R Conti
Pisa 22.1.45

FRANCESCO SEVERI

GEOMETRIA PROIETTIVA

SECONDA EDIZIONE

VALLECCHI EDITORE FIRENZE

Firenze, 1926 — Stab. Tip. A. Vallecchi, Via Ricasoli, 8.

PREFAZIONE ALLA 1ª EDIZIONE

In questo trattato pubblico, con qualche ampliamento, le lezioni di Geometria proiettiva, impartite in passato nell'Università di Padova e tuttora in quella di Ferrara, e che hanno già veduto la luce da vari anni sotto la veste litografica.

Ho preferito di trattare delle coniche a partire dalla generazione proiettiva di STEINER *(giovandomi, per semplicità e rapidità di trattazione, delle schiere rigate) e deducendone la definizione di* STAUDT *mediante le polarità piane, piuttosto che seguire la via inversa, costruttivamente più simmetrica ed armoniosa e teoricamente più semplice, ma della quale la precedente esperienza didattica m'avea mostrato le difficoltà pei principianti.*

Anticipando la teoria delle coniche, si forniscono presto nozioni sulle quali i giovani posson concretar meglio concetti che di regola appariscon loro troppo astratti; e alla polarità rispetto ad una conica si arriva coll'effettiva costruzione, pervenendo così, nel modo più spontaneo, alla definizione staudtiana, che, qualora invece sia posta a priori, rappresenta spesso, appunto a cagione della sua maggiore astrattezza, una difficoltà concettuale.

Colla generazione proiettiva, mediante forme di 1ª e di 2ª specie, vengono inoltre studiate le proprietà grafiche delle cubiche gobbe e delle superficie di 2° ordine; enti dei quali ho creduto di dover trattare per gli opportuni complementi agli studenti di matematica pura.

In un'Appendice, diretta in ispecial modo ai futuri

insegnanti, ho aggiunto la critica dei fondamenti della Geometria proiettiva e la subordinazione a questa delle metriche non euclidee, avendo per contro insistito, al principio del Corso, il meno possibile, sulle questioni inerenti ai postulati: il che ho sperimentato esser savia norma pedagogica.

L'esposizione ho curato che non fosse stringata e che frequenti fossero i richiami ai paragrafi e alle pagine precedenti. L'esposizione concisa è istruttiva pei giovani che sanno e vogliono pensare da sè; ma purtroppo la scarsa maturità di quelli che le infinite agevolazioni, funeste per la Scuola, avviano oggi agli studi superiori, richiede tutt'altro che la soverchia concisione.

È superfluo dichiari che mi son giovato dei trattati classici di Geometria proiettiva ed in ispecial modo di quelli di STAUDT, REYE, SANNIA, ENRIQUES, *all'ultimo dei quali mi son conservato più vicino nella trattazione dei principî.*

Arezzo, 4 settembre 1921.

FRANCESCO SEVERI.

Questa seconda edizione riproduce integralmente la prima, salvo qualche lieve ritocco.

Arezzo, 13 ottobre 1925.

F. SEVERI.

INTRODUZIONE

Avanti di cominciare lo studio della Geometria proiettiva, allo scopo di acquistare un' idea chiara dell'ufficio dei postulati nello svolgimento della nostra Scienza, esporremo alcune brevissime considerazioni generali sulla struttura logica delle Scienze deduttive.

A base di ogni Scienza deduttiva si pongono dei *concetti fondamentali* o *idee primitive*, i quali si ritengono acquisiti psicologicamente col mezzo dell'osservazione o dell'esperienza. Questi concetti si rappresentano mediante parole delle quali non si dà nessuna definizione (logica).

La impossibilità di definire logicamente tutte le parole che si usano in una Scienza, o, in altri termini, la necessità di supporre noto dal principio il significato di alcune parole, si rende manifesta, appena si ricorra a qualche esempio.

Così due uomini di paesi diversi, i quali non conoscano che la lingua nativa, non si potranno intendere, finchè, ponendo in relazione i loro sensi mediante gesti o con altri mezzi, non abbiano determinato le parole che nelle rispettive lingue rappresentano certe idee fondamentali. Un bambino comprende il significato di parole nuove, ogni qual volta queste si possano esprimere mediante altre, che destino in lui idee già formate col mezzo dei sensi; ecc. ecc.

Una volta scelti i *concetti fondamentali* di una Scienza deduttiva, si attribuiscono loro delle proprietà primitive

(*compatibili*), enunciate mediante proposizioni che si dicono *postulati*. E le sole proprietà, di cui si deve far uso nello svolgimento logico, son quelle enunciate esplicitamente dai postulati.

Poichè le idee primitive entrano nella trattazione soltanto pel tramite delle proprietà espresse dai postulati, questi costituiscono in ultima analisi una definizione di quelle idee.

Combinando fra di loro i postulati colle leggi formali della logica, si arriva a nuove proposizioni, che si dicono *teoremi*.

Una condizione di perfezione, ma non di rigore logico, è che i postulati sieno *indipendenti*, cioè che uno qualunque di essi non si possa dedurre come teorema una volta ammessi gli altri.

Abbiamo detto sopra che i postulati debbono esser però *compatibili*, cioè tali che da alcuni di essi non sia possibile dedurre la negazione di qualche altro.

Premesse queste poche nozioni, cominciamo il nostro studio, riservandoci di tornare alla fine (ved. l'APPENDICE) sulle questioni concernenti i fondamenti della Geometria proiettiva.

CAPITOLO PRIMO

Elementi improprii.
Prime proposizioni fondamentali.

§ 1.
Elementi improprii.

I concetti fondamentali dai quali muove la Geometria proiettiva, sono quelli di *punto*, *retta*, *piano*, intesi però in un senso più largo di quello che loro si dà in Geometria elementare.

A questi concetti fondamentali noi attribuiamo anzitutto le proprietà espresse dai seguenti postulati, che son del resto verificati dai concetti suddetti, anche intesi nel senso della Geometria elementare:

1° *Una retta è una classe di infiniti* (*) *punti.*

2° *Un piano è una classe d' infinite rette e* (*quindi*) *d' infiniti punti.*

3° *Esistono infiniti piani.*

Nella Geometria elementare si dice talora che due rette parallele hanno la stessa *direzione*: ebbene noi, invece di parlare di direzione comune, diremo anche che le due rette hanno comune un *punto improprio* o un *punto all' infinito* (**); cioè riguarderemo come sino-

(*) Si dice che ad una classe appartengono infiniti elementi, quando, fissato un numero intero qualsiasi, si può sempre trovare nella classe un numero di elementi eguale all' intero prefissato.

(**) Quest'ultima locuzione nasce dalla considerazione seguente: Se di due rette a, b, aventi un punto comune B, l'una b, ruota at-

nimi di direzione le locuzioni punto improprio e punto all' infinito. In opposizione ai punti improprii, diremo *proprii* i punti intesi nel senso della Geometria elementare.

La parola *punto*, senza nessun attributo, denoterà indifferentemente un punto proprio od improprio.

In modo perfettamente analogo si può introdurre la locuzione di *retta impropria* o *retta all' infinito* di un piano, quale sinonimo di *giacitura* del piano stesso; e dire che due piani paralleli, ossia di egual giacitura, hanno la stessa retta impropria.

In opposizione alle rette improprie, diremo *proprie* le rette quali si considerano nella Geometria elementare; e la parola *retta*, senza nessun attributo, denoterà una retta propria od impropria.

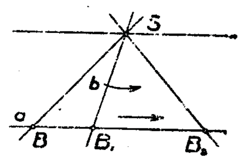
L'insieme di tutti i punti e di tutte le rette improprie, si dirà il *piano improprio* o *all' infinito*.

Allorquando parleremo di un piano, intenderemo indifferentemente un piano, considerato nel senso ordinario, cioè un *piano proprio*, od anche il piano all' infinito.

§ 2.
Notazioni e definizioni.

I punti (proprî od improprî) s' indicheranno colle lettere latine maiuscole A, B, C, ...; le rette (proprie

torno ad un suo punto S, in guisa che il punto B si muova in un determinato senso sulla a, l'angolo delle due rette decresce indefinitamente con l'allontanarsi indefinito di B; ossia la b tende a diventar parallela alla a.



Ma, se con ciò noi intendiamo di spiegare l'origine della locuzione di «punto all' infinito di una retta», introdotta da DESARGUES nel XVII° secolo, non intendiamo affatto di *provare* che un punto improprio possa considerarsi come un punto — nel senso ordinario della parola — *trasportato a distanza infinita*. Il concetto di punto trasportato a distanza infinita è in sè contradditorio! La locuzione di «punto all' infinito» non è pertanto felice, e noi non l'useremmo, se, per ragioni storiche, non fosse ormai di uso corrente.

od improprie) colle lettere latine minuscole $a, b, c, \ldots$; i piani (proprî od improprî) colle lettere greche minuscole $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Quando si avrà da designare in modo particolare un elemento improprio, si apporrà l' indice ∞ a piedi della lettera, che indica l'elemento stesso. Così A_∞ indicherà un punto improprio (che si darà mediante una retta avente la direzione A_∞); a_∞ designerà una retta impropria (che si darà mediante un piano avente la giacitura a_∞); α_∞ denoterà il piano improprio.

Diremo che due elementi fondamentali proprî di nome diverso (punto e retta, punto e piano, retta e piano) *si appartengono*, quando l'uno è *contenuto* (o *contiene*) l'altro; o, come anche diremo, quando l'uno *giace* sopra (o rispettivamente *passa* per) l'altro.

Riferendoci in particolar modo alle relazioni di appartenenza fra gli elementi proprî ed improprî, diremo analogamente che una retta e la sua direzione si appartengono, ossia che il punto improprio di una retta appartiene a questa; che un piano e la sua giacitura si appartengono; che una direzione ed una giacitura si appartengono, quando una retta appartenente alla direzione, è parallela ad un piano appartenente alla giacitura; che un punto improprio appartiene ad un piano proprio, quando appartiene alla giacitura di questo; infine che i punti e le rette improprie appartengono al piano improprio.

§ 3.

Prime proposizioni fondamentali.

L' introduzione degli elementi improprî si presta utilmente per ottenere una maggior concisione nel linguaggio, perchè consente di raggruppare in un unico enunciato, in cui non si distingue tra elementi proprî ed improprî, più proposizioni che appariscono invece dissimili col linguaggio della Geometria elementare.

Si considerino infatti le proposizioni seguenti, che si riferiscono ad elementi proprî:

a) Due punti individuano una retta, a cui essi appartengono (*).

b) Da un punto si può condurre una sola parallela ad una retta (Postulato delle parallele).

c) Tutti i piani paralleli a due rette, non parallele fra loro, risultano paralleli.

Esaminiamo la proposizione *b*). Poichè la retta passante pel punto dato A e parallela alla retta data r, passa pel punto improprio B di questa, la *b*) si può enunciare dicendo che: Due punti A, B, di cui l'uno sia proprio e l'altro improprio, individuano una retta propria, a cui essi appartengono.

Esaminiamo la proposizione *c*). Sieno A, B i punti improprî (distinti) delle due rette non parallele: allora ogni piano parallelo alle due rette, passa per A, B; e viceversa. Affermare che tutti i piani per A, B son paralleli, equivale ad affermare che hanno tutti la stessa retta impropria, alla quale appartengono A, B. Dunque la *c*) si può enunciare dicendo che: Due punti improprî A, B individuano una retta impropria, a cui essi appartengono.

Concludendo: se non si distingue tra elementi proprî ed improprî, le proposizioni *a*), *b*), *c*), si possono ritenere incluse nell'unica:

4° *Due punti* (**) *individuano una retta, a cui essi appartengono.*

Analogamente dalla proposizione:

5° *Due piani individuano una retta, a cui essi appartengono*, se si distingue tra elementi proprî ed improprî, si traggono le proposizioni seguenti:

a') Due piani proprî non paralleli s' intersecano secondo una retta propria.

(*) Si dice che un ente è *individuato*, quando è determinato in un modo unico.

(**) Si sottintende: *distinti*. L'analogo sottinteso vale in casi simili, nell'enunciato degli altri postulati.

b') Due piani proprî paralleli s' intersecano secondo una retta impropria.

c') Un piano proprio appartiene ad una sola retta impropria, ossia un piano proprio ed il piano improprio individuano una retta impropria, a cui essi appartengono.

Questa ultima proposizione equivale in sostanza all'altra che due piani paralleli ad un terzo son paralleli tra loro.

Il lettore potrà verificare per esercizio che anche le quattro proposizioni che passiamo ora ad enunciare, se si distinguono gli elementi proprî dagli improprî, esprimono fatti noti dalla Geometria elementare, enunciati nel nuovo linguaggio più comprensivo:

6° *Tre punti non appartenenti ad una medesima retta, individuano un piano, a cui appartengono.*

7° *Tre piani non appartenenti ad una medesima retta, individuano un punto, a cui appartengono.*

8° *Un piano ed una retta che non si appartengano, individuano un punto, a cui appartengono.*

9° *Un punto ed una retta che non si appartengano, individuano un piano, a cui appartengono.*

Le proposizioni 1°, . . . , 9° son quelle che assumiamo come POSTULATI FONDAMENTALI (DI APPARTENENZA) della Geometria proiettiva.

Si potrebbe osservare che i postulati introdotti non sono tra di loro indipendenti, ma su ciò per ora non insistiamo (Ved. l'APPENDICE).

La loro compatibilità segue *a priori* dal fatto ch'essi esprimono proprietà (intuitive) dello spazio fisico; e la realtà fisica non è contraddittoria.

Nel seguito un elemento fondamentale, che sia individuato mediante altri, si indicherà scrivendo successivamente le lettere che denotano gli elementi che lo individuano. Così AB rappresenterà la retta individuata dai punti A, B; $\alpha\,\beta$ la retta individuata dai piani α, β, ecc. Se la retta AB s' indica colla lettera a, scriveremo anche $a \equiv AB$, ecc.

Dai postulati finora introdotti si possono già dedurre molti teoremi di Geometria proiettiva; ma, con essi soltanto, tale Geometria non si costruisce tutta, giacchè, come vedremo, lo spazio, quale noi lo concepiamo, possiede altre proprietà, che non sono contenute nelle proposizioni 1°, ... , 9°.

Tuttavia sarà utile che ci fermiamo un momento a dedurre alcuni teoremi semplicissimi, che in seguito ci occorreranno spesso. Le dimostrazioni dei primi due di questi teoremi, saranno fatte richiamando volta per volta i postulati sopra cui poggia ogni deduzione. Sarà opportuno che lo studioso si eserciti a fare un'analisi analoga per altri teoremi.

TEOREMA. *Due rette distinte appartenenti ad un piano, si tagliano in un sol punto.*

Sieno a, b le due rette appartenenti al piano π. Conducasi per a un piano α diverso da π (ciò è sempre possibile pel Post. 3°) e per b un piano β pure diverso da π. Poichè a è la sola retta comune ai piani distinti π, α (Post. 5°), se α, β, π passassero per una retta, β passerebbe per a e quindi i due piani distinti π, β avrebbero due rette a comune, cioè le a, b, il che è assurdo (Post. 5°).

Dunque α, β, π si tagliano in un punto P (Post. 7°).

Se ora si tien conto che le coppie di piani distinti α, π e β, π, non hanno

TEOREMA. *Due rette distinte appartenenti ad un punto, giacciono in un sol piano.*

Sieno a, b le due rette appartenenti al punto P. Si prenda su a un punto A diverso da P (ciò è sempre possibile pel Post. 1°) e su b un punto B pure diverso da P. Poichè P,A appartengono soltanto alla retta a (Post. 4°), se A, B, P fossero allineati, B giacerebbe su a, e quindi i due punti distinti P, B apparterrebbero a due rette diverse a, b, il che è assurdo (Post. 4°).

Dunque A,B,P individuano un piano π (Post. 6°).

Se ora si tien conto che per le coppie di punti distinti A,P e B,P, non punti comuni rispettivamente fuori di a,b (Post. 9°), si conclude che P giace sulle rette a,b.

Le due rette non avranno altri punti comuni pel Post. 4°.

passano altri piani all' infuori di quelli passanti rispettivamente per le rette a,b (Post. 8°), si conclude che π passa per le a,b.

Le due rette non apparterranno ad altri piani pel Post. 5°.

Due rette che giacciano in un piano, e quindi abbiano comune un punto o viceversa, si diranno *incidenti*.

Due rette che non siano incidenti, si diranno *sghembe* (*).

Teorema. *Date due rette sghembe a,b ed un punto P non appartenente a nessuna di esse, esiste una sola retta passante per P ed incidente ad a,b.*

È quella comune al piano Pa, individuato dal punto P e dalla retta a, e al piano Pb, individuato dal punto P e dalla retta b.

Non vi sono altre rette soddisfacenti al teorema, perchè ogni retta passante per P e incidente ad a o b, giace sul piano Pa o rispettivamente Pb.

Teorema. *Date due rette sghembe a,b ed un piano π non appartenente a nessuna di esse, esiste una sola retta giacente su π ed incidente ad a,b.*

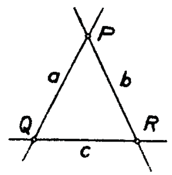
È quella che congiunge il punto πa d' intersezione di a con π, col punto πb d' intersezione di b con π.

Non vi sono altre rette soddisfacenti al teorema, perchè ogni retta giacente in π e incidente ad a o b, passa pel punto πa o rispettivamente πb.

Teorema. *Se più rette sono a due a due incidenti, o passano tutte per un punto o giacciono tutte in un piano (le due alternative potendosi verificare simultaneamente).*

Sieno $a, b, c, d, \ldots$ le rette date e supponiamo che non passino tutte per un punto: dimostreremo allora che giacciono tutte in un piano.

Infatti, se le rette date non passano tutte per un punto, esisterà certo una retta c del sistema, non passante pel punto $P \equiv a\,b$. Questa retta, essendo incidente ad a, b, rispettivamente nei punti Q, R, avrà comune col piano $\pi \equiv a\,b$ due punti distinti Q, R e quindi apparterrà a π.



Ora un'altra retta qualunque del sistema, o incontrerà le a, b, c in tre punti diversi, e quindi apparterrà a π, o passerà per uno dei tre vertici del triangolo $P\,Q\,R$ e incontrerà in un altro punto il lato (indefinito) opposto a quel vertice; ed anche in questo caso apparterrà a π.

Teorema. *Se più rette sono a due a due incidenti, o giacciono tutte in un piano o passano tutte per un punto (le due alternative potendosi verificare simultaneamente).*

Sieno $a, b, c, d, \ldots$ le rette date e supponiamo che non giacciano tutte in un piano: dimostreremo allora che passano tutte per un punto.

Infatti, se le rette date non giacciono tutte in un piano, esisterà una retta c del sistema, non appartenente al piano $\pi \equiv a\,b$. Questa retta, essendo incidente ad a, b, giacerà in un piano $\varkappa$ con a, ed in un piano ρ con b; ossia sarà la intersezione dei piani $\varkappa$, ρ. Ma questa intersezione passa pel punto $P \equiv a\,b$; dunque c passerà per P.

Un'altra retta qualunque del sistema, o starà in tre piani diversi con le a, b, c e quindi passerà per P, o giacerà in una delle tre facce del triedro $\pi\varkappa\rho$ e sarà congiunta mediante un altro piano allo spigolo opposto (indefinito); ed anche in questo caso passerà per P.

(*) Per l'esistenza effettiva di coppie di rette sghembe, come conseguenza logica dei soli postulati, veggasi la nota a piè della pag. 17.

Dunque tutte le rette del sistema appartengono a π.	Dunque tutte le rette del sistema passano per P.

§ 4.

Forme fondamentali.

Dicesi *figura* o *forma geometrica* un sistema qualunque di punti, rette, piani. Tra le figure hanno per noi capitale importanza e vengono prime in ordine di semplicità, le *forme geometriche fondamentali*, che passiamo a definire.

Una retta può concepirsi come insieme de' suoi infiniti punti (Post. 1°), o come insieme degli infiniti piani che passano per essa (*). Nascono allora le due forme fondamentali :

1° *Retta punteggiata*, che è l'insieme degli infiniti punti di una retta (*sostegno* della punteggiata).

2° *Fascio di piani*, che è l' insieme degli infiniti piani per una retta (*sostegno* od *asse* del fascio).

Sopra un piano si trovano infiniti punti ed infinite rette (Post. 1° e 2°). Secondochè un piano si considera come insieme di punti o di rette, si ha una delle due forme fondamentali :

3° *Piano punteggiato*, che è l' insieme degli infiniti punti di un piano (*sostegno*).

4° *Piano rigato*, che è l' insieme delle infinite rette d'un piano (*sostegno*).

Un punto (dello spazio) può considerarsi come appartenente ad infinite rette, o ad infiniti piani (lasciamo

(*) Per una retta passano effettivamente infiniti piani. Sia infatti a la retta data. Pel Post. 3°, combinato coi Post. 1° e 2°, fuori di a si può trovare un punto P ; e, sempre pei medesimi postulati, fuori del piano Pa (Post. 8°), può ancora trovarsi un punto Q. La retta $b \equiv PQ$ (Post. 4°), è sghemba colla a, perchè altrimenti a, P, Q sarebbero in uno stesso piano. Congiungendo a cogli infiniti punti di b, si ottengono infiniti piani *distinti* passanti per a.

a lettore di dimostrare per esercizio, sulla base dei postulati, questa e l'altra proposizione elementare congenere, che implicitamente si ammette nella successiva definizione del fascio di raggi). Nascono in conseguenza le due forme fondamentali :

5° *Stella di raggi*, che è l' insieme di tutte le rette per un punto (*centro* della stella).

6° *Stella di piani*, che è l' insieme di tutti i piani per un punto (*centro* della stella).

Un punto, in un piano, può concepirsi come appartenente alle infinite rette che passano per esso e giacciono sul piano,. e dà luogo alla forma fondamentale :

7° *Fascio di raggi*, che è l' insieme delle rette giacenti in un piano (*sostegno* del fascio) e passanti per un punto (*centro* del fascio).

Infine considereremo :

8° L' insieme di tutti i punti (dello spazio) e lo diremo *spazio punteggiato*.

9° L' insieme di tutti i piani (dello spazio) e lo diremo *spazio di piani*.

Le forme *retta punteggiata*, *fascio di piani*, *fascio di raggi* diconsi di 1ª *specie* o *ad una dimensione* o *ad una coordinata*, perchè intuitivamente si possono concepire come descritte dal movimento semplice dell'elemento generatore (rispettivamente punto, piano, retta), e perchè analiticamente occorre *una sola coordinata* per individuare un elemento in ciascuna di quelle forme.

Le forme *piano punteggiato*, *piano rigato*, *stella di raggi*, *stella di piani*, diconsi di 2ª *specie* o *a due dimensioni* o *a due coordinate*, perchè intuitivamente si possono concepire come generate dal movimento semplice di una forma di 1ª specie. Così, il piano punteggiato, mediante la rotazione attorno ad un punto di una punteggiata, che si conservi giacente in un piano ; il piano rigato, col movimento di un fascio di raggi che si mantenga sempre in un piano, e che abbia il centro scorrente lungo una retta ; ecc. ecc. Inoltre per individuare analiticamente un elemento entro una forma di 2ª specie, ci vogliono *due coordinate.*

Le forme *spazio di punti, spazio di piani,* diconsi di 3ª *specie* o *a tre coordinate* o *a tre dimensioni,* perchè intuitivamente si posson concepire come generate dal movimento semplice di una forma di 2ª specie. Così, lo spazio di punti mediante la rotazione attorno ad una retta di un piano punteggiato; lo spazio di piani, facendo scorrere lungo una retta il centro di una stella di piani. Per individuare analiticamente un elemento entro una forma di 3ª specie, ci vogliono *tre coordinate.*

Nelle definizioni precedenti gli elementi fondamentali si supponevano proprî o improprî. In particolare, supponendo improprî gli elementi generatori, o gli elementi sostegno, si hanno *forme fondamentali improprie,* come la *retta punteggiata impropria,* insieme di tutte le direzioni di una giacitura; il *fascio improprio di piani,* insieme di tutti i piani aventi una data giacitura; il *piano improprio punteggiato,* insieme di tutte le direzioni; il *piano improprio rigato,* insieme di tutte le giaciture; la *stella impropria di raggi,* insieme di tutte le rette aventi una data direzione; la *stella impropria di piani,* insieme di tutti i piani paralleli ad una retta fissa; il *fascio improprio di raggi proprî,* insieme delle infinite rette giacenti in un piano proprio e parallele fra loro; il *fascio improprio di raggi improprî,* insieme delle infinite giaciture appartenenti ad una direzione.

§ 5.

Poligoni e poliedri.

Altre figure, che fin da ora conviene definire, sono le seguenti:

n-gono piano completo, cioè il sistema di n punti di un piano (*vertici* dell'n-gono), tre qualunque dei quali non

angolo n-edro completo, cioè il sistema di n piani per un punto (*facce*), tre qualunque dei quali non pas-

allineati, e delle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette (*lati*) che li congiungono a due a due.

Si dicono *punti diagonali* dello n-gono le intersezioni delle coppie di lati che non hanno vertici comuni.

Quanti sono i punti diagonali? Un lato contiene tanti punti diagonali quanti sono i lati che congiungono a due a due gli $n-2$ vertici non appartenenti a quel lato, cioè $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Sicchè il numero

$$\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

eguaglierà il numero dei punti diagonali, moltiplicato pel numero dei lati che passano per ciascun punto diagonale, cioè per 2. Dunque il numero dei punti diagonali è eguale a $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ (*).

Per $n = 3$ si ha il *triangolo,* che è il sistema

santi per una retta, e delle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette (*spigoli*) secondo cui s' intersecano a due a due.

Si dicono *piani diagonali* dell'angolo n-edro i piani che congiungono le coppie di lati non appartenenti ad una faccia.

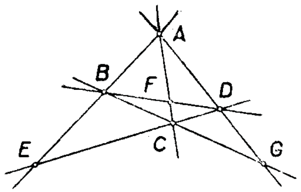
Si prova con un ragionamento analogo a quello di sinistra, che i piani diagonali sono in numero di $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Per $n = 3$ si ha l'*angolo triedro,* che è il sistema

(*) S' intende che in questo numero ogni punto diagonale in cui eventualmente concorrano s lati, conta $\frac{s(s-1)}{2}$ volte. Analoga osservazione deve farsi in relazione ai piani diagonali di un angolo n-edro, come alle rette diagonali di un n-latero o di un n-spigolo.

di 3 punti non allineati e delle 3 rette che li congiungono a due a due. In un triangolo non vi sono punti diagonali, perchè due lati si tagliano sempre in un vertice.

Per $n = 4$ si ha il *quadrangolo piano completo*, che è il sistema di 4 punti A, B, C, D di un piano, a tre a tre non allineati, e delle 6 rette che li congiungono a due a due.



I punti diagonali costituiscono un triangolo EFG, detto il *triangolo diagonale* (*).

Si dicono *opposti* due lati del quadrangolo, quando non hanno vertici comuni. Ad AB è opposto DC, ad AB, CD, ad AD, BC.

Dicesi *n-latero piano completo* la figura costituita da n rette di un piano

di 3 piani non passanti per una retta e delle 3 rette secondo cui s' intersecano a due a due. In un angolo triedro non vi sono piani diagonali, perchè due spigoli qualunque appartengono sempre ad una faccia.

Per $n = 4$ si ha l'*angolo tetraedro completo*, che è il sistema di 4 piani α, β, γ, δ per un punto, a tre a tre non passanti per una retta, e delle 6 rette secondo cui essi s' intersecano a due a due.

I piani diagonali costituiscono un triedro, detto il *triedro diagonale*.

Si dicono *opposti* due spigoli che non appartengono alla stessa faccia. Ad $\alpha\beta$ è opposto $\delta\gamma$, ad $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, ad $\alpha\delta$, $\beta\gamma$.

Dicesi *angolo n-spigolo completo* la figura costituita da n rette per un punto

(*) Che effettivamente i tre punti diagonali formino sempre un triangolo, cioè non sieno allineati, sarà provato a pag. 50.

(*lati* dell' n-latero), tre qualunque delle quali non concorrono in un punto, e degli $\frac{n(n-1)}{2}$ punti (*vertici*) che esse hanno in comune a due a due.

Rette diagonali sono le congiungenti le coppie di vertici che non stanno sopra un medesimo lato. Come prima, si vede che le rette diagonali sono in numero di $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Per $n = 3$ si ha il *trilatero* e per $n = 4$ il *quadrilatero piano completo*, che è costituito da 4 rette a, b, c, d di un piano, tre qualunque delle quali non per un punto, e dai 6 punti comuni ad esse a due a due.

Le rette diagonali costituiscono un trilatero efg, detto il *trilatero diagonale*.

Si dicono *opposti* due vertici del quadrilatero, quando non appartengono ad uno stesso lato. Ad ab è opposto cd, ad ac, bd, ad ad, bc.

Dicesi *n-gono gobbo completo* il sistema di n punti (*vertici*), quattro qualunque dei quali non ap-

(*spigoli*), tre qualunque delle quali non in un piano, e dagli $\frac{n(n-1)}{2}$ piani (*facce*) che le congiungono a due a due.

Rette diagonali sono le intersezioni delle coppie di facce che non passano per un medesimo spigolo. Esse rette sono in numero di $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

Per $n = 3$ si ha l'*angolo trispigolo* e per $n = 4$ l'*angolo quadrispigolo completo*, che è costituito da 4 rette a, b, c, d per un punto, a tre a tre non giacenti in un piano, e dai 6 piani che le congiungono a due a due.

Le rette diagonali costituiscono un angolo trispigolo, detto l'*angolo trispigolo diagonale*.

Si dicono *opposte* due facce dell'angolo quadrispigolo, quando non passano per lo stesso lato. Ad ab è opposto cd, ad ac, bd, ad ad, bc.

Dicesi *n-edro gobbo completo* il sistema di n piani (*facce*) quattro qualunque dei quali non paspartengono ad un piano, delle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette (*lati*) che li congiungono a due a due, e degli $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ piani (*facce*) che li congiungono a tre a tre.

sino per un punto, delle $\frac{n(n-1)}{2}$ rette (*lati*) comuni ad essi a due a due, e degli $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ punti (*vertici*) comuni ad essi a tre a tre.

Dicesi *n-gono piano semplice* il sistema di n punti (*vertici*) di un piano, considerati in un determinato ordine (tre qualunque *consecutivi* dei quali non sieno allineati) e delle n rette (*lati*) che congiungono a due a due i vertici consecutivi.

Dicesi *n-latero piano semplice* il sistema di n rette (*lati*) di un piano, considerate in un determinato ordine (tre qualunque *consecutive* delle quali non passanti per un punto) e degli n punti (*vertici*) secondo cui s' intersecano a due a due i lati consecutivi.

Dati n punti del piano, fra i quali non vi sieno allineamenti, i diversi modi di ordinare quei punti son tanti quante le permutazioni di n oggetti, cioè $n\,!$; ma gli n-goni semplici così ottenuti non sono distinti, perchè due ordini che sieno l'uno inverso dell'altro, o due che si deducano l'uno dall'altro con una permutazione circolare, dànno luogo ad un medesimo n-gono semplice.

Siccome ad ogni ordine ne corrisponde uno inverso, ed altri $n-1$ che si deducono con le permutazioni circolari possibili, gli n-goni semplici che si possono formare con quegli n punti, saranno in numero di $\frac{n!}{2n} = 3.4 \ldots (n-1)$. Analogamente con n rette si formano $\frac{n!}{2n}$ n-lateri semplici.

Considerazioni analoghe valgono per gli angoli n-edri ed n-spigoli e per i poliedri.

§ 6.

Proiezioni e sezioni. Corrispondenze prospettive.

Le forme geometriche fondamentali della stessa specie (1ª o 2ª) si posson dedurre l'una dall'altra mediante certe operazioni, che son fondamentali per la Geometria proiettiva e delle quali ci vogliamo occupare in questo §.

Le operazioni a cui alludiamo sono le seguenti:

Proiettare una figura $(A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots)$, costituita da punti e rette, da un punto O (*centro di proiezione*), non appartenente alla figura, cioè condurre le rette OA, OB, $OC, \ldots$ ed i piani Oa, Ob, $Oc, \ldots$. La figura della stella a cui si perviene, si dice *proiezione* della primitiva.

Proiettare una figura $(A, B, C, \ldots)$, costituita da punti, da una retta o (*asse di proiezione*) non passante per alcun punto della figura, cioè condurre i piani oA, oB, $oC \ldots$ La figura del fascio (di piani) a cui si perviene, dicesi *proiezione* della primitiva.

Segare una figura $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots a, b, c)$, costituita da piani e rette, con un piano ω (*piano di sezione*) non appartenente alla figura, cioè trovare le rette $\omega\alpha$, $\omega\beta$, $\omega\gamma, \ldots$ ed i punti ωa, ωb, $\omega c, \ldots$ La figura piana a cui si perviene, dicesi *sezione* della primitiva.

Segare una figura $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, costituita da piani, con una retta o (*retta segante*) non giacente su alcun piano della figura, cioè trovare i punti $o\alpha$, $o\beta$, $o\gamma \ldots$ La figura della punteggiata a cui si perviene, dicesi *sezione* della primitiva.

Allorquando una figura F si proietta da un punto O nella figura F_1, eppoi questa si sega con un piano ω (non appartenente ad O), si dice che si fa la ***proiezione della figura F dal punto O sul piano ω.***

Proiettando da un punto O :

a) una punteggiata, non passante per O, si ottiene un fascio di raggi ;

b) un piano punteggiato, non contenente O, si ottiene una stella di raggi ;

c) un piano rigato, non contenente O, si ottiene una stella di piani ;

Proiettando da un asse o:

a) una punteggiata, sghemba con o, si ottiene un fascio di piani ;

b) un fascio di raggi, col centro appartenente ad o, si ha un fascio di piani.

Segando con un piano ω

a) un fascio di piani coll'asse non appartenente ad ω, si ha un fascio di raggi ;

b) una stella di piani col centro fuori di ω, si ha un piano rigato ;

c) una stella di raggi, col centro fuori di ω, si ottiene un piano punteggiato;

Segando con una retta o.

a) un fascio di piani, coll'asse sghembo con o, si ottiene una punteggiata ;

b) un fascio di raggi col piano passante per o, si ha una punteggiata.

Si osservi che, mediante proiezioni e sezioni, si passa sempre da una forma di 1ª specie ad una forma di 1ª specie, e da una di 2ª ad una di 2ª.

Quando due forme F, F' (della stessa specie) son tali che F' è proiezione di F (e quindi F sezione di F') ad ogni elemento di F (o F') si può *associare* idealmente quell'elemento di F' (o F) che è proiezione (o rispettivamente sezione) dell'elemento di F (o F'). In tal modo ad ogni elemento di F viene a *corrispondere* un elemento di F', e viceversa.

Due forme fondamentali che sieno nella condizione di F, F', si dicono *prospettive*, e la *corrispondenza*, che intercede tra esse, dicesi una *prospettività*.

Così, se il fascio di raggi O è proiezione della punteggiata u, ogni punto di u dà come proiezione un determinato raggio di O ; nè fa eccezione il punto improprio di u, che dà per proiezione la parallela da O ad u. Viceversa, ogni raggio di O sega la u in un determinato punto,

ed anche il raggio parallelo ad u dà su questa un punto, che è improprio.

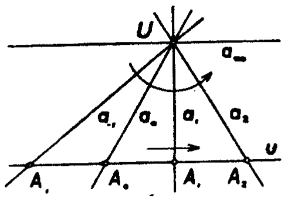
Così, se il fascio di piani o è proiezione della punteggiata u, ogni punto di u dà come proiezione un piano di o, e viceversa ogni piano di o segna un punto su u : se la stella di raggi O è proiezione del piano punteggiato α, ogni punto di α dà per proiezione un determinato raggio di O, e viceversa ogni raggio della stella segna un determinato punto su α ; ecc. ecc.

Sul concetto generale di corrispondenza tra due forme, ed in particolare su quello di corrispondenza prospettiva, dovremo ritornare più tardi in modo diffuso, giacchè trattasi di concetti fondamentali per la Geometria proiettiva.

§ 7.

Considerazioni intuitive sulla genesi delle forme di 1ª specie mediante il movimento e sui versi di una forma.

Consideriamo una punteggiata u ed un fascio di raggi U in posizione prospettiva. Mentre un raggio del fascio si muove, a partire dalla posizione a_0, in uno determinato dei due versi in cui il fascio può essere descritto, per es. da destra verso sinistra, il punto corrispondente si muove sulla u, in un determinato senso, a partire dalla posizione A_0 ; e finchè il raggio mobile non ha raggiunto la posizione di parallelismo, il punto corrispondente si trova sempre a destra dal punto A_0, se, come abbiamo supposto, il movimento di rotazione avviene da destra verso sinistra.



Se il movimento del raggio si fa proseguire fino a traversare la posizione di parallelismo, il punto corrispondente viene a cadere a sinistra di A_0, e, mentre il raggio mobile tende ad a_0, il punto corrispondente tende ad A_0.

Sicchè la genesi della punteggiata u, mediante il moto di un suo punto, che parta dalla posizione A_0 e vi ritorni, si può concepire come analoga alla generazione del fascio U, mediante la rotazione di una retta, che parta dalla posizione a_0 e vi ritorni, purchè la punteggiata si riguardi come *chiusa all' infinito*, in guisa tale che un suo punto possa passare da destra a sinistra di A_0, attraversando il punto all' infinito della u.

Quanto al fascio di piani, è evidente che esso può concepirsi come generato in modo analogo a quello che serve a generare il fascio di raggi, cioè mediante la rotazione in un determinato verso di un suo piano attorno all'asse.

Per generare un fascio improprio di raggi (proprî), invece di una rotazione, dovremo usare di una traslazione, in un determinato verso (considerato sopra una retta segante le rette del fascio), la quale trasporti un raggio, a partire dalla posizione a_0, e facendolo passare per la retta all' infinito, lo faccia ritornare in a_0.

Analogamente con una traslazione si genera un fascio improprio di piani.

Una punteggiata all' infinito si genera facendo ruotare su sè medesimo, in un determinato verso, un piano che passi per essa, attorno ad uno dei punti del piano stesso, perchè in tal modo un raggio uscente dal punto fisso, genera un fascio di raggi ed il punto all' infinito di quel raggio genera la punteggiata all' infinito sezione del fascio.

Ed infine un fascio di rette improprie, si genera considerando la retta all' infinito di un piano, che ruoti attorno ad una retta in un determinato verso, a partire da una posizione iniziale e ritornando ad essa.

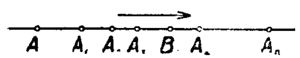
Giacchè in una forma di 1ª specie un elemento si può muovere secondo due sensi diversi, a partire da una posizione iniziale, possiamo dire che *ogni forma di 1ª specie si può intuitivamente concepire come generata, in due modi diversi, dal movimento di un suo elemento, che parta da una posizione iniziale e vi ritorni.*

Perciò si dice che in una forma di 1ª specie gli elementi si possono pensare *ordinati secondo due versi, opposti l'uno dell'altro, a partire da un primo elemento* (origine).

Le *successive* posizioni assunte dall'elemento mobile A, a partire dalla posizione A_0, stabiliscono un ordine tra gli elementi della forma di 1ª specie, in guisa tale che, dati due elementi B, C, e riguardatili come posizioni diverse assunte dall'elemento A, che si muove in un verso determinato, a partire da A_0, si può riconoscere quale dei due elementi *precede* l'altro, badando quale delle due posizioni fu assunta per la *prima* durante il movimento. E se B precede C, si dirà che C *segue* B.

Si osservi inoltre che, dati tre elementi B, C, D, come posizioni assunte da A nel movimento considerato a partire da A_0, se B precede C e C precede D, allora B precede D; e che tra due elementi B, C esistono infiniti elementi intermedi. Inoltre ogni elemento possiede infiniti elementi che lo seguono.

Più elementi $A_1, A_2, \dots A_n$ si dicono *susseguentisi*, quando assunto un elemento A come origine del movimento che genera la forma, si può scegliere il verso del moto per guisa che gli elementi stessi s' incontrino successivamente nell'ordine scritto od in uno che si deduca da quello con una permutazione circolare.



Se si prende come origine un altro elemento B della forma, senza mutare il verso del movimento, gli elementi considerati continueranno a succedersi nell'ordine scritto o in un ordine dedotto permutando circolarmente.

Dati sopra una forma di 1ª specie due elementi A, B, consideriamo i due versi in cui si possono pensare ordinati gli elementi della forma rispetto all'origine A.

La classe degli infiniti elementi che in uno di questi versi precedono B e seguono A, insieme cogli elementi A, B, costituisce ciò che si dice un *segmento* della forma di 1ª specie. Gli elementi A, B diconsi gli *estremi* del segmento. La stessa classe di punti, cioè lo stesso segmento, si ottiene prendendo come origine B e come verso del movimento l'opposto del precedente.

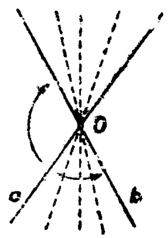
Nell'altro dei due ordinamenti che hanno l'origine in A, tutti gli elementi che precedono B (e seguono A) son quelli che nel precedente lo seguivano, ossia tutti quegli elementi che non appartengono al segmento definito mediante l'ordinamento precedente. Sicchè i due segmenti presi insieme esauriscono tutta la forma. Perciò essi diconsi *segmenti complementari.*

Gli elementi di un segmento, esclusi gli estremi, diconsi *interni* al segmento, *esterni* gli altri (quelli del segmento complementare).

Sopra una punteggiata, dati due punti A, B, si ha un *segmento finito* AB, che è quello che non contiene il punto all' infinito della punteggiata (e non è altro dunque che il segmento AB nel senso della Geometria elementare), eppoi un *segmento infinito* AB, complementare del precedente e che contiene il punto all' infinito. In sostanza i due segmenti nascono dal fatto che da A si va a B in due modi: o non passando pel punto all' infinito o attraversando questo punto. Nel primo caso le posizioni assunte dal punto mobile, dànno il segmento finito AB, nel secondo il segmento infinito.

La cosa si concepisce anche meglio, quando si pensi la retta come una circonferenza di raggio infinito, giacchè precisamente, sopra una circonferenza, due punti A, B determinano due diversi segmenti (archi), secondochè si va da A in B in un verso o nell'altro.

Sopra un fascio di raggi, due raggi a, b determinano due segmenti (*angoli completi*), secondochè si va da a in b in un verso o nell'altro. E si badi bene che qui la parola *angolo* va intesa in un senso diverso da quello della Geometria elementare, in quanto i raggi del fascio si debbono ritenere prolungati indefinitamente, dalle due parti del centro del fascio, e quindi un angolo $a\,b$, come si considera nella Geometria elementare, insieme al suo opposto al vertice, dà l'angolo completo $a\,b$ della Geometria proiettiva.

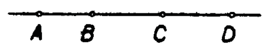


Sopra un fascio di piani, due piani α, β determinano due segmenti (*angoli diedri completi*), l'uno dei quali è descritto da un piano che si muove da α a β in un determinato senso e l'altro da un piano che si muove da α a β in senso opposto. Anche in tal caso alla parola diedro si dà un senso diverso da quello che le si attribuisce in Geometria elementare.

Tre elementi A, B, C di una forma di 1ª specie si susseguono sempre, qualunque sia l'ordine in cui si considerano, poichè in uno dei due ordini che hanno l'origine in A, l'elemento B precede C.

Quattro elementi A, B, C, D non si susseguono sempre, in qualunque ordine prefissato. Per convincersene, basta considerare tre elementi A, B, C e, determinato il verso in cui questi si susseguono secondo l'ordine A, B, C, scegliere l'elemento D in modo tale che, nel verso suddetto, esso preceda C.

Se quattro elementi A, B, C, D si susseguono nell'ordine scritto, ognuno dei due segmenti AC contiene uno solo degli elementi B, D, e similmente ognuno dei due seguenti BD contiene uno solo degli elementi A, C. Le due *coppie* AC, BD si trovano allora in condizione simmetrica e si dice che *si separano*. Così, se in una retta si hanno i due punti A, C e B è un punto del segmento finito AC e D il punto all'infinito della retta,



le due coppie AC, BD si separano. In un fascio di raggi (o di piani) i raggi (o i piani) bisettori dei due angoli determinati da due raggi (o piani), separano la coppia costituita da questi ultimi, ecc.

È chiaro che quattro elementi di una forma di 1ª specie si possono distribuire in un sol modo in due coppie che si separino, perchè se i quattro elementi si succedono nell' ordine A, B, C, D, si separano le due coppie AC, BD, ma non le coppie AD, BC o AB, CD.

§ 8.

Coordinazione logica delle precedenti nozioni intuitive. Postulati relativi.

Tutte le proprietà che abbiamo esposto nel precedente §, fanno capo alla nozione intuitiva dei due versi opposto l'uno dell'altro, in cui si possono ordinare gli elementi di una forma di 1ª specie, rispetto ad una prefissata origine.

Ora, per introdurre nei nostri ragionamenti ulteriori queste proprietà, occorre raccoglierne e precisarne in postulati alcune, per guisa che le altre si possano far derivare logicamente da quelle, senza altri appelli all' intuizione.

Poichè non vogliamo addentrarci in una critica sottile e minuta, ci limiteremo ad indicare per sommi capi la via che si può seguire per comporre in sistema logico-deduttivo le proprietà derivanti dal concetto di ordine sopra una forma di 1ª specie, riservandoci di tornare sull'argomento, in modo più diffuso, nell'APPENDICE. Le considerazioni successive posson essere omesse in una prima lettura, tanto più che l' intima funzione dei principî su cui riposa ogni ramo di scienza, si comprende meglio, quando si conoscano già i fatti ed i rapporti, che formano oggetto di quel ramo del sapere. Alla completa e profonda assimilazione di un sistema di verità nuove, si perviene soltanto volgendo di quando

in quando uno sguardo a ritroso e ripensando alle nozioni già apprese!

Un insieme di elementi qualunque, dicesi *ordinato*, quando fra i suoi elementi esiste una relazione, espressa dalle voci dei verbi « precedere » e « seguire », tale che:

a) Dati due elementi distinti A, B, si possa sempre decidere se « A precede B » o « se B precede A », l'uno dei due fatti escludendo l'altro. Se per es. A precede B, si dice che « B segue A ».

b) Dati tre elementi distinti A, B, C, se A precede B e B precede C, allora A precede C.

Scambiando l'ufficio dei verbi « precedere » e « seguire », s'ottiene fra gli elementi dell' insieme una nuova relazione, soddisfacente ancora alle proprietà *a*), *b*): si dice che, mediante questa nuova relazione, l' insieme viene ordinato in *senso inverso* od *opposto al precedente*.

Così per es. i numeri reali formano un insieme ordinato, il criterio di ordine essendo fornito dalla relazione « maggiore di »: si può cioè dire che nell' insieme dei numeri reali, di due numeri A, B, uno, A, precede l'altro, B, quando $A > B$. Si tratta di un'effettiva relazione di « ordine », perchè è soddisfatta la proprietà *b*): se $A > B$ e $B > C$, allora $A > C$.

L'ordinamento in senso inverso s'ottiene colla relazione « minore di ».

Un altro esempio di un insieme ordinato (che è poi quello psicologicamente più elementare, tra quanti fanno nascere nella nostra mente il concetto astratto di ordine) è quello degli istanti successivi della vita individuale. Un istante già trascorso « precede » ogni istante successivo, ed è evidentemente soddisfatta anche la proprietà *b*).

Ciò posto, per una forma di 1ª specie ha luogo il seguente POSTULATO DELL' ORDINE:

10° *Fissato un elemento O di una forma di 1ª specie, gli elementi della medesima si posson distribuire in un insieme ordinato, in cui O precede ogni altro elemento.*

Inoltre, nel suddetto ordine, ogni elemento della forma precede sempre qualche altro, e, scelti due elementi distinti A, B, tali che B segua A, esiste sempre qualche elemento che segue A e precede B.

L'elemento O dicesi *origine* dell'ordine od ordinamento considerato.

Si osserverà che la possibilità di stabilire un ordine fra gli elementi d'una forma di 1ª specie, dipende dalla scelta di un elemento O, preso come origine dell'ordinamento. Ciò si collega col fatto che una forma di 1ª specie è un insieme *chiuso*. Non è chiuso invece l' insieme degli istanti della nostra vita, che ha un'origine naturale (la nascita), la quale non ha, nella vita dell' individuo, alcun istante precedente, ed un termine naturale (la morte).

La circostanza poi che ogni elemento della forma abbia qualche successivo, si collega col fatto che la forma, resa *aperta* escludendone un elemento (l'origine), continua tuttavia ad essere *illimitata*, nel verso in cui si succedono gli elementi.

E infine la circostanza che fra due elementi successivi ve ne sia sempre qualche altro, si esprime anche dicendo che la forma è un insieme *dovunque denso*.

Dal precedente postulato si deduce anzitutto, come conseguenza puramente logica (Ved. APPENDICE), che, scelti nella forma due elementi distinti O, P, « si può « coordinare ad un fissato ordinamento avente per ori- « gine O, un ordinamento avente per origine P, per guisa « che, presi comunque tre elementi distinti A, B, C, i « quali si succedano nell'ordine scritto, rispetto al primo « ordinamento, essi si succedano, rispetto al secondo, « nell'ordine medesimo od in uno dedotto permutando « circolarmente (cioè o nell'ordine $A\,B\,C$ o nell'ordine « BCA o CAB) ».

Due ordinamenti così coordinati diconsi *concordi*.

Si stabilisce quindi la *proprietà transitiva* di questo coordinamento, provando cioè che « se Q è un terzo « elemento distinto da O, P, i due ordini di origine P, Q,

« concordi coll'ordine prefissato di origine O, sono con- « cordi tra loro ».

L' insieme di tutti gli ordini concordi con quello prefissato, è quindi tale che quegli ordini son legati da una relazione *riflessiva* (ogni ordine è concorde con se stesso), *reciproca* (due ordini concordi lo sono mutuamente) e *transitiva*. Questa relazione s' identifica col concetto di *verso della forma*, concorde con tutti quegli ordini.

Gli ordini opposti ai precedenti, rispetto alle stesse origini, dànno luogo essi pure ad un insieme di ordini concordi e, per astrazione da tale insieme, nasce quindi il concetto di verso della forma *opposto* al precedente.

Dopo ciò si stabiliscono facilmente tutte le altre proprietà del § 7.

Si badi però che il postulato 10° non esclude che l' insieme degli elementi di una forma si possa ordinare in più modi, *non opposti tra loro*, rispetto ad una medesima origine; talchè il concetto di versi della forma, quale si deduce logicamente, nel modo accennato, dal post. 10°, resta a priori vincolato alla scelta dell'ordine (di origine O) da cui siamo partiti (ved. a tal proposito l'APPENDICE).

L' intuizione tuttavia ci dice che vi è un modo uniforme (la genesi col movimento) di definire gli ordini e quindi i versi per tutte le forme di 1ª specie; per guisa che ordini e versi così definiti sopra una tal forma, si mutano negli ordini e nei versi analogamente definiti sopra ogni altra forma prospettiva a quella.

Ebbene, nel seguito, parlando degli ordini e dei versi sopra una forma di 1ª specie, intenderemo sempre di alludere a quelli che derivan nel modo ricordato dalla intuizione delle forme di 1ª specie ed enuncieremo esplicitamente la cosa col seguente POSTULATO DEL CARATTERE PROIETTIVO DEI VERSI:

11° *In ogni forma di prima specie sono ben determinati due versi mutualmente opposti, i quali hanno carattere proiettivo, per guisa cioè che in ogni coppia di* *forme di 1ª specie, fra di loro prospettive, ad uno dei suddetti due versi dell'una forma, corrisponde uno dei due versi dell'altra.*

È facile vedere come da questo postulato segua logicamente che ad un segmento dell'una forma corrisponde un segmento sull'altra; che a due coppie che si separano corrispondono due coppie che si separano; ecc.

CAPITOLO SECONDO

Legge di dualità. — Teoremi dei triangoli e dei quadrangoli omologici.

§ 9.

Legge di dualità nello spazio.

Osservando i postulati 1°, 2°, ... 9°, possiamo constatare che tra essi ed alcune proposizioni che si dimostrano facilmente col loro sussidio, passano delle analogie notevoli, che son rese evidenti dal quadro seguente:

Ad una retta appartengono infiniti punti.	Ad una retta appartengono infiniti piani.
Ad un piano appartengono infinite rette.	Ad un punto appartengono infinite rette.
Esistono infiniti piani.	Esistono infiniti punti.
Due punti individuano una retta, a cui essi appartengono.	Due piani individuano una retta, a cui essi appartengono.
Un punto ed una retta, che non si appartengano, individuano un piano, a cui essi appartengono.	Un piano ed una retta, che non si appartengano, individuano un punto, a cui essi appartengono.
Tre punti, non appartenenti ad una retta, individuano un piano, a cui essi appartengono.	Tre piani, non appartenenti ad una retta, individuano un punto, a cui essi appartengono.

Le 6 proposizioni a sinistra e le ultime tre a destra, non sono altro che i postulati 1°, . . ., 9°, già introdotti, e le prime tre proposizioni a destra si deducono logicamente dalle precedenti con facilità.

Orbene, ogni proposizione a sinistra e la corrispondente proposizione a destra, si trovano in questa relazione: che la proposizione a destra si deduce da quella a sinistra cambiando la parola « punto » nella parola « piano » e lasciando inalterata la parola « retta ».

Quanto poi ai postulati 10° e 11° enunciati nel § 8, poichè essi si riferiscono ad ogni forma di 1ª specie, a prescinder dalla natura dell'elemento generatore, è chiaro che, enunciandoli separatamente per le varie forme di 1ª specie, avremo un gruppo di proposizioni che si mutano l'una nell'altra o restano immutate, scambiando la parola « punto » con la parola « piano » e lasciando inalterata la parola « retta »; appunto perchè, con questi scambi, la punteggiata si muta in un fascio di piani, ed il fascio di raggi, cioè il sistema di tutte le rette appartenenti ad un piano e ad un punto di questo piano, si muta nel sistema di tutte le rette che appartengono ad un punto e ad un piano per questo punto, ossia ancora in un fascio di raggi.

Ma dunque, se si fonda la dimostrazione di un teorema sulle sole proposizioni raggruppate nel quadro suddetto e sui postulati 10° e 11°, cioè se si combinano queste proposizioni colle leggi della logica, ogni deduzione fatta nel corso del ragionamento, rimarrà valida scambiando la parola « punto » colla parola « piano » e lasciando inalterata la parola « retta »; perchè, dopo lo scambio, la deduzione sarà fondata sulla proposizione che, con lo stesso scambio, deriva da quella su cui essa poggiava inizialmente.

Si conclude che l'enunciato di un teorema che derivi logicamente dai postulati suddetti, rimarrà valido quando si operino in esso quegli scambi di parole.

Nel seguito ci occorrerà d'introdurre ancora un postulato e cioè il *postulato della continuità*; ma, come

vedremo, essendo anche questo valido per tutte le forme di 1ª specie, si potrà dire che ogni teorema dedotto logicamente da esso e dai postulati finora introdotti, dà luogo ad un altro teorema il cui enunciato si ottiene dal primo operando gli scambi già accennati.

Fin da ora, per brevità di linguaggio, chiameremo *grafica* o *descrittiva* o di *posizione* ogni *proprietà* di una figura, la quale si possa stabilire col solo sussidio dei postulati suddetti, riservandoci di allargare più tardi il significato di queste parole.

Potremo allora enunciare il risultato ottenuto dicendo che:

Per ogni proprietà grafica di una figura, ne esiste un'altra (duale o correlativa della prima), che si deduce da quella scambiando la parola « punto » colla parola « piano » e lasciando inalterata la parola « retta ».

In ciò consiste la LEGGE DI DUALITÀ NELLO SPAZIO.

Esempi di teoremi e di definizioni associati colla legge di dualità nello spazio, li abbiamo già incontrati, ed anzi, abbiamo avuto cura di porli in due colonne, l'una accanto all'altra.

Così alla proposizione: « Due rette di un piano hanno un punto comune », corrisponde per dualità la proposizione: « Due rette che si tagliano in un punto giacciono in un piano »; alla proposizione: « Da un punto esterno a due rette sghembe si può tirare una sola retta appoggiata a queste », l'altra: « In un piano non appartenente a nessuna di due rette sghembe, giace una sola retta appoggiata ad entrambe »; ecc. ecc.

Alla definizione di n-gono piano completo, corrisponde per dualità la definizione di angolo n-edro completo; alla definizione di n-latero piano completo, la definizione di angolo n-spigolo completo; alla definizione di n-gono gobbo completo, quella di n-edro gobbo completo; ecc.

In opposizione alle *proprietà grafiche* stanno le *proprietà metriche*, nelle quali si fa distinzione esplicita tra elementi proprî ed improprî e nelle quali entrano anche i concetti di misura e di perpendicolarità.

La Geometria proiettiva studia le proprietà grafiche delle figure. Tuttavia il campo della Geometria proiettiva è più vasto di quel che possa sembrare a prima vista, giacchè le proprietà metriche rientrano nel dominio di questa Scienza, come casi particolari delle proprietà grafiche. La possibilità di far rientrare le proprietà metriche nel dominio della Geometria proiettiva, deriva in gran parte dalla introduzione degli elementi improprî, ed anche, come si vedrà più tardi, da speciali interpretazioni grafiche che si possono dare di certi enti metrici.

Nulla ci autorizza a ritener valida la legge di dualità anche per le proprietà metriche: anzi si capisce subito come sarebbe impossibile applicare senz'altro questa legge, senza avere stabilito ad es. se esiste un concetto duale del concetto di perpendicolarità o di parallelismo.

§ 10.

Legge di dualità nel piano e nella stella.

La legge di dualità nello spazio permette di associare ad ogni proprietà grafica di una figura piana, una proprietà grafica di una figura della stella. Ora noi ci occuperemo di stabilire altre leggi di dualità, che associano ad ogni proprietà grafica di una figura piana, una proprietà grafica di una figura piana e ad ogni proprietà grafica di una figura della stella, una proprietà grafica di una figura della stella.

Sia F una figura appartenente ad un piano ω, e P una proprietà grafica della figura F. Mediante la legge di dualità nello spazio, alla figura F viene associata una figura F' di una stella O, in guisa che ad ogni punto di F viene associato un piano di F' e ad ogni retta di F una retta di F'. Alla figura F' spetta una proprietà grafica P', che si deduce dalla P cambiando la parola « punto » nella parola « piano » e lasciando inalterata la parola « retta ».

Segando la stella O con un piano ω, non passante per O, la figura F' darà come sezione una figura piana F_1, e poichè ad ogni relazione di appartenenza tra rette e piani della stella O, viene nella sezione a corrispondere una relazione di appartenenza tra punti e rette del piano ω, e ad elementi susseguentisi in una forma di 1ª specie appartenente alla stella O, corrispondono elementi susseguentisi di una forma di 1ª specie appartenente ad ω, la proprietà grafica P' si tradurrà in una proprietà grafica P_1 della figura F_1.

Inoltre, siccome ogni retta di F' dà un punto di F_1, ed ogni piano di F' dà una retta di F_1, dalla proprietà grafica P' relativa ad F', si passerà alla proprietà grafica P_1 relativa ad F_1, mutando la parola « retta » in « punto » e la parola « piano » in « retta ».

Confrontando le due proprietà P, P_1 relative l'una alla figura piana F e l'altra alla figura piana F_1, si vede che per passare dall'una all'altra, bisogna scambiare fra loro le parole « punto » e « retta ».

Si ottiene così la seguente LEGGE DI DUALITÀ NEL PIANO:

Ad ogni proprietà grafica di Geometria piana ne viene associata un'altra, pure di Geometria piana, che si deduce dalla prima scambiando fra loro le parole « punto » e « retta ».

Mediante la legge di dualità nel piano ad un n-gono piano completo, viene associato un n-latero piano completo; alla proposizione che due rette di un piano si tagliano in un punto, l'altra che due punti sono congiunti da una retta; ecc. ecc.

Analogamente, passando da una proprietà grafica di Geometria della stella ad una proprietà di Geometria piana, mediante la legge di dualità nello spazio, e passando poi dalla proprietà di Geometria piana ad una di Geometria della stella, servendosi della proiezione da un punto, troveremo tra le due proposizioni di Geometria della stella (la iniziale e quella cui si perviene) una relazione, che è espressa dalla seguente LEGGE DI DUALITÀ NELLA STELLA:

Ad ogni proprietà grafica di Geometria della stella ne viene associata un'altra, che si deduce dalla prima scambiando fra loro le parole « retta » e « piano ».

Mediante la legge di dualità nella stella, ad un fascio di raggi viene associato un fascio di piani, ad un angolo n-spigolo completo un angolo n-edro completo. Presto vedremo esempî di teoremi fra loro duali nella stella.

§ 11.

Triangoli prospettivi e omologici. Teoremi relativi e loro duali.

Se in un piano si hanno due n-goni, e si associa, con una legge determinata, ad ogni vertice dell'uno un vertice dell'altro, si dice che i due n-goni son *riferiti*. *Due vertici*, che siano associati mediante la legge fissata, si dicono *omologhi*, e così diconsi *omologhi* due *lati*, che congiungano due coppie di vertici omologhi.

In modo analogo si può parlare di due n-lateri, o di due angoli n-edri, o di due angoli n-spigoli fra loro riferiti.

Premesse queste definizioni, dimostriamo i teoremi seguenti, fra loro duali nello spazio:

Se due triangoli situati in piani diversi, son riferiti in guisa che le tre coppie di vertici omologhi sieno congiunte da rette concorrenti in un punto, le tre coppie di lati omologhi s' incontrano in tre punti di una medesima retta (comune ai piani dei due triangoli).	*Se due triedri appartenenti a stelle diverse, son riferiti in guisa che le tre coppie di facce omologhe s' intersechino secondo rette di un piano, le tre coppie di spigoli omologhi sono congiunte da tre piani passanti per una medesima retta (che congiunge i centri delle due stelle).*

Sviluppiamo la dimostrazione del teorema di sinistra, giacchè l'altro si potrà dedurre applicando la legge di dualità nello spazio.

Sieno ABC, $A'B'C'$ i due triangoli e sieno omologhi, nel riferimento tra essi, i vertici rappresentati da una stessa lettera senza e con l'apice. Diciamo α, α' i loro piani ed S il punto in cui concorrono per ipotesi le rette AA', BB', CC'.

Poichè i punti A, A', B, B' giacciono sopra due rette per S, essi apparterranno ad un piano, che conterrà le due rette AB, $A'B'$. Da ciò deriva che le AB, $A'B'$ si segano in un punto, il quale dovrà essere situato sulla retta $u = \alpha\,\alpha'$, perchè l'una delle rette suddette appartiene ad α e l'altra ad α'.

Analogamente si prova che le rette BC, $B'C'$ e le rette CA, $C'A'$ s' incontrano in altri due punti di u.

Osservazione. La dimostrazione vale anche se i due triangoli hanno qualche elemento comune (vertice o lato), purchè in tal caso s' intenda che ogni retta passante per due punti coincidenti sia « congiungente » di questi, e similmente che ogni punto appartenente a due rette coincidenti, sia « intersezione » di queste.

Si osserverà inoltre che quando un lato di uno dei due triangoli, per es. il lato AB di ABC, coincide con u, senza che lo stesso accada del lato omologo, il punto S coincide con C'. Che se poi $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, si può prendere come punto S un qualsiasi punto della retta CC'.

Analoghe osservazioni valgono nel caso duale.

Occupiamoci ora dei teoremi inversi dei precedenti:

Se due trilateri appartenenti a piani diversi, sono riferiti in guisa che le tre coppie di lati omologhi si taglino in tre punti di una retta (comune ai loro piani), le tre coppie di vertici omo-	*Se due angoli trispigoli appartenenti a stelle diverse, son riferiti in guisa che le tre coppie di spigoli omologhi sieno congiunte da tre piani passanti per una retta (congiungente i centri delle*

loghi sono congiunte da rette concorrenti in un punto.	*due stelle), le tre coppie di facce omologhe s' incontrano in tre rette di un piano.*

Infatti (a sinistra) le tre coppie di lati omologhi dei due trilateri giacciono in tre piani, che a due a due s' intersecano secondo una congiungente di due vertici omologhi. Queste tre congiungenti passeranno dunque pel punto comune ai tre piani.

Osservazione. Anche per questi teoremi debbono farsi, in casi eccezionali, avvertenze analoghe a quelle già esposte pei teoremi precedenti.

Due triangoli (o trilateri) nelle condizioni degli enunciati di sinistra, in quanto sono sezioni di uno stesso trispigolo (o triedro) con due piani diversi, diconsi *prospettivi.*

Analogamente si dicono *prospettivi* due triedri (o trispigoli) nelle condizioni degli enunciati di destra, perchè son proiezioni da due centri diversi di uno stesso trilatero (o triangolo).

Per rimuovere ogni caso d'eccezione, basterà intendere che un triangolo (o trilatero) sia sezione di un trispigolo (o triedro), quando ogni vertice (o lato) del triangolo (o trilatero) appartenga ad almeno un lato (o faccia) del trispigolo (o triedro); e dualmente (nello spazio).

Hanno anche luogo le seguenti proposizioni (inversa l'una dall'altra) duali fra loro nel piano:

Se due triangoli appartenenti ad uno stesso piano, son così riferiti che le congiungenti le tre coppie di vertici omologhi concorrano in un punto, le tre coppie di lati omologhi s' incontrano in tre punti allineati.	*Se due trilateri appartenenti ad uno stesso piano, son così riferiti che le tre coppie di lati omologhi s' intersechino in punti di una retta, le tre coppie di vertici omologhi son congiunte da tre rette passanti per un punto.*

Sviluppiamo la dimostrazione del teorema di sinistra (*).

Sieno ABC, $A'B'C'$ i due triangoli ed S il punto in cui concorrono le rette AA', BB', CC'. Sopra una retta per S, ma non appartenente al piano α dei due triangoli, prendiamo due punti O, O' diversi da S, e proiettiamo da O il triangolo ABC e da O' il triangolo $A'B'C'$. Le due rette $OA, O'A'$ giacciono nel piano che contiene le rette OO', AA' (le quali sono incidenti nel punto S), e quindi OA, OA' si segano in un punto A_0. Similmente OB, OB' si segano in un punto B_0 e OC, OC' si segano in C_0.

E si noti che i tre punti A_0, B_0, C_0 non possono essere allineati, perchè, se ciò accadesse, le rette OA_0, OB_0, OC_0, cioè le OA, OB, OC, sarebbero situate in un medesimo piano β, il quale, passando per O, sarebbe distinto da α, così che i tre punti A, B, C risulterebbero allineati sulla intersezione di α, β.

I punti A_0, B_0, C_0 *individuano* dunque un piano α_0, il quale non può coincidere con α, se non nel caso in cui i triangoli ABC, $A'B'C'$ coincidano, nel qual caso il teorema riducesi ad una proprietà banale, giacchè sono indeterminate sia le congiungenti dei vertici omologhi, come le intersezioni dei lati omologhi. Supposto che i due triangoli dati sieno distinti, il triangolo $A_0B_0C_0$ risulta prospettivo con ABC, rispetto al centro O, e con $A'B'C'$ rispetto al centro O'; per guisa che le coppie di lati A_0B_0, AB; B_0C_0, BC; C_0A_0, CA si taglieranno in punti della retta $u \equiv \alpha\,\alpha_0$, e così le tre coppie di lati A_0B_0, $A'B'$; B_0C_0, $B'C'$; C_0A_0, $C'A'$.

Ne segue che AB, $A'B'$ segnano su u il medesimo punto, che è quello comune ad u e ad A_0B_0; e analoga-

(*) È agevole ed istruttivo seguire il ragionamento del testo senza la figura. Istruttivo, perchè costituisce una riprova del fatto che le nostre deduzioni sussistono indipendentemente da ogni intuizione geometrica. Tuttavia sarà bene che, una volta appresa la dimostrazione, lo studioso faccia da sè la figura, per esercitare la propria intuizione spaziale.

mente dicasi delle coppie BC, $B'C'$; CA, $C'A'$. Con ciò il teorema è dimostrato.

Due triangoli (o trilateri) nelle condizioni degli ultimi due enunciati, diconsi *omologici*.

I duali dei due teoremi relativi ai triangoli omologici, si possono compendiare nell'unico enunciato seguente:

Se due triedri appartengono ad una stella, le due condizioni:

a) i due triedri son così riferiti che le intersezioni delle coppie di facce omologhe appartengono ad un piano;

b) i due triedri son così riferiti che i piani comuni alle coppie di spigoli omologhi passano per una retta;

sono l'una conseguenza dell'altra.

§ 12.

Quadrangoli prospettivi e omologici.

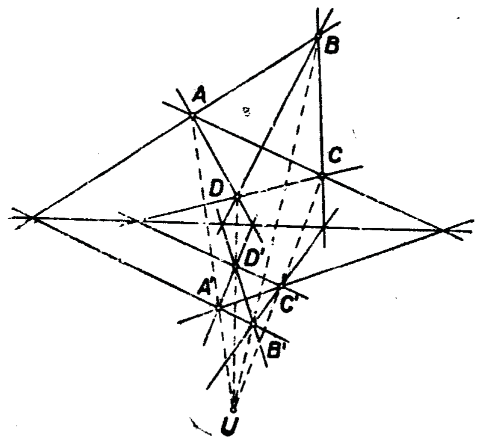
Stabiliamo, come applicazione dei teoremi precedenti, le seguenti proposizioni duali tra loro nello spazio:

Se due quadrangoli piani completi $ABCD$, $A'B'C'D'$, situati o no nel medesimo piano, ma non aventi nè lati nè vertici comuni, son riferiti in guisa che cinque coppie di lati omologhi, come AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CD, $C'D'$; DA, $D'A'$; DB, $D'B'$, determinino cinque punti di una retta u, anche i lati della sesta coppia AC, $A'C'$, si tagliano in un punto di u, e le quattro coppie di vertici omologhi son congiunte da rette passanti per un punto U.

Se due angoli tetraedri completi $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, $\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta'$, appartenenti o no alla medesima stella, ma non aventi nè spigoli nè facce comuni, son riferiti in guisa che cinque coppie di spigoli omologhi, come $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$; $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$; $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$; $\alpha\delta$, $\alpha'\delta'$; $\delta\beta$, $\delta'\beta'$, determinino cinque piani passanti per una retta u, anche gli spigoli della sesta coppia $\alpha\gamma$, $\alpha'\gamma'$, son congiunti da un piano per u, e le quattro coppie di facce omologhe s' intersecano in rette giacenti in un piano ω.

Dimostreremo il teorema di sinistra.

Poichè i due triangoli ABD, $A'B'D'$, son così riferiti che le tre coppie di lati omologhi s' incontrano, per ipotesi, in punti di u, le rette AA', BB', DD' passeranno per un punto U, il quale risulterà individuato come intersezione delle rette BB', DD', perchè queste rette sono distinte (l' ipotesi contraria porterebbe infatti a concludere che i due lati BD, $B'D'$ coinciderebbero). Analogamente dalla considerazione dei due triangoli BDC, $B'D'C'$ si trae che le rette BB', DD', CC' passano per uno stesso punto, il quale, essendo comune alle rette BB', DD', coincide con U. Dunque le rette AA', BB', CC', DD' passano per uno stesso punto U.



I due triangoli ABC, $A'B'C'$ risultano riferiti in guisa che le rette AA', BB', CC' passano per un punto, e quindi le tre coppie di lati AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$ s'incontrano in tre punti di una medesima retta. E poichè i due punti $AB.A'B'$ e $BC.B'C'$ sono distinti (chè altrimenti le 4 rette AB, BC, $A'B'$, $B'C'$ concorrerebbero in un medesimo punto, il quale coinciderebbe con B e con B' e i due quadrangoli avrebbero un vertice comune), così ne segue che la retta suddetta coincide con u, cioè che AC, $A'C'$ s' incontrano sulla u, c. d. d.

Due quadrangoli (o due tetraedri) che sieno nelle condizioni dell'enunciato di sinistra (o di destra), si dicono ***prospettivi***, se son situati in piani diversi (o appartengono a stelle diverse); ***omologici*** nel caso contrario.

Nell' ipotesi che i due quadrangoli (o i due tetraedri) appartengano allo stesso piano (o alla stessa stella), applicando la legge di dualità nel piano (o nella stella) avremo un'altra proposizione di Geometria piana (o della stella).

I due teoremi che così si ottengono (duali tra loro nello spazio) si enunciano nel modo seguente:

Se due quadrilateri completi appartenenti allo stesso piano e non aventi nè vertici nè lati comuni, son riferiti in guisa che cinque coppie di vertici omologhi sieno congiunte da rette concorrenti in un punto, la sesta coppia di vertici determina una retta per quel punto, e le quattro coppie di lati omologhi s' intersecano in punti di una medesima retta.

Se due angoli quadrispigoli completi appartenenti alla stessa stella e non aventi nè facce nè spigoli comuni, son riferiti in guisa che cinque coppie di facce omologhe s' intersechino in rette di uno stesso piano, la sesta coppia di facce determina una retta di quel piano, e le quattro coppie di spigoli omologhi son congiunte da piani passanti per una medesima retta.

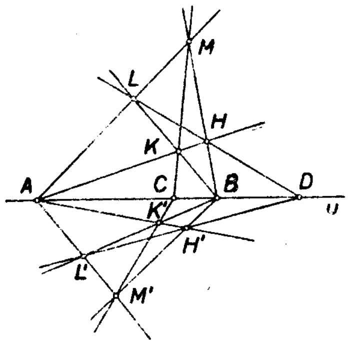
CAPITOLO TERZO

Gruppi armonici.

§ 13.

Gruppi armonici sopra una punteggiata o un fascio di piani.

Dati sopra una punteggiata u tre punti distinti A, B, C, ogni quadrangolo completo situato in un piano per la retta u, e avente due lati opposti per A, due altri lati opposti per B, e uno dei due lati rimanenti passante per C, gode della proprietà che *il sesto lato taglia la u in un punto D, il quale non varia mutando il quadrangolo in uno degli infiniti modi possibili.*

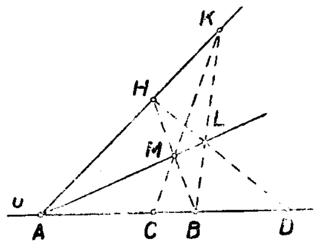


Infatti, due quadrangoli soddisfacenti alle condizioni suddette, si possono evidentemente riferire in modo che due coppie di lati omologhi si taglino in A, due in B, ed una quinta in C. Pel teorema dei quadrangoli prospettivi e omologici, i due lati rimanenti segneranno quindi sulla u uno stesso punto D.

Il punto D, così ottenuto, dicesi il *coniugato armonico* di C rispetto alla coppia AB. Segue dalla definizione medesima, che C è alla sua volta il coniugato armonico di D rispetto ad AB. Tenendo fissa la coppia

AB, ad ogni posizione di C sulla u, vien dunque associata una ben determinata posizione di D; e viceversa. Si ha cioè fra le posizioni di due punti, coniugati armonici l'uno dell'altro rispetto alla coppia fissa AB, una *corrispondenza biunivoca*. Incontriamo così un altro esempio del concetto generale di corrispondenza fra due classi di elementi, oltre a quello, già notato al § 6, di prospettività tra forme di 1ª specie.

Possiamo anzi verificare subito che la corrispondenza considerata fra le posizioni di C, D sulla u, può generarsi con un numero finito di proiezioni e di sezioni (cioè di prospettività). Invero, fissate le due rette AK, AL per A e su esse i punti K, L, per passare da C a D, si posson eseguire le operazioni seguenti.



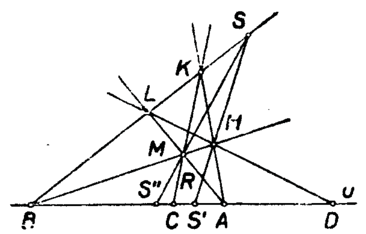
Proiezione di C da K su AL in M; proiezione di M da B su AK in H; proiezione di H da L su u in D. In tal modo si viene infatti a costruire un quadrangolo completo $HKLM$, di cui due lati opposti passan per A, altri due opposti per B e dei due restanti uno passa per C ed uno per D. Cosicchè D è proprio il coniugato armonico di C rispetto ad AB. Applicando in particolare le operazioni indicate quando C coincide con A (o con B), si trova che D viene pure a coincidere con A (o con B). Nella corrispondenza considerata il punto A (o B) ha dunque per corrispondente se stesso; è, come si dice brevemente, *unito*.

Si può ora provare che nella nostra corrispondenza non vi sono altri punti uniti, all' infuori di A, B, che cioè:

Il coniugato armonico D di un punto C, distinto da A, B, è sempre distinto da C, ed anzi insieme a C separa la coppia AB.

Sia infatti $HKLM$ un quadrangolo piano completo di cui due lati opposti, HK, ML, passino per A, altri due lati opposti, HM, KL, passino per B, e uno dei due

rimanenti, KM, passi per C. Sia inoltre D il punto ove il sesto lato LH taglia u. Assumasi sulla KL un punto S, il quale, insieme ad L, separi la coppia BK, e s' indichino con S', S'' le intersezioni rispettive di u colle rette SH, SM; con R l' intersezione delle rette AL, SH. Proiettando da H su u le coppie SL, BK, che si separano, otteniamo le coppie $S'D$, BA, che pure dovranno separarsi; e, similmente, proiettando da H su AL le SL, BK, otterremo le coppie che si separano RL, MA; le quali, alla loro volta, proiettate da S su u, danno le coppie che si separano S' B, S'' A. Ciò significa che le AB, $S'S''$ non si separano.



Proiettando infine le BL, SK, che non si separano, da M su u, avremo le due coppie che non si separano BA, $S''C$. Sicchè, riassumendo:

le coppie AB, DS' si separano,
» » $AB, C\,S''$ non si separano,
» » AB, $S'S''$ non si separano.

Ne segue che C appartiene a quel segmento AB, che contiene la coppia $S'S''$, mentre D appartiene al segmento complementare. È così provato l'asserto.

Si osserverà che la proposizione stabilita equivale in sostanza a quest'altra:

I punti diagonali di un quadrangolo piano completo non possono mai essere allineati.

E invero, se esistesse un quadrangolo piano completo $HKLM$, i cui punti diagonali $A \equiv HK.LM$, $B \equiv HM.LK$ fossero allineati coll'altro punto diagonale $HL.KM$, bisognerebbe che il punto $C \equiv KM.AB$, coincidesse con $D \equiv HL.AB$, contrariamente a quanto si è sopra dimostrato.

Ritornando alla corrispondenza biunivoca, che si considerava poco fa sulla punteggiata u, fra le posizioni del punto C e le posizioni del punto D, coniugato armonico di C rispetto alla coppia AB, aggiungeremo che, poichè tale corrispondenza si costruisce con un numero finito di proiezioni e di sezioni, ed in ciascuna di queste operazioni ad elementi che si succedano in un verso, sulla forma di 1ª specie a cui appartengono, corrispondono elementi che pure si succedono in un verso, sulla forma di 1ª specie trasformata, così la nostra corrispondenza fa passare da punti della u che si succedono, a punti della u che pure si succedono. La corrispondenza dicesi pertanto *ordinata*.

Inoltre, al verso definito della terna ABC, corrisponde il verso definito dalla terna ABD, che è il verso opposto al precedente. Dunque, a punti che si succedono in un verso, la corrispondenza considerata fa corrispondere punti che si succedono nel verso contrario, e perciò si dice che essa è *discorde*.

Ci siamo diffusi sulle proprietà di questa corrispondenza, la cui considerazione non occorreva pel nostro scopo immediato, per offrire fin d'ora un esempio concreto di nozioni fondamentali, che saranno esposte in generale più tardi.

Un gruppo di punti come $ABCD$, si chiama un *gruppo armonico*. Si dice pure che la coppia AB è *separata armonicamente* della CD od anche che il punto D è il *quarto armonico* dopo A,B,C.

Un quadrangolo come $HKLM$, dicesi un *quadrangolo costruttore* del gruppo armonico $ABCD$.

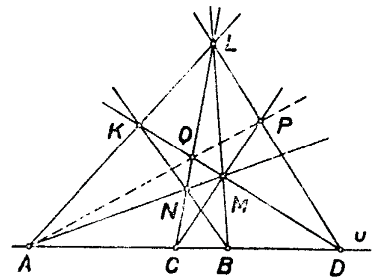
La costruzione del coniugato armonico D del punto C rispetto alla coppia AB, è simmetrica rispetto ai due punti A,B e rispetto ai due punti C,D; ma non rispetto ad un punto della prima coppia e ad un punto della seconda, perchè per un punto della prima coppia passano due lati opposti, mentre per un punto della seconda passa un sol lato di un quadrangolo costruttore.

Questa osservazione prova che, se $ABCD$ è un gruppo armonico, lo sono pure i gruppi $ABDC$, $BACD$ $BADC$. Ora dimostreremo che, non soltanto questi

gruppi sono armonici, ma che lo sono anche quelli che si deducono dai precedenti scambiando la prima coppia con la seconda.

Basterà provare che, se esiste un quadrangolo completo $KLMN$, di cui due lati opposti passino per A, due lati opposti per B, e dei due rimanenti uno per C e l'altro per D, esiste pure un quadrangolo completo di cui due lati opposti passano per C, due lati opposti per D, e dei rimanenti uno per A e l'altro per B.

A tal uopo si congiunga C con M e D con L e si ponga $P \equiv LD.\ CM$, $O \equiv LN.\ KM$. I due triangoli LPM, KON sono omologici, perchè le tre coppie di



lati LP, KO; MP, NO; LM, KN, si tagliano rispettivamente nei punti D, C, B della u; e perciò la retta $O\,P$ passerà pel punto A, per cui passano le congiungenti delle altre due coppie di vertici omologhi. Ciò prova l'esistenza di un quadrangolo completo $LMPO$, costruttore del gruppo armonico $CDAB$. Abbiamo dunque il teorema:

Se il gruppo $ABCD$ è armonico, lo sono pure i gruppi: $ABDC$, $BACD$, $BADC$, $CDAB$, $DCAB$, $CDBA$, $DCBA$.

Perciò si dice che le due coppie AB, CD *si separano armonicamente.*

Ma se disponiamo le quattro lettere A,B,C,D, in uno dei 16 modi rimanenti, non avremo un gruppo armonico, perchè i due punti della prima coppia non sono separati dai punti della seconda coppia.

Per dualità nello spazio al concetto di gruppo armonico di punti corrisponde il concetto di gruppo armonico di piani.

Si dice che *un gruppo di quattro piani* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *di un fascio, è armonico, quando esiste un angolo tetraedro completo (avente il vertice in un punto della retta sostegno) di cui due spigoli opposti giacciono su* α, *altri due spigoli opposti su* β, *e dei due restanti uno giace su* γ *e l'altro su* δ.

Le proprietà stabilite pei gruppi armonici di punti, si trasportano senz'altro ai gruppi armonici di piani. Così, se $\alpha\beta\gamma\delta$ è armonico, la coppia $\gamma\delta$ separa la $\alpha\beta$; i gruppi $\alpha\beta\delta\gamma$, $\gamma\delta\alpha\beta$, ecc. sono armonici.

§ 14.

Gruppi armonici sopra un fascio di raggi.

