

R. Conti  
1.2.44

G. FUBINI - E. ČECH

# GEOMETRIA PROIETTIVA DIFFERENZIALE

TOMO SECONDO



BOLOGNA  
NICOLA ZANICHELLI  
EDITORE

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI  
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

SUPERFICIE NON RIGATE CHE AMMETTONO  
UN GRUPPO CONTINUO DI DEFORMAZIONI  
PROIETTIVE IN SÈ.

§ 71. — Superficie con  $\infty^2$  deformazioni proiettive  
(o collineazioni) in sè.

## A) Preliminari.

Volendo ricercare tutte le superficie che ammettono un gruppo continuo di deformazioni proiettive o collineazioni in sè, possiamo escludere le superficie rigate; infatti, per le rigate il problema è già stato risolto al Cap. IV § 40. Ricordiamo anche dal Cap. II § 20 A) che una trasformazione

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v)$$

di una superficie non rigata  $S$  in sè è deformazione proiettiva o semplice proiettività (\*) allora ed allora soltanto che essa muta in sè l'elemento lineare proiettivo  $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$  di  $S$  (o ciò che è lo stesso,

(\*) Siamo nel caso di una proiettività se anche la terza forma di  $S$  è mutata in sè.

le forme intere  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$ ). Ora al Cap. VI §§ 61 e 62 abbiamo visto che una forma  $\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$  può essere cambiata in sè tutt'al più per  $\infty^2$  trasformazioni distinte, sicchè possiamo subito enunciare il teorema: *Se una superficie non rigata  $S$  ammette un gruppo  $G$  di deformazioni o collineazioni in sè, allora  $G$  ha uno o due parametri.* Inoltre segue dal Cap. VI § 62 che *condizioni necessarie e sufficienti affinché  $S$  possieda un gruppo a due parametri  $G_2$  di deformazioni proiettive o collineazioni in sè sono*

$$(1) \quad \Phi = \text{cost.}, \quad \Psi = \text{cost.}$$

Ora noi sappiamo [Cap. VI § 60 (5)] che le (1) possono scriversi anche

$$(1)_{\text{bis}} \quad H = 0, \quad K = -\frac{1}{9}\Phi, \quad \Theta = -\frac{1}{3}\Psi, \quad \Theta' = -\frac{1}{3}\Psi'.$$

In particolare, per le nostre superficie valgono le

$$H = 0, \quad K = \text{cost.}$$

sicchè esse son tutte contenute fra quelle già determinate al Cap. VII § 69 (\*). Basta esaminare gli invarianti  $\Phi$  e  $\Psi$  (o  $\Psi'$ ) delle superficie ivi trovate. Distinguiamo tre casi: a)  $K = 0$ , b)  $K + 2 = 0$ , c)  $K(K + 2) \neq 0$ .

B) Il primo caso  $K = 0$ .

I valori di  $\Phi$  e  $\Psi'$  sono stati calcolati a pag. 365. Essi sono evidentemente costanti allora ed allora soltanto che  $U' = V' = 0$ . Senza ledere la generalità possiamo supporre  $U = V = 1$ , ossia

$$(2) \quad \beta = \gamma = 1.$$

(\*) Si vede che le superficie cercate si distribuiscono in famiglie composte da  $\infty^1$  superficie proiettivamente applicabili fra loro.

Le (7) del Cap. VII § 69 C) danno

$$(2)_{bis} \quad \tau_1 = Av + B, \quad \tau_2 = Au + C.$$

Le nostre superficie sono identiche alle superficie di coincidenza studiate al Cap. III § 27. Le deformazioni del gruppo  $G_2$  sono evidentemente

$$(2)_{ter} \quad \bar{u} = u + a, \quad \bar{v} = v + b.$$

Esse sono proiettività se  $A = 0$  (allora possiamo determinare le equazioni in termini finiti di  $S$ ; cfr. Cap. III § 27). Se invece  $A \neq 0$ , nessuna delle (2)\_{ter} si riduce ad una proiettività.

C) Il caso  $K \neq 0$ .

Sia adesso  $K \neq 0$ , dove per ora può essere  $K + 2 = 0$  o  $\neq 0$ . I valori di  $\Phi$  e  $\Psi'$  sono scritti al § 69 D. È evidente che essi son costanti se  $U' = V' = 0$ . Per mostrare che non vi è nessun caso essenzialmente più generale, osserviamo che la seconda delle (1)\_{bis} dà

$$(u-v) \frac{U'}{U} \frac{V'}{V} + 6 \left( \frac{U'}{U} - \frac{V'}{V} \right) = 0.$$

Se p. es.  $U' = 0$ , è quindi anche  $V' = 0$ . Se invece  $U' V' > 0$  si deduce

$$u-v + 6 \left( \frac{V'}{V} - \frac{U'}{U} \right) = 0,$$

$$\frac{U'}{U} = \frac{6}{u-a}, \quad \frac{V'}{V} = \frac{6}{v-a}, \quad (a = \text{cost.})$$

$$U = c_1 (u-a)^6, \quad V = c_2 (v-a)^6.$$

Scegliendo  $\frac{1}{u-a}$  e  $\frac{1}{v-a}$  a nuove variabili indipendenti,  $U$  e  $V$  si riducono a costanti.

D) Secondo caso  $K + 2 = 0$ .

Sia  $K + 2 = 0$ .  $U$  e  $V$  son costanti arbitrarie, ma basta supporre

$$U = \alpha^2, \quad V = 1 \quad (*).$$

Le (9) del Cap. VII § 69 D) danno

$$(3) \quad \beta = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{u-v}, \quad \gamma = -\alpha \frac{1}{u-v}.$$

Le (12) e (14) del cit. § danno poi

$$\tau_1 = (Av^2 + Bv + C)(u-v) - \frac{3}{2\alpha} \frac{1}{u-v},$$

(3)\_{bis}

$$\tau_2 = (Au^2 + Bu + C)(v-u) - \frac{3\alpha}{2} \frac{1}{v-u}.$$

Il gruppo  $G_2$  è dato dalle

$$(3)_{ter} \quad \bar{u} = au + b, \quad \bar{v} = av + b.$$

Se  $A = B = C = 0$ , tutte le (3)\_{ter} sono delle semplici proiettività. Se  $A = B = 0$ ,  $C \neq 0$ , quelle soltanto per cui  $\alpha^2 = 1$  sono proiettività. Se non è  $A = B = 0$ , tutte le trasformazioni (3)\_{ter} sono deformazioni proprie.

E) Terzo caso  $K(K + 2) \neq 0$ .

Sia  $K < 0$ . Le (11) del Cap. VII § 69 D) mostrano che  $U = V$ ; si può supporre  $U = V = 1$ , sicchè le (9) del citato § danno

$$(4) \quad \beta = \sqrt{\frac{2}{|K|}} \frac{1}{u-v}, \quad \gamma = -\sqrt{\frac{2}{|K|}} \frac{1}{u-v}.$$

(\*) Basta supporre  $\alpha^2 \geq 1$ .

Le (12), (15) e (17) del cit. § danno poi

$$\tau_1 = -\sqrt{\frac{2}{|K|}} \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{u-v} + (u-v)(Av^2 + Bv + C) \right],$$

(4) bis

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{2}{|K|}} \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{u-v} + (u-v)(Au^2 + Bu + C) \right].$$

Le deformazioni in sè sono anche qui date dalle (3) bis e la riduzione alle proiettività avviene negli stessi casi di prima. Il caso  $K > 0$  si trova facilmente impossibile per superficie reali, anche se le asintotiche fossero immaginarie.

**F) Quadro delle forme fondamentali delle superficie  
con  $\alpha^2$  deformazioni proiettive in sè.**

1.°  $\varphi_2 = 2du dv$  ,  $\varphi_3 = du^3 + dv^3$  ,

$$\Sigma \tau_i du_i = (Av + B)du + (Au + C)dv.$$

Deformazioni in sè :

$$\bar{u} = u + \alpha \quad , \quad \bar{v} = v + b.$$

2.°  $\varphi_2 = -\frac{2}{(u-v)^2} du dv$  ,

$$\varphi_3 = \frac{1}{(u-v)^3} \left( \frac{1}{\alpha^3} du^3 - \alpha^3 dv^3 \right) ,$$

$$\Sigma \tau_i du_i = \left[ (Av^2 + Bv + C)(u-v) - \frac{3}{2\alpha} \frac{1}{u-v} \right] du +$$

$$+ \left[ (Au^2 + Bu + C)(v-u) - \frac{3\alpha}{2} \frac{1}{v-u} \right] dv.$$

Deformazioni in sè :

$$\bar{u} = au + b \quad , \quad \bar{v} = av + c.$$

3.°  $\varphi_2 = -\frac{2\alpha^2}{(u-v)^2} du dv$  ,  $\varphi_3 = \frac{\alpha^3}{(u-v)^3} (du^3 - dv^3)$  ,

$$\Sigma \tau_i du_i = -\alpha \left[ (Av^2 + Bv + C)(u-v) + \frac{3}{2} \frac{1}{u-v} \right] du +$$

$$+ \alpha \left[ (Au^2 + Bu + C)(u-v) + \frac{3}{2} \frac{1}{u-v} \right] dv.$$

Deformazioni in sè :

$$\bar{u} = au + b \quad , \quad \bar{v} = av + c.$$

**§ 72. — Nuova deduzione dei precedenti risultati.**

**A) Metodo di Fubini.**

Indicheremo rapidamente anche il metodo inizialmente adottato dal Fubini per trattare questi problemi: metodi che egli estese anche agli iperspazi (\*).

Ogni deformazione proiettiva infinitesima della superficie in sè stessa dovendo trasformare in sè stesse le asintotiche è del tipo  $\xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}$ , ove  $\xi$  è funzione della sola  $u$ , ed  $\eta$  della sola  $v$ . Essa dovrà trasformare in sè stesse le forme  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$ . D'altra parte una deformazione proiettiva di una superficie non rigata in sè stessa è completamente determinata se si dà il punto  $(u_1, v_1)$  ove essa porta un punto generico prefissato  $(u_0, v_0)$ . Infatti essa

(\*) Cfr. G. FUBINI: *Fondamenti di Geometria proiettiva-differenziale* (Rend. del Circolo Matem. di Palermo; Tomo 43, Marzo 1919).

deve portare le tre direzioni di Darboux  $\varphi_3 = 0$  (o quelle di Segre) uscenti da  $(u_0, v_0)$  nelle omologhe uscenti da  $(u_1, v_1)$ . Resta così determinata per ogni direzione uscente da  $(u_0, v_0)$  l'omologa uscente da  $(u_1, v_1)$  per il fatto che il birapporto che essa forma con le tre direzioni di Darboux è un invariante. Pertanto il gruppo dipende al più da due parametri e due sue trasformazioni infinite-sime distinte hanno traiettorie distinte.

Se ne conclude che sono possibili i soli casi seguenti:

1°) Il gruppo dipende da un solo parametro; la sua trasformazione infinitesima sarà, con un cambiamento di parametri  $u, v$  delle asintotiche, riducibile o al tipo  $\frac{\partial}{\partial u}$  (se  $\eta = 0$ ) oppure  $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ . Se fosse invece  $\xi = 0$ , basterebbe, per ritornare al primo sottocaso, scambiare le  $u, v$ .

2°) Il gruppo dipende da due parametri, e le sue trasformazioni infinitesime sono permutabili. Una di esse  $X$  si potrà, come sopra, ridurre al tipo  $\frac{\partial}{\partial u} + \alpha \frac{\partial}{\partial v}$ , ove  $\alpha = 0$ , oppure  $\alpha = 1$ . Se un'altra trasformazione  $Y$  indipendente è  $\xi \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}$ , dovrà essere per la supposta permutabilità

$$\xi \frac{\partial}{\partial u} + \alpha \eta \frac{\partial}{\partial v} = 0.$$

Quindi  $\xi = \text{cost.}$ ,  $\alpha \eta = 0$ , e perciò se  $\alpha = 1$ , sarà  $\eta = \text{cost.}$

Se  $\alpha = 0$ , si potrà pure rendere  $\eta = 1$ , cambiando il parametro  $v$ . In ogni caso, sostituendo alle  $X, Y$  loro combinazioni lineari a coefficienti costanti, cioè che non muta il gruppo da esse generato, le potremo supporre ridotte al tipo

$$\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}.$$

3°) Il gruppo ha due parametri, e le sue trasformazioni infinitesime  $X, Y$  non sono permutabili: potremo allora, come è noto, supporre  $(XY) = X$ .

Se  $X$  è riducibile alla forma  $\frac{\partial}{\partial u}$ , allora  $Y$  sarà del tipo  $u \frac{\partial}{\partial u} + \eta \frac{\partial}{\partial v}$ , ove, mutando il parametro  $v$ , potremo rendere  $\eta = v$ .

Se  $X$  è riducibile alla forma  $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ , di nuovo  $Y$  sarà riducibile al precedente tipo.

In conclusione dunque vi sono i seguenti tipi possibili:

A)  $\frac{\partial}{\partial u}$  ; B)  $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$  ; C)  $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$  ;

D)  $\frac{\partial}{\partial u}, u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$  ; E)  $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$ .

Nel caso A)  $\beta$  e  $\gamma$  sono funzioni della sola  $v$ .

> B)  $\beta$  e  $\gamma$  sono funzioni della sola  $u - v$ .

> C)  $\beta$  e  $\gamma$  sono costanti.

> D)  $\beta$  e  $\gamma$  sono del tipo  $\frac{h}{v}, \frac{k}{v}$  ( $h, k = \text{cost.}$ ).

> E)  $\beta$  e  $\gamma$  sono del tipo  $\frac{h}{u-v}, \frac{k}{u-v}$  ( $h, k = \text{cost.}$ )

Affinchè non si tratti di un caso *virtuale*, ma ad esso *corrisponda effettivamente* una superficie, bisogna che le equazioni (14) e (15) del § 16 D in  $L, M$  siano integrabili. Lasciando ad un altro § lo studio dei tipi A, B di gruppi a un solo parametro, osserviamo che i tipi C, E si riducono a quelli studiati al precedente §. Quanto al caso D, le citate equazioni diventano:

$$L_v = 0 \quad M_u = \frac{3hk}{v^3}$$

$$\frac{h}{v} M_v - 2 \frac{h}{v^2} M - 6 \frac{h}{v^4} = \frac{k}{v} L_u$$

che si riconoscono immediatamente non integrabili. Questo caso D)

è perciò puramente *virtuale*, e nell'attuale teoria è quindi da trascurarsi.

Nè è difficile riconoscere quando il gruppo trovato di deformazioni proiettive è un gruppo di pure collineazioni della superficie in sè stessa. Basta vedere quando tale gruppo oltre a trasformare in sè stesse le forme  $\varphi_2, \varphi_3$  trasforma in sè anche la terza forma  $g_{11} du^2 + g_{22} dv^2$ , ossia, posto  $\theta = \log \beta\gamma$ , la forma:

$$\left(\theta_{uu} - \frac{1}{2} \theta_u^2 - L\right) du^2 + \left(\theta_{vv} - \frac{1}{2} \theta_v^2 - M\right) dv^2;$$

ciò che si riduce a un semplicissimo calcolo.

Metodi simili si applicano anche alle superficie rigate.

B) Metodo di Lie per i gruppi di collineazioni.

Per le superficie che ammettono un gruppo continuo di collineazioni in sè stesse sarà bene ricordare anche il classico metodo, col quale Sophus Lie risolvette il problema di trovare le superficie che ammettono un gruppo di collineazioni in sè ad almeno 3 parametri, indicando anche come, con calcoli però molto lunghi, si sarebbero potute determinare le superficie trasformate in sè da un gruppo di collineazioni a soli due parametri. Partendo da teoremi generali sui gruppi proiettivi, egli studia anzitutto le curve che ammettono un gruppo di trasformazioni in sè stesse. Si volge poi allo studio del piano, che ammette  $\infty^{12}$  collineazioni dello spazio in sè, dei con, e delle superficie sviluppabili, lo studio delle quali equivale allo studio analogo per le curve, che ne sono lo spigolo di regresso. Prescindendo da questi casi elementari, una superficie, che sia trasformata in sè da un gruppo ad  $r > 3$  parametri, avrà per asintotiche delle linee ciascuna delle quali è trasformata in sè da un gruppo ad  $r - 1 \geq 3$  parametri, e che quindi sono o cubiche sghembe, o curve piane (e perciò rette). Poichè un punto della superficie è trasformato in sè da un gruppo ad  $r - 2 \geq 2$  parametri, il quale dovrebbe trasformare in sè stessa la coppia delle due asintotiche uscenti da tale punto, S. Lie, studiando il gruppo proiettivo che trasforma una cubica sghemba in sè stessa,

deduce che ciò è impossibile anche se una sola delle citate asintotiche è una cubica. Nel caso considerato perciò tutte le asintotiche sono rette, e la superficie è una *quadrica*.

Se la superficie ammette un gruppo ad  $r = 3$  parametri, S. Lie deduce di nuovo che le asintotiche sono o cubiche sghembe o rette. La figura formata dalle due asintotiche uscenti da un punto della superficie sarà trasformata in sè da un gruppo ad almeno un parametro ( $1 = r - 2$ ). Da ciò S. Lie deduce come sopra che, se le asintotiche non sono entrambe rette (caso già studiato delle *quadriche*), allora le asintotiche di un sistema sono rette, le asintotiche dell'altro sistema cubiche sghembe. Col calcolo effettivo deduce così che l'unica superficie non sviluppabile che ammetta un gruppo a tre parametri di collineazioni in sè stessa è la rigata di Cayley.

Per le superficie che ammettono un gruppo a soli due parametri di collineazioni in sè, S. Lie si limita a ridurre la ricerca a quella dei gruppi proiettivi a due parametri, le cui trasformazioni infinitesime non sono proporzionali, ossia hanno traiettorie distinte.

§ 73. — Superficie con  $\infty^1$  deformazioni proiettive in sè. Specie A.

A) Loro determinazione.

La determinazione di tutte le superficie  $S$  non rigate con un gruppo continuo  $G_1$  ad un parametro di deformazioni proiettive (\*) in sè richiede, come vedremo nei futuri §§, lunghi calcoli. Vi è però un caso particolare in cui i calcoli si semplificano assai, quello dove le traiettorie del gruppo  $G_1$  (le curve di  $S$  trasformate in sè dalle deformazioni del gruppo) sono asintotiche di  $S$ . Diremo in tal caso che  $S$  è di specie A. Nel presente § determineremo tutte le superficie di questa specie. Riferiamo  $S$  alle asintotiche e supponiamo, per fissare le idee, che le traiettorie di  $G_1$  siano le  $v = \text{cost}$ .

(\*) Il caso di collineazioni è così triviale che non ne parleremo neanche.

