2} è regolare monodroma, e quindi l'integrale esteso al contorno del rettangolo è nullo; cioè:



$$(4) \qquad \left(\int_{-R}^{R} + \int_{R}^{R+ia} + \int_{R+ia}^{-R+ia} + \int_{-R+ia}^{-R}\right)(e^{-x^2}dx) = 0.$$

Per $R \to \infty$, il primo di questi integrali tende (*Calcolo*, n.° 600) a $\sqrt{\pi}$; il secondo, che, posto $x = R + iv$, si può scrivere

$dx = i\,dv \qquad e^{-x^2} = e^{-R^2+v^2} = e^{-R^2}\cdot e^{v^2}$

$$ie^{-R^2}\int_0^{a} e^{-2Riv}\cdot e^{v^2} dv,$$

[1] Si può giungere a questo risultato col procedimento usuale (*Calcolo*, n.° 376) ma il calcolo riesce più laborioso e meno elegante.

tende a zero per $R \to \infty$, e così il quarto; il terzo, posto $x = u + ia$, è

$$-e^{a^2}\int_{-R}^{R} e^{-u^2}(\cos 2au + i\,\mathrm{sen}\,2au)\,du;$$

passando al limite, la (4) dà quindi

(5) $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos 2au\,du = e^{-a^2}\sqrt{\pi}.}$$

Es. 3.° Si consideri la medesima funzione entro l'area del settore circolare limitato dalla circonferenza R e da due raggi di argomenti 0 e $\frac{\pi}{4}$. Anche qui, l'integrale esteso al contorno dell'area è nullo, cioè (fig. 13)

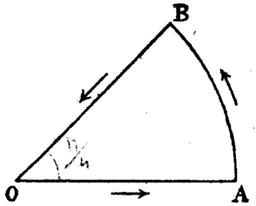


Fig. 13

(6) $$\left(\int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}\right)(e^{-z^2}dz) = 0.$$

Di questi, il primo è, al limite, l'integrale noto [1]

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};}$$

il secondo tende a zero per $R \to \infty$ (n.° 110, f); nel terzo, posto $z = re^{\frac{i\pi}{4}}$, l'integrazione fatta rispetto ad r dà

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_R^0 e^{-ir^2}dr = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^R(\cos r^2 + \mathrm{sen}\,r^2)dr + \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^R(\cos r^2 - \mathrm{sen}\,r^2)dr.$$

Applicando la (6) e passando al limite per $R = \infty$, viene

(7) $$\int_0^\infty \cos r^2 dr = \int_0^\infty \mathrm{sen}\,r^2 dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Cambiando r in $\sqrt{x}$, viene

(8) $$\boxed{\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Queste formule si presentano nella teoria della diffrazione della luce.

[1] *Calcolo*, n.° 600.

118. *Es.* 4.° Si integri la funzione $f(x) = \frac{e^{ix}}{x}$ lungo il contorno dell'area limitata dai segmenti da $-R$ a $-r$ e da r ad R dell'asse reale, e dalle semicirconferenze (r), (R) superiori all'asse stesso (fig. 14), indi si

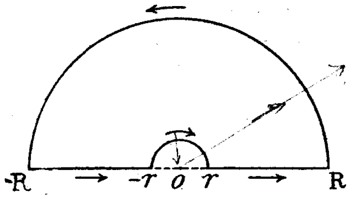


Fig. 14

passi al limite per $r \to 0$ ed $R \to \infty$. Per essere $\frac{e^{ix}}{x}$ uniforme e regolare entro quell'area, l'integrale è nullo, e si ha

$$\left(\int_r^R + \int_{(R)} + \int_{-R}^{-r} + \int_{(r)}\right)\left(\frac{e^{ix}}{x}\right)dx = 0.$$

Il primo essendo $\int_r^R e^{ix}\frac{dx}{x}$, il terzo $-\int_r^R e^{-ix}\frac{dx}{x}$, la loro somma dà, al limite

$$2\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{x}.$$

Il secondo tende a zero per $R \to \infty$, per il n.° 110, *e*. Infine, il quarto è, posto $x = re^{i\theta}$

$$i\int_\pi^0 e^{ir(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}d\theta,$$

e questo, contenendo sotto il segno una funzione continua di r e θ, è funzione continua di r [1] e quindi [2] ha per limite $i\int_\pi^0 d\theta = -\pi$ per $r = 0$.

Onde la formula classica

(9) $$\boxed{\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}.}$$

[1] *Calcolo*, n.° 412.
[2] Ibid, n.° 413.

114. *Es.* 5.° Il residuo integrale di $f(x)=\frac{e^{ix}}{x^2+a^2}$, dove a è positivo, esteso al contorno dell'area della semicirconferenza (R) superiore all'asse reale, è uguale al residuo di $f(x)$ nel polo ai contenuto entro l'area stessa; questo residuo essendo $\frac{e^{-a}}{2ai}$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-R}^{R}+\int_{(R)}\right)\left(\frac{e^{ix}dx}{x^2+a^2}\right)=\frac{e^{-a}}{2ai}.$$

Ora il secondo integrale tende a zero per $R\to\infty$, per il n.° 110, *e*) il primo è, al limite,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\cos x+i\operatorname{sen} x)dx}{x^2+a^2},$$

onde, notando che la parte reale sotto il segno è funzione pari, e l'immaginaria è funzione dispari, quest'ultima dà per risultato zero, onde risulta

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi e^{-a}}{2a}.} \tag{10}$$

115. La funzione $x^{\alpha-1}$, dove α è un esponente positivo compreso fra 0 ed 1, è analitica regolare in tutto il piano ad eccezione di $x=0$ ed $x=\infty$, ma multiforme: per un giro intorno ad $x=0$ nel senso delle rotazioni positive, essa viene moltiplicata per $e^{2\pi i\alpha}$, e se α è irrazionale, essa ha un numero infinito di valori in ogni punto x, mentre ha r valori se α è razionale ed uguale alla frazione irriducibile $\frac{p}{r}$. Essendo allora $P(x)$, $Q(x)$ due polinomi razionali interi, primi fra loro, dove P è di grado inferiore a Q, e supponendo la $Q(x)$ priva di radici positive, la funzione

$$f(x)=x^{\alpha-1}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

è multiforme e si riproduce moltiplicata per lo stesso fattore $e^{2\pi i\alpha}$ per un giro di x intorno ad $x=0$ nel senso positivo.

per poter fare il taglio

Si consideri ora l'area T (fig. 15) semplicemente connessa, chiusa dalle due circonferenze (R), (r) e dal taglio a due lembi rR, r_1R_1 fatto fra le due circonferenze. Non essendo

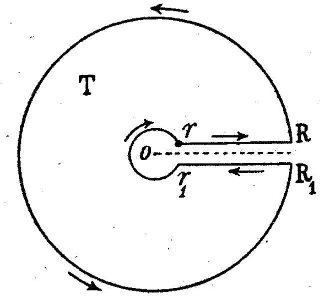


Fig. 15

possibile, in quest'area, un giro intorno ad $x=0$, la $f(x)$ è ridotta monodroma in T, e perciò il residuo integrale al contorno di T sarà uguale alla somma dei residui di $f(x)$ relativi alle radici di $Q(x)$ interne a T. Ora il residuo integrale è

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_r^R+\int_{(R)}+\int_{R_1}^{r_1}-\int_{(r)}\right)\left(x^{\alpha-1}\frac{P(x)dx}{Q(x)}\right). \tag{11}$$

Poichè i valori della funzione nei punti del lembo r_1R_1 sono uguali al prodotto dei valori nei punti corrispondenti del lembo rR moltiplicati per il fattore $e^{2\pi i\alpha}$, il primo ed il terzo integrale di (11) danno insieme

$$(1-e^{2\pi i\alpha})\int_r^R x^{\alpha-1}\frac{P(x)dx}{Q(x)}.$$

Per essere $f(x)$ infinitesima per $x=\infty$ di ordine superiore ad 1 (poichè è α compreso fra 0 ed 1) il secondo integrale di (11) tende a zero per $R\to\infty$, per il n.° 110, *b*), e per essere $f(x)$ infinita di ordine minore d'uno per $x=0$, il quarto integrale di (11) tende a zero per $r\to 0$, per il n.° 110, *c*). Indicando con ρ i residui di $\frac{x^{\alpha-1}P(x)}{Q(x)}$ nelle radici di $Q(x)$ e passando al limite per $R \to \infty$, $r \to 0$, si ha dunque:

(12) $$\frac{1-e^{2\pi i\alpha}}{2\pi i}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\frac{P(x)dx}{Q(x)} = \Sigma_2.$$

Qualora la $Q(x)$ ammettesse radici positive, si avrebbe una facile modificazione della formula eseguendo il taglio fra (r) ed (R) lungo un raggio che non passi per alcuna radice di $Q(x)$, il che è sempre possibile.

Es. 6.° Come applicazione della (14), si ha, facendo $P(x)=1$, $Q(x)=1+x$: (1 radice negativa -1)

$$(1-e^{2\pi i\alpha})\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x} = 2\pi i e^{\pi i(\alpha-1)},$$

onde, con immediata riduzione: $= B(\alpha, 1-\alpha)$ Severi n° 291

(13) $$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi\alpha},\quad (0<\alpha<1);$$

v. anche le formule: $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (integrali di Fresnel) in Severi n° 368-9

CAPITOLO OTTAVO

ULTERIORI APPLICAZIONI DEI TEOREMI DI CAUCHY

§ I. Una speciale espressione in forma d'integrale definito.

116. Sia data, nel piano della variabile complessa, una linea l regolare, di un solo pezzo, tutta posta a distanza finita (n.° 14); sia $\varphi(t)$ una funzione integrabile dei punti della linea, e si consideri l'integrale

(1) $$J(x) = \int_{(l)} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}.$$

Qui conviene distinguere due casi, secondo che la linea l è aperta o chiusa. Dapprima, la linea l sia aperta. Poichè la l è priva di nodi, il piano-sfera rimane semplicemente connesso anche se tagliato secondo l. Essendo α un punto del piano, non appartenente ad l, ed essendo δ il limite inferiore delle distanze di α dai punti di l, per ogni punto x interno al cerchio (α, δ) la serie *l aperta*

$$\frac{1}{t-x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(x-\alpha)^n}{(t-\alpha)^{n+1}}$$

$t - \alpha + (\alpha - x)$ $\quad \frac{|\alpha - x|}{|t-\alpha|} < 1$

è uniformemente convergente rispetto a t; sostituendo in (1), sarà dunque lecita l'integrazione termine a termine, e si avrà pertanto

(2) $$J(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n(x-\alpha)^n,\quad c_n = \int_{(l)} \frac{\varphi(t)dt}{(t-\alpha)^{n+1}}.$$

essendo cioè sviluppabile in serie

In base a ciò, $J(x)$ è una funzione analitica, di cui un elemento è regolare entro il cerchio (α, δ). Ma se β è un punto interno a questo cerchio, si può ottenere, da una parte, un analogo sviluppo di $J(x)$ in serie di potenze di $x - \beta$, sia $\Sigma c_n'(x-\beta)^n$, convergente entro il cerchio (β, δ') dove δ' è il limite inferiore delle distanze di β dai punti di l; d'altra parte, lo sviluppo dedotto (n.° 38) da $\Sigma c_n(x-\alpha)^n$ relativamente al punto β converge almeno nel cerchio $(\beta, \delta - |\beta - \alpha|)$ e vi rappresenta l'integrale (1); onde i due sviluppi coincidono. Risulta da questa osservazione che l'elemento (2) si può continuare in tutto il piano-sfera ad eccezione del taglio l, e pertanto $J(x)$ è funzione analitica — o ramo monodromo di funzione analitica — in tutto il piano-sfera così tagliato. Il punto $x = \infty$ appartiene pure al campo di regolarità di $J(x)$, e lo sviluppo relativo a $x=\infty$ è dato da

$$J(x) = \sum \frac{c_n}{x^{n+1}}, \quad c_n = -\int_{(l)} \varphi(t) t^n dt, \tag{3}$$

convergente fuori del cerchio di centro 0 ed avente il raggio uguale al limite superiore dei moduli dei punti di l.

che è una linea di singolarità

Il taglio rappresentato da l prende il nome di *taglio Hermitiano* [1]. Nei punti di questo taglio l'espressione in forma di integrale definito non ha significato, ma può essere regolare la funzione analitica da essa definita. Ad esempio, l'espressione

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t-x}$$

ramo di

rappresenta un ramo ad un valore di funzione analitica regolare su tutto il piano sfera, ad eccezione del taglio lungo il tratto $-1 \ldots +1$ dell'asse reale; questo ramo è quello della funzione $\log \frac{x-1}{x+1}$ che prende il valore 0 per $x = \infty$: ma la funzione stessa ammette come regolari tutti i punti del detto tratto, ad eccezione degli estremi ± 1.

---

[1] V. Ch. Hermite, *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Acta Soc. Scient. Fennicæ, T. XII, 1884.

117. La linea l sia chiusa. Essa racchiude allora un'area semplicemente connessa A, mentre i punti esterni costituiscono un'area B infinita, pure semplicemente connessa sul piano-sfera. Un procedimento del tutto analogo a quello tenuto al n.° precedente vale a dimostrare che l'espressione (1) rappresenta entro A un ramo monodromo di funzione analitica regolare entro A medesimo, ed un ramo monodromo di funzione analitica regolare entro B; ma i due rami non appartengono in generale alla medesima funzione, cioè non si può ottenere uno di essi mediante continuazione analitica di un elemento dell'altro.

l chiusa

Non è poi a credere (e ciò risulta dal n.° 92) che la funzione analitica rappresentata da (1) assuma in generale, sul contorno, i valori $\varphi(t)$.

L'espressione (1) dà, nel caso trattato nel presente n.°, un altro esempio del fatto notato al n.° 65, di una medesima espressione analitica che può, in due diversi campi, rappresentare due funzioni analitiche distinte.

cfr. esempio di Tannery

Se, in particolare, $\varphi(t)$ è funzione analitica regolare entro tutta l'area A, contorno compreso, la (1) rappresenterà entro A la funzione $2\pi i \varphi(x)$, e rappresenterà lo zero entro l'area B, in forza dei teoremi di Cauchy (n.i 81, 92).

118. Riprendendo il caso in cui la linea l è aperta, sia $\varphi(t)$ funzione analitica regolare in tutta un'area T semplicemente connessa comprendente la linea l. Si consideri la linea l spostata in l', in modo che l' abbia i medesimi estremi e sia regolare e tutta contenuta in T. Essendo x, x' due punti vicini di T, l'uno interno e l'altro esterno all'area racchiusa fra l ed l' (fig. 16) si avrà, per il teorema di Cauchy ed l essendo percorsa da a a b:

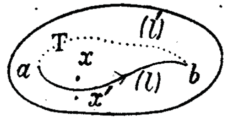


Fig. 16

interna

$$\int_{(l)} \frac{\varphi(t)dt}{t-x} - \int_{(l')} \frac{\varphi(t)dt}{t-x} = 2\pi i \varphi(x),$$

mentre Cauchy

$$\int_{(l)} \frac{\varphi(t)dt}{t-x'} = \int_{(l')} \frac{\varphi(t)dt}{t-x'}.$$

Onde

$$J(x) - J(x') = \int_{(l)} \varphi(t)\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t-x'}\right)dt + 2\pi i\varphi(x),$$

e per x' tendente ad x, poichè l'integrale del secondo membro tende a zero per essere x ed x' dalla medesima parte del taglio hermitiano l, viene

$$\lim_{x' \to x} [J(x) - J(x')] = 2\pi i\varphi(x).$$

salto di $J(x)$

Perciò $\boxed{2\pi i\varphi(x)}$ viene detto *il salto* dell'espressione $J(x)$ quando la variabile attraversa il taglio l.

f generalmente regolare

119. Sia $f(x)$ una funzione analitica uniforme, regolare su tutto il piano-sfera ad eccezione di luoghi di singolarità — punti, linee od aree — racchiudibili in un numero finito di aree che indicheremo genericamente con ω. Sia l una linea regolare chiusa semplice, non passante per alcun punto delle ω; sia x un punto non appartenente nè ad l nè alle ω. L'espressione

$$\boxed{E(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \frac{f(t)dt}{t-x},}$$

per x nell'area A interna ad l, rappresenta una funzione $\varphi(x)$ analitica regolare in A; per x nell'area B esterna ad l, una funzione $\psi(x)$ analitica regolare in B. Se $\omega_h (h = 1, 2,\dots m)$ sono le aree ω contenute in A, si ha, per x in A (n.° 92):

formula integrale di Cauchy per le aree

per x in A

$$E(x) = f(x) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{m}\int_{(\omega_h)} \frac{f(t)dt}{t-x},$$

onde, posto

$$\Omega_h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\omega_h)} \frac{f(t)dt}{t-x},$$

viene

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{h=1}^{m}\Omega_h(x).$$

Ma per x preso in B, è cioè esterno ad l

per X in B

$$E(x) = \sum_{h=1}^{m}\Omega_h(x) = \psi(x),$$

caratterizza le singolarità esterne ad A / interne ad A

e questa è dunque regolare in tutto il campo esterno alle $\omega_1, \omega_2,\dots \omega_m$. Pertanto è

(4) $$\boxed{f(x) = \varphi(x) - \psi(x),}$$

dove $\varphi(x)$ è funzione regolare in A, $\psi(x)$ funzione regolare su tutto il piano-sfera, meno il luogo delle singolarità di $f(x)$ situate nell'interno di A. Sottraendo dunque la funzione $\varphi(x)$ da $f(x)$, si libera la $f(x)$ stessa dalle singolarità esterne ad l, mentre la $(-\psi(x))$ è tale che, tolta ad $f(x)$, la libera delle singolarità interne ad l [1]; esse servono dunque a caratterizzare rispettivamente queste singolarità.

Weierstrass

120. *a*) L'osservazione fondamentale del n.° 116 serve ad estendere notevolmente le condizioni dei n.[i] 57 e seg., sotto alle quali una serie (o successione) di funzioni analitiche converge ad una funzione analitica, e a dare di questo fatto una dimostrazione più rapida.

e a fortiori quella di 95

successioni funzioni

Sia A un'area connessa chiusa da contorni regolari il cui insieme denoteremo con (l); sia

$$u_1(x), \quad u_2(x),\dots \quad u_n(x),\dots$$

una successione di funzioni analitiche e ad un valore entro A, contorno compreso. Essendo t la variabile lungo (l), si supponga che la serie sul contorno

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$$

converga uniformemente. « Sotto questa condizione della « convergenza uniforme lungo (l), la $\Sigma u_n(x)$ converge entro « tutto A, ed uniformemente nell'interno di A, verso una « funzione analitica regolare in A ».

Infatti, preso ε positivo arbitrario, si può determinare $\overline{m}$ tale che per $m > \overline{m}$ il resto

$$R_m(t) = \sum_{m+1}^{\infty} u_n(t)$$

[1] V. la memoria: *Studi sopra alcune operazioni funzionali*, Mem. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, S. IV, T. 7 (1886).

sia lungo tutto (l), inferiore ad ε in valore assoluto. Da

$$S(t) = \sum_{n=1}^{m} u_n(t) + R_m(t)$$

si deduce, per x interno ad A: $u_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{u_n(t)}{t-x}\,dt$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \frac{S(t)dt}{t-x} = \sum_{n=1}^{m} u_n(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \frac{R_m(t)dt}{t-x}.$$

Ora, il primo membro è (n.° 117) una funzione analitica $J(x)$ regolare in A; l'ultimo termine, se δ è la minima distanza di x da (l) ed l esprime la lunghezza del contorno, è inferiore in valore assoluto ad $\frac{\varepsilon l}{2\pi\delta}$, onde la serie $\sum_{1}^{\infty} u_n(x)$ ha per somma $J(x)$ che è analitica. La convergenza uniforme della serie nell'interno di A risulta subito, supponendo δ superiore ad un numero positivo arbitrariamente piccolo δ_1.

b) Si può supporre, in particolare, che le $u_n(x)$ siano serie di Laurent e che (l) sia formato da due circonferenze concentriche. Se sopra queste la $\Sigma u_n(t)$ converge uniformemente, in base al teorema precedente la $\Sigma u_n(x)$ potrà esprimersi mediante una serie di Laurent ottenuta sommando termine a termine le serie date $u_n(x)$, e convergente entro la corona circolare. Nell'area racchiusa da una linea l_1 interna ad (l), e del resto prossima quanto si vuole, la serie converge uniformemente ad $J(x)$.

§ II. Un caso di sviluppo in serie. — La cotangente.

121. Riferiamoci alla formula (9) del n.° 106, ed esaminiamo il caso in cui, sotto convenienti ipotesi, il contorno c si dilati indefinitamente. Ritenendo le notazioni del citato n.°, sia

1°) la $f(x)$ regolare uniforme in tutto il piano, eccettuato $x = \infty$ ed una successione di punti α_h ($h = 1, 2, \ldots \infty$) aventi come punto limite l'infinito; sia $F_h\left(\frac{1}{x-\alpha_h}\right)$ la funzione quasi intera (n.° 101) (razionale o trascendente) che caratterizza la singolarità di $f(x)$ in α_h;

residuo integrale per la singolarità al punto all'∞

$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(t)dt}{t-x} = f(x) - \Sigma_h F_h\left(\frac{1}{x-\alpha_h}\right)$

2°) esista un sistema di linee c_n ($n = 1, 2, \ldots \infty$) regolari, chiuse, semplici, ognuna includente la precedente, e tali che se R_n è il limite superiore e ρ_n è il limite inferiore delle distanze dell'origine dai punti di c_n, ρ_n ed R_n tendano all'infinito con n, in modo però che il rapporto $R_n : \rho_n$ si mantenga inferiore ad un dato numero μ;

3°) qualunque sia n, la $f(x)$ si mantenga, su c_n, inferiore in valore assoluto ad un numero assegnabile M;

4°) esista il limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{(c_n)} \frac{f(t)dt}{t} = C.$$

« Sotto queste ipotesi, si ha

Cauchy

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} F_h\left(\frac{1}{x-\alpha_h}\right) + C \text{ ».} \tag{1}$$

$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(t)dt}{t-x} = f(x) - \Sigma F_h$

Questa proposizione, dovuta sostanzialmente a Cauchy, risulterà immediatamente dalla (9) del n.° 106 se dimostreremo che è

$$\lim_{n=\infty}\int \frac{f(t)dt}{t-x} = \lim_{n=\infty}\int_{(c_n)} \frac{f(t)dt}{t}, \tag{2}$$

dove si è ammessa l'esistenza del secondo membro. Ora, si ha:

$$\int_{(c_n)} \frac{f(t)dt}{t-x} - \int_{(c_n)} \frac{f(t)dt}{t} = x\int_{(c_n)} \frac{f(t)dt}{t(t-x)}. \tag{3}$$

Qui, è

$$|t| \geq \rho_n, \quad |t-x| \geq \rho_n - |x|, \quad |f(x)| < M;$$

indicando poi con θ l'anomalia, è $|dt| \leq R_n d\theta$, onde la differenza (3) è, in valore assoluto, minore di

$\int \frac{|x| f(t) R_n d\theta}{\rho_n(\rho_n - |x|)}$ $d\theta \leq 2\pi$

$$\frac{2\pi\,|x|\,R_n M}{\rho_n(\rho_n - |x|)} = \frac{R_n}{\rho_n}\cdot 2\pi\,\frac{M|x|}{\rho_n - |x|}$$

e per essere $R_n : \rho_n < \mu$, codesta differenza è minore di $\frac{2\pi\mu M|x|}{\rho_n - |x|}$, che tende a zero per $n = \infty$. La (1) è così dimostrata.

122. Della formula precedente si può dare una classica applicazione. Si assuma come funzione $f(x)$ la

$$\operatorname{cotg} \pi x = i \frac{e^{2\pi i x} + 1}{e^{2\pi i x} - 1},$$

i cui poli sono i punti $x = n$, n intero qualsiasi; si assumano come linee c_n i perimetri dei quadrati aventi il centro nell'origine, i lati paralleli agli assi, e passanti per i punti $n + \frac{1}{2}$, ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Il residuo di $\operatorname{cotg} \pi x$ nel polo (di primo ordine) $x = n$ essendo dato immediatamente da $\frac{1}{\pi}$, si avrà dalla (9) del n.° 106:

$$(4) \qquad \operatorname{cotg} \pi x = \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{\pi(x-n)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_n)} \frac{\operatorname{cotg} \pi t dt}{t - x}.$$

Ora è facile vedere come siano verificate le condizioni del n.° precedente. Dapprima, la funzione è limitata sull'insieme dei perimetri dei quadrati c_n: infatti, sui lati paralleli all'asse reale, la cotangente, posto $x = u + iv$, è in valore assoluto non maggiore di $\frac{1 + e^{-2\pi v}}{1 - e^{-2\pi v}}$ per v positiva, e di $\frac{e^{-2\pi v} + 1}{e^{-2\pi v} - 1}$ per v negativa, entrambi finiti per ogni $v = n + \frac{1}{2}$ e tendenti ad 1 per $n \to \infty$; e sui lati paralleli all'asse immaginario, la cotangente è

$$i \frac{e^{-2\pi v} - 1}{e^{-2\pi v} + 1},$$

funzione il cui valore assoluto è non maggiore di 1 per ogni v. Di più, la massima e la minima distanza di c_n dall'origine sono rispettivamente $\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$ ed $n + \frac{1}{2}$, il cui rapporto è costante.

Il limite dell'ultimo termine della (4) è dunque quello stesso di

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_n)} \frac{\operatorname{cotg} \pi t dt}{t}$$

per $n = \infty$; ma per essere la funzione $\operatorname{cotg} \pi t$ dispari e c_n simmetrica rispetto all'origine, gl'integrali (5) sono nulli ed è nullo il loro limite. Aggruppando dunque, nella sommatoria della (4), i termini relativi ad n e $-n$, indi passando al limite per $n = \infty$, si ottiene

$$(6) \qquad \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}.$$

Sviluppo di cotg πx

123. La formula (6) dà luogo a numerose deduzioni, di cui accenneremo ad una delle più notevoli. La $\operatorname{cotg} \pi x$, all'infuori del polo di prim'ordine per $x = 0$, è regolare entro il cerchio $|x| < 1$, e siccome la sommatoria del secondo membro di (6) dà una serie uniformemente convergente per $|x| \leq \rho$, $\rho < 1$, il secondo membro stesso potrà ordinarsi per le potenze di x, in virtù del teorema del n.° 57; si ottiene così lo sviluppo:

$$(7) \qquad \pi x \operatorname{cotg} \pi x = 1 - 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{x^2}{n^4} + \frac{x^4}{n^6} + \ldots\right).$$

Ponendo

$$s_p = \sum \frac{1}{n^p}$$

e cambiando πx in $\frac{x}{2}$, viene

$$(8) \qquad \frac{x}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} = 1 - \frac{s_2 x^2}{2\pi^2} - \frac{s_4 x^4}{2^3 \pi^4} - \frac{s_6 x^6}{2^5 \pi^6} - \ldots.$$

D'altra parte, se, applicando il medesimo teorema del n.° 57, si svolge la funzione

$$\frac{xe^x}{e^x - 1}$$

in serie di potenze di x, si ottiene lo sviluppo

$$(9) \qquad \frac{xe^x}{e^x - 1} = B_0 + B_1 x + \frac{B_2 x^2}{2!} + \ldots \frac{B_\nu x^\nu}{\nu!} + \ldots,$$

dove i coefficienti $B_0, B_1, B_2, \ldots$, detti *numeri di Bernoulli* [1], sono nu-

---

[1] Questi numeri furono così chiamati da EULER e MOIVRE in onore di GIACOMO BERNOULLI (1654-1705) che li ha introdotti nella sua *Ars Conjectandi* (p. 97 dell'ediz. di Basilea, 1713). Essi si presentano in svariate questioni di analisi pura ed applicata, e sopra tutto nelle questioni in cui si devono sommare i valori che assume una funzione per i valori interi successivi della variabile. Su questi numeri v. p. es. CESÀRO, *Analisi algebrica* (Torino, 1894) p. 280, 481, e per una conoscenza più completa, l'opera monografica di SAALSCHUTZ (*Vorlesungen über Bernoullische Zahlen*, Leipzig, 1892).

meri **razionali** e soddisfacenti alla relazione ricorrente

$$pB_{p-1}+\binom{p}{2}B_{p-2}+\ldots+\binom{p}{p-1}B_1+B_0=p;$$

è facile verificare che, ad eccezione di B_1, sono nulli tutti quelli di indice dispari. I primi sette sono:

$$\boxed{B_0=1,\quad B_1=\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_5=0,\quad B_6=\frac{1}{42}.}$$

Se ora in (9), che è dunque

$$\frac{xe^x}{e^x-1}=1+\frac{x}{2}+B_2\frac{x^2}{2!}+B_4\frac{x^4}{4!}+B_6\frac{x^6}{6!}+\ldots,$$

si muta x in ix, viene, con ovvia riduzione:

$$\frac{x}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}=1-B_2\frac{x^2}{2!}+B_4\frac{x^4}{4!}-B_6\frac{x^6}{6!}+\ldots,$$

onde, dal confronto con (8):

$$\boxed{s_2=\pi^2B_2,\quad s_4=-\frac{2^3\pi^4B_4}{4!},\ \ldots\ s_{2n}=(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}B_{2n}}{2n!}} \tag{10}$$

Da ciò il risultato, assai notevole, che « le somme di potenze simili « dei numeri naturali sono esprimibili mediante il prodotto della stessa « potenza di π per un numero razionale, quando l'esponente della potenza « è pari (¹) ». Per i primi esponenti, si ha

gl inversi dei

$$s_2=\frac{\pi^2}{6},\quad s_4=\frac{\pi^4}{90},\quad s_6=\frac{\pi^6}{945},\quad s_8=\frac{\pi^8}{9450},\ldots$$

Lo sviluppo (9) permette di indicare l'andamento assintotico dei numeri di Bernoulli per $n\to\infty$. Infatti, poichè il polo più prossimo all'origine della funzione data dal primo membro di (9) è 2π, così, per il n.° 36, sarà

$$\boxed{\lim\sqrt[n]{\frac{B_n}{n!}}=\frac{1}{2\pi}.}$$

$2\pi B_k \sim n!$

124. Diamo infine una classica espressione dei numeri di Bernoulli mediante integrali definiti (²).

(¹) Non si conosce invece, per ora, un'espressione in termini finiti che dia la somma delle potenze simili degli inversi dei numeri naturali nel caso di un esponente dispari. (V. Cesàro, loc. cit., p. 481).

(²) Dovuta indubbiamente a G. Plana (Mem. R. Accad. di Torino, T. 25, 1820-21) seppure non stabilita con tutto rigore. Non è del tutto rigorosa neppure la dimostrazione data da J. Bertrand (*Calcul intégral*, Paris 1870, p. 142).

$\sum \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\qquad \sum\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

a) A quest'uopo, cominciamo coll'osservare che l'integrale

$$\int_0^1\frac{\log x\,dx}{x-1}\quad A$$

ha un valore determinato positivo A, e che ha pure un valore determinato l'integrale

$$\int_0^1\frac{x^m\log x\,dx}{x-1}=\int_0^\delta\frac{x^m\log x\,dx}{x-1}+\int_\delta^1\frac{x^m\log x\,dx}{x-1};$$

la prima di queste parti è infatti inferiore a δ^mA; nella seconda, essendo $\lim\limits_{x\to1}\frac{\log x}{x-1}=1$, si può, prefissato ε, prendere δ in modo che l'integrale sia inferiore ad $\frac{1+\varepsilon}{m+1}$. Preso ora σ arbitrario positivo, si può determinare $\overline{m}$ in modo che sia, per $m>\overline{m}$, ad un tempo

l'Hospital

$$\delta^mA<\frac{\sigma}{2},\quad \frac{1+\varepsilon}{m+1}<\frac{\sigma}{2},$$

e con ciò, da un $\overline{m}$ in poi, è

$$0<\int_0^1\frac{x^m\log x\,dx}{x-1}<\sigma.$$

Ciò posto, è

$$\int_0^1\frac{\log x\,dx}{x-1}=-\int_0^1\log x\cdot(1+x+x^2+\ldots x^{m-1})dx-\int_0^1\frac{x^m\log x\,dx}{x-1}; \tag{11}$$

ma l'integrazione per parti dà

$$\int_0^1x^n\log x\,dx=\left(\frac{x^{n+1}\log x}{n+1}\right)_0^1-\int_0^1\frac{x^ndx}{n+1}=-\frac{1}{(n+1)^2},$$

onde, da (11), e poichè il resto tende a zero:

$$\boxed{\int_0^1\frac{\log x\,dx}{x-1}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\pi^2B_2=\frac{\pi^2}{6}} \tag{12}$$

$\vartheta_2=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\frac{\log x}{x-1}dx$

b) L'integrale

$$\int_0^1x^n\log^m x\,dx$$

si ottiene subito per riduzione: l'integrazione per parti dà infatti

$$\int_0^1 x^n \log^m x\, dx = -\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n \log^{m-1} x\, dx,$$

onde

$$\int_0^1 x^n \log^m x\, dx = \frac{(-1)^m\, m!}{(n+1)^{m+1}}. \tag{13}$$

Avendosi ora

$$\int_0^1 \frac{\log^m x\, dx}{1-x},$$

esso si scompone in

$$\int_0^1 (1+x+\dots x^{n-1}) \log^m x\, dx + \int_0^1 \frac{x^n \log x\, dx}{1-x}:$$

col medesimo procedimento tenuto ad a), si vede che l'ultimo integrale tende a zero per $n \to \infty$, onde viene, applicando la (13) e passando al limite:

$$\int_0^1 \frac{\log^m x\, dx}{1-x} = (-1)^m m! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{m+1}}. \tag{14}$$

E poichè, se è m dispari $(m = 2p-1)$ la sommatoria è s_{2p}, così viene, dalle (10):

$$\int_0^1 \frac{\log^{2p-1} x\, dx}{1-x} = (-1)^p \frac{2^{2p-2}\pi^{2p} B_{2p}}{p}. \tag{15}$$

Ponendo $x = e^{-t}$, viene:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{2p-1}\, dt}{e^t - 1} = (-1)^{p-1} \frac{2^{2p-2}\pi^{2p} B_{2p}}{p}, \tag{16}$$

e ponendo ancora $t = 2\pi x$, si ha infine:

$$\boxed{B_{2p} = (-1)^{p-1} 4p \int_0^{\infty} \frac{x^{2p-1}\, dx}{e^{2\pi x} - 1}}\ (^1). \tag{17}$$

(1) Si avverte il lettore che abbiamo seguita, per i numeri bernoulliani, la notazione del Cesàro. Alcuni autori indicano con $B_p(-1)^{p-1}$ il numero da noi indicato con B_{2p}: la nostra notazione sembra preferibile, per essere alternati i segni dei numeri stessi e per essere nulli quelli da noi indicati con B_n per n dispari.

NO

§ III. Formule sommatorie.

125. Gli antichi analisti hanno denominato *formule sommatorie* talune espressioni che permettono di valutare sia esattamente, sia con approssimazione assegnabile, la somma dei valori che una funzione data assume nei punti di una determinata successione: ordinariamente nella successione dei numeri naturali. I teoremi di Cauchy danno un valido sussidio per la costruzione di simili formule: gioverà all'uopo una funzione ausiliare che sia infinita di prim'ordine nei punti della successione data, con residuo uguale ad uno; se infatti $f(x)$ è la funzione data, analitica regolare e monodroma in un'area connessa A di contorno (c), in cui cadano i punti $a_p,\ a_{p+1}, \dots\ a_{p+m}$ della successione, e se $\varphi(x)$ è la funzione ausiliare, si ha φ

$f(a_{p+\nu}) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(t)}{t-a_{p+\nu}}dt$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} f(t)\varphi(t)dt = \sum_{n=0}^{m} f(a_{p+n}).} \tag{1}$$

La valutazione del secondo membro è perciò ricondotta a quella, esatta od approssimata, dell'integrale che figura nel primo membro, e si intende come, mediante opportuna deformazione della linea c, si possano ottenere formule riferentisi alla somma dei valori di $f(x)$ in un numero arbitrario di punti della successione a_n.

Se la $f(x)$ ammette nell'area A punti singolari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ alla formula (1) va sostituita l'altra più generale,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{m} f(a_{p+n}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} f(t)\varphi(t)dt - \frac{1}{2\pi i}\sum_{s=1}^{q}\int_{(\alpha_s)} f(t)\varphi(t)dt} \tag{2}$$ pag 122

dove il termine generico dell'ultima sommatoria dà il residuo del prodotto $f(x)\varphi(x)$ nel punto α_s. È implicita l'ipotesi che i punti α_s siano distinti dai punti $a_p,\ a_{p+1}, \dots$ pag 121

126. (1) Come si è detto, si assume spesso per successione $a_1,\ a_2, \dots$ quella dei numeri naturali: ciò è particolar-

(1) Sull'applicazione della teoria dei residui alla costruzione di formule sommatorie, v. il Cap. III dell'opera già citata di E. Lindelöf:

mente opportuno in svariate questioni di matematica applicata. Giova in tale caso una funzione ausiliare avente poli di prim'ordine nei punti 0, 1, 2,...., e residuo uguale all'unità in ognuno di questi punti: una tale funzione, in particolare, è data da $\boxed{\varphi(x) = \pi \operatorname{cotg} \pi x.}$ Se dunque il contorno c racchiude i numeri interi da p a $p + m$, la (1) viene a scriversi

$$\boxed{\sum_{n=0}^{m} f(p+n) = \frac{1}{2i} \int_{(c)} f(t) \operatorname{cotg} \pi t \, dt,} \tag{3}$$

ed in modo analogo si modifica la (2). Al medesimo scopo può giovare la $\boxed{\varphi(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}}$, che ha i medesimi poli, ed il residuo $(-1)^n$ per $x = n$.

Offrono speciale interesse quei casi in cui si può fare crescere indefinitamente il numero dei termini della sommatoria $\Sigma f(n)$: ciò accadrà in particolare se sarà possibile di verificare le ipotesi del n.° 121. Ad esempio, si assumano come curve c_n i perimetri dei quadrati considerati al n.° 122, e la $f(t)$ sia limitata su queste c_n: come risulta dal n.° 122 stesso, sarà pure limitata su di essa la $f(t) \operatorname{cotg} \pi t$. Se allora accade che sia

$$\frac{1}{2i} \lim_{n=\infty} \int_{(c_n)} f(t) \operatorname{cotg} \pi t \, dt = C,$$

si avrà la formula sommatoria, derivante dalla (2):

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = C - \frac{1}{2i} \sum \int_{(\alpha_s)} f(t) \operatorname{cotg} \pi t \, dt.} \tag{4}$$

In particolare, se è $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dove P e Q sono polinomi razionali interi primi fra loro ed il grado di P è almeno di due unità inferiore a quello di Q, e se $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_q$

Le Calcul des résidus et ses applications etc., dove sono anche contenuti molti dati bibliografici. V. anche i n.i 78 e 79 delle *Vorlesungen über Funktionstheorie* di J. Petersen (Kopenhagen, 1898).

perchè $C = \lim \int \frac{f(t)}{t} = \lim \int \frac{P(t)}{Q(t)\,t}$

sono le radici di $Q(x)$, sarà $C = 0$, e verrà, le α_s non essendo numeri interi:

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = -\frac{1}{2i} \sum_{s=1}^{q} \int_{(\alpha_s)} \frac{P(t) \operatorname{cotg} \pi t}{Q(t)} dt,} \tag{5}$$

e, nel caso in cui le α_s sono radici semplici di $Q(x)$:

$$\boxed{\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = -\pi \sum_{s=1}^{q} \frac{P(\alpha_s) \operatorname{cotg} \pi \alpha_s}{Q'(\alpha_s)}.} \tag{5'}$$

127. Si consideri l'area R di un rettangolo $ABCD$ (fig. 17) i cui vertici siano $A(a - i\delta)$, $D(a + i\delta)$, $B(b - i\delta)$,

a e b non interi

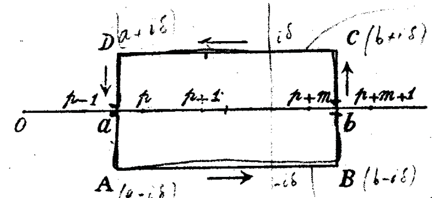


Fig. 17

$C(b + i\delta)$; sia, m e p essendo interi,

$$p - 1 < a < p, \quad p + m < b < p + m + 1;$$

sia infine $f(x)$ una funzione analitica regolare entro il rettangolo.

Scrivendo invece di $\frac{1}{i} \operatorname{cotg} \pi t$, sulla parte $aABb$ del perimetro, l'espressione equivalente $1 + \frac{2}{e^{2\pi i t} - 1}$, e sulla parte $bCDa$ l'espressione pure equivalente $-1 - \frac{2}{e^{-2\pi i t} - 1}$, ed applicando la (3), viene:

$$\sum_{n=0}^{m} f(p+n) = \frac{1}{2} \int_{(aABb)} f(t) dt + \int_{(aABb)} \frac{f(t) dt}{e^{2\pi i t} - 1} - \frac{1}{2} \int_{(bCDa)} f(t) dt - \int_{(bCDa)} \frac{f(t) dt}{e^{-2\pi i t} - 1},$$

e poichè la $f(x)$ è regolare in R, si ha che il primo ed il terzo integrale del secondo membro danno insieme $\int_a^b f(t) dt$, per il integrale dipendente dai soli estremi

teorema di CAUCHY (n.° 85), talchè si ha:

$$(6)\qquad \sum_{n=0}^{m} f(p+n) = \int_a^b f(t)dt + \int_{(aABb)} \frac{f(t)dt}{e^{2\pi i t}-1} - \int_{(bCDa)} \frac{f(t)dt}{e^{-2\pi i t}-1}$$

in part. Assoggettando la $f(t)$ a condizioni opportune, più o meno restrittive, si sono ricavate dalla (6) varie formule adatte per le applicazioni. Supponendo, ad esempio, che per $\delta = \overline{aD}$ tendente all'infinito, le parti dell'integrale estese ad AB e a CD tendano a zero [1], viene, posto $t = u + iv$ e passando al limite per $\delta = \infty$, dopo cambiato v in $-v$ nelle parti estese ad aA e Bb:

$$(7)\qquad \sum_{n=0}^{m} f(p+n) = \int_a^b f(t)dt + i\int_0^\infty \frac{f(a+iv)dv}{e^{-2\pi i a}\cdot e^{2\pi v}-1} - i\int_0^\infty \frac{f(a-iv)dv}{e^{2\pi i a}\cdot e^{2\pi v}-1}$$
$$- i\int_0^\infty \frac{f(b+iv)dv}{e^{-2\pi i b}e^{2\pi v}-1} + i\int_0^\infty \frac{f(b-iv)dv}{e^{2\pi i b}e^{2\pi v}-1}.$$

Se le condizioni precedenti sono soddisfatte per b arbitrariamente grande, e i due ultimi integrali tendono a zero per $b\to\infty$, si ha:

$$(8)\qquad f(p)+f(p+1)+\dots+f(p+n)+\dots =$$
$$= \int_a^\infty f(t)dt + i\int_0^\infty \frac{f(a+iv)dv}{e^{-2\pi i a}\cdot e^{2\pi v}-1} - i\int_0^\infty \frac{f(a-iv)dv}{e^{2\pi i a}e^{2\pi v}-1}.$$

Se dunque la serie del primo membro converge, convergerà l'integrale di $f(t)$ preso fra 0 ed ∞, e reciprocamente; se la serie diverge, tenderà però a limite, per $m\to\infty$, la differenza

$$\sum_{n=0}^{m} f(p+n) - \int_a^{m+\theta} f(t)dt$$

θ essendo un numero compreso fra 0 ed 1, estremi esclusi [2].

---

[1] Ciò accadrà quando $f(u\pm i\delta)e^{\mp 2\pi\delta}$ tenda a zero, uniformemente rispetto ad u, per $\delta\to\infty$.

[2] Cfr. E. LINDELÖF, op. cit., p. 58. Ivi è fatto $\theta = \frac{1}{2}$.

Se $a=p$
$b=p+m$

128. In ciò che precede, abbiamo supposto a e b non interi. Quando così non sia, ed a coincida, ad esempio, con p, non sarà più possibile l'integrazione lungo il lato DA del rettangolo R: sostituiremo allora a questo lato una linea $DKLHA$ (fig. 18) costituita dal segmento rettilineo DK, dalla semicirconferenza KLH di centro p e raggio ρ, e dal segmento rettilineo HA.

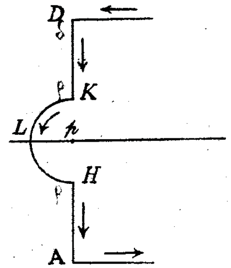


Fig. 18

La parte corrispondente, nel secondo membro della (6), all'integrazione lungo il lato DA di R nella fig. 17, verrà ora sostituita dagli integrali

$$i\int_\delta^\rho \frac{f(p+iv)dv}{e^{2\pi v}-1} \quad \text{ed} \quad i\int_\rho^\delta \frac{f(p-iv)dv}{e^{2\pi v}-1},$$

più gl'integrali estesi agli archi KL ed LH. Il primo di questi, posto $t = p + \rho e^{i\theta}$, dà

$$i\rho\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{f(p+e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta}{2\pi i\rho e^{i\theta}+\dots},$$

che per ρ tendente a zero tende ad $\frac{1}{4}f(p)$; analogamente per l'integrale esteso all'arco LH: talchè, passando al limite per $\rho = 0$, l'integrale esteso a DA nel secondo membro della (6) viene ora sostituito da

$$i\int_0^\delta \frac{f(p+iv)dv}{e^{2\pi v}-1} - i\int_0^\delta \frac{f(p-iv)dv}{e^{2\pi v}-1} + \frac{1}{2}f(p).$$

Analogamente, se b coincide con $p+m$. Pertanto la forapplicazione alla formula dei trapezi

mula (7), ferme le ipotesi su $f(t)$ che hanno servito a stabilirla, diviene, per $a=p,\ b=p+m$:

$$(9)\qquad \sum_{n=0}^{m} f(p+n)-\frac{1}{2}(f(p)+f(p+m))=\int_p^{p+m} f(t)dt+$$
$$+\,i\int_0^\infty [f(p+iv)-f(p-iv)-(f(p+m+iv)-f(p+m-iv))]\frac{dv}{e^{2\pi v}-1}\ \text{[1]},$$

e la (8), sempre sotto le convenienti ipotesi, diviene:

$$(10)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} f(p+n)=\frac{1}{2}f(p)+\int_p^\infty f(t)dt+i\int_0^\infty \frac{f(p+iv)-f(p-iv)}{e^{2\pi v}-1}dv.$$

129. Trasformando opportunamente gli ultimi termini della (9), si giunge ad una formula celebre, nota sotto al nome di *formula sommatoria di* MACLAURIN [2] e classica nel Calcolo inverso delle differenze finite e nelle sue applicazioni. All'uopo, si applichi ad $f(p+iv)$, $f(p-iv)$,... lo sviluppo accorciato di TAYLOR: si ottiene con ciò

$$i\int_0^\infty [f(p+iv)-f(p-iv)-(f(p+m+iv)-f(p+m-iv))]\frac{dv}{e^{2\pi v}-1}=$$
$$=2\sum_{s=1}^{k}\frac{(-1)^{s-1}}{2s-1!}(f^{(2s-1)}(p+m)-f^{(2s-1)}(p))\int_0^\infty \frac{v^{2s-1}dv}{e^{2\pi v}-1}+R_k,$$

dove R_k è il *resto* ottenuto applicando l'integrazione al prodotto per $1:(e^{2\pi v}-1)$ dei termini complementari dei detti sviluppi accorciati; ed infine, richiamando la (17) del n.° 124, si viene all'accennata formula

---

[1] Se, supposta $f(u)$ funzione reale della variabile reale u, si considera l'area compresa fra l'asse u, la curva $y=f(u)$ e le ordinate corrispondenti ai punti estremi $u=p$, $u=p+m$, il primo membro della (9) non è altro che il valore approssimato di quest'area dato dal noto metodo dei trapezi (v. *Calcolo*, n.° 525): siccome il primo termine del secondo membro dà il valore esatto dell'area medesima, così l'integrale successivo rappresenta l'errore derivante dal sostituire la somma dei trapezi all'area curvilinea.

[2] *A Treatise of Fluxions*, (Edinburgh, 1742).

di MACLAURIN, ritrovata poi in forma poco diversa da EULER [1]:

$$(11)\qquad \sum_{n=0}^{m} f(p+n)=\frac{1}{2}(f(p)+f(p+m))+$$
$$+\sum_{s=1}^{k}\frac{B_{2s}}{2s!}(f^{(2s-1)}(p+m)-f^{(2s-1)}(p))+R_k.$$

MacLaurin Euler

Per le applicazioni di questa formula, si deve valutare il termine complementare R_k (resto) o almeno un limite superiore del suo valore assoluto; ma la discussione relativa, come le applicazioni che della (11) sono state fatte, escono dal piano della presente opera.

Limitandoci ad un esempio, si faccia $f(x)=\frac{1}{x}$, $p=1$. Dalla (9) si ha

γ di Mascheroni

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}+\frac{1}{2(m+1)}$$
$$=\frac{1}{2}+\int_1^{m+1}\frac{dt}{t}+2\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+v^2}-\frac{1}{(m+1)^2+v^2}\right)\frac{v\,dv}{e^{2\pi v}-1};$$

ne viene

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}-\log(m+1)\right)=\frac{1}{2}+2\int_0^\infty\frac{v\,dv}{(1+v^2)(e^{2\pi v}-1)};$$

e poichè il limite indicato nel primo membro è la nota costante di EULER-MASCHERONI [2], così si ha una notevole espressione di codesta costante in forma d'integrale definito.

NO

§ IV. Il teorema di Jensen.

numero finito di poli

130. Sia data una funzione $f(x)$ a carattere razionale (n.° 71) entro il cerchio (r) e sulla circonferenza; siano $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_n$ i suoi zeri e $\beta_1, \beta_2,\ldots \beta_m$ i suoi poli in (r). Qui si suppone:

a) che nessuno dei punti α o β coincida con $x=0$, nè si trovi sulla circonferenza (r), nè sia reale positivo;

---

[1] *Institutiones Calculi differentialis* ecc. T. II, Cap. V, (Berolini, 1755, o edizione curata da G. FONTANA, Pavia, 1787).

γ

[2] Scoperta da EULER: *Novi Comment. Petropolitani*, T. 14 (1769), e calcolata da MASCHERONI (*Adnotationes ad Calc. integr. Euleri*, Pavia 1790). Il suo valore è $C=0{,}57721566\ldots$, ed essa si definisce in modo elementare come somma della serie $\sum\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)$. V. p. es. CESÀRO, *Anal. algebrica*, p. 147.

b) che ogni zero ed ogni polo venga scritto nella successione $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ e rispettivamente nella successione $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, tante volte quanto è il proprio ordine di multiplicità.

Sulla circonferenza (r), $f(x)$ è una funzione continua dell'argomento θ della x, per modo che si può scrivere $f(x) = R(\theta)e^{i\psi(\theta)}$, R e ψ essendo funzioni continue di θ per $|x| = r$.

Ciò posto, ci proponiamo di valutare l'integrale

$$(1) \qquad \boxed{I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log R(\theta)\, d\theta.}$$

Partiamo perciò dall'integrale

$$(2) \qquad J = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f'(x)}{f(x)} \log x\, dx;$$

l'integrazione per parti dà:

$$J = \frac{1}{2\pi i}(\log x \cdot \log f(x))_{\theta=0}^{\theta=2\pi} - \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \log f(x)\frac{dx}{x}.$$

Se si osserva qui che variando l'argomento di x da $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$, $\log x$ aumenta di $2\pi i$ mentre l'argomento di $f(x)$ aumenta di 2π per ogni fattore $x - \alpha$ e diminuisce di altrettanto per ogni fattore $(x-\beta)^{-1}$, così il primo termine del secondo membro di J diviene

$$\frac{1}{2\pi i}(2\pi i \log f(r) + 2(n-m)\pi i \log r - 4\pi^2(n-m)).$$

$dx = i r e^{i\theta} d\theta$ $\quad f(x) = R(\theta)e^{i\psi}$

In quanto al secondo termine, posto $x = re^{i\theta}$, esso è

$$-I - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\theta)\, d\theta.$$

Si ha dunque

$$(3) \qquad J = \log f(r) + (n-m)\log r - I + i\left(2\pi(n-m) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\theta)\, d\theta\right).$$

Consideriamo d'altra parte l'area A (fig. 19) semplicemente connessa, il cui contorno c è costituito dalla circonferenza (r), dalla circonferenza concentrica (ρ) di raggio arbi-

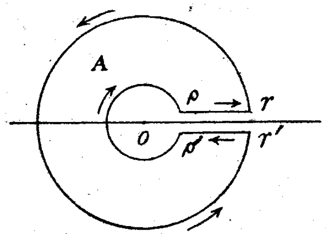


Fig. 19

trariamente piccolo e dai due lembi di un taglio $\rho \ldots. r$ fatto fra le due circonferenze. La funzione $\log x \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ essendo regolare ad un valore entro quest'area, si potrà applicarle il teorema del n.° 108, *a*) e si avrà

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \log t \frac{f'(t)}{f(t)}\, dt = \sum_{h=1}^{n} \log\alpha_n - \sum_{k=1}^{m} \log\beta_m = \log\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}\right).$$

$\int_{(c)} = \int_\rho^r + \int_{(r)} + \int_{r'}^{\rho'} + \int_{(\rho)}$

Ma l'integrale nel primo membro si decompone nell'integrale da ρ ad r, nell'integrale esteso ad (r), in quello da r' a ρ', ed in quello esteso a (ρ), nel senso indicato dalle freccie. Il primo ed il terzo termine (poichè in quest'ultimo $\log t$ è aumentato di $2\pi i$) danno insieme, facendo tendere ρ a zero:

$$-\log f(r) + \log f(0);$$

il secondo termine è J, l'ultimo tende manifestamente a zero per $\rho \to 0$, onde, dalla (4):

$$(4') \qquad \log\left(\frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}\right) = J - \log f(r) + \log f(0).$$

Eliminando J fra questa e la (3), si ottiene l'espressione di I dall'uguaglianza delle parti reali, cioè

$$(5) \qquad \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log R(\theta)\, d\theta = \log|f(0)| + \log\left(r^{n-m}\left|\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|\right);}$$

nel caso in cui la $f(x)$ ha in (r) carattere razionale intero e quindi sole radici, la formula si semplifica in

$$(6) \qquad \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log R(\vartheta)\, d\theta = \log |f(0)| + \log r^n - \log |\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n| .}$$

Queste formule assai notevoli, che legano il valore medio di $\log|f(x)|$ sulla circonferenza r al valore di $f(x)$ nel centro e agli zeri ed ai poli di $f(x)$, ~~è~~ dovuta a J. L. Jensen (¹).
sono le

181. Se $f(x)$ ha carattere razionale intero entro un cerchio $\bar{r}$, ed è r variabile da 0 ad $\bar{r}$, la formula (5), o

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})|\, d\theta - \log f(0) = \log \frac{r^n}{|\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n|}$$

rappresenta una funzione reale, positiva, crescente di r e continua, sebbene il prodotto $|\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n|$ vari con discontinuità.

La restrizione che le α e β non siano reali positive, fatta allo scopo di operare il taglio fra ρ ed r, non è essenziale; basta modificare il taglio, assumendolo curvilineo in modo da schivare le α e β positive, perchè le precedenti conclusioni si mantengano inalterate.

(¹) *Acta Mathem.*, T. XXII, p. 359 (1899). La dimostrazione qui riportata è sostanzialmente quella data da Ed. Goursat, *Cours d'Analyse*, T. II, p. 127 (Paris, 1904).

Capitolo Nono

LE FUNZIONI INTERE

§ I. Preliminari.

132. Ad una serie di potenze intere positive della variabile x, di raggio di convergenza infinito o, ciò che è lo stesso, ad una funzione analitica (necessariamente uniforme) il cui campo di regolarità è costituito da tutto il piano-sfera ad eccezione di $x = \infty$, si dà il nome di *funzione intera* (n.° 50). La successione dei coefficienti c_ν di una serie di potenze $\Sigma c_\nu x_\nu$ convergente in tutto il piano, può dirsi *ologena*; condizione necessaria e sufficiente perchè la successione c_ν sia ologena è (n.° 36) che sia cioè perchè f sia intera

$$(1) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{c_\nu} = 0.$$

Alla classe delle funzioni intere, in ogni altro caso trascendenti, appartengono come caso particolarissimo le razionali intere o polinomi interi in x. Per una razionale intera $x = \infty$ è polo (n.° 72); per ogni altra funzione intera, è punto singolare essenziale isolato (n.° 42, j).

Ogni serie dedotta da una serie di raggio di convergenza infinito ha pure raggio di convergenza infinito; ognuna di queste è dunque espressione *genuina* (n.° 64) per la funzione intera.

Se in un punto α del campo di regolarità di una funzione, la successione dei valori delle sue derivate $f^{(n)}(\alpha)$ è Cond suff.

limitata, od anche se tende all'infinito d'ordine finito, o di ordine inferiore a quello di $(n!)^\alpha$ con $\alpha < 1$, la funzione è manifestamente intera.

Tutte le derivate di una funzione intera sono funzioni intere. perchè le derivate hanno lo stesso raggio delle primitive

133. *a*) Essendo r una variabile reale positiva, si suole indicare con $M(r)$ il massimo valore assoluto della funzione intera sulla circonferenza di centro $x=0$ e di raggio r. Risulta dal n.° 97 che $M(r)$ è anche il massimo valore assoluto della funzione per tutto il cerchio (r), e che la $M(r)$ è funzione crescente di r. perchè una funz. an. non può assumere il max. dentro il cerchio

È $\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty$, poichè diversamente la funzione si ridurrebbe a costante (n.° 51). perchè f rimarrebbe sempre < di un numero > 0.

Cond. suff. per i polinomi

b) Se si può determinare un numero positivo m tale che da un $r = \bar{r} > 1$ in poi, sia $M(r) < r^m$, la funzione si riduce a razionale intera. Infatti, sia p il primo numero intero superiore ad m; se la funzione data polinomio è $f(x) = \Sigma c_\nu x^\nu$, si consideri

$$(2) \qquad c_p + c_{p+1}x + c_{p+2}x^2 + \ldots = \frac{f(x)}{x^p} - \left(\frac{c_0}{x^p} + \frac{c_1}{x^{p-1}} + \ldots + \frac{c_{p-1}}{x}\right):$$

preso un numero positivo arbitrario ε, si può determinare un $r_1 > \bar{r}$ tale che per $|x| = r > r_1$ sia $\left|\frac{f(x)}{x^p}\right| \leq \frac{M(r)}{r^p} < \frac{\varepsilon}{2}$; si può pure determinare un $r_2 > \bar{r}$ tale che anche la parentesi del secondo membro di (2) sia in valore assoluto minore di $\frac{\varepsilon}{2}$. Perciò il primo membro di (2) è, per $|x|$ maggiore del più grande fra r_1 ed r_2, inferiore ad ε e si riduce pertanto (n.° 133, *a*) ad una costante C: ne viene che è

$$f(x) = c_0 + c_1x + \ldots c_{p-1}x^{p-1} + Cx^p,$$

cioè razionale intera.

Cond. nec. per le trasc.

Per ogni funzione trascendente intera, $M(r)$ tende dunque all'infinito di ordine infinito per $r \to \infty$.

funz. int. di funz. int. è funz. int.

134. Se $f(x) = \Sigma c_\nu x^\nu$, $g(x)$ sono due funzioni intere, è tale anche $f(g(x))$. Infatti, preso un cerchio (R) di raggio arbi-

trario, sia M il massimo valore assoluto di $g(x)$ sulla circonferenza; è, in tutto il cerchio, $|g(x)| < M$, e quindi la

$$f(g(x)) = \Sigma c_\nu g^\nu(x)$$

totalmente e quindi

Weierstrass

è, entro (R), uniformemente convergente e per conseguenza (n.° 57) analitica regolare in (R): e poichè R è arbitrariamente grande, $f(g(x))$ è funzione intera.

135. Gli elementi dell'Analisi forniscono gli esempî più semplici di funzioni intere trascendenti. Tali sono l'esponenziale e^x, e le sue combinazioni lineari, fra cui il seno e coseno iperbolici, il seno e coseno circolari, e le soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.

D'Alembert interpolazione

Mentre una funzione intera razionale (polinomio) si annulla necessariamente per certi valori finiti della variabile, e per qualche valore della variabile assume qualsiasi valore prefissato C — precisamente, se di grado m, ha m radici ed m valori pei quali è uguale a C — l'esempio dell'esponenziale, che non si annulla per alcun valore finito della variabile, mostra che la proprietà non si estende necessariamente alle trascendenti intere. Si vede immediatamente che se è $g(x)$ funzione intera, la $e^{g(x)}$, che pure è intera (n.° 134), non si annulla per alcun valore finito di x, cioè in nessun punto del proprio campo di regolarità. funz. di funz.

funzioni che non si annullano mai

Reciprocamente, ogni funzione intera $f(x)$ che non si annulla per alcun valore finito di x è della forma $e^{\gamma(x)}$, $\gamma(x)$ essendo pure funzione intera. Infatti, la

$$\frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

(anche f' è intera se tale è f (132))

quoziente di due funzioni intere in cui il divisore non si annulla, è regolare in tutto il piano ad eccezione di $x=\infty$ (n.° 71): essa è dunque una funzione intera $g(x)$, onde

$$f(x) = ce^{\int^x g(x)dx},$$

che dimostra l'asserto.

Da ciò si deduce immediatamente che se una funzione intera ammette m radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ (¹), la sua espressione sarà

(3) $$\boxed{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m)e^{g(x)},}$$ funzione intera con m radici

dove $g(x)$ è funzione intera, e reciprocamente. Riguardando la $g(x)$ come funzione intera *arbitraria*, la (3) rappresenta la classe delle funzioni intere aventi come radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ e queste soltanto; fra queste funzioni, si hanno le razionali intere se $g(x)$ si riduce a costante.

polinomi

Lo studio delle funzioni intere aventi infinite radici, di cui danno esempio le funzioni sen x, cos x, formerà oggetto del prossimo §.

Casorat per le funz. intere

136. *a*) Come si è detto, il punto $x=\infty$ è, per una funzione $f(x)$ intera trascendente, singolare essenziale isolato. Poichè $M(r)$ tende all'infinito per $r\to\infty$, si può assegnare nel piano x una successione di punti $c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ tendenti all'infinito e tali che tenda all'infinito la successione $f(c_1)$, $f(c_2), \ldots f(c_n), \ldots$ Se la $f(x)$ ha infinite radici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ il cui unico punto limite può essere solo $x=\infty$ (n.° 56, *a*), la successione $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots f(\alpha_n), \ldots$ formata di tutti elementi zero, ha per limite zero; se $f(x)$ ha un numero finito di radici, si ha (n.° precedente)

altrimenti zero volenti

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m)}e^{-g(x)},$$

e qui $e^{-g(x)}$ essendo intera, vi è una successione $c_1', c_2', \ldots c_n', \ldots$ tendente all'infinito, per cui $e^{-g(c_1')}, e^{-g(c_2')}, \ldots$ tende all'infinito, e quindi $f(c_1'), f(c_2'), \ldots$ tende a zero; analogamente se $f(x)$ è priva di radici. E poichè $f(x)-C$, C essendo un numero arbitrario, è pure funzione intera, esiste una successione c_1'', $c_2'', \ldots$ tendente all'infinito per la quale $f(c_1'')-C, f(c_2'')-C, \ldots$ tende a zero, cioè per la quale $f(c_1''), f(c_2''), \ldots$ tende a C.

Casorat per le funz. analitiche

b) Ricordiamo ora che se una funzione analitica $\varphi(x)$ è

(¹) Qui, ed anche in seguito, quando si scriverà una successione $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ di radici di una funzione, si intenderà — quando non si avverta esplicitamente il contrario — che ogni radice viene ripetuta tante volte nella successione quanto è il proprio ordine di moltiplicità.

(*) Cioè se α è un punto singolare essenziale, che non sia di acc. dell'ins. dei punti sing. essenziali, una funz. uniforme si avvicina indefinitamente a qualunque valore prefissato in qualunque intorno di α (Vivanti 190) vale a dire che nell'intorno di un punto singolare essenziale la funzione è completamente indeterminata.

regolare monodroma in un area T ad eccezione di un punto interno $x=\alpha$, singolare isolato, si può scrivere (n.° 101, *b*)

$$\varphi(x)=F\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)+\psi(x),$$

dove $\psi(x)$ è regolare in T ed $F\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$ è *quasi intera*, cioè, posto $z=\frac{1}{x-\alpha}$, $F(z)$ è funzione intera. Questa funzione caratterizza la singolarità di $\varphi(x)$ in α. In generale, la F è trascendente ed α è punto singolare essenziale; si conclude allora, da *a*), che ad ogni numero C finito od infinito, arbitrariamente scelto, corrisponde qualche successione $c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ di punti tendenti ad α, per la quale $\varphi(c_1), \varphi(c_2), \ldots \varphi(c_n), \ldots$ tende a C. (*)

Questa proposizione (¹) mette in evidenza la differenza sostanziale che passa fra il carattere di un punto singolare essenziale isolato di una funzione uniforme e quello di un polo. Infatti se p è un polo esiste un intorno in tutti i punti del quale $|f|>C$; se p è sing. ess. (non d'acc. di poli) in ogni intorno di p ci sono punti in cui $|f|>C$, ma anche punti in cui $f\to$ a qualunque.

Premesse queste ovvie osservazioni sulle funzioni intere, passiamo ora, nei successivi §§, a darne alcune proprietà meno evidenti; fra le molte, che numerose ed importanti ricerche (²) hanno fatto scoprire per questa classe di funzioni

V. Vivanti Teoria delle funz. an. e fun. int.

(¹) Dovuta al CASORATI (*Teorica delle funzioni di una variabile complessa*, pag. 438-440, Pavia, 1868) ma spesso attribuita a WEIERSTRASS.

(²) Un elenco esteso e diligente di lavori riguardanti le funzioni intere è unito ad una comunicazione di G. VIVANTI: *Sullo stato attuale della teoria delle funzioni intere trascendenti.* (Atti della Società italiana per il progresso delle Scienze, Firenze, 1909). Al lettore che voglia maggiormente approfondire alcuni punti più importanti nella teoria di queste funzioni, possiamo accennare, fra molte altre pubblicazioni: E. BOREL, *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, 1900); *Leçons sur la théorie de la croissance*, (Paris, 1910): A. PRINGSHEIM, *Elementare Theorie der ganzen trascendenten Funktionen von endlicher Ordnung* (Math. Ann., T. 58, 1904); O. BLUMENTHAL, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (Paris, 1910); Ed. LANDAU, *Ueber eine Verallgemeinerung des* PICARD'S*chen Satz* (Sitzungsberichte der Akad. der Wissensch., Berlin, 38, 1904); *Ueber den* PICARD'S*chen Satz* (Vierteljarschrift der Naturforsch. Gesellsch. in Zurich, 1906); *Sur quelques généralisations du théoreme de* M. PICARD (Ann. Éc. Norm. sup., S. III, T. 24, 1907); HADAMARD (J. de Math., S. IV, T. 8 e 9, 1892-93 e Bulletin Soc. Math. de France, T. 24, 1896), ecc.

(1) La grande analogia che esiste tra i polinomi e le funzioni intere trasc. suggerisce naturalmente l'idea di esaminare se sussistano anche per queste funzioni ~~le~~ proprietà fondamentali dei polinomi: esistenza di una radice, decomponibilità in fattori lineari, possibilità di costruire un polinomio date le sue radici. Il teor. fondam. dell'algebra non sussiste come risulta dalla funzione e^x sempre diversa da zero; quanto alle altre questioni ammettono risposta affermativa come risulta dal § II.

tanto ricca ed interessante nonostante la semplicità della sua definizione, dovremo però limitarci, per l'indole relativamente elementare delle presenti lezioni, alle più semplici e classiche.

V. l'impostazione in Vivanti pag 213-226

§ II. Il problema di Weierstrass.

(1)

137. Uno dei fatti più notevoli nella teoria delle funzioni razionali intere è, senza dubbio, la loro decomposizione in fattori lineari in corrispondenza delle radici: si presenta spontanea la domanda se alcunchè di simile si verifichi per le funzioni intere trascendenti, e precisamente si possono porre le due questioni fra loro connesse:

Estensione alle trascendenti della composizione dei polinomi

1°) « Data una funzione intera, sarà possibile di rappresentarla mediante un'espressione in forma di prodotto, « di cui ogni fattore si annulli per una ed una sola delle « radici della funzione data? ».

2°) « Data una successione di numeri aventi come unico « punto limite l'infinito, esistono funzioni intere che ammet- « tono come radici i numeri di codesta successione, e quale « ne è la forma più generale? ». interpolazione

A queste domande è stato completamente risposto dal Weierstrass in una celebre Memoria che ha fatto epoca nella storia dell'Analisi [1]; è però doveroso di ricordare, come ha già fatto il Dini [2], che da tempo il Betti [3] risolveva il problema in casi speciali giovandosi di un procedimento che è precisamente quello il quale, convenientemente generalizzato, ha servito al Weierstrass ad esaurire la questione.

Premesse

138. Ci conviene di premettere alcune osservazioni sui prodotti infiniti. È noto come la convergenza assoluta della serie Σb_n sia condizione necessaria e sufficiente per la con-

---

(1) *Zur Theorie der eindeutigen analyt. Functionen* (Abhandl. der Ak. der Wissensch., Berlin, 1876) riprodotta in Abhandl. aus der Functionen lehre, n. 1 e nel T. II, p. 77 delle Opere.

(2) In *Collectanea* per D. Chelini, p. 258 (Milano, 1881).

(3) *La teoria delle funzioni ellittiche* (Ann. di Mat., S. I, T. 3 e 4, 1859-60; ristampata in Opere, T. I, p. 228. V. specialmente pp. 241-247).