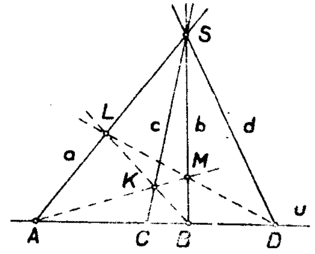
Sussistono le seguenti proposizioni tra loro duali nello spazio:

Proiettando da un asse s un gruppo armonico di punti ABCD, situato sopra una retta u sghemba con s, si ha un gruppo armonico di piani.	*Segando con un asse s un gruppo armonico di piani* $\alpha\beta\gamma\delta$, *appartenente ad un fascio il cui asse u sia sghembo con s, si ha un gruppo armonico di punti.*

Dimostreremo la proposizione a sinistra.

Consideriamo un piano qualsiasi ρ per la u, e sia S la traccia su questo piano dell'asse di proiezione s; a, b, c, d, le tracce su ρ dei piani $\alpha \equiv sA$, $\beta \equiv sB$, $\gamma \equiv sC$, $\delta \equiv sD$. Prendiamo un punto K sul raggio c e proiettiamolo da A, B, rispettivamente, nel punto M di b e nel punto L di a. Il quadrangolo $KLMS$ ha due lati opposti, LS, KM, passanti per A, altri due, LK, SM, passanti per B, e il lato SK passante per C; dunque il lato LM dovrà passare per D. Ora, se da un punto O di s, diverso dal punto S, si proiettano le rette u,

AM, LB, LM, avremo un angolo tetraedro, di cui due spigoli opposti, OA, OL, giacciono su α, altri due,



OM, OB, su β, e dei due rimanenti uno, OK, su γ e l'altro, OD, su δ. Ciò dimostra che il gruppo $\alpha\beta\gamma\delta$ è armonico.

I quattro raggi a, b, c, d sezioni dei piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ col piano arbitrario ρ condotto per u, godono della proprietà di esser segati da u secondo un gruppo armonico di punti e di esser proiettati da s secondo un gruppo armonico di piani. E non solo la retta u, ma anche ogni altra retta u' del piano ρ, sega i raggi a, b, c, d, in quattro punti di un gruppo armonico, perchè questi punti non sono altro che le intersezioni della u' coi piani $\alpha\beta\gamma\delta$, e quindi formano un gruppo armonico pel teorema di destra. E analogamente non solo la retta s, ma ogni altra retta s', uscente da S, proietta i raggi a, b, c, d secondo un gruppo armonico di piani, e ciò pel teorema di sinistra. Dunque:

Se un gruppo di quattro raggi di un fascio è segato da una retta del suo piano secondo un gruppo armonico di punti o è proiettato da una retta pel suo centro secondo un gruppo armonico di piani, ogni retta del piano del fascio sega il gruppo secondo un gruppo armonico di punti, e ogni retta pel centro lo proietta secondo un gruppo armonico di piani.

Un gruppo di raggi che goda delle proprietà suddette, dicesi un *gruppo armonico di raggi.*

Un angolo tetraedro costruttore di un gruppo armonico di piani, che dia per sezione il gruppo armonico di raggi $a\,b\,c\,d$, sega il piano di questo gruppo secondo un quadrilatero completo di cui due vertici opposti giacciono su a, due altri su b, e dei due rimanenti uno su c, e l'altro su d. Un tal *quadrilatero* dicesi *costruttore del gruppo armonico di raggi.*

Analogamente, da un quadrangolo completo costruttore del gruppo armonico sezione dei raggi $a\,b\,c\,d$ con una retta del loro piano e che sia situato in un piano diverso da quello del fascio, si ottiene, con una proiezione dal centro del fascio, un angolo quadrispigolo completo costruttore del gruppo armonico di raggi, cioè un angolo quadrispigolo di cui due facce opposte s'intersecano in a, altre due in b, e delle due rimanenti una in c e l'altra in d.

Per dualità nel piano (o nella stella) ad un gruppo armonico di punti (o rispettivamente di piani) corrisponde un gruppo armonico di raggi.

Le proprietà già stabilite pei gruppi armonici di punti e di piani, si trasportano perciò senz'altro ai gruppi armonici di raggi.

Dalle considerazioni svolte sui gruppi armonici di quattro elementi di una forma di 1ª specie, segue che, con un'operazione di proiezione o sezione, da un gruppo armonico si passa ad un gruppo armonico (i cui elementi sono di specie diversa da quelli del gruppo iniziale), e quindi con una successione di più operazioni di proiezione e sezione, sempre si passerà da un gruppo armonico ad un gruppo armonico (i cui elementi possono essere anche della stessa specie di quelli del gruppo iniziale).

Dunque:

Se da una forma di 1ª specie si passa, con una successione di proiezioni e sezioni, ad un'altra forma di 1ª specie, un gruppo armonico di quattro elementi della prima viene trasformato in un gruppo armonico di quattro elementi della seconda.

Ciò si esprime brevemente dicendo che *per un gruppo di quattro elementi di una forma di 1ª specie, la proprietà di essere armonico è proiettiva.*

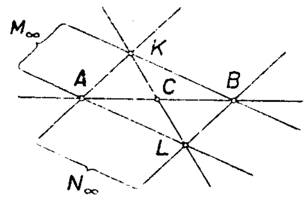
§ 15.

Proprietà metriche dei gruppi armonici.

Passiamo ora a stabilire, come conseguenza dei teoremi grafici esposti, alcune proprietà metriche dei gruppi armonici. Cominciamo a dimostrare che:

Il coniugato armonico del punto medio C della coppia di punti A, B, è il punto all'infinito della retta AB.

Conducansi perciò due rette arbitrarie AK, AL pel punto A, e da B si tirino le due rette BL, BK rispettivamente parallele alle precedenti. Indichiamo con M_∞, N_∞ i punti all'infinito delle coppie di lati opposti del parallelogramma $AKBL$, ed osserviamo che, per una notissima proprietà dei parallelogrammi, la diagonale KL passerà per C.



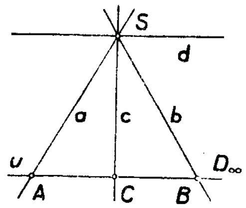
Ora il quadrangolo piano completo $KLM_\infty N_\infty$ ha due suoi lati opposti, KN_∞, LM_∞, passanti per A, altri due lati opposti, KM_∞, LN_∞, passanti per B, il lato KL passante per C ed il lato $M_\infty N_\infty$ pel punto improprio D_∞ della AB. Dunque il gruppo $ABCD_\infty$ è armonico, c. d. d.

Due rette a, b di un fascio, insieme alle bisettrici c, d dei loro angoli, costituiscono un gruppo armonico $a\,b\,c\,d$.

Infatti, segando i quattro raggi con una retta u parallela a d, e quindi perpendicolare a c, otterremo i quattro punti $ABCD_\infty$, ove D_∞ è il punto all'infinito di u.

Ora, dall'esame dei due triangoli rettangoli uguali ACS, BCS, risulta subito che $AC = CB$, ossia che C

è medio fra A, B. Dunque il gruppo $ABCD_\infty$ è armonico, e poichè abbiamo notato (§ 14) che proiettando da un punto un gruppo armonico di punti, si ottiene un gruppo armonico di raggi, potremo concludere che $a\,b\,c\,d$ è armonico.



La proposizione precedente s'inverte in questo modo:

Se un gruppo $a\,b\,c\,d$ è armonico e due raggi coniugati c, d sono perpendicolari, essi bisecano gli angoli formati dagli altri due.

Infatti, conducendo, come prima, la u parallela a d, e quindi perpendicolare a c, il gruppo $ABCD_\infty$ risulterà armonico e quindi C sarà medio tra A, B. Ne segue l'uguaglianza dei due triangoli rettangoli ACS, BCS e quindi il fatto che c biseca uno degli angoli $a\,b$. Evidentemente d bisecherà l'altro angolo $a\,b$.

Fissiamo ora sopra una retta un verso positivo (come in Geometria analitica) ed il numero che misura un dato segmento AB della retta, rispetto ad una data unità, riguardiamolo come positivo o come negativo, secondo che percorrendo il segmento da A verso B, ci si muove nel verso positivo o nel verso contrario. Fatta questa convenzione dimostreremo che:

Se $ABCD$ è un gruppo armonico di punti, ha luogo la relazione

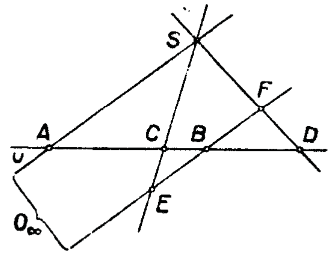
(1) $$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD},$$

e viceversa.

Verifichiamo la precedente uguaglianza in valore assoluto.

Preso fuori della retta $u = AB$, un punto S, tiriamo da B la parallela alla retta AS, e sia $O_\infty BEF$ il gruppo armonico proiezione di $ABCD$ da S su quella parallela, ove s'è indicato con O_∞ il punto improprio di EF.

Il punto B dovrà allora esser il punto medio del segmento finito EF.



Ciò posto, dai triangoli simili ACS, BCE si ricava, in valore assoluto:

(2) $$\frac{AC}{BC} = \frac{AS}{BE},$$

e dai triangoli simili ADS, BDF si ricava:

(3) $$\frac{AD}{BD} = \frac{AS}{BF}.$$

Poichè $BE = BF$, ne segue:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD},$$

e l'eguaglianza (1) resta verificata in valore assoluto. Quanto al segno, si osservi che la coppia CD separando la coppia AB, uno dei due rapporti $\frac{AC}{BC}$, $\frac{AD}{BD}$ è positivo e l'altro negativo (nel caso della figura è negativo il primo e positivo il secondo).

Viceversa, se la (1) è soddisfatta, dei due punti C, D, l'uno, e sia C, dovrà essere interno al segmento finito AB, e l'altro, D, sarà esterno. Si ripeta la costruzione di prima, ottenendosi sulla EF il gruppo $O_\infty BEF$ proiezione del dato gruppo $ABCD$. I quattro punti $O_\infty BEF$

saranno distinti, perchè proiezioni dei quattro punti distinti $ABCD$, e inoltre B sarà interno al segmento finito EF.

Per dimostrare che $ABCD$ è armonico, basterà provare che è armonico il gruppo $O_x BEF$, cioè che B è il punto medio del segmento finito EF. All'uopo si ricavino, come poc'anzi, le relazioni (2), (3). Queste, confrontate colla (1), dànno in valore assoluto $BE = BF$, e siccome i due punti E, F sono distinti, B sarà il loro punto medio.

CAPITOLO QUARTO

Il postulato della continuità e il teorema fondamentale della Geometria proiettiva.

§ 16

Il postulato della continuità.

Nei postulati enunciati finora non è incluso il concetto della continuità dello spazio. Questo concetto nasce nella nostra mente dall'esame di fatti svariatissimi ed ordinariamente lo si possiede sotto una forma complessa ed indeterminata.

Così, in base alla nozione di continuità dello spazio, noi affermiamo che, se due punti A, B si muovono lungo una retta, e se in un dato istante A precede B ed in un istante successivo lo segue, in un istante intermedio i due punti si sono incontrati; è in base alla stessa nozione che ammettiamo che, muovendoci in un piano, non si possa passare dalla regione finita, delimitata da una curva chiusa, alla regione esterna, senza traversare il contorno; ecc. ecc.

Ora questi fatti ed altri analoghi, si possono far discendere logicamente dal seguente POSTULATO DELLA CONTINUITÀ (DI DEDEKIND):

Se in una forma di 1ª specie gli elementi di un segmento ordinato AB (*) son divisi in due classi tali, che A

(*) Cioè di un segmento AB considerato insieme a quel verso della forma rispetto al quale tutti gli elementi interni al segmento seguono A e precedono B.

appartenga all'una classe, che diremo prima, e B all'altra, che diremo seconda; che ogni elemento di AB appartenga ad una (almeno) delle due classi; e infine che ogni elemento della prima classe preceda (nel verso del segmento ordinato AB) un elemento della seconda, esiste un elemento C del segmento AB, tale che ogni elemento ad esso precedente appartiene alla prima classe, ed ogni elemento seguente appartiene alla seconda.

Che questo postulato introduca effettivamente una proprietà dello spazio non ammessa dai postulati precedenti, cioè che sia indipendente da questi, si dimostra nel modo che brevemente accenniamo.

Si riferiscano i punti dello spazio a tre assi cartesiani ortogonali x, y, z, e si chiami *spazio razionale* l'insieme di tutti i punti proprî che hanno le tre coordinate razionali e dei punti improprî che hanno i coseni di direzione razionali o differenti per un medesimo fattore da tre numeri razionali. Si chiami *piano* (razionale) di questo spazio, l'insieme delle soluzioni razionali di una equazione lineare a coefficienti razionali in x, y, z; *retta* (razionale) l'insieme delle soluzioni razionali comuni a due tali equazioni. Allora in questo spazio razionale si verificano (ricorrendo alla teoria delle equazioni lineari) tutti i postulati che noi abbiamo introdotti finora, ma non il postulato della continuità.

Basta, per convincersene, considerare i punti razionali dell'asse x, ed osservare che il segmento finito fra l'origine ed il punto di ascissa 2, può esser diviso in due classi ponendo nella prima tutti i punti del segmento stesso la cui x, elevata a quadrato, dà un numero minore di 2, e nell'altra classe i punti la cui x, elevata a quadrato, dà un numero maggiore di 2.

Queste due classi soddisfanno alle condizioni richieste dal postulato di Dedekind, ma il confine di separazione tra esse non esiste nello spazio razionale, perchè è il punto che ha per ascissa il numero irrazionale $\sqrt{2}$.

§ 17.

Concetto generale di corrispondenza. Corrispondenze ordinate.

Già nel parlare delle forme di 1ª specie prospettive (§ 6), abbiamo visto un esempio di corrispondenza tra due classi di enti e un altro esempio lo abbiamo incontrato nel § 13. Ora conviene che ritorniamo sul concetto di corrispondenza, precisandolo ed allargandolo, perchè oltre ad essere questo un concetto fondamentale pel nostro studio, lo è pure per tutta la Matematica moderna.

Diciamo che fra due classi di oggetti c'è una *corrispondenza*, quando è assegnata una legge tale che, preso un oggetto qualsiasi dell'una classe, si possono, con quella legge, determinare certi oggetti dell'altra.

Le due classi possono anche coincidere ed allora si ha una corrispondenza fra gli oggetti di una medesima classe.

Ecco qualche esempio.

Date due variabili x ed y legate dalla

$$y^2 - x^3 = 0,$$

chiamando omologhi due valori di x, y, che sieno soluzioni dell'equazione precedente (con che si fissa la legge della corrispondenza), ad ogni valore di x verranno a corrispondere due valori di y e ad ogni valore di y tre valori di x.

Similmente l'equazione

$$y - \sin x = 0$$

associa ad ogni valore di x *un* valore di y e ad un valore di y *infiniti* valori di x, appartenenti ad una progressione aritmetica di ragione 2π; ecc. ecc.

Ma il caso che è per noi più importante, è quello della *corrispondenza biunivoca*, che si ha allorquando ad ogni elemento dell'una classe resta associato, con la legge data, *un solo* elemento dell'altra e viceversa.

Una punteggiata ed un fascio di raggi prospettivi (§ 6) risultano riferiti biunivocamente, se si dicono *corrispondenti* od *omologhi* un punto della prima ed un raggio del secondo, allorquando si appartengono.

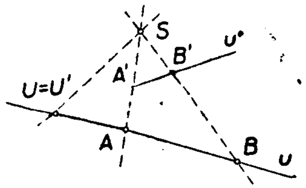
I valori di due variabili x, y legate da una relazione bilineare:

$$a x y + b x + c y + d = 0, \qquad \text{con } a d - b c \neq 0,$$

risultano riferiti biunivocamente, quando si associno le coppie di valori di x, y che son soluzioni della equazione precedente; ecc.

Limitiamoci a considerare corrispondenze biunivoche tra forme fondamentali, ed in ispecial modo tra forme di 1ª specie.

Un elemento dicesi *unito* quando è omologo di se stesso (vedi un esempio a pag. 49). Così, se si hanno due punteggiate prospettive u, u', cioè sezioni di uno stesso fascio di raggi S, e si chiamano omologhi due punti delle due punteggiate che sieno allineati con S, il punto U, comune alle u, u', viene ad essere unito.



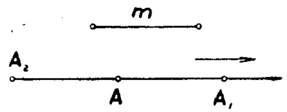
Una corrispondenza biunivoca tra due forme fondamentali F, F', si può concepire come l'insieme di due operazioni: e cioè dell'operazione ω, che fa passare da un elemento A di F all'elemento omologo A' di F', e dell'operazione (inversa della precedente), che indichiamo col simbolo ω^{-1}, la quale fa passare da un elemento B' di F' all'elemento omologo B di F.

Se le due forme F, F' son sovrapposte, si può fare a meno di parlare di due forme sovrapposte e riguardare invece la ω e la ω^{-1} come due operazioni, l'una inversa dell'altra, applicate ad una medesima classe di elementi.

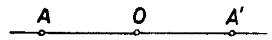
Un elemento che sia unito per la ω è evidentemente unito anche rispetto all'operazione inversa.

Quando le due forme F, F' son sovrapposte, un elemento A del comune sostegno può pensarsi come appartenente all'una o all'altra delle due forme, ossia può assoggettarsi all'una o all'altra delle operazioni ω, ω^{-1}. In generale da A si ottengono in tal modo due elementi distinti A_1 ed A_2. Quando gli elementi A_1, A_2 coincidono, si dice che i due elementi A, A_1 *si corrispondono in doppio modo*. Perchè quesso accada per due elementi qualunque, omologhi rispetto ad ω, bisogna che la operazione ω coincida colla ω^{-1}. In tal caso la corrispondenza tra le due forme fondamentali dicesi *simmetrica* o *involutoria*. Un esempio di una tal corrispondenza lo abbiamo già incontrato nel § 13, ove appunto le costruzioni che conducevano dal punto C al corrispondente D, applicate, *nello stesso ordine*, al punto D, facevan tornare a C.

Ecco qualche altro esempio. Se chiamiamo omologo di un punto sopra una retta, il punto distante dal precedente di un certo segmento m, in un dato verso, per costruire di un punto l'omologo, bisogna assoggettarlo ad un'operazione ω, che consiste in una traslazione del punto dato secondo il segmento m, nel verso fissato. L'operazione inversa ω^{-1} è in tal caso la traslazione, secondo il segmento m, nel verso opposto al precedente. La ω fa passare così dal punto A al punto A_1; mentre la ω^{-1} fa passare da A al punto A_2, diverso da A_1. La ω non è dunque involutoria.



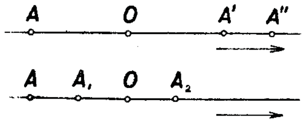
Se invece chiamiamo omologo di ogni punto della retta il suo simmetrico rispetto ad un punto O, la corrispondenza che si otterrà (caso particolare di quella del § 13) sarà evidentemente involutoria.



Una particolare corrispondenza biunivoca tra gli elementi di una forma fondamentale, è l'*identità*, cioè la corrispondenza banale che si ottiene chiamando omologo di ogni elemento se stesso. *Rappresenteremo l' identità col simbolo* 1.

Se tra due forme fondamentali F, F' si ha una corrispondenza biunívoca ω e tra F' e F'' una corrispondenza biunivoca τ, tra F ed F'' nascerà una corrispondenza biunivoca generata con questa legge: di un elemento A di F costruiscasi l'omologo A' in F', mediante la ω, e di A' l'omologo A'' in F'', mediante la τ, e si associ l'elemento A all'elemento A'' a cui si perviene. La corrispondenza così generata tra F ed F'', dicesi *prodotto delle due corrispondenze* ω e τ, e s' indica col simbolo $\omega\,\tau$, scrivendo prima il simbolo ω della operazione che si applica per la prima.

In particolare, se le tre forme son sovrapposte, la ω, τ e la $\omega\,\tau$ si possono riguardare come tre operazioni applicate agli elementi di un'unica forma, ed allora ci possiamo domandare se la corrispondenza $\tau\,\omega$, che risulta eseguendo prima l'operazione τ eppoi la ω, sia identica alla corrispondenza $\omega\,\tau$. In generale ciò non accadrà, come si verifica subito sopra esempi. Così, se si considera sopra una punteggiata la corrispondenza ω, che nasce dal chiamare omologhi due punti simmetrici rispetto ad un punto fisso O, e τ la corrispondenza che nasce chiamando omologo di un punto quello che dista dal primo di un dato segmento, in un dato verso, si verifica subito che $\omega\,\tau$ non è uguale alla $\tau\,\omega$. (Nella prima figura da A si passa ad A' mediante la ω e da A' ad A'' mediante la τ; nella seconda si passa da A ad A_1, mediante la τ, e da A_1 ad A_2 mediante la ω).



Ma se accade che $\omega\,\tau \equiv \tau\,\omega$ (*), allora si dice che *le due corrispondenze son permutabili*. In seguito vedremo esempi di tali coppie di corrispondenze.

(*) Scrivendo $\alpha \equiv \beta$, ove α, β sono i simboli di due corrispondenze relative alle medesime classi di elementi, intendiamo che α sia *identica* a β, cioè che α, β sieno nomi diversi di una stessa corrispondenza.

A proposito del prodotto di due corrispondenze, giova avvertire che *il prodotto di una corrispondenza per la sua inversa è l' identità*, perchè, se la ω fa passare da A ad A', la ω^{-1} fa passare da A' ad A, e quindi la $\omega\,\omega^{-1}$ fa passare da A ad A. In simboli questo fatto si esprime colla scrittura

$$\omega\,\omega^{-1} \equiv 1.$$

Il concetto di prodotto si estende subito a tre, a quattro, ad un numero qualunque di corrispondenze. Così, per prodotto di tre corrispondenze ω_1, ω_2, ω_3, che s' indicherà col simbolo $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$, s' intenderà il prodotto delle due corrispondenze $\omega_1\,\omega_2$ ed ω_3. In simboli

$$\omega_1\,\omega_2\,\omega_3 \equiv (\omega_1\,\omega_2)\,\omega_3.$$

È ben chiaro che pel prodotto di più corrispondenze vale la proprietà associativa (ma non, in generale, la commutativa).

Passiamo ora alle *corrispondenze ordinate*. Una corrispondenza tra due forme di 1ª specie u, u', dicesi *ordinata*, quando essa fa corrispondere ad elementi susseguentisi dell'una forma, elementi susseguentisi dell'altra; e quindi fa passare da un verso della u ad un verso della u' (vedi un esempio nel § 13).

Quando le due forme son sovrapposte, la corrispondenza ordinata dicesi *concorde*, se ad un verso del comune sostegno, fa corrispondere lo stesso verso. Così, se si assume come forma u' la punteggiata che si ottiene facendo scorrere su se stessa una punteggiata u, di un certo segmento e in un certo verso, la corrispondenza biunivoca che si ottiene fra le posizioni iniziali e le posizioni finali dei punti della retta mobile, è ordinata e concorde.

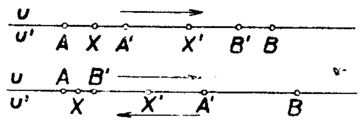
Una corrispondenza ordinata tra due forme di 1ª specie sovrapposte u, u', dicesi *discorde*, quando ad un verso del comune sostegno, fa corrispondere il verso opposto. Un esempio di una tal corrispondenza lo abbiamo già visto nel § 13. La simmetria rispetto ad un punto di una retta, è una corrispondenza ordinata e discorde, caso particolare di quella considerata nel § 13.

Ora, sulle corrispondenze ordinate tra forme di 1ª specie sovrapposte, stabiliremo un teorema, mediante il quale la nozione della continuità entrerà in tutte le nostre deduzioni successive. Ma invece di dedurre logicamente questo teorema dal postulato di Dedekind, per opportunità didattica, ci limiteremo a verificarlo intuitivamente. Dal punto di vista logico *la proposizione cui alludiamo sarà considerata dunque come un* POSTULATO, CHE, PER NOI, SOSTITUISCE QUELLO DI DEDEKIND :

Se tra due forme di 1ª specie sovrapposte u, u', si ha una corrispondenza ordinata, che faccia passare da un segmento AB della u, ad un segmento $A'B'$ della u', tutto contenuto in AB, allora esiste nel segmento $A'B'$ un elemento M unito per la corrispondenza e tale che nel segmento ordinato AB non esistono altri elementi uniti precedenti M.

Per fissare le idee, consideriamo il caso in cui u, u' son due punteggiate, ed escludiamo l'ipotesi che A ed A' coincidano, perchè allora la proposizione è senz'altro verificata.

Se un punto X va da A in B descrivendo il segmento considerato AB, il suo omologo X' va da A' in B' de-



scrivendo il segmento $A'B'$ interno ad AB. All'inizio del movimento X si trova in A e X' in A', ossia X precede X' ; alla fine del movimento X si trova in B e X' in B', ossia X segue X' (o coincide con X', se B' coincide con B). Dunque durante il movimento dovrà essere accaduto almeno una volta che i due punti mobili X, X' si sieno incontrati. Sia M la prima posizione in cui i due punti s'incontrano : allora M sarà unito (ed appartenente evidentemente ad $A'B'$) e non vi sarà in AB

nessun punto precedente M, che goda della stessa proprietà. Si noti che M potrebbe anche coincidere con B, se B' coincidesse con B.

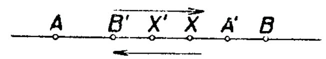
Dunque la proposizione enunciata è verificata (*).

Osservazione. La stessa conclusione sarebbe lecita anche se la corrispondenza avesse luogo non tra tutti gli elementi delle due forme sovrapposte, ma soltanto tra gli elementi dei segmenti AB, $A'B'$.

Se la corrispondenza considerata è concorde, può darsi che dopo che X ha incontrato una prima volta X' e lo ha sorpassato, X' incontri nuovamente X e lo sorpassi, ecc. ; ma certo l'ultima volta che i due punti s'incontrano, sarà X che sorpassa X' (o coincide con X', qualora B' coincida con B).

Sicchè *se la corrispondenza è concorde, nell'interno del segmento $A'B'$ si possono avere più elementi uniti (in numero dispari).*

Se la corrispondenza è discorde (come mostra la figura qui sotto) dopo che X ha incontrato una prima



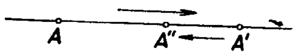
volta X' e lo ha sorpassato, continuando il movimento, i due punti procedono in senso opposto, e quindi non s'incontrano più ; sicchè *se la corrispondenza è discorde nel segmento $A'B'$ si ha un solo elemento unito.*

Un altro elemento unito si avrà analogamente nel segmento complementare di AB, il quale è contenuto nel segmento complementare di $A'B'$. Dunque *se la corrispondenza è discorde, in tutta la forma si hanno due soli elementi uniti.*

Ora questa conclusione si può applicare ad ogni corrispondenza biunivoca discorde, giacchè si dimostra che, data una tal corrispondenza, si può sempre trovare

(*) Come vedesi la spiegazione precedente non può ritenersi una dimostrazione logica, cioè una deduzione dai soli postulati introdotti, perchè in essa si fa liberamente uso della nozione intuitiva di movimento continuo.

un segmento che contenga il suo corrispondente. Infatti, si consideri di un elemento A che non sia unito (e lo troveremo certo, perchè se tutti gli elementi fossero uniti la corrispondenza sarebbe concorde) l'omologo A',

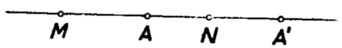


nella data corrispondenza discorde, e di A' l'omologo A''. Consideriamo quel segmento AA' che contiene A''; allora ai punti di questo segmento, ordinato nel verso $AA''A'$, corrispondono i punti di uno dei due segmenti $A'A''$, e precisamente di quello che ha il verso contrario ad $AA''A'$, cioè di quel segmento $A'A''$ che è contenuto nel segmento precedente AA'.

Si conclude perciò che in ogni corrispondenza biunivoca discorde vi sono due e due soli elementi uniti M, N. Uno di questi è interno al segmento $A'A''$ contenuto nel segmento AA', che ha il verso $AA''A'$, e l'altro è interno al segmento AA' complementare del precedente; ossia è esterno rispetto a questo. Ne viene che la coppia MN separa la coppia AA'. Poichè AA' è una coppia qualsiasi di elementi corrispondenti, giungiamo al teorema:

In ogni corrispondenza biunivoca discorde, tra due forme fondamentali di 1ª specie sovrapposte, vi sono due soli elementi uniti, ed essi separano ogni coppia di elementi corrispondenti.

Ma viceversa, non ogni corrispondenza ordinata con due elementi uniti M, N, è discorde.



Se una coppia di elementi corrispondenti AA', separa la coppia MN, allora alla terna MNA corrisponde la terna MNA' e quindi al verso MNA il verso contrario MNA'; ma se AA' non separano MN, il verso

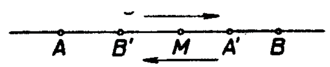
MNA coincide con MNA', ossia la corrispondenza è concorde. Si conclude pertanto che:

Una corrispondenza ordinata con due elementi uniti, tra due forme di 1ª specie sovrapposte, è concorde o discorde, secondo che una coppia di elementi corrispondenti non separa o separa la coppia degli elementi uniti.

Osservazione. Il fatto sopra notato, che quando cioè fra il segmento AB ed il segmento $A'B'$ in esso contenuto, si ha una corrispondenza biunivoca concorde, vi possono essere in $A'B'$ più elementi uniti, non ci serve nel seguito e non occorre pertanto che ne diamo una dimostrazione logica, deducendola come conseguenza della proposizione di pag. 67, che abbiamo detto di assumere come postulato (della continuità).

Invece l'altra circostanza sopra affermata, e intuitivamente giustificata, che cioè, se la corrispondenza è discorde, vi è nel segmento $A'B'$ un solo elemento unito, sarà nel seguito più volte invocata. Aggiungiamo dunque qualche parola, per mostrare com'essa segua logicamente dalla proposizione di pag. 67.

Sia

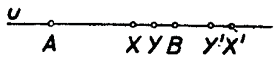


M un elemento unito appartenente ad $A'B'$: un tale elemento unito esiste, appunto per la proposizione di pag. 67. Poichè la corrispondenza è discorde, ai punti X del segmento AM, che ha il verso $AB'M$, corrisponderanno i punti X' di quel segmento $A'M$ che ha il verso contrario al segmento considerato AM, e che ha quindi in comune con questo il solo estremo M. Nell'interno del segmento $B'M$ che ha il verso $AB'M$, non vi sono dunque altri punti uniti. Poichè ciò vale qualunque sia l'elemento unito M, ne deriva che in $A'B'$ non vi può essere che un solo elemento unito.

Applicazione. Faremo un'applicazione, che ci servirà in seguito, delle proprietà delle corrispondenze ordinate, alla *determinazione di una coppia che separi armonicamente due coppie date in una forma di 1ª specie.*

Per semplicità di discorso riferiamoci alla punteggiata.

Dati due punti A,B di una punteggiata u, chiamiamo omologhi due punti della u, quando separano



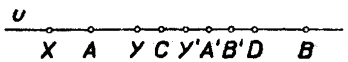
armonicamente la coppia AB. Si ottiene così la corrispondenza biunivoca e involutoria, già considerata nel § 13. Ricordiamo che tale corrispondenza è ordinata e discorde e che i punti A,B sono per essa uniti. Se X X' ed Y,Y' son due coppie di punti omologhi nella corrispondenza definita, poichè al segmento XBX' corrisponde il segmento $X'BX$, che è il segmento medesimo, ordinato in senso opposto, se Y è interno o esterno a quel segmento, Y' dovrà pure essere interno o rispettivamente esterno al medesimo. Onde le due coppie XX', YY' non si separano.

Dunque due coppie XX', YY', le quali sieno separate armonicamente da una coppia AB, non si separano mai.

Giova enunciare il risultato sotto la forma negativa seguente:

Se due coppie di elementi di una forma di 1ª specie si separano, non esiste nessuna coppia che le separi entrambe armonicamente.

Supponiamo ora di avere due coppie AB, CD che non si separino, e cerchiamo se esiste una coppia che le separi entrambe armonicamente. Riferiamoci ancora



ad una punteggiata u, e, preso un punto X della u, costruiamo il coniugato armonico Y di X rispetto ad AB, ed il coniugato armonico Y' di X rispetto a CD. Se Y coincidesse con Y', la coppia XY separerebbe armonicamente tanto AB che CD. Ora, variando X sulla u, si hanno infinite coppie YY', e la corrispondenza biunivoca, che così nasce tra Y, Y', risultando dal prodotto della corrispondenza tra Y e X, che è ordinata e discorde, e della corrispondenza tra X ed Y', che pure è ordinata e discorde, è ordinata, ma concorde. Si tratta di vedere se questa corrispondenza tra Y ed Y' ammette punti uniti.

A tal uopo si osservi che, nella corrispondenza tra Y ed Y', al punto A corrisponde il coniugato armonico A' di A rispetto a CD, ed al punto B il coniugato armonico B' di B rispetto alla stessa coppia. È chiaro che, mentre Y varia descrivendo il segmento $ACDB$, che contiene la coppia CD, il punto X varia descrivendo il segmento complementare, e si mantiene quindi sempre esterno a quel segmento CD, che non contiene A, B. Ne deriva che Y' si mantiene sempre interno al segmento suddetto CD, e perciò a fortiori interno al segmento $ACDB$ descritto da Y. Insomma, mentre Y descrive $ACDB$, Y' descrive il segmento $A'B'$ tutto contenuto nel precedente. Dovrà pertanto esistere nel suddetto segmento $A'B'$, un punto M unito per la corrispondenza tra Y,Y': questo punto M, insieme al suo coniugato armonico N, rispetto alla coppia AB, costituirà una coppia separante armonicamente tanto AB che CD. Si noti che anche il punto N risulterà unito per la corrispondenza tra Y ed Y'.

Ma circa il numero degli elementi uniti della corrispondenza tra Y ed Y', ossia circa il numero delle coppie analoghe ad MN, non possiamo dir nulla per ora, giacchè la corrispondenza tra Y ed Y' è concorde. Il risultato a cui siamo pervenuti è dunque il seguente:

Se due coppie di elementi di una forma di 1ª specie non si separano, esiste (almeno) una coppia che le separa entrambe armonicamente.

Vedremo più tardi che questa coppia è unica (§ 26).

Un corollario notevole della proposizione enunciata è questo:

Una corrispondenza biunivoca tra due forme di 1^a specie, la quale goda della proprietà di far corrispondere ad ogni gruppo armonico dell'una forma, un gruppo armonico dell'altra, è ordinata.

Dette u, u' le due forme di 1^a specie, basterà invero provare che a due coppie qualunque AB, CD della u, che si separano, corrispondono sempre, mediante la data corrispondenza, due coppie $A'B'$, $C'D'$, della u', che pure si separano, e viceversa; giacchè da ciò segue subito che ad elementi succedentisi sulla u, corrispondono elementi pure succedentisi sulla u'. Se le $A'B'$, $C'D'$ non si separassero, esisterebbe una coppia $X'Y'$ che le separerebbe entrambe armonicamente. Dicansi allora X, Y gli elementi di u omologhi di X', Y' e si osservi che, per l'ipotesi che la corrispondenza conservi i gruppi armonici, la coppia XY separerà armonicamente le AB, CD. Ma ciò è assurdo, perchè per ipotesi le AB, CD si separano. Dunque anche le $A'B'$, $C'D'$ debbono separarsi. Similmente si vede che a due coppie della u', che si separino, corrispondono sulla u coppie che pure si separano.

§ 18.

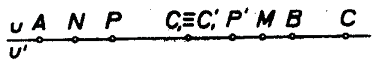
Il teorema fondamentale della Geometria proiettiva.

Se dalla forma di 1^a specie u si passa alla forma di 1^a specie u', con un numero finito di proiezioni e di sezioni, tra gli elementi delle due forme si viene a porre una corrispondenza biunivoca ordinata, che conserva i gruppi armonici (ved. la fine del § 14). Ora ci possiamo domandare se, oltre alle corrispondenze così costruite, ve ne sieno altre che conservino i gruppi armonici. In altri termini si presenta la questione di caratterizzare le corrispondenze biunivoche, che conservano i gruppi armonici, assegnando la loro costruzione.

Chiameremo CORRISPONDENZA PROIETTIVA *o* PROIETTIVITÀ *o* OMOGRAFIA, *una corrispondenza biunivoca tra due forme di 1^a specie, che faccia passare da ogni gruppo armonico dell'una forma ad un gruppo armonico dell'altra*, e cominceremo a dimostrare il seguente:

TEOREMA FONDAMENTALE (DI STAUDT). *Ogni proiettività tra due forme di 1^a specie sovrapposte, la quale sia dotata di tre elementi uniti, è l'identità.*

Riferiamoci al caso di due punteggiate sovrapposte u, u', e sia ω la proiettività che fa passare da u ad u', e nella quale i tre punti A, B, C sono uniti. Osserviamo anzitutto che la ω è ordinata (ved. la fine del § precedente) ed anzi è concorde, perchè fa corrispondere al verso determinato della terna ABC, il verso medesimo. Se dunque nell'interno del segmento AB, che non contiene C, esiste un punto P, che non sia unito per la ω, il suo omologo P' dovrà cadere nell'interno dello stesso segmento. Supponiamo per esempio che P' cada tra P e B (si vedrà che il ragionamento successivo è applicabile anche se P' cade tra A e P). Siccome nel seguito parleremo esclusivamente di segmenti contenuti nel segmento AB, che non contiene C, li denoteremo scrivendone soltanto gli estremi.



Nella ω al segmento ordinato PB corrisponde il segmento $P'B$, che è tutto contenuto in PB, e quindi, per la proposizione sulle corrispondenze ordinate stabilita nel § precedente, esisterà in $P'B$ un punto M, unito per la corrispondenza, e tale che nel segmento PB non vi saranno punti uniti precedenti M. Analogamente nella corrispondenza ω^{-1}, che fa passare da u' ad u, e che ha gli stessi punti uniti della ω, al segmento $P'A$ corrisponde il segmento PA, interno a $P'A$; e quindi in PA esisterà un punto N unito, che, nel verso $P'A$, non sarà preceduto da altri elementi uniti. Ne segue che nel segmento NM non esisteranno punti uniti.

Ora questa conclusione è assurda. Infatti, costruiscasi il coniugato armonico C_1 del punto C rispetto alla coppia MN, e si dica C'_1 l'omologo del punto C_1 nella corrispondenza ω. Poichè la ω conserva i gruppi armonici, il gruppo $MNCC'_1$ formato dai corrispondenti dei punti $MNCC_1$, che per costruzione formano un gruppo armonico, sarà pure un gruppo armonico; e siccome il coniugato armonico di C rispetto a MN è unico, il punto C'_1 coinciderà con C_1, ossia C_1 sarà unito. Di più C_1, separando armonicamente con C la coppia MN, è interno al segmento MN, che non contiene C; cioè precisamente a quel segmento MN, entro il quale poco fa dicevamo che non vi erano punti uniti. Ciò dimostra l'assurdità della conclusione a cui eravamo pervenuti. Ma dunque è assurda l'ipotesi dalla quale partimmo, che cioè nell'interno di AB esista un punto P diverso dal suo omologo P'; ossia tutti i punti del segmento AB debbon essere uniti.

In modo analogo si prova che sono uniti tutti i punti del segmento BC che non contiene A, e del segmento CA che non contiene B; e siccome l'insieme di questi due segmenti e del segmento AB prima considerato, esaurisce tutta la punteggiata, si conclude che ogni punto di questa è unito, ossia che la corrispondenza ω non è altro che l'identità.

La dimostrazione, salvo i nomi degli elementi $A, B, C, P, \ldots$ considerati, vale evidentemente per ogni coppia di forme di 1ª specie sovrapposte.

Dal teorema dimostrato segue come corollario immediato che *se esiste una proiettività, la quale faccia corrispondere a tre dati elementi distinti A,B,C di una forma di 1ª specie u, tre dati elementi distinti A',B',C' di un'altra forma di 1ª specie u', questa proiettività è unica.*

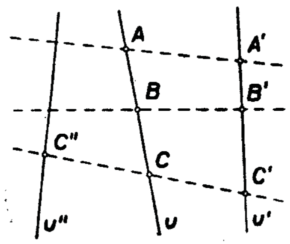
Diciamo infatti ω la proiettività che per ipotesi fa corrispondere ad A,A'; a B,B'; a C,C', e sia τ una proiettività diversa, se è possibile, dalla prima, e godente della stessa proprietà. Tra gli elementi di u possiamo porre la corrispondenza $\omega\tau^{-1}$ risultante dal prodotto di ω per l'inversa di τ. Questa corrispondenza prodotto, ricordiamoci, si costruisce nel modo seguente:

di un elemento P di u si trova l'omologo P' (appartenente ad u') mediante la ω, e di P' si trova l'omologo P_1 (appartenente ad u) mediante la τ^{-1}; e si fa corrispondere all'elemento P l'elemento P_1.

La $\omega\tau^{-1}$ è biunivoca e conserva evidentemente i gruppi armonici, perchè di queste proprietà godono le due operazioni ω, τ^{-1}. La $\omega\tau^{-1}$ è cioè una proiettività. In essa sono uniti i tre elementi A,B,C, perchè la ω fa passare da A ad A' e la τ^{-1} da A' ad A; ecc. Dunque la $\omega\tau^{-1}$ è l'identità, ossia, qualunque sia la posizione di P, sarà $P_1 \equiv P$. Ciò vuol dire che la ω e la τ fanno corrispondere ad ogni elemento P di u, il medesimo elemento di u', e quindi le due corrispondenze coincidono, c. d. d.

Ora proviamo che *date due terne di elementi distinti A, B, C; A',B',C', appartenenti rispettivamente a due forme di 1ª specie u, u', esiste sempre almeno una proiettività che fa corrispondere ad A, A', a B, B', a C, C'*: il qual risultato, combinato con quello or ora ottenuto, ci porterà a concludere l'unicità di questa corrispondenza.

Con proiezioni e sezioni, ci possiamo sempre ridurre al caso in cui le due forme di 1ª specie u, u' sono due punteggiate sghembe; e quindi basterà dimostrare il teorema in questo caso.



Si osservi anzitutto che le rette AA', BB', CC', che congiungono le coppie di punti che consideriamo come omologhi nella corrispondenza da costruirsi, sono a due a due sghembe. Infatti, se AA', BB', ad es., fossero complanari, il loro piano conterrebbe i quattro punti A, B, A', B' e quindi le due rette u, u', contro il supposto che queste sieno sghembe.

Preso un punto C'' dalla CC', diverso dai punti C, C', tiriamo per C'' l'unica retta u'' che si appoggia alle AA', BB' (vedi a pag. 15), e consideriamo il fascio di piani che ha per sostegno u''. Se chiamiamo omologhi due punti delle u, u', quando son sezioni di uno stesso piano del fascio, abbiamo tra le punteggiate u, u' una corrispondenza biunivoca, che conserva i gruppi armonici (vedi la fine del § 14), ossia una proiettività; ed in questa sono omologhi i punti A, A'; B, B'; C, C', perchè il piano delle u'', AA' sega le u, u' precisamente nei punti A, A'; ecc.

Dunque resta provato che tra le u, u' si può porre una corrispondenza proiettiva in cui sono omologhi A, A'; B, B'; C, C'; ed anzi questa corrispondenza è una prospettività (vedi a pag. 25), perchè le due punteggiate vengono ad esser riferite come sezioni di un medesimo fascio di piani.

Ora, per costruire la proiettività che tra due forme qualsiansi di 1ª specie resta determinata da tre coppie di elementi omologhi, basterà eseguire prima le operazioni di proiezione e sezione, che trasformano le due date forme in due punteggiate sghembe; costruire la proiettività tra queste, nel modo visto, eppoi, eseguendo in senso inverso le operazioni precedenti di proiezione e sezione, ritornare alle forme primitive. Sicchè la proiettività tra queste due forme si costruisce in definitiva con un numero finito di proiezioni e sezioni.

Concludendo possiamo enunciare il seguente teorema:

Dati tre elementi distinti A,B,C di una forma di 1ª specie e tre elementi distinti A',B',C' di un'altra forma di 1ª specie, esiste una ed una sola proiettività fra le due forme, che fa corrispondere ad A,A', a B,B', a C,C'; e questa proiettività si costruisce con un numero finito di proiezioni e sezioni.

Questo teorema ci dice in sostanza che la classe di esempi addotti al principio di questo §, come corrispondenze biunivoche che conservano i gruppi armonici, abbraccia tutte le corrispondenze dotate di questa proprietà.

La proiettività che tra due forme di 1ª specie u,u'

vien individuata da tre coppie A,A'; B,B'; C,C' di elementi omologhi, s'indicherà talora col simbolo $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$. Quando poi si vorranno distinguere le due operazioni di cui consta la proiettività, e cioè: quella che fa passare dagli elementi di u agli omologhi elementi di u', e quella, inversa della precedente, che fa passare dagli elementi di u' agli omologhi sopra u, s'indicherà la prima col simbolo $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ e la seconda col simbolo $\begin{pmatrix} A'B'C' \\ A\,B\,C \end{pmatrix}$.

CAPITOLO QUINTO

Proiettività tra forme di 1ª specie.

§ 19.

Costruzioni delle proiettività tra forme di 1ª specie.

Passiamo ora ad occuparci delle *costruzioni delle proiettività tra forme di prima specie*, nell' intento di stabilire alcune regole semplici per determinare di ogni elemento l'omologo, una volta individuata una proiettività.

Ci occuperemo delle forme di 1ª specie dello stesso nome, giacchè, se due forme u, u' fossero di nome diverso, assoggettando una di esse, u, ad una proiezione o sezione, si passerebbe ad una forma, u_1, omonima con l'altra, u'; e quindi le costruzioni delle proiettività tra u ed u' si farebbero colle stesse operazioni che permettono di costruire le proiettività tra u_1 ed u', con l'aggiunta ulteriore della sezione o proiezione che fa passare da u_1 ad u.

Il caso di due punteggiate sghembe ed il caso duale di due fasci di piani, sono esauriti dai seguenti teoremi, dei quali quello di sinistra è gia stato implicitamente dimostrato nel § precedente:

Due punteggiate sghembe proiettive, sono prospettive, cioè sezioni di uno stesso fascio di piani.

Due fasci proiettivi di piani cogli assi sghembi, sono prospettivi, cioè proiezioni di una stessa punteggiata.

Abbiamo veduto che come asse del fascio di piani di cui si parla nell'enunciato di sinistra, si può assumere una qualunque delle infinite rette, che si appoggiano alle congiungenti di tre coppie di punti omologhi, nella proiettività data tra le due punteggiate sghembe.

Dualmente, come sostegno della punteggiata di cui si parla a destra, si può assumere una qualunque delle rette, che si appoggiano alle intersezioni di tre coppie di piani omologhi, nella proiettività data tra i due fasci di piani.

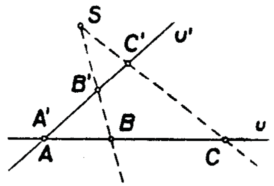
La costruzione d'una proiettività data tra due fasci di raggi non complanari, o tra due fasci di piani cogli assi incidenti, si ottiene subito segando i due fasci (di raggi o di piani) con due rette sghembe.

Prima di passare ad esaminare il caso di due punteggiate o di due fasci di raggi complanari, dimostreremo i seguenti teoremi, duali tra loro nel piano:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due punteggiate distinte, proiettive e complanari, sieno prospettive, è che il punto ad esse comune sia unito.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due fasci di raggi distinti, proiettivi e complanari, sieno prospettivi, è che il raggio ad essi comune sia unito.

Dimostriamo il teorema di sinistra. La condizione è necessaria, perchè nella corrispondenza che intercede tra due punteggiate, le quali sieno sezioni di uno stesso fascio di raggi, al punto comune alle due punteggiate corrisponde se stesso.



Viceversa, se al punto comune alle due punteggiate proiettive u, u', pensato come punto A della u, corrisponde nella u' il punto A' coincidente con A, la proiettività tra u, u' potrà individuarsi mediante le tre coppie AA', BB', CC', ove BB', CC' sono due altre coppie di punti omologhi. Ora, nella prospettività che ha per centro il punto $S \equiv BB'.\,CC'$, si corrispondono le tre coppie suddette; dunque, pel teorema con cui si chiude il § precedente, la proiettività data tra u, u' coinciderà colla prospettività di centro S.

Per dualità nello spazio i due teoremi enunciati dànno luogo ai seguenti (duali tra loro nella stella):

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due fasci di piani (distinti) proiettivi appartenenti ad una stella, sieno prospettivi, è che il piano ad essi comune sia unito.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due fasci di raggi (distinti) proiettivi, appartenenti ad una stella, sieno prospettivi, è che il raggio ad essi comune sia unito.

In una stella, per fasci di piani prospettivi si dovranno intendere due fasci proiezioni da due raggi della stella di un medesimo fascio di raggi (della stella); e per fasci di raggi prospettivi, si dovranno intendere due fasci sezioni con due piani della stella, di un medesimo fascio di piani (della stella).

Ritornando ora ai due teoremi di Geometria piana, applichiamoli a dimostrare che:

Proiettando due punteggiate distinte, proiettive e complanari, da due centri situati sopra una retta che congiunga due punti omologhi, si ottengono due fasci di raggi prospettivi.

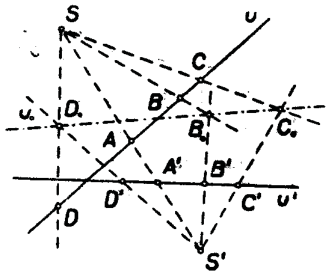
Segando due fasci di raggi distinti, proiettivi e complanari, con due rette passanti pel punto comune a due raggi omologhi, si ottengono due punteggiate prospettive.

Infatti (a sinistra) chiamando omologhi due raggi che dai due centri suddetti proiettano due punti corrispondenti nella proiettività tra le due punteggiate, si ottiene fra i due fasci di raggi una corrispondenza biunivoca, che conserva i gruppi armonici, cioè una proiettività, ed in essa il raggio che congiunge i due centri di proie-

zione viene ad essere unito. La proiettività in questione è dunque una prospettività.

Da questi teoremi si deducono subito costruzioni molto semplici della proiettività tra due punteggiate o tra due fasci di raggi complanari.

Sieno infatti u, u' due punteggiate e sia data tra esse una proiettività $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$.

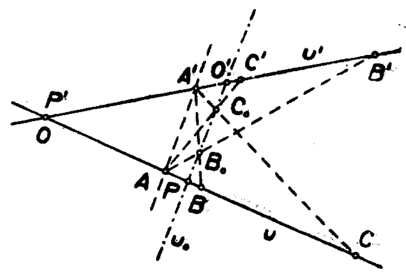


Da due punti S, S' della AA' (diversi rispettivamente dai punti A, A') proiettiamo le due punteggiate u, u'. I raggi che proiettano le coppie di punti omologhi si dovranno incontrare nei punti di una retta u_0, che sarà l'asse della prospettività tra i fasci S, S'.

Ora questo asse si costruisce osservando che deve passare pei punti $B_0 \equiv SB.\,S'B'$ e $C_0 \equiv SC.\,S'C'$; dunque, se si vuole l'omologo nella u' di un punto D della u, basterà proiettare D da S nel punto D_0 di u_0, e D_0 da S' nel punto D' della u'.

Le operazioni stesse, in ordine inverso, faranno passare da D' a D.

Lasciamo al lettore la cura di disegnare la costruzione duale per due fasci di raggi proiettivi.



Una speciale importanza acquista la costruzione esposta, quando i due punti S, S' coincidano rispettivamente con A' ed A; cioè quando si proietti la u da un punto di u', e la u' dal punto corrispondente della u.

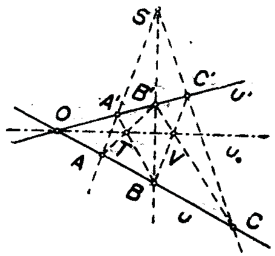
In tal caso la retta u_0 a cui si perviene, la quale contiene tutti i punti del tipo $AX'.\,A'X$, ove X, X' è una coppia *qualsiasi* di punti omologhi nella proiettività tra u e u', riesce indipendente, come facilmente vedremo, dalla scelta dei punti omologhi A, A' : cioè essa contiene anche i punti comuni alle rette YX', $Y'X$, ove Y, Y' è un'altra coppia *qualsiasi* di punti omologhi.

Affine di abbreviare il linguaggio, diremo *rette associate* (rispetto alla data proiettività) le coppie di rette del tipo YX', $Y'X$. Allora l'affermazione precedente si può enunciare sotto forma più concisa dicendo che *tutte le coppie di rette associate si segano in punti di una medesima retta.*

Per dimostrarlo, supponiamo dapprima che la proiettività tra u, u' non sia una prospettività. Allora al punto comune alle due punteggiate, pensato come punto O della u, o come punto P' della u', corrisponderanno rispettivamente in u' ed u due punti tra loro diversi O' e P ; e siccome u_0 contiene tutti i punti comuni alle rette associate che passano per A, A', il punto $AO'.A'O$ ed il punto $AP'.A'P$ giaceranno sopra u_0. Ma $AO'.A'O$ non è altro che il punto O' ed $AP'.A'P$ non è altro che il punto P : dunque la retta u_0 coincide con la retta $O'P$.

Poichè le posizioni dei punti O', P dipendono solo dalla proiettività data, e non dalla coppia dei punti A', A, che abbiamo assunti come centri di proiezione, si conclude che la retta u_0 non varia mutando la coppia A, A'.

Quando le due punteggiate u, u' son prospettive rispetto al centro S, l'asse di prospettiva dei due fasci ottenuti proiettando le due punteggiate u, u' dai due punti omologhi A', A, deve intanto passare pel punto $O \equiv uu'$, in quanto questo punto è unito; e deve inoltre contenere il punto $T \equiv AB'.A'B$, ove B, B' sia un'altra coppia qualunque di punti omologhi. Ma lo stesso può dirsi dell'asse di prospettiva dei fasci ottenuti proiettando u, u' da B', B ;



dunque i due assi di prospettiva concidono. Con ciò la proposizione è completamente dimostrata.

La retta che contiene tutti i punti comuni alle coppie di rette associate rispetto ad una proiettività tra due punteggiate complanari e distinte, e che sega le due punteggiate nei punti omologhi del punto ad esse comune, pensato come appartenente all'una od all'altra, dicesi ASSE DI COLLINEAZIONE della data proiettività.

Una volta costruito l'asse di collineazione della proiettività tra due punteggiate, si trova subito l'omologo di un punto D della u, proiettando D da un punto qualsiasi A' della u' nel punto D_0 dell'asse, e proiettando D_0 dal punto A corrispondente ad A', nel punto D' di u'.

Osservazione. Nel caso di due punteggiate prospettive, l'asse di collineazione si chiama anche la *polare* del centro S di prospettiva, rispetto alle due punteggiate. Dalla considerazione del quadrilatero completo che ha per lati AA', BB', AB', $A'B$, si rileva subito che la polare u_0 di S rispetto alle u, u', è la coniugata armonica della retta OS rispetto alle due rette u, u'. Quindi, viceversa, ogni punto di u_0 ha per polare OS.

Dualmente : dati due fasci di raggi U, U' proiettivi, distinti e complanari, le rette che congiungono le coppie di *punti associati* come yx', $y'x$, ove xx', yy', son due coppie di raggi omologhi nella data proiettività, passano tutte per un punto U_0, che vien proiettato dai centri U, U' secondo i due raggi omologhi del raggio comune UU', pensato come appartenente all'uno od all'altro fascio, e questo punto U_0 dicesi CENTRO DI COLLINEAZIONE della data proiettività.

Per trovare di un raggio d del fascio U, il raggio d' corrispondente in U', si segherà d con un raggio qualsiasi a' di U', e si proietterà il punto da', mediante il raggio d_0 passante pel centro di collineazione U_0; eppoi s' intersecherà d_0 col raggio a omologo di a' e si proietterà infine d_0a mediante il raggio d' del fascio U'.

Osservazione. Nel caso di due fasci prospettivi, il centro di collineazione U_0 si chiama anche il *polo* dell'asse s di prospettiva, rispetto ai centri U, U' dei due fasci. Si vede facilmente che U_0 è il coniugato armonico del punto $s.UU'$ rispetto alla coppia U, U'; sicchè il polo di ogni retta passante per U_0 è il punto $s.UU'$.

Per costruire una proiettività tra due punteggiate sovrapposte, basterà proiettarle da due punti distinti, complanari col sostegno delle due punteggiate, e profittare della costruzione esposta per le proiettività tra fasci di raggi.

Dualmente dicasi per due fasci di raggi sovrapposti.

§ 20.

Proiettività ellittiche, paraboliche, iperboliche.

Il teorema fondamentale ci dice che una proiettività non identica tra due forme di 1ª specie, non può avere più di due punti uniti. Quindi tre casi si presentano come logicamente possibili: 1°) proiettività senza punti uniti; 2°) proiettività con un sol punto unito; 3°) proiettività con due punti uniti. Le proiettività della prima classe diconsi *ellittiche*, quelle della seconda *paraboliche* e quelle della terza *iperboliche*.

Proveremo ora l'effettiva esistenza di proiettività delle tre specie.

Se consideriamo sopra una retta u due coppie di punti AB, CD che si separino, e chiamiamo omologhi due punti X, X', che siano coniugati armonici di un medesimo punto Y rispetto ad AB, CD, la corrispondenza che nasce tra X, X', al variare di Y, è una proiettività, la quale non può avere punti uniti, perchè altrimenti esisterebbe una coppia separante armonicamente AB, CD (§ 17, Applicazione). Abbiamo così un primo esempio di proiettività ellittiche.

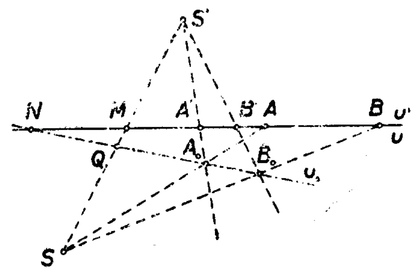
La esistenza di proiettività iperboliche risulta subito provata dal fatto che, per individuare una proiet-

tività tra due forme di 1ª specie, si possono assumere le tre coppie di elementi M, M; N, N; A, A', delle quali le prime due son costituite da elementi uniti.

L'esistenza di proiettività paraboliche risulta dal teorema che segue:

Se in una proiettività tra due forme di 1ª specie sovrapposte, esiste un elemento unito, ne esiste anche un altro, che eventualmente può coincidere col primo.

Riferiamoci al caso di due punteggiate proiettive sovrapposte u, u', e sia M il dato punto unito, AA', BB' siano due coppie di punti omologhi. Sopra una retta uscente da M si assumano due punti S, S' e da S si proietti la u, da S' la u'.



Avremo due fasci di raggi proiettivi col raggio comune unito, e quindi prospettivi. Ne viene che le rette che proiettano da S, S' le coppie di punti omologhi, si segano in punti di una medesima retta u_0, la quale è determinata dai punti $A_0 \equiv SA.S'A'$, $B_0 \equiv SB.S'B'$. Due raggi proiettanti da S, S' un medesimo punto di u_0, segano le u, u' in due punti omologhi; dunque il punto N, in cui la u_0 sega il comune sostegno delle due punteggiate, è unito. Viceversa, se c'è un punto unito diverso da M, la u_0 deve passare per quello.

Il punto N coinciderebbe con M, se u_0 passasse per M. Ciò effettivamente accade quando le u, u' sono sezioni di due fasci di raggi prospettivi con una retta passante pel punto comune all'asse di prospettiva ed al raggio che congiunge i centri dei due fasci.

Con questo *risulta provata l'esistenza di proiettività paraboliche.*

Si presenta ora la questione seguente:

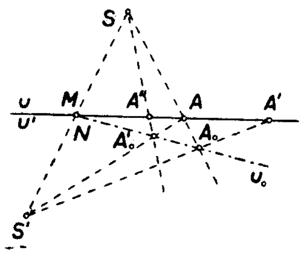
Dato un elemento M e due elementi A,A' appartenenti a due forme di prima specie sovrapposte u,u', esistono proiettività paraboliche che abbiano M per elemento unito ed in cui ad A corrisponda A'; e, nel caso affermativo, quante ne esistono?

A questa domanda non possiamo rispondere con l'applicazione pura e semplice del teorema fondamentale, perchè il ragionamento che ci ha condotto a stabilire questo teorema richiedeva che le tre coppie con cui si individuava la proiettività, fossero distinte (per quanto non si richiedesse che ciascuna di esse fosse costituita da elementi distinti).

Tuttavia siamo ormai in grado di rispondere alla questione proposta, nel modo che segue:

Esiste una ed una sola proiettività parabolica tra due forme di 1ª specie sovrapposte, la quale abbia un elemento unito in M, e che faccia corrispondere all'elemento A l'elemento A'.

Riferiamoci al caso di due punteggiate sovrapposte u,u'. Conduciamo per M una retta e su essa assumiamo due punti S,S', e congiungiamo il punto $A_0 \equiv SA$. $S'A'$ col punto M, mediante la retta u_0. Tra i due fasci S,S' risulta individuata una prospettività di asse u_0, e i due fasci suddetti son segati dalla retta MA secondo due punteggiate u,u' riferite mediante una proiettività parabolica, che ha il punto unito in M, e che fa passare da A ad A'.



Dunque, esiste almeno una proiettività parabolica soddisfacente alle condizioni enunciate. Inoltre non ne può esistere che una, perchè ogni proiettività parabolica tra u,u', che abbia in M il punto unito e che faccia passare da A ad A', dà luogo ad una prospettività tra i

fasci S,S', che ha per asse di prospettiva la retta $u_0 \equiv MA_0$; e quindi essa coincide colla proiettività dianzi considerata.

Così resta esteso il teorema fondamentale anche ad un caso a cui non si poteva applicare in modo immediato.

Osservazione. Consideriamo il punto A come appartenente alla punteggiata u', e costruiamone l'omologo A'' nella u. Perciò bisognerà proiettare A da S' nel punto A'_0 di u_0 ed il punto A'_0 da S nel punto A'' della u. Ora dalla considerazione del quadrangolo completo $SS'A_0A'_0$, si trae che il gruppo $MAA'A''$ è armonico, perchè i due lati opposti SS', $A_0A'_0$ di quel quadrangolo passano per M, i due lati opposti SA_0, $S'A'_0$ per A e dei due rimanenti uno, $S'A_0$, passa per A', e l'altro, SA'_0, per A''. Si conclude pertanto che:

L'elemento unito di una proiettività parabolica tra due forme di 1ª specie sovrapposte, insieme ad un dato elemento del comune sostegno, separa armonicamente i due elementi che corrispondono a quest'ultimo, pensato come appartenente all'una od all'altra forma.

Dicendo M l'unico elemento unito ed A_1 un elemento del sostegno delle due forme proiettive sovrapposte u,u', e prendendo come corrispondenza diretta ω ad es. quella che fa passare da u ad u', mediante l'applicazione successiva della ω otteniamo dal punto A_1 una successione di infiniti punti $A_2,A_3,A_4,\ldots$ ove A_2 è l'omologo di A_1 nella ω, A_3 l'omologo di A_2 nella ω, e così via.

Tre punti consecutivi A_{i-1},A_i,A_{i+1}, pel teorema precedente, godono della proprietà che il gruppo $MA_iA_{i-1}A_{i+1}$ è armonico: perciò si dice che i punti $A_1,A_2,A_3,A_4,\ldots$ formano una *scala armonica* rispetto all'origine M.

Si può dimostrare che, scegliendo l'indice n abbastanza grande, il punto corrispondente A_n dista dal punto M unito, meno di un segmento prefissato comunque piccolo. Non c'indugiamo sulla dimostrazione, lasciandone al lettore la cura (*).

(*) Vedi ad es. il n. 22 dei miei *Complementi di Geometria proiettiva* (Bologna, Zanichelli, 1905).

Passiamo piuttosto a stabilire il teorema:

Se una proiettività iperbolica ha per elementi uniti M, N, ed in essa all'elemento A corrisponde A', ed a B, B', esiste un'altra proiettività iperbolica cogli elementi uniti M, N e che fa passare da A a B e da A' a B'.

Questo teorema si può enunciare più brevemente dicendo che *se il gruppo $MNAB$ è proiettivo al gruppo $MNA'B'$, anche il gruppo $MNAA'$ risulta proiettivo ad $MNBB'$.* Per indicare che due gruppi di elementi son proiettivi, cioè che si passa dall'uno all'altro mediante una proiettività, si suole anche scrivere i due gruppi uno di seguito all'altro, in modo che le lettere che denotano elementi corrispondenti occupino lo stesso posto nei due gruppi, e separando i gruppi stessi mediante il segno $\barwedge$, che si legge «proiettivo a».

Allora il teorema enunciato si può esprimere in simboli così:

Dalla relazione $MNAB \barwedge MNA'B'$ si deduce la relazione $MNAA' \barwedge MNBB'$.

Ed infatti ritornando alla figura della pag. 86 e ponendo $Q \equiv SS'.u_0$, si vede che:

$$MNAA' \barwedge MQSS',$$

essendo l'un gruppo proiezione dell'altro dal punto A_0; e analogamente:

$$MNBB' \barwedge MQSS',$$

essendo l'un gruppo proiezione dell'altro da B_0. Dunque:

$$MNAA' \barwedge MNBB'.$$

Il teorema dimostrato si può estendere alle proiettività paraboliche nel modo che segue:

Se in una proiettività parabolica, che ha per elemento unito M, all'elemento A corrisponde A', ed a B, B', esiste un'altra proiettività parabolica con l'elemento unito M, e che fa passare da A a B e da A' a B'.

Infatti, se la proiettività $\begin{pmatrix} M & A & A' \\ M & B & B' \end{pmatrix}$ fosse iperbolica,

cioè dotata di un altro elemento unito N, avremmo:

$$M\,N\,A\,A' \barwedge M\,N\,B\,B',$$

e quindi, pel teorema precedente,

$$M\,N\,A\,B \barwedge M\,N\,A'\,B',$$

la quale proverebbe che la proiettività data $\begin{pmatrix} M & A & B \\ M & A' & B' \end{pmatrix}$ è dotata di un altro elemento unito N: contro il supposto. Dunque anche la proiettività $\begin{pmatrix} M & A & A' \\ M & B & B' \end{pmatrix}$ è parabolica, c. d. d.

Estendendo il significato del simbolo $\barwedge$, corrispondentemente all'estensione già notata del teorema fondamentale, potremo dire che:

Dalla relazione $MMAB \barwedge MMA'B'$ si deduce la relazione $MMAA' \barwedge MMBB'$.

Prima di terminare queste considerazioni sulle varie specie di proiettività, noteremo la proposizione seguente che si deduce immediatamente da quelle stabilite alle pag. 69-70 per le corrispondenze ordinate.

Ogni proiettività discorde è iperbolica e due elementi corrispondenti qualsiansi separano la coppia degli elementi uniti. Una proiettività iperbolica è concorde o discorde, secondo che due elementi corrispondenti non separano o separano la coppia degli elementi uniti.

Si noti come questa proposizione contenga implicitamente il fatto che *una proiettività ellittica o parabolica è sempre concorde.*

§ 21.

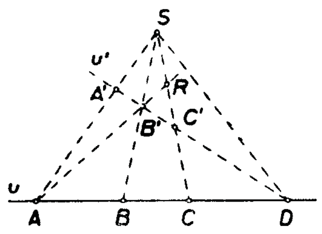
Proiettività che mutano in sè un gruppo di 4 elementi.

Dati tre elementi A, B, C di una forma di 1ª specie, in virtù del teorema fondamentale, esistono sempre delle proiettività, non identiche, che fanno corrispondere a quegli elementi gli stessi elementi in un ordine diverso.

Esse son tante (compresa l'identità) quante le permutazioni di tre elementi, cioè 6.

Ma la stessa cosa non si può affermare senz'altro per un gruppo di quattro elementi A,B,C,D ; ed in questo § ci vogliamo appunto occupare della questione di ricercare, se esistono, la proiettività che mutano in sè una quaderna di elementi.

Riferiamoci ad una punteggiata u, della quale A,B,C,D sieno quattro punti. Si proietti il gruppo A,B,C,D



da un punto S, esterno ed u, sopra una retta u' uscente da D, e si dicano A',B',C' le proiezioni di A,B,C. Avremo allora :

$$ABCD \barwedge A'B'C'D.$$

Proiettando il gruppo $A'B'C'D$ da A sulla SC, verrà :

$$A'B'C'D \barwedge SRC'C.$$

E proiettando infine $SRC'C$ da B' sulla u, avremo :

$$SRC'C \barwedge BADC.$$

Dunque risulterà :

$$ABCD \barwedge BADC. \tag{1}$$

Ossia : esiste una proiettività che muta in sè un gruppo di quattro elementi, scambiando il primo elemento col secondo ed il terzo col quarto. Applicando questa proposizione al gruppo $ACBD$, avremo :

$$ACBD \barwedge CADB,$$

la quale mostra l'esistenza di una proiettività che fa corrispondere ad A,C ; a B,D ; a C,A e a D,B ; ossia sarà :

$$ABCD \barwedge CDAB. \tag{2}$$

Ma

$$CDAB \wedge DCBA \ ;$$

dunque

$$ABCD \barwedge DCBA. \tag{3}$$

La (2) si può enunciare dicendo che esiste una proiettività la quale muta in sè un gruppo di quattro elementi, scambiando il primo col terzo ed il secondo col quarto ; e la (3) dicendo che esiste una proiettività la quale scambia il primo elemento col quarto ed il secondo col terzo.

Dunque :

Un gruppo di quattro elementi di una forma di 1ª specie è proiettivo al gruppo che si ottiene scambiando tra loro due elementi qualsiansi e insieme gli altri due. In simboli :

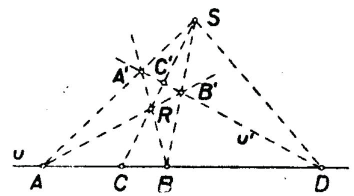
$$ABCD \barwedge BADC \barwedge CDAB \barwedge DCBA.$$

Cerchiamo ora se esistano altre proiettività (non identiche) che mutino in sè un gruppo di quattro elementi A,B,C,D, lasciando fissi due elementi del gruppo.

Supponiamo dunque che esista una proiettività che lasci fermi C, D, e muti fra loro A, B :

$$ABCD \barwedge BACD.$$

Riferendoci ancora ad una punteggiata u, proiettiamo $ABCD$ da S sopra la retta u' uscente da D. Verrà :



$$ABCD \barwedge A'B'C'D,$$

e confrontando questa colla relazione che è soddisfatta per ipotesi, avremo:

$$B\,A\,C\,D \barwedge A'\,B'\,C'\,D.$$

Siccome la proiettività tra i gruppi $BACD$, $A'B'C'D$ ha l'elemento D comune unito, essa è una prospettività (§ 19), ossia le rette BA', AB', CC', che riuniscono le coppie di punti omologhi, passano per uno stesso punto R. Da ciò si trae l'esistenza di un quadrangolo piano completo $RSA'B'$, di cui due lati opposti passano per A altri due lati opposti passano per B e dei due rimanenti uno per C e l'altro per D.

Dunque il gruppo $ABCD$ è armonico, e i due elementi A,B sono in esso coniugati.

Viceversa, un gruppo armonico di quattro elementi è proiettivo al gruppo che si ottiene scambiando tra loro gli elementi di una coppia e non gli altri due. Infatti se $ABCD$ è armonico, lo è pure $BACD$ (§ 13) e quindi nella proiettività $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$ è unito anche il punto D, perchè essa fa corrispondere al gruppo armonico $ABCD$ un gruppo armonico, che non può differire da $BACD$.

Dunque, nel caso di un gruppo armonico $ABCD$, avremo:

$$ABCD \barwedge BACD \barwedge ABDC \barwedge BADC \barwedge CDAB \barwedge$$
$$\barwedge DCAB \barwedge DCBA \barwedge CDBA.$$

E si noti che un gruppo armonico $ABCD$ non può essere proiettivo al gruppo che si ottiene scambiando tra loro gli elementi B,C non coniugati e non gli altri due, perchè allora alle coppie AB, CD, che si separano, verrebbero a corrispondere le coppie AC, BD, che non si separano: il che è assurdo. Si conclude pertanto che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo di quattro elementi di una forma di 1ª specie sia proiettivo al gruppo che si ottiene scambiando tra loro due elementi e lasciando fissi gli altri due, è che gli elementi permutabili sieno coniugati armonicamente rispetto agli altri due.

Riassumendo potremo dire che:

Esistono quattro proiettività (compresa l' identità) che mutano in sè un gruppo di quattro elementi di una forma di 1ª specie, che non sia armonico, mentre ne esistono otto (compresa l' identità) se il gruppo è armonico.

A dir vero questo enunciato presuppone che si sappia già che le 4 o le 8 proiettività sopra trovate, rispettivamente nel caso di una quaderna non armonica o di una quaderna armonica, sieno *le sole* che mutano in sè quaderne siffatte. Effettivamente è così, come risulta dal ragionamento che segue.

Si osservi in primo luogo che fra le 24 permutazioni che si possono formare con quattro elementi A,B,C,D, a partire da una permutazione iniziale $ACBD$, la quale sia scelta in guisa che le coppie AB, CD si separino, vanno scartate subito, pel nostro scopo, quelle che mutano la quaderna *ordinata* $ACBD$, in una quaderna non ordinata. E invero queste permutazioni non posson dar luogo a proiettività che mutino la quaderna in sè, perchè le proiettività son corrispondenze ordinate. Restano così soltanto le permutazioni circolari e le permutazioni inverse di queste, cioè complessivamente le

$$ACBD,\ CBDA,\ BDAC,\ DACB$$
$$DBCA,\ ADBC,\ CADB,\ BCAD.$$

Le permutazioni $ACBD$, $BDAC$, $DBCA$, $CADB$, corrispondono alle quattro proiettività che abbiamo trovato per una quaderna qualunque. Quanto alle altre, è facile vedere che corrispondono a effettive proiettività, che mutano in sè la data quaderna, allora e solo allora che il gruppo $ABCD$ sia armonico.

Invero, se esiste per esempio la relazione

$$ACBD \barwedge CBDA,$$

cioè

(1) $$ABCD \barwedge CDBA,$$

poichè si ha in ogni caso

(2) $$CDBA \barwedge ABDC$$

ne segue:

(3) $$ABCD \barwedge ABDC,$$

e quindi il gruppo $ABCD$ è armonico. Viceversa, se questo gruppo è armonico, vale la (3), che combinata colla (2), valida per una quaderna qualunque, dà la (1).

Si conclude dunque che, nel campo degli elementi reali, non esistono, per una data quaderna, che le quattro od otto proiettività che la mutano in sè, già trovate prima.

Il risultato non vale tal quale anche nel campo più ampio degli elementi imaginari (e reali). Si sa infatti, dalla Geometria analitica, che esistono quaderne *equianarmoniche*, ognuna delle quali ammette proiettività che ne lasciano fisso un elemento permutando ciclicamente gli altri tre; ma in tal caso l'elemento che resta fisso è sempre imaginario.

CAPITOLO SESTO

Proprietà metriche delle proiettività tra forme di 1ª specie.

§ 22.

Birapporto di quattro elementi d'una forma di 1ª specie. Sua invarianza rispetto alle trasformazioni proiettive.

Richiamiamo anzitutto brevemente, dalla Geometria analitica, definizioni e proprietà concernenti il birapporto di quattro elementi sopra una forma di 1ª specie.

Cominciamo da una punteggiata propria u. Si fissi sulla u un verso positivo ed un'unità di misura dei segmenti. Se sono allora A, B due punti proprî della u, colla scrittura AB s'intende il numero che esprime la misura del segmento finito AB, rispetto alla fissata unità, al qual numero si attribuisca il segno positivo o negativo, secondo che per percorrere il segmento finito da A verso B, ci si muova sulla u nel senso positivo o nel senso contrario.

Per *birapporto o rapporto anarmonico di quattro punti* proprî A,B,C,D della u, s'intenderà il numero $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$, e s'indicherà brevemente colla scrittura $(ABCD)$.

Da questa definizione si trae subito che il valore del birapporto è indipendente dalla scelta del verso positivo e dell'unità di misura sulla u. Esso risulta insomma un numero associato soltanto ai quattro punti dati e all'ordine in cui si considerano; e non ad elementi ad essi estranei.

Similmente, fissato in un fascio proprio di raggi (o di piani) U (od u) un verso positivo per le rotazioni attorno al centro (o all'asse del fascio), e fissato un verso positivo (o una pagina positiva) sopra ogni raggio (o piano) del fascio, colla scrittura ab (o $\alpha\beta$) ove a, b (o risp. α,β) son due raggi (o piani) del fascio, si intende l'angolo di cui bisogna far ruotare a (o α) nel verso positivo delle rotazioni perchè il verso positivo di a (o la pagina positiva di α) venga a coincidere col verso positivo di b (o colla pagina positiva di β). La definizione è tale che il simbolo ab (o $\alpha\beta$) viene a rappresentare infiniti angoli formanti una progressione aritmetica, che ha per ragione 2π; per guisa che ognuna delle funzioni trigonometriche di ab (o $\alpha\beta$), ha un valore ben determinato, anche nel segno.

Si chiama allora *birapporto di quattro raggi* a,b,c,d (*o di quattro piani* $\alpha,\beta,\gamma,\delta$) del fascio e s' indica colla scrittura $(abcd)$ [o $(\alpha\beta\gamma\delta)$], l'espressione:

$$(a\,b\,c\,d) = \frac{\sin a\,c}{\sin b\,c} : \frac{\sin a\,d}{\sin b\,d}$$

$$\left(\text{oppure: } (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = \frac{\sin \alpha\,\gamma}{\sin \beta\,\gamma} : \frac{\sin \alpha\,\delta}{\sin \beta\,\delta}\right).$$

Anche quest'espressione risulta un numero dipendente soltanto dai quattro elementi dati e dal loro ordine, e non dalla scelta dei versi (o delle pagine) assunti come positivi.

Si dimostra agevolmente in Geometria analitica che « se si passa da una forma di 1ª specie propria ad un'altra « forma analoga, mediante una proiezione od una se- « zione, e se si considerano quattro elementi proprî della « prima, che si trasformino in altrettanti elementi proprî « della seconda, i valori dei birapporti delle due qua- « derne corrispondenti sono eguali (beninteso, anche nel « segno) ».

La restrizione che figura in quest' enunciato, relativo soltanto a forme e ad elementi proprî, si può togliere, con opportune convenzioni. E precisamente:

1°) Definendo come birapporto di quattro punti A,B,C,D_∞, di cui tre proprî ed il quarto improprio, sopra una punteggiata propria u, l'espressione

$$(ABCD_\infty) = \frac{AC}{BC}.$$

2°) Convenendo che la proprietà formale del birapporto di quattro elementi proprî, di non alterarsi cioè quando si scambino di posto due elementi e insieme gli altri due, valga anche quando si tratti di tre punti proprî e di uno improprio, sopra una punteggiata. Così risulterà per definizione:

$$(ABC_\infty D) = (BADC_\infty) = \frac{BD}{AD}; \quad (AB_\infty CD) = (CDAB_\infty) = \frac{CA}{DA}$$
$$(A_\infty BCD) = (DCBA_\infty) = \frac{DB}{CB},$$

3°) Definendo come birapporto di quattro raggi o di quattro piani paralleli, il birapporto dei quattro punti da essi staccati sopra una retta che li incontri.

4°) Facendo le convenzioni analoghe alla 1ª) ed alla 2ª) per quattro raggi di un fascio improprio di raggi (o di piani) quando uno dei raggi dati sia improprio.

5°) Definendo come birapporto di quattro punti improprî $A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$ di una punteggiata impropria u_∞, l'espressione:

$$(A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty) = (a\,b\,c\,d),$$

ove a,b,c,d sieno i raggi che proiettano quei punti improprî da un punto proprio qualunque dello spazio.

6°) Definendo come birapporto di quattro raggi improprî $a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty$ di un fascio improprio di raggi improprî, l'espressione

$$(a_\infty b_\infty c_\infty d_\infty) = (\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta),$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sieno i piani che proiettano quei quattro raggi da una retta propria uscente dal centro (improprio) del dato fascio.

Fatte queste convenzioni, il teorema che afferma l'uguaglianza dei birapporti di due quaderne di elementi appartenenti a due forme di 1ª specie prospettive, vale senza la distinzione degli elementi in proprî ed improprî.

Sicchè, anche se si passa da una forma di 1ª specie u ad un'altra forma u', con un numero finito di proiezioni e di sezioni, a quattro elementi qualsiansi di u, corrispondono quattro elementi di u', che avranno lo stesso birapporto degli elementi corrispondenti di u.

Dal fatto che ogni corrispondenza proiettiva tra due forme di 1ª specie si costruisce con un numero finito di proiezioni e di sezioni, segue pertanto che *due quaderne proiettive di elementi hanno lo stesso birapporto.* In particolare, si deduce che sono uguali i birapporti di due gruppi armonici, e siccome un gruppo armonico si può mutare, con proiezioni e sezioni, in un gruppo $ABCD$ di quattro punti di una retta, con D all' infinito, sarà :

$$(ABCD) = (ABC) = -1,$$

perchè il punto C risulta medio tra A e B.

Del resto ciò segue anche dalla relazione (1) già stabilita alla pag. 67 la quale, col simbolo del birapporto, si può scrivere appunto sotto la forma $(ABCD) = -1$. In virtù della proprietà proiettiva del birapporto, la proposizione della pag. 67 si può dunque enunciare così :

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo di quattro elementi A,B,C,D di una forma di 1ª specie costituisca un gruppo armonico (nell'ordine $ABCD$) è che $(ABCD) = -1$.

Anche la proprietà più generale che due quaderne proiettive hanno lo stesso birapporto, può essere invertita. Si può cioè dimostrare che due quaderne $ABCD$, $A'B'C'D'$ appartenenti a due forme di 1ª specie, sono proiettive, se :

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Infatti, nella proiettività $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ all'elemento D corrisponde un elemento D_1 tale che :

$$(ABCD) = (A'B'C'D_1) ;$$

dunque :

$$(A'B'C'D') = (A'B'C'D_1).$$

Tenendo conto del fatto che è unico l'elemento di una forma di 1ª specie, che fornisce con due dati elementi un dato rapporto (in valore e segno), si deduce che è pure unico l'elemento che forma con tre altri elementi un dato birapporto, e quindi che D_1 coincide con D'. Si conclude che :

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due quaderne di elementi di due forme di 1ª specie, sieno proiettive, è che abbiano lo stesso birapporto.

Osservazione. Il teorema ora dimostrato fa vedere che una corrispondenza biunivoca tra due forme di 1ª specie, la quale, nel passaggio dall'una forma all'altra, goda della proprietà di conservare il valore del birapporto di quattro elementi qualsiansi, è una proiettività. Dunque *si può assumere questa proprietà come definizione (metrica) delle proiettività tra forme di 1ª specie.* Ma in questa definizione c' è qualcosa di superfluo, come segue appunto dal teorema fondamentale di STAUDT.

Infatti la definizione da noi adottata (pag. 73) tradotta metricamente, può presentarsi così :

Due forme di 1ª specie diconsi proiettive, quando sono riferite biunivocamente in modo che a quattro elementi dell'una aventi per birapporto -1, corrispondano sempre nell'altra quattro elementi aventi lo stesso birapporto.

E, mediante il teorema fondamentale, abbiamo potuto affermare che una tal corrispondenza si costruisce con un numero finito di proiezioni e sezioni; e quindi ch'essa conserva il valore di ogni birapporto.

Il teorema fondamentale si può dunque enunciare sotto questa forma (metrica) equivalente:

Ogni corrispondenza biunivoca tra due forme di 1ª *specie, la quale goda della proprietà che nel passaggio dall'una forma all'altra lasci inalterato il birapporto di quattro elementi, sempre che valga* —1, *lascia in conseguenza inalterato il birapporto di quattro elementi, anche quando ha un altro valore arbitrario* (*reale*).

§ 23.