Osservando che le trasformazioni di  $G_1$  mutano in sè l'equazione differenziale  $du = 0$ , possiamo evidentemente scegliere il parametro  $u$  in modo che le equazioni di  $G_1$  siano

$$\bar{u} = u + t, \quad \bar{v} = v.$$

Se ne deduce immediatamente che  $\beta$  e  $\gamma$  son funzioni della sola  $v$ . Scegliendo anche  $v$  opportunamente, possiamo pertanto supporre

$$(1) \quad \beta = 1, \quad \gamma = \gamma(v).$$

Per trovare effettivamente le nostre superficie, basta esaminare le condizioni d'integrabilità, che scriviamo nella forma (Cap. II, § 16 D)

$$(2) \quad \begin{aligned} L_v &= -2\beta\gamma_u - \gamma\beta_u, & M_u &= -2\gamma\beta_v - \beta\gamma_v, \\ \beta M_v + 2\beta_v M + \beta_{vvv} &= \gamma L_u + 2\gamma_u L + \gamma_{uuu}. \end{aligned}$$

Notiamo che la terza forma fondamentale si determina dalle  $L$  e  $M$  secondo le equazioni

$$(3) \quad \begin{aligned} \gamma\tau_1 &= -M + \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2, \\ \beta\tau_2 &= -L + \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2, \\ \theta &= \log|\beta\gamma|. \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (2) i valori (1), si deduce

$$L_v = 0, \quad M_u = -\gamma', \quad M_v = \gamma L_u.$$

Le prime due danno

$$L = U, \quad M = -\gamma'u + V,$$

con  $U$  funzione della sola  $u$  e  $V$  funzione della sola  $v$ . Sostituendo

nella terza si ricava

$$-\gamma''u + V' = \gamma U'.$$

Dando qui a  $v$  un valor costante, si deduce (essendo  $\gamma \neq 0$ )

$$U = au^2 + bu + c$$

sicchè

$$-\gamma''u + V' = \gamma(2au + b)$$

ossia

$$\gamma'' = -2a\gamma, \quad V' = b\gamma.$$

Sia in primo luogo  $a = 0$ . Sarà  $\gamma'' = 0$ ,  $\gamma = ev + f$ . Ora si noti che i parametri  $u, v$  non sono stati fissati che a meno di una sostituzione della forma

$$(4) \quad \bar{u} = au + \beta, \quad \bar{v} = \alpha^2 v + \gamma.$$

Si può quindi supporre  $\gamma = 1$  oppure  $\gamma = v$ . Così otteniamo i due casi

$$(5) \quad \beta = \gamma = 1, \quad L = au + b, \quad M = av + c;$$

$$(6) \quad \beta = 1, \quad \gamma = v, \quad L = 2au + b, \quad M = -u + av^2 + c$$

In secondo luogo sia  $a = \frac{A^2}{2} > 0$ . Sarà  $\gamma'' = -A^2\gamma$ ,  $\gamma = e \sin(Av + f)$ . Facendo uso delle (4) possiamo supporre  $e = 1$ ,  $f = 0$ , ed otteniamo

$$(7) \quad \beta = 1, \quad \gamma = \sin Av, \quad L = \frac{A^2}{2}u^2 + Aau + b,$$

$$M = -(Au + a) \cos Av + c$$

Sia infine  $a = -\frac{A^2}{2}$ . Sarà  $\gamma'' = A^2\gamma$ ,  $\gamma = d_1 e^{Av} + d_2 e^{-Av}$ . Facendo uso delle (4) vediamo che basta far assumere a  $\gamma$  uno dei

valori  $\sinh Av$ ,  $\cosh Av$ ,  $e^v$ ,  $e^{-v}$ . Otteniamo pertanto

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = 1, \quad \gamma = \sinh Av, \\ L = -\frac{A^2}{2} u^2 + Aau + b, \\ M = -(Au - a) \cosh Av + c; \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = 1, \quad \gamma = \cosh Av, \\ L = -\frac{A^2}{2} u^2 + Aau + b, \\ M = -(Au - a) \sinh Av + c; \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = 1, \quad \gamma = e^v, \\ L = -\frac{1}{2} u^2 + au + b, \\ M = (a - u)e^v + c; \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = 1, \quad \gamma = e^{-v}, \\ L = -\frac{1}{2} u^2 + au + b, \\ M = (u - a)e^{-v} + c. \end{array} \right.$$

Un quadro riassuntivo delle quantità  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $L$ ,  $M$  si trova alla fine del Capitolo (\*). Vi è ommesso il caso (5); le superficie corrispondenti ammettono infatti  $\infty^2$  (e non soltanto  $\infty^1$ ) deformazioni proiettive (o collineazioni in sé). Tale circostanza non accade per

(\*) Si noti che le equazioni precedenti contengono una costante inessenziale [ $b$  in (6),  $a$  in (7), (8), (9), (10), (11)] potendosi scrivere  $u + \text{cost.}$  al posto di  $u$ . Nel quadro citato tale costante è fissata ( $b = 0$ , risp.  $a = 0$ ).

gli altri tipi trovati giacchè  $\Psi = \frac{\gamma^3}{\gamma^5}$  non è per essi costante [cfr. § 71, (1)]. Si noti anche che le deformazioni proiettive di  $G_1$  non si riducono mai a proiettività (eccettuato (5) con  $a = 0$ ); infatti si vede facilmente che nel caso opposto  $L$  ed  $M$  dovrebbero essere indipendenti da  $u$ .

#### B) Altri metodi di calcolo.

Invece di supporre scelti i parametri  $u$  e  $v$  secondo le (1), si può sceglierli p. es. in modo che sia

$$\beta = \beta(v), \quad \gamma = 1.$$

Sarà un esercizio utile per il lettore il fare di calcoli in tale ipotesi; per comodità indico i risultati

$$1^\circ \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad L = au + b, \quad M = av + c;$$

$$2^\circ \quad \beta = \pm v, \quad \gamma = 1, \quad L = -2u^2 + 2bu + c,$$

$$M = \mp 2u + \frac{a}{v^2} \pm b;$$

$$3^\circ \quad \beta = \sqrt[3]{v}, \quad \gamma = 1, \quad L = 4bu + c,$$

$$M = \left(a - \frac{2}{3}u\right)v^{-\frac{2}{3}} + 3bv^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{18}v^{-2};$$

$$4^\circ \quad \beta = \varphi(v), \quad \gamma = 1, \quad \text{dove } \varphi \text{ si determina dalla}$$

$$v = \int_0^{\varphi(v)} \frac{x \cdot dx}{\sqrt{A \pm x^4}},$$

$$L = \mp 2u^2 \pm 2au + c,$$

$$M = -2\varphi'u + \frac{5}{2} \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + a\varphi' + \frac{b}{\varphi^2}.$$

È chiaro che queste formole sono trasformabili nelle precedenti; è raccomandabile al lettore di effettuare la trasformazione nel modo esposto al Cap. VI § 62.

Avremmo pure potuto scegliere i parametri  $u, v$  in modo che sia

$$\beta = \beta(v), \quad \beta\gamma = 1;$$

anzi, procedendo in questo modo, avremmo trovato le soluzioni più rapidamente. Infatti,  $\beta$  e  $\gamma$  essendo funzioni della sola  $v$ , è

$$\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log(\beta : \gamma)}{\partial u \partial v} = 0$$

ossia  $H = K = 0$ . Ora tutte le superficie con  $H = K = 0$  sono enumerate al Cap. VII § 69 e precisamente abbiamo ivi scelto i parametri  $u, v$  in modo che sia  $\beta\gamma = 1$ . Basta prendere quelle in cui  $\beta$  è funzione della sola  $v$ . Lascio al lettore la verifica che le superficie cui s'arriva nel modo ora indicato sono identiche a quelle precedentemente trovate.

### § 74. — Risoluzione di un'equazione ausiliaria.

#### A) Preliminari.

Prima di proseguire la nostra ricerca, studieremo in questo § un'equazione funzionale che si troverà al § seguente importantissima per il nostro problema. L'equazione che andiamo a studiare è

$$(E) \quad \varphi_1 U_1 + \varphi_2 V_1 = \psi$$

$\varphi_1, \varphi_2, U_1, V_1, \psi$  essendo funzioni di due variabili indipendenti  $u$  e  $v$  e precisamente:  $U_1$  è funzione della sola  $u$ ,  $V_1$  della sola  $v$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  son funzioni della sola  $u - v$ ,  $\psi$  della sola  $u + v$ . Non cercheremo che le soluzioni per cui  $\varphi_1 \varphi_2 \neq 0$ . Troveremo nel campo reale dieci gruppi di soluzioni della (E) soddisfacenti a  $\varphi_1 \varphi_2 \neq 0$ ; il risultato riassuntivo si trova alla fine del §.

Mediante le operazioni  $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial^2}{\partial u^2}, \frac{\partial^2}{\partial v^2}, \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}$  e  $\frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial v} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v^2}$  si ricava dalla (E) (\*)

$$(1) \quad \begin{aligned} \varphi_1 U_1' + \varphi_1' U_1 + \varphi_2' V_1 &= \psi', \\ \varphi_2 V_1' - \varphi_1' U_1 - \varphi_2' V_1 &= \psi', \\ \varphi_1 U_1'' + 2\varphi_1' U_1' + \varphi_1'' U_1 + \varphi_2'' V_1 &= \psi'', \\ \varphi_2 V_1'' - 2\varphi_2' V_1' + \varphi_1'' U_1 + \varphi_2'' V_1 &= \psi'', \\ \varphi_1' U_1' - \varphi_2' V_1' + \varphi_1'' U_1 + \varphi_2'' V_1 &= -\psi'', \\ \varphi_1' U_1'' + \varphi_2' V_1'' + 3\varphi_1'' U_1' - 3\varphi_2'' V_1' + 2\varphi_1''' U_1 + 2\varphi_2''' V_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dalle sette equazioni (E) e (1) possiamo eliminare  $U_1, V_1, U_1', V_1', U_1'', V_1''$ . Si ottiene

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \psi' \\ -\varphi_1' & -\varphi_2' & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \psi' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & 2\varphi_1' & 0 & \varphi_1 & 0 & \psi'' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & 0 & -2\varphi_2' & 0 & \varphi_2 & \psi'' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_1' & -\varphi_2' & 0 & 0 & -\psi'' \\ 2\varphi_1''' & 2\varphi_2''' & 3\varphi_1'' & -3\varphi_2'' & \varphi_1' & \varphi_2' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Quest'equazione ha la forma

$$(2)_{bis} \quad \tau_2 \psi'' + \tau_1 \psi' + \tau_0 \psi = 0$$

(\*) Poniamo p. es.  $U_1' = \frac{dU_1}{du}, \varphi_1' = \frac{d\varphi_1}{d(u-v)}, \psi'' = \frac{d^2\psi}{d(u+v)^2}$ .

dove  $\tau_0, \tau_1, \tau_2$  non dipendono che da  $u - v$ . Escludiamo per ora la possibilità che le funzioni  $\varphi_1, \varphi_2$  siano tali che sia identicamente  $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$ . Allora, dando a  $u - v$  un valor costante, si deduce che esiste almeno un sistema di due costanti  $a, b$  tali che sia identicamente

$$(3) \quad 4\phi'' + 2a\phi' + b\phi = 0.$$

Ora, operando sulla (E) ripetutamente con  $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ , si ricava:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_1 U_1' + \varphi_2 V_1' &= 2\phi' \\ \varphi_1 U_1'' + \varphi_2 V_1'' &= 4\phi'', \end{aligned}$$

e da (E) e dalle (4) si deduce, per la (3),

$$(5) \quad \varphi_1(U_1'' + aU_1' + bU_1) + \varphi_2(V_1'' + aV_1' + bV_1) = 0.$$

**B) Primo modo di soddisfare alla (5).**

Cominciamo coll'esaminare l'ipotesi che sia identicamente

$$(6) \quad \begin{aligned} U_1'' + aU_1' + bU_1 &= 0 \\ V_1'' + aV_1' + bV_1 &= 0; \end{aligned}$$

l'equazione (5) è allora soddisfatta. Se le radici  $x_1 = 2A, x_2 = 2B$  di  $x^2 + ax + b = 0$  son distinte (reali o complesse coniugate), dalle (3) e (6) si ricava:

$$(7) \quad \begin{aligned} U_1 &= a_1 e^{2Au} + a_2 e^{2Bu}, \\ V_1 &= b_1 e^{2Av} + b_2 e^{2Bv}, \quad A \neq B \\ \phi &= c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)}. \end{aligned}$$

Occorre ancora cercare la forma possibile per le funzioni  $\varphi_1, \varphi_2$ . In generale possiamo trovare  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  considerandole come incognite

nella (E) e la prima delle (4). Ma vi è il caso eccezionale  $U_1 V_1' - U_1' V_1 = 0$ . Ora dalle (7) si calcola

$$U_1 V_1' - U_1' V_1 = 2(A - B) [a_2 b_1 e^{2(Bu+Av)} - a_1 b_2 e^{2(Au+Bv)}].$$

Supponiamo dapprima che sia  $U_1 V_1' - U_1' V_1 = 0$  ossia, per la nostra ipotesi, che  $A \neq B, a_2 b_1 = a_1 b_2 = 0$ . Ma basta supporre che  $a_2 = b_2 = 0$ . Infatti l'ipotesi  $a_1 = b_1 = 0$  non ne differisce che inessenzialmente (giacchè è lecito scambiare  $A$  con  $B$ ) e, se fosse p. es.  $b_1 = b_2 = 0$ , (\*) la (E) diventerebbe:

$$\varphi_1 (a_1 e^{2Au} + a_2 e^{2Bu}) = c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)}.$$

Dividendo per  $U_1$  ed operando con  $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$  si troverebbe:

$$(A - B) [a_1 c_2 e^{(2A+B)u+Bv} - a_2 c_1 e^{(A+2B)u+Av}] = 0$$

sicchè  $a_1 c_2 = a_2 c_1 = 0$  (essendo  $A \neq B$ ). Se non vogliamo supporre nè  $a_1 = b_1 = 0$ , nè  $a_2 = b_2 = 0$ , non ci resta pertanto che l'ipotesi  $c_1 = c_2 = 0$ ; ma anche questa è impossibile giacchè essa richiederebbe  $\varphi_1 = 0$ , mentre noi non cerchiamo che quelle soluzioni per cui  $\varphi_1 \varphi_2 \neq 0$ . Sia dunque  $a_2 = b_2 = 0$ . La (E) diventa, dividendola per  $e^{A(u+v)}$

$$\varphi_1 a_1 e^{A(u-v)} + \varphi_2 b_1 e^{-A(u-v)} = c_1 + c_2 e^{(B-A)(u+v)}.$$

Il primo membro essendo funzione della sola  $u - v$ , è necessariamente  $c_2 = 0$ ,

$$\varphi_1 a_1 e^{A(u-v)} + \varphi_2 b_1 e^{-A(u-v)} = c_1.$$

Supponendo successivamente  $a_1 = b_1 = 0; a_1 = 0, b_1 \neq 0; b_1 = 0, a_1 \neq 0; a_1 b_1 \neq 0$  arriviamo, ricordando le (7) e  $a_2 = b_2 = 0$ , alle seguenti soluzioni di (E):

$$\varphi_1 \text{ arbitraria}, \quad \varphi_2 \text{ arbitraria}, \quad U_1 = V_1 = \phi = 0;$$

(\*) Analogamente si procede nell'ipotesi  $a_1 = a_2 = 0$ .

$$\varphi_1 \text{ arbitraria, } \varphi_2 = \frac{c_1}{b_1} e^{A(u-v)}, U_1=0, V_1=b_1 e^{2Av}, \psi = c_1 e^{A(u+v)};$$

$$\varphi_1 = \frac{c_1}{a_1} e^{-A(u-v)}, \varphi_2 \text{ arbitraria, } U_1=a_1 e^{2Au}, V_1=0, \psi = c_1 e^{A(u+v)};$$

$$\varphi_1 \text{ arbitraria, } \varphi_2 = \frac{c_1}{b_1} e^{A(u-v)} - \frac{a_1}{b_1} e^{2A(u-v)} - \frac{a_1}{b_1} e^{2A(u-v)} \varphi_1,$$

$$U_1 = a_1 e^{2Au}, V_1 = b_1 e^{2Av}, \psi = c_1 e^{2A(u+v)}.$$

Tali sono quindi quelle soluzioni di (E) per cui valgono le (6) ed inoltre è  $U_1 V_1' - U_1' V_1 = 0$ . Esse si trovano, con qualche cambiamento di notazioni, nel quadro alla fine del §, come le soluzioni  $(E_0)$ ,  $(E_1)$ ,  $(E_1')$ ,  $(E_2)$ .

Per trovare le ulteriori soluzioni di (E) per cui valgono le (6), dobbiamo supporre che  $U_1 V_1' - U_1' V_1 \neq 0$ . Dalla (E) e dalla prima delle (4) si deduce

$$(8) \quad \varphi_1 = \frac{\psi V_1' - 2\psi' V_1}{U_1 V_1' - U_1' V_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{\psi U_1' - 2\psi' U_1}{U_1 V_1' - U_1' V_1}.$$

Sostituendovi i valori (7), troviamo

$$(7)_{bis} \quad \varphi_1 = \frac{b_1 c_2 e^{-A(u-v)} - b_2 c_1 e^{-B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{(B-A)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}},$$

$$\varphi_2 = \frac{-a_1 c_2 e^{A(u-v)} + a_2 c_1 e^{B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{(B-A)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}}.$$

valori che non dipendono che da  $u - v$ , comunque si scelgano le costanti nelle (7). La soluzione rappresentata dalle (7) e  $(7)_{bis}$  si trova come  $(E_3)$  nel quadro alla fine del §. Con  $(E_3')$  è indicata in forma reale quella soluzione che si ottiene dalla  $(E_3)$  se  $A$  e  $B$  hanno valori complessi coniugati.

Ma in ciò che precede abbiamo supposto che le radici di  $x^2 + ax + b = 0$  siano distinte. Se invece quest'equazione ha una soluzione  $x = 2A$  doppia, dalla (3) e (6) si ottiene

$$(9) \quad U_1 = (a_1 u + a_2) e^{2Au}, \quad V_1 = (b_1 v + b_2) e^{2Av},$$

$$\psi = [c_1(u+v) + c_2] e^{A(u+v)}.$$

Come sopra, calcoliamo anche qui  $U_1 V_1' - U_1' V_1$ . Otteniamo

$$U_1 V_1' - U_1' V_1 = [a_1 b_1(u-v) - a_1 b_2 + a_2 b_1] e^{2A(u+v)}.$$

Mostriamo che l'ipotesi  $U_1 V_1' - U_1' V_1 = 0$  non conduce a niente di nuovo. Infatti allora sarebbe

$$a_1 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

e quindi o 1°:  $b_1 = b_2 = 0$ , oppure 2°:  $a_1 = a_2 = 0$ , od infine 3°:  $a_1 = -b_1 = 0$ . Se  $b_1 = b_2 = 0$ , la (E) diventa dividendola per  $e^{A(u+v)}$

$$\varphi_1 e^{A(u-v)} (a_1 u + a_2) = c_1(u+v) + c_2$$

donde segue  $a_1 = 0$ , cosicchè si ricade nelle soluzioni  $(E_0)$  e  $(E_1')$  già trovate. Similmente se  $a_1 = a_2 = 0$ . Se  $a_1 = b_1 = 0$ , la (E) diventa

$$a_2 \varphi_1 e^{2Au} + b_2 \varphi_2 e^{2Av} = c_1(u+v) e^{A(u+v)}$$

donde si vede subito che  $c_1 = 0$  e si ricade nella  $(E_2)$ . Possiamo quindi supporre  $U_1 V_1' - U_1' V_1 \neq 0$  sicchè si applica la (8). Sostituendovi i valori (9), troviamo

$$(9)_{bis} \quad \varphi_1 = e^{-A(u-v)} \frac{b_1 c_1(u-v) + b_1 c_2 - 2b_2 c_1}{a_1 b_1(u-v) - a_1 b_2 + a_2 b_1},$$

$$\varphi_2 = e^{A(u-v)} \frac{a_1 c_1(u-v) - a_1 c_2 + 2a_2 c_1}{a_1 b_1(u-v) - a_1 b_2 + a_2 b_1}.$$

I valori  $(9)_{bis}$  non dipendono che da  $u - v$ , comunque si scelgano le costanti nelle (9), le (9) e  $(9)_{bis}$  ci forniscono un'ulteriore soluzione della nostra equazione, che è la soluzione  $(E_4)$  del quadro alla fine del §.

C) Secondo modo di soddisfare alla (5).

Osserviamo che, se una delle (6) è soddisfatta, lo è anche l'altra; altrimenti la (5) darebbe  $\varphi_1 \varphi_2 = 0$ , contro l'ipotesi. Pertanto, se non valgono le (6), dalla (5) si deduce

$$(10) \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = - \frac{V_1'' + aV_1' + bV_1}{U_1'' + aU_1' + bU_1}$$

Operandovi con  $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$  si trova subito che il valore comune dei due membri della (10) ha la forma (\*)

$$(10)_{bis} \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ce^{\alpha(u-v)}$$

sicchè la (E) diventa, dividendola per  $e^{-\alpha v} \varphi_2$

$$(11) \quad ce^{\alpha u} U_1 + e^{\alpha v} V_1 = \frac{\psi}{\varphi_2} e^{\alpha v},$$

donde si deduce tosto che

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left( \frac{\psi}{\varphi_2} e^{\alpha v} \right) = 0,$$

ossia

$$(\psi'' + \alpha\psi') \frac{1}{\varphi_2} - \left[ \left( \frac{1}{\varphi_2} \right)'' - \alpha \left( \frac{1}{\varphi_2} \right)' \right] \psi = 0.$$

Se fosse  $\psi = 0$ , la (11) mostra subito che non si otterrebbe che quel caso particolare di (E<sub>2</sub>) in cui  $c_1 = 0$ , sicchè possiamo supporre  $\psi \neq 0$ ,

(\*) È importante osservare che nel seguito del nostro ragionamento facciamo uso *soltanto* di (10)<sub>bis</sub>.

$$\frac{\psi'' + \alpha\psi'}{\psi} = \varphi_2 \left[ \left( \frac{1}{\varphi_2} \right)'' - \alpha \left( \frac{1}{\varphi_2} \right)' \right] = -\beta$$

dove  $\beta$  evidentemente è costante, ossia

$$(12) \quad \begin{aligned} \psi'' + \alpha\psi' + \beta\psi &= 0 \\ \left( \frac{1}{\varphi_2} \right)'' - \alpha \left( \frac{1}{\varphi_2} \right)' + \beta \frac{1}{\varphi_2} &= 0. \end{aligned}$$

Supponiamo dapprima che l'equazione  $x^2 + \alpha x + \beta = 0$  abbia due radici distinte (reali o complesse coniugate)  $x_1 = A$ ,  $x_2 = B$ . Dalle (12) si deduce:

$$(13) \quad \begin{aligned} \psi &= c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)}, \\ \frac{1}{\varphi_2} &= b_1 e^{-A(u-v)} + b_2 e^{-B(u-v)}; \end{aligned}$$

inoltre è  $\alpha = -(A + B)$  sicchè la (10)<sub>bis</sub> dà

$$(13)_{bis} \quad \frac{1}{\varphi_1} = \frac{b_1}{c} e^{B(u-v)} + \frac{b_2}{c} e^{A(u-v)}.$$

Sostituendo nella (E) o, ciò che è lo stesso, nella (11), si trova

$$\begin{aligned} ce^{-(A+B)u} U_1 + e^{-(A+B)v} V_1 &= \\ = b_2 c_1 e^{(A-B)u} + c_2 b_1 e^{-(A-B)u} + b_1 c_1 e^{(A-B)v} + b_2 c_2 e^{-(A-B)v}, \end{aligned}$$

cosicchè ( $h$  costante arbitraria)

$$(13)_{ter} \quad \begin{aligned} U_1 &= \frac{b_2 c_1}{c} e^{2Au} + \frac{b_1 c_2}{c} e^{2Bu} + h e^{(A+B)u}, \\ V_1 &= b_1 c_1 e^{2Av} + b_2 c_2 e^{2Bv} - h c e^{(A+B)v}. \end{aligned}$$

La soluzione di (E) rappresentata dalle (13), (13)<sub>bis</sub> e (13)<sub>ter</sub> è identica, a meno di un piccolo cambiamento di notazioni, alla (E<sub>2</sub>)

del quadro alla fine del Capitolo. Se  $A, B$  sono complesse coniugate, otteniamo, scrivendo la soluzione in forma reale, la  $(E'_0)$  del quadro.