I due casi Dini diceva della Bett. in memoria Dini. Chelini
1°) le radici stanno su una retta e le distanze mutue hanno lim inf pos. (ad es. sen x) rango ≤ 1
2°) " " comunque, " " (cioè σx) rango ≤ 2

v. Severi An. n° 286

vergenza assoluta del prodotto infinito $\Pi(1+b_n)$ [1]. Risulta poi dal n.° 58 che se le $b_n(x)$ sono funzioni analitiche regolari in un'area connessa T, ed il prodotto infinito $\Pi[1+b_n(x)]$ è uniformemente convergente in T, esso rappresenta un ramo monodromo di funzione analitica regolare nell'area stessa.

Si può mostrare inoltre che se la serie $\Sigma|b_n(x)|$ è, in un dato campo, uniformemente convergente, lo è pure il prodotto infinito $\Pi[1+|b_n(x)|]$ e quindi, *a fortiori* [2], il prodotto $\Pi[1+b_n(x)]$.

Cond. suff. per la conv. unif.

Indichiamo all'uopo con β_n il modulo di $b_n(x)$. Per la convergenza uniforme di $\Sigma\beta_n$, si può supporre senza restrizione $\sum_1^m \beta_n < \frac{1}{2}$ per ogni m in tutto il campo: se ciò non fosse, basterebbe sopprimere un numero finito fisso di termini in principio della serie. Poichè si ha

$$\prod_1^m (1+\beta_n) < \frac{1}{1-(\beta_1+\beta_2+\dots\beta_m)},$$

ne viene che per ogni m, è $\prod_1^m (1+\beta_n) < 2$. Ma è noto come, posto

$$\gamma_0 = 1,\quad \gamma_1 = \beta_1,\quad \gamma_2 = \beta_2(\gamma_0+\gamma_1),\dots\ \gamma_n = \beta_n(\gamma_0+\gamma_1+\dots\ \gamma_{n-1})$$

la serie $\Sigma\gamma_n$ equivalga al prodotto infinito $\Pi(1+\beta_n)$, nel senso che la somma parziale m^{sima} della serie è uguale al prodotto parziale m^{simo} del prodotto infinito [3]; la convergenza uniforme di questo sarà dunque provata se si può rendere, in tutto il campo, e qualunque sia r,

$$\sum_0^{m+r}\gamma_n - \sum_0^m \gamma_n < \sigma$$

per un σ prefissato ed un corrispondente m. Ora

$$\sum_0^{m+r}\gamma_n - \sum_0^m \gamma_n = (1+\beta_1)(1+\beta_2)\dots(1+\beta_m)[(1+\beta_{m+1})\dots(1+\beta_{m+r})-1];$$

e poichè, preso $\varepsilon < \frac{\sigma}{2+\sigma}$, si può determinare m in modo che sia

$$\beta_{m+1}+\beta_{m+2}+\dots\beta_{m+r} < \varepsilon,\quad \text{onde}\quad (1+\beta_{m+1})\dots(1+\beta_{m+r}) < \frac{1}{1-\varepsilon},$$

---

(1) *Anal. algebr.*, n.i 180, 183.

(2) Ibid., n.° 183.

(3) Ibid., n.° 181.

ne verrà, per essere $\prod_1^m (1+\beta_n) < 2$,

$$\sum_0^{m+r} \gamma_n - \sum_0^m \gamma_n < \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} < \sigma \; (^1).$$

139. Studiamo ora, col Borel [2], l'espressione

$$(1) \qquad E_m(x) = (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}+\dots\frac{x^m}{m}}. \quad = e^{\log(1-x)+(x+\dots+\frac{x^m}{m})}$$

$f(g(x)) = \sum c_\nu g^\nu(x)$

Essa si può sviluppare (n.° 134) nella forma

$$(2) \qquad E_m(x) = (1-x)(1 + A_1x + A_2x^2 + \dots),$$

convergente in tutto il piano, ed i suoi coefficienti $A_1, A_2, \dots$ sono positivi; inoltre, poichè per m tendente all'infinito, lo sviluppo $\Sigma A_n x^n$ si riduce (limitatamente ad $|x| < 1$) a quello di $\frac{1}{1-x}\left(= e^{-\log(1-x)}\right)$, così gli A_n, evidentemente crescenti con m, tendono all'unità; essi dunque sono minori d'uno. $A_n < 1$

della serie geomet.

cioè ai coeff. della serie geom.

D'altra parte, per $|x| < 1$, la (1) dà

$$E_m(x) = (1-x)e^{\log\frac{1}{1-x} - \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{m+2} - \dots} = e^{-\frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{m+2} - \dots};$$

questa, per $|x| < k < 1$, può svilupparsi nelle serie uniformemente convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{m+2}}{m+2} + \dots\right)^n$$

che, per il teorema del n.° 57, può trasformarsi nella serie di potenze

$$(3) \qquad 1 + B_{m+1}x^{m+1} + B_{m+2}x^{m+2}$$

la quale però, perchè rappresenta la $E_m(x)$, converge in tutto il piano.

---

[1] V. Rendic. dell'Accad. delle Scienze di Bologna, 22 Aprile 1883.

[2] *Leçons sur les fonctions entières*, p. 11.

E poichè, per la (2), è

$$E_m(x) = 1 + (A_1 - 1)x + (A_2 - A_1)x^2 + \dots,$$

ne viene

$$B_n = A_n - A_{n-1},$$

cioè le B_n, differenze di due numeri positivi minori d'uno, sono minori d'uno in valore assoluto. Si ha dunque da (3): $|B_n| < 1$

$$E_m(x) = 1 + x^{m+1}\varphi(x)$$

dove è, per $|x| < r < 1$,

$$|\varphi(x)| < \frac{1}{1-r}.$$

$0 < r < 1$

Pertanto: « la $E_m(x)$ è tale che, preso r positivo e minore « d'uno, essa verifica, per $|x| < r$, la disuguaglianza

lemma di Borel

$$(4) \qquad |E_m(x)| < 1 + \lambda r^{m+1}, \qquad 0 < |x| < r < 1$$

« dove λ è un numero positivo determinato: $\lambda = 1 : (1-r)$ ».

Questa proposizione verrà detta *lemma di* Borel.

140. Ciò posto, possiamo passare alla risoluzione della questione seconda enunciata al n.° 137, e che preciseremo nei seguenti termini:

Soluzione del problema di Weierstrass

« Sia data la successione di numeri

$$(a) \qquad a_1, \quad a_2, \dots \quad a_n, \dots$$

« tale che sia

$$(5) \qquad |a_1| > 0, \quad |a_{n+1}| \geq |a_n|, \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \infty;$$

« si chiede di costruire una funzione intera che ammetta « come radici tutti e soli i numeri della successione (a) ».

La condizione $\lim a_n = \infty$ è imposta dal fatto che un punto limite delle radici non potendo essere punto regolare, esso può, nel nostro problema, essere solo all'infinito: onde la possibilità di ordinare gli a_n in modo da soddisfare alla seconda delle (5).

Non è escluso il caso di radici multiple: alcune delle a_n — in numero necessariamente finito — potranno cioè essere fra loro uguali.

a meno che F non sia identic. 0

Anzitutto, è possibile di subordinare alla successione (a) una successione di numeri interi

$$(m) \qquad m_1, \quad m_2, \ldots \quad m_n, \ldots$$

tale che la serie $\Sigma a_n^{-m_n}$ risulti assolutamente convergente. Basta fare al più $m_n = n - 1$; infatti, nella serie a termini positivi $\Sigma |a_n|^{1-n}$, il rapporto fra un termine ed il precedente è

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^{n-1} \cdot \frac{1}{|a_{n+1}|},$$

criterio del rapporto

dove il primo fattore è non maggiore d'uno, mentre il secondo tende a zero. Stabilita la successione (m), risulta pure, dal rapporto di un termine al precedente, la convergenza assoluta per ogni x di

$$(6) \qquad \Sigma\left(\frac{x}{a_n}\right)^{m_n}.$$

solus.

Riprendendo ora la E_m del n.° 139, vi si sostituisca m con $m_n - 1$, x con $\frac{x}{a_n}$, e si indichi con E_n la funzione così ottenuta: è

$E_n(x) = E_{m_n-1}\left(\frac{x}{a_n}\right)$

$$(7) \qquad E_n(x) = \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{x^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{x^{m_n-1}}{(m_n-1)a_n^{m_n-1}}}.$$

Il prodotto infinito

$$(8) \qquad \boxed{F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n(x)}$$

il fattore esponenziale dà la convergenza a Π

dà la soluzione del problema proposto. Si prendano infatti due numeri positivi, $q < 1$ ed R arbitrariamente grande; indi si determini p in modo che sia

(1) F è intera

$0 < q < 1$

$0 < R$

$$|a_{p+1}| > qR, \quad \frac{R}{|\ |} > \frac{1}{q} \quad \text{ossia} < q$$

e si ponga

$$P(x) = \prod_{n=1}^{p} E_n(x), \quad Q(x) = \prod_{n=p+1}^{\infty} E_n(x). \qquad F = P.Q$$

Per essere nella $Q(x)$, per x preso nel cerchio (R),

$|x| < R$

per ip. $|a_n| \geq |a_{p+1}|$ $\quad \left|\frac{x}{a_n}\right| < \frac{R}{|a_{p+1}|} < q, < 1$

si ha, per il lemma di Borel

138

$$|E_n(x)| < 1 + \lambda \left|\frac{x}{a_n}\right|^{m_n} \quad \left(n = p+1,\ p+2, \ldots;\ \lambda = \frac{1}{1-q}\right)$$

$m_n = p,\ p+1, \ldots$

onde, per la convergenza della (6), il prodotto infinito $Q(x)$ converge uniformemente in (R) e vi rappresenta una funzione analitica regolare (n.° 138). Il prodotto $P(x)$, di p funzioni intere, è una funzione intera e perciò, per essere R arbitrariamente grande, la $F(x)$ è una funzione intera: e questa, per la sua forma stessa, si annulla per $x = a_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ e non può annullarsi per alcun altro valore di x. Il problema proposto è dunque risoluto.

[illegible] ; lemma ... da una Π converge ...

141. Si è escluso che nella successione (a) figuri lo zero. Se si vuole che la funzione intera da costruire si annulli anche per $x = 0$, e dell'ordine s, basterà moltiplicare per x^s l'espressione costruita.

La $x^s F(x)$ non è però la funzione intera più generale che sia nulla nei punti di (a) e di ordine s per $x = 0$ e che non abbia altre radici: ogni funzione intera il cui rapporto a questa sia una funzione intera non mai nulla, ammette le medesime radici, e quelle soltanto. E poichè si conosce dal n.° 135 la forma più generale di una funzione intera non mai nulla, si ha che « la funzione intera più generale, nulla « nei punti di (a) ed avente inoltre nel solo punto $x = 0$ una « radice (di ordine s) è data dall'espressione

$\frac{G}{x^s F} = e^{\gamma}$

$G = e^{\gamma} x^s F$

Soluzione completa

$F = \Pi E_n$

$$(9) \qquad G(x) = e^{\gamma(x)} x^s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n} + \frac{x^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{x^{m_n-1}}{(m_n-1)a_n^{m_n-1}}},$$

« dove $\gamma(x)$ è una funzione intera arbitraria ». (1)

La prima delle questioni poste al n.° 137 trova essa pure, in quanto precede, la sua risposta. Se infatti, data una funzione intera $f(x)$, se ne possono determinare le radici, il procedimento che ha servito a stabilire la

(1) Qual applicazioni del Teorema di Weierstrass si può ottenere lo sviluppo in prodotto infinito di sen x, e la estensione della funzione Γx. (V. pp. 140-1)

formula (9) dà il modo di decomporre la $f(x)$ in un prodotto di fattori ognuno dei quali si annulla per una, ed una sola, di quelle radici. Vi è però da osservare che nell'applicazione del metodo ai singoli casi, presenterà difficoltà l'assegnazione della funzione intera $\gamma(x)$, nella cui determinazione vi è una arbitrarietà collegata a quella, evidente, che presenta la scelta della successione (m).

Ad ognuno dei fattori che figurano sotto il segno Π nella (9) è stato dato dal WEIERSTRASS il nome di *fattore primario*; ogni fattore primario contiene, insieme al fattore lineare $1-\frac{x}{a_n}$ che si annulla nel punto a_n, un fattore esponenziale il cui ufficio, da quanto si è visto, è quello di conferire la convergenza al prodotto infinito.

n è fattore primario

§ III. Funzioni intere di genere finito. — Relazione fra i loro caratteri principali.

142. Fra i caratteri maggiormente interessanti delle funzioni intere, caratteri fra loro dipendenti e che hanno dato luogo a numerose ricerche, conviene enumerare:

1°) il modo, più o meno rapido, di tendere all'infinito delle radici della funzione; (indice λ, o esponente di convergenza)

2°) il modo, più o meno rapido, di tendere all'infinito del massimo modulo $M(r)$ della funzione sulla circonferenza $|x|=r$; (indice ν, ordre apparent (Borel), ordnung (Pringsheim) typus)

3°) il modo, più o meno rapido, di tendere a zero degli elementi del sistema ologeneo costituito dai coefficienti. (indice μ, ordre ordre)

Non potendo entrare qui nei particolari delle teorie riferentisi a questi argomenti, ci dovremo limitare ai punti più essenziali e più elementari: riferendoci inoltre ad una classe di funzioni intere, quelle *di genere finito*, che verranno ora definite, e che vanno riguardate come le più semplici dopo le razionali (1).

143. Come si è detto al n.° 140, esiste sempre per la successione (a) delle radici di una funzione intera una successione di numeri interi m_n tale che la serie $\sum\frac{1}{a_n{}^{m_n}}$ risulti assolutamente convergente. Esistono ora, in particolare, succes-

(1) Per i riferimenti bibliografici, v. la nota a piè di pagina 161.

Per tale questione consultare Vivanti pag 321-372

[In un polinomio. $\lambda=0, \mu=\infty, \nu=0$ (V. § . 179)
Per e^γ, se γ è pol. di grado n, $\nu=n$; per $E_n(x)$, $\nu=p$ (rango)

sioni (a) per le quali i numeri m_n si possono prendere tutti uguali; se p è un intero tale che la serie

$$(1)\qquad \sum\frac{1}{|a_n|^u}$$

Def di rango p

dove u è una variabile reale, sia convergente per $u=p+1$ e divergente per $u=p$, la funzione si dirà di *rango finito*, e p sarà il *rango* della funzione intera avente le (a) come radici. la funz. si dice di 1ª classe

La funzione è di *rango infinito* se non esiste un tale intero p. Per le funzioni di rango p, p è il grado dei polinomi che figurano in esponente nei fattori primarî della (9) del n.° 141, che viene allora a scriversi:

$$(2)\qquad G(x)=e^{\gamma(x)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\frac{x}{a_n}+\frac{x^2}{2a_n{}^2}+\dots+\frac{x^p}{pa_n{}^p}}.$$

Ad esempio, se la successione (a) coincide con quella dei numeri naturali, si possono fare tutte le m_n uguali a 2; il rango di una funzione intera che ammette come radici tutti e soli i numeri naturali è dunque $p=1$; è pure 1 il rango di ogni funzione intera le cui radici sono in progressione aritmetica. $\frac{1}{n+1}$ serie armonica $\frac{1}{n^2}$

144. Se (a) è la successione delle radici di una funzione di rango p, la serie (1), convergente per $u=p+1$, è convergente per ogni $u>p+1$; essendo divergente per $u=p$, è divergente per ogni u minore; per il principio di continuità, esisterà dunque un numero determinato μ, con $p\leq\mu\leq p+1$, e tale che la (1) converge per ogni $u>\mu$, e diverge per ogni $u<\mu$. A questo numero determinato μ è stato dato il nome di *esponente di convergenza* (1) della successione (a); in quanto al numero μ stesso, esso può, a seconda dei casi, rendere la serie (1) convergente o divergente.

esponente di convergenza μ
$p\leq\mu\leq p+1$

Così, se è $a_n=n$, l'esponente di convergenza è $\mu=1$ e rende la serie divergente; per $a_n=\sqrt{n}\log n$, l'esponente di convergenza è $\mu=2$ e rende la serie convergente.

(1) Il numero μ è detto *Grenzexponent* nella importante Memoria di A. PRINGSHEIM citata nella nota al n.° 136.

Ordre réel (Borel) [indice λ secondo il Vivanti]
Konvergenzexponent (v. Schaper)

Per una funzione intera semplice o normale $\lambda \geq \nu$ (V. 337) 343

$p < \mu$

Il rango è l'intero immediatamente inferiore all'esponente di convergenza se questo non è intero, o se, essendo intero, rende la (1) convergente; il rango coincide coll'esponente di convergenza se questo, essendo intero, rende la serie (1) divergente.

polinomio

145. Nella funzione di rango p espressa dalla (2), può darsi che anche la $\gamma(x)$ sia una funzione razionale intera. In tal caso, se q è il grado del polinomio $\gamma(x)$, si dice che il maggiore fra i due numeri p e q dà il *genere* della funzione intera; sono *di genere infinito* le funzioni intere di rango infinito e quelle di rango finito per le quali $\gamma(x)$ è trascendente (1). Se $q \leq p$, G si dice normale o altezza ($H = h$)

Nei n.i seguenti si tratterà esclusivamente di funzioni di genere finito.

Se $\gamma = \text{cost}$, G si dice semplice o primitiva o canonica

Come esempî, la funzione e^x è di genere 1; la funzione $\Pi\left(1-\frac{x}{n^2}\right)$, le cui radici sono 1, 4, 9, ..., è di rango e di genere zero; $e^{x^2}\Pi\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$ è di rango uno e genere due.

Poincaré

genere e ν

146. Fra il genere di una funzione intera ed il modo di tendere all'infinito della rispettiva funzione $M(r)$ intercedono relazioni che hanno formato oggetto di numerose ricerche. Dovendoci restringere ai risultati più semplici, ci limiteremo a dare, in proposito, una notevole proposizione dovuta al POINCARÉ (2).

a) Essendo $E(x)$ un fattore primario di genere p

$$E(x) = (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^p}{p}} = e^{\log(1-x)} e^{\sum_1^p \frac{x^k}{k}} = e^{-\sum_1^\infty \frac{x^k}{k} + \sum_1^p \frac{x^k}{k}}$$

(1) Il concetto di *genere* di una funzione intera è dovuto ad E. LAGUERRE. (*Œuvres*, T. I, p. 72, Paris, 1898).

(2) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. 95, 1882; Bulletin de la Soc. Math. de France, T. 11, 1883. Un'importante proposizione, dovuta all'HADAMARD (lavoro citato nella nota al n.° 136) può riguardarsi come la reciproca di questo teorema di POINCARÉ.

e limitando la variabilità di x ai valori positivi r, si può determinare un R tale che, per $r > R$ sia

$r > R$

$$|1-r||e^r||e^{\frac{r^2}{2}}|\dots|e^{\frac{r^p}{p}}| = |E(r)| < e^{r^{p+1}},$$

poichè i singoli fattori di $E(r)$ sono infiniti di ordine inferiore ad $e^{r^{p+1}}$. D'altra parte, per i valori di r compresi fra 0 ed $\frac{1}{2}$ è

$0 < r < \frac{1}{2}$

$$E(r) = e^{-\frac{r^{p+1}}{p+1}-\frac{r^{p+2}}{p+2}-\dots} < 1 < e^{r^{p+1}}.$$

Infine, per $\frac{1}{2} \leq r \leq R$, sia $H > 1$ il massimo valore assoluto di $E(r)$; si può determinare un h tale che sia $\log H < hr^{p+1}$, onde

$\frac{1}{2} < r < R$

$$|E(r)| \leq H < e^{hr^{p+1}}.$$

Preso k uguale al maggiore fra i due numeri 1 e h, si ha dunque per ogni valore di x, posto $|x| = r$:

(3) $$|E(r)| < e^{kr^{p+1}}.$$

b) Si riprenda ora la (2), in cui $\gamma(x)$ è supposto di grado non superiore a p, e si scriva

$$G(x) = e^{\gamma(x)}x^s \prod_1^\infty E_n(x) = P(x)Q(x),$$

dove è posto

$$P(x) = e^{\gamma(x)}x^s\prod_1^m E_n(x), \qquad Q(x) = \prod_{m+1}^\infty E_n(x) \leq e^{\sum k \left|\frac{x}{a_n}\right|}$$

qui m è determinato in modo che, essendo ε scelto arbitrariamente piccolo, sia

(4) $$\sum_{m+1}^\infty \frac{1}{|a_n|^{p+1}} < \varepsilon.$$

Per quanto è dimostrato ad *a*), esiste un numero positivo k tale che, per ogni x, è

$$|E_n(x)| < e^{k\left|\frac{x}{a_n}\right|^{p+1}}, \qquad r = \left|\frac{x}{a_n}\right|$$

onde, per la (4), viene

$$(5) \qquad | Q(x) | < e^{h\varepsilon r^{p+1}}.$$

D'altra parte, poichè $P(x)$ contiene un numero finito di fattori esponenziali dell'ordine di e^{r^p} al più, si può, essendo arbitrariamente piccolo, determinare un R tale che per $r > R$ sia

$$(6) \qquad | P(x) | < e^{\varepsilon' r^{p+1}}.$$

Se f è di genere p.

Dalla (5) e (6) risulta che: « essendo σ un numero positivo « arbitrariamente piccolo, esiste un R tale che per ogni $r > R$ è

$$(7) \qquad M(r) < e^{\sigma r^{p+1}} ». \qquad \log M(r) - r^{p+1} < \varepsilon$$

In questa disuguaglianza consiste il teorema di Poincaré che volevamo stabilire [1]; esso dà un valore maggiorante per una funzione intera di genere p.

Per una funzione di genere zero, l'ordine con cui il suo valore assoluto può tendere all'infinito è inferiore all'ordine dell'esponenziale, poichè per $p = 0$ la (7) dà $M(r) < e^{\sigma r}$, σ piccolo a piacere per r abbastanza grande.

È molto usata da autori moderni la notazione $f(x) = 0(\varphi(x))$ per indicare che il rapporto $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tende a zero al tendere di x all'infinito. Adoperando questa notazione, il teorema di Poincaré si può esprimere con

$$\boxed{\log M(r) = 0(r^{p+1})} \quad \equiv \quad \lim \frac{\log M(r)}{r^{p+1}} = 0$$

se $M(r)$ è relativa ad una funzione intera di genere p.

Poincaré ... ere a μ

147. Un secondo teorema, pure stabilito dal Poincaré nei lavori citati, mette in relazione il genere di $G(x)$ col modo di tendere a zero della successione dei coefficienti dello

[1] Questa disuguaglianza si riferisce al concetto di *ordine* di una funzione intera, concetto discusso dal Pringsheim nella memoria citata. Dicendo, con questo Autore, che $G(x)$ è di ordine ρ se è, per $r > R$, $M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$ mentre è, per infiniti valori di r, $M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$, ε arbitrariamente piccolo, abbiamo, dal teorema di Poincaré, che una funzione intera di genere p è di ordine non superiore a $p + 1$.

sviluppo in serie $\Sigma c_\nu x^\nu$ di $G(x)$ [1]. Consideriamo, all'uopo, l'espressione, dove h è un numero positivo e t una variabile reale: $h > 0$, t reale

$$(8) \qquad F(x) = (p+1)\int_0^\infty e^{-t^{p+1}} G(xt) t^h dt.$$

a) Questa espressione rappresenta una funzione intera di x.

$M(r) < e^{\varepsilon r^{p+1}}$ e quindi

Ciò si riconosce osservando che, per essere $G(x)$ di genere p, l'integrale (8) converge uniformemente in ogni regione finita del piano x in virtù della (7): ne viene [2] che esso è una funzione continua di x e che se si integra rispetto ad x lungo una linea chiusa, l'integrazione è invertibile [3]; ma l'integrale di $G(xt)$ esteso a quella linea essendo zero per il teorema di Cauchy, sarà zero l'integrale esteso ad $F(x)$ e quindi $F(x)$ sarà funzione analitica regolare in quella regione, per il teorema di Morera (n.° 94). Ciò valendo in tutto il piano x, la $F(x)$ è funzione intera.

Come tale, essa è sviluppabile in serie di potenze di x, ed essendo $G(xt) = \Sigma c_\nu x^\nu t^\nu$, viene $F(x) = \Sigma C_\nu x^\nu$, con

$$(9) \qquad \boxed{C_\nu = (p+1) c_\nu \int_0^\infty e^{-t^{p+1}} t^{\nu+h} dt.}$$

A giustificare l'integrazione termine a termine fatta nella (8), si osservi che è

$$F(x) = \sum_0^\infty C_\nu x^\nu = (p+1)\int_0^\mu e^{-t^{p+1}} G(xt) t^h dt + (p+1)\int_\mu^\infty e^{-t^{p+1}} G(xt) t^h dt.$$

Preso x in un cerchio (ρ) di raggio arbitrario, l'ultimo integrale, che diremo $\eta(x)$, è per ogni tale x e in virtù della (7), inferiore in valore assoluto ad un numero arbitrariamente scelto ε, per μ maggiore di un μ convenien-

[1] La dimostrazione che riportiamo di questo secondo teorema di Poincaré è quella data dal Borel (op. cit., p. 53) completata però in qualche particolare.

[2] La dimostrazione della continuità è quella stessa data nelle lezioni di Calcolo, n.° 443, che si estende senza modificazione al caso del parametro complesso.

[3] Anche per ciò vale senz'altro la dimostrazione data nelle lezioni di Calcolo, n.° 445.

temente preso. E poichè nel primo integrale è lecita l'integrazione termine a termine, sarà

$$\sum_{0}^{\infty}\left(C_\nu-(p+1)\int_0^\mu e^{-t^{p+1}}C_\nu t^{\nu+h}dt\right)x^n=\eta(x),\quad |\eta(x)|<\varepsilon,$$

e quindi (n.° 44)

$$\left|C_\nu-(p+1)\int_0^\mu e^{-t^{p+1}}C_\nu t^{\nu+h}dt\right|<\frac{\varepsilon}{\rho^\nu};$$

pertanto, essendo μ arbitrariamente grande ed esistendo il limite degli integrali per $\mu=\infty$, si conclude la validità della (9).

b) Indichiamo ora con u una variabile reale, e con $\Gamma(u)$ una funzione di u, che sia definita per tutti i valori positivi di u dall'integrale definito

$$\boxed{\Gamma(u)=\int_0^\infty e^{-t}t^{u-1}dt\ \text{(1)}}\qquad \text{Def.}$$

Essa è continua, derivabile, uguale ad 1 per $u=1$, e si verifica subito che per $u=m$ intero positivo è

$$\Gamma(m)=m!\qquad \Gamma(1)=1$$

Inoltre, si riconosce facilmente che essa è crescente per u abbastanza grande, per esempio per $u>4$ (2).

Infatti, la sua derivata è

$$\Gamma'(u)=\int_0^\infty e^{-t}\log t\cdot t^{u-1}dt=\int_0^1 e^{-t}\log t\cdot t^{u-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}\log t\cdot t^{u-1}dt;$$

$< \left|\int_0^1 \log t\, dt\right|$ $\quad > \int_e^\infty e^{-t}t^3dt$

il primo integrale dell'ultimo membro è negativo, ma in valore assoluto minore di $\left|\int_0^1\log t\,dt\right|=1$; il secondo è positivo, e maggiore di

$$\int_e^\infty e^{-t}\log t\cdot t^3dt,$$

(1) Lo studio di questa funzione (funzione *Gamma*) verrà svolto sistematicamente più avanti (Cap. XVIII).

(2) Si potrebbe dimostrare che la $\Gamma(u)$ è crescente a partire da un valore di u assai minore, e precisamente a partire da 1, 4616....

ed a fortiori di

$$\int_e^\infty e^{-t}t^3dt$$

che con integrazioni per parti, si trova essere maggiore di

$$e^{-e}(e^3+3e^2+3e-6)>1;$$

la derivata è quindi positiva, e perciò la $\Gamma(u)$ è crescente.

Ponendo $t^{p+1}=z$, viene da (9)

$dz=(p+1)dt$

$$C_\nu=c_\nu\int_0^\infty e^{-z}z^{\frac{\nu+h+1}{p+1}-1}dz=c_\nu\Gamma\left(\frac{\nu+h+1}{p+1}\right),$$

(F intera)

e poichè C_ν è ologene, si conclude (n.° 36)

$$(10)\qquad \lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{C_\nu}=\lim_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{c_\nu\Gamma\left(\frac{\nu+h+1}{p+1}\right)}=0.$$

Si faccia ora $h=2p+1$; sia poi $m(p+1)$ il primo multiplo di $p+1$ non inferiore a ν, per modo che è

$$(m-1)(p+1)<\nu\le(p+1)m;$$

viene, per essere $\Gamma(u)$ crescente per u abbastanza grande:

$$\Gamma\left(\frac{\nu+h+1}{p+1}\right)=\Gamma\left(\frac{\nu+p+1}{p+1}+1\right)>$$
$$>\Gamma\left(\frac{p+1+(m-1)(p+1)}{p+1}+1\right)=\Gamma(m+1)=m!$$

onde, per la (10):

$$(11)\qquad \lim_{\nu=\infty}\sqrt[\nu]{m!\,c_\nu}=0,\quad\text{e quindi anche}\quad \lim_{\nu=\infty}(p+1)^\nu m!\,c_\nu=0.$$

Osserviamo ora che il fattoriale $\nu!$ dà

$$\nu!\le[m(p+1)]!=[1\cdot2\ldots(p+1)][(p+2)\ldots2(p+1)]\ldots$$
$$\ldots[((p+1)(m-1)+1)\ldots m(p+1)]$$

e quindi, a fortiori, sostituendo ai fattori di ogni parentesi il maggiore, cioè l'ultimo:

$$\nu! < (p+1)^{p+1}[2(p+1)]^{p+1}\ldots[m(p+1)]^{p+1} =$$
$$= (m!)^{p+1}(p+1)^{m(p+1)} < (m!)^{p+1}(p+1)^{\nu(p+1)},$$

ossia

$$(p+1)^\nu m! > (\nu!)^{\frac{1}{p+1}}.$$

E poichè, per la (11), $(p+1)^\nu m!\, c_\nu$ tende a zero, sarà a fortiori

(12) $$\lim_{\nu=\infty} (\nu!)^{\frac{1}{p+1}} c_\nu = 0.$$

Questa relazione costituisce il secondo teorema di POINCARÉ, il quale si può enunciare: « Per una funzione di genere p, ε essendo arbitrariamente piccolo, esiste un $\bar\nu$ tale « che si ha

con l'ipotesi supplementare che G sia sem- tice v. V. §. 184

$$|c_\nu| < \frac{\varepsilon}{(\nu!)^{\frac{1}{p+1}}} \qquad \lim_{\nu\to\infty} |c_\nu|\,(\nu!)^{\frac{1}{p+1}} = 0$$

« per ogni indice ν superiore a $\bar\nu$ ».

In particolare, per una funzione di genere zero $p=0$ deve essere $|c_\nu| < \frac{\varepsilon}{\nu!}$; i suoi coefficienti tendono dunque a zero più $\lim |c_\nu|\,\nu! = 0$ rapidamente delle inverse dei fattoriali.

Usando la notazione indicata alla fine del n.° 146, la (12) si può scrivere

$$c_\nu = 0\left(\frac{1}{\sqrt[p+1]{\nu!}}\right).$$

§ IV. Derivata logaritmica di una funzione intera.

148. Riprendendo il fattore primario

(1) $$E(x) = (1-x)e^{x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^p}{p}},$$

si supponga $|x| < q < 1$, e si prenda il logaritmo, assumen-

$$\log E(x) = \log(1-x) + \sum_1^p \frac{x^k}{k} = -\sum_1^\infty \frac{x^k}{k} + \sum_1^p \frac{x^k}{k} = -\sum_{p+1}^\infty \frac{x^k}{k}$$

done quella determinazione per la quale è $\log E(x) = 0$ per $x = 0$. Si avrà

(2) $$\log E(x) = -\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{x^{p+2}}{p+2} - \ldots,$$

onde

(3) $$\frac{E'(x)}{E(x)} = -\frac{x^p}{1-x},$$

$$\frac{d}{dx}\log E(x) = \frac{d}{dx}\left(-\sum_{p+1}^\infty \frac{x^k}{k}\right) = -\sum_{p+1}^\infty x^{k-1} = -\frac{x^p}{1-x}$$

serie geom. $|x|<q<1$

mentre dalla (2) risulta

(4) $$|\log E(x)| < \frac{q^{p+1}}{(p+1)(1-q)}.$$

Da ciò, essendo G e γ funzioni intere e

(5) $$G(x) = e^{\gamma(x)}x^s\prod_1^\infty E_n(x), \quad E_n(x) = \left(1-\frac{x}{a_n}\right)e^{\frac{x}{a_n}+\frac{x^2}{2a_n^2}+\ldots+\frac{x^{p_n}}{p_n a_n^{p_n}}},$$

risulta che $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \log E_n(x)$ è uniformemente convergente entro il cerchio $|x| < |a_{m+1}|\, q$ [1], e rappresenta quindi (n.° 57) Weierstrass una funzione analitica regolare in quel cerchio: lo stesso sarà, ad eccezione dei punti 0, a_1, $a_2, \ldots a_n$, della funzione

$$\log G(x) = \gamma(x) + s\log x + \sum_{n=1}^\infty \log E_n(x)$$

che sarà pertanto (n.° 61) derivabile termine a termine. Tenuto conto della (3), si ottiene così

(6) $$\boxed{\frac{G'(x)}{G(x)} = \gamma'(x) + \frac{s}{x} + \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{p_n}}{a_n^{p_n}(x-a_n)},}$$

espressione della derivata logaritmica di una funzione intera.

Come si vede, essa è funzione analitica uniforme, regolare per ogni valore finito di x ad eccezione di $x=0$, a_1, $a_2, \ldots$, nei quali punti ammette un polo: il punto $x=\infty$, punto limite dei poli, è punto singolare essenziale (non isolato). Si è chiamata funzione *meromorfa* una funzione analitica uniforme avente soli poli come punti singolari a distanza finita: generalmente, una successione di poli aventi per limite $x=\infty$.

[1] Cfr. la dimostrazione data al n.° 140.

« La derivata logaritmica di una funzione intera è dunque « una funzione meromorfa ».

Inversamente, ogni espressione analitica avente la forma del secondo membro della (6), dove le a_n sono tali che la $\sum \frac{1}{|a_n|^{p_n}}$ risulti convergente, è la derivata logaritmica di una funzione intera: ciò si dimostra senza difficoltà scrivendo la funzione intera nella forma (5), valida per il teorema del n.° 140, e prendendone la derivata logaritmica.

Teorema di Laguerre

149. « Se una funzione intera $G(x)$ è tale che, per l'in- « tero p,

(7) $$\lim_{x\to\infty} \frac{G'(x)}{x^p G(x)} = 0$$

« tenda a zero uniformemente per $x \to \infty$, la $G(x)$ è di ge- « nere p [1] ».

Si sa che la (7) tende uniformemente a zero per $x \to \infty$ quando, preso ε piccolo a piacere, si può determinare $\bar{R}$ tale che per $|x| > \bar{R}$, la (7) sia in valore assoluto inferiore ad ε. Ora, a dimostrare la proposizione enunciata, si descriva una circonferenza di centro zero e di raggio $R > \bar{R}$ e tale da non passare per alcuno dei punti a_n radici di $G(x)$; siano a_1, $a_2, \dots a_m$ i punti radici interni ad (R). Preso x interno alla circonferenza $\left(\frac{1}{2}R\right)$ e distinto dai punti 0, a_1, $a_2, \dots a_m$, si circondino questi punti con circonferenze di raggio arbitrariamente piccolo ed in ogni caso tale che le circonferenze stesse non si intersechino: applicando allora il teorema di CAUCHY, indicando con (0) la circonferenza d'integrazione di centro o e di raggio arbitrariamente piccolo, ed analogamente con (x), (a_n) quelle relative ad x e ad a_n, tutte percorse nel senso delle rotazioni positive, si avrà:

(8) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{(R)} \frac{G'(t)\,dt}{t^p G(t)(t-x)} = \\ = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(0)} + \int_{(x)} + \sum_{n=1}^{m}\int_{(a_n)}\right\}\left(\frac{G'(t)\,dt}{t^p G(t)(t-x)}\right).$$

[1] Proposizione dovuta al LAGUERRE, loc. cit.. Per p si assume, bene inteso, il minimo intero per il quale l'espressa condizione è soddisfatta.

formula integrale di Cauchy

Per l'ipotesi, e per essere $|x| < \frac{1}{2}R$, il primo membro è, in valore assoluto, inferiore a 2ε. Il secondo integrale del secondo membro è (n.° 92) $\frac{G'(x)}{x^p G(x)}$; il terzo, termine generico della sommatoria, è il residuo di $\frac{G'(t)}{t^p G(t)(t-x)}$ per $t = a_n$ e quindi (n.° 108) uguale ad $\frac{1}{a_n{}^p(a_n - x)}$. In quanto al primo integrale, residuo della funzione sotto il segno per $x = 0$, esso si troverà svolgendo la funzione stessa in serie di potenze di t: se $G(t)$ ha per $t = 0$ una radice di ordine s, si ha

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{s}{t} + g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots$$

essendo poi

$$\frac{1}{t^p(t-x)} = -\frac{1}{xt^p} - \frac{1}{x^2 t^{p-1}} - \frac{1}{x^3 t^{p-2}} - \dots, -\frac{1}{x^{p+1} t} -$$

il residuo (coefficente di t^{-1}) sarà

$$-\frac{s}{x^{p+1}} - \frac{g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_{p-1}x^{p-1}}{x^p}:$$

indicando con $\pi(x)$ il numeratore dell'ultima frazione, viene, per la (8):

$$\left|\frac{G'(x)}{x^p G(x)} - \frac{s}{x^{p+1}} - \frac{\pi(x)}{x^p} + \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n{}^p(a_n - x)}\right| < \varepsilon.$$

Essendo i primi tre termini indipendenti da m, ne segue che la serie

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a_n{}^p(x - a_n)}$$

è convergente ed ha per somma

$$\frac{G'(x)}{x^p G(x)} - \frac{s}{x^{p+1}} - \frac{\pi(x)}{x^p};$$

si ha dunque:

(9) $$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{s}{x} + \pi(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^p}{a_n{}^p(x - a_n)};$$

espressione, per il n.° 148, della derivata logaritmica di

$$x^s e^{\int \pi(x)dx} \prod_1^\infty \left(1-\frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{a_n}+\frac{x^2}{a_n^2}+\dots\frac{x^p}{pa_n^p}}, \tag{9'}$$

e poichè $\pi(x)$ è di grado $p-1$, la funzione intera rappresentata dalla (9) è effettivamente di genere p.

sviluppo in Π di sen πx

150. Si è trovata, al n.° 122, l'espressione della cotangente

$$\operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-n^2}, \tag{10}$$

che mette in evidenza il carattere di funzione meromorfa della cotangente stessa. La (10) può scriversi identicamente:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n(x-n)} - \frac{x}{n(x+n)}\right)$$

e questa, paragonata colla (9), mostra come $\pi \operatorname{cotg} \pi x$ sia la derivata logaritmica di una funzione intera di genere 1 avente per poli di prim'ordine il punto $x=0$ ed i punti $\pm n$. Questa funzione è, come è noto, sen πx, per il quale risulta dunque, dalla (9'), l'espressione weierstrassiana in forma di prodotto infinito

$$cx \prod_1^\infty \left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}} \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}.$$

Per essere $\lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} = \pi$, la costante c si trova uguale a π; onde la formula classica che dà lo sviluppo del seno in prodotto infinito:

$$\boxed{\operatorname{sen} \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).} \tag{11}$$

Si può scrivere

$$\operatorname{sen} \pi x = \pi x \eta(x)\eta(-x),$$

essendo $\eta(x)$ la funzione intera di genere 1, trovata dal Gauss e detta dal Betti *emiseno* (1), i cui fattori primari sono $\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{x}{n}}$ per $n=1, 2, 3, \dots$ emiseno

Facendo, nella (11), $x=\frac{1}{2}$, si ottiene

$$1 = \frac{\pi}{2}\Pi\frac{4n^2-1}{4n^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\dots}{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\dots},$$

Wallis

onde la nota formula di Wallis (2)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\dots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\dots} = \frac{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2\dots}{1\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdot9^2\dots}$$

Essendo $\cos \pi x = \operatorname{sen} \pi\left(\frac{1}{2}-x\right)$, verrà

sviluppo in Π di cos πx

$$\cos \pi x = \pi\left(\frac{1}{2}-x\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}{n^2}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+x\right)\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-x\right)\dots =$$

$$= \pi\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\dots}{2\cdot2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\dots}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right),$$

e, per la formula di Wallis:

$$\boxed{\cos \pi x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right).} \tag{12}$$

(1) V. Betti, *Opere*, T. I, p. 251. Questa funzione si ritrova nella teoria della funzione Γ; v. n.° 288.

(2) *Calcolo*, n.° 398.

Il problema di Mittag Leffler sta con quello di Weierstrass nello stesso rapporto in cui il problema della decomposizione in frazioni semplici di una funzione razionale fratta sta con quello della decomposizione in fattori lineari di un polinomio

Capitolo Decimo

IL PROBLEMA DI MITTAG-LEFFLER

§ I. Primo caso.

151. Una funzione razionale fratta si rappresenta, nel modo più espressivo, mediante una somma di funzioni razionali semplici, ognuna delle quali pone in evidenza uno dei poli della funzione: nel modo stesso che una funzione razionale intera è efficacemente rappresentata da un prodotto di fattori lineari, ognuno dei quali mette in evidenza una delle radici della funzione. Ora, dopo di avere veduto come il teorema di Weierstrass, esposto nel precedente Capitolo, estenda alle funzioni intere trascendenti la decomposizione in fattori, si può chiedere se sia possibile di estendere alle funzioni meromorfe (n.° 148), cioè alle trascendenti uniformi aventi sole singolarità polari a distanza finita, la decomposizione in termini semplici, ognuno dei quali ponga in evidenza uno dei poli. A questa questione ha risposto affermativamente il Mittag-Leffler [1] col metodo che ora verrà esposto: ma avvertiamo

[1] Dapprima nei Rendiconti dell'Acc. delle Scienze di Stockholm, 1877; la dimostrazione fu ripresa da Weierstrass (*Monatsb. der Akad. der Wissensch.*, Berlin, 1880) per il caso di singolarità polari. Per il caso di singolarità essenziali, v. Mittag-Leffler (*Comptes Rendus de l' Acad. des Sciences*, Paris, 1882). Infine, il caso più generale è trattato dal Mittag-Leffler, *Acta Math.*, T. IV, 1884. Cfr. Casorati (*Annali di Matematica*, S. II, T. X, 1882).

subito che con questo metodo egli tratta senz'altro una questione più generale, quella delle funzioni uniformi con infiniti punti singolari essenziali e di cui le funzioni meromorfe possono considerarsi come un caso particolare.

Problema di Mittag-Leffler

(Vedi anche §145)

152. « Sia dato, nel piano dei numeri complessi, una « successione di numeri, diversi da zero,

$$(a) \qquad a_1, \quad a_2, \ldots \quad a_n, \ldots$$

« tali che sia $\lim a_n = \infty$, ordinati in modo che sia « $|a_n| \leq |a_{n+1}|$. Sia pure data una successione di funzioni « intere, razionali o trascendenti,

$$(b) \qquad G_1(x), \quad G_2(x), \ldots \quad G_n(x), \ldots.$$

« Si domanda di costruire una funzione analitica uni- « forme, regolare in tutto il piano ad eccezione dei punti (a) « e di $x = \infty$, e che abbia per $x = a_n$ una singolarità carat- « terizzata da $G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$ ». funzione quasi-intera

A questa questione daremo il nome di *problema di* Mittag-Leffler.

È noto (n.° 101) che la $F(x)$, singolare per $x = a$, si dice avere ivi una singolarità caratterizzata da $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ se la differenza $F(x) - G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ è regolare per $x = a$. La singolarità, essenziale isolata se la $G(x)$ è funzione intera trascendente, si riduce a polare quando la $G(x)$ stessa si riduce a polinomio intero.

(1)

Per risolvere la questione enunciata, si cominci coll'assumere ad arbitrio una successione di numeri positivi

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots \quad \varepsilon_n, \ldots,$$

sotto condizione che la serie $\Sigma \varepsilon_n$ sia convergente, indi si sviluppi $G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$ per le potenze di x, (ciò che è possibile perchè nel cerchio centro 0 e raggio $|a_n|$ non vi sono singolarità per G_n)

$$G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) = c_{n0} + c_{n1}x + \ldots + c_{n\nu}x^\nu + \ldots,$$

sviluppo convergente per $|x| < |a_n|$. Fissato un numero positivo $q < 1$, si può determinare un intero p_n tale che sia,

(1) L'idea che si presenta naturale sarebbe quella di formare la somma $\sum_n G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$ ma in generale questa serie non risulta convergente. L'artificio ... Come nel problema di Weierstrass il Π si rendeva convergente mediante un opportuno fattore esponenziale qui Σ si rende convergente mediante un opportuno polinomio

La serie $\sum_k^\infty a_{nk}x^k$ è unif. conv. nell'interno del cerchio quindi esiste un p_n tale che entro tale cerchio sia $\left|\sum_{p_n}^\infty a_{nk}x^k\right| < \varepsilon_n$ ossia $\left|G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right) - \sum_k^{p_n-1} a_{nk}x^k\right| < \varepsilon$ ossia

per tutto il cerchio $|x| < q\,|a_n|$,

$$(1) \qquad |c_{n \cdot p_n+1}x^{p_n+1} + c_{n \cdot p_n+2}x^{p_n+2} + \ldots| < \varepsilon_n :$$

si ponga infine

$$(2) \qquad F_n(x) = G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) - c_{n0} - c_{n1}x - \ldots - c_{np_n}x^{p_n}.$$

La $F_n(x)$ è funzione uniforme, regolare in tutto il piano, ad eccezione del punto $x = a_n$ dove ha una singolarità isolata caratterizzata da $G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$ e del punto $x = \infty$ dove ha un polo di ordine p_n. Ottenuta così, corrispondentemente alla successione delle G_n, quella delle F_n, si costruisca la serie derivante dal polinomio

$$(3) \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x):$$

questa espressione risponde alla questione proposta.

A dimostrarlo, si descriva un cerchio (R) arbitrario dall'origine come centro; solo per un numero finito di punti $a_1, a_2, \ldots a_m$ della successione (a) potrà essere $q\,|a_n| \leq R$; per $n \geq m + 1$, è $R < q\,|a_n|$. Si decomponga $F(x)$ in $q<1$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{m} F_n(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} F_n(x);$$

Criterio della convergenza uniforme

nella seconda sommatoria essendo, per $|x| < R$ e in virtù della (1), $|F_n(x)| < \varepsilon_n$, la sommatoria stessa è uniformemente convergente in (R) e vi rappresenta quindi (n.° 57) una funzione analitica uniforme regolare; in quanto alla prima sommatoria essa è, in tutto il piano, funzione analitica uniforme, singolare nei punti $a_1, a_2, \ldots a_m$ con singolarità isolate caratterizzate rispettivamente da $G_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right), \ldots G_m\left(\frac{1}{x - a_m}\right)$ e con un polo per $x = \infty$. E poichè il cerchio (R) è di raggio arbitrariamente grande, la (3) risulta uniforme e regolare in tutto il piano, ad eccezione di ogni punto a_n in cui ha una singolarità isolata caratterizzata da $G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e di $x = \infty$, dove ha pure una singolarità essenziale, non però isolata.

singolarità in 0

153. *a*) La restrizione che alla successione (a) non appartenga lo zero non ha nulla di essenziale. Se la funzione da costruire deve avere, per $x = 0$, una singolarità isolata caratterizzata da $G_0\left(\frac{1}{x}\right)$, dove $G_0(x)$ è simbolo di funzione intera, oltre alle singolarità stabilite al n.° precedente, basterà sostituire ad $F(x)$ la $G_0\left(\frac{1}{x}\right) + F(x)$.

Arbitrarietà

b) Nella risoluzione del problema di Mittag-Leffler, è arbitraria la scelta delle ε_n, importando solo la convergenza della $\Sigma\varepsilon_n$; inoltre, per una data successione ε_n, ad ogni p_n soddisfacente alla (1) si può, volendo, sostituirne uno maggiore. La costruzione delle $F_n(x)$ presenta dunque un certo grado di arbitrarietà. Tuttavia si può notare che se $F(x)$, $F_1(x)$ sono due espressioni soddisfacenti, per le medesime (a) e (b), al problema di Mittag-Leffler, la differenza $F(x) - F_1(x)$ sarà una funzione analitica uniforme non avente alcuna singolarità a distanza finita, e quindi una funzione intera: e viceversa, se $F(x)$ risolve il problema per le successioni (a) e (b), lo risolve del pari la $F(x) + I(x)$, dove $I(x)$ è una funzione intera arbitraria. È dunque $F(x) + I(x)$ la soluzione più generale del problema stesso.

La funzione più generale è dunque $\Sigma F_n + G_0\left(\frac{1}{x}\right) + I(x)$

Mittag Leffler per le funzioni meromorfe

154. *a*) Se la successione (b) è composta di funzioni razionali intere, (polinomi) e se per conseguenza le $G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$ sono funzioni razionali semplici, la (3) risolve il problema, caso speciale di quello del n.° 152, di costruire una funzione meromorfa che in ogni punto di una successione data (a) [1] ammetta un polo caratterizzato rispettivamente da una data frazione semplice.

b) Reciprocamente, sia data una funzione meromorfa $f(x)$ e sia (a) la successione dei suoi poli. Per ognuno di questi, a_n, la funzione ammette uno sviluppo nella forma

$$\frac{A_{n1}}{x - a_n} + \frac{A_{n2}}{(x - a_n)^2} + \dots \frac{A_{np_n}}{(x - a_n)^{p_n}} + P(x - a_n),$$

[1] Cui si può, volendo, aggiungere il punto $x = 0$ (v. n.° 153, *a*).

(•) Ciò si può vedere come segue: Per il teor. di Weierstrass la più generale funzione intera di rango p, con le radici in a_n è: $f(x) = e^{\gamma(x)} \prod_{1,n}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\sum_k \frac{x^k}{k a_n^k}}$; se è $I(x) = \gamma'(x)$ si ha $F = f'/f$.

dove P è simbolo di serie di potenze intere positive; facendo, nella costruzione del n.° 152,

$$(4) \qquad G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) = \frac{A_{n1}}{x - a_n} + \dots + \frac{A_{np_n}}{(x - a_n)^{p_n}},$$

si ottiene la funzione data nella forma $\Sigma F_n(x) + I(x)$, dove $F_n(x)$ è funzione razionale avente in a_n il polo caratterizzato da (4) ed un polo per $x = \infty$, mentre $I(x)$ è una funzione intera, che non si potrà però determinare se non in base ad ulteriori proprietà della $f(x)$. Nel fatto che si può scrivere

$$(5) \qquad f(x) = \Sigma F_n(x) + I(x)$$

Scomposizione d'una funz. meromorfa

sta il « teorema di Mittag-Leffler » per le funzioni meromorfe.

c) Si voglia, come caso particolare, costruire una funzione meromorfa che abbia, nei punti di (a), poli di prim'ordine col residuo uguale ad 1; sia inoltre $\sum \frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ convergente. Allora l'espressione (5) si riduce a

$$\sum_n \left(\frac{1}{x - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \dots + \frac{x^{p-1}}{a_n^p}\right) + I(x); *$$

a questo tipo appartengono le derivate logaritmiche delle funzioni intere di rango p (n.° 148). che sono tutte funzioni meromorfe. (•)

In particolare l'espressione di $\cot g\, \pi x$ data al n.° 122, non è altro che la decomposizione di questa trascendente in conformità del teorema precedente.

$\cot g\, \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{1,n}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}$

§ II. Il caso generale.

155. Il metodo che ha servito a risolvere la questione posta al n.° 152, ha potuto essere applicato dal Mittag-Leffler stesso, con opportuna modificazione, ad un caso assai più generale. Sia ancora data una successione di punti

$$(A) \qquad a_1, a_2, \dots a_n, \dots,$$

ma questa possa avere ora non più un unico punto limite all'infinito, ma un sistema qualsiasi di punti limiti: codesto

Fatto centro in b_n descriviamo un cerchio di raggio $> |a_n - b_n|$; la serie (2) converge fuori di qualunque cerchio col centro in b_n e raggio $> |a_n - b_n|$

sistema (aggregato derivato di A) verrà indicato con A'. Si supporrà che A' non contenga alcun punto di A; si supporrà pure che A' non abbia punti all'infinito, il che non costituisce una restrizione essenziale, potendosi sempre ricondurre a questa ipotesi mediante una conveniente trasformazione lineare della variabile. « Dato ancora un sistema di funzioni « intere

Problema generale

$$(b) \qquad G_1(x),\ G_2(x), \ldots .\ G_n(x), \ldots .,$$

« si domanda di costruire una espressione, analitica regolare « in tutto il piano, ad eccezione dei punti di (A) dove in a_n « essa abbia una singolarità caratterizzata da $G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$, e di « quelli di A' ».

A questo scopo, sia fissato un punto a_n di (A): le sue distanze dai punti di A' avranno un limite inferiore τ_n; essendo ε un numero positivo arbitrario, si assegni un punto b_n di A' che disti da a_n di meno di $\tau_n + \varepsilon$, indi, essendo q un numero positivo maggior d'uno, si consideri l'insieme dei punti x del piano pei quali è

$q > 1$

$$\left|\frac{b_n - a_n}{x - b_n}\right| < \frac{1}{q} < 1$$

$$(1) \qquad |x - b_n| > q\,|b_n - a_n|.$$

Si ha, per quei valori di x, la convergenza uniforme della serie

$$(2) \qquad G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_{n\nu}}{(x - b_n)^{\nu+1}}, \quad = \sum_{\nu}^{\infty} g'_{n\nu}\left(\frac{a_n - b_n}{x - b_n}\right)^{\nu+1}$$

e quindi, scelta una successione di numeri positivi ε_n colla condizione che $\Sigma\varepsilon_n$ sia convergente, si potrà assegnare un numero p_n tale che per tutto il campo definito da (1), sia

$$\left|\frac{g_{np_n}}{(x - b_n)^{p_n+1}} + \frac{g_{np_n+1}}{(x - b_n)^{p_n+2}} + \ldots .\right| < \varepsilon_n.$$

Si ponga

$$F_n(x) = G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right) - \sum_{\nu=0}^{p_n-1} \frac{g_{n\nu}}{(x - b_n)^{\nu+1}};$$

sarà la $F_n(x)$ una funzione analitica uniforme, regolare in tutto il piano, fatta eccezione per $x = a_n$, dove ha la singo-

Nel caso preced. lo sviluppo si faceva per $|x| < |a_n|$ in modo da escludere le singolarità, ora si fa per $|x - b_n| > q\,|b_n - a_n|$

se fossero infiniti avrebbero un punto di acc. a'_n, appartenente ad A, per cui $q|a'_n - b_n| \geq \delta$ mentre b_n dista da a_n meno di $\tau_n + \varepsilon$

larità caratterizzata da $G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$, e per $x = b_n$, dove ha una singolarità polare; è inoltre $|F_n(x)| < \varepsilon_n$ in tutto il campo (1). Si costruisca ora l'espressione

$$(3) \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x):$$

si tratta di mostrare come essa risponda alla questione.

Perciò, includiamo l'aggregato A' in un'area T, connessa o no, il cui contorno abbia dai punti di A' una distanza il cui limite inferiore sia maggiore di un numero positivo assegnato δ. I punti a_n di A per i quali è $q\,|a_n - b_n| \geq \delta$ sono in numero finito: sia m tale che per $n > m$ risulti $q\,|a_n - b_n| < \delta$. Se $\overline{T}$ è la porzione di piano esterna a T ed x è un punto di $\overline{T}$, sarà, per $n > m$,

$$|x - b_n| > \delta > q\,|a_n - b_n|.$$

Se dunque si scompone la (3) in

$$F(x) = \sum_{n=1}^{m} F_n(x) + \sum_{n=m+1}^{\infty} F_n(x),$$

converge uniformemente e

la seconda di queste sommatorie ha i suoi termini minori in valore assoluto dei termini corrispondenti della serie $\Sigma\varepsilon_n$ in tutto il campo $\overline{T}$, e rappresenta per conseguenza, in ogni parte connessa di codesto campo, una funzione analitica regolare. In quanto alla prima sommatoria, essa è funzione uniforme regolare in tutto il piano, eccettuati i punti a_n dove ha singolarità rispettivamente caratterizzate da $G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$, per 1, 2, 3,... m; ed i punti b_1, b_2,... b_m, dove ha al più singolarità polari. Ma poichè δ è arbitrariamente piccolo, così il campo T può ridursi prossimo ad A' quanto si vuole, e per conseguenza $\overline{T}$ ridursi prossimo quanto si vuole all'intero piano cui sia tolto l'aggregato A'. Ne viene che l'espressione $F(x)$ è analitica, regolare in tutto il piano eccettuato A ed A', ed ha in ogni punto a_n di A una singolarità isolata caratterizzata da $G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right)$. La questione enunciata in principio del presente n.° è così risoluta.

*) Nel caso precedente m rappresentava il massimo intero per cui $q|a_n| < R$. R arbitrario: $R \to \infty$ corrisponde a $\delta \to 0$ in modo da rendere minima la regione di singolarità.

(·) Nella questione esaminata si è supposto A isolato, ma A potrebbe essere chiuso cioè $AA' \neq 0$ oppure denso in sè, oppure perfetto $(AA' = A = A')$. Se è chiuso, ma non perfetto vi sono delle singolarità isolate. Si può costruire una funzione che sia singolare nei punti di A, regolare nel resto del piano ed anche nei punti isolati detti. (V. § 148, 149)

(Eliminazione delle sing. isolate)

156. Anche qui è da notare l'arbitrarietà nella scelta degli interi p_n, in relazione con quella della scelta dei numeri ε_n.

Dalla soluzione trovata se ne possono dedurre infinite altre, aggiungendo ad $F(x)$ una funzione uniforme, regolare in tutto il piano, ad eccezione dei punti di A' dove può ammettere singolarità affatto arbitrarie.

(·)

157. È da osservare ancora che l'aggregato A' può constare di un solo punto, di un numero finito di punti, o di un aggregato di infiniti punti costituenti un insieme chiuso: esso può formare o comprendere una o più linee, aperte o chiuse, e perciò il campo $\overline{T}$ può essere non connesso. Nel caso della connessione di $\overline{T}$, la (3) rappresenta in esso una funzione analitica uniforme, colle indicate singolarità nei punti di A; ma se $\overline{T}$ è non connesso, la (3) dà una funzione analitica per ognuna delle parti connesse di cui si compone $\overline{T}$, e si ha così che la (3) rappresenta, nelle varie parti, funzioni analitiche diverse, cioè non ottenibili in generale l'una dall'altra mediante continuazione analitica.

la quale p. diverse parti ...

158. Una interessante questione, risoluta dal Picard [1], si può dare come applicazione della teoria precedente.

$b_n = e^{i\theta_n}$

L'aggregato (A) sia costituito da punti, parte interni, parte esterni alla circonferenza $|x| = 1$ ed aventi come punti limiti tutti i punti della circonferenza stessa [2]. Se è $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, si può assumere come punto b_n il punto $e^{i\theta_n}$. La funzione caratteristica della singolarità per $x = a_n$ sia la $\dfrac{1}{x - a_n}$. Si può determinare l'intero p_n in modo che la

$$F_n(x) = \frac{1}{x - a_n} - \frac{1}{x - b_n} - \frac{a_n - b_n}{(x - b_n)^2} - \dots - \frac{(a_n - b_n)^{p_n - 1}}{(x - b_n)^{p_n}} =$$
$$= \left(\frac{a_n - b_n}{x - b_n}\right)^{p_n} \frac{1}{x - a_n} = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{a_n - b_n}{x - b_n}\right)^{n} - \sum_{1}^{p_n}\left(\frac{a_n - b_n}{x - b_n}\right)^{h}$$

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, mars 1881, e *Traité d'Analyse*, T. II, Ch. V, p. 145 (Paris, 1893).

[2] Ad esempio, il sistema dei punti a_n potrebbe essere quello delle radici delle equazioni binomie $x^n = a^{\frac{1}{n^2}}$, $x^n = a^{-\frac{1}{n^2}}$, $(n = 1, 2, \dots)$, dove a è un numero positivo diverso dall'unità. $0 < a \neq 1$

sia, per $|x - b_n| > q\,|a_n - b_n|$, inferiore in valore assoluto al termine ε_n della serie convergente a termini positivi $\Sigma\varepsilon_n$. La

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} F_n(x) \tag{3}$$

uniformemente conv.

è allora, per la precedente teoria, un'espressione analitica regolare tanto all'interno quanto all'esterno della circonferenza $|x| = 1$, ad eccezione dei punti a_n dove ammette poli di prim'ordine col residuo 1, e della circonferenza medesima, che è *linea singolare* tanto per la funzione analitica rappresentata da $F(x)$ nell'interno della circonferenza quanto per quella rappresentata dall'espressione stessa fuori del cerchio. In ogni regione del piano, connessa e da cui siano esclusi i punti singolari, la serie (3) è uniformemente convergente.

Integrando in una delle dette regioni, viene

$$\int F(x)dx = C +$$
$$+ \sum_{1}^{\infty}\left(\log\frac{x - a_n}{x - b_n} + \frac{a_n - b_n}{x - b_n} + \frac{(a_n - b_n)^2}{2(x - b_n)^2} + \dots + \frac{(a_n - b_n)^{p_n - 1}}{(p_n - 1)(x - b_n)^{p_n - 1}}\right),$$

e, passando ai numeri,

$$e^{\int F(x)dx} = c \prod_{1}^{\infty} \frac{x - a_n}{x - b_n}\, e^{\frac{a_n - b_n}{x - b_n} + \frac{(a_n - b_n)^2}{2(x - b_n)^2} + \dots + \frac{(a_n - b_n)^{p_n - 1}}{(p_n - 1)(x - b_n)^{p_n - 1}}}.$$

Questa formula risolve il problema di determinare una funzione analitica uniforme la quale ammetta un sistema di radici avente come punti limiti i punti di una circonferenza; problema che si può riguardare come una estensione di quello del Weierstrass risoluto a n.° 140.

problema di Picard

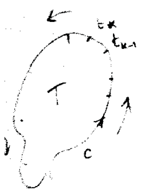
§ III. Cenno sugli sviluppi in serie di funzioni razionali. e in particolare di polinomi

159. Il teorema di Mittag-Leffler permette di sviluppare una funzione meromorfa in una serie di funzioni razionali, le quali pongono in evidenza i singoli poli della funzione meromorfa. Però, una funzione può venire sviluppata esempio di Tannery

Ciò che non si verifica nelle più citate.

in serie di funzioni razionali, senza che queste abbiano speciale relazione colle singolarità della funzione; ad esempio, al n.° 66 si è data una serie di funzioni razionali i cui poli sono le radici $2^{n\text{sime}}$ dell'unità, mentre la serie stessa rappresenta una costante, pur avendo, per la sua convergenza uniforme, carattere di funzione analitica. Ma l'interesse di uno sviluppo in serie di funzioni razionali — ed in particolare di funzioni razionali intere — può invece stare nel fatto che lo sviluppo stesso sia *genuino* per la funzione, vale a dire atto a rappresentarla in tutto il suo campo di validità. La questione così posta ha dato origine ad un grande numero di ricerche [1] di cui non ci è possibile di esporre i risultati in un'opera avente, come questa, carattere relativamente elementare; ci limiteremo a dare alcune indicazioni, talvolta sotto ipotesi semplificatrici, sui metodi principali che sono stati suggeriti per trattare la questione dello sviluppo in serie di funzioni razionali.

Metodo di Runge



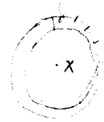
160. Sia T un campo chiuso, supposto dapprima semplicemente connesso, in cui sia regolare una funzione analitica $f(x)$; sia (c) il contorno di T, contorno che supporremo essere una curva regolare rettificabile di cui indicheremo con c la lunghezza. Si segnino sulla curva punti in numero arbitrario, $t_1, t_2, \ldots t_n$, succedentisi nell'ordine stabilito come positivo sulla curva, e, prefissato un numero positivo ε, abbastanza prossimi perchè sia $|t_k - t_{k-1}| < \varepsilon$: questi punti segnano una *suddivisione* sulla curva, alla quale si farà corrispondere la funzione razionale

$$(1) \qquad \boxed{\gamma_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(t_k)(t_{k+1} - t_k)}{t_k - x}}, \quad = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i}\int_{t_k t_{k+1}} \frac{f(t_k)}{t_k - x}\,dt$$

la quale, tendendo ε a zero, ha per limite, per la definizione stessa dell'integrale, l'espressione

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{f(t)dt}{t - x}.$$

(1) Molte di queste sono citate e riassunte nelle *Leçons sur les séries de polynômes* di P. MONTEL (Paris, 1910).



Si prenda x interno ad un campo T_1 che si intenderà connesso, tutto interno a T e chiuso da un contorno (c_1) tale che il limite inferiore delle distanze dei punti di (c_1) da quelli di (c) sia superiore ad un numero positivo δ: la (c_1) si può supporre, per fissare le idee, curva parallela a (c); per tali valori di x la (2) è uguale ad $f(x)$, e poichè estendendo l'integrazione all'arco $t_k t_{k+1}$, la (1) può scriversi identicamente

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i}\int_{t_k t_{k+1}}\frac{f(t_k)dt}{t_k - x},$$

formula di Cauchy

così, spezzando in (2) l'integrazione ai successivi archi della suddivisione fatta su (c), si ha

$$(3) \qquad f(x) - \gamma_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_k t_{k+1}}\left(\frac{f(t)}{t - x} - \frac{f(t_k)}{t_k - x}\right)dt.$$

Ora, essendo $|t - x| > \delta$ lungo tutto (c), per la continuità di $f(t)$ si può prendere ε abbastanza piccolo perchè, prefissato σ positivo arbitrario, sia

$$|f(t_k)(t - x) - f(t)(t_k - x)| < \sigma\delta^2$$

qualunque sia x in T_1; ne viene

$$|f(x) - \gamma_n(x)| < \frac{c\sigma}{2\pi},$$

e quindi, per x in T_1, è $\lim_{n=\infty} \gamma_n(x) = f(x)$. Si ha dunque per $f(x)$ lo sviluppo, uniformemente convergente in T_1

Brunacci Abel

$$(4) \qquad \boxed{f(x) = \gamma_1(x) + [\gamma_2(x) - \gamma_1(x)] + \ldots + [\gamma_{n+1}(x) - \gamma_n(x)] + \ldots,}$$

valido in tutto T: questo campo T può d'altronde supporsi prossimo quanto si vuole al campo di regolarità di $f(x)$. Il metodo così sommariamente esposto è dovuto a C. RUNGE [1].

Se (c_2) è una curva esterna a (c) e parallela, racchiudente un'area T_2 comprendente T, per ogni x esterno a T_2 il secondo membro della (4) converge uniformemente a zero: infatti per tali valori di x la (2) ha il

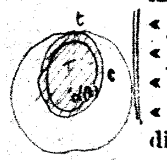
(1) *Acta mathematica*, T. 6, 1885.

valore zero. La serie $\Sigma(\gamma_{n+1}(x) - \gamma_n(x))$ è dunque uno sviluppo dello zero per tutto il campo esterno a T.

Il metodo indicato nel presente n.° si estende senza difficoltà al caso di $f(x)$ monodroma in un campo connesso non semplicemente.

Met. di Painlevé

161. Un altro metodo, dato dal PAINLEVÉ (¹), permette di sviluppare una funzione $f(x)$, sotto condizioni analoghe a quelle date nel n.° precedente, in una serie di funzioni razionali intere: si aggiunga però l'ipotesi che « ad ogni punto t del « contorno (c) si possa coordinare un punto $\alpha(t)$, con α fun- « zione continua di t, per modo che il cerchio di centro $\alpha(t)$ « risulti tangente al contorno in t e racchiuda tutto il « campo T (²) ». Ne viene allora che ogni punto x di T_1 dista dalla circonferenza $(\alpha(t), |t - \alpha(t)|)$ per più di δ, per modo che si può scrivere, q essendo un numero positivo e maggiore d'uno, indipendente da t:



$$|t - \alpha(t)| > q\,|x - \alpha(t)|. \tag{5}$$

$\frac{|x-\alpha(t)|}{|t-\alpha(t)|} < \frac{1}{q} < 1$

In base a ciò, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[x - \alpha(t)]^n}{[t - \alpha(t)]^{n+1}}$$

$= \sum \left|\frac{x-\alpha}{t-\alpha}\right|^n \cdot \frac{1}{t-\alpha}$

$\frac{1}{t-x} = \frac{1}{1-\frac{x-\alpha}{t-\alpha}} \cdot \frac{1}{t-\alpha}$

è uniformemente convergente per x in T_1 e per t lungo (c), e vi rappresenta la $\dfrac{1}{t-x}$; onde moltiplicando per $\dfrac{1}{2\pi i} f(t)dt$ ed integrando lungo (c), viene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(t)}{t-x}dt = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{(c)} \frac{f(t)[x - \alpha(t)]^n dt}{[t - \alpha(t)]^{n+1}}; \tag{6}$$

si ha dunque per la $f(x)$ uno sviluppo, valido entro tutto T ed uniformemente convergente in T_1 prossimo a T quanto si vuole, i cui termini sono polinomî razionali interi in x, di grado crescente.

(¹) *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 1886. V. anche, per altri metodi dati dallo stesso Autore, *Comptes rendus*, T. 126, p. 200 e 318, (1898).

(²) Si può dimostrare come ciò si verifichi se c è convessa, cioè non incontrata dalla tangente in un suo punto qualunque se non nel punto di contatto.