Punti limiti. Casi particolari metrici delle proiettività tra forme di 1ª specie.

Si chiamano *punti limiti* rispetto ad una data proiettività tra due punteggiate u,u', gli omologhi dei punti all'infinito delle due punteggiate. Così, se indichiamo con I_∞ il punto improprio di u e con J'_∞ il punto improprio di u', l'omologo I' del punto I_∞ sarà il punto limite appartenente ad u', e l'omologo J del punto J'_∞ sarà il punto limite appartenente ad u.

Se uno dei punti limiti è proprio, anche l'altro lo sarà. Orbene, in quest' ipotesi, dette A,A'; B,B' due coppie di punti omologhi, avremo (§ 22):

(1) $$(A\,B\,J\,I_\infty) = (A'\,B'\,J'_\infty\,I'),$$

la quale può anche scriversi così:

$$(A\,B\,J) = (B'\,A'\,I'),$$

ossia:

$$A\,J.\,A'\,I' = B\,J.\,B'\,I'.$$

Dunque:

Data tra due punteggiate una proiettività coi punti limiti proprî, il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti dai rispettivi punti limiti, è costante (RELAZIONE DI STEINER).

Viceversa, se è soddisfatta in valore e segno la condizione $AJ.\,A'I' = \text{cost.}$, le due punteggiate sono proiettive, perchè un'altra coppia qualunque B,B' di punti omologhi soddisfa, insieme alla coppia A,A', alla condizione (1), e quindi B,B' si corrispondono nella proiettività $\begin{pmatrix} A & J & I_\infty \\ A' & J'_\infty & I' \end{pmatrix}$ (§ 22).

Supponiamo ora che i punti limiti sieno impropri, ossia che si corrispondano i punti all' infinito delle due punteggiate. Allora le due *punteggiate* si dicono *simili*, e la corrispondenza una *similitudine*, per la ragione che ora vedremo. Sieno A,A'; B,B'; C,C' tre coppie di punti omologhi nella proiettività tra u,u' ed I_∞, I'_∞ i punti omologhi impropri. Per la proprietà proiettiva del birapporto verrà:

(2) $$(A\,B\,C\,I_\infty) = (A'\,B'\,C'\,I'_\infty)$$

ossia:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}.$$

Dunque il rapporto tra due segmenti AC,BC che hanno un estremo in comune, è uguale al rapporto dei segmenti corrispondenti.

Ora, se sulla u son dati due segmenti MN, PQ, senza estremi in comune, e sono $M'N'$, $P'Q'$ i segmenti corrispondenti sulla u', considerando il segmento PN che ha un estremo comune con MN ed uno con PQ, avremo:

$$\frac{MN}{PN} = \frac{M'N'}{P'N'}, \quad \frac{PQ}{PN} = \frac{P'Q'}{P'N'},$$

dalle quali si trae:

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{M'N'}{P'Q'} \text{ ossia: } \frac{MN}{M'N'} = \frac{PQ}{P'Q'}.$$

Dunque:

Se due punteggiate sono simili, il rapporto tra due segmenti corrispondenti è costante.

Viceversa, se questa condizione è soddisfatta, invertendo il ragionamento, si ritrova la (2), e, in base al § 22, si conclude che la corrispondenza è una proiettività, in cui si corrispondono i punti impropri; cioè una similitudine.

Si può pertanto enunciare:

Una corrispondenza biunivoca tra due punteggiate, la quale goda della proprietà che sia costante il rapporto tra due segmenti corrispondenti, è una similitudine.

La proprietà caratteristica di una similitudine, si può anche dimostrare portando una punteggiata parallela all'altra, perchè dopo il movimento le due punteggiate si conservano proiettive (*); e siccome il punto ad esse comune (all'infinito) è unito, esse divengono prospettive.

Allorquando le due punteggiate u,u' non sono sovrapposte, il valore del rapporto tra due segmenti corrispondenti ha un segno costante, che dipende però dalla scelta dei versi positivi sulle u, u'; mentre, quando le due punteggiate son sovrapposte, il segno riesce indipendente dalla scelta del verso positivo sul comune sostegno, e precisamente è positivo o negativo, secondo che la proiettività è *concorde* o *discorde*. Nel primo caso diremo che la *similitudine* è *diretta*, nel secondo caso, *inversa*, ed il valore del rapporto tra due segmenti corrispondenti, che è indipendente anche dalla scelta dell'unità di misura, lo diremo *rapporto di similitudine*.

In una similitudine tra due punteggiate sovrapposte u,u', oltre al punto all'infinito unito, vi sarà un altro elemento unito O, che, eventualmente, potrà essere anch'esso all'infinito (pag. 86).

(*) *Due punteggiate proiettive si conservano tali trasportandole comunque nello spazio.* Invero, tra esse intercede sempre una corrispondenza biunivoca e ad un gruppo armonico dell'uno corrisponde un gruppo armonico dell'altra, perchè nel movimento non s'altera l'armonicità di un gruppo di punti (come si vede ad es. pensando ad un quadrangolo completo costruttore, che si muova insieme al gruppo).

Nel caso in cui O è proprio, esso dicesi *centro di similitudine*. Con l'introduzione di questo punto O, la proprietà caratteristica della similitudine diviene evidentemente la seguente:

Il rapporto tra le distanze di due punti corrispondenti dal centro di similitudine, è costante.

Quando la similitudine è inversa, esiste sempre il centro di similitudine, perchè ogni proiettività discorde è iperbolica (pag. 90).

Se l'ulteriore punto O è anch'esso all'infinito, cioè se si ha tra le u,u' una proiettività parabolica col punto unito all'infinito, detti A,A' due punti omologhi in questa proiettività, facendo scorrere la u sul comune sostegno, in guisa che A venga a sovrapporsi ad A', nasce fra le posizioni iniziali e finali dei punti del comune sostegno, una proiettività parabolica, che ha l'unico elemento unito all'infinito ed in cui ad A corrisponde A'. Questa proiettività non può pertanto essere distinta da quella inizialmente considerata (pag. 87). In tal caso la similitudine dicesi una *congruenza diretta* tra le due punteggiate sovrapposte; ed il rapporto di similitudine vale 1.

Quando il rapporto di similitudine tra le due punteggiate sovrapposte u, u' è uguale a -1, la similitudine è inversa e due punti corrispondenti son situati da parti opposte del centro di similitudine O, avendo da questo eguali distanze. In tal caso la similitudine dicesi una *congruenza inversa* e consiste in una simmetria rispetto al punto O. È chiaro che essa vien generata da una rotazione della retta, attorno al punto stesso, di un angolo piatto.

Si possono considerare le congruenze anche tra fasci di raggi o di piani. Limitandoci per ora ai *fasci di raggi* U, U', li diremo *congruenti*, quando son riferiti biunivocamente in guisa che ad ogni angolo dell'uno corrisponda un angolo uguale dell'altro. Questa corrispondenza è certo una proiettività, perchè ad un gruppo armonico dell'un fascio, viene a corrispondere un gruppo armonico dell'altro.

Quando i due fasci di raggi son situati sullo stesso piano (od anche su piani paralleli), c' è luogo a distinguere la *congruenza diretta* dalla *inversa*.

Dati in un piano α due fasci di raggi congruenti U, U', se $a\,b$, $a'b'$ sono due angoli corrispondenti (uguali) possono infatti darsi due casi:

1°) Muovendo il fascio U sul piano α, in guisa che il punto U' cada in U ed a' in a, il raggio b' viene a coincidere con b. Allora la proiettività tra i due fasci, ormai sovrapposti, U, U', facendo corrispondere all'angolo ab di U, lo stesso angolo di U', è concorde e quindi ogni raggio di U' viene a coincidere col suo omologo. In tal caso la congruenza tra i due fasci di raggi (distinti o sovrapposti) dicesi *diretta*.

2°) Muovendo il fascio U' sul piano α, in guisa che il punto U' cada in U ed a' in a, il raggio b' assume la posizione simmetrica di b rispetto ad a. Allora la proiettività tra i due fasci, ormai sovrapposti, è discorde, e quindi ogni raggio c' di U' viene a coincidere col simmetrico del suo omologo c rispetto ad a; sicchè ribaltando U' attorno ad a (od anche attorno al raggio perpendicolare ad a) ogni raggio di U' viene a coincidere con l' omologo in U. In tal caso la congruenza tra U, U' dicesi *inversa*.

Quando i due fasci di raggi U, U' son sovrapposti e la congruenza è diretta, ponendo mente al modo come la congruenza può generarsi con una rotazione attorno ad $U \equiv U'$, si vede che nessun raggio del fascio mobile rimane fisso, e si conclude che:

Una congruenza diretta tra due fasci di raggi sovrapposti, è una proiettività ellittica.

Mentre, quando due fasci di raggi sovrapposti U, U' son riferiti con una congruenza inversa, esistono due raggi uniti (pag. 90), che sono ortogonali, perchè con ciascuno

di essi due raggi omologhi formano angoli uguali (e di verso contrario). Dunque:

Una congruenza inversa tra due fasci di raggi sovrapposti, è una proiettività iperbolica coi raggi uniti ortogonali.

Queste proposizioni si possono anche riferire alla proiettività segata dai due fasci proiettivi sulla retta impropria del piano, che li contiene: nel primo caso si ha su tale retta impropria una proiettività che chiamasi una *congruenza diretta* (ellittica) e nel secondo caso una proiettività che chiamasi una *congruenza inversa* (iperbolica). Una congruenza diretta sulla retta impropria di un piano α, è generabile con un movimento del piano in se stesso (in particolare con una rotazione attorno ad un punto del piano); una congruenza inversa è invece generabile componendo un movimento del piano in se stesso con una rotazione di α, attorno ad una sua retta, di un angolo piatto.

La congruenza tra due fasci di piani, che si definisce in modo analogo alla congruenza tra due fasci di raggi, non dà luogo alla distinzione in diretta ed in inversa, finchè i due fasci di piani si considerano nello spazio, od anche in una stella; mentre invece questa distinzione si presenta, quando i due fasci sieno sovrapposti.

E per queste due specie di congruenze si stabiliscono proposizioni analoghe a quelle ora viste pei fasci di raggi.

Noteremo infine che *dati due elementi A, A' di due forme di 1ª specie sovrapposte, esistono due sole congruenze, che fanno passare da A ad A', e l'una di esse è diretta, l'altra inversa.*

Così, se le due forme u, u' son punteggiate proprie, si ha la congruenza diretta generata dallo strisciamento, che porta A in A', e la congruenza inversa generata dal ribaltamento attorno al punto O, medio tra A, A'; ecc.ecc.

Si osservi che, quando si tratta di due fasci di raggi, la cosa analoga si può affermare se essi sono complanari (o appartengono a piani paralleli).

Si può definire anche una *congruenza tra un fascio di raggi ed un fascio di piani*, nel modo seguente:

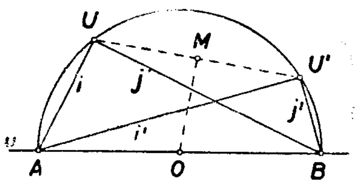
Un fascio di raggi ed un fascio di piani diconsi congruenti, quando il fascio di raggi è congruente ad una sezione normale del fascio di piani.

Data questa definizione, passiamo a stabilire il teorema:

Dati due fasci (di raggi o di piani) proiettivi, ma non congruenti, esiste sempre una ed una sola coppia di elementi (raggi o piani) ortogonali dell'uno, a cui corrisponde una coppia di elementi ortogonali dell'altro.

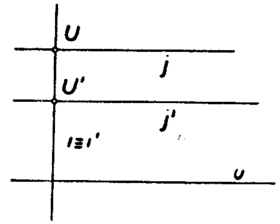
È chiaro che basterà dimostrare il teorema pei fasci di raggi. Sieno dunque U, U' due fasci di raggi proiettivi, ma non congruenti.

Trasportiamoli in posizione prospettiva, facendo coincidere due raggi omologhi. Allora l'asse di prospettiva sarà una retta propria u, perchè se fosse una retta impropria, i due fasci sarebbero congruenti. Supponiamo pel momento che la retta $U\,U'$ non sia perpendicolare ad u. Se ad un angolo retto $i\,j$ di U corrisponde un angolo retto $i'\,j'$ di U', i lati i, i', s'incontreranno in un punto A di u, ed i lati j, j' in un punto B di u; ed il segmento $A\,B$ sarà veduto secondo l'angolo retto $i\,j$ da U, e secondo l'angolo retto $i'\,j'$ da U'. Dunque, se esistono due angoli retti corrispondenti, questi determinano su u due punti A, B, che stanno sopra una circonferenza insieme ad U, U'. Ora, tirando nel punto M, medio tra U, U', la perpendicolare ad $U\,U'$, essa, per l'ipotesi che $U\,U'$ non sia perpendicolare ad u, incontra u in un punto proprio O, che è il centro di una circonferenza passante per U, U'. Questa circonferenza determina su u due punti A, B, i quali appunto sono proiettati da U, U' secondo due angoli retti omologhi, che restano così individuati.



Che se poi la retta $U\,U'$ è perpendicolare ad u,

ma i due punti U, U' non son situati simmetricamente rispetto ad u, avremo ancora una sola coppia di angoli retti corrispondenti: e sarà costituita dall'angolo $i\,j$ formato dal raggio $i \equiv U\,U'$ e dal raggio j parallelo ad u condotto per U, e dall'angolo $i'\,j'$ formato dal raggio $i' \equiv U\,U'$ e da j' condotto parallelamente ad u per U'.



Se infine i due punti U, U' son situati simmetricamente rispetto ad u, ogni angolo retto di U segna su u due punti, che son veduti da U' secondo un angolo retto, sicchè sono infinite le coppie di angoli retti corrispondenti; ma in tal caso, evidentemente, i due fasci di raggi sono congruenti (inversamente).

Un corollario immediato del teorema dimostrato, è il seguente:

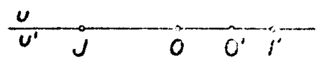
La condizione necessaria e sufficiente affinchè una proiettività tra due fasci (di raggi o di piani) sia una congruenza, è che in essa si corrispondano due coppie (e quindi infinite) di angoli retti.

Prime di terminare l'esposizione delle proprietà metriche inerenti alle proiettività tra forme di 1ª specie, daremo una *costruzione dei punti uniti di una proiettività tra due punteggiate sovrapposte, profittando dei punti limiti* (Steiner).

Supporremo che i punti limiti sieno proprî, perchè se fossero improprî, cioè se le punteggiate fossero simili, per trovare l'unico punto unito proprio, potremmo profittare della costruzione lineare esposta a pag. 86.

Supporremo inoltre che i punti limiti sieno distinti: il caso che sieno coincidenti (ed al finito) sarà trattato più tardi (nella teoria dell'involuzione).

Sia dunque J il punto limite della punteggiata u, I' il punto limite di u', O il punto medio tra J, I', pensato



come appartenente ad u, ed O' l'omologo di O nella u'.

Se X è un punto unito, supposto esistente, per la relazione di STEINER, avremo:

$$OJ.O'I' = XJ.XI'.$$

e, riferendo tutti i segmenti all'origine O:

$$OJ\,(OI' - OO') = (OJ - OX)\,(OI' - OX).$$

Ricordando che $OI' = -OJ$, otterremo:

$$OJ\,(OJ + OO') = (OJ - OX)\,(OJ + OX) = OJ^2 - OX^2,$$

e riducendo:

(1) $$-OJ.OO' = OX^2,$$

od anche

(2) $$OI'.OO' = OX^2.$$

La (1) ci dice che, se esiste il punto X, dovrà esser negativo il prodotto $OJ.OO'$, ossia il punto O dovrà essere interno al segmento finito JO'. Viceversa, se questa condizione è soddisfatta, si potrà estrarre la radice quadrata dal prodotto $-OJ.OO'$, e i due punti, situati da parti opposte di O, e distanti da O, in valore assoluto, di $\sqrt{-OJ.OO'}$, saranno i punti uniti della proiettività.

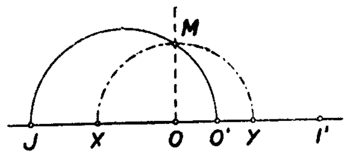
Si noti che il prodotto $OJ.OO'$ è nullo allora, e solo allora, che O coincide con O' (non potendo O coincidere con J): in tal caso i due valori della $\sqrt{-OJ.OO'}$ sono nulli, e quindi i due punti uniti coincidono con O.

Se infine O è esterno al segmento finito JO', non si potrà estrarre la radice quadrata da $-OJ.OO'$ (restando nel campo reale) e quindi non esisteranno punti uniti. Si conclude pertanto che:

Se una proiettività tra due punteggiate sovrapposte u, u', ha i punti limiti propri distinti J, I', e se del punto O, medio tra J, I', pensato come appartenente alla u, è O' l'omologo nella u', la proiettività sarà iperbolica, parabolica, ellittica, secondo che il punto O è interno al segmento finito JO', o coincide con l'estremo O', od è esterno ad JO'.

Nel caso in cui O, O' coincidono, l'unico punto unito della proiettività parabolica è O.

La costruzione degli elementi uniti X, Y, nel caso della proiettività iperbolica, risulta subito dal fatto che, come mostra la (1), il segmento OX deve essere medio



proporzionale tra OJ, OO'. Basterà dunque costruire il cerchio di diametro JO', segarlo in M colla perpendicolare da O alla JI', e trovare i punti X, Y dove la JI' è incontrata dalla circonferenza che ha per centro O e per raggio OM.

Si noti come questa costruzione possa indirettamente servire anche alla determinazione degli elementi uniti della proiettività tra due fasci sovrapposti, segando questi fasci con una retta.

CAPITOLO SETTIMO

Involuzione nelle forme fondamentali di 1ª specie.

§ 24

Condizione affinchè una proiettività sia involutoria.

Abbiamo già accennato a pag. 64 al concetto generale di corrispondenza involutoria. Ora ritorniamo su questo concetto, con speciale riguardo al caso di una proiettività tra due forme di 1ª specie *sovrapposte*.

Si dice che una proiettività tra due tali forme u,u' è un' INVOLUZIONE, quando gli omologhi di ogni elemento del comune sostegno, pensato come appartenente all'una od all'altra forma, coincidono.

Se la proiettività da u ad u' si riguarda come un'operazione ω applicata agli elementi del comune sostegno, la proiettività da u' ad u sarà l'operazione inversa ω^{-1} e potremo dire che la proiettività data è involutoria, quando ω coincide colla sua inversa, ossia in simboli quando:

$$\omega^2 \equiv 1.$$

Invero, se l'omologo di A nella ω è A', e se la corrispondenza è involutoria, A' sarà pure l'omologo di A nella ω^{-1}; sicchè l'omologo di A' nella ω sarà A, e quindi applicando due volte successivamente l'operazione ω, a partire da A, ritorneremo in A.

Allorquando due elementi, come A,A', si trovano nella condizione che A' è l'omologo di A nella ω e nella ω^{-1},

si dice che *i due elementi si corrispondono in doppio modo.*

Con questa locuzione si potrà più brevemente definire la proiettività involutoria tra due forme sovrapposte, dicendo che *una proiettività, tra due forme di* 1ª *specie sovrapposte, chiamasi un' involuzione, quando due elementi omologhi qualsiansi si corrispondono in doppio modo.*

Due elementi omologhi in un' involuzione, si dicono anche *coniugati.*

Allorchè ω è involutoria, l'operazione da u ad u', essendo identica a quella da u' ad u, si può abbandonare la considerazione delle due forme sovrapposte, e parlare di *una forma di* 1ª *specie in involuzione.*

Talora si suol chiamare « involuzione » non la corrispondenza, ma il sistema delle infinite coppie di elementi omologhi in essa: ogni elemento della forma appartiene ad una sola di queste coppie.

Il teorema che sta a fondamento della teoria dell' involuzione nelle forme di 1ª specie, è il seguente:

Se in una proiettività tra due forme di 1ª *specie sovrapposte, due elementi distinti si corrispondono in doppio modo, la proiettività è un' involuzione.*

Infatti, se A, A' si corrispondono in doppio modo e se l'elemento B ha per omologo nella corrispondenza diretta, l'elemento B', la ω si potrà individuare mediante le tre coppie di elementi omologhi AA', $A'A$, BB'.

Ora la relazione (vedi pag. 91).

$$AA'BB' \barwedge A'AB'B,$$

ci dice che nella ω all'elemento B' corrisponde B, cioè che anche i due elementi B,B' si corrispondono in doppio modo. Siccome BB' è una coppia qualunque di elementi omologhi nella ω, si conclude che due elementi qualsiansi, omologhi nella ω, si corrispondono in doppio modo; e quindi che si tratta di un' involuzione.

Dal teorema dimostrato deriva il corollario seguente:

Un' involuzione sopra una forma di 1ª *specie è in-*

dividuata da due coppie di elementi coniugati, prive di elementi comuni.

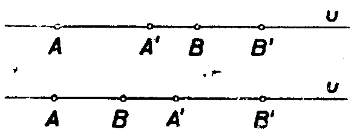
E difatti se AA', BB' son le due coppie date, c'è una ed una sola proiettività in cui si corrispondono AA', $A'A$, BB', e questa è un' involuzione, perchè in essa i due elementi A,A' si corrispondono in doppio modo.

Si osservi che l'applicazione del teorema precedente richiede che la coppia AA', ossia una almeno delle due coppie date, *sia costituita da elementi distinti.* Ma il corollario è vero anche se le due coppie sono entrambe costituite da elementi coincidenti, come vedremo tra poco.

§ 25.

Involuzioni ellittiche e iperboliche.

Data sopra la forma di 1ª specie u, un' involuzione I, della quale siano AA', BB' due coppie di elementi co-



niugati, al verso $AA'B$ della forma, corrisponderà il verso $A'AB'$; e quindi, se le due coppie AA', BB' non si separano, la involuzione sarà *discorde*, e se si separano sarà *concorde.* Da ciò segue che, se nella I due coppie non si separano (o si separano), lo stesso accadrà per due altre coppie qualsiansi.

Nel caso che le AA', BB' non si separino, la I, essendo discorde, sarà necessariamente iperbolica (pag. 90) nel caso che le AA', BB' si separino, poichè ogni altra coppia C,C' di elementi coniugati, deve separare la coppia AA' (e la BB'), C non potrà mai coincidere col suo omologo C', e l' involuzione sarà ellittica. Si conclude perciò che:

Vi sono soltanto due specie di involuzioni: le iperboliche e le ellittiche. Un' involuzione è iperbolica o ellit-

tica, secondo che due sue coppie non si separano o si separano.

Le involuzioni iperboliche sono discordi e le ellittiche concordi.

Dunque, *contrariamente a quanto avviene per le proiettività generali, si giunge a decidere la specie dell' involuzione, badando soltanto come essa opera sui versi della forma.*

Gli elementi uniti di un' involuzione iperbolica, si chiamano più specialmente *elementi doppi.* Ed essi godono della proprietà espressa dal seguente teorema:

In un' involuzione iperbolica due elementi coniugati separano armonicamente la coppia degli elementi doppi.

Infatti, se M,N sono gli elementi doppi, ed A,A' due elementi coniugati, poichè questi si corrispondono in doppio modo, si avrà:

$$MNAA' \;\overline{\wedge}\; MNA'A,$$

la quale prova che il gruppo $MNAA'$ è armonico (pag. 93).

Viceversa:

Le infinite coppie di elementi di una forma di 1ª specie, che separano armonicamente due dati elementi M, N, si corrispondono in un' involuzione iperbolica, che ha per elementi doppi M, N.

Difatti a pag. 49 abbiamo già provato che la corrispondenza biunivoca, che nasce tra gli elementi di una forma di 1ª specie, chiamando omologo di un elemento qualsiasi il suo coniugato armonico rispetto alla coppia fissa MN, si costruisce con un numero finito di proiezioni e di sezioni; ed abbiamo anche osservato che M,N sono in essa elementi uniti. Dunque la corrispondenza stessa è una proiettività iperbolica. Il suo carattere involutorio è evidente.

Ne discende, come avevamo preannunciato alla fine del § precedente, che *un' involuzione è individuata da due coppie di elementi coniugati, anche quando ciascuna delle due coppie sia costituita da elementi coincidenti.*

§ 26.

Coppia comune a due involuzioni.

Date due involuzioni distinte I,I_1, sopra una medesima forma di 1ª specie u, non può esistere più di una coppia di elementi della forma, che sieno coniugati in ambedue le involuzioni, perchè altrimenti esse coinciderebbero.

Ma ci possiamo domandare quand'è che esisterà *una* coppia comune alle due involuzioni, giacchè a priori non avremmo alcuna ragione di affermare che una tal coppia esiste sempre.

A questa domanda risponde in parte la proposizione seguente:

Due involuzioni iperboliche hanno o non hanno una coppia comune, secondo che le coppie dei loro elementi doppi non si separano o si separano.

Invero, se M,N son gli elementi doppi dell'involuzione iperbolica I ed M_1N_1 gli elementi doppi dell'involuzione iperbolica I_1, una coppia comune alle due involuzioni, in base al penultimo teorema del § precedente, dovrà separare armonicamente così MN, come M_1N_1; e noi sappiamo che una tal coppia esiste o no, secondo che MN, M_1N_1 non si separano o si separano (pag. 71 e segg.).

Notiamo incidentalmente che, in grazia delle considerazioni attuali, rimane completato il teorema di pag. 64 in questo modo:

Se due coppie di elementi di una forma di 1ª specie non si separano, esiste una sola coppia che le separa entrambe armonicamente. E chi bene esamini la cosa, vedrà che questa maggior determinazione si ottiene in sostanza come conseguenza immediata del teorema fondamentale della Geometria proiettiva.

Veniamo ora ad esaminare i casi rimanenti: che cioè l'una delle due involuzioni I,I_1 sia ellittica o che sieno entrambe ellittiche.

Dimostreremo che:

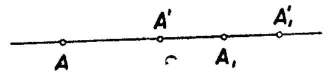
Due involuzioni, di cui una almeno sia ellittica, hanno sempre una coppia comune.

a) Se l'involuzione I è ellittica e la I_1 è iperbolica, la proiettività prodotto II_1, la quale fa corrispondere due elementi A', A_1 che son coniugati di un medesimo elemento A, rispettivamente nella I e nella I_1, è discorde, perchè la I è concorde e la I_1 è discorde (§ precedente).

Dunque la proiettività II_1 è iperbolica (pag. 90), e la coppia dei suoi elementi uniti costituisce evidentemente la coppia comune alle due involuzioni I,I_1.

b) Se le involuzioni I,I_1 sono ambedue ellittiche, diciamo ancora A' il coniugato dell'elemento A nella I, ed A_1,A'_1 i coniugati rispettivi di A,A' nella I_1.

La proiettività prodotto II_1 in tal caso è concorde, perchè le due involuzioni sono ambedue concordi; e poichè la I fa passare da A ad A' e la I_1 da A' ad A'_1 la II_1 farà passare da A ad A'_1. Analogamente, giacchè la I fa passare da A' ad A e la I_1 da A ad A_1, nella II_1 ad A' risponderà A_1. Ora si osservi che, per l'ipotesi che I_1 sia ellittica, le due doppie AA_1, $A'A'_1$ debbono



separarsi, e quindi, nella data forma, i quattro elementi costituenti queste coppie si succederanno nell'ordine $AA'A_1A'_1$.

Il segmento AA', che ha il verso individuato dall'ordine suddetto, avrà per corrispondente nella II_1 (che è concorde), il segmento A'_1A_1 che ha lo stesso verso, e quindi che contiene nel suo interno il segmento AA'. Dunque la II_1 possiede qualche elemento unito (pag. 67) ed anzi è iperbolica, perchè un elemento unito della II_1 ha lo stesso coniugato tanto nella I che nella I_1. I due elementi uniti della II_1 costituiscono la coppia comune alle due involuzioni date.

Osservazione. Nel ragionamento *b*) si suppone implicitamente che l'elemento A', coniugato di A nella I, sia diverso dall'elemento A_1 coniugato di A nella I_1. Ma se A' coincidesse con A_1 (e quindi A'_1 con A) la coppia AA' sarebbe senz'altro comune alle due involuzioni.

§ 27.

Teorema di Desargues. Costruzione lineare dell' involuzione.

La costruzione del coniugato di un dato elemento, in un' involuzione individuata dalle coppie AA', BB', si potrebbe eseguire applicando alla particolare proiettività $\begin{pmatrix} AA' & B \\ A'A & B' \end{pmatrix}$ le costruzioni già esposte per le proiettività tra forme di 1ª specie sovrapposte. Ma costruzioni assai più semplici derivano dagli importanti teoremi che seguono, di cui quello a sinistra trovasi già in DESARGUES (completato come vedremo più tardi).

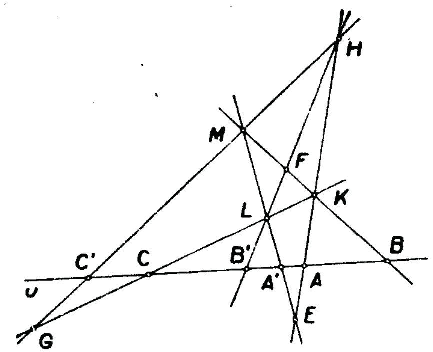
Segando le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo piano completo con una punteggiata del suo piano, che non passi per nessuno dei suoi vertici, si ottengono tre coppie di un' involuzione.

Proiettando le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero piano completo da un punto del suo piano, che non giaccia su nessuno dei suoi lati, si ottengono tre coppie di raggi di un' involuzione.

Svilupperemo la dimostrazione del teorema di sinistra.

Sia u la retta secante, ed AA', BB', CC' le tre coppie segnate su essa rispettivamente dalle tre coppie di lati opposti HK, LM; KM, HL; KL, HM del quadrangolo piano completo $HKLM$. Giacchè i tre punti diagonali E,F,G del quadrangolo non sono mai

allineati (pag. 50), una delle tre coppie AA',BB',CC' è certamente costituita da punti distinti. Sia per es. A



diverso da A', e dicasi E il punto diagonale in cui s' incontrano i lati HK, LM, che segano la coppia AA'. Proiettando il gruppo dei quattro punti distinti $AA'B'C'$, da H sul lato ML, avremo:

$$AA'B'C' \barwedge EA'LM,$$

e proiettando il gruppo $E\,A'\,L\,M$ da K sulla retta u, verrà:

$$EA'LM \barwedge AA'CB.$$

E siccome (pag. 91):

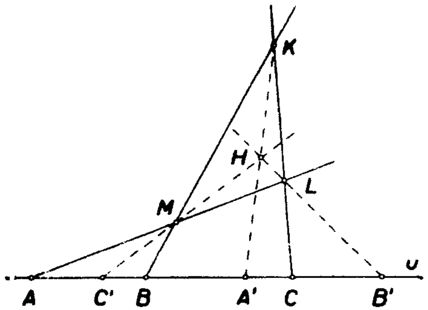
$$AA'CB \barwedge A'ABC,$$

otterremo:

$$AA'B'C' \barwedge A'ABC,$$

la quale prova che nell'involuzione $\begin{pmatrix} A & A' & B \\ A' & A & B' \end{pmatrix}$ i punti C e C' sono coniugati, ossia che le tre coppie AA', BB', CC' appartengono ad un' involuzione.

Dal teorema precedente segue che, se si vuol costruire il coniugato di un punto qualsiasi C, nell' involuzione individuata dalle coppie AA', BB', basta costruire, in un piano per u, un quadrangolo completo, di cui due lati opposti passino rispettivamente per A,A', altri due lati opposti per B,B' ed uno dei due rimanenti



per C : il sesto lato segnerà sopra u il punto C' richiesto

Ora per effettuare questa costruzione si opera così :. Si conducano in un piano per u tre rette arbitrarie (non per un punto) passanti ordinatamente pei punti A,B,C, e si chiamino K,L,M i vertici del triangolo da esse formato, rispettivamente opposti ai lati per A,B,C. Quindi si congiunga A' con K e B' e si indichi con H il punto comune alle due congiungenti: la retta MH segnerà su u il punto C'.

Lasciamo al lettore la cura di sviluppare per esercizio la costruzione duale, in un fascio di raggi, e di trasformare, colla legge di dualità nello spazio, i teoremi di questo paragrafo.

§ 28.

Trasformate proiettive di una proiettività. Involuzione unita di una proiettività (*).

Sopra una forma di 1ª specie u consideriamo una proiettività ω, e sieno A,A' due elementi corrispondenti

(*) Le considerazioni svolte in questo § non sono necessarie per intendere le parti succesive del Corso : tuttavia le raccogliamo qui, per chi desideri di avere un' idea dell' introduzione degli elementi immaginarî nella geometria sintetica. Avvertiamo soltanto che nel seguito parleremo talora di una coppia di elementi immaginarî d'una forma di 1ª specie, invece di un' involuzione ellittica della forma ; ma a questa locuzione, che ci servirà a rendere uniforme il linguaggio, non daremo altro valore che quello di una semplice sostituzione di parole.

nella ω. Poniamo tra la forma u ed un'altra forma di 1ª specie u' (sovrapposta o no alla u) una proiettività π, e diciamo A_1,A'_1 gli omologhi di A,A' mediante la π.

Per passare da A_1 ad A'_1, si deve prima passare da A_1 ad A mediante la π^{-1}, poi da A ad A' mediante la ω, ed infine da A' ad A'_1 mediante la π.

Sicchè la corrispondenza Ω, che intercede tra A_1 ed A'_1, al variare della coppia A,A' degli elementi omologhi nella ω, risulta il prodotto delle proiettività π^{-1}, ω, π; ossia :

$$\Omega \equiv \pi^{-1}\,\omega\,\pi.$$

La Ω è perciò una proiettività e si dice la *trasformata della ω mediante la proiettività π.*

Poichè evidentemente :

$$\omega \equiv \pi\,\Omega\,\pi^{-1},$$

ne segue che la ω è la trasformata di Ω mediante la π^{-1}.

Ogni elemento unito nella proiettività ω ha per omologo, nella π, un elemento unito della Ω, sicchè *le due proiettività ω,Ω sono insieme iperboliche o paraboliche o ellittiche.*

Se la ω è involutoria, cioè se gli elementi A,A' si corrispondono in doppio modo, anche gli elementi A_1,A'_1 si corrispondono in doppio modo nella Ω, sicchè questa risulterà involutoria. Dunque *la trasformata proiettiva di un' involuzione, è un' involuzione.*

Allorquando la forma u' è sovrapposta alla u, può avvenire che la trasformata della ω, mediante π, coincida colla ω stessa, che cioè si abbia :

$$\omega \equiv \pi^{-1}\,\omega\,\pi. \tag{1}$$

Facendo allora il prodotto della π con ciascuna delle due proiettività identiche ω e $\pi^{-1}\omega\pi$, avremo:

$$(2)\qquad \pi\,\omega \equiv \omega\,\pi,$$

ossia le due proiettività ω, π saranno permutabili (ved. a pag. 57).

Viceversa, se le ω,π sono permutabili, moltiplicando la π^{-1} per ciascuna delle proiettività identiche $\pi\omega$ ed $\omega\pi$, otterremo la (1), ossia la ω sarà trasformata in se stessa dalla π.

Dunque *la condizione necessaria e sufficiente affinchè due proiettività date sopra una medesima forma di* 1ª *specie sieno permutabili, è che l'una sia trasformata in se stessa dall'altra.*

Suppongasi ora che le due proiettività permutabili ω, π non sieno involutorie. Allora, se ω è iperbolica e ne sono M,N gli elementi uniti, la π, dovendo mutare un elemento unito di ω in uno analogo, muterà in sè ciascun elemento M,N, cioè π sarà iperbolica ed avrà gli stessi elementi uniti di ω.

Se ω è parabolica ed è M il suo elemento unito, esso sarà mutato in sè dalla π, la quale dovrà pure esser parabolica, perchè altrimenti, in forza di quanto precede, ω sarebbe iperbolica come π. Se infine ω è ellittica, π non potrà essere nè iperbolica nè parabolica, chè altrimenti ω sarebbe della stessa specie. Dunque π sarà ellittica. Concludendo:

Due proiettività non involutorie permutabili sono insieme iperboliche o paraboliche o ellittiche, e nei primi due casi hanno gli stessi elementi uniti.

Ci proponiamo adesso di ricercare se esiste un'involuzione I permutabile con una proiettività *non involutoria* π, data sopra una forma di 1ª specie u.

Presi due elementi A, B della forma, non uniti nella proiettività π, diciamo A', B' gli omologhi di A, B nella π, ed A_1, B_1 gli omologhi di A,B nella π^{-1}.

Avremo allora:

$$(3)\qquad ABA_1B_1 \barwedge A'B'AB,$$

e inoltre (pag. 92):

$$(4)\qquad A'B'AB \barwedge ABA'B';$$

dunque sarà:

$$(5)\qquad ABA_1B_1 \barwedge ABA'B';$$

ed applicando un teorema dimostrato a pag. 89, otterremo

$$(6)\qquad ABA_1A' \barwedge ABB_1B'.$$

Suppongasi che esista un'involuzione I permutabile con π. Allora, se I è iperbolica, la proiettività non involutoria π dovrà mutare in sè ogni elemento unito di I. Ciò significa che un elemento non unito rispetto a π, non lo è neppure rispetto ad I. Poichè A, per ipotesi, non è unito nella π, potremo scegliere come elemento B, diverso da A e non unito nella π, il coniugato di A nell'involuzione I. Allora, tenendo conto del fatto che π e π^{-1} mutano in se stessa la I, si trae che anche le coppie $A'B'$, A_1B_1 apparterranno ad I, ossia che:

$$I \equiv \begin{pmatrix} A & B & A' & B' & A_1 & B_1 \\ B & A & B' & A' & B_1 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$(7)\qquad ABB_1B' \barwedge BAA_1A',$$

la quale, confrontata colla (6), porge:

$$(8)\qquad ABA_1A' \barwedge BAA_1A',$$

ed, in virtù di un teorema visto a pag. 93, questa ci dice che il gruppo ABA_1A' è armonico. Dunque, *se esiste un'involuzione I permutabile con π, il coniugato, in quest'involuzione, di un elemento A della forma, è il coniugato armonico di A rispetto alla coppia costituita dagli omologhi di A nella proiettività π e nella sua inversa.*

E da ciò si trae intanto, come prima conseguenza, che, *se π è una proiettività parabolica, non può esistere un'involuzione* (*propriamente detta*) *permutabile con π.*

Infatti, quando π è parabolica, e ne è M l'elemento unito, il coniugato armonico dell'elemento A rispetto agli elementi A' ed A_1, corrispondenti ad A in π ed in π^{-1}, è l'elemento fisso M (pag. 88).

Un'altra conseguenza del teorema dimostrato è che non può esistere più di un' involuzione permutabile con una data proiettività π, perchè la legge con cui si costruisce una eventuale involuzione permutabile con π è unica e ben determinata, una volta data la π.

Mettiamoci ora nell' ipotesi che la π non sia parabolica. Allora l'elemento B, coniugato armonico dell'elemento A (non unito nella π) rispetto agli elementi A' ed A_1, non sarà unito in π (*) e quindi avranno luogo ancora le relazioni (3), (4), (5), da cui si deduce la (6); ed avrà luogo inoltre la (8), che esprime appunto l'armonicità del gruppo ABA_1A'. Ma dalle (6), (8) segue la (7): dunque esiste un' involuzione I a cui appartengono le tre coppie AB, $A'B'$, A_1B_1. Questa involuzione I trasforma la proiettività:

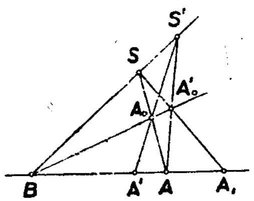
$$\pi \equiv \begin{pmatrix} A & B & A_1 & B_1 \\ A' & B' & A & B \end{pmatrix}$$

nella proiettività:

$$\begin{pmatrix} B & A & B_1 & A_1 \\ B' & A' & B & A \end{pmatrix},$$

che è la π stessa. Si conclude perciò che I è permutabile con π.

(*) Dico infatti che *se gli elementi A' ed A_1 son gli omologhi di A nella π e nella π^{-1}, e se il coniugato armonico B di A rispetto ad A', A_1 è unito per π, la π è parabolica.* Invero, se $S\,S'\,A_0\,A'_0$ è un quadrangolo completo di cui due lati opposti passino per B, altri due opposti per A e i due rimanenti per A_1 ed A', proiettando da S, S' le due punteggiate riferite mediante la π, avremo tra i due fasci S, S' una prospettività, e l'asse di prospettiva si otterrà riunendo il punto $A_0 \equiv SA . S'A'$ al punto $A'_0 \equiv SA_1 . S'A$. Poichè questo asse passa per B, si conclude che B è l'unico elemento unito della π (pag. 86).



Possiamo dunque enunciare:

Data sopra una forma di 1ª specie una proiettività non involutoria, iperbolica o ellittica, esiste sempre una ed una sola involuzione permutabile colla data proiettività.

Quest' involuzione si chiama l' *involuzione unita* della proiettività π, perchè, nel caso in cui la π è iperbolica, è l' involuzione che ha per punti doppi i punti uniti della π.

La considerazione dell' involuzione unita ci offre il mezzo di definire i punti uniti immaginarî di una proiettività ellittica, nel modo che segue:

Converremo anzitutto di dire che un' involuzione ellittica ha due punti doppi immaginarî (coniugati), identificando così il concetto di coppia di punti immaginarî col concetto di un' involuzione ellittica (di cui quei punti si riguardano come doppi).

Poichè quando una proiettività non involutoria è iperbolica i suoi elementi uniti si posson definire come gli elementi doppi dell' involuzione unita, volendo rendere uniforme il linguaggio, *potremo* DEFINIRE *come punti uniti immaginarî di una proiettività ellittica non involutoria, i punti doppi della sua involuzione unita* (ellittica), cioè identificare il concetto di punti uniti di una proiettività ellittica, con quello della relativa involuzione unita.

Chi abbia desiderio di conoscere lo sviluppo della teoria geometrica degli immaginarî, potrà consultare l'opera dello STAUDT « Beiträge zur Geometrie der Lage », nella quale è data anche la separazione di due elementi immaginarî coniugati di una forma di 1ª specie, associando a ciascuno di essi uno dei versi della forma. La teoria delle coppie di elementi immaginarî coniugati trovasi svolta elementarmente nella Memoria di SEGRE « Le coppie di elementi immaginarî nella Geometria proiettiva sintetica » (Memorie dell' Accademia delle Scienze di Torino, 1886).

Voglio sperare che i pochi cenni raccolti in questo § possano servire ad invogliare qualche studioso a consultare queste opere.

§ 29.

Proprietà metriche delle involuzioni sopra una forma di 1ª specie.

Dicesi *centro* o *punto centrale* di un' involuzione, sopra una punteggiata u, il coniugato del punto all' infinito della u.

Nel caso di un' involuzione, i due punti limiti, che consideravamo in relazione ad una proiettività qualsiasi (pag. 101), cadono nel centro O dell' involuzione: e viceversa, se in una proiettività tra due punteggiate sovrapposte i due punti limiti son proprî e coincidono con un unico punto O, questo ed il punto all' infinito della retta costituiranno una coppia di punti che si corrispondono in doppio modo nella proiettività, e quindi questa sarà involutoria, col centro in O.

Dicendo A,A' due punti coniugati nell' involuzione, la relazione della pag. 101 diverrà:

$$OA.OA' = k,$$

ove k è una costante, indipendente dalla coppia A,A' considerata.

Viceversa, è chiaro che, chiamando omologhi due punti di una retta, quando le loro distanze da un punto fisso O (considerate in valore e segno) danno un prodotto costante, la corrispondenza che si genera è un' involuzione col centro in O.

Se X è un punto doppio dell' involuzione, sarà:

$$OX^2 = k,$$

e quindi la costante k sarà positiva.

Inversamente, se k è un numero positivo, i due punti distanti da O, in valore assoluto, della $\sqrt{k}$, saranno doppi per l' involuzione. Dunque:

L' involuzione è iperbolica o ellittica secondo che la costante k (potenza dell' involuzione) è positiva o negativa.

Nel caso dell' involuzione ellittica l'equazione in OX

$$OX^2 = k,$$

dà due radici immaginarie coniugate, che in Geometria analitica si definiscono come le ascisse, a partire da O, dei due punti doppi immaginarî dell' involuzione.

Vediamo in tal modo come al concetto geometrico (introdotto nel § precedente) di punti doppi immaginarî di un' involuzione ellittica, corrisponda il concetto algebrico di radici immaginarie coniugate di un'equazione di 2° grado.

Profittando della relazione $OA.OA' = k$, dedurremo ora una costruzione metrica dei punti doppi di un' involuzione iperbolica.

Gioverà anzitutto di richiamare la nozione di *potenza di un punto rispetto ad un cerchio.*

Da noti teoremi di Geometria elementare si trae che il prodotto dei segmenti che un cerchio stacca sopra una trasversale uscente da un punto P del suo piano, a partire dal punto stesso P, è costante, tanto se il punto è esterno, quanto s'esso è interno al cerchio.

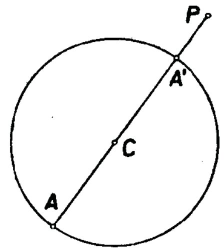
Anzi, se fissiamo un verso positivo sopra ogni trasversale uscente da P, si vede che il prodotto medesimo è costante anche nel segno, perchè, se il punto è esterno al cerchio, esso trovasi fuori del segmento finito determinato dal cerchio sopra ogni secante condotta per P, ed il prodotto è positivo; mentre accade il contrario, se il punto è interno.

Se il punto cade sulla circonferenza, una delle due lunghezze che costituiscono il prodotto considerato nei due casi precedenti, è nulla, sicchè il prodotto stesso ha il valore zero.

Orbene questo prodotto, costante una volta assegnata la posizione del punto P nel piano, si chiama *potenza di P rispetto al cerchio.*

Si può dire che *la potenza di un punto rispetto ad un cerchio è positiva o negativa o nulla, secondo che il punto è esterno o interno o cade sulla circonferenza.*

Se C è il centro del cerchio, rispetto al quale si considera la potenza, e il diametro PC sega la circon-



ferenza nei punti A, A', avremo (in valore a segno):

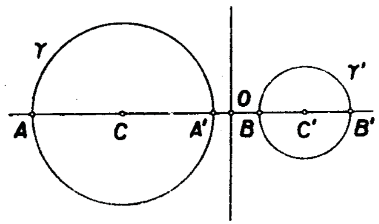
$$(1) \quad \text{potenza } P = PA.\,PA' = (PC + CA)\,(PC - CA) =$$

$$= PC^2 - CA^2 = PC^2 - r^2,$$

ove r è il raggio del cerchio.

Dati in un piano due cerchi non tangenti γ, γ', di centri C, C', sulla retta CC' vi è un sol punto O, che ha la stessa potenza rispetto ai due cerchi, perchè esso, dovendo soddisfare alla relazione

$$OA.OA' = OB.OB',$$



ove A, A' sono i punti comuni a γ ed alla CC', e BB', i punti comuni a γ' ed alla stessa retta, non è altro che il centro dell' involuzione individuata dalle coppie AA', BB'.

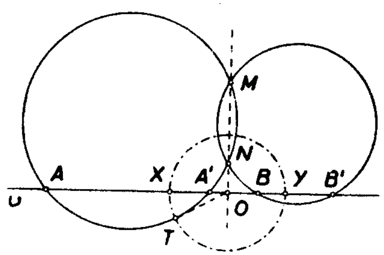
Se i due cerchi son tangenti, l'unico punto della CC' che abbia la stessa potenza rispetto ai due cerchi, è il punto O di contatto.

Profittando della espressione (1) della potenza di un punto rispetto ad un cerchio, si vede allora che ogni punto della perpendicolare tirata da O alla CC', ha la stessa potenza rispetto ai due cerchi, e che, viceversa, ogni punto che goda di questa proprietà, sta su quella perpendicolare.

Otteniamo così *una retta*, come *luogo dei punti del piano che hanno la stessa potenza rispetto a* γ, γ' : e questa retta si chiama l'*asse radicale* dei due cerchi.

È chiaro che quando i due cerchi hanno a comune due punti M, N, ogni punto P della MN ha per potenza rispetto a γ, γ' il prodotto $PM.\,PN$: dunque *in tal caso l'asse radicale è la retta che unisce i punti comuni ai due cerchi.* E se i due circoli si toccano, l'asse radicale è la tangente ad essi comune.

Ciò premesso, abbiasi sopra una retta u un' involuzione iperbolica I, individuata dalle coppie AA', BB', che non si separano; e preso un punto M esterno ad u, si considerino i cerchi MAA', MBB'. Questi cerchi s' incontreranno in un altro punto N, che potrà anche



coincidere con M. In ogni caso l'asse radicale dei due cerchi è la retta MN (la tangente comune ai due cerchi, nel caso in cui N coincide con M), e questa retta, come già abbiamo notato, incontra u nel centro O dell' involuzione I.

Per l' ipotesi che le AA', BB' non si separino, i due punti M, N cadono da una stessa parte di u, e quindi il punto O risulta esterno ai due cerchi. Conducendo da O la tangente OT ad uno di essi, per un noto teorema d' Euclide, avremo :

$$OT^2 = OA.OA',$$

e quindi il cerchio, di centro O e di raggio OT, segnerà su u due punti X , Y, che, soddisfacendo alla relazione :

$$OX^2 = OY^2 = OA.OA',$$

saranno i punti doppi dell' involuzione.

Si noti che questi punti non sono che i punti di contatto, colla u, di due cerchi passanti per M,N. Invero, la retta MN è l'asse radicale della coppia costituita dal cerchio MNA e da ogni altro cerchio passante per M,N; e quindi un cerchio passante per M,N, e per un punto C di u, sega ulteriormente la u in un punto C' tale che

$$OC.OC' = OA.OA',$$

ossia nel coniugato di C nell' involuzione data I. In particolare un cerchio passante per MNX, deve segare ulteriormente la retta nel punto X stesso, ossia deve essere tangente ad u.

Dunque, gl' infiniti cerchi passanti per M,N segano sulla u le coppie di un' involuzione, e i punti doppi di questa son punti di contatto colla u di due cerchi passanti per M,N.

Questa proposizione si può estendere nel modo seguente : Si considerino due cerchi γ,γ' di un piano, non tangenti, e sia a il loro asse radicale, r la retta che unisce i loro centri ed HH',KK' le coppie segate da γ,γ' su questa retta. Si riconosce subito, ricorrendo alla proprietà caratteristica dell'asse radicale, che ogni cerchio che abbia per diametro il segmento finito determinato da due punti coniugati nell' involuzione individuata dalle HH',KK', ha per asse radicale, rispetto a ciascuno dei due cerchi dati, la retta a. Sicchè vi sono infiniti cerchi aventi a coppie per asse radicale la a; ed anzi si vede facilmente che per ogni punto del piano, che non sia comune a tutti quei cerchi, ne passa uno solo.

Un tal sistema lo diremo un *fascio di cerchi*. In particolare, quando i due cerchi γ,γ', da cui siamo partiti, abbiano in comune due punti distinti M,N, il fascio si riduce al sistema di tutti i circoli passanti per M,N, i quali chiamansi *punti base* del fascio.

Diremo infine fascio di cerchi anche il sistema di tutti i cerchi che toccano in un punto dato (punto base) una data retta.

Ciò posto, se AA', BB' son le coppie di punti in cui due cerchi di un fascio segano una retta u, non contenente punti base, chiamando O il punto comune all'asse radicale e ad u, avremo :

$$OA.\ OA' = OB.OB',$$

quindi le AA', BB' apparterranno ad un' involuzione di centro O. Tenendo fisso uno dei due cerchi, per es. quello che sega la u nei punti A,A', e facendo variare l'altro nel fascio, in guisa che seghi sempre la retta in due punti (distinti o coincidenti) B,B', si vede che la coppia BB' varia nell' involuzione che ha per centro O, e nella quale son coniugati A ed A'.

Se l' involuzione possiede due punti doppi X,Y, questi saranno punti di contatto della u con due cerchi del fascio.

Si conclude pertanto che :

Gl' infiniti cerchi di un fascio segano sopra una retta, non contenente punti base del fascio, le infinite coppie di un' involuzione, e se questa è iperbolica, vi sono nel fascio due cerchi che toccano la retta nei punti doppi.

Da questo teorema si può dedurre un'elegante *costruzione della coppia comune a due involuzioni.*

Sieno $I \equiv \begin{pmatrix} A & A'B \\ A'A & B' \end{pmatrix}$ $I_1 \equiv \begin{pmatrix} A_1 & A'_1 & B_1 \\ A'_1 & A_1 & B'_1 \end{pmatrix}$ due involuzioni sopra una punteggiata u. Preso un punto M fuori di u, si conducano i cerchi MAA', MBB', che si seghino ulteriormente in N, e i cerchi $MA_1A'_1$, $MB_1B'_1$, che si seghino ulteriormente in P. Le infinite coppie della I saranno segate su u dai cerchi passanti per M,N e quelle della I_1 dai cerchi passanti per M,P. Dunque, se esiste una coppia comune alle due involuzioni, questa sarà segata su u dal cerchio MNP.

Vediamo ora come si possa trar profitto da questa costruzione per dare una *nuova costruzione dei punti uniti di una proiettività individuata da tre coppie* AA', BB', CC' (CHASLES).

Premettiamo perciò il seguente teorema (grafico):

Se AA', BB' *son due coppie di elementi corrispondenti in una proiettività (iperbolica o parabolica) sopra una forma di 1ª specie, ed* X,Y *gli elementi uniti di questa proiettività, le tre coppie* $XY, AB', A'B$ *appartengono ad un' involuzione.*

Infatti, se la proiettività è iperbolica, dalla relazione:

$$XYAB \barwedge XYA'B',$$

si trae (pag. 92)

$$XYAB \barwedge YXB'A',$$

la quale prova che nella proiettività $\begin{pmatrix} X & Y & A \\ Y & X & B' \end{pmatrix}$ all' elemento B risponde A'. Ma la proiettività $\begin{pmatrix} X & Y & A \\ Y & X & B' \end{pmatrix}$ è involutoria, perchè i due elementi X, Y si corrispondono in doppio modo: dunque le coppie XY, AB', $A'B$ appartengono ad un' involuzione.

Se la proiettività è parabolica, ed è X l'elemento unito, si tratta di provare che nell' involuzione individuata dalle coppie AB', $A'B$ l'elemento X è doppio. Suppongasi infatti che il coniugato di X sia un elemento Y diverso da X; allora avremo:

$$XYAB \barwedge YXB'A',$$

dalla quale si trae:

$$XYAB \barwedge XYA'B',$$

e quindi la proiettività $\begin{pmatrix} X & A & B \\ X & A' & B' \end{pmatrix}$ ammetterebbe un ele-

mento unito Y, diverso da X, contro il supposto ch'essa sia parabolica.

Consideriamo ora sopra una retta u una proiettività $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ e proponiamoci di costruire i suoi punti uniti X,Y (se esistono). Pel teorema precedente, questi costituiranno la eventuale coppia comune alle involuzioni individuate dalle coppie AB', $A'B$ e $A'C$, $A'C$. Basterà dunque all'uopo condurre per un punto M, esterno ad u, i cerchi MAB' ed $MA'B$, che si seghino altrove in N eppoi i cerchi MAC', $MA'C$, che si seghino altrove in P. Il cerchio MNP taglierà su u i punti uniti richiesti.

Passiamo infine a studiare le *involuzioni che presentano particolarità metriche.* E cominciamo dalla punteggiata.

Se un' involuzione iperbolica sulla punteggiata u ha un punto doppio all' infinito, ricordando un teorema dimostrato a pag. 114, si vede che due punti coniugati A,A' son sempre disposti simmetricamente rispetto al punto doppio proprio O. Viceversa, la simmetria rispetto al punto O è un' involuzione iperbolica, che ha i punti doppi in O ed all' infinito. Dunque:

Sopra la punteggiata un' involuzione iperbolica con un punto doppio all' infinito è una simmetria rispetto all'altro punto doppio; e viceversa.

Nel fascio di raggi (o di piani) una congruenza inversa è un' involuzione iperbolica, perchè evidentemente due elementi omologhi si corrispondono in doppio modo.

Ricerchiamo se in un fascio di raggi (o di piani) può esistere una congruenza diretta involutoria. Poichè in un fascio di raggi (e similmente dicasi per un fascio di piani) una congruenza diretta ω si genera con la rotazione del fascio, di un certo angolo α, in un determinato verso, i raggi a', a_1, omologhi di un medesimo raggio a nella ω e nella ω^{-1}, saranno equinclinati su a dell'angolo α. Dunque, perchè coincidano (se si esclude il caso $\alpha = 0$, nel quale la congruenza è identica), dovrà essere $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Si conclude che:

Una congruenza diretta involutoria in un fascio di raggi (o di piani) si genera con una rotazione di un angolo retto, attorno al sostegno del fascio.

Una tale involuzione, in un fascio, si chiama un' *involuzione di angoli retti* od anche un' *involuzione circolare.*

L' involuzione che viene segnata sopra una retta all' infinito da un' involuzione circolare in un fascio di raggi, appartenente a quella giacitura, chiamasi l' *involuzione assoluta.*

I punti doppi immaginarî di quest' involuzione (ossia l' involuzione stessa) diconsi i *punti ciclici.* Si chiamano poi *rette isotrope,* per un punto del piano, i raggi doppi immaginarî dell' involuzione circolare che ha per sostegno quel punto; cioè le rette che da esso proiettano i punti ciclici.

Si noti che il teorema a pag. 108, segando ognuno dei due fasci di cui là si parla colla rispettiva retta all' infinito e chiamando coniugati nell' involuzione assoluta due punti all' infinito di rette ortogonali, si può anche enunciare in questo modo:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una proiettività fra due punteggiate improprie sia una congruenza, è che a due (e quindi alle infinite) coppie dell' involuzione assoluta dell'una, faccia corrispondere coppie dell' involuzione assoluta dell'altra; ossia, brevemente, che quella proiettività trasformi l' involuzione assoluta dell'una nell' involuzione assoluta dell'altra.

Applicando il teorema di pag. 116 possiamo inoltre dire che:

In ogni involuzione in un fascio di raggi (o di piani), c' è una sola coppia di elementi coniugati ortogonali, a meno che l' involuzione stessa non sia circolare.

Infatti, se l' involuzione data non è circolare, essa ha una coppia comune coll' involuzione circolare, che è ellittica.

Termineremo l'esposizione delle proprietà metriche dell' involuzione dimostrando che:

Data sopra una retta un' involuzione ellittica, esistono sempre (infiniti) punti dai quali l' involuzione vien proiettata secondo un' involuzione circolare.

Sieno infatti AA', BB' due coppie dell' involuzione I, data sopra la punteggiata u. Per l' ipotesi che la I sia ellittica, le AA', BB' si separano, e quindi la sfera di diametro AA' taglia la sfera di diametro BB' secondo un circolo γ. Da ogni punto S di questo circolo la I vien proiettata secondo un' involuzione I', nella quale al raggio SA corrisponde il raggio ortogonale SA', e ad SB il raggio ortogonale SB'; dunque I' è circolare.

Sotto forma diversa si può dire che:

Ogni involuzione ellittica, data sopra una retta, si può in infiniti modi proiettare in un' involuzione assoluta.

CAPITOLO OTTAVO

Forme geometriche generate da forme di 1ª specie proiettive.

§ 30.

Schiere rigate. Quadriche rigate.

Approfondiamo lo studio di una figura che già abbiamo incontrato incidentalmente a pag. 76.

Chiameremo *schiera rigata* il sistema delle infinite rette ciascuna delle quali congiunge una coppia di punti omologhi in una proiettività tra due punteggiate sghembe u, u'. Due rette qualunque della schiera sono sghembe fra loro, perchè l'ipotesi opposta conduce subito a concludere che le u, u' son complanari.

Se ai punti $A, B, C, \ldots$ di u corrispondono i punti $A', B', C', \ldots$ di u', il fascio dei piani che proiettano da u i punti $A', B', C', \ldots$, risulta proiettivo al fascio dei piani che proiettano da u' i punti $A, B, C, \ldots$; e due piani omologhi, come uA', $u'A$, si tagliano lungo la retta AA' che congiunge due punti omologhi nella proiettività tra le punteggiate u, u'.

Sicchè la schiera generata dalle punteggiate proiettive u, u', si può anche definire come il sistema delle rette comuni alle coppie di piani omologhi di due fasci proiettivi di piani, coi sostegni sghembi; e viceversa (dualmente).

Poichè, per dualità nello spazio, al sistema delle rette che congiungono le coppie di punti omologhi nella

proiettività tra due punteggiate sghembe, corrisponde il sistema delle rette comuni alle coppie di piani omologhi nella proiettività tra due fasci di piani cogli assi sghembi, si può dire che:

La schiera rigata è una forma duale di se stessa.

Chiameremo *quadrica rigata* l'insieme di tutti i punti che appartengono alle rette di una schiera. Tutti questi punti riempiono una *superficie* (nel senso intuitivo della parola), la quale vien generata col moto continuo di una retta che descrive la schiera (s'immagini un punto che si muova con continuità sopra una delle punteggiate u, u', e si segua la variazione continua della retta che congiunge quel punto col suo omologo nell'altra punteggiata).

Diciamo V la schiera rigata generata dalle punteggiate proiettive $u \equiv ABC \ldots$, $u' \equiv A'B'C' \ldots$, e Q la quadrica a cui dà luogo la schiera V; ed osserviamo anzitutto che *per ogni punto della quadrica Q passa una sola retta della schiera V.* Invero, per un punto di Q passa certo qualche retta di V, per la proprietà che abbiamo assunta come definizione dei punti di Q; e inoltre per quel punto non possono passare due (o più) rette di V, perchè le rette di V sono a due a due sghembe.

Diremo che una retta *appartiene* alla quadrica rigata Q, quando ogni punto della retta è un punto di Q.

Alla quadrica Q appartengono intanto tutte le rette della schiera V, che si dicono *generatrici* della quadrica; e le rette u, u', che si chiamano *direttrici*, perchè incontrano in un punto ogni generatrice.

Sieno $v \equiv AA'$, $v' \equiv BB'$, $v'' \equiv CC'$ tre generatrici della quadrica. Esistono allora infinite rette, costituenti un sistema U, sghembe tra loro a due a due ed appoggiate alle v, v', v'': da ogni punto di una di queste, esce una ed una sola di quelle infinite rette (pag. 15); e fra le rette di U si trovano le u, u'.

Ogni retta di U si può prendere come asse di un fascio di piani, che sega le u, u' in due punteggiate prospettive, ed in questa prospettività sono omologhi i punti A, A' e B, B' e C, C' (pag. 77): dunque essa non è altro che la proiettività data $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ tra le u, u'. Ne deriva che tutte le rette del sistema V, che congiungono le coppie di punti omologhi nella proiettività medesima, si appoggiano ad una retta qualunque del sistema U. Sicchè la schiera rigata V si può anche generare considerando le infinite rette che si appoggiano a tre rette del sistema U. E, reciprocamente, è chiaro che *il sistema di tutte le rette appoggiate a tre rette sghembe a due a due, costituisce una schiera rigata*, perchè, su due delle rette date, le infinite rette che si appoggiano a tutte tre, segano le coppie di punti omologhi in una prospettività, che ha per asse la terza retta.

Poichè il sistema U, prima costruito, contiene tutte le rette appoggiate a v, v', v'', si deduce che pur esso costituisce una schiera rigata; e siccome ogni retta u'' della schiera U, si appoggia ad ogni retta della schiera V, la retta u'' apparterrà alla quadrica Q.

Dunque troviamo sulla quadrica Q un' intera schiera di rette che contiene le u, u'. Le rette di quest'altra schiera, che sono incidenti alla schiera delle generatrici, si diranno *direttrici*.

Siccome le rette della schiera U si appoggiano a *tutte* le rette della V, la schiera U si può anche definire come il sistema di tutte le rette appoggiate a tre generatrici qualsiansi. Da ciò si trae subito che sopra Q non possono esistere altre rette, all' infuori di quelle di U e di V. Invero, se r è una retta appartenente a Q e diversa dalle generatrici, per ogni punto di r passerà una generatrice di Q, e poichè la r non può incontrare in più di un punto una generatrice, da tre punti diversi di r usciranno tre diverse generatrici; ossia la r apparterrà al sistema U delle rette appoggiate a tre generatrici.

Notiamo infine *che le due schiere U, V si trovano mutuamente nella stessa condizione, sicchè se si partisse dalla schiera U, come schiera delle generatrici, si otterrebbe V, come schiera delle direttrici.*

Gioverà riassumere le osservazioni fatte, nel seguente enunciato:

Sopra una quadrica rigata Q, costituita dai punti delle rette di una schiera rigata V, si trova un'altra schiera rigata U; e, mentre due rette di una stessa schiera sono sghembe tra loro, due rette di U, V sono incidenti.

Per ogni punto di Q esce una retta di U ed una di V; ed, all' infuori delle rette dei due sistemi suddetti, alla quadrica non appartengono altre rette.

Il fatto, già notato, che tutte le rette di una schiera segano sopra due rette qualunque dell'altra le infinite coppie di una prospettività, che ha per asse una terza retta, del resto qualsiasi, di quest'ultima schiera, si può enunciare, insieme al suo duale, così:

Due rette di una schiera vengono segate (o proiettate) da tutte le rette dell'altra, secondo due punteggiate (o fasci di piani) proiettive (o proiettivi).

Si osservi infine che *se una retta sega una quadrica in tre punti, essa giace sulla quadrica*, giacchè ogni retta che incontri tre generatrici appartiene, come abbiam visto, al sistema delle direttrici.

Come conseguenza immediata si trae che:

Una retta non appartenente alla quadrica non può avere con questa più di due punti comuni.

Perciò si dice che la quadrica è una *superficie di 2° ordine.*

Altre proprietà della Q e delle schiere su essa tracciate, si vedranno fra breve.

§ 31.

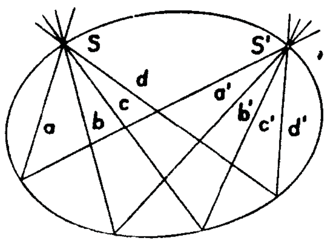
Coniche e coni quadrici.

Sono tra loro duali nel piano le seguenti definizioni:

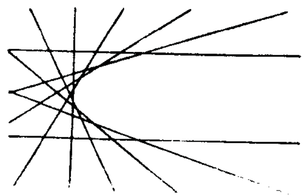
Dicesi curva di 2° *ordine* o *conica luogo* il luogo dei punti comuni alle infinite coppie di raggi omo-	Dicesi *inviluppo* (*di rette*) *di 2ª classe* o *conica inviluppo* l' insieme delle rette che congiungono le

loghi in una proiettività tra due fasci di raggi, complanari, non concentrici, nè prospettivi.	infinite coppie di punti omologhi in una proiettività tra due punteggiate, complanari, non sovrapposte, nè prospettive.

La figura definita a sinistra è una curva, nel senso intuitivo della parola; e lo si vede facendo muovere con continuità un raggio di uno dei due fasci, e quindi il corrispondente nell'altro. (Una delle forme della curva generata è quella disegnata qui sotto).



La figura definita a destra vien generata da una retta che si muove nel piano con continuità: una parte del piano resta tutta solcata da rette della figura, e dentro all'altra parte non penetra nessuna retta della figura, come indica il disegno.



Osserviamo anzitutto che:

Una curva di 2° ordine passa pei centri dei fasci proiettivi, che servono a generarla.	*Un inviluppo di 2ª classe contiene (tra le sue rette) i sostegni delle due punteggiate proiettive, che servono a generarlo.*

Infatti (a sinistra) se S,S' sono i due fasci proiettivi, al raggio SS', pensato come appartenente al fascio S, corrisponde, nell'altro fascio, un raggio passante per S' e diverso da SS' (per l'ipotesi che i due fasci non sieno prospettivi, e quindi che il raggio ad essi comune non sia unito). I due raggi omologhi suddetti s'incontrano nel punto S', che dunque appartiene alla curva. Analogamente si prova che anche S appartiene alla curva.

Dimostriamo inoltre che:

Una curva di 2° ordine è segata da una retta del suo piano in due punti al più.	*Per un punto del piano di un inviluppo di 2ª classe passano al più due rette dell'inviluppo.*

Difatti (a sinistra) i punti comuni alla curva di 2° ordine γ e ad una retta u del suo piano, non passante pei centri S,S' dei fasci proiettivi che generano γ, sono punti uniti per la proiettività che si ottiene sulla u segando i due fasci proiettivi S,S', e, come sappiamo, il numero di questi punti uniti non può esser superiore a due.

Un raggio passante per S (o per S') sega la γ in S (o S') e altrove in un sol punto, che è quello comune al raggio stesso ed al suo omologo in S' (o S). Dunque qualunque sia la retta che si considera nel piano, essa non sega γ in più di due punti.

Per questa ragione la curva γ dicesi « di 2° ordine ». Dualmente dicasi per giustificare l'attributo « di 2ª classe».

L'effettiva esistenza di rette che seghino in due punti una conica γ risulta subito, considerando una retta che riunisca due punti della curva. *Esistono dunque rette secanti una conica luogo in due punti*, e si chiamano semplicemente *secanti.*

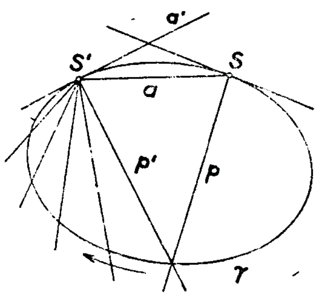
L'esistenza di rette che seghino la conica γ in un sol punto, risulta considerando le rette corrispondenti al raggio SS', pensato come appartenente all'uno od all'altro fascio. Invero, se a' è il raggio di S' omologo del raggio $a \equiv SS'$ di S, il punto $S' \equiv aa'$ è il solo punto di γ che si trovi su a'. Si conclude che:

Se una conica luogo γ è generata da due fasci proiettivi S,S', i raggi omologhi di SS', pensato come appartenente all'uno od all'altro fascio [*che sono le congiungenti di S,S' col centro di collineazione dei due fasci* (*pag.* 84)], *incontrano la curva soltanto nel punto S' o nel punto S.*

Questi due raggi diconsi *tangenti* alla γ nei punti S, S'.

Tale denominazione resta giustificata dal fatto che ciascuno di quei raggi corrisponde alla nozione intuitiva di tangente ad una curva in un punto.

E difatti dicendo, come prima, a' l'omologo di $a \equiv SS'$, nel fascio S', ossia dicendo a' la tangente a γ in S', mentre un raggio p' ruota nel fascio S', avvici-



nandosi indefinitivamente al raggio a', il punto che quel raggio ha comune col raggio p, omologo in S, cioè il punto comune a p' ed a γ (fuori di S'), si avvicina indefinitamente ad S', sicchè *la a' si può riguardare come la posizione limite di una retta congiungente S' con un altro punto della curva che si approssimi indefinitamente ad S', o, secondo anche si dice brevemente, come la congiungente di due punti infinitamente vicini della curva.*

Si noti che tutte le rette del fascio S', all'infuori di a', son secanti della conica, perchè ognuna di esse incontra il proprio raggio omologo in un punto distinto da S'. Vi è dunque in S', e così in S, *una sola tangente.*

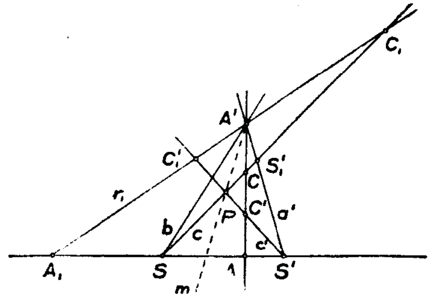
Vedremo tra poco che, non soltanto in S,S', ma anche in ogni altro punto della γ, c'è una determinata tangente.

Proviamo ora che *esistono rette che non hanno punti comuni con una data conica luogo.*

Queste rette si diranno *non secanti*, rispetto alla conica.

La proiettività tra i due fasci S,S', che generano la conica γ, si può individuare assegnando il centro di collineazione A' (e quindi i raggi $a' \equiv S'A'$, $b \equiv SA'$ omologhi del raggio SS' pensato come raggio a di S o come raggio b' di S') ed una coppia c,c' di raggi corrispondenti, i quali s'incontreranno in un punto P di γ.

Sopra un raggio r, uscente da A', diverso da b,a', i due fasci proiettivi S,S' segan due punteggiate in invo-



luzione, perchè il punto A' e l'intersezione A del raggio suddetto con SS', si corrispondono in doppio modo (*). Quest'involuzione sarà iperbolica, se il raggio condotto sega la γ in due punti, che saranno doppi per l'involuzione stessa; sarà ellittica nel caso contrario. Sicchè, volendo ricercare se esistono rette uscenti da A' e non

---

(*) Notiamo qui, incidentalmente, che è vera anche la proprietà reciproca, che cioè le sole rette che taglino due fasci proiettivi complanari S, S' — non prospettivi — secondo due punteggiate in involuzione, sono quelle che passano per centro di collineazione A' dei due fasci. Invero, se una retta s non passa per A', nella proiettività che i due fasci staccano su s, al punto $SS'.s$, pensato come appartenente all'una o all'altra delle due punteggiate sovrapposte ad s, corrispondono due punti distinti, che sono le intersezioni di s cogli omologhi del raggio SS', pensato come appartenente all'uno o all'altro fascio.

secanti la γ, occorrerà ricercare se esiste qualche retta r_1, passante per A', sulla quale i raggi c, c' segnino una coppia C_1,C'_1 separata dalla coppia A_1,A', ove si è posto $A_1 \equiv SS'.r_1$ (vedi a pag. 113).

Pongasi $m \equiv A'P$ e sia dapprima r una retta appartenente allo stesso angolo completo $a'b$ cui appartiene il raggio m, sicchè le due coppie di raggi r,m ; b,a' non si separano. Su c queste due coppie di raggi staccano le coppie di punti C,P ed S,S_1 ($S_1' \equiv ca'$), che dunque non si separano.

E similmente non si separeranno le coppie C,C'; A,A' proiezioni delle precedenti da S' su r. Ne deriva che su r i due fasci proiettivi S, S' staccano una involuzione iperbolica, cioè che r è una retta secante della conica.

Se ora r_1 è una retta appartenente all'angolo completo $a'b$ che non contiene m, dal fatto che le due coppie r_1, m e b, a' si separano, si deduce, analogamente, che si separano le coppie C_1,C'_1 ; A_1,A' e quindi che r_1 è una retta non secante di γ.

Possiamo pertanto enunciare il teorema:

Le tangenti ad una conica luogo, nei centri dei due fasci proiettivi che servono a generarla, determinano due angoli completi, uno dei quali è costituito da rette secanti della conica e l'altro da rette non secanti.

Poichè congiungendo un punto della conica luogo, diverso dai centri dei due fasci, col centro di collineazione dei fasci stessi, si ottiene una retta secante, il teorema precedente può anche enunciarsi così:

Una conica luogo è tutta contenuta in uno dei due angoli completi determinati dalle sue tangenti nei centri dei fasci proiettivi che la generano.

Queste nozioni si possono trasportare per dualità nel piano, e si ottengono proposizioni relative alle coniche inviluppo.

Enunciamole:

Esistono sempre punti da cui escono due rette di una conica inviluppo e si dicono esterni all' inviluppo.

Da ciascuno dei punti A', B ove l'asse di collineazione incontra le punteggiate proiettive che generano l' inviluppo, esce una sola retta di questo.

I punti A',B si dicono *punti di contatto* delle due rette che sostengono le due punteggiate proiettive, od anche più brevemente *punti dell' inviluppo.*

Esistono sempre punti da cui non escono rette dell' inviluppo, e si dicono interni all' inviluppo. Uno dei segmenti $A'B$ è tutto costituito da punti interni e l'altro da punti esterni all' inviluppo.

Le considerazioni fatte finora, relative alle coniche luogo e inviluppo, si possono trasportare per dualità nello spazio, e si ottengono proprietà relative alle due figure (duali tra loro nella stella), che passiamo a definire.

Dicesi *inviluppo semplice di piani di 2ª classe* o *cono quadrico inviluppo* il sistema di tutti i piani ciascuno dei quali congiunge due raggi omologhi in una data proiettività tra due fasci di raggi di una stella, non complanari, nè prospettivi.

Il centro della stella dicesi *vertice* dell' inviluppo.

Un inviluppo semplice di 2ª classe contiene i piani dei fasci proiettivi che lo generano.

Da ogni retta della stella escono al più due piani dell' inviluppo.

Dai raggi omoghi del raggio comune ai due fasci, pensato come appartenente

Dicesi *cono di 2° ordine* o *cono quadrico luogo* il sistema di tutte le rette (*generatrici del cono*) ciascuna delle quali è comune a due piani omologhi in una data proiettività tra due fasci di piani di una stella, non coassiali, nè prospettivi.

Il centro della stella dicesi *vertice* del cono.

Un cono quadrico contiene gli assi dei due fasci proiettivi che lo generano.

Ogni piano della stella sega il cono in due generatrici al più.

I piani omologhi del piano comune ai due fasci, pensato come appartenente all'uno o dall'altro, escono soltanto i piani dell' inviluppo che contengono i fasci a cui i raggi considerati appartengono. Perciò questi due raggi diconsi *generatrici di contatto* dei piani dei due fasci, od anche *generatrici* dell' inviluppo.

Esistono anche rette della stella da cui escono due piani dell' inviluppo e rette dalle quali non ne esce nessuno.

Le prime si dicono esterne, la seconde interne all' inviluppo, ecc. ecc.

all'uno od all'altro, segano il cono soltanto lungo gli assi dei fasci a cui quei piani appartengono. Perciò questi due piani diconsi *piani tangenti* al cono, lungo gli assi dei due fasci.

Esistono anche piani della stella che segano il cono in due generatrici e piani che non contengono generatrici.

I primi diconsi secanti, i secondi non secanti rispetto al cono, ecc. ecc.

Poniamo ora in relazione tra loro le due figure piane prima definite, colle figure della stella di cui abbiamo indicato la generazione.

Una conica luogo vien proiettata da un punto esterno al suo piano secondo un cono quadrico luogo, e, viceversa, un cono quadrico luogo vien segato secondo una conica luogo da ogni piano non passante pel suo vertice.

Invero, due fasci proiettivi di raggi complanari, non concentrici, nè prospettivi, vengono proiettati da un punto esterno al loro piano secondo due fasci proiettivi di piani appartenenti ad una stella, non coassiali, nè prospettivi; e, viceversa, due tali fasci vengono segati da un piano, non passante pel centro della stella, secondo due fasci di raggi complanari, non concentrici, nè prospettivi. In altri termini, i punti comuni ai raggi omologhi dei due fasci di raggi (che son punti della conica generata dai fasci stessi), son proiettati secondo rette comuni ai piani omologhi dei due fasci di piani (che son generatrici del relativo cono quadrico); e viceversa.

Analogamente si prova che:

Una conica inviluppo vien proiettata da un punto esterno al suo piano, secondo un cono quadrico inviluppo; e, viceversa, un tale inviluppo vien segato da un piano non passante pel suo vertice, secondo una conica inviluppo.

Dalle proposizioni precedenti si trae subito che:

La proiezione, da un punto sopra un piano, di una conica luogo o inviluppo, è ancora una conica luogo o nviluppo.

§ 32.

Relazioni tra le schiere rigate, le coniche ed i coni quadrici.

Poniamo infine in relazione le figure definite nel precedente §, colle quadriche rigate, definite nel § 30.

Una schiera rigata è segata secondo una conica luogo da un piano che non appartenga ad alcuna retta della schiera.

Una schiera rigata è proiettata secondo un cono quadrico inviluppo da un punto che non appartenga ad alcuna retta della schiera.

Infatti (a sinistra) pensando la schiera V come generata da due fasci proiettivi di piani cogli assi u, u' sghembi, per sezione con un piano, che non contenga nessuna generatrice della schiera, e quindi neppure i sostegni dei due fasci, questi danno luogo a due fasci di raggi non concentrici, che non posson essere neppure prospettivi, perchè, nel caso contrario, pel loro raggio comune (unito) passerebbero due piani omologhi nella proiettività tra u ed u', e quindi il piano secante conterrebbe una generatrice di V, contro il supposto. I due fasci di raggi proiettivi generano dunque una conica, che è sezione della data schiera col piano considerato.

Ma è importante osservare che queste proposizioni si possono invertire:

Una conica luogo può sempre riguardarsi, in infiniti modi, come sezione di una conveniente schiera rigata.

Un cono quadrico inviluppo può sempre riguardarsi, in infiniti modi, come proiezione di una conveniente schiera rigata.

Infatti (a sinistra), sieno S,S' i due fasci proiettivi di raggi, che generano la conica γ. Conduciamo per S,S' rispettivamente, due rette sghembe u,u', nessuna delle quali giaccia sul piano di γ, e proiettiamo da u,u' rispettivamente i due fasci proiettivi S,S'. Le intersezioni dei piani omologhi sono le infinite generatrici di una schiera rigata, ed una generatrice, che sia comune ai piani omologhi α,α', sega il piano di γ nel punto comune ai due raggi omologhi a,a', dei quali α,α' son proiezioni da u, u'. Dunque ogni generatrice della schiera segna un punto di γ, e l' intera schiera segna l' intera curva γ.

Una conseguenza notevole di questi teoremi, è la seguente:

Una conica luogo vien proiettata da due suoi punti qualsiansi secondo due fasci proiettivi.

In un cono quadrico inviluppo due piani qualunque son segati da tutti gli altri secondo due fasci di raggi proiettivi.

Infatti (a sinistra) riguardiamo la conica γ come sezione, col piano π, della schiera rigata V, che ha per direttrici le rette u,u', uscenti dai centri S,S' dei fasci proiettivi che generano γ; e sieno u'',u''' le direttrici della schiera, che escono da due altri punti S'', S''' di γ. Poichè le generatrici di V son proiettate da due direttrici qualunque secondo due fasci proiettivi (pag. 138), i fasci di piani che proiettano le generatrici di V da u'',u''', saranno proiettivi. Ora questi due fasci proiettivi di piani segano π secondo due fasci proiettivi di raggi coi centri in S'',S''', e due raggi omologhi a,a', che sieno sezioni di due piani omologhi α,α', s' incontrano in quel punto della γ, che è segato sul piano π dalla retta $\alpha\alpha'$ della schiera V.

È dunque vero che i punti di γ son proiettati da S'', S''' secondo coppie di raggi omologhi in una determinata proiettività. Si noti che il ragionamento non soffre eccezione se uno dei punti S'', S''' coincide con uno dei punti S,S'.

Dal teorema dimostrato si trae che *i centri dei due fasci proiettivi S,S', che servirono a generare la γ, non sono punti particolari della curva, giacchè questa si può generare come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi in una conveniente proiettività tra i fasci che hanno per centri due punti qualunque della γ.*

Ne segue che (pag. 141) *in ogni punto una conica luogo ammette una ed una sola tangente e che* (pag. 143) *dei due angoli completi formati dalle tangenti ad una conica luogo in due punti qualunque, uno è tutto costituito da rette secanti e l'altro da rette non secanti*, ossia che *la conica luogo è contenuta tutta in uno dei due angoli completi determinati dalle tangenti in due suoi punti qualsiansi.*

Dualmente (nel piano) si deduce che «i sostegni «delle due punteggiate che servono a generare una co«nica inviluppo, non sono rette particolari dell' inviluppo. «Sopra ogni retta dell' inviluppo si trova un sol punto «di contatto o punto dell' inviluppo; dei due segmenti «che son determinati da due di questi punti di contatto, «uno è tutto costituito da punti interni e l'altro da «punti esterni».

Il lettore, mediante la legge di dualità nello spazio, dedurrà da queste proposizioni, relative a coniche, luogo ed inviluppo, le proposizioni corrispondenti relative a coni quadrici luogo ed inviluppo.