Resta ancora l'ipotesi che l'equazione  $x^2 + \alpha x + \beta = 0$  dove le  $\alpha, \beta$  sono le costanti che compaiono nelle (12) abbia una radice doppia  $x = A$ . Dalle (12) si deduce:

$$(14) \quad \begin{aligned} \phi &= [b_1(u+v) + b_2] e^{A(u+v)}, \\ \frac{1}{\varphi_2} &= [a_1(u-v) + a_2] e^{-A(u-v)}; \end{aligned}$$

inoltre è  $\alpha = -2A$ , cosicchè la (10) bis dà

$$(14)_{bis} \quad \frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{c} [a_1(u-v) + a_2] e^{A(u-v)}.$$

Sostituendo nella (11) si ricava:

$$ce^{-2Au} U_1 + e^{-2Av} V_1 = [a_1 b_1 (u^2 - v^2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2) u + (a_2 b_1 - a_1 b_2) v + a_2 b_2],$$

donde si deduce:

$$(14)_{ter} \quad \begin{aligned} U_1 &= \left( \frac{a_1 b_1}{c} u^2 + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{c} u + \frac{a_2 b_2}{2c} + h \right) e^{2Au}, \\ V_1 &= - \left[ a_1 b_1 v^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) v - \frac{a_2 b_2}{2} + ch \right] e^{2Av}. \end{aligned}$$

La soluzione di (E) rappresentata dalle (14), (14) bis e (14) ter è identica alla  $(E_0)$  del quadro alla fine del §.

D) Non esistenza di ulteriori soluzioni di (E).

Completiamo lo studio dell'equazione (E) dimostrando che essa non possiede altre soluzioni, diverse da quelle finora trovate. Basta evidentemente far vedere che non si può arrivare a nessuna nuova soluzione supponendo che sia in (2) bis  $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$ . Ora dalla (2) si calcola senza difficoltà (non ci occorre conoscere il valore di  $\tau_0$ )

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 2\varphi_1 \varphi_2 (\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1') (\varphi_2 \varphi_1'' - \varphi_1 \varphi_2''') + \\ &+ 3\varphi_1 \varphi_2 (\varphi_1 \varphi_2'' - \varphi_2 \varphi_1'')^2 - 6\varphi_1 \varphi_2 (\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1') (\varphi_1' \varphi_2'' - \varphi_2' \varphi_1''') - \\ &- (\varphi_1^2 \varphi_2'^2 - \varphi_2^2 \varphi_1'^2) (\varphi_1 \varphi_2'' - \varphi_2 \varphi_1'') + 4\varphi_1' \varphi_2' (\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1')^2, \\ \tau_2 &= 2\varphi_1^2 \varphi_2^2 (\varphi_1 \varphi_2''' - \varphi_2 \varphi_1''') - 3\varphi_1 \varphi_2 (\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1') (\varphi_1 \varphi_2'' + \varphi_2 \varphi_1'') + \\ &+ 2\varphi_1 \varphi_2 (\varphi_1 \varphi_2' + \varphi_2 \varphi_1') (\varphi_2 \varphi_1'' - \varphi_1 \varphi_2''') + \\ &+ (3\varphi_1^2 \varphi_2'^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 \varphi_1' \varphi_2' + 3\varphi_2^2 \varphi_1'^2) (\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1'). \end{aligned}$$

Posto per un momento

$$\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} = f_1, \quad \frac{\varphi_2'}{\varphi_2} = f_2,$$

si ha pertanto

$$\begin{aligned} \tau_1 : \varphi_1^2 \varphi_2^2 &= (f_2 - f_1) [2(f_1'' - f_2'') + (f_1 + f_2)(f_1' - f_2') + 3(f_1' - f_2')^2], \\ \tau_2 : \varphi_1^2 \varphi_2^2 &= -2(f_1'' - f_2'') - (f_1 + f_2)(f_1' - f_2'), \\ [\tau_1 + (f_2 - f_1)\tau_2] : \varphi_1^2 \varphi_2^2 &= 3(f_1' - f_2')^2 (f_2 - f_1). \end{aligned}$$

Le equazioni  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  equivalgono dunque alla sola

$$(15) \quad f_1' - f_2' = 0$$

sicchè basta provare che non esistono delle nuove soluzioni della (E) per cui fosse soddisfatta la (15). Ma dalla (15) si deduce:

$$(16) \quad \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} - \frac{\varphi_2'}{\varphi_2} = \alpha,$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ce^{\alpha(u-v)}.$$

Ora la (16) è identica alla (10)<sub>bis</sub>. Se si osserva che, nel ragionamento che ci condusse alle soluzioni (E<sub>5</sub>), (E<sub>6</sub>) e (E<sub>6</sub>), abbiamo fatto uso soltanto della (10)<sub>bis</sub> (\*) vediamo che non vi sono infatti altre soluzioni delle (E) con  $\varphi_1 \varphi_2 \neq 0$  oltre quelle che abbiamo trovate.

E) Quadro di soluzioni dell'equazione.

$$(E) \quad \varphi_1(u-v)U_1(u) + \varphi_2(u-v)V_1(v) = \phi(u+v),$$

dove  $\varphi_1 \varphi_2 \neq 0$ .

$$(E_0) \quad \varphi_1 \text{ arbitraria}, \quad \varphi_2 \text{ arbitraria},$$

$$U_1 = V_1 = \phi = 0;$$

$$(E_1) \quad \varphi_1 \text{ arbitraria}, \quad \varphi_2 = ae^{A(u-v)},$$

$$U_1 = 0, \quad V_1 = be^{2Av}, \quad \phi = abe^{A(u+v)},$$

$$a \neq 0;$$

$$(E_1') \quad \varphi_1 = ae^{-A(u-v)}, \quad \varphi_2 \text{ arbitraria},$$

$$U_1 = be^{2Au}, \quad V_1 = 0, \quad \phi = abe^{A(u+v)},$$

(\*) Cfr. l'ultima nota a piè di pag.

$$a \neq 0;$$

$$\varphi_1 \text{ arbitraria}, \quad \varphi_2 = ae^{2A(u-v)} \cdot \varphi_1 + be^{A(u-v)},$$

$$(E_2) \quad U_1 = -ace^{2Au}, \quad V_1 = ce^{2Av}, \quad \phi = bce^{A(u+v)},$$

$$a \neq 0;$$

$$(E_3) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{b_1 c_2 e^{-A(u-v)} - b_2 c_1 e^{-B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{-(A-B)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}}, \\ \varphi_2 &= \frac{-a_1 c_2 e^{A(u-v)} + a_2 c_1 e^{B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{-(A-B)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}}, \\ U_1 &= a_1 e^{2Au} + a_2 e^{2Bv}, \quad V_1 = b_1 e^{2Av} + b_2 e^{2Bv}, \\ \phi &= c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)}; \quad A \neq B; \end{aligned} \right.$$

$$(E_4) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{c}{a} e^{-A(u-v)} \frac{\sin[\alpha(u-v) + l - k]}{\sin[2\alpha(u-v) + h - k]}, \\ \varphi_2 &= \frac{c}{b} e^{A(u-v)} \frac{\sin[\alpha(u-v) + h - l]}{\sin[2\alpha(u-v) + h - k]}, \\ U_1 &= ae^{2Au} \sin(2\alpha u + h), \quad V_1 = be^{2Av} \sin(2\alpha v + k), \\ \phi &= ce^{A(u+v)} \sin[\alpha(u+v) + l], \quad abca \neq 0; \end{aligned} \right.$$

$$(E_4) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= e^{-A(u-v)} \frac{b_1 c_1 (u-v) + b_1 c_2 - 2b_2 c_1}{a_1 b_1 (u-v) - a_1 b_2 + a_2 b_1}, \\ \varphi_2 &= e^{A(u-v)} \frac{a_1 c_1 (u-v) - a_1 c_2 + 2a_2 c_1}{a_1 b_1 (u-v) - a_1 b_2 + a_2 b_1}, \\ U_1 &= (a_1 u + a_2) e^{2Au}, \quad V_1 = (b_1 v + b_2) e^{2Av}, \\ \phi &= [c_1(u+v) + c_2] e^{A(u+v)}; \end{aligned} \right.$$

$$(E_5) \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{ca_1 e^{A(u-v)} + ca_2 e^{B(u-v)}}, \\ \varphi_2 &= \frac{1}{a_2 e^{-A(u-v)} + a_1 e^{-B(u-v)}}, \\ U_1 &= a_1 b_1 c e^{2Au} + a_2 b_2 c e^{2Bv} + h c e^{(A+B)u}, \\ V_1 &= a_2 b_1 e^{2Av} + a_1 b_2 e^{2Bv} - h c e^{(A+B)v}, \\ \phi &= b_1 e^{A(u+v)} + b_2 e^{B(u+v)}; \end{aligned} \right. \quad A \neq B$$

$$(E_5') \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{ae^{-A(u-v)}}{\sin[\alpha(u-v) + h]}, \\ \varphi_2 &= \frac{be^{A(u-v)}}{\sin[\alpha(u-v) + h]}, \\ U_1 &= -\frac{1}{2b} e^{2Au} \cos(2\alpha u + h + k) + b c e^{2Au}, \\ V_1 &= \frac{a}{2b^2} e^{2Av} \cos(2\alpha v - h + k) - a c e^{2Av}, \\ \phi &= \frac{a}{b} e^{A(u+v)} \sin[\alpha(u+v) + k], \quad \alpha \neq 0; \end{aligned} \right.$$

$$(E_6) \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{ce^{-A(u-v)}}{a_1(u-v) + a_2}, \quad \varphi_2 = \frac{e^{A(u-v)}}{a_1(u-v) + a_2}, \\ U_1 &= \left[ a_1 b_1 u^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)u + \frac{a_2 b_2}{2} + h \right] e^{2Au}, \\ V_1 &= -c \left[ a_1 b_1 v^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)v - \frac{a_2 b_2}{2} + h \right] e^{2Av}, \\ \phi &= c [b_1(u+v) + b_2] e^{A(u+v)}. \end{aligned} \right.$$

§ 75. — Superficie con  $\infty^1$  deformazioni proiettive in sé.

Riduzione del problema  
all'equazione studiata al § precedente.

Dopo la digressione sull'equazione (E), ritorniamo alla ricerca di superficie  $S$  non rigate con un  $G_1$  di deformazioni proiettive in sé. Riferita  $S$  alle asintotiche, sia

$$\xi(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \eta(u, v) \frac{\partial}{\partial v}$$

il simbolo della trasformazione infinitesima di  $G_1$ . Le equazioni differenziali  $du = 0$  e  $dv = 0$  essendo invarianti per  $G_1$  è  $\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0$ . Inoltre l'ipotesi  $\xi\eta = 0$  ci ricondurrebbe alle superficie della specie  $A$  già determinate. Scegliendo opportunamente i parametri  $u, v$  delle asintotiche possiamo pertanto supporre  $\xi = \eta = 1$  sicchè le traiettorie di  $G_1$  sono le curve  $u - v = \text{cost.}$ , e le equazioni di  $G_1$  sono

$$(1) \quad \bar{u} = u + t, \quad \bar{v} = v + t.$$

È importante notare che i nostri parametri  $u, v$  non sono fissati che a meno di una trasformazione della forma

$$(2) \quad u = au + b, \quad \bar{v} = av + c,$$

oppure

$$(2)_{v_1} \quad \bar{u} = av + c, \quad \bar{v} = au + b.$$

Affinchè le forme  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  siano invarianti per  $G$  occorre e basta che  $\beta$  e  $\gamma$  siano funzioni della sola  $u - v$ . Le condizioni d'integrabilità (2) del § 73 diventano pertanto

$$(3) \quad \begin{aligned} L_v &= -2\beta\gamma' - \gamma\beta' \quad , \quad M_u = 2\gamma\beta' + \beta\gamma' \quad , \\ \beta M_v - 2\beta'M - \beta''' &= \gamma L_u + 2\gamma'L + \gamma''' \quad . \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi studiare il sistema (3). Noi lo ridurremo all'equazione (E) studiata al § precedente. A tale scopo indichiamo con  $F_1$  e  $F_2$  funzioni della sola  $u - v$  soddisfacenti alle

$$(4) \quad F_1' = 2\beta\gamma' + \gamma\beta' \quad , \quad F_2' = 2\gamma\beta' + \beta\gamma'.$$

Dalle prime due delle (3) e dalle (4) si deduce

$$(5) \quad L = F_1 + U \quad , \quad M = F_2 + V.$$

Sostituendo i valori (5) nell'ultima delle (3), si ottiene

$$(6) \quad \begin{aligned} \beta V' - 2\beta'V - \beta F_2' - 2\beta'F_2 - \beta''' &= \\ = \gamma U' + 2\gamma'U + \gamma F_1' + 2\gamma'F_1 + \gamma''' \quad . \end{aligned}$$

Operando sulla (6) con  $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$  si ricava:

$$\beta V'' - 2\beta'V = \gamma U'' + 2\gamma'U;$$

e ciò può scriversi

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\right)(\gamma U' + \beta V') = 0,$$

oppure

$$(7) \quad \gamma U' + \beta V' = \phi,$$

$\phi$  essendo funzione della sola  $u + v$ . Ora la (7) non è che la (E) del § precedente, se vi si pone

$$(8) \quad \varphi_1 = \gamma \quad , \quad \varphi_2 = \beta \quad , \quad U_1 = U' \quad , \quad V_1 = V'.$$

Risulta che, per trovare le superficie cercate, ossia per risolvere il sistema (3), occorre: 1° sostituire a  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $U$ ,  $V$  i valori determinati secondo la (8) da una soluzione (E<sub>1</sub>) della (E); 2° dare alle costanti (o funzioni) arbitrarie che compaiono in (E<sub>1</sub>) valori tali che la (6) sia identicamente soddisfatta. Dal modo come abbiamo dedotto la (7) risulta che, in ogni caso, nell'equazione che si ottiene da (6) nel modo ora descritto non comparirà che la sola variabile  $u - v$ .

Occorre pertanto esaminare l'una dopo l'altra le soluzioni di (E). Possiamo omettere la soluzione (E<sub>0</sub>); essa infatti dà  $U' = V' = 0$ , sicchè le (5) mostrano che  $L$  ed  $M$  sono funzioni della sola  $u - v$ , donde si vede che anche la terza forma  $\Sigma r_i du_i$  ammetterebbe il gruppo  $G_1$  che sarebbe un gruppo di *collineazioni* di  $S$  in sè; caso triviale già escluso al § 73.

Diremo che  $S$  è di specie  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  rispettivamente nel caso delle soluzioni (E<sub>1</sub>) o (E'<sub>1</sub>), (E<sub>2</sub>), (E<sub>3</sub>) o (E'<sub>3</sub>), (E<sub>4</sub>), (E<sub>5</sub>) o (E'<sub>5</sub>), (E<sub>6</sub>) dell'equazione (E). Un quadro completo delle quantità  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $L$ ,  $M$  per tutte le superficie delle varie specie si trova alla fine del Capitolo, come abbiamo già avvertito al § 73.

### § 76. Verifiche per le specie $B_1$ e $B_2$ .

#### A) Superficie della specie $B_1$ .

1. Vi sono due tipi distinti di superficie della specie  $B_1$  dipendenti rispettivamente da cinque e quattro costanti arbitrarie.

Basta esaminare (E<sub>1</sub>). Infatti (E'<sub>1</sub>) si riduce ad (E<sub>1</sub>) scambiando  $u$  con  $v$ . Supponiamo dapprima  $A \neq 0$ . La (8) del § 75 dà

$$\beta = ae^{A(u-v)} \quad , \quad U = d_1 \quad , \quad V = be^{2Au} + d_2.$$

Facendo uso delle (2) del § 75 possiamo supporre  $a = A = 1$ ,  $b = 1$  (\*), ossia

(\*) Se fosse  $b = 0$ , le trasformazioni di  $G_1$  sarebbero collineazioni.

$$(1) \quad \beta = e^{u-v}, \quad U = d_1, \quad V = e^{2v} + d_2.$$

Dalle (4) del § 75 si deduce:

$$F'_1 = e^{u-v} (2\gamma' + \gamma), \quad F'_2 = e^{u-v} (\gamma' + 2\gamma),$$

sicchè possiamo prendere:

$$F_1 + F_2 = 3e^{u-v} \gamma.$$

Eliminando  $\gamma$  si trova:

$$F'_1 - 2F'_2 + F_1 + F_2 = 0.$$

Se ne deduce tosto che possiamo esprimere  $F_1$ ,  $F_2$  e  $\gamma$  mediante una sola funzione  $F$  della  $u-v$  secondo le formole

$$(1)_{bis} \quad \gamma = e^{v-u} F', \quad F_1 = 2F' - F, \quad F_2 = F' + F.$$

Infine sostituendo i valori (1) e (1)<sub>bis</sub> nella (6) del § 75 troviamo che  $F$  deve soddisfare all'equazione differenziale del quarto ordine (\*)

$$(1)_{ter} \quad e^{2(u-v)} (F'' + 3F' + 2F + 1) + 2(F'' - F')(2F' - F + d_1) + F'(2F'' - F') + F'''' - 3F''' + 3F'' - F' = 0.$$

Se invece in  $(E_1)$   $A = 0$ , la (8) del § 75 dà

$$\beta = a, \quad U = d_1, \quad V = bv + d_2, \quad ab \neq 0.$$

Dalle (4) del § 75 si deduce:

$$F'_1 = 2a\gamma', \quad F'_2 = a\gamma',$$

sicchè possiamo prendere:

$$F_1 = 2a\gamma, \quad F_2 = a\gamma.$$

(\*) Abbiamo posto  $d_2 = 0$ . Si vede subito che ciò non restringe la generalità.

Sostituendo i valori trovati per  $\beta$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  nella (6) del § 5 si ottiene:

$$\gamma''' + 6a\gamma\gamma' + (2d_1 + a^2)\gamma' - ab = 0,$$

onde

$$\gamma'' + 3a\gamma^2 + (2d_1 + a^2)\gamma - ab(u-v) = c.$$

Facendo uso delle (2) del § 75 possiamo limitarci a supporre  $a = 1$ ,  $d_2 = 0$ ,  $c = 0$ , cosicchè:

$$\beta = 1, \quad U = d_1, \quad V = bv, \quad ab \neq 0$$

$$(2) \quad F_1 = 2\gamma, \quad F_2 = \gamma,$$

$$\gamma'' + 3\gamma^2 + (2d_1 + 1)\gamma - b(u-v) = 0.$$

B) Superficie della specie  $B_2$ .

Vi sono tre tipi di superficie della specie  $B_2$ , dipendenti rispettivamente da sei, cinque e due costanti arbitrarie.

Supponiamo dapprima che in  $(E_2)$   $A \neq 0$ . La (8) del § 75 dà (\*)

$$\beta = a\gamma e^{2A(u-v)} + 2be^{A(u-v)}$$

$$ac \neq 0$$

$$U = -ace^{2Au} + d_1, \quad V = ce^{2Av} + d_2.$$

Dalle (2) del § 75 si vede che si può supporre  $a = A = 1$ ,  $c = 1$  ossia:

$$(2) \quad \beta = e^{2(u-v)} \gamma + 2be^{u-v},$$

$$(2)_{bis} \quad U = -e^{2u} + d_1, \quad V = e^{2v} + d_2, \quad c \neq 0.$$

(\*) Abbiamo scritto  $2Ac$  al posto di  $c$  e  $2b$  al posto di  $b$ . Se fosse  $a = 0$ , si tornerebbe a  $(E_1)$ . Se fosse  $c = 0$ ,  $U$  e  $V$  sarebbero costanti e il gruppo  $G_1$  si comporrebbe di collineazioni.