$\prod |x - a_n| = k$

162. *a*) È noto che sotto il nome di *cassinoide* (generalizzata) s'intende una curva avente la proprietà di essere luogo dei punti di un piano tali che il prodotto delle loro distanze da un dato numero di punti fissi sia costante. I punti fissi sono detti *fuochi* della cassinoide.

Si hanno le cassinoidi ordinarie, od ovali di CASSINI, come luogo dei punti per i quali il prodotto delle distanze da *due* punti fissi (fuochi) è costante. ; in particolare si può avere una lemniscata di Bernoulli –

Metodo di Hilbert

Essendo $P(x)$ un polinomio razionale intero a radici semplici $a_1, a_2, \dots a_m$, l'equazione $|P(x)| = k$, dove k è una costante, rappresenta una cassinoide di fuochi $a_1, a_2, \dots a_m$; a seconda del valore di k, la curva è composta di una o più ovali: da m ovali circondanti rispettivamente i singoli fuochi per valori piccoli di k, fino ad una sola ovale includente un'area semplicemente connessa alla quale gli m fuochi sono interni, per k abbastanza grande.

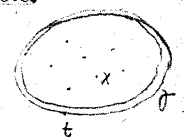
k piccolo m ovali
k grande 1 ovale

b) Essendo data una funzione analitica $f(x)$ regolare nell'area semplicemente connessa T racchiusa da una cassinoide a m fuochi, definita da $|P(x)| = k$, la funzione stessa essendo regolare anche al contorno, si consideri la x entro un'area T_1 interna a T e limitata dalla cassinoide $|P(x)| = k_1$, dove è k_1 inferiore a k ma prossimo a k quanto si vuole. Si ha

Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)} \frac{f(t)dt}{t-x} \tag{2}$$

$\frac{P(x)}{P(t)} < \frac{1}{q} < 1$



per x in T_1 e t lungo la cassinoide $|P(x)| = k$ che indichiamo con γ: ma, essendo $|P(t)| > q\,|P(x)|$, dove q è un numero positivo maggiore d'uno, si ha, per i medesimi valori di t e di x, lo sviluppo uniformemente convergente

$$\frac{1}{P(t) - P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^n(x)}{P^{n+1}(t)}. \tag{7}$$

$\frac{1}{P(t)-P(x)} = \frac{1}{P(t)} \cdot \frac{1}{1-\frac{P(x)}{P(t)}}$

D'altra parte, il quoziente

$$\frac{\prod^m (t-x)^n}{t-x} = \prod^{m-1} (t-x)^n = \frac{P(t) - P(x)}{t - x} = Q(t,\, x)$$

è una funzione razionale intera di grado $m-1$ in t ed x, onde

$$\frac{1}{t-x} = \frac{Q(t,\ x)}{P(t)-P(x)},$$

e quindi, tenuto conto della (7) e sostituendo in (2),

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x) \int_{(\gamma)} \frac{Q(t,\ x) f(t) dt}{P^{n+1}(t)}. \tag{8}$$

Questo sviluppo ha la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) P^n(x) \tag{8'}$$

dove $Q_n(x)$ è un polinomio intero di grado $m-1$ in x; esso converge uniformemente in T_1 prossimo a T quanto si vuole, e rappresenta $f(x)$ in tutto T [1].

estensione con limite cassinoidi

c) Lo sviluppo (8') valido nel campo limitato da una cassinoide entro la quale la $f(x)$ è regolare, compreso il contorno, è stato indicato dallo Hilbert [2] per giungere ad una espressione per serie di polinomî di una funzione analitica in tutto il suo campo di regolarità, supposto limitato da una curva regolare (c), per la quale non si fa alcuna ipotesi circa all'andamento su di essa della funzione. Egli dimostra perciò che ogni tale curva c si può riguardare come limite di cassinoidi $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_m, \dots$, ognuna esterna alla precedente e racchiudenti rispettivamente aree $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots T^{(m)}, \dots$, tendenti all'area A di validità della funzione data $f(x)$. A ciascuna delle aree $T^{(m)}$ corrisponde, come a *b*), un'area $T_1^{(m)}$ interna e prossima a $T^{(m)}$ quanto si vuole, entro la quale esiste per la $f(x)$ lo sviluppo corrispondente (8'), uniformemente convergente. Presa dunque una successione di numeri positivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n, \dots$ tendenti a zero, si può prendere una somma parziale $\bar\omega_m(x)$ nello sviluppo (8') tale che sia

$$|f(x) - \bar\omega_m(x)| < \varepsilon_m$$

[1] Il modo qui indicato per giungere allo sviluppo (8') è dato dal Montel (op. cit., p. 48) ispirandosi ad un procedimento dovuto al Jacobi.

[2] *Göttinger Nachrichten*, 6 marzo 1897.

(1) per $x \to t$, $Q(t) = P'(t)$, cioè sul contorno $f(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_0^\infty \int \frac{P^n(x)}{P^n(t)} \cdot f(t) \cdot d\log P(t)$

in tutto $T_1^{(m)}$. La serie

$$\bar\omega_1(x) + [\bar\omega_2(x) - \bar\omega_1(x)] + \dots + [\bar\omega_{n+1}(x) - \bar\omega_n(x)] + \dots,$$

convergerà dunque uniformemente in ogni area interna ad A, e rappresenterà $f(x)$ in tutta l'area.

Stella di Mittag-Leffler

163. Data una serie di potenze

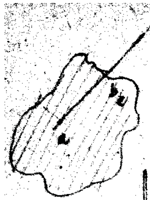
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{9}$$

di cui $(a,\ r)$ sia il cerchio di convergenza, essa basta a definire una funzione analitica $f(x)$ in tutto il campo della sua esistenza, come si è veduto al § II del Capitolo terzo. La conoscenza dei c_n, cioè di $f(a), f'(a), \dots f^{(n)}(a), \dots$ vale dunque a fare conoscere la $f(x)$ in tutta la sua integrità. È pertanto interessante la ricerca di un'espressione analitica, costruita mediante le c_n, atta a rappresentare la $f(x)$ non soltanto nel cerchio $(a,\ r)$, come è dato dalla (9), ma in un campo comprendente questo cerchio, e più esteso che sia possibile. Il Borel [1] ha trattato con successo questa questione, giungendo ad una rappresentazione analitica valida per un poligono contenente $(a,\ r)$ e da lui detto *poligono di sommabilità*, ma la soluzione completa ne è stata data dal Mittag-Leffler in una serie di lavori [2] in cui si giova in parte di un principio che è una generalizzazione di quello che ha ispirato il Borel, in parte però di un principio del tutto diverso e assai semplice nella sostanza. È di questo che ci proponiamo di dare un'idea.

Egli introduce dapprima, nel seguente modo, il concetto di *stella*. Si conduca per a una semiretta l e si segni su di essa

[1] In lavori che vengono riassunti nell'opera: *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1904, Cap. III e seguenti.

[2] Contenuti negli *Acta Mathematica*, T. 23, p. 43-62; T. 24, p. 183-204 e p. 205-244; T. 26, p. 353-391; T. 29, p. 101-181 e T. 42, p. 285-308. V. anche la conferenza tenuta al Congresso internazionale dei matematici, Roma, 1908, a pag. 67 del T. I degli Atti del Congresso. Il metodo di cui tentiamo qui di dare un'idea è quello che forma l'oggetto delle tre prime note degli *Acta Math.*.



Stella

un punto b_l; indi si faccia compiere ad l un intero giro intorno ad a. In questo movimento, b_l possa variare la sua distanza da a e possa eventualmente essere all'infinito per certe posizioni di l, ma la distanza ab_l non possa mai diventare inferiore ad un segmento assegnato. L'area descritta dal vettore variabile ab_l dicesi ***stella* di centro a**; i punti b_l ne sono i *vertici*.

Data ora la funzione analitica $f(x)$ definita dall'elemento (1), si dirà ***stella principale*** relativa ad $f(x)$ ed al punto a la stella di centro a i cui vertici sono determinati nel modo seguente. Si fissi una posizione della semiretta l. Partendo da a e muovendoci lungo l troviamo dapprima punti interni al cerchio (a, r), e per questi la $f(x)$ è regolare. Rimanendo su l, si esca dal cerchio: si potrà avere però sulla circonferenza e fuori, punti appartenenti ad elementi dedotti immediatamente da (1), poi dedotti mediatamente. Si segnerà come punto b_l il primo punto di l che non si trova in queste condizioni (primo punto singolare di $f(x)$ incontrato su l muovendo da a): se ogni punto a distanza finita su l appartiene ad elementi dedotti da (1) come si è detto, b_l sarà allora il punto all'infinito. La stella definita ripetendo la costruzione per ogni semiretta l è la stella principale di centro a, relativa ad $f(x)$; essa verrà indicata con A.

Come casi speciali, la stella relativa ad una funzione intera comprende tutto il piano, meno il punto $x=\infty$; quella relativa a $\log(1+x)$, di centro 0, ha per vertici il punto -1 sulla semiretta di argomento 0 e il punto ∞ per ogni altra semiretta; la funzione definita da Σx^{2^n} (vedi n.° 47, c) ha per stella principale di centro $x=0$ il cerchio di centro 0 e raggio 1.

Nella stella principale A, si ha, per la costruzione stessa, un ramo monodromo della funzione analitica $f(x)$, che verrà distinto colla notazione $f_A(x)$. Ciò posto, il MITTAG-LEFFLER con procedimento formalmente laborioso, ma che si fonda su principî semplicissimi, non richiedendo se non la conoscenza del concetto di continuazione analitica e delle prime proposizioni che vi si riferiscono [1], giunge al seguente importante risultato [2]:

---

[1] Precisamente, quanto si contiene nei n.i 38-46 della presente opera.
[2] *Acta*, T. 23, p. 60.

« Si consideri il polinomio $\zeta_n(x)$ dato da

$$(10)\quad \zeta_n(x)=\sum_{s_1=0}^{n^2}\sum_{s_2=0}^{n^4}\cdots\sum_{s_n=0}^{n^{2n}}\frac{(s_1+s_2+\ldots s_n)!}{s_1!\,s_2!\ldots s_n!}c_{s_1+s_2+\ldots s_n}\left(\frac{x-a}{n}\right)^{s_1+s_2+\ldots s_n}=$$
$$=\sum_\nu g_\nu^{(n)}c_\nu(x-a)^\nu,\quad (\zeta_0(x)=c_0),$$

polinomio approssimante

« dove gl'indici $s_1, s_2, \ldots s_n$ assumono tutti i valori interi « positivi o nulli tali che sia

$$s_1+s_2+\ldots+s_n=\nu,\quad s_1\le n^2,\quad s_2\le n^4,\ldots\quad s_n\le n^{2n}.$$

« Preso un campo semplicemente connesso X qualsiasi, « tutto interno ad A e comprendente nel suo interno il « cerchio (a, r), e scelto un numero ε abbastanza piccolo, si « può sempre determinare un $\bar n$ tale che per $n>\bar n$, sia

$$(11)\qquad |f_A(x)-\zeta_n(x)|<\varepsilon$$

« per ogni punto x del campo X ».

Ne viene che posto

$$G_0(x)=\zeta_0(x)=c_0,\quad G_n(x)=\zeta_n(x)-\zeta_{n-1}(x),\quad (n=1, 2,\ldots\infty),$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n(x)$$

rappresenta il ramo uniforme $f_A(x)$ della funzione analitica in tutto l'interno della stella A, e converge uniformemente ad $f_A(x)$ in ogni area connessa X interna ad A.

164. Questo risultato è teoricamente molto interessante, poichè si presenta come un'estensione assai naturale dello sviluppo di MACLAURIN. Infatti $f_A(x)$ viene espressa come limite del polinomio $\zeta_n(x)$, come, entro il cerchio (a, r), viene espressa come limite del polinomio

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n,\quad c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a);$$

nell'un caso e nell'altro, i polinomî dipendono dunque linearmente dai valori

$$f(a),\ f'(a),\ldots\ f^{(n)}(a),\ldots$$

$f_A(x)$ sta a $f(x)$ come la stella principale sta ad (a,r)

della funzione e delle sue derivate nel centro della stella, moltiplicati per costanti che nel caso di X coincidente con (a, r), non sono altro che $\frac{1}{n!}$, mentre nel caso generale, sono numeri di forma più complicata, però razionali, e dipendenti solo da n e ν, e non dai coefficienti c_n che determinano la funzione di cui si cerca lo sviluppo. Di più, ai numeri $g_\nu^{(n)}$ che figurano nello sviluppo (10) se ne possono sostituire altri aventi il medesimo carattere, potendosi sostituire ai numeri superiori $n^2, n^4, \ldots n^{2n}$ delle sommatorie in (10), altri interi soddisfacenti ad opportune condizioni, e ciò in infiniti modi.

CAPITOLO UNDECIMO

LE FUNZIONI IMPLICITE

§ I. Cenno sulle funzioni analitiche di due variabili.

165. Il concetto di analiticità, stabilito nei Capitoli precedenti per le funzioni di una variabile, si può estendere a quelle di due o più variabili: ci limiteremo ad un cenno relativo alle funzioni di due variabili, il lettore potendo passare con facilità da questo caso a quello di tre o di un numero maggiore.

Siano x, y due variabili complesse, ognuna delle quali si rappresenti in un rispettivo piano-sfera (piano x e piano y); sia posto

(1) $$x = u + iv, \quad y = r + is.$$

Data un'area A nel piano x, un'area B nel piano y, l'insieme delle coppie (x, y) dove x è un punto qualsiasi in A, y un punto qualsiasi in B, si indicherà con (A, B): questo insieme — a quattro dimensioni reali — sarà un campo di variabilità delle x ed y; ogni tale coppia (x, y) si dirà un *punto di questo campo*. Si definirà nel modo solito *l'intorno* di un tale punto (x_0, y_0) — insieme dei valori x, y tali che sia $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - y_0| < \varepsilon'$, ε ad ε' positivi — ed il *qualunque intorno* per ε, ε' arbitrariamente piccoli; si definiranno pure nel modo solito i punti *interni*, *esterni* e *al contorno* del campo (A, B), (cfr. n.° 13).

Una variabile — generalmente complessa — w si dirà funzione in senso generale di x, y nel campo (A, B) — o funzione dei punti di (A, B) — quando per ogni punto (x, y) di (A, B) sia assegnato un valore determinato per w. La w viene ad essere quindi funzione delle quattro variabili reali u, v, r, s, le quali si debbono però riguardare accoppiate nel modo indicato dalle (1). Ref

Il concetto di continuità si stabilisce in perfetta analogia con quanto si fa per le funzioni di due o più variabili reali [1].

---

[1] V. *Calcolo*, n.° 241.

Si scriverà $w = F(x, y) = \xi + i\eta$, ξ ed η essendo funzioni reali delle quattro anzidette variabili reali.

166. Una funzione $F(x, y)$ di due variabili complesse, data nel campo (A, B), si dice *monogena* in quel campo se è monogena separatamente rispetto alle due variabili x ed y. Esistono pertanto (n.° 25) le derivate parziali, continue, di F rispetto alle quattro variabili reali, tali da soddisfare alle condizioni

$$(2) \qquad \frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{\partial\eta}{\partial v}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial v} = -\frac{\partial\eta}{\partial u}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial r} = \frac{\partial\eta}{\partial s}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial s} = -\frac{\partial\eta}{\partial r}.$$

Condizioni di monogeneità

167. Ricordiamo alcune proprietà delle serie di potenze — intere positive — di due variabili,

$$(3) \qquad S(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}x^n y^\nu \ [1].$$

1.°) Se esistono tre numeri positivi M, ρ, ρ', tali che per tutti gli indici n, ν da un punto in poi sia

$$(4) \qquad |a_{n\nu}| < \frac{M}{\rho^n\rho'^\nu},$$

Cauchy

la serie converge assolutamente per tutti i valori di x, y tali che sia $|x| < \rho$, $|y| < \rho'$. Si dirà che il campo (ρ, ρ') definito dalle disuguaglianze precedenti è un campo di convergenza per la (3). Da ciò si deduce facilmente, come corollario, che se una serie di potenze converge, anche semplicemente, per un punto (x_0, y_0), essa converge assolutamente per tutti i punti (x, y) tali che sia $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$.

2.°) Se è $\rho_1 < \rho_1$, $\rho_1' < \rho'$ per tanto poco quanto si vuole, la serie (3) converge uniformemente in tutto il campo (ρ_1, ρ_1'); onde la continuità.

3.°) Se la (3) è nulla in un aggregato di punti posti nel suo campo di convergenza e di cui $x = 0$, $y = 0$ sia punto limite, essa è identicamente nulla, cioè è $a_{n\nu} = 0$ per tutti i valori di n e ν. Onde il principio di identità (cfr. n.° 34, 5°).

4.° Si noti che non esiste, per le serie di potenze di due (o di più) variabili, il concetto di raggio di convergenza determinato che si ha nel caso delle serie di una sola variabile; fra i numeri ρ e ρ' pei quali è soddisfatta la (4), passerà in generale una relazione, in modo che uno dei due numeri sarà funzione dell'altro. Così la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n$ converge sotto la condizione $|xy| < 1$, per cui preso $|x| < \rho$, basta prendere $|y| < \frac{1}{\rho}$: non si può quindi parlare di raggi determinati di convergenza.

non c'è raggio determinato di convergenza.

[1] V. *Calcolo*, n.i 286-288.

mostra la monogeneità della funzione rappresentata da una serie in due var; e la serie coincide con quella di Taylor.

5.°) Essendo (ρ, ρ') campo di convergenza per la (3), e $\rho_1 < \rho$, $\rho_1' < \rho'$, ed essendo M il massimo valore assoluto della serie in (ρ_1, ρ_1'), si ha, per i coefficienti, la relazione maggiorante

$$(5) \qquad |a_{n,\nu}| \leq \frac{M}{\rho_1{}^n\rho_1'{}^\nu}.$$

6.°) Ferme le notazioni precedenti, si sostituisca in (3) $x + h$ ed $y + k$ ad x ed y rispettivamente, sotto la condizione

$$(6) \qquad |x| + |h| < \rho, \quad |y| + |k| < \rho';$$

la (3) diviene con ciò una serie multipla in x, y, h, k, assolutamente convergente, cui si può dare l'ordinamento: (Calcolo inf. pag)

$$(7) \qquad S(x+h, y+k) = A_0 + (A_{10}h + A_{01}k) + \frac{1}{2!}(A_{20}h^2 + 2A_{11}hk + A_{02}k^2) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{n!}(A_{n0}h^n + nA_{n-1\cdot 1}h^{n-1}k + \dots + A_{0n}k^n) + \dots$$

caso n

Qui si riconosce anzitutto che è $A_0 = S(x, y)$; indi, che è

$$A_{10} = \lim_{h=0}\frac{S(x+h, y) - S(x, y)}{h},$$

e questo limite è indipendente dal modo in cui h tende a zero per valori complessi; onde $A_{10} = \frac{\partial S}{\partial x}$ ed S è monogena in x; analogamente $A_{01} = \frac{\partial S}{\partial y}$ ed S, essendo monogena anche in y, è funzione monogena delle due variabili. Analogamente si trova che A_{20}, A_{11}, ... sono monogene e $A_{20} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $A_{11} = \frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}$, ... ed in generale (l'ordine delle derivazioni essendo indifferente):

$$A_{p\cdot n-p} = \frac{\partial^n S}{\partial x^p \partial y^{n-p}}.$$

La (7) non è altro che lo sviluppo in serie di Taylor della $S(x, y)$, sviluppo valido sotto le condizioni (6).

Ponendo x_0, y_0 al posto di x ed y, $x - x_0$ ed $y - y_0$ al posto di h e k, dove x_0, y_0, è un punto interno a (ρ, ρ') e le x, y sono soggette alle condizioni

$$(6') \qquad |x - x_0| < \rho - |x_0|, \quad |y - y_0| < \rho - |y_0|,$$

viene lo sviluppo di Maclaurin:

$$(8) \qquad S(x, y) = S(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}(y - y_0) + \dots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} a'_{n\nu}(x - x_0)^n(y - y_0)^\nu.$$

La serie (8) si dice *dedotta* da (3) *relativamente* al punto x_0, y_0. Serie dedotta

168. La costruzione delle serie dedotte permette di stabilire, analogamente a quanto è fatto ai n.i 38 e seg. per il caso di una sola variabile, il concetto di continuazione analitica, e di dedurne quello di funzione analitica secondo WEIERSTRASS.

funzione analitica

Se l'ultimo membro della (8) converge in un campo di valori di x ed y non soddisfacenti alle (6') e per i quali la $S(x, y)$ non converge, si dirà che questo ultimo membro dà, in quel campo, la **continuazione analitica** della $S(x, y)$. Come la serie (8) è dedotta dalla (3), così da questa se ne possono dedurre altre col procedimento medesimo, e questi sviluppi di MACLAURIN possono via via continuare la $S(x, y)$ in campi sempre più estesi. Ognuno di questi sviluppi in serie prenderà il nome di *elemento di funzione analitica*; la *funzione analitica* è l'insieme degli elementi dedotti da uno di essi.

Campo di regolarità

L'insieme dei punti (x, y) appartenenti al campo di convergenza dei vari elementi costituenti una data funzione analitica forma il *campo di regolarità* della funzione: la funzione si dice *regolare* in ogni punto del campo, ed ogni tale punto si dice anche *punto regolare* della funzione. Un punto non regolare è detto *singolare*. Infine, come nel caso di una variabile, la funzione analitica può essere *monodroma* o *polidroma*.

Se (a, b) è dunque punto regolare per una funzione $F(x, y)$, sarà, per un intorno conveniente di (a, b),

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n\nu}(x-a)^n(y-b)^\nu.$$

Def

∞, b

Per estensione, si dirà che il punto $(x=\infty, y=b)$ è regolare per una funzione quando vale per essa uno sviluppo della forma

$$\sum_n\sum_\nu a_{n\nu}\frac{(y-b)^\nu}{x^n}$$

convergente per $|x|>\rho$, $|y-b|<\rho'$; si dirà che è regolare il punto $(x=a, y=\infty)$ se vale uno sviluppo

a, ∞

$$\sum_n\sum_\nu a'_{n\nu}\frac{(x-a)^n}{y^\nu},$$

infine che è regolare il punto $(x=\infty, y=\infty)$ se vale uno sviluppo

∞, ∞

$$\sum_n\sum_\nu \frac{a''_{n\nu}}{x^n y^\nu},$$

e da questi, in modo analogo a quanto è detto al n.° 37, si possono ottenere sviluppi dedotti.

Funzione intera a due variabili è quella rappresentata da una serie (3) convergente per ogni valore finito di x e di y; tale è la $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n y^n}{n!}$. A rappresentare una tale funzione, basta un elemento solo per tutto il suo

campo di regolarità, che è costituito dai due piani-sfera x, y, eccettuati i punti $x=\infty$, $y=\infty$.

169. Dal n.° 167, 6.°) risulta che « ogni funzione analitica è monogena « in tutto il proprio campo di regolarità; che ammette le derivate parziali « di tutti gli ordini e per esse vale l'inversione nell'ordine delle deriva- « zioni; che infine tutte le derivate sono del pari analitiche e col medesimo « campo di regolarità ».

analitica = monogena

170. Di questa ultima proposizione vale la reciproca, cioè: « Una « funzione di due variabili $F(x, y)$, monogena ad un valore in un campo « (A, B), dove A e B sono aree semplicemente connesse rispettivamente « nel piano x e nel piano y, è funzione analitica regolare in queste aree ».

monogena = analitica

Si consideri all'uopo un'area semplicemente connessa A_1 interna ad A ed i cui punti abbiano dal contorno di A una distanza superiore ad un dato numero positivo δ ed una simile area B_1 interna a B; sia poi (x_0, y_0) un punto arbitrario entro (A_1, B_1) ed M il massimo valore assoluto di $F(x, y)$ in (A_1, B_1). Per essere $F(x, y)$ monogena rispetto ad y entro B_1, sarà (n.° 93) per ogni x entro A_1 sviluppabile in una serie di potenze di $y-y_0$, i cui coefficienti saranno funzioni di x: sia essa

A_1

δ

$$F(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu(x)(y-y_0)^\nu; \tag{9}$$

ma per essere il raggio di convergenza di questa serie superiore a δ, qualunque sia x, ne verrà (n.° 44)

$$|\alpha_\nu(x)| < \frac{M}{\delta^\nu}$$

e quindi la serie (9) sarà convergente uniformemente rispetto ad x entro A_1. Essendo allora c una curva chiusa semplice in A_1 sarà, per essere $F(x, y)$ monogena in x, nullo il suo integrale esteso a (c) (n.° 81), e potendosi integrare termine a termine per la convergenza uniforme, sarà

Cauchy

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(y-y_0)^\nu\int_{(c)}\alpha_\nu(x)dx = 0, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

ma ciò richiede che sia (n.° 34, 5.°)

$$\int_{(c)}\alpha_\nu(x)\,dx = 0,$$

e pertanto, per il teorema di MORERA (n.° 94), la $\alpha_\nu(x)$ sono funzioni analitiche regolari in A_1. Come tali, esse sono sviluppabili in serie di po-

(1) La dimostraz. si fonda sulla [illegible] da 2 ad 1 variabile -

tenze di $x-x_0$ nell'intorno del punto x_0 di A_1, e quindi la (9) viene a scriversi

$$\boxed{F(x,\ y)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n\nu}(x-x_0)^n(y-y_0)^\nu,}$$

e poichè A_1, B_1 si possono prendere prossimi ad A, B tanto quanto si vuole, la proposizione è dimostrata.

Tutto quanto è detto nel presente § si può estendere, senza modificazioni di sostanza, alle funzioni di tre o più variabili.

Importa appena di notare come le regole del calcolo differenziale per le ~~funzioni di più variabili~~ reali si applichino senza modificazione alle funzioni monogene per valori complessi delle variabili: segnaliamo in particolare il teorema delle funzioni composte.

§ II. Principio di conservazione delle proprietà analitiche.(1)

A y α — B z β — C_x

171. Sia $F(y,\ z)$ una funzione analitica delle due variabili y e z, regolare in un campo $(A,\ B)$ definito come al n.° 165 nei piani delle variabili. Siano poi $\alpha(x)$, $\beta(x)$ due funzioni analitiche regolari della variabile x in un campo C, ed i valori assunti da $\alpha(x)$, $\beta(x)$ in C diano rispettivamente punti interni al campo A per la α, al campo B per la β.

Preso un punto x_0 interno a C, le $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ammetteranno rispettivamente, per $|x-x_0|<r$, gli elementi

$$(1)\qquad \begin{cases} y=\alpha(x)=P(x-x_0)=y_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots, & y-y_0=a_1(\ )+ \\ z=\beta(x)=Q(x-x_0)=z_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\dots; & z-z_0=b_1(\ )+ \end{cases}$$

il punto $(y_0,\ z_0)$ essendo interno ad $(A,\ B)$, la $F(y,\ z)$ ammette, in corrispondenza, lo sviluppo in serie

$$(2)\qquad F(x,\ y)=\sum_{\mu}\sum_{\nu}c_{\mu\nu}(y-y_0)^\mu(z-z_0)^\nu,$$

e, per la convergenza uniforme di questo sviluppo in un intorno di y_0, z_0, sostituendo le (1), si avrà (n.° 57) per $F[\alpha(x),\ \beta(x)]$ uno sviluppo in serie di potenze di $x-x_0$:

$$(3)\qquad F[P(x-x_0),\ Q(x-x_0)]=\sum_n A_n(x-x_0)^n=R(x-x_0).$$

Nel cerchio di convergenza comune a $P(x-x_0)$, $Q(x-x_0)$, si prenda ora un punto x_1, e si formino gli elementi dedotti

relativi ad x_1 (n.° 38); siano essi $P_1(x-x_1)$, $Q_1(x-x_1)$; essi convergono almeno entro il cerchio $|x-x_1|<r-|x_0-x_1|$, ma possono eventualmente convergere in un cerchio maggiore (dando, come è noto, nella parte non comune al cerchio $|x-x_0|\leq r$, la continuazione analitica delle $P(x-x_0)$, $Q(x-x_0)$. Anche la

$$(4)\qquad F[P_1(x-x_1),\ Q_1(x-x_1)]$$

sarà sviluppabile in serie di potenze di $x-x_1$, e poichè le P_1, Q_1 danno rispettivamente gli stessi valori di P, Q nel campo comune di convergenza, questo sviluppo coinciderà collo sviluppo $R_1(x-x_1)$ dedotto da (3) relativamente al punto x_1.

172. Ciò posto, le funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$ siano tali « che i « loro elementi $P(x-x_0)$, $Q(x-x_0)$ soddisfino all'equazione

$$(5)\qquad F[\alpha(x),\ \beta(x)]=0:$$

« dico che alla medesima equazione soddisfano gli elementi « dedotti $P_1(x-x_1)$, $Q_1(x-x_1)$ »: in altri termini, la relazione (5), verificata nel cerchio $|x-x_0|<r$, rimane verificata anche nella parte del cerchio di convergenza di P_1, Q_1 non comune al primo cerchio. Ed infatti essendo, per l'ipotesi, la $R(x-x_0)$ identicamente nulla, sarà identicamente nullo il suo elemento dedotto $R_1(x-x_1)$.

Ne viene di conseguenza che gli elementi comunque dedotti, immediatamente o mediatamente, da $P(x-x_0)$, $Q(x-x_0)$, soddisfaranno tutti alla relazione (5) e quindi vi soddisfaranno le funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$ in tutta quella parte del loro campo di validità per la quale i rispettivi valori y, z appartengono al campo di regolarità della $F(x,\ y)$.

Nel caso in cui $F(y,\ z)$ è funzione intera, razionale o trascendente, si può dunque enunciare che: « Se gli elementi « relativi ad un punto regolare di due funzioni $y=\alpha(x)$, « $z=\beta(x)$, soddisfano all'equazione $F(y,\ z)=0$, vi soddisfano « gli elementi dedotti da quelli, e quindi le funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$ « in tutto il loro campo di regolarità ».

173. Questa proposizione si estende immediatamente al caso di tre o più funzioni di una o di più variabili, ed anche al caso di un sistema di più equazioni; alcune delle funzioni potendo essere le derivate (o le differenze finite) delle altre, in modo che « se gli elementi delle funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ relativi « ad un punto regolare godono delle proprietà espresse da « un sistema di equazioni ordinarie, o differenziali a derivate « ordinarie o parziali, o alle differenze finite, ecc.,

$$F_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots q),$$

« i cui primi membri siano funzioni intere delle p variabili « che vi figurano, la stessa proprietà è goduta da ogni ele- « mento dedotto, e quindi dalle funzioni α_h in tutto il loro « campo di regolarità ».

In ciò consiste il principio enunciato e dimostrato dal WEIERSTRASS e da lui detto *principio di conservazione delle proprietà analitiche*; esso vale una volta di più a mostrare quanto sia legittimo e coerente il concetto di funzione analitica, fondato sul procedimento della continuazione analitica o deduzione tayloriana degli elementi.

§ III. Teorema fondamentale delle funzioni implicite: il caso semplice.

174. Come è noto, un'equazione fra due variabili

$$F(x, y) = 0$$

vale, in casi estesi, a determinare y come funzione — funzione implicita — della x considerata come variabile indipendente.

Nel caso delle variabile reali ed essendo F funzione in senso generale delle due variabili, sono note [1] condizioni sufficienti, pochissimo restrittive, sotto cui la funzione implicita risulta determinata, essa pure come funzione in senso generale. Ma la questione va posta anche al punto di vista delle funzioni analitiche: supposta F funzione analitica delle due variabili — ora complesse — x ed y, si può chiedere se

Teorema del Dini

[1] V. *Calcolo*, n.i 255 e seg..

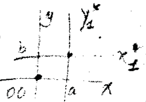
e sotto quali condizioni l'equazione determini y come funzione analitica di x. A questa domanda risponde il seguente

Teorema fondamentale [1]. — « Sia $F(x, y)$ una funzione « analitica delle due variabili x, y, regolare monodroma nel « campo (A, B), la quale si annulli per un punto $x = a$, $y = b$ « del campo, mentre non vi si annulla la sua derivata par- « ziale $F_y'(x, y)$ presa rispetto ad y. Sotto queste ipotesi, « esiste in A, per un intorno $|x - a| < r$ del punto a, una « funzione analitica regolare y di x, che per $x = a$ assume « il valore $y = b$ e che soddisfa all'equazione $F = 0$: se cioè « $y = \alpha(x)$ è questa funzione, si ha identicamente

$$F[x, \alpha(x)] = 0 \text{ ».}$$

$F(a,b)=0$
$F'_y(a,b)\neq 0$

a) Si cominci coll'osservare che posto $x_1 = x - a$, $y_1 = y - b$, la $F(x, y)$ si muta in una $F(x_1, y_1)$ per la quale il campo di validità contiene il punto $x_1 = 0$, $y_1 = 0$.



Assumiamo le x_1, y_1 come variabili, togliendo gli indici, e sia

$$(1) \qquad F(x, y) = 0$$

l'equazione proposta, con

$$(2) \qquad F(0, 0) = 0, \quad F_y'(0, 0) \neq 0.$$

Lo sviluppo di $F(x, y)$ in serie di potenze di x ed y nell'intorno di $x = 0$, $y = 0$, sarà dunque della forma

$$(3) \qquad F(x, y) = y\varphi(y) + f(x, y),$$

$F'_y = \varphi(y) + y\varphi'(y) + f'_y(x,y)$

dove

$$\varphi(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \ldots, \quad c_0 \neq 0,$$

mentre $f(x, y)$ è nulla per $x = 0$.

Da (3) si ha:

$c_0\left(1 + \frac{c_1}{c_0}y + \frac{c_2}{c_0}y^2 + \ldots\right)$

$$(4) \quad \begin{aligned} \log F(x, y) &= \log y + \log \varphi(y) + \log\left(1 + \frac{f(x, y)}{y\varphi(y)}\right) = \\ &= \log y + \log c_0 + \log\left(1 + \frac{c_1}{c_0}y + \frac{c_2}{c_0}y^2 + \ldots\right) + \log\left(1 + \frac{f(x, y)}{y\varphi(y)}\right). \end{aligned}$$

sviluppabili

[1] Dimostrato dapprima dal CAUCHY: più tardi dal WEIERSTRASS, con maggiore precisione e senza fare ricorso agli integrali curvilinei. La dimostrazione che qui viene data si giova, per maggiore scioltezza ed efficacia, di un metodo misto.

A questo punto, si determini un raggio ρ_1 tale che per $|y| < \rho_1$ sia $|\varphi(y)| > A$, essendo A un numero assegnabile [1]; indi un raggio ρ_2 tale che per $|y| < \rho_2$, assegnato un numero positivo $q < 1$, sia

$$\left| \frac{c_1}{c_0} y + \frac{c_2}{c_0} y^2 + \dots \right| < q,$$

e si indichi con ρ il minore fra i due numeri ρ_1 e ρ_2; infine si prenda $\rho' < \rho$. Nella corona circolare data da $\rho' < |y| < \rho$, si ha pertanto $|y\varphi(y)| > \rho' A$. Ma poichè la serie di potenze $f(x, y)$, continua nell'intorno di $x = 0$, $y = 0$, è nulla per $x = 0$, si potrà determinare un raggio r tale che per ogni $|x| < r$ ed ogni y nella anzidetta corona sia

$$|f(x, y)| < \rho' A \mu,$$

μ essendo un numero positivo prefissato minore d'uno.

In base a ciò, nella (4), il

$$\log\left(1 + \frac{f(x, y)}{y\varphi(y)}\right)$$

può, nei campi indicati (e cioè $|x| < r$, $\rho' < |y| < \rho$), svilupparsi in serie uniformemente convergente di serie di potenze intere positive e negative della y, e quindi (n.° 120, *b*) in una unica serie di LAURENT, i cui coefficienti saranno funzioni analitiche di x, regolari per $|x| < r$. Aggiungendovi lo sviluppo di $\log\left(1 + \frac{c_1}{c_0} y + \dots\right)$, analitico regolare per $|y| < \rho$, si avrà, da (4):

$$\log F(x, y) = \log y + \log c_0 + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu(x) y^\nu, \tag{5}$$

e derivando rispetto ad y:

$$\boxed{\frac{F_y'(x, y)}{F(x, y)} = \frac{1}{y} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu\alpha_\nu(x) y^{\nu-1}.} \tag{6}$$

[1] Si potrebbe per esempio fare $A = \frac{|c_0|}{2}$.

perchè in una serie di Laurent manca il termine $\log y$
perchè mancando in Σ il termine $\frac{a}{y}$ che possa dare sommato con $\frac{1}{y}$ fuori Σ, per residuo $a+1$, tale residuo è 1, cioè il coeff di y^{-1}.

indice logaritmico

E poichè la sommatoria del secondo membro della (6), come derivata di una serie di LAURENT, non contiene termine in y^{-1}, il residuo della derivata logaritmica di $F(x, y)$ è uguale all'unità. Segue da ciò (n.° 107, *c*) che la $F(x, y)$ ammette, per ogni valore $\bar{x}$ di $|x| < r$, una radice unica di prim'ordine $\bar{y}$, e poichè questa radice è data (n.° 108) da

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\rho)} \frac{y F_y'(x, y) dy}{F(x, y)} \tag{7}$$

e quindi dal residuo di $\frac{y F_y'(x, y)}{F(x, y)}$, cioè dal coefficiente di y^{-2} nel secondo membro di (6), essa sarà $\bar{y} = -\alpha_{-1}(\bar{x})$, analitica regolare per $|x| < r$. Con ciò rimane dimostrato « che per « $|x| < r$, l'equazione

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

« ammette una radice semplice, funzione analitica rego- « lare $\alpha(x)$ di x, nulla per $x = 0$ ed il cui valore assoluto è « inferiore a ρ' ». Trasportando nuovamente l'origine nel punto $x = a$, $y = b$, il teorema enunciato in principio del presente n.° risulta dimostrato.

175. *a*) Data l'equazione (1) soddisfatta da $x = a$, $y = b$ e ferme le ipotesi del teorema precedente, risulta dal teorema stesso l'esistenza della funzione implicita $\alpha(x)$ che vi soddisfa, funzione analitica regolare entro un cerchio di centro a e che per $x = a$ assume il valore b; di più, è dato il modo di determinarla effettivamente sotto forma di serie di potenze di $x - a$, poichè essa non è altro « che il coefficiente « di $(y - b)^{-1}$, preso con segno cambiato, nello sviluppo di « $\log F(x, y)$ ». Se ora si formano le dedotte successive dell'elemento $\alpha(x)$ di funzione analitica così determinato, queste, finchè si mantengono valide le ipotesi fatte su $F(x, y)$ e finchè $F_y'(x, y)$ è differente da zero, soddisfaranno alla (1) in virtù del principio del n.° 172; queste dedotte si possono ottenere prendendo x_0 nel cerchio $|x - a| < r$, ed, essendo $y_0 = \alpha(x_0)$, procedendo su $x = x_0$, $y = y_0$ come si è fatto al n.° precedente per $x = a$, $y = b$: e così di seguito. In tale

valore di $\alpha(x)$

il conservazione

$\alpha^n =$

guisa si viene a determinare, in tutto il suo campo di validità, una funzione analitica soddisfacente alla equazione (1).

$\lambda = -n\alpha$

b) Qualora della $\alpha(x)$ si volessero le potenze seconda, terza, ecc., basterebbe, per il teorema del n.° 108, cercare i residui di $\dfrac{y^2 F_y'(x, y)}{F(x, y)}$, $\dfrac{y^3 F_y'(x, y)}{F(x, y)}$,... rispettivamente; e questi non sono altro, per la (6), che $-2\alpha_2(x)$, $-3\alpha_3(x)$,....

c) Il caso di *a*, o *b*, od entrambi infiniti si riconduce al precedente, sostituendo, come al solito, ad $x - \infty$ o ad $y - \infty$, o ad entrambe, la $\dfrac{1}{x}$ o la $\dfrac{1}{y}$ rispettivamente.

§ IV. Il caso generale.

176. Risoluta così la questione della esistenza e della determinazione della funzione implicita nel caso di $F_y'(x, y)$ differente da zero, rimane da esaminare come si debba modificare la conclusione qualora questa condizione non sia più soddisfatta. Sia pertanto ancora l'equazione

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

soddisfatta da $x = a$, $y = b$ in un suo campo di regolarità, e sia ora

$$\boxed{F_y'(a, b) = 0,}$$

il che porta ad uno sviluppo di $F(x, y)$ della forma

$$F(x, y) = (y - b)^s \varphi(x - b) + f(x, y), \tag{2}$$

dove è *s* intero positivo e

$$\varphi(y - b) = c_0 + c_1(y - b) + c_2(y - b)^2 + \dots, \quad c_0 \neq 0.$$

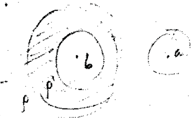
Procedendo come al n.° 174, si giunge allo sviluppo

$$\frac{F_y'(x, y)}{F(x, y)} = \frac{s}{y - b} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_\nu(x)}{(y - b)^{\nu+1}} \tag{3}$$

perchè $\frac{1}{f}$ ha un polo di ordine 1 dove f ha una radice ed ha per corrispondente residuo l'ordine di molteplicità della radice stessa

valido (essendo ρ, ρ', r numeri positivi determinati come al citato n.° 174) per

$$\rho' < |y - b| < \rho, \quad |x - a| < r,$$



e dove le $\lambda_\nu(x)$ sono analitiche regolari in x per $|x - a| < r$.

L'indice logaritmico (n. 107) essendo s, si hanno, per ogni x tale che sia $|x - a| < r$, s radici dell'equazione (1), $y_1, y_2, \dots y_s$, tali che è $|y_k - b| < \rho'$; e poichè ρ' è arbitrariamente piccolo ed r è in dipendenza di ρ', queste s radici si possono dire tali che « $y_k - b$ è infinitesima con $x - a$, per $k = 1, 2, \dots s$ ».

cioè $y_k \to b$, $x \to a$

177. In questo caso non è più possibile, come al n.° 174, di determinare in generale le radici come serie di potenze intere positive di $x - a$; al teorema del § III va invece sostituita la seguente proposizione:

« Sotto le ipotesi fatte, ad ogni x del cerchio (a, r)
« corrispondono s radici dell'equazione (1) comprese nel
« cerchio (b, ρ'), e che per $x = a$ si riducono tutte ad $y = b$.
« Queste radici coincidono con quelle di un'equazione alge-
« brica di grado s, i cui coefficienti sono funzioni analitiche
« di x regolari per $|x - a| < r$ ».

Infatti, se si calcola lungo la circonferenza (b, ρ) l'integrale definito

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} \frac{y^m F_y'(x, y)\,dy}{F(x, y)}, \tag{4}$$

dove m è un intero positivo, questo, come risulta dal n.° 108, dà la somma delle potenze m^{esime} delle $y_1, y_2, \dots y_s$; ma d'altra parte, come residuo della funzione sotto il segno, questo integrale è uguale al coefficiente $\lambda_m(x)$ nello sviluppo (3). Si ha dunque

Σ

$$\begin{aligned}
\sum y_k &= y_1 + y_2 + \dots + y_s = \lambda_1(x) \\
\sum y_k^2 &= y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_s^2 = \lambda_2(x) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum y_k^s &= y_1^s + y_2^s + \dots + y_s^s = \lambda_s(x)
\end{aligned}$$

funzioni simmetriche

e da queste, come è noto dall'Algebra (¹), si possono ricavare, in forma razionale intera, i coefficienti dell'equazione

$$y^s + \beta_1(x)y^{s-1} + \beta_2(x)y^{s-2} + \dots + \beta_s(x) = 0 \tag{5}$$

avente $y_1, y_2, \dots y_s$ come radici. E per essere le λ_h analitiche regolari in x per $|x-a| < r$, tali sono le β_h; il teorema è così dimostrato.

Girard

(¹) Mediante le formule di NEWTON (v. *Algebra Complementare*, n.° 415, *b*).

CAPITOLO DODICESIMO

LE FUNZIONI ALGEBRICHE

Funzione algebrica y(x) è dunque ogni radice di un'equaz. algebrica, cioè di un equazione ottenuta eguagliando a zero una ~~funzione razionale intera~~ in 2 variabili

§ I. Le funzioni algebriche come funzioni analitiche.

178. Il teorema fondamentale del Capitolo precedente serve di base alla teoria analitica delle funzioni algebriche. Come è noto, uguagliando a zero una funzione razionale intera $F(x, y)$ delle due variabili x, y si ha un' *equazione algebrica*

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

che definisce una delle variabili come funzione — *funzione algebrica* — dell'altra: usualmente, la x si assume come variabile indipendente, la y come funzione di questa (¹). Si supporrà la F *irriducibile*, cioè non decomponibile in un prodotto di fattori razionali interi; ed essendo m il suo grado rispetto ad y, si scriva

polinomio

$$F(x, y) = \alpha_0(x)y^m + \alpha_1(x)y^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1}(x)y + \alpha_m(x). \tag{2}$$

(¹) La teoria delle funzioni algebriche di una variabile coincide con quella delle curve algebriche piane. Una equazione (1), di grado m nel complesso delle due variabili x, y, rappresenta una curva di ordine m (una C_m); una coppia di valori $x = a$, $y = b$ soddisfacente all'equazione dà un *punto* della curva. Sebbene questa denominazione si riferisca alla rappresentazione cartesiana della curva, in cui le coordinate vengono originariamente considerate reali, pure nello studio generale degli enti algebrici, di cui quello delle curve algebriche piane costituisce un primo capitolo, s'impone la considerazione dei valori delle variabili general-

Ad un valore arbitrario di x che non annulli $\alpha_0(x)$, corrispondono m valori per y che soddisfano alla (1), e questi valori sono distinti, eccezione fatta per quei valori di x pei quali, insieme alla (1), è soddisfatta la

$$(3) \qquad F_y'(x,\ y) = 0,$$

cioè per le radici $c_1,\ c_2, \ldots$ del discriminante $D(x)$, risultato della eliminazione di y fra (1) e (3) [1]. Si esclude essenzialmente il caso che il discriminante sia identicamente zero, cioè che $F(x,\ y)$ contenga come divisore la potenza di una funzione razionale in x ed y: questa esclusione è naturalmente compresa nell'ipotesi della irriducibilità di $F(x,\ y)$.

Ai valori di x che annullano $\alpha_0(x)$ ed eventualmente anche $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x), \ldots$ corrispondono meno di m radici per l'equazione (2): ma la sostituzione di $\frac{1}{y}$ ad y mostra facilmente come le radici finite perdute siano sostituite da altrettante radici infinite.

179. *a*) Data l'equazione (1), si escludano dal piano della variabile x il punto $x = \infty$, i punti $c_1,\ c_2, \ldots$ radici del discriminante $D(x)$, ed i punti $u_1,\ u_2, \ldots,$ radici di $\alpha_0(x)$, punti che sono complessivamente in numero finito; indi, nella parte rimanente del piano complesso, si assuma un punto arbitrario $x = a$. A questo, l'equazione $F(a,\ y) = 0$ farà corrispondere m radici distinte $y = b_1,\ b_2, \ldots\ b_m$. Consideriamo una di queste, che

---

mente complessi, e ciò per la natura stessa delle relazioni che legano queste variabili, relazioni espresse da funzioni analitiche la cui essenza impone alle variabili il carattere complesso. Non è compito delle presenti Lezioni di addentrarsi nello studio delle funzioni algebriche, per le quali rimandiamo il lettore a trattati speciali e per esempio, per citare un libro notevole italiano, alla recente opera di ENRIQUES e CHISINI « *Teoria geometrica delle equazioni* », (Bologna, Zanichelli, 1915-19): ma conviene notare come la dimostrazione che diamo, fondandola sulla teoria delle funzioni implicite, del carattere analitico di queste funzioni, costituisce un preambolo necessario a qualsiasi studio organico delle curve e degli enti algebrici in generale.

[1] Se la (2) è di grado m nel complesso delle due variabili, e quindi $\alpha_k(x)$ è di grado k al più in x, il discriminante è, come è noto, al più di grado $m(m-1)$ in x e quindi i punti z_h sono al più in numero di $m(m-1)$.

come coeff. di y^{m-k}

indicheremo genericamente con b: per il teorema del n.° 174, essendo $F_y'(a,\ b)$ differente da zero, esisterà un elemento di funzione analitica, rappresentato da una serie di potenze

$$(4) \qquad y = P(x - a) \qquad P(0) = b$$

che per $x = a$ assume il valore b e che soddisfa all'equazione (1); questo elemento si può continuare analiticamente in tutto il piano, esclusi i punti c_h ed u_k, e poichè (n.i 172, 175, *a*) ogni elemento dedotto da $P(x - a)$ soddisfa del pari all'equazione (1), così l'elemento (4) serve alla definizione di una funzione analitica, che è la funzione algebrica definita da quella equazione.

Ciò valendo per ognuna delle radici $b_1,\ b_2, \ldots\ b_m$, abbiamo, nell'intorno di a, m elementi analoghi a (4): ognuno di essi darà origine ad un *ramo* della funzione algebrica, e si vedrà più avanti (§ II) come questi rami possano fra loro interferire. Gli elementi relativi a queste varie radici

$$y_h = P_h(x - a), \quad (h = 1,\ 2, \ldots\ m)$$

sono fra loro diversi, ed è b_h il primo coefficiente in P_h.

b) Poichè la funzione algebrica è analitica regolare in tutto il piano, tolti i punti c_h ed u_h, ne risulta senz'altro per essa la continuità, la derivabilità di tutti gli ordini e l'effettiva rappresentazione mediante serie di potenze.

c) L'elemento (4) converge entro un cerchio di centro a tale che sulla sua circonferenza deve trovarsi (n.° 46) qualche punto singolare della funzione algebrica: ma siccome risulta da quanto precede che solo i punti c_h ed u_k possono essere singolari per la funzione, così il raggio di convergenza dell'elemento (4) è almeno la distanza del punto a dal più prossimo di quei punti c_h ed u_k.

§ II. Punti critici. — Analisi dei sistemi circolari.

180. Le radici c_h del discriminante vengono detti *punti critici algebrici* per la funzione algebrica: ci proponiamo di studiare il comportamento della funzione nell'intorno di uno di questi punti. Def

Indicato genericamente con c un punto critico, l'equazione $F(c, y) = 0$ ammette una radice multipla b di cui sia s l'ordine di multiplicità $(2 \leq s \leq m)$: sarà applicabile il risultato del n.° 177, cioè nell'intorno di c si avranno per la

$$(1) \qquad F(x, y) = 0$$

s radici che per x tendente a c tendono a b, e che coincidono colle radici di un'equazione di grado s in y a coefficienti regolari in x. Dal centro c, con raggio sufficientemente piccolo ed in ogni caso inferiore alla metà della distanza di c dal più prossimo fra gli altri punti critici ed i punti u_h, si descriva una circonferenza che si dirà (c): si prenda poi su (c) un punto $\bar{x}$ arbitrario. Questo punto è regolare per la funzione algebrica e si hanno m radici distinte $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_m$ per l'equazione $F(\bar{x}, y) = 0$; s di queste $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_s$ tendono a b per x tendente a c, e ad esse corrispondono gli elementi relativi ad $\bar{x}$:

$$(2) \qquad y_1 = P_1(x - \bar{x}), \quad y_2 = P_2(x - \bar{x}), \ldots \quad y_s = P_s(x - \bar{x}),$$

che si riducono rispettivamente ad $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_s$ per $x = \bar{x}$. Si faccia ora, dell'elemento y_1, la continuazione analitica per mezzo di un sistema di punti succedentisi lungo la circonferenza (c) nel senso delle rotazioni positive: quando si sarà tornati al punto di partenza (o, come si dice, quando si sarà fatto un giro intorno al punto c) sarà stata eseguita su y una determinata operazione che verrà indicata con $O y$, e parimente si indicherà con O^2, O^3,... la iterazione per due, tre,... volte di questa operazione, e con O^{-1} l'operazione inversa.

fare un giro
nel dire continuaz.
analitica
lungo il contorno

Ora si cerchi quale possa essere $O y_1$, cioè quale elemento si ritrovi partendo da $P_1(x - \bar{x})$ e proseguendo la continuazione, come si è detto, finchè si ritorna in $\bar{x}$. Il risultato, intanto, non può essere che uno degli elementi (2): esso può, come prima ipotesi, essere lo stesso $P_1(x - \bar{x})$ cioè $O y_1 = y_1$. In tal caso, la y_1 è un ramo monodromo di funzione analitica nell'intorno di c; gli è dunque applicabile lo sviluppo di Laurent in una corona circolare di centro c e di raggio interno arbitrariamente piccolo: ma tendendo y_1 a b per x tendente a c (n.° 176), nello sviluppo di Laurent dovranno mancare le potenze negative di $x - c$, e quindi la y_1 è rego-

altrimenti $y \to \infty$

cioè $O^{-1} y_2 = y_1$

lare per $x = c$. « Per un ramo y_1 pel quale sia $O y_1 = y_1$, il « punto c è dunque punto regolare ».

Ma accadrà generalmente che l'operazione $O y_1$ conduca non all'elemento y_1, ma ad un altro dei (2); sia ad esempio $O y_1 = y_2$. Sarà allora $O^2 y_1 = O y_2$; ma non può essere $O y_2 = y_2$, poichè in questo caso sarebbe $O^{-1} y_2 = y_2$ e non, come vuole l'ipotesi, $O^{-1} y_2 = y_1$: dovrà dunque essere o $O y_2 = y_1$, o $O y_2$ uguale ad un altro degli elementi (2), ad esempio y_3. Se è $O y_2 = y_1$, sarà

$$(3) \qquad O y_1 = y_2, \quad O^2 y_1 = y_1, \quad O^3 y_1 = y_2, \ldots$$

e così periodicamente: la continuazione di y_1 scambierà y_1 con y_2 ma non porterà mai ad uno degli altri elementi (2); se invece è $O y_2 = y_3$, non potrà essere nè $O y_3 = y_3$, nè $O y_3 = y_2$, poichè ne verrebbe $O^{-1} y_3 = y_3$ o $O^{-1} y_2 = y_3$, mentre l'ipotesi porta a $O^{-1} y_3 = y_2$, $O^{-1} y_2 = y_1$; sarà dunque ancora o $O y_3 = y_1$, nel quale caso

$$(4) \qquad O y_1 = y_2, \quad O^2 y_1 = y_3, \quad O^3 y_1 = y_1, \ldots$$

e si ottengono periodicamente le y_1, y_2, y_3, oppure $O y_3 = y_4$, e così via. Nel caso (3), si dice di avere un *sistema circolare* di due elementi, nel caso (4) un sistema circolare di tre elementi o radici; nel caso $O y_1 = y_1$, il sistema si riduceva ad un solo elemento.

Partendo da y_1, le radici danno dunque luogo ad un sistema circolare; se questo non comprende tutte ed s le radici, si consideri una $y_q = P_q(x - \bar{x})$ che non vi appartenga: partendo da y_q, si darà origine ad un nuovo sistema circolare che non comprenderà alcuna radice del primo sistema, e così via. Riassumendo, si può concludere che « nell'intorno di un punto critico, gli elementi relativi ad ogni « radice multipla in quel punto si distribuiscono in uno o « più sistemi circolari ».

181. Dei sistemi circolari cui dà origine una radice multipla di (1) per $x = c$, nell'intorno di questo punto critico c, conviene fare un'analisi più minuta, la quale ne permetta la separazione. A questo uopo, cambiando $x - a$ in x ed $y - b$ in y, porteremo il punto critico in $x = 0$, ed $y = 0$, sarà la

(·) Si tratta separare i diversi rami

radice multipla considerata, di ordine s di multiplicità; con ciò, il primo membro della (1) prenderà la forma

(5) $$\boxed{F(x,\ y) = y^s\varphi(y) + f(x,\ y),}$$

dove $\varphi(y)$ non si annulla per $y=0$, mentre $f(x,\ y)$ si annulla per $x=0$.

I valori di x, y, prendendosi nell'intorno di $x=0$, $y=0$, sono da considerarsi infinitesimi, e la nostra analisi avrà, in sostanza, l'oggetto di determinare l'ordine d'infinitesimo della y in relazione, in virtù della (1), coll'infinitesimo x considerato come principale. (·)

1° caso

182. Supponiamo dapprima che, nella (5), la $f(x,\ y)$ contenga un termine in x di primo grado ax; l'equazione (1) si scrive allora (·)

(6) $$\boxed{ax + c_0y^s + F_1(x,\ y) = 0.}$$

Qui, almeno due termini devono essere gl'infinitesimi di ordine infimo [1], e poichè, nel polinomio $F_1(x,\ y)$, ogni termine ha ordine superiore ad x o ad y^s, così x ed y^s sono del medesimo ordine. Questa osservazione conduce a porre

$\frac{y}{x^{\frac{1}{s}}} \to \ell$

(7) $$\boxed{x = t^s,\quad y = kt,}$$ $t = x^{\frac{1}{s}}$

con che la (6) viene a scriversi $a\,t^s + c_0 k^s t^s + F_1(t^s, kt^s) = 0$

(8) $$a + c_0k^s + t\psi(t,\ k) = 0$$

$x=0,\ y=0$

dove ψ è polinomio intero in t, k. Al valore $t=0$, la (8) fa corrispondere le s radici $\bar{k}_1,\ \bar{k}_2, \dots \bar{k}_s$, dove $\bar{k}_1$ è una qualunque delle radici s^{me} di $-\dfrac{a}{c_0}$, e dove

$$\boxed{\bar{k}_2 = \varepsilon\bar{k}_1,\quad \bar{k}_3 = \varepsilon^2\bar{k}_1, \dots \bar{k}_s = \varepsilon^{s-1}\bar{k}_1,}$$

posto $\boxed{\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{s}}}$. Ad ognuna di queste radici corrisponde, per

[1] Poichè, come è naturale, la eguaglianza a zero (6) non ha carattere di identità.

(·) Ad es. sia: $F(x,y) = y^2+xy-x=0$; la (6) è $-x+y^2+xy=0$; posto $x=t^2,\ y=kt$ la (8) è $-1+k^2+kt=0$ e per $t=0$, $k=\pm1$. Perciò la (9) è

$y_1 = -x^{\frac{1}{2}} + g_2x^{\frac{2}{2}} + g_3x^{\frac{3}{2}} + g_4x^{\frac{4}{2}} + \dots$

$y_2 = x^{\frac{1}{2}} + g_2x^{\frac{2}{2}} + g_3x^{\frac{3}{2}} + g_4x^{\frac{4}{2}} + \dots$

il n.° 179, un elemento di funzione analitica regolare per $t=0$: sia

$$k_q = \bar{k}_q + g_2t + g_3t^2 + \dots,\quad (q = 1,\ 2,\ 3, \dots s)$$

l'elemento corrispondente a $\bar{k}_q$. Questo darà, per le (7), la radice di (1)

(9) $$\boxed{y_q = \bar{k}_q x^{\frac{1}{s}} + g_2x^{\frac{2}{s}} + g_3x^{\frac{3}{s}} + \dots,\quad (q = 1,\ 2, \dots s)}$$

colla proprietà che per x tendente a zero, $y_q : x^{\frac{1}{s}}$ tende a $\bar{k}_q$. Se ora ad una di queste, per esempio alla y_1, applichiamo l'operazione O, il che si può fare mutando, in $x = \rho e^{i\theta}$, θ in $\theta + 2\pi$, si ottiene una nuova radice di (1) che per x tendente a zero, dà $y : x^{\frac{1}{s}} = \bar{k}_1 e^{\frac{2\pi i}{s}} = \bar{k}_2$ e che quindi non è altro che y_2; così si avrà $Oy_q = y_{q+1}, \dots\ Oy_s = y_1$. Le $k_1,\ k_2, \dots k_s$ formano dunque un unico sistema circolare di s elementi, nell'ordine in cui sono scritte.

L'espressione (9), che compendia le s radici di (1) che per $x=0$ danno $y=0$, si può riguardare come una generalizzazione delle serie di potenze. L'espressione è regolare per ogni punto di un cerchio di centro $x=0$, eccettuato il punto $x=0$ stesso (punto critico) in cui la funzione stessa è nulla, mentre la sua derivata è infinita: ed il carattere della singolarità in $x=0$ consiste appunto nel permutarsi circolarmente dei valori della funzione quando la variabile ruota intorno al punto critico, ritornandosi dopo s giri al valore primitivo.

$y_q' = \bar{k}_q \frac{1}{s} x^{1/s-1} + g_2\frac{2}{s} x^{2/s-1} + \dots$

2° caso

183. Suppongasi ora che nella (5) manchi il termine di primo grado in x; l'equazione (1) potrà scriversi:

(10) $$F(x,\ y) = cy^s + c_1x^{q_1}y^{p_1} + c_2x^{q_2}y^{p_2} + \dots + x^q + F_1(x,\ y) = 0,$$

dove l'intero q è minore di s, gl'interi $p_1,\ p_2, \dots$, ordinati in ordine decrescente, sono minori di s e gl'interi $q_1,\ q_2, \dots$ sono minori di q; la $F_1(x,\ y)$ contiene i rimanenti termini $cx^\alpha y^\beta$, che hanno tali esponenti α, β, da dare ai termini stessi un ordine di infinitesimo manifestamente superiore a quello dei termini cy^s, $c_1x^{q_1}y^{p_1}, \dots, x^q$ posti in evidenza. Si tratta ora di vedere come sia possibile ottenere, dai termini posti in evidenza in (10), gruppi di termini (in numero di due almeno) aventi uguale ordine d'infinitesimo ed inferiore a quello dei termini non appartenenti al gruppo, e come a questi corrispondano aggruppamenti in cui si distribuiscono le s radici infinitesime di (10), aggruppamenti ognuno dei quali dà luogo a sistemi circolari quali quelli studiati al n.° precedente.

Si ponga, all'uopo, ρ non tendendo a zero nè ad infinito per $x \to 0$:

(11) $$y = \rho x^\lambda;$$

l'ordine dei termini in evidenza in (10) sarà

$c\rho^s x^{\lambda s} + c_1\rho^{p_1} x^{q_1+p_1\lambda} + c_2\rho^{p_2} x^{q_2+p_2\lambda} + \dots + x^q + F_1(x, y)$

$$\lambda s, \quad q_1 + p_1\lambda, \quad q_2 + p_2\lambda, \dots q;$$

si tratta di determinare λ in modo che due almeno di questi ordini siano fra loro uguali e non maggiori dei rimanenti:

$$q_h + p_h\lambda = q_k + p_k\lambda \leq q_i + p_i\lambda,$$

onde

(12) $$\boxed{\lambda = -\frac{q_h - q_k}{p_h - p_k} \geq -\frac{q_h - q_i}{p_h - p_i}.}$$

Per fissare le idee, supponiamo che per tre termini di (10),

(13) $$c'x^{q'}y^{p'}, \quad c''x^{q''}y^{p''}, \quad c'''x^{q'''}y^{p'''}, \quad (p' > p'' > p''')$$

si sia potuto determinare λ in modo che essi abbiano uguale ordine d'infinitesimo e minore dei rimanenti; sarà

$$q' + p'\lambda = q'' + p''\lambda = q''' + p'''\lambda$$

onde

(13 $$\lambda = \frac{q''' - q'}{p' - p'''} = \frac{q''' - q''}{p'' - p'''} = \frac{u}{v},$$

essendo u e v interi primi fra loro; ne viene

(14) $\boxed{p' - p''' = mv, \quad p'' - p''' = m'v,}$ (m ed m' interi ed $m > m'$).

Dividendo per la potenza comune di x, la (10) viene con ciò a scriversi:

(15) $$c'\rho^{p'} + c''\rho^{p''} + c'''\rho^{p'''} + G(\rho, x) = 0,$$

dove G si annulla per $x = 0$, o, tenuto conto della (14):

(16) $$\rho^{p'''}[c'\rho^{mv} + c''\rho^{m'v} + c'''] + G(\rho, x) = 0.$$

Si ponga $\rho = \bar\rho + \sigma$, dove σ tenda a zero con x e $\bar\rho$ sia costante; si ponga pure

(17) $$\boxed{\rho^v = \tau, \quad \tau = \bar\tau + \eta, \quad \bar\rho^v = \bar\tau,}$$

$\bar\tau$ costante, η tendente a zero con x. Per la (16), le $\bar\tau$ sono radici della equazione

(18) $$\boxed{c'\bar\tau^m + c''\bar\tau^{m'} + c''' = 0.}$$

il caso delle radici multiple v. §185

La (18) abbia le radici semplici, e sia τ_0 una di queste; in corrispondenza, si avranno per $\bar\rho$ i valori

$$\tau_0^{\frac{1}{v}}, \quad \tau_0^{\frac{1}{v}}\varepsilon, \dots \tau_0^{\frac{1}{v}}\varepsilon^{v-1},$$

essendo ε una radice v^{sima} primitiva dell'unità, e per le y, da (11), verrà

$$y = (\bar\rho + \sigma)x^{\frac{u}{v}} = (\tau_0 + \eta)^{\frac{1}{v}} x^{\frac{u}{v}},$$

il che dimostra che le y formano un sistema circolare di v radici in corrispondenza di ogni radice di (18): in tutto dunque $vm = p' - p'''$ radici, distribuite in m sistemi circolari. In quanto ad η, essa viene determinata come funzione di x mediante il metodo generale del n.° 174 (1).

184. Rimane però da rispondere alla domanda: « quanti « aggruppamenti di termini di uguale ordine minimo, come (13), « si possono formare, ed in quale modo »? A ciò giova un metodo geniale, dovuto al Puiseux (2), di carattere geometrico e che contribuisce grandemente ad illuminare la questione.

---

(1) Il caso che le radici della (18) non siano semplici viene considerato al n.° 185.

(2) *Journal de Mathématiques*, S. I, T. XV, 1850. Il primo concetto di un simile metodo risale a Newton.

Tracciati in un piano due semiassi ortogonali positivi (fig. 20) $0p$, $0q$, si segnino i punti (a coordinate intere, positive o nulle) $P_0(s, 0)$, $P_1(p_1, q_1)$, $P_2(p_2, q_2)$, ... $P_j(p_j, q_j)$, $Q(0, q)$.

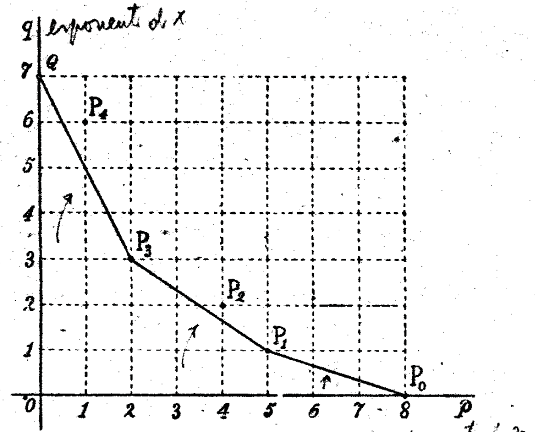


Fig. 20

Il valore di λ, dato da (12), non è altro che la tangente trigonometrica dell'angolo della congiungente $P_h P_k$ coll'asse $0p$ contato da $+\infty$ verso 0; la condizione con cui è determinata λ esprime che dei punti P, alcuni si trovano sulla congiungente, mentre gli altri sono dalla parte della congiungente stessa dove non si trova l'origine. Così, le (12) esprimono che i punti (p', q'), (p'', q''), (p''', q''') sono su una stessa retta che lascia ogni altro punto P dalla banda opposta all'origine. Ciò posto, la determinazione dei valori di λ e quindi dei gruppi come (13) si fa nel seguente modo. « Si considera « una semiretta uscente da P_0 e dapprima adagiata secondo $P_0 0$, indi la si fa ruotare nel senso delle lancette « dell'orologio, finchè incontra per primo uno dei punti P. « Fermata in questa posizione, essa contenga uno o più « punti P; sia P_h questo punto se unico o, se no, quello di « ascissa minima. Si faccia ora ruotare la retta intorno a P_h, « nel medesimo senso delle lancette dell'orologio, finchè incontra un nuovo punto P; fermata in questa nuova posizione, essa contenga uno o più punti P e sia P_k quello di « ascissa minima; e così si continui. Si viene così a costruire

Il metodo di Puiseux permette di calcolare dello sviluppo in serie per potenze frazionarie (per ogni ramo, tanti termini quanti occorrono per differenziare il ramo stesso da tutti gli altri.

« una spezzata $P_0 P_h P_k \ldots$ di cui l'ultimo lato passa evidente« mente per Q [1]; ad ogni lato della spezzata corrisponde « un valore di λ, ed il numero dei punti P posti sul lato « stesso dà il numero dei termini del corrispondente aggrup« pamento (13) ».

Per il primo lato, il valore di λ è dato da $\frac{q_h}{s - p_h}$; per l'ultimo, da $\frac{q_j - q}{p_j}$.

Per quanto risulta dal n.° 183, al lato di cui i punti estremi hanno per ascisse p' e p''', corrispondono $p' - p'''$ radici della (1). Si avrà dunque che

al lato $P_0 P_h$ corrispondono $s - p_h$ radici;
al lato $P_h P_k$ » » $p_h - p_k$ radici;
. . . .
al lato $P_j Q$ » » p_j radici;

« all'intera spezzata corrispondono dunque s radici distri« buite in tanti aggruppamenti quanti sono i lati della spez« zata, mentre ogni aggruppamento si ripartisce in un de« terminato numero di sistemi circolari di uguale periodo ».

Non è escluso che un sistema circolare consti di un solo elemento, per il quale è dunque $Oy = y$. Per questo sistema, il punto critico si dice *apparente*. La radice s^{pla} può, in particolare, dare luogo ad s sistemi circolari composti ciascuno di un elemento: il punto $x = 0$ è allora critico apparente per tutti, ha cioè, per tutti ed s i rami, carattere di punto regolare.

Come esempio, si consideri l'equazione

$$F(x, y) = y^8 + x(y^5 + y^6) + x^2y^4 + x^3(y^2 + y^4) + x^6y + x^7(1 + y) = 0.$$

Si può scrivere

$(xy^6 + x^3y^4 + x^7y)$

$$F(x, y) = y^8 + xy^5 + x^2y^4 + x^3y^2 + x^6y + x^7 + F_1(x, y) = 0,$$

---

[1] Non è naturalmente escluso che la spezzata possa ridursi all'unico segmento $P_0 Q$. Ciò accade, in particolare, per l'equazione (6), in cui è P_0 di coordinate 1 e 0, e Q di coordinate 0 ed 1.