§ 33.

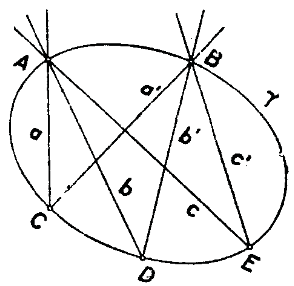
Condizioni che individuano una conica.

Nel seguito, per abbreviare il linguaggio, diremo che più *punti* del piano sono *indipendenti*, quando tre qualunque di essi non sono allineati, e che una *retta* ed un *punto* sono *indipendenti*, quando non si appartengono. E dualmente.

Dimostreremo ora che:

Per cinque punti indipendenti del piano passa una ed una sola conica luogo.	*Date nel piano cinque rette indipendenti, esse appartengono ad una e ad una sola conica inviluppo.*

Sieno (a sinistra) A,B,C,D,E i cinque punti dati; a,b,c i raggi che proiettano i punti C,D,E da A, ed a',b',c' i raggi che proiettano gli stessi punti da B. Per l' ipotesi che fra i cinque punti dati non vi sieno allineamenti, esisterà tra i due fasci una proiettività ben determinata $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, ed essa non sarà una prospettività. Perciò le intersezioni dei raggi omologhi genereranno una conica γ, passante pei centri A,B dei due fasci e pei punti C,D,E.



Dunque per quei cinque punti passa almeno una conica.

Dicasi ora γ' una conica (eventualmente diversa da γ) e passante per A,B,C,D,E. Proiettando da A, B i punti di γ', avremo due fasci proiettivi (pag. 147), ed in questa proiettività alla terna a,b,c risponderà la terna a',b',c'. Sicchè la proiettività a cui dà luogo γ', non differisce da quella che ci ha servito a generare γ; ossia la conica γ' non differisce da γ.

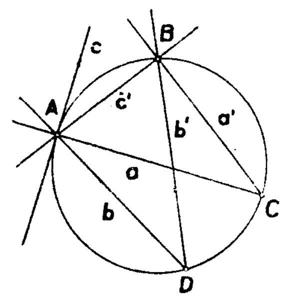
Dalle proposizioni dimostrate segue immediatamente che:

Due coniche luogo distinte non possono avere più di quattro punti comuni.	***Due coniche inviluppo distinte non possono avere più di quattro rette comuni.***

Dimostriamo inoltre che:

Per quattro punti indipendenti del piano passa una ed una sola conica luogo, che abbia per tangente, in uno di quei punti, una retta indipendente dagli altri tre.	*Date quattro rette indipendenti del piano, esse appartengono ad una e ad una sola conica inviluppo, che abbia per punto di contatto, relativo ad una di quelle rette, un punto indipendente delle altre tre.*

Sieno (a sinistra) A,B,C,D i quattro punti dati e c la retta passante per A, ma indipendente dagli altri tre punti.



Poniamo $a \equiv AC$, $b \equiv AD$, $BA \equiv c'$, $BC \equiv a'$, $BD \equiv b'$, e consideriamo, tra i fasci di raggi A,B, la proiettività $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$. Questa proiettività non può essere una prospettività, perchè il raggio comune non è unito; dunque le intersezioni dei raggi omologhi generano una conica passante per A,B,C,D e tangente in A alla retta c (pag. 141). Come nel caso precedente si vede che questa conica è unica, profittando del secondo teorema dimostrato a pag. 147.

Dalle proposizioni precedenti segue che:

Due coniche luogo distinte non possono avere in comune più di tre punti e la tangente in uno di essi.

Due coniche inviluppo distinte non possono avere in comune più di tre rette ed il punto di contatto relativo ad una di esse.

In modo analogo si dimostra che:

Per tre punti indipendenti A,B,C del piano passa una ed una sola conica luogo, che abbia per tangente in ciascuno dei punti A,B una retta indipendente dagli altri due.

Date tre rette indipendenti a,b,c del piano, esse appartengono ad una e ad una sola conica inviluppo, che abbia per punti di contatto, su ciascuna delle rette a, b, un punto indipendente dalle altre due.

E da questa si deduce che:

Due coniche luogo distinte non possono avere in comune più di due punti e le tangenti in essi.

Due coniche inviluppo distinte non possono avere in comune più di due rette ed i punti di contatto relativi.

Abbiamo già osservato che la tangente ad una conica in un suo punto, secondo deriva da una considerazione di limite (pag. 141), può riguardarsi come secante la curva in due punti infinitamente vicini. La considerazione di limite che facemmo per la tangente, si può estendere (ma noi non ci tratterremo su ciò, lasciandone la cura allo studioso), facendo vedere che, quando due coniche γ,γ' hanno, in un punto A, la stessa tangente, la conica γ' può riguardarsi (in infiniti modi) come posizione limite di una conica, che passi per A e per un altro punto B della γ, che si approssimi indefinitamente ad A. Per esprimere questo fatto in modo suggestivo si suol dire che *se due coniche γ,γ' si toccano in A* (ossia hanno in A la stessa tangente) *esse hanno in comune il punto A ed un punto infinitamente vicino.*

Dal punto di vista logico questa locuzione non ha per noi che un significato puramente convenzionale; ma è utile adottare tale convenzione, perchè, oltre a richiamare il fatto intuitivo sopra accennato, essa permette di racchiudere le tre proposizioni incontrate antecedentemente, sul numero dei punti comuni a due coniche, nell'enunciato seguente:

Due coniche luogo distinte non possono avere più di quattro punti comuni, sottintendendo che questi punti a coppie possano anche essere infinitamente vicini.

Ma si badi bene che, *almeno per ora*, non avrebbe senso parlare di tre o di quattro punti infinitamente vicini di una conica.

Il lettore farà le considerazioni duali relative alle coniche inviluppo e trasporterà i teoremi precedenti, colla legge di dualità nello spazio, ai coni quadrici.

§ 34.

Rette e piani tangenti di una quadrica rigata. Altre proprietà delle coniche, dei coni quadrici e delle figure duali.

A pag. 138 abbiamo osservato che una retta, non appartenente ad una quadrica rigata Q, non può avere più di due punti comuni colla quadrica. Ma ora siamo in grado di affermare l'effettiva esistenza di rette che segano la quadrica in due punti, di rette che la incontrano in un sol punto, e di rette che non la incontrano affatto.

Le prime si diranno *rette secanti della quadrica*, le seconde *rette tangenti* e le ultime *rette non secanti.*

Per provare l'esistenza di queste tre specie di rette, basta segare la quadrica Q con un piano α, che non passi per nessuna delle sue rette. Poichè tutti i punti che la Q ha sul piano α, stanno sopra una conica γ (pag. 146), gli eventuali punti comuni a Q e ad una retta s del piano α, saranno precisamente i punti comuni ad s ed a γ.

Ricordando allora che esistono rette di α secanti, tangenti, non secanti, rispetto a γ (pag. 140, 141, 142), se ne deduce l'esistenza di rette che si comportano nello stesso modo rispetto a Q.

Ma quest'osservazione si può subito invertire, provando che *una retta s non appartenente alla quadrica Q è secante, tangente, non secante rispetto a Q, se tale è rispetto ad una conica sezione di Q con un piano generico* (*) *per s.* Invero, se un piano α per s sega Q secondo una conica γ, i soli punti in cui s sega γ son quelli in cui s incontra Q.

Per dualità nello spazio ai *punti della quadrica Q*, cioè ai punti delle rette di una delle schiere rigate che giacciono su Q, corrispondono i *piani della quadrica*, cioè i piani passanti per le rette di una delle due schiere.

E, come ogni punto di Q appartiene ad una retta di una schiera e ad una retta dell'altra, così *ogni piano della quadrica contiene una retta di una schiera ed una retta dell'altra.* Sicchè i piani passanti per le rette di una schiera, coincidono coi piani passanti per le rette dell'altra.

Alle nozioni di retta secante, tangente, non secante, rispetto alla quadrica, corrispondono per dualità rispettivamente la nozione di una retta da cui escono due piani della quadrica, la nozione di una retta da cui esce un sol piano della quadrica, ed infine la nozione di una retta per la quale non passano piani della quadrica.

Enunciando le osservazioni duali di quelle già fatte rispetto ai punti di una quadrica, avremo:

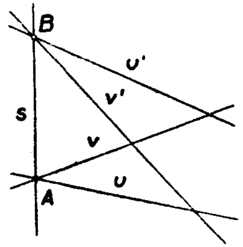
Per una retta dello spazio, non appartenente alla quadrica, passano al più due piani della quadrica. Esistono effettivamente rette per cui ne passano due, uno o nessuno.

(*) *Generico* è un attributo che si usa talora in contrapposto di *particolare*. Qui colla parola stessa s' intende alludere al fatto che il piano α, condotto per s, non è uno di quegli eventuali piani per s, (due al più, pag. 138) che contengono rette di Q, e quindi esso taglia Q secondo una conica luogo (pag. 146).

Quando la quadrica si considera come insieme dei suoi piani, si chiama più specialmente un *inviluppo doppio di piani* o una *quadrica inviluppo* e, per ricordare che per una retta dello spazio passano al più due piani dell' inviluppo, si aggiunge l'attribuito « *di 2ª classe*». Se si considera specialmente come insieme dei suoi punti, si chiama una *quadrica luogo.*

Dimostriamo ora che *per una retta dello spazio passano tanti piani di una quadrica, quanti sono i punti in cui questa è segata dalla retta medesima*; *e viceversa* (*dualmente*).

Invero, se la retta s sega la quadrica Q soltanto nei punti A, B, per questi punti passeranno due rette u, u' di una delle schiere che giacciono su Q, e due rette v, v' dell'altra schiera, sicchè i piani della quadrica, uv', $u'v$, passeranno per la retta s. Nè per questa retta possono passare altri piani di Q, perchè altrimenti, in virtù di una proposizione or ora enunciata, la s apparterrebbe a Q, contrariamente all'ipotesi che essa seghi Q solo in A e B.



Dualmente si conclude che, se per una retta s, non appartenente a Q, passano due piani della quadrica, la s incontra Q in due punti.

Supponiamo ora che la retta s non incontri la quadrica. Allora è chiaro che per s non può passare nessun piano della quadrica, perchè, nell' ipotesi opposta, le due rette di Q appartenenti a questo piano segherebbero s in punti di Q.

Dualmente, se per s non passano piani di Q, la s non può incontrare Q.

Infine supponiamo che la retta s sia tangente alla quadrica in un punto: allora per s non potranno passare due piani della quadrica, perchè, per quanto precede, la s segherebbe Q in due punti; nè può darsi che per s non passino piani della quadrica, perchè altrimenti la s sarebbe non secante di Q. Dunque per s passa un sol piano della quadrica, e viceversa (dualmente).

Quando di una retta secante di una quadrica si vorrà ritenere la proprietà che per essa passano due piani della quadrica, si parlerà di una *retta esterna* rispetto all' inviluppo; e similmente, quando di una retta non secante si vorrà ritenere la proprietà che per essa non passano piani della quadrica, si parlerà di una *retta interna* rispetto all' inviluppo. E parleremo ancora di *retta tangente* rispetto all' inviluppo, allorquando alluderemo ad una retta per cui passi un sol piano dell' inviluppo, ossia ad una retta tangente della quadrica nel senso della primitiva definizione.

Il fatto già segnalato che *le tangenti ad una conica γ, sezione di una quadrica Q col piano α, son tutte tangenti alla quadrica e che, viceversa, ogni tangente di Q situata in α, è tangente a γ*, ora che sappiamo che il concetto di tangente è duale di se stesso, ci porta a stabilire il fatto correlativo che *le tangenti di una quadrica uscenti da un punto dello spazio, non appartenente alla quadrica, costituiscono le generatrici di contatto di un cono quadrico inviluppo*, che è quello che dal punto dato proietta le rette di una schiera (e quindi anche quelle dell'altra) (pag. 146, 153).

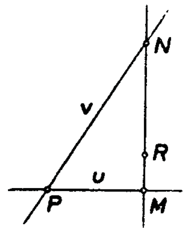
Si presenta ora la questione di ricercare come si distribuiscono le tangenti di una quadrica Q, uscenti da un punto P di essa.

Dimostriamo perciò che:

Un piano della quadrica sega Q soltanto lungo le due rette di Q ch'esso contiene.	*Per un punto della quadrica Q passano soltanto quei piani di Q che contengono l'una o l'altra delle due rette di Q uscenti da esso.*

Infatti (a sinistra) sieno u,v le due rette di Q, appartenenti alle schiere U,V e giacenti nel dato piano π della quadrica, e supponiamo, se è possibile, che esista fuori delle u,v un punto R, comune a π ed a Q. Allora ogni retta di π, uscente da R e non passante per P,

incontra le u,v in due punti distinti M,N, sicchè ha in comune con Q i tre punti M,N,R: dunque essa giace interamente in Q. Ma ciò è assurdo, perchè la retta MN, in quanto incontra una retta di U, non può appartenere ad U, ed in quanto incontra una retta di V, non può appartenere a V; e d'altronde abbiamo già osservato che sopra una quadrica non giacciono altre rette all' infuori di quelle delle schiere U,V (pag. 138).



Da ciò deriva che ogni retta situata sul piano $\pi \equiv uv$ e passante per P, non incontra la quadrica che in P, ossia essa è tangente alla quadrica; mentre ogni retta situata in π, ma non passante per P, sega la quadrica in due punti che sono comuni a quella retta ed alle u,v; e dualmente, da ogni retta uscente da P, ma non situata in π, escono due piani della quadrica e quindi la retta stessa è secante rispetto a Q.

Si conclude pertanto che *tutte le tangenti di una quadrica Q, uscenti da un punto P di Q, stanno sul piano della quadrica determinato dalle due rette di Q uscenti da P, formando un fascio attorno a questo punto.*

Conducendo per P un piano α (che non contenga le u,v) la conica γ sezione di Q con α, ha per tangente in P una retta tangente alla quadrica nel punto stesso, cioè giacente sul piano $u\,v$.

Dunque *ogni piano α passante per P, e non appartenente alle rette u, v uscenti da P, sega la quadrica secondo una conica, che ha per tangente in P la retta comune ad α ed al piano $u\,v$.*

Sicchè il piano $u\,v$ si può anche definire come il piano cui appartengono tutte le tangenti in P alle infinite sezioni piane (generiche) della quadrica, passanti per P. Perciò si dice che il piano $u\,v$ è un *piano tangente alla quadrica*, ed il punto P, ove s' incontrano le generatrici ch'esso contiene, si chiama *punto di contatto* di quel piano. Così ogni piano della quadrica Q viene ad essere un piano tangente a Q in uno determinato de' suoi punti e si può affermare che:

In ogni punto una quadrica ammette un determinato piano tangente; e, dualmente, ogni piano della quadrica la tocca in un determinato punto.

Ogni piano π passante per una retta u della schiera U, tracciata sulla quadrica Q, tocca la quadrica in un determinato punto P di u, che è quello comune ad u ed alla retta v dell'altra schiera V, appartenente a quel piano. Fissando un'altra retta u' della schiera U, vediamo che il piano π sega u' precisamente nel punto P', in cui la u' vien tagliata da v, sicchè, variando π, il punto P' descrive una punteggiata prospettiva al fascio descritto da π. D'altra parte il punto di contatto P descrive una punteggiata proiettiva a quella descritta da P' (perchè — pag. 138 — tutte le generatrici di una schiera segano sopra due generatrici dell'altra punteggiate proiettive): dunque il fascio descritto da π risulta proiettivo alla punteggiata descritta da P. Si può pertanto enunciare:

Il fascio dei piani tangenti ad una quadrica nei punti di una sua retta, è proiettivo alla punteggiata formata dai relativi punti di contatto.

Dimostriamo ora le seguenti proposizioni duali tra loro nello spazio:

I piani tangenti ad una quadrica Q, nei punti della conica sezione con un piano ω, che non sia tangente alla quadrica, ossia i piani tangenti alla quadrica condotti per le tangenti di Q situate in ω, costituiscono un cono quadrico inviluppo, il cui vertice O non appartiene ad ω.	*I punti di contatto dei piani tangenti ad una quadrica Q, uscenti da un punto O, non situato sopra Q, ossia i punti di contatto delle tangenti a Q uscenti da O, costituiscono una conica luogo, il cui piano ω non appartiene ad O.*

Riferendoci al teorema di sinistra, diciamo k la conica luogo sezione di Q con ω e fissiamo un punto A di k. Indichiamo con u,v le generatrici delle schiere U,V (tracciate sopra Q) uscenti dal punto A, e chiamiamo omologhi due piani dei fasci u,v, quando proiettano uno stesso raggio del fascio A. Tra i due fasci u,v, che son costituiti da piani tangenti alla quadrica, veniamo così a porre una prospettività π, e siccome i piani di ciascuno di quei fasci corrispondono proiettivamente ai relativi punti di contatto, tra le due punteggiate u,v nascerà una proiettività τ, ove si chiamino omologhi due punti che sieno di contatto con Q di due piani omologhi nella prospettività π. In questa prospettività tra i fasci di piani u,v, il piano uv ad essi comune è unito, ed inoltre il punto di contatto relativo a questo piano è precisamente il punto A comune alle u,v; dunque nella proiettività τ, tra le punteggiate u,v, il punto A è unito, cioè la τ è anch'essa una prospettività.

Ciò posto, diciamo β,β' due piani corrispondenti nella π, s la loro retta comune, situata su ω e passante per A, e B il punto, che supponiamo diverso da A, in cui s sega ulteriormente k. Dal punto B esce una retta u' di U ed una retta v' di V. La u' si appoggia a v ed il piano $u'v$ non è altro che il piano β'; ed analogamente v' appoggiandosi ad u, dà luogo al piano $uv'\equiv\beta$. Sicchè i punti di contatto relativi ai piani β,β' sono i punti $u\,v'$ e $v\,u'$.

Possiamo dunque definire la proiettività τ tra le punteggiate u,v, dicendo che due punti di u,v sono omologhi, allorquando le ulteriori rette della quadrica uscenti da essi s'incontrano in uno stesso punto di k, ossia allorquando questi due punti son le intersezioni di u,v con un piano tangente a Q in un punto di k.

Ricordando che τ è una prospettività, ne segue che le rette in cui i piani tangenti a Q nei punti di k segano il piano uv (cioè il piano tangente a Q nel punto fissato A di k) passano tutte per un medesimo punto O, il quale, essendo centro di prospettività delle u,v, riferite mediante la τ, non appartiene nè ad u, nè a v, e quindi nemmeno alla quadrica (pag. 155). Ciò significa che tutti i piani tangenti a Q nei punti di k passano pel punto O, non appartenente a Q.

È facile ora provare che il punto O non appartiene neppure a ω. Infatti i piani tangenti a Q nei punti di k segano il piano di k secondo le tangenti alla conica stessa; sicchè, se O giacesse in ω, tutte le tangenti di k passerebbero per il punto O. Ma ciò è assurdo, perchè pel punto comune a due tangenti di una conica non passano altre tangenti della curva, come si vede ricordando che uno dei due angoli completi determinati da due tangenti è tutto costituito da rette secanti e l'altro da rette non secanti (pag. 148). (*)

Trasportando per dualità il risultato ottenuto, vediamo, conformemente a quanto afferma una parte dell'enunciato di destra, che i punti di contatto dei piani tangenti ad una quadrica, che passano per un punto non della quadrica, stanno tutti in un piano non tangente alla quadrica, e non passante per quel punto.

Ritornando alla considerazione dei piani tangenti a Q nei punti di k, osserviamo che essi appartengono certamente al cono quadrico inviluppo costituito dai piani tangenti a Q che escono dal punto O, esterno alla quadrica (pag. 146). Viceversa, siamo ora in grado di provare che ogni piano di quest' inviluppo, cioè ogni piano tangente a Q e passante per O, tocca la quadrica in un punto di k. Infatti un tal piano tangente, per la proposizione sopra ottenuta colla legge di dualità, dovrà toccare Q in un punto appartenente al piano di k, cioè in un punto di k.

Son conseguenze notevolissime delle proposizioni dimostrate i teoremi seguenti:

(*) Il fatto qui segnalato è contenuto nella seguente proposizione generale: *Una curva piana le cui tangenti passino tutte per un punto O, è costituita da un insieme (finito o discreto) di rette per quel punto*, che si dimostra agevolmente nelle applicazioni geometriche dal Calcolo, ricorrendo per es. alla nozione di inviluppo.

Le infinite rette tangenti ad una conica luogo costituiscono una conica inviluppo.	*Le infinite generatrici di contatto dei piani di un cono quadrico inviluppo costituiscono un cono quadrico luogo.*

Infatti (a sinistra) se è k la data conica situata sul piano α, e consideriamo una quadrica Q passante per k (pag. 147), i piani tangenti a Q, nei punti di k, costituiscono un cono quadrico inviluppo, il cui vertice non appartiene ad α; ed i piani di quell' inviluppo segnano su α le tangenti di k. Ricordando che un cono quadrico inviluppo vien segato da un piano non passante pel vertice secondo una conica inviluppo (pag. 146), concludiamo che l' insieme delle tangenti a k costituisce appunto una conica inviluppo.

Trasportando il teorema ora dimostrato (a sinistra) colla legge di dualità nel piano, e quello a destra colla legge di dualità nella stella, avremo queste altre due proposizioni duali tra loro nello spazio:

Gli infiniti punti di contatto delle rette di una conica inviluppo costituiscono una conica luogo.	*Gli infiniti piani tangenti di un cono quadrico luogo costituiscono un cono quadrico inviluppo.*

La relazione che passa tra una conica luogo e la conica inviluppo costituita dalle sue tangenti, si esprime dicendo che *la conica luogo è aderente all' inviluppo, e viceversa.*

Analogamente si dice che *un cono quadrico luogo è aderente al cono quadrico inviluppo costituito dai suoi piani tangenti, e viceversa.*

D'ora in poi parleremo spesso soltanto di coniche (o di coni quadrici) senza specificare se si tratta di luoghi o d' inviluppi. Vuol dire che intenderemo di considerar simultaneamente la conica (o il cono) come insieme dei suoi punti e delle sue tangenti (o delle sue rette e de' suoi piani tangenti).

Poichè le generatrici di contatto di un cono quadrico inviluppo costituiscono un cono quadrico luogo, le tangenti ad una quadrica uscenti da un punto O, non appartenente alla quadrica, costituiranno un cono quadrico luogo (pag. 155), che si dice il *cono circoscritto alla quadrica dal punto O.*

§ 35.

Punti esterni ed interni rispetto ad una conica. Considerazioni duali.

Le proprietà dimostrate delle coniche inviluppo, ci forniscono adesso altre proprietà delle tangenti di una conica. Per notare soltanto le più importanti tra queste proprietà, osserveremo che *da un punto del piano di una conica escono al più due rette tangenti alla curva, ed esistono effettivamente punti da cui ne escono due, punti da cui ne esce una sola e punti da cui non esce nessuna tangente* (pag. 143-144).

Si diranno *punti esterni ad una conica*, i punti esterni all'inviluppo delle sue tangenti (pag. 143), cioè *i punti da cui escono due tangenti della conica.*

I punti della conica costituiscono il luogo dei punti da cui esce una sola tangente.

Ed infine diremo *punti interni ad una conica* i punti interni rispetto all'inviluppo delle tangenti (pag. 144), cioè *i punti da cui non esce nessuna tangente.*

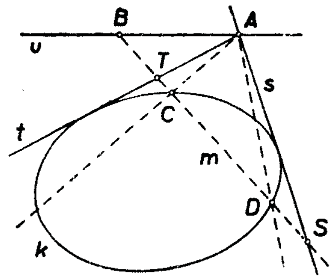
Ricordando una proprietà delle coniche inviluppo (pag. 148), potremo dire che *dei due segmenti che una conica determina sopra una retta secante, uno è tutto costituito da punti interni e l'altro da punti esterni.*

Inoltre, siccome da ogni punto di una retta di una conica inviluppo escono due rette dell'inviluppo, eccezion fatta pel punto di contatto relativo a quella retta (dal quale ne esce una sola), potremo dire che *ogni punto di una tangente ad una conica, diverso dal punto di contatto, è esterno alla conica.*

Dimostriamo ora che:

Ogni retta non secante della conica è tutta costituita da punti esterni.

Sia u una retta non secante rispetto alla conica k, e cominciamo dall'osservare che ogni punto comune ad u



e ad una tangente di k è certamente esterno alla conica, perchè quella tangente non può segare u nel relativo punto di contatto, dal momento che u non incontra la conica. Dicendo A il punto comune ad u ed alla tangente s, e tirando per A l'altra tangente t a k, l'angolo st, complementare di quello che contiene u, sarà costituito da tutte e sole le rette secanti di k, uscenti da A (pag. 148).

Ciò posto, se da un punto B di u, diverso da A, tiriamo una retta m che vada ad un punto C di k, diverso dai punti di contatto delle tangenti s, t: o questa retta risulta tangente a k in C, ed allora il punto B risulta esterno a k, oppure essa taglia k in un altro punto D. In quest'ultima ipotesi osserviamo che i raggi AC, AD sono secanti rispetto a k e quindi appartengono all'angolo st, che non contiene u. Da ciò deriva che il punto B si trova in quel segmento CD che contiene i punti T,S in cui la m è segata dalle t, s, e poichè i punti T, S sono esterni alla conica, segue che anche B è esterno. Dunque ogni punto di u è esterno a k, c. d. d.

Una retta non secante si chiama anche una *retta esterna alla conica*, appunto perchè è tutta costituita da punti esterni.

La proposizione duale di quella ora dimostrata è la seguente:

Le rette che escono da un punto interno ad una conica sono tutte secanti.

Ciò significa che *la conica divide il piano in due regioni: l'una costituita tutta da punti interni e l'altra da punti esterni; in guisa che per passare con un cammino (rettilineo) da un punto di una regione ad un punto dell'altra, si deve traversare la conica in un punto.*

Questa proposizione, che noi abbiamo così stabilita logicamente, si riattacca alla nozione intuitiva della continuità.

Lasciamo al lettore la cura di trasportare, mediante la legge di dualità nello spazio, le nozioni di punti esterni ed interni ad una conica, ed i relativi teoremi. Si giunge così alle nozioni di *rette (della stella) esterne e interne rispetto ad un cono quadrico, e di piani esterni (non secanti) rispetto al cono.*

Quanto alle quadriche rigate, non vogliamo tralasciare di osservare che, rispetto ad esse, *non ha luogo la distinzione dei punti dello spazio in esterni ed interni*, perchè da ogni punto dello spazio, che non stia sulla quadrica, escono infiniti piani dell' inviluppo doppio costituito dai piani tangenti alla quadrica, cosicchè, se si vuole, *si potrà dire che ogni punto dello spazio, non appartenente alla quadrica, è ad essa esterno.*

§ 36.

Prime proprietà metriche delle coniche, dei coni quadrici e delle quadriche rigate.

Finora abbiamo studiato gli enti generati da forme di 1ª specie proiettive dal punto di vista grafico. Adesso passeremo ad esporre alcune proprietà metriche di queste figure, affinchè il lettore possa avere fin da ora taluni esempi concreti su cui fissare la sua attenzione negli ulteriori sviluppi. Più tardi ritorneremo su queste pro-

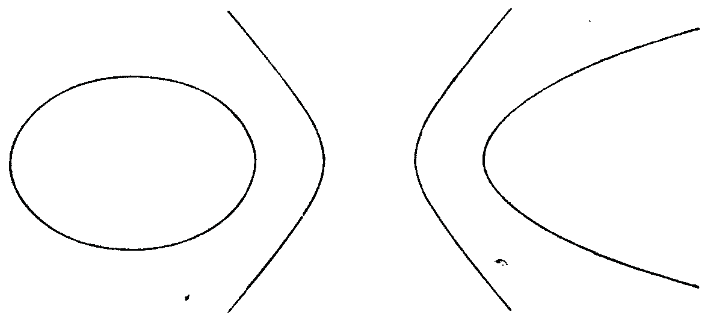
prietà metriche e le completeremo, giovandoci delle teorie grafiche successive.

Per avere un' idea delle forme che posson presentare le coniche, conviene porle in relazione colla retta all' infinito del piano. Questa retta può essere esterna, tangente o secante, rispetto ad una data conica del piano: nel primo caso diremo che la conica è un'*ellisse*, nel secondo caso una *parabola*, nel terzo un' *iperbole.*

Nel caso dell' iperbole, le tangenti ne' suoi due punti impropri si chiamano *asintoti*, ed il loro punto d' incontro (proprio) *centro* dell' iperbole; nel caso della parabola, si chiama *centro* il punto (improprio) in cui essa tocca la retta all' infinito. Daremo più tardi un'altra definizione del centro di una conica, che ci permetterà di considerare anche il centro di un'ellisse.

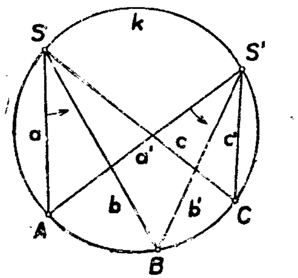
Proviamo che *sopra un cono quadrico, col vertice proprio, esistono coniche delle tre specie suddette.* Invero, esistono piani esterni, tangenti o secanti rispetto ad un cono di vertice O; ed un piano α, non passante pel vertice, segherà il cono secondo una conica, che sarà un'ellisse, una parabola od un' iperbole, secondo che il piano α', condotto per O parallelamente ad α, riuscirà esterno, tangente o secante, rispetto al cono.

Le forme delle tre specie di coniche sono quelle indicate dalle figure qui sotto disegnate.



ELLISSE IPERBOLE PARABOLA

Trale coniche va pure noverato il *cerchio*, che è una particolare ellisse. Invero, proiettando i punti di un cerchio k, da due suoi punti fissi S,S', si ottengono due fasci di raggi direttamente congruenti (e quindi proiettivi), perchè due angoli inscritti nello stesso arco



di circonferenza, hanno lo stesso verso e la stessa grandezza. Dunque i punti del cerchio dato k possono concepirsi come intersezioni dei raggi omologhi dei due fasci S,S', riferiti con una conveniente proiettività. In particolare, se i punti S, S' sono diametralmente opposti sul cerchio k, due raggi omologhi, proiettanti il medesimo punto di k, risultano perpendicolari ed il centro di collineazione dei due fasci S, S', risulta improprio (pag. 141). Ne deriva che la retta impropria sega i due fasci proiettivi secondo un' involuzione, che coincide evidentemente coll' involuzione assoluta (pag. 142-133). Si può dire pertanto (pag. 133) che *il cerchio è un'ellisse, la quale passa pei punti ciclici del piano.*

Da ciò appunto la denominazione di « ciclici » attribuita ai punti immaginarî definiti a pag. 133.

Viceversa, *dati due fasci di raggi S,S', complanari, direttamente congruenti e non prospettivi, le intersezioni dei raggi omologhi generano un cerchio.*

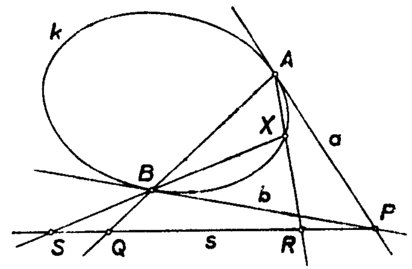
Infatti, se i due fasci S,S' non sono prospettivi, cioè se i raggi omologhi non sono paralleli, tagliandoli colla retta impropria del loro piano avremo ivi una congruenza diretta non identica (pag. 105) che, come sappiamo, è ellittica (pag. 105). Dunque *la conica generata dai due*

fasci, non ha punti impropri: è cioè un'ellisse. Considerando ora due punti A,B di questa conica, che sieno intersezioni dei raggi omologhi a, a'; b, b', a causa dell'uguaglianza diretta degli angoli ab, $a'b'$, il quadrangolo $SS'AB$ risulterà inscrittibile in un circolo, ossia il punto B apparterrà al cerchio $SS'A$. Tenendo fissa la coppia a,a', e facendo variare la coppia b,b', il punto B descriverà dunque il cerchio $SS'A$.

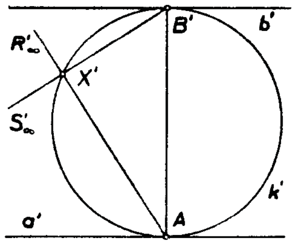
Una proprietà metrica notevolissima delle coniche è la seguente:

Ogni conica può ottenersi come proiezione del cerchio.

Sia k una conica qualunque ed a,b le tangenti ad essa in due suoi punti A,B. Conduciamo dal punto $P \equiv ab$ una retta s, situata in quello degli angoli completi ab, che non contiene k: allora i due fasci proiettivi che da A,B proiettano i punti di k, segnano sopra s un' involuzione ellittica I (pag. 142). Esisteranno perciò nello spazio infiniti punti (appartenenti ad un circolo), da cui l' involuzione I vien proiettata secondo un' involuzione di angoli retti (pag. 134). Dicasi O uno di questi



punti, esterno al piano di k, e, assunto un piano α parallelo al piano Os, proiettiamo k sul piano α dal centro O, ed indichiamo con k' la conica proiezione, e con A', B',... a',b',... le proiezioni degli elementi A, B,... a,b,... del piano di k. La s si proietterà sulla retta impropria s' di α, e l' involuzione I nell' involuzione assoluta I' del piano α: e poichè la AB sega s nel punto Q coniugato di P nella I, il punto all' infinito della $A'B'$ sarà il coniugato del punto P'_∞ nell' involuzione I', ossia la $A'B'$ sarà perpendicolare alle a', b'. Inoltre, siccome un punto qualunque X di k vien proiettato da A,B sopra s in una coppia R,S della I, il punto X', proiezione di X, verrà proiettato da A', B' secondo due rette i cui punti all' infinito R', S' saranno coniugati nella I', cioè secondo due rette ortogonali. Dunque la conica k' è il luogo dei punti X' da cui si vedono i punti A', B' sotto angolo retto, e quindi è un cerchio che ha per diametro il segmento finito $A'B'$.



La proprietà dimostrata, dovuta a CHASLES (1852), si può dire che, dai geometri greci fino a STAUDT, si assumeva come definizione delle sezioni coniche; e da ciò l'origine della denominazione. Veramente i geometri anteriori ad APOLLONIO considerarono le coniche come sezioni di coni e di cilindri retti, mentre APOLLONIO (225 a. C.) le considerò più in generale come sezioni di un cono obliquo a base circolare, cioè come proiezioni arbitrarie del cerchio. Però la definizione di APOLLONIO, per quanto apparentemente più larga, abbraccia le stesse curve considerate avanti di lui, perchè, com'egli stesso dimostrò, ogni conica può pensarsi come sezione di un cono circolare retto.

Anche STEINER (1832) definiva le coniche come proiezioni del cerchio, ed anzi egli giunse alla scoperta della loro generazione proiettiva, deducendola da quella del cerchio, che ha carattere elementare. Vedremo più tardi la definizione delle coniche data da STAUDT (1847).

Noi abbiamo assunto come definizione la proprietà scoperta da STEINER, ma, a norma del teorema or ora dimostrato, le curve che formano oggetto del nostro studio sono le medesime di quelle studiate dall'età greca in poi.

La definizione adottata ci ha permesso di considerare le coniche del punto di vista grafico, indipendentemente da ogni nozione metrica.

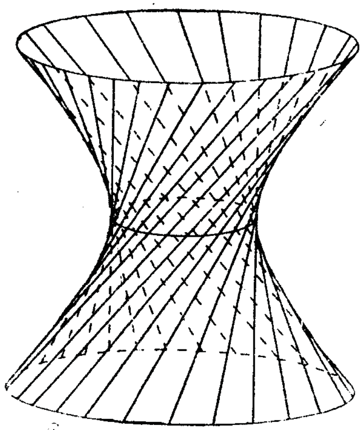
Un'altra proprietà, che possiamo notare fin da ora, è la seguente: *Le tangenti ad una parabola segano due tangenti fisse, secondo punteggiate simili.* Ciò deriva dal fatto che sopra due tangenti fisse, le altre segano punteggiate proiettive (perchè tutte le tangenti costituiscono una conica inviluppo) ed in questa proiettività sono omologhi i punti d' intersezione delle due tangenti fisse colla retta all' infinito, che appartiene all' inviluppo.

Viceversa, è chiaro che *le rette che congiungono le coppie di punti omologhi in una similitudine (non prospettiva) tra due punteggiate complanari, inviluppano una parabola,* che tocca i sostegni delle due punteggiate.

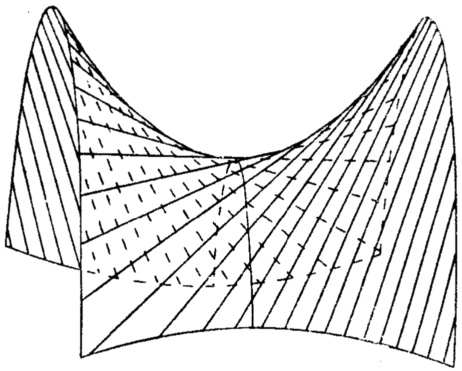
I coni quadrici, con vertice proprio, non si distinguono in specie metricamente distinte, come le coniche, perchè in una stella col vertice proprio, non c' è nessun fascio di raggi che abbia un particolare significato metrico; mentre nel piano la retta impropria si differenzia metricamente dalle altre rette del piano. Ma una classificazione metrica, analoga a quella delle coniche, si può invece fare dei coni quadrici col vertice improprio, cioè dei *cilindri quadrici,* ponendoli in relazione col piano improprio dello spazio. Si dirà che il *cilindro* è *ellittico, parabolico* o *iperbolico,* secondo che il piano all' infinito è esterno, tangente o secante rispetto al cilindro. Segando un cilindro con un piano, non passante pel vertice, i punti comuni alla conica sezione ed al piano all' infinito sono i punti in cui il piano segante taglia le eventuali generatrici del cilindro, appartenenti al piano all' infinito. Dunque:

Tutte le coniche tracciate sopra un cilindro sono ellissi, parabole o iperbole secondo che il cilindro è ellittico, parabolico o iperbolico.

Rispetto ad una quadrica rigata Q, il piano all' infinito può essere *secante,* cioè può tagliare Q secondo una conica, oppure *tangente,* cioè può tagliare Q in una coppia di generatrici. Nel primo caso la quadrica si chiama un *iperboloide rigato* o *ad una falda* o *iperbolico*; nel secondo caso un *paraboloide rigato* o *iperbolico*. La forma delle due superficie è quella indicata dalle figure qui sotto.



IPERBOLOIDE RIGATO



PARABOLOIDE RIGATO

I piani tangenti all' iperboloide nei punti della sua conica all' infinito, passano tutti per un punto proprio (pag. 157) ed inviluppano un cono quadrico, che si chiama il *cono asintotico* dell' iperboloide. Il vertice di questo cono dicesi *centro* dell' iperboloide.

Nel paraboloide iperbolico si chiama invece *centro* il suo punto di contatto (improprio) col piano all' infinito.

Nell' iperboloide rigato trovansi coniche delle tre specie. Le ellisse sono segate dai piani non tangenti, che passano per le rette esterne alla conica all' infinito; le parabole dai piani non tangenti, che passano per le tangenti a quella conica; ed infine le iperbole dai piani non tangenti, che passano per le rette secanti della conica stessa.

Nel paraboloide rigato trovansi soltanto iperbole e parabole. Le iperbole son segate dai piani proprî, non

tangenti, che passano per le rette seganti in due punti distinti le generatrici all' infinito u,v; e le parabole dai piani proprî non tangenti, passanti pel punto uv.

Poichè le generatrici di una schiera del paraboloide si appoggiano alla retta all' infinito u, e le generatrici dell'altra alla retta all' infinito v, potremo dire che *nel paraboloide tutte le generatrici di una schiera sono parallele ad un piano fisso, e tutte le generatrici dell'altra schiera ad un altro piano fisso.* Questi due piani (o due piani ad essi paralleli) si chiamano *piani direttori* del paraboloide.

Sopra due generatrici u_1,u_2 della stessa schiera a cui appartiene u, tutte le generatrici dell'altra segano due punteggiate proiettive, ed in questa proiettività al punto all' infinito u_1v corrisponde il punto all' infinito u_2v. Dunque *nel paraboloide tutte le generatrici di una schiera segano su due generatrici dell'altra punteggiate simili.*

Viceversa, si vede subito che *le congiungenti delle coppie di punti omologhi in una similitudine tra due punteggiate sghembe, sono le generatrici di una schiera tracciata sopra un paraboloide.*

CAPITOLO NONO

Teoremi di Pascal, di Brianchon e di Desargues.

§ 37.

Teoremi di Pascal e di Brianchon.

Consideriamo un n-gono piano semplice (pag. 23) e, partendo da un vertice, che numereremo con 1, immaginiamo di percorrere il perimetro del poligono nel senso dato dalla *successione* dei suoi vertici. Si chiami 3 il vertice successivo ad 1, 5 il vertice successivo a 3, e così proseguasi a numerare i vertici coi successivi numeri dispari, finchè si arrivi all'ultimo vertice $2n-1$. Indichiamo inoltre con 2 il lato 13, con 4 il lato 35,..., con $2n$ il lato $2n-1, 1$. Si diranno *opposti* due elementi (vertici o lati) dell' n-gono, i cui indici differiscano di n unità. Gl' indici di due elementi opposti avranno o no la stessa parità, secondo che n è pari o dispari. Sicchè, nel primo caso, due elementi opposti saranno della stessa specie (ambedue vertici, o ambedue lati), mentre nel secondo caso saranno di specie diversa.

Analoghe definizioni si possono dare nella stella per un angolo n-edro.

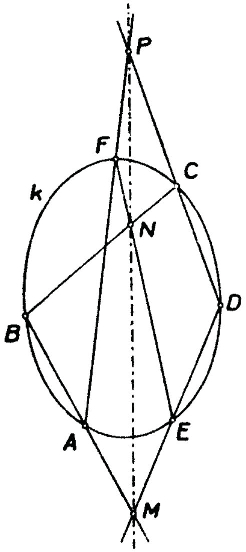
Le definizioni esposte vengono trasformate in sè dalla legge di dualità nel piano o nella stella.

Diremo che un n-gono (od angolo n-spigolo) è inscritto in una conica (od in un cono quadrico) quando	*Diremo che un n-latero (od angolo n-edro) è circoscritto ad una conica (o ad un cono quadrico) quando i*

i suoi vertici (o spigoli) son punti della conica (o generatrici del cono).	*suoi lati (o facce) son tangenti alla conica (o piani tangenti del cono).*

Premesse queste definizioni, dimostriamo il seguente TEOREMA DI PASCAL:

Se un esagono semplice è inscritto in una conica, le tre coppie di lati opposti si segano in tre punti allineati.



Detto $ABCDEF$ l'esagono semplice inscritto nella conica k, immaginiamo una quadrica rigata Q, passante per k (pag. 147) e sieno u_1, u_2, u_3 le tre generatrici della schiera U, tracciata su Q, uscenti rispettivamente da A, C, E; e v_1, v_2, v_3 le tre generatrici della schiera V di Q, uscenti rispettivamente da B,D,F. Le coppie di lati opposti AB, DE; BC, EF; CD, FA dell'esagono sono le intersezioni del piano α di k colle tre coppie di piani:

$$(1) \qquad u_1 v_1,\ v_2 u_3\ ;\ v_1 u_2,\ u_3 v_3\ ;\ u_2 v_2,\ v_3 u_1.$$

Osservato che i piani di ciascuna delle tre coppie (1) son distinti, indicheremo rispettivamente con m, n, p le rette comuni a quelle tre coppie di piani, cioè le rette congiungenti le tre coppie di punti:

$$(2) \qquad u_1 v_2,\ u_3 v_1\ ;\ u_2 v_3,\ u_3 v_1\ ;\ u_2 v_3,\ u_1 v_2,$$

che son le coppie tolte dalla terna di punti $u_1 v_2$, $u_3 v_1$, $u_2 v_3$. Questi tre punti *individuano* un piano π. Invero, nell' ipotesi contraria, le m, n, p coinciderebbero; i sei piani (1) passerebbero per una medesima retta ed i sei lati dell'esagono $ABCDEF$ passerebbero per un medesimo punto.

Ora questo è assurdo, perchè tre lati consecutivi dell'esagono non passan di certo per un punto. Inoltre il piano π è distinto da α, almeno finchè non accada che tutti i vertici A, B, C sieno ordinatamente coincidenti coi vertici D, E, F. Poichè le tracce M, N, P di m, n, p su α son allineate, si conclude col teorema enunciato.

Applicando la legge di dualità nel piano si ha il TEOREMA DI BRIANCHON:

Le tre coppie di vertici opposti di un esalatero semplice circoscritto ad una conica son congiunte da tre rette concorrenti in un punto.

Il lettore enuncierà da sè le proposizioni (della stella) che si ottengono dalle precedenti, mediante la dualità spaziale.

La retta che contiene i punti d'intersezione delle coppie di lati opposti di un esagono semplice inscritto in una conica, chiamasi la *retta di* PASCAL relativa a quell'esagono. Dualmente si definisce il *punto di* BRIANCHON, relativo ad un esalatero semplice circoscritto ad una conica.

Poichè con 6 punti di una conica si possono formare 60 esagoni semplici (pag. 23), così saranno 60 le rette di Pascal inerenti a 6 dati punti di una conica. La configurazione di queste 60 rette è stata diffusamente studiata da varî Autori e si chiama, con PASCAL, la configurazione dell'*esagramma mistico* (*).

Dualmente si ha una configurazione di 60 punti di BRIANCHON inerenti a 6 tangenti di una conica.

§ 38.

Casi limiti dei teoremi di Pascal e di Brianchon.

La dimostrazione del teorema di PASCAL, esposta nel § precedente, non richiede affatto che i sei vertici

(*) Vedi i miei citati *Complementi di geometria proiettiva*, pagine 254-55.

dell'esagono sieno *tutti* distinti. Ciò che è essenziale è ch'essi non si riducano a meno di tre distinti, senza di che non si potrebbero costruire le sei rette distinte $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$ della quadrica Q, che ci hanno servito a dimostrare il teorema; e che il piano π sia diverso dal piano α di k. Il qual fatto, come abbiamo visto, si verifica sempre che l'esagono non abbia i primi tre vertici ordinatamente coincidenti cogli ultimi tre. Però anche in questo caso eccezionale, se si vuole, si potrà dire che il teorema di PASCAL continua a sussistere, in quanto le intersezioni delle coppie di lati opposti sono indeterminate.

Ma i casi limiti veramente interessanti ed utili per le applicazioni, son quelli in cui vengono a coincidere coppie di vertici *consecutivi* dell'esagono. Continuerà allora a sussistere il teorema di PASCAL, purchè, come indica la dimostrazione stessa, si convenga di assumere per lato congiungente di due vertici successivi coincidenti, la tangente alla conica k nel punto ov'essi coincidono. Invero, il piano delle due generatrici di schiere diverse, che si fan passare per due vertici consecutivi, quando questi coincidono in un unico punto A, diviene il piano tangente alla quadrica Q in A, e questo piano sega appunto il piano di k lungo la retta tangente alla conica in A.

Per quanto con questa avvertenza gli enunciati dei casi limiti a cui alludiamo si possano ritenere inclusi nell'enunciato generale, tuttavia riteniamo opportuno di presentarli al lettore col linguaggio che è loro più appropriato.

Supponendo che due soli vertici consecutivi vengano a coincidere (applicando cioè il ragionamento del § precedente all'esagono $AABCDE$), si trova il teorema:

Se un pentagono semplice è inscritto in una conica, il punto comune ad un lato ed alla tangente nel vertice opposto, è allineato coi punti d'intersezione delle due rimanenti coppie di lati non consecutivi.

Ragionando sull'esagono $AABCCD$, si conclude che il punto comune alle tangenti alla conica nei vertici opposti A e C, è allineato coi punti $AB.CD$, $BC.DA$ comuni alle due coppie di lati opposti; e ragionando sull'esagono $ABBCDD$, si conclude, similmente, che la stessa retta che contiene i tre punti precedenti, contiene anche l'intersezione delle tangenti alla conica nei vertici opposti B, D. Dunque:

Se un quadrangolo semplice è inscritto in una conica, le due coppie di lati opposti e le tangenti alla conica nelle due coppie di vertici opposti s' incontrano in quattro punti di una retta.

Infine ragionando sull'esagono $AABBCC$, si ottiene il teorema:

Se un triangolo è inscritto in una conica, i lati incontrano le tangenti nei vertici rispettivamente opposti in tre punti di una retta.

Ciò si enuncia brevemente dicendo che *un triangolo inscritto in una conica, ed il trilatero circoscritto, formato dalle tangenti nei vertici, sono omologici.*

I teoremi precedenti si possono anche derivare dal teorema di Pascal, appoggiandoli a ragioni di continuità; ma, ove si volesse rendere rigorosa questa deduzione, che ognuno intuisce facilmente, dovremmo ricorrere a considerazioni, che escono dai limiti di queste Lezioni.

Enuncieremo ora le proposizioni duali delle precedenti nel piano, lasciando al lettore la cura di enunciar le analoghe relative ai coni quadrici.

Se un pentalatero semplice è circoscritto ad una conica, la retta che congiunge un vertice col punto di contatto del lato opposto e le rette che congiungono le due coppie rimanenti di vertici non consecutivi, passano per un medesimo punto.

Se un quadrilatero semplice è circoscritto ad una conica, i punti di contatto delle due coppie di lati opposti e le due coppie di vertici opposti, sono congiunti da quattro rette concorrenti in un punto.

Se un trilatero è circoscritto ad una conica, i vertici son congiunti ai punti di contatto dei lati opposti mediante tre rette concorrenti in un punto.

Quest'ultima proposizione è, in sostanza, duale di se stessa.

Terminiamo questo paragrafo, applicando uno dei casi limiti del teorema di Pascal alla dimostrazione del teorema seguente, che ci servirà in seguito:

Un quadrangolo completo inscritto in una conica ed il quadrilatero circoscritto, formato dalle tangenti nei vertici, hanno lo stesso triangolo diagonale.

Sia infatti $ABCD$ il quadrangolo inscritto nella conica k ed $abcd$ il quadrilatero formato dalle tangenti in A,B,C,D.

Il triangolo diagonale di $ABCD$ ha per vertici i punti:

$$E \equiv AB.CD, \quad F \equiv AC.BD, \quad G \equiv AD.BC.$$

Dal secondo dei casi limiti del teorema di Pascal, si trae che la retta GE contiene i punti d'incontro delle coppie di tangenti a,c; b,d, cioè che coincide col lato $f \equiv ac.bd$ del trilatero diagonale di $abcd$. Ruotando le lettere, si deduce che

$$EF \equiv g \equiv ad.bc \quad , \quad FG \equiv e \equiv ab.cd.$$

Dunque il triangolo diagonale EFG ha gli stessi lati del trilatero diagonale efg.

§ 39.

Inversione dei teoremi di Pascal, di Brianchon e dei casi limiti. Applicazioni alla costruzione di una conica per punti o per tangenti.

Il teorema di Pascal ed i suoi casi limiti si possono invertire, nel modo che ora vedremo.

Sia anzitutto un esagono piano semplice $ABCDEF$, il quale goda della proprietà che le intersezioni delle tre coppie di lati opposti sieno allineate. Supponiamo inoltre che tre vertici dell'esagono (anche non consecutivi) non sieno mai in linea retta. Proviamo che i sei vertici dell'esagono appartengono ad una conica.

Invero, poichè i cinque punti $ABCDE$ sono indipendenti, per essi passerà una ed una sola conica k (pag. 149), la quale, passando per E, segherà ulteriormente il lato EF dell'esagono dato in un punto F_1 (distinto o no da E). Pel nostro scopo, basterà provare che il punto F_1 coincide con F. Si osservi perciò che, in virtù del teorema di PASCAL, i tre punti

$$L \equiv AB.DE, \; M_1 \equiv BC.EF_1, \; N_1 \equiv CD.F_1A,$$

stanno sopra una retta p_1, e che, per ipotesi, il punto L sta sulla retta p che congiunge i punti:

$$M \equiv BC.EF \quad , \quad N \equiv CD.FA.$$

Ma la retta p coincide con p_1, perchè, essendo la EF_1 identica ad EF, risulta $M_1 \equiv M$. Ne segue che il punto $N_1 \equiv p_1.CD$ coincide col punto $N \equiv p.CD$ e quindi che la retta $FA \equiv NA$ coincide colla $F_1A \equiv N_1A$ ed il punto F_1 con F.

Il ragionamento precedente vale anche se F coincide con E; se cioè i lati dell'esagono sono sostituiti dai lati d'un pentagono e da una retta t uscente da E e non passante per alcuno degli altri vertici. In tal caso la conica k risulta tangente a t in E. Possiamo dunque enunciare:

Se le tre coppie di lati opposti di un esagono semplice, i cui vertici sieno sei punti indipendenti del piano, s' incontrano in tre punti allineati, l'esagono è inscrittibile in una conica.

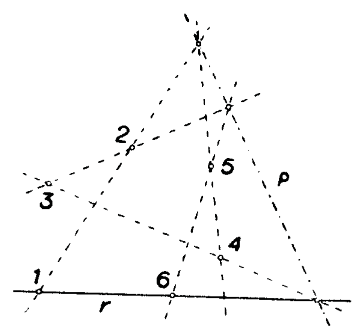
Se in un pentagono piano semplice, i cui vertici sieno fra loro indipendenti, due coppie di lati non consecutivi s' incontrano in due punti di una retta, che contiene l' intersezione del lato rimanente e di una retta uscente dal vertice opposto (ma indipendente dagli altri quattro vertici), la conica che passa pei vertici del pentagono tocca quest'ultima retta.

Lasciamo al lettore la cura di enunciare le inverse degli altri due casi limiti, che si stabiliscono in modo del tutto analogo, nonchè i teoremi reciproci di quello di BRIANCHON e dei relativi casi limiti.

Passiamo piuttosto a vedere come si possano applicare i teoremi di PASCAL e di BRIANCHON, per costruire quanti si vogliano punti o tangenti di una conica, individuata mediante punti o tangenti. Ci limiteremo a considerare due casi, dall'esame dei quali lo studioso potrà desumere, per analogia, le costruzioni relative ai casi rimanenti.

Costruire per punti una conica individuata da cinque punti indipendenti.

Sieno 1,2,3,4,5 i cinque punti dati e, condotta una



retta arbitraria r pel punto 1, chiamiamo 6 il punto incognito, in cui questa retta sega ulteriormente la conica individuata dai punti 1,2,3,4,5. I tre punti:

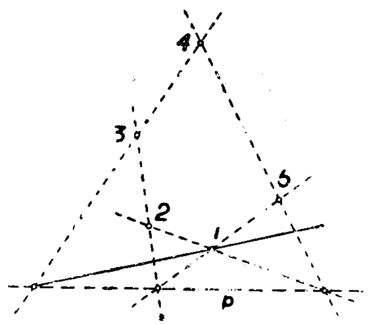
$$12.45, \quad 23.56, \quad 34.61$$

debbono appartenere ad una medesima retta p. Ora il punto 12.45 è ben determinato, e così pure il punto 34.61, che è comune alla retta 34 ed alla r: dunque la p è individuata. Congiungendo il punto 5 col punto $p.23$, avremo la retta 56, e quindi il punto 6 risulterà come intersezione di questa retta e della retta data r.

Variando la r, possiamo così costruire quanti punti si vogliano della conica 12345.

Dati cinque punti indipendenti di una conica, costruire la tangente in uno di essi.

Sieno 12345 i cinque punti dati e vogliasi la tan-



gente nel punto 1. In virtù del teorema del pentagono, la retta p che congiunge i punti

$$12.45, \quad 23.51.$$

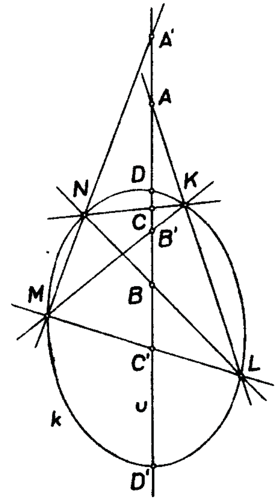
dovrà contenere il punto comune alla 34 ed alla tangente in 1 alla conica. Perciò congiungendo il punto 1 col punto p. 34, avremo la tangente richiesta.

§ 40.

Teoremi di Desargues e di Sturm.

Consideriamo un quadrangolo piano completo $KLMN$ inscritto in una conica k, ed una retta u, secante la conica nei punti D, D', e non passante per nessun vertice del quadrangolo.

Diciamo AA', BB', CC' le tre coppie di punti staccati sulla u dalle tre coppie di lati opposti KL, MN; LN, KM; KN, LM del detto quadrangolo. Proiettando dai punti K, M di k la quaderna dei punti $LNDD'$ della



conica stessa, avremo due quaderne proiettive di raggi (pag. 147):

$$K\,(L\,N\,D\,D') \;\overline{\wedge}\; M\,(L\,N\,D\,D').$$

Segando con u queste due quaderne, avremo:

$$A\;C\;D\;D' \;\overline{\wedge}\; C'\;A'\;D\;D',$$

e siccome (pag. 92):

$$C'\;A'\;D\;D' \;\overline{\wedge}\; A'\;C'\;D'\;D$$

verrà:

$$A\;C\;D\;D' \;\overline{\wedge}\; A'\;C'\;D'\;D,$$

la quale ci dice che le tre coppie AA', CC', DD' appartengono ad un' involuzione I.

Analogamente, proiettando il gruppo $MNDD'$ dai punti K,L sulla u, avremo:

$$B'\,C\,D\,D' \overline{\wedge}\, C'\,B\,D\,D',$$

donde:

$$B'\,C\,D\,D' \overline{\wedge}\, B\,C'\,D'D,$$

la quale prova che la coppia BB' appartiene all' involuzione individuata dalle CC', DD', cioè alla I. Considerando anche il fatto duale, potremo enunciare il seguente TEOREMA DI DESARGUES (a sinistra):

Dato un quadrangolo inscritto in una conica, una retta secante, non passante per nessun vertice del quadrangolo, taglia la conica in due punti, che sono coniugati nell' involuzione a cui appartengono le tre coppie segnate sulla retta stessa dalle coppie di lati opposti del quadrangolo.

Dato un quadrilatero circoscritto ad una conica, da un punto esterno, non giacente su nessun lato del quadrilatero, escono due tangenti, che son coniugate nell' involuzione a cui appartengono le tre coppie di raggi che proiettano dal punto dato le coppie di vertici opposti del quadrilatero.

Si noti che mediante il ragionamento precedente si ritrova il teorema del quadrangolo già dimostrato a pag. 117.

Il ragionamento stesso vale anche se i vertici del quadrangolo vengono a coincidere a coppie, purchè si consideri come congiungente di due vertici, che sieno venuti a coincidere in un punto, la tangente alla conica ivi. Si hanno così i casi limiti seguenti:

La coppia dei punti che una conica determina sopra una retta secante, la quale non passi per nessun vertice di un dato triangolo inscritto nella conica, appartiene all' involuzione individuata dalle coppie segnate su quella retta da due lati del triangolo e dal terzo lato, accoppiato alla tangente nel vertice opposto.

La coppia delle tangenti di una conica passanti per un punto esterno, il quale non giaccia su nessun lato di un dato trilatero circoscritto alla conica, appartiene all' involuzione individuata dalle coppie di raggi che proiettano da quel punto due vertici del trilatero ed il terzo vertice, accoppiato al punto di contatto del lato opposto.

La coppia dei punti che una conica determina sopra una retta secante, la quale non passi per nessun punto di contatto dei lati di un dato angolo circoscritto alla conica, e la coppia segnata da questi lati sulla retta, individuano un' involuzione che ha un punto doppio nell' intersezione della retta data, con quella che riunisce i punti di contatto dei lati stessi.

La coppia delle tangenti di una conica passanti per un punto esterno, non appartenente a nessun lato di un dato angolo circoscritto alla conica, e la coppia dei raggi che proiettano i punti di contatto di questi lati, individuano una involuzione che ha un raggio doppio nella congiungente del punto dato col vertice del dato angolo.

Prima di passare al teorema di STURM, premetteremo alcune definizioni. Diremo *fascio di coniche* il sistema delle infinite coniche che passano per quattro punti indipendenti del piano; o che passano per tre punti indipendenti, toccando in uno di essi una data retta indipendente dagli altri due; oppure che passano per due punti, toccando in ciascuno di essi una retta data indipendente dall'altro punto. I punti dati, comuni a tutte le coniche del fascio, si diranno i *punti base* Nel 1° caso il fascio ha quattro punti base distinti; nel 2° caso si può dire che vi sono ancora quattro punti base, di cui due infinitamente vicini; nel 3° caso che vi son due coppie di punti base infinitamente vicini (cfr. colle pagg. 151, 152).

Due coniche di un fascio non si tagliano fuori dei punti base (pag. 152), e per un punto generico del piano (cioè indipendente dai punti base) passa una ad una sola conica del sistema (pagg. 149, 150, 151).

Consideriamo per un momento un fascio coi quattro punti base distinti A, B, C, D, e diciamo E un punto che si muova sopra una retta u non passante pei punti base. Finchè tra i punti A, B, C, D, E non si verificano allineamenti, cioè finchè E non coincide con qualcuno dei punti segnati sulla u dai lati del quadrangolo completo $ABCD$, pel punto E passa una conica ben determinata del fascio; mentre, quando E coincide con uno dei punti suddetti, per esso non passa nessuna conica propriamente detta. Questa eccezione si può rimuovere *riguardando come una linea di 2° ordine anche una coppia di rette*, e dicendo che, quando ad es. E coincide col punto $AB.u$, la linea di 2° ordine del fascio, passante per E, si scinde nelle rette AB, CD.

Una linea di 2° ordine costituita da una coppia di rette, si dice anche una *conica degenere* o *riducibile*.

La opportunità della convenzione introdotta segue dal fatto che, quando E si muove sulla u, tendendo ad uno dei punti segnati su questa retta dai lati del quadrangolo $ABCD$, la conica non degenere passante per E, tende effettivamente a spezzarsi in quel lato del quadrangolo, che viene a passare per E, e nel lato ad esso opposto (*).

Ma l'opportunità di riguardare una coppia di rette (complanari) come una linea di 2° ordine, segue anche da altre considerazioni. Così una coppia di rette è segata da una retta del suo piano in due punti od in un solo (quando la retta passa pel punto comune alla coppia). Inoltre anche una coppia di rette, come una conica non degenere, può generarsi mediante le intersezioni dei raggi omologhi di due fasci proiettivi complanari; giacchè

(*) La cosa è immediata per via analitica: qui ci basti di accennarla, tanto perchè il lettore si renda ragione della opportunità della convenzione fatta. Del resto anche geometricamente è facile constatare la circostanza accennata, poggiandosi sul teorema di Desargues.

quando questi due fasci son prospettivi, oltre ai punti dell'asse di prospettiva, si possono riguardare come punti comuni a due raggi omologhi anche i punti del raggio comune ai due fasci, che è unito. Aggiungiamo infine che una coppia di rette può pure riguardarsi come sezione piana di una quadrica rigata: sezione prodotta da un piano tangente della quadrica.

Nè vogliamo tacere che per un esagono inscritto in una coppia di rette vale un teorema (di Pappo) analogo a quello di Pascal (*); ecc. ecc.

Coll' introduzione delle coppie di rette come coniche degeneri, l'affermazione che per un punto del piano, diverso dai punti base, passa una sola conica di un dato fascio, è vera senza nessuna limitazione, purchè si tratti di un fascio con quattro o tre punti base distinti.

Non così quando si tratti di un fascio con due punti base distinti A, B; chè in tal caso per un punto E della AB non passa nessuna conica del fascio, spezzata in due rette distinte. Per rimuovere questo caso di eccezione, si presenta spontanea l' idea di riguardare come conica (degenere) del fascio la retta AB contata due volte, o, come anche si dice, la *retta doppia* AB. E invero, rispetto ad una tal conica si possono considerare come tangenti tutte le rette del piano (perchè la segano in due punti coincidenti) e quindi anche le rette che toccano in A, B tutte le coniche del fascio.

Ciò premesso, immaginiamo nel piano di un fascio di coniche coi punti base A, B, C, D (che per fissare le idee supporremo distinti) una retta u non passante pei punti base, e diciamo I l' involuzione a cui appartengono le coppie segnate sulla u dalle coppie di lati opposti del quadrangolo completo $ABCD$. Per ogni punto X di u passa una sola conica k del fascio (degenere o no);

(*) Cfr. i miei citati *Complementi di geometria proiettiva*, pag. 13. Il teorema di Pappo è del resto implicitamente racchiuso nella proprietà dell'asse di collineazione di due punteggiate proiettive complanari (pag. 84).

l'ulteriore punto X' in cui k sega u, pel teorema di DESARGUES, dovrà essere il coniugato di X nell' involuzione I. Sicchè potremo enunciare il seguente:

TEOREMA DI STURM. *Le coniche di un fascio segano sopra una trasversale, non passante per nessuno dei punti base del fascio, le infinite coppie di un' involuzione.*

I punti doppi eventuali dell' involuzione I saranno punti di contatto colla u di due coniche del fascio. Dunque:

Dato un fascio di coniche ed una retta non passante per nessun punto base del fascio, o non esiste nessuna conica del fascio tangente alla retta data, o ne esistono due.

Si noti che quando il fascio ha due soli punti base distinti A, B, uno dei punti doppi dell' involuzione I è l' intersezione della u colla AB; quindi la I è sempre iperbolica e si può dire che:

In un fascio di coniche con due soli punti base distinti vi è sempre una sola conica non degenere tangente ad una retta che non passi per nessun punto base.

Il concetto di fascio di coniche luogo ha per duale quello di *schiera di coniche inviluppo*: la nozione di conica luogo spezzata in due rette distinte o coincidenti, quella di *conica inviluppo spezzata in due fasci di raggi, distinti o coincidenti*; ecc. ecc.

Poichè il concetto di un fascio di coniche con due soli punti base distinti è duale di se stesso, un tal fascio si chiama un *fascio-schiera* (*).

Osservazione. D'ora in poi, salvo avviso contrario, parlando di coniche intenderemo sempre di alludere a coniche non degeneri (irriducibili).

(*) In Geometria analitica si considerano anche fasci (e dualmente schiere) di coniche coi punti (o risp. tangenti) base imaginari. Qui noi potremmo farlo, conservandoci sul terreno sintetico, soltanto se avessimo sviluppato la teoria sintetica degli immaginari (vedi a pag. 124). Così ad es. un fascio di circoli (pag. 130) è un fascio di coniche che ha due punti base coincidenti coi punti ciclici (pag. 165). Il teorema di Sturm relativo ad un fascio di circoli è stato già dimostrato a pag. 130.

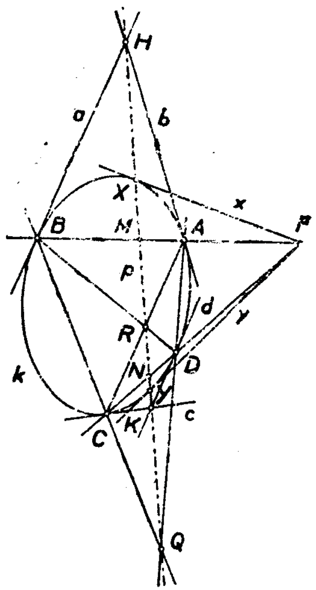
CAPITOLO DECIMO

Polarità rispetto a una conica o ad un cono di 2° ordine.

§ 41.

Polare di un punto e polo di una retta rispetto ad una conica.

Consideriamo una conica qualunque k ed un punto P del suo piano, non appartenente a k. Conduciamo per P due rette che seghino la conica rispettivamente nei punti A,B e C,D e poniamo:



$$Q \equiv AD.BC \ , \ R \equiv AC.BD.$$

Applicando al quadrangolo *semplice* $ADBC$ il secondo dei casi limiti del teorema di PASCAL (pag. 175), vediamo che le tangenti a k nelle coppie di vertici opposti A,B e D,C si debbon segare in due punti H,K allineati coi punti Q ed R. Si noti inoltre che, per la proprietà armonica del quadrangolo completo, la retta $p = QR$ sega i lati AB,CD nei punti M,N coniugati armonici di P rispetto alle coppie AB, CD, sicchè la retta p, a cui appartengono i punti H,K,M,N,Q,R, si può definire come la retta che riunisce il punto d'incontro delle tangenti alla conica nei punti A,B, col punto che, insieme a P, separa armonicamente la coppia AB. Da ciò deriva che, tenendo fissa la trasversale PAB e facendo variare la trasversale PCD (mantenendola però sempre secante rispetto alla conica), i punti K, N, Q, R variano sulla retta fissa $p \equiv HM$. Supponendo fatte le osservazioni duali, concludiamo pertanto:

Se P è un punto del piano di una conica k, non appartenente ad essa, giacciono sopra una medesima retta p:

1) *gli ulteriori punti diagonali di ogni quadrangolo completo inscritto in k e che abbia un punto diagonale in P;*

2) *i coniugati armonici di P rispetto alle coppie di punti della conica allineati con P;*

3) *i punti d'intersezione delle tangenti alla conica nelle coppie di punti allineati con P.*

La retta p, che si può definire mediante una qualunque delle tre proprietà suddette, dicesi la *polare del punto P rispetto alla conica.*

Se p è una retta del piano di una conica k, non tangente a k, passano per un medesimo punto P:

1) *le ulteriori rette diagonali di ogni quadrilatero completo circoscritto a k e che abbia una retta diagonale in p;*

2) *le rette coniugate armoniche di p rispetto alle coppie di tangenti di k, che s'incontrano in p;*

3) *le congiungenti dei punti di contatto delle coppie di tangenti di k che s'incontrano in p.*

Il punto P, che si può definire mediante una qualunque delle tre proprietà suddette, dicesi il *polo della retta p rispetto alla conica.*

Proviamo ora che la relazione fra polo e polare è reciproca. Consideriamo all'uopo le tangenti a, b, c, d alla conica nei vertici del quadrangolo $ABCD$; se si pone allora $p \equiv ab.cd$, per la proprietà 3) a sinistra, la

retta p sarà la polare di P, e per la proprietà 3) a destra, il punto $P \equiv AB.CD$ sarà il polo di p. Si conclude che:

Se un punto P ha per polare la retta p, questa ha per polo P.

Si osserverà inoltre che:

Se un punto P non appartiene alla conica k la sua polare p non passa per P.

Se una retta p non tocca la conica k il suo polo P non giace su p.

Invero (a sinistra) essendo distinto da P il coniugato armonico di P rispetto ad una coppia A,B di punti della conica, allineati con P, la polare p incontra la retta AB in un punto distinto da P e non passa quindi per P.

Ne deriva pure che un punto X comune alla polare di P e alla conica k, deve necessariamente essere punto di contatto di una tangente x mandata da P a k. La retta PX non può infatti incontrare k in un punto X' diverso da X, perchè altrimenti il coniugato armonico P' di P rispetto alla coppia XX', che è distinto da X, dovrebbe giacere sulla polare p e quindi la retta $PP'X$ coinciderebbe con p, cioè P giacerebbe su p.

Ciò posto, se P è un punto esterno a k, il coniugato armonico M di P rispetto ad una coppia di punti A,B, staccati su k da una secante per P, giacendo su quel segmento AB che non contiene P, è interno a k (pag. 161), e la polare di P, che passa pel punto interno M, risulta secante rispetto a k (pag. 163).

Per quanto precede, i punti distinti X,Y ove p incontra k son adunque i punti di contatto delle tangenti x,y da P a k, e si conclude che:

La polare di un punto esterno è la retta (secante) che congiunge i punti di contatto delle tangenti tirate da quel punto alla conica; e dualmente.

Se invece il punto P è interno, la sua polare non può avere alcuna intersezione (reale) colla conica, giacchè una tale intersezione, ove esistesse, pel ragionamento che precede, dovrebbe esser punto di contatto per una tangente da P alla conica. Dunque:

La polare di un punto interno è una retta esterna; e dualmente.

Quando il punto P appartiene alla conica le proprietà 1) e 2) non hanno più senso; non così la proprietà 3), la quale si verifica purchè *si assuma come retta polare di P la tangente alla conica in P.*

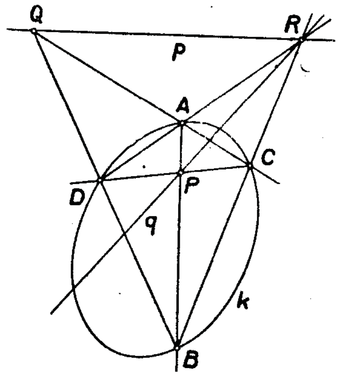
Ciò è perfettamente lecito, in quanto i punti non appartenenti alla conica hanno per polari rette non tangenti.

Dualmente *si assumerà come polo di una retta tangente il relativo punto di contatto.*

§ 42.

Sistema polare.

Le considerazioni precedenti conducono spontaneamente ad una corrispondenza biunivoca tra i punti e le rette del piano di una conica, ove si assumano come corrispondenti un punto ed una retta, quando sono polo e polare rispetto alla conica. Una tal corrispondenza si chiama un *sistema polare* od anche una *polarità piana.*



Studiamo più profondamente questa corrispondenza. Anzitutto vediamo come si muove la polare di un punto, mentre questo si muove descrivendo una retta p, che dapprima supporremo non tangente alla conica k.

Sia P il polo di p (che non apparterrà a k) e, preso un punto arbitrario Q della p, ed un punto A di k, si congiunga A con P e con Q e s'indichino con B,C le ulteriori intersezioni della conica colle rette AP, AQ.

Se s'indica inoltre con D il punto ove PC incontra ulteriormente k, il quadrangolo completo $ABCD$ sarà inscritto in k ed avrà uno de' suoi punti diagonali in P; dunque gli altri due punti diagonali giaceranno sulla polare p di P. Ciò significa che la retta BD passa per Q e che le rette AD, BC si tagliano in un punto R di p.

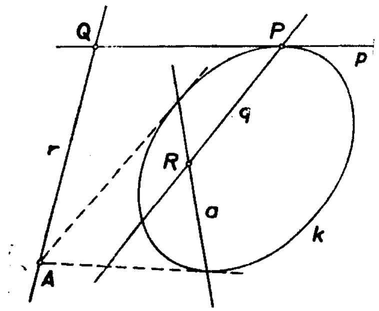
Per la proprietà 1) di pag. 187, la polare di Q sarà la retta $q \equiv PR$. Tenendo fisso il punto A e la retta p, sicchè restano fissi anche punti P,B, e facendo inoltre variare Q sulla retta p, varieranno i punti C,D e la retta q; ma i fasci descritti dai raggi AC, BC saranno proiettivi (pag. 147), sicchè resulteranno proiettive le punteggiate descritte dai punti Q,R, che son sezioni di quei fasci colla retta p: onde il fascio descritto attorno al punto P della retta $q \equiv PR$, sarà proiettivo alla punteggiata descritta da Q. Dunque:

Mentre un punto Q si muove descrivendo una retta p, la sua polare q varia attorno al polo P di p, descrivendo un fascio proiettivo alla punteggiata descritta da Q; e dualmente.

La qual proposizione contiene come parte quest'altra:

Se un punto Q appartiene ad una retta p, la polare q di Q passa pel polo P di p; e viceversa (dualmente).

La dimostrazione esposta riferiscesi al caso in cui la retta p non è tangente a k; ma il teorema, come ora proveremo, vale anche se la retta p, su cui varia Q, tocca k nel proprio polo P. Fissiamo perciò un punto A del piano di k, fuori di p e di k, ed osserviamo che, per quanto precede, la polare q di Q dovrà passare pel polo R di $r \equiv AQ$ e pel punto P (pag. 188). Ora, quando Q varia su p, il polo R di r varia sulla polare a di A, e la punteggiata descritta da R è proiettiva al



fascio descritto da r e quindi alla punteggiata descritta da Q. Poichè infine il fascio descritto da q è prospettivo alla punteggiata descritta da R, si conclude che il fascio stesso è proiettivo alla punteggiata descritta da Q ; c. d. d.

Diamo ora alcune definizioni. Due *punti* diconsi *coniugati* rispetto alla conica o al sistema polare di cui essa è *conica fondamentale*, quando la polare dell'uno passa per l'altro e (quindi) viceversa.

Dualmente due *rette* diconsi *coniugate* quando il polo dell'una giace sull'altra e (quindi) viceversa.

Ad ogni punto ne son coniugati infiniti altri, che son tutti i punti della sua polare, e dualmente. I soli punti che siano coniugati di se stessi, son quelli della conica.

Consideriamo una retta p non tangente alla conica e seghiamola col fascio P delle polari dei punti di p. La corrispondenza che nasce tra i punti di p, chiamando omologo di un punto Q l' intersezione Q' di p colla polare q di quel punto, è una proiettività, ed anzi un' involuzione, perchè al punto Q' viene a corrispondere l' intersezione di p colla polare q' di Q', la quale passa per Q. Dunque :

Sopra una retta non tangente alla conica esistono infinite coppie di punti coniugati rispetto alla conica, e queste coppie formano un' involuzione.

Tale *involuzione* dicesi *subordinata* su quella retta *dal sistema polare* o *dalla conica*.

Dualmente, in un fascio non avente il centro sulla conica, il sistema polare subordinerà un' involuzione di raggi coniugati.

Affinchè un punto della retta p, di cui sopra, sia doppio per l' involuzione che si ha su p, è necessario e sufficiente ch'esso sia coniugato di se stesso, cioè che appartenga alla conica. Si conclude pertanto che :

Sopra una retta esterna alla conica il sistema polare subordina un' involuzione ellittica, e sopra una retta secante un' involuzione iperbolica, che ha per punti doppi le intersezioni della retta colla conica.	*In un fascio di raggi, avente il centro in un punto interno alla conica, il sistema polare subordina una involuzione ellittica, ed in un fascio di raggi col centro esterno, un' involuzione iperbolica, che ha per raggi doppi le tangenti mandate da quel punto alla conica.*

A questo punto, per rendere più uniforme il linguaggio, diremo che le infinite coppie di una forma di 1ª specie, costituite da un elemento fisso e da un altro elemento variabile nella forma, dànno un' *involuzione degenere*. L'elemento fisso (singolare) sarà allora l'unico elemento doppio, sicchè *l' involuzione* potrà dirsi anche *parabolica*. L'opportunità di questa definizione si rende evidente, appena si consideri la rappresentazione analitica delle involuzioni tra gli elementi di una forma di 1ª specie. Un' involuzione viene infatti rappresentata da un'equazione bilineare simmetrica nelle coordinate di due elementi coniugati, e, se si vuole che l' involuzione sia parabolica, occorre supporre che l'equazione di 2º grado degli elementi uniti, abbia il discriminante nullo. Questa condizione porta appunto come immediata conseguenza che l' involuzione considerata *degenera* in un insieme di infinite coppie con un elemento fisso.

Profittando della locuzione introdotta, potremo dire che :

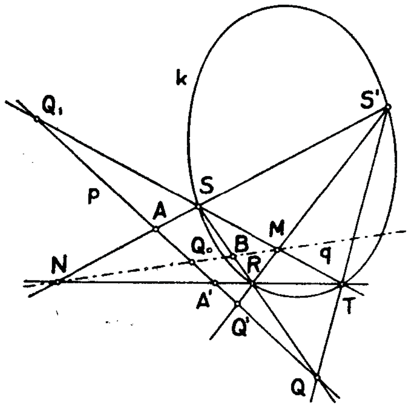
Sopra una tangente della conica il sistema polare subordina un' involuzione (degenere) parabolica, col punto doppio nel punto di contatto.	*In un fascio che abbia per centro un punto della conica il sistema polare subordina un' involuzione (degenere) parabolica, col raggio doppio nella tangente alla conica in quel punto.*

Dimostriamo ora che :

Se s' imagina la conica k generata da due fasci proiettivi coi centri in S ed S' e si considerano le due punteg-

giate proiettive segate da questi fasci sopra una retta p, non tangente alla conica, il coniugato armonico di un punto Q di p rispetto alla coppia $Q'Q_1$, costituita dagli omologhi di Q nella seconda e prima punteggiata, è il coniugato Q_0 di Q nell' involuzione che il sistema polare subordina su p.

Si sottintende che chiamiamo prima punteggiata quella segata dal fascio S, e seconda quella segata dal



fascio S'. Per trovare l'omologo di Q nella seconda punteggiata, dovremo proiettare Q da S nel punto R di k, ed R da S', nel punto Q' di p; e per trovare l'omologo di Q nella prima punteggiata, dovremo proiettare Q da S' nel punto T di k, e T da S nel punto Q_1 di p.

Ponendo:

$$M \equiv S\,T\,.\,R\,S' \quad , \quad N \equiv R\,T\,.\,S\,S',$$

la retta $q \equiv MN$ risulterà la polare di Q.

Applichiamo ora il teorema di DESARGUES al quadrangolo $SS'RT$, segato dalla trasversale p. Avremo che le coppie $Q'Q_1$ ed $A(\equiv p.SS')$, $A'(\equiv p.RT)$, individuano un' involuzione, di cui Q è un punto doppio, e

quindi il coniugato armonico di Q rispetto alla coppia $Q'Q_1$ coinciderà col coniugato armonico di Q rispetto alla coppia AA'.

Poichè la coppia RS è separata armonicamente dalla QB (ove si è posto $B \equiv q.RS$), il coniugato armonico di Q rispetto alla coppia AA' (e quindi rispetto alla $Q'Q_1$) sarà il punto Q_0 ove la polare q di Q incontra la retta p, c. d. d.

Chi ha letto il § 28 può enunciare il teorema precedente dicendo che *l' involuzione subordinata dal sistema polare sopra una retta non tangente alla conica, è l' involuzione unita di ogni proiettività che sulla retta stessa sia staccata dai fasci che proiettano la conica da due suoi punti fissi qualunque.*

Il ragionamento sopra esposto può anzi riguardarsi come una dimostrazione (indiretta) dell'esistenza dell' involuzione permutabile con una proiettività iperbolica o ellittica.

Quando la retta p è secante, la proiettività e l' involuzione considerata hanno gli stessi punti uniti, e quando la retta è esterna potremo definire come *punti uniti immaginari* di quella proiettività, i punti doppi dell' involuzione ellittica dei punti coniugati, cioè l' involuzione stessa (ved. la nota a piè della pag. 119) e riguardare quei punti come una *coppia di punti immaginari della conica.*

Dualmente si definiscono le *coppie di tangenti immaginarie.*

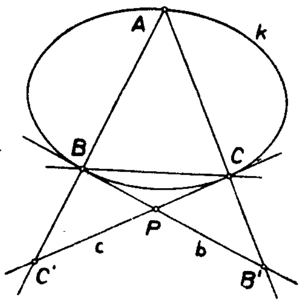
§ 43.

Teorema di Seydewitz-Staudt.

Consideriamo due rette p,p' del piano di una conica k, non coniugate rispetto a k. Segando l'una di esse, per es. p', col fascio delle polari dei punti di p, otterremo una punteggiata proiettiva a p, perchè il fascio di quelle polari è proiettivo alla punteggiata p (pag. 190).

In particolare, la proiettività tra p, p' resulterà una prospettività, allora e solo allora che il punto pp' sia coniugato di se stesso, cioè quando le due rette p, p' s' incontrino in un punto della conica.

Prese ora due rette uscenti da un punto A della conica e seganti altrove k nei punti B, C, diversi da A,



esse, come subito si vede, non saranno di certo coniugate, e quindi potremo applicare il risultato precedente. Nella prospettività tra le due punteggiate al punto B, che ha per polare la tangente b in B, corrisponde il punto $B' \equiv b.AC$, ed al punto C, che ha per polare la tangente c in C, il punto $C' \equiv c.AB$; sicchè il centro della prospettività è il punto $P \equiv bc$, cioè il polo della retta BC. Possiamo dunque dire che:

Dato un triangolo ABC, inscritto in una conica, ogni retta che sia coniugata ad uno dei lati, BC, sega gli altri due lati in punti coniugati. E viceversa, ogni retta che seghi i lati AB, AC in punti coniugati, è coniugata al terzo lato BC.