Dalla (2) si vede che esiste una funzione  $F$  della sola  $u-v$  tale che sia

$$(2)_{ter} \quad \beta = e^{u-v}(\sqrt{F'} + b) \quad , \quad \gamma = e^{v-u}(\sqrt{F'} - b)$$

Sostituendo nelle (4) del § 75 vediamo che si può prendere

$$F_1 = \frac{3}{2} F' + b\sqrt{F'} - F + b^2(u-v) ,$$

(2)<sub>quater</sub>

$$F_2 = \frac{3}{2} F' - b\sqrt{F'} + F - b^2(u-v) .$$

Infine sostituendo nella (6) del § 75 otteniamo che  $F$  deve soddisfare all'equazione differenziale del quarto ordine

$$\begin{aligned} e^{u-v} \left[ \frac{1}{2} F'''' - \frac{3}{4} F'^{-1} F'' F'''' + \frac{3}{2} F'''' + \frac{3}{8} F'^{-2} F''^2 - \right. \\ \left. - \frac{3}{4} F'^{-1} F''^2 + 3F' F'' + \left( F + d_2 - \frac{b^2}{2} - b^2(u-v) + \frac{3}{2} \right) F'' + 4F'^2 + \right. \\ \left. + 2bF'^{\frac{3}{2}} + \left( 2F + 2d_2 - 3b^2 - 2b^2(u-v) + 1 \right) F' + 2bFF'^{\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - \left( 2b^3(u-v) - 2bd_2 + b^3 - b \right) F'^{\frac{1}{2}} \right] + e^{v-u} \left[ \frac{1}{2} F'''' - \right. \\ \left. \frac{3}{4} F'^{-1} F'' F'''' - \frac{3}{2} F'''' + \frac{3}{8} F'^{-2} F''^2 + \frac{3}{4} F'^{-1} F''^2 + 3F' F'' - \left( F - \right. \right. \\ \left. \left. - d_1 + \frac{b^2}{2} - b^2(u-v) + \frac{3}{2} \right) F'' + 4F'^2 + 2bF'^{\frac{3}{2}} + (2F - 2d_1 + \right. \\ \left. + 3b^2 - 2b^2(u-v) - 1) F' - 2bFF'^{\frac{1}{2}} + (2b^3(u-v) + 2bd_1 - b^3 + \right. \\ \left. + b) F'^{\frac{1}{2}} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (2)_{quinque}$$

Notiamo che si può supporre  $d_1 = d_2$  senza ledere la generalità. Così facciamo nel quadro alla fine del Capitolo.

Sia invece in  $(E_2)$   $A = 0$ . La (8) del § 75 dà

$$(3) \quad \beta = a\gamma + b \quad , \quad U = -acu + d_1 \quad , \quad V = cv + d_2 \quad , \quad ac \neq 0 .$$

Dalle (4) del § 75 si ottiene pertanto :

$$F'_1 = 3a\gamma\gamma' + 2b\gamma' \quad , \quad F'_2 = 3a\gamma\gamma' + b\gamma' ,$$

sicchè si può prendere :

$$(3)_{bis} \quad F_1 = \frac{3a}{2} \gamma^2 + 2b\gamma \quad , \quad F_2 = \frac{3a}{2} \gamma^2 + b\gamma .$$

Sostituendo tali valori nella (6) del § 75 si deduce che  $\gamma$  deve soddisfare all'equazione differenziale *in generale* del terzo ordine

$$(3)_{ter} \quad (1+a)\gamma''' + 6a(1+a)\gamma^2\gamma' + 6b(1+a)\gamma\gamma' - \\ - 2ac(u-v)\gamma' + (2ad_2 + 2d_1 + b^2)\gamma' - 2ac\gamma - bc = 0 .$$

Le (2) del § 75 mostrano che non si restringe la generalità supponendo  $d_2 = 0$ ,  $d_1 = -\frac{b^2}{2}$ ,  $c = 1$ .

Ma la forma dell'equazione (3)<sub>ter</sub> prova che il caso  $a + 1 = 0$  deve essere trattato a parte. (\*) Le equazioni precedenti diventano allora, posto  $d_2 = 0$ ,  $d_1 = -\frac{b^2}{2}$ ,  $c = 1$ ,

$$(4) \quad \beta = -\gamma + b \quad , \quad U = u - \frac{b^2}{2} \quad , \quad V = v \quad , \quad F_1 = -\frac{3}{2}\gamma^2 + 2b\gamma \quad , \\ F_2 = -\frac{3}{2}\gamma^2 + b\gamma \quad , \quad 2(u-v)\gamma' + 2\gamma - b = 0 .$$

(\*) Per mettere in evidenza tale circostanza, scriviamo  $\frac{1}{a}$  al posto di  $1+a$  nel quadro alla fine del Capitolo.

Se ne deduce:

$$(u-v)(2\gamma-b) = 2h = \text{cost.},$$

$$(5) \quad \beta = -\frac{h}{u-v} + \frac{b}{2}, \quad \gamma = \frac{h}{u-v} + \frac{b}{2}$$

$$L = u - \frac{3}{2} \frac{h^2}{(u-v)^2} + \frac{1}{2} \frac{bh}{u-v} + \frac{1}{2} b^2,$$

(5)<sub>bis</sub>

$$M = v - \frac{3}{2} \frac{h^2}{(u-v)^2} - \frac{1}{2} \frac{bh}{u-v} + \frac{1}{8} b^2.$$

Dobbiamo supporre  $hb \neq 0$  perchè altrimenti la superficie ammetterebbe  $\infty^2$  deformazioni proiettive in sè.

### § 77. Verifiche per la specie $B_3$ .

1. Questo caso è il più difficile. Vi sono quindici tipi di superficie della specie  $B_3$  distinti anche nel campo complesso, sei tipi dipendendo da due costanti arbitrarie, gli altri da tre costanti ciascuno. Nel campo reale il numero di tipi distinti è ancor più grande.

Le equazioni ( $E_3$ ) e (8) § 75 danno:

$$(1) \quad \beta = \frac{-a_1 c_2 e^{A(u-v)} + a_2 c_1 e^{B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{-(A-B)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}},$$

$$\gamma = \frac{b_1 c_2 e^{-A(u-v)} - b_2 c_1 e^{-B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{-(A-B)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}},$$

$$(2) \quad U = \frac{a_1}{2A} e^{2Au} + \frac{a_2}{2B} e^{2Bu} + d_1,$$

$$V = \frac{b_1}{2A} e^{2Av} + \frac{b_2}{2B} e^{2Bv} + d_2,$$

convenendo di sostituire  $u$  e  $v$  rispettivamente a

$\frac{1}{2B} e^{2Bv}$  ed a  $\frac{1}{2B} e^{2Bv}$  se  $B=0$ , e similmente se  $A=0$ .

Le equazioni (4) del § 75 possono scriversi:

$$F_1 + F_2 = 3\beta\gamma, \quad F'_1 - F'_2 = \beta\gamma' - \gamma\beta'.$$

Posto per brevità

$$(3) \quad z = e^{(A-B)(u-v)},$$

si deduce dalle (1):

$$\beta\gamma' - \gamma\beta' = \frac{-(A+B)c_1 c_2 (a_1 b_2 z + a_2 b_1 z^{-1}) + 2Aa_1 b_1 c_2^2 + 2Ba_2 b_2 c_1^2}{(a_1 b_2 z - a_2 b_1 z^{-1})^2},$$

$$F_1 - F_2 =$$

$$= \frac{1}{A-B} \int \frac{-(A+B)c_1 c_2 (a_1 b_2 z^2 + a_2 b_1) + 2(Aa_1 b_1 c_2^2 + Ba_2 b_2 c_1^2)}{(a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1 z)^2} dz.$$

Osserviamo che si può supporre  $a_1 b_2 \neq 0$ . Infatti non può essere simultaneamente  $a_1 b_2 = a_2 b_1 = 0$ ; d'altra parte, il caso  $a_1 b_2 = 0$ ,  $a_2 b_1 \neq 0$  si riduce ad  $a_1 b_2 \neq 0$  scambiando le lettere  $A$  e  $B$ . Sia pertanto  $a_1 b_2 \neq 0$ . Allora si deduce dalla precedente

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{A-B} \frac{(A+B)c_1 c_2 z - \left( \frac{b_1}{b_2} c_2^2 + B \frac{a_2}{a_1} c_1^2 \right)}{a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1}.$$

Ricordando che

$$F_1 + F_2 = 3\beta\gamma = 3 \frac{c_1 c_2 (a_1 b_2 z^2 + a_2 b_1) - z (a_1 b_2 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2)}{(a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1)^2},$$

si trova:

$$(4) \quad F_1 = \frac{1}{2(A-B)} (a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1)^{-2} \left[ 2(2A-B)a_1 b_2 c_1 c_2 z^3 + \right. \\ \left. + \{(-4A+3B)a_1 b_1 c_2^2 + (-3A+2B)a_2 b_2 c_1^2\} z^2 + \right. \\ \left. + 2(A-2B)a_2 b_1 c_1 c_2 z + \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} (Aa_1 b_1 c_2^2 + Ba_2 b_2 c_1^2) \right],$$

$$\begin{aligned}
 F_2 = & \frac{1}{2(A-B)} (a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1)^{-2} \left[ 2(A-2B) a_1 b_2 c_1 c_2 z^3 + \right. \\
 (4)_{bis} & \left. + \{(-2A+3B) a_1 b_1 c_2^2 + (-3A+4B) a_2 b_2 c_1^2\} z^2 + \right. \\
 & \left. + 2(2A-B) a_2 b_1 c_1 c_2 z - \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2} (A a_1 b_1 c_2^2 + B a_2 b_2 c_1^2) \right].
 \end{aligned}$$

Basta sostituire i valori ora trovati nell'equazione (6) del § 75; dopo un calcolo piuttosto lungo si trova

$$\begin{aligned}
 \eta + z^{\frac{A+B}{A-B}} & \left\{ -B(A-B)(B^2 + 2d_2) a_1^2 b_2^2 c_2 z^7 + \right. \\
 & + a_1^2 b_2^2 c_1 (A-2B) \left[ c_2^2 (A-3B) - a_2 b_2 (A-B) \right] \{ (A-2B)^2 + \\
 & + 2d_2 \} \} z^6 + a_1^2 b_2 c_2 \left[ (a_1 b_1 c_2^2 + 3a_2 b_2 c_1^2) (2A-3B) (-A+2B) + \right. \\
 & + a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B) (8A^3 - 36A^2 B + 54AB^2 - 23B^3 + \\
 & + 2d_2 (2A+B)) \left. \right] z^5 + a_1 a_2 b_2 c_1 \left[ a_1 b_1 c_2^2 (17A^2 - 44AB + \right. \\
 & + 24B^2) + a_2 b_2 c_1^2 (2A-3B) (3A-4B) + a_1 a_2 b_1 b_2 (A- \\
 (5) & \left. -B) (-23A^3 + 84A^2 B - 96AB^2 + 32B^3 + 2d_2 (A-4B)) \right] z^4 + \\
 & + a_1 a_2 b_1 c_2 \left[ -2(a_1 b_1 c_2^2 + 3a_2 b_2 c_1^2) (2A-B) (2A-3B) + \right. \\
 & + a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B) (32A^3 - 96A^2 B + 84AB^2 - 23B^3 + \\
 & + 2d_2 (-4A+B)) \left. \right] z^3 + a_2^2 b_1 c_1 \left[ a_1 b_1 c_2^2 (17A^2 - 23AB + \right. \\
 & + 6B^2) + 2a_2 b_2 c_1^2 A (3A-4B) + a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B) (-23A^3 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 54A^2 B - 36AB^2 + 8B^3) + 2d_2 (A+2B) \left. \right] z^2 + \\
 & + \frac{a_2^2 b_1^2 c_2}{b_2} (-2A+B) \left[ (a_1 b_1 c_2^2 + 3a_2 b_2 c_1^2) A - a_1 a_2 b_1 b_2 (A- \right. \\
 & \left. -B) ((2A-B)^2 + 2d_2) \right] z + \\
 & + \frac{a_2^3 b_1^2 c_1}{a_1 b_2} A \left[ a_1 b_1 c_2^2 A + a_2 b_2 c_1^2 B - a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B) (A^2 + 2d_2) \right] = \\
 (5) & = -A(A-B)(A^2 + 2d_1) a_1^2 b_2^2 c_1 z^7 + \\
 & + a_1^2 b_2^2 c_2 (2A-B) \left[ -c_1^2 (3A-B) + a_1 b_1 (A-B) ((2A-B)^2 + \right. \\
 & + 2d_1) \left. \right] z^6 + a_1 b_2^2 c_1 \left[ (3a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2) (3A-2B) (2A-B) - \right. \\
 & - a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B) (23A^3 - 54A^2 B + 36AB^2 - 8B^3 - \\
 & - 2d_1 (A+2B)) \left. \right] z^5 + a_1 b_1 b_2 c_2 \left[ -a_1 b_1 c_2^2 (4A-3B) (3A- \right. \\
 & - 2B) - a_2 b_2 c_1^2 (24A^2 - 44AB + 17B^2) + a_1 a_2 b_1 b_2 (A- \\
 & - B) (32A^3 - 96A^2 B + 84AB^2 - 23B^3 - 2d_1 (4A-B)) \left. \right] z^4 + \\
 & + a_2 b_1 b_2 c_1 \left[ 2(3a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2) (A-2B) (3A-2B) - \right. \\
 & - a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B) (23A^3 - 84A^2 B + 96AB^2 - 32B^3 - \\
 & - 2d_1 (A-4B)) \left. \right] z^3 + a_2 b_1^2 c_2 \left[ 2a_1 b_1 c_2^2 B (4A-3B) - \right. \\
 & - a_2 b_2 c_1^2 (6A^2 - 23AB + 17B^2) + a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B) (8A^3 - \\
 & - 36A^2 B + 54AB^2 - 23B^3 + 2d_1 (2A+B)) \left. \right] z^2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a_2^2 b_1^2 c_1}{a_1} (-A + 2B) \left[ (3a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2) B + a_1 a_2 b_1 b_2 (A - \right. \\
 & \left. - B) ((-A + 2B)^2 + 2d_1) \right] z + \\
 & + \frac{a_2^2 b_1^3 c_2}{a_1 b_2} B \left[ -a_1 b_1 c_2^2 A - a_2 b_2 c_1^2 B - a_1 a_2 b_1 b_2 (A - \right. \\
 & \left. - B) (B^2 + 2d_1) \right].
 \end{aligned}$$

In quest'equazione  $\eta = 0$  se  $AB \neq 0$ ; se invece  $B = 0$ , è:

$$\begin{aligned}
 \eta = A (a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1)^2 & \left[ a_1^2 b_2^2 c_2 z^4 - 2a_1 a_2 b_2^2 c_1 z^3 + 2a_2^2 b_1 b_2 c_1 z - \right. \\
 & \left. - a_2^2 b_1^2 c_2 + 2a_2 b_2 A (u - v) z (a_1 b_2 c_1 z^2 - 2a_1 b_1 c_2 z + a_2 b_1 c_1) \right]
 \end{aligned}$$

e, se  $A = 0$ , è:

$$\begin{aligned}
 \eta = Bz^{-1} (a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1)^2 & \left[ a_1^2 b_2^2 c_1 z^4 - 2a_1^2 b_1 b_2 c_2 z^3 + 2a_1 a_2 b_1^2 c_2 z - \right. \\
 & \left. - a_2^2 b_1^2 c_1 - 2a_1 b_1 B (u - v) z (a_1 b_2 c_2 z^2 - 2a_2 b_2 c_1 z + a_2 b_1 c_2) \right].
 \end{aligned}$$

Osserviamo che, appena conosciuta una scelta di costanti  $A, B, a_1, b_2, \dots$  tale che l'equazione (5) sia identicamente soddisfatta, se ne deduce un'altra (che può coincidere con la prima) mediante la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & b_1, & b_2, & c_1, & c_2, & A, & B, & d_1, & d_2 \\ -b_2, & -b_1, & -a_2, & -a_1, & -c_2, & -c_1, & -B, & -A, & d_2, & d_1 \end{pmatrix}.$$

Ora tale sostituzione equivale allo scambio di  $u$  con  $v$  e non dà pertanto niente di essenzialmente nuovo. Quindi non scriveremo che una di due tali soluzioni equivalenti.

2. È facile vedere che, se  $AB = 0$ , è impossibile trovare dei valori di  $a_1, a_2, \dots$  tali che la (5) sia soddisfatta identicamente

e che sia  $\beta\gamma \neq 0$ . Invece se  $AB \neq 0$ , l'equazione (5) possiede quattordici soluzioni distinte. Il lettore può vedere il calcolo relativo nella Memoria di Čech.: *Sur les surfaces qui admettent  $\infty^1$  déformations projectives en elles mêmes* (\*). Rinviando a tale Memoria scriviamo qui senza dimostrazione le diverse soluzioni di (5) per cui  $\beta\gamma \neq 0$ . Esse sono:

$$(\alpha)_1 \quad c_2 = 0, \quad c_1^2 = 4a_1 b_1 (A - B)^2, \quad 2d_1 = -A^2, \quad 2d_2 = -(A - 2B)^2,$$

$$(\alpha)_2 \quad c_1^2 = a_1 b_1 (A - B)^2, \quad c_2^2 = a_2 b_2 (A - B)^2, \quad 2d_1 = -A^2, \quad 2d_2 = -B^2,$$

$$(\beta)_1 \quad B = -A, \quad c_1^2 = 4a_1 b_1 A^2, \quad c_2^2 = 4a_2 b_2 A^2,$$

$$2d_1 = -A^2 + h a_1 c_2, \quad 2d_2 = -A^2 - h b_2 c_1;$$

$$(\beta)_2 \quad B = -A, \quad b_1 = \mu a_1, \quad a_2 = \mu b_2, \quad c_1 = \nu a_1, \quad c_2 = -\nu b_2, \quad d_1 = d_2;$$

$$(\beta)_3 \quad B = -A, \quad a_2 = \frac{(a_1 c_2 + c_1 b_2)^2}{16 A^2 a_1^2 b_2}, \quad b_1 = \frac{(a_1 c_2 + c_1 b_2)^2}{16 A^2 a_1 b_2^2},$$

$$2d_1 = -A^2 + 8a_1 c_2 \frac{b_2 c_1 - a_1 c_2}{(a_1 c_2 + b_2 c_1)^2} A^2,$$

$$2d_2 = -A^2 - 8b_2 c_1 \frac{b_2 c_1 - a_1 c_2}{(a_1 c_2 + b_2 c_1)^2} A^2;$$

$$(\gamma)_1 \quad A = 3B, \quad b_1 = h^2 a_1, \quad a_2 = \frac{b_2}{h}, \quad c_1 = h k a_1, \quad c_2 = -\frac{k}{h} b_2,$$

$$2d_1 = -B^2 - \frac{2k^2}{h}, \quad 2d_2 = -B^2;$$

$$(\gamma)_2 \quad A = 3B, \quad b_1 = \lambda^2 a_1, \quad b_2 = \lambda^2 a_2, \quad B = \frac{\lambda^2 a_1 c_2 + a_2 c_1}{4 \lambda^3 a_1 a_2},$$

(\*) Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, 1924, no 40. Brno, Cecoslovacchia.

$$2d_1 = -B^2 - \frac{3\lambda^4 a_1^2 c_2^2 + a_2^2 c_1^2}{2\lambda^6 a_1^2 a_2^2}, \quad 2d_2 = -B^2;$$

$$(\delta)_1 \quad A = 2B, \quad c_2 = 0, \quad b_1 = h^2 a_1, \quad b_2 = h a_2, \\ c_1^2 = 2h^2 a_1^2 (d_2 - d_1);$$

$$(\delta)_2 \quad A = 2B, \quad c_2 = 0, \quad c_1^2 = 4a_1 b_1 B^2, \quad d_2 = \frac{a_1 b_2^2}{a_2^2 b_1} (2B^2 + d_1);$$

$$(\delta)_3 \quad A = 2B, \quad b_1 = h^2 a_1, \quad b_2 = h a_2, \\ 2d_1 = -B^2 - \frac{2c_2^2}{h a_2^2} - \frac{c_1^2}{h^2 a_1^2}, \quad 2d_2 = -B^2;$$

$$(\varepsilon)_1 \quad A = 3\alpha, \quad B = 2\alpha, \quad a_2^2 b_1^2 = a_1^2 b_2^2, \\ c_2 = 0, \quad 2c_1^2 = -a_1 b_1 (\alpha^2 + 2d_1), \quad 2d_2 = -\alpha^2;$$

$$(\varepsilon)_2 \quad A = 3\alpha, \quad B = 2\alpha, \quad a_2^2 b_1^2 = a_1^2 b_2^2, \\ c_1 = 0, \quad 3c_2^2 = -a_2 b_2 (4\alpha^2 + 2d_1), \quad 2d_2 = -4\alpha^2;$$

$$(\varepsilon)_3 \quad A = 3\alpha, \quad B = 2\alpha, \quad a_2^2 b_1^2 = a_1^2 b_2^2, \\ c_2^2 = a_2 b_2 \alpha^2, \quad 2c_1^2 = -a_1 b_1 (7\alpha^2 + 2d_1), \quad 2d_2 = -4\alpha^2;$$

$$(\zeta) \quad A = 4\alpha, \quad B = 3\alpha, \quad c_2 = 0, \quad 3c_1^2 = -a_1 b_1 (4\alpha^2 + 2d_1), \\ a_1^2 b_2^2 - a_2^2 b_1^2 = 0, \quad 2d_2 = -4\alpha^2.$$

Calcoliamo ora nei diversi casi i valori di  $\beta, \gamma, L, M$ , semplificando mediante un'opportuna sostituzione della forma (2) del § 75.