$ax + c_0 y^s + F_1(x, y) = 0$

dove i termini di $F_1(x, y)$ sono manifestamente di un ordine di infinitesimo superiore a quello dei termini posti in evidenza. Applicando la rappresentazione di Puiseux, si avranno da segnare, nel piano riferito agli assi OP_0, OQ (fig. 20), i punti

$$P_0(8, 0), \quad P_1(5, 1), \quad P_2(4, 2), \quad P_3(2, 3), \quad P_4(1, 6), \quad Q(0, 7).$$

La spezzata, descritta secondo la regola data al n.° precedente, consta dei tre segmenti P_0P_1, P_1P_3, P_3Q, ed i valori di λ sono rispettivamente:

$$\text{sul lato } P_0P_1, \quad \lambda = \frac{1}{3};$$

$$\text{sul lato } P_1P_3, \quad \lambda = \frac{2}{3};$$

$$\text{sul lato } P_3Q, \quad \lambda = 2.$$

Si porrà dunque, sul primo lato, $y = \rho x^{\frac{1}{3}}$: i termini di ordine minimo d'infinitesimo sono λs dell'ordine $\frac{8}{3}$, e dividendo per $x^{\frac{8}{3}}$, viene $\bar{\rho}^3 + 1 = 0$. Si dà luogo ad un sistema circolare di tre radici. Sul secondo lato, si pone $y = \rho x^{\frac{2}{3}}$; il grado infimo d'infinitesimo è $q_1 + q_2\lambda$ $\frac{13}{3}$, e viene $\bar{\rho}^3 + 1 = 0$: si ha un secondo sistema circolare di tre radici. Infine, sul terzo lato si pone $y = \rho x^2$, ordine minimo d'infinitesimo è 7, e viene $\bar{\rho}^2 + 1 = 0$: si hanno due sistemi circolari, ciascuno di una sola radice, cioè due radici monodrome. In tutto, otto radici tendenti a zero per $x \to 0$.

185. Nella precedente analisi, abbiamo riservato il caso che la equazione (18) abbia radici multiple: si tratta ora di esaminare anche questa eventualità. Sia dunque τ_0 una radice multipla d'ordine ν della (18); sarà ρ_0, radice dell'equazione binomia $\rho_0^{\nu} = \tau_0$, multipla dello stesso ordine ν dell'equazione

$$(19) \qquad c'\rho^{m\nu} + c''\rho^{m'\nu} + c''' = 0.$$

L'equazione (16), da cui passando al limite per $x \to 0$ si ottiene la (19), ammette ν radici infinitamente vicine a ρ_0 per x infinitesimo; facendo ancora $\rho = \rho_0 + \sigma$, $x = t^{\nu}$, σ essendo infinitesimo con t, la (16) darà un'equazione

$$(20) \qquad \Phi(t, \sigma) = 0$$

avente ν radici infinitesime per $t \to 0$. A questa equazione si applicherà il metodo del n.° 183: se le nuove equazioni ana-

loghe alla (16) che così si ottengono, corrispondenti ai differenti lati della rispettiva spezzata, avranno tutte radici semplici, la separazione sarà effettuata: diversamente, si applichi nuovamente il metodo fino a che si giunga ad equazioni limiti aventi sole radici semplici. Ma a ciò si giungerà necessariamente?

A tal dubbio si risponde osservando che la prima equazione limite (16) è al più di grado s, quindi l'ordine di multiplicità della τ_0 è al più s, cioè la (20) ammette per $t = 0$ una radice $\sigma = 0$ al più di ordine s. Applicando a questa il medesimo metodo, le nuove equazioni limiti che si ottengono, se avranno radici multiple, le avranno in generale di ordine di multiplicità ν inferiore ad s. In corrispondenza ad una di queste, si otterrà, con nuova applicazione del metodo, una nuova equazione analoga a (20): se per questa si ottiene nuovamente una radice multipla, l'ordine di questa sarà al più ν. Così proseguendo, si viene a costituire una successione di numeri interi positivi non crescenti ν, ν', ν'',... con $\nu \leq s$: perciò, affinchè possa accadere che non si giunga mai ad un'equazione limite avente sole radici semplici, è necessario che da un punto in poi i numeri ν si mantengano uguali.

Per vedere se e come ciò sia possibile, si può supporre che questo fatto si verifichi fino da principio, cioè che la (18), che si ottiene dalla (10) con una prima applicazione del metodo, sia di grado s ed ammetta una sola radice, di ordine s di moltiplicità: la spezzata riducendosi evidentemente in questo caso ad un solo segmento, che unisce i due punti $(s, 0)$, $(0, q)$. Riferendoci alla (14), è dunque $s = mv$; ma è $m = s$, onde $v = 1$; il numero λ è intero, e le s radici dell'equazione (10) nell'intorno di $x = 0$ sono date da

$$(21) \qquad y_i = (\rho_0 + \sigma_i)x^u, \quad (i = 1, 2, \ldots s),$$

le σ_i essendo infinitesime con x. L'equazione (20) ammette pure, per ipotesi, una sola radice s^{upla}, sia essa ρ_0': le s radici di questa saranno dunque, analogamente, della forma

$$\sigma_i = (\rho_0' + \sigma_i')x^{u_1}, \quad (i = 1, 2, \ldots s)$$

poichè, per essere $v = 1$, è $t = x$; onde, sostituendo in (21):

$$(22) \qquad y_i = \rho_0 x^u + \rho_0' x^{u+u_1} + \sigma_i' x^{u+u_1};$$

così proseguendo, si giunge per y_i ad uno sviluppo della forma

$$y_i = \rho_0 x^u + \rho_0' x^{u+u_1} + \rho_0'' x^{u+u_1+u_2} + \dots$$

il quale vale dunque per $i = 1, 2, \dots s$. Con ciò l'equazione $F(x, y) = 0$ ammette una radice multipla dell'ordine s non soltanto per $x = 0$, ma ***in tutto un intorno di questo punto***, poichè la differenza fra due delle y_i è infinitesima di ordine alto quanto si vuole: il discriminante $D(x)$ sarebbe dunque identicamente nullo; ma questo caso è stato escluso (alla fine del n.° 178). Talchè l'ipotesi fatta non può sussistere; e quindi il metodo di Puiseux, successivamente applicato, conduce in ogni caso alla ripartizione delle radici, nell'intorno di un punto critico, nei corrispondenti sistemi circolari.

§ III. Carattere delle funzioni algebriche.

186. Data l'equazione algebrica irriducibile di grado m in y,

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

essa definisce la y, come funzione algebrica di x. Per questa, abbiamo notato punti singolari di due specie: i ***punti d'infinito***, dove una o più delle radici della (1) divengono infinite, ed i ***punti critici algebrici***, dove la (1) ammette radici multiple; non è escluso che un punto d'infinito possa essere critico: qualora non lo sia, esso è un polo del ramo corrispondente della y. Tanto i primi che i secondi punti singolari sono in numero finito; non è escluso infine che il punto $x = \infty$ possa appartenere all'una o all'altra specie.

che ammettono $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ (2)

a regolare

Se $x = a$ è un punto regolare, si hanno per gli m rami della funzione algebrica altrettanti sviluppi in serie di potenze di $x - a$,

$$y_h = y_h(a) + c_{h1}(x - a) + c_{h2}(x - a)^2 + \dots, \quad (h = 1, 2, \dots m) \tag{2}$$

convergenti in un cerchio di centro a e di raggio *almeno* uguale alla minima distanza di a dal più prossimo dei punti critici o dei poli. Se $x = a$ è un polo, per uno o più dei rami y_h si avrà uno sviluppo contenente un numero finito di potenze intere negative. (Laurent); il raggio maggiore della corona circolare in cui vale lo sviluppo eguaglia altrettanto la minima distanza dagli altri punti singolari

a polo

Infine, se $x = c$ è un punto critico, i rami della y si distribuiscono, in un intorno di c, in un numero determinato di sistemi circolari e vengono rappresentati da serie di potenze intere di $(x - c)^{\frac{1}{v}}$ (n.° 182), v essendo il numero degli elementi del sistema circolare: se c, oltre ad essere critico, è punto d'infinito per qualche ramo della y, lo sviluppo corrispondente conterrà, in un numero finito di termini, potenze intere negative di $(x - c)^{\frac{1}{v}}$.

c critico

c critico e polo

187. Se una funzione analitica (polidroma) è tale che in un punto c ammetta sviluppi della forma

$$y = b + a_1(x - c)^{\frac{h}{v}} + a_2(x - c)^{\frac{h+1}{v}} + a_3(x - c)^{\frac{h+2}{v}} + \dots,$$

se il punto è anche polo

v intero positivo, h intero positivo o negativo, il punto c si dice, per la funzione, ***punto critico algebrico*** o semplicemente ***punto algebrico*** [1].

punto algebrico

Ora, le proprietà delle funzioni algebriche riassunte al n.° 186 sono caratteristiche per codeste funzioni, come risulta dal seguente fondamentale

Teorema. « Una funzione analitica $f(x)$ che per ogni valore di x ha non più di m valori, ed ammette come singolarità soli poli e punti algebrici, è una funzione algebrica ».

Intanto è chiaro che i supposti punti singolari non possono essere che in numero finito. Sia $\bar{x}$ un punto regolare per $f(x)$, e si consideri una linea chiusa l che partendo da $\bar{x}$ vi ritorni, senza contenere alcun punto singolare; se $y_1, y_2, \dots y_m$ sono i valori di $f(x)$ in $\bar{x}$, ed a è un numero intero positivo arbitrario, si formi

$$P_a(x) = y_1^a + y_2^a + \dots + y_m^a: \tag{3}$$

(funzione simm. delle radici per la y algebrica)

questa è una funzione analitica che, continuata analiticamente lungo l, ritorna in $\bar{x}$, per la sua simmetria, col medesimo elemento con cui si è partiti; $P_a(x)$ è dunque funzione uniforme di x. E se c è un punto singolare di $f(x)$, essendo $P_a(x)$

[1] Non è escluso che più punti algebrici vengano a sovrapporsi in un unico punto c, come accade per le funzioni algebriche nel caso trattato ai n.i 183-184.

Se fossero infiniti vi dovrebbero essere infiniti poli e quindi ( ) almeno un punto essenziale, o infiniti punti critici e quindi un punto di acc. nec. critico per il quale la f ammetterebbe più di m valori (?)

ad un valore, ed $f(x)$ essendo al più infinita d'ordine finito, $P_a(x)$ non potrà avere in c che un punto regolare od un polo. Ne segue (n.° 74), che essa è una funzione razionale. Ora, dando ad a i valori 1, 2, 3,... m, si avranno le somme di potenze simili delle y_i come funzioni razionali di x: le y_i saranno dunque (1) radici di un'equazione di grado m i cui coefficienti, essendo esprimibili razionalmente colle P_a, sono funzioni razionali di x. Detti $\alpha_1(x), \dots \alpha_m(x)$ questi coefficienti, le $y_1, y_2, \dots y_m$ saranno dunque radici dell'equazione

$$y^m + \alpha_1(x)y^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1}(x)y + \alpha_m(x) = 0,$$

cioè i rami di una funzione algebrica di x.

188. Dal teorema precedente si può dedurre una notevole proprietà delle funzioni algebriche irriducibili. Sia $\bar{x}$ un punto regolare della funzione algebrica definita dall'equazione irriducibile

$$F(x, y) = 0; \qquad (1)$$

siano $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \bar{y}_m$ i relativi valori di y. Si domanda se, « partendo da $\bar{x}$ col valore $\bar{y}_1$, sarà possibile di descrivere « una linea chiusa tale da ricondurci in $\bar{x}$ con uno qualunque « degli altri valori $\bar{y}_2, \bar{y}_3, \dots \bar{y}_m$ ». Non sia: cioè, qualunque linea chiusa si percorra partendo da $\bar{x}$, si possa tornare in $\bar{x}$ con uno dei valori $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots \bar{y}_r$, ma non mai con $\bar{y}_{r+1}, \bar{y}_{r+2}, \dots \bar{y}_m$. Indicando con y_i l'elemento di funzione analitica che dà $\bar{y}_i$ per $x = \bar{x}$, la continuazione analitica di y_i non potrà dunque, se è $i = 1, 2, \dots r$, dare un elemento ottenuto dalla continuazione analitica di y_k, $k = r + 1, r + 2, \dots m$. Ne viene che $y_1, y_2, \dots y_r$ sono rami di una funzione analitica che si trova nelle condizioni del teorema del n.° precedente, cioè di una funzione algebrica y definita da un'equazione algebrica $G(x, y) = 0$ di grado r in x; e poichè le radici di questa lo sono di (1), $F(x, y)$ è divisibile per $G(x, y)$, contro l'ipotesi della irriducibilità. Si conclude che se y è funzione algebrica irriducibile, esiste per ogni punto regolare $\bar{x}$ e per ogni valore $\bar{y}_i$ di y in $\bar{x}$, un cammino seguendo il quale si torna in $\bar{x}$ con un valore $\bar{y}_j$ prefissato, $(i, j = 1, 2, \dots m)$.

(1) *Algebra Complementare*, n.° 415, *b*).

Inversamente, se la y definita da (1) è tale che per ogni $\bar{x}$ regolare si possa, partendo da $\bar{x}$ con uno arbitrario y_i fra gli m valori $y_1, y_2, \dots y_m$, tornare in $\bar{x}$ con un altro arbitrariamente prefissato fra i valori medesimi, la $F(x, y)$ è irriducibile, o potenza di una $G(x, y)$ irriducibile: ma questo ultimo caso si è escluso, e si può d'altronde riconoscerlo immediatamente per via razionale, sia osservando che il discriminante sarebbe identicamente nullo, sia notando che $F(x, y)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ avrebbero un divisore intero razionale comune.

§ IV. Cenno sulle Riemanniane.

189. Prima di lasciare l'argomento delle funzioni algebriche, ci conviene di accennare ad un concetto importante e fecondo, dovuto a B. Riemann (1), e che consiste, per lo studio delle funzioni multiformi, nel sostituire all'ordinario piano complesso talune superficie a più fogli sulle quali la funzione viene ridotta uniforme, per modo cioè che ad ogni punto di queste superficie corrisponda un valore solo, o meglio un elemento solo, della funzione stessa. Tali superficie vengono dette *superficie di* Riemann o *Riemanniane*. Perchè ne venga inteso meglio il concetto, cominceremo col trattare alcuni casi particolari semplici.

190. *Esempio 1.°* Si consideri la funzione algebrica definita dalla equazione

$$\boxed{y^2 = 1 - x^2.} \qquad (1)$$

Per ogni punto $\bar{x}$ del piano, ad eccezione di $x = \pm 1$, questa equazione dà due valori di y fra loro contrarî; ad ogni tale $\bar{x}$ corrispondono due elementi regolari in un cerchio di centro $\bar{x}$ e di raggio uguale alla minore fra le distanze di $\bar{x}$ da 1 e da -1, fra loro contrarî, e continua-

(1) *Theorie der Abel'schen Funktionen.* Werke, p. 81-136 (Leipzig, 1876). Per maggiori particolari sulle superficie di Riemann, specie in relazione colle funzioni algebriche ed i loro integrali (integrali abeliani) il lettore può consultare: Neumann, *Vorlesungen über* Riemann's *Theorie der Abel'schen Integrale* (Leipzig, 1884); Klein, *Vorlesungen über Riemann'sche Flachen*, (lit. Gottingen, 1892); Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales* (Paris, 1895); Enriques-Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, T. I, p. 358-395 (Bologna, 1915); Severi (*Vorlesungen über algebraische Geometrie*), (Leipzig, 1921), ecc..

bili analiticamente lungo qualsiasi linea che non passi per i punti ± 1. Per $\bar{x} = 0$, questi elementi sono

$$\pm (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \pm \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \ldots\right);$$

per $\bar{x} = \infty$, essi sono

$$\pm i \left(x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} - \frac{1}{16x^5} - \ldots\right).$$

I punti ± 1 sono critici, e danno luogo ad un sistema circolare di periodo 2.

Essendo c un punto del piano, diverso da ± 1, immaginiamo un punto mobile x che partendo da c, vi ritorni dopo compiuto un giro nel senso delle rotazioni positive; sia l la linea che esso descrive. Si vede subito che:

a) se l non include nè il punto 1 nè il punto -1, l'argomento di $1 - x^2$ sarà, al ritorno di x in c, quello stesso che era alla partenza;

b) se l include uno dei punti 1, o -1, l'argomento di $1 - x^2$ si ritrova, al ritorno in c, aumentato di 2π;

c) se l include i due punti ± 1, l'argomento di $1 - x^2$ si ritrova, al ritorno in c, aumentato di 4π.

Ne viene che partendo da c con una determinata fra le due radici di (1) si ha, al ritorno in c, la medesima radice nel caso *a*) e nel caso *c*), perchè $O^2 y_1 = y_2$ e il caso c equivale a O^2 mentre nel caso *b*) la radice si ritrova moltiplicata per $e^{\pi i}$, cioè ci si ritrova in c coll'altra radice.

d) Più generalmente, se una linea uscente da c vi torna dopo fatto un numero qualsivoglia di giri, e si parte da c con una determinata delle due radici di $y^2 = 1 - c^2$, si torna in c dopo percorso l, colla medesima radice o colla contraria secondochè la l gira un numero pari od un numero dispari di volte intorno al punto $+1$ e al punto -1 complessivamente. Ciò che si dice delle radici vale per gli elementi, supposta fatta la continuazione analitica lungo un sistema di punti posti su l.

Ciò posto, se il piano sfera si suppone tagliato lungo il segmento $-1 \ldots +1$, per modo che siano tolti dal piano i punti del segmento stesso (con che si dice fatto nel piano un *taglio riemanniano* da -1 a $+1$) non è più possibile tracciare una linea che ruoti intorno ad uno solo dei due punti ± 1; potranno solo tracciarsi sia linee l che girano — una o più volte — intorno al sistema dei due punti, sia linee che non li comprendono affatto (casi *c* ed *a*) e quindi, partendo da c con un elemento della funzione algebrica definita da (1), si tornerà necessariamente in c col medesimo elemento; cioè la funzione algebrica si comporterà, nel piano così tagliato, *come una funzione uniforme*. Si ha però in tale modo *solo un ramo* della detta funzione; se si parte p. es., dal punto $x = 2$ col valore $y = i\sqrt{3}$, non si ritroverà mai, facendo la continuazione nel piano tagliato, il valore $-i\sqrt{3}$ nel punto stesso $x = 2$; così, se si parte dal ramo che dà, per $x = \infty$, $\lim \frac{y}{x} = -i$, non si troverà per alcun giro quello che dà, per $x = \infty$, $\lim \frac{y}{x} = +i$.

Per avere un luogo rappresentativo dei due rami della funzione, conviene considerare due tali piani — o *fogli* — sovrapposti, entrambi tagliati lungo il segmento $-1 \ldots +1$. Per fissare le idee, essi possono figurarsi disposti orizzontalmente, quindi fra loro paralleli, molto vicini fra loro; ad ogni numero complesso x corrispondono due punti posti sulla medesima verticale e l'uno sul foglio superiore — o primo foglio —, l'altro sul foglio inferiore o secondo foglio; p. es. al punto $x = 2$ del primo foglio corrisponda per y il valore $i\sqrt{3}$, al punto $x = 2$ del secondo foglio il valore $-i\sqrt{3}$. Così per ognuno dei due fogli si ha un ramo monodromo della funzione algebrica, e col complesso dei due fogli si ha un luogo rappresentativo per l'intera funzione, resa così uniforme su codesta superficie a due fogli. Rimarrebbe dubbio il valore di y per i punti del segmento $-1 \ldots +1$; ma si può osservare che l'ufficio del taglio non viene modificato se esso si sposta di pochissimo nel proprio foglio, sostituendosi al detto segmento il taglio fatto lungo un arco di curva semplice che vada da -1 a $+1$.

Ma è possibile di stabilire, fra i due fogli, un legame che corrisponda a quanto accade nel caso *b*) considerato dianzi, e ciò si ottiene attribuendo ai tagli l'ufficio di *linee di passaggio*, come verrà ora indicato.

Si indichi con τ il taglio nel primo foglio, con τ' quello nel secondo; siano τ_1 e τ_2 i lembi di τ, τ_1' e τ_2' quelli di τ', intendendo τ_1 e τ_1' verso la parte positiva, τ_2 e τ_2' verso la

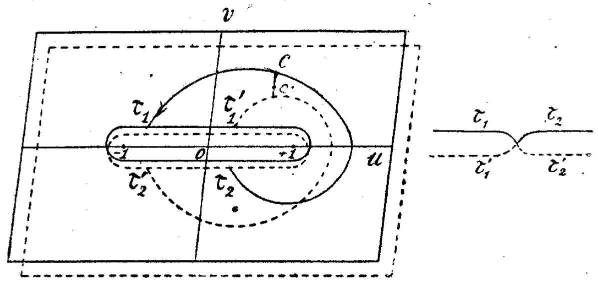


Fig. 21

parte negativa dell'asse immaginario: si colleghino (o si saldino) i due fogli unendo τ_1 a τ_2' e τ_2 a τ_1' (v. fig. 21) [1]. S'intende con ciò che il punto mobile x, partendo da un

[1] La fig. 21 rappresenta i due fogli della *Riemanniana*; le linee del primo foglio sono in tratteggio pieno, quella del secondo in tratteggio punteggiato. La piccola figura a destra indica il collegamento dei due fogli mediante una sezione verticale fatta secondo l'asse *ov*.

punto c del primo foglio, si muova fino ad incontrare il lembo τ_1; esso punto, per il collegamento stabilito, passa allora per τ_2' nel secondo foglio ed ivi può percorrere una linea che lo porti in c' che nel foglio stesso è verticalmente al di sotto di c; indi venga ad incontrare il lembo τ_1': per il collegamento medesimo, esso ritorna per τ_2 nel primo foglio, dove può tornare al punto c di partenza.

Se in questo movimento si parte da c con una radice della (1), si viene in c' colla radice contraria, e col passaggio ulteriore nel primo foglio si torna in c ritrovando la prima radice: il riscontro coi casi a, b, c e d si trova perfetto. La superficie a due fogli, saldati nel modo indicato, si dice la *Riemanniana* della funzione definita da (1). I due fogli di essa vanno riguardati come piani-sfera (n.° 4) aventi ciascuno un punto all'infinito: in ognuno dei fogli il rispettivo punto all'infinito è polo di prim'ordine per la funzione algebrica.

191. In modo identico viene costruita la riemanniana della funzione algebrica y definita da

$$y^2 = (x-a)(x-b);$$

a e b sono i punti critici; del tutto analoga è pure la costruzione della riemanniana delle y definite da

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d), \quad y^2 = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2p});$$

nel primo caso si hanno due tagli o linee di passaggio, l'uno fra a e b, l'altro fra c e d, ed in entrambi si stabilirà il collegamento come nel caso precedentemente studiato; nel secondo le linee di passaggio, con analogo collegamento, sono p; ad es. fra a_1 ed a_2, a_3 ed a_4, ... a_{2p-1} ed a_{2p}. In ognuno dei due fogli il punto all'infinito è polo per il ramo rispettivo della funzione: del 2.^{do} ordine per il primo esempio, dell'ordine p per il secondo.

Sono pure analoghe le riemanniane a due fogli per le funzioni algebriche definite da

$$y^2 = x - a, \quad y^2 = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2p-1}),$$

dove però $x=\infty$ è punto critico; nel primo caso l'unico taglio va fatto fra a ed ∞, con collegamento come negli esempi precedenti; nel secondo caso si hanno p tagli, fra a_1 ed a_2, a_3 ed a_4, ... a_{2p-3} ed a_{2p-2}, a_{2p-1} ed ∞.

192. *Esempio 2.°* Si consideri la funzione y definita da

$$\boxed{y = x^{\alpha}}, \tag{2}$$

dove α è un numero reale (non intero). Essendo c un punto qualsiasi del

piano complesso, diverso da zero e da ∞, si ha identic-

$$y = c^{\alpha}\left(1 + \frac{x-c}{c}\right)^{\alpha},$$

e quindi, fissata che sia la determinazione di c^{α}, è dato per la y un elemento valido entro il cerchio di centro c la cui circonferenza passa per l'origine. Ma se l'operazione O definita al n.° 180 si applica ad y a rappresentare un giro compiuto intorno all'origine, si ha

$$Oy = e^{2\pi i\alpha}y, \quad O^r y = e^{2\pi i r\alpha}y, \tag{3}$$

e quindi, partendo da c coll'elemento indicato, si torna dopo uno, due, ... r giri, nel punto c stesso con elemento diverso se $r\alpha$ non è un numero intero. Un taglio, fatto fra 0 ed ∞, per esempio lungo il semiasse reale negativo, impedisce il giro intorno all'origine, e nel piano così tagliato, partendo da c con un elemento, vi si torna coll'elemento stesso: si ha, nel piano tagliato, un ramo ad un valore della funzione y. Conviene ora distinguere due casi.

a) Il numero α è razionale: sia $\alpha = \frac{m}{n}$, m ed n interi primi fra loro; consideriamo allora n tali fogli, tutte tagliati fra 0 e $-\infty$, disposti orizzontalmente e numerati dall'alto al basso; ad ogni numero complesso x corrispondono n punti posti sulla medesima verticale, uno in ogni foglio. Fra questi n fogli si stabilisce un collegamento nel seguente modo: in ogni taglio si distingue un primo ed un secondo lembo (il primo, p. es., verso la parte positiva, ed il secondo verso la parte negativa dell'asse immaginario) e sia τ_h il primo e τ_h' il secondo lembo del taglio nell'h^{simo} foglio. Si immagina di saldare il primo foglio col secondo unendo τ_1 a τ_2', il secondo col terzo unendo τ_2 a τ_3', ... il $n-1^{simo}$ col n^{simo} unendo τ_{n-1} a τ_n', infine l'n^{simo} col primo unendo τ_n a τ_1'.

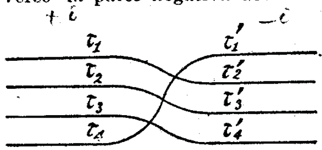


Fig. 22

In questo modo, detto c_1 un punto del primo foglio, e c_2, c_3, ... c_n quelli del secondo, terzo, ... n^{simo} foglio posti sulla medesima verticale, partendo da c_1 e descrivendo successivi giri intorno all'origine nel senso delle rotazioni positive, si passa dapprima nel secondo foglio al primo incontro coll'asse reale negativo, nel terzo foglio nel secondo incontro, ... nel n^{simo} foglio al $n-1^{simo}$ incontro, e si torna nel primo foglio all'n^{simo} incontro; se $y(c)$ è il valore di y in c_1 sarà $e^{2\pi i\alpha}y(c)$ in c_2, ... $e^{2\pi i(n-1)\alpha}y(c)$ in c_n. La superficie ad n fogli, su cui si è stabilita una tale linea di passaggio, è la riemanniana della funzione (algebrica) y, ed è tale che su di essa la y è resa uniforme [1].

[1] La figura 22 rappresenta schematicamente il collegamento dei fogli; in essa è data la sezione della superficie secondo un piano verticale, passante per una perpendicolare al taglio contenuta in uno dei fogli. Vi si è supposto $n=4$.

b) Il numero α sia irrazionale: nelle (3), non è $O^r y = y$ per alcun valore intero di r. Conviene considerare per la variabile x un luogo formato da una infinità numerabile di fogli, tutti tagliati da 0 a $-\infty$, disposti orizzontalmente: attribuito ad uno di essi il numero d'ordine 0, i seguenti abbiano, verso il basso, i numeri 1, 2, 3,...; verso l'alto, i numeri -1, -2, -3,...; ad ogni numero x corrispondono infiniti punti posti su una medesima verticale, e sia x_h il punto del foglio di numero d'ordine h. Detti come dianzi τ_h e τ_h' i due lembi del taglio nel foglio h, il collegamento si stabilisce saldando il foglio h al foglio $h+1$ coll'unire τ_h con τ'_{h+1} ($h = -\infty, \ldots -1, 0, 1, \ldots + \infty$). In questo modo, partendo da c_0 col valore y_0 di y, si viene in c_r col valore $y_0 e^{2\pi i r\alpha}$ dopo r giri nel senso delle rotazioni positive, ed in c_{-r} col valore $y_0 e^{-2\pi i r\alpha}$ dopo r giri nel senso delle rotazioni negative; la superficie ad infiniti fogli così costruita è un luogo su cui la funzione (non algebrica) y è resa uniforme.

Il punto $x = 0$ è, per la x^α dove α è irrazionale, un punto singolare critico, detto *algebroide*.

193. La superficie costruita nel caso b) del n.° precedente è anche luogo su cui è resa uniforme la funzione $y = \log x$, per la quale è $Oy = y + 2\pi i$. La riemanniana di x^α (per α irrazionale) e di $\log x$ presenta l'andamento di una superficie elicoidale.

194. Si consideri ora una funzione algebrica definita da una equazione irriducibile

$$F(x, y) = 0, \tag{4}$$

di grado m in y. Si segnino, nel piano della variabile complessa x, i punti critici della funzione, indi fra questi punti si eseguisca un sistema di tagli in modo da rendere impossibile per la x, mobile nel suo piano, il compimento di un giro intorno ad alcuno di questi punti critici. Partendo allora da un punto regolare $x = c$ con un valore (od un elemento) della funzione y, e facendo percorre ad x una linea qualsiasi intorno al piano così tagliato, si tornerà necessariamente in c col medesimo valore (col medesimo elemento). La forma del taglio che va da uno ad un altro punto critico non ha, come si è già avvertito a proposito dell'es. 1°, alcuna importanza essenziale. Nel piano o foglio così tagliato si ha solo un ramo della funzione algebrica, ramo che si conserva dunque monodromo su tutto il foglio. La rappresentazione degli m rami della funzione richiede l'uso di m simili fogli, che si possano sovraposti, e si possono figurare, sia come strati orizzontali in cui i punti posti su una medesima verticale corrispondono ad uno stesso numero complesso, sia anche come superficie sferiche concentriche in cui i punti posti su un medesimo raggio corrispondono al medesimo numero complesso. Essendo c un punto non critico, $c_1, c_2, \ldots c_m$ i punti rappresentanti il numero c rispettivamente nel primo, nel secondo,... nel m^{simo} foglio, ed essendo $y_1(c)$, $y_2(c)$, ... $y_m(c)$ le m radici (distinte) dell'equazione

$$F(c, y) = 0,$$

rimane stabilito che, nel punto c_h, il valore della funzione algebrica è $y_h(c)$, ($h = 1, 2, \ldots m$). Gli m fogli vanno saldati lungo i tagli, i quali si presentano dopo ciò come linee di passaggio, in modo che — come negli esempi precedenti — sia possibile il passaggio da un foglio ad un altro, e, per il teorema del n.° 188, questi passaggi si possono stabilire in modo che da un foglio si potrà passare ad un altro qualsiasi. Con ciò, gli m fogli così collegati vengono a costituire un'unica superficie connessa, che è la riemanniana della funzione algebrica definita dalla (4): su di essa, la funzione stessa viene ad essere resa uniforme.

Se, con centro in un punto critico γ e con raggio sufficientemente piccolo ed in ogni caso inferiore alla distanza di γ dal più prossimo punto critico, si descrive una superficie sferica, questa staccherà dalla riemanniana un pezzo in foggia di disco ad m strati: ora, al punto critico corrispondono (n.i 180-185) determinati sistemi circolari fra cui si distribuiscono le m radici della (4) in vicinanza di γ; se uno di questi sistemi consta di s radici, s degli strati del disco sono collegati fra loro nel modo indicato al caso a) del n.° 192, mediante la saldatura dei lembi degli s tagli nel modo ivi indicato. Eventualmente, uno o più dei sistemi circolari possono constare di una sola radice, nel quale caso γ è punto critico apparente per quella radice, e negli strati corrispondenti viene ad essere superfluo il taglio.

Il rapido cenno che qui si è abbozzato, destinato a dare solo un'idea del fecondo concetto riemanniano, è necessariamente assai incompleto:

uno studio più esauriente delle superficie di RIEMANN, sia per la disposizione dei tagli, sia circa il modo di ricondurre la superficie ad essere semplicemente connessa, sia infine relativamente alle modificazioni cui si possono assoggettare le superficie stesse senza alterarne essenzialmente la natura, richiederebbe sviluppi che non rientrano nel disegno del presente volume, ma che forse potranno trovare posto in una sua eventuale continuazione.

CAPITOLO DECIMOTERZO

SVILUPPO DI LAGRANGE E SUE APPLICAZIONI

§ I. La serie di Lagrange.

195. Si deve al LAGRANGE [1] una formula classica, ricca di applicazioni, la quale dà sotto forma notevole lo sviluppo, in serie di potenze di x, di una radice dell'equazione in y:

$F(0,b)=0$

(1) $$F(x,y)= y - b - xf(y) = 0. \qquad f(b) \neq 0$$

In questa equazione, $f(y)$ indica una funzione analitica regolare in un campo del piano y contenente il punto b, e differente da zero per $y = b$. Detto $F(x, y)$ il primo membro della (1), $F_y'(x, y)$ si riduce all'unità per $x = 0$; $y = b$ è dunque radice semplice di (1) per $x = 0$ e quindi, per il teorema fondamentale del n.° 174, la (1) ammette, per $|x| < r$ dove r è sufficientemente piccolo, una radice $\alpha(x)$ analitica regolare in x e che prende per $x = 0$ il valore $y = b$. L'espressione di $\alpha(x)$, che costituisce appunto la formula di LAGRANGE, si ottiene mediante l'applicazione del metodo del n.° 174 e precisamente per mezzo della formula (7) del detto n.°. Nel nostro caso, ponendo cioè per $F(x, y)$ il primo membro della (1), ed integrando lungo una circonferenza di centro b e di raggio ρ

$F'_y = 1 - x f'_y(y)$

$F'_y(0,y) = 1$

(1) Mémoires de l'Acad. de Berlin, T. 24, p. 251 (1770), e *Œuvres complètes*, T. III, p. 25.

$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)}\frac{y F'_y(x y)}{F(x y)}dy$

abbastanza piccolo, questa formula diviene:

(2) $$\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(b)} \frac{1 - xf'(t)}{t-b-xf(t)}\, t\,dt.$$

Qui possiamo scrivere

(2') $$\alpha(x)=\frac{b}{2\pi i}\int_{(b)}\frac{1-xf'(t)}{t-b-xf(t)}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{(b)}\frac{[1-xf'(t)](t-b)dt}{t-b-xf(t)};$$

ed il primo termine del secondo membro, (essendovi entro il cerchio (b, ρ) una sola radice della (1), ha per valore b (n.° 107). In quanto al secondo termine, esso può modificarsi come segue. Essendo la $f(t)$ diversa da zero per $t=b$, essa si manterrà, in un cerchio di centro b e che può essere assunto come cerchio (b, ρ), superiore in modulo ad un numero positivo assegnabile H. Preso allora

$$|x| < r = \frac{\rho}{H},$$

si ha

(3) $$\frac{1}{t-b-xf(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int \frac{f(t)^n dt}{(t-b)^{n+1}},$$

serie assolutamente ed uniformemente convergente per ogni coppia $|x| < r$, $|t-b| < \rho$; sostituendo in (2'), si ottiene:

(4) $$\alpha(x) = b + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{(b)}\left(\frac{f(t)^n}{(t-b)^n} - \frac{f'(t)f(t)^{n-1}}{(t-b)^{n-1}}\right)dt.$$

Si osservi ora che i due integrali

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(b)}\frac{f(t)^n dt}{(t-b)^n} \quad \text{ed} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(b)}\frac{f'(t)f(t)^{n-1}dt}{(t-b)^{n-1}}, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$ [1]

[1] Si riconosce subito che il termine relativo ad $n=0$ nella sommatoria si riduce a zero.

non sono altro, rispettivamente, che

$$\frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}\cdot f(b)^n \quad \text{e} \quad \frac{1}{(n-2)!}D^{n-2}\cdot f'(b)f(b)^{n-1}$$ [1],

in conseguenza della formula (6) del n.° 93, *c*) e poichè l'ultimo di questi equivale ad

$$\frac{1}{n(n-2)!}D^{n-1}f(b)^n,$$

così il coefficiente di x^n nella (4) è, con riduzione immediata,

$$\frac{1}{n!}D^{n-1}f(b)^n.$$

Sostituendo in (4), si ha

(5) $$\boxed{\alpha(x) = b + xf(b) + \frac{x^2}{2!}D\cdot f(b)^2 + \dots + \frac{x^n}{n!}D^{n-1}\cdot f(b)^n + \dots,}$$ $\alpha(0)=b$

ed è questo lo sviluppo di LAGRANGE.

In particolare, avendosi l'equazione

(6) $\boxed{y = xf(y),}$ $y - xf(y) = 0$

essa ammette una radice (semplice) che tende a zero per $x=0$; in un intorno di $x=0$, questa radice ammette lo sviluppo:

(7) $$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(D^{n-1}f(t)^n)_{t=0}.$$ manca b

196. *a*) Circa alle condizioni di validità dello sviluppo di LAGRANGE date dalla (5), si può osservare quanto segue. L'equazione (1) definisce in generale y come funzione multiforme di x: però lo sviluppo (5) ne dà un ramo monodromo in un intorno di $x=0$, ed il raggio r di convergenza del rela-

[1] S'intende che se b è un valore numerico specificato, queste sono derivate rispetto a t in cui, a derivazione fatta, si sostituisce $t=b$; ma se si lascia indeterminato il valore della b, essa b si può riguardare come la variabile rispetto a cui si deriva.

tivo elemento è dato dalla distanza del punto $x=0$ dal più prossimo punto critico della funzione, in cui il ramo rappresentato da (5) si permuti con un altro ramo della funzione stessa. In altri termini, la circonferenza di convergenza della (5), nel foglio della Riemanniana di y in cui quel ramo è rappresentato, deve passare per il punto critico, più prossimo all'origine, che si trova in quel foglio.

I punti critici sono i valori di x atti a soddisfare al sistema

$$\text{(8)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y - b - xf(y) = 0, \\ 1 - xf'(y) = 0\,; \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} F(x,y)=0 \\ F'_y(x,y)=0 \end{array} \qquad x = \frac{1}{f'(y)}$$

si cerchino le radici dell'equazione

$$f(y) - (y-b)f'(y) = 0,$$

e siano y_1, y_2,...: formando $\eta_1 = \dfrac{1}{f'(y_1)}$, $\eta_2 = \dfrac{1}{f'(y_2)}$,...., per quanto precede, il raggio r non sarà inferiore al minimo modulo delle η_i.

$x = \text{cost}$
$b = \text{var.}$

b) Si può, nella (1), considerare b come variabile. Le η_i vengono allora ad essere funzioni analitiche di b; se ora, nel piano della variabile complessa b, si ha un campo in cui $\eta(b)$ sia minima in modulo fra le $\eta_i(b)$, ed $|\eta(b)| > |c|$, la serie

$$b + \sum_1^\infty \frac{c^n}{n!} D^{n-1} f(b)^n$$

convergerà uniformemente rispetto a b e rappresenterà, come funzione analitica di b, una determinata fra le radici dell'equazione

$$y - b = cf(y).$$

197. Riprendendo l'equazione (1), sia $F(y)$ una funzione analitica regolare monodroma in un campo semplicemente connesso contenente il punto b; $F[\alpha(x)]$ sarà pertanto regolare monodroma in un campo contenente $x=0$. Essendo l'integrazione estesa alla circonferenza (b, ρ), ρ abbastanza piccolo, per la formula (2) del n.° 108 sarà

$$\text{(9)} \qquad F[\alpha(x)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{(b)} \frac{1 - xf'(t)}{t - b - xf(t)} F(t)\, dt$$

e quindi, giovandosi dello sviluppo (3),

$$F[\alpha(x)] = \frac{1}{2\pi i}\sum_0^\infty x^n \int_{(b)} \left\{ \frac{F(t)f(t)^n}{(t-b)^{n+1}} - \frac{F(t)f'(t)f(t)^{n-1}}{(t-b)^n} \right\} dt.$$

Richiamando ancora la formula (6) al n.° 93, si ha dunque come coefficiente di x^n, per $n = 1, 2, 3,...$:

$$\frac{1}{n!} D^n \cdot F(b)f(b)^n - \frac{1}{n-1!} D^{n-1} \cdot F(b)f'(b)f(b)^{n-1},$$

e poichè l'ultimo termine scritto equivale a

$$-\frac{1}{n!} D^{n-1}[D \cdot F(b)f(b)^n - f(b)^n F'(b)],$$

mentre per $n=0$ si ha evidentemente $F(b)$, così viene

formula detta di Bürmann

$$\text{(10)} \qquad \boxed{\begin{array}{l} F[\alpha(x)] = F(b) + xf(b)F'(b) + \\ \quad + \dfrac{x^2}{2!} D \cdot f(b)^2 F'(b) + ... + \dfrac{x^n}{n!} D^{n-1} \cdot f(b)^n F'(b) + ... \end{array}}$$

Questo sviluppo, che contiene la (5) come caso particolare, $F(y)=y$ viene spesso detto *formula di* Bürmann, ma era già stato dato dal Lagrange [1].

§ II. Applicazioni.

198. Come primo esempio, sia data l'equazione

$$\text{(1)} \qquad \boxed{y^5 - xy + a = 0.}$$

Scrivendola nella forma

$$y = \frac{a}{x} + \frac{y^5}{x}, \qquad y - 0 - \frac{1}{x}(a + y^5) = 0$$

si può applicare la serie di Lagrange allo sviluppo, in serie di potenze crescenti di $\frac{1}{x}$ e per valori di $|x|$ abbastanza grandi, di quella radice del-

---

[1] Niels Nielsen, nell'introduzione delle recenti « *Recherches sur les polynômes de Stirling* » (Kgl. Danske Videnskabernes Selskab., II, 12, Copenhagen, 1920) mostra esaurientemente come sia ingiustificata l'attribuzione di questa formula al Bürmann.

l'equazione (1) che tende a zero per $x \to \infty$. Il calcolo si eseguisce immediatamente sostituendo, nella (5) del § precedente, $\frac{a}{x}$ al posto di b ed $\frac{1}{x}$ al posto di x; si ottiene così

$$y = \frac{a}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{a}{x}\right)^5 + \frac{1}{2x^2}[D(y^5)^2]_{y=\frac{a}{x}} + \dots + \frac{1}{n!\,x^n}[D^{n-1}(y^5)^n]_{y=\frac{a}{x}} + \dots$$

o infine

(2) $$y = \frac{a}{x} + \frac{a^5}{x^6} + \frac{10}{2!}\frac{a^9}{x^{11}} + \frac{14.15}{3!}\frac{a^{13}}{x^{16}} + \frac{18.19.20}{4!}\frac{a^{17}}{x^{21}} + \dots$$

La discussione del n.° 196 permette facilmente di concludere che la convergenza dello sviluppo (2) ha luogo per $|x| > 5\left(\frac{|a|}{4}\right)^{\frac{4}{5}}$.

199. Un problema fondamentale di astronomia, diretto a determinare la posizione di un pianeta sulla propria orbita ad un dato istante, conduce all'equazione

(3) $$y - t = e \operatorname{sen} y,$$

dalla quale si deve ricavare y, e precisamente una soluzione che per e tendente a zero, tenda a t. Qui t è proporzionale al tempo, e è l'eccentricità dell'orbita, y la cosidetta anomalia eccentrica, angolo del raggio vettore variabile con quello diretto all'afelio e dalla quale il raggio vettore stesso si deduce elementarmente. La radice y si ottiene immediatamente mediante applicazione della (5) del § precedente, e si ha

(4) $$y = t + e \operatorname{sen} t + \frac{e^2}{2} D \operatorname{sen}^2 t + \frac{e^3}{3!} D^2 \operatorname{sen}^3 t + \dots + \frac{e^n}{n!} D^{n-1} \operatorname{sen}^n t + \dots \text{ (1)}.$$

L'osservazione del n.° 196, *a*) conduce alla conclusione che e deve essere inferiore in valore assoluto al minimo valore di $\frac{1}{\cos y_i}$, le y_i essendo le radici dell'equazione $y - t = \operatorname{tg} y$.

Lo sviluppo (4) è una delle prime e più notevoli applicazioni, fatte dal Lagrange stesso, della formula da lui scoperta.

inversione delle serie

200. Sia data una serie di potenze

$$\varphi(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$$

della variabile y, convergente in un cerchio r, e se ne indichi con x il valore. La

(5) $$x = \varphi(y)$$

(1) I coefficienti di e^2, e^3, e^4 sono $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$, $\frac{1}{3}(3\operatorname{sen} 3t - \operatorname{sen} t)$, $\frac{1}{6}(2\operatorname{sen} 4t - \operatorname{sen} 2t)$.

Inversione

si può considerare come un'equazione che definisce la funzione inversa y di x, e la questione di dare una esplicita espressione della y in funzione di x è un antico e classico problema dell'analisi, noto col nome di *ritorno delle serie*. Si supponga a_1 differente da zero: segue allora dalla teoria delle funzioni implicite (n.° 174) che un ramo ad un valore della y si può sviluppare in serie di potenze di $x - a_0$. I coefficienti di questo sviluppo potrebbero calcolarsi col metodo dei coefficienti indeterminati, metodo che però non porrebbe in luce la legge con cui si succedono i coefficienti stessi; questo scopo si ottiene invece applicando la serie di Lagrange. Si supponga per semplicità $a_0 = 0$ (il che non ha nulla di essenziale) e si scriva la (5) nella forma

(6) $$y = \frac{x}{f(y)},$$

dove è posto

$$f(y) = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + \dots;$$

per essere $|a_1| \neq 0$, siamo nelle condizioni del n.° 195, e la serie di Lagrange dà:

(7) $$\boxed{y = x\frac{1}{f(0)} + \frac{x^2}{1\cdot 2} D \frac{1}{f^2(0)} + \frac{x^3}{3!} D^2 \frac{1}{f^3(0)} + \dots + \frac{x^n}{n!} D^{n-1}\frac{1}{f^n(0)} + \dots}$$

serie inversa
(~~1° sviluppo~~)

Il calcolo effettivo dei primi coefficienti dà

$$y = \frac{x}{a_1} - \frac{a_2 x^2}{a_1^3} - \frac{(a_1 a_3 - 2a_2^2)x^3}{a_1^5} - \dots$$

cioè convergenza

Per la validità di questo sviluppo, si può osservare, in base alla osservazione del n.° 196, che, tracciato entro il cerchio (ρ) di convergenza delle $\varphi(y)$ un cerchio concentrico (ρ') entro cui $f(y)$ non si annulli, e segnate in (ρ') le radici y_1, y_2,... di $\varphi'(y)$, il valore minimo fra le $|\varphi(y_1)|$, $|\varphi(y_2)|$,... sarà un tale r che per $|x| < r$ la (7) converge necessariamente.

201. Una funzione $F(y)$ di y regolare in un campo connesso contenente $y = 0$ può, mediante la formula (10) del n.° 197, svilupparsi in serie di potenze di x, essendo $x=\varphi(y)$. Questo sviluppo, ponendo $\varphi(y)$ al posto di x, sarà:

1° sviluppo

$$(8)\qquad \boxed{F(y)=F(0)+\varphi(y)\frac{F'(0)}{f(0)}+\frac{\varphi^2(y)}{1\cdot 2}D\frac{F'(0)}{f^2(0)}+\frac{\varphi^3(y)}{3!}D^2\frac{F'(0)}{f^3(0)}+\dots;}$$

esso risolve il problema di « sviluppare una funzione data di « una variabile secondo le potenze di un'altra funzione, pa- « rimente data, della variabile stessa ». Le condizioni sotto cui il problema è risoluto dalla (8) sono che entrambe le funzioni siano regolari entro un campo contenente $y=0$, e che la seconda sia nulla del prim'ordine nel punto medesimo $y=0$.

La corrispondenza che la (5) stabilisce fra x ed y essendo biunivoca per $|x|<r$, al cerchio r corrisponderà nel piano y una linea chiusa γ_r, rappresentata dall'equazione $|\varphi(y)|=r$. La famiglia di linee γ_k date da $|\varphi(y)|=k$, $0<k<r$, è formata da curve chiuse non intersecantisi, e tali che $\gamma_{k'}$ è tutta interna a γ_k per $k'<k$. Queste linee, dette *equimodulari* per la funzione $\varphi(y)$, costituiscono i contorni dei campi di convergenza delle serie ordinate per le potenze di $\varphi(y)$: in particolare, se la $F(y)$ è una serie di potenze di y convergente per $|y|<R$, lo sviluppo (8) convergerà entro γ_r se questa linea è tutta interna al cerchio (R); in caso contrario, essa convergerà entro la γ_k corrispondente al maggiore valore di k per il quale γ_k è interno ad (R).

linee equimodulari

cf. Bianchi 181

202. Alla formula (8) si può giungere per una via, più apparentemente che sostanzialmente diversa. Data la $F(y)$, regolare entro il campo chiuso da γ_k, contorno compreso, si noti che l'integrale esteso a γ_k:

$$(9)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma_k)}\frac{F(t)-F(y)}{\varphi(t)-\varphi(y)}\varphi'(t)dt, = 0$$

dove y è un punto interno a γ_k, è nullo per essere la funzione di t, posta sotto il segno, regolare in tutto il campo, compreso il punto $t=y$. E poichè (indice logaritmico)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma_k)}\frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)-\varphi(y)}$$

non è altro che il residuo di $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-\varphi(y)}$ per $t=y$, cioè l'unità, viene da (9)

$$F(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma_k)}\frac{F(t)\varphi'(t)}{\varphi(t)-\varphi(y)}\,dt.$$

Ma per essere $|\varphi(y)|<|\varphi(t)|\,q$, dove è $q<1$, quando y sia interno a $\gamma_{k'}$, con $k'<k$ e d'altronde prossimo a k quanto si vuole, si ha

$$\frac{1}{\varphi(t)}\cdot\frac{1}{1-\frac{\varphi(y)}{\varphi(t)}}\qquad \frac{1}{\varphi(t)-\varphi(y)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^n(y)}{\varphi^{n+1}(t)},$$

e poichè la serie è uniformemente convergente lungo t, viene

$$(10)\qquad \boxed{F(y)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(y)\int_{(\gamma_k)}\frac{\varphi'(t)F(t)dt}{\varphi^{n+1}(t)}}$$

2° sviluppo

sviluppo che, come è facile verificare riferendosi al n.° 93, non differisce da (8).

§ III. I polinomî di Legendre.

203. Consideriamo l'equazione di secondo grado in y

$$(1)\qquad \boxed{y-t=x\frac{y^2-1}{2}.}$$

Per x tendente a zero, una delle sue radici tende a t, l'altra all'infinito; la prima ammette, in un intorno $|x|<r$ dell'origine, uno sviluppo datoci dalla formula di Lagrange, il quale sviluppo è:

$$(2)\qquad y=t+x\frac{t^2-1}{2}+\frac{x^2}{2!}D\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2+\dots+\frac{x^n}{n!}D^{n-1}\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^n+\dots$$

Si tratta di determinare il raggio r di convergenza di questa serie. Come sappiamo, esso è dato dal minore modulo dei punti critici della funzione algebrica y definita da (1), i quali sono le radici dell'equazione ottenuta eliminando y fra la (1) e la sua equazione derivata rispetto ad y, cioè $1 = xy$; l'eliminazione dà l'equazione

$$(3) \qquad x^2 - 2tx + 1 = 0,$$

le cui radici sono

$$(4) \qquad x = t \pm \sqrt{t^2 - 1}.$$

Ora, per ottenere r, conviene esaminare la corrispondenza che viene stabilita dalla (3) fra x e t. Osservando che la (3) può scriversi

$$(3') \qquad t = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

e fatto $x = \rho e^{i\theta}$, $t = \alpha + i\beta$, viene

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\theta, \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\operatorname{sen}\theta,$$

e quindi, al cerchio $|x| = \rho$ corrisponde, nel piano t, l'ellisse

$$(5) \qquad \frac{\alpha^2}{\frac{1}{4}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2} + \frac{\beta^2}{\frac{1}{4}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2} = 1,$$

ed al cerchio $|x| = \frac{1}{\rho}$ corrisponde la medesima ellisse. Il sistema delle ellissi (5) è omofocale, coi fuochi $t = \pm 1$, e per $\rho = 1$ l'ellisse si riduce al segmento $-1 \dots +1$ contato due volte.

Più precisamente, poichè ad un punto t corrispondono due punti x, si può considerare come luogo di t una riemanniana a due fogli, saldati lungo un taglio fatto da -1 ad 1 sull'asse reale. Alle ellissi del sistema (5), che si diranno E_ρ, descritte nel primo foglio della riemanniana, corrispondono nel piano x i cerchi $|x| = \rho$ di raggio minore d'uno; per ρ crescente da 0 ad 1, l'ellisse E_ρ, dapprima estesa a tutto il foglio, va restringendosi fino a ridursi al segmento $-1 \dots +1$. Per ρ crescente da 1 all'infinito, si ritrovano le medesime ellissi in ordine inverso, cioè che vanno dilatandosi dal segmento predetto fino ad estendersi a tutto il piano, ma poste nel secondo foglio della riemanniana.

Le radici di (3') hanno dunque per modulo l'unità se t è reale e compreso fra -1 e $+1$: è dunque in questo caso

$\boxed{r = 1}$; per ogni altro valore di $t = \tau$, si considera l'ellisse (5) passante per τ: se

$$\frac{\alpha^2}{1 + c^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = 1$$

ne è l'equazione, sarà $\boxed{r = \sqrt{1 + c^2} - c}$. Il raggio di convergenza di (2) è così determinato in ogni caso.

204. Risolvendo l'equazione (1), distingueremo col dare al radicale il segno $-$ la radice rappresentata da (2) per $|x| < r$; si avrà dunque

$$(6) \qquad \frac{1 - \sqrt{1 - 2tx + x^2}}{x} = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} D^{n-1}\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^n.$$

Sia dato ad x un valore $\bar{x}$ di modulo $\rho < 1$; tracciata l'ellisse E_ρ corrispondente (nel primo foglio della riemanniana), la serie convergerà per tutti i valori di t interni all'ellisse stessa. Infatti, se è $E_{\rho'}$ un'ellisse omofocale interna ad E_ρ, è $\rho' > \rho$ e quindi, per t posto su $E_{\rho'}$, la convergenza delle serie per $x = \bar{x}$ è assicurata. E per t posto su $E_{\rho'}$ e nell'interno, la convergenza rispetto a t è uniforme. La (6) si può dunque derivare rispetto a t (n.° 61), e si ottiene:

$$(7) \qquad \boxed{(1 - 2tx + x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} D^n \left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^n.}$$

Ora, lo sviluppo di $(1 - 2tx + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ per le potenze di x, che si può anche ottenere mediante applicazione della serie binomiale per $|x(2t - x)| < 1$, è stato considerato da tempo [1], ed in esso il coefficiente di x^n è un polinomio razionale intero in t, che si suole denotare con $P_n(t)$ e che viene detto n^{simo} polinomio di LEGENDRE.

Questi polinomî sono detti anche *funzioni sferiche* perchè presentatisi al LEGENDRE in una ricerca sull'attrazione di uno sferoide. Da varî autori, specialmente francesi, vengono anche indicati con X_n. X_n

[1] LEGENDRE, *Mém. des savants étrangers* etc., T. X (Paris, 1785).

Il polinomio $P_n(t)$ è del grado indicato dall'indice. Per i primi valori dell'indice, i P_n sono

$$P_0=1,\quad P_1=t,\quad P_2=\frac{3t^2-1}{2},\quad P_3=\frac{5t^3-3t}{2},\quad P_4=\frac{35t^4-30t^2+3}{8},\ldots$$

e la (7) dà per P_n l'espressione generale, detta di Jacobi:

$$(8)\qquad \boxed{P_n(t)=\frac{1}{2.4.6\ldots.2n}D^n(t^2-1)^n.}$$

espressione di Jacobi

205. Dall'avere la serie $\Sigma x^n P_n$, come raggio di convergenza, il minore modulo $r(\leq 1)$ della (4), segue che si ha (n.° 36)

$$\boxed{\overline{\lim_{n=\infty}}\sqrt[n]{|P_n(t)|}=\frac{1}{r};}$$

da ciò la conseguenza che una serie $\Sigma c_n P_n(t)$, in cui il sistema dei coefficienti c_n si comporti come una progressione geometrica decrescente (o, in altri termini, tale che $\Sigma c_n z^n$ converga in un cerchio di raggio maggiore dell'unità) è convergente uniformemente entro un'ellisse di fuochi ± 1 (contorno escluso) e rappresenta di conseguenza, entro l'ellisse stessa, una funzione analitica regolare della variabile t. Nel caso invece in cui $\Sigma c_n z^n$ converga nel cerchio 1 e non oltre, la serie $\Sigma c_n P_n(t)$ può convergere solo per valori reali di t compresi fra -1 e $+1$; non converge infine se c_n si comporta come una progressione geometrica crescente.

206. *a*) Posto $(t^2-1)^n=z$, si ha, derivando logaritmicamente

$$\frac{2nt}{t^2-1}=\frac{z'}{z},\quad \text{onde}\quad (t^2-1)z'=2ntz,$$

e derivando $n+1$ volte:

$$(t^2-1)z^{(n+2)}+2(n+1)tz^{(n+1)}+(n+1)nz^{(n)}=$$
$$=2ntz^{(n+1)}+2n(n+1)z^{(n)};$$

riducendo, e, per la (8), ponendo P_n per $\dfrac{z^{(n)}}{2^n\cdot n!}$ si ottiene

l'equazione differenziale (lineare di secondo ordine) delle funzioni sferiche

$$(9)\qquad \boxed{(t^2-1)\frac{d^2P_n}{dt^2}+2t\frac{dP_n}{dt}-n(n+1)P_n=0.}$$

Equazione differenziale dei $P_n(t)$

b) Oltre che ad un'equazione lineare differenziale di secondo ordine, i polinomî di Legendre soddisfano anche ad una equazione lineare alle differenze rispetto all'indice n (equazione ricorrente) che è facile di ottenere come segue.

Dallo sviluppo

$$(8')\qquad \frac{1}{(1-2tx+x^2)^{\frac{1}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}x^nP_n(t)$$

segue, derivando rispetto ad x,

$$(10)\qquad \frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}P_n,$$

indi, moltiplicando per $1-2tx+x^2$, sostituendo nel primo membro lo sviluppo (8′) ed uguagliando i coefficienti di x nei due membri, si ottiene

$$(11)\qquad \boxed{(n+1)P_{n+1}-(2n+1)tP_n+nP_{n-1}=0,}$$

relazione ricorrente fra i polinomî di Legendre, la quale permette di calcolare con grande facilità P_{n+1}, conoscendo P_n e P_{n-1}. (*)

c) Derivando invece la (8′) rispetto a t, ed indicando con P_n' la derivata di P_n, si ha

$$\frac{x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{\infty}x^nP_n'.$$

Moltiplicando per x il secondo membro della (10), per $t-x$ quello della precedente ed uguagliando i coefficienti di x^n, si ottiene

$$(12)\qquad \boxed{nP_n=tP_n'-P'_{n-1},}$$

equazione mista differenziale e ricorrente. Derivando la (11)

(*) Così dalla (11) e dalle formule di pag 250 si ricava:
$$P_5=\frac{63t^5-70t^3+15t}{8}$$

ed eliminando P_n' fra l'equazione così ottenuta e la (12), si ottiene l'altra relazione

$$\boxed{P'_{n+1} - (2n+1)P_n - P'_{n-1} = 0,} \tag{13}$$

pure mista differenziale e ricorrente, ma a coefficienti indipendenti da t [1].

207. *a*) Osserviamo che $D^m(t^2-1)^n$ è nulla per $t = \pm 1$ se è $m < n$, come risulta dalla nota proprietà delle radici multiple. Ciò posto, si consideri

$$\int_{-1}^{1} D^n(t^2-1)^n \cdot t^p dt;$$

integrando per parti, poichè $t^p D^{n-1}(t^2-1)^n$ si annulla per $t = \pm 1$, si ha

$(t^p D^{n-1}(t^2-1)^n)'$

$$\int_{-1}^{1} D^n(t^2-1)^n \cdot t^p dt = -p\int_{-1}^{1} D^{n-1}(t^2-1)^n \cdot t^{p-1} dt;$$

reiterando per p volte l'integrazione per parti, si trova:

$$(-1)^p p! \int_{-1}^{1} D^{n-p}(t^2-1)^n dt = (-1)^p p! \left[D^{n-p-1}(t^2-1)^n\right]_{-1}^{1}$$

che dà quindi un valore nullo. Perciò, per la (8), si ha

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) t^p dt = 0 \quad \text{per} \quad n > p,$$

e quindi

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\varpi(t) dt = 0 \tag{14}$$

[1] Una relazione fra una funzione di due o più variabili (nel caso attuale t ed n) le sue derivate rispetto ad alcune delle variabili e le sue differenze finite rispetto alle altre, è detta *equazione mista* differenziale e alle differenze, o equazione mista differenziale ricorrente.

e in particolare un polinomio di Legendre

se ϖ è un qualsiasi polinomio razionale intero in t, di grado inferiore ad n. Ne risulta la proprietà assai notevole dei polinomî di Legendre data dalla formula

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_m(t) P_n(t) dt = 0 \quad \text{per} \quad m \gtrless n,} \tag{15}$$

e che si esprime dicendo che il sistema di codesti polinomî è *ortogonale*.

b) Si vuole ora determinare l'integrale (15) nel caso di $m = n$.

Perciò, si osserva che l'integrazione per parti dà

$$\int_{-1}^{1} D^n(t^2-1)^n \cdot D^n(t^2-1)^n dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n D^{2n}(t^2-1)^n dt.$$

Ma $D^{2n}(t^2-1)^n = 2n!$, onde

$$\int_{-1}^{1} [D^n(t^2-1)^n]^2 dt = 2 \cdot 2n! \int_{0}^{1} (1-t^2)^n dt.$$

Posto $t = \cos\alpha$, il secondo membro si trasforma in

$$2 \cdot 2n! \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} \alpha d\alpha,$$

il cui valore è [1]

$$2 \cdot 2n! \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{(2n+1)(2n-1) \dots 3 \cdot 1}.$$

Dividendo per $(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2$ e riducendo, si ottiene infine

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(t) dt = \frac{2}{2n+1}. \tag{16}$$

[1] V. *Calcolo*, n.° 398, formula (31).

208. Sia $f(t)$ una funzione che ammetta uno sviluppo in serie ordinata secondo i polinomî di LEGENDRE

$$f(t) = c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + ... c_n P_n + ..., \tag{17}$$

il quale sia uniformemente convergente (o, quanto meno, atto all'integrazione termine a termine) lungo il segmento $-1 ... +1$ dell'asse reale. Moltiplicando per P_n ed integrando, verrà, dalle (15) e (16):

$$\int_{-1}^{1} P_n(t) f(t) dt = \frac{2c_n}{2n+1},$$

onde segue che, sotto l'accennata condizione, un tale sviluppo, se esiste, è necessariamente unico, e che il coefficiente generico c_n è dato da

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} P_n(t) f(t) dt.$$

Questo risultato vale, in particolare, tutte le volte che è $\overline{\lim_{n=\infty}} c_n < 1$, poichè allora la (17) è uniformemente convergente entro un'ellisse di fuochi ± 1 (n.° 205) e quindi lungo il segmento $-1 .... +1$.

CAPITOLO DECIMOQUARTO

CENNO SULLA TEORIA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

§ I. L'integrale ellittico di prima specie e la sua inversione.

209. La funzione algebrica y di t, definita dall'equazione

$$y^2 = (t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t - a_4), \tag{1}$$

dove a_1, a_2, a_3, a_4 sono quattro numeri dati, reali o complessi, *fra loro distinti*, si rende uniforme, come è noto dal § IV del Cap. XII, su di una riemanniana R a due fogli coi punti critici $a_1, ... a_4$, e colle linee di passaggio fra i due fogli costituite dalle congiungenti $a_1 a_2$, $a_3 a_4$.

Vogliamo ora mostrare come sia possibile, mediante due tagli operati convenientemente sulla R, di ridurre questa superficie ad essere semplicemente connessa [1]. All'uopo (fig. 23) si parta da un punto c del primo foglio di R [2]; del taglio sono figurati i due lembi, che diremo *destro* e *sinistro*; (c è sul lembo destro, c_1 sul sinistro): il taglio procede da cc_1 a dd_1, dove incontra la linea di passaggio e

[1] V. C. NEUMANN, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale*, Leipzig, 1884, p. 175.

[2] Le parti dei tagli situate sul primo foglio ~~(foglio~~ superiore) sono rappresentate sulla figura con tratto pieno; quelle poste sul secondo foglio con tratto punteggiato.

passa quindi nel secondo foglio, in cui è tracciato secondo def; **giunto in** ff_1 **sulla seconda linea di passaggio, ritorna nel**

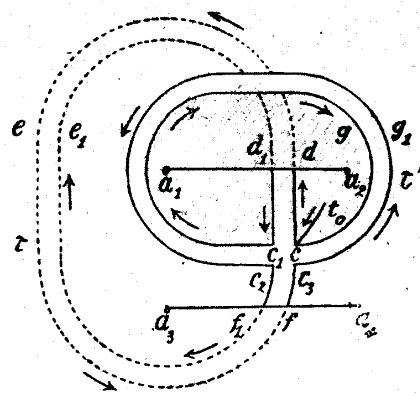


Fig. 23

primo foglio e si chiude in c. Il taglio così operato, e che diremo τ, viene, coi suoi due lembi, a costituire un contorno per la superficie R, composto di due curve chiuse; la superficie non è dunque semplicemente connessa. Ma facendo un secondo taglio τ' che, senza attraversare τ, ne unisca i due lembi, il quale taglio parta da $c(c_3c)$ e vi ritorni (c_2c_1) rimanendo sempre sul foglio superiore, si viene ad avere limitata la R con un unico contorno, che è

$$cdefc_3g_1c_2f_1e_1d_1c_1gc, \tag{2}$$

percorso nel senso indicato dalle freccie. Dicendo R' la riemanniana sulla quale siano stati operati questi due tagli τ, τ', si vede che essa R' è semplicemente connessa, poichè qualunque altro taglio, comunque fatto, toglie la connessione (n.° 16).

Essendo occorsi due tagli a rendere la R semplicemente connessa, il suo ordine di connessione è 2. La linea (2) costituisce il contorno (unico) di R'; i lembi destri del contorno sono percorsi nel senso delle rotazioni positive, i sinistri, nel senso delle rotazioni negative.

210. Indicando con $R(t)$ il secondo membro della t, ed ammettendo una volta per tutte che, preso t su R', resti di

conseguenza determinato il segno del radicale in ragione del foglio di R' su cui si trova t, si consideri la funzione analitica di t rappresentata da

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \tag{3}$$

integrale ellittico di 1a specie

che, come si sa, è nota ([1]) sotto il nome di « integrale ellittico di prima specie ». Per essere la R' semplicemente connessa, la (3) ha un valore determinato per ogni valore di t_0 e di t, qualunque sia la linea d'integrazione, e fatta eccezione al più per i valori $t = a_1, \ldots, a_4$ e $t = \infty$. Il punto a_1 essendo però per la funzione sotto al segno un punto d'infinito di ordine $\frac{1}{2}$, e così essendo di a_2, a_3, a_4, ed il punto ∞ essendo un punto d'infinitesimo di ordine 2 ([2]), ne viene che la (3) definisce $x = x(t)$ come funzione ad un valore e finita di t per ogni t della R', essendo t_0 un valore fissato arbitrario sulla R' stessa.

integrale improprio

Si deve però considerare in quale relazione stiano i valori di $x(t)$ sui due lembi dei tagli τ e τ'. Indichiamo con e, e_1 due punti infinitamente vicini sui due lembi di τ: s'intende con ciò che i due punti si ridurrebbero ad uno solo qualora il taglio venisse annullato. Si supponga, per fissare le idee, il punto t_0 nel primo foglio: allora $x(e)$ si può calcolare prendendo come cammino d'integrazione t_0ce (fig. 23), ed $x(e_1)$ prendendo come linea d'integrazione $t_0cgc_1e_1$: poichè i due cammini hanno in comune il tratto t_0c, e sui tratti ce, c_1e_1, (vicini fra loro quanto si vuole e posti nel medesimo foglio della R') la funzione sotto il segno ha il medesimo valore, così viene

$$x(e_1) - x(e) = x(c_1) - x(c);$$

la differenza del valore di $x(t)$ lungo i due lembi di τ è dunque una costante $\bar{\omega}$. Essa si calcola facilmente, osservando

([1]) *Calcolo*, n.° 402.

([2]) *Calcolo*, n.i 364, *b*) e 369. Le dimostrazioni ivi date si estendono senza difficoltà alcuna al campo complesso.

che $x(c_1)$ differisce da $x(c)$ per l'integrale esteso al cammino $\boxed{cgc_1}$, onde

$$\boxed{\bar{\omega}=\int_{(cgc_1)}\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}}.$$

Questo integrale è esteso al lembo sinistro del taglio τ', ma il taglio stesso si può operare prossimo quanto si vuole alla congiungente a_1a_2, senza alterare il valore dell'integrale (n.° 87, *b*), onde

$$(4)\qquad \bar{\omega}=-2\int_{a_1}^{a_2}\frac{dt}{\sqrt{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)(t-a_4)}}.$$

Analogamente, indicando con g, g_1 due punti infinitamente vicini sui due lembi di τ', la $x(g)$ è calcolata prendendo come linea d'integrazione t_0cg, e la $x(g_1)$ prendendo come linea d'integrazione $t_0cec_3g_1$, e poichè, per la ragione indicata più sopra, gl'integrali estesi a cg ed a c_3g_1 sono uguali, così viene

$$x(g_1)-x(g)=x(c_3)-x(c),$$

differenza che è pure una costante $\bar{\omega}'$, che si trova essere

$$(5)\qquad \boxed{\bar{\omega}'=\int_{(cefc_3)}\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}}.$$

Annullando i tagli τ e τ', la $x(t)$ è funzione multiforme sulla R, e se $\bar{x}(t)$ è uno dei suoi valori in t, gli altri valori sono dati da

$$(6)\qquad \boxed{\bar{x}(t)+m\bar{\omega}+m'\bar{\omega}'},$$

dove m, m' sono numeri interi qualsivogliano ed $\bar{\omega}$ e $\bar{\omega}'$ sono i cosidetti ***moduli di periodicità*** (cfr. n.° 90): se dunque come luogo della variabile t si assume il piano-sfera ordinario, $x(t)$ è funzione multiforme, dovunque finita, su questo piano, ed i suoi valori sono dati da

$$(6')\qquad \boxed{\pm\bar{x}(t)+m\bar{\omega}+m'\bar{\omega}'}$$

i moduli di periodicità sono previsti da quanto è detto al n.° 90.