Dato un trilatero abc, circoscritto ad una conica, da ogni punto coniugato ad uno dei vertici, bc, gli altri due vertici son proiettati secondo rette coniugate. E viceversa, se da un punto i vertici ab, ac son proiettati secondo raggi coniugati, quel punto è coniugato al terzo vertice bc.

Questi teoremi (duali fra loro), generalmente attribuiti a STAUDT, son dovuti a SEYDEWITZ.

È evidente che i teoremi precedenti s' invertono nel modo che segue:

Se da due punti B, C di una conica si proiettano due punti coniugati, allineati col polo di BC, i due raggi proiettanti s' incontrano in un punto A della conica.

Se s' intersecano due tangenti b, c di una conica con due rette coniugate, che si seghino sulla polare di bc, i due punti d' intersezione son congiunti da una tangente a della conica.

§ 44.

Triangoli autopolari.

Un triangolo dicesi *autopolare* od *autoreciproco* rispetto ad una conica, quando ogni vertice ha per polare il lato opposto. È facile provare *l'esistenza di infiniti triangoli autopolari.*

Infatti, preso un punto A del piano della conica k, non appartenente a k, dicasi a la polare di A rispetto a k. Si prenda su a un punto B a piacere, non appartenente a k, e s' indichi con b la polare di B, la quale dovrà passare per A. Il punto $C \equiv ab$ avrà per polare la retta $c \equiv AB$ e quindi il triangolo ABC sarà autopolare rispetto a k.

La proprietà più notevole dei triangoli autopolari è la seguente:

Tra i vertici di un triangolo autopolare se ne trova sempre uno ed uno solo interno alla conica, sicchè dei lati due sono secanti e l'altro è esterno.

Invero, se un vertice è interno, gli altri due sono esterni, perchè appartengono alla polare di quel vertice; e viceversa, se due vertici sono esterni, l'altro vertice, cioè il polo del lato che congiunge i primi due, sarà interno, a causa della proprietà di pag. 191 (a sinistra). Dunque in ogni caso c'è uno ed un sol vertice interno.

Sia $ABCD$ un quadrangolo inscritto in una conica k, e sieno $E \equiv AB.\,CD$, $F \equiv AC.\,BD$, $G \equiv AD.\,BC$ i suoi tre punti diagonali. Per la proprietà 1) tra quelle che caratterizzano la polare di un punto (pag. 187), la polare di ognuno dei punti E, F, G sarà il lato opposto del triangolo EFG. Dunque:

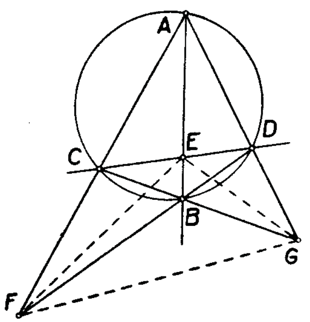
Se un quadrangolo è inscritto in una conica, il suo triangolo diagonale è autoconiugato rispetto alla conica.	*Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, il suo trilatero diagonale è autoconiugato rispetto alla conica.*

Viceversa:

Se un triangolo EFG è autopolare rispetto ad una conica k, esso è triangolo o trilatero diagonale di infiniti

quadrangoli completi inscritti in k.	*quadrilateri completi circoscritti a k.*

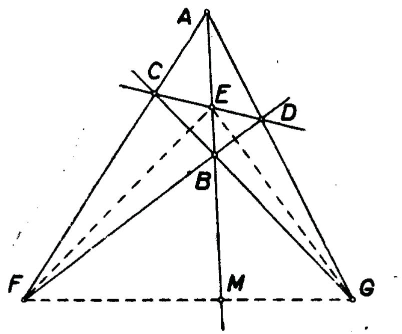
Infatti, a sinistra, si scelga un punto generico A di k e si dicano B, C, D le ulteriori intersezioni con k delle rette AE, AF, EC. Il quadrangolo $ABCD$ ha un punto diagonale in E, sicchè gli altri due punti diagonali si troveranno sulla polare di E, cioè su FG. Ne deriva che la retta BD passerà per F (che è comune per ipotesi alla FG ed alla AC). Ma allora il lato opposto al vertice F, nel triangolo diagonale di $ABCD$, dovrà essere la polare di F, cioè la retta EG; dunque il terzo punto diagonale coincide con G, c. d. d.



Osserviamo ora che *un quadrangolo completo $ABCD$*

è individuato dal suo triangolo diagonale EFG e da un vertice A.

Infatti, tre lati saranno intanto AE, AF, AG. Se diciamo B il coniugato armonico di A rispetto al ver-



tice E ed all' intersezione M di AE col lato opposto del triangolo diagonale, e poniamo $C \equiv AF.\,BG$, $D \equiv AG.\,BF$, $ABCD$ è il quadrangolo richiesto. Invero, due lati opposti del quadrangolo completo $FGCD$ passano per A, due lati opposti per B, e dei due rimanenti uno passa per M; dunque l'altro passerà pel coniugato armonico di M rispetto ad AB, cioè per E: il che significa che i tre punti C, E, D sono allineati.

Questa proposizione, combinata col teorema precedentemente dimostrato, ci dice che *vi sono infinite coniche che passano per un punto dato del piano e rispetto alle quali un dato triangolo è autoconiugato: esse passano in conseguenza per altri tre punti del piano, cioè formano un fascio.*

Il sistema delle ∞^2 coniche che hanno comune un dato triangolo autopolare, è una *rete di coniche.*

Una conica è perfettamente individuata da un triangolo autopolare e da due suoi punti.

Mediante il teorema precedentemente dimostrato, si costruiscono subito altri sei punti della conica.

Osservazione 1ª. Non possiamo ulteriormente dilungarci su tante altre belle questioni che sono connesse alla teoria della polarità. Lo studioso potrà trovarle nei miei citati « *Complementi di geometria proiettiva* ».

Osservazione 2ª. Tutte le proprietà del sistema polare, a cui dà luogo una conica, si possono trasportare colla legge di dualità nello spazio, e si ottengono teoremi concernenti la *polarità rispetto ad un cono quadrico*.

Lasciamo al lettore la cura di enunciare queste proposizioni.

CAPITOLO UNDECIMO

Proprietà diametrali delle coniche.

§ 45.

Centro e diametri.

Si chiama *centro* di una conica il polo della retta impropria del suo piano (pagg. 164-187) e *diametri* le rette che passano pel centro, cioè le polari dei punti all' infinito.

Poichè la retta all' infinito è esterna rispetto all'ellisse, tangente rispetto alla parabola, secante rispetto all' iperbole (pag. 164), ne risulta (pagg. 188-89) che:

Il centro è interno nell'ellisse, esterno nell' iperbole, ed è il punto di contatto colla retta all' infinito, nella parabola.

Se il centro è proprio o, come anche si dice, se si tratta di *una conica a centro*, una retta secante, che esca dal centro, taglierà la conica in due punti, che debbono essere separati armonicamente dal centro e dal punto all' infinito della secante. Dunque:

Per l'ellisse e per l' iperbole il centro è centro di simmetria della curva.

Nell' iperbole, come abbiamo già detto (pag. 164), le due tangenti nei punti all' infinito, si chiamano *asintoti*. Per una proprietà enunciata a pagina 188 si può affermare che:

Gli asintoti dell' iperbole passano pel centro.

Due *diametri coniugati* (pag. 191) son due diametri tali che l'uno ha per polo il punto all' infinito dell'altro.

Nell'ellisse e nell' iperbole le infinite coppie di diametri coniugati costituiscono un' involuzione, che è ellittica nel caso dell'ellisse, iperbolica nel caso dell' iperbole ; ed in quest'ultimo caso i raggi doppi sono gli asintoti. Ciò risulta subito applicando le proprietà della pag. 191. *Nel caso della parabola tutti i diametri son paralleli* (*e inoltre ogni diametro è coniugato alla retta all' infinito*).

Gli estremi delle corde di una conica a centro, che escono dal punto all' infinito di un diametro, debbono essere divisi armonicamente dal punto all' infinito medesimo e dal punto d' intersezione delle corde stesse col diametro coniugato. Dunque :

In una conica a centro le corde parallele ad un diametro son divise per metà dal diametro coniugato.

Analogamente *nella parabola più corde parallele son divise per metà dal diametro polare della loro direzione.*

Applicando il teorema di Seydewitz-Staudt (pagina 195) si trae in particolare che : *Proiettando i punti di una conica a centro da due punti diametralmente opposti, si ottengono coppie di rette parallele alle coppie di diametri coniugati.*

Da ciò segue subito che :

Dati due diametri coniugati di una conica a centro, vi sono infiniti parallelogrammi inscritti nella curva, e aventi i lati paralleli a quei diametri.

Viceversa, *ogni parallelogramma inscritto in una conica a centro, ha per centro il centro della conica ed ha i lati paralleli a due diametri coniugati.*

Ciò risulta dal teorema (a sinistra) della pag. 197.

In modo analogo si proverà per esercizio che :

Dati due diametri coniugati di una conica a centro vi sono infiniti parallelogrammi circoscritti, che hanno per diagonali quei due diametri ; ed anzi ogni parallelogramma circoscritto ha per diagonali due diametri coniugati.

§ 46.

Dell' iperbole equilatera e del cerchio.

Un' iperbole dicesi *equilatera* od *ortogonale*, quando i suoi asintoti sono perpendicolari.

Due fasci complanari inversamente uguali, non prospettivi, generano un' iperbole equilatera, ed i centri dei due fasci sono due punti diametralmente opposti dell' iperbole.

Infatti, sulla retta all' infinito del loro piano i due fasci segano una congruenza inversa, che ha due punti uniti, corrispondenti a direzioni ortogonali (pag. 106), e quindi gli asintoti dell' iperbole, che proiettano dal centro quei punti, sono ortogonali. Siccome inoltre i raggi che corrispondono al raggio comune ai due fasci, pensato nell'uno o nell'altro, son paralleli, si conclude che il polo del raggio comune sta all' infinito, cioè che i due centri sono estremi di un diametro.

Nell' iperbole equilatera *gli asintoti*, dovendo separare armonicamente due diametri coniugati ed essendo tra loro perpendicolari, *saranno le bisettrici degli angoli dei due diametri*, cioè le coppie di diametri coniugati si corrisponderanno in una congruenza inversa. Proiettando i punti dell' iperbole equilatera da due punti diametralmente opposti, e applicando il caso particolare già notato (pag. 201) del teorema di Seydewitz-Staudt, concluderemo che :

Un' iperbole equilatera, da due suoi punti diametralmente opposti, vien proiettata secondo due fasci inversamente congruenti.

Per queste proprietà l' iperbole equilatera si ravvicina al cerchio, che come abbiamo visto, si genera con fasci direttamente eguali (pag. 165).

Ma il circolo può essere caratterizzato tra le coniche anche da un'altra proprietà notevole, che giova notare :

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una conica sia un cerchio è che l' involuzione dei diametri *coniugati sia l'involuzione circolare, cioè che la data conica subordini sulla retta all'infinito l'involuzione assoluta.*

La necessità della condizione segue subito dal fatto che in un cerchio ogni corda è bisecata dal diametro ad essa perpendicolare, talchè due diametri coniugati risultano appunto perpendicolari. Dimostriamo dunque la sufficienza.

Supponiamo che in una conica k l' involuzione dei diametri coniugati sia l' involuzione degli angoli retti. Proiettando allora i punti di k da due punti diametralmente opposti, avremo tante coppie di rette perpendicolari (pag. 201), e quindi la k si potrà generare come il luogo dei punti da cui due punti fissi son veduti sotto angolo retto, e sarà perciò un circolo.

Ricordando che i punti doppi dell' involuzione subordinata da una conica sopra una retta del suo piano si posson definire come i punti comuni a quella retta ed alla conica (pag. 194), si ritrova la proposizione di pag. 165, che cioè:

La condizione necessaria e sufficiente perchè una conica sia un circolo, è che passi pei punti ciclici del piano.

§ 47.

Assi di una conica e diametri trasversi e non trasversi.

Una conica a centro, che non sia un circolo, possiede una ed una sola coppia di diametri coniugati ortogonali, che è quella comune all' involuzione dei diametri coniugati ed all' involuzione (ellittica) degli angoli retti col vertice nel centro (pag. 133). Questi due diametri coniugati ortogonali diconsi *assi della conica.*

Possiamo enunciare:

Una conica a centro, che non sia un circolo, ammette sempre due soli assi. La curva è simmetrica ortogonalmente rispetto a ciascuno di essi.

Diremo *asse di una parabola* un diametro perpendicolare alla propria direzione coniugata. È ben chiaro

che *la parabola ha un solo asse*, che è il diametro luogo dei punti medi di tutte le corde perpendicolari alla direzione comune dei diametri.

In un'ellisse tutti i diametri sono secanti, perchè il centro è interno. Quindi, se chiamiamo *vertice* di una conica un punto proprio (reale) comune ad essa e ad un asse, potremo dire che *un'ellisse ha quattro vertici.*

In una parabola tutti i diametri proprî sono secanti nel punto all' infinito ed in un ulteriore punto proprio, sicchè *la parabola ha un sol vertice.*

Siccome l' iperbole è tutta contenuta in uno dei due angoli degli asintoti (pag. 148), e d'altronde di due diametri coniugati uno appartiene all'uno di questi angoli completi e l'altro all'altro, uno dei due diametri risulterà secante e l'altro esterno. Si dicono *trasversi* i diametri secanti, *non trasversi* gli altri. *Di due diametri coniugati dell' iperbole uno è trasverso e l'altro no.*

Poichè uno solo degli assi è trasverso, si conclude che *l' iperbole ha due vertici.*

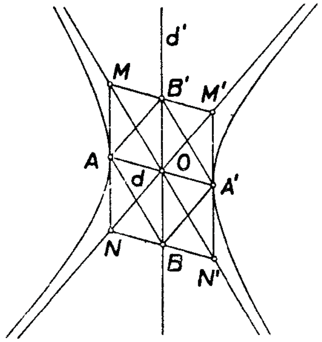
Per *lunghezza di un diametro* di un'ellisse o di un diametro trasverso di un' iperbole, s' intende la lunghezza del segmento finito compreso fra gli estremi del diametro.

Si può definire anche la *lunghezza di un diametro non trasverso* di un' iperbole nel modo seguente:

Sopra un diametro non trasverso l' iperbole subordina un' involuzione ellittica, che ha per centro il centro O della curva. In quest' involuzione ci sono *due punti coniugati che hanno la distanza minima*, i quali costituiscono la coppia comune alla data involuzione ellittica ed alla simmetria di centro O. Infatti, poichè il prodotto delle distanze da O di due punti coniugati, è costante (pag. 125), la loro distanza sarà minima, in valore assoluto, quando i due punti risulteranno equidistanti da O. Orbene, la lunghezza del segmento finito BB', compreso tra questi due punti, è quella che si assume come lunghezza del diametro non trasverso.

Analiticamente si vede che, chiamando distanza tra due punti imaginarî sopra una retta, la differenza tra le loro ascisse (imaginarie), la distanza tra i punti doppi imaginarî dell' involuzione ellittica subordinata sul diametro non trasverso, risulta imaginaria pura ed uguale precisamente al prodotto dell'unità imaginaria i per la lunghezza del segmento sopra considerato BB'. Da ciò l'opportunità della nostra definizione.

I due estremi B,B' del diametro non trasverso d' si possono ottenere colla costruzione seguente:



Si considerino gli estremi A,A' del diametro trasverso d, coniugato di d', e si tirino le tangenti all' iperbole in questi estremi. Esse incontrano gli asintoti in due coppie di punti MN, $M'N'$, che son i vertici di un parallelogramma, di cui d' è una mediana (perchè d' è parallelo ai due lati opposti MN, $M'N'$, ed esce dal centro). Segando il gruppo armonico costituito dagli asintoti e dalla coppia dd', colle tangenti in A,A', si vede che i punti A,A' sono rispettivamente medi tra M,N ed M',N', ossia che d è l'altra mediana del parallelogramma. Ne deriva che le polari dei punti M,M', che sono le parallele agli asintoti OM, OM', condotte rispettivamente da A,A', s' incontrano nel punto $B \equiv d'.NN'$. Analogamente le polari dei punti N,N' s' incontrano in $B' \equiv d'.MM'$. Dunque B,B' son coniugati rispetto alla conica ed equidistanti da O, e perciò costituiscono gli estremi del diametro non trasverso d'.

Osservazione. In un' iperbole equilatera il parallelogramma $MNM'N'$, di cui abbiamo parlato finora, riducesi ad un rombo, perchè le sue diagonali (gli asintoti) si tagliano ad angolo retto. Dunque:

In un' iperbole equilatera le lunghezze di due diametri coniugati qualunque sono uguali. Da ciò la denominazione di equilatera attribuita ad una tale iperbole.

§ 48.

Altre proprietà particolari delle tre specie di coniche. Equazioni ridotte.

In un' iperbole le tangenti segnano sugli asintoti coppie A,A' di punti omologhi in una proiettività, i cui punti limiti coincidono col centro O dell' iperbole (pag. 141, proprietà duale di quella ivi enunciata). Applicando la relazione di Steiner (pag. 102), avremo perciò:

$$(1) \qquad OA \,.\, OA' = \text{costante};$$

e, poichè il prodotto precedente, moltiplicato per $\frac{1}{2}\sin\omega$, ove ω è l'angolo convesso degli asintoti, dà l'area del triangolo racchiuso tra gli asintoti e la tangente AA', potremo enunciare il teorema:

In un' iperbole è costante l'area del triangolo racchiuso tra gli asintoti ed una tangente variabile.

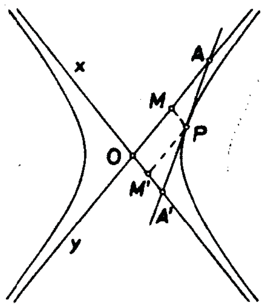
Se una retta u sega l' iperbole nei punti A,B e gli asintoti x,y nei punti C,D, il punto medio M del segmento finito AB sarà proiettato dal centro O secondo il diametro d coniugato al diametro d' parallelo ad u. Ora la coppia d, d' è separata armonicamente dagli asintoti; segando il gruppo armonico $dd'xy$ colla u, se ne trae che M è pure punto medio del segmento finito CD, e si può enunciare:

I segmenti d'una retta secante di un' iperbole, compresi tra la curva e gli asintoti, sono uguali.

Da ciò si ricava una semplicissima costruzione per punti dell' iperbole, dati i due asintoti e un punto della curva. Si svilupperà questa costruzione per esercizio.

In particolare: *Il punto di contatto di una tangente dell' iperbole è medio tra i punti segnati sulla tangente d'gli asintoti.* (Questa proprietà l'avevamo già incontrata incidentalmente nel corso dell'ultima dimostrazione del § precedente).

Se ora diciamo A, A' i punti ove la tangente all' iperbole in punto P della curva sega gli asintoti, tirando da P le parallele agli asintoti stessi e indicando con M, M' i punti da esse staccati su OA, OA', avremo:



$$O\,M.\,O\,M' = \frac{1}{4} O\,A.\,O\,A'\ ;$$

sicchè, prendendo gli asintoti come assi coordinati cartesiani e dicendo x, y le coordinate del punto P, avremo la seguente *equazione dell' iperbole riferita agli asintoti*:

$$x\,y = \text{costante}.$$

Fissiamo ora in un'ellisse o in un' iperbole, due punti diametralmente opposti J, I', e consideriamo le due pun-

teggiate proiettive segnate sulle tangenti u, u' (tra loro parallele) nei punti J, I', dalle altre tangenti della conica. Poichè J, I' sono i punti limiti in questa proiettività (pag. 141, proprietà duale), indicando con A, A' le intersezioni di u, u' con una terza tangente qualunque, verrà:

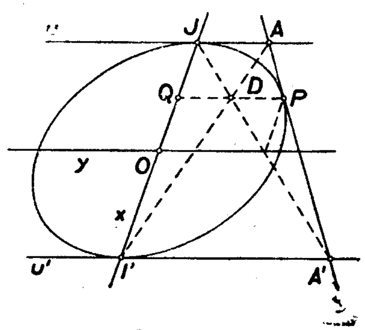
$$J\,A\,.\,I'\,A' = \text{costante}.$$

Scegliamo sulle u, u' versi positivi concordi. Allora, se si tratta di un'ellisse, vi saranno due tangenti parallele al diametro JI' (quelle che toccano la curva negli estremi del diametro coniugato ad JI') e ciascuna di queste staccherà sulle rette u, u', a partire da J, I', due segmenti di egual verso aventi la stessa lunghezza b del semidiametro coniugato ad JI'. Se si tratta invece di un' iperbole, un asintoto segherà sulle due tangenti parallele u, u' due punti situati da parti opposte della retta JI', e i due segmenti staccati da quell'ansitoto su u, u', a partire rispettivamente da J, I', saranno uguali ancora alla lunghezza b del semidiametro non trasverso coniugato ad JI' (§ precedente). Onde risulta:

$$J\,A\,.\,I'\,A' = \pm\, b^2,$$

ed il segno $+$ vale per l'ellisse, il segno $-$ per l' iperbole.

Ciò premesso, diciamo P il punto di contatto della tangente AA', e prendiamo come asse delle x il diametro JI' e come asse delle y il diametro coniugato. Se consideriamo il trilatero circoscritto alla conica, formato



dalle tangenti u,u', AA', applicando ad esso un teorema di pag. 175, si vede che le rette JA', $I'A$ s' incontrano in un punto D dell'ordinata di P. Ponendo $Q \equiv PD.JI'$, si ha perciò in valore assoluto:

$$\frac{PD}{AJ}=\frac{A'P}{A'A}=\frac{I'Q}{I'J}=\frac{DQ}{AJ},$$

dunque (sempre in valore assoluto):

$$PD=DQ=\frac{1}{2}y.$$

Moltiplicando a membro a membro le proporzioni:

$$\frac{DQ}{AJ}=\frac{I'Q}{I'J},\ \frac{DQ}{A'I'}=\frac{QJ}{I'J},$$

verrà:

$$\frac{\frac{1}{4}y^2}{AJ\,.\,A'I'}=\frac{I'Q\,.\,QJ}{I'J^2}.$$

Qualora, secondo le consuete convenzioni della Geometria analitica, s' intendano scelti sulle rette parallele all'asse y versi positivi concordi con quello scelto sull'asse stesso, si verifica subito che l'ultima relazione ottenuta (come ognuna delle proporzioni precedenti) è vera anche nel segno.

Indicando pertanto con a la lunghezza del semidiametro OJ, avremo:

$$\frac{\frac{1}{4}y^2}{\pm b^2}=\frac{(a+x)\,(a-x)}{4\,a^2}$$

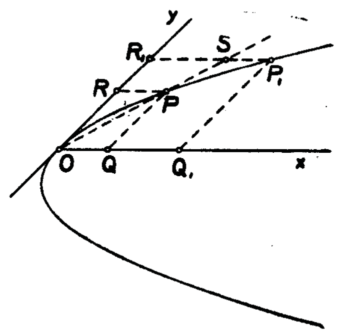
donde si trae:

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Tale è dunque *l'equazione di un'ellisse o di un' iperbole riferita a due diametri coniugati*. Il segno + vale per l'ellisse, il — per l' iperbole.

Passiamo ora a ricercare una forma ridotta per l'equazione della parabola. La forma più semplice si ottiene assumendo come asse delle x un diametro della parabola, e come asse delle y la tangente nell'estremo O (proprio) di questo diametro.

Sieno P,P_1 due punti della curva aventi le coordinate x,y ; x_1,y_1, e sieno Q,Q_1 ; R,R_1 le tracce rispettive su x,y delle parallele condotte da P,P_1 agli assi y,x.



Le due quaderne di raggi, che dal punto O e dal punto improprio X_∞ della parabola, proiettano il gruppo P_1POX_∞, saranno proiettive (pag. 147), onde segando la prima quaderna colla retta P_1R_1, e la seconda coll'asse delle y, e chiamando S il punto $OP.R_1P_1$, $M_\infty (\equiv X_\infty)$ il punto improprio di P_1R_1, ed Y_∞ il punto improprio dell'asse y, verrà:

$$(P_1\,S\,R_1\,M_\infty)=(R_1\,R\,O\,Y_\infty),$$

ossia (in valore e segno):

$$\frac{P_1R_1}{S\,R_1}=\frac{R_1O}{R\,O},$$

e siccome (sempre in valore e segno):

$$\frac{R_1S}{RP} = \frac{R_1O}{R\,O'}$$

moltiplicando a membro a membro, avremo:

$$\frac{R_1P_1}{R\,P} = \left(\frac{OR_1}{OR}\right)^2,$$

cioè:

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1^2}{y^2}.$$

Dunque il rapporto $\frac{y^2}{x}$ è costante al variare del punto sulla parabola. Posto:

$$\frac{y^2}{x} = 2\,p,$$

sarà:

$$y^2 = 2\,p\,x,$$

l'equazione della parabola riferita ad un diametro ed alla tangente nel relativo estremo proprio.

Il coefficiente costante $2p$ si chiama *parametro della parabola*; e, se l'origine è nel vertice, *parametro principale*. Si osservi che, se alle x positive corrispondono valori reali di y, cioè se si è assunto come verso positivo sull'asse x quello diretto verso l'interno della curva, il coefficiente $2p$ sarà positivo.

Osservazione. Ci siamo trattenuti sulla deduzione delle cosidette *forme ridotte delle equazioni delle coniche*, perchè apparisca chiaro ad ognuno fin d'ora che le curve studiate sotto il nome di coniche in Geometria proiettiva, sono le stesse di quelle che si studiano con metodo diverso in Geometria analitica.

CAPITOLO DODICESIMO

Proprietà focali delle coniche.

§ 49.

Fuochi di una conica.

Se in un piano è data una conica k, per ogni retta u del piano esiste una ed una sola retta ad essa coniugata ed ortogonale, che è la perpendicolare tirata alla u dal polo della u rispetto alla conica. Due rette coniugate ortogonali si diranno due *rette coniugate principali*. Le coppie di rette coniugate principali dipendono da tanti parametri da quanti dipendono le rette del piano. Esse sono cioè ∞^2.

Tra i raggi che escono da un punto non appartenente a k la conica subordina un' involuzione (pag. 191), la quale ha sempre almeno una coppia comune coll' involuzione degli angoli retti, e, se ne ha più di una, coincide con quest'ultima involuzione (pag. 133).

Se il punto è sulla conica, poichè la tangente in esso è coniugata a tutte le rette uscenti dal punto medesimo, l'unica coppia di raggi coniugati ortogonali sarà costituita dalla tangente e dalla perpendicolare nel punto di contatto, cioè dalla *normale alla conica* in quel punto. Dunque:

Da ogni punto del piano esce almeno una coppia di rette principali, e, se ne escono due, tutte le coppie di rette coniugate per quel punto sono ortogonali.

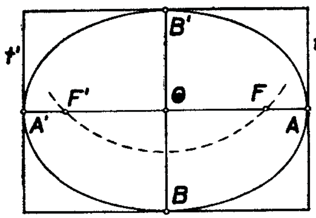
Si presenta quindi la questione di ricercare se esistono punti proprî del piano, tali che le coppie di rette coniugate uscenti da essi sieno ortogonali. Questi punti, di cui vogliamo ora occuparci, si chiamano *fuochi della conica.*

Poichè l'involuzione degli angoli retti è ellittica, si deduce intanto che *se un punto è fuoco per una conica, esso è certamente interno alla curva.*

Nel caso di un circolo, l'unica coppia di rette principali che escono da un punto del piano è costituita dalla retta che riunisce quel punto al centro e dalla sua perpendicolare nel punto stesso: dunque un punto diverso dal centro non potrà essere un fuoco. Il centro è poi un fuoco, perchè l'involuzione dei diametri coniugati coincide in un circolo coll'involuzione degli angoli retti (pag. 202). Viceversa, se il centro di una conica è proprio ed è fuoco per la conica, l'involuzione dei diametri coniugati sarà circolare, e quindi la conica sarà un circolo. Si conclude che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un fuoco di una conica cada nel centro, è che la conica sia un circolo.

Escludiamo dunque il caso del circolo, pel quale la ricerca è esaurita; e sia F un fuoco di una conica. Riunendo F col centro (proprio od improprio) della conica, avremo un diametro, il cui polo sarà il punto all'infinito della retta condotta pel fuoco perpendicolarmente ad esso: si tratterà pertanto di un asse della conica (pag. 203). Dunque i fuochi, se vi sono, dovremo ricercarli sugli assi (o sull'asse) della conica.



Cominciamo dall'ellisse; e denotiamo con a,b le lunghezze de' suoi semiassi OA, OB. Sarà certamente $a \neq b$,

perchè se fosse $a = b$, il circolo di centro O e raggio OA conterrebbe gli altri vertici A', B', B', ed inoltre avrebbe per tangenti nei vertici stessi le perpendicolari ai relativi assi. Sicchè l'ellisse avrebbe comune con quel cerchio quattro punti e le relative tangenti e quindi coinciderebbe con esso (pag. 151). Supponiamo per es. che sia $a > b$. Consideriamo le tangenti t, t' negli estremi di un asse ed un'altra tangente s della conica. Dal teorema di pag. 195 (a destra) e dalla definizione dei fuochi, si trae che il segmento intercetto sulla s dalle t, t' deve esser veduto da un fuoco, esistente sull'asse considerato, sotto angolo retto. Viceversa, se da un punto F dell'asse il segmento intercetto su s dalle t, t' è visto sotto angolo retto, per F passeranno due coppie di rette coniugate ortogonali, e cioè: i lati di quell'angolo e la coppia formata dall'asse e dalla sua perpendicolare in F. Il punto F sarà dunque un fuoco. Pertanto i fuochi esistenti sull'asse considerato, che per brevità di discorso chiameremo primo, saranno ivi staccati dal circolo avente per diametro il segmento intercetto sulla s dalle t, t'. In particolare, se la s tocca l'ellisse in un estremo dell'altro asse, che chiameremo secondo, il raggio del circolo suddetto sarà eguale alla lunghezza del primo semiasse, sicchè il circolo medesimo risulterà secante o esterno rispetto al primo asse, secondo che questo asse, che abbiamo assunto come primo, è AA' o BB'. Dunque:

Per un'ellisse esistono due fuochi (reali) sull'asse maggiore.

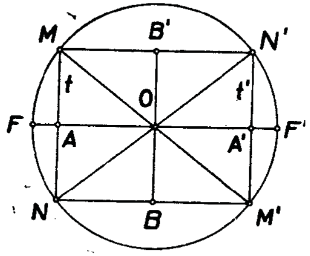
Quest'asse si chiama perciò *asse principale* o *focale.*

Detta c la semidistanza focale $OF = OF'$ (considerata in valore assoluto) dal triangolo rettangolo FOB' si rileva:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Passiamo ora all'iperbole e diciamo ancora a, b le lunghezze rispettive del semiasse trasverso e del semiasse non trasverso. È chiaro anzitutto che nell'iperbole i fuochi (reali) debbono rircercarsi sull'asse trasverso, perchè tutti i punti dell'asse non trasverso sono esterni alla conica.

Considerando le tangenti t, t' negli estremi A, A' dell'asse trasverso, ed una tangente s dell'iperbole, si prova, come nel caso dell'ellisse, che il segmento intercetto sulla s dalle t, t' è veduto da un fuoco sotto angolo retto, è viceversa un fuoco è caratterizzato da questa proprietà. In particolare, facendo coincidere la tangente s



con un asintoto, cioè con una diagonale MM' del rettangolo avente per mediane i due assi AA', BB', concludiamo che i fuochi sono le intersezioni dell'asse AA' col circolo di diametro MM'. Dunque:

Per un' iperbole esistono due fuochi (reali) sull'asse trasverso (asse principale o focale).

Dicendo ancora c la semidistanza focale, dal triangolo rettangolo MAO si rileva:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nel caso della parabola, considerando la tangente nel vertice, insieme alla retta all' infinito e ad un'altra tangente qualsiasi, ed applicando ancora il teorema di pag. 195 (a destra), perveniamo alla conclusione che il segmento infinito intercetto, sopra una tangente, dalla tangente nel vertice e dalla retta impropria, è visto da un fuoco sotto angolo retto; cioè che il punto ove una tangente incontra la tangente nel vertice è proiettato da un fuoco secondo una retta perpendicolare a quella

tangente; e viceversa un fuoco è caratterizzato da questa proprietà. Ne deriva che:

Per la parabola si ha un sol fuoco proprio (reale) appartenente all'asse, il qual fuoco si costruisce intersecando l'asse colla perpendicolare ad una tangente nel punto ove questa incontra la tangente nel vertice.

Se chiamiamo *podaria* di un punto rispetto ad una curva il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate dal punto alle tangenti della curva, potremo perciò dire che *la podaria del fuoco rispetto ad una parabola è la tangente nel vertice.*

Le polari dei fuochi vengon dette *direttrici.*

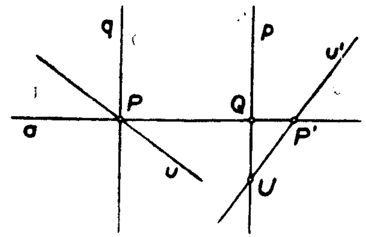
Nell'ellisse e nell' iperbole vi sono due direttrici perpendicolari all'asse focale, esterne rispetto alla curva e disposte simmetricamente rispetto al centro della conica, perchè la simmetria che sull'asse focale ha per centro il centro della conica, muta un fuoco nell'altro, e due punti che separino armonicamente gli estremi dell'asse focale (cioè due punti coniugati), in due punti analoghi.

Nella parabola c' è una sola direttrice, pure perpendicolare all'asse, ed il punto ove la direttrice incontra l'asse, essendo coniugato rispetto al fuoco, sarà il simmetrico del fuoco rispetto al vertice della parabola.

§ 50.

Involuzioni focali. Un'altra definizione dei fuochi.

Sia a un'asse di una conica k e P un punto generico di a, sicchè la polare p di P rispetto a k è perpendico-



lare ad a. Di ogni retta u uscente da P, e avente perciò il polo U su p, consideriamo la retta coniugata u', condotta da U perpendicolarmente ad u. Dico che, mentre u varia attorno a P, il punto P' d'intersezione della u' con a rimane fisso.

Si osservi all'uopo che la retta u' si può anche definire come la congiungente di U col punto improprio U'_∞ coniugato del punto improprio U_∞ di u nell'involuzione assoluta. E poichè, mentre u descrive il fascio P, U descrive la punteggiata proiettiva p, U_∞ descrive la punteggiata impropria, prospettiva al fascio P, ed U'_∞ descrive una punteggiata, sovrapposta a quest'ultima, e ad essa proiettiva, così la punteggiata descritta da U resulta proiettiva a quella descritta da U'_∞. La retta variabile u' può perciò definirsi come la congiungente di una coppia di punti variabili, omologhi nella proiettività tra le punteggiate descritte da U e U'_∞.

Volendo provare che il punto P' non varia al variare di u e di u', basterà dunque provare che la proiettività tra le punteggiate descritte da U, U'_∞ è una prospettività, cioè che il punto comune ai sostegni delle due punteggiate è unito. Effettivamente, quando U va all'infinito sul relativo sostegno p, la u viene a coincidere con a ed il punto U'_∞ va pertanto a cadere in U, che risulta perciò unito.

Resta così provato che il punto P' è fisso al variare di u attorno a P. E poichè, viceversa, partendo dalla retta u' del fascio P', la u si presenta come la retta coniugata e perpendicolare ad u', così P si trova di fronte a P' nella stessa condizione in cui P' era rispetto a P: la relazione fra P,P' è insomma reciproca o involutoria.

Ora proviamo che la corrispondenza che nasce sulla a fra le posizioni dei punti P,P' è proiettiva, e quindi (giacchè è involutoria) che è un'ordinaria involuzione. Da quanto precede si trae intanto che per costruire le infinite coppie P,P' sull'asse a, basta che ci limitiamo a considerare coppie di rette coniugate ortogonali u,u', che abbiano direzioni fisse U_∞, U'_∞. Poichè il fascio improprio descritto da u' non è che la proiezione da U'_∞ della punteggiata descritta dal polo del raggio u, variabile nel fascio improprio U_∞, così la corrispondenza fra $P \equiv ua$ e $P' \equiv u'a$ risulta proiettiva. Si conclude:

Le ∞^2 coppie di rette coniugate principali staccano sopra un asse della conica le ∞^1 coppie di un' involuzione, ogni coppia di tale involuzione essendo segata da ∞^1 di quelle coppie di rette.

L'involuzione I_a così ottenuta sull'asse a, si chiama l'*involuzione focale* relativa a quest'asse; e ciò perchè, quando a contenga fuochi (reali) della conica, questi son evidentemente doppi per la I_a. E viceversa, ogni punto doppio di I_a è fuoco per la conica.

Quando a non contenga fuochi (reali), si può definire sull'asse stesso una *coppia di fuochi imaginari*, complessi coniugati, mediante l'involuzione ellittica I_a (pag. 124).

Ritroviamo adesso facilmente che, se la conica è a centro ed ha pertanto due assi a,b, sopra uno solo di questi vi sono due fuochi reali. Ciò equivale a dire che *delle due involuzioni focali I_a, I_b, relative ai due assi, una è iperbolica e l'altra ellittica.*

E invero, se la I_a è iperbolica e ne sono F, F' i punti doppi, l'involuzione I_b si può segare sull'asse b mediante le infinite coppie di rette coniugate principali uscenti da F (o da F') ed è perciò ellittica.

Se invece la I_a è ellittica, poichè il centro O della conica è anche il centro dell'involuzione, il circolo avente per diametro il segmento compreso tra due punti coniugati, che si trovan da parti opposte di O, taglia l'asse b in due punti reali F,F', da ciascun dei quali l'involuzione I_a si proietta secondo un'involuzione di angoli retti (pag. 134). Ciò significa che F, F' son doppi per la I_b, che è dunque iperbolica.

§ 51.

Proprietà focali angolari.

Poichè le rette principali che escono da un punto del piano di una conica segano sull'asse focale due punti coniugati nell'involuzione di cui i due fuochi sono i punti doppi, si conclude che:

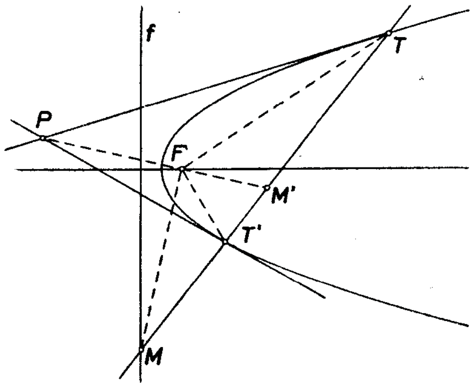
Le rette principali che escono da un punto del piano bisecano i raggi focali uscenti dal quel punto, ove per *raggi focali* intendiamo le rette che congiungono il punto dato ai fuochi.

In particolare si deduce che *gli angoli dei raggi focali uscenti da un punto della conica, sono bisecati dalla tangente e dalla normale in quel punto.*

Nell'ellisse i due fuochi F, F' si trovano da una medesima parte di ogni tangente, mentre nell' iperbole si trovano da parti opposte. Dicendo quindi P un punto di un'ellisse o di un' iperbole ed indicando con $F\widehat{P}F'$ l'angolo delle rette FP, $F'P$, considerato nel senso della Geometria elementare, potremo dire che *l'angolo* $F\widehat{P}F'$ *nell'ellisse è bisecato dalla normale in* P *e nell' iperbole dalla tangente in* P.

Nel caso della parabola, poichè uno dei fuochi è all' infinito sull'asse, *gli angoli formati dal raggio focale che esce da un punto* P *della parabola e dalla parallela per* P *all'asse, son bisecati dalla tangente e dalla normale in* P.

Sia ora F un fuoco di una conica k e TT' una corda della curva, P il polo della corda TT', cioè il punto

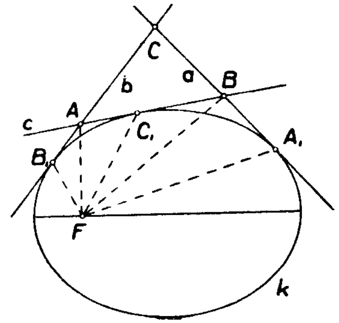


comune alle tangenti a k in T, T'. Il punto M, ove la TT' sega la direttrice f corrispondente al fuoco F, ha

per polare la retta PF e quindi, posto $M' \equiv PF.TT'$, il gruppo $MM'TT'$ risulterà armonico, e poichè le due rette coniugate PF, FM, uscenti dal fuoco, sono ortogonali, ne segue che esse bisecano gli angoli delle FT, FT' (pag. 57). Siccome inoltre il punto M è esterno alla conica, il punto M' sarà interno e quindi la PF bisecherà l'angolo $T\widehat{F}T'$, considerato nel senso della Geometria elementare. Si conclude che:

L'angolo sotto cui una corda di una conica è vista da un fuoco è bisecato dalla retta che congiunge il fuoco al polo della corda, e l'angolo supplementare dalla retta che congiunge il fuoco al punto ove la corda sega la corrispondente direttrice.

Ciò posto, consideriamo un trilatero circoscritto ad una conica, formato dalle tre tangenti a, b, c e sieno A, B, C i vertici del trilatero rispettivamente opposti ad a, b, c,



ed A_1, B_1, C_1 i relativi punti di contatto delle a, b, c. Dicendo F un fuoco della conica, in forza del teorema precedente, avremo:

$$A\widehat{F}C_1 = \frac{1}{2}\, B_1\widehat{F}C_1,$$

$$C_1\widehat{F}B = \frac{1}{2}\, C_1\widehat{F}A_1,$$

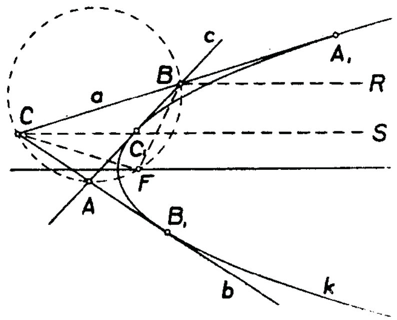
dalle quali, sommando, si trae:

$$A\widehat{F}B = \frac{1}{2} B_1\widehat{F}A_1 ;$$

e siccome variando c l'angolo $B_1\widehat{F}A_1$ non varia, si conclude che:

Le due punteggiate proiettive che sopra due tangenti fisse di una conica vengon segate da una tangente variabile, son proiettate da un fuoco secondo due fasci direttamente congruenti, e l'angolo costante formato da due raggi corrispondenti, è la metà di uno degli angoli sotto cui si vedono dal fuoco i punti di contatto delle tangenti fisse.

Se la conica k è una parabola, dai vertici B, C del trilatero circoscritto $abc \equiv ABC$, conduciamo le parallele BR, CS all'asse.



Tenendo presente che le rette principali uscenti da B (o da C) bisecano gli angoli $F\widehat{B}R$ (o rispettivamente $F\widehat{C}S$) e che d'altronde esse bisecano pure gli angoli delle due tangenti a k da B (o da C) (pag. 57), avremo:

$$A\widehat{B}F = R\widehat{B}A_1,$$
$$A\widehat{C}F = S\widehat{C}A_1,$$

e, siccome gli angoli $R\widehat{B}A_1$, $S\widehat{C}A_1$ sono uguali (come corrispondenti), si deduce:

$$A\widehat{B}F = A\widehat{C}F,$$

e quindi i quattro punti $ABCF$ appartengono ad un circolo. Dunque:

Il circolo circoscritto al trilatero formato con tre tangenti di una parabola passa pel fuoco.

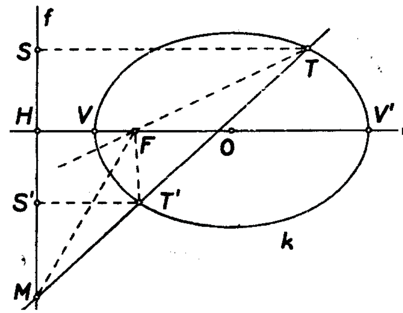
Da questo teorema si trae il modo di costruire il fuoco di una parabola individuata da quattro tangenti.

§ 52.

Proprietà focali segmentarie.

Sia F un fuoco di una conica k, f la corrispondente direttrice; T, T' sieno due punti della curva; ST, $S'T'$ le rispettive distanze dalla direttrice f; FT, FT' i raggi focali che vanno ai punti T, T'.

Poichè la retta FM (ove $M \equiv TT'.f$) biseca uno degli angoli $T'\widehat{F}T$ (§ prec.), da un noto teorema di Geometria elementare si rileva:



$$FT : FT' = MT : MT'.$$

Inoltre dai triangoli simili MST, $MS'T'$ si ricava:

$$MT : MT' = TS : T'S',$$

dunque:

$$TF : TS = T'F : T'S',$$

il che si può esprimere dicendo che il rapporto $\frac{TF}{TS}$ è costante al variare di T sulla curva. In particolare, se T va a coincidere con un vertice V proprio, situato sull'asse focale, il rapporto diverrà $\frac{VF}{VH}$, ove H è il punto in cui f vien tagliata dall'asse focale. E siccome la coppia HF separa armonicamente gli estremi dell'asse focale, se il centro O della conica è proprio, avremo:

$$OV^2 = OF.\,OH,$$

cioè, indicando con a la lunghezza del semiasse focale e con c la semidistanza focale:

$$OH = \frac{a^2}{c}$$

Ma:

$$\frac{VF}{VH} = \frac{OF - OV}{OH - OV} = \frac{c - a}{\frac{a^2}{c} - a} = -\frac{c}{a};$$

sicchè, *prescindendo dal segno*, si può dire che il rapporto costante, di cui sopra abbiamo parlato, viene uguale a $\frac{c}{a}$. Questo rapporto si chiama l'*eccentricità* della conica e si denota generalmente colla lettera e. Poichè nell'ellisse è $c < a$, risulterà $e < 1$; mentre per l'iperbole, essendo $c > a$, risulterà $e > 1$. Nel caso della parabola H,F sono simmetrici rispetto a V, quindi il rapporto $\frac{VF}{VH}$ è uguale ad 1. *I punti della parabola hanno pertanto eguali distanze dal fuoco e dalla direttrice.*

Nel circolo è $c = 0$, e quindi l'eccentricità è nulla (da ciò appunto il nome di eccentricità, in quanto differenzia le altre coniche dal circolo).

Riassumendo, enunceremo il teorema seguente:

In una conica il rapporto tra le distanze di un punto da un fuoco e dalla corrispondente direttrice, è costante ed è eguale all'eccentricità e della conica. Per l'ellisse, l'iperbole, la parabola, il cerchio, si ha rispettivamente:

$$e < 1\,,\; e > 1\,,\; e = 1\,,\; e = 0.$$

Sia ora k una conica a centro, di fuochi F,F', di eccentricità e, e sieno TS, TS' le distanze dal punto T dalle direttrici f,f' relative ai fuochi F, F'. Avremo:

$$e = \frac{TF}{TS} = \frac{TF'}{TS'},$$

e quindi componendo:

$$e = \frac{TF \pm TF'}{TS \pm TS'},$$

ove si prenderà il segno $+$ nel caso dell'ellisse, il segno $-$ nel caso dell'iperbole. Ma, se i segmenti si considerano in valore assoluto, l'espressione $TS \pm TS'$ è uguale in ambedue i casi alla distanza tra le direttrici, e quindi (come abbiamo notato precedentemente) a $\frac{2a^2}{c}$ $(=2\,OH)$. Dunque:

$$TF \pm TF' = \frac{2a^2 e}{c} = 2a.$$

Possiamo perciò enunciare:

In un'ellisse o in un'iperbole è costante la somma o rispettivamente la differenza dei raggi focali che escono da un punto della curva, ed è uguale alla lunghezza dell'asse focale.

Osservazione. Le proprieta segmentarie precedenti si posson invertire.

Questa inversione potrebbe ottenersi con ragionamenti geometrici, ma è più semplice ricorrere alle equazioni delle coniche sotto forma ridotta (pag. 206).

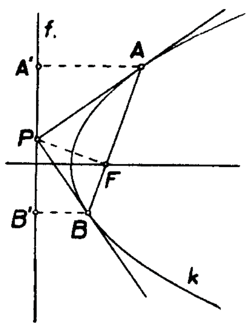
Così, scegliendo opportunamente gli assi coordinati, potrà dimostrarsi con facilità che *il luogo dei punti del piano le cui distanze da un punto F e da una retta f hanno un rapporto sostante e, è una conica (ellisse per $e < 1$, iperbole per $e > 1$, parabola per $e = 1$).*

Similmente possono invertirsi le proprietà segmentarie relative alla somma o differenza dei raggi focali. Lasciamo ciò al lettore per esercizio.

Termineremo l'esposizione delle proprietà focali delle coniche, dimostrando che:

La direttrice di una parabola è il luogo dei vertici degli angoli retti circoscritti alla curva.

Sia $A\widehat{P}B$ un angolo circoscritto alla parabola k ed avente il vertice sulla direttrice f. Sieno A,B i punti



di contatto dei lati e A', B' i piedi delle perpendicolari abbassate sulla direttrice f, dai punti A,B. La retta AB, polare del punto P, passerà pel fuoco F, ed inoltre le due rette coniugate AB, PF saranno perpendicolari. Ma $AF = AA'$, $BF = BB'$; onde il triangolo rettangolo AFP è uguale al triangolo $AA'P$, ed il triangolo rettangolo BFP è uguale a $BB'P$. Ne deriva che l'angolo $A\widehat{P}B$ è la metà di un angolo piatto, cioè ch'esso è retto.

Supponiamo ora, viceversa, che sia $C\widehat{Q}D$ un angolo retto circoscritto alla parabola: si tratta di provare che il vertice Q appartiene ad f. Invero, nell'ipotesi contraria, dal punto Q' ove la CQ taglia la direttrice f, uscirebbe un'altra tangente perpendicolare a CQ, e quindi avremmo due tangenti proprie di una parabola parallele tra loro, il che è assurdo.

CAPITOLO TREDICESIMO

Proiettività tra forme elementari.

§ 53.

Forme elementari.
Gruppi armonici sopra una forma elementare.
Proiettività.

Designeremo complessivamente colla denominazione di *forme elementari*, le forme fondamentali di 1ª specie e le figure che già abbiamo ottenuto mediante la generazione con forme fondamentali di 1ª specie proiettive, cioè le coniche ed i coni luogo ed inviluppo e le schiere rigate. Le forme fondamentali di 1ª specie si chiameranno pure *forme elementari del* 1° *ordine* e le altre *forme elementari del* 2° *ordine*.

La denominazione comune di forme elementari, è resa opportuna dalle analogie che passano, dal punto di vista delle corrispondenze proiettive, tra le forme del 1° e quelle del 2° ordine. Queste analogie saranno appunto poste in rilievo in questo § e nei successivi.

Anzitutto vediamo come si trasporta il concetto di gruppo armonico, alle forme elementari di 2° ordine.

Se quattro punti A,B,C,D di una conica luogo k, son proiettati da un punto S di k secondo un gruppo armonico di raggi, lo stesso accadrà allorquando la proiezione si fa da ogni altro punto di k (pag. 147), e quindi si può riguardare la proprietà come appartenente intrinsecamente al gruppo $ABCD$, in quanto lo

si pensa entro alla forma elementare k. Allorquando si considera la cosa da questo punto di vista, si dice che i quattro punti A,B,C,D formano, nell'ordine scritto, un *gruppo armonico entro alla conica luogo k*.

Trasportando questa definizione colla legge di dualità nel piano e nello spazio, si ottengono le definizioni di *gruppo armonico di quattro tangenti di una conica inviluppo* e di *gruppo armonico di quattro piani tangenti di un cono quadrico inviluppo*.

Quest'ultima definizione, trasportata poi colla legge di dualità nella stella, dà luogo al concetto di *gruppo armonico di quattro generatrici di un cono quadrico luogo*.

Diremo infine che *quattro generatrici di una schiera rigata formano un gruppo armonico*, quando vengono segate da una generatrice della schiera incidente (e quindi da ogni altra, pag. 138), secondo un gruppo armonico di punti. E si noti che, se ciò accade, quelle quattro generatrici sono anche proiettate da ogni retta della schiera incidente secondo un gruppo armonico di piani (pagina 157); cosicchè la definizione precedente si può anche presentare sotto la forma duale.

Ciò posto, diremo che *due forme elementari qualunque son riferite proiettivamente*, o che tra esse intercede una *proiettività*, allorquando i loro elementi sono in corrispondenza biunivoca tale che ad ogni gruppo armonico dell'una corrisponda un gruppo armonico dell'altra. Segue dalla definizione che: *Due forme proiettive ad una terza lo sono tra loro.*

Una forma del 2° ordine ed una del 1° ordine si dicono *prospettive* quando son riferite proiettivamente in modo che gli elementi omologhi si appartengano; e due forme del 2° ordine si dicono *prospettive* allorquando son prospettive ad una medesima forma del 1° ordine.

La teoria delle proiettività tra forme fondamentali si trasporta ormai senz'altro alle forme elementari:

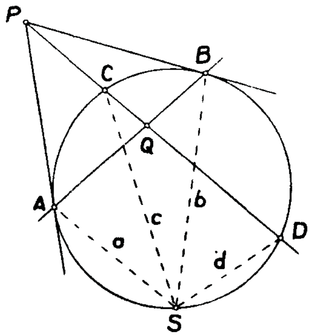
Sopra una forma elementare una proiettività dotata di tre elementi uniti è l' identità.

Esiste una ed una sola proiettività tra due forme elementari, la quale faccia passare da tre elementi assegnati dall'una forma a tre elementi assegnati dell'altra, e questa proiettività si costruisce con un numero finito di proiezioni e di sezioni.

Prima di terminare questo § faremo qualche esempio sulle costruzioni dei gruppi armonici e delle corrispondenze proiettive tra forme elementari.

Se sopra una conica k son dati tre punti A,B,C, il quarto armonico dopo A,B,C si può costruire, in base alla definizione, proiettando A,B, da un punto S di k, mediante i raggi a,b,c ed intersecando la conica in D col raggio d, quarto armonico dopo a,b,c.

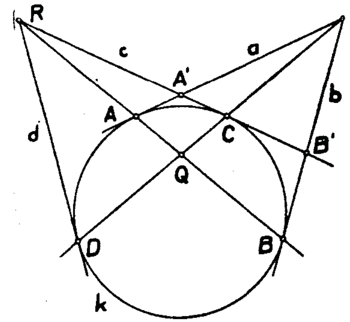
Ma è utile osservare che il punto D si può ottenere



anche intersecando k, fuori di C, colla retta CP, congiungente C col polo P della retta AB. Invero, se poniamo $Q \equiv PC.AB$, la proiezione del gruppo $ABCD$, fatta da A, è il gruppo di raggi $A(PQCD)$, che è armonico, per una proprietà caratteristica della polare di un punto rispetto ad una conica (pag. 187).

Da quest'ultima costruzione si deduce che *l'insieme dei punti e l'insieme delle tangenti di una conica k costituiscono due forme elementari proiettive, allorquando si assuma come retta omologa di un punto della conica, la relativa tangente.*

Poichè la corrispondenza tra le due forme è evidentemente biunivoca, basterà provare che « se quattro « punti A,B,C,D della conica k formano un gruppo ar« monico, le quattro tangenti a,b,c,d in quei punti for« mano pure un gruppo armonico, e viceversa (dual-



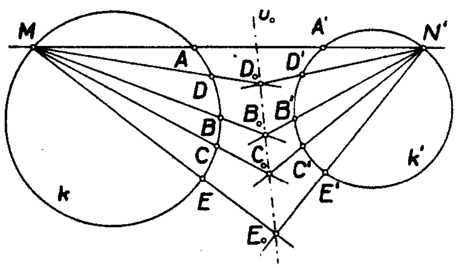
« mente) ». Invero, le due tangenti c,d si tagliano in un punto R della retta AB, che è il polo della retta CD; sicchè posto $Q \equiv CD.AB$, il gruppo $ABQR$ risulta armonico, e quindi risulta armonico il gruppo $A'B'CR$ (ove $A' \equiv ca$; $B' \equiv bc$) proiezione del gruppo precedente dal punto ab. Ciò significa che le quattro tangenti a,b,c,d segano sopra una di esse, c, un gruppo armonico di punti. Esse costituiscono quindi un gruppo armonico entro alla conica inviluppo k; c. d. d.

In modo duale si possono dimostrare le analoghe proposizioni per le altre forme elementari.

Vediamo ora come si possa costruire la proiettività che, tra due coniche k,k', distinte e complanari, è individuata da tre coppie AA', BB', CC' di punti omologhi.

Diciamo M,N' i punti (distinti o coincidenti rispettivamente con A,A') in cui la retta AA', sega ulteriormente le due coniche. I fasci di raggi che proiettano da M,N' le due punteggiate proiettive situate su k,k', risultano prospettivi (perchè il raggio comune $MA \equiv N'A'$

è unito) e quindi i punti $MB.N'B' \equiv B_0$, $MC.N'C' \equiv C_0$,... apparterranno ad una retta u_0 (asse di prospettiva dei due fasci).



Dato il punto D di k, per costruire il suo omologo D' in k', basterà proiettare D da M nel punto D_0 di u_0 e proiettare D_0, sopra k', in D' dal punto N'.

§ 54.

Forme elementari prospettive.

Sieno k, k' due coniche distinte di un piano, che abbiano a comune il punto S. Possiamo riferire prospettivamente le due coniche, chiamando omologhi due loro punti quando sono allineati con S.

L'omologo del punto S pensato sulla conica k (o k'), è l'ulteriore intersezione di k'(o k) colla tangente in S alla conica k(o k'): sicchè *il punto S sarà unito nella proiettività tra k, k', soltanto se è di contatto per le due coniche.*

Poichè, com' è ben chiaro, ogni punto comune alle due coniche k,k', fuori di S, è unito nella proiettività considerata, se S è di contatto, fuori di S ci saranno al più due punti uniti (pag. 151). Se invece le due coniche non si toccano in S, esse hanno almeno un altro punto

comune (*), ed in tal caso non possono avere fuori di S più di tre punti comuni, perchè altrimenti (pag. 150) coinciderebbero. Dunque:

Due coniche DISTINTE, *prospettive rispetto al centro S, hanno almeno un punto unito, distinto o coincidente con S, ed al più tre punti uniti (incluso eventualmente S).*

Ne deriva che:

Una proiettività tra due coniche luogo distinte, non può avere più di tre punti uniti.

Invero, se la proiettività tra le coniche k,k' avesse i 4 punti uniti A,B,C,D, le due coniche sarebbero complanari e la proiettività tra esse coinciderebbe colla prospettività di centro A (perchè avrebbe comune con questa le tre coppie BB, CC, DD). Ma allora dal teorema precedente si deduce che le due coniche dovrebbero toccarsi in A e quindi coinciderebbero (e la proiettività tra esse, avendo 4 elementi uniti, pel teorema fondamentale, si ridurrebbe all' identità).

Ci dispensiamo dall'enunciare i teoremi duali nel piano e nello spazio.

Mostriamo piuttosto come dall'ultima proposizione stabilita si possa trarre la condizione di prospettività

(*) Qui ammettiamo come evidente la proposizione che segue: *Se due coniche k, k' di un piano passano per un punto S, senza toccarsi, esse hanno almeno un altro punto comune.* Ciò si verifica intuitivamente pensando ad un punto P' che si muova sulla k' a partire da una certa posizione P_0'. Quando P' traversa (senza toccare) la conica k in S, esso passa dalla regione dei punti esterni (o interni) a k alla regione dei punti interni (o esterni); e quindi, per ritornare alla posizione iniziale P'_0, deve passare dalla regione dei punti interni (o esterni) a quella dei punti esterni (o interni): cioè deve traversare k in un altro punto.

Questo fatto, che analiticamente corrisponde all'esistenza di almeno una radice reale di un'equazione di 3° grado a coefficienti reali, si può dimostrare geometricamente in modo rigoroso, facendo capo al postulato della continuità; ma su ciò non intendiamo trattenerci. (Ved. p. e. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria proiettiva*, Bologna, Zanichelli, 1920, 4ª edizione; pag. 313).

tra una conica ed un cono di 2° ordine riferiti proiettivamente.

Se la conica k ed il cono quadrico K son riferiti proiettivamente in modo che quattro punti A,B,C,D di k, appartengano alle generatrici corrispondenti di K, il piano di k taglierà K secondo una conica k', riferita prospettivamente a K e quindi proiettivamente a k; e nella proiettività tra k,k' i 4 punti A,B,C,D saranno uniti. Ne segue che le k,k' coincidono e che la proiettività tra esse è identica. Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una conica ed un cono di 2° ordine, riferiti proiettivamente, sieno prospettivi, è che quattro coppie di elementi omologhi si appartengano.

Dimostriamo ora che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva di 2° ordine ed un fascio di raggi proiettivi, sieno prospettivi, è che quattro coppie di elementi omologhi si appartengano.

La necessità della condizione è evidente. Per provare la sufficienza, diciamo k la data curva ed S il centro del dato fascio, e supponiamo che quattro punti A,B,C,D di k, appartengano ai raggi omologhi a,b,c,d del fascio S. È chiaro anzitutto che la conica k ed il fascio S son complanari (chè altrimenti la conica k avrebbe quattro punti allineati A,B,C,D). Il fascio dei raggi che proiettano i punti di k da un punto S' della curva, è proiettivo a k e quindi è proiettivo al fascio S; sicchè i due fasci S,S' colle intersezioni dei raggi omologhi generano una conica, la quale coincide con k, avendo comune con questa i cinque punti A,B,C,D,S'. Dunque S appartiene a k ed ogni raggio del fascio S appartiene al punto che gli corrisponde in k.

§ 55.

Esempi di generazione di nuovi enti geometrici mediante forme elementari proiettive: cubica gobba, cubica piana con punto doppio.

Sieno u,u',u'' tre fasci di piani, proiettivi a due a due (*) cogli assi sghembi. Dato un piano α del fascio u, sieno α',α'' i piani che gli corrispondono nei fasci u',u''. Variando α, il punto $P \equiv \alpha\alpha'\alpha''$ varia assumendo nello spazio una semplice infinità di posizioni, e descrive una curva (nel senso intuitivo della parola), la quale, come vedremo tosto, non sta tutta in un piano. Anzi, quando i tre assi hanno una posizione generica, secondo verrà sotto specificato, di quella curva non fanno parte nè rette nè coniche. Essa chiamasi una *cubica gobba* (*irriducibile*) (**).

Se i tre assi non sono in posizione generica, può darsi che il luogo l dei punti comuni alle terne di piani omologhi, sia una linea spezzata in una conica ed in una retta incidente, oppure una linea spezzata in tre rette di cui una appoggiata alle altre due (sghembe fra loro), o infine che il luogo sia addirittura una superficie di 2° ordine. Il primo dei fatti accennati si verifica quando i tre fasci u, u', u'' son prospettivi ad una medesima conica k. In tal caso il luogo l consta della conica k e di una retta r, appoggiata ad u, u', u'', k. Il secondo dei fatti eccezionali si presenta quando i tre fasci sono prospettivi ad una medesima retta r: il luogo l

(*) Intendiamo con ciò che sieno poste due proiettività fra due di quei fasci ed il terzo, così che anche i primi due fasci risultano riferiti proiettivamente tra loro, essendo omologhi due piani corrispondenti al medesimo piano del terzo.

(**) Tale generazione della cubica gobba fu considerata da Chasles (1837).

si scinde nella r e nelle due rette (reali o immaginarie) della schiera rigata incidente ad u, u', u'', che s'appoggiano ad r. Il terzo fatto eccezionale, che può considerarsi come caso particolare di ciascuno dei due precedenti, si presenta quando le proiettività tra i fasci u, u', u'' son poste mediante la schiera rigata incidente ad u, u', u''.

Nel caso generale è facile vedere che un piano dello spazio non può contenere infiniti punti della curva. Possiamo anzi dimostrare che *un piano qualunque nello spazio sega la cubica gobba al più in tre punti ed almeno in uno.*

Invero, se il piano segante non appartiene ad alcuno dei fasci generatori, avremo sopra esso, come sezioni dei tre fasci di piani u, u', u'', tre fasci di raggi U, U', U'', a due a due proiettivi. I fasci U, U' generano una conica k (irriducibile o no, pag. 183) passante per U, U' ed i fasci U', U'' un'altra conica k' (irriducibile o no) passante per U', U''. Le k, k', se pure sono spezzate ambedue in coppie di rette, come può accadere per particolari posizioni del piano segante, non hanno alcuna retta comune. Sopra una tal retta, infatti, concorrerebbero le terne di piani omologhi dei fasci proiettivi u,u',u'', oppure si tratterebbe di una retta comune a piani omologhi dei tre fasci. Ipotesi ambedue da rigettarsi, perchè conducono ai fatti eccezionali esclusi. Le due coniche k,k', avendo il punto U' comune, si segano ulteriormente in un punto almeno (che può anche coincidere con U', il quale è allora punto di contatto delle k,k') ed al più in tre punti (pag. 232). Queste ulteriori intersezioni sono evidentemente i soli punti comuni al piano e alla cubica. Se il piano segante passa per uno dei tre assi, per es. per u, la genesi stessa della cubica ci dice che questa avrà su quel piano un sol punto esterno ad u. E sull'asse u potranno aversi al più due punti, che saranno gli eventuali punti uniti della proiettività tra le due punteggiate segate su u dai fasci proiettivi u',u''. Proiettività la quale non può essere

identica, perchè se no si cadrebbe in uno dei fatti eccezionali esclusi (*). Dunque:

Gli assi u, u', u'' contengono al più due punti della cubica gobba.

Se introducessimo gli elementi imaginarî, i teoremi precedenti riceverebbero una maggiore determinazione. Non ci arresteremo su ciò, perchè con questi cenni intendiamo soltanto di addurre qualche esempio sulla possibilità di generare, mediante corrispondenze proiettive, enti di natura più elevata di quelli che sono stati finora oggetto del nostro studio.

Una volta introdotti gli elementi imaginarî, si vede che gli assi u,u',u'' son *corde della cubica*, nel senso che ciascuno di essi contiene due punti (reali e distinti o reali e coincidenti o imaginarî coniugati della curva). Noi, volendo, per brevità, evitare l'introduzione degli imaginarî, chiameremo *corda* di una cubica gobba l ogni retta s tale che un piano generico per s incontri l, fuori di s, in un sol punto (u,u',u'' risultano appunto corde della cubica, anche secondo questa definizione). E precisamente: diremo che s è una *corda reale* se congiunge due punti (reali) di l, che è una *corda ideale* (corda a punti d'appoggio imaginarî) se non contiene punti (reali) di l, che è una *tangente* della cubica se ne contiene un sol punto. Si osserverà inoltre che *non può esistere alcuna retta trisecante di una cubica gobba* (*irriducibile*), perchè nell'ipotesi contraria, il piano congiungente quella trisecante con un punto generico della cubica, segherebbe la curva in quattro punti.

Una cubica gobba si può anche ottenere come ulteriore intersezione di due quadriche rigate distinte che abbiano una generatrice comune; e viceversa.

Difatti i due fasci proiettivi u,u' generano una schiera rigata V_1 (di cui le u,u' son direttrici) ed i due fasci u',u'' generano una schiera rigata V_2 (di cui le u',u''

(*) E precisamente in un caso particolare del secondo, e cioè quello in cui la retta r coincide con u.

son direttrici). Diciamo Q_1 la quadrica su cui è tracciata V_1 e Q_2 la quadrica su cui è tracciata V_2. Le due quadriche son distinte, perchè se no si cadrebbe nel terzo dei fatti eccezionali esclusi. È chiaro che alle due quadriche appartiene la cubica gobba l generata dai fasci u, u', u''. Ma si vede di più che l costituisce *tutta* l'intersezione delle due quadriche, fuori della retta u', ad esse comune. Infatti, se un punto P appartiene a Q_1, Q_2, senza stare su u', i tre piani Pu, Pu', Pu'' risultano omologhi nelle proiettività fra i tre fasci u, u', u'', e quindi P appartiene ad l.

Viceversa, se due quadriche rigate distinte Q_1, Q_2 hanno una generatrice u' comune, dicendo u un'altra generatrice di Q_1, appartenente alla stessa schiera U_1 che contiene u', ed u'' un'altra generatrice di Q_2, appartenente alla stessa schiera U_2 di u', i fasci che proiettano da u, u' le generatrici della schiera V_1, incidente ad U_1, sono proiettivi fra loro; e così pure son proiettivi i fasci che proiettano da u', u'' le generatrici della schiera V_2, incidente a U_2. Da ciò si trae che la curva comune alle Q_1, Q_2, fuori di u', è il luogo del punto d'intersezione dei piani omologhi di tre fasci proiettivi, cioè una cubica gobba l (eventualmente degenere). Quando le due quadriche si toccassero lungo la generatrice u', la cubica l si scinderebbe in una conica e nella retta stessa u'.

Aggiungiamo qualche altra proprietà della cubica gobba l. Ogni retta v della schiera V_1 tracciata su Q_1, (e similmente dicasi di una retta appartenente alla schiera V_2 tracciata su Q_2) incontra la cubica l, che supponiamo irriducibile, in un sol punto, che è quello ove il piano $u'v$ sega l fuori di u'. Le rette delle schiere V_1, V_2 si dicono perciò *unisecanti* rispetto alla cubica (*).

(*) Si badi che altra cosa è un'unisecante, altra cosa una tangente. Un piano che congiunga un'unisecante con un punto generico della cubica, incontra questa in un altro punto; mentre un piano che congiunga un punto generico della cubica con una tangente, non incontra altrove la curva.

Come si comportano invece, rispetto ad l, le rette delle schiere U_1, U_2? Se u_0, u''_0 son due rette, la prima di U_1 e la seconda di U_2, la cubica l, per quanto precede, può generarsi anche coi fasci proiettivi u_0, u', u''_0, ove i fasci u_0, u' sien riferiti mediante la proiettività che genera la schiera V_2 ed i fasci u', u''_0 mediante la proiettività che genera V_1. Ciò prova che *tutte le rette della schiera U_1 (o U_2) son corde della cubica gobba l, e, proiettando un punto variabile su l, da u' e da una retta qualsiasi di U_1 (o di U_2), si ottengono due fasci proiettivi di piani*. E da questo segue pure che, proiettando un punto P, variabile su l, da una retta di U_1 e da una di U_2, si ottengono due fasci proiettivi a quello che viene descritto dal piano Pu', e quindi proiettivi fra di loro.

Consideriamo in particolare le generatrici u_1, u_2 di U_1, U_2, che escono da un punto O di l, e sia ancora P un punto variabile sulla cubica. I piani Pu_1, Pu_2 si corrispondono nella proiettività tra i fasci u_1, u_2, sicchè la loro intersezione OP, al variare di P su l, descrive un cono quadrico K (pag. 144), che è irriducibile, se no la cubica l sarebbe essa pure riducibile. Dunque:

Da un punto qualunque di una cubica gobba irriducibile questa si proietta in un cono quadrico irriducibile.

Ciò posto, se consideriamo due corde reali (in particolare anche una corda e una tangente) OA, OB della cubica l, uscenti da O e appoggiate altrove ad l nei punti A, B, la generatrice OP variabile su K, e quindi il punto P variabile su l, vengon proiettati da quelle due corde secondo due fasci proiettivi. Similmente se BC è un'altra corda appoggiata ad l nei punti B, C, i fasci di assi BO, BC, che proiettano il punto P variabile su l, son essi pure proiettivi; onde risultano proiettivi i fasci che proiettano P da OA, BC. Si conclude che:

Un punto variabile sopra una cubica gobba vien proiettato da due corde qualunque della curva secondo due fasci proiettivi **(CHASLES, 1857).**

In verità noi abbiamo dimostrato questa proposi-

zione soltanto per le corde reali. Essa può estendersi anche alle corde ideali; ma su ciò non insistiamo.

Dalla proprietà dimostrata segue senz'altro che *una cubica gobba può generarsi mediante tre fasci proiettivi di piani, prendendo come assi di questi tre corde qualunque della curva.* Pertanto le corde u, u', u'', dalle quali siamo partiti per definire la cubica gobba, non sono corde privilegiate della curva: tre corde qualunque della medesima posson fare l'ufficio di quelle.

Sieno ora α, β i coni che proiettano la cubica l da due suoi punti A, B ed a, b due generatrici di questi due coni, distinte dalla generatrice $c \equiv AB$ ad essi comune. La cubica l può generarsi mediante i tre fasci proiettivi a, b, c, ove si chiamino omologhi due piani dei fasci a, c (o b, c) quando proiettano una stessa generatrice del cono α (o risp. β). Ne deriva che, fuori di c, i coni α, β hanno in comune soltanto la cubica l. Infatti, se un punto P sta su α, β, senza stare su c, poichè per esso passa una generatrice AP di α e una generatrice BP di β, P risulta comune a tre piani omologhi dei fasci a, b, c, e quindi appartiene ad l. Si conclude che:

Una cubica gobba può considerarsi come intersezione dei due coni quadrici che la proiettano da due suoi punti, fuori della generatrice, comune ai due coni, che congiunge i centri di proiezione.

Viceversa: *l' intersezione ulteriore di due coni quadrici irriducibili α, β, di vertici A, B, aventi la generatrice AB comune, ma non tangenti lungo tale generatrice, è una cubica gobba irriducibile passante per A, B.* Tale ulteriore intersezione può infatti generarsi mediante tre fasci proiettivi a, b, c, ove $c \equiv AB$ ed a, b son due generatrici di α, β diverse da c. La cubica così generata è irriducibile, perchè, se fosse spezzata, dato che i due coni non si toccano lungo c, essa dovrebbe contenere come parte almeno una retta, la quale sarebbe proiettata da A, B secondo due fasci di raggi appartenenti ai coni α, β. I due coni dati non sarebbero perciò irriducibili.

È facile ora vedere che *in ogni punto P la cubica gobba irriducibile l possiede una sola retta tangente.* Infatti, proiettando l da due suoi punti A, B, i piani tangenti lungo le generatrici AP, BP, ai coni quadrici α, β, che così s'ottengono, si tagliano secondo una retta t, che incontra i coni stessi, e perciò la curva l, nel solo punto P. Un piano generico passante per t taglia i coni α, β secondo due coniche irriducibili k, k' tangenti in P e incontrantisi nella traccia della retta AB su quel piano. Onde le k, k' s' incontrano ulteriormente in un punto solo, cioè quel piano sega l, fuori di t, in un sol punto. Vuol dire che t è tangente ad l. Ed è manifestamente l'unica tangente passante per P, perchè una tangente della cubica in P è pur tangente al cono α ed al cono β e quindi non può che coincidere colla intersezione dei piani tangenti a questi coni lungo le generatrici AP, BP.

Si verificherà per esercizio che la tangente t è la posizione limite d'una corda della cubica congiungente P con un altro punto O della curva, che si approssimi indefinitamente a P, muovendosi lungo l.

Consideriamo ora il cono π che proietta l da P, cono di cui fa parte, come generatrice, la tangente t. Fra i piani passanti per t ce n' è uno solo che non sega la cubica fuori di t, ed è il piano tangente al cono π lungo la generatrice t. Un tal piano dicesi *piano osculatore* alla cubica in P. Si verificherà per esercizio ch'esso è la posizione limite d'un piano congiungente t con un punto O della cubica, che, muovendosi su essa, s'approssimi indefinitamente a P. Dunque *in ogni punto di una cubica gobba vi è un sol piano osculatore.*

Fissati un'altra volta due punti A, B della cubica l e due corde a, b uscenti da essi, i fasci di piani proiettivi, che da a, b proiettano un punto P mobile su l, colle intersezioni dei piani omologhi, generano una schiera rigata, cioè una quadrica passante per l. Tale quadrica riducesi ad un cono quadrico di vertice O, quando le a, b concorrano in un medesimo punto O di l. Viceversa, per ogni quadrica rigata o cono quadrico passante per l, c' è una sola generatrice (di una determinata schiera, se trattasi di una quadrica) passante per A ed una per B. Dunque le quadriche rigate passanti per l sono in corrispondenza biunivoca (continua) colle coppie di corde della cubica uscenti da A,B. Si può pertanto enunciare:

Per una cubica gobba passano ∞^2 quadriche rigate (tra cui sonvi ∞^1 coni quadrici); per una cubica gobba ed una sua corda passano ∞^1 quadriche rigate.

Daremo ora *un altro esempio di una figura generata da forme elementari proiettive.*

Fissati in un piano un fascio di raggi S ed un inviluppo di rette di 2ª classe k, riferiti proiettivamente, il luogo del punto comune a due raggi omologhi di S e di k, è una curva γ, la quale taglia ogni retta u del suo piano al più in tre punti ed almeno in uno. Invero, la punteggiata segata su u dal fascio S, essendo proiettiva all' inviluppo k, è pure proiettiva alla punteggiata segata dalle rette di k sopra una retta u' dell' inviluppo stesso; e le due punteggiate u,u' generano un inviluppo, il quale, avendo già una retta comune coll' inviluppo k, ha almeno con questo un'altra retta comune ed al più tre (cfr. colla nota a piè della pag. 232). Ciò significa che vi sono al più tre punti di u ed almeno uno, che appartengono ai raggi corrispondenti di k, cioè che la u contiene al più tre punti ed almeno uno, della curva γ.

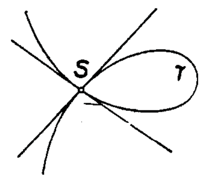
Potrebbe pure avvenire che la retta u fosse tutta costituita da punti di γ, ma ciò accadrebbe soltanto per un particolare riferimento delle forme S, k; in tal caso la curva γ sarebbe costituita dalla retta u e da una conica.

Nel caso generale si dice che la curva γ è una *cubica piana razionale.*

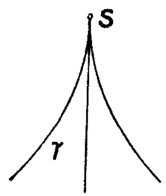
Se S è esterno all' inviluppo k, le due tangenti di k che escono da S incontrano i raggi omologhi nel punto S stesso, sicchè questo punto appartiene a γ. Anzi, siccome mentre un raggio varia con continuità descrivendo il fascio S, il punto comune a questo raggio mobile ed al raggio che gli corrisponde in k, *passa due volte*

per S, si dice che S è ***un punto doppio*** o ***nodo*** per la curva γ.

Nelle vicinanze del punto S l'aspetto della curva è quello rappresentato nella figura qui accanto. È facile riconoscere che le *tangenti* alla curva γ nel punto S, cioè le posizioni limiti di rette che passano per S e per un altro punto della curva che si approssimi indefinitamente ad S, lungo uno dei due rami della curva incrociantisi in S, sono le rette dell' inviluppo uscenti da S. Invero, queste rette non incontrano la curva fuori di S, mentre un'altra retta uscente da S e diversa delle precedenti, incontra γ in un punto ulteriore.



Se s' immagina che S si avvicini indefinitivamente ad un punto della conica aderente all' inviluppo k, i due rami uscenti da S tendono a divenire tangenti, ed al limite la curva viene ad avere una *cuspide* in quel punto della conica. L'aspetto della curva, nelle vicinanze di S, è quello disegnato nella figura.



Se infine S è interno a k, da esso non escono rami (reali) della curva; tuttavia si dice ancora che per la γ il punto S è *un punto doppio*, ma si aggiunge l'attributo « *isolato* ».

In quest'esempio ci siamo limitati a pochi cenni, usando anzi largamente dell' intuizione per quel che concerne l'esame del punto doppio S.

Il lettore potrà con profitto cercare l'equazione della curva γ in coordinate cartesiane: troverà un'equazione di 3º grado, sulla quale potrà studiare facilmente le proprietà geometriche più elementari della curva stessa.

Lasciamo pure al lettore le considerazioni duali, tanto per quel che concerne la cubica gobba, quanto la cubica piana. Per dualità nello spazio, ad una cubica gobba corrisponde un ***inviluppo semplice di piani di***

3ª *classe* e, per dualità nel piano, ad una cubica razionale corrisponde un *inviluppo di rette semplice razionale e di 3ª classe.*

§ 56.

Proiettività sopra una conica. Involuzione.

Tra i punti di una conica luogo k consideriamo una proiettività ω, la quale faccia corrispondere ai tre punti A,B,C i tre punti A',B',C'. Proiettando da A,A' rispettivamente le punteggiate sovrapposte $A',B',C' \ldots$, $A,B,C \ldots$, avremo due fasci di raggi proiettivi, anzi prospettivi, perchè il raggio comune è unito; sicchè, se la ω fa passare da un punto qualunque M al punto M', variando M su k, il punto $M_0 \equiv AM'.A'M$ descriverà una retta u_0, asse di prospettiva dei fasci A,A'. E poichè la retta u_0 è individuata dai punti $B_0 \equiv AB'.A'B$, $C_0 \equiv AC'.A'C$, si deduce subito che, per costruire M', dato M, si dovrà proiettare M' da A nel punto M_0 di u_0, e trovare l'ulteriore intersezione di k colla retta $A'M_0$.

Si osservi che *tutte queste operazioni si possono effettuare colla sola riga, anche se la conica k non è tracciata, ma è individuata per es. per punti.*

Ora qui si presenta una questione analoga a quella che ci condusse a definire l'asse di collineazione di una proiettività tra due punteggiate distinte complanari (pag. 83). Se invece di scegliere come centri di proiezione i punti A ed A', si scelgono altri due punti corrispondenti, l'asse di prospettiva dei nuovi fasci sarà diverso da u_0, oppure sarà la stessa retta? Poichè ogni punto comune ad u_0 e a k è evidentemente unito per la ω, e viceversa; se la ω è iperbolica o parabolica, l'asse di prospettiva dei due fasci, che si ottengono scegliendo come centri di proiezione due punti corrispondenti qualunque, congiungerà i punti uniti o toccherà la conica nell'unico punto unito; in questi casi l'asse stesso non potrà perciò dipendere dalle posizioni dei centri dei fasci.

Ma per dimostrare che, in ogni caso, la retta u_0 non muta, cambiando i centri di protezione, basterà dimostrare che si ottiene la stessa retta partendo per es. dai punti B,B'. Siccome l'asse relativo ai fasci B,B' passa pel punto $B_0 \equiv BA'.B'A$, basterà perciò provare che il punto $C_0 \equiv BC'.B'C$ appartiene alla retta u_0. Ora quest'affermazione non è altro che il teorema di PASCAL relativo all'esagono semplice $AB'CA'BC'$, iscritto in k (pag. 172).

Se chiamiamo *rette associate* le rette del tipo XY', $X'Y$, ove XX', YY' son due coppie di punti omologhi nella ω, potremo enunciare il teorema:

Data una proiettività tra i punti di una conica, le infinite coppie di rette associate relative a quella proiettività, si segano in punti di una medesima retta, detta ASSE DI COLLINEAZIONE *della data proiettività. Se la proiettività è iperbolica, l'asse congiunge i punti uniti, se la proiettività è parabolica, l'asse tocca la conica nell'unico punto unito.*

Dualmente: data una proiettività $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a'b'c' \end{pmatrix}$ tra le tangenti di una conica k, le rette $ab'.a'b$; $ac'.a'c$; $bc'.b'c$, che congiungono le coppie di *punti associati*, passano per un medesimo punto, detto CENTRO DI COLLINEAZIONE della data proiettività. Le tangenti eventuali, che escono dal centro di collineazione, sono le rette unite della data proiettività.