Nel caso  $(\alpha)_1$  possiamo supporre  $A = \alpha + 1, B = \alpha - 1$  ( $\alpha^2 \neq 1$ ),  $a_1 = \varepsilon_1 a_2, b_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 b_2, \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Si ottiene (\*)

(\*) Il radicale  $\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}$  può essere positivo o negativo, ma  $\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \cdot \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} = +1$ .

$$\beta = 4 \sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{1 - \varepsilon_2 e^{4(u-v)}}, \quad \gamma = 4 \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \frac{e^{-(\alpha+1)(u-v)}}{1 - \varepsilon_2 e^{-4(u-v)}},$$

$$L = \frac{a_1}{2(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)u} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{2(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)u} - \frac{(\alpha+1)^2}{2} + \\ + \frac{4[-\varepsilon_2(\alpha+5)e^{4(u-v)} + \alpha - 1]}{(1 - \varepsilon_2 e^{4(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{b_1}{2(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)v} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 b_1}{2(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)v} - \frac{(\alpha-3)^2}{2} + \\ + \frac{4[\varepsilon_2(\alpha-7)e^{4(u-v)} - \alpha + 1]}{(1 - \varepsilon_2 e^{4(u-v)})^2}.$$

Nel caso  $(\alpha)_2$  possiamo supporre  $A = \alpha + 1, B = \alpha - 1$  ( $\alpha^2 \neq 1$ ),  $a_2 = \varepsilon_1 a_1, b_2 = \varepsilon_1 b_1, \varepsilon_1^2 = 1$ . Posto  $\varepsilon = \pm 1$  si ottiene (\*)

$$\beta = 2 \sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \frac{e^{(\alpha+1)(u-v)} - \varepsilon e^{(\alpha+3)(u-v)}}{1 - e^{4(u-v)}},$$

$$\gamma = -2 \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \frac{e^{-(\alpha-3)(u-v)} - \varepsilon e^{-(\alpha-1)(u-v)}}{1 - e^{4(u-v)}},$$

$$L = \frac{a_1}{2(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)u} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{2(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)u} - \frac{(\alpha+1)^2}{2} + \\ + \frac{2[\varepsilon(\alpha+3)e^{6(u-v)} - (\alpha+6)e^{4(u-v)} - \varepsilon(\alpha-3)e^{2(u-v)} + 1]}{(1 - e^{4(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{b_1}{2(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)v} + \frac{\varepsilon_1 b_1}{2(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)v} - \frac{(\alpha-1)^2}{2} +$$

(\*) I due casi  $\varepsilon=1$  e  $\varepsilon=-1$  sono distinti anche nel campo complesso; sui radicali  $\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}$  e  $\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}$  v. a nota precedente. Queste due osservazioni valgono anche per  $(\beta)_1$ .

$$+ \frac{2[-\varepsilon(\alpha-3)e^{\varepsilon(u-v)} + (\alpha-6)e^{4(u-v)} + \varepsilon(\alpha+3)e^{2(u-v)} - 1]}{(1-e^{4(u-v)})^2}.$$

Nel caso  $(\beta)_1$  possiamo supporre  $A=1$ ,  $a_2 = \varepsilon_1 a_1$ ,  $b_2 = \varepsilon_1 b_1$ ,  $\varepsilon_1^2 = 1$ . Posto  $\varepsilon = \pm 1$ , si ottiene:

$$\beta = 2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \frac{e^{u-v}}{1 + \varepsilon e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = 2\varepsilon \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} \frac{e^{u-v}}{1 + \varepsilon e^{2(u-v)}},$$

$$L = \frac{a_1}{2} e^{2u} - \frac{\varepsilon_1 a_1}{2} e^{-2u} - \frac{1}{2} + \varepsilon_1 \varepsilon h a_1^2 \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} + \frac{6\varepsilon e^{2(u-v)}}{(1 + \varepsilon e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{b_1}{2} e^{2v} - \frac{\varepsilon_1 b_1}{2} e^{-2v} - \frac{1}{2} - \varepsilon_1 h b_1^2 \sqrt{\frac{a_1}{b_1}} + \frac{6\varepsilon e^{2(u-v)}}{(1 + \varepsilon e^{2(u-v)})^2}.$$

Nel caso  $(\beta)_2$  possiamo supporre  $A=1$ ,  $\mu = \varepsilon_1$ ,  $a_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 b_2$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . (\*) Si ottiene:

$$\beta = \frac{\nu}{\varepsilon_1 e^{v-u} - e^{u-v}}, \quad \gamma = -\frac{\nu}{\varepsilon_1 e^{v-u} - e^{u-v}},$$

$$L = \frac{a_1}{2} e^{2u} - \frac{\varepsilon_2 a_1}{2} e^{-2u} + d_1 - \frac{3\nu^2}{2} \frac{1}{(\varepsilon_1 e^{v-u} - e^{u-v})^2},$$

$$M = \varepsilon_1 \left( \frac{a_1}{2} e^{2v} - \frac{\varepsilon_2 a_1}{2} e^{-2v} \right) + d_1 - \frac{3\nu^2}{2} \frac{1}{(\varepsilon_1 e^{v-u} - e^{u-v})^2}.$$

Nel caso  $(\beta)_3$  possiamo supporre  $A=1$ ,  $a_1 c_2 + c_1 b_2 = 4\varepsilon_1 a_1 b_2$ ,  $c_1 = \varepsilon_2 c_2$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{4\varepsilon_1}{\varepsilon_2 a_1 + b_2} \frac{b_2 e^{v-u} - \varepsilon_2 a_1 e^{u-v}}{e^{2(v-u)} - e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{4\varepsilon_1}{\varepsilon_2 a_1 + b_2} \frac{\varepsilon_2 a_1 e^{v-u} - b_2 e^{u-v}}{e^{2(v-u)} - e^{2(u-v)}},$$

$$L = \frac{a_1}{2} e^{2u} - \frac{b_2}{2} e^{-2u} - \frac{1}{2} - 4 \frac{\varepsilon_2 a_1 (\varepsilon_2 a_1 - b_2)}{(\varepsilon_2 a_1 + b_2)^2} +$$

(\*) Se fosse  $\mu=0$ , la superficie ammetterebbe  $\infty^2$  deformazioni proiettive in sé.

$$+ \frac{4}{(\varepsilon_2 a_1 + b_2)^2} \frac{[6\varepsilon_2 a_1 b_2 e^{2(u-v)} - (7a_1^2 + 5b_2^2)e^{4(u-v)} + 6\varepsilon_2 a_1 b_2 e^{2(u-v)} + a_1^2 - b_2^2]}{(e^{4(u-v)} - 1)^2},$$

$$M = \frac{a_1}{2} e^{2v} - \frac{b_2}{2} e^{-2v} - \frac{1}{2} + 4 \frac{b_2 (\varepsilon_2 a_1 - b_2)}{(\varepsilon_2 a_1 + b_2)^2} +$$

$$+ \frac{4}{(\varepsilon_2 a_1 + b_2)^2} \frac{[6\varepsilon_2 a_1 b_2 e^{2(u-v)} - (5a_1^2 + 7b_2^2)e^{4(u-v)} + 6\varepsilon_2 a_1 b_2 e^{2(u-v)} - a_1^2 + b_2^2]}{(e^{4(u-v)} - 1)^2}.$$

Nel caso  $(\gamma)_1$  possiamo supporre  $B=1$ ,  $h = \varepsilon_1$ ,  $c_2 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{\varepsilon_1}{b_2} \frac{e^{2(u-v)}}{1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = -\frac{1}{b_2} \frac{e^{u-v}}{1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)}},$$

$$L = \frac{a_1}{6} e^{6u} + \frac{\varepsilon_1 b_2}{2} e^{2u} - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{b_2} - \frac{1}{2b_2^2} \frac{5e^{2(u-v)} - 2\varepsilon_1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2},$$

$$M = \frac{\varepsilon_1 a_1}{6} e^{6v} + \frac{b_2}{2} e^{2v} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2b_2^2} \frac{e^{2(u-v)} + 2\varepsilon_1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2}.$$

Nel caso  $(\gamma)_2$  possiamo supporre  $B=1$ ,  $\lambda = \varepsilon_1$ ,  $b_2 = \varepsilon_2 a_1$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Posto  $c_1 - \varepsilon_2 c_2 = 4c$  si ottiene:

$$\beta = 2e^{2(u-v)} \left( \frac{\varepsilon_1}{1 + e^{2(u-v)}} + \frac{c}{a_1} \frac{1}{1 - e^{2(u-v)}} \right),$$

$$\gamma = 2e^{v-u} \left( \frac{\varepsilon_1}{1 + e^{2(u-v)}} - \frac{c}{a_1} \frac{1}{1 + e^{2(u-v)}} \right),$$

$$L = \frac{a_1}{6} e^{6u} + \frac{\varepsilon_2 a_1}{2} e^{2u} - \frac{1}{2} - 4 \frac{a_1^2 - \varepsilon_1 a_1 c + c^2}{a_1^2} +$$

$$+ \frac{2}{a_1^2} \times$$

$$\times \frac{5(a_1^2 - c^2)e^{4(u-v)} - 2(4a_1^2 - \varepsilon_1 a_1 c + 4c^2)e^{4(u-v)} + (a_1^2 - c^2)e^{2(u-v)} + 2(a_1^2 - \varepsilon_1 a_1 c + c^2)}{(1 - e^{4(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{a_1}{6} e^{6v} + \frac{\varepsilon_2 a_1}{2} e^{2v} - \frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{2}{a_1^2} \times$$

$$\times \frac{(a_1^2 - c^2) e^{6(u-v)} - 2(2a_1^2 + \varepsilon_1 a_1 c + 2c^2) e^{4(u-v)} + 5(a_1^2 - c^2) e^{2(u-v)} - 2(a_1^2 - \varepsilon_1 a_1 c + c^2)}{(1 - e^{4(u-v)})^2}.$$

Nel caso  $(\delta)_1$  possiamo supporre  $B = 1$ ,  $h = \varepsilon_1$ ,  $b_2 = \varepsilon_2 a_1$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 0$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{\sqrt{2(d_2 - d_1)}}{e^{2(v-u)} - \varepsilon_1}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{2(d_2 - d_1)}}{e^{2(u-v)} - \varepsilon_1},$$

$$L = \frac{a_1}{4} e^{4u} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 a_1}{2} e^{2u} + d_1 + (d_1 - d_2) \frac{4\varepsilon_1 e^{2(u-v)} - 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2},$$

$$M = \varepsilon_2 \left( \frac{\varepsilon_1 a_1}{4} e^{4v} + \frac{a_1}{2} \right) e^{2v} + d_2 + (d_1 - d_2) \frac{2\varepsilon_1 e^{2(u-v)} + 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2}.$$

Nel caso  $(\delta)_2$  possiamo supporre  $B = 1$ ,  $c_1 = 2\varepsilon_1$ ,  $a_2 b_1 = \varepsilon_2 a_1 b_2$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{2\varepsilon_1 a_1}{e^{2(v-u)} - \varepsilon_2}, \quad \gamma = \frac{2\varepsilon_1}{a_1} \frac{1}{e^{2(u-v)} - \varepsilon_2},$$

$$L = \frac{a_1}{4} e^{4u} + \frac{\varepsilon_2 a_1^2 b_2}{2} e^{2u} + d_1 - 2 \frac{4\varepsilon_2 e^{2(u-v)} - 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_2)^2},$$

$$M = \frac{1}{4a_1} e^{4v} + \frac{b_2}{2} e^{2v} + \frac{d_1 + 2}{a_1^2} - 2 \frac{2\varepsilon_2 e^{2(u-v)} + 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_2)^2}.$$

Nel caso  $(\delta)_3$  possiamo supporre  $B = 1$ ,  $h = \varepsilon_1$ ,  $a_2 = \varepsilon_2 a_1$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{a_1} \frac{e^{2(u-v)}(c_1 - \varepsilon_2 c_2 e^{u-v})}{1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{1}{a_1} \frac{e^{2(v-u)}(c_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_2 e^{2(v-u)})}{1 - \varepsilon_1 e^{2(v-u)}},$$

$$L = \frac{a_1}{4} e^{4u} + \frac{\varepsilon_2 a_1}{2} e^{2u} - \frac{1}{2} - \varepsilon_1 \frac{c_2^2}{a_1^2} - \frac{1}{2} \frac{c_1^2}{a_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{2a_1^2} \frac{6\varepsilon_1 \varepsilon_2 c_1 c_2 e^{3(u-v)} - (4\varepsilon_1 c_1^2 + 5c_2^2) e^{2(u-v)} + c_1^2 + 2\varepsilon_1 c_2^2}{(1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{a_1}{4} e^{4v} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 a_1}{2} e^{2v} - \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{1}{2a_1^2} \frac{(2\varepsilon_1 c_1^2 + c_2^2) e^{2(u-v)} - 6\varepsilon_2 c_1 c_2 e^{u-v} + c_1^2 + 2\varepsilon_1 c_2^2}{(1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2}.$$

Nel caso  $(\varepsilon)_1$  possiamo supporre  $\alpha = 1$ ,  $a_2 = \varepsilon_1 a_1$ ,  $b_1 = \varepsilon_2 a_1$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{\varepsilon_2 c_1}{a_1} \frac{e^{3(u-v)}}{1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{c_1}{a_1} \frac{e^{3(v-u)}}{1 - \varepsilon_1 e^{2(v-u)}},$$

$$L = \frac{a_1}{6} e^{6u} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{4} e^{4u} - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_2 c_1^2}{a_1^2} - \frac{c_1^2}{2a_1^2} \frac{5e^{2(u-v)} - 2\varepsilon_2}{(1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{\varepsilon_2 a_1}{6} e^{6v} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{4} e^{4v} - \frac{1}{2} - \frac{c_1^2}{2a_1^2} \frac{e^{2(u-v)} + 2\varepsilon_2}{(1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)})^2}.$$

Nel caso  $(\varepsilon)_2$  la superficie ammette  $\infty^2$  deformazioni proiettive in sè, come si verifica facilmente.

Nel caso  $(\varepsilon)_3$  possiamo supporre  $\alpha = 1$ ,  $a_2 = \varepsilon_1 a_1$ ,  $b_1 = \varepsilon_2 a_1$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Posto  $\varepsilon = \pm 1$ , si ottiene:

$$\beta = \frac{e^{3(u-v)} \left( \frac{c_1}{a_1} - \varepsilon e^{u-v} \right)}{\varepsilon_2 - e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{e^{3(v-u)} \left( \frac{c_1}{a_1} - \varepsilon \varepsilon_2 e^{v-u} \right)}{1 - \varepsilon_2 e^{2(v-u)}},$$

$$L = \frac{a_1}{6} e^{6u} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{4} e^{4u} - \frac{7}{2} - \frac{\varepsilon_2 c_1^2}{a_1^2} +$$

$$+ \frac{1}{2a_1^2} \frac{8\varepsilon a_1 c_1 e^{3(u-v)} - (6\varepsilon_2 a_1^2 + 5c_1^2) e^{2(u-v)} - 2\varepsilon \varepsilon_2 a_1 c_1 e^{u-v} + 3a_1^2 + 2\varepsilon_2 c_1^2}{(\varepsilon_2 - e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{\varepsilon_2 a_1}{6} e^{6v} + \frac{\varepsilon_1 a_1}{4} e^{4v} - 2 - \frac{1}{2a_1^2} \frac{2\varepsilon a_1 c_1 e^{3(u-v)} - 2c_1^2 e^{2(u-v)} - 8\varepsilon \varepsilon_2 e^{u-v} + 3a_1^2 + 2\varepsilon_2 c_1^2}{(\varepsilon_2 - e^{2(u-v)})^2}$$

Nel caso (C) si vede facilmente che la superficie ammette  $\infty^2$  deformazioni proiettive in sè.

4. È inutile esaminare direttamente la soluzione ( $E'_3$ ) dell'equazione ( $E$ ) che nasce da ( $E_3$ ) ponendo per  $A$  e  $B$  una coppia di quantità complesse coniugate. È evidente che soltanto i casi  $(\alpha)_2$ ,  $(\beta)_1$ ,  $(\beta)_2$ ,  $(\beta)_3$  possono dare superficie reali. Ora le quantità  $d_1$ ,  $d_2$  devono essere reali, come si vede subito, sicchè nel caso  $(\alpha)_2$   $A$  deve essere puramente immaginario; ma allora  $A + B = 0$  e  $(\alpha)_2$  è un caso particolare di  $(\beta)_1$ . Non restano pertanto che i casi  $(\beta)_1$ ,  $(\beta)_2$  e  $(\beta)_3$ . Nel caso  $(\beta)_1$  si può supporre  $A = i$ ,  $a_2 = a_1$ ,  $b_2 = b_1 = -\lambda^2 a_1$  ( $a_1$  reale) e si ottiene:

$$\beta = -\frac{1}{\lambda} \frac{1}{\cos(u-v)}, \quad \gamma = \lambda \frac{1}{\cos(u-v)},$$

$$L = a_1 \sin 2u + \frac{1}{2} + h \lambda a_1^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{\cos^2(u-v)}$$

$$M = -\lambda^2 a_1 \sin 2v + \frac{1}{2} + h \lambda^3 a_1^2 - \frac{3}{2} \frac{1}{\cos^2(u-v)}$$

Nel caso  $(\beta)_2$  possiamo supporre  $A = i$ ,  $\mu = 1$ ,  $b_2 = a_1$ ,  $v = -\lambda i$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{\lambda}{\sin(u-v)}, \quad \gamma = -\frac{\lambda}{\sin(u-v)},$$

$$L = a_1 \sin 2u + d_1 - \frac{3\lambda^2}{2} \frac{1}{\sin^2(u-v)},$$

$$M = a_1 \sin 2v + d_1 - \frac{3\lambda^2}{2} \frac{1}{\sin^2(u-v)}$$

Il caso  $(\beta)_3$  non conduce più a nessuna superficie reale come si vede facilmente.

§ 78. — Verifiche per le specie  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ .

A) Specie  $B_1$

1. Vi sono due tipi distinti di superficie della specie  $B_1$  dipendenti ciascuno da due costanti arbitrarie.

Supponiamo dapprima  $a_1 b_1 \neq 0$  in ( $E_1$ ) e poniamo per brevità

$$(1) \quad z = a_1 b_1 (u-v) - a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad m = a_1 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_1 - a_1 b_1 c_2.$$

Le equazioni ( $E_3$ ) e le (8) del § 75 danno

$$(2) \quad \beta = e^{A(u-v)} \frac{c_1 z + m}{b_1 z}, \quad \gamma = e^{-A(u-v)} \frac{c_1 z - m}{a_1 z},$$

$$(3) \quad U = \frac{1}{2A} e^{2Au} \left( a_1 u + a_2 - \frac{a_1}{2A} \right) + d_1,$$

$$V = \frac{1}{2A} e^{2Av} \left( b_1 v + b_2 - \frac{b_1}{2A} \right) + d_2.$$

Se  $A = 0$ , le equazioni (3) devono sostituirsi con

$$(3)_{b_1} \quad U = \frac{a_1}{2} u^2 + a_2 u + d_1, \quad V = \frac{b_1}{2} v^2 + b_2 v + d_2.$$

Le equazioni (4) del § 75 danno

$$F_1 + F_2 = 3\beta\gamma = 3 \frac{c_1^2 z^2 - m^2}{a_1 b_1 z^2}, \quad F'_1 - F'_2 = \beta\gamma' - \gamma\beta'.$$

Ora dalle (2) si deduce

$$\beta\gamma' - \beta'\gamma = -\frac{2A c_1^2}{a_1 b_1} + \frac{2c_1 m}{z^2} + \frac{2A m^2}{a_1 b_1 z^2}$$

sicchè possiamo prendere

$$F_1 - F_2 = -\frac{2A c_1^2 z}{a_1^2 b_1^2} - \frac{2c_1 m}{a_1 b_1 z} - \frac{2A m^2}{a_1^2 b_1^2 z}$$

Se ne deduce:

$$F_1 = -\frac{A}{a_1^2 b_1^2} \left( c_1^2 z + \frac{m^2}{z} \right) + \frac{1}{2a_1 b_1} \left( 3c_1^2 - \frac{2c_1 m}{z} - \frac{3m^2}{z^2} \right), \quad (4)$$

$$F_2 = \frac{A}{a_1^2 b_1^2} \left( c_1^2 z + \frac{m^2}{z} \right) + \frac{1}{2a_1 b_1} \left( 3c_1^2 + \frac{2c_1 m}{z} - \frac{3m^2}{z^2} \right).$$

Ora dobbiamo sostituire i valori trovati nell'equazione (6) del § 75. Se  $A \neq 0$ , si ottiene dopo un calcolo un po' lungo

$$\begin{aligned} e^{A(u-v)} & \left[ -\frac{A^3}{b_1} \left( c_1 + \frac{m}{z} \right) - \frac{2A^2}{a_1^2 b_1^2} \left( c_1^2 z + c_1^2 m + \frac{c_1 m^2}{z} + \frac{m^3}{z^2} \right) + \right. \\ & + \frac{3A^2 a_1 m}{z^2} - \frac{2A}{a_1 b_1^2} \left( 2c_1^2 + \frac{2c_1^2 m}{z} - \frac{c_1 m^2}{z^2} - \frac{3m^3}{z^3} \right) - \frac{6A a_1^2 b_1 m}{z^3} + \\ & \left. + \frac{2m}{b_1} \left( \frac{2c_1^2}{z^2} - \frac{3m^2}{z^4} \right) + \frac{6a_1^3 b_1^2 m}{z^4} - 2d_2 \left( \frac{A c_1}{b_1} + \frac{A m}{b_1 z} - \frac{a_1 m}{z^2} \right) \right] = \\ (5) \quad & = e^{-A(u-v)} \left[ -\frac{A^3}{a_1} \left( c_1 - \frac{m}{z} \right) + \frac{2A^2}{a_1^2 b_1^2} \left( c_1^2 z - c_1^2 m + \frac{c_1 m^2}{z} - \frac{m^3}{z^2} \right) + \right. \\ & + \frac{3A^2 b_1 m}{z^2} + \frac{2A}{a_1^2 b_1} \left( -2c_1^2 + \frac{2c_1^2 m}{z} + \frac{c_1 m^2}{z^2} - \frac{3m^3}{z^3} \right) + \frac{6A a_1 b_1^2 m}{z^3} + \\ & \left. + \frac{2m}{a_1} \left( \frac{2c_1^2}{z^2} - \frac{3m^2}{z^4} \right) + \frac{6a_1^2 b_1^2 m}{z^4} - 2d_1 \left( \frac{A c_1}{a_1} - \frac{A m}{a_1 z} - \frac{b_1 m}{z^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Se invece  $A = 0$  si ottiene:

$$\begin{aligned} & 6m^3 \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} \right) \frac{1}{z^4} + 6a_1^2 b_1^2 (a_1 - b_1) m \frac{1}{z^4} - \\ (5)_{bis} \quad & - 4c_1^2 m \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} \right) \frac{1}{z^2} + 2m(a_1 d_2 - b_1 d_1) \frac{1}{z^2} + \\ & + \frac{(a_2^2 b_1^2 - a_1^2 b_2^2) m}{a_1 b_1} \frac{1}{z^2} - \frac{c_1 z}{a_1 b_1} = 0. \end{aligned}$$

2. Consideriamo dapprima il caso  $A \neq 0$ . L'equazione (5) ha la forma

$$e^{A(u-v)} P = e^{-A(u-v)} Q,$$

$P$  e  $Q$  essendo funzioni razionali di  $u-v$ . Deve essere quindi  $P = 0$  e  $Q = 0$ . Annullando i coefficienti delle diverse potenze di  $z$  nelle espressioni  $P$  e  $Q$  si ottiene senza difficoltà l'unica soluzione di (5) per cui  $\beta \gamma \neq 0$ :

$$(a) \quad c_1 = 0, \quad c_2^2 = a_1 b_1, \quad 2d_1 = 2d_2 = -A^2.$$

Consideriamo ora l'equazione (5)<sub>bis</sub>. Si vede subito che vi sono due modi di soddisfarla senza fare  $\beta \gamma = 0$ :

$$(\beta)_1 \quad A = 0, \quad c_1 = 0, \quad b_1 = a_1, \quad 2a(d_1 - d_2) = a_2^2 - b_2^2;$$

$$(\beta)_2 \quad A = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2^2 = a_1 b_1, \quad 2a_1 b_1 (a_1 d_2 - b_1 d_1) + a_2^2 b_1^2 - a_1^2 b_2^2 = 0.$$

Nel caso (a) si può supporre  $A = 1, a_2 = b_2 = 0$ . Si ottiene:

$$\beta = \sqrt{\frac{a_1}{b_1}} e^{u-v} \frac{1}{u-v}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} e^{v-u} \frac{1}{v-u},$$

$$L = \frac{a_1}{2} u e^{2u} - \frac{1}{2} - \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2},$$

$$M = \frac{b_1}{2} v e^{2v} - \frac{1}{2} + \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2},$$

I casi  $(\beta)_1$  e  $(\beta)_2$  conducono a superficie che ammettono  $\infty^2$  deformazioni proiettive in sè.

3. In ciò che precede abbiamo supposto  $a_1 b_1 \neq 0$ . Non può essere simultaneamente  $a_1 = b_1 = 0$ ; d'altra parte, il caso  $a_1 = 0, b_1 \neq 0$  si riduce al caso  $b_1 = 0$  scambiando  $u$  con  $v$ . Resta pertanto il caso  $b_1 = 0, a_1 \neq 0$ . Un calcolo che ometto prova che, se  $A \neq 0$ , non si ottiene niente di nuovo. Supponiamo dunque  $A = b_1 = 0$ . Supposto, com'è lecito,  $a_1 c_2 - 2a_2 c_1 = 0$ , le equazioni  $(E_4)$  danno

$$\beta = -\frac{c_1}{b_2} (u-v), \quad \gamma = \frac{2c_1}{a_1},$$

$$U = \frac{a_1}{2} u^2 + a_2 u + d_1, \quad V = b_2 v + d_2.$$

Dalle (4) del § 75 si deduce subito:

$$F_1 = -\frac{2c_1^2}{a_1 b_2} (u-v), \quad F_2 = -\frac{4c_1^2}{a_1 b_2} (u-v).$$

Sostituendo questi valori nella (6) del § 75 si deduce:

$$-c_1(u-v) - 2c_1 v - \frac{2c_1 d_2}{b_2} - \frac{12c_1^2}{a_1 b_2^2} (u-v) = 2c_1 u + \frac{2c_1 a_2}{a_1} - \frac{4c_1^2}{a_1^2 b_2}.$$

Confrontando i diversi coefficienti si trova:

$$4c_1^2 = -a_1 b_2^2, \quad d_2 = -\frac{(2a_2 + b_2)b_2}{2a_1}.$$

Si può supporre  $2c_1 = a_1, a_2 = 0$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{b_2}{2} (u-v), \quad \gamma = 1,$$

$$L = -\frac{b_2^2}{2} u^2 + b_2(u-v) + d_1, \quad M = b_2 u + \frac{1}{2}.$$

B) Specie  $B_5$

Vi sono quattro tipi distinti di superficie della specie  $B_5$  dipendenti rispettivamente da 4, 3, 3, 3 costanti arbitrarie.

Le equazioni  $(E_5)$  e le (8) del § 75 danno, posto  $c_1 = \frac{1}{k}$ :

$$(6) \quad \beta = \frac{1}{a_2 e^{-A(u-v)} + a_1 e^{-B(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{k}{a_1 e^{A(u-v)} + a_2 e^{B(u-v)}},$$

$$U = \frac{1}{k} \left[ \frac{a_1 b_1}{2A} e^{2Au} + \frac{a_2 b_2}{2B} e^{2Bv} + \frac{h}{A+B} e^{(A+B)u} \right] + d_1,$$

$$(7) \quad V = \frac{a_2 b_1}{2A} e^{2Av} + \frac{a_1 b_2}{2B} e^{2Bv} - \frac{h}{A+B} e^{(A+B)v} + d_2,$$

convengono di sostituire  $u$  e  $v$  rispettivamente a  $\frac{1}{2A} e^{2Au}$  ed a

$\frac{1}{2A} e^{2Av}$ , se  $A=0$ , e similmente se  $B=0$  o se  $A+B=0$ . Osserviamo

che non si restringe la generalità supponendo che  $a_1 \neq 0$ ; infatti, se  $a_1 = 0, a_2 \neq 0$ , basta scambiare  $A$  con  $B$  e non può essere simultaneamente  $a_1 = a_2 = 0$ . Supposto quindi  $a_1 \neq 0$  si deduce senza difficoltà dalle (5) del § 75:

$$2F_1 = \frac{k}{a_1 z + a_2} \left[ \frac{3z}{a_1 z + a_2} + \frac{1}{a_1} \frac{A+B}{A-B} \right],$$

$$(8) \quad 2F_2 = \frac{k}{a_1 z + a_2} \left[ \frac{3z}{a_1 z + a_2} - \frac{1}{a_1} \frac{A+B}{A-B} \right],$$

dove ho posto, come al § 77,

$$(9) \quad z = e^{(A-B)(u-v)}.$$

Sostituendo i valori trovati nella (6) del § 75 si trova con calcolo piuttosto lungo

$$(10) \quad \begin{aligned} & \eta + z^{\frac{A+B}{A-B}} \left\{ -a_1^3 B (B^2 + 2d_2) z^3 + \right. \\ & + a_1 \left[ -2(A+2B)a_1 a_2 d_2 + (A-2B)k + \left( \frac{A+B}{A-B} - 3 \right) Bk - \right. \\ & \quad \left. \left. - a_1 a_2 (A^3 - 6A^2 B + 12AB^2 - 4B^3) \right] z^2 + \right. \\ & + a_2 \left[ -2(2A+B)a_1 a_2 d_2 - (2A-B)k + \left( \frac{(A+B)^2}{A-B} - 3A \right) k + \right. \\ & \quad \left. + a_1 a_2 (4A^3 - 12A^2 B + 6AB^2 - B^3) \right] z + \\ & \left. + a_2^2 \left[ -2a_2 d_2 A + \frac{A}{a_1} \frac{A+B}{A-B} k - a_2 A^3 \right] \right\} = \\ & = k \left\{ -a_1^3 A (A^2 + 2d_1) z^3 + \right. \\ & + a_1 \left[ -2(2A+B)a_1 a_2 d_1 - (2A-B)k - \left( \frac{A+B}{A-B} + 3 \right) Ak + \right. \\ & \quad \left. + a_1 a_2 (4A^3 - 12A^2 B + 6AB^2 - B^3) \right] z^2 + \\ & + a_2 \left[ -2(A+2B)a_1 a_2 d_1 + (A-2B)k - \left( \frac{(A+B)^2}{A-B} + 3B \right) k - \right. \\ & \quad \left. - a_1 a_2 (A^3 - 6A^2 B + 12AB^2 - 4B^3) \right] z + \end{aligned}$$

$$+ a_2^2 \left[ -2a_1 d_1 B - \frac{B}{a_1} \frac{A+B}{A-B} k - a_2 B^3 \right] \left. \right\}.$$

In quest'equazione:

se  $AB(A+B) \neq 0$ ,  $\eta = 0$ ;

se  $A+B=0$ ,  $\eta = 2h(a_2 + a_1 z)^2 [A(u-v)(a_1 z - a_2) - (a_2 + a_1 z)]$ ;

se  $B=0$ ,  $\eta = b_2(a_2 + a_1 z)^2 [2Aa_1 a_2(u-v)z + a_1 z - a_2]$ ;

se  $A=0$ ,  $\eta = b_1 e^{2(u-v)}(a_2 + a_1 z)^2 [2Ba_1 a_2(u-v)z - a_1 z + a_2]$ .

Si vede facilmente che i casi  $A+B=0$ ,  $B=0$ ,  $A=0$  non danno niente di nuovo. A tale scopo osserviamo che, se  $h=0$ , oppure  $B=b_2=0$ , od infine  $A=b_1=0$ , le equazioni  $(E_6)$  sono soltanto un caso particolare di  $(E_3)$ . Ora se  $AB(A+B)=0$  il coefficiente di  $u-v$  nell'espressione  $\eta$  deve evidentemente svanire. Ora ciò dà, oltre le ipotesi  $A+B=h=0$ ,  $B=b_2=0$ ,  $A=b_1=0$  che possiamo omettere in virtù dell'osservazione ora fatta, soltanto  $B=a_2=0$  oppure  $A=a_2=0$ ; e si vede facilmente dalla (10) che allora sarebbe necessariamente  $\eta=0$ .

Possiamo quindi supporre  $AB(A+B) \neq 0$  sicchè  $\eta=0$ . L'equazione (10) possiede allora quattro soluzioni distinte. Rinviamo alla Memoria di Čech citata al § precedente, accontentiamoci qui d'indicare senza dimostrazione le quattro soluzioni che sono

$$(a) \quad k = a_1 a_2 (A-B)^2, \quad 2d_1 = -A^2, \quad 2d_2 = -B^2;$$

$$(b) \quad A = 3B, \quad k = -\frac{a_2^3}{a_1^3}, \quad 2d_1 = -\frac{3a_2^2}{a_1} - B^2, \quad 2d_2 = -B^2;$$

$$(\gamma)_1 \quad A = 2B, \quad k = \frac{2a_2^3}{a_1^3}, \quad 2d_1 = -\frac{6a_2^2}{a_1} - B^2, \quad 2d_2 = -B^2;$$

$$(\gamma)_2 \quad A = 2B, \quad a_2 = 0, \quad 2d_1 = -4B^2, \quad 2d_2 = -B^2.$$

(5) Restano da calcolare i valori di  $\beta, \gamma, L, M$ , semplificandoli mediante un'opportuna sostituzione della forma (2) del § 75. Nel

caso (α) possiamo supporre  $A = \alpha + 1$ ,  $B = \alpha - 1$  [ $\alpha(\alpha^2 - 1) \neq 0$ ],  $a_2 = \varepsilon_1 a_1$ ,  $h = 4\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{a_1} \frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{\varepsilon_1 + e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = 4a_1 \frac{e^{(\alpha+1)(v-u)}}{\varepsilon_1 + e^{2(v-u)}},$$

$$L = \frac{\varepsilon_1 b_1}{8a_1(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)u} + \frac{b_2}{8a_1(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)u} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2a_1^2 \alpha} e^{2\alpha u} - \frac{(\alpha+1)^2}{2} + \frac{6\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}{(\varepsilon_1 + e^{2(u-v)})^2} + \frac{2\varepsilon_1 \alpha}{\varepsilon_1 + e^{2(u-v)}}.$$

$$M = \frac{\varepsilon_1 a_1 b_1}{2(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)v} + \frac{a_1 b_2}{2(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)v} - \frac{2\varepsilon_2}{\alpha} e^{2\alpha v} - \frac{(\alpha-1)^2}{2} + \frac{6\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}{(\varepsilon_1 + e^{2(u-v)})^2} - \frac{2\varepsilon_1 \alpha}{\varepsilon_1 + e^{2(u-v)}}.$$

Nel caso (β) possiamo supporre  $B = 1$ ,  $a_2 = \varepsilon_1 a_1$ ,  $h = 4\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{a_1} \frac{e^{u-v}}{1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = -\frac{1}{a_1} \frac{e^{v-u}}{1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)}},$$

$$L = -\frac{\varepsilon_1 a_1 b_1}{6} e^{6u} - \frac{a_1 b_2}{2} e^{2u} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{4u} - 2 -$$

$$-\frac{3\varepsilon_1}{2a_1^2} \frac{e^{2(u-v)}}{(1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{1}{1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)}},$$

$$M = \frac{\varepsilon_1 a_1 b_1}{6} e^{6v} + \frac{a_1 b_2}{2} e^{2v} - \varepsilon_2 e^{4v} - \frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon_1}{2a_1^2} \frac{e^{2(u-v)}}{(1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} + \frac{1}{a_1^2} \frac{1}{1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)}}.$$

Nel caso (γ)<sub>1</sub> possiamo supporre  $B = 1$ ,  $a_2 = \varepsilon_1 a_1$ ,  $h = 3\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{a_1} \frac{e^{u-v}}{1 + \varepsilon_1 e^{u-v}}, \quad \gamma = \frac{2}{a_1} \frac{e^{v-u}}{1 + \varepsilon_1 e^{u-v}},$$

$$L = \frac{\varepsilon_1 a_1 b_1}{8} e^{4u} + \frac{a_1 b_2}{4} e^{2u} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} e^{2v} - \frac{3}{a_1^2} - \frac{1}{2} + \frac{3\varepsilon_1}{a_1^2} \frac{e^{u-v}}{(1 + \varepsilon_1 e^{u-v})^2} + \frac{3}{a_1^2} \frac{1}{1 + \varepsilon_1 e^{u-v}},$$

$$M = \frac{\varepsilon_1 a_1 b_1}{4} e^{4v} + \frac{a_1 b_2}{2} e^{2v} - \varepsilon_2 e^{3v} - \frac{1}{2} + \frac{3\varepsilon_1}{a_1^2} \frac{e^{u-v}}{(1 + \varepsilon_1 e^{u-v})^2} - \frac{3}{a_1^2} \frac{1}{1 + \varepsilon_1 e^{u-v}}.$$

Nel caso (γ)<sub>2</sub> possiamo supporre  $B = 1$ ,  $a_1 = \varepsilon_1$ ,  $h = 3\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ . Si ottiene:

$$\beta = \varepsilon_1 e^{u-v}, \quad \gamma = k \varepsilon_1 e^{2(v-u)},$$

$$L = \frac{\varepsilon_1 b_1}{4k} e^{4u} + \frac{\varepsilon_2}{k} e^{3u} - 2 + 3k e^{v-u},$$

$$M = \frac{\varepsilon_1 b_2}{2} e^{3v} - \varepsilon_2 e^{3v} - \frac{1}{2}.$$

Dovremmo cercare ancora le superficie corrispondenti alla soluzione ( $E'$ ) ossia le superficie reali che si potessero ottenere supponendo che  $A$  e  $B$  siano complesse coniugate. È evidente che ciò non può accadere che nel caso (α). Ma neanche qui non si ottiene niente di nuovo. Infatti,  $d_1$  e  $d_2$  dovendo essere reali,  $A$  e  $B$  dovrebbero essere puramente immaginarie, sicchè  $A+B=0$ . Noi invece abbiamo visto che il caso  $A+B=0$  non può dare nessuna superficie.

C) Specie  $B_3$ .

Le superficie della specie  $B_3$  formano un sol tipo dipendente da tre costanti arbitrarie.