211. Se i due moduli di periodicità $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$ avessero un rapporto razionale, se fosse cioè

$$\bar{\omega}:\bar{\omega}'=p:q,$$

p e q interi primi fra loro, ne verrebbe $\bar{\omega}=p\omega$, $\bar{\omega}'=q\omega$, onde

$$m\bar{\omega}+m'\bar{\omega}'=(pm+qm')\omega;$$

ora qui si possono determinare gl'interi $\overline{m}$, $\overline{m}'$ in modo che sia $p\overline{m}+q\overline{m}'=1$, onde ω è pure un modulo di periodicità, ed ogni altro $m\bar{\omega}+m'\bar{\omega}'$ ne è un multiplo. Tutti i valori (6) si possono allora compendiare nella formula

$$(7)\qquad \pm\bar{x}(t)+k\omega,$$

essendo k un intero qualunque. Ma se formiamo la funzione

$$\psi(t)=\cos\frac{2\pi x(t)}{\omega}, \quad = \cos\left(\frac{2\pi\bar{x}}{\omega}+2k\pi\right)$$

questa ammette un unico valore per tutti i valori (7), e poichè $x(t)$ è funzione analitica regolare su tutta la riemanniana R', la $\psi(t)$ sarà uniforme e regolare su tutto il piano-sfera t, compreso il punto $t=\infty$: il che richiede (n.° 53) che essa si riduca a costante: ora ciò non potrebbe essere che essendo $x(t)$ costante, il che è manifestamente assurdo. Onde « i due moduli di periodicità $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$ non possono avere rapporto razionale ».

212. *a*) Stabilite così le prime proprietà di $x(t)$, riprendiamo la relazione fra x e t, che si può scrivere inversione

$$(8)\qquad \frac{dt}{dx}=\sqrt{R(t)},$$

e consideriamo ora x come variabile indipendente. Assegnato a t, per un valore arbitrario $x=x_0$, un valore pure arbitrario t_0 [1], per t_0 differente da a_1, a_2, a_3, a_4 e da ∞ questa

[1] Per esempio, nella (3), per $x=0$ il valore $t=t_0$. Si avverta che il punto t_0 è fissato sulla R, il che significa che insieme al valore numerico t_0 si fissa anche il segno del radicale.

equazione definisce, per un noto teorema d'esistenza [1], e sotto condizioni che sono nella (8) manifestamente verificate, la t come funzione analitica regolare di x, in modo che entro un cerchio di centro x_0 e raggio r si ha

$t_0 \neq a_1$

$$(9) \qquad \boxed{t(x) = t_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots},$$

dove è $c_1 = \sqrt{R(t_0)}$ in virtù della (8), e quindi diverso da zero: inoltre, fissati x_0 e t_0, la soluzione di (8) data dalla (9) è unica.

$t_0 = a_1$

Ma anche per $t_0 = a_1$ si ha uno sviluppo regolare per l'integrale di (8): posto infatti

$$(10) \qquad t = a_1 + u^2$$

la (8) diviene

$$2\frac{du}{dx} = \sqrt{(u^2 + a_1 - a_2)(u^2 + a_1 - a_3)(u^2 + a_1 - a_4)};$$

le condizioni di regolarità ed unicità del teorema d'esistenza sono soddisfatte in un intorno di $u = 0$, e si ha quindi uno sviluppo della forma

$$(11) \qquad u = c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

onde

$$(12) \qquad \boxed{t(x) = a_1 + c_1^2(x - x_0)^2 + \dots}.$$

Così pure per $t_0 = a_2$, a_3 od a_4.

$t_0 = \infty$

Infine, anche per $t_0 = \infty$ si ha una soluzione analitica monodroma; si ponga

$$(13) \qquad \boxed{t = \frac{1}{z}}:$$

con ciò la (8) diviene

$$-\frac{dz}{dx} = \sqrt{(1 - a_1 z)(1 - a_2 z)(1 - a_3 z)(1 - a_4 z)},$$

per un intorno di $z = 0$ che è ancora nelle condizioni di regolarità ed unicità sotto le quali vale il ricordato teorema

[1] Per la dimostrazione di questo teorema, v. *Calcolo*, n.° 620 e 621; la condizione di esistenza e di unicità si riduce qui alla regolarità di $R(t)$ nell'intorno di t_0.

d'esistenza, onde si ha per z uno sviluppo

$$(14) \qquad z = c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots, \quad \text{con} \quad c_1 = \pm 1$$

e quindi (n.° 69):

$$(15) \qquad \boxed{t = \frac{c_1}{x - x_0} + c_0' + c_1'(x - x_0) + \dots};$$

la $t(x)$ ha dunque per $x = x_0$ un polo di primo ordine con residuo uguale a $+1$ o -1.

È essenziale di osservare che, poichè il secondo membro della (8) è funzione della sola t, il raggio di convergenza r di (9) è indipendente da x_0 e dipende solo da t_0, per la dimostrazione stessa del teorema d'esistenza [1].

b) Ciò premesso, si fissi per $x = x_0$ il valore t_0 fissandosi in pari tempo, come si è detto, il segno del radicale: si ha così, colla (9), un elemento dal quale, per continuazione analitica, si ottiene una funzione analitica che indicheremo con $\tau(x)$; questa, nell'intero suo campo V di regolarità, soddisfa all'equazione (8) in virtù del principio del n.° 172, e se x_1 è un punto di V e t_1 è il valore assunto corrispondentemente da $\tau(x)$, l'elemento di $\tau(x)$ dedotto relativamente ad x_1 coincide necessariamente collo sviluppo, del tipo (9), ottenuto direttamente dalla (8) sotto le condizioni iniziali $x = x_1$, $t = t_1$.

Descriviamo ora nel piano t un cerchio di centro $t = 0$ e di raggio ρ arbitrariamente grande, indi dai centri a_1, a_2, a_3, a_4, cerchi di raggio ρ' arbitrariamente piccolo, e consideriamo l'area A interna al cerchio ρ ed esterna ai cerchi ρ' [2]. Siccome dalla dimostrazione del citato teorema di esistenza risulta che il raggio r di convergenza di (9) dipende dal raggio di convergenza dello sviluppo di $\sqrt{R(t)}$ in serie di potenze di $t - t_0$, e non può annullarsi che coll'annullarsi di questo, così ne segue che per tutti i valori di t_0 compresi in A, il corrispondente r — indipendente, come si è detto, da x_0 — rimane superiore ad un limite assegnabile. Ed anche

[1] V. *Calcolo*, n.° 621, *b*) ed *e*).

[2] Picard, *Traité d'Analyse* T. II, pag. 251-252 (Paris, 1905). La dimostrazione viene qui alquanto precisata.

così entro

per i valori di t_0 compresi nei cerchi (a_1, ρ'), (a_2, ρ'),... si hanno gli sviluppi dedotti da (12), il cui raggio di convergenza è pure superiore ad un limite assegnabile: per tutti i valori t_0 tali che sia $|t_0| < \rho$, esiste dunque per r un limite inferiore $\bar{r}$ non nullo.

c) Indichiamo con X quella parte del campo di regolarità di $\tau(x)$ in cui è $|\tau(x)| < \rho$, contorno compreso; ne viene che ognuno dei punti di X è centro di un cerchio di raggio non inferiore ad $\bar{r}$, e quindi il campo di regolarità di X si può estendere; l'estensione si potrà proseguire finchè non si trovi, al contorno del campo X esteso, un punto x_1 tendendo x al quale la $\tau(x)$ tenda all'infinito. Si faccia allora la trasformazione (13); ne viene per soluzione della (8) uno sviluppo della forma (15):

$$(15') \qquad \frac{c_1}{x - x_1} + c_1' + c_2'(x - x_1) + \dots,$$

valido in un intorno di x_1 che avrà punti interni ad X'; per questi punti, lo sviluppo dedotto da (15) e quello di $\tau(x)$ coincidono, dunque (15') è uno sviluppo di $\tau(x)$, che ha così per $x = x_1$ un polo di prim'ordine. Viene da ciò che « il campo « di validità di $\tau(x)$ si estende a tutto il piano x, il punto « $x = \infty$ solo eccettuato, e che in questo campo $\tau(x)$ non ha « altre singolarità, se non poli di prim'ordine ». La $\tau(x)$ è dunque una funzione meromorfa (n.° 148).

213. Si è veduto (n.° 210) che la $x(t)$ definita da (3) è funzione ad infiniti valori, dati tutti, se $\bar{x}(t)$ è uno di essi, dalla formula (6'). Ne viene che la funzione inversa, uniforme, $t = \tau(x)$, riprende un medesimo valore per tutti i valori (6): essa ammette cioè la proprietà espressa da

$$(16) \qquad \tau(x) = \tau(x + m\bar{\omega} + m'\bar{\omega}')$$

m ed m' essendo interi qualunque. I numeri $\bar{\omega}$ e $\bar{\omega}'$ sono *periodi* di $\tau(x)$ e (n.° 211) non sono riducibili ad un unico periodo; la $\tau(x)$ si dice, in base a ciò, *doppiamente periodica*.

214. Nei n.i precedenti abbiamo considerato l'integrale (2) o l'equivalente equazione differenziale (8) nel caso che $R(t)$

vedasi Sansone 2°

sia un polinomio di quarto grado in t. A questo caso, con una semplice trasformazione lineare, si riconduce, come è noto [1], quello in cui $R(t)$ è un polinomio di terzo grado

$$(17) \qquad R(t) = (t - a_1)(t - a_2)(t - a_3). \qquad a_1 \neq a_2 \neq a_3$$

Si ha, come luogo su cui $\sqrt{R(t)}$ è uniforme, nel caso (17), una riemanniana R a due fogli, uniti questa volta da due linee di passaggio di cui l'una va da a_1 ad a_2, l'altra da a_3 al punto all'infinito; del resto, le considerazioni fatte nei precedenti n.i valgono senza modificazione essenziale, e come nei n.i precedenti, si vede che la $t(x)$ è funzione uniforme in tutto il piano x e doppiamente periodica. Soltanto vi è da notare che se per $x = x_0$ è $t = \infty$, si ha in x_0 un polo di second'ordine anzichè di primo. Posto infatti

$$(18) \qquad t = \frac{1}{z^2}, \qquad dt = -\frac{2}{z^3}dz \qquad \sqrt{R(t)} = \frac{1}{z^3}\sqrt{(1-a_1z^2)\dots(1-a_3z^2)}$$

la (8) diviene, nel presente caso

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}\sqrt{(1 - a_1z^2)(1 - a_2z^2)(1 - a_3z^2)},$$

che dà per $x = x_0$, col valore $z = 0$ corrispondente ad x_0, la soluzione regolare:

$$z = -\frac{1}{2}(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

da cui, per la (18):

$$t = \frac{4}{(x - x_0)^2} + \frac{a_1}{x - x_0} + a_2 + \dots,$$

che ha, per $x = x_0$, un polo di secondo ordine.

§ II. La doppia periodicità.

215. *a*) Una funzione $f(x)$ si dice *periodica di periodo* $\bar{\omega}$, quando esiste un numero $\bar{\omega}$ tale che per ogni x sia def

$$(1) \qquad f(x + \bar{\omega}) = f(x).$$

[1] *Calcolo*, n.° 402, *a*).

Se $\bar{\omega}$ è periodo, lo è ogni suo multiplo $m\bar{\omega}$ (m intero); ogni funzione periodica ammette perciò infiniti periodi. Quando però esiste un periodo ω di cui tutti gli altri siano multipli, la funzione si dice *semplicemente periodica* ed il nome di *periodo* si riserva a questo numero ω.

Ad esempio, e^x è semplicemente periodica e $2\pi i$ ne è il periodo; $\operatorname{tg} x$ è semplicemente periodica, e π ne è il periodo. Essendo $F(x)$ una funzione qualsiasi di x, $F\left(e^{\frac{2\pi i z}{\omega}}\right)$ è funzione periodica di z col periodo ω.

b) Si osservi che se $f(x)$ è funzione uniforme di x con periodo $\bar{\omega}$, è anche funzione uniforme di $z = e^{\frac{2\pi i x}{\bar{\omega}}}$. Infatti, $f(x) = f\left(\frac{\bar{\omega}}{2\pi i}\log z\right)$ è funzione analitica di z, e poichè, per i valori che può, per un dato z, assumere $\log z$, essa conserva il medesimo valore, è uniforme rispetto a z.

c) Se $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots \bar{\omega}_n$ sono periodi di una funzione $f(x)$, è evidentemente periodo di $f(x)$ anche

$$m_1\bar{\omega}_1 + m_2\bar{\omega}_2 + \ldots + m_n\bar{\omega}_n,$$

qualunque siano gl'interi $m_1, m_2, \ldots m_n$.

d) « Una funzione analitica uniforme $f(x)$ non può « ammettere come periodi i numeri di una successione

$$\omega_1, \quad \omega_2, \ldots \quad \omega_n, \ldots$$

« tendente a zero ». Sia infatti x_0 un punto regolare di $f(x)$; si avrà, per $|x - x_0| < r$,

$$f(x) = f(x_0) + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Ma per tutti i valori di n maggiori di un numero assegnabile $\bar{n}$, i punti $a_n = x_0 + \omega_n$ cadranno entro il cerchio (x_0, r) e tenderanno ad x_0, per cui la serie

$$c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$

prenderà il valore zero per gl'infiniti punti a_n aventi x_0 come punto limite: ora ciò è impossibile (n.° 34, 5.°) a meno che $f(x)$ non si riduca a costante.

(Cioè a) una funz. che abbia periodi in rapporto razionale è semplicemente periodica

Questa proposizione viene spesso enunciata: « una funzione analitica uniforme non può avere un periodo infinitesimo ».

e) « Se due periodi $\bar{\omega}, \bar{\omega}'$ hanno un rapporto reale razio- « nale, essi sono multipli di un medesimo periodo ». Sia infatti $\bar{\omega} : \bar{\omega}' = p : q$, essendo p, q interi primi fra loro; ne viene

$$\frac{\bar{\omega}}{p} = \frac{\bar{\omega}'}{q} = \omega,$$

onde $m\bar{\omega} + m'\bar{\omega}'$, che è un periodo, (questo n.°, *c*), è dato da $(mp + m'q)\omega$. Ora, per essere p, q primi fra loro, si possono determinare gl'interi m, m' in modo che sia

$$mp + m'q = 1:$$

ne viene che ω è un periodo, di cui $\bar{\omega}$ e $\bar{\omega}'$ sono multipli (¹). Cioè è necessariam. semplicemente periodica

f) « Una funzione uniforme non può ammettere due « periodi $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$ aventi un rapporto reale irrazionale ». Sia infatti, se è possibile, $\bar{\omega}' = \alpha\bar{\omega}$, essendo α un numero irrazionale: questo può svolgersi in frazione continua, dando luogo alla successione di ridotte

$$\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \quad \frac{p_n}{q_n}, \ldots,$$

tendenti ad α, e, come è noto, si ha

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n} + \frac{\varepsilon}{q_n q_{n-1}},$$

dove ε è, in valore assoluto, inferiore all'unità. Ne verrebbe

$$q_n\bar{\omega}' - p_n\bar{\omega} = \frac{\varepsilon\bar{\omega}}{q_{n-1}}, \tag{2}$$

e siccome l'espressione (2) è un periodo (questo n.°, *c*) e le q_n tendono all'infinito, la funzione avrebbe un periodo infinitesimo, il che non è possibile, per il *c*) del presente n.°, a meno che la funzione stessa non si riduca ad una costante.

(¹) Cfr. il n.° 211.

g) Poichè la funzione uniforme $\tau(x)$, definita ai n.[i] 212 e seg., ammette due periodi $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}'$, a rapporto non razionale (n.° 211), essa non è semplicemente periodica, ed il rapporto $\bar{\omega} : \bar{\omega}'$ è necessariamente un numero complesso.

216. Siano ω, ω', ω'' tre periodi di una funzione uniforme. Essi si diranno ***dipendenti*** se si potranno determinare tre numeri interi m, m', m'' tali che sia

$$m\omega + m'\omega' + m''\omega'' = 0\,; \tag{3}$$

si diranno ***indipendenti*** nel caso contrario.

a) Supposti dapprima i tre periodi dipendenti, i tre numeri m, m', m'' si possono sempre ridurre ad essere primi fra loro; essendo allora d il massimo comun divisore di m ed m', si ponga $m = ad$, $m' = bd$. Poichè a e b, d ed m'' sono primi fra loro, si possono determinare gl'interi p, q, r, s in modo che sia

$$aq - bp = 1, \quad m''r - ds = 1\,; \tag{4}$$

posto allora

$$\left.\begin{array}{c} r(a\omega + b\omega') + s\omega'' = \Omega \\ p\omega + q\omega' = \Omega' \end{array}\right\} \tag{5}$$

e notando che la (3) si può scrivere

$$d(a\omega + b\omega') + m''\omega'' = 0, \tag{3'}$$

si ricavano dalle (5) e (3') le ω, ω', ω'', e poichè, per le (4), il determinante dei coefficienti è uguale all'unità, viene:

$$\omega = \begin{vmatrix} \Omega & rb & s \\ \Omega' & q & 0 \\ 0 & db & m'' \end{vmatrix}, \quad \omega' = \begin{vmatrix} ra & \Omega & s \\ p & \Omega' & 0 \\ da & 0 & m'' \end{vmatrix}, \quad \omega'' = \begin{vmatrix} ra & rb & \Omega \\ p & q & \Omega' \\ da & db & 0 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Siccome le Ω, Ω' sono periodi (n.° 215, *c*), risulta dalle (6) che ω, ω', ω'' sono composti con essi nella forma $c\Omega + c'\Omega'$, c e c' numeri interi, e sono pure composti con Ω, Ω' e nella medesima forma tutti i periodi $a\omega + b\omega' + c\omega''$, dove a, b, c sono interi qualsiansi.

b) Ammettiamo ora che i tre periodi siano indipendenti: i numeri complessi della forma $w = m\omega + m'\omega' + m''\omega''$ sono pertanto tutti fra loro diversi. Sia 2λ il limite inferiore dei

3 periodi dipendenti posson sempre farsi derivare da due

due se fossero eguali la loro differenza sarebbe 0 contro l'ipotesi

$n\omega' + n\omega'' + n\omega'' < 3n|\omega|$

moduli delle w; esso sarà pure il limite inferiore delle distanze fra due punti w. Consideriamo [1] quelli fra i w che si ottengono dando a ciascuno dei numeri m, m', m'' tutti i valori interi compresi fra n e $-n$, essendo n un intero positivo arbitrariamente grande: questi punti, essendovi fra essi lo zero, sono in numero di $(2n+1)^3$, distanti fra loro per non meno di 2λ; e se è ω il maggiore in modulo dei tre ω, ω', ω'', la distanza di ognuno dei w considerati dall'origine non è superiore a $3n\,|\,\omega\,|$. Descritto allora il cerchio (r) col centro nell'origine e di raggio $3n\,|\,\omega\,| + \lambda$, tutti i punti w accennati sono non solo interni al cerchio r, ma vi sono interni tutti i cerchi (senza area comune) descritti dai punti stessi w come centro e con raggio λ. L'area del cerchio (r) è dunque superiore alla somma delle aree di questi cerchi: si ha cioè

$$\pi(3n\,|\,\omega\,| + \lambda)^2 > (2n+1)^3\pi\lambda^2,$$

da cui

$$\lambda < \frac{3n\,|\,\omega\,|}{(2n+1)^{\frac{3}{2}} - 1}.$$

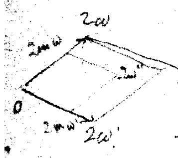
Facendo tendere n all'infinito, questa espressione tende a zero, il che significa che si hanno periodi $a\omega + b\omega' + c\omega''$ di modulo arbitrariamente piccolo. Ma ciò è impossibile per una funzione uniforme (n.° 215, *d*) onde si conclude che « una « funzione uniforme non può ammettere tre periodi indi- « pendenti ».

217. Una funzione uniforme $f(x)$ non può dunque ammettere più di due periodi indipendenti, ed abbiamo veduto (n.° 213) come esistano di fatto tali funzioni. Se $f(x)$ è doppiamente periodica, esisteranno (n.° 216, *a*) due periodi (che indicheremo d'ora in avanti, conformemente all'uso, con 2ω e $2\omega'$) mediante i quali ogni altro periodo si esprime nella forma $2m\omega + 2m'\omega'$, m ed m' interi; sappiamo inoltre (n.° 215, *g*) *che il rapporto* $\omega' : \omega$ *è necessariamente complesso*. Volendo, è lecito sostituire il periodo $-\omega$ ad ω; si può pertanto sup-

avent così due periodi indip.

[1] V. Goursat, *Cours d'Analyse*, T. II, p. 179 (Paris, 1904).

porre senza restrizione che il coefficiente della parte immaginaria di $\omega' : \omega$ sia positivo. I periodi 2ω, $2\omega'$ si dicono costituire una coppia di ***periodi elementari*** per la $f(x)$.



Nè nell'interno del parallelogrammo avente per lati i vettori 2ω, $2\omega'$, nè sul perimetro (ad eccezione dei vertici del parallelogrammo) può cadere alcun periodo. Se infatti ciò fosse, quel periodo avrebbe, sui lati del parallelogrammo, componenti della forma $2m\omega$, $2m'\omega'$, e ciò è assurdo, a meno che non sia $m=0$ ed $m'=1$, o $m=1$ ed $m'=0$, od $m=m'=0$, od $m=m'=1$. cioè a meno che il periodo non stia in un vertice

218. *a*) Essendo 2ω, $2\omega'$ una coppia di periodi elementari per una $f(x)$, si ponga

$$(7) \qquad \boxed{\begin{cases} \omega_1 = a\omega + b\omega' \\ \omega_1' = a'\omega + b'\omega' \end{cases}}$$

Sostituzione modulare intera

essendo a, a', b, b' numeri interi tali che sia $ab' - ba' = \pm 1$. Dalle (7), ω ed ω' sono esprimibili in funzioni lineari di ω_1, ω_1' a coefficienti interi, e precisamente, ammettendo per il determinante $ab' - ba'$ il segno $+$:

$$(8) \qquad \begin{cases} \omega = b'\omega_1 - b\omega_1' \\ \omega' = -a'\omega_1 + a\omega_1' \end{cases}$$

e perciò ogni periodo si esprime nella forma $2m\omega_1 + 2m'\omega_1'$, m ed m' interi: si verifica inoltre che il coefficiente della parte immaginaria di $\omega_1' : \omega$, è pure positivo. La coppia ω_1, ω_1' è dunque, al pari di ω, ω', una coppia di periodi elementari.

b) Reciprocamente, se ω_1, ω_1' è una coppia di periodi elementari, ω ed ω' potranno esprimersi in funzione lineare a coefficienti interi di ω_1, ω_1' e reciprocamente:

$$(9) \qquad \begin{cases} \omega_1 = a\omega + b\omega' \\ \omega_1' = a'\omega + b'\omega' \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \omega = p\omega_1 + q\omega_1' \\ \omega' = p'\omega_1 + q'\omega_1' \end{cases}.$$

onde, sostituendo, e poichè ω_1 ed ω_1' sono indipendenti, da

$$a(p\omega_1 + q\omega_1') + b(p'\omega_1 + q'\omega_1') = \omega_1,$$

si trae

$$ap + bp' = 1, \quad aq + bq' = 0,$$

da cui segue che a e b sono primi fra loro, e perciò, risolvendo il primo dei sistemi (9) colla regola di CRAMER, si vede che deve essere $ab' - ba' = \pm 1$. Da tutto ciò si conclude intanto che condizione affinchè una coppia ω_1, ω_1' di periodi sia elementare, è che si abbia $ab' - ba' = \pm 1$. Ma è sempre possibile assumendo, se è il caso, la coppia ω_1, $-\omega_1'$ come elementare invece di ω_1, ω_1', fare in modo che anche il rapporto $\omega_1' : \omega_1$ abbia la parte immaginaria positiva, al pari di $\omega' : \omega$; ora una semplice verifica di calcolo mostra che ciò porta alla conseguenza che $ab' - ba'$ sia positivo. La condizione necessaria e sufficiente affinchè la relazione (7) dia una coppia di periodi elementari si scriverà dunque

$$(10) \qquad ab' - ba' = 1.$$

219. *a*) Sostituendo ai periodi il rapporto $\omega : \omega' = \tau$, e posto $\omega_1 : \omega' = \tau_1$, la trasformazione (7) viene a scriversi

$$(11) \qquad \boxed{\tau_1 = \frac{a\tau + b}{a'\tau + b'}}$$

sostituzione modulare fratta

essa è un'operazione A, definita dal quadro $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, e che eseguita su τ dà τ_1.

Data una seconda operazione simile B, definita dal quadro $\begin{pmatrix} c & d \\ c' & d' \end{pmatrix}$ con $cd' - dc' = 1$, il prodotto BA delle due operazioni, od esecuzione di B sul risultato di A, sarà dato dal quadro

$$\begin{pmatrix} ac + a'd & bc + b'd \\ ac' + a'd' & bc' + b'd' \end{pmatrix},$$

il cui determinante, essendo dato dal prodotto $(ab' - ba')(cd' - dc')$, sarà pure uguale all'unità. Chiamando ***sostituzioni modulari*** le trasformazioni definite da (7) o (11) unitamente alla (10), il prodotto di due tali operazioni è pure una sostituzione modulare; le sostituzioni modulari formano dunque un gruppo, detto ***gruppo modulare*** [1].

b) Fra le sostituzioni modulari sono da notare quelle speciali E, S, date rispettivamente dai quadri $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ossia da

$$(12) \qquad \tau_1 = \tau + 1, \quad \tau_1 = -\frac{1}{\tau};$$

[1] Per uno studio approfondito del gruppo modulare, che qui non è possibile di esporre, v. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, Pisa 1901, § 18 e seguenti.

le potenze intere di R danno le sostituzioni della forma

$$\tau_1 = \tau + m, \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega + m\omega' \\ \omega_1' = \omega' \end{cases}$$

dove m è un intero qualsivoglia, positivo o negativo.

c) Data una sostituzione modulare qualsiasi (11), l'applicazione di R^{-m} la muta in

$$\frac{(a - ma')\tau + b - mb'}{a'\tau + b'},$$

e qui, preso per m il quoziente della divisione di a per a', primi fra loro, e detto r il resto [1], la sostituzione prende la forma

$$\frac{r\tau + b''}{a'\tau + b'}$$

ed applicando la S, indi la $R^{-m'}$, dove m' è il quoziente della divisione di a' per r, si viene, r' essendo il nuovo resto, alla sostituzione

$$\frac{r'\tau + b'''}{r\tau + b''},$$

e così via. Poichè, per la (10), a ed a' sono primi fra loro, si giungerà dopo un numero finito di applicazioni del procedimento, ad un resto 1 e quindi a sostituzioni della forma

$$\frac{\tau + q}{p'\tau + q'} \quad \text{o} \quad \frac{p\tau + q}{\tau + q'},$$

che si possono ridurre l'una all'altra mediante applicazione della S. Si supponga ottenuta la seconda forma: essendo $pq' - q = 1$, essa viene a scriversi

$$p - \frac{1}{\tau + q'};$$

indi, con applicazione della R^{-p}, si viene a $-\dfrac{1}{\tau + q'}$ ed infine, applicando la S, a $\tau + q'$, ottenuta da τ mediante la $R^{q'}$. Rifacendo il cammino inverso, risulta pertanto che « ogni sostituzione modulare può ottenersi dalla « composizione delle due operazioni R ed S ».

d) Dati due numeri complessi α e β, si immagini un osservatore che, eretto sul piano dei numeri complessi, percorra il perimetro del parallelogramma avente per vertici i punti 0, α, β, $\alpha + \beta$, incontrando questi vertici nell'ordine 0, α, $\alpha + \beta$, β, 0. L'area del parallelogramma, che si

---

[1] S'intenda con resto il numero positivo $r = a - ma'$ unico, minore del valore assoluto di a'; m può essere negativo.

indicherà con (α, β), si dirà allora positiva o negativa, secondo che l'area stessa rimarrà alla sinistra o alla destra dell'osservatore.

e) È manifesto che le aree dei parallelogrammi (ω, ω'), $(\omega + \omega', \omega')$ e $(-\omega', \omega)$ sono uguali in valore ed in segno. Ma i due ultimi sono ottenuti da (ω, ω') mediante applicazione delle sostituzioni R ed S, e poichè tutte le sostituzioni del gruppo modulare si ottengono da R ed S, si conclude « che i parallelogrammi costruiti con una coppia $2\omega_1$, $2\omega_1'$ di periodi « elementari sono tutti equivalenti », e, di più, di uguale segno perchè il rapporto $\omega_1' : \omega_1$ ha la parte immaginaria positiva.

f) Se si pone $\omega = \rho e^{i\theta}$, $\omega' = \rho' e^{i\theta'}$, l'area di (ω, ω') è data da $\rho\rho' \operatorname{sen}(\theta' - \theta)$. Da ciò segue subito che se è

$$\omega_1 = p\omega + q\omega'$$
$$\omega_1' = p'\omega + q'\omega',$$

l'area di (ω_1, ω_1') è $(pq' - qp')\rho\rho' \operatorname{sen}(\theta' - \theta)$. Ne risulta nuovamente la proposizione data ad *e*) e ne consegue anche la reciproca, poichè se (ω, ω') ed (ω_1, ω_1') sono equivalenti e di ugual segno è $pq' - qp' = 1$ ed $2\omega_1$, $2\omega_1'$ costituiscono una coppia di periodi elementari.

§ III. Le funzioni ellittiche.

220. Dicesi *funzione ellittica* ogni funzione analitica uniforme, doppiamente periodica, la quale ammette a distanza finita sole singolarità polari.

Una funzione ellittica ammette pertanto $x = \infty$ come punto singolare essenziale.

La funzione $\tau(x)$ definita al n.° 212 come inversa dell'integrale ellittico di prima specie, è una funzione ellittica.

221. Sia $f(x)$ una funzione ellittica, e sia 2ω, $2\omega'$ una sua coppia di periodi elementari. Nel piano della x si conducano le rette — formanti un angolo diverso da zero e da 180° — che congiungono l'origine ai punti 2ω e $2\omega'$, indi per i punti $2m'\omega'$ si conducano le parallele alla prima, per i punti $2m\omega$ le parallele alla seconda di queste rette, m ed m' essendo interi qualsivogliano. Con ciò il piano delle x viene compartito (fig. 24) in una rete di infiniti parallelogrammi fra loro congruenti; i vertici di questi, della forma $2m\omega + 2m'\omega'$, si indicheranno genericamente con w e si diranno *punti periodici*.

Due punti a, b del piano complesso si diranno *congruenti* rispetto a 2ω, $2\omega'$ se la differenza $b-a$ è un w, cioè se è

$$b = a + 2m\omega + 2m'\omega';$$

per indicare che a e b sono congruenti, si scriverà $a \equiv b (2\omega, 2\omega')$ e semplicemente $a \equiv b$ se non vi può essere equivoco circa ai periodi elementari. Se è $a \equiv b$, sarà $f(a) = f(b)$. Conside-

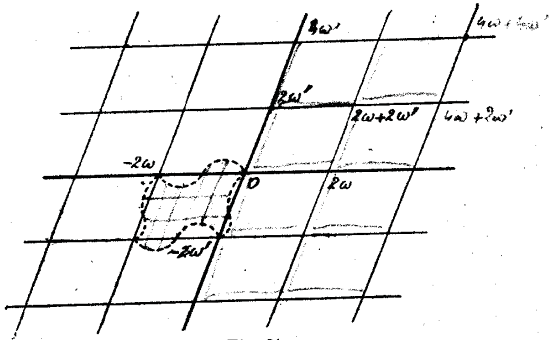


Fig. 24

rando come appartenente ad ogni parallelogramma della rete una parte del proprio perimetro, e precisamente i lati 2ω, $2\omega'$ nel parallelogramma 2ω, $2\omega'$, ed i lati corrispondenti a questi in ogni altro parallelogramma [1], si può dire che in ognuno dei parallelogrammi vi è un punto ed uno solo congruente ad ogni punto a del piano.

Tutti i valori di cui la $f(x)$ è suscettibile sono dunque assunti entro ognuno dei parallelogrammi, e la conoscenza della funzione in uno dei parallelogrammi della rete equivale alla sua conoscenza in tutto il piano. Questo fatto si esprime dicendo che il parallelogramma è *campo fondamentale* per la funzione. Si può però assumere come campo fondamentale un'area diversa, equivalente al parallelogramma, ottenuta

[1] Così, si riguarderà come appartenente al parallelogramma avente per vertici opposti $2m\omega + 2m'\omega'$ e $2(m+1)\omega + 2(m'+1)\omega'$, la parte del perimetro costituita dai lati che uniscono $2m\omega + 2m'\omega'$ a $2(m+1)\omega + 2m'\omega'$ e a $2m\omega + 2(m'+1)\omega'$.

aggiungendo e togliendo parti congruenti al parallelogramma stesso. Così il quadrilatero curvilineo, di contorno punteggiato nella fig. 24, si può assumere come campo fondamentale.

222. *a*) « Una funzione ellittica non può essere intera, « a meno di ridursi a costante ». Se infatti $f(x)$ è intera, essa sarà regolare e limitata in ogni regione finita del piano, in particolare nel parallelogramma (ω, ω') ed avrà quindi in esso un massimo modulo M. Ma questo sarà massimo modulo in ogni altro parallelogramma della rete, e quindi in tutto il piano: il che non può essere (n.° 51) a meno che $f(x)$ non si riduca a costante.

Segue da ciò che ogni funzione ellittica deve ammettere poli in ogni parallelogramma, ed è quindi una funzione meromorfa. È poi chiaro che il numero dei poli, in ogni parallelogramma, è finito e fisso; e se a è polo, ogni punto congruente ad a lo è del pari.

b) Si dirà *ordine* di una funzione ellittica il numero dei suoi poli in ogni parallelogramma, ogni polo essendo contato per tanti, quante sono le unità del suo ordine di multiplicità.

ordine

c) « Non esistono funzioni ellittiche di ordine 1, a meno « di ridursi a costante ». La $f(x)$ abbia infatti, nel proprio campo fondamentale, un solo polo di primo ordine, e sia A il rispettivo residuo. Si formi l'integrale

ord 1 = f cost

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} f(x)\,dx$$

esteso al contorno del detto campo [1]: esso si decompone nella somma degli integrali rispettivamente presi lungo i lati $0 \ldots 2\omega$, $2\omega \ldots 2(\omega+\omega')$, $2(\omega+\omega') \ldots 2\omega'$ e $2\omega' \ldots 0$. Ma poichè sui lati opposti la $f(x)$ riprende gli stessi valori, così il primo

[1] Questo campo sia il parallelogramma $(2\omega, 2\omega')$; qualora però il polo si trovasse su uno dei lati, si sostituisca al parallelogramma, come campo fondamentale, un parallelogramma a lati uguali e paralleli ma spostato in modo che il polo si trovi all'interno del campo: la dimostrazione prosegue senza modificazioni. Questa stessa osservazione s'intende fatta per i casi che in seguito presentano analoga circostanza.

ed il terzo integrale, percorsi in senso contrario, si distruggono e così succede del secondo e del quarto; ne viene che l'integrale (1) è nullo. Ma questo integrale, residuo integrale di $f(x)$ rispetto al campo $(2\omega,\ 2\omega')$, è uguale (n.° 103) al residuo A nel polo: onde $A = 0$, cioè la $f(x)$ non ammette polo, e quindi (questo n.°, a) si riduce a costante.

d) Risulta ancora dalla dimostrazione precedente « che « il residuo integrale di una funzione ellittica rispetto ad « un campo fondamentale è nullo ». È dunque nulla la somma dei residui dei varî poli esistenti nel campo.

In particolare, una funzione di ordine 2 ha un polo di secondo ordine ed è, nell'intorno di questo, indicato con α, della forma:

$$f(x) = \frac{a}{(x-\alpha)^2} + c_0 + c_1(x-\alpha) + \dots,$$

oppure ha due poli di prim'ordine con residui contrari; s'intenda sempre entro un campo fondamentale: indicazione che in seguito verrà di norma sottintesa. Del primo caso dà un esempio la funzione generata dall'inversione dell'integrale ellittico di prima specie nel caso in cui $R(x)$ è polinomio di terzo grado (n.° 214); del secondo, la funzione ottenuta dalla stessa inversione quando $R(x)$ è polinomio di quarto grado (n.° 212).

e) Che il residuo entro il parallelogramma debba essere nullo, rimane vero anche per una funzione analitica doppiamente periodica non necessariamente ellittica, purchè uniforme.

223. *a*) Se $f_1(x),\ f_2(x), \dots\ f_r(x)$ sono funzioni ellittiche aventi $2\omega,\ 2\omega'$ come periodi, ogni funzione razionale di $f_1,\ f_2, \dots\ f_r$ è pure ellittica ed ha i medesimi periodi.

b) Si dicono *omoperiodiche* quelle funzioni ellittiche che hanno i medesimi periodi elementari.

c) Se $f(x)$ è funzione ellittica avente $2\omega,\ 2\omega'$ come periodi elementari, si vede subito che la sua derivata $f'(x)$ ammette $2\omega,\ 2\omega'$ come periodi. Ogni funzione razionale delle $f_1,\ f_2, \dots\ f_r$ considerate ad a) e delle loro derivate di qualunque ordine, ammette dunque i periodi $2\omega,\ 2\omega'$.

224. *a*) « Per ogni funzione ellittica, il numero degli zeri « in un campo fondamentale è uguale al numero dei poli nel « campo stesso ».

ma non è più ellittica
r. 227 a

Qui, come in seguito in circostanze analoghe, ogni zero ed ogni polo andrà contato per tanti zeri o poli rispettivamente, quante sono le unità del relativo ordine di multiplicità; analogamente, si dirà che $f(x)$ prende m volte in a il valore $f(a)$, se a è radice dell'ordine m di multiplicità per $f(x) - f(a)$.

Sia $f(x)$ una funzione ellittica di cui $(2\omega,\ 2\omega')$ sia campo fondamentale, e si consideri l'integrale

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f'(x)dx}{f(x)}$$

223 c)

esteso al contorno del campo ([1]). Per la periodicità di $\frac{f'(x)}{f(x)}$, l'integrale (2) è nullo, come risulta dal n.° 223, c); d'altra parte, questo integrale ci dà (n.° 107, c) la differenza fra il numero degli zeri ed il numero dei poli di $f(x)$ contenuti nel campo; perciò questi numeri sono uguali.

b) Siccome $f(x) - a$, qualunque sia il valore a, è funzione ellittica avente gli stessi poli di $f(x)$, essa avrà lo stesso numero di zeri nel campo fondamentale, cioè sarà uguale il numero dei valori di x pei quali $f(x)$ prende il valore a. Talchè « una funzione ellittica dell'ordine m prende m volte, « in ogni parallelogramma dei periodi elementari, qualsiasi « valore, compreso il valore zero ed il valore ∞ ».

Chiamando *punti di livello corrispondenti ad* a i valori di x pei quali è $f(x) = a$, si può anche dire che, per una funzione ellittica di ordine m, corrispondono ad ogni numero a (incluso $a = \infty$) m punti di livello in ogni parallelogramma elementare.

Considerando a come variabile complessa, il suo piano sfera è rappresentato m volte su ogni parallelogramma; in altri termini, la $f(x) = a$ pone in corrispondenza biunivoca il parallelogramma nel piano x, con un piano sfera ad m fogli come luogo della variabile a. 26

c) Si consideri ora l'integrale

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f'(x)\,x\,dx}{f(x)},$$

([1]) Conviene tenere presente l'osservazione fatta a piè di pagina 273.

esteso pure al contorno del campo fondamentale di $f(x)$; questo integrale dà, come è noto (n.° 108, *b*), la somma delle radici meno la somma dei poli contenuti nel campo. Ma, integrando lungo il perimetro del parallelogramma $(2\omega, 2\omega')$, la somma

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^{2\omega}\frac{xf'(x)dx}{f(x)}+\int_{2\omega+2\omega'}^{2\omega'}\frac{xf'(x)dx}{f(x)}\right\}$$

si riduce, mutando nel secondo integrale x in $x+2\omega'$, e tenendo conto della periodicità, a

$$-\frac{2\omega'}{2\pi i}\int_0^{2\omega}\frac{f'(x)dx}{f(x)}=-\frac{2\omega'}{2\pi i}[\log f(2\omega)-\log f(0)],$$

ora, essendo $f(2\omega)=f(0)$, la parentesi è nulla o della forma $2m'\pi i$, m' intero; così, la somma dei detti integrali è in generale $2m'\omega'$. Analogamente, la somma degli integrali

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{2\omega}^{2\omega+2\omega'}\frac{xf'(x)dx}{f(x)}+\int_{2\omega'}^{0}\frac{xf'(x)dx}{f(x)}\right\}$$

si riduce, per la medesima ragione, a $2m\omega$, m intero. Se dunque α_k e β_k sono rispettivamente gli zeri ed i poli di $f(x)$ entro $(2\omega, 2\omega')$, con $k=1, 2, \dots m$, si ha

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m}\alpha_k-\sum_{k=1}^{m}\beta_k=2m\omega+2m'\omega', \quad \text{ossia} \quad \Sigma\alpha_k\equiv\Sigma\beta_k \quad (2\omega, 2\omega')}. \qquad (4)$$

Abel

E da ciò risulta subito che « le somme dei punti di livello, « corrispondenti a qualunque valore *a*, sono tutte fra loro « congruenti rispetto ai periodi (¹) ».

225. *a*) « Una funzione ellittica, di periodi elementari « 2ω, $2\omega'$, è determinata, all'infuori di un moltiplicatore

(¹) Di questa proposizione, che è il celebre teorema d'ABEL per il caso delle funzioni ellittiche, non ci è possibile di porre qui in luce tutta l'importanza, la quale apparirà meglio nella trattazione generale degli integrali abeliani.

« costante, dalle sue radici e dai suoi poli nel parallelo- « gramma $(2\omega, 2\omega')$ ».

Siano infatti $f(x)$, $f_1(x)$ due funzioni ellittiche omoperiodiche, e che abbiano in $(2\omega, 2\omega')$ gli stessi poli e le stesse radici. Il loro quoziente $f(x):f_1(x)$ sarà pure una funzione ellittica, che potrebbe essere infinita soltanto in un polo di $f(x)$ o in uno zero di $f_1(x)$: ma gli zeri ed i poli di $f(x)$ ed $f_1(x)$ essendo gli stessi in $f(x)$ ed $f_1(x)$ e del medesimo ordine, si elidono nel rapporto, che pertanto non ha infiniti e si riduce quindi (n.° 222, *a*)) ad una costante. 223 a) $f/f_1 = c$

b) « Una funzione ellittica, di periodi elementari 2ω, « $2\omega'$, è determinata, all'infuori di una costante additiva, « dalla conoscenza delle frazioni razionali semplici (n.° 73) « che ne caratterizzano i poli ».

Le due funzioni ellittiche omoperiodiche $f(x)$ ed $f_1(x)$ abbiano, per $x=\alpha$, un polo caratterizzato dalla medesima funzione razionale semplice:

$$p(x)=\frac{a_0}{x-\alpha}+\frac{a_1}{(x-\alpha)^2}+\dots+\frac{a_r}{(x-\alpha)^r}.$$

Ne risulta che $f(x)-f_1(x)$ è regolare per $x=\alpha$. Lo stesso accadendo per ogni altro polo, $f(x)-f_1(x)$ sarebbe una funzione ellittica priva di poli: essa deve dunque (n.° 222, *a*)) ridursi a costante.

226. *a*) Abbiansi due funzioni ellittiche $f(x)$, $\varphi(x)$, aventi una coppia di periodi comuni 2ω, $2\omega'$ a rapporto complesso; esse avranno pertanto in comune ogni periodo della forma $2m\omega+2m'\omega'$. Si assegni ad $f(x)$ un valore X: si avranno, nel parallelogrammo $(2\omega, 2\omega')$, un certo numero p di punti $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots \bar{x}_p$ pei quali è $f(\bar{x}_h)=X$, $(h=1, 2, \dots p)$, e sarà pure $f(x_h)=X$ per ogni $x_h\equiv\bar{x}_h$ $(2\omega, 2\omega')$. In questi punti x_h sarà anche $\varphi(x_h)=\varphi(\bar{x}_h)$, e quindi per qualsiasi valore X dato ad $f(x)$, la $\varphi(x)$ acquista p valori e non più. Inoltre, essendo $f(x)$ e $\varphi(x)$ funzioni analitiche di x, la $\varphi(x)$ è una funzione analitica di $f(x)$ (n.ⁱ 174, 32 *d*)) e quindi di X, che per ogni punto del piano-sfera di X ha non più di p valori; si sa pertanto (n.° 187) che $\varphi(x)$ è funzione algebrica di X, di grado non superiore a p. Ciò equivale a dire che « passa fra $f(x)$ 224 b) cioè fuori del parall.

« e $\varphi(x)$ una relazione algebrica, della forma

(5) $$F[f(x), \varphi(x)] = 0 \text{ »},$$

dove F è funzione razionale intera di grado p in $\varphi(x)$; ed analogamente, se q è il numero dei punti di $(2\omega, 2\omega')$ in cui $\varphi(x)$ assume un dato valore, la (5) è di grado q in $f(x)$.

b) Se, in particolare, $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono omoperiodiche, e 2ω, $2\omega'$ è una coppia di periodi elementari per entrambe, la relazione algebrica fra le due funzioni è, per ciascuna di esse, di grado uguale all'ordine dell'altra.

227. *a*) « Una funzione ellittica è omoperiodica colla sua « derivata ». ← 223 a)

Intanto, da $f(x+\bar\omega) = f(x)$ segue $f'(x+\bar\omega) = f'(x)$, onde ogni periodo della funzione lo è della derivata. Reciprocamente, ogni periodo della derivata lo è della funzione, poichè se η fosse periodo di $f'(x)$ e non di $f(x)$, da

$$f'(x+\eta) = f'(x)$$

si dedurrebbe

$$f(x+\eta) = f(x) + c;$$

ma, essendo η, 2ω, $2\omega'$ tre periodi per $f'(x)$, esistono tre interi n, m, m' tali che è (n.° 216) (perchè 3 periodi non possono essere indipendenti)

$$n\eta + 2m\omega + 2m'\omega' = 0$$

e quindi

$$f(x) = f(x + n\eta + 2m\omega + 2m'\omega') = f(x+n\eta) = f(x) + nc,$$

da cui segue $c = 0$. perchè se fosse $n=0$ sarebbe $2m\omega + 2m'\omega' = 0$ cioè ω ω' dipendenti

b) La derivata di una funzione ellittica di ordine m, con m poli semplici in ogni campo fondamentale, è di ordine $\boxed{2m}$, poichè un punto che sia polo di ordine r per la funzione lo è di ordine $r+1$ per la derivata. Così, la derivata di una funzione ellittica di ordine m con un solo polo m^{uplo} nel campo fondamentale, vi ammette un polo di ordine $m+1$ ed è pertanto essa stessa di ordine $m+1$. In ogni altra ipotesi, per la funzione di ordine m, l'ordine della derivata è compreso fra $2m$ ed $m+1$. Pertanto (n.° 226), « fra una fun- (in conseguenza di a)

« zione ellittica di ordine m e la sua derivata passa una « relazione algebrica

(6) $$F[f(x), f'(x)] = 0$$

« di grado m nella derivata, e di un grado compreso fra « $m+1$ e $2m$ (estremi inclusi) nella funzione ».

Si può anche dire, dalla (6), che una funzione ellittica di ordine m è integrale di un'equazione algebrico-differenziale di prim'ordine e di grado m nella derivata, non contenente in evidenza la variabile indipendente (¹).

c) Essendo $f(x)$ del secondo ordine, la derivata sarà del terzo se $f(x)$ ha nel campo fondamentale un solo polo di secondo ordine, del quarto se $f(x)$ ha due poli semplici. La (6), di secondo grado in f', è di terzo grado in f nel primo caso e di quarto grado nel secondo: risultato in armonia con quanto si è veduto ai n.ⁱ 212-213.

Questo riscontro viene meglio precisato nel n.° seguente.

228. *a*) Se una funzione ellittica soddisfa ad una relazione

(7) $$f(x) = -f(K-x),$$

essendo K una costante, $\frac{1}{2}K$ è zero o polo della funzione: infatti facendo $x = \frac{1}{2}K$, viene $f\left(\frac{1}{2}K\right) = -f\left(\frac{1}{2}K\right)$, il che giustifica l'asserto. Ponendo $x = \frac{1}{2}K + \omega$, viene

$$f\left(\frac{1}{2}K + \omega\right) = -f\left(\frac{1}{2}K - \omega\right) = -f\left(\frac{1}{2}K + \omega\right),$$

onde anche $\frac{1}{2}K + \omega$, e così $\frac{1}{2}K + \omega'$ ed $\frac{1}{2}K + \omega + \omega'$ sono radici o poli della $f(x)$.

Ad ω, ω', $\omega+\omega'$ e ai loro congrui si dà il nome di semiperiodi. Supponendo $K=0$, la $f(x)$ soddisfa ad $f(x) = -f(-x)$, e viene detta funzione dispari; per una funzione dispari, il punto $x=0$ e quindi tutti i punti periodi e tutti i punti semiperiodi sono radici o poli.

(¹) V. Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, 2ème éd., livre V, chap. IV (Paris, 1875).

b) Se una funzione ellittica soddisfa ad una relazione

$$f(x)=f(K-x), \tag{8}$$

la sua derivata soddisfa ad una relazione della forma (7), e quindi questa derivata ammette come radici o poli i punti congrui a $\frac{1}{2}K$, $\frac{1}{2}K+\omega$, $\frac{1}{2}K+\omega'$, $\frac{1}{2}K+\omega+\omega'$.

In particolare, se è $K=0$, cioè se $f(x)$ è pari $[f(x)=f(-x)]$, la derivata è dispari ed ha per zeri o poli tutti i punti periodi e semiperiodi.

c) Applichiamo queste osservazioni alle funzioni di secondo ordine. Se α, α_1 sono i poli di una tale funzione entro il campo fondamentale $(2\omega, 2\omega')$, ed α, α_1 si suppongono dapprima distinti e cioè poli di primo ordine, due punti di livello x, x_1 daranno $x+x_1\equiv\alpha+\alpha_1$ (n.° 224, *c*), onde segue la relazione della forma (8):

$f(x)=f(x_1)$ Abel

$$f(x)=f(\alpha+\alpha_1-x);$$

x_1

pertanto i punti

$$a_1=\frac{\alpha+\alpha_1}{2},\quad a_2=\frac{\alpha+\alpha_1}{2}+\omega,\quad a_3=\frac{\alpha+\alpha_1}{2}+\omega',\quad a_4=\frac{\alpha+\alpha_1}{2}+\omega+\omega' \tag{9}$$

radici di f'

saranno poli o radici di $f'(x)$. Ma i poli di questa, del secondo ordine, sono α ed α_1, certamente non congrui ai punti (9); onde i punti (9) sono le radici di $f'(x)$. Si formi allora la funzione

$$\varphi(x)=[f(x)-f(a_1)][f(x)-f(a_2)][f(x)-f(a_3)][f(x)-f(a_4)];$$

essa è ellittica, omoperiodica ad $f(x)$, $f'(x)$, di ottavo ordine, con radici doppie — poichè in esse si annulla la $\varphi'(x)$ — nei punti (9), e con due poli di quarto ordine in α ed in α_1. Ma la $f'^2(x)$ è dello stesso ordine, coi medesimi poli e radici, onde (n.° 225, *a*) essa non differisce da $f(x)$ se non per un moltiplicatore costante C. Si ha dunque

$$f'(x)=C\sqrt{\varphi(x)}, \tag{10}$$

e posto $f(x)=u$, $\varphi(x)=R(u)$, se ne ricava

$$x=\int\frac{du}{C\sqrt{R(u)}}, \tag{11}$$

integrale ellittico di prima specie, con R di quarto grado in u, e che dà l'inversa della $u=f(x)$.

d) Se invece i due poli α, α_1 sono coincidenti, in un unico polo del 2° ord. la $f(x)$ soddisfa alla relazione, sempre tipo (8):

$$f(x)=f(2\alpha-x);$$

il punto α essendo polo — di terz'ordine — di $f'(x)$, le radici di $f'(x)$ sono i punti

$$b_1=\alpha+\omega,\quad b_2=\alpha+\omega',\quad b_3=\alpha+\omega+\omega'; \tag{12}$$

se allora si forma la funzione

$$\psi(x)=[f(x)-f(b_1)][f(x)-f(b_2)][f(x)-f(b_3)],$$

questa è ellittica, omoperiodica ad $f(x)$, $f'(x)$ e di sesto ordine con radici doppie in b_1, b_2, b_3 e un polo di sesto ordine per $x=\alpha$. Essa ha dunque gli stessi zeri e lo stesso polo di $f'^2(x)$, e quindi è (n.° 225, *a*)

$$f'(x)=C\sqrt{\psi(x)}, \tag{13}$$

essendo C una costante; posto ancora $f(x)=u$, sarà $\psi(x)=R_1(u)$, dove R_1 è polinomio intero di terzo grado, e l'inversa di $f(x)$ sarà data dall'integrale ellittico di prima specie

$$x=\int\frac{du}{C\sqrt{R_1(u)}}. \tag{14}$$

Questi risultati costituiscono una conferma di quanto si è veduto ai n.ⁱ 212 e seguenti. L'equazione differenziale (6) si riduce, nel caso delle funzioni ellittiche del secondo ordine, alla (10) o alla (13).

Cioè una funz. ell. del 2° ord. può sempre considerarsi come l'inverso di un integrale ell. di 1ª specie

Capitolo Decimoquinto

ESPRESSIONI ANALITICHE PER LE FUNZIONI ELLITTICHE

§ I. Le funzioni σ, ζ e $\wp$.

229. Indichiamo ancora, come ai n.i precedenti, con w i punti del piano complesso della forma $2m\omega + 2m'\omega'$, essendo m ed m' interi, ed il rapporto $\omega' : \omega$ complesso avente la parte immaginaria positiva. I punti w sono vertici di una rete di parallelogrammi, campi fondamentali per le funzioni ellittiche per le quali 2ω, $2\omega'$ formano una coppia di periodi elementari.

Si indicheranno, nel presente Capitolo, con Σ' e Π' rispettivamente le serie ed i prodotti infiniti estesi a tutte le w, ad eccezione di $w = 0$ ($m = 0$, $m' = 0$).

« La serie

$$\sum{}' \frac{1}{w^{\alpha}} \tag{1}$$

« è assolutamente convergente per ogni numero α positivo « maggiore di 2 ».

Si considerino, all'uopo, i parallelogrammi P_1, P_2,... P_n,... aventi per centro comune il punto $x = 0$, i lati paralleli ad ω ed ω', ed un vertice rispettivamente in $2\omega + 2\omega'$, $4\omega + 4\omega'$,... $2n(\omega + \omega')$,... (fig. 25).

estensione alla serie armonica generalizzata a termini complessi

Sul perimetro di P_1 si trovano otto punti w, su P_2 se ne trovano 16,... su P_n ve ne sono $8n$, e se δ è la minima di-

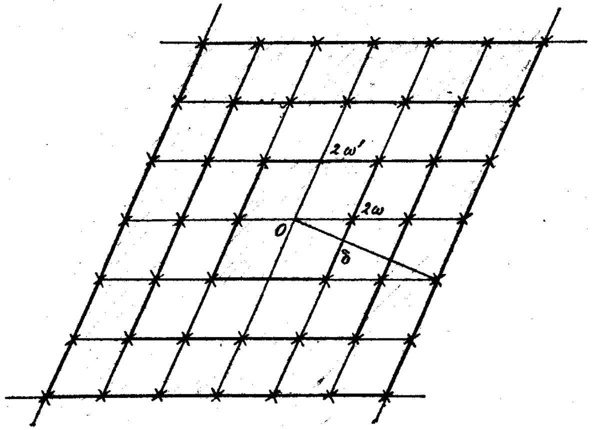


Fig. 25

stanza di 0 dal perimetro di P_1, $n\delta$ è la minima distanza di 0 dal perimetro di P_n.

Ne viene

$$\sum{}' \frac{1}{|w|^\alpha} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{n^\alpha \delta^\alpha} = \frac{8}{\delta^\alpha} \sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

e questa convergendo, come è noto, per $\alpha > 2$ (¹), la (1) stessa convergerà assolutamente per $\alpha > 2$.

grenzexponent

Il numero 2 è, per la serie (1), l'esponente di convergenza (n.° 144); esso non rende però la (1) assolutamente convergente. Per α intero, si scorge subito che la serie è nulla quando α è dispari, i suoi termini annullandosi a due a due. Si porrà, per comodità

(2) $$\sum{}' \frac{1}{w^{2n}} = \frac{c_n}{2n-1}.$$

cf. Vivanti **230.** Si richieda di costruire una funzione intera di cui siano radici — di primo ordine — tutti e soli i punti w.

(¹) V. *Algebra Complementare*, n.° 163.

6(x)

Poichè la (1) converge assolutamente per $\alpha = 3$ e non per un intero minore, 2 sarà il *rango* (n.° 143) della funzione intera richiesta e la sua forma generale sarà, per il problema di WEIERSTRASS (Cap. IX, § II):

p+1

$$e^{g(x)} x \prod{}' \left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w} + \frac{x^2}{2w^2}},$$

dove $g(x)$ è una funzione intera arbitraria. Facendo $g(x)$ nulla, si ha una particolare trascendente intera che risponde alla questione; essa viene indicata colla notazione $\sigma(x)$, introdotta da WEIERSTRASS ed ormai divenuta classica (¹), ed è chiamata *funzione sigma*.

La funzione σ è dunque espressa da

(3) $$\boxed{\sigma(x) = x \prod{}' \left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w} + \frac{x^2}{2w^2}}.}$$

Volendo porre le costanti 2ω, $2\omega'$ in evidenza, si scrive $\sigma(x;\ 2\omega,\ 2\omega')$.

perchè essendo γ nullo, il genere coincide col rango

La $\sigma(x)$ è di *genere* 2. Associando, nel prodotto infinito, i due fattori relativi a w e $-w$, si ottiene

(3′) $$\sigma(x) = x \prod{}' \left(1 - \frac{x^2}{w^2}\right) e^{\frac{x^2}{w^2}}$$

donde lo sviluppo in serie di potenze, convergente in tutto il piano

(4) $$\boxed{\sigma(x) = x - a_5 x^5 - a_7 x^7 \ldots;}$$

esso mostra che la σ è funzione dispari, $\sigma(-x) = -\sigma(x)$, ed è da notare la lacuna che esiste fra il primo ed il secondo termine, per cui è

$$\boxed{\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 1, \quad \sigma''(0) = \sigma'''(0) = \sigma^{(\mathrm{IV})}(0) = 0.}$$

Dalla (3′) risulta immediatamente

$$\boxed{\sigma(kx;\ 2k\omega,\ 2k\omega') = k\sigma(x;\ 2\omega,\ 2\omega')}$$

(¹) La medesima osservazione vale per le funzioni ζ e $\wp$ definite più avanti. Nella sua esposizione, il WEIERSTRASS (e con lui molti degli Autori che lo hanno seguito) indica con u la variabile indipendente.

che si esprime dicéndo che la σ è omogenea e di grado 1 nella terna x, ω, ω'.

$\zeta(x)$

231. La convergenza uniforme del prodotto infinito (3) (n.° 140) permette di formare direttamente lo sviluppo della derivata logaritmica di $\sigma(x)$, la quale si indica con $\zeta(x)$ (*funzione zita*). Si ottiene con ciò:

$\zeta = \frac{\sigma'}{\sigma}$

$$\zeta(x) = \frac{1}{x} + \sum{}' \left(\frac{1}{x - w} + \frac{1}{w} + \frac{x}{w^2} \right). \tag{5}$$

Essa è una funzione meromorfa, con poli di primo ordine in tutti e soli i punti w; in ognuno di questi il residuo è uguale ad 1. (Lo sviluppo (5) può riguardarsi come un'applicazione del problema di Mittag-Leffler (Cap. X).) La (5) permette di ottenere facilmente lo sviluppo di $\zeta(x)$ in serie di potenze di x, il quale sarà valido entro il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio uguale alla distanza r di $x = 0$ dal più prossimo punto periodo. Questo sviluppo, tenuto conto che le somme (1) sono nulle per α intero dispari e usando la notazione (2), è

$$\boxed{\zeta(x) = \frac{1}{x} - \frac{c_2 x^3}{3} - \frac{c_3 x^5}{5} - \frac{c_4 x^7}{7} - \dots - \frac{c_n x^{2n-1}}{2n-1} - \dots}; \tag{6}$$

risulta da esso che anche $\zeta(x)$ è funzione dispari.

$\wp(x)$

232. *a*) La (5), essendo convergente uniformemente in ogni regione del piano da cui siano esclusi, con cerchi arbitrariamente piccoli, i punti w, potrà in quell'area derivarsi termine a termine (n.° 61); ed indicando, sempre secondo Weierstrass, con $\wp(x)$ la derivata di $\zeta(x)$ cambiata di segno, si avrà

$$\boxed{\wp(x) = -\zeta'(x) = \frac{1}{x^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(x - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).} \tag{7}$$

La $\wp(x)$ è funzione meromorfa, con poli di secondo ordine (a residuo nullo) nei punti periodi; essa è pari [$\wp(-x) = \wp(x)$]. Nel cerchio (r) essa ammette lo sviluppo

$$\boxed{\wp(x) = \frac{1}{x^2} + c_2 x^2 + c_3 x^4 + c_4 x^6 + \dots + c_n x^{2n-2} + \dots} \tag{8}$$

Da notarsi la lacuna fra i due primi termini.

Volendo porre in evidenza i periodi, si scrive $\wp(x;\ 2\omega,\ 2\omega')$.

b) Cambiando x in kx, viene

$$\wp(kx;\ 2\omega, 2\omega') = \frac{1}{k^2 x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum{}' \frac{(2n-1) k^{2n-2} x^{2n-2}}{(2m\omega + 2m'\omega')^{2n}},$$

e, ponendo $\frac{1}{k^2}$ in evidenza, se ne deduce

$$\wp(kx;\ 2\omega, 2\omega') = \frac{1}{k^2} \wp\left(x;\ \frac{2\omega}{k}, \frac{2\omega'}{k}\right)$$

od anche:

$$\wp(kx;\ 2k\omega,\ 2k\omega') = \frac{1}{k^2} \wp(x;\ 2\omega,\ 2\omega').$$

Questa relazione è stata detta dal Weierstrass *relazione di omogeneità*. omogenea di grado −2

c) Dalla (7) si deduce, qualunque siano i valori x ed y all'infuori dei punti w:

$$\wp(x) - \wp(y) = \sum \left(\frac{1}{(x - w)^2} - \frac{1}{(y - w)^2} \right), \tag{9}$$

la sommatoria essendo ora estesa a tutti i valori w senza eccezione. Ne risulta che se y differisce da x per un qualsiasi periodo $\overline{w}$, cioè se è $y \equiv x$, ad ogni termine $\frac{1}{(x - w)^2}$ ne corrisponderà uno, nella sommatoria, ad esso contrario: per modo che dalla serie convergente data dal secondo membro di (9) si può estrarre una somma parziale in cui siano distrutti tanti di quei termini quanti si vuole. Ne risulta che la somma della serie (9) è nulla per $y \equiv x$; si ha quindi, per ogni w:

$$\wp(x + w) = \wp(x),$$

ed in particolare

$$\wp(x + 2\omega) = \wp(x), \quad \wp(x + 2\omega') = \wp(x), \tag{10}$$

Pertanto « la funzione $\wp(x)$ è una funzione ellittica di « periodi elementari 2ω, $2\omega'$, del secondo ordine, con poli di « secondo ordine in $x = 0$ ed in tutti i punti w [1] ».

[1] La $\wp(x)$ può considerarsi come la più semplice fra le funzioni ellittiche.

233. *a*) La derivata $\wp'(x)$ di $\wp(x)$ è funzione ellittica di terz'ordine, coi medesimi periodi, con poli tripli nei punti $x \equiv 0$; per il n.° 228, *d*) essa ammette tre radici semplici in ogni campo fondamentale, poste nei punti congrui ad ω, ω' ed $\omega + \omega'$, cioè nei semi periodi.

b) Come è noto, la $\wp(x)$, essendo di secondo ordine con un polo doppio, è legata alla sua derivata (n.° 228, *d*) da una relazione della forma

$$\boxed{\wp'^2(x) = R[\wp(x)]} \tag{11}$$

Equazione algebrica differenziale della $\wp$

dove R è polinomio razionale intero di terzo grado, e precisamente, per essere ω, ω' ed $\omega + \omega'$ le radici di $\wp'(x)$, sarà:

$$R[\wp(x)] = C[\wp(x) - \wp(\omega)][\wp(x) - \wp(\omega')][\wp(x) - \wp(\omega + \omega')]. \tag{12}$$

Per altro, indipendentemente dalle nozioni cui siamo giunti nel citato n.° 228, *d*), la relazione (11) può ottenersi direttamente dallo sviluppo (8) e precisamente dall'esame delle potenze negative di x. Indicando con P, P',... somme di termini con sole potenze positive (non nulle) di x, si ha infatti da (8):

$$\wp'(x) = -\frac{2}{x^3} + 2c_2 x + 4c_3 x^3 + \ldots,$$

onde

$$\wp'^2(x) = \frac{4}{x^6} - \frac{8c_2}{x^2} - 16c_3 + P;$$

poi

$$\wp^3(x) = \frac{1}{x^6} + \frac{3c_2}{x^2} + 3c_3 + P',$$

onde è

$$\wp'^2(x) - 4\wp^3(x) + 20c_2\wp(x) = -28c_3 + P''. \tag{13}$$

Ma con ciò il primo membro di (13), mentre d'una parte è funzione ellittica, d'altra parte non ammette poli: esso si riduce dunque ad una costante, il cui valore si ottiene facendo $x = 0$, e che si trova così uguale a $-28c_3$. Si ha dunque

$$\wp'^2(x) = 4\wp^3(x) - 20c_2\wp(x) - 28c_3,$$

espressione esplicita della (11). Essa suole scriversi:

$$\boxed{\wp'^2(x) = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3} \tag{14}$$

perchè funz. raz. di funz. ellittiche

dove è posto

$$\boxed{g_2 = 20c_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 28c_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6}.} \tag{15}$$

Posto la $\wp(x) = t$, si vede come essa dia l'inversione dell'integrale ellittico di prima specie nella forma di WEIERSTRASS

$$x = \int_t^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}. \tag{16}$$

234. Alle g_2 e g_3, funzioni di ω ed ω', è stato dato il nome di *invarianti* — rispetto al gruppo delle sostituzioni modulari —. È assai degno di nota il fatto che « tutte le « somme (1), per α intero pari e maggiore di 2, si esprimono « razionalmente per g_2 e g_3 ». $\sum \frac{1}{\omega^\alpha}$

Per dimostrarlo, deriviamo la (14); con ciò viene

$$2\wp''(x) = 12\wp^2(x) - g_2. \tag{17}$$

$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{g_2}{2}$

Sostituendo per $\wp(x)$, $\wp''(x)$ gli sviluppi in serie di potenze di x, notando che

$$\wp^2 = \frac{1}{x^4} + 2c_2 + 2c_3x^2 + \ldots + (2c_n + c_2c_{n-2} + $$
$$+ c_3c_{n-3} + \ldots + c_{n-2}c_2)x^{2n-4} + \ldots,$$

ed uguagliando i coefficienti, si ha, con semplici riduzioni

$$20c_2 = g_2, \quad c_4 = \frac{1}{3}c_2^2, \ldots$$

$$c_n = \frac{3}{(n-3)(2n+1)}(c_2c_{n-2} + c_3c_{n-3} + \ldots + c_{n-2}c_2),$$

e questa ultima relazione, di carattere ricorrente, dimostra la proprietà enunciata.

Le radici del polinomio

$$R(\wp) = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

secondo membro della (14), si sogliono indicare con e_1, e_2, e_3; è dunque

$$R(\wp) = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

Dal confronto colla (12) segue

$$e_1 = \wp(\omega), \quad e_2 = \wp(\omega'), \quad e_3 = \wp(\omega + \omega').$$

Le radici di $R(\wp)$ devono essere distinte, perchè se fosse, ad esempio, $\wp(\omega) = \wp(\omega')$, i punti ω, ω', dove la $\wp(x)$ riprende il medesimo valore, dovrebbero dare (n.° 224, *c*):

$$\omega + \omega' = 2m\omega + 2m'\omega';$$

il rapporto $\omega' : \omega$ sarebbe dunque razionale e la $\wp$ non sarebbe, per conseguenza, doppiamente periodica. Ciò è connesso alla osservazione che se R ha una radice multipla, l'integrale (16) si riduce a funzioni elementari. anche non è più di 3 grado

Dalla forma del polinomio R risulta pure che le e_1, e_2, e_3 sono legate agli invarianti: è infatti

$$\boxed{e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}}$$

È pure un invariante — nel senso sopra indicato — il discriminante della R, dato da

$$27g_3^2 - g_2^3,$$

di grado -12 rispetto alle w.