Una proiettività tra i punti della conica k ne induce una tra le tangenti della stessa conica. In quest'ultima sono omologhe due tangenti a k in punti che si corrispondano nella proiettività primitiva (pag. 229). La polarità rispetto a k muta l'una proiettività nell'altra, e quindi l'asse della proiettività data fra i punti di k, nel centro della proiettività indotta tra le tangenti. Se il centro di collineazione della proiettività indotta tra le tangenti, si chiama pure centro di collineazione della proiettività data, e dualmente, si può dire che:

Il centro e l'asse di collineazione di una proiettività data tra i punti (o le tangenti) di una conica, sono polo e polare rispetto a questa.

Proponiamoci ora di caratterizzare il sistema Σ delle rette che riuniscono le coppie di punti omologhi in una proiettività $\omega \equiv \begin{pmatrix} A\ B\ C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ tra i punti di una conica k. Conduciamo per k una quadrica rigata Q e diciamo U, U' le schiere rigate tracciate su Q. Possiamo porre una proiettività ω tra le generatrici della schiera U e quelle della schiera U', riferendo proiettivamente la schiera U alla punteggiata $A, B, C, \ldots$ e la schiera U' alla punteggiata $A', B', C' \ldots$; cioè chiamando omologhe due rette m, m' delle schiere U, U', rispettivamente, quando segnano sul piano di k due punti M, M', appartenenti alle punteggiate $A, B, C \ldots$; $A', B', C' \ldots$

Sieno a, b, c, a', b', c' le generatrici di U, U' uscenti dai punti A, B, C, A', B', C'. Il piano π dei tre punti aa', bb', cc' non è tangente alla quadrica. Infatti, nell' ipotesi contraria, due almeno dei tre punti, p. es. aa', bb', starebbero sopra una medesima retta r della quadrica; mentre ciò è assurdo, perchè r, appoggiandosi ad a, b, non può appartenere alla schiera U, ed appoggiandosi ad a', b', non può appartenere ad U'. Sulla conica k', sezione di π colla quadrica Q, le due schiere proiettive U, U' segnano due punteggiate proiettive, coi tre punti uniti aa', bb', cc'. Ciò significa che queste due punteggiate sovrapposte sono identiche, cioè che due generatrici omologhe nella proiettività π, s' incontrano in un punto di k'; e quindi che i piani che congiungon le coppie di generatrici omologhe inviluppano un cono quadrico di vertice O (pag. 157).

I piani di questo inviluppo di 2ª classe segano sul piano di k le rette del sistema Σ; sicchè, se il piano di k non passa per O, queste rette costituiscono un inviluppo di 2ª classe (non degenere), mentre, se il piano di k passa per O, le rette suddette passeranno tutte pel punto O (non appartenente a k), cioè costituiranno un fascio di raggi.

Ora questi due casi possono venire distinti riferendoli alla natura della proiettività ω. Invero, se la ω non

è involutoria, da ogni punto di k (che non sia unito) usciranno due rette appartenenti al sistema Σ; e cioè le rette che vanno, dal punto dato, al suo omologo nella ω ed al suo omologo nella ω^{-1}. In tal caso dunque il sistema Σ non potrà essere un fascio di raggi, e quindi (per quanto precede) sarà un' inviluppo di 2ª classe. Se invece la proiettività ω è involutoria, da ogni punto di k non potrà uscire che una retta di Σ, e quindi in tal caso questo sistema sarà un fascio di raggi. Si conclude pertanto che:

Le rette che congiungono le coppie di punti omologhi di una proiettività tra i punti di una conica, inviluppano una seconda conica (non degenere) oppure passano per un punto, secondo che la data proiettività non è od è involutoria.

Questo teorema serve a caratterizzare completamente le involuzioni tra i punti di una conica. Infatti esso afferma che le coppie di un' involuzione sono allineate con un punto fisso; ma si stabilisce subito che, viceversa, *le coppie di punti di una conica allineate con un punto fisso, non appartenente alla conica, formano un' involuzione*, tenendo conto del teorema precedente e del fatto che un' involuzione è *individuata* da due coppie di punti omologhi.

Tale caratterizzazione delle proiettività involutorie si può del resto ottenere senza escire dal piano, nel modo seguente: Se $AA', BB', CC', \ldots$ son coppie di k allineate con un punto fisso P, non appartenente a k, i punti, $AB'.A'B$; $AC'.A'C$; $\ldots$ appartengono tutti alla polare p di P rispetto a k; onde i fasci che proiettano da A', A le punteggiate $A, B, C, \ldots$, $A', B', C', \ldots$ son prospettivi (rispetto a p), cioè le due punteggiate suddette son proiettive. E siccome la corrispondenza che tra esse intercede è evidentemente involutoria, si conclude che le coppie $AA', BB', CC', \ldots$ appartengono ad un' involuzione. Questa osservazione ci dice di più che:

Il centro e l'asse di collineazione di un' involuzione tra i punti di una conica, sono rispettivamente il punto *fisso col quale sono allineate le coppie dell' involuzione e la sua polare.*

Nel caso di un' involuzione, il centro e l'asse di collineazione si dicono più specialmente *polo* ed *asse dell' involuzione.*

L' involuzione è ellittica o iperbolica secondo che il suo polo è interno o esterno alla conica.

Al lettore le considerazioni duali.

CAPITOLO QUATTORDICESIMO

Proiettività tra forme di 2ª specie.

§ 57.

Determinazione delle proiettività tra forme di 2ª specie.

Due forme di 2ª specie diconsi *proiettive* quando son riferite in modo che a ciascun elemento dell'una corrisponda un elemento dell'altra, e ad elementi dell'una, appartenenti ad una forma di 1ª specie, corrispondano elementi dell'altra appartenenti pure ad una forma di 1ª specie, omologa della precedente. Sicchè una proiettività tra due forme di 2ª specie, ne induce un'altra tra le due forme di 2ª specie, rispettivamente ad esse sovrapposte, ed aventi per elementi i sostegni delle forme di 1ª specie omologhe nella proiettività data.

Dalla definizione segue subito che *due forme proiettive ad una terza son proiettive fra loro.*

La proiettività tra due forme di 2ª specie prende nomi speciali, a seconda della natura degli elementi che costituiscono queste forme.

Così due forme di 2ª specie proiettive dello stesso nome (due piani o due stelle) si chiamano *omografiche* (con CHASLES) o *collineari* (con MÖBIUS), quando gli elementi corrispondenti son pure dello stesso nome. Per es. due *piani* si diranno *omografici* quando si corrispondono punto per punto, in modo che a punti di una retta corrispondano punti di una retta.

Due forme di 2ª specie diconsi *prospettive* quando sono riferite biunivocamente in modo che gli elementi omologhi si appartengano; o, in altri termini, quando l'una forma è una proiezione od una sezione dell'altra. È ben chiaro che il riferimento per *prospettività* è un particolare riferimento proiettivo, perchè muta le forme di 1ª specie in forme di 1ª specie.

Due forme di 2ª specie di nome diverso (un piano ed una stella) diconsi *omografiche* o *collineari*, quando una forma prospettiva ad una delle due forme di 2ª specie è omografica all'altra.

Così sono omografici un piano ed una stella quando a ciascun punto del piano corrisponde un raggio della stella, e viceversa; colla condizione che ai punti di ciascuna retta del piano corrispondano raggi di un fascio della stella.

Due forme di 2ª specie proiettive dello stesso nome diconsi *correlative* (con MÖBIUS) o *reciproche* (con PONCELET e STAUDT) quando gli elementi corrispondenti hanno nome diverso. Per es. due piani diconsi reciproci, allorquando a ciascun punto dell'uno corrisponde una retta dell'altro, ed a punti allineati dell'uno, rette formanti fascio dell'altro.

Due forme di 2ª specie proiettive, di nome diverso, diconsi *correlative* o *reciproche*, quando una forma prospettiva all'una è correlativa all'altra. Così son correlativi un piano ed una stella riferiti proiettivamente in guisa che a ciascun punto del piano corrisponda un piano della stella, e viceversa.

Le corrispondenze tra due forme omografiche o collineari e tra due forme correlative o reciproche, si denominano rispettivamente *omografia* o *collineazione*, e *correlazione* o *reciprocità*.

Dalle definizioni poste segue che *due forme di 2ª specie omografiche o reciproche ad una terza, sono omografiche tra loro; mentre due forme di 2ª specie, di cui l'una sia omografica e l'altra reciproca ad una terza, son reciproche tra loro.*

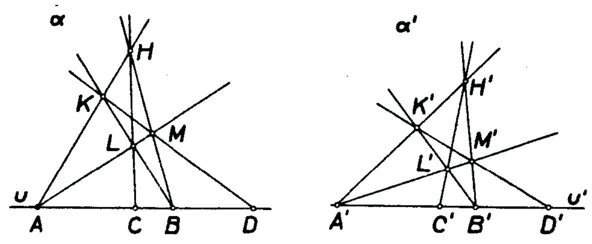
Il prodotto di più prospettività tra forme di 2ª specie è una omografia; e si potrebbe dimostrare che, reciprocamente, ogni omografia si scinde nel prodotto di un numero finito di prospettività (*).

Nella teoria delle corrispondenze proiettive tra forme di 2ª specie è fondamentale il teorema seguente:

Una proiettività tra due forme di 2ª specie subordina una proiettività tra gli elementi di due forme di 1ª specie omologhe.

Basterà dimostrare il teorema per due piani omografici; giacchè si potrà poi trasportare, colla legge di dualità, a due qualunque forme di 2ª specie proiettive.

In un'omografia ω data tra i piani in α, α', sieno dunque u, u' due rette omologhe. Per provare che la



corrispondenza biunivoca subordinata dalla ω tra le due punteggiate u, u', è proiettiva, occorre provare che ad un qualunque gruppo armonico $ABCD$ di u corrisponde, mediante ω, un gruppo armonico $A'B'C'D'$ di u'.

Se $HKLM$ è un quadrangolo completo del piano α, costruttore del gruppo armonico $ABCD$, ad esso corrisponderà sul piano α' un quadrangolo completo $H'K'L'M'$, e i due lati opposti di quest'ultimo, corrispondenti a quei due lati opposti di $HKLM$ che passano per A, passeranno per A'; e similmente ai lati del primo quadrangolo concorrenti nei punti B,C,D, corrisponderanno lati

(*) Vedi i miei citati *Complementi di geometria proiettiva* pagg. 157-158.

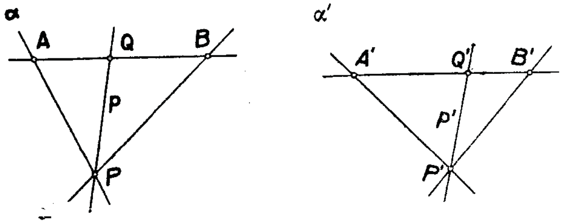
del secondo concorrenti nei punti omologhi B', C', D'. Onde il gruppo $A'B'C'D'$ risulta armonico.

Dimostriamo ora che:

Tra due forme di 2ª specie α, α' esiste una ed una sola proiettività, la quale subordina due date proiettività tra due forme di 1ª specie A, B, appartenenti ad α, e due forme di 1ª specie A', B', appartenenti ad α'; colla condizione che all'elemento AB comune alle prime, corrisponda, in entrambe le proiettività date, l'elemento $A'B'$ comune alle seconde.

Ragioneremo riferendoci al caso in cui α, α' son due piani ed A, B, A', B' son fasci di raggi. Diciamo ω_A la proiettività data tra A, A', ed ω_B quella data tra B, B'.

Se esiste un'omografia Ω tra α, α', che subordini tra i fasci A, A' la ω_A e tra i fasci B, B' la ω_B, essa dovrà



far corrispondere ad un punto P di α, esterno ad AB, un punto P' di α', esterno ad $A'B'$ e comune ai due raggi omologhi di PA, PB nelle proiettività ω_A, ω_B. E ad una retta p non passante nè per A nè per B, la quale può pensarsi come asse di una prospettività τ tra i fasci A, B, dovrà far corrispondere l'asse p' della prospettività, che si ottiene fra i fasci A', B', come trasformata della τ. Che effettivamente la trasformata della τ debba esser una prospettività, segue da ciò: che al raggio AB corrisponde per ipotesi il raggio $A'B'$, tanto mediante la ω_A quanto mediante la ω_B; e quindi la proiettività trasformata di τ ha come raggio unito $A'B'$.

Infine la Ω dovrà far corrispondere ad un punto Q della AB, il punto Q', ove la $A'B'$ è segata dalla retta p',

che corrisponde in α' ad una retta p di α, uscente da Q, ma diversa da AB.

Dunque, se esiste un'omografia soddisfacente alle condizioni volute, essa è unica, perchè è ben determinata la legge colla quale si costruiscono gli elementi corrispondenti dei piani α, α'.

Ma, viceversa, si vede agevolmente che una tale omografia esiste. Si faccia infatti corrispondere ad ogni punto P di α, esterno ad AB, il punto P' (certamente esterno ad $A'B'$), ove si tagliano i raggi omologhi, nelle ω_A, ω_B, dei raggi PA, PB; ad ogni retta p non passante nè per A nè per B, la retta p' asse della prospettività tra A', B', trasformata di quella che tra i fasci A, B ha per asse p; e ad ogni punto Q della AB, diverso da A, B, il punto Q' ove la $A'B'$ vien tagliata dalla retta p' corrispondente ad una retta p uscente da Q, ma diversa dalla AB. Si noti che il punto Q' è indipendente dalla posizione della retta p, condotta per Q, ma che dipende soltanto dalla posizione di Q. Invero, se a due posizioni p_1, p_2 della p (diverse entrambe da AB) corrispondessero due posizioni p'_1, p'_2 di p', seganti la $A'B'$ in punti diversi, al punto $p'_1 p'_2$ esterno ad $A'B'$, corrisponderebbe un punto di AB: il che contraddice alla legge con cui abbiamo generato la corrispondenza tra i punti di α, α' esterni ad AB, $A'B'$.

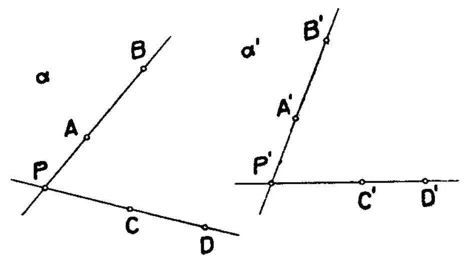
Si associno infine ai punti A, B i punti A', B', ed alle rette uscenti da A (o B) le rette che ad esse corrispondono mediante la ω_A (o ω_B) nel fascio A' (o B').

Dalle condizioni precedenti vien definita una corrispondenza biunivoca (senza alcuna eccezione) tra i punti e le rette dei due piani α, α'; e questa corrispondenza fa passare da un punto e da una retta, che si appartengano, ad un punto e ad una retta, che pure si appartengono; cioè è un'omografia, c.d.d.

Dal teorema dimostrato segue che:

Se sopra due forme di 2ª specie α, α' si assegnano due quaderne $ABCD$, $A'B'C'D'$ di elementi indipendenti (cioè tali che tra gli elementi di una quaderna non ve ne *siano mai tre appartenenti ad una forma di 1ª specie), esiste una ed una sola proiettività* $\begin{pmatrix} A\,B\,C\,D \\ A'B'C'D' \end{pmatrix}$ *che fa passare da* A,B,C,D, *rispettivamente ad* A',B',C',D'.

Riferiamoci al caso di due piani punteggiati α, α'. Poichè i punti A,B,C,D sono indipendenti, il punto



$P \equiv AB.CD$ sarà diverso dai punti della quaderna data; e così $P' \equiv A'B'.C'D'$ sarà diverso da A',B',C',D'. Ciò posto, consideriamo tra le punteggiate AB, $A'B'$ la proiettività $\begin{pmatrix} A\,B\,P \\ A'B'P' \end{pmatrix}$ e tra le punteggiate CD, $C'D'$ la proiettività $\begin{pmatrix} C\,D\,P \\ C'D'P' \end{pmatrix}$.

Risulta allora individuata un'omografia tra α, α', la quale subordina tra le due coppie di punteggiate le proiettività poste, e questa omografia muta appunto la quaderna $ABCD$ nella $A'B'CD''$. Essa è unica, perchè ogni omografia, che muti la prima nella seconda quaderna, deve mutare P in P' e quindi subordinare tra le due coppie di punteggiate le proiettività poste.

Il lettore osserverà che nelle dimostrazioni dei teoremi precedenti è contenuta implicitamente anche la *costruzione di una proiettività tra due forme di 2ª specie* individuata per es. da quattro coppie di elementi omologhi.

§ 58.

Forme di 2ª specie prospettive e omologiche.

Dimostriamo che:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la retta comune a due piani omografici distinti sia costituita da punti uniti, è che i due piani sieno prospettivi.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la retta comune a due stelle omografiche distinte sia sostegno di un fascio di piani uniti, è che le due stelle sieno prospettive.

Poichè la necessità della condizione è evidente, stabiliamone la sufficienza.

Se (a sinistra) α, α' sono i due piani, ed A, A'; B, B' due coppie di punti omologhi, non appartenenti alla retta $u \equiv \alpha\alpha'$, al punto $u.AB$ del piano α, dovrà corrispondere il punto stesso sul piano α': il che significa che le due rette omologhe AB, $A'B'$ si tagliano in un punto di u, e quindi che le due rette AA', BB' s' incontrano pure in un punto. Ne deriva che le rette che congiungono le coppie di punti omologhi s' incontrano a due a due e quindi (pag. 15) esse escono tutte da un punto, giacchè, evidentemente, non possono appartenere tutte ad un piano.

Passiamo ora a considerare un'omografia tra due piani sovrapposti α, α' (brevemente si dice un'*omografia piana*); e studiamo le sue proprietà in relazione agli elementi uniti. Se in un'omografia piana vi sono quattro punti uniti *indipendenti*, tutti i punti saranno uniti, perchè tra le omografie che posseggono quella quaderna di punti uniti c' è l' identità, e d'altronde è unica l'omografia che fa corrispondere a quattro punti indipendenti quattro punti dati, pure indipendenti. Dunque *in un'omografia piana non identica non possono aversi più di tre punti uniti indipendenti; e dualmente.*

Ne discende che se un'omografia piana non identica possiede più di tre punti uniti, almeno tre di essi dovranno essere allineati, e quindi, pel teorema fondamentale di Staudt, tutti i punti della retta che li contiene saranno uniti. E fuori di questa non ci potrà essere più di un punto unito: chè, se ce ne fossero due, questi, insieme ad una coppia di punti generici della retta stessa, darebbero una quaderna di punti uniti indipendenti. Si conclude pertanto che:

Un'omografia piana non identica, la quale possegga più di tre elementi uniti dello stesso nome (punti o rette), possiede tutta una forma di 1ª specie costituita da elementi uniti di quel nome, e, fuori di questa, c' è al più un elemento unito del nome stesso.

L'esistenza effettiva di omografie piane non identiche, dotate d' infiniti elementi uniti dello stesso nome, risulterà tra poco.

Vediamo prima di caratterizzare una omografia piana dotata di una retta di punti uniti, o, dualmente di un fascio di rette unite. Dimostriamo perciò che:

Se in un'omografia ω tra due piani sovrapposti α, α', vi è una retta u di punti uniti, vi è pure un fascio U di rette unite; e dualmente.

Se ad un punto A di α, non unito, corrisponde il punto A' di α', la retta AA' incontra la u in un punto M unito, sicchè nell'omografia ω alla retta MA corrisponde la retta MA', cioè la retta AA', è unita. Vi sono dunque infinite rette unite: tutte quelle che riuniscono le infinite coppie di punti omologhi. Se due di queste rette si tagliano in un punto U, fuori di u, tutte le altre passeranno per U. Infatti, un punto B non unito è congiunto ad U da una retta che contiene due punti uniti, cioè il punto U ed il punto ove la UB sega la retta u; e quindi il punto B', omologo di B, sarà allineato con U. Se le due rette considerate si tagliano in un punto U di u, tutte le rette omologhe passeranno per U, perchè se ciò non accadesse, per quel che precede, passerebbero tutte per un punto esterno ad u.

Un'omografia piana, non identica, dotata di una retta u di punti uniti e di un fascio U di rette unite, dicesi un'*omologia piana*: la retta u dicesi l'*asse dell'omologia* ed il punto U il *centro*.

Due punti corrispondenti sono allineati col centro, e, dualmente, due rette corrispondenti s' incontrano in un punto dell'asse.

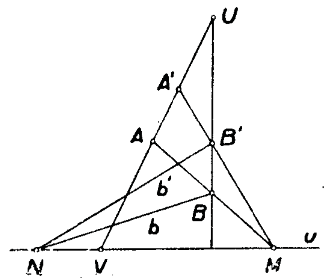
L'omologia dicesi *speciale*, quando il centro appartiene all'asse.

Non vi sono altri punti uniti all' infuori del centro e di quelli dell'asse; nè altre rette unite all' infuori dell'asse e di quelle passanti pel centro.

L'esistenza di omologie piane resta stabilita dal teorema seguente:

Dati in un piano un punto U, una retta u, ed una coppia di punti distinti A, A', allineati con U, o, dualmente, una coppia di rette distinte a, a', che si taglino in u, esiste una ed una sola omologia che ha per centro U, per asse u, e per coppia di elementi omologhi A, A' oppure a, a'.

Infatti, se son dati U, u ed A, A', c' è una sola omografia che subordini sulla u l' identità e sulla punteggiata AA' la proiettività (iperbolica o parabolica, se $U \equiv V$) $\begin{pmatrix} UVA \\ UVA' \end{pmatrix}$, ove si è posto $V \equiv u.AA'$ (pag. 249), e quest'omografia è evidentemente un'omologia soddisfacente alle condizioni richieste.



Se di un punto B, non appartenente alla AA', si vuole l'omologo B', basterà intersecare la AB coll'asse, in M: la retta $A'M$ sarà l'omologa di AB e quindi il punto $A'M.UB$ sarà il punto B'. Se si vuole l'omologo di un punto appartenente alla AA', gioverà costruire prima l'omologo di un punto non appartenente alla AA', eppoi applicare la costruzione precedente. Quando poi si voglia l'omologa b' di una retta b, si costruirà l'omologo B' di un punto B di b, e si proietterà B' dal punto $N \equiv ub$.

Dualmente si procede se l'omologia è individuata con U, u, ed a, a'.

Se A, A' *son due punti corrispondenti in un'omologia di asse* u *e centro* U *ed è* $V \equiv u.AA'$, *il gruppo* $UVAA'$ *si mantiene proiettivo a se stesso, comunque varii la coppia* A, A' ; *e dualmente, se* a, a' *son due rette corrispondenti ed è* $v \equiv U.aa'$, *il gruppo* $vuaa'$ *si mantiene proiettivo a se stesso al variare della coppia* aa' *ed anzi si ha:*

$$UVAA' \barwedge v\,u\,a\,a'.$$

Se il punto A descrive una retta uscente da U, allora il gruppo $UVAA'$ rimane proiettivo a se stesso per una nota proprietà di una proiettività iperbolica o parabolica (pagg. 89, 90). Se il punto mobile assume la posizione B ed il suo corrispondente la posizione B' (ved. fig. a pag. 256), per guisa che la retta UAA' sia diversa dalla UBB', la retta $a \equiv AB$ incontrerà la $a' \equiv A'B'$ in un punto M di u, e quindi, ponendo $v \equiv UM$, si vede che i gruppi $UVAA'$, UV_1BB' (ove $V_1 \equiv u.BB'$) risultano prospettivi rispetto al centro M ; ed inoltre :

$$UVAA' \barwedge v\,u\,a\,a', \qquad \text{c. d. d.}$$

Dunque il birapporto $(UVAA')$ o $(vuaa')$ ha un valore costante (vale 1 quando l'omologia è speciale). Questo birapporto costante chiamasi l' *invariante assoluto* o la *caratteristica dell'omologia*.

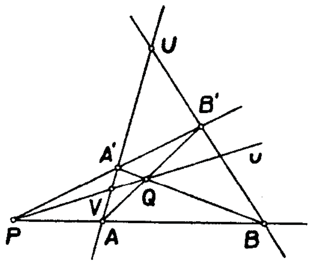
§ 59.

Omografie involutorie.

Un'omografia piana ω non identica, nella quale due elementi omologhi qualunque si corrispondano in doppio modo, dicesi *involutoria* quando coincide colla sua inversa.

Affinchè un'omografia piana sia involutoria occorre e basta che in essa si corrispondano in doppio modo due coppie di elementi dello stesso nome, non appartenenti ad una medesima forma di 1ª specie. In tal caso l'omografia riducesi ad un'omologia armonica, cioè ad un'omologia nella quale il centro e l'asse separano armonicamente le coppie di elementi corrispondenti.

Se infatti nell'omografia ω si corrispondono in doppio modo le due coppie di punti A, A' e B, B', non appartenenti ad una medesima retta, la ω risulterà individuata da questa condizione, perchè essa farà passare dalla quaderna (di punti indipendenti) $AA'BB'$ alla quaderna $A'AB'B$. Si capisce dunque a priori che debba essere possibile di caratterizzare completamente l'omografia ω. Alla retta AB corrisponde in doppio modo la $A'B'$ ed alla retta AB' corrisponde in doppio modo la $A'B$; onde al punto $P \equiv AB.A'B'$ corrisponderà il punto $P \equiv A'B'.AB$ ed al punto $Q \equiv AB'.A'B$ il punto $Q \equiv A'B.AB'$.



Sicchè la retta $u \equiv PQ$ sarà unita, e siccome sono pure unite le rette AA', BB', sarà unito il punto $U \equiv AA'.BB'$ ed i punti (diversi tra loro e da P,Q) in cui la u sega le rette AA',BB'. Sopra la u si hanno dunque quattro punti uniti, onde tutti i punti di u saranno uniti ; cioè la ω sarà un'omologia di asse u, ed il centro sarà il punto unito U, che è esterno ad u.

Dal quadrangolo completo $PQBB'$ si rileva che il gruppo $UVAA'$ $(V \equiv u.AA')$ è armonico, cioè che l'omologia in questione è armonica.

Viceversa, è chiaro che un'omologia armonica è un' omografia involutoria.

§ 60.

Elementi uniti di un'omografia piana non omologica.

Sia ora ω un'omografia non omologica tra i punti del piano α. Ci proponiamo di ricercare i suoi punti uniti (che non son certo più di tre) o, dualmente, le sue rette unite.

Preso un punto A di α, non unito nè appartenente a rette unite (ciò è sempre possibile, perchè ω non è omologica), sia A' l'omologo di A mediante ω, ed A'' l'omologo di A' mediante ω (ossia l'omologo di A mediante ω^2). Per le ipotesi fatte su A, i tre punti A, A', A'', saranno distinti e non allineati.

La ω subordina tra i fasci A, A' una proiettività e, poichè il raggio comune AA' non è unito, i raggi omologhi si tagliano in punti di una conica k, passante per A, A' e tangente in A' al raggio che corrisponde ad AA', pensato come raggio di A, cioè tangente in A' alla retta $A'A''$. Similmente i due fasci proiettivi A', A'' generano una conica k, passante per A', A'' e tangente in A' alla AA'.

Se un punto U di α è unito nella ω, esso sarà esterno alle rette AA', $A'A''$, perchè altrimenti queste rette sarebbero unite; ed al raggio UA corrisponderà il raggio UA' ed a questo il raggio UA'', onde U sarà comune alle due coniche k, k', fuori di A'.

Viceversa, un punto diverso da A' comune alle due coniche suddette, è proiettato da A, A', A'' secondo tre raggi tali che il primo ha per omologo nella ω il secondo ed il secondo il terzo, onde quel punto, pensato come intersezione del primo e del secondo raggio, avrà per omologo il punto comune al secondo ed al terzo, cioè se stesso. Dunque:

I punti uniti dell'omografia ω sono tutti e soli i punti comuni alle due coniche k, k', fuori di A'.

Siccome queste due coniche non si toccano in A', si deduce che (ved. la nota a piè della pag. 232):

In un'omografia piana non omologica c'è sempre almeno un punto unito ed al più tre; e dualmente.

Se U è un punto unito dell'omografia ω, una retta a uscente da U ha per corrispondente una retta a' pure uscente da U, e la proiettività subordinata tra a, a' sarà una prospettività, perchè il punto comune U è unito.

Diciamo S_a il centro della prospettività suddetta. Variando a e quindi la a', varia il punto S_a ed assume nel piano un' infinità (semplice) di posizioni. Ora due casi possono presentarsi:

1) Comunque si scelgano due coppie a, a'; b, b' di rette omologhe uscenti da U, sempre accade che i due centri di prospettività S_a, S_b ad esse relativi sono allineati con U. In tal caso è evidente che, variando a, a', il punto S_a descrive una retta u passante per U. E la retta u è unita, perchè la ω fa passare da due rette omologhe a, a', uscenti da U, e dal loro centro di prospettività S_a, a due rette omologhe a', a'', pure uscenti da U, ed al loro centro di prospettività $S_{a'}$; cioè muta un punto di u in un punto della stessa retta.

2) È possibile scegliere le a, a'; b, b' in tal modo che la retta $u \equiv S_a S_b$ non passi per U. La u è ancora unita, perchè ω fa passare dai due punti distinti ua, ub ai due punti ua', ub' e quindi da u ad u.

Due rette omologhe c, c', uscenti da U, tagliano la u in due punti omologhi uc, uc' e quindi il centro di prospettiva S_c appartiene ad u. Dunque anche in tal caso tutti i centri di prospettiva delle coppie di rette omologhe uscenti da U appartengono ad una retta unita u.

E si noti che da questo semplice ragionamento si trae che, se esiste una retta unita non appartenente ad U, essa è certo il luogo dei centri suddetti.

Si conclude pertanto che:

In un'omografia piana non omologica ad ogni punto unito U viene associata una retta unita u, la quale è caratterizzata dalla proprietà di contenere i centri di prospettiva delle infinite coppie di rette omologhe uscenti da U.

Dualmente:

Ad ogni retta unita u viene associato un punto unito U, caratterizzato dalla condizione di appartenere agli assi di prospettività delle infinite coppie di fasci aventi i centri in punti omologhi di u.

Risulta pure dall'osservazione duale di quella con cui termina la seconda parte del ragionamento, che:

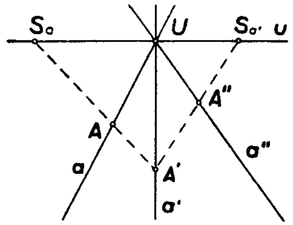
Se un punto U ed una retta u uniti non si appartengono, la retta è associata al punto e questo alla retta.

Più in generale possiamo provare che:

Se la retta unita u è associata al punto unito U, questo è associato a quella.

Basterà provarlo quando U ed u si appartengono.

Se la u è associata ad U, e se la ω fa passare dalla retta a, del fascio U, alla a', e da questa alla a'', i centri S_a, $S_{a'}$, relativi alle coppie aa', $a'a''$, apparterranno ad u; e di più saranno corrispondenti nella proiettività che la ω subordina sulla retta unita u.



Diciamo A', A'' i punti di a', a'' che corrispondono ad un punto A di a, mediante la ω e la ω^2: allora al raggio S_aA del fascio $S_{a'}$ corrisponde il raggio $S_{a'}A'$ del fascio $S_{a'}$; e questi due raggi si tagliano nel punto A' di a', qualunque sia la posizione del punto A su a. Ne deriva che la retta a' è l'asse della prospettività tra S_a, $S_{a'}$; e siccome lo stesso ragionamento si può ripetere per altre tre rette del fascio U, nelle condizioni di a, a', a'', si conclude che il punto U è associato alla retta u.

Osservazione. — Tenendo conto del fatto che, se U ed u sono un punto ed una retta uniti associati in un'omografia piana, gli altri punti uniti dell'omografia devono appartenere ad u (chè altrimenti sarebbero associati ad u) e le altre rette unite devono passare per U, si giunge facilmente a classificare in tipi le omografie piane, a seconda dei casi che possono pre-

sentare gli elementi uniti. Lasciamo ciò al lettore volenteroso.

§ 61.

Particolarità metriche delle omografie tra piani.

Diconsi *rette limiti* nell'omografia tra due piani α, α', le rette omologhe alle rette improprie dei due piani.

Se una delle rette limiti è impropria, lo è anche l'altra, e le due rette improprie si corrispondono. In tal caso l'*omografia* dicesi *affine* oppure un'*affinità* (EULERO, MÖBIUS).

Nell'affinità a segmenti finiti corrispondono segmenti finiti, a rette parallele, rette parallele, e quindi a parallelogrammi, parallelogrammi.

Due punteggiate omologhe son simili, perchè i punti all'infinito si corrispondono.

Un'affinità tra due piani α, α' è completamente individuata da tre coppie AA', BB', CC' di elementi proprî corrispondenti.

Invero, se per es. A, A'; B, B'; C, C' son coppie di punti corrispondenti, esiste una sola omografia che subordini tra AB, $A'B'$ la similitudine $\left(\begin{matrix} AB \\ A'B' \end{matrix}\right)$ e tra AC, $A'C'$ la similitudine $\left(\begin{matrix} AC \\ A'C' \end{matrix}\right)$ (pag. 251).

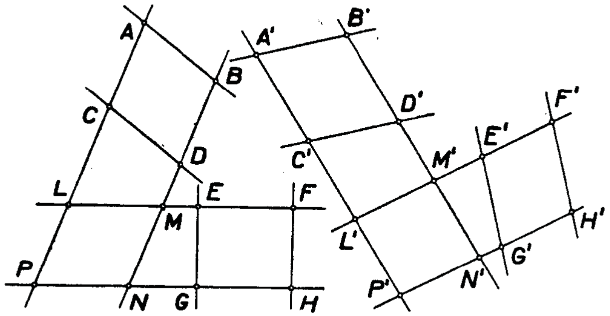
La proprietà più notevole dell'affinità è la seguente:

In un'affinità tra due piani α, α' il rapporto tra le aree comprese tra due linee chiuse corrispondenti, è costante.

Cominciamo a stabilire il teorema pei parallelogrammi. Sieno $ABCD$, $EFGH$ due parallelogrammi (generici) di α ed $A'B'C'D'$, $E'F'G'H'$ i corrispondenti parallelogrammi in α'. Pongasi:

$$L \equiv AC.EF, \quad M \equiv BD.EF,$$
$$N \equiv BD.GH, \quad P \equiv AC.GH,$$

e diciamo L', M', N', P' i punti rispettivamente omologhi in α'.



Poichè i parallelogrammi $ABCD$, $LMNP$ hanno la stessa altezza, le loro aree stanno tra loro come le basi; cioè:

$$ABCD : LMNP = AC : LP\,;$$

e similmente:

$$A'B'C'D' : L'M'N'P' = A'C' : L'P'.$$

Ma i rapporti dei secondi membri sono uguali, perchè le punteggiate AC, $A'C'$ sono simili; onde:

$$ABCD : LMNP = A'B'C'D' : L'M'N'P'.$$

In modo analogo si trova:

$$EFGH : LMNP = E'F'G'H' : L'M'N'P'.$$

Dal confronto delle due ultime relazioni si trae:

$$ABCD : A'B'C'D' = EFGH : E'F'G'H' = \text{costante}.$$

Il teorema è così dimostrato per le coppie di parallelogrammi omologhi. Esso estendesi subito a due triangoli corrispondenti, perchè questi possono considerarsi come le metà di due parallelogrammi omologhi; ed estendesi pure senz'altro a due aree poligonali corrispon-

denti, perchè queste possono scindersi in un ugual numero di triangoli corrispondenti.

Se poi sul piano α si considera una linea chiusa l, tale che l'area da essa limitata risulti definita da due classi contigue formate dalle aree di poligoni ad essa inscritti e circoscritti, la linea l' corrispondente in α', godrà di proprietà analoghe: ed a ciascun elemento (minore o maggiore dell'area racchiusa da l) di una delle suddette classi contigue, corrisponderà un elemento (minore o risp. maggiore dell'area racchiusa da l') di una delle classi contigue che definiscono l'area su α', ed il rapporto tra i due elementi omologhi sarà costante. Ne deriva che il rapporto tra le aree omologhe racchiuse da l, l' è uguale al rapporto tra due aree poligonali corrispondenti, c.d.d.

Il rapporto costante tra le aree omologhe di due piani affini, si chiama *rapporto d'affinità*.

L'affinità dicesi *equivalente* o un'*equivalenza affine*, quando due aree corrispondenti sono equivalenti (rapporto d'affinità uguale ad 1).

In particolare un'affinità tra due piani sovrapposti può essere omologica nei modi seguenti:

1) Essendo l'asse d'omologia all'infinito. Allora l'omologia dicesi un'*omotetia*. Due figure corrispondenti sono simili (nel senso della Geometria elementare) e similmente poste. Il rapporto tra le distanze del centro d'omotetia da due punti corrispondenti è costante (pag. 104).

2) Essendo il centro d'omologia all' infinito. Allora l' omologia dicesi un'*affinità omologica* od *omologia affine*. Il rapporto delle distanze di due punti corrispondenti dal punto ove la loro congiungente sega l'asse dell'affinità, è costante (pag. 104).

3) Essendo all' infinito tanto il centro che l'asse. In tal caso se A, A'; B, B' son due coppie di punti corrispondenti, le rette omologhe AB, $A'B'$ si dovranno segare all' infinito, e le rette AA', BB' si dovranno pure segare all' infinito, perchè congiungono due coppie di punti omologhi. Quindi la figura $ABA'B'$ sarà un

parallelogrammo. La omologia si genera dunque in tal caso colla *traslazione* di tutto il piano, che porta A in A', ed è perciò un'equivalenza affine.

Un caso particolare dell'affinità tra due piani α, α' è la *similitudine*. Un'omografia tra α, α' dicesi una similitudine, quando muta la retta all' infinito dell'un piano nella retta all' infinito dell'altro e muta pure l' involuzione assoluta dell'un piano nell' involuzione assoluta dell'altro ; o, in altre parole, quando alle coppie di rette parallele o perpendicolari di α, rispondon coppie di rette parallele o rispettivamente perpendicolari di α'. Segue da questa definizione che ad un angolo retto di α corrisponde un angolo retto di α', e quindi che la proiettività subordinata tra due fasci di raggi omologhi è una congruenza (pag. 108). *Due angoli corrispondenti qualunque sono pertanto uguali.* Ne deriva che due triangoli corrispondenti sono equiangoli e quindi simili ; e più in generale che due figure corrispondenti son simili, nel senso della Geometria elementare.

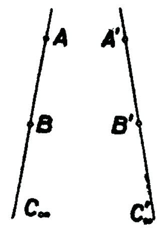
Dunque non soltanto le aree corrispondenti, ma anche *i segmenti corrispondenti avranno un rapporto costante* (*rapporto di similitudine*) ; ed anzi il rapporto tra le aree sarà il quadrato del rapporto tra i segmenti.

Una *similitudine* tra due piani sovrapposti può essere *diretta* o *inversa,* secondo che muta in se stesso ciascuno dei versi della retta all' infinito, oppure li permuta tra loro ; cioè secondo che fa corrispondere ad un angolo, un angolo uguale dello stesso verso o di verso contrario. Dimostriamo ora che :

Esistono in un piano due similitudini, l'una diretta e l'altra inversa, che fanno passare da due punti propri dati A,B a due altri punti propri dati A',B'.

Infatti vi sono due congruenze sulla retta all' infinito, l'una diretta ω_1, e l'altra inversa ω_2, che fanno corrispondere al punto C_∞ di AB il punto C'_∞ di A' B' (pag. 106). E c' è una sola omografia la quale subordini tra AB, $A'B'$ la proiettività $\begin{pmatrix} A & B & C_\infty \\ A' & B' & C'_\infty \end{pmatrix}$ e tra le due

punteggiate sovrapposte all' infinito, la congruenza ω_1 od ω_2 (pag. 251). Quest'omografia risulta una similitudine, perchè la retta impropria dei due piani sovrapposti è unita, e su essa resta subordinata una congruenza.



Una similitudine tra due piani sovrapposti può essere omologica nei due modi segmenti :

1) O è diretta, e allora sulla retta all'infinito dovrà subordinare una congruenza diretta, la quale, se fosse non identica, sarebbe ellittica (pag. 106). Ma d'altronde se sulla retta all' infinito si avesse una proiettività non identica, la retta stessa sarebbe diversa dall'asse, e dovrebbe per contro passare pel centro dell'omologia. La proiettività subordinata su essa sarebbe pertanto iperbolica o parabolica. Nel nostro caso dunque sulla retta impropria dovrà aversi la proiettività identica, e la similitudine sarà un'omotetia (o, come caso particolare, una traslazione).

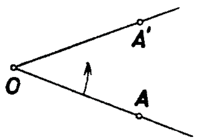
2) O la similitudine è inversa. Allora l'asse u d'omologia dovrà certo essere proprio, ed il suo punto all' infinito sarà uno dei punti uniti della congruenza inversa subordinata sulla retta impropria. L'altro punto, coniugato del precedente nell' involuzione assoluta, sarà il centro d'omologia. Poichè due rette corrispondenti formano coll'asse angoli (corrispondenti) uguali, ma di verso contrario, e due punti corrispondenti son riuniti da una retta perpendicolare all'asse, la similitudine consisterà in una *simmetria ortogonale rispetto all'asse u.* Dunque :

Secondo che una similitudine omologica è diretta o inversa, essa è rispettivamente o un'omotetia od una simmetria ortogonale rispetto ad un asse.

Una similitudine tra due piani dicesi una *congruenza,* quando due figure corrispondenti qualunque sono congrue od uguali, cioè quando il rapporto di similitudine è uguale ad 1. Tra due piani sovrapposti c' è luogo a distinguere la *congruenza diretta* dall' *inversa,* secondo che si conservano i versi della retta all' infinito, oppure si permutano tra loro. Da quanto precede si trae senz'altro che:

Una congruenza omologica è una traslazione (omotetia col rapporto uguale ad 1) od una simmetria rispetto ad un centro (omotetia col rapporto uguale a — 1) se è diretta; oppure una simmetria ortogonale rispetto ad un asse, se è inversa.

Caratterizziamo ora le congruenze dirette non omologiche. Sia ω una tale congruenza. Poichè la rettta all' infinito u è unita e su essa non si hanno punti uniti (la ω subordina infatti sulla u una congruenza non identica diretta), il punto unito O associato ad u (pag. 261) sarà proprio; ed inoltre la ω subordinerà nel fascio O una congruenza diretta, la quale consisterà in una rotazione di un certo angolo attorno ad O (pag. 105). Se A, A' son due punti corrispondenti, i segmenti OA, OA' saranno uguali e quindi la rotazione attorno ad O, che sovrappone il punto A al punto A', porterà ogni punto del piano a coincidere col suo omologo. Si conclude che:



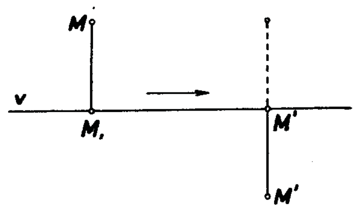
Una congruenza diretta non omologica è generata da una rotazione del piano attorno ad un punto fisso.

Caratterizziamo infine le congruenze inverse non omologiche. Diciamo ancora ω una tal congruenza ed U_∞, V_∞ i punti della retta impropria r_∞, coniugati nell' involuzione assoluta, che sono uniti nella congruenza inversa subordinata sulla r_∞.

Se nessuno di quei punti fosse associato ad r_∞, esisterebbe un punto unito O proprio associato alla retta impropria; e da questo punto escirebbero due rette unite ortogonali $u \equiv OU_\infty, v \equiv OV_\infty$. Su ciascuna delle u, v la ω subordinerebbe una congruenza avente un punto unito all' infinito e l'altro in O, cioè una simmetria rispetto ad O (pag. 104). E quindi, se una retta a segasse le u, v nei punti A, B, la retta a' omologa, segherebbe le u, v nei punti A', B', simmetrici dei prece-

denti rispetto ad O. Dunque la ω sarebbe una simmetria rispetto ad O, il che contraddice all' ipotesi che non sia omologica. Si conclude pertanto che uno dei punti U_∞, V_∞, per es. U_∞, è associato ad r_∞.

All'altro punto unito V_∞ resterà associata una retta unita propria v, la quale non potrà contenere punti uniti proprî, perchè altrimenti il punto associato ad r_∞ sarebbe proprio (pag. 261). Per la stessa proprietà di pag. 261, v passerà per U_∞ e su essa la ω subordinerà una congruenza diretta. Preso un punto M del piano la retta MV_∞, condotta per M perpendicolarmente a v, avrà per omologa la retta $M'V_\infty$ condotta pel punto M' (omologo di M) perpendicolarmente a v. Dicendo M_1, M'_1 i piedi delle perpendicolari suddette, essi saranno omologhi nella congruenza diretta subordinata dalla ω sulla v, e di più il segmento MM_1 sarà uguale ad $M'M'_1$.



Se pertanto si assoggetta il piano ad una traslazione in guisa che M_1 vada in M'_1, il punto M andrà nel simmetrico di M' rispetto a v, perchè se M andasse in M', allora la congruenza ω sarebbe diretta. Ribaltando il piano attorno a v, cioè facendolo ruotare di un angolo piatto attorno a v, la nuova posizione di M andrà a sovrapporsi ad M', e questo qualunque sia il punto M considerato. Dunque:

Ogni congruenza piana inversa si genera con una traslazione lungo un asse, composta con un ribaltamento attorno a quest'asse.

Questi notevoli teoremi sulle congruenze sono suscettibili della seguente elegante interpretazione cinematica.

Se due figure uguali, appartenenti ad un piano, hanno lo stesso verso, cioè sono *direttamente uguali*, si può sempre determinare un punto del piano, tale che con una rotazione conveniente attorno ad esso, le due figure si sovrappongano. La rotazione riducesi ad una traslazione, se il centro di rotazione cade all' infinito. Se invece le due figure sono uguali ma di verso contrario, cioè *inversamente uguali*, se può sempre determinare sul piano un asse tale che con una traslazione lungo quest'asse, composta con una rotazione attorno ad esso, le due figure si sovrappongano.

§ 62.

Subordinazione della Geometria metrica piana alla Geometria proiettiva.

La classificazione delle congruenze piane, come omografie particolari dal punto di vista metrico, ci conduce ora alla importante conseguenza che *tutte le proprietà metriche delle figure d'un piano si posson considerare come relazioni grafiche delle figure stesse colla retta impropria del piano e coll' involuzione assoluta ivi esistente.* Ed ecco come:

La Geometria metrica — ed in particolare la Geometria elementare, che studia essenzialmente le proprietà metriche fondamentali delle figure — si costruisce tutta quanta sulla base dei postulati di appartenenza (enunciati in relazione ai soli elementi proprî (*)) sulla nozione di parallelismo (e relativo postulato di EUCLIDE), sul postulato dell'ordine (enunciato, per quel che con-

(*) Nella Geometria elementare, assunte le nozioni di punto, retta, piano, come primitive, si posson enunciar come segue i postulati d'appartenenza:

1) Due punti distinti individuano una retta.

2) Tre punti non appartenenti ad una retta, individuano un piano.

3) La retta individuata da due punti di un piano giace interamente in esso.

4) Due piani distinti, che abbiano un punto comune, si tagliano lungo una retta.

cerne la retta, tenendo conto che la retta della Geometria metrica è un insieme aperto di punti), sul postulato della continuità (di DEDEKIND), nonchè sui postulati della congruenza (movimento) e sulla nozione di perpendicolarità, la quale d'altronde è implicitamente contenuta nel concetto di congruenza fra angoli (*).

Basterà dunque, pel nostro scopo, di far vedere come tutti i precedenti postulati e nozioni si possano esprimere sotto forma proiettiva, una volta introdotto l'*assoluto del piano*, cioè la retta impropria r colla sua involuzione assoluta I.

Quanto ai postulati di appartenenza della Geometria metrica e al postulato di EUCLIDE, abbiamo visto, fin dal principio di queste Lezioni, com'essi si trasformino nei postulati di appartenenza della geometria proiettiva, mediante l' introduzione degli elementi improprî. La relazione di parallelismo di due rette a, b del piano veniva fin d'allora ad essere espressa da una relazione di appartenenza, di carattere puramente proiettivo (il punto ab giace sulla retta r). Lo stesso dicasi del postulato metrico dell'ordine enunciato sulla retta come forma aperta, il quale si riduceva ad un postulato proiettivo, del tutto simile a quello valevole pel fascio di raggi (e pel fascio di piani).

Per quel che concerne il postulato di DEDEKIND, esso vale, col medesimo linguaggio, tanto sulle forme di 1ª specie, considerate dal punto di vista proiettivo, quanto sulla retta, considerata come aperta. Vi è soltanto da osservare che, quando si riferisce il postulato

(*) Per la critica e la formulazione dei postulati della Geometria elementare, ved. ad es. ENRIQUES, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1912), ed in special modo gli articoli 3.° 4°, 5°, 6°. Nell'articolo 5° (di G. VITALI) si troverà la deduzione del cosidetto postulato di ARCHIMEDE dal postulato di DEDEKIND, una volta ammessi i postulati della congruenza. Ed è per questa dipendenza, che noi abbiamo omesso di elencare il postulato di ARCHIMEDE fra i postulati della Geometria elementare.

di Dedekind alla retta, resa chiusa attraverso al suo punto improprio, il postulato stesso acquista una più larga significazione, valendo anche per la partizione in classi dei segmenti infiniti.

Resta perciò da prendere in esame soltanto il concetto di congruenza.

Anzitutto osserviamo che l'uguaglianza di due angoli ab, $a'b'$, si esprime dicendo che i segmenti da essi staccati sulla r, sono omologhi un una congruenza diretta o inversa, a seconda che i due angoli hanno lo stesso verso o verso contrario; la qual congruenza alla sua volta si definisce come una proiettività, concorde o discorde, che muta in sè l' involuzione I. In particolare la perpendicolarità di due rette a, b vien definita mediante la relazione di coniugio dei due punti ar, br, rispetto all' involuzione I. E queste sono definizioni puramente grafiche in relazione all'assoluto.

E veniamo infine al concetto generale di congruenza, in cui sono inclusi il concetto di eguaglianza di due segmenti o di due figure piane.

Cominciando dal caso più semplice, che è quello della congruenza inversa, ricordiamo ch'essa consiste nel prodotto di una traslazione lungo un asse v e di una simmetria ortogonale rispetto a quest'asse; sicchè la congruenza stessa può definirsi come un'omografia prodotto di un'omologia speciale, avente l'asse in r e centro vr (traslazione), per un'omologia armonica di asse v e avente il centro nel coniugato del punto vr rispetto all' involuzione I (simmetria ortogonale rispetto a v).

Consideriamo per ultimo una congruenza diretta ω, la quale, come sappiamo, consiste in una rotazione attorno ad un punto O (o in una traslazione). Si vede agevolmente che ω può definirsi come un'omografia individuata dalla condizione di subordinare su r una proiettività ellittica trasformante in sè I, e fra due punteggiate a, a', uscenti da O, una prospettività avente il centro in uno dei due punti di r, costituenti la coppia di I armonica colla coppia ar, $a'r$. Nel caso particolare

che la rotazione attorno ad O fosse di due angoli retti, la ω si ridurrebbe senz'altro a un'omologia armonica di asse r e di centro O. Del resto, anche senza analizzare direttamente qual è il legame grafico di ω coll'assoluto, basta, pel nostro scopo, di osservare che il prodotto di ω per una congruenza inversa β è ancora una congruenza inversa α, sicchè risulta $\omega \equiv \beta\alpha^{-1}$, e la ω si può pure definire come un'omografia prodotto di due congruenze inverse, che alla lor volta furon già definite proiettivamente.

Resta pertanto stabilito il teorema enunciato al principio di questo §.

§ 63.

Polarità piana. Condizioni che la individuano.

Una reciprocità ω fra due piani sovrapposti α, α' dicesi *involutoria* od anche un *sistema polare* od una *polarità piana*, quando $\omega \equiv \omega^{-1}$, cioè quando un elemento (punto o retta), del comune sostegno dei due piani, ha per omologo sempre lo stesso elemento (retta o punto) tanto se lo si considera appartenente ad α (e si applica la ω), quanto se lo si considera appartenente ad α' (e si applica la ω^{-1}).

Un punto ed una retta omologhi in una polarità diconsi *polo* e *polare*.

Nel parlare di un sistema polare, poichè l'operazione diretta ω non differisce dall' inversa ω^{-1}, è inutile distinguere i due piani sovrapposti α, α'. Si può cioè parlare di una polarità, che agisce sui punti e sulle rette di un sol piano.

Dalla definizione delle corrispondenze reciproche segue senz'altro che *in un sistema polare, se un punto appartiene ad una retta, il polo di questa appartiene alla polare di quello; e dualmente.*

Ricordando le proprietà fondamentali della *polarità rispetto ad una conica* (§ 41), si vede che tale corrispondenza, tra i punti e le rette del piano della conica, non è che una reciprocità involutoria, cioè un sistema polare, anche nel senso dell'attuale definizione. Ma, viceversa, non ogni polarità piana è necessariamente una polarità rispetto ad una conica (reale): tra poco ce ne convinceremo.

Un *triangolo* dicesi *autoreciproco* rispetto ad una reciprocità piana ω, quando ogni vertice del triangolo ha per retta corrispondente il lato opposto. Dimostriamo che:

Se una reciprocità piana possiede un triangolo autoreciproco, essa è una polarità.

Invero, se la ω fa passare dai punti A, B, C, non allineati, alle rette $a \equiv BC, b \equiv CA, c \equiv AB$, la ω^{-1} farà corrispondere al punto $b\,c \equiv A$, la retta $a \equiv BC$, e similmente ai punti B, C le rette b, c. Onde le tre coppie A, a; B, b; C, c si corrisponderanno in doppio modo.

Ai punti di un lato del triangolo ABC corrispondono proiettivamente, nella ω, le rette passanti pel vertice opposto; sicchè, segando quel lato col fascio che ha per centro questo vertice, si hanno due punteggiate proiettive sovrapposte, le quali risultano involutorie, perchè i due vertici appartenenti al lato stesso, si corrispondono in doppio modo. Ne segue che ad ogni punto di un lato del triangolo autoreciproco corrisponde in doppio modo una retta passante pel vertice opposto; e poichè ogni punto P del piano, esterno ai lati del triangolo, si può riguardare come intersezione delle rette $P\,A$; $P\,B$, e la retta p, corrispondente a P mediante la ω, può riguardarsi come congiungente i punti di a,b, omologhi delle rette $P\,A, P\,B$, si conclude che un punto ed una retta qualsiasi si corrispondono in doppio modo, cioè che ω è una polarità.

Siccome l'esistenza di un triangolo autoreciproco caratterizza l'involutorietà della data correlazione, quel triangolo si chiama anche *autopolare*.

Dalle proprietà generali delle correlazioni si trae che *le polari dei punti di una retta formano un fascio attorno*

al polo di questa retta, e corrispondono proiettivamente ai loro poli; e viceversa (dualmente).

Due punti diconsi *coniugati* o *reciproci* in una polarità, quando la polare dell'uno passa per l'altro e (quindi) viceversa. Sicchè un *punto coniugato di se stesso* sarà un punto appartenente alla propria polare. Dualmente si definiscono *due rette coniugate nella polarità.*

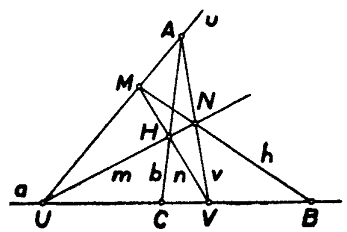
Se una retta a appartiene al proprio polo A, sulla a non vi sono altri punti coniugati di se stessi all'infuori di A. Infatti ad ogni punto di a, diverso da A, corrisponde (proiettivamente) una retta per A diversa da a. Ne deriva come corollario che:

Non esiste alcuna polarità piana in cui ogni punto appartenga alla propria polare, giacchè se un punto A appartiene alla propria polare a, ogni punto B di a, diverso da A, *non* appartiene alla propria polare, che è una retta b passante per A e diversa da a.

Se una retta a non appartiene al proprio polo A, sulla a vi sono due punti coniugati di se stessi o nessuno.

Invero, se la a non appartiene al proprio polo A, facendo corrispondere ad ogni punto di a l'intersezione della retta stessa colla polare di quel punto, avremo su a una proiettività, evidentemente involutoria, la quale, se non è identica, può avere due punti doppi o nessuno.

Per dimostrare che tale involuzione non può essere identica, basterà provare che, quando su a si hanno due punti doppi U, V, cioè due punti che appartengono alle loro polari u, v, esiste su a qualche coppia di punti coniugati distinti. Al punto M di u, diverso da U e da punto $A \equiv u\,v$ (polo di $a \equiv UV$) corrisponderà una retta m per U, diversa da u e da a; al punto $N \equiv vm$ corrisponderà la retta $n \equiv VM$; al punto $H \equiv mn$, la retta $h \equiv MN$,



ed infine al punto $B \equiv ha$, la retta $b \equiv HA$; sicchè i punti B, C, saranno coniugati nella polarità, e di più (a causa del quadrangolo completo $AHMN$ che siamo venuti in tal modo a costruire) saranno anche coniugati armonicamente rispetto ad U, V. Onde essi risultano distinti; c. d. d.

Il teorema dimostrato si può anche enunciare sotto quest'altra forma:

Data una polarità piana, sopra una retta non appartenente al proprio polo, le infinite coppie di punti coniugati rispetto alla polarità costituiscono un' involuzione iperbolica o ellittica.

Quest' involuzione dicesi *subordinata dalla polarità su quella retta.*

Dualmente si può considerare *l' involuzione subordinata dalla polarità in un fascio di raggi,* il cui centro non sia coniugato di se stesso.

Passiamo a stabilire che:

In una polarità piana qualunque esistono infiniti (∞^3) *triangoli autopolari.*

Per costruire un tal triangolo basta infatti scegliere come uno dei vertici un punto A non appartenente alla propria polare a, e come altri due vertici B, C, due punti distinti di a coniugati rispetto alla polarità. Di elementi arbitrari nella costruzione c' è il punto A (che sul piano dipende da due parametri) e uno dei due vertici rimanenti (che dipende da un sol parametro, dovendo ormai appartenere ad a).

Una polarità piana è individuata quando si conosca un triangolo autopolare $ABC \equiv abc$ e la polare p di un punto P, non appartenente ai lati del triangolo.

Infatti esiste una ed una sola correlazione che faccia passare dalla quaderna di punti indipendenti A, B, C, P alla quaderna di rette indipendenti a, b, c, p; e questa correlazione è una polarità, perchè ammette un triangolo autoreciproco.

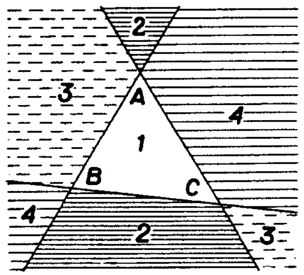
Ogni polarità si può individuare nel modo suddetto, perchè ammette infiniti triangoli autopolari.

§ 64.

Le due specie di polarità piane.

Una polarità piana ammette sempre elementi coniugati di se stessi? E se non sempre ne esistono, come si distingue a priori una polarità che ne possegga, da una che non ne possegga? A tali questioni è dedicato il presente §, in cui, per giungere più presto allo scopo, faremo largo uso dell' intuizione, pur avvertendo che i dati intuitivi cui ricorreremo sono implicitamente contenuti nei postulati già introdotti, e che potrebbero pertanto dedursi come conseguenza logica di quelli.

Un triangolo ABC divide il piano in quattro regioni (contrassegnate nella figura coi numeri 1, 2, 3, 4) *graficamente distinte* nel senso che due punti di una stessa regione posson essere congiunti da un segmento rettilineo, finito od infinito, che non incontri i lati del triangolo, mentre ogni segmento rettilineo, che congiunga due punti di regioni diverse, incontra almeno un lato del triangolo.



Due punti del piano, esterni ai lati del triangolo, appartengono o no alla stessa regione, secondo che le loro proiezioni sopra uno dei lati, dal vertice opposto, non separano o separano i vertici appartenenti a quel lato.

Il triangolo divide pure il piano rigato in quattro regioni (di rette), graficamente distinte. Due rette di una stessa regione incontrano ciascuno dei tre lati in coppie di punti che non separano i vertici appartenenti a quel lato; mentre due rette di regioni diverse incontrano uno almeno dei lati in punti che separano i vertici appartenenti a quel lato. Così per es. sono della stessa regione due rette che incontrano i segmenti finiti AB,AC, ed il segmento infinito BC; mentre sono di regioni diverse due rette di cui l'una incontri il segmento finito e l'altra il segmento infinito AB.

Ad ogni regione di punti viene associata una regione di rette, colla legge che per un punto qualunque della prima non passa nessuna retta della seconda. Le rette di una regione associata ad una regione di punti, diconsi *esterne* a quest'ultima.

Ogni retta penetra nelle 3 regioni di punti che non sono associate alla propria regione di rette. Se una retta penetra nella regione a cui appartiene il punto P, incontra due dei tre segmenti AC, BC, CA che limitano la regione individuata da P e non incontra il terzo.

Premesse queste nozioni, passiamo ad applicarle alla classificazione delle polarità piane.

Consideriamo una polarità ω individuata mediante un triangolo autopolare $ABC \equiv abc$ e, mediante la polare p (non passante nè per A nè per B nè per C) di un punto P, non appartenente ai lati del triangolo. Diciamo P_a, P_b, P_c, le proiezioni di P sui lati a,b,c, dai vertici rispettivamente opposti, e P'_a, P'_b, P'_c le intersezioni di p coi lati a, b, c. Il punto $P'_a \equiv pa$ ha per polare la retta PA e quindi il punto $P_a \equiv a.PA$ è coniugato al punto P'_a. Similmente son coniugati P_b, P_b' e P_c, P'_c. Ciò posto, se la retta p non penetra nella regione triangolare a cui appartiene P, le coppie BC, $P_aP'_a$ e CA, $P_bP'_b$ e AB, $P_cP'_c$ si separano; onde le involuzioni subordinate dalla ω sui tre lati del triangolo sono ellittiche. Ne segue che sui lati del triangolo non esistono punti autoconiugati; ed inoltre, se Q è un'altro punto qualunque, esterno ai lati del triangolo, e q la sua polare, poichè il punto $Q'_a \equiv qa$ è coniugato al punto $Q_a \equiv a.\,QA$ nell' involuzione ellittica subordinata da ω sul lato a, così le coppie BC, $Q_aQ'_a$ debbon separarsi: e similmente la coppia $Q_bQ'_b$ separa CA, e la coppia $_cQ'_c$ separa AB.

Dunque la polare q di Q non penetra nella regione triangolare a cui appartiene Q e quindi tanto meno

passa per Q. Nel caso che stiamo esaminando non esistono pertanto in tutto il piano punti coniugati di se stessi.

Se la retta p penetra nella regione triangolare a cui appartiene P, delle tre coppie $P_aP'_a$, $P_bP'_b$, $P_cP'_c$, due non separano le due coppie di vertici con esse allineati, mentre la terza separerà la coppia rimanente. Dunque due delle tre involuzioni, che si hanno sui lati a, b, c, sono iperboliche ed una è ellittica. I punti doppi delle prime due sono coniugati di se stessi. Si conclude pertanto che:

Le polarità piane sono di due specie:

1ª POLARITÀ UNIFORMI, *cioè prive di elementi autoconiugati.*

2ª POLARITÀ NON UNIFORMI, *cioè dotate di elementi autoconiugati.*

Secondo che un punto, il quale appartenga ad una delle quattro regioni triangolari determinate da un triangolo autopolare, ha per polare una retta che non penetra o penetra in quella regione, si ha una polarità della prima o della seconda specie.

Sui lati di un triangolo autopolare una polarità uniforme subordina tre involuzioni ellittiche, mentre una polarità non uniforme subordina due involuzioni iperboliche ed una ellittica.

Una polarità rispetto ad una conica (§ 41) è evidentemente una polarità non uniforme. Viceversa dimostreremo che:

Ogni polarità non uniforme è una polarità rispetto ad una conica.

Cominciamo dall' osservare che se la polarità ω possiede il punto autoconiugato A, una retta uscente da A e diversa dalla polare a di A, non apparterrà al proprio polo (che è un punto di a diverso da A) e quindi su essa la ω subordinerà un' involuzione iperbolica con un punto doppio in A e con un altro punto doppio in B. Variando la retta nel fascio A, il punto B varierà descrivendo una curva k, luogo dei punti autoconiugati nella polarità ω. Soltanto allorchè la retta variabile coincide con a, i due punti A, B si confondono.

Poichè tre punti qualunque di k non sono mai allineati (pag. 274), per cinque punti A,B,C,D,E dalla curva k passerà una determinata conica k_1. Il triangolo FGH avente per vertici i punti diagonali $F \equiv AB.CD$, $G \equiv AC.BD$, $H \equiv AD.BC$ del quadrangolo completo $ABCD$, è autopolare nella polarità ω_1 individuata dalla conica k_1 (pag. 197), ed è anche autopolare nella data polarità ω. Invero, la polare del punto F nella ω dovrà passare pei coniugati di F nelle involuzioni subordinate da ω sulle rette AB, CD; e siccome queste involuzioni hanno per punti doppi A,B e C,D, si deduce che la polare di F dovrà passare pei coniugati armonici di F rispetto alle coppie AB, CD, e quindi, a causa della proprietà armonica del quadrangolo completo $ABCD$, dovrà coincidere colla retta GH. Similmente si vede che la polare di G è HF e la polare di H è FG.

Ora si osservi che il punto $K \equiv AB.CE$ non può appartenere a nessuna delle rette FG, FH, che si tagliano nel punto F di AB, perchè altrimenti i cinque punti A, B, C, D, E non sarebbero indipendenti. Tuttavia può darsi che K appartenga alla retta HG. Ma in tal caso il punto $N \equiv AB.DE$ non può appartenere a nessuna delle rette FG, FH, HG (l' ipotesi contraria porta infatti alla dipendenza dei cinque punti A,B,C,D,E).

Sicchè tra i punti diagonali del pentagono completo $ABCDE$, ce n' è sempre qualcuno che non appartiene ai lati del triangolo FGH. Se per es. un tal punto è $K \equiv AB.CE$, la polare di K sarà la stessa tanto nella polarità ω che nella ω_1 (e precisamente coinciderà col lato opposto a K nel triangolo diagonale di $ABCE$); e quindi le polarità ω ed ω_1 coincideranno (pag. 275). Poichè nella ω_1 il luogo dei punti autoconiugati è la conica k_1, si deduce che la curva k coincide colla conica k_1.

Osservazione. Il teorema stabilito ci mostra come la definizione delle coniche mediante la generazione proiet-

tiva equivale perfettamente alla definizione seguente (di STAUDT):

Si dice conica luogo o curva di 2° ordine, il luogo dei punti autoconiugati in una polarità piana non uniforme; e dualmente.

Quindi la teoria delle coniche si sarebbe potuta costruire (seguendo STAUDT) come una conseguenza della teoria della polarità (*).

Il concetto di polarità uniforme s' identifica, nella Geometria sintetica, col concetto di *conica immaginaria*, come il concetto d' involuzione ellittica s' identifica col, concetto di coppia di elementi immaginari (pag. 124).

Cade qui in acconcio di osservare che la definizione di conica mediante una polarità piana non è che la traduzione immediata della definizione analitica di conica, come luogo dei punti le cui coordinate (cartesiane o proiettive) x, y soddisfanno ad un'equazione di 2° grado:

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Invero, se si considera l'equazione bilineare

$$(2) \qquad a_{11}xx' + a_{12}(xy' + x'y) + a_{22}yy' + a_{13}(x + x') + \\ + a_{23}(y + y') + a_{33} = 0,$$

questa associa le coppie (x,y) (x',y') di punti del piano, per guisa che ad ogni punto (x,y) corrisponde una retta descritta dal punto (x', y'); e viceversa. Si tratta pertanto di una reciprocità, la quale è involutoria (ossia è una polarità), perchè l'equazione (2) è simmetrica rispetto alle due serie di variabili (x,y), (x',y'). La (2) rappresenta insomma (come ben si sa dalla Geometria analitica) la condizione di coniugio dei due punti (x, y), (x', y') rispetto alla conica (1), la quale apparisce così come il luogo dei punti coniugati di se stessi ($x = x', y = y'$) nella polarità piana definita dalla (2). Quando la (1) è immaginaria (pur essendo reali i coefficienti a) la (2) rappresenta una polarità (reale) uniforme; e viceversa.

(*) Vedi es. ENRIQUES, *Lezioni di geometria proiettiva* (Bologna, Zanichelli, 1920), pag. 215.

§ 65.

La polarità ortogonale nella stella (propria). Subordinazione della Geometria metrica della stella alla Geometria proiettiva.

Data una stella di centro proprio S la corrispondenza biunivoca che nasce tra le sue rette ed i suoi piani, chiamando omologhi una retta ed un piano ortogonali, fa passare evidentemente da rette di un fascio a piani di un fascio, e viceversa: onde è una correlazione. A cagione del suo manifesto carattere involutorio, è anzi una *polarità*, e, per distinguerla dalle altre polarità della stella, si aggiunge l'attributo *ortogonale* o *assoluta*.

Alle polarità della stella si trasportano, colla legge di dualità dello spazio, tutte le proprietà già stabilite per le polarità piane; in particolare la distinzione delle polarità in due specie: uniformi e non uniformi.

La polarità ortogonale è uniforme, perchè una retta ed un piano ortogonali non possono mai appartenersi.

La polarità ortogonale è importante nella Geometria della stella, perchè ne costituisce *l'assoluto*, nel senso cioè che *ogni proprietà metrica di una figura della stella si può riguardare come una proprietà grafica della figura stessa in relazione colla polarità ortogonale.*

Basta invero provare che le relazioni di uguaglianza di angoli rettilinei e diedri si posson enunciare come proprietà grafiche in relazione alla polarità assoluta τ.

Per esprimere che l'angolo rettilineo ab è uguale all'angolo $a'b'$, basterà dire che questi angoli si corrispondono in un'omografia ω che muta in se stessa la polarità τ (una tale omografia si chiama una *congruenza della stella*, e può generarsi con una conveniente rotazione della stella attorno al centro S).

Infatti, se la ω muta in se stessa la τ e fa passare dall'angolo ab è all'angolo $a'b'$, muterà l' involuzione circolare, subordinata dalla τ sul fascio ab, nell' involuzione circolare del fascio $a'b'$, cioè subordinerà una congruenza tra i fasci ab, $a'b'$ (pagina 108).

Similmente, per esprimere che due angoli diedri $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ sono uguali, basterà dire ch'essi si corrispondono in un'omografia che muta in sè la τ, perchè una tale omografia muta l' involuzione circolare del fascio di piani $\alpha\beta$, nell' involuzione analoga di $\alpha'\beta'$.

Osservazione 1ª. In una stella ad un angolo rettilineo o diedro non può associarsi un verso, perchè con un movimento della stella in sè possono scambiarsi tra loro i lati o le facce del detto angolo.

Osservazione 2ª. La sezione della polarità ortogonale della stella col piano improprio dello spazio, dà luogo ivi ad a una polarità uniforme, che si chiama la *polarità assoluta del piano improprio.* Una congruenza della stella dà luogo ad una *congruenza* sul piano improprio (omografia permutabile colla polarità assoluta).

§ 66.

Dimostrazione a posteriori della legge di dualità nelle forme di 2ª specie ed estensione a tutte le proprietà grafiche. Legge di dualità nella stella.

La dimostrazione *a priori* della legge di dualità nelle forme di 2ª specie (§ 10), dipendendo essenzialmente dal fatto che il gruppo dei postulati, che stanno a base della Geometria proiettiva, si muta in sè (salvo l'ordine), allorquando si operino certi scambi di parole, non permetteva di ritener valida quella legge per le proprietà che, pure essendo grafiche (ossia relative soltanto ai concetti fondamentali su cui poggia la Geometria proiettiva), non fossero state stabilite per via grafica (cioè col solo ausilio di quei postulati).

Ma noi ora possiamo dimostrare che *la legge di dualità nel piano o nella stella vale per tutte le proprietà grafiche, indipendentemente dalla via che si segue per dimostrarle.*

Ragioniamo per es. nel piano. Sia F una figura piana, dotata di una proprietà grafica P, la quale affermi cioè che certi punti e certe rette di F si appartengono; che certi punti allineati (o certe rette per un punto) si susseguono; che infine sopra certe forme di 1ª specie taluni punti o rette costituiscono il limite di separazione di certe coppie di classi ordinate (contigue) soddisfacenti al postulato di DEDEKIND. Operando sul piano di F mediante una reciprocità π e chiamando con F' la figura trasformata di F, poichè a punti e rette di F che si appartengono, corrispondono rette e punti di F', che pure si appartengono; a punti o rette susseguentisi, corrispondono rette o punti susseguentisi; ed infine ad un punto o ad una retta che sia confine di due classi contigue, corrisponde una retta od un punto confine delle due classi corrispondenti; la proprietà P di F si muterà in una proprietà P' di F', la quale si otterrà dalla precedente scambiando tra loro le parole « *punto* » e « *retta* ».

Analogamente si ragiona nella stella.

Quanto alle proprietà metriche, abbiano già avvertito, fin dal § 9, che non v' è alcuna ragione per ritenere applicabile anche ad esse la legge di dualità. Ora siamo anzi in grado di provare che effettivamente *la legge di dualità nel piano non è in generale valida per le proprietà metriche.*

Se, invero, M è una proprietà metrica della figura piana F, possiamo anzitutto enunciarla come una proprietà grafica M_1 della figura complessiva costituita da F e dall'assoluto A del piano (pag. 269). Operando con una reciprocità piana π, la M_1 si muta in una proprietà grafica M'_1, della figura composta dalla trasformata F' di F e dalla trasformata A' di A. Perchè si potesse parlare di una proprietà metrica di F', duale della proprietà M, occorrerebbe pertanto che ai legami grafici di F' con A', che entrano nell'enunciato di M'_1, si potessero sostituire legami grafici di F' coll'assoluto A: il che non è, in generale, possibile, in quanto l'ente A', che è un' involuzione ellittica di un fascio di raggi, non ha generalmente alcun significato metrico.

E se la suddetta sostituzione è possibile, così che si possa parlare di una proprietà metrica M' duale di M, applicando ad F' un'altra reciprocità ρ, si può similmente parlare di una proprietà metrica M'' duale di M', e spettante alla figura F'', trasformata di F'. Ma allora l'omografia $\omega \equiv \pi\rho$, in cui si corrispondono le figure F, F'', muta la proprietà metrica M di F in una proprietà metrica M'' di F''; e le due proprietà M, M'' si enunciano per le figure F, F'' collo stesso linguaggio. Siccome infine la ω è in sostanza una qualunque omografia piana (*), così alla proprietà M di F corrisponde la stessa proprietà metrica di ogni figura F'', omografica con F. In tal caso si dice che M è una *proprietà metrico-proiettiva.*

Esistono effettivamente proprietà metrico-proiettive: l'esempio tipico è fornito dal birapporto di quattro elementi di una forma di 1ª specie. Per es. alla proprietà metrica: « due quaderne proiettive di punti allineati, hanno lo stesso birapporto » fa riscontro per dualità la proprietà metrica: « due quaderne proiettive di raggi concorrenti ciascuna in un punto, hanno lo stesso birapporto » (**).

Possiamo dunque dire che *le sole proprietà metriche alle quali è applicabile la legge di dualità, son le proprietà metrico-proiettive.*

Poichè una proprietà metrico-proiettiva di F deve trasportarsi immutata ad ogni figura omografica con F, e d'altronde i soli rapporti fra gli elementi di F che non si alterino di fronte ad *ogni* trasformazione omografica, sono i rapporti grafici, così in definitiva *ogni proprietà metrico-proiettiva equivale ad una proprietà grafica.*

(*) Infatti se ω è una data omografia, il prodotto di ω per una data reciprocità ρ^{-1}, è una reciprocità π; e quindi $\omega \equiv \pi\rho$.

(**) Altri esempi di proprietà metrico-proiettive veggansi nei miei citati *Complementi di Geometria proiettiva*, § 3.

Per es. la proprietà metrico-proiettiva prima considerata, equivale alla proprietà grafica: « In un'omografia a due quaderne proiettive di punti allineati, corrispondono due quaderne analoghe, fra di loro proiettive ».

Una proprietà (grafica o metrico-proiettiva), che si conservi immutata di fronte alle trasformazioni omografiche, dicesi una *proprietà proiettiva*. Enuncieremo riassumendo:

La legge di dualità nel piano è valida per tutte le proprietà proiettive.

Passiamo ora alla stella. In una stella propria, al contrario di quel che accade nel piano, esiste una correlazione che muta in sè l'assoluto, ed è la polarità ortogonale τ. Onde, quando una proprietà metrica M di una figura F della stella, si enunci come un rapporto grafico M_1 della figura F con τ, la proprietà M'_1, trasformata di M mediante τ, risulterà una relazione grafica della figura F', trasformata di F, colla polarità τ. Spogliando la M'_1 dei suoi legami coll'assoluto τ e sostituendoli coi rapporti metrici corrispondenti, la M'_1 darà luogo ad una proprietà metrica M', duale di M. Si conclude che:

In una stella propria la legge di dualità è valida per tutte le proprietà (grafiche e metriche).

CAPITOLO QUINDICESIMO

Le proiettività tra coniche come corrispondenze subordinate da proiettività tra i loro piani.

§ 67.

Coniche omografiche e correlative.

Nel capitolo XIII abbiamo studiato le corrispondenze proiettive tra coniche, costruendo per queste corrispondenze una teoria analoga a quella delle proiettività tra forme di 1ª specie. Nuove proprietà delle corrispondenze proiettive tra coniche si ottengono riguardando tali corrispondenze come subordinate da proiettività tra i piani delle coniche stesse. Ciò è sempre possibile, come afferma il teorema seguente:

Ogni proiettività tra due coniche (luogo od inviluppo) è subordinata da una ben determinata proiettività tra i piani delle due coniche. Se si tratta di due coniche entrambe luogo od entrambe inviluppo, quest'ultima proiettività è un'omografia; se si tratta di un luogo e di un inviluppo, essa è una correlazione.

Ragioniamo su due coniche luogo k, k' appartenenti rispettivamente ai piani α, α'. Tra le due coniche sia posta una proiettività $\pi \equiv \begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$, e diciamo D il polo della retta AB rispetto a k e D' il polo di $A'B'$ rispetto a k'.

Se tra i piani α, α' esiste una omografia che muti k in k', la corrispondenza biunivoca da essa subordinata tra le due coniche è una proiettività, perchè da due punti omologhi di k, k', le due coniche punteggiate vengon proiettate secondo due fasci corrispondenti nella ω, e quindi proiettivi. Se dunque un'omografia muta k in k', facendo corrispondere ad A,B,C; A',B',C', essa subordina tra le due coniche la proiettività data π.

Ma un'omografia che muti k in k', ed A,B,C in A',B',C', muta il polo D della AB rispetto a k, nel polo D' della $A'B'$ rispetto a k'; dunque, se esiste un'omografia soddisfacente alle condizioni richieste, essa muta la quaderna $ABCD$ nella $A'B'C'D'$.

Ora, siccome i punti delle due quaderne suddette sono evidentemente indipendenti, esiste una sola omografia $\omega \equiv \begin{pmatrix} A\ B\ C\ D \\ A'B'C'D' \end{pmatrix}$ e questa muta la conica k, che passa per A,B,C, toccando in A,B le rette AD, BD, in una conica che passa per A',B',C', toccando in A',B' le $A'D'$, $B'D'$; cioè nella conica k' (pag. 151); c. d. d.

Quando una proiettività tra due coniche si considera come subordinata da una proiettività tra i loro piani, si parla di due *coniche omografiche* o *correlative*, secondo che questa proiettività è un'omografia od una correlazione.

Se le due coniche proiettive k,k' son sovrapposte e l'omografia ω, che subordina tra esse la data proiettività π, non è omologica, essa muta le coppie di punti di k,k', corrispondenti in π, in coppie analoghe, e quindi le coppie di rette associate rispetto a π (pag. 244) in coppie analoghe. Il punto comune a due rette associate viene pertanto mutato nel punto comune ad altre due rette associate e l'asse di collineazione u della proiettività vien dunque mutato in sè.

Dualmente, anche il centro di collineazione U della π, che è poi il polo di u rispetto alla conica $k \equiv k'$, vien mutato in sè dalla ω.

Ricordando la definizione di elementi uniti associati, rispetto ad un'omografia piana non omologica (pag. 260), si vede anzi che u, U sono associati rispetto ad ω.

Queste osservazioni si posson completare dimostrando che:

Quando un'omografia non omologica ω muta in sè una conica k, vi è una sola coppia di elementi uniti associati per ω, che sieno polo e polare rispetto a k: ed essi sono il centro e l'asse di collineazione della proiettività π subordinata da ω su k.

Sieno infatti U, u i due elementi uniti, cui allude l'enunciato. Se u taglia k in due punti (reali) M,N, questi sono uniti per ω e per π, onde la retta $u \equiv MN$ coincide coll'asse, il punto U col centro di collineazione di π. Nè in tal caso vi sono altre coppie di elementi uniti associati per ω e coniugati rispetto a k, perchè la retta unita UM, tangente a k in M, è associata ad N (pag. 261) e la retta unita UN è associata ad M.

Se u tocca k in U, per U non potrà passare nessun'altra retta unita, distinta da u, perchè altrimenti il punto V ove una tal retta taglierebbe ulteriormente k, sarebbe unito ed associato ad u (pag. 261); dualmente in u non vi son punti uniti, all'infuori di U. Ne segue che neppur può esistere una retta unita non passante per U, perchè essa taglierebbe u in un punto unito, diverso da U; e dualmente che non può esistere alcun punto unito fuori di u. In complesso u, U sono i soli elementi uniti di ω, e coincidono pertanto rispettivamente coll'asse e col centro di collineazione di π, i quali già son elementi uniti di ω.

Se infine u è esterno a k e quindi U è interno, la ω non può avere altri punti uniti (reali), perchè se ne avesse uno, M, questo, non essendo associato ad u, giacerebbe sopra u ed anche il punto N di u coniugato di M rispetto a k, sarebbe unito. Ciascuna delle UM, UN taglierebbe allora k in due punti, che, non potendo esser uniti, si corrisponderebbero in doppio modo, e la ω sarebbe omologica (pag. 258), contro il supposto. Dualmente non posson esservi rette unite (reali) distinte da u. L'asse e il centro di collineazione di π coincidono dunque con u, U, che sono i soli elementi uniti (reali) di ω.

Passiamo ora a studiare le omografie omologiche che mutano in sè una conica. Dimostriamo all'uopo che:

Un' involuzione tra i punti di una conica k è subordinata da un'omologia armonica, che muta la conica in se stessa; e viceversa ogni omologia che muti in sè la conica k, è armonica e subordina su k un' involuzione.

La prima parte del teorema deriva dal fatto che tutte le rette uscenti dal polo U della data involuzione π (pag. 247), sono unite nell'omografia ω, che subordina la π, e quindi ω è un'omologia che ha per centro U (pag. 255). L'asse u dell' involuzione π sarà l'asse dell'omologia e poichè U ed u sono polo e polare rispetto a k, si conclude che la ω è un'omologia armonica.

Viceversa, se un'omologia ω di centro U ed asse u, muta in sè la k, a due punti A,B di k corrisponderanno due punti A',B' allineati con U (perchè le rette UA, UB sono unite) e quindi la proiettività π, subordinata su k, sarà un' involuzione di centro U. Dualmente u sarà l'asse dell' involuzione, cioè sarà la polare di U rispetto a k. Ne segue che l'omologia ω è armonica.

§ 68.

Coniche omologiche. Le diverse specie di contatti di due coniche.