Cominciamo coll'osservare che possiamo supporre  $a_1 b_1 \neq 0$

nelle equazioni ( $E_6$ ); infatti se  $a_1 = 0$  oppure  $b_1 = 0$  si ritrova un caso particolare di ( $E_6$ ). Le equazioni ( $E_6$ ) e le (8) del § 75 danno:

$$(11) \quad \beta = \frac{e^{A(u-v)}}{a_1(u-v) + a_2}, \quad \gamma = \frac{ce^{-A(u-v)}}{a_1(u-v) + a_2},$$

$$U = \frac{1}{2A} e^{2Au} \left[ a_1 b_1 u^2 + \left( a_1 b_2 + a_2 b_1 - \frac{a_1 b_1}{A} \right) u + \frac{a_1 b_1}{2A^2} - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2A} + \frac{a_2 b_2}{2} + h \right] + d_1,$$

$$(12) \quad V = -\frac{c}{2A} e^{2Av} \left[ a_1 b_1 v^2 + \left( a_1 b_2 - a_2 b_1 - \frac{a_1 b_1}{A} \right) v + \frac{a_1 b_1}{2A^2} - \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{2A} - \frac{a_2 b_2}{2} + h \right] + d_2.$$

Se  $A = 0$ , le (12) devono sostituirsi con

$$U = \frac{a_1 b_1}{3} u^3 + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2} u^2 + \left( \frac{a_2 b_2}{2} + h \right) u + d_1,$$

$$(12)_{bis} \quad V = -c \left[ \frac{a_1 b_1}{3} v^3 + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{2} v^2 + \left( -\frac{a_2 b_2}{2} + h \right) v \right] + d_2.$$

Dalle (11) e dalle (4) del § 75 si deduce facilmente:

$$(13) \quad F_1 = c \left[ \frac{A}{a_1} \frac{1}{z} + \frac{3}{2} \frac{1}{z^2} \right], \quad F_2 = c \left[ -\frac{A}{a_1} \frac{1}{z} + \frac{3}{2} \frac{1}{z^2} \right],$$

essendo

$$(14) \quad z = a_1(u-v) + a_2.$$

Sostituendo nella (6) del § 5 si ricava

$$\eta + e^{A(u-v)} \left[ \frac{6a_1(a_1^2 + c)}{z^4} - \frac{6A(a_1^2 + c)}{z^3} + \frac{2cA^2 + a_1^2(3A^2 + 2d_1)}{a_1 z^2} \right]$$

$$(15) \quad -\frac{A(A^2 + 2d_2)}{z} + e^{-A(u-v)} \left[ \frac{6a_1(a_1^2 + c)}{z^4} + \frac{6A(a_1^2 + c)}{z^3} + \frac{2cA^2 + a_1^2(3A^2 + 2d_1)}{a_1 z^2} + \frac{A(A^2 + 2d_1)}{z} \right] = 0,$$

dove

$$\eta = 0 \quad \text{se } A \neq 0,$$

$$\eta = \frac{cb_1}{a_1} \left( -\frac{1}{3}z + \frac{a_2^2}{z} - \frac{2}{3} \frac{a_2^3}{z^2} - \frac{2a_1 a_2 h}{b_1 z^2} \right) \quad \text{se } A = 0.$$

È facile vedere che l'ipotesi  $A = 0$  non dà nessuna soluzione nuova; infatti il coefficiente di  $z$  nel primo membro di (15) è allora  $b_1 c$ , che non può esser nullo. Se invece  $A \neq 0$  si ottiene subito da (15)

$$c = -a_1^2, \quad 2d_1 = -A^2, \quad 2d_2 = -A^2.$$

Si può supporre  $A = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $b_1 = b_2$  e si ottiene:

$$\beta = \frac{1}{a_1} \frac{e^{u-v}}{u-v}, \quad \gamma = a_1 \frac{e^{v-u}}{v-u},$$

$$L = \frac{1}{2} e^{2u} (a_1 b_1 u^2 + h) - \frac{1}{2} - \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2},$$

$$M = \frac{a_1^2}{2} e^{2v} (a_1 b_1 v^2 + h) - \frac{1}{2} + \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2}.$$

D) *Quadro delle quantità  $\beta, \gamma, L, M$ , relative alle superficie che ammettono un gruppo continuo ad un parametro di deformazioni proiettive in sé.*

Le trasformazioni del gruppo sono

$$\bar{u} = u + t, \quad \bar{v} = v$$

per le superficie della specie  $A$ , e

$$\bar{u} = u + t, \quad \bar{v} = v + t$$

per le altre specie. Le lettere  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  indicano  $\pm 1$ ; i casi  $\varepsilon = +1$  ed  $\varepsilon = -1$  sono distinti anche nel campo complesso; i casi  $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1$  sono distinti soltanto nel campo reale. Le altre lettere indicano costanti arbitrarie.

*Specie A.*

1°  $\beta = 1, \gamma = v, L = 2au, M = -u + av^2 + b.$

2°  $\beta = 1, \gamma = \sin Av, L = \frac{A^2}{2}u^2 + a, M = -Au \cos Av + b.$

3°  $\beta = 1, \gamma = \frac{1}{2}(e^{4v} + \varepsilon_1 e^{-4v}),$

$L = -\frac{A^2}{2}u^2 + a, M = -\frac{A}{2}u(e^{4v} - \varepsilon_1 e^{-4v}) + b.$

4°  $\beta = 1, \gamma = e^{\varepsilon_1 v},$

$L = -\frac{u^2}{2} + a, M = -\varepsilon_1 u e^{\varepsilon_1 v} + b.$

*Specie B<sub>1</sub>.*

5°  $\beta = e^x, \gamma = e^{-x} \frac{dF}{dx},$

$L = 2 \frac{dF}{dx} - F + a, M = \frac{dF}{dx} + F + e^{2v},$

dove  $x = u - v$  e  $F$  è soluzione dell'equazione differenziale del quarto ordine

$$\frac{d^4 F}{dx^4} - 3 \frac{d^3 F}{dx^3} + 3 \frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{dF}{dx} + e^{2x} \left( \frac{d^2 F}{dx^2} + 3 \frac{dF}{dx} + 2F + 1 \right) + 2 \left( \frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{dF}{dx} \right) \left( 2 \frac{dF}{dx} - F + a \right) + \frac{dF}{dx} \left( 2 \frac{d^2 F}{dx^2} - \frac{dF}{dx} \right) = 0.$$

6°  $\beta = 1, \gamma = F, L = 2F + a, M = F + bv,$

dove  $F$  è funzione di  $x = u - v$  ed è soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + 3F^2 + (2a + 1)F = bx.$$

*Specie B<sub>2</sub>.*

7°  $\beta = e^x \left( \sqrt{\frac{dF}{dx}} + a \right), \gamma = e^{-x} \left( \sqrt{\frac{dF}{dx}} - a \right),$

$L = e^{-2x} + b + \frac{3}{2} \frac{dF}{dx} + a \sqrt{\frac{dF}{dx}} - F + a^2 x,$

$M = e^{2x} + b + \frac{1}{2} \frac{dF}{dx} - a \sqrt{\frac{dF}{dx}} + F - a^2 x;$

anche qui  $x = u - v$  ed  $F$  è soluzione dell'equazione differenziale del quarto ordine

$$\begin{aligned} & (e^x + e^{-x}) \left[ \frac{1}{2} \frac{d^4 F}{dx^4} - \frac{3}{4} \left( \frac{dF}{dx} \right)^{-1} \frac{d^2 F}{dx^2} \frac{d^3 F}{dx^3} + \right. \\ & + \frac{3}{8} \left( \frac{dF}{dx} \right)^{-2} \left( \frac{d^2 F}{dx^2} \right)^3 + 3 \frac{dF}{dx} \frac{d^2 F}{dx^2} + 4 \left( \frac{dF}{dx} \right)^2 + \\ & + 2a \left( \frac{dF}{dx} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{2} \frac{d^2 F}{dx^2} + 2(F - a^2 x) \frac{dF}{dx} + \\ & \left. + a(1 - a^2) \left( \frac{dF}{dx} \right)^{\frac{1}{2}} + b \frac{d^2 F}{dx^2} + 2ab \left( \frac{dF}{dx} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \\ & + (e^x - e^{-x}) \left[ \frac{3}{2} \frac{d^3 F}{dx^3} - \frac{3}{4} \left( \frac{dF}{dx} \right)^{-1} \left( \frac{d^2 F}{dx^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( F - a^2 x + \frac{3}{2} \right) \frac{d^2 F}{dx^2} + (1 - 3a^2 + 2b) \frac{dF}{dx} + \right. \end{aligned}$$

$$+ 2aF \left( \frac{dF}{dx} \right)^{\frac{1}{2}} - 2a^2 x \left( \frac{dF}{dx} \right)^{\frac{1}{2}} \Big| = 0.$$

8°  $\beta = (1-a)F + b, \quad \gamma = aF,$

$$L = -au - \frac{b^2}{2} + \frac{3}{2} a (1-a) F^2 + 2abF,$$

$$M = v + \frac{3}{2} a (1-a) F^2 + abF;$$

$F$  è funzione di  $x = u - v$  ed è soluzione dell'equazione differenziale del terzo ordine

$$\frac{d^3 F}{dx^3} + 6(1-a)F^2 + 6abF \frac{dF}{dx} - 2(1-a)x \frac{dF}{dx} - 2(1-a)F - b = 0.$$

9°  $\beta = -\frac{a}{u-v} + b, \quad \gamma = \frac{a}{u-v} + b,$

$$L = u - \frac{3}{2} \frac{a^2}{(u-v)^2} + \frac{ab}{u-v} + \frac{1}{2} b^2,$$

$$M = v - \frac{3}{2} \frac{a^2}{(u-v)^2} - \frac{ab}{u-v} + \frac{1}{2} b^2.$$

Specie  $B_3$ .

10°  $\beta = 4a \frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{1 - \varepsilon_2 e^4(u-v)}, \quad \gamma = \frac{4}{a} \frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{1 - \varepsilon_2 e^4(u-v)},$

$$L = \frac{ab}{2(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)u} + \frac{\varepsilon_1 ab}{2(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)u} - \frac{(\alpha+1)^2}{2} + \frac{4[-\varepsilon_2(\alpha+5)e^{4(u-v)} + \alpha - 1]}{(1 - \varepsilon_2 e^4(u-v))^2},$$

$$M = \frac{b}{2a(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)v} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 b}{2a(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)v} - \frac{(\alpha-3)^2}{2} + \frac{4[\varepsilon_2(\alpha-7)e^{4(u-v)} - \alpha + 1]}{(1 - \varepsilon_2 e^4(u-v))^2}.$$

11°  $\beta = 2a \frac{e^{(\alpha+1)(u-v)} - \varepsilon e^{(\alpha+3)(u-v)}}{1 - e^4(u-v)},$

$$\gamma = -\frac{2}{a} \frac{e^{-(\alpha-3)(u-v)} - \varepsilon e^{-(\alpha-1)(u-v)}}{1 - e^4(u-v)},$$

$$L = \frac{ab}{2(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)u} + \frac{\varepsilon_1 ab}{2(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)u} - \frac{(\alpha+1)^2}{2} + \frac{2[\varepsilon(\alpha+3)e^{4(u-v)} - (\alpha+6)e^{4(u-v)} - \varepsilon(\alpha-3)e^{2(u-v)} + 1]}{(1 - e^4(u-v))^2},$$

$$M = \frac{b}{2a(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)v} + \frac{\varepsilon_1 b}{2a(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)v} - \frac{(\alpha-1)^2}{2} + \frac{2[-\varepsilon(\alpha-3)e^{4(u-v)} + (\alpha-6)e^{4(u-v)} + \varepsilon(\alpha-3)e^{2(u-v)} - 1]}{(1 - e^4(u-v))^2}.$$

12°  $\beta = 2a \frac{e^{u-v}}{1 + \varepsilon e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{2\varepsilon}{a} \frac{e^{u-v}}{1 + \varepsilon e^{2(u-v)}},$

$$L = \frac{ab}{2} (e^{2u} - \varepsilon_1 e^{-2u}) - \frac{1}{2} + \varepsilon \varepsilon_1 ac + \frac{6\varepsilon e^{2(u-v)}}{(1 + \varepsilon e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = \frac{a}{2b} (e^{2v} - \varepsilon_1 e^{-2v}) - \frac{1}{2} - \varepsilon_1 \frac{c}{a} + \frac{6\varepsilon e^{2(u-v)}}{(1 + \varepsilon e^{2(u-v)})^2}.$$

13°  $\beta = \frac{a}{\varepsilon_1 e^{v-u} - e^{u-v}}, \quad \gamma = \frac{a}{e^{u-v} - \varepsilon_1 e^{v-u}},$

$$L = b(e^{2u} - \varepsilon_2 e^{-2u}) + c - \frac{3a^2}{2} \frac{1}{(e^{u-v} - \varepsilon_1 e^{v-u})^2},$$

$$M = \varepsilon_1 b(e^{2v} - \varepsilon_2 e^{-2v}) + c - \frac{3a^2}{2} \frac{1}{(e^{u-v} - \varepsilon_1 e^{v-u})^2}.$$

14°

$$\beta = \frac{4\varepsilon_1}{a+b} \frac{be^{v-u} - ae^{u-v}}{e^{2(v-u)} - e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{4\varepsilon_1}{a+b} \frac{ae^{v-u} - be^{u-v}}{e^{2(v-u)} - e^{2(u-v)}},$$

$$L = \varepsilon_2 a e^{2u} - b e^{-2u} - \frac{1}{2} - \frac{4a(a-b)}{(a+b)^2} +$$

$$+ \frac{4}{(a+b)^2} \frac{[6abe^6(u-v) - (7a^2 + 5b^2)e^4(u-v) + 6abe^2(u-v) + a^2 - b^2]}{(1 - e^4(u-v))^2},$$

$$M = \varepsilon_2 a e^{2v} - b e^{-2v} - \frac{1}{2} + \frac{4b(a-b)}{(a+b)^2} +$$

$$+ \frac{4}{(a+b)^2} \frac{[6abe^6(u-v) - (5a^2 + 7b^2)e^4(u-v) + 6abe^2(u-v) - a^2 + b^2]}{(1 - e^4(u-v))^2},$$

15°

$$\beta = \varepsilon_1 a \frac{e^{2(u-v)}}{1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = -a \frac{e^{u-v}}{1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)}},$$

$$L = b e^{6u} + \frac{\varepsilon_1}{2a} e^{2u} - \frac{1}{2} - \varepsilon_1 a^2 - \frac{a^2}{2} \frac{5e^{2(u-v)} - 2\varepsilon_1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2},$$

$$M = \varepsilon_1 b e^{6v} + \frac{1}{2a} e^{2v} - \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \frac{e^{2(u-v)} + 2\varepsilon_1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2}.$$

16°

$$\beta = 2e^{2(u-v)} \left( \frac{\varepsilon_1}{1 + e^{2(u-v)}} + a \frac{1}{1 - e^{2(u-v)}} \right),$$

$$\gamma = 2e^{v-u} \left( \frac{\varepsilon_1}{1 + e^{2(u-v)}} - a \frac{1}{1 - e^{2(u-v)}} \right),$$

$$L = b(e^{6u} + 3\varepsilon_2 e^{2u}) - \frac{1}{2} - 4(1 - \varepsilon_1 a + a^2) +$$

$$+ 2 \frac{5(1-a^2)e^{6(u-v)} - 2(4 - \varepsilon_1 a + 4a^2)e^{4(u-v)} + (1-a^2)e^{2(u-v)} + 2(1 - \varepsilon_1 a + a^2)}{(1 - e^4(u-v))^2},$$

$$M = b(e^{6v} + 3\varepsilon_2 e^{2v}) - \frac{1}{2} +$$

$$+ 2 \frac{(1-a^2)e^{6(u-v)} - 2(2 + \varepsilon_1 a + 2a^2)e^{4(u-v)} + 5(1-a^2)e^{2(u-v)} - 2(1 - \varepsilon_1 a + a^2)}{(1 - e^4(u-v))^2}$$

17°

$$\beta = \frac{a}{e^{2(v-u)} - \varepsilon_1}, \quad \gamma = \frac{a}{e^{2(u-v)} - \varepsilon_1},$$

$$L = b(e^{4u} + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{2u}) + c - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \frac{4\varepsilon_1 e^{2(u-v)} - 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2},$$

$$M = \varepsilon_2 b(\varepsilon_1 e^{4v} + 2e^{2v}) + c + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \frac{2\varepsilon_1 e^{2(u-v)} + 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_1)^2}.$$

18°

$$\beta = \frac{2a}{e^{2(v-u)} - \varepsilon_2}, \quad \gamma = \frac{2}{a} \frac{1}{e^{2(u-v)} - \varepsilon_2},$$

$$L = \frac{\varepsilon_1 a}{4} e^{4u} + \varepsilon_2 a b e^{2u} + c - 2 \frac{4\varepsilon_2 e^{2(u-v)} - 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_2)^2},$$

$$M = \frac{\varepsilon_1}{4a} e^{4v} + \frac{b}{a} e^{2v} + \frac{c+2}{a^2} - 2 \frac{2\varepsilon_2 e^{2(u-v)} + 1}{(e^{2(u-v)} - \varepsilon_2)^2}.$$

19°

$$\beta = \frac{e^{2(u-v)}(a + b e^{u-v})}{1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{e^{2(v-u)}(a + \varepsilon_1 b e^{2(v-u)})}{1 - \varepsilon_1 e^{2(v-u)}},$$

$$L = c(e^{4u} + 2\varepsilon_2 e^{2u}) - \frac{a^2}{2} - \varepsilon_1 b^2 - \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{6\varepsilon_1 a b e^{2(u-v)} + (4\varepsilon_1 a^2 + 5b^2)e^{2(u-v)} - a^2 - 2\varepsilon_1 b^2}{(1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = c(e^{4v} + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{2v}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{(2\varepsilon_1 a^2 + b^2) e^{2(u-v)} + 6ab e^{u-v} + a^2 + 2\varepsilon_1 b^2}{(1 - \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2}.$$

20°

$$\beta = \varepsilon_2 a \frac{e^{3(u-v)}}{1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = a \frac{e^{3(v-u)}}{1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)}},$$

$$L = b(2e^{6u} + 3\varepsilon_1 e^{4u}) - \frac{1}{2} - \varepsilon_2 a^2 - \frac{a^2}{2} \frac{5e^{2(u-v)} - \varepsilon_2}{(1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = b(2\varepsilon_2 e^{6v} + 3\varepsilon_1 e^{4v}) - \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} \frac{e^{2(u-v)} + 2\varepsilon_2}{(1 - \varepsilon_2 e^{2(u-v)})^2}.$$

21°

$$\beta = \frac{e^{3(u-v)}(a - \varepsilon e^{u-v})}{\varepsilon_2 - e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{e^{3(v-u)}(a - \varepsilon \varepsilon_2 e^{v-u})}{1 - \varepsilon_2 e^{2(v-u)}},$$

$$L = b(2e^{6u} + 3\varepsilon_1 e^{4u}) - \frac{7}{2} - \varepsilon_2 a^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{8\varepsilon \varepsilon e^{3(u-v)} - (6\varepsilon_2 + 5a^2) e^{2(u-v)} - 2\varepsilon \varepsilon_2 a e^{u-v} + 3 + 2\varepsilon_2 a^2}{(\varepsilon_2 - e^{2(u-v)})^2},$$

$$M = b(2\varepsilon_2 e^{6v} + 3\varepsilon_1 e^{4v}) - 2 -$$

$$\frac{1}{2} \frac{2\varepsilon a e^{3(u-v)} - 2a^2 e^{2(u-v)} - 8\varepsilon \varepsilon_2 e^{u-v} + 3 + 2\varepsilon_2 a^2}{(\varepsilon_2 - e^{2(u-v)})^2}.$$

22°

$$\beta = a \frac{1}{\cos(u-v)}, \quad \gamma = -\frac{1}{a} \frac{1}{\cos(u-v)},$$

$$L = ab \sin 2u + \frac{1}{2} + ac - \frac{3}{2} \frac{1}{\cos^2(u-v)},$$

$$M = -\frac{b}{a} \sin 2v + \frac{1}{2} + \frac{c}{a} - \frac{3}{2} \frac{1}{\cos^2(u-v)}.$$

23°

$$\beta = \frac{a}{\sin(u-v)}, \quad \gamma = -\frac{a}{\sin(u-v)},$$

$$L = b \sin 2u + c - \frac{3a^2}{2} \frac{1}{\sin^2(u-v)},$$

$$M = b \sin 2v + c - \frac{3a^2}{2} \frac{1}{\sin^2(u-v)}.$$

*Specie B<sub>4</sub>*

24°

$$\beta = \frac{a}{u-v} e^{u-v}, \quad \gamma = \frac{1}{a(v-u)} e^{v-u},$$

$$L = abue^{2u} - \frac{1}{2} - \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2},$$

$$M = \frac{b}{a} v e^{2v} - \frac{1}{2} + \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2}.$$

25°

$$\beta = a(u-v), \quad \gamma = 1,$$

$$L = -2a^2 u^2 + a(u-v) + b, \quad M = 2au + \frac{1}{2}.$$

*Specie B<sub>5</sub>*

26°

$$\beta = \frac{1}{a} \frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{\varepsilon_1 + e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = 4a \frac{e^{(\alpha+1)(v-u)}}{\varepsilon_1 + e^{2(v-u)}},$$

$$L = \frac{b}{a(\alpha+1)} e^{2(\alpha+1)u} + \frac{c}{a(\alpha-1)} e^{2(\alpha-1)u} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2a^2 \alpha} e^{2\alpha u} -$$

$$- \frac{(\alpha+1)^2}{2} + \frac{6\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}{(\varepsilon_1 + e^{2(u-v)})^2} + \frac{2\varepsilon_1 \alpha}{\varepsilon_1 + e^{2(u-v)}},$$

$$M = \frac{4ab}{\alpha+1} e^{2(\alpha+1)v} + \frac{4ac}{\alpha-1} e^{2(\alpha-1)v} - \frac{2\varepsilon_2}{\alpha} e^{2\alpha v} -$$

$$- \frac{(\alpha-1)^2}{2} + \frac{6\varepsilon_1 e^{2(u-v)}}{(\varepsilon_1 + e^{2(u-v)})^2} - \frac{2\varepsilon_1 \alpha}{\varepsilon_1 + e^{2(u-v)}}.$$

27°

$$\beta = a \frac{e^{u-v}}{1 + \varepsilon_1 e^{2(v-u)}}, \quad \gamma = -a \frac{e^{v-u}}{1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)}},$$

$$L = be^{4u} + ce^{2u} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 e^{4u} - 2 - \frac{3\varepsilon_1 a^2}{2} \frac{e^{2(u-v)}}{(1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} -$$

$$- a^2 \frac{1}{1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)}},$$

$$M = -be^{4v} - ce^{2v} - \varepsilon_2 e^{4v} - \frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon_1 a^2}{2} \frac{e^{2(u-v)}}{(1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} +$$

$$+ a^2 \frac{1}{1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)}}.$$

28°

$$\beta = a \frac{e^{u-v}}{1 + \varepsilon_1 e^{v-u}}, \quad \gamma = 2a \frac{e^{v-u}}{1 + \varepsilon_1 e^{u-v}},$$

$$L = be^{4u} + ce^{2u} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2} e^{3u} - 3a^2 - \frac{1}{2} + 3\varepsilon_1 a^2 \frac{e^{u-v}}{(1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} +$$

$$+ \frac{3a^2}{1 + \varepsilon_1 e^{u-v}},$$

$$M = 2(be^{4v} + ce^{2v}) - \varepsilon_2 e^{3v} - \frac{1}{2} + 3\varepsilon_1 a^2 \frac{e^{u-v}}{(1 + \varepsilon_1 e^{2(u-v)})^2} -$$

$$- \frac{3a^2}{1 + \varepsilon_1 e^{u-v}}.$$

29°

$$\beta = \varepsilon_1 e^{u-v}, \quad \gamma = ae^{2(v-u)},$$

$$L = be^{4u} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{a} e^{3u} - 2 + 3\varepsilon_1 ae^{v-u},$$

$$M = ce^{4v} - \varepsilon_2 e^{3v} - \frac{1}{2}.$$

Specie B<sub>6</sub>

30°

$$\beta = \frac{e^{u-v}}{u-v}, \quad \gamma = a \frac{e^{v-u}}{v-u},$$

$$L = (bu^2 + c)e^{2u} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2} - \frac{1}{u-v},$$

$$M = a^2 (bv^2 + c)e^{2v} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{(u-v)^2} + \frac{1}{u-v}.$$

QUADRICHE DI MOUTARD E CORRISPONDENZE  $\Sigma$  (C).