235. Notevoli proprietà delle funzioni ζ e σ si possono ricavare da quelle ottenute per la funzione $\wp$.

pure ζ è periodica di 2ª specie

a) Dalla periodicità della funzione $\wp(x) = -\zeta'(x)$, risulta per la ζ la proprietà, analoga alla periodicità e detta talvolta *periodicità di seconda specie*,

(18) $$\boxed{\zeta(x + 2\omega) - \zeta(x) = 2\eta, \quad \zeta(x + 2\omega') - \zeta(x) = 2\eta'}$$

dove η ed η' sono costanti; le 2η, $2\eta'$ vengono anche dette *periodi secondari*. Essi sono legati a 2ω, $2\omega'$ da una relazione notevole, che può ottenersi come segue. Si integri la $\zeta(x)$

lungo il perimetro di un parallelogramma elementare, che si intende spostato (v. nota a n.° 222, *c*) in modo da lasciare il

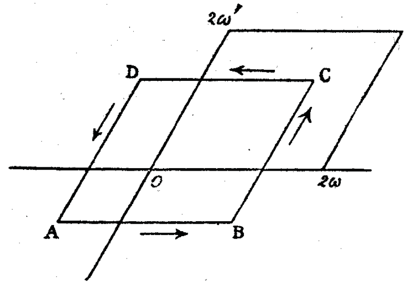


Fig. 26

polo $x = 0$ nell'interno (fig. 26). Essendo il residuo di $\zeta(x)$ per $x = 0$ uguale ad 1 (n.° 231), è $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\sigma'}{\sigma} dx = 1$

$$\int_{(ABCD)} \zeta(x)dx = 2\pi i.$$

Ma

$$\int_{AB} + \int_{CD} = -\int_{AB} [\zeta(x + 2\omega') - \zeta(x)]dx = -4\eta'\omega,$$

$$\int_{BC} + \int_{DA} = \int_{BC} [\zeta(x + 2\omega) - \zeta(x)]dx = 4\eta\omega'$$

onde l'accennata relazione

(19) $$\boxed{\omega'\eta - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}}$$

b) Dalle relazioni (18), per essere $\zeta(x) = \dfrac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}$, si deduce subito, c e c' essendo costanti:

$$\sigma(x + 2\omega) = ce^{2\eta x}\sigma(x), \quad \sigma(x + 2\omega') = c'e^{2\eta' x}\sigma(x);$$

per determinare le costanti, si fa rispettivamente $x = -\omega$, $x = -\omega'$, e notando che σ è funzione dispari, viene

$$c = -e^{2\eta\omega}, \quad c' = -e^{2\eta'\omega'},$$

da cui la proprietà della σ, detta *periodicità di terza specie*:

(20) $$\boxed{\sigma(x + 2\omega) = -e^{2\eta(x+\omega)}\sigma(x), \quad \sigma(x + 2\omega') = -e^{2\eta'(x+\omega')}\sigma(x)}$$

onde:

$$\sigma(x + 2\omega + 2\omega') = -e^{(2\eta+2\eta')(x+\omega+\omega')}\sigma(x),$$

dove si è tenuto conto della (19). Si ha in generale, dalla combinazione ed iterazione delle (20):

$$\begin{aligned}\sigma(x + 2m\omega + 2m'\omega') &= \\ &= (-1)^{mm'+m+m'} e^{2(m\eta+m'\eta')(x+m\omega+m'\omega')}\sigma(x).\end{aligned} \tag{21}$$

Derivando le (20), indi facendovi rispettivamente $x = -\omega$, $x = -\omega'$, e tenuto conto che $\sigma'(x)$ è funzione pari, viene

$$\boxed{\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \quad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}} \text{ [1]}. \tag{22}$$

§ II. Rappresentazione delle funzioni ellittiche.

236. *a*) Essendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ due r^{ple} di punti nel parallelogramma $(2\omega, 2\omega')$, si consideri l'espressione

$$f(x) = \frac{\sigma(x-\alpha_1)\sigma(x-\alpha_2)\ldots\sigma(x-\alpha_r)}{\sigma(x-\beta_1)\sigma(x-\beta_2)\ldots\sigma(x-\beta_r)}, \tag{1}$$

che rappresenta una funzione analitica meromorfa. Essa è nulla nei punti α_k e nei loro congruenti, infinita nei punti β_k e nei loro congruenti: proprietà che non si altera se, nella (1), si sostituisce ad uno dei punti α o β un suo congruente. La $f(x)$ gode di una proprietà analoga alla doppia periodicità e che è caso particolare di quella di terza specie: essa viene moltiplicata per un fattore costante se x si aumenta di un periodo. Infatti, dalla (20) del § precedente, si ha

$$f(x + 2\omega) = e^{2\eta A} f(x), \quad f(x + 2\omega') = e^{2\eta' A} f(x), \tag{2}$$

ed in generale

$$f(x + 2m\omega + 2m'\omega') = e^{(2m\eta + 2m'\eta')A} f(x), \tag{2'}$$

[1] V. per numerose altre formule sulle funzioni $\wp$, ζ e σ, H. A. Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*, Berlin, 1893.

dove è

$$A = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k - \sum_{k=1}^{r} \beta_k.$$

Si noti che, in tutto il presente n.°, i numeri α_k non sono necessariamente distinti, e così può essere dei numeri β_k: cioè per la $f(x)$ sono possibili zeri multipli o poli di ordine superiore al primo.

« Se è $A = 0$, la (1) dà l'espressione di una funzione « ellittica con poli e radici assegnati ».

b) Inversamente, sia una funzione ellittica $\varphi(x)$, della quale si conoscono gli zeri α_k, eventualmente in parte coincidenti, ed i poli β_k, pure non necessariamente distinti; deve essere, per il n.° 224, *c*) (Abel)

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k = \sum_{k=1}^{r} \beta_k + 2p\omega + 2p'\omega'.$$

Ponendo nella (1), al posto di β_r, la $\beta_r' = \beta_r + 2p\omega + 2p'\omega'$, sarà

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_r - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_r' = 0,$$

e perciò l'espressione (1) verrà a rappresentare una funzione doppiamente periodica, omoperiodica a $\varphi(x)$, cogli stessi zeri e gli stessi poli; il rapporto $\varphi(x):f(x)$ sarà dunque una funzione ellittica priva di poli, e pertanto (n.° 222, *a*) una costante C. perchè i poli di f elidono quelli di φ e recipr-

Si ha dunque per la $\varphi(x)$ l'espressione

$$\varphi(x) = C\frac{\sigma(x-\alpha_1)\sigma(x-\alpha_2)\ldots\sigma(x-\alpha_r)}{\sigma(x-\beta_1)\sigma(x-\beta_2)\ldots\sigma(x-\beta_r')}. \tag{3}$$

La costante si determinerà, sia dalla conoscenza del valore di $\varphi(x)$ in un punto che non sia nè polo nè radice, sia dalla identificazione di un termine negli sviluppi in serie del primo e del secondo membro.

È appena necessario di rilevare la notevole analogia fra l'espressione (3) per una funzione ellittica, e quella di una funzione razionale in cui siano decomposti in fattori lineari il numeratore ed il denominatore.

c) Come applicazione, si consideri la funzione $\wp(x)-\wp(y)$, che ha un polo di secondo ordine per $x=0$, e le cui radici sono $x=\pm y$. Sarà, per la (3):

$$\wp(x)-\wp(y)=C\frac{\sigma(x+y)\sigma(x-y)}{\sigma^2(x)}.$$

Per determinare la costante, si consideri lo sviluppo dei due membri per le potenze di x e vi si cerchi il coefficiente del termine in x^{-2}; esso è 1 nel primo membro, ed essendo

$$\sigma(x+y)=\sigma(y)+x\sigma'(y)+\dots,\quad \sigma(x-y)=\sigma(-y)+x\sigma'(-y)+\dots,$$
$$\sigma^2(x)=x^2+\dots,\quad \sigma(-y)=-\sigma(y),$$

così, nel secondo membro, il coefficiente di x^{-2} è $-C\sigma^2(y)$. Onde la formula

$$\boxed{\wp(x)-\wp(y)=-\frac{\sigma(x+y)\sigma(x-y)}{\sigma^2(x)\sigma^2(y)}.} \tag{4}$$

Facendo, in particolare, $y=\omega,\ \omega',\ \omega+\omega'$, e notando (n.° 234) che è $\wp(\omega)=e_1$, $\wp(\omega')=e_2$, $\wp(\omega+\omega')=e_3$, si ha

$$\begin{aligned}R(\wp)&=4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3)=\\&=\frac{\sigma(x+\omega)\sigma(x-\omega)\sigma(x+\omega')\sigma(x-\omega')\sigma(x-\omega-\omega')\sigma(x+\omega+\omega')}{\sigma^6(x)\sigma^2(\omega)\sigma^2(\omega')\sigma^2(\omega+\omega')}.\end{aligned} \tag{5}$$

Liouville

237. *a*) « Ogni funzione ellittica $f(x)$ pari, di periodi elementari 2ω, $2\omega'$, si esprime in funzione razionale della $\wp(x)$ « omoperiodica ».

Essendo pari, la $f(x)$ è d'ordine pari $2n$; siano $\pm\beta_1$, $\pm\beta_2,\dots\pm\beta_n$ i suoi poli (non congruenti), $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2,\dots\pm\alpha_n$ le sue radici; le β siano dapprima tutte diverse da zero. Allora la funzione ellittica

$$\frac{[\wp(x)-\wp(\alpha_1)]\dots[\wp(x)-\wp(\alpha_n)]}{[\wp(x)-\wp(\beta_1)]\dots[\wp(x)-\wp(\beta_n)]}$$

è omoperiodica e di ordine $2n$, cogli stessi zeri e poli di $f(x)$, la quale non ne può quindi differire che per un fattore costante.

Se invece $\beta=0$ è polo di $f(x)$, lo sarà d'ordine pari $2s$, ed allora all'espressione precedente andrà sostituita la

$$\frac{\wp^s(x)[\wp(x)-\wp(\alpha_1)]\dots[\wp(x)-\wp(\alpha_n)]}{[\wp(x)-\wp(\beta_1)]\dots[\wp(x)-\wp(\beta_{n-s})]}.$$

b) « Ogni funzione ellittica $f(x)$ di periodi elementari 2ω, $2\omega'$, si esprime in funzione razionale della $\wp(x)$ « omoperiodica e della $\wp'(x)$ ». Liouville

Si formi $f(x)+f(-x)$; questa, essendo pari, è funzione razionale $R(\wp)$ di $\wp(x)$. Si formi poi $\dfrac{f(x)-f(-x)}{\wp'(x)}$; i due termini della frazione essendo dispari, questa è pure funzione pari, ed è quindi funzione razionale $S(\wp)$ di $\wp(x)$. Ne viene

$$f(x)=\frac{1}{2}[R(\wp)+\wp'S(\wp)],$$

che dimostra l'enunciato.

Questo notevole teorema è stato dato, sotto un enunciato diverso nella forma ma equivalente nella sostanza, da J. Liouville nel 1847.

238. *a*) Essendo β_1, $\beta_2,\dots\beta_r$ punti di un campo fondamentale, fra loro distinti, si consideri l'espressione

$$F(x)=\sum_{k=1}^{r}A_k\zeta(x-\beta_h): \tag{6}$$

per le proprietà della ζ date al n.° 235, *a*), si ha

periodicità di 2° specie
$\zeta(x+2\omega)-\zeta(x)=2\eta$
$\zeta(x+2\omega')-\zeta(x)=2\eta'$

$$F(x+2\omega)=F(x)+2\eta\sum_{k=1}^{r}A_k,\quad F(x+2\omega')=F(x)+2\eta'\sum_{k=1}^{r}A_k, \tag{7}$$

(periodicità di seconda specie); inoltre, in ogni punto β_k e nei congruenti, la $F(x)$ ha un polo di prim'ordine col residuo A_k. Se ora la somma dei residui ΣA_k è nulla, la $F(x)$ è doppiamente periodica; essa viene scomposta in una somma di r funzioni periodiche di seconda specie aventi ciascuna un solo polo di prim'ordine in ogni parallelogramma elementare.

Sia ora $\varphi(x)$ una funzione ellittica di ordine r, a poli

decomposizione d'una φ ellittica analoga alla decompos. in fraz. semplici di una funz. raz.

i poli si elidono due a due

semplici $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$: come è noto (n.° 222, *d*)) essendo $A_1, A_2, \ldots A_r$ i rispettivi residui, è $\boxed{\Sigma A_k = 0}$. Formata con questi dati la espressione (6), $F(x) - \varphi(x)$ sarà funzione ellittica non mai infinita, e perciò costante C. Si ha quindi

$$\text{(8)} \qquad \boxed{\varphi(x) = C + \sum_{k=1}^{r} A_k \zeta(x - \beta_k);}$$

Hermite

la costante si determina dalla conoscenza del valore di $\varphi(x)$ per un punto non coincidente coi poli.

b) Il risultato precedente si generalizza facilmente al caso dei poli multipli. Abbiasi la funzione ellittica $\varphi(x)$ di ordine r coi poli $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ e loro congrui; β_k sia polo dell'ordine s_k, e sia data la funzione razionale semplice caratteristica del polo nella forma

$$\text{(9)} \qquad \frac{A_{k1}}{x - \beta_k} + \frac{A_{k2}}{(x - \beta_k)^2} + \ldots + \frac{A_{ks_k}}{(x - \beta_k)^{s_k}}.$$

Si costruisca allora l'espressione

$$\text{(10)} \qquad \boxed{\begin{aligned} F(x) = \sum_{1=k}^{q} [A_{k1}\zeta(x - \beta_k) + A_{k2}\wp(x - \beta_k) - \\ - \frac{A_{k3}}{2!}\wp'(x - \beta_k) + \ldots + (-1)^{s_k} \frac{A_{ks_k}}{s_k - 1!}\wp^{(s_k-2)}(x - \beta_k)] \\ (s_1 + s_2 + \ldots + s_k = r); \end{aligned}}$$

Hermite

essendo, per il citato n.° 222, *d*), nulla la ΣA_{k1}, la $F(x)$ è funzione ellittica di ordine r, e, per $x = \beta_k$, essa ha un polo di ordine s_k la cui funzione razionale caratteristica è appunto la (9). La $\varphi(x) - F(x)$ è dunque una funzione ellittica non mai infinita, cioè una costante C, e quindi

$$\text{(11)} \qquad \boxed{\varphi(x) = C + F(x)}$$

Hermite

la costante C si determina come è detto più sopra.

Le formule (8) e (10)-(11), dovute ad HERMITE, offrono la più grande analogia colla elementare decomposizione di una funzione razionale fratta nelle sue frazioni semplici.

Unicità integrale di una funzione ellittica

239. La formula (11) permette di riconoscere la forma dell'integrale di una funzione ellittica. Intanto, è dalle definizioni di ζ e $\wp$

$$\int \zeta(x)dx = \int \frac{\sigma'(x)dx}{\sigma(x)} = \log \sigma(x) + c;$$

$$\int \wp(x)dx = -\zeta(x) + c,$$

onde segue, per la (10), che l'integrale indefinito di $\varphi(x)$ sarà composto di termini della forma

$$C', \quad Cx, \quad A_{k1}\log\sigma(x - \beta_k), \quad A_{k2}\zeta(x - \beta_k), \quad A_{k3}\wp(x - \beta_k), \ldots$$
$$\ldots A_{ks_k}\wp^{(s_k-3)}(x - \beta_k).$$

È da notare il fatto che l'integrazione delle funzioni ellittiche non dà luogo a nuove trascendenti.

240. Come è noto, ogni integrale ellittico, cioè ogni integrale della forma

$$\text{(12)} \qquad \int F[t, \sqrt{R(t)}]dt$$

dove $R(t)$ è un polinomio di terzo o quarto grado — il polinomio di terzo grado essendo riducibile a quello di quarto, ed inversamente, mediante una sostituzione lineare ([1]) — si può ridurre ad alcune forme più semplici ([2]). Nel caso in cui $R(t)$ è di terzo grado — si può sempre scrivere $R(t) = 4t^3 - g_2t - g_3$ — queste forme si riducono a

$x \qquad -\zeta(x) \qquad \int \frac{dx}{\wp(x) - \alpha}$

$$\text{(13)} \qquad \boxed{\int \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad \int \frac{t\,dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad \int \frac{dt}{(t - \alpha)\sqrt{R(t)}},}$$

rispettivamente integrali di prima, seconda e terza specie.

Ponendo $\boxed{t = \wp(x)}$, il primo di questi (n.° 233) coincide con $\boxed{x}$; il secondo si riduce, per essere

$$dt = \wp'(x)dx, \quad \text{onde} \quad \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = dx,$$

Sansone II° vol
$t = ax$

([1]) V. *Calcolo*, n.° 402, *a*).

([2]) Le espressioni (12) (*Calcolo*), n.° 402, *c*) e (15), ibid., *d*).

ad $\int \wp(x)dx$, cioè a $\boxed{-\zeta(x)}$. Si può notare che l'integrale di seconda specie è infinito solo per $t=\infty$, il che corrisponde all'essere $\zeta(x)$ infinito per x congruente a zero. Infine, l'integrale di terza specie si riduce, colla medesima sostituzione, ad

$$(14)\qquad \boxed{\int \frac{dx}{\wp(x)-\alpha}}.$$

§ III. Teorema d'Addizione.

$\wp'^2(x) = R[\wp(x)]$

241. *a*) Riprendiamo la relazione fondamentale (14) del n.° 233 fra $\wp(x)$ e la sua derivata, e poniamo

$$(1)\qquad X=\wp(x),\quad Y=\wp'(x);$$

$Y^2 = R(X)$

la detta relazione equivale all'equazione della cubica piana

$$(2)\qquad Y^2=4X^3-g_2X-g_3,\quad \text{o}\quad Y^2=R(X).$$

Se si interseca la detta cubica colla retta

$\wp'(x) = a\wp(x)+b$

$$(3)\qquad Y=aX+b,$$

$Y^2 = (aX+b)^2$

le ascisse dei punti di intersezione saranno date dalle radici X_1, X_2, X_3 dell'equazione

$$(4)\qquad f(X)=R(X)-(aX+b)^2.$$

Y^2

$= R(X) - a^2X^2 + b^2 - 2abX$

Si considerino ora a, b come parametri variabili; con essi varieranno le radici di $f(X)=0$, in modo da dare

$$f'(X)dX+\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db=0$$

ossia, per essere $aX+b=Y=\sqrt{R(x)}$

$$(5)\qquad \frac{dX_k}{2\sqrt{R(X_k)}}=\frac{X_k da}{f'(X_k)}+\frac{db}{\sqrt{R(X_k)}},\qquad (k=1,\,2,\,3).$$

Sommiamo le (5), notando che è

$$\frac{X_1}{f'(X_1)}+\frac{X_2}{f'(X_2)}+\frac{X_3}{f'(X_3)}=0,\quad \frac{1}{f'(X_1)}+\frac{1}{f'(X_2)}+\frac{1}{f'(X_3)}=0\ \text{(1)};$$

Lagrange

viene

$$\frac{dX_1}{\sqrt{R(X_1)}}+\frac{dX_2}{\sqrt{R(X_2)}}+\frac{dX_3}{\sqrt{R(X_3)}}=0.$$

Integrando (sulla Riemanniana resa semplicemente connessa) da ∞ ad un sistema di valori di a, b pei quali le radici siano X_1, X_2, X_3, verrà, notando che per $X=\infty$ è $x\equiv 0$:

$$(6)\qquad \int_{X_1}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}+\int_{X_2}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}+\int_{X_3}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}=2m\omega+2m'\omega'\ \text{(2)}.$$

Teorema di Abel

Ritornando alla (1) e alla formula (16) del n.° 233, e ponendo $\wp(x_k)=X_k$, $(k=1,\,2;\,3)$, viene

$$x_1+x_2+x_3\equiv 0,$$

e poichè i punti

$$[X_1=\wp(x_1),\ Y_1=\wp'(x_1)],\quad [X_2=\wp(x_2),\ Y_2=\wp'(x_2)],$$
$$[X_3=\wp(x_1+x_2),\ Y_3=-\wp'(x_1+x_2)]$$

(1) Queste relazioni, dovute a LAGRANGE, risultano dall'osservazione elementare seguente:

Se $f(x)$ è di grado n, colle radici semplici $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, e si scompone $1:f(x)$ in frazioni semplici,

$$\frac{1}{f(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f'(\alpha_k)(x-\alpha_k)},$$

si vede, sviluppando ambo i membri per le potenze di $\frac{1}{x}$, che si annullano i coefficienti di $x^{-1}, x^{-2}, \dots x^{-n+1}$, e questi coefficienti essendo dati, nel secondo membro, da

$$\sum\frac{1}{f'(\alpha_k)},\quad \sum\frac{\alpha_k}{f'(\alpha_k)},\dots \sum\frac{\alpha_k^{\,n-2}}{f'(\alpha_k)},$$

ne segue che queste sommatorie sono nulle.

(2) L'equazione (6) dà il celebre teorema di ABEL per il caso degli integrali ellittici, teorema già ricordato, in altra forma, in occasione della proposizione del n.° 224, *c*). Come si è già osservato, non è qui il luogo di porre ora nella piena luce l'importanza del teorema e la connessione fra l'attuale enunciato e quello del citato n.° 224: dobbiamo rimandare questo punto alla trattazione generale della teoria degli integrali abeliani.

sono allineati, si avrà

$$(7)\qquad \boxed{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(x_1) & \wp(x_2) & \wp(x_1+x_2) \\ \wp'(x_1) & \wp'(x_2) & -\wp'(x_1+x_2) \end{vmatrix} = 0.}$$

teorema d' addizione 1ª forma

Questa è una prima forma del « teorema d'addizione » per la funzione $\wp(x)$, teorema che insegna come $\wp(x_1)$, $\wp(x_2)$ e $\wp(x_1+x_2)$ siano in relazione algebrica: è tale infatti la (7), per la relazione nota fra $\wp(x)$ e la sua derivata.

b) Ma al teorema di addizione si può giungere per altra via, in modo da avere la relazione in discorso sotto forma più esplicita. All'uopo, si parta dalla formula (4) stabilita alla fine del n.° 236, cioè da

$$(8)\qquad \wp(x) - \wp(y) = -\frac{\sigma(x+y)\sigma(x-y)}{\sigma^2(x)\sigma^2(y)};$$

$\log(\wp(x)-\wp(y)) = -\log\sigma^2(x)+\log\sigma^2(y) - \log(\sigma(x+y)) - \log\sigma(x$

si prendano i logaritmi di ambo i membri e si derivi rispetto ad x e rispetto ad y; si ottiene

$$-\frac{\wp'(x)}{\wp(y)-\wp(x)} = \zeta(x+y) + \zeta(x-y) - 2\zeta(x),$$

$$\frac{\wp'(y)}{\wp(y)-\wp(x)} = \zeta(x+y) - \zeta(x-y) - 2\zeta(y),$$

da cui:

$$(9)\qquad \frac{1}{2}\frac{\wp'(y)-\wp'(x)}{\wp(y)-\wp(x)} = \zeta(x+y) - \zeta(x) - \zeta(y) \ \text{(1)}.$$

Derivando questa uguaglianza rispetto ad x, poi rispetto ad y, e sommando, si ha

$$-2\wp(x+y) + \wp(x) + \wp(y) = $$
$$= \frac{1}{2}\frac{\wp''(y)-\wp''(x)}{\wp(y)-\wp(x)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(y)-\wp'(x)}{\wp(y)-\wp(x)}\right)^2;$$

infine, sostituendo per $\wp''$ l'espressione $6\wp^2 - \frac{g_2}{2}$ (n.° 234) e

(1) Da vari autori questa formula è detta « teorema d'addizione della « funzione ζ ». Se con « teorema d'addizione » si vuole intendere, come qui facciamo, una relazione di carattere algebrico, l'espressione non è esatta, poichè fra ζ e $\wp$ non passa relazione algebrica.

riducendo,

$$(10)\qquad \boxed{\wp(x+y) + \wp(x) + \wp(y) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(y)-\wp'(x)}{\wp(y)-\wp(x)}\right)^2,}$$

teorema di addizione 2ª forma

formula classica del teorema d'addizione per la funzione $\wp$ (1).

242. *a*) « Ogni funzione ellittica ammette un teorema « d'addizione ».

Dicendo che una funzione $f(x)$ ammette un teorema d'addizione, intenderemo che, essendo $f(x)$ la funzione, fra $f(x)$, $f(y)$ ed $f(x+y)$ passa *una relazione algebrica* $H[f(x), f(y), f(x+y)] = 0$, il cui primo membro può sempre supporsi ridotto a razionale intero in $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y)$. V. un primo esempio al n.° 76, *b*).

Si sa, dal teorema di Liouville (n.° 237, *b*), che se $f(x)$ è funzione ellittica, essa può esprimersi in funzione razionale di $\wp$ e $\wp'$; S essendo simbolo di funzione razionale, si ha dunque:

$$(a)\qquad f(x) = S[\wp(x), (\wp'(x)], \quad f(y) = S[\wp(y), \wp'(y)],$$
$$f(x+y) = S[\wp(x+y), \wp'(x+y)].$$

6 relaz.

Ma si ha pure [(14) del n.° 233]:

$$(b)\qquad \wp'^2(x) = R[\wp(x)], \quad \wp'^2(y) = R[\wp(y)],$$
$$\wp'^2(x+y) = R[\wp(x+y)]:$$

fra la (*a*), le (*b*) e la (10), manifestamente indipendenti, si possono eliminare i sei elementi $\wp(x)$, $\wp(y)$, $\wp(x+y)$, $\wp'(x)$, $\wp'(y)$, $\wp'(x+y)$, e si giunge così ad una relazione algebrica fra $f(x)$, $f(y)$ ed $f(x+y)$, la quale costituisce il teorema d'addizione.

b) È evidente che ogni funzione razionale ammette un teorema d'addizione: se infatti $r(x)$ è simbolo di funzione razionale, e si pone

$$r(x) = w_1, \quad r(y) = w_2, \quad r(x+y) = w_3,$$

(1) Per altre formule facilmente deducibili dalle (7) e (10), v. i trattati speciali, ed in particolare le già citate « *Formeln und Lehrsätze* » dello Schwarz.

in questa categoria rientrano le funz. trigonometriche ed iperboliche

l'eliminazione di x ed y fra queste dà una relazione algebrica fra w_1, w_2, w_3.

c) Lo stesso è per ogni funzione razionale di un'esponenziale e^{ax}; ponendo infatti

$$r(e^{ax}) = w_1, \quad r(e^{ay}) = w_2, \quad r(e^{a(x+y)}) = r(e^{ax}\cdot e^{ay}) = w_3,$$

l'eliminazione, fra queste, di e^{ax} ed e^{ay} dà fra w_1, w_2 e w_3 una relazione algebrica, che è il teorema di addizione di $r(e^{ax})$.

La $r(e^{ax})$ e la $r(x)$ si possono considerare come casi limiti delle funzioni ellittiche: la prima, al tendere di uno dei periodi all'infinito, la seconda, al tendervi di entrambi.

reciproco con [illegible] del 262

243. « Ogni funzione analitica uniforme $f(x)$ che ammetta « un teorema di addizione e che non sia o razionale, o funzione razionale di una esponenziale, è una funzione ellittica ». (Weierstrass) quali le funz. trigonom.

Sia $f(x)$ una funzione uniforme, nè razionale, nè razionale di un'esponenziale, per la quale valga, qualunque siano x ed y, una relazione

$$r[f(x),\ f(y),\ f(x+y)] = 0 \tag{11}$$

dove r è simbolo di funzione razionale intera, di grado non superiore ad m in $f(x+y)$. La $f(x)$ essendo uniforme ma non razionale, la sua funzione inversa $x(z)$, definita da $f(x) = z$, non sarà algebrica e quindi esisteranno valori di z pei quali la x avrà un numero di determinazioni superiore ad m, in forza del teorema del n.° 187. Sia b uno di questi valori di z, e siano $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{m+1}$, $m+1$ valori corrispondenti di x.

L'equazione

$$r[f(x),\ b,\ w] = 0$$

definisce, in un'area connessa del piano x, m rami di funzione analitica w di x (Cap. XI): siano essi $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots w^{(m)}$; questi coincidono, all'infuori dell'ordine, con

$$f(x+\beta_1),\quad f(x+\beta_2), \dots f(x+\beta_m),\quad f(x+\beta_{m+1}), \qquad m+1$$

onde due almeno di queste devono essere uguali, e sia ad esempio $f(x+\beta_h) = f(x+\beta_k)$: ne verrà

$$f(x) = f(x+\beta_k-\beta_h), \tag{12}$$

se i w sono diversi tra di loro, altrimenti più di 2 valori di w devono coincidere

e questa relazione, valida nell'area anzidetta, si estende a tutto il campo di validità di $f(x)$ per il principio del n.° 172: la $f(x)$ è dunque periodica di periodo $\bar\omega = \beta_k - \beta_h$. Come tale (n.° 215, b)) essa è funzione uniforme di $u = e^{\frac{2\pi i x}{\bar\omega}}$: sia $f(x) = \varphi(u)$. Ma la relazione (11), che si può scrivere:

$$r[\varphi(u),\ \varphi(v),\ \varphi(uv)] = 0,$$

dà non più di m valori per $\varphi(uv)$ per ogni coppia u, v; mentre la $\varphi(u)$ non essendo razionale (poichè per ipotesi $f(x)$ non è funzione razionale di un'esponenziale), la sua funzione inversa $u(s)$, definita da $\varphi(u) = s$, non è algebrica e quindi (n.° 187) esistono valori s di s pei quali la u ha più di m determinazioni. Con ragionamento identico a quello testè fatto e che ci ha condotti alla (12), si conclude all'esistenza di un numero λ almeno, diverso dall'unità, tale che

$$\varphi(u) = \varphi(\lambda u)$$

dove, se si pone $\lambda = e^{\frac{2\pi i \bar\omega'}{\bar\omega}}$, il rapporto $\bar\omega' : \bar\omega$ non è razionale. Si ha

$$f(x+\bar\omega') = f(x); \tag{13}$$

la funzione $f(x)$ ammette dunque un periodo avente rapporto non razionale con $\bar\omega$, e quindi, per le considerazioni del n.° 215, f) a rapporto complesso: essa è doppiamente periodica, e sia 2ω, $2\omega'$, una coppia di periodi elementari.

In ogni parallelogramma elementare, la funzione assume ogni valore in un numero di punti che non può superare un intero finito, poichè, in caso contrario, reiterando il ragionamento che ci ha condotti alle (12) e (13), si verrebbe ad avere entro il parallelogrammo $(2\omega, 2\omega')$ un altro periodo, il che (n.i 216-217) è impossibile. Sia p il numero delle volte che $f(x)$ assume, entro $(2\omega, 2\omega')$, un dato valore b e siano $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p$ i punti del parallelogramma stesso in cui è $f(\beta_k) = b$. Si determini A tale che sia

$$\frac{1}{f'(\beta_1)} + \frac{1}{f'(\beta_2)} + \dots + \frac{1}{f'(\beta_{p-1})} + A = 0,$$

e si costruisca la funzione

$$\psi(x) = \sum_{h=1}^{p-1} \frac{1}{f'(\beta_h)} \zeta(x - \beta_h) + A\zeta(x - \beta_p);$$

Hermite

essa è ellittica, e la differenza

(14) $$\boxed{\psi(x) - \frac{1}{f(x) - b},}$$

doppiamente periodica, è infinita di prim'ordine nel solo punto $x = \beta_p$, col residuo $A - \frac{1}{f'(\beta_p)}$. Ma ciò non può essere a meno che la (14) non si riduca a costante (n.° 222, *e*); la $\frac{1}{f(x) - b}$, e quindi anche la $f(x)$, è pertanto una funzione ellittica, c. d. d. ([1]).

formule di moltiplicazione

244. *a*) Dalla (10), facendo $y = x$ e notando che, per la regola dell'Hôpital, è

$$\lim_{x=y} \frac{\wp'(y) - \wp'(x)}{\wp(y) - \wp(x)} = \frac{\wp''(x)}{\wp'(x)},$$

si deduce

(15) $$\boxed{\wp(2x) = -2\wp(x) + \frac{1}{4}\frac{\wp''^2(x)}{\wp'^2(x)},} = -2\wp + \frac{1}{4}\,\frac{(12\wp^2 - g_2)^2}{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}$$

che le (14) e (17) del § I del presente Capitolo permettono di esprimere immediatamente in funzione razionale di $\wp(x)$.

b) Nella medesima formula (10), si cambi x in $(n-1)x$, y in x, e viene

(16) $$\wp(nx) = -\wp(n-1)x - \wp(x) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(x) - \wp'[(n-1)x]}{\wp(x) - \wp[(n-1)x]}\right)^2.$$

([1]) L'importante teorema che ha formato oggetto del presente n.° è dovuto al Weierstrass; questo Autore, nei suoi Corsi, assumeva anzi la proprietà di possedere un teorema (algebrico) di addizione come definizione delle funzioni ellittiche e ne deduceva la doppia periodicità e l'assenza di punti singolari a distanza finita. La dimostrazione qui riportata è quella data nel corso del 1877-78 (lezioni manoscritte), all'infuori di alcune modificazioni di forma. V. anche Phragmén, *Acta Mathematica*, T. VII, p. 33, 1885, e la tesi di P. Koebe, « *über analyt. Funktionen welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen* ». Berlin, 1905.

Liouville

Qui, l'ultimo termine del secondo membro è funzione ellittica pari, e quindi (n.° 237, *a*) esprimibile in funzione razionale di $\wp(x)$; ma la (16) avente carattere ricorrente, se ne conclude che poichè $\wp(2x)$ è esprimibile in funzione razionale di $\wp(x)$ « sarà pure esprimibile in funzione razionale di $\wp(x)$ la funzione $\wp(nx)$, per ogni n intero » ([1]).

245. In relazione al problema precedente, si presenta la questione: se, per un numero k non intero, possa essere $\wp(kx)$ funzione razionale di $\wp(x)$. Si riconosce facilmente che k deve essere un numero complesso: da ciò il nome di *problema della moltiplicazione complessa* dato all'accennata questione: noi qui ci limiteremo a riconoscere come k debba effettivamente essere complesso ([2]).

Perciò, ricordiamo (n.° 232, *b*) che è

(17) $$\wp(kx;\ \omega,\ \omega') = \frac{1}{k^2}\wp\left(x;\ \frac{2\omega}{k},\ \frac{2\omega'}{k}\right);$$

ora, se il primo membro è funzione razionale di $\wp(x)$, i periodi di questa saranno fra i periodi di $\wp(kx)$, onde dovrà essere

$k\omega = m\omega + n'\omega'$, $\quad k\omega' = n\omega + n'\omega'$

(18) $$\omega = \frac{m\omega}{k} + \frac{m'\omega'}{k}, \quad \omega' = \frac{n\omega}{k} + \frac{n'\omega'}{k},$$

essendo m, m', n, n' numeri interi. Da queste (se non sono identiche, nel quale caso k è intero) si ha, eliminando k e posto $\omega' : \omega = \tau$;

(19) $$m'\tau^2 + (m - n')\tau - n = 0,$$

ed eliminando ω, ω':

(20) $$(m - k)(n' - k) - nm' = 0, \quad \text{ossia} \quad k^2 - (m + n')k + mn' - nm' = 0.$$

Da ciò si vede dapprima che la questione proposta non può avere luogo se non per funzioni ellittiche speciali, in cui il rapporto dei periodi sia radice di un'equazione quadratica (19) a coefficienti interi; inoltre le equazioni quadratiche (19) e (20) hanno il medesimo discriminante, e da ciò segue, poichè τ (n.° 215) è essenzialmente complesso, che sono pure complessi i valori di k.

$(m - n')^2 + 4nm' < 0$

([1]) L'espressione effettiva delle funzioni razionali che danno $\wp(nx)$ in funzione di $\wp(x)$ offre interesse, ma non rientra nel piano della presente opera. Per maggiori ragguagli in proposito, v. Bianchi, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, §§ 111 e seg..

([2]) Una eccellente esposizione dei punti più essenziali della teoria della moltiplicazione complessa si trova nell'opera citata del Bianchi, Cap. XVIII.

§ IV. Le funzioni di Jacobi.

246. Ci converrà, per uniformità di scrittura, di indicare nel presente § con ω_1, ω_2, ω_3 i semiperiodi ω, ω', $-(\omega+\omega')$ ed, in corrispondenza, con η_1, η_2, η_3 i semiperiodi secondari η, η', $-(\eta+\eta')$. Consideriamo ora, accanto alla funzione σ, le tre funzioni analoghe [1] nebensigma

$$(1) \qquad \boxed{\sigma_h(x) = -\, e^{\eta_h x}\frac{\sigma(x-\omega_h)}{\sigma(\omega_h)},} \quad (h=1,\ 2,\ 3).$$

Esse sono funzioni intere, nulle nei punti congruenti ad ω_1, ad ω_2 e ad $\omega_1+\omega_2$ rispettivamente. Esse sono funzioni pari: si ricordino infatti le relazioni (20) al n.° 235, che si possono scrivere periodicità di 2ª specie

$$(2) \qquad \sigma(x+2\omega_h) = -\, e^{2\eta_h(x+\omega_h)}\sigma(x);$$

ne viene, per essere la σ funzione dispari,

$$\sigma(-x-\omega_h) = -\,\sigma(x+\omega_h) = e^{2\eta_h x}\sigma(x-\omega_h),$$

onde, applicando alla (1),

$$\sigma_h(-x) = \sigma_h(x).$$

Fondandosi sulla (2), si verifica subito che il cambiamento prodotto nelle (1) dall'aggiunta ad x di un periodo viene espresso da

$$(3) \qquad \sigma_h(x+2\omega_h) = -\, e^{2\eta_h(x+\omega_h)}\sigma_h(x), \quad (h=1,\ 2,\ 3)$$

e da

$$(4) \qquad \sigma_h(x+2\omega_k) = e^{2\eta_k(x+\omega_k)}\sigma_h(x), \quad (h=1,2,3,\ k=1,2,3,\ k\neq h).$$

Si noti che è $\boxed{\sigma_h(0)=1.}$ perchè σ è dispari

247. *a*) Ricordiamo che $\wp(\omega_h)$ è una delle radici e_h di $R(\wp)$ (n.° 234), e che ω_h è radice di $\wp'$. Ne viene che la espressione

$$(5) \qquad \wp(x) - e_h, \quad (h=1,\ 2,\ 3),$$

[1] Dette *Nebensigma* dagli autori tedeschi.

è una funzione ellittica di second'ordine, con un zero doppio nei punti congruenti ad ω_h, e un polo doppio per $x=0$. Per il n.° 236, essa può dunque scriversi, C essendo una costante:

$$\wp(x) - e_h = C\,\frac{\sigma(x-\omega_h)\sigma(x+\omega_h)}{\sigma^2(x)}.$$

A determinare la costante, si faccia tendere x a zero; poichè è $\lim\limits_{x\to 0}\wp(x)x^2 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma^2(x)}{x^2} = 1$, ne risulta

$$1 = C\sigma(\omega_h)\sigma(-\omega_h),$$

onde:

$$(6) \qquad \wp(x) - e_h = -\,\frac{\sigma(x-\omega_h)\sigma(x+\omega_h)}{\sigma^2(\omega_h)\sigma^2(x)}.$$

Ma, per la (2),

$$\sigma(x+\omega_h) = -\, e^{2\eta_h x}\sigma(x-\omega_h),$$

onde, tenuto conto della (1), la (6) diviene:

$$(7) \qquad \boxed{\wp(x) - e_h = \left(\frac{\sigma_h(x)}{\sigma(x)}\right)^2, \quad (h=1,\ 2,\ 3).}$$

b) Riprendiamo ora la relazione fra $\wp'$ e $\wp$ [(14) al n.° 233] che si può scrivere

$$\wp'^2(x) = 4(\wp(x)-e_1)(\wp(x)-e_2)(\wp(x)-e_3);$$

essa diviene, per le (7),

$$(8) \qquad \wp'^2(x) = 4\,\frac{\sigma_1{}^2(x)\sigma_2{}^2(x)\sigma_3{}^2(x)}{\sigma^6(x)}.$$

Qui, i due membri essendo quadrati di funzioni analitiche uniformi, si può dare alla (8) una forma più semplice, e poichè, per x tendente a zero, $\wp'(x)x^3$ tende a -2, mentre la radice del secondo membro di (8), moltiplicata per x^3, tende a ± 2, resta determinato il segno, ed è

$$(9) \qquad \boxed{\wp'(x) = -\,2\,\frac{\sigma_1(x)\sigma_2(x)\sigma_3(x)}{\sigma^3(x)}.}$$

c) Si presentano così, nell'espressione di $\wp'(x)$, le funzioni meromorfe $\dfrac{\sigma_h(x)}{\sigma(x)}$, alle quali si possono associare le $\dfrac{\sigma_h(x)}{\sigma_k(x)}$.

funzioni σ_h/σ σ_h/σ_k

Le tre prime sono dispari, ed hanno i poli — di prim'ordine — nei punti congruenti a zero; le altre sono pari, ed hanno i poli nei punti congruenti ad ω_h.

L'applicazione delle (2), (3) e (4) permette di riconoscere subito che è, essendo h e k uguali ad 1, 2 o 3:

$$(10) \qquad \frac{\sigma_h(x+2\omega_h)}{\sigma(x+2\omega_h)} = \frac{\sigma_h(x)}{\sigma(x)}, \quad \frac{\sigma_h(x+2\omega_k)}{\sigma(x+2\omega_k)} = -\frac{\sigma_h(x)}{\sigma(x)} \quad \text{per } h \gtrless k;$$

e che è pure, h, k ed l avendo i valori 1, 2 o 3, ma diversi fra loro:

$$(10') \qquad \frac{\sigma_k(x+2\omega_l)}{\sigma_h(x+2\omega_l)} = \frac{\sigma_k(x)}{\sigma_h(x)}, \quad \frac{\sigma_k(x+2\omega_h)}{\sigma_h(x+2\omega_h)} = -\frac{\sigma_k(x)}{\sigma_h(x)}.$$

Ne viene che le funzioni meromorfe $\frac{\sigma_h}{\sigma}$ sono doppiamente periodiche coi periodi elementari $2\omega_h$, $4\omega_k$, e le $\frac{\sigma_k}{\sigma_h}$ lo sono coi periodi $2\omega_l$, $4\omega_h$; sono funzioni di secondo ordine di cui si sono già riconosciuti i rispettivi zeri e poli.

d) Derivando la (7), si ha

$$\wp'(x) = 2\,\frac{\sigma_h}{\sigma}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma_h}{\sigma}\right);$$

questa, paragonata alla (9), dà la relazione

$$(11) \qquad \boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma_h}{\sigma}\right) = -\frac{\sigma_k}{\sigma}\cdot\frac{\sigma_l}{\sigma},}$$

h, k, l essendo una permutazione qualunque dei numeri 1, 2 e 3. Dalla (11) risulta

$$(12) \qquad \boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma}{\sigma_h}\right) = \frac{\sigma_k}{\sigma_h}\cdot\frac{\sigma_l}{\sigma_h}.}$$

e) Notiamo ancora, come una conseguenza delle (7), che da codeste formule si deduce, per sottrazione:

$$(13) \qquad \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = (e_2 - e_1)\sigma^2, \quad \sigma_1^2 - \sigma_3^2 = (e_3 - e_1)\sigma^2, \quad \sigma_2^2 - \sigma_3^2 = (e_3 - e_2)\sigma^2.$$

248. Le considerazioni dei due n.[i] precedenti ci permettono di collegare, alle funzioni usate dal WEIERSTRASS come

elementi fondamentali nella teoria delle funzioni ellittiche, quelle considerate come classiche prima di quell'Autore, e precisamente le funzioni introdotte dal JACOBI [1] e alle quali egli e la sua scuola riservavano il nome di *funzioni ellittiche.* Queste funzioni si ottengono dalle tre funzioni meromorfe da noi indicate con $\frac{\sigma(x)}{\sigma_3(x)}$, $\frac{\sigma_1(x)}{\sigma_3(x)}$, $\frac{\sigma_2(x)}{\sigma_3(x)}$, moltiplicando la prima di esse per la costante $\sqrt{e_1 - e_3}$, e riferendole alla variabile u legata ad x da

$$u = x\sqrt{e_1 - e_3};$$

esse sono state denominate rispettivamente *seno amplitudine*, *coseno amplitudine* e *delta amplitudine*; si suole scrivere:

$$(14) \qquad sn\,u = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma(x)}{\sigma_3(x)}, \quad cn\,u = \frac{\sigma_1(x)}{\sigma_3(x)}, \quad \delta n\,u = \frac{\sigma_2(x)}{\sigma_3(x)} \ [2].$$

249. Indichiamo alcune fra le più semplici proprietà di queste funzioni.

a) La $sn\,u$ è funzione dispari, le $cn\,u$, $\delta n\,u$ sono funzioni pari; ciò risulta dall'essere σ dispari e le σ_h pari.

b) È $sn\cdot 0 = 0$, $cn\cdot 0 = 1$, $\delta n\cdot 0 = 1$.

c) In seguito alla relazione di omogeneità della σ (n.° 230) le funzioni (14) sono omogenee nella terna u, ω, ω' e di grado zero; inoltre, osservando l'espressione delle $e_h = \wp(\omega_h)$ ricavata dalla (7) del n.° 232, si vede che esse dipendono da ω ed ω' solo mediante il rapporto $\omega' : \omega$.

---

(1) *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*, Königsberg, 1829 e *Werke* T. I, p. 49, Berlin, 1881-82. È doveroso di ricordare, accanto ed anzi anteriormente al JACOBI, l'ABEL come uno dei fondatori della teoria delle funzioni ellittiche. (V. varie memorie nel T. I delle *Œuvres* d'ABEL, Christiania, 1881). La sostituzione del metodo di trattazione del WEIERSTRASS in luogo di quello del JACOBI è andato generalizzandosi durante l'ultimo quindicennio dello scorso secolo. v. Pascal Fun. ell.

(2) Queste funzioni furono indicate dal JACOBI colle notazioni sen *am x*, cos *am x*, Δ*am x*; a questa notazione fu sostituita quella più concisa (di GUDERMANN) *sn·x*, *cn·x*, *dn·x* che viene qui adottata salvo il cambiamento di *d* in *δ*. Nella *Théorie des fonctions elliptiques* di BRIOT et BOUQUET, queste funzioni sono indicate rispettivamente con λ, μ e ν.

d) Per il n.° 247, *c*), le funzioni (14) ammettono come periodi elementari:

$$
\begin{array}{lll}
\text{la } sn\, u, & (2\omega + 2\omega')\sqrt{e_1 - e_3}, & 4\omega\sqrt{e_1 - e_3}, \\
\text{il } cn\, u, & 2\omega'\sqrt{e_1 - e_3}, & 4\omega\sqrt{e_1 - e_3}, \\
\text{il } \delta n\, u, & 2\omega\sqrt{e_1 - e_3}, & 4\omega'\sqrt{e_1 - e_3}.
\end{array}
$$

I poli e gli zeri delle tre funzioni nel rispettivo parallelogramma, si hanno immediatamente dagli zeri delle σ_h.

Dalla (13) risulta

$$sn^2 u + cn^2 u = 1, \quad \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} sn^2 u + \delta n^2 u = 1,$$

da cui, posto $k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}$ (k è detto *modulo* delle funzioni (14)), viene:

(15) $$cn^2 u = 1 - sn^2 u, \quad \delta n^2 u = 1 - k^2 sn^2 u.$$

e) Dalla (12) risulta

(16) $$\frac{d}{du} sn\, u = cn\, u . \delta n\, u$$

Caratteristiche

da cui, per le (15)

(16′) $$\frac{d}{du} cn\, u = - sn\, u . \delta n\, u, \quad \frac{d}{du} \delta n\, u = - k^2 . sn\, u . cn\, u.$$

È da notarsi il fatto che le relazioni (16) e (16′) sono caratteristiche per le funzioni di JACOBI, nel senso che esse funzioni possono venire definite come integrali del sistema (D essendo il simbolo di derivazione)

$$D\lambda = \mu\nu, \quad D\mu = -\lambda\nu, \quad D\nu = -k^2\lambda\mu.$$

250. Dalla (16), ponendo $sn\, u = z$ e tenendo conto delle (15), viene

(17) $$\frac{dz}{du} = \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)},$$

onde, essendo $sn\, 0 = 0$,

(18) $$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}};$$

si vede dunque che mediante la funzione $sn\, u$ è data l'inversione, con una funzione uniforme, dell'integrale ellittico di prima specie sotto la forma di LEGENDRE (1).

Ponendo $z = \text{sen}\, \varphi$, l'angolo φ è stato detto dal JACOBI *amplitudine* di u e indicato con $\varphi = am\, u$; da ciò la notazione $z = \text{sen}\, am\, u$ e la denominazione di seno amplitudine. Ponendo in evidenza l'amplitudine, l'integrale di prima specie prende la forma seguente, già datagli dal LEGENDRE

(19) $$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \varphi}}.$$

$$\frac{dz = \cos\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} = \cos\varphi\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\varphi}}$$

e) Per $x = \omega$, cioè $u = \omega\sqrt{e_1 - e_3}$, la funzione $cn \cdot u = 0$, onde $sn \cdot u = 1$, talchè

(20) $$\omega\sqrt{e_1 - e_3} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

L'integrale che costituisce il secondo membro della (20) è dunque un quarto del periodo di $sn\, u$, e ciò è conforme a quanto risulta dalle considerazioni dei n.i 90 e 210-212 sui moduli di periodicità dell'integrale (18) (2).

---

(1) V. *Calcolo*, n.° 402, *f*).

(2) Nel rapido cenno sulle funzioni ellittiche che ha formato oggetto di questi due Capitoli XIV e XV, si è avuto in vista di dare al lettore nulla più di una preliminare conoscenza della teoria: perciò di molti argomenti interessanti della teoria stessa non si è tenuta parola: in particolare, a proposito delle funzioni (14), non si è trattato del loro comportamento in relazione alle sostituzioni del gruppo modulare; si rimanda chi voglia acquistare conoscenza dell'argomento alla più volte ricordata opera del BIANCHI e segnatamente al Cap. XII.

Alla medesima opera, in cui essa è magistralmente svolta, rimandiamo per la teoria delle funzioni modulari, strettamente connesse colle funzioni ellittiche ma la cui trattazione non rientra nel piano delle presenti Lezioni: solo un breve cenno su una di essa verrà data più avanti (Cap. XVII, § III). Rimandiamo poi, per le indicazioni bibliografiche sulle funzioni modulari e sulle funzioni automorfe che ne sono la generalizzazione, all'articolo di R. FRICKE nel T. II_2 della *Encyklopädie der Math. Wissensch.* (II. B. 4), aggiungendo, alle opere ivi citate, la *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe*, di G. FUBINI (Pisa, 1908).

CAPITOLO DECIMOSESTO

FUNZIONI GENERATRICI E DETERMINANTI

§ I. Carattere analitico delle funzioni determinanti.

251. Sia $\varphi(t)$ una funzione reale o complessa della variabile reale t, data univocamente nell'intervallo da c a $+\infty$: in altri termini, ad ogni $t \geq c$ corrisponda un valore determinato per $\varphi(t)$; sia inoltre $\varphi(t)$ limitata ed integrabile in ogni tratto finito di quell'intervallo. L'integrale generalizzato

$$(1) \qquad f(x) = \int_c^{\infty} \varphi(t) e^{-tx} dt,$$

dove x è una variabile complessa, definisce, se è convergente [1], una funzione $f(x)$ di questa variabile; essa viene detta *funzione determinante* di $\varphi(t)$, mentre $\varphi(t)$ si dice *funzione generatrice* di $f(x)$ [2].

Prima però di passare allo studio della (1), conviene considerare l'espressione

$$(2) \qquad f(x,\ u) = \int_c^{u} \varphi(t) e^{-tx} dt, \qquad (c < u).$$

(1) V. *Calcolo*, n.° 365.

(2) Denominazioni introdotte dal LAPLACE. V. *Théorie analytique des probabilités*, Introduction. (3ème éd., Paris, 1820). Alla relazione data da (1) fra la $\varphi(t)$ e la $f(x)$, si dà il nome di *trasformazione di* LAPLACE-ABEL.

Questa è una funzione intera di x, come risulta dalla sostituzione ad e^{-tx} del suo sviluppo, indi dall'integrazione per serie: si ha

$$(3) \qquad f(x,\ u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n\,!}$$

con

$$(4) \qquad c_n = (-1)^n \int_c^u \varphi(t) t^n dt$$

la forma dei coefficienti mostra inoltre (n.° 147) che la funzione intera è di ordine zero od uno.

Se ora si sostituisce $x_0 + y$ ad x in (3) e si integra per parti, viene, notando che è $f(x,\ c) = 0$:

$$(5) \qquad f(x_0 + y,\ u) = e^{-uy} f(x_0,\ u) + y \int_c^u f(x_0,\ t) e^{-ty} dt.$$

Questa relazione, che ci sarà utile in ciò che segue, servirà intanto a dimostrare il teorema fondamentale seguente:

« Se l'integrale (1) è convergente per un valore qual- « siasi x_0 di x, è convergente per ogni x tale che sia « $\mathfrak{R}(x) > \mathfrak{R}(x_0)$ » [1].

Infatti, il primo termine del secondo membro della (5) tende a zero per $u \to \infty$, poichè per ipotesi l'integrale $f(x_0)$ è convergente; in quanto al secondo termine, $f(x_0,\ u)$ è limitato in tutto l'intervallo $c \ldots + \infty$ per la convergenza medesima: posto $|f(x_0,\ u)| < A$, esso termine risulta, supposto $\mathfrak{R}(y) > 0$:

$$\left| y \int_c^u f(x_0,\ u) e^{-ty} dt \right| \leq A\,|y|\int_c^u e^{-\mathfrak{R}(y)t} dt = \frac{A\,|y|}{\mathfrak{R}(y)} (e^{-\mathfrak{R}(y)c} - e^{-\mathfrak{R}(y)u})$$

che dimostra la convergenza di $f(x_0 + y,\ u)$ per $u \to \infty$, cioè l'esistenza di $f(x_0 + y)$, **per ogni y avente la parte reale positiva.** Il teorema è così dimostrato.

---

[1] Con $\mathfrak{R}(a)$ si intenderà, d'ora in avanti, la parte reale del numero complesso a, e con $\mathfrak{J}(a)$ il coefficiente della parte immaginaria del numero stesso.

252. *a*) Dal precedente teorema risulta che l'espressione $f(x)$ data da (1) può dare luogo a due casi: o essa non converge per alcun valore di x, o, se converge per un valore x_0, converge per ogni punto del semipiano limitato, a sinistra, dalla parallela all'asse immaginario condotta per x_0.

Se dunque si considera l'insieme dei numeri reali, si vede che essi si dividono in due classi: quelli che rendono la (1) convergente quando siano messi al posto di x, e se a è tale, lo è pure ogni $b > a$, e quelli che non rendono (1) convergente, e se a' è tale, lo è ogni $b' < a'$; ne segue, dal postulato della continuità, l'esistenza di un numero reale α determinato, tale che (1) converge per $R(x) > \alpha$ e non converge per $\mathfrak{R}(x) < \alpha$. Al numero reale α si dà il nome di *ascissa di convergenza* della $f(x)$, ed anche di *ordine* della funzione generatrice $\varphi(t)$; al semipiano $\mathfrak{R}(x) > \alpha$, si dà il nome di *semipiano di convergenza* della $f(x)$.

Non è dunque escluso che possa essere $\alpha = \pm \infty$; se è $\alpha = + \infty$, l'integrale (1) non è mai convergente; se è $\alpha = - \infty$, la convergenza ha luogo in tutto il piano. È da notarsi l'analogia della considerazione che porta all'esistenza dell'ascissa di convergenza con quella da cui segue l'esistenza del raggio di convergenza per una serie di potenze (v. *Alg. Compl.*, n.° 263), ed anche l'analogia del teorema fondamentale del n.° precedente coll'osservazione fatta al n.° 34, 1°.

b) Esiste pure, per la $f(x)$, un semipiano di convergenza assoluta, cioè un numero α' tale che per $\mathfrak{R}(x) > \alpha'$ converge l'integrale

$$(6) \qquad \int_c^{\infty} | e^{-tx} \varphi(t) dt |,$$

mentre non converge per $\mathfrak{R}(x) < \alpha'$. La dimostrazione si dà nello stesso modo, mostrando che se la (6) converge per un valore x_0 di x, converge per ogni x tale che sia $\mathfrak{R}(x) > \mathfrak{R}(x_0)$.

È da notare che se α è l'ascissa di convergenza semplice ed α' quella di convergenza assoluta, deve essere $\alpha' \geq \alpha$.

253. « In ogni area T limitata, tutta interna al semipiano « di convergenza, l'integrale $f(x,\ u)$ converge uniformemente « ad $f(x)$ ».

L'area T non ha, per ipotesi, punti del proprio contorno sulla retta di convergenza di $f(x)$, la quale sia data da $\mathfrak{R}(x)=\alpha$. Ne viene che si possono assegnare due numeri positivi p ed r in modo che sia, per ogni x dell'area T, e contemporaneamente:

$$\mathfrak{R}(x) > \alpha + 2p, \quad |x| < r.$$

Si ponga $x_0 = \alpha + p$, $x = x_0 + y$; è dunque, per x nell'area T:

$$\mathfrak{R}(y) > p, \quad |y| < r',$$

dove r' è un numero positivo certamente non maggiore di $r + |x_0|$.

L'integrazione per parti, posto ancora

$$\int_c^t \varphi(t) e^{-tx} dt = f(x, t)$$

dà allora:

$$(7) \quad \int_u^v \varphi(t) e^{-t(x_0+y)} dt = e^{-vy} f(x_0, v) - e^{-uy} f(x_0, u) + y \int_u^v f(x_0, t) e^{-ty} dt.$$

Ma, per essere x_0 nel semipiano di convergenza, $f(x_0, t)$ è limitata in tutto il tratto $(c, +\infty)$: sia A il suo massimo valore assoluto. L'integrale al secondo membro di (7) è, in valore assoluto, non maggiore di

$$Ar' \frac{e^{-u\mathfrak{R}(y)} - e^{-v\mathfrak{R}(y)}}{\mathfrak{R}(y)} < Ar'e^{\alpha} \frac{e^{-pv} + e^{-pu}}{p},$$

onde

$$(8) \quad \left| \int_u^v \varphi(t) e^{-t(x_0+y)} dt \right| < A\left(1 + \frac{r'e^{\alpha}}{p}\right)(e^{-pv} + e^{-pu});$$

ora, preso ε positivo arbitrariamente piccolo, si può prendere un $\bar{u}$ positivo abbastanza grande perchè, per $v > u > \bar{u}$, il secondo membro di (8) sia reso minore di ε, e quindi tale è il primo membro per ogni y di T.

La convergenza uniforme di $f(x, u)$ verso il suo limite $f(x)$, in tutta l'area T, rimane così dimostrata.

254. Ricordando ora la proposizione data al n.° 96, si conclude che la $f(x)$ rappresenta un ramo monodromo di funzione analitica regolare entro ogni area T quale si è definita, e quindi in tutto il semipiano di convergenza, contorno escluso. Dalla stessa proposizione ricordata segue che la derivata, di ordine qualunque, di $f(x)$, è data come limite della derivata di $f(x, u)$; e poichè $f(x, u)$ è derivabile sotto il segno, così si conclude che

$$(9) \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \int_c^{\infty} e^{-tx} t^n \varphi(t) dt, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

255. Alla funzione determinante si può dare un'altra forma, che viene spesso usata. Ponendo $e^{-t} = u$, la (1) si trasforma in

$$(10) \quad f(x) = \int_0^{\gamma} \psi(u) u^{x-1} du,$$

dove è

$$\psi(e^{-t}) = \varphi(t), \quad \gamma = e^{-c}.$$

Sotto questa forma, la derivata n^{sima} di $f(x)$ viene data da

$$(11) \quad f^{(n)}(x) = \int_0^{\gamma} \psi(u) u^{x-1} \log^n u \, du.$$

256. *Esempi.* *a*) La funzione generatrice sia la costante, che si può supporre uguale ad 1. La funzione determinante è allora

$$(12) \quad \int_c^{\infty} e^{-tx} dt = \frac{e^{-cx}}{x};$$

l'espressione del primo membro vale nel semipiano $\mathfrak{R}(x) > 0$; *l'ordine* della costante, nel senso definito al n.° 252, *a*) è zero; sulla semiretta di convergenza si trova un polo per la funzione definita da (*a*) e di cui il secondo membro dà l'espressione genuina (n.° 65).

b) Essendo k un numero reale qualsiasi, la funzione generatrice t^k ammette come determinante la

$$(13) \quad J_k = \int_c^{\infty} t^k e^{-tx} dt,$$

in cui il limite inferiore può essere preso arbitrariamente per $k > -1$, ma deve essere positivo se è $k \leq -1$. La convergenza ha luogo per $\Re(x) > 0$, e quindi ogni potenza t^k è, a questo punto di vista, di *ordine* zero. Per k intero positivo, l'integrazione per parti dà:

$$J_k = \frac{c^k e^{-cx}}{x} + \frac{k}{x} J_{k-1},$$

onde, per nuove successive integrazioni per parti:

$$(14) \qquad J_k = e^{-cx}\left(\frac{c^k}{x} + \frac{kc^{k-1}}{x^2} + \frac{k(k-1)c^{k-2}}{x^3} + \dots + \frac{k!}{x^{k+1}}\right).$$

Assumendo come estremo inferiore dell'integrale definito il valore $c = 0$, si ottiene:

$$(15) \qquad \int_0^\infty t^k e^{-tx} dt = \frac{k!}{x^{k+1}}, \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

o, mediante la trasformazione indicata al n.° 255:

$$(15') \qquad \int_0^1 \log^k u \cdot u^{x-1} du = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$

c) Da quanto precede, risulta che la funzione determinante di un polinomio razionale intero in t è il prodotto di un polinomio dello stesso grado in $\frac{1}{x}$ per $\frac{e^{-cx}}{x}$; nel caso di $c = 0$, è un polinomio di grado superiore di un'unità in $\frac{1}{x}$.

d) È facile vedere che l'esponenziale e^{kt} è di ordine k se k è reale, di ordine $\Re(k)$ se k è complesso; è pure facile dimostrare che $\varphi(t)t^k$, per ogni k reale, è dello stesso ordine di $\varphi(t)$.

e) Si consideri $(e^t - 1)^k$ come funzione generatrice; essa è dell'ordine k. Viene, integrando per parti, per $\Re(x) > k$:

$$\int_c^\infty (e^t - 1)^k e^{-tx} dt = \frac{(e^c - 1)^k e^{-cx}}{x} + \frac{k}{x}\int_c^\infty (e^t - 1)^{k-1} e^{-t(x-1)} dt;$$

in particolare, se è $c = 0$,

$$\int_0^\infty (e^t - 1)^k e^{-tx} dt = \frac{k}{x}\int_0^\infty (e^t - 1)^{k-1} e^{-t(x-1)} dt.$$

Se dunque è k intero positivo, si ha, ripetendo la formula precedente per $k-1, k-2, \dots 1$ e moltiplicando membro a membro

$$(16) \qquad \int_0^\infty (e^t - 1)^k e^{-tx} dt = \frac{k!}{x(x-1)\dots(x-k)}.$$

Sviluppando la potenza nel primo membro ed integrando termine a termine, si trova l'identità notevole e di uso frequente nel calcolo delle differenze finite:

$$(17) \qquad \frac{1}{x-k} - \frac{k}{x-k+1} + \frac{\binom{k}{2}}{x-k+2} - \dots + \frac{(-1)^n}{x} = \frac{k!}{x(x-1)\dots(x-k)}.$$

È da notarsi che la funzione determinante ha un polo $(x = k)$ sulla retta che limita il semipiano di convergenza.

Analogamente alle (16), si può stabilire la formula

$$(18) \qquad \int_0^\infty (1 - e^{-t})^k e^{-tx} dt = \frac{k!}{x(x+1)\dots(x+k)}.$$

Da questa, mediante la trasformazione indicata al n.° 255:

$$(18') \qquad \int_0^1 (1-u)^k u^{x-1} du = \frac{k!}{x(x+1)\dots(x+k)}.$$

257. Dalle cose fin qui dette, risulta una notevole analogia fra le serie di potenze e le espressioni (1) come atte a rappresentare, in una porzione del piano complesso, una funzione analitica. È noto che dal sistema dei coefficienti a_n di una serie di potenze si deduce, mediante il teorema del n.° 36, il raggio del cerchio di convergenza; si può chiedere se, analogamente, dalla conoscenza della funzione generatrice $\varphi(t)$ si possa dedurre l'ascissa di convergenza della funzione determinante. A ciò risponde il seguente teorema, dovuto ad Ed. Landau [1].

« Se λ è il limite massimo [2] del modulo di

$$\frac{1}{u}\log\int_c^u \varphi(t)dt,$$

« l'ascissa α di convergenza di (1) non è maggiore di λ; e « se α è positiva o nulla, essa coincide con λ ».

---

[1] *Über die Grundlagen der Theorie der Facultätenreihen*, Sitzungber. der k. bayer. Akad. der Wissenschaften, T. 36, p. 215. Nel medesimo lavoro, p. 217, si trova l'analogo del teorema del n.° 48.

[2] V. definizione al n.° 36.

a) Si ponga per brevità

$$\int_t^c \varphi(t)dt = \psi(t).$$

Per la definizione di λ e per ε positivo arbitrario, esiste un $\bar{u}$ tale che per $t > \bar{u}$ è

$$(19) \qquad |\psi(t)| < e^{t(\lambda+\varepsilon)};$$

ora, integrando per parti la $f(x, u)$, nella quale possiamo limitarci a supporre x reale, viene ($u > \bar{u}$):

$$\int_c^u e^{-tx}\varphi(t)dt = e^{-ux}\psi(u) + x\int_c^u e^{-tx}\psi(t)dt.$$

Il primo termine del secondo membro è, per la (19), minore in valore assoluto di $e^{u(\lambda+\varepsilon-x)}$ e tende a zero per $u \to \infty$ se è $x > \lambda + \varepsilon$; il secondo è, per la stessa (19) verificata da un valore di t in avanti, manifestamente convergente per $x > \lambda + \varepsilon$; onde è $\alpha < \lambda + \varepsilon$, qualunque sia ε.

b) Sia ora x un numero positivo che renda la $f(x, u)$ convergente. È identicamente

$$\psi(u) = \int_c^u \varphi(t)e^{-tx}e^{tx}dt,$$

onde, integrando per parti,

$$\psi(u) = f(x, u)e^{ux} - x\int_c^u f(x, u)e^{tx}dt;$$

ma $f(x, u)$ è limitata, e posto $|f(x, u)| < A$ — come ai n.i 251, 253 — viene:

$$|\psi(u)| < Ae^{ux} + A(e^{ux} - e^{cx}) < 2Ae^{ux};$$

onde, da un u in avanti,

$$\frac{\log|\psi(u)|}{u} < x + \frac{\log 2A}{u}.$$

Perciò, se è $\alpha \geq 0$, è $\lambda < \alpha + \varepsilon$ e quindi, in forza di *a*), $\alpha = \lambda$.

258. Abbiamo già notato, negli esempî dati al n.° 256, l'esistenza di una singolarità per $f(x)$ sulla retta di convergenza. Può interessare, in proposito, la seguente osservazione: « Se la funzione generatrice può porsi sotto la forma

$$\varphi(t) = ae^{ht} + \omega(t),$$

« dove h è un numero reale ed $\omega(t)$ è, nel senso del n.° 252, « di ordine inferiore ad h, la determinante ha un polo di « prim'ordine nel punto $x = h$ posto sulla retta di con- « vergenza ».

Infatti (n.° 256, *d*), ae^{ht} è di ordine h, $\omega(t)$ di ordine inferiore, dunque h è l'ordine di $\varphi(t)$; la (1) converge per $\mathfrak{R}(x) > h$. Ma

$$f(x) = \int_c^\infty \varphi(t)e^{-tx}dt = \frac{ae^{-c(x-h)}}{x-h} + \int_c^\infty \omega(t)e^{-tx}dt,$$

e siccome $x = h$ è punto regolare per la funzione data dall'ultimo termine del secondo membro, così $x = h$ è polo di prim'ordine per $f(x)$.

§ II. Sviluppi in serie effettivi ed assintotici delle funzioni determinanti.

259. Fin qui, non si è fatta alcuna ipotesi sulla funzione generatrice $\varphi(t)$, all'infuori della integrabilità in ogni tratto finito da c a $+\infty$, e della limitazione in codesto tratto. Aggiungendo altre ipotesi sulla $\varphi(t)$, si può giungere a risultati più specificati; ciò avviene in particolare ammettendo che $\varphi(t)$ sia indefinitamente derivabile, con derivate limitate integrabili e di ordine finito negli anzidetti tratti.

Sia α l'ordine di $\varphi(t)$, α' quello della prima derivata $\varphi'(t)$; si avrà, per $\mathfrak{R}(x)$ maggiore del maggiore fra i due numeri α ed α':

$$(1) \qquad \int_c^u \varphi(t)e^{-tx}dt = \left(\frac{\varphi(t)e^{-tx}}{x}\right)_c^u + \frac{1}{x}\int_c^u \varphi'(t)e^{-tx}dt.$$

Posto

$$f(x)=\int_c^\infty \varphi(t)e^{-tx}dt,\quad f_1(x)=\int_c^\infty \varphi'(t)e^{-tx}dt,$$

viene dunque da (1):

$$f(x)=\frac{\varphi(c)e^{-cx}}{x}+\frac{1}{x}f_1(x), \tag{2}$$

relazione fra le funzioni determinanti di una generatrice e della sua derivata.