Due *coniche* k,k' diconsi *omologiche,* quando si corrispondono in un'omologia. A noi interessa sopra tutto il caso in cui il centro U dell'omologia appartiene all'una delle due coniche e quindi anche all'altra. In tal caso l'omologia subordina tra le due coniche una proiettività col punto unito U e quindi U è un punto di contatto per k, k' (pag. 231).

Inversamente *se due coniche k, k' di un piano si toccano in un punto U, si corrispondono in una determinata omologia che ha per centro U,* perchè riferendo prospettivamente le due coniche rispetto al centro U, questo punto risulta unito, per l' ipotesi che le due coniche si tocchino in esso, e nell'omografia che subordina la prospettività definita, risultano unite tutte le rette per U.

Dualmente *le due coniche si corrispondono in una seconda omologia, ben determinata, che ha per asse la tangente comune.*

Consideriamo l'omologia di centro U che muta k in k' e diciamone u l'asse. Proveremo che *l'asse u sega le due coniche k,k' negli stessi due punti, reali od immaginarii.*

È chiaro anzitutto che ogni punto reale comune ad u ed a k, essendo unito nella proiettività tra k e k', deve appartenere anche a k'; e quindi, se l'asse u sega k in due punti reali, oppure tocca k in un punto, esso segherà k' negli stessi due punti, o rispettivamente la toccherà in quel punto.

Se la u sega k in due punti immaginarî, cioè se k subordina su u un' involuzione ellittica I, l'omologia che muta k in k', muta la polarità rispetto a k nella polarità rispetto a k', e quindi l' involuzione I nell' involuzione subordinata da k' su u. Poichè ogni punto di u si muta in sè, si conclude che k' subordina sulla u la I, cioè che k,k' segnano sull'asse la stessa coppia di punti immaginarii.

Quanto alle posizioni che l'asse u può occupare rispetto alle due coniche, possono darsi tre casi:

1) L'asse u sega le due coniche in due punti reali od immaginarî, distinti da U. In tal caso si dice che k,k' hanno in U un *contatto semplice* o *bipunto* o *del* 1° *ordine.* Si dice pure che in U sono riunite *due intersezioni infinitamente vicine* delle due coniche, perchè l'una di esse, per es. k', si può pensare come limite di una conica che incontri l'altra in U e in tre altri punti distinti, di cui uno tenda ad U.

Seguendo il movimento di un punto lungo una delle due coniche, si vede che esse non si traversano in U, ma che l'una rimane tutta esterna all'altra, oppure che esse sono mutuamente esterne.

2) L'asse u passa per U, segando inoltre le due coniche nel punto V diverso da U. L'effettiva possibilità di questo caso è resa evidente dal fatto che si può sempre individuare un'omologia che abbia per centro U, per asse la retta $u \equiv UV$, e che faccia passare da un punto generico A di k ad un punto A' non situato su k ed allineato con U. Anzi quest'omologia si può riguardare come limite di un'omologia che abbia per centro U, per coppia di elementi corrispondenti A,A', e per asse una retta segante k nei punti V, W, uno dei quali, W, tenda ad U. Sicchè, quando u passa per U, si può dire che le due coniche k,k' hanno in U *tre intersezioni infinitamente vicine*, ed un'altra intersezione fuori (in V).

In tal caso il *contatto* si chiama *tripunto* o *del* 2° *ordine* od anche un'*osculazione*. Facendo muovere un punto lungo una delle due coniche, si vede che esse *si traversano* in U.

3) L'asse u è la tangente comune in U. Ciò è effettivamente possibile, e si prova come sopra. Così pure si vede che la conica k', ad esempio, può ottenersi come limite di un'altra che osculi k in U, e che passi per un altro punto V di k, allorquando quest'ultimo punto tenda ad U. Cioè, se u tocca le coniche k, k', in U sono riunite *quattro intersezioni infinitamente vicine*.

Il *contatto* dicesi *quadripunto* o *del* 3° *ordine* od anche una *superosculazione*.

In tal caso le due coniche non hanno comuni fuori di U altri punti, nè reali, nè immaginarî: il contatto è cioè il più intimo che si possa ottenere, se si vuole che le k,k' si conservino distinte.

Le due coniche si toccano senza traversarsi; anzi esse restano da una medesima parte della tangente comune e l'una contiene nel suo interno l'altra.

La natura del contatto delle coniche k,k' nel punto U, può anche definirsi considerando la specie della proiettività π, che nasce fra i punti della retta t, tangente comune alle due coniche in U, chiamandone omologhi due punti, che sieno poli di una stessa retta per U, rispetto alle k,k'. Questa proiettività coincide evidentemente con quella subordinata sulla t dall'omologia di centro U, che muta k in k'; sicchè la proiettività π sarà iperbolica, quando l'asse u di quest'omologia non passa pel centro U, cioè quando le k,k' hanno in U un contatto bipunto; parabolica quando l'asse u passa per U senza coincider con t (contatto tripunto): si ridurrà infine all' identità, quando l'asse u coincide con t (contatto quadripunto).

Si conclude pertanto che *le coniche k,k' hanno in U un contatto del* 1° *o del* 2° *o del* 3° *ordine, secondo che la proiettività π è iperbolica o parabolica o identica.*

Tra le coniche osculatrici ad una data conica, hanno particolare importanza i circoli osculatori.

In ogni punto di una conica c' è un sol circolo osculatore, la cui costruzione si potrebbe dedurre agevolmente dalle precedenti considerazioni; ma per ciò rimando il lettore ai miei « Complementi di geometria proiettiva » (pagg. 277 e 344).

§ 69.

Coniche affini. Applicazioni.

Due *coniche* diconsi *affini* quando si corrispondono in un'affinità piana.

Consideriamo dapprima due coniche affini sovrapposte; cioè studiamo le affinità che mutano in sè una data conica. Per quel che concerne le affinità omologiche e le omotetie, ricordando un risultato stabilito a pag. 264, si può enunciare senz'altro che:

Le affinità omologiche che mutano in sè una conica qualunque sono le simmetrie (oblique) rispetto ai singoli diametri.

Una parabola non è trasformata in sè da nessuna omotetia, mentre una conica a centro è mutata in sè da un'omotetia: la simmetria rispetto al centro.

Consideriamo ora una conica a centro k, e cerchiamo quali sono le affinità non omologiche che la mutano in sè.

Detta u la retta impropria del piano di k, il polo U di u, cioè il centro di k, sarà unito per ogni affinità che muti in sè k, essendo unita la u; e poichè U, u non si appartengono, saranno elementi uniti associati per l'affinità stessa (pag. 261). Ne deriva (pag. 288) che u, U sono asse e centro di collineazione di ogni affinità non omologica che muti in sè k.

Quando sia nota una coppia A,A' di punti corrispondenti nella proiettività subordinata sopra una data conica a centro, k, da un'affinità non omologica τ, che muti in sè la conica, la proiettività stessa risulta pertanto perfettamente determinata (dalla sua costruzione), perchè se ne conosce già l'asse di collineazione u. Per trovare l'omologo B' di un punto B, basta invero intersecare k colla parallela da A alla retta $A'B$.

Dunque, fissato il punto A, per individuare un'affinità non omologica, fra quelle che mutano in sè k, c'è soltanto da assegnare la posizione di A' sulla conica. Risulta così provato che *le affinità non omologiche che mutano in sè una conica a centro sono* ∞^1; *ognuna di esse è individua'a da una coppia di punti omologhi.*

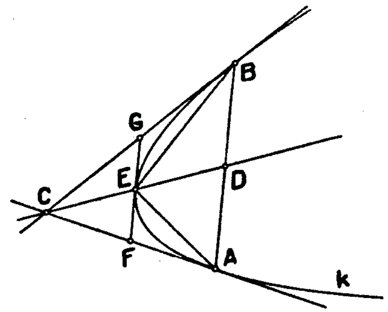
Si può anche osservare che *queste affinità sono tutte equivalenti*, cioè che due aree omologhe in una qualunque di esse, sono uguali. Se la conica k è un'ellisse, ciò si prova tenendo conto del fatto che ognuna delle affinità suddette muta in sè l'area finita racchiusa dall'ellisse (perchè muta i punti interni in punti interni) e quindi il rapporto d'affinità viene uguale ad 1. Se la conica k è un' iperbole, si osserverà invece che un'omografia affine, la quale trasformi k in se stessa, muta l'area del triangolo racchiuso dagli asintoti e da una terza tangente, in un'area analoga, e ciò significa che il rapporto d'affinità è ancora uguale ad 1 (pag. 206).

Passiamo ora alle affinità che trasformano in sè una parabola k. Sia τ una tale affinità, u la retta impropria del piano di k, ed U il punto all' infinito della parabola. La τ subordinerà sulla k una proiettività con un punto unito in U, la quale potrà essere ulteriormente

individuata assegnando due coppie AA',BB' di punti proprî corrispondenti. Viceversa, assegnando sulla k due tali coppie, la proiettività $\begin{pmatrix} A\ B\ U \\ A'B'U \end{pmatrix}$ resterà subordinata da un'omografia che lascia fissa la retta u, tangente a k in U, cioè da un'affinità. Dunque, dati i punti A,B, per fissare un'affinità, che muti in sè k, c'è soltanto da assegnare le posizioni su k dei punti A',B'; cioè *vi sono* ∞^2 *affinità che mutano in sè una parabola; ognuna di esse è individuata da due coppie di punti omologhi.* Tra queste ∞^2 affinità sono comprese le omologiche, le quali si ottengono scegliendo A',B' in modo che le corde AA', BB', risultino parallele.

Un'applicazione notevole della determinazione delle affinità che mutano in sè una parabola, consiste nel calcolo dell'area di un *segmento parabolico*, che è la superficie finita racchiusa da un arco di parabola e dalla corda sottesa. Per brevità diremo *triangolo circoscritto* ad un segmento parabolico AB, il triangolo ABC che ha per lati la corda AB e le tangenti alla parabola k nei punti A,B.

Se $A'B'$ è un'altra corda di k, l'affinità che muta in sè k e che fa passare da A ad A', da B a B', muta l'arco finito AB nell'arco finito $A'B'$ (perchè il punto improprio U della parabola si muta in sè); il segmento finito rettilineo AB, nel segmento finito rettilineo $A'B'$; la superficie del segmento parabolico AB, nella superficie del segmento parabolico $A'B'$; e infine la superficie del triangolo ABC, in quella del triangolo $A'B'C'$. Onde, per la proprietà caratteristica dell'affinità (pag. 262), avremo:



$$\frac{\text{seg. par.} AB}{\text{triang.} ABC} = \frac{\text{seg. par.} A'B'}{\text{triang.} A'B'C'} = r.$$

Si tratta ora di calcolare il rapporto costante r. Se D è medio tra A,B, la retta CD è il diametro coniugato alla direzione di AB, e quindi il punto E, ove CD incontra k, è medio tra C,D, perchè deve separare armonicamente la coppia C,D insieme al punto improprio U della parabola. La tangente a k in E, che sega le tangenti CA, CB nei punti F, G, risulta parallela ad AB, e si ha:

$$\text{seg.par.} AB = \text{seg.par.} AE + \text{seg.par.} EB + \text{triang. } AEB.$$

Ricordando la relazione precedente e indicando con $ABC, AFE, \ldots$ le aree dei triangoli omonimi, viene:

$$r.ACB = r.AFE + r.EGB + AEB = r(ACB - FCG - AEB) + \\ + AEB,$$

donde:

$$r.\,FCG + r.\,AEB = AEB.$$

Poichè il triangolo FCG ha l'altezza uguale a quella di AEB, ma la base uguale alla metà di AB, la precedente relazione diviene:

$$\frac{1}{2} r.\,AEB + r.\,AEB = AEB,$$

dalla quale si ricava:

$$r = \frac{2}{3}.$$

Possiamo dunque enunciare il teorema di ARCHIMEDE:

L'area di un segmento parabolico è uguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area del triangolo circoscritto.

Prima di terminare questo § vogliamo profittare delle trasformazioni affini per calcolare l'area di un'ellisse k, di cui sieno OA, OB due semidiametri coniugati.

Supponiamo che OA, OB formino un angolo $\omega \leq \frac{\pi}{2}$ e che le loro lunghezze sieno espresse dai numeri a, b.

In un piano α', diverso o no dal piano α di k, consideriamo un circolo k', di cui sieno $O'A'$, $O'B'$ due raggi ortogonali ($O'A' = O'B' = r$) e poniamo tra α, α' l'affinità ben determinata (pag. 262), che fa passare da O ad O', da A ad A' e da B a B'. Questa affinità muta l'ellisse k in un'ellisse, la quale, dovendo avere per centro O' e per semidiametri coniugati i raggi $O'A', O'B'$, coincide col circolo k'.

Il parallelogrammo P inscritto in k, che ha per diagonali i due diametri coniugati a cui appartengono OA, OB, si muta nel quadrato P' inscritto in k', che ha per diagonali i due diametri ortogonali a cui appartengono $O'A'$, $O'B'$; e, poichè la superficie finita racchiusa da k si muta nella superficie del circolo k', avremo (pag. 262):

$$\frac{\text{area } k}{\text{area } k'} = \frac{\text{area } P}{\text{area } P'}.$$

Ora area $P = 2ab \sin\omega$, area $P' = 2r^2$ ed area $k' = \pi r^2$, onde:

$$\frac{\text{area } k}{\pi r^2} = \frac{2\,a\,b \sin\omega}{2\,r^2},$$

da cui si trae:

$$\text{area } k = \pi ab \sin\omega.$$

Dunque *l'area di un'ellisse, di cui sieno a, b le lunghezze di due semidiametri coniugati, inclinati dell'angolo ω, è espressa da $\pi ab \sin\omega$.*

In particolare, se a_0, b_0 son le lunghezze dei semiassi, l'area dell'ellisse verrà uguale a $\pi a_0 b_0$.

Se P_1 è un parallelogrammo inscritto in k, che abbia per diagonali due diametri coniugati di lunghezze $2a_1$, $2b_1$ e inclinati dall'angolo ω_1 avremo:

$$\text{area } k = \pi ab \sin\omega = \pi a_1 b_1 \sin\omega_1,$$

donde si trae:

$$\text{area } P_1 = 2a_1b_1\sin\omega_1 = 2ab\sin\omega = \text{area } P\,;$$

cioè il teorema di APOLLONIO:

Gli infiniti parallelogrammi inscritti in un'ellisse ed aventi per diagonali le coppie di diametri coniugati, sono equivalenti.

CAPITOLO SEDICESIMO

Le cubiche gobbe e le superficie di 2° ordine come figure generate da forme di 2ª specie proiettive.

§ 70.

Generazione della cubica gobba mediante due stelle collineari.

Allo stesso modo che le forme elementari proiettive permettono di generare figure geometriche di carattere più elevato (pag. 234), così nuove figure possono ottenersi mediante forme di 2ª specie proiettive. Adduciamo in questo capitolo qualche esempio in proposito, fra i più significativi.

Due stelle collineari distinte S, S', prive di elementi uniti comuni, generano una cubica gobba l, luogo delle intersezioni delle coppie di rette omologhe e incidenti. La cubica l passa pei centri S, S'. Viceversa, ogni cubica gobba può generarsi così, prendendo come centri delle due stelle due punti qualunque della curva (*).

Invero, al fascio di piani $a' \equiv SS'$, comune alle due stelle, considerato come appartenente ad S', corrisponde in S un fascio di piani avente il sostegno a distinto da a' e non prospettivo ad a' (e ciò per l'ipotesi che le due stelle collineari sieno prive di elementi

(*) Questa generazione della cubica gobba è dovuta a SEYDEWITZ (1847).

uniti comuni). I fasci proiettivi a, a' generano pertanto un cono quadrico (irriducibile) σ di vertice S.

Similmente il fascio $b \equiv SS'$, comune alle due stelle, considerato come appartenente ad S, ha per omologo in S' un fascio di piani b'; e i due fasci b, b' generano un cono quadrico (irriducibile) σ' di vertice S'.

Nella collineazione fra S, S' al cono σ corrisponde il cono σ'. I due coni non posson perciò toccarsi lungo la loro generatrice comune SS', perchè altrimenti il piano tangente sarebbe unito nell'omografia fra le due stelle. L' intersezione ulteriore dei coni è dunque una cubica gobba (irriducibile) l pàssante pei vertici S, S' (pag. 239). La l apparisce in tal modo come il luogo delle intersezioni delle coppie di rette omologhe incidenti, in quanto appunto due generatrici incidenti di σ, σ' sono omologhe nella collineazione fra le due stelle.

Viceversa, sia l una cubica gobba (irriducibile); S, S' due suoi punti qualunque; σ, σ' i coni quadrici (irriducibili) che proiettano l da S, S' (pag. 238), coni che non si toccano lungo la generatrice comune SS'. Sia infine α il piano congiungente tre punti generici A, B, C di l (per guisa che α non passerà nè per S nè per S'); k, k' le coniche (irriducibili) sezioni di σ, σ' con α. Le coniche k, k' hanno in comune il punto O traccia su α della retta SS'; onde esse sono prospettive al fascio O e quindi proiettive tra loro. La proiettività che così nasce fra le due coniche, e rispetto alla quale sono uniti i punti A, B, C di ulteriore intersezione di k, k', fuori di O, è subordinata da un'omografia tra i piani sovrapposti delle due coniche (pag. 286). Proiettando da S, S' rispettivamente le coppie di punti omologhi in quest'omografia, si ha fra le due stelle un'omografia Ω, che muta il cono σ nel cono σ'. Due generatrici omologhe di σ, σ', in quanto proiettano coppie di punti di k, k' allineati con O, son incidenti (in un punto di l). La cubica l apparisce perciò generata nel modo enunciato, mediante le due stelle S, S' riferite colla Ω.

Osservazione 1ª. Consideriamo di nuovo i raggi a, b', delle stelle S, S', omologhi del raggio SS' pensato come raggio a' di S' o come raggio b di S. Al piano ab del fascio a risponde il piano $a'b'$ del fascio a', cosicchè $a'b'$ è il piano tangente al cono σ lungo SS'; e poichè b' è una generatrice del cono σ', così essa risulta la tangente ad l in S'. Similmente si vede che la tangente in S ad l è il raggio a. Dunque *al raggio comune delle due stelle, pensato nell'una o nell'altra, corrispondono le tangenti alla cubica nei centri delle stelle generatrici.*

Osservazione 2ª. Quando nell'omografia tra le due stelle S, S' ci sono elementi uniti comuni, si hanno casi di degenerazione della cubica.

Osservazione 3ª. Dalla generazione di una cubica gobba mediante due stelle collineari si trae agevolmente che *per sei punti generici dello spazio passa una sola cubica gobba irriducibile*, perchè, presi due, A, B, di quei sei punti A, B, C, D, E, F, come centri delle due stelle, esiste fra queste una sola omografia in cui sono omologhi i raggi che da A, B vanno ad un medesimo dei punti C, D, E, F. Le due stelle collineari così determinate generano una cubica gobba l, passante pei sei punti dati. La l sarà irriducibile per la genericità dei punti stessi. Viceversa, una cubica gobba passante pei sei punti dati, dà luogo fra le due stelle A, B all'omografia considerata sopra e quindi coincide con l.

Il teorema segue anche dal considerare la cubica l come intersezione dei due coni α, β, che hanno per vertici A, B e che sono individuati rispettivamente dalle quintuple di raggi $A\,(BCDEF)$, $B\,(ACDEF)$. I due coni si segano appunto lungo l, fuori della generatrice AB ad essi comune.

Consideriamo ora le rette comuni alle coppie di piani omologhi delle due stelle S, S', che generano la cubica l. Esse son corde della cubica, perchè un piano per una, r, di queste rette, sega le due stelle secondo due piani omografici sovrapposti, aventi la retta r unita, e quindi fuori di r ci sarà al più, su quel piano, un punto unito (pag. 261), cioè un punto al più della cubica. Viceversa si dimostra che ogni corda, anche ideale (pag. 236), della cubica, può ottenersi come intersezione di due piani omologhi delle due stelle. Noi ci limitiamo a verificarlo per le corde reali, osservando che, se una retta r contiene i due punti A, B della cubica l, alle rette SA, SB, della stella S, corrispondono in S' le rette $S'A$, $S'B$, e quindi al piano Sr il piano $S'r$.

Per un punto P dello spazio, *fuori di* l, passa una sola retta d'intersezione di due piani omologhi α, α', di S, S'. Infatti, ai piani per la retta $m \equiv SP$ corrispondono piani per una retta m' di S', *sghemba* con m, e questa retta è congiunta a P mediante un piano α', cui corrisponde in S un piano α passante pure per P. Si conclude che:

Le ∞^2 *corde della cubica formano un sistema tale che per un punto dello spazio, fuori della cubica, ne passa una, mentre sopra un piano generico dello spazio ne giacciono al più tre.*

Si dice che questo sistema è una *congruenza del* 1° *ordine e della* 3ª *classe* (congruenza, perchè così si chiama ogni sistema continuo di ∞^2 rette dello spazio; del 1° ordine, per alludere al fatto che per un punto generico dello spazio passa una sola retta del sistema; della 3ª classe, per alludere al fatto che sopra un piano generico giacciono al più tre rette del sistema).

§ 71

Generazione delle superficie di 2° ordine mediante stelle reciproche.

Un altro esempio interessante di generazione di nuove figure notevoli, mediante forme di 2ª specie proiettive, è dato dal *luogo del punto comune al raggio* a, *variabile in una stella* S, *ed al piano* α' *variabile in una stella* S', *distinta dalla* S, *ed omologo ad* a *in una data correlazione* ω *fra* S, S'. Variando a, il punto $P \equiv a\alpha'$ descrive una superficie Q, la quale *può anche definirsi come il luogo del punto comune ad un raggio variabile in* S' *ed al piano ad esso omologo in* S, *mediante la correlazione* ω^{-1}. Invero, al raggio $b' \equiv S'P$ della stella S', in quanto esso sta su α', corrisponde nella ω^{-1} un piano β passante per a, e quindi il punto P può pure definirsi come comune a β ed a b'.

La superficie Q è segata secondo una conica da ogni piano β passante per S (e similmente da ogni piano α' passante per S'). Infatti, al fascio di raggi di centro S, situato sul piano β, corrisponde in S' un fascio di piani avente per sostegno la retta b', omologa di β, ed i punti comuni ai raggi del fascio S ed ai piani omologhi del fascio b', cioè alle traccie di questi piani su β, riempiono una conica k passante per S e pel punto $\beta b'$. Ne segue intanto che *il luogo* Q *passa pei centri* S, S' *delle due stelle generatrici*.

La conica k si spezza in due rette, soltanto se nel fascio S, situato in β, esiste un raggio contenuto nel piano omologo. Pertanto, perchè la conica k si spezzi, per ogni posizione di β attorno ad S, bisogna che ogni piano del fascio SS', concepito come piano α' appartenente alla stella S', contenga il suo raggio omologo a in S: dal che segue che il piano α', concepito come piano γ della stella S, ha per omologo in S' un raggio c', che, dovendo giacere sul piano $\alpha' = \gamma$ corrispondente al raggio a, situato su γ, sta esso pure su γ.

In altri termini: *Se si verifica la particolar circostanza che ai piani passanti per* SS', *concepiti come appartenenti ad una delle due stelle, corrispondano nell'altra raggi in essi rispettivamente contenuti, lo stesso fatto si verifica quando si mutino le veci delle due stelle; ed allora il luogo sopra definito degenera nei due piani, passanti rispettivamente per* S, S', *che contengono i raggi omologhi dei piani del fascio* SS', *pensato come appartenente una volta all'una ed una volta all'altra stella.*

Eccepito questo *caso di degenerazione del luogo*, si può affermare che la superficie Q è segata secondo una conica *irriducibile* da un piano generico per S o per S'. In tal caso, che poi è il caso generale, la Q si chiama una *superficie di* 2° *ordine* o una *quadrica* (*irriducibile*) (*), perchè *una retta r dello spazio, che non appartenga interamente a Q, sega la quadrica al più in due punti.* Ciò segue senz'altro dal fatto che, quando r non passa per S, il piano Sr taglia Q secondo una conica, la quale o contiene come parte r o è segata da r in due punti al più. Se r passa per S, senza giacere in Q, la r incontra già Q in S ed al più in un altro punto, che è quello comune ad r ed al piano omologo in S'.

Una retta dello spazio, non situata su Q, dicesi *secante, tangente, non secante* rispetto alla quadrica, secondo che ha due, uno, nessun punto in comune colla medesima. Esistono effettivamente rette delle tre specie, come risulta dal fatto che esistono rette delle tre specie rispetto alla conica sezione di Q con un piano per S o per S'.

Fra le rette uscenti da S ve ne sono ∞^1 tangenti a Q in S, e sono quelle che corrispondono ai piani del fascio SS', considerato come appartenente ad S'. Esse formano fascio attorno ad S e riempiono un piano, che chiamasi il *piano tangente in S alla quadrica.* Similmente si ha un piano tangente in S'. *I due piani tangenti in S, S' son dunque gli omologhi del raggio SS' pensato sull'una o sull'altra stella.*

Nasce ora la questione, analoga a quella già risoluta per le coniche a pag. 148, di sapere cioè se S, S' son due punti particolari della quadrica, ovvero se, come nel caso analogo delle coniche, due punti qualunque di Q possano assumersi come centri di due stelle reciproche generanti, nel modo indicato, la Q. Effettivamente è così. Passiamo a dimostrarlo.

Basterà provare che, preso punto S_0 di Q, diverso da S, S', è possibile porre fra le stelle S, S_0 una reciprocità mediante cui può generarsi la stessa quadrica Q, che è generata dalle stelle reciproche S, S'.

(*) La generazione sopra indicata delle superficie di 2° ordine è dovuta a Seydewitz (1847).

Condotti per S due piani generici α, β (non passanti per S_0), sieno h, k le coniche irriducibili sezioni di Q con quei piani e T l'ulteriore intersezione di Q colla retta $\alpha\beta$ (intersezione che coinciderebbe con S, quando la retta $\alpha\beta$ fosse tangente a Q in S). I due punti S, T sono i soli due punti comuni alle coniche h, k.

Scelto un piano generico γ per la retta S_0T, indichiamo con A, B le ulteriori intersezioni di γ, fuori di T, rispettivamente colle coniche h, k; e poniamo una proiettività π tra il fascio di raggi S del piano α ed il fascio di piani S_0A, come prodotto delle due prospettività intercedenti fra questi due fasci e la conica h. Similmente poniamo una proiettività ρ tra il fascio di raggi S del piano β ed il fascio di piani S_0B, come prodotto delle due prospettività intercedenti tra questi due fasci e la conica k. In ambedue le proiettività π, ρ al raggio ST, comune ai due fasci di raggi sopra nominati, corrisponde il piano γ comune ai due fasci di piani S_0A, S_0B. Pertanto (pag. 251) esiste fra le stelle S, S_0 una ben determinata reciprocità, che subordina, fra le due suddette coppie di fasci di raggi e di piani, le proiettività π, ρ. La quadrica Q_0, generata dalla reciprocità suddetta fra S, S_0, passa per S, S_0 e per le coniche h, k, che sono appunto (come subito risulta dal modo con cui è definita la reciprocità) le intersezioni di Q_0 coi piani α, β.

Ora dico che la quadrica Q_0, pel fatto di avere in comune con Q le coniche h, k ed il punto S_0 ad esse esterno, coincide con Q. Infatti, un piano generico per la retta $S'S_0$ taglia le due quadriche Q, Q_0 secondo due coniche, le quali coincidono, perchè, oltre al punto S_0, hanno in comune i quattro punti distinti in cui quel piano sega complessivamente h, k. Ne deriva intanto che il punto S' di Q sta anche su Q_0. Ciò posto, indichiamo con l una delle infinite coniche, comuni a Q, Q_0, passante per $S'S_0$, ma non per S, e sia P un punto qualunque di una delle due quadriche. Il piano $SS'P$ taglia le due quadriche secondo due coniche, le quali hanno in comune i punti S, S' ed altri tre punti situati sulle coniche h, k, l. Dunque il piano $SS'P$ taglia le due quadriche secondo la stessa conica e perciò P è comune alle Q, Q_0. Si conclude che le due quadriche coincidono, e da ciò il teorema:

Una quadrica può generarsi mediante una conveniente reciprocità fra due stelle aventi i centri in due punti qualunque della superficie.

Osservazione. Nel ragionamento precedente, laddove si è individuato la reciprocità fra le stelle S, S_0 mediante le proiettività π, ρ, si è supposto implicitamente che i due fasci S_0A, S_0B fossero distinti, cioè che i tre punti S_0,A,B non fossero allineati. Se questi punti risultano sopra una retta r, per ogni posizione di γ attorno ad S_0T, la retta r, avendo in comune tre punti con Q, giace sulla quadrica, che contiene dunque infinite rette uscenti da S_0. E poichè queste infinite rette si appoggiano tutte alla conica h, la quadrica risulta un cono quadrico di vertice S_0. Dunque *nel teorema enunciato poco fa, bisogna escludere, qualora la quadrica si specializzi in un cono quadrico, che uno dei centri delle due stelle coincida col vertice del cono.*

Risulta pure dal ragionamento precedente che *per due coniche non complanari, aventi due punti comuni, e per un punto fuori dei loro piani passa una ed una sola quadrica.*

Per individuare la reciprocità fra le S, S_0, mediante cui abbiamo potuto generare la quadrica Q, una volta fissati i due fasci di raggi di centro S, sui piani α, β, ci è occorso soltanto di scegliere il piano γ da farsi corrispondere al raggio $ST = \alpha\beta$. Poichè γ è variabile attorno alla retta ben determinata S_0T, così concludiamo che:

Fissati due punti S,S_0 di una quadrica, vi sono ∞^1 reciprocità fra le stelle S,S_0, che generano la data quadrica.

Il fatto che in ciascuno dei centri delle stelle S, S', che ci servirono a generare originariamente Q, la superficie ammette un determinato piano tangente, e che un piano passante per S o per S' taglia la quadrica in una conica (generalmente irriducibile), ora che sappiamo che S,S' non son punti particolari della quadrica, ci permette di enunciare che:

In ogni punto (che non sia il vertice, se trattasi di un cono) la quadrica possiede un determinato piano tangente ed inoltre essa è tagliata da ogni piano non tangente, che contenga un punto (reale) della quadrica, secondo una conica irriducibile.

Tutte le considerazioni precedenti si posson trasportare colla legge di dualità nello spazio e si ottengono proprietà relative agli *inviluppi ∞^2 di 2ª classe* o *quadriche inviluppo.* Lasciamone al lettore la cura. Come si vedrà nel § 74, i piani tangenti di una quadrica luogo costituiscono una quadrica inviluppo; e dualmente.

§ 72

Quadriche a punti ellittici, iperbolici e parabolici.

In una data reciprocità ω fra due stelle distinte S,S' diciamo σ,τ' i piani omologhi del raggio comune SS' nella ω^{-1} e nella ω, cioè del raggio SS' pensato come raggio s' di S' o come raggio t di S. Suppongasi dapprima che σ (e quindi τ') non passi pel raggio comune. Allora tra il fascio dei raggi a della stella S, situato sul piano σ, e il fascio dei raggi a' segati su σ dai piani omologhi ai raggi a, intercede una proiettività λ. Una proiettività analoga μ' può definirsi sul fascio di raggi della stella S', situato in τ', mutando le veci delle due stelle.

Se la proiettività λ ha un raggio unito u, esso appartiene al proprio piano omologo; considerando questo piano sulla stella S, ad u ed al piano stesso risponderanno su S' piano e retta appartenentisi, cosicchè il piano omologo di u conterrà una retta v' unita per la proiettività μ'. Ne segue che le due proiettività λ, μ' sono insieme o identiche o iperboliche o paraboliche o ellittiche. I raggi uniti della proiettività λ (o μ') son rette della quadrica per S (o S'), e viceversa.

Nel caso in cui λ, μ' sono identiche, abbiamo già notato (pag. 300) che la quadrica Q generata dalle due stelle reciproche S, S' si spezza nei piani σ, τ'.

Nel caso in cui λ, μ' sieno iperboliche, il piano σ, che è il piano tangente a Q in S, contiene due rette distinte u, v tracciate sulla quadrica. E similmente il piano τ', tangente a Q in S', contiene due rette u', v' della quadrica, ove v' sia complanare con u ed u' con v. In tal caso si dice che i due punti S, S' son *punti iperbolici* per la quadrica Q.

Nel caso in cui λ, μ' sono ellittiche, i due piani tangenti σ, τ' non contengono alcun punto della quadrica, diverso dai punti di contatto S, S', e si dice che S, S' son *punti ellittici* per la quadrica.

Esaminiamo infine il caso in cui λ, μ' son paraboliche. Allora i due piani tangenti σ, τ' hanno ciascuno in comune colla quadrica una sola retta e le due rette relative, u, v', s' incontrano in un punto O. I punti S, S' diconsi in tal caso *punti parabolici*. Ogni retta situata sul piano σ (e similmente sul piano τ') incontra la quadrica nel solo punto ov'essa retta appoggiasi ad u (od a v'), ed è perciò tangente alla quadrica. I piani σ, τ' toccano insomma la quadrica rispettivamente in ogni punto di u e di v' (*lungo* u, v', come si dice brevemente). Consideriamo un piano generico α per u. Esso taglia il piano τ' secondo una retta b' passante per O e la quadrica Q, fuori di u, secondo una retta u'. Dico che u' passa per O. Infatti, se u' non passasse per O, le due rette complanari u', b' si taglierebbero in un punto diverso da O: il che si oppone al fatto che la retta b' incontra la quadrica nel solo punto O. Dunque, nel caso che stiamo esaminando dei punti parabolici, i piani uscenti da u (e similmente quelli per v') tagliano la quadrica secondo rette passanti per O. E poichè queste rette si appoggiano alla conica sezione di Q con un piano generico per S, si conclude che la quadrica si specializza in un cono quadrico di vertice O. Si prova ora agevolmente che:

Se una quadrica ha un punto parabolico, ogni altro punto è parabolico ed essa si specializza in un cono quadrico.

Invero, se il punto S della quadrica Q è parabolico, preso un altro punto S' di Q (che non coincida col vertice, qualora Q sia un cono) in una (qualunque) delle reciprocità fra S, S' che generano Q, la proiettività λ è parabolica. Lo è quindi anche la proiettività μ'; il punto S' è parabolico e la quadrica si specializza in un cono.

Dimostriamo ora che:

Se una quadrica ha un punto iperbolico o ellittico, tutti gli altri sono rispettivamente iperbolici o ellittici.

Invero, se S è iperbolico, preso un altro punto qualunque S' della quadrica Q, in una reciprocità S, S' generante Q, la proiettività λ è iperbolica e lo è quindi anche μ', cioè S' è iperbolico. Similmente si vede che se S è ellittico, anche S' è ellittico.

Le quadriche dividonsi perciò in tre specie graficamente distinte:

1) Quadriche a punti iperbolici o *quadriche iperboliche.*

2) Quadriche a punti ellittici o *quadriche ellittiche.*

3) Quadriche a punti parabolici o *quadriche paraboliche.*

Queste ultime sono i coni quadrici. Un punto generico di un cono quadrico è parabolico. Fa eccezione il vertice che è un *punto doppio*, nel senso che una retta generica per esso non incontra altrove la quadrica.

Dimostriamo infine che:

Le quadriche iperboliche non sono che le quadriche rigate già definite mediante la generazione con punteggiate sghembe o fasci di piani sghembi proiettivi (pag. 135).

Sia, colle consuete notazioni, la quadrica iperbolica Q generata dalle due stelle S, S' e u, v sieno ancora le due rette di Q situate sul piano σ; u', v' quelle situate in τ'. Abbiamo già osservato che u' appoggiasi a v (ma non ad u) e v' ad u (ma non a v). Consideriamo il quadrilatero sghembo $uvu'v'$. Preso un punto P della quadrica, fuori di questo quadrilatero, costruiamo la retta v'' uscente da P e appoggiata alle rette sghembe u, u' nei punti H, H'. Questa retta giace su Q, perchè incontra la quadrica nei tre punti distinti P, H, H'. Poniamo $S_0 \equiv uv'$, $S_0' \equiv u'v$ e consideriamo fra le due punteggiate u, u' la proiettività $\begin{pmatrix} S & S_0 & H \\ S' & {}_0S' & H' \end{pmatrix}$. Le rette che congiungono le coppie di punti omologhi in questa proiettività generano una quadrica rigata Q_0 (pag. 136), che si proverà esser coincidente con Q. Infatti fra le generatrici di Q_0 vi sono le rette $v \equiv SS_0'$, $v' \equiv S_0S'$, $v'' \equiv HH'$, sicchè la quadrica Q_0 può anche esser definita come il luogo dei punti situati sulle rette appoggiate a v, v', v'' (pag. 137). Ma ognuna di queste rette incontra Q in tre punti distinti e quindi giace interamente in Q. Sicchè ogni punto di Q_0 è un punto di Q. Viceversa, preso un punto M qualunque di Q e condotto un piano generico α per M e per un punto generico M_0 di Q_0, la conica sezione di Q_0 con α dovrà far parte della conica sezione di Q con α. Ma poichè trattasi di coniche irriducibili, la prima di esse dovrà coincidere colla seconda. E siccome sulla seconda si trova il punto M, si conclude che il punto M di Q sta su Q_0. Pertanto le due quadriche coincidono, c. d. d.

§ 73.

Polarità rispetto ad una quadrica.

La nozione di polarità rispetto ad una conica si estende agevolmente alle quadriche. Ci limiteremo in proposito alle cose essenziali.

Data una quadrica Q (irriducibile e non specializzata in un cono) e preso un punto P, non appartenente a Q, sopra una retta r, uscente da P, che seghi Q in due

punti M, N, consideriamo il coniugato armonico P' di P rispetto alla coppia MN. Dico che, variando r attorno a P, il punto P' si muove in un piano. Invero, detto π il luogo del punto P' e considerati due punti generici P'_1, P'_2 di π, il piano $\alpha \equiv PP'_1P'_2$, che contiene due rette PP'_1, PP'_2 secanti della quadrica, taglia Q secondo una conica (irriducibile) k, rispetto a cui la retta $p \equiv P'_1P'_2$ è la polare di P. Ne deriva che ogni punto della retta p appartiene al luogo π, il quale dunque contiene ogni retta che congiunga due suoi punti, ed è perciò un piano. Il piano π dicesi *piano polare di P rispetto alla quadrica* e P dicesi *polo* di π. Ricordando che la polare di un punto P rispetto ad una conica contiene i punti di contatto delle eventuali tangenti mandate da P alla conica e i punti d'intersezione delle coppie di tangenti che toccano la conica in punti allineati con P (pag. 187); e tenendo inoltre presente che il piano tangente a Q in un suo punto, è il luogo delle tangenti alla quadrica in quel punto, si deduce subito che:

Il piano polare di P rispetto alla quadrica Q, definito come il luogo dei coniugati armonici rispetto alle coppie dei punti della quadrica allineati con P, o come il luogo delle rette polari di P rispetto alle coniche sezioni di Q coi piani per P, contiene i punti di contatto delle eventuali tangenti (e degli eventuali piani tangenti) da P alla quadrica e le rette d'intersezione delle coppie di piani tangenti di Q in punti allineati con P.

Si osservi che *il piano π polare del punto P, non situato sulla quadrica, non passa per P*, perchè il coniugato armonico di P rispetto ad una coppia di punti di Q, allineati con P, è distinto da P. Nè, d'altra parte, π può essere tangente alla quadrica, perchè, se il punto A è comune a π ed a Q, il coniugato armonico di P rispetto alla coppia dei punti ove la retta PA sega Q, coincide con A; cioè PA è tangente a Q in A, sicchè, se π toccasse Q in A, il punto P apparterrebbe al proprio piano polare. Se invece P è un punto della quadrica, un piano generico per P taglia Q lungo una conica irriducibile e la polare di P rispetto a questa conica è la retta tangente ad essa in P. Variando il piano attorno a P, questa retta polare descrive il piano tangente alla quadrica in P, che conviene pertanto assumere come *piano polare del punto P della quadrica*. Resta così associato ad *ogni punto* dello spazio *un piano* determinato: il suo piano polare rispetto alla quadrica. Vedremo tosto che, viceversa, ad *ogni piano* dello spazio resta associato *un punto*: il suo polo rispetto a Q.

Chiameremo anzitutto *punto esterno*, rispetto alla quadrica Q, un punto P che non giaccia sulla quadrica, ma che appartenga invece a qualche piano tangente, o, ciò che è lo stesso, a qualche retta tangente. Dimostriamo che:

Per un punto P, esterno alla quadrica Q, passano ∞^1 *rette tangenti ed* ∞^1 *piani tangenti formanti rispettivamente le generatrici e i piani tangenti di un cono quadrico irriducibile. I punti di contatto relativi costituiscono una conica, che è la sezione di Q col piano polare* π *di P.*

Infatti il piano π polare di P, per quanto precede, non tocca Q e contiene per lo meno un punto reale della quadrica, che è il punto di contatto di quella qualche tangente di Q, su cui giace il punto esterno P. Ne deriva che (pag. 304) il piano π sega Q lungo una conica k irriducibile.

Se A denota un punto di k, la retta PA, come abbiamo già notato, è tangente alla quadrica in A. Dunque le rette del cono quadrico irriducibile, che da P proietta k, son tangenti a Q; e son tutte le possibili tangenti da P a Q, perchè π, come si è prima osservato, contiene il punto di contatto di ogni tale tangente. E poichè inoltre il piano tangente a Q in un punto A di k è individuato dalla tangente a k in A e dalla tangente PA, così si conclude che i piani tangenti di Q uscenti da P non sono che i piani tangenti del cono quadrico sopra ottenuto.

Si deduce dal teorema dimostrato che *per una retta a, non appartenente alla quadrica Q, passano al più due piani tangenti di Q*. Infatti, se P, R son due punti della

retta a esterni a Q (punti d' incontro di a con due piani tangenti generici della quadrica), i due piani polari di P, R rispetto a Q si tagliano lungo una retta non appartenente alla quadrica, che taglia Q al più in due punti, i quali sono i punti di contatto dei soli piani tangenti mandati da a alla quadrica.

Proviamo ora che un piano qualunque π dello spazio non può avere più di un polo rispetto alla quadrica. Intanto, se π ha per polo un punto P della quadrica, il piano π non può che essere, come abbiamo già veduto, il piano tangente alla quadrica in Q; sicchè, se π avesse per poli due punti diversi P,R della quadrica, esso toccherebbe la quadrica in questi due punti. Ora ciò è assurdo. Infatti, non esistendo rette non situate sulla quadrica, che tocchino questa in più di un punto, la retta PR giacerebbe su Q e quindi la quadrica sarebbe rigata. Ma per una quadrica rigata già sappiamo (pag. 157) che un piano tangente la tocca in un solo punto. Dunque, se un piano π ha due poli P, R, uno almeno di questi non sta sulla quadrica. Per la retta PR passano perciò al più due piani tangenti della quadrica e quindi, congiungendo PR con un punto generico A di Q, il piano PRA sega Q secondo una conica irriducibile, rispetto alla quale la retta d' intersezione del detto piano con π avrebbe per poli i due punti diversi P, R. Ciò pure è assurdo. Si conclude che π non può avere più di un polo rispetto a Q.

Dimostriamo ora che:

Se un punto B giace sul piano polare α *di A, il piano polare* β *di B passa per A.*

La retta AB non giaccia sulla quadrica, come accadrà in generale. Congiungendo allora AB con un punto generico C di Q, il piano $\pi \equiv ABC$ sega la quadrica secondo una conica irriducibile, rispetto alla quale la retta $a \equiv \alpha\pi$ è la polare del punto A e la retta $b \equiv \beta\pi$ la polare di B. Poichè B giace su a, la retta b passerà per A (pag. 190), cioè il piano β passerà per A.

Se la retta AB giace su Q — e la quadrica è perciò rigata — i piani α, β sono i piani tangenti a Q in A, B e ognuno di essi contiene la retta AB, onde α passa per A.

Siamo finalmente in grado di provare che *un piano qualunque π dello spazio ha uno ed un sol polo rispetto alla quadrica Q*. Assumiamo all'uopo su π tre punti non allineati A, B, C e consideriamo i piani polari α, β, γ di questi punti. Se α, β, γ passassero per una medesima retta r, un punto qualunque di r, in quanto sta su α, β, γ, avrebbe il proprio piano polare passante per A, B, C, cioè coincidente con π, che così avrebbe infiniti poli: contrariamente a quel che sopra si è dimostrato. Dunque α, β, γ s' incontrano in un sol punto P e questo ha per piano polare il piano $\pi \equiv ABC$. Il punto P è poi il sol polo di π, perchè si sa già che π non può avere due diversi poli.

Nasce dunque fra i punti ed i piani dello spazio, in quanto si associno un punto ed un piano che sieno polo e polare rispetto alla quadrica, una corrispondenza biunivoca involutoria, che si chiama *polarità rispetto alla quadrica Q*.

Due *punti* (o due *piani*) si chiamano *coniugati* nella polarità, quando il piano polare (o rispettivamente il polo) di uno di essi passa (o giace) sul piano polare (o polo) dell'altro; e quindi viceversa.

Se un punto P si muove descrivendo un piano α, il piano polare π di P passa pel polo A di α; sicchè, se P si muove sopra una retta a, intersezione dei piani α, β il piano π passa per la retta a' congiungente i poli A, B di α, β. Due rette come a, a', tali cioè che il piano polare di un punto dell'una passa per l'altra, e viceversa, diconsi *mutuamente polari* rispetto alla quadrica.

Se un piano π non è tangente a Q e quindi il suo polo P non sta su Q, associando ad ogni punto di π la traccia su π del piano polare di quel punto, si ha tra i punti e le rette di π una corrispondenza biunivoca involutoria, che fa corrispondere ad una forma di 1ª specie una forma di 1ª specie: cioè una polarità piana (pag. 272)

Essa dicesi la *polarità subordinata dalla quadrica sopra il piano non tangente π*. La considerazione di tale polarità porta subito a concludere che *su ogni retta non tangente alla quadrica (e in particolare non tracciata sulla quadrica), la quadrica subordina un' involuzione di coppie di punti coniugati rispetto a Q*.

Cerchiamo quand' è che una retta a può appoggiarsi in un punto alla sua retta polare a', o, in particolare, quando a, a' posson coincidere. Se P è un punto comune ad a, a', il piano polare π di P, in quanto P è su a, deve passare per a', ed in quanto P è su a', deve passare per a. Onde, se a, a' son distinte, è $\pi \equiv aa'$; P è un punto della quadrica e π è il piano tangente in P. Se poi $a \equiv a'$, ossia se la retta è autopolare, ogni punto P di a ha il proprio piano polare passante per a, cioè per P, e quindi a è una retta della quadrica. Viceversa è chiaro che ogni retta della quadrica è autopolare. Dunque:

Due rette polari s' incontrano, soltanto s'esse toccano la quadrica (nel medesimo punto). Le sole rette autopolari son quelle tracciate sulla quadrica.

Siano a, a' due rette polari distinte, e quindi non tracciate su Q. Mentre un punto descrive a, il suo piano polare descrive il fascio a'. Conducendo per a un piano generico π e indicando con A' la traccia di a' su π, nella polarità subordinata dalla quadrica su π, alla punteggiata a corrisponde proiettivamente il fascio A' delle polari dei punti di a (pag. 273). Dunque:

La corrispondenza fra i punti di una retta ed il fascio dei loro piani polari è proiettiva.

Nell'enunciato abbiamo incluso anche il caso di una retta della quadrica, in forza del teorema (di CHASLES) dimostrato a pag. 157.

§ 74.

Le quadriche come luoghi e come inviluppi. Punti interni ed esterni; rette e piani secanti ed esterni.

La considerazione della polarità rispetto ad una quadrica ci pone in grado di stabilir subito il risultato preannunciato alla fine del § 71, che cioè:

Il sistema dei piani tangenti di una quadrica luogo costituisce una quadrica inviluppo.

S' intende che parliamo di una quadrica non spezzata e non specializzata in un cono. Del resto pei coni il teorema è gia stato stabilito a pag. 160.

Si concepisca la quadrica Q come generata da due stelle reciproche aventi i centri nei punti S, S' di Q. Considerati i piani σ, σ' tangenti a Q in S, S', ad ogni retta a della stella S la polarità rispetto a Q fa corrispondere la propria retta polare a', situata sul piano σ; ad ogni piano α' di S' il proprio polo A', situato sul piano σ'; al punto $P \equiv a\,\alpha'$, d' intersezione di due elementi omologhi a, α' delle due stelle, il piano $\pi \equiv a'\,A'$, che risulta pertanto il piano tangente a Q in P. E poichè le corrispondenze biunivoche fra le rette di S e di σ e fra i piani di S' ed i punti σ', sono proiettive, perchè esse mutano forme di 1ª specie in forme di 1ª specie, così la corrispondenza che nasce fra i piani σ, σ', chiamandosi omologhi una retta ed un punto come a', A', è una reciprocità.

I piani tangenti di Q appariscono in tal modo come i piani congiungenti le coppie di elementi omologhi in tale reciprocità, epperciò (pag. 304) costituiscono una quadrica inviluppo. Dualmente:

Il sistema dei punti di contatto di una quadrica inviluppo costituisce una quadrica luogo.

Il concetto di punti di contatto di una quadrica inviluppo deriva per dualità dal concetto di piani tan-

genti di una quadrica luogo. Sopra ogni piano π dell' inviluppo esiste un punto P ben determinato (punto di contatto di quel piano) tale che ogni retta per P, situata in π, non appartiene a piani dell' inviluppo diversi da π.

Lasciamo al lettore la cura di riferire alla quadrica luogo Q tutte le proprietà dell' inviluppo de' suoi piani tangenti, alle quali si perviene per dualità dalle proprietà già ottenute per la quadrica luogo.

Introduciamo piuttosto qualche altro concetto notevole. Abbiamo già definito i *punti esterni* rispetto ad una quadrica Q (pag. 309), e abbiamo dimostrato (pag.163) che *rispetto ad una quadrica iperbolica ogni punto dello spazio, non situato sulla quadrica, è esterno.*

Lasciando in disparte le quadriche paraboliche (coni), per le quali le questioni che qui vogliamo trattare son già state considerate a pag. 163, fissiamo l'attenzione sopra una quadrica ellittica Q. Rispetto ad essa esistono evidentemente, come per ogni quadrica, punti esterni; proviamo che esistono altresì *punti interni*, cioè punti non situati su rette (o piani) tangenti della quadrica.

Sia k la conica irriducibile sezione di Q con un piano generico π e sia P un punto interno a k (pag. 161): dico che P è interno anche rispetto a Q. Infatti, se per P passasse un piano α che toccasse Q nel punto A, indicato con B uno dei due punti (reali) in cui α incontra necessariamente k (pag. 163), la retta AB toccherebbe Q in A e incontrerebbe altrove Q in B, e quindi giacerebbe sulla quadrica, la quale risulterebbe a punti iperbolici, contro il supposto. Viceversa, è chiaro che ogni punto interno rispetto a Q, situato sul piano π, è interno a k.

Ogni retta r, passante per un punto P interno a Q, incontra la quadrica in due punti (reali): e cioè *secante* della quadrica. Infatti, congiungendo r con un punto generico A di Q, si ottiene un piano π che sega Q secondo una conica irriducibile k, rispetto a cui il punto P è interno. Si conclude che:

Una quadrica ellittica divide lo spazio in due regioni:

l'una costituita da punti interni e l'altra da punti esterni. Con un cammino (rettilineo) non si può passare dall'una all'altra, senza traversare la quadrica in un punto. Ogni retta passante per un punto interno è secante.

Anche una quadrica rigata Q divide lo spazio in due regioni, tali che non si può passare dall'una all'altra con un cammino (rettilineo), senza traversare la superficie. Questa repartizione in due regioni, che sono entrambe costituite da punti esterni, deriva da ciò: che, dati due punti A,B, esterni a Q, o essi son congiunti da una retta non secante rispetto a Q o da una retta che sega Q in una coppia di punti M,N, non separanti la coppia AB, o da una retta tangente a Q, ed in questi casi appartengono alla medesima delle due regioni cui sopra si è alluso; oppure la retta AB sega Q in una coppia MN, separante la coppia AB, ed allora A,B appartengono a due diverse regioni.

È chiaro che due punti A,B della stessa regione sono ambedue interni o esterni rispetto alla conica sezione di Q con un piano generico per AB; mentre se A,B appartengono a regioni diverse, uno di essi è interno e l'altro è esterno rispetto alla conica stessa. Dunque:

Una quadrica iperbolica divide lo spazio in due regioni costituite entrambe da punti esterni. Due punti appartengono alla stessa regione, quando un piano generico per essi taglia la quadrica seconda una conica rispetto alla quale i due punti sono entrambi interni od esterni; appartengono a regioni diverse, se rispetto a tal conica l'uno di essi è interno e l'altro è esterno. Non si può passare da una regione all'altra senza traversare la superficie.

Consideriamo ora una retta r non secante rispetto ad una quadrica Q. Se Q è iperbolica si può dire senz'altro che r è costituita da punti esterni; se Q è ellittica vale la stessa conclusione, perchè abbiamo già dimostrato che se una retta contiene un punto interno è secante. Dunque:

Una retta non secante rispetto ad una quadrica Q

(ellittica o iperbolica) è tutta costituita da punti esterni e si dice una *retta esterna.*

Data una quadrica ellittica Q, ci possiamo domandare se esistono piani che non incontrino affatto la quadrica: *piani non secanti.* Preso un punto P interno a Q, il piano polare π di P rispetto a Q è certo non secante, perchè se incontrasse Q in un punto, questo dovrebbe essere di contatto per una tangente mandata da P alla quadrica.

Un piano non secante di una quadrica ellittica, è tutto costituito da punti esterni, e si chiama un *piano esterno.*

Infatti, se π contenesse un punto R interno a Q, ogni retta uscente da R e tracciata su π sarebbe secante rispetto alla quadrica e π risulterebbe perciò secante.

Rispetto ad una quadrica iperbolica tutti i piani dello spazio, non tangenti, sono secanti.

Il lettore verificherà, per esercizio, che, mediante la legge di dualità, ad un punto interno corrisponde un piano esterno; ad un punto della quadrica un piano tangente; ad un punto esterno, un piano secante; ad una retta esterna, una retta secante; ad una retta secante, una retta esterna.

La polarità rispetto alla quadrica associa gli elementi interni, esterni, tangenti, secanti allo stesso modo della legge di dualità.

Osservazione. Si posson considerare *coppie di punti imaginarî coniugati della quadrica* sopra le sue rette esterne. Ognuna di tali coppie s' identifica coll' involuzione ellittica subordinata dalla polarità rispetto alla quadrica, sulla relativa retta esterna (pag. 124).

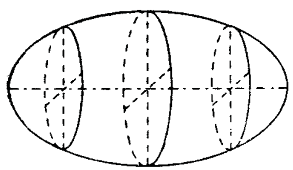
Si possono anche considerare *coniche imaginarie*, secate sulla quadrica (ellittica) da piani esterni. Ognuna di esse s' identifica colla polarità uniforme subordinata sul relativo piano esterno dalla polarità rispetto alla quadrica (pag. 280).

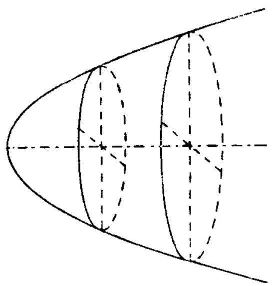
§ 75.

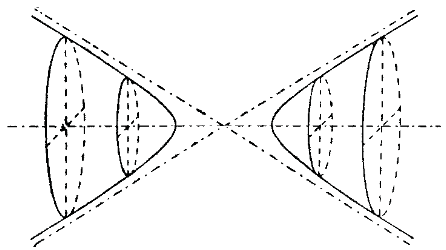
Le varie specie metricamente distinte di quadriche.

Le quadriche iperboliche sono già state classificate dal punto di vista metrico, cioè dal punto di vista del loro comportamento col piano all' infinito, a pag. 169. Esse son di due specie : *iperboloidi rigati* (o *ad una falda*) e *paraboloidi rigati.*

Consideriamo qui le quadriche ellittiche. Rispetto ad una data quadrica Q il piano improprio può essere esterno, tangente o secante. Nel primo caso Q dicesi







un *ellissoide*, nel secondo caso un *paraboloide ellittico*, nel terzo un *iperboloide ellittico* (o *a due falde*). La forma delle tre specie di superficie è quella indicata dalle figure qui sopra.

L'ellissoide non contiene che ellissi, perchè tutte le rette improprie sono ad esso esterne.

Il paraboloide ellittico contiene ellissi e parabole : le prime son date dai piani secanti che hanno le relative rette improprie esterne alla superficie, le altre da piani secanti che passano per l'unico punto improprio (reale) del paraboloide.

L' iperboloide ellittico contiene coniche delle tre specie. Le ellissi son date dai piani aventi le rette improprie esterne rispetto alla conica (reale) k segata dalla superficie sul piano improprio ; le iperbole da piani secanti k, le parabole da piani tangenti a k.

Le proprietà della polarità rispetto ad una quadrica, trasportate nel campo metrico, danno luogo alle proprietà del *centro* e dei *diametri* delle quadriche, in modo analogo a quel che si fece per le coniche nel § 45. *Centro* di una quadrica è il polo del piano improprio. *Diametro* è ogni retta passante pel centro ; ecc., ecc. Lasciamo allo studioso la cura di sviluppare queste proprietà, che del resto può trovare svolte diffusamente, dal punto di vista della Geometria sintetica, nel classico trattato del Reye. (*)

(*) *Die Geometrie der Lage*, Stuttgart, 1907, Zweite Abteilung, IV Auflage, pag. 50.

CAPITOLO DICIASSETTESIMO

Proiettività tra forme di 3ª specie.

§ 76.

Definizioni.
Condizioni che individuano una proiettività.

La teoria delle corrispondenze proiettive fra forme di 2ª specie si estende agevolmente, nella sua parte elementare, alle forme di 3ª specie. Pertanto, nel trattare delle proiettività fra forme di 3ª specie, sorvoleremo sulle dimostrazioni relative a fatti che presentano le maggiori analogie con quelli già stabiliti per le forme di 2ª specie, e ci diffonderemo di più sugli altri punti.

Due forme di 3ª specie (spazî di punti o di piani) diconsi *proiettive* quando son riferite in modo che a ciascun elemento di ognuna corrisponda un solo elemento dell'altra, e ad elementi appartenenti ad una forma di 1ª specie, corrispondano sull'altra elementi appartenenti pure ad una forma di 1ª specie. Un esempio di proiettività fra due spazî è dato dalla polarità rispetto ad una quadrica (pag. 307).

Due forme proiettive ad una terza lo sono fra loro.

Se gli elementi omologhi delle due forme hanno lo stesso nome (ambedue punti o piani), le due forme si chiamano *omografiche* o *collineari*; se hanno nomi diversi (un punto ed un piano) esse diconsi *reciproche* o *correlative*. E la corrispondenza chiamasi nel primo caso *omografia* o *collineazione*; nel secondo *reciprocità* o *correlazione*. La polarità rispetto ad una quadrica è una

correlazione; il *prodotto* di due siffatte polarità è un'omografia.

Di solito ci riferiremo alle corrispondenze omografiche, le proprietà delle correlazioni deducendosi senz'altro da quelle delle omografie collo scambio del nome dell'elemento generatore di uno dei due spazî.

Fra due spazî Σ, Σ' abbiasi un'omografia Ω e sia α un piano di Σ; a, A una retta ed un punto, non appartenentisi, del piano α; a', A' gli elementi corrispondenti su Σ', i quali non si apparterranno. Ad un punto P variabile su a, la Ω associa un punto P' variabile su a' e alla retta AP, la retta $A'P'$; ma poichè, al variare di P, i punti della retta AP descrivono il piano α ed i punti omologhi descrivono il piano $\alpha \equiv A'a'$, così la Ω fa corrispondere a punti di α, punti di α'. È poi chiaro che, se una retta di Σ varia in una stella O, la retta corrispondente varia nella stella che ha per centro il punto omologo O'. Dunque:

In una proiettività fra due forme di 3ª specie ad elementi di una forma di 2ª specie corrispondono elementi di una forma di 2ª specie.

La corrispondenza subordinata fra i due piani omologhi, α, α', dall'omografia Ω, muta punti allineati in punti allineati ed è quindi (pag. 248) un'omografia. Ne deriva (pag. 250) che la corrispondenza subordinata da Ω fra due rette omologhe a, a', è una proiettività. Si può quindi enunciare:

Una proiettività fra due forme di 3ª specie subordina una proiettività fra due forme omologhe di 1ª o di 2ª specie.

In modo analogo a quello seguito per dimostrare il teorema di pag. 251, si prova che:

Tra due forme di 3ª specie Σ, Σ' esiste una ed una sola proiettività, la quale subordini due date proiettività fra due forme di 2ª specie A, B, appartenenti a Σ e due forme di 2ª specie A', B' appartenenti a Σ'; colla condizione che alla forma di 1ª specie comune alle prime due, corrisponda in ambedue le proiettività la forma di 1ª specie *comune alle altre due e che tra queste due forme di 1ª specie resti subordinata la medesima proiettività.*

Ne deriva, come a pag. 252, che:

Tra due forme di 3ª specie esiste una ed una sola proiettività, che faccia corrispondere a cinque elementi indipendenti dell'una, cinque elementi indipendenti dell'altra.

Qui cinque elementi si dicono *indipendenti* quando quattro qualunque di essi non appartengono ad una medesima forma di 2ª specie.

§ 77.

Omografie con infiniti elementi uniti fra due spazi sovrapposti.

A norma del teorema ultimamente enunciato, un'omografia non identica Ω, fra due spazî sovrapposti Σ, Σ', non può possedere più di quattro punti uniti indipendenti. Se pertanto Ω possiede più di quattro punti uniti, ve ne sono quattro almeno in un piano. Sono allora possibili le ipotesi seguenti:

1) Vi è un piano π di punti uniti.

2) Vi è una retta a di punti uniti.

Nell' ipotesi 1) l'omografia dicesi un'*omologia spaziale* o *solida*, di cui π è il piano d'omologia. Preso un punto A non unito, di cui sia A' l'omologo, la retta AA' incontra π in un punto unito M e quindi essa è unita (alla retta MA corrisponde la MA'). Sia B un altro punto non unito, esterno ad AA'. Il piano $\alpha \equiv AA'B$ sega π lungo una retta unita m e quindi è unito (perchè contiene due rette unite: m, AA'); cioè il punto B', omologo di B, sta su α. Le rette AA', BB' s' incontrano pertanto in un punto, necessariamente unito. Dunque le congiungenti le coppie di punti omologhi s' incontrano a due a due; e, poichè esse non giacciono tutte in un piano, passano per un punto, unito per Ω.

Questo punto unito può esser fuori di π o su π. Anzi è chiaro che, se esiste fuori di π un punto O, unito per Ω, tutte le coppie di punti omologhi son allineate con esso, perchè la retta OA, che va ad un punto qualunque A di Σ, è unita, in quanto contiene O ed il punto unito $M \equiv OA \, . \, \pi$. Inoltre è chiaro che fuori di π non ci può essere più di un punto unito, perchè se no sarebbe possibile scegliere cinque punti uniti indipendenti di Ω. Si conclude che:

Se in un'omografia solida c' è un piano di punti uniti, c' è altresì una stella di rette unite, e viceversa (dualmente).

Il centro della stella di rette unite dicesi *centro dell'omologia*. L'omologia dicesi *speciale* quando il centro cade sul piano di omologia.

Esistono effettivamente omologie solide. Si prova invero agevolmente (cfr. colla pag. 256) che *un'omologia solida è individuata dal piano d'omologia, dal centro e da una coppia di punti omologhi (allineati col centro).*

Due piani omologhi si tagliano in una retta di π; due rette omologhe in un punto di π.

Esaminiamo ora l' ipotesi 2) e supponiamo che Ω non sia omologica. Dico allora che, oltre alla retta a di punti uniti, vi è un fascio b di piani uniti. Questo è senza altro vero se ogni piano per a è unito. Altrimenti vi sono al più due piani uniti passanti per a, e quindi un punto generico A dello spazio non sta su alcun piano unito del fascio a. Ne deriva che la retta AA', congiungente A col suo omologo A', è sghemba con a. Se essa è unita, ogni piano per AA', è unito, perchè congiunge la retta unita AA' con un punto unito di a; e si è trovato un fascio di piani uniti. Se la AA' non è unita, il punto A'', omologo di A nella Ω^2, non sta su essa. Il piano $AA'A''$ incontra a in un punto M ed è unito, perchè al piano MAA' la Ω fa corrispondere il piano $MA'A''$.

Per un punto generico dello spazio passa dunque almeno un piano unito. Si hanno così infiniti piani uniti, epperciò o un fascio o una stella di piani uniti [sono le ipotesi duali delle 1), 2)]. Ma una stella di piani uniti non può aversi, perchè se no Ω sarebbe omologica; dunque c' è un fascio b di piani uniti.

Si debbono ora distinguere tre ipotesi subordinate alla 2), e cioè:

2′) Ogni piano per a è unito e vi è un fascio b di piani uniti distinto dal fascio a.

2″) Ogni piano per a è unito e non vi sono altri fasci di piani uniti distinti da a.

2‴) Sul fascio a la Ω subordina una proiettività non identica.

Nell' ipotesi 2′) ogni punto di b è unito, in quanto giace sulla retta unita b e sopra un piano unito per a. E fuori delle a, b non vi possono essere altri punti uniti (nè, dualmente, altri piani uniti): se no Ω sarebbe identica.

Ognuna delle ∞^2 rette appoggiate alle a, b è unita: sicchè per ogni punto A dello spazio, esterno alle a, b, passa una (sola) retta unita, contenente l'omologo A' di A. Dualmente: sopra un piano non passante nè per a nè per b giace una sola retta unita. *Le rette unite, distinte da a, b, formano cioè una congruenza del 1° ordine e della 1ª classe (congruenza lineare)* (pag. 299), di cui a, b son le *direttrici*. La Ω dicesi in tal caso un'*omografia biassiale iperbolica di assi a, b.*

È facile provare che *una tale omografia esiste ed è anzi individuata dai due assi e da una coppia di punti omologhi (congiunti da una retta appoggiata agli assi).*

Nell' ipotesi 2″) non vi possono essere piani uniti diversi da quelli che passan per a, perchè se un tal piano α ci fosse e intersecasse a in U, le rette situate in α e uscenti da U sarebbero unite e quindi su α la Ω subordinerebbe un'omologia di centro U. L'asse b di quest'omologia sarebbe luogo di punti uniti; sicchè, se fosse sghembo con a, si cadrebbe nell' ipotesi 2′), se fosse incidente con a, la Ω sul piano ab subordinerebbe l' identità e quindi sarebbe omologica. Dualmente si vede che fuori di a non vi sono punti uniti.

Le rette del tipo AA', congiungenti coppie di punti omologhi, s'appoggiano alla retta a, perchè, essendo unito il piano aA, il punto A' deve giacere in esso.

Anche in tal caso dunque vi sono ∞^2 rette unite e per ogni punto dello spazio, esterno ad a, passa una sola retta unita; e (dualmente) su ogni piano non passante per a ne giace una sola; cioè le rette unite formano una congruenza del 1° ordine e della 1ª classe, di cui a è *l'unica direttrice*. La *congruenza (lineare)* dicesi in tal caso *speciale*. Sopra ogni piano π per a la Ω subordina un'omologia di asse a, la quale è necessariamente speciale, perchè se no esisterebbero punti uniti esterni ad a. Dicasi P il centro di quest'omologia. Proviamo che *al variare di π attorno alla retta di punti uniti a, fra le posizioni di π e le posizioni su a del centro P dell'omologia subordinata da Ω su π, intercede una proiettività.*

Denoti invero b una retta sghemba con a. Essa non contiene alcun punto unito ed è sghemba anche colla propria omologa b', perchè se s'appoggiasse a b' in un punto O, in esso coinciderebbero le intersezioni di due rette omologhe con un piano unito per a, e quindi O sarebbe unito. Le congiungenti delle coppie di punti omologhi di b,b' son appoggiate ad a e generano una schiera rigata, tracciata sopra una quadrica Q (pag. 135). Ogni piano π tocca Q nel relativo centro d'omologia P. La corrispondenza fra le posizioni di π, P è pertanto proiettiva (pag. 157). Dunque:

La congruenza lineare speciale delle ∞^2 rette unite di Ω può generarsi considerando gli ∞^1 fasci di raggi $P\pi$, ove P, π son punto e piano corrispondentisi in una proiettività fra i punti e i piani di a.

Nel caso che stiamo esaminando Ω si chiama un'*omografia biassiale parabolica* di *asse a* (perchè può considerarsi come limite di un'omografia biassiale iperbolica, i cui assi sieno venuti a coincidere). Il lettore verificherà agevolmente che *una tale omografia è individuata dal suo asse a, della proiettività fra i piani π ed i punti P*

appartenenti ad a, e da una coppia di punti omologhi. Esistono pertanto omografie biassiali paraboliche.

Passiamo ad esaminare l'ipotesi 2‴). Si ha un *asse di punti* (*ma non di piani*) *uniti a* ed un *asse di piani* (*ma non di punti*) *uniti b*, necessariamente distinto da *a*. L'*omografia* dicesi in tal caso *assiale*. Sull'asse *b* di piani uniti vi sono al più due punti uniti. Nè può esistere un punto unito *O*, fuori di *a*, *b*, perchè altrimenti sul piano unito *Ob* la Ω subordinerebbe un'omografia, la quale dovrebbe essere non omologica (se no si cadrebbe nella ipotesi 2′). Quest'omografia possiederebbe due punti uniti — *O* e l'intersezione *M* di *Ob* con *a* — fuori di *b*. Ciò è assurdo, perchè i due punti *O*, *M* sarebbero ambedue associati alla retta unita *b* (pag. 261). Dunque *in un'omografia assiale, come in una biassiale, non vi sono punti uniti, nè* (*dualmente*) *piani uniti, fuori di quelli appartenenti agli assi.*

La retta congiungente due punti omologhi s'appoggia evidentemente all'asse *b* di piani uniti; e dualmente l'intersezione di due piani omologhi s'appoggia all'asse *a* di punti uniti. Una retta unita, distinta da *a*, *b*, potendosi considerare come congiungente di due punti omologhi o come intersezione di due piani omologhi, s'appoggia ad ambedue gli assi.

L'omografia assiale si dirà *iperbolica*, *parabolica* o *ellittica*, secondo che sull'asse *b* vi sono due, uno o nessun punto unito. Se l'asse *b* è sghembo con *a*, è chiaro che per *a* vi son tanti piani uniti, quanti punti uniti su *b*. La stessa conclusione vale anche quando *a*,*b* sieno incidenti. Invero, sopra un piano generico α per *b*, la Ω subordina un'omografia non omologica, nella quale vi sono tanti punti uniti, quante rette unite (pag. 260). Ora i punti uniti di quest'omografia son quelli situati su *b* e le rette unite, dovendosi appoggiare ad *a*, son le sezioni di α coi piani uniti per *a*. Dunque *in un'omografia assiale, sull'asse di piani uniti ci son tanti punti uniti, quanti piani uniti passan per l'altro asse.*

Cerchiamo le rette unite dell'omografia assiale Ω, diverse da *a*, *b*. Una retta *r* unita, distinta da *a*, *b*, come abbiamo osservato, s'appoggia agli assi *a*, *b* e determina perciò su *b* un punto unito e un piano unito per *a*. Si conclude pertanto che *in un'omografia assiale le rette unite diverse dagli assi costituiscono due fasci di raggi* (*al più*).

Due piani omologhi α, α′ passanti per *a*, avendo la retta comune luogo di punti uniti, son prospettivi (pag. 254). Se l'asse *b* è sghembo con *a*, esso sega α, α′ in due punti omologhi e quindi il centro di prospettiva di α, α′ giace su *b*. Se l'asse *b* appoggiasi ad *a*, un piano generico ρ per *b* sega α,α′ secondo due rette omologhe *r*,*r*′, e quindi il centro di prospettiva di α, α′ giace su ρ. Ma poichè ciò deve valere per tutte le posizioni di ρ attorno a *b*, così il detto centro di prospettiva giacerà su *b*. Si può pertanto enunciare:

Se un'omografia spaziale non omologica possiede una retta a sostegno di punti, ma non di piani, uniti, essa possiede in conseguenza una retta b associata ad a, sostegno di piani, ma non di punti, uniti; la quale può essere o no sghemba con a; e viceversa (*dualmente*). *La retta b è il luogo dei centri di prospettività delle coppie di piani omologhi passanti per a; e* (*dualmente*) *per la retta a passano i piani di prospettiva delle coppie di stelle omologhe aventi i centri su b.*

Lasciamo al lettore di dimostrare per esercizio l'esistenza di un'omografia assiale, provando di più ch'essa è individuata dati:

1) gli assi *a*, *b* di punti e di piani uniti;

2) la proiettività fra i punti di *b*;

3) una coppia *A*,*A*′ di punti omologhi in un piano α passante per *b* e incontrante *a* in un punto *B*.

La proiettività fra i piani per *a* risulta determinata dal fatto di dover segare sul fascio *B*α la medesima proiettività ivi subordinata dall'omografia individuata sul piano α dai dati 2) e 3).

Osservazione. Risulta da quanto precede che *una omografia fra due spazi sovrapposti, con infiniti punti uniti, è un'omologia* (∞^2 *punti e piani uniti*) *o un'omografia biassiale* (∞^1 *punti e piani uniti*) *se possiede* ∞^2 *rette unite; oppure un'omografia assiale* (∞^1 *punti e piani uniti*) *se possiede* ∞^1 *rette unite; e dualmente.*

Per esaurire lo studio delle omografie con infiniti elementi uniti ci rimane da considerare il caso di *un'omografia* Ω *che possegga infinite rette unite, senza possedere infiniti punti uniti* (*reali*).

Riservandoci di stabilire tra poco l'esistenza di una tale omografia, osserviamo anzitutto ch'essa non può possedere neppure infiniti piani uniti, perchè se no ammetterebbe o un fascio o una stella di piani uniti e si cadrebbe in uno dei casi già esaminati.

Orbene, se per un punto generico dello spazio non passasse nessuna retta unita, combinando questo fatto coll'altro che un punto generico non giace in alcun piano unito, se ne dedurrebbe, come vedremo nel § 79, che Ω possiede un numero finito di elementi (punti, piani, rette) uniti. Conviene dunque, nel nostro caso, concludere che per un punto generico dello spazio passa una retta unita, ed una sola, chè altrimenti quel punto sarebbe unito. Vuol dire insomma che è unita la retta che congiunge un punto generico A col proprio omologo A'; e quindi le rette unite sono ∞^2.

Suppongasi, se è possibile, che Ω possegga un punto unito (reale) O. Allora è unito ogni piano proiettante da O una delle ∞^2 rette unite e quindi Ω possiede infiniti piani uniti; contrariamente a quel che prima si è concluso. Dunque Ω *non possiede alcun punto unito* (*reale*) *nè, dualmente, alcun piano unito* (*reale*). Però in tal caso si potrà dire che Ω *possiede infiniti punti uniti a coppie imaginarî coniugati*, che son le coppie di punti uniti delle proiettività, necessariamente ellittiche, subordinate da Ω sulle ∞^2 rette unite (pag. 124). Non soltanto per un punto *generico*, ma anche per un punto *qualunque*, passerà dunque una sola retta unita; perchè se per un qualche punto (reale) dello spazio passassero due rette unite, quel punto sarebbe unito. Inoltre sopra un piano qualunque α dello spazio, giacerà una ed una sola retta unita. Detto infatti α' il piano omologo di α, necessariamente distinto da α, la retta $r \equiv \alpha\alpha'$ è unita, perchè, se non lo fosse, variando A su r la retta unita AA', che congiunge A coll'omologo A', varierebbe su α' e si avrebbero ivi infinite rette unite e quindi (pag. 255) una retta luogo di punti uniti.

Le ∞^2 *rette unite dell'omografia* Ω *costituiscono in tal caso, come in quello di un'omografia biassiale, una congruenza del* 1° *ordine e della* 1ª *classe.* Soltanto che, nel caso attuale, questa congruenza lineare è priva di direttrici (reali).

In conclusione, l'insieme delle coppie di punti imaginarî coniugati distribuiti sulle rette unite di Ω, gode di varie proprietà, analoghe a quelle dell'insieme delle coppie di punti reali distribuiti su due rette reali, sghembe. Si dice perciò che i punti uniti di Ω riempiono una *coppia di rette imaginarie coniugate di* 2ª *specie*, riserbando la denominazione di coppie di *rette imaginarie coniugate di* 1ª *specie* a due rette imaginarie coniugate *incidenti* in un punto reale e *giacenti* sopra un piano reale, cioè ai raggi doppi di un'involuzione ellittica in un fascio di raggi (pag. 124). La denominazione introdotta viene più ampiamente giustificata dalle successive considerazioni, le quali son pur dirette a provare l'effettiva esistenza del tipo considerato di omografie, che si dicono *omografie biassiali ellittiche.*

Le rette unite di Ω appoggiate ad una retta non unita r, formano una schiera rigata (come nel caso degli assi reali), generata dalle congiungenti i punti A di r cogli omologhi A' situati sopra la retta corrispondente r', la quale è sghemba con r, perchè altrimenti r' congiungerebbe il punto rr' col suo omologo, e perciò essa, ed r, sarebbero unite (coinciderebbero). Si può quindi dire che *le due rette imaginarie coniugate sghembe, insieme ad una* *retta non unita reale, definiscono una schiera rigata ad esse incidente* (*di cui esse son direttrici*).

Le schiere rigate di cui son direttrici i due assi imaginarî di Ω sono ∞^3, perchè per ognuna delle ∞^4 rette (reali) dello spazio, si ha una di quelle schiere, che contiene ∞^1 rette. Si hanno cioè tante schiere rigate quante quelle di cui son direttrici due rette reali sghembe (tante, quante le proiettività fra queste). Quelle ∞^3 *schiere rigate* si diranno brevemente *appartenenti* ad Ω.

Sia V una schiera rigata appartenente ad Ω ed U sia la schiera incidente a V. Ogni retta di U sarà mutata da Ω in una retta di U; e quindi Ω subordinerà sulla forma elementare U (pag. 227) una proiettività ω, che non potrà essere identica, perchè altrimenti sarebbero uniti tutti i punti della quadrica su cui son tracciate le U, V. Poichè due rette di U, omologhe in ω, segano punti omologhi sopra una retta v di V, che è unita in Ω, così la proiettività ω staccherà sopra v la proiettività ellittica ω', ivi subordinata da Ω. E quindi la ω, come la ω', sarà ellittica. E si potrà intendere che i due punti uniti imaginarî di ω' sieno le sezioni di v colle due rette unite imaginarie definite, entro la forma elementare U, dalla proiettività ellittica ω. Vediamo così che *le due rette imaginarie coniugate sghembe, sopra definite come assi di un'omografia biassiale ellittica, posson anche definirsi come elementi uniti di una proiettività ellittica fra i raggi della schiera rigata incidente ad una delle* ∞^3 *schiere che appartengono all'omografia.*

La considerazione di queste ∞^3 schiere rigate ci pone in grado di *dimostrare l'esistenza di omografie biassiali ellittiche e d'indicare il modo come possono individuarsi.*

Assumansi all'uopo tre rette v, v', v'' sghembe a due a due e determinanti perciò una schiera V, di cui indichiamo con U la schiera incidente. Sulla v si fissi una proiettività ellittica $\omega' = \begin{pmatrix} A\ B\ C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$. Sieno u, u' le generatrici di U passanti per B,B' ed u_1, u'_1 le generatrici di U passanti per C,C'; sieno inoltre D,D'; E,E' le intersezioni di u, u'; u_1, u'_1 con v'; ed F,F'; G,G' le intersezioni delle stesse coppie di rette con v''. Le due quintuple A,D,E,F,G; A',D',E',F',G' son costituite da punti indipendenti e quindi esiste una ben determinata omografia spaziale $\Omega \equiv \begin{pmatrix} A\ D\ E\ F\ G \\ A'D'E'F'G' \end{pmatrix}$. Essa muta la retta $v' \equiv DE$ nella $D'E'$, cioè in se stessa; e similmente muta in sè la retta $v'' \equiv FG \equiv F'G'$. Alla retta $u \equiv DF$, fa corrispondere la $u' \equiv D'F'$; alla $u_1 \equiv EG$, la $u'_1 \equiv E'G'$; alla retta uscente da A e appoggiata alle u, u_1, la retta uscente da A' e appoggiata alle u', u'_1. Ma siccome per A, A' passa la retta v appoggiata alle u, u', u_1, u'_1, così v è unita. Al punto $B \equiv u\,v$ risponde pertanto il punto $B' \equiv u'v$; e a C, C'. Perciò Ω muta in sè la schiera V, subordinando su essa l'identità (perchè son unite le tre rette v, v', v'') e muta in sè la schiera U, subordinando su essa l'omografia ellittica ω indotta fra le rette di U dall'omografia ω' fra i punti di v.

La Ω possiede infinite rette unite (intanto ∞^1, che son quelle della schiera V) e quindi è di uno dei tipi esaminati in questo §. Ma essa non può essere nè una omologia nè un'omografia assiale o biassiale, iperbolica o parabolica, perchè su *ogni* retta unita subordinerebbe una proiettività con qualche punto unito, mentre Ω subordina su v una proiettività ellittica: dunque Ω è un'omografia biassiale ellittica.

Il lettore verificherà che il modo con cui abbiamo individuato Ω si può anche enunciare dicendo che Ω *è individuata dall'assegnare i suoi due assi imaginari sghembi ed una coppia* A,A' *di punti omologhi* (*situati sopra una retta, reale, appoggiata agli assi*).

§ 78.

Invariante assoluto di un'omologia o di un'omografia biassiale (iperbolica o parabolica).

Data un'omologia spaziale Ω di centro U e di piano π, poichè su ogni piano per U la Ω subordina un'omologia e poichè d'altronde due piani per U s' incontrano lungo una retta su cui le due omologie ad essi relative subordinano la medesima proiettività, in base alla proprietà di pag. 257, si conclude che *il gruppo $UVAA'$, ove A, A' sia una coppia di punti omologhi e V l' intersezione della retta AA' col piano d'omologia, si conserva proiettivo a se stesso variando comunque la coppia A,A'.*

Il birapporto $(UVAA')$ resta perciò costante al variare della coppia A,A' (vale 1 per le omologie speciali): esso chiamasi l' *invariante assoluto* o la *caratteristica dell'omologia spaziale.*

Sia ora Ω un'omografia biassiale iperbolica, di assi a, b; ed A, A' sia una coppia di punti omologhi, U, V i punti d'appoggio della retta AA' sulle a, b. Dico che *anche nel caso dell'omografia biassiale iperbolica, il gruppo $UVAA'$ rimane proiettivo a se stesso variando la coppia A,A'.* Ciò è ben chiaro quando la retta AA' si muove in modo che resti fisso p. es. il punto U, perchè nel piano Ub la Ω subordina un'omologia di centro U e d'asse b. Similmente il gruppo $UVAA'$ riman proiettivo a se stesso allorchè la retta AA' varia in modo che resti fisso V. Ma poichè facendo scorrere uno alla volta i punti U, V sulle a, b, si può portare la retta AA' ad occupare una qualunque delle ∞^2 posizioni per essa possibili, si conclude nel modo già enunciato.

Il birapporto $(UVAA')$ chiamasi ancora l' *invariante assoluto* o la *caratteristica dell'omografia biassiale.* Nel caso di un'omografia biassiale parabolica, U coincide con V e si dovrà perciò assumere $(UVAA')=1$.

§ 79.

Omografie con un numero finito di elementi uniti.

Sia Ω un'omografia fra due spazi sovrapposti Σ, Σ', avente un numero finito di elementi uniti, epperciò tale che un punto generico A dello spazio Σ non appartiene ad alcuna retta nè ad alcun piano unito. In Σ' sia A' l'omologo di A ed A'' sia l'omologo di A', pensato in Σ. Poichè la retta AA' non è unita, il punto A'' sarà fuori di AA'. L'omografia Σ subordina fra le due stelle A,A' un'omografia in cui la retta AA' non è unita. Pertanto le due stelle omografiche generano una cubica gobba irriducibile H, luogo dei punti d'appoggio delle coppie di rette omologhe incidenti. La H passa per A,A' e tocca in A' la retta $A'A''$ (pagg. 296-98). Similmente le due stelle omografiche A',A'' generano una cubica irriducibile K, passante per A', A'' e tangente in A' alla retta AA'.

Fra i due fasci di piani AA', $A'A''$ vien pure subordinata una proiettività (non prospettiva), mediante la quale generasi un cono irriducibile F, di vertice A', sul quale sono tracciate le cubiche H, K. Ogni punto comune alle H, K, fuori del vertice A', è evidentemente unito in Ω; e viceversa. Dunque:

I punti uniti di un'omografia spaziale Ω, non avente infiniti elementi uniti, posson ottenersi come intersezioni ulteriori di due cubiche tracciate sopra un medesimo cono quadrico, fuori del vertice del cono, per cui le due cubiche passano senza toccarsi (*).

I punti uniti (reali) di Ω non posson esser più di quattro (pag. 321). Analiticamente si vede che la deter-

(*) Questa costruzione dei punti uniti è di STAUDT (*Beiträge zur Geometrie der Lage,* n. 508). Si posson anche ottenere i quattro punti uniti come ulteriori intersezioni di due cubiche passanti per un medesimo punto, ma non tracciate sullo stesso cono quadrico (ved. una mia nota nel Periodico « Le matematiche pure ed applicate », 1902).

minazione dei punti uniti di Ω dipende dalla risoluzione di un'equazione di 4° grado a coefficienti reali, per la quale si posson presentare casi di coincidenza delle radici e radici imaginarie (a due a due coniugate). A queste vicende analitiche della equazione determinatrice dei punti uniti, si potrebbero opportunamente coordinare fatti geometrici ben determinati, così da dare un senso geometrico preciso all'affermazione che *la Ω ha quattro punti uniti, fra reali (distinti e coincidenti) e imaginarii coniugati.*

Osservazione. Osserviamo piuttosto che Ω non può avere infinite rette unite. Ci limiteremo in proposito ad un breve cenno. Se, invero, r è una retta unita, non passante necessariamente per alcuno dei punti A, A', A'', al piano Ar, della stella A, risponde il piano $A'r$ della stella A', e quindi r è una corda (reale o ideale) della cubica H (pag. 299). I suoi punti d'appoggio (reali o imaginarî coniugati) su H appartengono al cono F. Similmente r è una corda di K e i suoi punti d'appoggio sono i due punti (reali o imaginarî coniugati) ove r incontra F. I detti due punti d'appoggio sono pertanto fra le quattro intersezioni (reali o imaginarie) delle due cubiche H, K, fuori di A', ed r è una delle rette reali (sei al più), che congiungono a coppie quelle quattro intersezioni.

Si osserverà che per arrivare alla conclusione che Ω ha un numero finito di elementi (punti, rette, piani) uniti, basta soltanto supporre che il punto generico A non appartenga ad alcuna retta unita reale, nè ad alcun piano unito reale. Questa osservazione ci è occorsa a pag. 327.

§ 80.

Omografie involutorie.

Determiniamo ora le omografie involutorie dello spazio. Se Ω è una tale omografia, un punto generico A corrisponde in doppio modo al suo omologo A' e quindi la retta AA' è unita. Per un punto generico dello spazio

passa una retta unita e la Ω perciò possiede infinite rette unite. In forza della classificazione, fatta nel § 77, delle omografie con infiniti elementi uniti, si conclude che Ω è un'omologia o un'omografia biassiale.

Se Ω è un'omologia, poichè sopra una retta unita pel centro essa subordina un' involuzione, necessariamente iperbolica, ogni coppia di punti omologhi A,A' separerà armonicamente la coppia costituita dal centro e dalla intersezione di AA' col piano di omologia. La caratteristica dell'omologia vale -1 : si tratta di un'*omologia armonica.* Viceversa, è chiaro che un'omologia armonica è un'omografia involutoria.

Se Ω è un'omografia biassiale, l' involuzione subordinata sopra una sua retta unita AA' è iperbolica o ellittica. Se è iperbolica (o ellittica) la Ω è necessariamente un'omografia biassiale iperbolica (o ellittica) e quindi è iperbolica (o ellittica) l' involuzione subordinata sopra ogni retta del tipo AA'.

Se Ω è un'omografia biassiale iperbolica, il gruppo $UVAA'$, ove U,V sono i punti d'appoggio della retta AA' sugli assi, è armonico. La Ω dicesi perciò un'*omografia biassiale iperbolica armonica.* Viceversa, è chiaro che ogni tale omografia è involutoria.

Se infine Ω è un'omografia biassiale ellittica, indicando con U,V i punti doppi imaginarî coniugati dell' involuzione ellittica esistente su AA', si può, per uniformità e brevità di locuzione, continuare a dire che *il gruppo $UVAA'$ è armonico,* per esprimere appunto che AA' è una coppia dell' involuzione ellittica individuata dai punti doppi U,V. La Ω si dirà in tal caso un'*omografia biassiale ellittica armonica.*

Viceversa, un'omografia biassiale ellittica Ω, per la quale un gruppo del tipo $UVAA'$ sia armonico (omografia che può individuarsi nel modo indicato alla fine del § 77, scegliendo involutoria la proiettività ellittica ω', di cui là si parla), è tale che il suo quadrato Ω^2 lascia ferme tutte le ∞^2 rette che son unite per Ω e inoltre possiede una retta di punti uniti: la $v \equiv AA'$. La Ω^2

pertanto, a norma della classificazione del § 77, è un'omografia biassiale, che possiede una retta di punti uniti distinta dagli assi. Essa è dunque identica e la Ω è involutoria. Riassumendo:

Un'omografia involutoria dello spazio è un'omologia armonica o un'omografia biassiale armonica (iperbolica o ellittica); e viceversa.

La considerazione di un'omografia biassiale ellittica armonica consente di stabilire una proprietà in certa misura analoga a quella di pag. 124, relativa all'esistenza di un' involuzione ellittica permutabile con una data proiettività ellittica, sopra una forma di 1ª specie.

Sia Ω un'omografia biassiale ellittica, non involutoria; v una sua retta unita; ω' la proiettività ellittica subordinata su v da Ω; i' l' involuzione di v permutabile con ω' (pag. 124). Date altre due rette unite v', v'' di Ω, s' individui un'omografia biassiale ellittica involutoria I, colle condizioni che debba aver come unite le rette v, v', v'' e che debba subordinare su v l' involuzione i' (pag. 329). Allora I ed Ω lascieranno fisse tutte le rette della schiera V, cui appartengono le v, v', v'', e scambieranno fra loro le rette della schiera rigata incidente U. Onde l'omografia $I\Omega I\Omega^{-1}$ avrà come unite tutte le rette di V e subordinerà su v, e quindi su U, l' identità (perchè è $i'\omega' i' \equiv \omega'$). Ogni punto della quadrica contenente le U, V sarà unito, epperò:

$$I\Omega I\Omega^{-1} \equiv 1 \text{ , cioè : } I\Omega I \equiv \Omega, \text{ ovvero : } I\Omega \equiv \Omega I.$$

Gli assi dell'omografia I sono le rette unite dell' involuzione subordinata da I fra le rette di U, cioè — attesa la prospettività fra la schiera U e la retta v — le rette unite della proiettività subordinata da Ω su U. Dunque Ω, I hanno gli stessi assi. E poichè I è individuata dai proprî assi e da una coppia di punti coniugati nell' involuzione i', si conclude che:

Esiste una ed una sola omografia biassiale involutoria I, permutabile con una data omografia biassiale ellittica Ω. Le I, Ω hanno gli stessi assi imaginari.

La proprietà analoga vale pure se Ω è un'omografia biassiale iperbolica; cioè anche in tal caso esiste una ben determinata omografia biassiale involutoria I, permutabile con Ω. È quella che ha gli stessi assi di Ω. Il ragionamento precedente si applica anche a questo caso, con qualche semplificazione.

§ 81.

Particolarità metriche delle omografie spaziali.

Piani limiti di un'omografia fra due spazî Σ, Σ', son gli omologhi dei piani all' infinito dei due spazî rispetto alla data omografia. Se i piani limiti sono impropri, cioè se i piani all' infinito si corrispondono, l'omografia prende il nome di *affinità*. Essa gode di proprietà del tutto analoghe a quelle già notate dell'affinità tra piani: a rette parallele corrispondon rette parallele; a segmenti, aree, volumi finiti, segmenti, aree, volumi finiti; a parallelogrammi, parallelogrammi; a parallelepipedi, parallelepipedi.

Due punteggiate omologhe son simili; due piani omologhi sono affini; *due parallelepipedi e, più generalmente, due volumi finiti corrispondenti, stanno fra loro in rapporto costante*, che si chiama *rapporto d'affinità*.

L'*equivalenza affine* si ha quando il rapporto d'affinità vale 1.

Se, oltre ad esser omologhi i due piani impropri, la data omografia muta la polarità assoluta dell'uno nella polarità assoluta dell'altro (pag. 282), cioè se l'omografia muta elementi (rette e piani) paralleli od ortogonali, in elementi paralleli od ortogonali, essa dicesi una *similitudine*. Due rette o due piani in essa omologhi son simili (pag. 265); ad ogni angolo, rettilineo o diedro, corrisponde un angolo eguale; due triangoli o due tetraedri finiti corrispondenti son simili, nel senso della Geometria elementare. Ne segue che *è costante il rapporto di due segmenti corrispondenti*, che si chiama *rapporto* *di similitudine*. Il rapporto d'affinità è il cubo del rapporto di similitudine.

Considerando due spazî sovrapposti, vi è luogo a distinguere la *similitudine diretta* dall' *inversa*, secondo che un angolo triedro *abc* vien mutato in un angolo triedro eguale *a'b'c'* (avente angoli rettilinei e diedri eguali ai corrispondenti di *abc*), che ha lo stesso verso o verso contrario rispetto ad *abc*.

Quando il rapporto di similitudine vale 1, due figure omologhe sono eguali e si ha fra i due spazî una *congruenza* o *eguaglianza*. Le congruenze fra due spazî sovrapposti si posson classificare come abbiam fatto per quelle fra piani sovrapposti (pag. 266) e da tale classificazione si trae poi (in modo analogo a quanto si fece a pag. 269 per la Geometria piana) che *tutte le proprietà metriche dello spazio posson esprimersi come relazioni grafiche delle figure coll'assoluto* (piano improprio e polarità assoluta ivi).

Per tutto ciò rinviamo lo studioso al già citato trattato dell' Enriques (*).

Estendendo inoltre, coll'uso d'una reciprocità spaziale, il procedimento seguito nel § 65, si conclude similmente che *la legge di dualità spaziale è applicabile a tutte le proprietà grafiche, comunque dimostrate, ed è anche applicabile alle proprietà metrico-proiettive*.

Osservazione. Si noterà che, una volta assunto come primitivo il concetto di segmenti eguali (cfr. l' Introduzione), che può considerarsi un dato derivante per astrazione dalla esperienza fisica, la Geometria proiettiva suggerisce senz'altro di *definire una congruenza spaziale come una corrispondenza biunivoca fra i punti dello spazio, che fa passare da punti allineati a punti allineati e da ogni segmento rettilineo ad un segmento eguale*.

Tale è, sotto forma più o meno diversa, la definizione adottata in varî trattati moderni di Geometria elementare, in sostituzione della nozione (fisica) euclidea

(*) *Lezioni di Geometria proiettiva*, Zanichelli, 1920, pag. 403-408.

di movimento. È questo uno dei casi in cui i concetti della Geometria proiettiva hanno contribuito ad un più razionale assetto della Geometria elementare. Il che d'altronde è ben naturale dato che *la Geometria elementare è tutta contenuta nella Geometria proiettiva*. E invero, *mentre la Geometria proiettiva abbraccia l' insieme delle proprietà delle figure che restano invariate di fronte alle trasformazioni proiettive, la Geometria elementare abbraccia tutte le proprietà delle figure che restano invariate di fronte alle similitudini* (*casi particolari delle trasformazioni proiettive*).

§ 82.

Cenni sulle polarità spaziali.

Una correlazione involutoria fra due spazî sovrapposti, dicesi una *polarità* o un *sistema polare*. Un esempio è fornito dalle polarità rispetto alle quadriche, considerate a pag. 307. La terminologia là adottata di *polo* e *piano polare*, *punti* e *piani coniugati*, ecc. si può trasportare senz'altro ad una qualunque polarità spaziale.

Rispetto all'esistenza di *punti autoconiugati* (punti giacenti sui propri piani polari) si dimostra che le polarità spaziali posson dividersi in tre specie:

1) *Polarità uniformi*, che non posseggono alcun punto (nè alcun piano) autoconiugato. Si può dire che esse son polarità rispetto a *quadriche imaginarie* (cfr. colla pag. 280).

2) *Polarità rispetto a quadriche* (*reali*). Ogni tal polarità possiede ∞^2 punti autoconiugati, distribuiti sopra una quadrica ed ∞^2 piani autoconiugati, che toccano la quadrica stessa.

3) *Polarità nulle* o *sistemi nulli*, rispetto ai quali ogni punto dello spazio è autoconiugato. A tal proposito si ricordi che nel piano non può esistere una polarità non degenere, rispetto alla quale ogni punto sia autoconiugato (pag. 274); mentre nello spazio esistono polarità siffatte, non degeneri.

I sistemi nulli sono strettamente connessi alle proprietà delle cubiche gobbe. Data una cubica gobba irriducibile, esiste un sistema nullo, in cui ai punti della cubica corrispondono i rispettivi piani osculatori: la cubica gobba dicesi la *curva nulla* del sistema nullo. Viceversa, dato un sistema nullo, vi sono ∞^7 cubiche gobbe, che son per esso nulle. Questi pochi accenni bastino ad invogliare il lettore volenteroso ad approfondire la proprietà delle polarità ed in particolare dei sistemi nulli, che son legate ad eleganti considerazioni cinematiche e statiche (*).

(*) Si consulti in proposito p. es. il citato trattato del REYE, *Die Geometrie der Lage*, Vierte Auflage, Zweite Abteilung, Stuttgart, 1907; pagg. 100, 110, 200.

APPENDICE

I. Sui fondamenti della Geometria proiettiva.

§ 1.

Critica dei postulati di appartenenza.

Abbiamo già accennato nella Introduzione a queste Lezioni, all'ufficio dei postulati nello sviluppo di un sistema deduttivo. Ritorniamo più diffusamente su quelle considerazioni, di cui il lettore potrà ora comprendere meglio lo spirito, dopo avere a grado a grado assimilato, durante lo sviluppo del Corso, i rapporti concettuali che ne collegano le varie parti. Potere scorgere in una visione sintetica la parte sostanziale della Geometria proiettiva, significa trovarsi già nella condizione più favorevole per ben intendere le discussioni sopra i suoi fondamenti.

La Geometria proiettiva fornisce un modello d'un sistema logico deduttivo, ancor più semplice di quello offerto dalla Geometria elementare: sicchè la critica dei postulati della Geometria proiettiva si presta molto opportunatamente per cominciare ad illustrar le questioni che toccano i fondamenti della Matematica.

L'esame dei postulati della Geometria si può fare sia dal punto di vista esclusivamente *logico*, come dal punto di vista *psicologico*. Noi ci limiteremo a considerare i postulati nei riguardi della loro funzione logica; ma avvertiamo subito che la critica non deve intendersi esaurita, con questo esame unilaterale.

Il punto di vista psicologico, cioè l' indagine del modo come le facoltà di astrazione e di associazione dell' intelletto elaborano i dati dei sensi, trasformandoli nelle idee primitive e nei postulati, che schematizzano certi ordini di proprietà primordiali del mondo reale, non ha di certo minore importanza. Chè anzi certe questioni pedagogiche, come per es. la scelta più opportuna dei postulati, fra le varie proposizioni che posson assumersi come primitive, innanzi di procedere allo sviluppo logico d'un sistema di verità astratte, vengon poste nella loro luce genuina soltanto attraverso l' indagine psicologica.

Ma qui noi dobbiamo contentarci di aprire qualche spiraglio, di gettar qualche seme, che studi ulteriori e riflessioni più mature dovranno poi sviluppare. E non è necessario di aggiungere che l'Appendice è dedicato in ispecial modo ai futuri insegnanti di Matematica (*).

I postulati che abbiamo introdotto per sviluppare la Geometria proiettiva, sono sovrabbondanti, cioè non indipendenti tra loro. Così i postulati 1°, 2°, 3° (pag. 9), come tosto vedremo, sono conseguenza dei successivi postulati di appartenenza e dei postulati dell'ordine.

Ragioni didattiche ci hanno consigliato di enunciare subito quei postulati, senza dei quali le nozioni di forme fondamentali sarebbero restate incomplete. E ciò abbiamo fatto in omaggio ad un principio pedagogico, che raccomandiamo ai futuri insegnanti di non dimenticar mai! *Bisogna non badar troppo a introdurre qualche postulato di più, quando lo si reputi opportuno per l'efficacia dell' insegnamento. Le eccessive sottigliezze logiche sopra cose di carattere intuitivo, disorientano il principiante, dandogli un senso di malessere, che non gli fa guardar con simpatia alla materia del proprio studio. Sui postulati non conviene all' inizio insister di soverchio.* Bisogna invece lasciare che la maggioranza degli allievi li consideri soltanto come espressioni esplicite, che si sarebbero potute sottintendere, di fatti intuitivi, senza troppo preoccuparsi che ne capisca anche la funzione puramente logica. L'esposizione della materia deve insomma, per quanto è possibile, avvicinarsi a questa condizione ideale: essere assimilabile dagli intelletti mediocri e racchiudere insieme un senso più riposto, che induca a proficue meditazioni gl' intelletti migliori.

(*) Cfr. a questo proposito la nota a piè della pag. 266. Per più ampie notizie critiche, storiche e bibliografiche sui fondamenti della Geometria, veggasi l'articolo di ENRIQUES nella « Encyclopédie des Sciences mathématiques », t. III, vol. 1, fasc. 1, 1911. Per quel che concerne il gruppo dei postulati che abbiamo posto a base della Geometria proiettiva, vedi in particolare una nota di ENRIQUES nei « Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1894 ».

Vediamo ora quali sono i postulati *indipendenti* su cui può fondarsi la Geometria proiettiva.

C' è anzitutto da distinguere, a proposito d' indipendenza dei postulati, l' *indipendenza assoluta* dall' *indipendenza ordinale*.

Si dice che n proposizioni sono assolutamente indipendenti, quando da $n-1$ qualunque di esse non può trarsi come conseguenza logica la rimanente; mentre si dice che esse sono indipendenti, considerate in un determinato ordine, quando nessuna è conseguenza delle precedenti.

In verità, se si accettano certe forme involute del discorso, l' indipendenza assoluta, come ha osservato B. LEVI, non differisce, in ultima analisi, dall' indipendenza ordinale.

Così per es. se a, b son due proposizioni, tali che b non consegue da a, mentre a consegue da b, le due proposizioni a, b sono indipendenti nell'ordine a, b, ma non nell'ordine b, a; non son cioè assolutamente indipendenti. Ma allora, se alla proposizione b si sostituisce la proposizione b', consistente nell'alternativa « o è vera la b o è vera la negazione della a », si vede subito che il sistema delle proposizioni a, b, è equivalente al sistema a, b', nel senso che dalle prime si deducono le seconde, e viceversa; e che le a, b' sono assolutamente indipendenti.

Noi, nel parlare d' indipendenza dei postulati della Geometria proiettiva, ci riferiremo sempre all' indipendenza ordinale.

Cominciamo ad enunciare i seguenti postulati di appartenenza, relativi alle idee primitive punto, retta, piano (*) :

a) *Due punti distinti individuano una retta cui essi appartengono* (**).

b) *Due piani distinti individuano una retta in essi contenuta* (***).

c) *Una retta ed un punto, che non appartenga alla retta, individuano un piano, cui essi appartengono.*

d) *Un piano ed una retta che non appartenga al piano, individuano un punto in essi contenuto.*

Questi postulati coincidono coi postulati 4°, 5°, 8°, 9° del Corso (pagg. 12-13).

Proviamo anzitutto ch'essi son compatibili. Consideriamo all'uopo quattro oggetti A,B,C,D e chiamiamoli « punti ». Chiamiamo poi « rette » le coppie formate da questi oggetti presi a due a due, prescindendo dall'ordine, « piani » le terne (non ordinate) degli oggetti stessi.

Per i punti, le rette, i piani così definiti, son evidentemente soddisfatti i postulati a), b), c), d). Esiste dunque un sistema di enti che verificano queste proposizioni, le quali pertanto non posson esser tra di loro contraddittorie. Si noti che la verifica dell'esistenza di quel sistema di enti, è fatta basandosi soltanto su concetti e operazioni pertinenti alla logica pura.

(*) Omettiamo i postulati esistenziali, che gli enunciati successivi presuppongono, ma che riteniamo superflui, in quanto non parleremmo di due punti distinti, se già non ne presupponessimo l'esistenza; ecc. Sottintendiamo pure i due postulati che definiscon rette e piani come classi di punti.

(**) Il verbo « appartenere » ha qui il significato di « essere contenuto (d'un oggetto entro una classe) ».

(***) Questo postulato ci avverte già che fuori d'un piano esiste ancora un punto, perchè altrimenti non potrebbero esistere piani distinti.

Passiamo a verificare l' indipendenza ordinale dei postulati enunciati (*).

I postulati a), b) sono indipendenti (anzi assolutamente indipendenti), perchè in ciascuno di essi comparisce un' idea primitiva, che l'altro non determina in alcuna guisa (nel primo l' idea « punto » nel secondo l' idea « piano »).

Per provare che c) è indipendente da a), b), considerati ancora i quattro oggetti A,B,C,D, conserviamo il significato già dato alle parole « punto », « retta «, ma assumiamo invece come « piani » soltanto le terne che contengono A. Restano così soddisfatte le a), b), ma non la c), perchè il « punto » B e la « retta » CD, che non contiene B, non individuano alcun piano. Ne deriva che la c) non è una conseguenza logica delle a), b), giacchè in caso contrario, per qualunque interpretazione delle parole « punto », « retta », « piano », la quale soddisfacesse alle a), b), dovrebbe esser soddisfatta anche la c).

Se ora, presi quattro oggetti A,B,C,D, assumiamo come « punti » i tre soli oggetti B, C, D, come « rette » le sei coppie non ordinate dei quattro oggetti, come « piani » le quattro terne non ordinate dei medesimi, restano verificate le a), b), c), ma non la d), perchè esiste un « piano » ABC ed una « retta » AD, non appartenente ad esso, i quali non hanno alcun « punto » in comune. Dunque d) è indipendente dalle a),b),c).

Quanto alla legge di dualità, è ben chiaro ch'essa è valida per qualunque proposizione dedotta dalle a),b),c),d), perchè questi postulati si permutano tra di loro, scambiando « punto » e « piano », lasciando inalterata la parola « retta », e scambiando le voci del verbo « appartenere », da noi preso finora come sinonimo di « esser contenuto », colle voci del verbo « contenere ».

(*) La verifica dell' indipendenza di più postulati si riduce in sostanza ad una constatazione di compatibilità. Così per provare che due postulati a, b son indipendenti, basta provare che a è compatibile colla negazione di b.

Per evitare quest'ultimo scambio, s' intenderà d'ora in poi, come nel Corso, che « appartenere » voglia dir tanto « esser contenuto », come « contenere ». Dal contesto del discorso risulterà ogni volta a quale dei due significati si allude, tenendo conto del fatto, implicito nei postulati precedenti, che una retta è una classe di punti ed un piano una classe di punti, contenente come sottoclassi delle rette.

Dai postulati a),b),c),d) si traggono i *teoremi* seguenti (*):

1) *Se un piano contiene due punti distinti d'una retta, contiene ogni altro punto della medesima.*

2) *Se un punto appartiene a due piani distinti passanti per una retta, appartiene ad ogni piano per essa.*

3) *Tre punti, non allineati, individuano un piano, che li contiene.*

4) *Tre piani, non appartenenti ad una retta, individuano un punto, in essi contenuto.*

I teoremi 3), 4) coincidono coi postulati 6°, 7° del Corso (pag. 13).

Dimostriamo il teorema 1). Se la retta a taglia α in due punti distinti, non può darsi che la a non appartenga ad α, che cioè ogni punto di a non sia un punto di α, perchè se no si contraddirebbe al post. d).

Passiamo al teorema 3). Se A,B,C son tre punti non allineati e quindi distinti (post. a), la retta ben individuata AB (post. a) ed il punto C ad essa esterno, individuano un piano α, che li contiene (post. c). D'altronde ogni piano che contenga A,B,C, contiene la retta AB (teor. 1) ed il punto C e quindi coincide con α (post. c). La conclusione è che:

I postulati di appartenenza posson ridursi al gruppo delle quattro proposizioni a),b),c),d), compatibili e indipendenti (ordinalmente).

(*) Nel seguito s' intende che le voci dei verbi passare, giacere, tagliare, ecc. abbiano i significati soliti, equivalenti a relazioni esprimibili mediante le voci del verbo « appartenere ».

Si stabiliscono pure facilmente sulla base di a),b), c), d), i teoremi delle pagine 14, 15, giacchè per dimostrarli non occorre di sapere che vi sono infiniti punti, infinite rette, infiniti piani (come risulta dai postulati 1°, 2°, 3° del Corso), ma bastan soltanto i postulati esistenziali, impliciti in a),b),c),d).

Così ad es. per provare che due rette distinte a, b di un piano α, hanno sempre un punto in comune, basta assumere fuori di α un punto B; considerare il piano $\beta \equiv Bb$ (post. c): osservare ch'esso non contiene a (post. b) e quindi che incontra a in un sol punto P (post. d). Questo punto non può esser situato fuori di b, perchè se no α, β coinciderebbero (post. c) e B starebbe su α, contro il supposto: dunque P è comune alle a, b, ed è poi, pel postulato a), il solo punto comune a queste rette.

Dai postulati a), b), c), d) si può così dedurre un complesso di teoremi — ivi compresa la legge di dualità nelle forme di 2ª specie — i quali valgono anche per ogni « spazio » convenzionale, i cui elementi « punto » « retta » « piano » soddisfacciano a quei postulati, e ciò anche se gli elementi stessi sono in numero finito.

Vediamo anzi subito quali conseguenze si traggano, aggiungendo ai postulati a), b), c), d), l' ipotesi che la retta consti di un numero finito $n+1$ di punti (n intero ≥ 1). Considerato un piano α dello spazio convenzionale, in cui ogni retta contiene $n+1$ punti, per un punto P di α, in virtù della legge di dualità nel piano, passano $n+1$ rette di α, ognuna delle quali contiene, oltre P, n punti; e viceversa ogni punto di α, proiettato da P, dà una delle suddette rette. I punti di α son dunque $n(n+1)+1 = n^2+n+1$; e altrettante, per la stessa legge di dualità, son le rette di α.

Quanti sono i punti dello spazio convenzionale? Per ogni retta a, in forza della legge di dualità nello spazio, passano $n+1$ piani, ciascun dei quali contiene n^2 punti, fuori degli $n+1$ su quella retta; e viceversa ogni punto dello spazio, fuori di a, è proiettato da a mediante uno di quei piani. Sicchè i punti dello spazio sono in numero di $n^2(n+1)+n+1=n^3+n^2+$ $+n+1$; ed altrettanti, per la legge di dualità nello spazio, sono i piani.

Quante sono le rette dello spazio? Sopra un piano α ne giacciono n^2+n+1 e da ognuno degli n^2+n+1 punti di α, per la legge di dualità nello spazio, ne escono n^2+n+1, delle quali $n+1$ giacenti in α. Viceversa, ogni retta dello spazio, fuori di α, taglia α in uno dei suddetti n^2+n+1 punti. Sicchè le rette fuori di α sono $n^2(n^2+n+1)$ ed in totale le rette dello spazio sono $n^2(n^2+n+1)+n^2+n+1=n^4+n^3+2n^2+$ $+n+1$. Si conclude che:

Se ai postulati di appartenenza si aggiunge il postulato che una retta contenga un numero finito, $n+1$, di punti, lo spazio convenzionale che può costruirsi in base ai cinque postulati, contiene n^3+n^2+n+1 punti ed altrettanti piani, ed $n^4+n^3+2n^2+n+1$ rette. Su ogni piano giacciono n^2+n+1 punti ed altrettante rette. Nel detto spazio vale la legge di dualità. (*)

Così ad esempio si vede che l'unico modo di soddisfare ai postulati di appartenenza, per guisa che la retta contenga il minimo numero possibile di elementi (due), è quello, da noi già adottato per verificare la compatibilità dei postulati *a*), *b*), *c*), *d*), di chiamar punti quattro oggetti dati, rette le coppie di questi oggetti, piani le terne.

Poichè i postulati *a*), *b*), *c*), *d*) bastano già a stabilire il teorema dei triangoli omologici ed il teorema dei quadrangoli omologici, appena il numero $n+1$ dei punti della retta sia ≥ 3 (**), così entro le forme di 1ª specie dello spazio convenzionale di un numero finito di elementi, si possono considerare gruppi armonici. Nel caso

(*) Cfr. STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Erstes Heft, Nürnberg, 1856) pag. 86 e segg. Veggasi pure una memoria di FANO nel « Giornale di matematiche » (vol. XXX, 1892); pag. 114 e 123.

(**) Si tenga conto delle osservazioni di pag. 42 per dare un senso ai predetti teoremi anche pei più piccoli valori di n.

$n=2$, si può dire che la terna ABC dei punti d'una retta u forma già un gruppo armonico, in cui il quarto elemento del gruppo coincide a volontà con A o con B o con C. Sieno infatti D, E, F, G i quattro ulteriori punti, esterni ad u, contenuti in un piano α per u. Per A passano due altre rette di α, ciascuna delle quali contiene due dei quattro punti D, E, F, G; e queste due rette son lati opposti del quadrangolo completo $DEFG$, perchè si tagliano nel punto A, che non è vertice del quadrangolo. Similmente avremo due lati opposti per B e due per C. *I tre punti diagonali del quadrangolo completo $DEFG$ son cioè allineati* (contrariamente a quel che accade — pag. 50 — nello spazio ove valgono *tutti* i postulati della Geometria proiettiva).

Nel caso di n qualunque, la scala armonica (pág. 88) costruita sopra una retta u a partire dall'origine M e dai due punti A_1, A_2, distinti tra loro e da M, deve necessariamente condurre ad una successione di un numero finito di punti, compresi fra gli $n+1$ di u. È ben chiaro che, se n è un numero primo, la scala armonica comprenderà tutti i punti della retta.

§ 2.

Critica dei postulati dell'ordine e della continuità.

Riprendiamo in esame il postulato 10° (pag. 32) ed enunciamolo sotto la forma seguente, riferendolo ad una *particolare* forma di 1ª specie u_0 e ad un suo *particolare* elemento O:

e) *Sopra una certa forma di 1ª specie u_0, esiste un elemento O, tale che gli elementi della forma posson distribuirsi in un insieme ordinato, in cui O precede ogni altro elemento. Inoltre, nel suddetto ordinamento, ogni elemento della forma precede sempre qualche altro, e, scelti due elementi distinti A, B, in guisa che A preceda B, esiste sempre qualche elemento che segue A e precede B.*

Chiameremo ω_0 l'ordinamento, che sulla particolare forma u_0, vien così posto, rispetto alla particolare origine O. Si ottiene subito anzitutto, l'ordinamento $\overline{\omega}_0$, inverso di ω_0, e avente la stessa origine, mutando l'ufficio delle voci dei verbi « precedere » e « seguire ».

La coppia $(\omega_0, \overline{\omega}_0)$ dà poi luogo ad una coppia di ordinamenti opposti, soddisfacenti ancora al post. *e*), ed aventi come origine un altro elemento qualunque P di u_0. Basta all'uopo ordinare gli elementi di u_0 col criterio seguente:

1°) Se gli elementi A, B seguono (o precedono) entrambi P, rispetto all'ordinamento ω_0, si dica che A precede (o segue) B nel nuovo ordinamento ω, quando lo stesso accade rispetto ad ω_0.

2°) Se A precede (o segue) P e B segue (o risp. precede) P in ω_0, si dica che B precede (o segue) A in ω.

Dal nuovo ordinamento si otterrà poi, come prima, il relativo opposto $\overline{\omega}$.

In base ad *e*), si può dunque parlare di una coppia di ordini opposti, per ogni prefissata origine in u_0.

Vediamo ora come nascono dagli ordini, i versi della forma u_0, conformemente agli accenni già fatti nelle pagg. 33, 34. Coordiniamo ad ω_0 tutti gli ordinamenti, che nascono col criterio suddetto da ω_0, a partire dai singoli elementi di u_0, assunti come origini. Detto ω l'ordinamento, che nasce da ω_0, prendendo come origine P, e assunti tre elementi distinti A,B,C di u_0, i quali si succedano nell'ordine ABC rispetto ad ω_0, vogliamo provare che, rispetto ad ω, gli stessi elementi si succedono secondo una permutazione circolare di ABC.

Rispetto all'ordinamento ω_0 può infatti accadere:

1°) Che A,B,C seguano o precedano P; allora, dato il modo di definizione di ω, i tre elementi si succedono ancora nell'ordine ABC, rispetto ad ω. Lo stesso può dirsi se $A \equiv P$ e se B,C seguon P, oppure se A,B precedon P e $C \equiv P$.

2°) Che A preceda P, e B,C lo seguano; allora, ricorrendo sempre alla definizione di ω, si conclude subito

che i tre elementi si succedono in ω nell'ordine BCA; e ciò vale anche quando $B \equiv P$.

3°) Che A,B precedano P e C lo segua; allora i tre elementi si succedono in ω nell'ordine CAB; e ciò vale anche quando $C \equiv P$.

Si conclude che *gli ordinamenti del tipo ω, generati pel tramite di ω_0, a partire dai singoli elementi di u_0, presi come origini, sono tutti concordi con ω_0, nel senso della definizione data a pag.* 33.

Considerati ora due ordinamenti ω, ω' di origini P, P', concordi con ω_0, si prova agevolmente che ω, ω' sono concordi tra di loro. Basta a questo scopo assumere in u_0 una terna A,B,C di elementi distinti, e far l'analisi delle diverse posizioni, che rispetto all'ordinamento iniziale ω_0, possono avere gli elementi A,B,C, in confronto con P, P'. L'analisi non offre alcuna difficoltà e la lasciamo al lettore.

L'insieme degli ordinamenti concordi con ω_0 è quindi definito, come già dicemmo a pag. 34, da una relazione riflessiva, reciproca o simmetrica, e transitiva. L'astratto di tale insieme, cioè la relazione che definisce l'insieme stesso, s'identifica con *un verso della forma*. E, mediante gli ordini opposti dei precedenti, si definisce *un altro verso della forma, opposto al precedente*.

Finora abbiamo parlato della particolare forma u_0, cui riferiscesi il postulato *e*). Ma è ormai facile trasportare ad ogni altra forma di 1ª specie tutte le considerazioni precedenti. Basta all'uopo osservare che i postulati d'appartenenza *a*), *b*), *c*), *d*), permettono, in primo luogo, di definir tutte le operazioni di proiezione e di sezione, ed in secondo luogo di trasformare ogni forma di 1ª specie dello spazio, nella u_0, mediante un numero finito di proiezioni e di sezioni. Premesso questo, si aggiunga che l'ordinamento ω_0 dà luogo ad un ordinamento ω', soddisfacente ancora al postulato *e*), sopra (ogni forma di 1ª specie u', che sia prospettiva ad u_0 cioè proiezione o sezione di u_0), come subito risulta dalla considerazione della corrispondenza biunivoca che (in forza dei postulati di appartenenza) intercede tra gli elementi di u_0, u'. E si trasporta senz'altro ad u' anche il concetto di ordinamenti concordi con un dato e quindi il concetto di versi della forma.

Ma si badi bene che in tal guisa il concetto di versi della u_0 risulta relativo all'ordinamento ω_0 iniziale, di cui si è postulata l'esistenza; e che, sopra ogni altra forma di 1ª specie, il concetto di versi risulta relativo sia ad ω_0, sia alla catena di proiezioni e di sezioni mediante cui si trasforma u' in u_0; catena che non è affatto individuata una volta date le due forme u', u_0. Su ciò ritorneremo fra breve parlando del post. 11°.

Quel che ora ci preme di osservare, è che il postulato e) involge già il fatto che *ogni forma di* 1ª *specie contiene infiniti elementi*, risultando ciò sia dall'affermazione che ogni elemento della forma precede sempre qualche altro in un ordinamento fissato (*la forma è illimitata*), sia dall'affermazione che fra due elementi della forma esiste sempre qualche elemento intermedio, rispetto a quell'ordinamento (*la forma è dovunque densa*). Resta così giustificata l'affermazione (pag. 341) che i postulati 1°, 2°, 3° del Corso, sono conseguenza dei postulati a), b), c), d), e).

Per quel che concerne la compatibilità del postulato e) coi postulati d'appartenenza, ci riserviamo di stabilirla più tardi, provando in blocco la compatibilità dei postulati a),b),c),d), col postulato e), col postulato 11° del Corso e col postulato della continuità.

Quando all' indipendenza o meno di e) da a),b), c),d), occorre anzitutto osservare che il postulato e) è una proposizione decomponibile in due altre; e cioè:

e') Una certa forma di 1ª specie (e quindi ogni altra) è un insieme *ordinabile* (*), rispetto ad un certo (e quindi ad ogni altro) suo elemento, assunto come origine (primo elemento).

(*) Così chiamasi un insieme per cui si possa, in qualche modo, stabilire un criterio d'ordine fra i suoi elementi (pag. 32).

e'') Fra i possibili ordinamenti che, in virtù di e'), esistono fra gli elementi di quella certa forma di 1ª specie (epperò di ogni altra), rispetto ad un suo elemento assunto come primo, ve n' è sempre qualcuno in confronto del quale la forma è illimitata e dovunque densa.

Nei riguardi dell'affermazione e') nulla si può dire di sicuro circa la sua indipendenza o meno dai postulati a),b),c),d) e dalle leggi generali della logica.

Secondo una presunzione di G. Cantor ed un tentativo di dimostrazione di Zermelo, parrebbe che ogni insieme potesse essere ordinato (*). Se ciò fosse, la proposizione e') sarebbe conseguenza del concetto logico generale d' insieme.

La risposta alla questione sollevata da Cantor e da Zermelo tocca le più astratte concezioni della teoria degl' insiemi; e c' è chi dubita ch'essa abbia un senso preciso, almeno sotto la forma generale che le è stata data.

Quanto alla proposizione e''), si prova subito la sua indipendenza da a),b),c),d),e'), bastando ancora prendere come « punti » quattro oggetti A,B,C,D, come rette le coppie (non ordinate), come piani le terne (non ordinate) di questi oggetti. Restano allora soddisfatte, come si è visto, le a),b),c),d), ed anche la e'), perchè ogni coppia risulta ordinata, appena ne sia fissato il primo elemento; ma la e''), che è un attributo spettante soltanto ad insiemi infiniti, non è soddisfatta.

Non c' indugiamo ulteriormente a discuter sulla indipendenza o meno del post. 11° (pag. 34), dai postulati precedenti, giacchè la questione offre difficoltà in certa misura analoghe, per quanto forse di minor entità, rispetto a quelle già accennate a proposito del post. e) (**).

(*) Anzi *ben ordinato*, cioè ordinato in modo che nell' insieme stesso ed in ogni insieme in esso contenuto, ci sia sempre un elemento che precede ogni altro.

(**) L'ufficio dei postulati dell'ordine e del carattere proiettivo dell'ordine, nello svolgimento della Geometria proiettiva, è stato profondamente analizzato dal Pieri.

Osserviamo piuttosto da vicino il contenuto del post. 11°, che enunceremo ora sotto la forma seguente, la quale richiede di meno di quella di pag. 34 e basta per fondarvi la parte ulteriore della Geometria proiettiva:

f) Sopra una certa forma di 1ª specie u_0 *è sempre possibile definire una coppia di versi* $\Omega_0, \bar{\Omega}_0$, *mutuamente opposti, per guisa che i versi* $\Omega, \bar{\Omega}$, *che si ottengon da quelli, sopra una qualunque forma di 1ª specie* u, *mediante un numero finito di proiezioni e di sezioni, che trasformino* u_0 *in* u, *sono indipendenti dalla catena di proiezioni e di sezioni con cui si passa da* u_0 *a* u.

Quel che insomma si richiede per le deduzioni ulteriori, è soltanto di sapere che può associarsi ad ogni forma di 1ª specie una coppia di versi, avente carattere proiettivo, definita in modo unico (salvo l'ordine in cui si considerano i due versi) una volta fissata la coppia sopra una particolare forma. Ma non occorre affatto che questa coppia proiettiva di versi sia unica, nè il postulato, anche sotto la forma enunciata nel Corso, lo richiede.

Se per es. la forma u_0 potesse essere ordinata in più modi, non opposti tra loro, soddisfacenti al postulato *e*), si potrebbe pensare che esistesse qualche altra coppia di versi opposti, $\Omega', \bar{\Omega}'_0$, distinti da $\Omega_0, \bar{\Omega}_0$, e soddisfacente anch'essa al post. *f*).

Orbene, ci proponiamo di provare che *qualora ai postulati a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*) *si aggiunga il postulato della continuità sotto la forma* (*di* DEDEKIND), *enunciata a pag.* 60, *ne consegue l'esistenza di una sola coppia di versi* $\Omega_0, \bar{\Omega}_0$, *soddisfacente al post. f*).

Sia infatti $(\Omega'_0, \bar{\Omega}'_0)$ una coppia di versi di u_0 soddisfacente al postulato *f*), oltre a quella $(\Omega_0, \bar{\Omega}_0)$, che già esiste pel postulato stesso. Bisogna provare che la coppia $(\Omega'_0, \bar{\Omega}'_0)$ coincide colla coppia $(\Omega_0, \bar{\Omega}_0)$.

In relazione alla coppia $(\Omega'_0, \bar{\Omega}'_0)$ possiamo sviluppare una seconda Geometria proiettiva, assolutamente identica a quella che abbiamo sviluppato a partire dalla coppia $(\Omega_0, \bar{\Omega}_0)$. Ciò posto, se sopra la forma u_0

consideriamo due coppie di elementi A,B ; C,D, che non si separino *rispetto ai versi* $(\Omega_0, \bar{\Omega})_0$, in base alla proposizione di pag. 72, appartenente alla prima Geometria, esisterà almeno una coppia M,N armonica con AB, CD. Ma poichè la nozione di coppia armonica con una data, finchè non si parli delle relazioni di ordine fra le due coppie, poggia soltanto sui postulati di appartenenza, così ne segue che anche nella seconda Geometria, la quale ha in comune colla precedente i postulati di appartenenza e si riferisce alla stessa classe di punti (cioè allo stesso spazio), la coppia M,N sarà armonica con AB, CD ; e quindi, in forza della proposizione di pag. 71, considerata come appartenente alla seconda Geometria, le coppie AB, CD non potranno separarsi, *rispetto ai versi* $(\Omega'_0, \bar{\Omega}'_0)$. Dunque coppie di elementi di u_0, che non si separino rispetto ai versi $(\Omega_0, \bar{\Omega}_0)$, non si separano neanche rispetto ai versi $(\Omega'_0, \bar{\Omega}'_0)$. Similmente si vede che coppie che si separano rispetto ai primi versi, si separano anche rispetto ai secondi.

Tanto basta per concludere che le relazioni di ordine (mutuamente opposte) cui danno luogo i primi versi, rispetto ad un'origine scelta su u_0, coincidono colle relazioni di ordine cui danno luogo i secondi, cioè che la coppia $(\Omega_0, \bar{\Omega}_0)$ coincide con $(\Omega'_0, \bar{\Omega}'_0)$.

I versi ed i relativi ordinamenti, che vengon così definiti in modo univoco sopra ogni forma di 1ª specie, dai postulati della Geometria proiettiva, diconsi versi e ordinamenti naturali delle forme stesse.

Passando infine al postulato della continuità, ci limiteremo a ricordare che la sua indipendenza dai postulati precedenti si stabilisce prendendo come spazio la totalità dei punti razionali dello spazio ordinario (pag. 61); e ad avvertire che la deduzione puramente logica dal postulato di DEDEKIND della proposizione di pag. 67, da noi assunta come primitiva, in sostituzione di quel postulato, può leggersi nelle citate « Lezioni » di ENRIQUES (*).

(*) Bologna, Zanichelli 1920, pag. 80.

§ 3.

Verificazione della compatibilità di tutti i postulati introdotti.

Accenniamo infine brevemente al modo di verificare la compatibilità dei postulati introdotti (di appartenenza, dell'ordine, della continuità).

Consideriamo quattro numeri reali x_0, x_1, x_2, x_3, finiti e non tutti nulli, ed il gruppo dei loro valori, che assumiamo definito a prescindere da un fattore di proporzionalità arbitrario (reale, finito, non nullo). Chiamiamo «punto» l'ente analitico così definito; e quei numeri li chiamiamo «coordinate omogenee» del punto. Chiamiamo «retta» l'insieme dei punti che hanno coordinate del tipo $(\lambda x_0' + \mu x_0'', \lambda x_1' + \mu x_1'', \lambda x_2' + \mu x_2'', \lambda x_3' + \mu x_3'')$, ove (x_0', x_1', x_2', x_3') $(x_0'', x_1'', x_2'', x_3'')$ son due «punti» distinti, e λ, μ numeri reali non ambedue nulli; «piano» l'insieme dei punti che hanno coordinate del tipo $(\lambda x_0' + \mu x_0'' + \nu x_0''', \ldots, \lambda x_3' + \mu x_3'' + \nu x_3''')$, ove $(x_0', \ldots, x_3')$, $(x_0'', \ldots, x_3'')$, $(x_0''', \ldots, x_3''')$ son tre «punti» non appartenenti ad una medesima «retta» (cioè tali che la matrice delle loro coordinate non sia nulla) e λ, μ, ν numeri reali non tutti nulli.

Interpretando così le idee primitive punto, retta, piano, restan verificati anzitutto i postulati di appartenenza, i quali si riducono, come facilmente si vede, a ben note proprietà delle equazioni lineari.

I postulati *e*), *f*) si verificano pure agevolmente ordinando i «punti» di una «retta» secondo i valori crescenti o decrescenti del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$.

Il postulato della continuità viene ad esser legato alla considerazione dei punti irrazionali del nostro spazio convenzionale (punti pei quali i rapporti di tre delle coordinate alla rimanente, non son tutti razionali); e anch'esso si verifica senza difficoltà.

L'esistenza di un sistema di enti analitici siffatti, pel quale valgono tutti i postulati della Geometria proiettiva, prova la compatibilità di questi postulati, ove si supponga già stabilita la compatibilità dei postulati dell'aritmetica, su cui si fonda, in ultima analisi, la costruzione di quel sistema. Ma poichè, come ha provato il PIERI (*), la compatibilità dei postulati dell'aritmetica si può stabilire senza escire dal dominio della logica pura, anche la compatibilità dei postulati della Geometria proiettiva viene in fondo stabilita poggiandosi soltanto sulle leggi generali del pensiero.

Nè, quando si parla di compatibilità dei postulati d'un sistema deduttivo, si può pretendere di andare al di là di questo punto: essa non può cioè che stabilirsi assumendo come un dato *a priori* la compatibilità delle leggi del pensiero. Su questo dato non è possibile discutere ulteriormente, senza aggirarsi in un circolo vizioso; in quanto, per esperir la compatibilità delle leggi logiche, dovremmo far uso delle leggi stesse!

§ 4.

Introduzione delle coordinate proiettive prescindendo da ogni concetto di grandezza e di misura.

Nello spazio definito dai postulati della Geometria proiettiva, si possono introdurre le coordinate, senza fare intervenire nozioni, come quelle di grandezza e di misura, estranee alla Geometria stessa. A questo scopo, seguendo STAUDT, definiremo per astrazione il concetto di *quaderna proiettiva* di elementi d'una forma di 1ª specie o semplicemente *quaderna* (*Wurf*, secondo STAUDT), fissando, con opportune definizioni, il concetto di eguaglianza, di somma, di sottrazione, di prodotto, di quoziente di due quaderne.

(*) «Revue de métaphysique et de morale», Paris, Colin, 1905.

Diremo che due quaderne $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$ sono *eguali*, quando gli elementi A,B,C,D; A',B',C',D' si corrispondono nell'ordine scritto in una proiettività fra le due forme di 1ª specie u,u', cui essi appartengono, cioè quando $ABCD \barwedge A'B'C'D'$.

Dal teorema di pag. 92 segue intanto che:

$$(1) \quad (ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

In particolare possono considerarsi quaderne formate da quattro elementi d'una forma di 1ª specie, di cui due coincidenti. Due tali quaderne si diranno eguali, quando gli elementi coincidenti occupano in esse lo stesso posto.

Intenderemo inoltre, *per definizione*, che le relazioni (1) sieno valide anche per quaderne del tipo $(ABCA)$, $(ABCB)$, $(ABCC)$, formate soltanto da tre elementi distinti.

La quaderna $(ABCC)$ e tutte le eguali, verranno rappresentate col *simbolo* 1 (si legga « uno »), la quaderna $(ABCB)$ e tutte le eguali, col simbolo 0 (si legga « zero »), la quaderna $(ABCA)$ e tutte le eguali col simbolo ∞ (si legga « infinito »).

Assegnata una quaderna q, e tre elementi A,B,C di una forma di 1ª specie, esiste uno ed un solo elemento D della forma, che rende la quaderna $ABCD$ proiettiva alla q, cioè tale che

$$(ABCD) = q.$$

Ciò posto, date due quaderne q, q', definiremo la loro *somma* $q + q'$ nel modo seguente: Considerati tre elementi distinti A,B,C d'una forma di 1ª specie u, sieno D, D' gli elementi di u che rendono $(ABCD) = q$, $(ABCD') = q'$, e sia inoltre S l'elemento coniugato di B nell' involuzione che ha per elemento doppio A e come coppia di elementi coniugati D, D', talchè sarà insomma:

$$(ADD'B) = (AD'DS).$$

Si porrà allora:

$$q + q' = (ABCS).$$

La definizione è legittimata da ciò, che effettivamente si può parlare di una quaderna ben determinata, corrispondente al simbolo $q + q'$, in quanto, se si parte dalle stesse q, q' e da altri tre elementi A_1,B_1,C_1 della u o di un'altra forma di 1ª specie, e si eseguiscono le operazioni indicate, risulta subito:

$$A_1B_1C_1D_1D_1'S_1 \barwedge A\ B\ C\ D\ D'\ S,$$

ove D_1,D_1',S_1 hanno significati analoghi a quelli di D,D',S; sicchè viene:

$$(A_1B_1C_1S_1) = (A\ B\ C\ S\ ).$$

Dalla definizione si trae che $q + q' = q' + q$ e che, quando una delle due quaderne è 0 (per es. $q = 0$ e quindi D coincidente con B), la somma $q' + 0$ risulta eguale a q' (S coincide con D').

La somma $q + q' + q'' + \ldots + q^{(n-1)}$ di n quaderne, si definisce facendo la somma delle prime due; aggiungendo a questa somma la terza quaderna; alla somma così ottenuta la quarta, e così via.

Si prova che *la somma, in tal guisa definita, gode della proprietà commutativa e dell'associativa*. Riferiamoci per es. a tre quaderne q, q', q'' ed osserviamo anzitutto che, se una di queste quaderne è zero o se due sono eguali fra loro, l'affermazione precedente risulta senz'altro verificata. Supponiamo dunque che q,q',q'' sieno differenti da zero e distinte.

Considerati tre elementi A,B,C di una forma di 1ª specie u, determiniamo ivi gli elementi D,D',D'',P,Q, tali che $(ABCD) = q$, $(ABCD') = q'$, $(ABCD'') = q''$, $(ABCP) = q + q'$, $(ABCQ) = q + q''$. Poichè le coppie AA, DD', BP appartengono ad un' involuzione, si ha (pag. 131):

$$AAD'P \barwedge AABD;$$

e similmente, poichè appartengono ad un' involuzione le AA, DD'', BQ, viene:

$$AAD''Q \barwedge AABD,$$

onde:

$$AAD'P \barwedge AAD''Q,$$

la quale (pag. 131) prova che le coppie AA, $D'Q$, $D''P$ appartengono ad un' involuzione.

Se ora diciamo R il coniugato di B nell'ultima involuzione, si ha:

$$(ABCR) = (ABCP) + (ABCD'') = q + q' + q'',$$

e similmente:

$$(ABCR) = (ABCQ) + (ABCD') = q + q'' + q'.$$

Dunque $q + q' + q'' = q + q'' + q'$; ecc. ecc.

È chiaro che, se n quaderne sono eguali ordinatamente ad altre n, la somma delle prime eguaglia la somma delle seconde, perchè ciò vale per $n = 2$.

Date due quaderne q, q', resta da esse determinata una quaderna q'' tale che $q = q' + q''$. Presi infatti tre elementi distinti A,B,C di u e determinati S,D' in modo che $(ABCS) = q$, $(ABCD') = q'$ si consideri l'elemento D'' coniugato di D' nell' involuzione AA, BS (*). Posto allora $(ABCD'') = q''$, in base alle definizioni precedenti, si ha appunto $q = q' + q''$. La quaderna q'', così determinata dalle q, q', si chiama *differenza* delle due quaderne. Se $q + p = q' + p'$ e $q = q'$, se ne ricava $p = p'$.

Proviamo ora che:

$$(ABCD) + (ACBD) = 1. \tag{2}$$

(*) Così indichiamo brevemente l' involuzione individuata dalle coppie AA, BS.

Detto infatti E l'elemento coniugato di D nell'involuzione AA, BC, si avrà $(ABCD)+(ABCE) = (ABCC) = 1$; ma poichè $ABCE \barwedge ACBD$, cioè $(ABCE) = (ACBD)$, così ne segue la (2).

Due quaderne q, q' la cui somma sia zero, diconsi *opposte*. Si scrive anche $q = -q'$ (o $q' = -q$). Data la quaderna $q = (ABCD)$ e indicato con D' il coniugato armonico di D rispetto alla coppia A, B, la quaderna $q' = (ABCD')$ è opposta a q, perchè la somma $q + q'$ risulta eguale alla quaderna $(ABCB)$, cioè a zero.

In particolare, l'opposta della quaderna $1 = (ABCC)$, è la quaderna $(ABCD)$, ove il gruppo $ABCD$ è armonico. Poichè è evidentemente vero anche il viceversa, così ne segue che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè una quaderna sia armonica, è che sia uguale alla quaderna rappresentata dal simbolo* -1.

Dalla definizione di somma di due o più quaderne, si trae il concetto di *multiplo* mq di una quaderna, secondo un intero positivo m, e si prova agevolmente che $m(q + q' + \ldots) = mq + mq' + \ldots$; che $(m + n)q = mq + nq$; ecc.

È anche facile verificare, e ne lasciamo il compito al lettore, che se $OA_0A_1A_2\ldots A_m\ldots$ è una scala armonica (pag. 88), definita dall'origine O e dagli elementi A_0, A_1, si ha $(OA_0A_1A_m) = m(OA_0A_1A_1)$, e poichè $(OA_0A_1A_1) = 1$, si converrà di rappresentare la quaderna $(OA_0A_1A_m)$ collo stesso simbolo m, che denota l' intero m.

Definiamo ora il *prodotto* di due quaderne q, q', nessuna delle quali sia nulla nè infinita. Presi tre elementi distinti M,N,A d'una forma di 1ª specie, si determinino ivi A',A'' per guisa che $(MNAA') = q$, $(MNA'A'') = q'$. La quaderna $(MNAA'')$, come si prova agevolmente, risulta indipendente dalla scelta degli elementi ausiliari M,N,A, e si chiama il prodotto qq' delle q, q'. Si dimostra che il prodotto gode della proprietà commutativa.

Dalla definizione precedente, scende in particolare la relazione:

$$(3) \qquad (ABCD)\,(ABDC) = 1,$$

sicchè, data una quaderna q, non nulla nè infinita, resta definita la sua reciproca q', per guisa che $qq' = 1$. Si scrive anche $q' = \frac{1}{q}$.

Il quoziente $\frac{q}{q'}$, di due quaderne q, q', tali che q' non sia nulla nè infinita, si definisce come il prodotto $q\frac{1}{q'}$.

Ciò premesso, consideriamo le quaderne poco fa definite, mediante una scala armonica, che hanno per simboli i numeri interi positivi. Combinandole a due a due per quoziente, otterremo quaderne aventi per simboli tutti i numeri razionali positivi. Le loro opposte avranno per simboli tutti i numeri razionali negativi. Chiameremo complessivamente *quaderne razionali* le quaderne così definite.

Fissiamo tre elementi distinti A, B, C d'una forma di 1ª specie u, e ad ogni quaderna q associamo l'elemento P di u che rende $(ABCP) = q$. Alle quaderne razionali vengono associati infiniti elementi, che diremo *razionali*, i quali risultano così riferiti biunivocamente ai numeri razionali, simboli delle quaderne corrispondenti.

In base alle considerazioni precedenti si prova allora, senza alcuna difficoltà concettuale, che, ordinando i numeri razionali in una successione crescente, l'ordine indotto in corrispondenza sugli elementi razionali di u, ha il verso della terna A, B, C, i cui elementi son rispettivamente associati ad ∞, 0, 1.

Stabilito questo, è facile associare ed ogni numero irrazionale r un determinato elemento R di u, cioè una determinata quaderna $(ABCR)$. Si considerino all'uopo due numeri razionali m, n comprendenti r $(m < r < n)$ e gli elementi M, N di u, imagini di m, n. Ai numeri

razionali compresi fra m, r rispondono elementi del segmento MN, che ha il verso ABC, i quali precedono, nel verso stesso, gli elementi omologhi ai numeri razionali compresi tra r ed n. Possiamo pertanto dividere gli elementi del segmento MN in due classi, ponendo nella prima ogni elemento che non sia preceduto da alcun elemento associato ad un numero razionale compreso tra r ed n, e nella seconda ogni elemento che non sia seguito da alcun elemento associato ad un numero razionale compreso tra m ed r. Queste due classi soddisfanno alle condizioni richieste dal postulato della continuità (pag. 60), e quindi esiste un elemento R di MN, tale che ogni elemento di MN ad esso precedente appartiene alla prima classe, mentre ogni elemento ad esso successivo appartiene alla seconda. L'elemento R e la quaderna $(ABCR)$ vengono così associati al numero irrazionale r.

E poichè data una quaderna $(ABCP)$, se P non è un elemento razionale, ad esso si può certo pervenire, col precedimento precedente, da due classi di elementi razionali, si ottiene in definitiva una corrispondenza biunivoca senza eccezioni e ordinata fra le quaderne ed i numeri reali (che si chiameranno *valori delle* corrispondenti *quaderne*). Dal fatto che la corrispondenza è ordinata, si trae subito ch'essa è *continua*, nel senso che ad un punto limite di un insieme di punti di u, corrisponde un numero limite dell'insieme dei numeri reali omologhi; e viceversa. *Si distende in tal modo sopra ogni forma di 1ª specie, con sole considerazioni proiettive, una coordinata (proiettiva).*

Dico ora che:

Indicate con x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate proiettive di quattro elementi P_1, P_2, P_3, P_4 della forma, rispetto agli elementi fondamentali A, B, C, il valore della quaderna $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ uguaglia il birapporto $(x_1 x_2 x_3 x_4)$, cioè $\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}$.

In base alla definizione di prodotto di due quaderne, viene infatti $(ABCP_1)\,(ABP_1P_3) = (ABCP_3)$, cioè $(ABP_1P_3)=\frac{x_3}{x_1}$, e, in virtù della (2), $(AP_1BP_3) = = \frac{x_1 - x_3}{x_1}$, e similmente $(AP_1BP_4) = \frac{x_1 - x_4}{x_1}$, ossia per le (1), (3), $(P_1AP_3B)=\frac{x_1 - x_3}{x_1}$, $(P_1ABP_4)=\frac{x_1}{x_1 - x_4}$; donde, di nuovo per la definizione di prodotto, $(P_1AP_3B)(P_1ABP_4) = = (P_1AP_3P_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4}$. Analogamente $(P_2AP_3P_4) = = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}$. Applicando ancora le (1), (3), si può scrivere, $(P_4P_3AP_1) = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4}$, $(P_4P_3P_2A) = \frac{x_2 - x_4}{x_2 - x_3}$ e, per la definizione di prodotto, $(P_4P_3P_2 A)(P_4P_3AP_1) = (P_4P_3P_2P_1) = = \frac{(x_1 - x_3)}{(x_1 - x_4)}\frac{(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)}$. E infine mediante le (1), si ha $(P_4P_3P_2P_1) = (P_1P_2P_3P_4)$. Resta così dimostrato quanto volevasi.

Una volta definite le coordinate proiettive per le forme di 1ª specie, senza bisogno di considerazioni metriche, s' introducono, secondo la via di solito seguita in Geometria analitica, le coordinate proiettive nelle forme di 2ª e di 3ª specie. Sicchè, in conclusione, *nello spazio proiettivo le coordinate possono introdursi senza ricorrere ad alcuna considerazione metrica.*

Si giunge pertanto a rappresentare una proiettività fra due forme di 1ª specie mediante un'equazione bilineare nelle coordinate proiettive di due elementi omologhi (e ciò segue subito dall'ultimo teorema dimostrato); a rappresentare una retta di un piano con un'equazione lineare nelle coordinate proiettive dei punti del piano; ecc.

Osservazione 1ª. Giova osservare che *il valore di una quaderna, da noi definito mediante pure considerazioni grafiche, coincide col valore del birapporto della quaderna stessa.* A questa conclusione si giunge riflettendo, in primo luogo, che le varie definizioni da noi date sopra, e le relazioni (1), (2), (3), sussistono anche quando s' intenda che i simboli che in esse compaiono rappresentino birapporti; ed in secondo luogo ricordando che, se

$OA_0A_1....A_m....$ è una scala armonica, il birapporto della quaderna $(OA_0A_1A_m)$ vale precisamente l'intero m, che noi associammo a quella quaderna. (*). Si conclude così che ogni quaderna razionale ha lo stesso valore del corrispondente birapporto, e si passa poi alla proprietà analoga per le quaderne irrazionali, imitando il procedimento prima esposto.

Osservazione 2ª. Il calcolo proiettivo astratto delle quaderne è stato introdotto da STAUDT con riferimento al caso generale in cui nella quaderna compariscano elementi imaginari, da lui definiti prima sinteticamente (ved. pag. 124) (**).

II. Subordinazione delle metriche non euclidee alla Geometria proiettiva.

A meglio penetrare lo spirito delle questioni che toccano i fondamenti della Geometria ed anche a lumeggiare le considerazioni svolte nel § 62, giova osservare, limitandosi per semplicità alla Geometria piana, che nell'ordinario piano si può, in base a quelle considerazioni, creare una *geometria metrica convenzionale*, prendendo come retta impropria una retta qualunque (propria) r del piano, e come involuzione assoluta una involuzione ellittica I, appartenente alla r.

Allora tutte le precedenti definizioni di parallelismo, perpendicolarità, congruenza, si trasportano tali e quali in relazione alla r ed alla I; e si ottiene un complesso di proprietà delle figure piane, le quali vengon enunciate collo stesso linguaggio delle ordinarie proprietà metriche.

(*) Cfr. i miei citati *Complementi di Geometria proiettiva*, pag. 32 e segg.

(**) Cfr. STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Zweites Heft., Nurnberg, 1857) pagg. 166-182, 256-267.

Tutto ciò è ben d'accordo con quanto accennammo nella Introduzione a queste Lezioni, allorquando avvertimmo che i postulati di una scienza logico-deduttiva si possono riguardare come definizioni implicite delle idee primitive, così che tutti i teoremi che ne derivano restano validi, qualunque sia l' interpretazione intuitiva che si dà ai concetti (astratti) primitivi, purchè l' interpretazione stessa soddisfaccia all' insieme dei postulati.

Nel caso attuale, si muta appunto l' interpretazione intuitiva delle nozioni di parallelismo, di perpendicolarità, di congruenza, senza peraltro contraddire ai postulati della Geometria elementare, e conservando quindi pieno valore a tutte le deduzioni e a tutte le conseguenze che se ne traggono.

La costruzione di altre geometrie metriche, subordinate alla Geometria proiettiva, permette anche di rispondere ad una questione importante dal punto di vista filosofico, e che, da EUCLIDE in poi, è stata oggetto di infinite speculazioni. Vogliamo alludere alla questione della indipendenza o meno del postulato delle parallele dagli altri postulati di appartenenza, di ordine, della continuità e della congruenza, che stanno a fondamento della Geometria elementare.

Fino al secolo XIX gli sforzi dei Geometri furon diretti a cercar di dimostrare il postulato delle parallele, in quanto non si ravvisavano in esso gli stessi caratteri di evidenza intuitiva degli altri postulati della Geometria. E quegli sforzi, per quanto infruttuosi, rispetto allo scopo finale che si voleva conseguire, ebbero il merito d' indurre a poco a poco i pensatori nella persuasione che il postulato di EUCLIDE fosse indimostrabile, cioè, come si dice oggi, dopo la critica esauriente dei fondamenti della Matematica, ch'esso fosse *indipendente* dagli altri postulati già accennati (Ved. l' Introduzione). Non va taciuto che in questo periodo preparatorio, durato secoli, il contributo più luminoso, che si avvicinava di molto alla definitiva risoluzione della questione, fu portato dall' italiano SACCHERI, che può con-

siderarsi come il vero precursore della Geometria non euclidea, anche per l' influenza che l'opera sua sembra abbia avuto sul pensiero di taluno dei fondatori della nuova Geometria (GAUSS, RIEMANN, BOYAI, LOBACEVSKIJ).

Per stabilir l' indipendenza del postulato di EUCLIDE dagli altri postulati accennati, occorre dimostrare che esistono sistemi di verità geometriche, le quali non soddisfanno a quel postulato, mentre soddisfanno a tutti gli altri.

Varii sono i punti di vista da cui si ci può porre per costruire sistemi geometrici siffatti: la Geometria proiettiva, secondo le vedute di CAYLEY e KLEIN, ne offre uno, al quale vogliamo rapidamente accennare (*).

Considerata in un ordinario piano α una conica reale k, per es. un circolo, si costruisca una Geometria

(*) E lo faccio, perchè spero di attrarre lo studioso ad approfondire la cosa per sua cultura e per suo diletto intellettuale ! Nessuna persona colta, che voglia sentenziar sulla Matematica, come spesso molti fanno a sproposito (nè mancano fra i molti, filosofi che vanno per la maggiore), non dovrebbe trascurar di rendersi conto, in modo adeguato, sia pure nelle sue grandi linee, del valore della moderna critica dei fondamenti della Matematica. Pei futuri insegnanti di Matematica, anche di scuole medie, ciò è assolutamente necessario, per poter dominare sicuramente la materia del loro insegnamento e per aver fondati criteri nella scelta dei libri di testo ; e sopratutto perchè, dalla conoscenza degli sforzi compiuti dal pensiero umano nella faticosa conquista della verità, essi attingano savi criteri pedagogici, ispirandosi al principio che, nell'apprendimento di nozioni nuove, l' intelletto tende a seguire un processo analogo a quello con cui si è storicamente sviluppata la Scienza. Chi si renda esatto conto del valore della critica dei principî, non commetterà mai l'errore pernicioso — oggi purtroppo non infrequente fra i giovani insegnanti — di dare all' insegnamento elementare un indirizzo critico e soverchiamente astratto. Conoscere la critica per la propria maturità intellettuale : non considerarla mai, nei primi gradi dell' insegnamento, come un mezzo pedagogico. Ma il discorso in proposito dovrebbe essere assai più lungo, che qui non convenga. Per quel che concerne la Geometria non euclidea, rimandiamo il lettore per es. alla Monografia del BONOLA, *La Geometria non euclidea* (Bologna, Zanichelli, 1906).

metrica convenzionale, chiamando « piano » l'insieme dei punti di α interni a k; « retta » ogni segmento costituito da punti interni a k e il cui sostegno (retta nel significato consueto) congiunge due punti distinti di k; si definiscano come « parallele » due « rette » i cui sostegni s'incontrino in un medesimo punto di k; come « perpendicolari » due « rette » i cui sostegni sieno coniugati rispetto a k; e si considerino infine come « congruenze » (« movimenti » in sè del nostro « piano »), le omografie che mutano in sè k, in quanto queste omografie, mutando punti interni a k, in punti interni, inducono corrispondenze biunivoche fra i punti del « piano » convenzionale (*).

Si potrebbe allora verificare agevolmente che, pel « piano » così definito, valgono i consueti postulati di appartenenza della Geometria elementare (ved. la nota a piè della pag. 269), i postulati dell'ordine, della continuità, della congruenza. Ma è ben chiaro che il postulato delle parallele (unicità della parallela da un punto ad una retta) non vale, perchè da un punto P, interno a k, escon due rette che incontrano una data secante di k, in punti della conica; e cioè le due rette che congiungono P coi punti ove quella secante taglia k.

L'esistenza di questo « piano » convenzionale, che verifica tutti i postulati della Geometria elementare, meno quello delle parallele, basta a stabilire l'indipendenza di tal postulato dagli altri, e quindi la sua indimostrabilità.

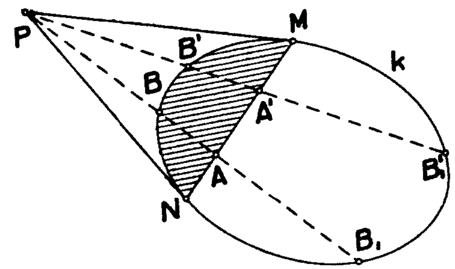
Si aggiunga che la *« retta » del nostro « piano » è una linea di « lunghezza » infinita.*

È vero che i « punti » di una « retta » convenzionale riempiono un segmento generalmente finito, sopra una retta ordinaria; ma ciò non ha significato alcuno rispetto alla valutazione delle lunghezze nel « piano »

(*) D'ora in poi i nomi « punto », « retta », « piano » ecc. virgolettati, denoteranno elementi della Geometria metrica convenzionale, mentre gli stessi nomi non virgolettati, si riferiranno ad elementi dell'ordinaria Geometria.

convenzionale, le quali sono tutt'altra cosa delle lunghezze del piano ordinario. Come la nozione di lunghezza nella Geometria elementare nasce dal concetto di segmenti uguali e dai postulati della congruenza, nonchè dal postulato di ARCHIMEDE (dati due segmenti diseguali, esiste sempre un multiplo del minore, che supera il maggiore), che è una conseguenza logica dei postulati della congruenza e del postulato di DEDEKIND; alla stessa guisa nasce la nozione di lunghezza nel nostro « piano » convenzionale, su cui, come abbiam detto, valgono appunto i postulati della congruenza e dalla continuità, e quindi anche il postulato di ARCHIMEDE.

Fissata una « retta » mediante una corda MN della conica k, ed un « segmento » AA', di questa retta, esiste



un ben determinato « movimento » del « piano » in sè, che lascia immutati la « retta » AA' ed il « semipiano » tratteggiato nella figura, facendo corrispondere ad A,A'. Questo « movimento » è l'omografia ω ben individuata (pag. 288), che trasforma in sè k, avendo per asse di collineazione la retta MN, per centro di collineazione il polo P della MN e per coppia di punti omologhi, B,B', le intersezioni delle rette PA, PA' coll'arco di conica, che limita il « semipiano » considerato.

Il « movimento » ω subordina sulla « retta » AA', una « congruenza ». Si osserverà che questa « congruenza » è subordinata sulla « retta » AA' anche dall'omografia (movimento) ρ, che ha per asse MN, per centro P e per coppia di punti omologhi B,B'_1, ove B'_1 è l'ulteriore intersezione della retta PB' con k. Nell'ordinaria Geometria metrica, al movimento ω fa riscontro una traslazione del piano in sè, che muta A in A', mentre al movimento ρ fa riscontro il prodotto della precedente traslazione per la simmetria ortogonale rispetto alla retta AA'.

La « congruenza » subordinata da ω sulla AA' è concorde, perchè la coppia A,A' non separa la coppia degli elementi uniti M,N. Ciò significa che al segmento AM, che contiene A', la ω fa corrispondere il segmento $A'M$ contenuto nel precedente. Mentre un punto interno a k si muove dunque da A ad M, l'omologo si muove da A' ad M, conservandosi interno a k. Ne deriva che le successive potenze ω, ω^2, ω^3, ... di ω, fanno corrispondere ad A i punti A',A'',A''', ..., succedentisi da A verso M entro al segmento AM, interno a k. La successione A',A'',A''', ... è evidentemente indefinita (la ω^n, per qualunque n intero, non riducesi cioè mai all' identità) ed ha per punto limite M (*).

Ma d'altronde i « segmenti » AA', $A'A''$, $A''A'''$,..., di cui ognuno è il trasformato del precedente mediante il « movimento » ω, sono « uguali » tra loro, sicchè il segmento $AA^{(n)}$ ha per « misura» rispetto ad AA', l' intero n. Sulla « retta » MN si può pertanto trovare un « segmento » avente per « misura » un intero comunque grande. Ciò prova che la « lunghezza » della MN non è finita.

È facile trovare un'espressione analitica della « lunghezza » di un qualunque « segmento » AK della « retta » MN, in funzione del birapporto $(MNAK)$. Da quel che precede risulta che, posto $(MNAA') = \delta$, ove δ è un numero reale positivo, e determinato K in modo che sia $(MNAK) = \delta^n$, il « segmento » AK sarà il « multiplo

(*) Applicando al punto A le potenze successive della ω^{-1}, si ottiene un'altra successione di punti interni a k, tutta contenuta nel segmento AN, la quale ha per punto limite N. Ved. a tal proposito a pag. 134 dei miei citati *Complementi di Geometria proiettiva*.

secondo n » di AA'. Per ottenere invece un segmento AK, che sia la « ennesima parte » di AA', basta cercare K in modo che $(MNAK) = \delta^{\frac{1}{n}}$; e, se si vuole che AK sia « misurato » dal numero razionale (positivo) $\frac{m}{n}$, rispetto all'« unità di misura » AA', basta determinare K in guisa che $(MNAK) = \delta^{\frac{m}{n}}$. In generale, poichè il punto K, tale che $(MNAK) = \delta^r$, ove r sia un qualunque numero reale (positivo), è preceduto, nel verso MAN, da tutti i punti K corrispondenti a valori razionali di $(MNAK)$, non minori di r, e seguito dai punti K corrispondenti a valori razionali, non maggiori di r, la « misura » di AK risulterà eguale ad r. Posto $\lambda = \log(MNAA') = \log \delta$, dalla $(MNAK) = \delta^r$ si ricava:

$$r = \frac{1}{\lambda} \log(MNAK).$$

Questa è dunque la formula che fornisce la « lunghezza » del « segmento » AK.

Aggiungiamo qualche altra osservazione. Due « rette » del « piano » convenzionale o s' incontrano in un « punto » (interno a k) oppure non hanno alcun « punto » in comune. In quest'ultimo caso però i loro sostegni (rette nel significato ordinario) o s' incontrano in un punto di k e allora le due « rette » sono « parallele », o s' incontrano in un punto esterno a k e allora le due « rette » diconsi « non secanti ». Si dice anche che due « rette non secanti » hanno in comune un « punto ideale ».

Data una « retta » r e un « punto » P ad essa esterno, da P escono due « parallele » ad r ed infinite « rette non secanti », le quali riempiono uno dei due « angoli » completi determinati dalle due parallele. L'altro « angolo » è riempito da « rette secanti » r.

Il sistema geometrico costruito costituisce la ***Geometria piana non euclidea di*** LOBAČEVSKIJ-BOLYAI o ***Geometria iperbolica.***

Un altro sistema geometrico, in cui sono soddisfatti tutti i postulati della Geometria metrica ordinaria, tranne il postulato di EUCLIDE, è la *Geometria piana non euclidea di* RIEMANN o *Geometria ellittica,* la quale si ottiene fissando come « assoluto », anzichè una conica reale, come nel caso precedente, una conica immaginaria (non degenere), cioè una polarità piana uniforme k, e prendendo per « movimenti » del nuovo « piano » convenzionale, le omografie che mutano in sè k (omografie permutabili con k). In un tal « piano » due rette s' incontrano sempre in un punto. Non vi sono cioè « rette parallele ».

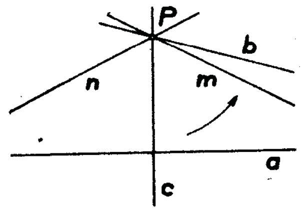
Un' immagine espressiva del sistema geometrico di RIEMANN, *s'ottiene sopra una stella propria O di raggi,* prendendo come « piano » convenzionale la stella, come « punti » i raggi della medesima, come « rette » i fasci di raggi, come « assoluto » la polarità ortogonale τ di O, e come « movimenti o congruenze », i movimenti della stella in sè (rotazioni attorno ad O), che son appunto le omografie permutabili con τ. Valgono per questo « piano » i postulati di appartenenza, di ordine, della continuità, della congruenza, ma non il postulato di EUCLIDE, giacchè due « rette » si taglian *sempre* in un « punto ».

La suddetta rappresentazione della Geometria di RIEMANN colla Geometria metrica d'una stella propria O, può collegarsi con quella, sopra accennata, relativa al piano π, ponendo fra π e la stella O, un'omografia ω, che muti la data polarità uniforme k di π, nella polarità ortogonale τ (*).

(*) Ciò s'ottiene per es. nel modo seguente : Si fissino su π due rette a,b coniugate rispetto a k, di poli A,B, e su O due piani α,β (fasci di raggi) perpendicolari fra loro e aventi come rette polari, rispetto a τ, le a',b'. Posto $C \equiv ab$, $c' \equiv \alpha\beta$, sia H,M la coppia di punti di a, coniugati rispetto a k e armonica colla coppia B,C ; L,N la coppia di punti coniugati di b, armonica con A,C. Sulla O le coppie di raggi h, m ; l, n abbiano significati analoghi nei riguardi delle coppie b',c' ; a',c' e della polarità τ. Si prova allora agevolmente che l'omografia ω ben individuata, tra π ed O, che subordina tra la punteggiata a ed il fascio di raggi α la proiettività $\begin{pmatrix} BCH \\ b'c'h \end{pmatrix}$ e tra b, β la proiettività $\begin{pmatrix} ACL \\ a'c'l \end{pmatrix}$, muta k in τ.

Se ne deduce subito che *la « retta » del « piano » di* RIEMANN, *è una linea chiusa di « lunghezza » finita.* Invero, una rotazione di 90° della stella O, attorno ad un asse perpendicolare a un dato fascio di raggi di O, ha per corrispondente in π, mediante la ω^{-1}, un « movimento », che muta in sè la retta a imagine di quel fascio, e che trasporta un segmento di a, corrispondente ad un angolo retto, nel segmento complementare. Tutta la a risulta pertanto somma di due « segmenti uguali », cioè la sua « lunghezza » rispetto ad uno di essi, preso come unità, è espressa dall' intero 2.

Le due ipotesi che conducono alle Geometrie iperbolica ed ellittica, sono le uniche possibili, una volta negato



il solo postulato di EUCLIDE. E difatti, se in un piano π si prendono una retta a ed un punto P, che non si appartengano, o non esiste in π alcuna retta uscente da P, che non incontri la a, ed allora si cade nella Geometria di RIEMANN ; oppure per P esiste qualche retta non incontrante a. In questo caso, detta b una tal retta, conduciamo per P la perpendicolare c ad a e consideriamo uno dei due angoli completi cb : per es. quello che ha il verso indicato in figura dalla freccia. I raggi di questo angolo posson dividersi in due classi, ponendo nella prima classe tutti i raggi che incontrano a e nella seconda tutti quelli che non incontrano a. È facile constatare che le due classi definite soddisfanno alle condizioni del postulato della continuità (pag. 60) ; per cui, in base al postulato stesso, può affermarsi l'esistenza di un raggio m, che, nel verso fissato, è preceduto da tutti i raggi secanti *a* e seguito da tutti i raggi non secanti *a*.

Il simmetrico *n* di *m* rispetto a *c*, gode evidentemente dall'analoga proprietà rispetto all'angolo simmetrico di *cb*. Si vede poi che tutti i raggi compresi nell'angolo completo *mn*, che contiene *c*, tagliano *a*, mentre i raggi compresi nell'angolo complementare non tagliano *a*.

Si hanno così due parallele *m*,*n* da *P* ad *a* e infinite rette non secanti (*Geometria iperbolica*), e, nel caso particolare in cui *m* riesca perpendicolare a *c*, una sola retta parallela da *P* ad *a*, tutte le altre rette per *P* essendo secanti di *a* (*Geometria di* EUCLIDE *o Geometria parabolica*).

La Geometria euclidea apparisce caso limite sia della Geometria iperbolica, come della ellittica, allorchè la conica assoluto degenera, come luogo di punti, in una retta doppia reale, e come inviluppo di rette, in una coppia di fasci di raggi, aventi i centri complessi coniugati (punti ciclici) su quella retta.

Poichè la Geometria proiettiva abbraccia tutte e tre le Geometrie metriche considerate, così può dirsi che:

La Geometria proiettiva è indipendente dal postulato delle parallele.

Le considerazioni precedenti riferisconsi alla Geometria piana, ma si possono senza difficoltà trasportare alla Geometria spaziale, profittando della teoria delle proiettività tra forme di 3ª specie ed in particolare della polarità rispetto ad una quadrica rigata o no, reale o no (Cap. 17°).

Una volta stabilita la possibilità logica delle Geometrie non euclidee, resta la questione di sapere qual valore possano avere, dal punto di vista della realtà fisica, questi sistemi geometrici.

Poichè le ipotesi che conducono alle Geometrie iperbolica ed ellittica equivalgono, come si prova, rispettivamente a ciò: che la somma degli angoli interni di un triangolo rettilineo è minore o maggiore di due angoli

retti, così si tratta di verificare sperimentalmente se la somma degli angoli di un tal triangolo uguaglia due retti o ne differisce.

Allo stato attuale, dati i mezzi di misura che possediamo, si trova che, nell'ordine di approssimazione consentito dagl' istrumenti di misura più raffinati, la Geometria euclidea è quella che meglio risponde alla realtà fisica (*). Però, siccome nelle Geometrie non euclidee si dimostra che la differenza, positiva o negativa, tra la somma degli angoli di un triangolo e due retti, è proporzionale all'area del triangolo, così non può escludersi che ampliando, con mezzi più potenti, la regione di spazio accessibile alle nostre esperienze, si possano, per triangoli rettilinei grandissimi, trovare differenze maggiori delle quantità, che, di fronte a quei mezzi di misura, ci sia lecito trascurare. Oggi quel che si può dire è che neppure i più grandi triangoli astronomici dànno differenze apprezzabili.

(*) In verità così dicendo si astrae dalla recente e profonda teoria relativistica di EINSTEIN, nella quale meglio s' inquadrano taluni fenomeni ottici ed elettromagnetici. Essa fonde in un sol concetto le nozioni di spazio e di tempo, dando luogo ad un ambiente spaziale-temporale non euclideo.

INDICE

APPENDICE