Ammettiamo ora che la $\varphi(t)$ e le sue derivate, fino all'indice $m+1$ incluso, siano di ordine non superiore ad α; applicando ripetutamente la (2), e facendo, per semplicità, $c=0$, si ottiene

$$f(x)=\frac{\varphi(0)}{x}+\frac{\varphi'(0)}{x^2}+\frac{\varphi''(0)}{x^3}+\dots\frac{\varphi^{(m)}(0)}{x^{m+1}}+\frac{1}{x^{m+1}}\int_0^\infty \varphi^{(m+1)}(t)e^{-tx}dt. \tag{3}$$

E poichè, la $\varphi^{(m+1)}(t)$ essendo di ordine finito, l'integrale che figura nell'ultimo termine tende a zero quando la parte reale di x tende a $+\infty$, così, preso ε positivo arbitrariamente piccolo, si può determinare un ξ_m positivo tale che per $\Re(x)>\xi_m$ sia

$$\left|x^{m+1}\left(f(x)-\frac{\varphi(0)}{x}-\frac{\varphi'(0)}{x^2}-\dots-\frac{\varphi^{(m)}(0)}{x^{m+1}}\right)\right|<\varepsilon. \tag{4}$$

260. Ammettiamo ora, come nuova ipotesi, che $\varphi(t)$ sia analitica regolare per $t=0$, in guisa che, posto $\varphi^{(n)}(0)=a_n$, si abbia per un intorno di $t=0$:

$$\varphi(t)=a_0+a_1t+\frac{a_2t^2}{2!}+\dots+\frac{a_nt^n}{n!}+\dots. \tag{5}$$

Diremo *serie associate* la (5) e la serie

$$\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\dots\frac{a_n}{x^{n+1}}+\dots. \tag{6}$$ (1).

(1) Il concetto di serie associate è uno di quelli su cui il Borel (*Annales de l'Ecole normale*, 1899, e *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1901) ha fondata la sua notevole teoria della sommabilità esponenziale delle serie divergenti.

Quest'ultima non è generalmente convergente: la convergenza di (6) porterebbe necessariamente al fatto (condizione non sufficiente) che la successione $a_n:n!$ sia ologene e quindi $\varphi(t)$ funzione intera. Qualora però avvenga che le $\varphi^{(n)}(t)$ abbiano ordine finito e limitato qualunque sia n, e che inoltre sia

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{x^n}\int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)e^{-tx}dt=0 \tag{7}$$

per $\Re(x)>\alpha$, allora, in virtù della (3), la (6) sarà convergente ed avrà per somma $f(x)$: questa è allora regolare per $x=\infty$ ed è rappresentata dalla (6) fuori del cerchio $|x|=\alpha$.

Reciprocamente, sia data una funzione analitica $f(x)$ regolare per $|x|>r$ e rappresentatavi dalla serie

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{x^{n+1}}.$$

Si formi la serie associata, cioè la funzione intera $\varphi(t)=\sum_0^\infty \frac{a_nt^n}{n!}$; essa può scriversi

$$\varphi(t)=\sum_0^m\frac{a_nt^n}{n!}+\rho_m(t),\quad \text{con}\quad \rho_m(t)=\sum_{m+1}^\infty\frac{a_nt^n}{n!}:$$

indicando con q^n il maggiorante di a_n (n.° 44), è

$$|\rho_m(t)|<\sum_{m+1}^\infty\frac{q^nt^n}{n!}<\frac{q^{m+1}t^{m+1}}{m+1!}e^{qt},$$

da cui, tenendo conto della (15) del § precedente:

$$\int_0^\infty \varphi(t)e^{-tx}dt=\sum_0^m\frac{a_n}{x^{n+1}}-\int_0^\infty \rho_m(t)e^{-tx}dt,$$

onde

$$\left|\int_0^\infty \varphi(t)e^{-xt}dt-\sum_0^m\frac{a_n}{x^{n+1}}\right|<\frac{q^{m+1}}{m+1!}\int_0^\infty e^{-t[\Re(x)-q]}t^{m+1}dt= \tag{8}$$

$$=\frac{q^{m+1}}{[\Re(x)-q]^{m+1}},$$

e questa, per $\mathcal{R}(x) > 2q$, tende a zero per $m \to \infty$; onde segue che la $f(x)$, data dalla (6), è funzione determinante della $\varphi(t)$.

« Ad ogni funzione $f(x)$ regolare per $x = \infty$, corrisponde « dunque una funzione intera $\varphi(t)$ che ne è la generatrice; « ad ogni funzione intera $\varphi(t)$ soddisfacente alla (7), corri- « sponde una funzione determinante regolare per $x = \infty$ ».

261. Si astragga ora dalla convergenza della serie (6). La relazione (3), e la conseguente disuguaglianza (4) valgono però ugualmente; posto cioè

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{x^{n+1}},$$

questa, sebbene somma parziale di una serie divergente, tende ad $f(x)$ per $\mathcal{R}(x)$ tendente a $+\infty$; di più, per la (4), che si può scrivere, m essendo arbitrario ma fisso:

(4′) $$|f(x) - S_m(x)| < \frac{\varepsilon}{|x|^{m+1}} \qquad (\text{per } \mathcal{R}(x) > \xi_m),$$

la differenza è infinitesima di ordine superiore ad $m + 1$.

Questa proprietà notevole della serie divergente (6) si esprime dicendo che « essa rappresenta assintoticamente « la $f(x)$ » o che è *serie assintotica* per la $f(x)$; ciò si indica talvolta colla notazione:

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}} \text{ [1]}.$$

Non si deve dimenticare che la validità della rappresentazione assintotica ha luogo per il tendere di x all'infinito nella direzione dell'asse reale positivo.

In base alla definizione (4′) della serie assintotica, è facile dimostrare:

a) che se $\sum \frac{a_n}{x^{n+1}}$, $\sum \frac{b_n}{x^{n+1}}$ sono serie assintotiche rispettivamente per $f(x)$ e $g(x)$, il prodotto delle due serie, eseguito colla regola ordinaria

[1] Esempi di serie assintotiche erano anteriormente noti agli analisti (v. Cap. XVIII) ma la loro definizione ed il loro studio sistematico sono dovuti al POINCARÉ, *Acta Mathematica*, T. 8, p. 295, 1886.

di moltiplicazione delle serie, è serie assintotica per il prodotto $f(x)g(x)$; onde la proprietà vale per le potenze di una serie assintotica;

b) che se $S = \sum \frac{a_n}{x^{n+1}}$ è serie assintotica per $f(x)$, e $\Sigma b_n z^n$ è una serie convergente rappresentante una funzione $\varphi(z)$, la $\varphi(S)$, ordinata per le potenze di $\frac{1}{x}$, è serie assintotica per la funzione $\varphi[f(x)]$;

c) che se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$ è serie assintotica per $f(x)$, la $-\sum \frac{a_n}{nx^n}$ è serie assintotica per $\int f(x)dx$; è lecita dunque, nelle serie assintotiche, la integrazione termine a termine. Non lo è invece la derivazione [1].

262. Si riprenda l'espressione della funzione determinante

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi(t) e^{-tx} dt,$$

sotto le ipotesi del n.° 259; si ha, dall'integrazione per parti:

$$f(x) = \frac{\varphi(0)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^\infty \varphi'(t) e^t e^{-t(x+1)} dt$$

e con nuova integrazione per parti,

$$f(x) = \frac{\varphi(0)}{x} + \frac{\varphi'(0)}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)}\int_0^\infty [\varphi'(t) + \varphi''(t)] e^t e^{-t(x+2)} dt,$$

e così di seguito; venendosi, dopo ripetuta per n volte l'operazione, ad uno sviluppo della forma:

(9) $$f(x) = \frac{b_0}{x} + \frac{b_1}{x(x+1)} + \dots + \frac{b_n}{x(x+1)\dots(x+n)} + \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}\int_0^\infty \varphi_{n+1}(t) e^{-t(x+n+1)} dt,$$

dove si è posto

(10) $$\varphi_1(t) = \varphi'(t)e^t, \quad \varphi_2(t) = \varphi_1'(t)e^t, \dots \quad \varphi_n = \varphi'_{n-1}(t)e^t,$$

e

(10′) $$b_0 = \varphi(0), \quad b_1 = \varphi_1(0), \dots \quad b_n = \varphi_n(0).$$

[1] POINCARÉ, loc. cit., p. 297-301.

Il procedimento potendosi continuare indefinitamente, si dà luogo, formalmente, alla serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x(x+1)\dots(x+n)}, \tag{11}$$

detta ***serie di fattoriali*** [1]. Anche questa, come la (6) (v. n.° 260) non è generalmente convergente. Qualora lo sia, il che richiede che le $\varphi_n(t)$ siano tutte di ordine limitato, ad esempio α al più, e che sia

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \int_0^{\infty} \varphi_{n+1} e^{-t(x+n+1)} dt = 0 \tag{12}$$

per $\mathfrak{R}(x) > \alpha$, la (11) è convergente per quei valori di x e vi rappresenta la $f(x)$. Ma se ciò non si verifica, pure avendo le φ_n tutte ordine inferiore ad α, la

$$\int_0^{\infty} \varphi_n(t) e^{-t(x+n)} dt$$

tende a zero, per ogni n fissato, al tendere di $\mathfrak{R}(x)$ a $+\infty$, e si ha allora, indicando con $\bar{S}_n$ la somma parziale della (11),

$$|f(x) - \bar{S}_n(x)| < \frac{\varepsilon}{|x(x+1)\dots(x+n)|} \tag{13}$$

per $\mathfrak{R}(x) > \xi_n$, ξ_n abbastanza grande e dipendente da n, essendo esclusi in ogni modo i valori di x interi negativi e lo zero. Ciò si esprime dicendo che la (11) è serie assintotica di fattoriali per la $f(x)$, o che essa « rappresenta assintoticamente la $f(x)$ per x tendente all'infinito nella direzione « dell'asse reale positivo ».

Le (10) e (10') danno il legame fra le b_n e le a_n; posto infatti.

$$\varphi_n(t) = (c_{n1}\varphi' + c_{n2}\varphi'' + \dots c_{nn}\varphi^{(n)})e^{nt}$$

[1] Al prodotto $x(x+1)\dots(x+n)$ ed al suo reciproco si dà il nome di *fattoriale*. Il nome di *facoltà analitica*, un tempo usato (v. Novi, *Algebra Superiore*, Cap. XII, Pisa 1866) è ora abbandonato dai matematici italiani.

viene dalle (10)

$$\varphi_{n+1}(t) = (nc_{n1}\varphi' + (nc_{n2} + c_{n1})\varphi'' + \dots + (nc_{n\cdot n} + c_{n\cdot n-1})\varphi^{(n)} + c_{n\cdot n}\varphi^{(n+1)})e^{(n+1)t},$$

onde risultano relazioni ricorrenti fra le $c_{r\cdot s}$ che servono a darne la determinazione.

263. Sembra opportuno, a questo punto, di dare alcune brevi indicazioni sulle serie di fattoriali, premettendo qualche nozione necessaria.

a) Dallo sviluppo mediante la serie logaritmica, si vede subito che, per $n \geq 2$, $\log \frac{n+1}{n}$ è compreso fra $\frac{1}{n}$ ed $\frac{1}{n+1}$. Ne viene che la serie

$$1 - \log 2 + \frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \log\frac{4}{3} + \dots$$

è convergente, come avente i termini alternativamente positivi e negativi, decrescenti e tendenti a zero [1]. Detta C la somma delle serie [2], si ha dunque, con facile riduzione,

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} - \log(n+1)\right) = C. \tag{14}$$

b) Una trascendente intera, nulla per $x = 0, -1, -2, -3, \dots$, è data, per il n.° 140, dal prodotto infinito

$$x(1+x)e^{-x}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\dots\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\dots;$$

il suo prodotto parziale generico è

$$\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!} e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\dots\frac{1}{n}\right)}$$

che, per ogni x diverso da 0 e da un intero negativo, tende per $n = \infty$ ad un limite finito e diverso da zero. Per la (14), lo stesso ha dunque luogo per il prodotto precedente in cui l'esponenziale si sostituisca con n^{-x}; cioè si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{x(x+1)\dots(x=n)}{n!\, n^x} = \gamma(x), \tag{15}$$

$\gamma(x)$ finito e diverso da zero per $x \neq 0, -1, -2, \dots$.

c) « Se la serie (11) converge per un valore $x = c$, essa converge « per ogni x tale che sia $\mathfrak{R}(x) > \mathfrak{R}(c)$ [3] ».

[1] *Alg. Complem.*, n.° 169.

[2] Questa somma è la nota costante di Euler-Mascheroni (v. nota a piè della pag. 153).

[3] La dimostrazione, fondata sul metodo di Abel per la convergenza delle serie (v. *Alg. Compl.*, n.° 175), è data qui seguendo il Landau, *Über die Grundlagen der Theorie der Facultätenreihen*, p. 157.

La serie (11), posto

$$u_n = \frac{b_n}{c(c+1)\dots(c+n)}, \quad v_n = \frac{c(c+1)\dots(c+n)}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

può scriversi identicamente $\Sigma u_n v_n$; posto ancora

$$U_r = \sum_{m}^{m+r} u_n,$$

il resto $R_m = u_m v_m + u_{m+1} v_{m+1} + \dots$ della (11) viene ad essere

$$R_m = U_0(v_m - v_{m+1}) + U_1(v_{m+1} - v_{m+2}) + \dots$$

Ma, convergendo la serie per $x = c$, si può prendere $\overline{m}$ abbastanza grande perchè, per $m > \overline{m}$, sia $|U_r|$ minore di un numero positivo prefissato ε; ne viene

$$|R_m| < \varepsilon (|v_m - v_{m+1}| + |v_{m+1} - v_{m+2}| + \dots).$$

Ora è

$$v_n - v_{n+1} = \frac{c(c+1)\dots(c+n)(x-c)}{x(x+1)\dots(x+n+1)}$$

che si può anche scrivere

$$\frac{\gamma_n(c)(x-c)}{\gamma_{n+1}(x)} n^{c-x-1},$$

dove, per la (15), $\gamma_n(c)$ e $\gamma_{n+1}(x)$ tendono, per $x \to \infty$, a limiti finiti e diversi da zero. Ne viene che la convergenza della serie $\Sigma |v_n - v_{n+1}|$ ha luogo se è convergente la Σn^{c-x-1}, cioè [1] per $\mathfrak{R}(x) > \mathfrak{R}(c)$.

d) In base a questo teorema, e col medesimo ragionamento fatto al n.° 252, *a*) si conclude che per una serie della forma (11) esiste un semipiano di convergenza limitato da una parallela $\mathfrak{R}(x) = a$ all'asse immaginario; la parallela si può dire *retta* ed il numero reale a, *ascissa di convergenza*.

Fondandosi sui medesimi principi che hanno servito per il teorema dato *c*) si può dimostrare [2] che « in ogni area T finita tutta interna al « suo semipiano di convergenza [3], la serie (11) converge uniformemente, « e pertanto rappresenta in quest'area un ramo monodromo di funzione « analitica ».

e) Una serie (6) può trasformarsi formalmente in una serie (11) mediante le relazioni fra le a_n e le b_n che si deducono [4] dalle (10').

---

[1] *Alg. Compl.*, n.° 163.

[2] V. Landau, loc. cit., pag. 161.

[3] Esclusi, bene inteso, con aree arbitrariamente piccole che li circondino, quei punti della successione $0, -1, -2, \dots$ che eventualmente cadessero in T.

[4] V. osservazione alla fine del n.° 262.

f) Come applicazione, si cerchi lo sviluppo in serie di fattoriali di una funzione determinante $f(x)$ rappresentata sotto la forma indicata al n.° 255:

$$f(x) = \int_0^1 \psi(u) u^{x-1} du,$$

e si suppongano la $\psi(a)$ e le sue derivate di qualunque ordine limitate nel loro insieme sul tratto $0 \dots 1$ dell'asse u: sia il loro valore assoluto inferiore ad A. Viene, dall'integrazione per parti applicata successivamente:

$$f(x) = \frac{\psi(1)}{x} - \frac{\psi'(1)}{x(x+1)} + \dots + (-1)^n \frac{\psi^{(n)}(1)}{x(x+1)\dots(x+n)} + \\ + \frac{(-1)^{n+1}}{x(x+1)\dots(x+n)} \int_0^1 \psi^{(n+1)}(u) u^{x+n} du.$$

Ora, per essere l'integrale nell'ultimo termine inferiore in modulo ad $A : (\mathfrak{R}(x) + n + 1)$, quest'ultimo termine tende a zero per $n = \infty$, $\mathfrak{R}(x) > 0$, e quindi, in tutto il semipiano a parte reale positiva, è

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi^{(n)}(1)}{x(x+1)\dots(x+n)}. \qquad (16)$$

Ne viene in particolare il seguente teorema [1]: « ogni funzione analitica regolare per $x = \infty$ è sviluppabile in serie di fattoriali ».

Si è inoltre ritrovata sotto altra forma, la relazione fra le a_n e b_n di cui ad *e*); mentre è $a_n = \varphi^{(n)}(0)$, è $b_n = (-1)^n \psi^{(n)}(1)$, con $\psi(u) = \varphi(-\log u)$.

g) Si osservi infine che un ramo monodromo di funzione analitica può essere sviluppato in un sol modo in serie della forma (11). Ciò equivale a dire che un tale sviluppo, il quale ammetta un campo di convergenza che si può sempre supporre essere $\mathfrak{R}(x) > \alpha$ con $\alpha > 0$, non può essere identicamente nullo, a meno di avere nulli tutti i coefficienti. Se infatti fosse in tutto il detto semipiano

$$\frac{b_0}{x} + \frac{b_1}{x(x+1)} + \frac{b_2}{x(x+1)(x+2)} + \dots = 0,$$

moltiplicando per x, indi facendo tendere $\mathfrak{R}(x)$ a $+\infty$, verrebbe $b_0 = 0$; indi, moltiplicando per $x+1$ e ripetendo il passaggio al limite, verrebbe $b_1 = 0$, e così via; onde sarebbero nulli tutti i coefficienti b_n [2].

---

[1] Cfr. *Ann. de l'Éc. Normale*, S. 3, T. 22, p. 56.

[2] Sull'argomento della trasformazione di Laplace, delle funzioni determinanti e delle serie di fattoriali, citeremo, fra la cospicua letteratura: Poincaré, *Americ. Journal of Mathem.*, T. 7, 1885; Nielsen, *Ann. de l'École Normale supérieure*, § III, T. 19, 1902 e *Handbuch der Theorie der*

§ III. L'inversione della funzione determinante.

264. *a*) Essendo k un numero reale, x un numero positivo, si voglia valutare l'integrale

$$I_0 = \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{e^{ux}du}{u}. \tag{1}$$

All'uopo, si consideri il contorno (c) costituito dal segmento congiungente i punti $k - ib$, $k + ib$ e dalla semicirconferenza avente questo segmento come diametro e volta dalla parte del semiasse reale negativo. Sia dapprima $k > 0$: allora per b abbastanza grande, il punto $u = 0$ è interno al contorno (c), e per conseguenza si ha (n.° 92)

$$\int_{(c)} \frac{e^{ux}du}{u} = 2\pi i.$$

Ma la parte di integrale estesa alla semicirconferenza è

$$i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{xb(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} d\theta;$$

facendo tendere b all'infinito, questo tende a zero, e si ha così $I_0 = 2\pi i$.

Sia invece $k < 0$. Il punto $u = 0$ essendo allora esterno all'area limitata dal contorno, l'integrale esteso al contorno è nullo, ed essendo pure nullo, al limite, quello esteso alla semicirconferenza, si ha $I_0 = 0$.

b) Essendo invece x un numero negativo, l'integrale I_0 si dimostra, col medesimo procedimento, nullo per $k > 0$ e uguale a $2\pi i$ per $k < 0$.

Gammafunktion, Leipzig, 1906; PINCHERLE, *Ann. de l'Éc. Normale sup.*, S. III, T. 22, 1905 e Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 16 febbraio 1902, 18 maggio 1902, 8 novembre 1903; LANDAU, i più volte citati *Grundlagen*, ecc..

c) Riguardando dunque I_0 come funzione della variabile reale x, esso è uguale a $2\pi i$ per $x > 0$, a zero per $x < 0$ se è $k > 0$, ed inversamente se è $k < 0$.

d) Considerando ora l'integrale

$$I_a = \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{e^{ux}du}{u - a}, \tag{2}$$

esso si riconduce al precedente ponendo $u = v + a$, e si conclude che è

$$\text{per } x > 0 \begin{cases} k > \Re(a), & I_a = 2\pi i e^{ax}, \\ k < \Re(a), & I_a = 0, \end{cases}$$

$$\text{per } x < 0 \begin{cases} k > \Re(a), & I_a = 0, \\ k < \Re(a), & I_a = 2\pi i e^{ax} \end{cases} \text{ [1]}.$$

265. « Sia $f(x)$ un ramo monodromo di funzione analitica, dato regolare nel semipiano $\Re(x) > \alpha$; ed esista un « numero reale c tale che $f(x)e^{cx}$, per x tendente all'infinito « secondo le direzioni comprese fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (incluse), tenda « uniformemente a zero di un ordine numericamente positivo [2]. Sotto queste ipotesi, per $\Re(x) > k > \alpha$, vale la « formula

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{-tx} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(u)e^{tu}du\,dt \text{ » [3]}. \tag{3}$$

---

[1] Per queste proprietà, l'integrale (2) — o (1) — è stato detto *fattore discontinuo*.

[2] S'intende con ciò che esistono due numeri positivi M e δ cui corrisponde un numero R in modo che per $|x| > R$, e per l'argomento θ di x compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, è $|f(x)e^{cx}| < \frac{M}{R\delta}$.

[3] Questa formula, senza però un'esauriente discussione sulle condizioni di validità, è dovuta a RIEMANN (Werke, ed. DEDEKIND e WEBER, Leipzig, 1876, p. 140); è stata ripresa ed applicata da molti autori: vedi p. es. E. NETTO, *Vorlesungen über Mathematik*, T. I, p. 221, Leipzig, 1894, ove sono citati gli studî di KRONECKER sull'argomento.

a) Consideriamo, nel semipiano $\mathfrak{R}(x) > \alpha$, il rettangolo avente per vertici i punti $k \pm ib$, $k' \pm ib$, $\alpha < k < k'$, e sia (p)

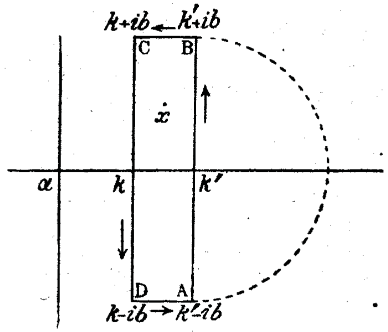


Fig. 27

il suo perimetro (fig. 27). Essendo x interno al rettangolo, l'integrale di Cauchy dà

$$(4)\qquad f(x)e^{cx} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(p)} \frac{f(u)e^{cu}du}{u-x}.$$

Indichiamo con I_1, I_2, I_3, I_4 le parti dell'integrale (4) estese rispettivamente ai lati AB, BC, CD, DA. Per calcolare I_1, si consideri la semicirconferenza (q) di centro k' e raggio b, rivolta dalla parte del semiasse reale positivo; l'integrale esteso al contorno dell'area chiusa da AB e dalla semicirconferenza è nullo; ma, per $b \to \infty$, l'integrale esteso a (q) tende a zero per le ipotesi fatte su $f(x)e^{cx}$, onde è $\lim\limits_{b\to\infty} I_1 = 0$. In base alle medesime ipotesi, si verifica pure facilmente che anche I_2 ed I_4 tendono a zero per $b \to \infty$. Rimane dunque nella (4), passando al limite per $b \to \infty$, e tenuto conto del senso d'integrazione:

$$(5)\qquad f(x)e^{cx} = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{f(u)e^{cu}du}{x-u},$$

e, come al n.° 264, il valore dell'integrale è indipendente da k finchè è $\alpha < k < \mathfrak{R}(x)$.

b) Ciò posto, si ricordi che per la (12) al n.° 256, è

$$\frac{e^{-c(x-u)}}{x-u} = \int_c^\infty e^{-t(x-u)}dt,$$

onde, sostituendo nella (5), si ha:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(u)\int_c^\infty e^{-t(x-u)}dt\,du,$$

ed essendo, per le ipotesi fatte su $f(u)$, manifestamente soddisfatte condizioni sufficienti all'inversione delle integrazioni ([1]), questa inversione ci dà la (3), che si voleva dimostrare.

Con ciò, mentre la (1) del n.° 251 dà la determinante espressa mediante la generatrice, la

$$(6)\qquad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(u)e^{tu}du$$

esprime inversamente la generatrice mediante la funzione determinante.

Come esempio, ricordando dalla (15), n.° 256, che $\frac{n!}{x^{n+1}}$ è la determinante di t^n, si avrà dalla (6)

$$t^n = \frac{n!}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{e^{tu}du}{u^{n+1}} \qquad (k>0)$$

che si può verificare direttamente senza difficoltà.

266. *a*) La (6) dà la soluzione dell'equazione

$$(7)\qquad f(x) = \int_c^\infty e^{-tx}\varphi(t)dt$$

([1]) V. *Calcolo*, n.° 446; Jordan, *Cours d'Analyse*, 2ème éd., T. II, p. 72, Paris, 1894.

nella quale si riguardi la $f(x)$ come funzione data — regolare nel semipiano $\mathfrak{R}(x) > \alpha$ — e $\varphi(t)$ come incognita [1].

b) Si tratta di vedere se la soluzione trovata è unica. All'uopo, vale la seguente proposizione: « Se $f(x)$ è una funzione determinante, « definita per $\mathfrak{R}(x) > \alpha$, la quale si annulli per i valori in progressione « aritmetica

$$x = x_0,\ x_0 + q,\ x_0 + 2q, \dots x_0 + nq, \dots$$

« dove è $\mathfrak{R}(x_0) > \alpha$ e q positivo, la $f(x)$ è identicamente nulla, ed è nulla « la sua generatrice $\varphi(t)$, se continua » [2].

A dimostrare questa importante proposizione [3], riprendiamo la formula (5) al n.° 251, in cui è $\mathfrak{R}(y) > 0$:

$$f(x_0 + y,\ u) = e^{-uy} f(x_0,\ u) + y\int_c^u f(x_0,\ t)e^{-ty}dt;$$

passando al limite per $u \to \infty$, essa dà:

$$f(x_0 + y) = y\int_c^\infty \psi(t)e^{-ty}dt \tag{8}$$

dove si è posto

$$\psi(t) = f(x_0,\ t) = \int_c^t e^{-tx_0}\varphi(t)dt. \tag{9}$$

La $\psi(t)$ è pertanto funzione continua di t, da c a $+\infty$, e finita per $t \to \infty$. Ponendo

$$e^{-tq} = v, \quad \gamma = e^{-cq}, \quad \bar{\omega}(v) = \frac{1}{q}\varphi\left(-\frac{\log v}{q}\right),$$

la (8) si scrive

$$f(x_0 + y) = y\int_0^\gamma \bar{\omega}(v)v^{\frac{y}{q}-1}dv;$$

e la $\bar{\omega}(v)$ è funzione continua di v, da 0 a γ, e finita per $v = 0$: essa ha dunque, nell'intervallo stesso, un massimo valore assoluto μ. Per l'ipotesi

---

(1) La (7) è una di quelle equazioni che vengono dette *equazioni integrali lineari* di prima specie.

(2) Non ammettendo la continuità, vi è la riserva accennata alla nota a pag. 336.

(3) Dovuta a M. LERCH, *Acta Math.*, T. 27, p. 345, 1903.

fatta sull'annullarsi di $f(x)$, segue

$$\int_0^\gamma \bar{\omega}(v)v^n dv = 0 \tag{10}$$

per $n = 1,\ 2,\ 3, \dots$

Ciò posto, per una proposizione ben nota nella teoria delle funzioni di variabile reale [1] si può, preso ε positivo arbitrario, determinare un polinomio razionale intero

$$P(v) = h_0 + h_1 v + h_2 v^2 + \dots h_m v^m,$$

tale che sia, in tutto $0 \dots \gamma$,

$$\bar{\omega}(v) = P(v) + \eta(v), \tag{11}$$

con $|\eta(v)| < \varepsilon$.

Considerando ora l'integrale

$$\int_0^\gamma \bar{\omega}(v)P(v)dv,$$

questo è nullo per le (10): ma, per la (11), esso può scriversi

$$\int_0^\gamma \bar{\omega}^2(v)dv - \int_0^\gamma \bar{\omega}(v)\eta(v)dv = 0;$$

qui, il primo termine è un numero positivo determinato, il secondo termine è, in valore assoluto, minore di $\varepsilon\mu\gamma$, e quindi arbitrariamente piccolo: ciò richiede dunque che sia

$$\int_0^\gamma \bar{\omega}^2(v)dv = 0,$$

onde $\bar{\omega}(v)$ è nullo in tutto l'intervallo — senza eccezione per essere funzione continua. Ne viene $\psi(t) = 0$, e quindi $f(x)$ è identicamente nulla:

---

(1) Questa proposizione dovuta a WEIERSTRASS dice che « ogni fun- « zione continua in un intervallo finito può svilupparsi in serie unifor- « memente convergente di polinomi »: essa può quindi rappresentarsi in tutto l'intervallo mediante un polinomio, a meno di un errore inferiore in valore assoluto, per tutto l'intervallo, ad un numero positivo prefissato ε. Per un confronto fra le varie dimostrazioni che ne sono state date e per numerose osservazioni sulla questione, v. BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Ch. IV, (Paris, 1905).

dalla (9) risulta poi che $\varphi(t)$ è nulla in ogni intervallo $c \dots t$, all'infuori al più di un aggregato rinchiudibile [1], se discontinua; se continua, è dovunque nulla.

c) Dal teorema precedente risulta che una medesima funzione $f(x)$ non può ammettere due distinte funzioni generatrici continue; ed astrazione fatta dalla continuità, due generatrici $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$ non possono differire se non nei punti di un aggregato rinchiudibile in ogni intervallo finito.

---

(1) Cioè tale da potere essere rinchiuso in un sistema d'intervalli la cui somma si possa rendere piccola a piacere. Ciò, per la condizione di integrabilità (v. *Calcolo*, n.° 314). Adottando la definizione di integrale secondo LEBESGUE, l'aggregato eccezionale — dove $\varphi(t)$ non è nulla — deve essere di *misura nulla*. Cfr. G. VITALI, *Sulle funzioni ad integrale nullo* (Rend. del Circ. mat. di Palermo, T. XX, p. 136, 1905).

CAPITOLO DECIMOSETTIMO

FUNZIONI IPERGEOMETRICHE

§ I. L'equazione differenziale lineare ipergeometrica.

267. Abbiasi l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' = p(x)y' + q(x)y \tag{1}$$

dove p e q sono funzioni analitiche della variabile x, regolari entro un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio superiore al numero positivo r; sia, in questo cerchio,

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots, \quad q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots \tag{2}$$

a) Si ponga

$$y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1;$$

derivando successivamente la (1) e facendo $x = 0$ nei risultati, si otterranno i valori di y'', y''',... $y^{(n)}$,... univocamente determinati, mediante sole operazioni di somme e moltiplicazioni eseguite sui numeri a_0, a_1, p_n, q_n oltre che sui coefficienti numerici positivi portati dalla derivazione delle (2). Posto $y^{(n)}(0) = a_n n!$, le a_n sono dunque formalmente determinate per ogni n, ed è quindi *formalmente* costruito uno sviluppo in serie di potenze per la y. Codesto risultato formale sarà anche *effettivo* qualora se ne dimostri la convergenza, e questa risulterà provata qualora sia possibile di accertarla per una serie maggiorante: una serie cioè i cui coefficienti siano costruiti coll'identico sistema di somme e moltiplicazioni che sono occorse per le a_n, ma applicate a numeri positivi non minori rispettivamente dei valori assoluti di a_0, a_1 e di $p_0, p_1, \dots p_2, \dots$ e $q_0, q_1, \dots q_n, \dots$.

b) A questo scopo, indichiamo con M un numero arbitrario positivo, ma maggiore del massimo valore assoluto di $p(x)$ e di $q(x)$ entro (r); sarà pertanto (n.° 44):

$$|p_n| < \frac{M}{r^n}, \quad |q_n| < \frac{M}{r^n}; \tag{3}$$

si consideri poi l'equazione differenziale ausiliare:

$$z'' = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}(z' + z), \tag{4}$$

e la si integri col metodo dei coefficienti indeterminati, ponendo

$$z = \Sigma c_n x^n, \tag{5}$$

con c_0, c_1 positivi e $c_0 > |a_0|$, $c_1 > |a_1|$.

Per quanto si è detto ad *a*), i coefficienti c_n, ottenuti da tali somme e moltiplicazioni e perciò tutti positivi, sono rispettivamente maggiori dei rispettivi $|a_n|$; se dunque la (5) si dimostrerà convergente, sarà a fortiori convergente la $\Sigma a_n x^n$, mentre essa soddisfarà alla (1) per la sua stessa costruzione.

Ora, la sostituzione della (5) in (4) dà, per le c_n, la relazione ricorrente

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} = (n+1)\left(\frac{n}{r} + M\right)c_{n+1} + Mc_n;$$

questa conferma che, le c_0, c_1 essendo positive, lo sono tutte le c_n ed inoltre ne viene

$$\frac{rc_{n+2}}{c_{n+1}} = \frac{n + Mr}{n+2} + \frac{Mrc_n}{c_{n+1}(n+1)(n+2)}. \tag{6}$$

Poichè si può prendere M abbastanza grande perchè sia $Mr > 2$, e poichè l'ultimo termine è positivo, viene $\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} > \frac{1}{r}$

e quindi, risultandone che $\frac{rc_n}{c_{n+1}}$ è limitato superiormente, si conclude

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} = \frac{1}{r}.$$

Onde la serie (5) ammette (r) come cerchio di convergenza, e conseguentemente « la $\Sigma a_n x^n$ converge per $|x| < r$ « almeno, e rappresenta, in quel cerchio, un integrale y « della (1), determinato dall'essere $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ » [1].

268. Se ai valori iniziali a_0, a_1, sostituiamo altri due numeri b_0, b_1, tali che $a_0 b_1 - b_0 a_1$ sia differente da zero, otterremo un secondo integrale z della (1), pure regolare nel cerchio (r) e linearmente indipendente da y, e pertanto l'integrale generale essendo della forma $cy + c'z$, dove c e c' sono costanti [2], si può dire che « l'integrale generale della (1) è « regolare nel cerchio (r) ».

Ma se si considera il campo di regolarità comune alle due funzioni $p(x)$ e $q(x)$, ed x_0 è un punto qualsiasi di questo campo, si vedrà ugualmente che l'integrale generale è regolare in un cerchio di centro x_0 e di raggio non nullo, e pertanto, facendo dell'integrale stesso la continuazione analitica e tenendo presente (n.° 173) che ogni elemento dedotto è integrale dell'equazione, si viene alla conclusione che « l'integrale generale di un'equazione (1) a coefficienti analitici « è dappertutto regolare, per x finito, dove lo sono i coefficienti $p(x)$, $q(x)$ ».

(1) Questa dimostrazione, sostanzialmente fondata sul metodo detto dal CAUCHY *méthode des limites* (cfr. *Calcolo*, n.° 620) si estende senza modificazioni essenziali alle equazioni differenziali omogenee di ordine qualsiasi a coefficienti analitici; essa costituisce il celebre teorema di FUCHS (v. in proposito L. FUCHS, Giornale di Crelle, T. 66, p. 122, 1866; J. TANNERY, *Ann. de l'École Normale*, S. II, T. 4, p. 113, 18; SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleich.*, T. I, p. 21, Leipzig, 1895). Anche le considerazioni del seguente n.° 268 si estendono facilmente al caso dell'equazione lineare di ordine n; ci siamo limitati al caso $n = 2$ sia per brevità di redazione, sia perchè basta allo scopo speciale del presente Capitolo.

(2) V. *Calcolo*, n.i 666 e seg.

I **punti singolari** di $p(x)$, $q(x)$ si dicono **punti singolari dell'equazione differenziale lineare.**

Se all'equazione si dà la forma

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \tag{7}$$

dove $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sono funzioni analitiche aventi un campo A comune di regolarità, tali punti singolari in A per l'integrale della (7) possono essere, per x finito, soltanto le radici di $a(x)$.

269. Ciò premesso, consideriamo l'equazione (1) particolare

$$x(1-x)y'' - [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{8}$$

detta ***equazione ipergeometrica*** o ***equazione di*** GAUSS. Per quanto precede, soli punti singolari dell'equazione possono essere $x=0$, $x=1$, $x=\infty$; il campo di regolarità di ogni integrale della (8) è dunque il campo T costituito dall'intero piano-sfera cui siano tolti i punti 0, 1, ∞.

Intenderemo pertanto che, a formare T, si escluda $x=0$ con un cerchio δ_0 di centro 0 e raggio piccolissimo, $x=1$ con un cerchio δ_1 di centro 1 e raggio pure piccolissimo, ed $x=\infty$ escludendo l'esterno δ_∞ di un cerchio di centro 0 e raggio grandissimo.

In ogni porzione semplicemente connessa di T, un integrale di (8) è monodromo; ma non è così in una parte di T che includa le δ: se la variabile descrive una linea chiusa l che partendo da x_0 vi ritorni includendo una o più volte le δ (1), l'integrale potrà tornare in x_0 con elemento e valore diverso. Precisamente, sia u, v una coppia di integrali linearmente indipendenti e costituenti perciò un sistema fondamentale (2); se l_1 è una linea che partendo da x_0 vi torna, si avranno al ritorno due integrali u_1, v_1, i quali però saranno legati ai primitivi da una sostituzione lineare (v. n.° 6)

$$S^{(1)} \begin{cases} u_1 = au + bv \\ v_1 = a'u + b'v, \end{cases} \quad \text{o} \quad S^{(1)} = \begin{pmatrix} a, & b \\ a' & b' \end{pmatrix};$$

(1) L'includere una sol volta in l i tre campi δ equivale ad escluderli tutti.

(2) V. *Calcolo*, n.° 667.

per una seconda linea l_2 pure chiudentesi in x_0, si avrà un'altra coppia u_2, v_2 d'integrali, legati ad u, v da

$$S^{(2)} \begin{cases} u_2 = a_1 u + b_1 v \\ v_2 = a_1' u + b_1' v, \end{cases} \quad \text{o} \quad S^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1, & b_1 \\ a_1', & b_1' \end{pmatrix},$$

ed il percorrere l_1, l_2 di seguito l'una all'altra e nel senso già seguito opererà su u, v la sostituzione $S^{(2)}S^{(1)}$. Viene da ciò che le varie sostituzioni, corrispondenti alle varie linee l nelle precedenti condizioni, vengono a costituire un **gruppo**; e se, in luogo del sistema u, v, si parte da x_0 con un sistema ottenuto da questo mediante la sostituzione T, il gruppo relativo al nuovo sistema sarà costituito dalle sostituzioni trasformate delle S mediante T, cioè dalle TST^{-1} (1).

Il gruppo è però generato da alcune sostituzioni fondamentali, dipendenti dai punti 0, 1 ed ∞, poichè il cambiamento di valore dell'integrale può avvenire solo per avere girato attorno a quei punti; si tratterà dunque di ricercare quali siano le sostituzioni S_0, S_1, S_∞ che avvengono su un sistema fondamentale percorrendo il contorno delle δ_0, δ_1, δ_∞ rispettivamente; e siccome un giro positivo intorno a δ_0 seguito da un giro positivo intorno a δ_1 equivale manifestamente ad un giro negativo intorno a δ_∞ (2), così si ha

$$S_\infty^{-1} S_0 S_1 = 1. \tag{9}$$

270. *a*) Per determinare queste sostituzioni fondamentali, cominceremo col tentare di integrare la (8) mediante una serie della forma

$$y = x^\rho + c_1 x^{\rho+1} + \dots + c_n x^{\rho+n} + \dots .$$

Il metodo dei coefficienti indeterminati conduce dapprima a riconoscere, dall'esame del coefficiente di x^ρ nel primo

(1) Il concetto di « gruppo di un'equazione differenziale lineare a « coefficienti analitici », cui siamo giunti qui in un caso particolare, si estende al caso generale fondandosi su analoghe considerazioni. Esse sono dovute originariamente a RIEMANN (Werke, p. 62-78, p. 357-369, Leipzig, 1876), e vennero sviluppate poi da FUCHS ed altri (v. lo *Handbuch* già citato di L. SCHLESINGER).

(2) Cfr. la nota (1) a pag. 340.

membro di (8), che deve essere

(10) $$\rho(\rho-1)+\gamma\rho=0,$$

onde $\rho=0$, $\rho=1-\gamma$; con queste due determinazioni di ρ, si hanno due integrali della (8) dati nell'intorno di $x=0$; i coefficienti sono legati dalle relazioni ricorrenti

(11) $$(n+1)(n+\gamma)c_{n+1}-(n+\alpha)(n+\beta)c_n=0$$

per il valore $\rho=0$,

(11') $$(2-\gamma+n)(1-\gamma+n)c_{n+1}-(1-\gamma+\alpha+n)(1-\gamma+\beta+n)c_n=0$$

per il valore $\rho=1-\gamma$, e quindi i due sviluppi sono

(12) $$u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdot\dots n\cdot\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}x^n$$

e

(12') $$v=x^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha-\gamma+1)\dots(\alpha-\gamma+n)(\beta-\gamma+1)\dots(\beta-\gamma+n)}{n!\,(2-\gamma)(3-\gamma)\dots(n+1-\gamma)}x^n.$$

La (10) è detta *equazione determinante* dell'equazione differenziale relativa ad $x=0$. Lo sviluppo (12) è la classica serie ipergeometrica; da GAUSS è stata introdotta la notazione, da tutti adottata, $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$ a rappresentare la serie stessa.

Si riconosce immediatamente che lo sviluppo (12) ammette $|x|=1$ come raggio di convergenza; in quanto alla (12') essa è regolare (generalmente non monodroma) in tutto il cerchio $|x|=1$, eccettuato il punto $x=0$, in cui, se è $\mathfrak{R}(\gamma)>1$, il valore è infinito. Si escluderanno per α, β, γ valori interi; con ciò, i due integrali (10) e (11) costituiscono un sistema fondamentale. L'integrale (12') può scriversi

$$x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x).$$

Per un giro in senso positivo intorno ad $x=0$, il sistema fondamentale costituito da u e v subisce la sostituzione lineare

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2\pi i\gamma}\end{pmatrix}.$$

b) Analogamente, ordinando i coefficienti della (8) rispetto ad $x-1$, conviene cercare per l'integrale uno sviluppo della forma

$$y=(1-x)^\rho+c_1(1-x)^{\rho+1}+\dots,$$

ed il metodo dei coefficienti indeterminati dà dapprima la condizione per ρ:

(13) $$\rho(\rho-\gamma+\alpha+\beta)=0,$$

detta equazione determinante relativa ad $x=1$; indi si trovano, rispettivamente per $\rho=0$ e $\rho=\gamma-\alpha-\beta$, gli sviluppi.

(14) $$u_1=F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-x)$$

e

(15) $$v_1=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x),$$

entrambi validi entro il cerchio $|x-1|=1$. Per un giro positivo intorno ad $x=1$, questo sistema fondamentale subisce la sostituzione

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\end{pmatrix}.$$

c) Infine, onde avere gli sviluppi nell'intorno di $x=\infty$, si pone

$$y=x^\rho+c_1x^{\rho-1}+c_2x^{\rho-2}+\dots+c_nx^{\rho-n}+\dots,$$

ed il solito metodo dei coefficienti indeterminati dà, per ρ, l'equazione determinante relativa ad $x=\infty$

(16) $$\rho(\rho-1)+(\alpha+\beta+1)\rho+\alpha\beta=0,$$

onde $\rho=-\alpha$, $\rho=-\beta$, cui corrispondono rispettivamente gli sviluppi, dati dal facile svolgimento del calcolo:

(17) $$u_2=x^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{x}\right)$$

e

(18) $$v_2=x^{-\beta}F\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{x}\right),$$

validi per $|x|>1$ e costituenti un sistema fondamentale che per un giro nel senso delle rotazioni negative intorno ad $x=\infty$ subisce la sostituzione

$$C=\begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\beta} \end{pmatrix} \text{ (1)}.$$

I tre sistemi fondamentali di integrali u v, u_1 v_1 ed u_2 v_2 si dicono *sistemi canonici* dell'equazione (8) rispettivamente per i punti $x=0$, $x=1$, $x=\infty$.

271. Dopo ciò, la ricerca del gruppo dell'equazione (8) non presenta difficoltà. Codesto gruppo sarà perfettamente determinato ove si conoscano le sostituzioni che subisce il sistema fondamentale u, v per il cammino costituito da una linea semplice che partendo da un punto x_0 ($|x_0|<1$), circondi una sol volta uno dei contorni delle δ_0, δ_1 o δ_∞, poichè ogni altro cammino chiuso si può ricondurre a combinazioni ed iterazioni di simili cammini semplici mediante deformazioni continue che non attraversino i detti campi δ_0, δ_1 o δ_∞. Detta S_0 la A, occorre trovare S_1 ed S_∞ per il sistema (u, v). Ponendo

$$(19) \qquad \begin{cases} u=\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}v_1 \\ v=\alpha_{21}u_1+\alpha_{22}v_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u=\beta_{11}u_2+\beta_{12}v_2 \\ v=\beta_{21}u_2+\beta_{22}v_2 \end{cases}$$

se queste sostituzioni, che diremo G ed H, fossero determinate, si avrebbe subito $S_1=GBG^{-1}$ ed $S_\infty=HCH^{-1}$; ora alla determinazione dei loro coefficienti si può venire nel seguente modo.

Dalla relazione (9), che scriveremo $S_1=S_0^{-1}S_\infty$, viene

$$(20) \qquad \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}v_1=\beta_{11}e^{-2\pi i\alpha}u_2+\beta_{12}e^{-2\pi i\beta}v_2,$$

ma è

$$(21) \quad \alpha_{11}u_1+\alpha_{12}v_1=\beta_{11}u_2+\beta_{12}v_2, \quad \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}v_1=\beta_{21}u_2+\beta_{22}r_2$$

(1) Viene escluso il caso che le α, β, γ o le loro differenze siano numeri interi. La non difficile discussione, per la quale il lettore può consultare p. es. l'opera citata di L. Schlesinger (Handbuch, T. I, Abschnitt 5, Cap. IV), richiederebbe uno sviluppo non confacente alla mole ed al piano del presente volume; tuttavia, un'indicazione sulla via da tenere in simili casi si può desumere dall'esempio speciale trattato al § III del presente Capitolo.

onde, eliminando u_1 fra la (20) e la prima delle (21):

$$(22) \quad \alpha_{12}(e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}-1)r_1=\beta_{11}(e^{-2\pi i\alpha}-1)u_2+\beta_{12}(e^{-2\pi i\beta}-1)v_2;$$

analogamente, sempre dalla (9),

$$(23) \qquad \alpha_{21}u_1+\alpha_{22}e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}v_1=e^{2\pi i\gamma}(\beta_{21}e^{-2\pi i\alpha}u_2+\beta_{22}e^{-2\pi i\beta}v_2)$$

ed eliminando ancora u_1 fra questa e la seconda delle (21):

$$(24) \quad \alpha_{22}(e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}-1)v_1=\beta_{21}(e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}-1)u_2+\beta_{22}(e^{-2\pi i\beta}-1)v_2.$$

Ma queste relazioni (22) e (24) non possono essere distinte, poichè ne risulterebbe, eliminando v_1, che u_2 e r_2 sarebbero legate linearmente, contro l'ipotesi che esse formano un sistema fondamentale: ne segue la proporzionalità dei coefficienti:

$$(25) \qquad \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}=\frac{\beta_{11}(e^{-2\pi i\alpha}-1)}{\beta_{21}(e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}-1)}=\frac{\beta_{12}(e^{-2\pi i\beta}-1)}{\beta_{22}(e^{2\pi i(\gamma-\beta)}-1)}.$$

In modo analogo, l'eliminazione di v_1 fra la (20) e la prima delle (21), indi fra la (23) e la seconda delle (21) fornirebbe la proporzione

$$(26) \qquad \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}=\frac{\beta_{11}(e^{2\pi i(\beta-\gamma)}-1)}{\beta_{21}(e^{2\pi i\beta}-1)}=\frac{\beta_{12}(e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}-1)}{\beta_{22}(e^{2\pi i\alpha}-1)},$$

e poichè gl'integrali u_1, v_1, u_2, v_2 sono dati ciascuno all'infuori di un fattore arbitrario, le (25) e (26) valgono a determinare le sostituzioni (19).

272. Da quanto precede, risulta immediatamente che il gruppo dell'equazione ipergeometrica rimane inalterato quando i parametri α, β, γ vengono aumentati di numeri interi arbitrarî, positivi o negativi.

273. « Se in tre equazioni della forma (8) i parametri α « differiscono fra loro per numeri interi, o se così accade per « i parametri β od i parametri γ, fra tre integrali qualsivoglia di queste equazioni passa una relazione lineare « omogenea a coefficienti razionali ».

Si riprendano, per la prima delle tre equazioni, i tre sistemi fondamentali canonici indicati al n.° 270 con u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, e siano

$$u^{(1)}, v^{(1)}, \quad u_1^{(1)}, v_1^{(1)}, \quad u_2^{(1)}, v_2^{(1)} \quad \text{ed} \quad u^{(2)}, v^{(2)}, \quad u_1^{(2)}, v_1^{(2)}, \quad u_1^{(2)}, v_1^{(2)}$$

i corrispondenti sistemi canonici nella seconda e nella terza equazione. Poichè i parametri corrispondenti differiscono solo per numeri interi, i moltiplicatori nelle sostituzioni A, B e C sono gli stessi per le tre equazioni. Ne viene che formando il determinante

$$D = uv^{(1)} - vu^{(1)},$$

questo, nell'intorno di $x=0$, avrà la forma $x^{-\gamma}\varphi(x)$, dove $\varphi(x)$ è monodroma nell'intorno di $x=0$. Ma la sostituzione G data dalla (19), che esprime u e v in funzione di u_1 e v_1, vale anche ad esprimere $u^{(1)}$ e $v^{(1)}$ in funzione di $u_1^{(1)}$ e $v^{(1)}$, poichè (n.° 272) la prima e la seconda equazione hanno il medesimo gruppo, onde

$$D = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})(u_1 v_1^{(1)} - v_1 u_1^{(1)})$$

ed ha quindi, per l'ipotesi, la forma $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\varphi_1(x)$ nell'intorno di $x=1$, $\varphi_1(x)$, essendo monodroma in quell'intorno.

Con ciò, la funzione

$$g_2(x) = Dx^{\gamma}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}$$

è monodroma in ogni regione finita del piano ed ha per $x=0$, $x=1$ al più dei poli. Ma poichè per $x=\infty$ la D ha la forma

$$D = (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})(u_2 v_2^{(2)} - v_2 u_2^{(2)}) = x^{-(\alpha+\beta)}\varphi_2(x),$$

dove $\varphi_2(x)$ è monodroma nell'intorno di $x=\infty$ ed ha per $x=\infty$ al più un polo, ne consegue che $g_2(x)$ è razionale (n.° 74, *a*).

Si ha dunque

$$uv^{(1)} - vu^{(1)} = x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}g_2(x),$$

ed analogamente essendo $g(x)$ e $g_1(x)$ funzioni razionali:

$$u^{(1)}v^{(2)} - v^{(1)}u^{(2)} = x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}g(x),$$
$$u^{(2)}v - v^{(2)}u = x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}g_1(x),$$

onde, moltiplicando rispettivamente per $u^{(2)}$, u, $u^{(1)}$ e sommando,

$$g(x)u + g_1(x)u^{(1)} + g_2(x)u^{(2)} = 0. \tag{27}$$

Analogamente per v, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, per u_1, $u_1^{(1)}$, $u_1^{(2)}$, ecc., e quindi per qualsiasi terna di integrali.

274. Agli integrali delle equazioni (8) si dà il nome di *funzioni ipergeometriche*, per estensione del nome di *serie ipergeometrica* dato fino dal secolo XVIII alla classica serie

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)n!}x^n.$$

Questa serie è stata studiata da GAUSS in una memoria celebre (¹); da essa, specificando i parametri, si originano quasi tutte le serie note come rappresentanti le trascendenti elementari, e alla medesima, come si è visto, si riconducono gl'integrali canonici della (8). La F è pure funzione analitica dei parametri α, β, γ; per $|x|<1$, è funzione intera di α e β, meromorfa in γ. Rispetto ai parametri, essa soddisfa ad equazioni lineari alle differenze del secondo ordine, a coefficienti razionali: ad esempio, rispetto ad α e posto $F(\alpha+n, \beta, \gamma, x) = F_n$, l'equazione è

$$(\alpha+n+1)(x-1)F_{n+2} - [(\alpha-\beta+n+1)x - 2(\alpha+n+1) + \gamma]F_{n+1}$$
$$-(\alpha+n-\gamma+1)F_n = 0;$$

l'esistenza di una simile relazione è preveduta dal teorema del n.° precedente. Dalla medesima proposizione risultano le relazioni fra le *functiones contiguae* di GAUSS, cioè fra quelle serie in cui due dei parametri α, β, γ avendo il medesimo valore, i valori del terzo differiscono per un'unità. Queste relazioni conducono a sviluppi assai notevoli del rapporto di due funzioni ipergeometriche in forma di frazioni continue (²).

Delle funzioni ipergeometriche, sia considerate dal loro sviluppo in serie, sia come integrali di equazioni lineari differenziali o alle differenze finite, sia come espresse da integrali definiti come verrà indicato nel § seguente, sono state studiate varie ed interessanti generalizzazioni, sulle quali il lettore potrà trovare indicazioni nella memoria da me pubblicata nel 1896 sotto il titolo: *Delle funzioni ipergeometriche e di varie questioni ad esse attinenti* (³).

(¹) GAUSS, Werke, T. III, p. 207.

(²) GAUSS, mem. citata; HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, T. I, p. 269-280. (Leipzig, 1881); PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Leipzig, 1913.

(³) *Giornale di matematiche* di BATTAGLINI, T. XXII.

§ II. Trasformazione di Euler.

275. Si è studiata, nel Cap. XVI, una particolare **trasformazione funzionale**, la corrispondenza cioè fra una funzione determinante e la sua generatrice; a questa si dà il nome di ***trasformazione di*** LAPLACE. Un'altra trasformazione, cui è stato dato il nome di ***trasformazione di*** EULER e che ha colla precedente più di un punto di contatto, fa corrispondere fra di loro due funzioni $f(x)$, $\varphi(t)$ mediante la relazione

$$(1)\qquad f(x)=\int_{(l)}\varphi(t)(t-x)^{\sigma-1}dt,$$

essendo la l una linea del piano t. Se $\varphi(t)$ è funzione integrabile dei punti di questa linea ed x è fuori della linea stessa, la $f(x)$ risulta (cfr. n.° 116) funzione analitica di x regolare: le sue singolarità possono essere soltanto sui punti della linea.

La trasformazione (1) si indicherà brevemente con

$$f=E(\varphi).$$

276. Ma per lo scopo che abbiamo in vista si possono fare ipotesi più restrittive, e precisamente supporre $\varphi(t)$ analitica regolare nei punti di l, esclusi al più gli estremi. Sotto questa ipotesi, la trasformazione (1) dà luogo ad una formula fondamentale che andiamo a stabilire.

a) Sia l'integrale

$$(2)\qquad I=\int_{(l)}\varphi^{(h)}(t)(t-x)^{\sigma+k-1}dt:$$

i numeri h (indice di derivazione) e k sono interi ed è $k\leq h$. Integrando per parti, ed indicando con L_1 la parte ai limiti dell'integrazione, si ha

$$I=L_1-(\sigma+k-1)\int_{(l)}\varphi^{(h-1)}(t)(t-x)^{\sigma+k-2}dt$$

con

$$L_1=(\varphi^{(h-1)}(t)(t-x)^{\sigma+k-1})_{(l)};$$

integrando nuovamente per parti, indicando genericamente colla lettera L, affetta o no da indici, le parti ai limiti, viene

$$I=L_2+(\sigma+k-1)(\sigma+k-2)\int_{(l)}\varphi^{(h-2)}(t)(t-x)^{\sigma+k-3}dt,$$

infine

$$I=L_k+(-1)^k(\sigma+k-1)(\sigma+k-2)\ldots\sigma\int_{(l)}\varphi^{(h-k)}(t)(t-x)^{\sigma-1}dt,$$

ossia

$$(3)\qquad I=L_k+(-1)^k\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+k-1)E(\varphi^{(h-k)}).$$

D'altra parte, considerando $E(\varphi')$ ed integrando per parti, viene

$$E(\varphi')=\overline{L}_1-(\sigma-1)\int_{(l)}\varphi(t)(t-x)^{\sigma-2}dt,$$

e l'ultimo termine di questo secondo membro non è altro che $f'(x)$; onde

$$f'(x)=E(\varphi')-\overline{L}_1$$

e analogamente

$$f^{(n)}(x)=E(\varphi^{(n)})-\overline{L}_n:$$

per cui la (3) si può scrivere

$$(4)\qquad I=L+(-1)^k\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+k-1)f^{(h-k)}(x).$$

b) Sia ora $\pi(t)$ un polinomio razionale intero in t, del grado m, e si consideri la $E[\pi(t)\varphi^{(m)}(t)]$. Ponendo $\pi(t)$ nella forma

$$\pi(t)=\pi(x)+\pi'(x)(t-x)+\frac{\pi''(x)}{1\cdot 2}(t-x)^2+\ldots+\frac{\pi^{(m)}(x)}{m!}(t-x)^m,$$

verrà

$$E[\pi(t)\varphi^{(m)}(t)]=\sum_{k=0}^{m}\frac{\pi^{(k)}(x)}{k!}\int_{(l)}\varphi^{(m)}(t)(t-x)^{\sigma+k-1}dt,$$

e questa è, per la (3), L indicando genericamente la parte ai limiti:

$$(5)\qquad E[\pi(t)\varphi^{(m)}(t)]=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+k-1)}{k!}\pi^{(k)}(x)f^{(m-k)}(x)+L,$$

dove la L contiene linearmente le φ, φ',... $\varphi^{(m)}$ calcolate ai limiti dell'integrazione.

Questa importante relazione mostra come, mediante la trasformazione di EULER, una forma differenziale lineare a coefficienti razionali, applicata a $\varphi(t)$, si trasformi in una analoga forma differenziale lineare applicata alla trasformata $f(x)$ di $\varphi(t)$, e la trasformazione acquista un carattere particolarmente notevole quando si scelga la linea d'integrazione in modo che si annullino le parti ai limiti. Di codesta trasformazione sono state fatte importanti applicazioni [1], le quali sono in sostanza una generalizzazione di quella che ora esporremo e che limiteremo al caso della equazione ipergeometrica.

277. Per l'applicazione di quanto precede al caso speciale che abbiamo in vista, consideriamo la $\varphi(t)$ come soluzione dell'equazione

$$t(1-t)\varphi''(t)+(at+b)\varphi'(t)=0; \tag{6}$$

l'applicazione di E al primo membro di questa dà, per la (6), e supponendo la (l) scelta in modo che la parte ai limiti sia nulla:

$$x(1-x)f''(x)+[(a+2\sigma)x+b-\sigma]f'(x)-\sigma(\sigma+a+1)f(x)=0, \tag{7}$$

ed ora, ponendo

$$\sigma=-\alpha,\quad a=\alpha-\beta-1,\quad b=\gamma-\alpha, \tag{8}$$

questa ultima equazione, trasformata della (6) mediante E, si riduce senz'altro all'equazione ipergeometrica

$$x(1-x)y''-[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]y'-\alpha\beta=0. \tag{9}$$

La (6) si integra facilmente; essendo essa

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}=-\frac{b}{t}+\frac{a+b}{t-1}, \tag{6'}$$

ne viene

$$\varphi'(t)=ct^{-b}(t-1)^{a+b};$$

ma l'operazione $E(\varphi)$ equivale manifestamente ad

$$f(x)=-\frac{1}{\sigma}\int_{(l)}\varphi'(t)(t-x)^{\sigma}\,dt,$$

onde ponendo per a, b, σ i valori dati dalle (8), si ha che « l'equazione differenziale ipergeometrica è integrata dal- « l'espressione

$$y=c\int_{(l)}t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{\gamma-\beta-1}(t-x)^{-\alpha}dt, \tag{10}$$

« la linea l d'integrazione essendo convenientemente scelta ».

278. *a)* Si tratta ora di vedere in quale modo si possa realizzare una linea l avente la proprietà indicata: cioè, avendosi una espressione della forma

$$y=\int_{(l)}\psi(t)dt \tag{11}$$

con

$$\psi(t)=t^{\lambda}(t-1)^{\mu}(t-x)^{\sigma}, \tag{12}$$

in quale modo si debba condurre la l perchè le parti ai limiti siano nulle nelle successive integrazioni per parti. All'uopo, descriviamo una linea che partendo da un punto t_0 del piano t, diverso da 0, 1, x (ed x diverso da 0 ed 1) ritorni in t_0 [1] dopo di avere descritto un giro in senso positivo intorno a 0 mantenendosi vicinissima a 0; questa linea, o cappio, che sia indicata con l_0, non deve includere nè il punto 1 nè il punto x. Similmente, una linea l_1 parta da t_0 e vi ritorni dopo avere descritto un giro in senso po-

(1) Si possono citare, fra altre, quella di POCHHAMMER, *J. de Crelle*, T. CIV, di GOURSAT, *Acta Math.*, T. II e *Ann. de l'Éc. Norm.*, S. II, T. III, di PINCHERLE, *Mem. dell'Accademia di Bologna*, S. V, T. II; v. anche JORDAN, *Cours d'Analyse*, 1ère éd., T. III, p. 241 e SCHLESINGER, *Handbuch*, T. II, Abschnitt XII.

(1) Se della $\psi(t)$ si considera la Riemanniana (n.° 189) generalmente ad infiniti fogli, e le cui saldature fra i diversi fogli avvengono lungo tagli uscenti da $t=0$, 1, x, il punto t_0 al quale si ritorna dopo descritta le linee non sarà in generale, sulla Riemanniana, quello stesso da cui si è partiti, bensì il suo corrispondente su un altro foglio.

sitivo intorno al punto 1, mantenendosi vicina a questo punto: l_1 non includa nè 0 nè x; similmente, una terza linea l_x parta da t_0 e vi ritorni dopo un giro compiuto intorno ad x mantenendovisi vicina, pure in senso positivo: l_x non deve includere nè 0 nè 1, e non deve incrociare l_0 nè l_1; infine si percorra il cammino indicato da $l_0+l_x-l_0-l_x$ (¹). Indicando con Θ_k (cfr. n.° 180) l'operazione che esprime ciò che accade della funzione sotto il segno in (11) quando, dopo di essere partiti da t_0 *con una determinazione fissata* per $\psi(t)$ (²), si è descritto il cammino l_k ($k=0$, 1, x), si vede che è

$$\Theta_0\psi(t)=e^{2\pi i\lambda}\psi(t),\quad \Theta_1\psi(t)=e^{2\pi i\mu}\psi(t),\quad \Theta_x\psi(t)=e^{2\pi i\sigma}\psi(t),$$

ed analogamente per le derivate; onde

$$\Theta_x^{-1}\Theta_0^{-1}\Theta_x\Theta_0\psi^{(m)}(t)=\psi^{(m)}(t),\qquad (m=0,1,2,...).$$

Pertanto la linea

$$l=l_0+l_x-l_0-l_x$$

soddisfa alla condizione imposta. Analogamente vi soddisfa la linea

$$l'=l_1+l_x-l_1-l_x,$$

e perciò, prese in (10) prima la l, poi la l' come cammini di integrazione, si avranno effettivamente due integrali della equazione (9). Che codesti due integrali siano in generale (³) linearmente indipendenti, risulta dagli stessi sviluppi che seguono.

b) Poniamo

$$I_k=\int_{(l_k)}\psi(t)dt,\qquad (k=0,\ 1,\ x);$$

(¹) Sebbene si siano usati qui i segni + e —, pure, per il significato attuale, l'ordine non è indifferente in causa del mutamento dei valori della funzione: cosicchè alla espressione $l_0+l_x-l_0-l_x$ e simili non è lecito applicare la proprietà commutativa.

(²) In altri termini, il punto di partenza t_0 è preso su un foglio, determinato una volta per sempre, della Riemanniana.

(³) Come al § precedente, si fa astrazione dal caso che gli esponenti λ, μ, σ siano numeri interi.

ne viene, poichè dopo percorsa la l_0, la $\psi(t)$ rimane moltiplicata per $e^{2\pi i\lambda}$, ed analogamente per gli altri cappî:

$$\int_{(l)}\psi(t)dt=I_0+e^{2\pi i\lambda}I_x-e^{2\pi i(\lambda+\sigma)}I_0-e^{2\pi i\sigma}I_x,$$

ossia

$$(13)\qquad y=\int_{(l)}\psi(t)dt=(1-e^{2\pi i(\lambda+\sigma)})I_0+(e^{2\pi i\lambda}-e^{2\pi i\sigma})I_x$$

ed analogamente

$$(14)\qquad y_1=\int_{(l')}\psi(t)dt=(1-e^{2\pi i(\mu+\sigma)})I_1+(e^{2\pi i\mu}-e^{2\pi i\sigma})I_x.$$

Ponendo $l''=l_0+l_1-l_0-l_1$, anche l'integrale esteso ad l'' sarebbe una soluzione dell'equazione (9) e verrebbe dato da

$$(1-e^{2\pi i(\lambda+\mu)})I_0+(e^{2\pi i\lambda}-e^{2\pi i\mu})I_1;$$

esso sarebbe linearmente dipendente dai due precedentemente ottenuti.

279. Rimane da fare vedere come, dalle espressioni degli integrali della (9) in forma di integrali definiti, si possa ottenere il gruppo, di cui si è trattato al § precedente, dell'equazione stessa.

Perciò, si ha da riconoscere quale modificazione subiscano le (13) e (14) quando la variabile x, partendo da un va-

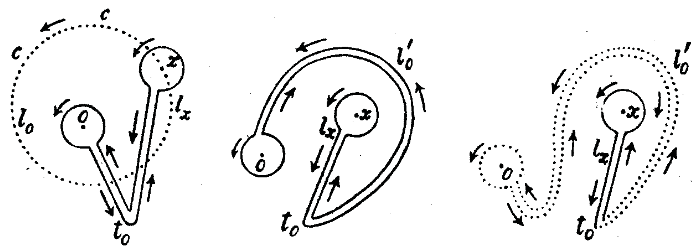


Fig. 28

lore $\bar{x}$, vi torni dopo descritto un contorno semplice chiuso c, e allo scopo basterà la conoscenza del cambiamento subito dalle I_0, I_1, I_x con cui sono costruite le (13) e (14). Finchè c

non racchiude nè il punto 0 nè il punto 1, questi integrali rimangono invariati; ma se c racchiude p. es. il punto 0, lasciando fuori il punto 1, si richiede qualche attenzione per vedere in quale modo i cappî vanno deformati, nel movimento della x, in guisa che rimangano valevoli le condizioni poste per essi al n.° 278, *a*). Ad evitare che, nel percorso che fa x lungo la linea c, il cappio l_x che accompagna il punto x attraversi il cappio l_0, si deformerà quest'ultimo in guisa che, quando x ha compiuto il giro c, esso sia diventato l_0': dal primo schema si viene cioè al secondo nella unita fig. 28. Ma, come mostra il terzo schema della figura stessa, la l_0' equivale ad $l_x + l_0 - l_x$; e con ciò

$$\Theta_0 I_0 = I_x + e^{2\pi i\sigma} I_0 - e^{2\pi i(\sigma+\lambda)} I_x = e^{2\pi i\sigma} I_0 + (1 - e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}) I_x .$$

Analogamente, per una curva semplice chiusa c' che racchiuda il punto 1 ed escluda il punto 0, sarà

$$\Theta_1 I_1 = e^{2\pi i\sigma} I_1 + (1 - e^{2\pi i(\sigma+\mu)}) I_x .$$

Infine, la modificazione subita da I_x per il giro c si avrà deformando la l_x in relazione col movimento di x ed in modo

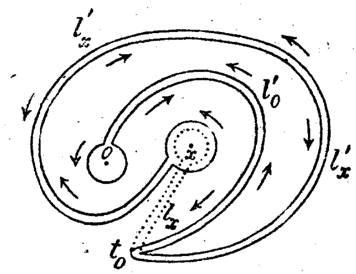


Fig. 29

analogo alla deformazione fatta da l_0 in l_0'; la l_x viene in l_x' come è indicato dalla fig. 29, e si ha

$$l_x' = l_0' + l_x - l_0',$$

e siccome $l_0' = l_x - l_0 - l_x$ (fig. 28, 3$^{\text{zo}}$ schema), così

$$l_x' = l_x + l_0 - l_x + l_x + l_x - l_0 - l_x ,$$

e quindi

$$\Theta_0 I_x = e^{2\pi i\sigma}(1 - e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}) I_0 + (1 + e^{2\pi i\lambda} - e^{4\pi i\sigma}) I_x ,$$

e similmente per $\Theta_1 I_x$.

Si hanno con ciò tutti gli elementi per dedurre, dalle (13) e (14), il risultato di $\Theta_0 y$ e di $\Theta_0 y_1$, di $\Theta_1 y$ e di $\Theta_1 y_1$, e quindi il gruppo dell'equazione differenziale.

280. *a*) Ai cappî l_k ora considerati se ne può aggiungere un altro l_∞, il quale partendo da t_0, consiste in una linea che, includendo i punti 0, 1 ed x, torna al punto di partenza. Siccome è manifesto che la l_∞, che s'intenderà percorsa nel senso delle rotazioni negative, equivale ad $l_x + l_1 + l_0$ percorsa positivamente, così, posto $I_\infty = \int_{(l_\infty)} \psi(t)\,dt$, si ha la relazione:

$$(15) \qquad I_x + e^{2\pi i\sigma} I_1 + e^{2\pi i(\sigma+\mu)} I_0 + e^{2\pi i(\sigma+\mu+\lambda)} I_\infty = 0.$$

b) Se i valori λ, μ, σ hanno la parte reale maggiore di -1, gl'integrali

$$\int_{t_0}^{k} \psi(t)\,dt, \qquad (k = 0,\ 1,\ x),$$

hanno significato; così pure ha significato $\int_{t_0}^{\infty} \psi(t)\,dt$ se è $\Re(\lambda+\mu+\sigma) < 1$. In questi casi, alle linee l_k si possono sostituire le congiungenti (eventualmente rettilinee) di t_0 con k ($k = 0$, 1, x, ∞) percorse due volte in senso contrario, e con ciò si vede senz'altro che è

$$I_0 = (1 - e^{2\pi i\lambda}) \int_{t_0}^{0} \psi(t)\,dt, \quad I_x = (1 - e^{2\pi i\sigma}) \int_{t_0}^{x} \psi(t)\,dt,$$

ed analogamente per $k = 1$, $k = \infty$. Queste espressioni si possono sostituire nelle (13), (14) e (15) e si prestano più agevolmente al calcolo effettivo.

§ III. Rapporto dei periodi. — Teorema di Picard.

281. *a*) Al caso considerato al n.° precedente, *b*), appartiene, in particolare, l'interessante esempio dato da

$$(16)\qquad y=\int_{(l)}\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$$

in cui I_0, I_1, I_x sono pertanto dati da

$$2\int_{t_0}^{k}\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}},\qquad (k=0,\ 1,\ x).$$

Nel caso presente, una linea chiusa semplice l che circondi i punti 0, x, escludendo 1, ed una linea chiusa semplice l' che circondi i punti 1, x, escludendo 0, soddisferanno alle condizioni del n.° 277, e quindi gl'integrali definiti

$$(17)\qquad 2\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}},\quad 2\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}},$$

cui si riducono immediatamente le integrazioni estese ad l ed l', saranno soluzioni — evidentemente indipendenti — dell'equazione differenziale lineare ipergeometrica (7) che nel caso presente, essendo

$$a=-1,\quad b=\frac{1}{2},\quad \sigma=-\frac{1}{2}$$

e quindi

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{1}{2},\quad \gamma=1$$

si riduce ad

$$(18)\qquad x(1-x)y''+(1-2x)y'-\frac{1}{4}y=0\ (^1).$$

---

(1) Questa equazione è stata considerata per primo da LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques*, T. I., p. 62 (Paris, 1825).

b) Qualora si procedesse ad integrare per serie questa equazione nell'intorno di $x=0$, nel modo indicato al n.° 270, si riconoscerebbe che il metodo non è direttamente applicabile, per il fatto che l'equazione determinante ha una radice doppia $\rho=0$ [1]. Il procedimento seguente varrà a condurre al risultato.

Si cerchino due integrali y_1, y_2, sotto la forma

$$(19)\qquad y_1=g(x),\quad y_2=h(x)\log x+k(x),$$

essendo $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ serie di potenze intere positive di x:

$$g(x)=\Sigma c_n x^n,\quad h(x)=\Sigma c_n' x^n,\quad k(x)=\Sigma c_n'' x^n.$$

La sostituzione in (18) e l'applicazione a $g(x)$ del metodo dei coefficienti indeterminati dà immediatamente, posto $c_0=1$,

$$c_n=\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots.(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots.2n}\right)^2,$$

onde y_1 è la serie ipergeometrica speciale

$$y_1=F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ x\right);$$

indi lo stesso metodo, applicato ad y_2 [2], dà

$$c_n'=c_n,\quad c_n''=(2n+2)c_{n+1}-(2n+1)c_n$$

onde, con calcolo facile:

$$y_2=F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ x\right)-F\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 2,\ x\right)\log x;$$

si è così determinato un sistema fondamentale dell'equazione (18) nell'intorno $|x|<1$ dell'origine; se ne conclude che l'integrale generale ha, per $x=0$, una singolarità logaritmica, e che per un giro positivo intorno ad $x=0$ il sistema y_1, y_2 subisce la sostituzione

$$\Theta_0 y_1=y_1,\quad \Theta_0 y_2=2\pi i y_1+y_2.$$

Analogo risultato si avrebbe per gl'integrali nell'intorno di $x=1$.

282. *a*) Gl'integrali (17), che indicheremo rispettivamente con 2ω, $2\omega'$, costituiscono dunque un sistema fondamentale

---

(1) V. nota a piè di pag. 344.

(2) Un'espressione $h(x)\log x+k(x)$, dove $h(x)$ e $k(x)$ sono serie di potenze, non può essere identicamente nulla in un intorno di $x=0$ se non lo sono $h(x)$ e $k(x)$: ciò risulta dal fatto che $-\frac{k(x)}{h(x)}$ non può dare, per $x=0$, singolarità logaritmica. Onde ad una simile espressione è applicabile il metodo dei coefficienti indeterminati.

di soluzioni dell'equazione (18): come tali, essi sono funzioni analitiche multiformi, regolari in tutto il piano-sfera, ad eccezione dei punti singolari isolati $x=0$, $x=1$, $x=\infty$ (punti critici a carattere logaritmico). Partendo da un punto regolare x_0 con un determinato valore di ω e di ω' (un determinato elemento relativo ad x_0), descrivendo una linea l qualsiasi e ritornando in x_0, vi si tornerà con valori (con elementi) diversi, combinazioni lineari dei valori (degli elementi) con cui si è partiti.

Il fatto di percorrere la linea chiusa l produce dunque sulla coppia ω, ω' una sostituzione lineare: all'insieme delle possibili linee chiuse corrisponde un sistema G di sostituzioni lineari, formanti manifestamente un gruppo. Il gruppo è generato dalle sostituzioni corrispondenti a due linee chiuse semplici percorse in senso positivo e circondanti l'una il punto $x=0$, l'altra il punto $x=1$. Mediante l'uso dei cappi indicato al n.° 279, ed applicato al nostro caso, si trovano le sostituzioni a determinante uguale ad 1:

$$\begin{cases} \Theta_0\omega = \omega \\ \Theta_0\omega' = -2\omega + \omega' \end{cases} \qquad \begin{cases} \Theta_1\omega = \omega + 2\omega' \\ \Theta_1\omega' = \omega', \end{cases}$$

il gruppo G è dunque contenuto nel gruppo modulare (n.° 219, *a*).

Ma gl'integrali (17) non sono altro che i **moduli di periodicità** (n.° 90) dell'integrale

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}, \tag{20}$$

integrale ellittico di prima specie relativo al polinomio di terzo grado in t, $R(t)=t(t-1)(t-x)$; 2ω e $2\omega'$ costituiscono dunque un sistema fondamentale di periodi della funzione ellittica ottenuta come inversa di (20) e sono espressi in funzione della radice x variabile di $R(t)$ [1]. Il rapporto $\omega:\omega'$ dei

[1] Trasformando l'integrale ellittico nella forma detta di LEGENDRE (v. *Calcolo*, n.° 402, *f*) il polinomio $R(t)$ si trasforma nella funzione di quarto grado $(1-t^2)(1-k^2t^2)$, dove k è il *modulo* delle funzioni ellittiche; i periodi, considerati come funzioni del modulo, soddisfano all'equazione differenziale (18) o equazione di LEGENDRE.

periodi è una funzione analitica $\tau(x)$ di x, regolare in tutto il piano, ad eccezione dei punti $x=0$, 1, ∞; essa è multiforme, ed i suoi valori in un dato punto x_0 sono dati, $\bar{\tau}(x_0)$ essendo uno qualsivoglia fra codesti valori, da

$$\tau(x_0) = \frac{a\bar{\tau}(x_0)+b}{c\bar{\tau}(x_0)+d}, \tag{21}$$

essendo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una sostituzione qualunque del gruppo G.

b) Nel campo T ottenuto dal piano-sfera della x escludendo i punti 0, 1 ed ∞ con intorni arbitrariamente piccoli, la $\tau(x)$ non può essere nè nulla, nè infinita, per la natura stessa dei periodi. D'altra parte, è noto (n.i 215, *g*) e 217) che per ogni x di T, $\tau(x)$ è essenzialmente complesso; la sua parte immaginaria, non potendo annullarsi, mantiene dunque segno costante. Supposto dunque positivo il coefficiente dell'immaginaria di $\tau(x)$ per un valore qualsiasi x di T, si conclude che esso si mantiene positivo per tutti i rami della funzione multiforme $\tau(x)$, in tutta l'area T di regolarità di codesta funzione.

c) Riassumendo, siamo giunti così ad ottenere una funzione analitica

$$\tau(x) = \xi(x) + i\eta(x)$$

della variabile x, regolare per ogni x diverso da 0, da 1 e da ∞, ad infiniti valori legati fra loro dalle (21) nelle quali a, b, c, d appartengono ad una classe di numeri interi con $ad-bc=1$, e in cui il coefficiente $\eta(x)$ dell'immaginario è sempre positivo.

La funzione inversa di $\tau(x)$, $x=\lambda(\tau)$, è una funzione analitica che si dimostra essere uniforme, regolare per tutto il semipiano $\eta>0$, non continuabile al disotto dell'asse reale, e che riprende lo stesso valore nei punti dedotti da un punto τ del semipiano $\tau>0$ mediante le trasformazioni del gruppo G; si ha cioè, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ essendo una qualunque sostituzione del detto gruppo:

$$\lambda(\tau) = \lambda\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) \text{ [1]}.$$

[1] V. BIANCHI, op. cit, Cap. XII, n.° 135 e Cap. XVI.

283. Facendo uso delle proprietà della funzione $\tau(x)$, il PICARD (1) ha scoperto un notevole teorema che va sotto al suo nome, il quale dimostra come « ogni funzione intera che « non assuma, per valori finiti di x, due dati valori, si riduce « necessariamente a costante ».

È noto che esistono funzioni intere che non assumono, per valori finiti della variabile, *un* dato valore; così e^x non assume il valore zero; $e^{\varphi(x)}+a$, dove $\varphi(x)$ è funzione intera, non assume il valore a per valori finiti di x. Il teorema di PICARD, mostra invece come non sia possibile che una funzione intera non costante possa non assumere *due* valori.

Sia dunque $f(x)$ una funzione intera che non assuma, per x finito, nè il valore a nè il valore b; la $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-a}{b-a}$ non assumerà allora nè il valore 0 nè il valore 1, e basterà dimostrare come una tale funzione $\varphi(x)$ si debba ridurre a costante. A tale scopo, si consideri la funzione $F(x)=\tau[\varphi(x)]$. Poichè la $\varphi(x)$ è regolare per ogni x finito, e la $\tau(z)$ lo è per ogni z finito diverso da 0 e da 1, mentre $\varphi(x)$ non è, per x finito, nè 0 nè 1, ne viene (n.° 32) che $F(x)$ è regolare per ogni x finito; essa è dunque (n.° 53) una funzione intera. Ma, posto $F(x)=\lambda(x)+i\mu(x)$, $\mu(x)$ è (n.° 282) sempre di un segno; sia $\mu(x)>0$. La funzione

$$\Phi(x)=e^{iF(x)}=e^{i\lambda(x)}e^{-\mu(x)}$$

che è pure una funzione intera, ha dunque il suo modulo non mai maggiore dell'unità: essa deve pertanto (n.° 51) ridursi a costante. Il teorema di PICARD è così dimostrato.

Il teorema di PICARD può anche enunciarsi (LANDAU): « ogni funzione intera non costante assume, per qualche valore finito di x, o il « valore zero o il valore 1 (2) ».

Il teorema di PICARD costituisce il primo anello di una catena di proposizioni che si riferiscono ad un ordine di idee molto interessante ma che dobbiamo limitarci ad indicare fugacemente (1).

Il PICARD stesso ha dimostrato (2) che « se $f(x)$ è funzione regolare « monodroma nell'intorno di $x=0$, eccettuato il punto $x=0$ medesimo, « e se $f(x)$ non assume nè il valore a, nè il valore b in questo intorno, « il punto $x=0$ è punto regolare o polo per la $f(x)$ », e che (3) « se $f(x)$ è « funzione intera, e l'equazione $f(x)=a$ e l'equazione $f(x)=b$ hanno « entrambe *un numero finito* di radici, $f(x)$ è razionale intera ».

A questo genere di considerazioni si riferisce un teorema di SCHOTTKY (4) che si può enunciare (in forma un po' diversa di quella data dall'Autore):

« Dato l'insieme delle serie di potenze $f(x)$ convergenti entro il « cerchio $|x|=r$ $(r\geq 1)$ che per $x=0$ assumono un medesimo valore a, « e che entro il cerchio $|x|\leq 1$ non assumono nè il valore 0 nè il va- « lore 1, esiste un numero Ω, dipendente solo da a e θ e tale che per « $|x|\leq\theta<1$ è $|f(x)|<\Omega$ ». Ma sovra tutte va segnalata l'anteriore importantissima proposizione scoperta dal LANDAU (5) e che l'A. stesso dice essergli sulle prime sembrata inverosimile: « Data una funzione intera (razionale o trascendente)

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots,$$

« con $a_1\neq 0$, esiste un numero positivo R, *dipendente solo da a_0 e da a_1*, « e tale che entro il cerchio $|x|<R$ la $f(x)$ prende almeno uno dei va- « lori 0 ed 1 ». Questo teorema è stato poi dall'Autore stesso generalizzato nei seguenti termini: « Dati a_0 ed a_1, $a_1\neq 0$, esiste un numero R dipen- « dente solo da a_0 e da a_1, tale che ogni serie di potenza $a_0+a_1x+\dots$ « che non ha per $|x|<R$, un punto singolare, assume per $|x|<R$ al- « meno in un punto, o il valore zero, o il valore 1 ».

---

(1) *Comptes Rendus*, T. 88, p. 1024 (1879); *Ann. de l'École Normale*, S. II, T. 9, 1880.

(2) Il teorema di PICARD è stato dimostrato da BOREL (*Comptes rendus*, T. 122, p. 1045, 1896) senza ricorrere alla funzione ellittico-modulare-inversa $\tau(x)$.

(1) Per cognizione dell'importante argomento, v. LANDAU, *Vierteljahrschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich*, Jahrgang 51, p. 252 e seg., 1906, e il Cap. VII dell'opera importante dello stesso A. « *Darstellung « und Begründung einiger neue Ergebnisse der Funktionentheorie* », Berlin, 1916.

(2) Mem. cit. negli *Ann. de l'École Normale* del 1880, p. 164.

(3) Ibid., p. 154 e seg.

(4) *Sitzungsberichte der k. Akad. der Wissenschaften*, Berlin, 1904 p. 1244.

(5) Ibid., 1904, p. 1118.

Capitolo Decimottavo

LE FUNZIONI EULERIANE

§ I. Funzione Euleriana di prima specie.

284. Dal n.° 255 sappiamo che un'espressione (funzione determinante) della forma

$$f(x)=\int_0^1 \psi(u)u^{x-1}du, \tag{1}$$

se è convergente per un valore $x=x_0$, lo è per ogni valore x tale che sia

$$\Re(x)>\Re(x_0), \tag{2}$$

e nel semipiano definito dalla (2), la (1) rappresenta un ramo monodromo di funzione analitica regolare, fissata, bene inteso, se $\psi(u)$ è a più valori, la determinazione di $\psi(u)$ nell'intervallo di integrazione.

Consideriamo ora il caso speciale in cui è

$$\psi(u)=(1-u)^{y-1};$$

fissata su $0\ldots 1$ la determinazione di $\psi(u)$ (1), l'espressione (1) dà la funzione di x ed y:

$$\mathrm{B}(x,\ y)=\int_0^1 (1-u)^{y-1}u^{x-1}du. \tag{3}$$

(1) Ad esempio, se y è reale, si può scegliere la determinazione reale e positiva di $(1-u)^{y-1}$.

Si dia ad y un valore la cui parte reale sia positiva: la (3) sarà allora convergente per ogni x la cui parte reale è positiva, e quindi considerata come funzione analitica di x, sarà monodroma regolare in tutto il semipiano $\mathfrak{R}(x) > 0$. Analogamente, fissato un tale valore per x, la (3) dà una funzione analitica di y, monodroma regolare nel semipiano $\mathfrak{R}(y) > 0$. Alla funzione definita dalla (3) si dà il nome di ***integrale Euleriano di prima specie***, o ***funzione Bèta*** [1].

285. Integrando per parti la (3) in cui si è cambiato x in $x+1$, e notando che la parte ai limiti si annulla per le ipotesi fatte, si ha:

$$\mathrm{B}(x+1,\ y) = \frac{x}{y}\int_0^1 (1-u)^y u^{x-1}\,du,$$

e da questa, dalla scomposizione del secondo membro in due termini:

$$\mathrm{B}(x,\ y) = \frac{x+y}{x}\,\mathrm{B}(x+1,\ y). \tag{4}$$

Qui, cambiando x in $x+1$, indi in $x+2,\ldots$ in $x+m-1$, quindi moltiplicando, viene:

$$\mathrm{B}(x,\ y) = \frac{(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+m-1)}{x(x+1)\ldots(x+m-1)}\,\mathrm{B}(x+m,\ y). \tag{5}$$

Tenendo fissa y, $\mathrm{B}(x+m,\ y)$ è analitica regolare in tutto il semipiano $\mathfrak{R}(x) > -m$; per la (5), lo stesso è della $\mathrm{B}(x,\ y)$, ad eccezione dei punti $x = 0,\ -1,\ -2,\ldots\ -(m-1)$, nei quali ammette poli di prim'ordine. Ma m è arbitrariamente grande; se ne conclude che per ogni y avente la parte reale positiva, la $\mathrm{B}(x,\ y)$ è, rispetto alla variabile x, una funzione meromorfa con poli di prim'ordine nei punti $x = -m$, $(m = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$.

---

[1] L'integrale (1) è stato studiato da EULER in vari lavori; vedi in particolare *Miscellanea Taurinentia*, T. 3 (1762-65) e *Nova Comm. Petropol.*, T. 16 (1771-72).

Analogamente, si ha per ogni intero positivo n:

$$\mathrm{B}(x,\ y) = \frac{(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n-1)}\,\mathrm{B}(x,\ y+n)$$

e quindi, combinando colla (5):

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+m+n-1)}{x(x+1)\ldots(x+m-1)y(y+1)\ldots(y+n-1)}\,\mathrm{B}(x+m,y+n), \tag{6}$$

e questa determina il carattere analitico di $\mathrm{B}(x,\ y)$: « La « funzione B, per ogni y diverso da 0 o da un intero nega- « tivo, è funzione meromorfa di x, con poli di prim'ordine « nei punti $x = -n$, $(n = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$ e per ogni x diverso da « zero o da un intero negativo, è funzione meromorfa di y coi « medesimi poli » [1].

È manifesto che la B è simmetrica in x ed y.

Dalla (5) risulta, facendo $x=1$, e notando che è $\mathrm{B}(1,\ y) = \frac{1}{y}$:

$$\mathrm{B}(m+1,\ y) = \frac{m!}{y(y+1)\ldots(y+m)}. \tag{7}$$

286. Si formi, in particolare, la $\mathrm{B}(x,\ 1-x)$; essa è data da

$$\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{-x}du.$$

Ora, ponendo

$$u = \frac{t}{1+t},$$

l'integrale precedente si muta in

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}dt}{1+t},$$

e questo si è calcolato al n.° 115 e trovato uguale a $\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}$. Onde la formula notevole

$$\mathrm{B}(x,\ 1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}. \tag{8}$$

---

[1] La proposizione precedente mette in evidenza il carattere analitico, rispetto agli esponenti, di quelle espressioni che nel Calcolo sono detti integrali di differenziali binomi.

§. II. La funzione Gamma dall'equazione alle differenze.

287. È noto che, data una funzione $\varphi(x)$ della variabile x, si indica con $\Delta\varphi$ e si chiama differenza finita prima della funzione, la $\varphi(x+1)-\varphi(x)$; da questa si deducono le differenze seconda, terza

$$\Delta^2\varphi = \Delta\Delta\varphi = \varphi(x+2) - 2\varphi(x+1) + \varphi(x),$$
$$\Delta^3\varphi = \Delta\Delta^2\varphi = \varphi(x+3) - 3\varphi(x+2) + 3\varphi(x+1) - \varphi(x)$$

e così via. È noto pure che, posto $\theta\varphi(x) = \varphi(x+1)$, onde $\theta^m\varphi(x) = \varphi(x+m)$, fra i simboli operatori Δ e θ passano le relazioni

$$(a) \qquad \Delta = \theta - 1, \quad \theta = \Delta + 1,$$

onde

$$(b) \qquad \Delta^n = (\theta-1)^n, \quad \theta^n = (\Delta+1)^n,$$

dove lo sviluppo, per n intero positivo, si può fare secondo la regola elementare del binomio.

Un'*equazione alle differenze* (*finite*) è una equazione funzionale data sotto forma di una relazione che lega una funzione alle proprie differenze finite successive; è d'ordine m se Δ^m è la differenza di più alto indice che vi figuri. Data una tale equazione

$$(c) \qquad F(\varphi(x), \Delta\varphi, \dots \Delta^m\varphi) = 0,$$

vi si può, mediante le (a) e (b), sostituire le Δ^h colle θ^h, ed avere quindi l'equazione alle differenze nella forma

$$(d) \qquad F_1(\varphi(x), \varphi(x+1), \dots \varphi(x+m)) = 0;$$

inversamente, dalla forma (d) si passa con altrettanta facilità alla forma (c). Simili equazioni, che generalmente determinano $\varphi(x+n)$ per ogni intero n in funzione di $\varphi(x), \varphi(x+1), \dots \varphi(x+m-1)$, si dicono anche *equazioni ricorrenti*. Esse sono *lineari* se della forma

$$a_0(x)\Delta^m\varphi + a_1(x)\Delta^{m-1}\varphi + \dots a_{m-1}(x)\Delta\varphi + a_m(x)\varphi = g(x),$$

trasformabile in

$$a_0(x)\varphi(x+m) + b_1(x)\varphi(x+m-1) + \dots + b_m(x)\varphi(x) = g(x);$$

sono lineari omogenee se $g(x)$ è identicamente zero.

Abbiamo avuto occasione di incontrare simili equazioni: citiamo in particolare la (7) del n.° 75 (equazione lineare a coefficienti costanti, cioè indipendenti da x [1]) che determina i coefficienti successivi dello sviluppo in serie di una funzione razionale, e la (11) del n.° 270, che dà i coefficienti dello sviluppo in serie dell'integrale dell'equazione ipergeometrica

---

[1] Al n.° 75, la variabile (o indice) è rappresentata con ν.

Ma tali equazioni non servono soltanto a determinare i successivi elementi $\varphi(x+n)(n=m, m+1, \dots)$ di una successione in funzione dei primi $\varphi(x), \varphi(x+1), \dots \varphi(x+m-1)$; esse possono dare una proprietà caratteristica — coll'aggiunta di qualche condizione accessoria — di certe funzioni o classi di funzioni analitiche, e a questo punto di vista possono servire alla scoperta di nuove trascendenti, al pari delle equazioni differenziali [1]. Nel presente § ci occuperemo appunto di una particolare trascendente, la cui importanza nell'analisi è quasi pari a quella dell'esponenziale, e di cui la più naturale definizione è data appunto da un'equazione lineare alle differenze, del prim'ordine.

288. Consideriamo dapprima l'equazione alle differenze

$$(1) \qquad (x+1)f(x+1) = f(x),$$

cui aggiungeremo l'ipotesi che $f(0)$ non sia nullo. Ne viene $f(-1)=0, f(-2)=0, \dots f(-n)=0$, per ogni n intero positivo. Del resto, la funzione $f(x)$ non è determinata, poichè, trovata una soluzione $f_1(x)$ della (1), sarà pure soluzione ogni prodotto $f_1(x)\pi(x)$, dove $\pi(x)$ è una funzione periodica di x col periodo 1. Cerchiamo dunque, della (1), una soluzione particolare.

Poichè la $f(x)$ si annulla nei punti $-1, -2, -3, \dots$, costruiamo una funzione intera avente quelle radici, al primo ordine, e quelle soltanto; il metodo di Weierstrass (Cap. IX, § II) ci darà, per una tale funzione (di genere 1), l'espressione

$$(2) \qquad f(x) = e^{g(x)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},$$

dove $g(x)$ è una funzione intera arbitraria.

Si ponga

$$f_m(x) = e^{g(x)} \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},$$

e verrà:

$$\frac{f_m(x+1)}{f_m(x)} = e^{g(x+1)-g(x)} \cdot e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}\right)} \frac{x+m+1}{x+1},$$

---

[1] Sull'importanza che presentano le equazioni lineari alle differenze nella formazione di speciali classi di trascendenti, v. le memorie di Hj. Mellin nei Tomi 8, 9, 15 e 25 degli *Acta Mathematica*, e l'opera monografica « *Theorie der linearen Differenzengleichungen* » di Guldberg e Wallenberg (Leipzig, 1911); v. anche il Cap. X dell'opera « *Le operazioni distributive*, ecc. », di Pincherle e Amaldi (Bologna, 1901).

da cui

$$\frac{(x+1)f_m(x+1)}{f_m(x)} = \left(1+\frac{x}{m+1}\right)e^{g(x+1)-g(x)-\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}\right)+\log(m+1)}.$$

Passando al limite per $m=\infty$, e ricordando (v. nota al n.° 129 e n.° 263, *a*) che è

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}-\log(m+1)\right)=C,$$

dove C è la nota costante di EULER-MASCHERONI, viene per la $f(x)$ la relazione

(3) $$\frac{(x+1)f(x+1)}{f(x)} = e^{g(x+1)-g(x)-C}.$$

Se ora determiniamo la funzione $g(x)$ in modo che sia

$$g(x+1)-g(x)=C,$$

onde $g(x)=Cx+C_1$, C_1 essendo una costante arbitraria, e se aggiungiamo la condizione che sia $f(0)=1$, onde $C_1=0$, si ottiene, come soluzione particolare di (1), la funzione intera

(4) $$F(x)=e^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$$ [1].

Ricordando ora che è

$$C=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)=0,57721\dots$$

il fattore generico sotto il segno Π nel secondo membro della (4) può scriversi

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}e^{x\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)},$$

[1] La funzione $F(x)$, che abbiamo già incontrata al n.° 263, è stata studiata da GAUSS (Werke, T. III, p. 123): egli la indicava con $\Pi(x)$. Il metodo qui usato per ottenerla è dovuto al WEIERSTRASS, (Werke, T. I, p. 161) e preludia in qualche modo al suo celebre teorema dato più sopra Cap. IX, § II. Egli studia propriamente la $F(x-1)$, che indicava con $Fc(x)$, a cui dava il nome di *fattoriale*: non differente essenzialmente dalla funzione *emiseno* del BETTI (*Opere*, T. I, p. 251).

e quindi

(5) $$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}.$$

289. Si rappresenta con $\Gamma(x)$ e si dà il nome di *funzione Gamma* [1] alla $1:F(x-1)$; la $\Gamma(x)$ soddisfa dunque all'equazione alle differenze

(6) $$f(x+1)=xf(x).$$

Poichè, per la (1) cui soddisfa $F(x)$, si ha $F(x-1)=xF(x)$, così ne risulta immediatamente l'espressione della funzione Γ in forme di prodotto infinito:

(7) $$\Gamma(x)=\frac{e^{-Cx}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}.$$

Dalla (5), si ha pure l'espressione

(8) $$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x+n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{x},$$

e quindi anche

(8') $$\Gamma(x)=\lim_{n=\infty}\frac{n!\,n^{x}}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

290. *a*) La $\Gamma(x)$ è una funzione meromorfa, come risulta dalla (7); i suoi poli, del prim'ordine, sono nei punti $0, -1, -2, -3, \dots$. La (8') mostra che è

(9) $$\Gamma(1)=1.$$

Dalla equazione alle differenze

(6) $$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

cui la nostra funzione soddisfa, risulta

(10) $$\Gamma(x+n)=x(x+1)\dots(x+n-1)\Gamma(x)$$

[1] La notazione $\Gamma(x)$ e la denominazione *funzione Gamma* risalgono a LEGENDRE (*Mémoires de l'Institut, classe des Sciences math. et phys.*, 1809).

per ogni n intero positivo, e facendo $x = 1$,

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{11}$$

La funzione Γ può dunque riguardarsi come la estrapolazione, a tutto il piano complesso, dell'elementare fattoriale.

b) Dalla (10) risulta

$$\frac{\Gamma(x+n)}{(n-1)!\,n^x} = \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)\Gamma(x)}{(n-1)!\,n^x}$$

e passando al limite per $n = \infty$ e tenendo conto dell'espressione (8') della $\Gamma(x)$, viene:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{\overline{n-1}!\,n^x} = 1. \tag{12}$$

È spesso utile di scrivere la (12) nella forma

$$\Gamma(x+n) = n^x(n-1)!\,\eta_n,$$

dove η_n tende ad 1 per $n \to \infty$.

La proprietà espressa dalla (12) vale, come ha dimostrato Weierstrass, a caratterizzare la funzione Γ fra gl'integrali dell'equazione alle differenze (6).

Infatti, essendo $f(x)$ un integrale particolare dell'equazione alle differenze (6), l'integrale generale sarà dato da $f(x)\pi(x)$, dove $\pi(x)$ è una qualunque funzione periodica di periodo 1. Poichè la funzione Gamma è integrale particolare, un altro integrale sarà dunque della forma $\Gamma(x)\pi(x)$. Se ora questo integrale, al pari di Γ, ha la proprietà espressa da (12), poichè è $\pi(x+n) = \pi(x)$, sarà

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(x+n)\pi(x)}{\overline{n-1}!\,n^x} = 1,$$

onde, per la (12), $\pi(x)$ deve ridursi identicamente all'unità.

c) Il residuo di $\Gamma(x)$ per il polo $x = -n$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ si ottiene facilmente come segue. Si ha nell'intorno di $x = -n$:

$$\Gamma(x) = \frac{a_n}{x+n} + P(x+n),$$

dove a_n è il residuo e P è serie di potenze di $x+n$, convergente per $|x+n| < 1$, ossia

$$(x+n)\Gamma(x) = a_n + (x+n)P(x+n),$$

e, tenendo conto della (10),

$$\frac{(x+n)\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} = a_n + (x+n)P(x+n).$$

Passando al limite per $x \to -n$, e notando che, dalla (8), è $\lim\limits_{x\to 0} x\Gamma(x) = 1$, onde $\lim\limits_{x\to -n} (x+n)\Gamma(x+n) = 1$, viene

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{13}$$

291. *a*) Dall'espressione (5) di $F(x)$ si ricava

$$F(x)F(-x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right),$$

onde, ricordando lo sviluppo di $\operatorname{sen}\pi x$ in prodotto infinito (n.° 150), viene

$$F(x)F(-x) = \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}, \tag{14}$$

onde

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}; \tag{15}$$

questa proprietà della funzione Gamma è stata detta ***relazione dei complementi.***

Si ricava da (15) che è $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, dove per la (8) il valore del radicale è manifestamente positivo; da questa e dalla (10) si ricava il valore di $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)$ per ogni intero n. In particolare $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

b) Si parta dall'identità

$$1 + x^1 + x^2 + \dots + x^{m-1} = \left(x - e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)\left(x - e^{\frac{4\pi i}{m}}\right)\dots\left(x - e^{\frac{2(m-1)\pi i}{m}}\right); \tag{16}$$

per $x=1$, il modulo di un fattore generico nel secondo membro è

$$\left|1-\cos\frac{2k\pi}{m}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{m}\right|=\sqrt{2\left(1-\frac{\cos 2k\pi}{m}\right)}=2\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{m},$$

onde, dalla (16),

$$m=2^{m-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{m}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{m}\ldots\mathrm{sen}\,\frac{(m-1)\pi}{m}. \tag{17}$$

Ma, dalla (15), è

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{m}=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)};$$

onde, per la (17):

$$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{m}}, \tag{18}$$

formula notevole dovuta ad EULER.

c) Una importante estensione di questa formula è stata data da GAUSS, nella forma

$$\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+m-1}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x), \tag{19}$$

che si riduce alla (18) per $x=1$.

La formula di GAUSS viene scritta spesso nella forma equivalente:

$$\Gamma(ma)=\frac{m^{ma-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right). \tag{19'}$$

La dimostrazione della (19) viene data più avanti (n.° 295, b).

292. Le formule trovate al n.° precedente permettono di ridurre ad un intervallo assai ristretto il campo dei valori reali della variabile x in cui è necessario di calcolare la funzione Gamma per poterne dedurre il valore per ogni x reale.

Anzitutto, calcolata la $\Gamma(x)$ per x compreso fra 0 ed 1, la (6) permette di ottenerne i valori per ogni $x>1$. Calcolata per valori (non interi) positivi di x, si deduce dalla (15) il valore di $\Gamma(x)$ per x negativo; di più, la medesima (15) permette di ottenerne il valore per x compreso fra 1 ed $\frac{1}{2}$, quando se ne conosca il valore per x compreso fra 0 ed $\frac{1}{2}$.

Ma quest'intervallo si può ridurre ancora; infatti, la formula di GAUSS nella forma (19) dà, per $n=2$:

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)=2^{1-x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(x); \tag{20}$$

dalla (15), si ha, cambiando x in $\frac{x+1}{2}$;

$$\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi x}{2}},$$

onde, dividendo membro a membro:

$$\Gamma(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}. \tag{21}$$

Mediante le formule precedenti, si può calcolare la $\Gamma(x)$ per ogni x reale, qualora sia nota nell'intervallo $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$. Infatti, se $\frac{x}{2}$ è compreso in quest'intervallo, vi è compreso pure $\frac{1-x}{2}$, e quindi x è compreso fra $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$: i valori della funzione in $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ si deducono dunque da quelli in $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$ e viceversa. Ma applicando la (20), se $\frac{x}{2}$ è in $\left(0,\frac{1}{6}\right)$, $\frac{1+x}{2}$ è in $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ e quindi riducibile ai valori nell'intervallo $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$ per quanto precede; in quanto ad x, esso è compreso fra 0 e $\frac{1}{3}$; se oltre-

passa $\frac{1}{6}$, si è raggiunto lo scopo di esprimere $\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$ mediante valori di Γ dell'intervallo $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$; se è ancora $x < \frac{1}{6}$, si applica di nuovo la (20) cambiando x in $2x$; se è $2x > \frac{1}{6}$, si è raggiunto lo scopo, se no, si applica ancora la (20) cambiando x in $4x$, e così via, finchè si giunga ad un m tale che sia $2^m x > 6$. Basta dunque che la $\Gamma(x)$ venga calcolata nel detto intervallo $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$, per dedurne il valore per ogni x reale.

Mediante convenienti combinazioni delle formule del n.° precedente, è possibile di ridurre anche maggiormente l'intervallo in cui è necessario il calcolo diretto della funzione Gamma ([1]); non ci è però noto che sia stato determinato un *intervallo minimo* cui si possano ridurre gli altri mediante le predette formule.

Dall'esame della variazione di $\Gamma(x)$ nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ od $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$, è possibile di rappresentare la grafica di questa funzione: essa dà una curva in cui l'ordinata è positiva per x positiva; decrescente da $x=0$ fino ad un minimo compreso fra 1 e 2 ([2]); ammette assintoti paralleli all'asse delle ordinate per $x=0, -1, -2, \ldots$ con massimi negativi fra $-2n$ e $-(2n+1)$ e minimi positivi fra $-(2n+1)$ e $-(2n+2)$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$; massimi e minimi che tendono a zero per $n \to \infty$.

293. Se nella (7) si pone $x = u + iv$, dove la parte reale u può, per la (6), limitarsi all'intervallo $(0, 1)$, il modulo del risultato sarà

$$|\Gamma(u+iv)| = \frac{e^{-Cu}}{\sqrt{u^2+v^2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{u}{n}}}{\left[\left(1+\frac{u}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}}};$$

questa, per applicazione della medesima (7) per $x = u$, si può

([1]) V. in proposito Hoppe, *Giornale di Crelle*, T. XL, 1850.
([2]) Precisamente, $x = 1,4616\ldots$ (Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, T. II, p. 435).

scrivere

$$|\Gamma(u+iv)| = \frac{u\Gamma(u)}{\sqrt{u^2+v^2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{v^2}{(u+n)^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ma il prodotto infinito che qui figura al secondo membro è compreso fra i valori che assume per $u=0$ ed $u=1$, cioè fra

$$\prod \frac{1}{\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{e} \quad \prod \frac{1}{\left(1+\frac{v^2}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

i quali sono rispettivamente, per la (11) del n.° 150:

$$\left(\frac{\pi|v|}{|\operatorname{sen} \pi iv|}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \sqrt{1+v^2}\left(\frac{\pi|v|}{|\operatorname{sen} \pi iv|}\right)^{\frac{1}{2}},$$

cioè anche $\sqrt{\frac{2\pi v}{e^{\pi v}-e^{-\pi v}}}$ e $\sqrt{1+v^2}\sqrt{\frac{2\pi v}{e^{\pi v}-e^{-\pi v}}}$. Pertanto si può scrivere, col Lerch,

$$(22) \qquad |\Gamma(u+iv)| = K\frac{u\Gamma(u)}{\sqrt{u^2+v^2}}\sqrt{\frac{2\pi v}{e^{\pi v}-e^{-\pi v}}}. \qquad (0 \leq u \leq 1)$$

K essendo un fattore positivo compreso fra 0 ed 1 e $|v| > 0$; per $u=0$ si ha poi, collo Stieltjes:

$$(23) \qquad |\Gamma(iv)| = \frac{1}{|v|}\sqrt{\frac{2\pi v}{e^{\pi v}-e^{-\pi v}}} \text{ ([1])}.$$

§ III. La derivata logaritmica.

294. *a*) Dalla (7) si deduce ([2]), prendendo i logaritmi, indi derivando:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x+2} + \ldots;$$

([1]) Cfr. Godefroy, *La fonction Gamma*, p. 15 (Paris, 1901).
([2]) La numerazione delle formule fa seguito a quella del § precedente.

questa funzione viene, da CAUCHY e GUDERMANN in poi, generalmente indicata con $\psi(x)$; si scriverà

$$\psi(x) = -C + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n}\right), \quad (C = 0{,}5772\ldots). \tag{24}$$

La $\psi(x)$ è una funzione meromorfa, coi poli di primo ordine nei punti $0, -1, -2, \ldots$ e coi residui uguali all'unità; la (24) ne dà l'espressione precisamente nella forma indicata dal teorema di MITTAG LEFFLER (n.° 152).

Dalla (6) si ricava

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}; \tag{25}$$

la $\psi(x)$ è dunque un integrale particolare dell'equazione alle differenze finite

$$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x}, \tag{6'}$$

il cui integrale generale sarà dunque dato da $\psi(x) + \pi(x)$, essendo $\pi(x)$ una funzione periodica arbitraria di periodo 1.

La (25) ci dà pertanto la $\psi(x)$ come *Somma*, nel senso del Calcolo delle differenze finite, della $\frac{1}{x}$; a un punto di vista puramente formale, si può dire che essa sostituisce la somma $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \ldots$, priva in sè di significato effettivo.

Dalla (25) segue, per ogni n intero:

$$\psi(x+n) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+n-1} + \psi(x), \tag{25'}$$

onde anche

$$\lim_{n=\infty}\left(\psi(x+n) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \ldots - \frac{1}{x+n-1}\right) = \psi(x). \tag{26}$$

b) Posto

$$\Gamma_n(x) = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)},$$

segue

$$\frac{\Gamma_n'(x)}{\Gamma_n(x)} = \log n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \ldots - \frac{1}{x+n},$$

onde, per la (8') e passando al limite per $n = \infty$ [1]:

$$\lim_{n=\infty}\left(\log n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \ldots - \frac{1}{x+n}\right) = \psi(x), \tag{27}$$

che generalizza l'osservazione del n.° 288 dalla quale è risultata l'esistenza della costante di EULER-MASCHERONI; questa si ottiene in particolare, cambiata di segno, per $x = 1$, onde

$$\psi(1) = -C. \tag{28}$$

c) Dalla (25') risulta

$$\psi(x+n) - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n} = \psi(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

onde, passando al limite per $n = \infty$ e tenuto conto della (24), viene

$$\lim_{n=\infty}\left(\psi(x+n) - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right) = -C. \tag{29}$$

Con ragionamento analogo a quello del n.° 290, *b*, si dimostra che la condizione (29) basta a determinare l'integrale della (6'): cioè un integrale della (6') soddisfacente alla (29) deve coincidere con $\psi(x)$.

295. *a*) Si consideri la somma parziale, nella sommatoria della (24), limitata all'indice q:

$$S_q(x) = \sum_{n=0}^{q-1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x+n}\right).$$

Se ne deduce, m essendo un intero positivo assegnato:

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S_q\left(x + \frac{k}{m}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{q-1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{mx+mn} - \frac{1}{mx+mn+1} - \ldots - \frac{1}{mx+mn+m-1}\right).$$

---

[1] L'invertibilità del passaggio al limite colla derivazione è legittima (n.° 61) per la convergenza uniforme delle (8) od (8') entro ogni area del piano x non contenente i punti $0, -1, -2, \ldots$

I denominatori lineari in x nel secondo membro vanno fino ad $mx+mq-1$; per ottenere, nel secondo membro, la $S_{mq}(mx)$, conviene aggiungere i termini

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q+2}+\ldots+\frac{1}{mq-1}, \tag{30}$$

e si ha così:

$$S_{mq}(mx)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}S_q\left(x+\frac{k}{m}\right)+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{q+2}+\ldots\frac{1}{mq-1}.$$

Qui si aggiunga $-C$ ai due membri e si passi al limite per $q=\infty$: occorre però anzitutto osservare [1] che il limite per $q=\infty$ della somma (30) coincide con quello di

$$\frac{1}{q}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{q}}+\frac{1}{1+\frac{2}{q}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{(m-1)q}{q}}\right)$$

limite che è, per definizione, l'integrale di $\frac{1}{x}$ fra 1 ed m cioè $\log m$. Pertanto, la relazione precedente dà, al limite per $q=\infty$:

$$\psi(mx)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\psi\left(x+\frac{k}{m}\right)+\log m, \tag{31}$$

che, cambiando x in $\frac{x}{m}$, si può anche scrivere:

$$\psi(x)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\psi\left(\frac{x+k}{m}\right)+\log m. \tag{31'}$$

b) Integrando, indi passando dai logaritmi ai numeri, viene, c essendo la costante d'integrazione:

$$\Gamma(x)=c\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(\frac{x+k}{m}\right)m^x:$$

[1] NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, pag. 7, (Leipzig, 1906).

per determinare la costante, si faccia $x=1$, e si ricordi la (18): viene

$$1=c\prod_{k=1}^{m}\Gamma\left(\frac{k}{m}\right)m=c\sqrt{m}\,(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Dividendo membro a membro, si ha

$$\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(\frac{x+k}{m}\right)=(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}m^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x), \tag{19}$$

che è la formula di GAUSS annunciata al n.° 291.

c) Dalla (15) si ha, prendendo i logaritmi e derivando, la formula notevole:

$$\psi(x)=\psi(1-x)-\pi\operatorname{cotg}\pi x.$$

296. *a*) Si usa di indicare con $\chi(x)$ la derivata di $\psi(x)$; si ha cioè

$$\chi(x)=\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}. \tag{32}$$

Essa è data da una serie assolutamente convergente in tutto il piano, ad eccezione dei punti $0,\ -1,\ -2,\ldots$, ed è uniformemente convergente in ogni area finita del piano stesso non contenente alcuno di quei punti. La $\chi(x)$ è una funzione meromorfa, con poli di second'ordine nei detti punti $0,\ -1,\ -2,\ldots$; essa è un'integrale dell'equazione alle differenze

$$f(x+1)-f(x)=\frac{1}{x^2},$$

cioè è *somma* della $\frac{1}{x^2}$ nel senso del Calcolo delle differenze finite.

b) Si formi

$$\chi(x)+\chi\left(x+\frac{1}{m}\right)+\ldots+\chi\left(x+\frac{m-1}{m}\right): \tag{33}$$

per essere

$$\chi\left(x+\frac{k}{m}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^2}{(mx+mn+k)^2},$$

si vede che la (33) contiene tutti i termini di $m^2\chi(mx)$, ognuno una sola volta. Si ha dunque

$$\sum_{k=0}^{m-1}\chi\left(x+\frac{k}{m}\right)=m^2\chi(mx),$$

onde, integrando,

$$\sum_{k=0}^{m-1}\psi\left(x+\frac{k}{m}\right)=m\psi(mx)+c.$$

Si ritrova così la relazione (31), salvo la determinazione della costante, che al n.° 295, *a*) si è trovata essere uguale ad $m\log m$.

§ IV. La funzione Gamma come integrale definito.

297. *a*) L'integrale definito

$$(1)\qquad I(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

è detto *integrale Euleriano di seconda specie*. Esso converge uniformemente in ogni area del piano x in cui sia $\mathfrak{R}(x)>\varepsilon>0$ (cfr. n.[i] 252-253), e rappresenta quindi, nel semipiano $\mathfrak{R}(x)>0$, un ramo monodromo di funzione analitica regolare. Cambiando t in $-\log u$, la $I(x)$ prende la forma

$$(2)\qquad I(x)=\int_0^1\left(\log\frac{1}{u}\right)^{x-1}du;$$

ponendo invece $t=e^{-u}$,

$$(3)\qquad I(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ux}e^{-e^{-u}}du.$$

Quest'ultima dà la funzione $I(x)$ come determinante di $e^{-e^{-u}}$.

L'integrazione per parti di (1) dà immediatamente

$$I(x+1)=xI(x);$$

la $I(x)$ è dunque un integrale dell'equazione alle differenze (6) del n.° 288; se ne deduce subito, per n intero positivo

$$(4)\qquad I(x+n)=x(x+1)\dots(x+n-1)I(x).$$

Si ha $I(1)=1$; ne viene $I(n+1)=n!$

b) La (4) permette di scrivere

$$I(x)=\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+n-1}dt,$$

e siccome l'integrale nel secondo membro rappresenta un ramo monodromo di funzione analitica, regolare per $\mathfrak{R}(x)>-n$, dove n è un intero positivo arbitrariamente grande, così si conclude che « $I(x)$ è funzione uniforme, meromorfa, coi « poli di prim'ordine nei punti $x=0,\ -1,\ -2,\dots$ ».

298. La formula (7) del n.° 285 dà

$$\int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{x-1}du=\mathrm{B}(n,x)=\frac{(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)};$$

vi supporremo x reale e maggiore dell'unità.

Ponendo $u^n=t$, viene

$$\frac{1}{n}\int_0^1\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)^{x-1}dt=\frac{\overline{n-1}\,!}{x(x+1)\dots(x+n-1)},$$

o anche

$$(5)\qquad \int_0^1\left[n\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{x-1}dt=\frac{\overline{n-1}\,!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

Decomponiamo ora, con Jordan [1]

$$\int_0^1\left[n\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)\right]^{x-1}dt \quad\text{in}\quad \int_0^{e^{-\sqrt{n}}}+\int_{e^{-\sqrt{n}}}^1;$$

---

[1] *Cours d'Analyse*, T. II, p. 174 (Paris, 1894).

il primo di questi integrali è

$$n^{x-1}\int_0^{e^{-\sqrt{n}}}\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)^{x-1}dt < n^{x-1}\int_0^{e^{-\sqrt{n}}}dt = n^{x-1}e^{-\sqrt{n}}$$

e tende quindi a zero per $n \to \infty$. Per trasformare il secondo, si ponga

$$1-t^{\frac{1}{n}}=q, \quad \text{onde} \quad n=\frac{\log t}{\log(1-q)};$$

viene

$$n\left(1-t^{\frac{1}{n}}\right)=-\frac{q}{\log(1-q)}\log t;$$

ora, notando che q è compreso fra $1-e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$ e 0 per t preso fra i limiti d'integrazione del secondo integrale e quindi che tende a zero per $n \to \infty$, e che per conseguenza

$$-\frac{q}{\log(1-q)}=\frac{1}{1+\frac{q}{2}+\frac{q^2}{3}+\dots}=\eta_n$$

tende all'unità, codesto secondo integrale può scriversi

$$\eta_n^{x-1}\int_{e^{-\sqrt{n}}}^{1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{x-1}dt.$$

Passando ora al limite per $n=\infty$, il primo integrale tende a zero, il secondo, per la (2), tende ad $I(x)$: ma il secondo membro della (5), per la (8') del n.° 289, ha per limite $\Gamma(x)$; dunque $I(x)$ e $\Gamma(x)$ coincidono per x reale e >1 e conseguentemente (n.° 56, c), appartenendo quel sistema di valori al campo di regolarità di entrambe, $I(x)$ e $\Gamma(x)$ coincidono in tutto il loro campo di validità. « L'integrale euleriano di seconda specie non differisce pertanto dalla funzione Gamma ».

299. L'integrale (1) si può spezzare in

$$\int_0^z e^{-t}t^{x-1}dt+\int_z^\infty e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Il primo di questi verrà indicato con $P_z(x)$, il secondo con $Q_z(x)$; si ha pertanto

$$\Gamma(x)=P_z(x)+Q_z(x). \tag{6}$$

Ora il primo, poichè e^{-t} si può sviluppare in serie ed è lecita l'integrazione termine a termine nell'intervallo $0 \dots z$, dà

$$P_z(x)=z^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!\,(x+n)}.$$

Per $z=1$, si ha una notevole funzione meromorfa, detta funzione di Prym, ma anteriormente incontrata dal De Gasparis: essa è data da

$$P(x)=\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{n!\,(x+n)},$$

è stata ripetutamente considerata [1], e dà un integrale dell'equazione alle differenze

$$P(x+1)-xP(x)=-e^{-1}.$$

Si può ottenere, per la $P(x)$, uno sviluppo assai notevole in serie di fattoriali (cfr. n.° 262), sia col metodo ivi indicato, sia anche direttamente come segue [2]. Partendo da

$$e^{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-t)^n}{n!}$$

si deduce

$$eP(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^n t^{x-1}dt;$$

---

[1] V. *Encyklopädie der Math. Wissensch.*, II, A. 3, p. 158.

[2] V. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, T. II, 1888, p. 225.

Ricordando ora la (7) del n.° 285, viene

$$eP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

In quanto alla $Q_2(x)$, secondo termine della scomposizione (6) della $\Gamma(x)$, l'integrale è analitico regolare per ogni x finito (n.° 251) e rappresenta quindi una funzione trascendente intera in x.

È stato dimostrato dall'HADAMARD (¹) che essa è di genere 1.

300. Si formi il prodotto

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \int_0^\infty e^{-u} u^{y-1} du.$$

Cambiando le variabili d'integrazione t, u rispettivamente in t^2, u^2, viene

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2x-1} dt \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2y-1} du$$

$$= 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t^2+u^2)} t^{2x-1} u^{2y-1} dt\, du.$$

Si faccia ora il cambiamento di variabili

$$t = \rho \cos\alpha, \quad u = \rho \operatorname{sen}\alpha;$$

il campo d'integrazione si ha variando ρ da 0 a ∞, α da 0 a $\frac{\pi}{2}$, e viene

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho^2} \rho^{2x+2y-1} \cos^{2x-1}\alpha \operatorname{sen}^{2y-1}\alpha\, d\rho\, d\alpha;$$

ma è

$$\Gamma(x+y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x+y-1} dt = 2\int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{2x+2y-1} d\rho$$

(¹) *Journal de Mathématiques*, S. 4, T. IX, p. 210, 1893.

col cambiamento di t in ρ^2; onde

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1}\alpha \operatorname{sen}^{2y-1}\alpha\, d\alpha.$$

Si ponga finalmente $\operatorname{sen}^2\alpha = t$, ed il secondo membro si riduce ad

$$\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1} dt = \mathrm{B}(x, y).$$

Onde la classica relazione fra gl'integrali euleriani di prima e di seconda specie:

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{7}$$

formula che determina completamente il carattere analitico della $\mathrm{B}(x, y)$ per tutto l'insieme dei valori delle due variabili complesse x ed y.

Si noti, in particolare, come conseguenze della (7):

a) per $y = 1 - x$;

$$\mathrm{B}(x, 1-x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x} dt = \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}.$$

b) per $x = y = \frac{1}{2}$, e ricordando (n.° 291, *a*) che è $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$:

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

301. La funzione Γ viene largamente usata nel Calcolo delle probabilità e nelle sue applicazioni, argomenti che non appartengono al quadro delle presenti lezioni: tuttavia non sarà forse inutile di dare brevemente un'idea del modo con cui la funzione euleriana si connette a quell'ordine di studî. Osserviamo perciò che se A e B sono due eventi contrarî, cioè tali che non verificandosi A, si verifichi necessariamente B e viceversa, e se p e q sono le probabilità rispettive, con $p + q = 1$, i singoli termini dello sviluppo di $(p+q)^m$ danno le probabilità rispettive delle combinazioni secondo cui si possono presentare gli eventi A e B in m prove successive, ed il termine generale del ricordato sviluppo è

$$\frac{m!}{n!(m-n)!}p^nq^{m-n}=\frac{\Gamma(m+1)p^nq^{m-n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+1)},$$

espressione formata colla funzione Gamma. Ora, in molte applicazioni è necessario di considerare il ripetersi di un grande numero di prove: da ciò l'interesse dello studio del comportamento di $\Gamma(x)$ per valori positivi di x assai grandi, o, come si suol dire, la ricerca di *espressioni assintotiche* per $\Gamma(x)$ quando x tende all'infinito positivo.

a) Per giungere ad un'espressione assintotica della funzione Gamma, di applicazione molto frequente, si parta da

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^x dt, \tag{8}$$

dove x è supposto essenzialmente reale e positivo, e si cerchi il massimo del prodotto $e^{-t}t^x$ per un dato x, osservando che esso è nullo per $t=0$ e $t=\infty$. La regola usuale dà l'estremante per $t=x$, ed il valore del massimo è dunque $e^{-x}x^x$. Poniamo ora, col GOURSAT [1]

$$t^x e^{-t}=x^x e^{-x}e^{-u^2}. \tag{9}$$

Quando t varia da 0 ad x, il primo membro cresce da 0 ad x^x, mentre decresce da x^x a 0 quando t varia da x a $+\infty$; ma lo stesso avviene, dalla (9), quando u cresce da $-\infty$ a 0, indi da 0 a $+\infty$. Si potrà dunque, nella (8), sostituire u a t come variabile d'integrazione, integrando da $-\infty$ a $+\infty$. La (9) dà

$$u^2=t-x-x\log\frac{t}{x},$$

onde, derivando,

$$dt=\frac{2t\,u\,du}{t-x}.$$

Facendo $t-x=z$,

$$u^2=z-x\log\left(1+\frac{z}{x}\right),\quad dt=2\left(1+\frac{x}{z}\right)u\,du.$$

---

[1] *Cours d'Analyse*, T. I, p. 327 (Paris, 1902).

Ora, lo sviluppo accorciato di MACLAURIN della u^2 in funzione di z, arrestato al terzo termine, dà, poichè è $(u^2)_0=0$ ed $(u^2)_0'=0$:

$$u^2=\frac{z^2x}{2(x+\theta z)^2},$$

essendo θ un numero (dipendente da z) compreso fra 0 ed 1. Da quest'ultima si ricava

$$2\frac{xu}{z}=\sqrt{2x}-2\theta u$$

onde

$$dt=2(1-\theta)u\,du+\sqrt{2x}\,du. \tag{9'}$$

Sostituendo nella (8), che per le (9) e (9') diviene

$$\Gamma(x+1)=e^{-x}x^x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}[2(1-\theta)u+\sqrt{2x}]\,du,$$

si ottiene, per essere $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$ [1],

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}\,e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}+2e^{-x}x^x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}(1-\theta)u\,du. \tag{10}$$

Ma l'ultimo integrale, in cui θ è funzione di u continua, positiva e minore d'uno, si scinde nell'integrale fra $-\infty$ e 0, ad elementi negativi, e quello fra 0 e $+\infty$, ad elementi positivi, mentre il valore assoluto di entrambi è inferiore ad $\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u^2}du^2=\frac{1}{2}$. Ne viene che l'ultimo termine della (10) si può scrivere $e^{-x}x^x\omega$, dove ω è minore d'uno in valore assoluto, e si ha così:

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{2\pi x}}\right). \tag{11}$$

---

[1] *Calcolo*, n.° 600.

b) **Ma si può precisare maggiormente, mediante le seguenti considerazioni** [1]. **Essendo n intero positivo, consideriamo l'espressione**

$$a_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}; \tag{12}$$

se ne ricava

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}};$$

ora, dal noto sviluppo [2]

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)$$

si deduce, facendo $x=\dfrac{1}{2n+1}$:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\ldots$$

e siccome i termini della serie del secondo membro sono non maggiori di $\dfrac{1}{3(2n+1)^{2n}}$, **si conclude, dalla somma della progressione geometrica, che è:**

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{12n(n+1)}+1$$

e infine, passando ai numeri:

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

I numeri positivi a_n vanno dunque decrescendo e tendono quindi ad un limite α; ma i numeri

$$b_n = a_n e^{-\frac{1}{12n}},$$

---

[1] CESÀRO, *Analisi algebrica*, p. 270.
[2] *Calcolo*, n.° 201.

che tendono al medesimo limite, vanno invece crescendo per essere

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}\,e^{-\frac{1}{12n(n+1)}} < 1:$$

perciò il limite α sarà compreso fra a_n e b_n, e quindi della forma

$$\alpha = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}},$$

essendo θ un numero compreso fra 0 ed 1. Pertanto, dalla (12):

$$\Gamma(n+1) = n! = \alpha e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{12n}}. \tag{13}$$

Poichè la funzione $\Gamma(x)$ è crescente almeno per $x>4$ [1], **così la (13) si può applicare ad ogni tale x, θ essendo dipendente da x ma compreso fra 0 ed 1; si ha dunque:**

$$\Gamma(x+1) = \alpha x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{\theta}{12x}};$$

ma dividendo per la (11) e passando al limite per $x=\infty$, si ottiene $\alpha=\sqrt{2\pi}$. Onde la celebre espressione assintotica, detta *formula di* STIRLING [2], **per la funzione Gamma:**

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{\theta}{12x}}. \tag{14}$$

Questa formula viene spesso usata nella forma

$$\log\Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{\theta}{12x}, \tag{15}$$

e quindi, per essere $\log\Gamma(x) = \log\Gamma(x+1) - \log x$:

$$\log\Gamma(x) = \frac{1}{2}\log\sqrt{2\pi} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{\theta}{12x}. \tag{15'}$$

302. Si consideri l'integrale

$$J(x) = \int_0^\infty \frac{t e^{-tx}\,dt}{1-e^{-t}}: \tag{16}$$

---

[1] **V. n.° 147, *b*), e la relativa avvertenza a piè di pag. 174; v. anche n.° 292.**
[2] ***Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, p. 135-139 (Londra, 1730).**

esso è la funzione determinante di $\frac{t}{1-e^{-t}}$ e come tale, è analitica regolare per $\mathcal{R}(x)>0$. Avendosi

$$\frac{1}{1-e^{-t}}=\sum_{n=0}^{m-1}e^{-nt}+\frac{e^{-mt}}{1-e^{-t}},$$

si consideri

$$J(x)=\sum_{n=0}^{m-1}\int_0^\infty te^{-(x+n)t}dt+\int_0^\infty\frac{te^{-(m+x)t}dt}{1-e^{-t}},$$

ed eseguendo l'integrazione per parti sui termini della sommatoria, notando che la parte ai limiti è nulla:

$$J(x)=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{(x+n)^2}+\int_0^\infty\frac{te^{-(m+x)t}dt}{1-e^{-t}}. \tag{17}$$

Preso un numero positivo ε arbitrariamente piccolo, si spezzi l'integrale al secondo membro della (17) in

$$\left\{\int_0^a+\int_a^\infty\right\}\frac{te^{-(m+x)t}dt}{1-e^{-t}}.$$

La funzione sotto il segno essendo limitata, indipendentemente da m, nell'intervallo $0\ldots a$, si può prendere a tale che il primo integrale sia inferiore ad $\frac{\varepsilon}{4}$; in quanto al secondo, esso è minore di

$$e^{-ma}\int_a^\infty\frac{te^{-xt}dt}{1-e^{-t}}, \tag{18}$$

dove l'integrale ha un valore finito; si può dunque, fissato a, prendere $\bar{m}$ abbastanza grande perchè l'espressione (18) sia, per $m>\bar{m}$, minore di $\frac{\varepsilon}{4}$. Ne viene

$$\left|J(x)-\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{(x+n)^2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altra parte, si riprenda la funzione $\chi(x)$ (n.° 296, a); per la convergenza uniforme della serie del secondo membro per $\mathcal{R}(x)\geqq q>0$, si può prendere $\bar{\bar{m}}$ abbastanza grande perchè, per $m>\bar{\bar{m}}$, sia

$$\left|\chi(x)-\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{(x+n)^2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Preso m maggiore del più grande fra $\bar{m}$ ed $\bar{\bar{m}}$, si ha dunque

$$|\chi(x)-J(x)|<\varepsilon,$$

il che porta all'identità fra $\chi(x)$ e $J(x)$. « La funzione $\chi(x)$, « ossia $\frac{d^2\log\Gamma(x)}{dx^2}$, è dunque rappresentata per $\mathcal{R}(x)>0$ da

$$\chi(x)=\int_0^\infty\frac{te^{-tx}dt}{1-e^{-t}}; \tag{19}$$

« essa viene ad essere la determinante di $\frac{t}{1-e^{-t}}$ ».

303. a) Ricordiamo ora (n.[i] 259-261) come, data la funzione determinante di una generatrice $\varphi(t)$ che ammetta uno sviluppo in serie di potenze $\sum\frac{a_nt^n}{n!}$ in un intorno di $t=0$, valga per la determinante *lo sviluppo assintotico* $\sum\frac{a_n}{x^{n+1}}$. Siccome la generatrice di $\chi(x)$ ammette lo sviluppo (formula (9) del n.° 123)

$$\frac{t}{1-e^{-t}}=1+\frac{t}{2}+B_2\frac{t^2}{2!}+B_4\frac{t^4}{4!}+\ldots,$$

dove i B_{2n} sono i numeri di Bernoulli, così si avrà per $\chi(x)$ lo sviluppo assintotico

$$\chi(x)\backsim\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{B_2}{x^3}+\frac{B_4}{x^5}+\ldots; \tag{20}$$

il che significa, secondo quanto si è visto ai citati n.[i] 260-261, che, detta $S_m(x)$ la somma parziale m^{esima} della serie del secondo membro, la differenza $\chi(x) - S_m(x)$ è infinitesima di ordine $m+1$ per $\Re(x) \to \infty$, sebbene la serie (20) sia divergente [1].

b) Per le serie assintotiche è lecita (n.° 261, *c*) l'integrazione termine a termine; pertanto si avrà, da (20):

$$\psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} \backsim c + \log x - \frac{1}{2x} - \frac{B_2}{2x^2} - \frac{B_4}{4x^4} - \dots$$

ed integrando nuovamente

$$\log \Gamma(x) \backsim c_1 + cx + x \log x - x - \frac{1}{2} \log x + \frac{B_2}{1 \cdot 2x} + \frac{B_4}{3 \cdot 4x^3} + \dots$$

Le costanti d'integrazione c_1, c si determinano dall'espressione assintotica (15') già trovata per $\Gamma(x)$, e si ha, dal confronto, $c_1 = \frac{1}{2} \log 2\pi$, $c = 0$, e quindi

$$(21) \quad \log \Gamma(x) \backsim \frac{1}{2} \log 2\pi + \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{B_2}{1 \cdot 2x} + \frac{B_4}{3 \cdot 4x^3} + \dots$$

Si è così ottenuta la classica serie di STIRLING, il primo esempio di sviluppo assintotico che si sia presentato nell'Analisi.

304. La funzione $\Gamma(x)$, di cui si sono date, nei n.i precedenti, le principali proprietà, occupa nella teoria delle funzioni un posto di importanza tale da avvicinarla quasi alla funzione esponenziale, con cui, o almeno con e^{-e^t}, è legata dalla relazione di funzione determinante a funzione generatrice [2]. Essa ha dato luogo ad innumerevoli lavori, alcuni di carattere riassuntivo [3]; ha trovato applicazione in varî rami di matematica

---

(1) La divergenza risulta immediatamente dall'essere $\lim \frac{B_n}{n!} = \frac{1}{4\pi^2}$, come si è visto al n.° 123.

(2) V. la formula (3) del n.° 297. Sulla specie di dualità che passa fra l'esponenziale, la Γ e le espressioni rispettivamente costruite con esse, v. le note « *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate* », Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1888, p. 694-700 e 792-799.

(3) Citiamo in particolare la monografia di M. GODEFROY, *La fonction Gamma* (Paris, 1901) e l'opera assai completa di N. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, dove si trova una estesa ed accurata bibliografia. V. anche l'articolo di G. BRUNEL, nell'*Encykl. der Math. Wissenschaften*, I. A. 3, p. 157-180.

applicata, specie in quelli connessi al Calcolo delle probabilità, come abbiamo accennato, ma si presenta anche spontanea in molteplici questioni di analisi pura, rappresentando essa la naturale estrapolazione del prodotto $n!$ Così, essa giova alla determinazione delle condizioni di convergenza di varî tipi di serie. Per darne un esempio, si consideri la serie ipergeometrica

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)\, 1, 2, 3, \dots n} x^n,$$

che, come sappiamo (n.° 270, *a*) converge per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$; si chiede di studiarne la convergenza per $|x| = 1$. A questo effetto, si osserva che il coefficiente del termine generale delle serie può scriversi

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\gamma+n+1)\Gamma(2+n)};$$

sostituendo alle Γ i valori assintotici dati dalla (14) del n.° 301, viene l'espressione assintoticamente equivalente

$$\frac{\Gamma(\gamma)(\alpha+n)^{\alpha+n+\frac{1}{2}}(\beta+n)^{\beta+n+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\gamma+n)^{\gamma+n+\frac{1}{2}}(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}$$

od anche

$$\frac{\Gamma(\gamma)\, n^{\alpha+\beta-\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

Ne risulta che per $\Re(\alpha+\beta-\gamma) < 1$ il termine generale tende a zero, e che la serie converge assolutamente per $\Re(\alpha+\beta-\gamma) < 0$.

305. La funzione euleriana serve anche all'integrazione analitica di numerosi tipi di equazioni lineari alle differenze finite, per le quali anzi può riguardarsi come elemento essenziale dell'integrazione [1]. Per indicare come ciò sia, almeno in un caso assai semplice, sia data l'equazione

$$(a) \qquad f(x+1) = \frac{P(x)}{Q(x)} f(x),$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomî razionali interi. Se è

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = c \frac{(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\dots(x-\alpha_m)^{r_m}}{(x-\beta_1)^{s_1}(x-\beta_2)^{s_2}\dots(x-\beta_n)^{s_n}},$$

un integrale della (*a*) sarà dato da

$$(b) \qquad \varphi(x) = c^x \frac{\Gamma^{r_1}(x-\alpha_1)\Gamma^{r_2}(x-\alpha_2)\dots\Gamma^{r_m}(x-\alpha_m)}{\Gamma^{s_1}(x-\beta_1)\Gamma^{s_2}(x-\beta_2)\dots\Gamma^{s_n}(x-\beta_n)},$$

---

(1) V. le memorie di HJ. MELLIN nei volumi dell'*Acta Math.*, specialmente dal T. VIII (1886) in avanti; v. anche la seconda parte dell'opera di G. WALLENBERG e A. GULDBERG, *Theorie der linearen Differenzengleich.* (Leipzig, 1911).

come segue subito dall'equazione alle differenze (6) del n.° 289 cui soddisfa la funzione Γ; l'integrale generale della (a) sarà poi dato da $\varphi(x)\varpi(x)$, essendo $\varpi(x)$ una funzione periodica arbitraria di periodo 1. Una condizione ai limiti analoga alla (12) del n.° 290 serve a caratterizzare la $\varphi(x)$ come integrale della (a), nello stesso modo che la citata condizione (12) caratterizza la $\Gamma(x)$ fra gl'integrali dell'equazione $f(x+1)=xf(x)$ [1].

306. Infine, è stata dimostrata da O. Hölder [2] una notevole proprietà, prevista dal Weierstrass, della funzione Gamma, e cioè che essa non soddisfa ad alcuna equazione algebrico-differenziale: ciò la distingue notevolmente dalle altre funzioni analitiche trascendenti che si sono per prime presentate nell'Analisi. L'Hölder dimostra dapprima come si giunga ad una contraddizione supponendo che la funzione $\psi(x)$, o in generale un integrale dell'equazione

$$f(x+1)-f(x)=\frac{1}{x}$$

possa verificare un'equazione della forma

$$G(x, f(x), f'(x), \dots f^{(m)})=0,$$

G essendo simbolo di funzione razionale ed m qualunque; indi ne deduce che la medesima proprietà non può verificarsi per la funzione Γ, di cui $\psi(x)$ è derivata logaritmica. E. H. Moore [3] ha chiamato *trascendentalmente trascendenti* le funzioni analitiche aventi la medesima proprietà negativa, di non verificare cioè alcuna equazione algebrico-differenziale, ed ha indicato numerose classi di tali funzioni, distinte dal soddisfare ad equazioni funzionali, di cui le equazioni alle differenze (6) del n.° 289, o (25) del n.° 294 rappresentano i tipi più semplici.

---

(1) V. Mellin, *Acta Math.*, T. VIII, p. 37 e seg.
(2) *Math. Annalen*, T. 28, p. 1-13 (1886).
(3) Ibid., T. 48, p. 49 (1896).

FINE DELLA PRIMA PARTE

INDICE ALFABETICO

(I numeri si riferiscono agli articoli)

R

S

T

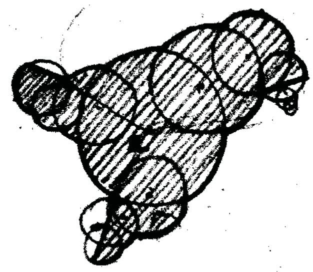
V

W

Z

Finito di stampare
il giorno 31 Agosto 1922
nella Cooperativa Tipografica Azzoguidi
in Bologna

Pincherle pag 198



Stella principale di
Mittag Leffler