§ 79. — Trasformazione delle equazioni fondamentali.

In questo Capitolo riprenderemo le ricerche geometriche iniziate al Cap. III relative all'intorno d'un punto; in particolare dimostreremo un teorema di Moutard relativo alle coniche osculatrici delle sezioni piane. Oltre diversi risultati nuovi dimostreremo del resto anche qualche fatto già stabilito al ricordato Cap. III col l'uso di coordinate particolari (asintotiche), dandone, a base delle formole dedotte al Cap. VI, l'espressione valida in coordinate curvilinee qualunque. Cominciamo con una *trasformazione delle equazioni fondamentali* (Cap. II § 14 A)

$$x_{r_i} = \Sigma a'_{r_i} x_i + a_{r_i} X + p_{r_i} x,$$

$$\xi_{r_i} = -\Sigma a'_{r_i} \xi_i + a_{r_i} \Xi + \pi_{r_i} \xi \quad (*)$$

e precisamente dimostriamo che esse *equivalgono alle*

$$d^2 x = \frac{1}{2} \frac{dF_2 + F_3}{F_2} dx + \varepsilon \frac{\Sigma \partial_{r_i} du_r \delta^2 u_i - F'_3}{F_2} Dx + F_2 X + Px,$$

(\*) Supporremo al solito che il fattore delle coordinate  $x$  sia scelto in modo *qualunque*. Si avvertirà esplicitamente quando si vorranno usare coordinate e forme *normali*.

(1)

$$d^2 \xi = \frac{1}{2} \frac{dF_2 - F_3}{F_2} d\xi + \varepsilon \frac{\Sigma \partial_{r_i} du_r \delta^2 u_i + F'_2}{F_2} D\xi + F_2 \Xi + \Pi \xi,$$

dove, si ricordi

$$P = \Sigma p_{r_i} du_r du_i, \quad \Pi = \Sigma \pi_{r_i} du_r du_i,$$

$\delta^2 u_i$  sono i differenziali secondi contravarianti (Cap. II § 9 A),  $Du_i$  sono i differenziali coniugati (Cap. VI § 56),

$$Dx = x_1 Du + x_2 Dv, \quad D\xi = \xi_1 Du + \xi_2 Dv$$

e

$$F'_2 = \Sigma a_{r_i} du_r du_i Du_i \quad (\text{Cap. VI § 57}).$$

Infatti è evidente per la definizione stessa dei differenziali secondi controvarianti che le equazioni ricordate possono mettersi sotto la forma

$$d^2 x = \Sigma x_i \delta^2 u_i + \Sigma a'_{r_i} x_i du_r du_i + F_2 X + Px,$$

$$d^2 \xi = \Sigma \xi_i \delta^2 u_i - \Sigma a'_{r_i} \xi_i du_r du_i + F_2 \Xi + \Pi \xi;$$

sicchè per provare le (1) occorre soltanto verificare le identità

$$(2) \quad \Sigma x_i \delta^2 u_i = \frac{1}{2} \frac{dF_2}{F_2} dx + \frac{\varepsilon \Sigma \partial_{r_i} du_r \delta^2 u_i}{F_2} Dx,$$

$$(2)_{bi} \quad \Sigma \xi_i \delta^2 u_i = \frac{1}{2} \frac{dF_2}{F_2} d\xi + \frac{\varepsilon \Sigma \partial_{r_i} du_r \delta^2 u_i}{F_2} D\xi,$$

$$(3) \quad \Sigma a'_{r_i} x_i du_r du_i = \frac{F_3}{F_2} dx - \varepsilon \frac{F'_2}{F_2} Dx,$$

$$(3)_{bi} \quad \Sigma a'_{r_i} \xi_i du_r du_i = + \frac{F_3}{F_2} d\xi - \varepsilon \frac{F'_2}{F_2} D\xi.$$

E ci basta dimostrare le (2) e (3), le (2)<sub>bis</sub> e (3)<sub>bis</sub> dimostrandosi in modo perfettamente simile.

Supposto  $F_2 > 0$  (\*) i punti  $dx$  e  $Dx$  sono linearmente indipendenti, essendo (Cap. VI, § 56, (5)<sub>bis</sub>)

$$duDv - dvDu = -\frac{\epsilon}{\sqrt{|A|}} F_2 > 0 ;$$

e quindi i punti  $x_1, x_2$  e dunque anche i primi membri delle (2) e (3) ne sono combinazioni lineari, cosicchè possiamo porre

$$-\Sigma x_i \delta^2 u_i = \lambda dx + \lambda' Dx , \quad (\alpha)$$

$$\Sigma a_{rs}^i x_i du_r du_s = \mu dx + \mu' Dx ,$$

dove  $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$  sono incognite da determinarsi. A tale fine moltiplicheremo le (α) per  $d\xi$  oppure  $D\xi$ , osservando che

$$Sx_i d\xi = -a_{i1} du - a_{i2} dv ,$$

$$Sx_i D\xi = -a_{i1} Du - a_{i2} Dv ,$$

$$Sdx d\xi = -F_2 , \quad SDx D\xi = -\Sigma a_{ik} Du_i Du_k = \epsilon F_2 \quad (\text{Cap. VI § 56, (5)}) ,$$

$$SDx d\xi = -\Sigma a_{ik} du_i Du_k = 0 .$$

Troviamo così :

$$-\Sigma a_{ik} du_k \delta^2 u_i = -\lambda F_2 , \quad -\Sigma a_{ik} Du_k \delta^2 u_i = \epsilon \lambda' F_2 ,$$

$$-\Sigma a_{rs}^i a_{ik} du_r du_s du_i = -\Sigma a_{rsk} du_r du_s du_k = -F_3 = -\mu F_2 ,$$

$$-\Sigma a_{rsi} Du_i du_r du_s = -F'_3 = \epsilon \mu' F_2 .$$

(\*) Se  $F_2 = 0$  le formole da dimostrarsi perdono ogni significato. Esse si possono in tal caso sostituire con altre formole analoghe. Cfr. più avanti il § 84.

Per dimostrare le (2) e (3), occorre vedere ancora che

$$\Sigma a_{ik} du_k \delta^2 u_i = \frac{1}{2} dF_2 ,$$

$$\Sigma a_{ik} Du_k \delta^2 u_i = -\Sigma \delta_{rs} du_r \delta^2 u_s .$$

Ora la prima di queste due identità è già scritta al Cap. II § 9 ; per dimostrare la seconda basta scriverla nella forma :

$$\delta^2 u (a_{11} Du + a_{12} Dv) + \delta^2 v (a_{12} Du + a_{22} Dv) = -\sqrt{|A|} (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) ,$$

e osservare (§ 56 (3)<sub>quater</sub>) che

$$du = -\frac{1}{\sqrt{|A|}} (a_{12} Du + a_{22} Dv) , \quad dv = \frac{1}{\sqrt{|A|}} (a_{11} Du + a_{12} Dv) .$$

Le formole (1) sono quindi dimostrate.

### § 80. — Il teorema di Moutard.

#### A) Un lemma.

*Fissato un punto O di una superficie non sviluppabile S e in O una tangente non asintotica t ad S, il luogo delle coniche osculatrici (\*) in O delle sezioni di S mediante tutti i piani che passano per t è una quadrica non cono (\*\*) che diremo la quadrica di Moutard appartenente alla tangente t.*

Ricordiamo dapprima il teorema (Cap. I § 8): Indicando con  $x$  le tre coordinate omogenee dei punti di una curva piana C

(\*) a contatto cinquepunto.

(\*\*) Se S fosse sviluppabile, la quadrica di Moutard sarebbe un cono.

e con  $\xi'$  le tre coordinate omogenee delle rette tangenti di essa, e scelti i fattori arbitrari delle  $x$  e  $\xi'$  in modo che sia identicamente

$$(1) \quad S(dx d^2 \xi' - d^2 x d\xi') = 0,$$

la polare del punto

$$r_0 x + r_1 dx + r_2 d^2 x$$

rispetto alla conica osculatrice a  $C$  in  $x$  è

$$r_0 \xi' + r_1 d\xi' + r_2 d^2 \xi'.$$

Per il nostro scopo abbiamo bisogno di generalizzare questa proposizione alle curve piane nello spazio. La modificazione dell'enunciato è evidente: *Se con  $x$  indichiamo le quattro coordinate del punto mobile sulla curva piana  $C$ , e con  $\xi'$  le quattro coordinate di un piano scelto ad arbitrio (\*) fra i piani tangenti a  $C$  in  $x$ , il piano*

$$r_0 \xi' + r_1 d\xi' + r_2 d^2 \xi'$$

contiene la polare del punto

$$r_0 x + r_1 dx + r_2 d^2 x$$

rispetto alla conica osculatrice a  $C$  in  $x$  semprechè sia soddisfatta lungo  $C$  la (1). Infatti, se il piano di  $C$  è un piano del tetraedro di riferimento, il teorema si riduce subito al precedente; d'altra parte l'enunciato è evidentemente indipendente dalla posizione del tetraedro di riferimento.

**B) Dimostrazione del teorema di Moutard.**

La proposizione ora enunciata, insieme colle formole (1) del § 79, permettono non soltanto di dimostrare il teorema di Moutard, ma anche di scrivere l'equazione della quadrica di Moutard in

(\*) purchè diverso dal piano osculatore in  $x$  a  $C$ .

coordinate curvilinee qualunque. Precisamente dimostreremo che: *Se i differenziali  $du_i$  si riferiscono allo spostamento infinitesimo lungo la tangente  $t$ , il piano polare del punto*

$$y = \rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 D^2 x + \rho_3 X$$

rispetto alla quadrica di Moutard appartenente a  $t$  è il piano

$$\eta = \sigma_0 \xi + \sigma_1 d\xi + \sigma_2 D^2 \xi + \sigma_3 \Xi$$

dove

$$\sigma_0 = \rho_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} \rho_1 + 2 \frac{F_3'}{F_2} \rho_2 +$$

$$+ \left( \frac{2}{3} \frac{\Sigma a_{rsii} du_r du_s du_t du_i}{F_2^2} - \frac{2}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} + 2\epsilon \frac{F_3'^2}{F_2^2} + \frac{\Pi - P}{F_2} \right) \rho_3,$$

(2)

$$\sigma_1 = \rho_1 - \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} \rho_3, \quad \sigma_2 = \rho_2 + 2\epsilon \frac{F_3'}{F_2} \rho_3, \quad \sigma_3 = \rho_3,$$

e inversamente

$$\rho_0 = \sigma_0 - \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} \sigma_1 - 2 \frac{F_3'}{F_2} \sigma_2 +$$

$$+ \left( -\frac{2}{3} \frac{\Sigma a_{rsii} du_r du_s du_t du_i}{F_2^2} - \frac{2}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} + 2\epsilon \frac{F_3'^2}{F_2^2} + \frac{P - \Pi}{F_2} \right) \sigma_3,$$

(2)<sub>bis</sub>

$$\rho_1 = \sigma_1 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} \sigma_3, \quad \rho_2 = \sigma_2 - 2\epsilon \frac{F_3'}{F_2} \sigma_3, \quad \rho_3 = \sigma_3.$$

Prima di passare alla dimostrazione delle (2) (\*) osserviamo che,

(\*) le (2)<sub>bis</sub> sono conseguenza immediata delle (2).

se escludiamo il caso  $J = 0$  delle rigate, la prima riga delle (2) e (2)<sub>bis</sub> può scriversi più semplicemente (\*)

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \rho_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} \rho_1 + 2 \frac{F'_3}{F_2} \rho_2 + \\ &+ \left( \frac{1}{3} \frac{dJ}{J} \frac{F_3}{F_2} - \frac{2\epsilon}{3} \frac{\Sigma \phi_i Du_i \cdot F'_3}{F_2^2} - \frac{16}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} + J + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Sigma \left( \frac{1}{2} \frac{J^r}{J} + \phi^r \right) a_{rri} du_i du_i}{F_2} \right) \rho_3, \\ (2)_{\text{ter}} \quad \rho_0 &= \sigma_0 - \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} \sigma_1 - 2 \frac{F'_3}{F_2} \sigma_2 + \\ &+ \left( -\frac{1}{2} \frac{dJ}{J} \frac{F_3}{F_2} + \frac{2\epsilon}{3} \frac{\Sigma \phi_i Du_i \cdot F'_3}{F_2^2} - \frac{16}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} + J - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Sigma \left( \frac{1}{2} \frac{J^r}{J} + \phi^r \right) a_{rri} du_i du_i}{F_2} \right) \sigma_3. \end{aligned}$$

Inoltre segue subito dal teorema che dimostreremo che il punto

$$\rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X$$

sta sulla quadrica di Moutard se

$$2\rho_0 \rho_3 - F_2 (\rho_1^2 - \epsilon \rho_2^2) + \frac{4}{3} \frac{F_3}{F_2} \rho_1 \rho_3 + 4 \frac{F'_3}{F_2} \rho_2 \rho_3 +$$

(\*) Basta ricordare dal Cap. VI le formole § 57 (4), § 58 (1) e (3)<sub>ter</sub>.

2<sub>quater</sub>

$$\begin{aligned} &+ \left( \frac{2}{3} \frac{\Sigma a_{rri} du_r du_r du_i du_i}{F_2^2} - \frac{2}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} + 2\epsilon \frac{F'_3}{F_2^2} + \frac{\Pi - P}{F_2} + \right. \\ &\quad \left. + SX\Xi \right) \rho_3^2 = 0 \quad (*). \end{aligned}$$

C) Dimostrazione.

Veniamo alla dimostrazione del teorema di Moutard. Nell'applicare il lemma del § 80 A al caso di una curva piana  $C$  tracciata sulla superficie  $S$  possiamo scegliere per il piano  $\xi'$  il piano tangente a  $S$ , prendere cioè  $\xi'$  proporzionale a  $\xi$ . L'identità (Cap. II § 13 B)

$$S [dxd^2(\rho\xi) - d^2xd(\rho\xi)] = 2\rho F_3 - 3d\rho F_2$$

dimostra subito che la (1) è soddisfatta ponendo

$$\xi' = e^{\frac{2}{3} \int \frac{F_3}{F_2}} \cdot \xi.$$

Il lemma ci dice pertanto che la polare del punto

$$y = r_0 x + r_1 dx + r_2 d^2 x$$

(\*) Se  $J \neq 0$ , ciò può scriversi

$$\begin{aligned} &2\rho_0 \rho_3 - F_2 (\rho_1^2 - \epsilon \rho_2^2) + \frac{4}{3} \frac{F_3}{F_2} \rho_1 \rho_3 + 4 \frac{F'_3}{F_2} \rho_2 \rho_3 + \\ &+ \left( \frac{1}{3} \frac{dJ}{J} \frac{F_3}{F_2} - \frac{2\epsilon}{3} \frac{\Sigma \phi_i Du_i \cdot F'_3}{F_2^2} - \frac{16}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Sigma \left( \frac{1}{2} \frac{J^r}{J} + \phi^r \right) a_{rri} du_r du_r}{F_2} - K \right) \rho_3^2 = 0. \end{aligned}$$

rispetto alla conica osculatrice a  $C$  in  $x$  sta nel piano

$$\eta = e^{-\frac{2}{3} \int \frac{F_3}{F_1}} (r_0 \xi' + r_1 d\xi' + r_2 d^2 \xi') =$$

$$= \left[ r_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} r_1 + \left( \frac{2}{3} d \frac{F_3}{F_2} + \frac{4}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} \right) r_2 \right] \xi +$$

$$+ \left( r_1 + \frac{4}{3} \frac{F_3}{F_2} r_2 \right) d\xi + r_2 d^2 \xi.$$

Sostituendo ai differenziali secondi  $d^2 x$  e  $d^2 \xi$  i valori (1) del § 79 troviamo che

$$y = (r_0 + Pr_2)x + \left( r_1 + \frac{\frac{1}{2} dF_2 + F_3}{F_2} \right) dx +$$

$$+ \varepsilon \frac{\Sigma \partial_{r_s} du_r \delta^2 u_s - F_3'}{F_2} r_2 Dx + F_2 r_2 X,$$

$$\eta = \left[ r_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} r_1 + \left( \Pi + \frac{2}{3} d \frac{F_3}{F_2} + \frac{4}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} \right) r_2 \right] \xi +$$

$$+ \left( r_1 + \frac{\frac{1}{2} dF_2 + \frac{1}{3} F_3}{F_2} r_2 \right) d\xi +$$

$$+ \varepsilon \frac{\Sigma \partial_{r_s} du_r \delta^2 u_s + F_3'}{F_2} r_2 \cdot D\xi + F_2 r_2 \Xi.$$

Ponendo

$$y = \rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X,$$

$$\eta = \sigma_0 \xi + \sigma_1 d\xi + \sigma_2 D\xi + \sigma_3 \Xi,$$

sarà pertanto :

$$\rho_0 = r_0 + Pr_2, \quad \rho_1 = r_1 + \frac{\frac{1}{2} dF_2 + F_3}{F_2} r_2,$$

$$\rho_2 = \varepsilon \frac{\Sigma \partial_{r_s} du_r \delta^2 u_s - F_3'}{F_2} r_2, \quad \rho_3 = F_2 r_2,$$

$$\sigma_0 = r_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} r_1 + \left( \Pi + \frac{2}{3} d \frac{F_3}{F_2} + \frac{4}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} \right) r_2,$$

$$\sigma_1 = r_1 + \frac{\frac{1}{2} dF_2 + \frac{1}{3} F_3}{F_2} r_2, \quad \sigma_2 = \varepsilon \frac{\Sigma \partial_{r_s} du_r \delta^2 u_s + F_3'}{F_2} r_2,$$

$$\sigma_3 = F_2 r_2.$$

Se ne deduce :

$$\sigma_3 = \rho_3, \quad \sigma_2 = \rho_2 + \frac{2\varepsilon F_3'}{F_2} r_2 = \rho_2 + 2\varepsilon \frac{F_3'}{F_2^2} \rho_3,$$

$$\sigma_1 = \rho_1 - \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} r_2 = \rho_1 - \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2^2} \rho_3,$$

$$\sigma_0 = \rho_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} r_1 + \left( \Pi - P + \frac{2}{3} d \frac{F_3}{F_2} + \frac{4}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} \right) r_2 =$$

$$= \rho_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} \rho_1 + \left( \Pi - P + \frac{2}{3} d \frac{F_3}{F_2} - \frac{1}{3} \frac{F_3 dF_3}{F_2^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} \right) r_2.$$

Queste equazioni equivalgono alle (2). Vale infatti la formola (\*)

(\*) Noi la dimostreremo fra poco.

$$(3) \quad F_2 d F_3 - \frac{3}{2} d F_2 \cdot F_3 = \\ = F_2 \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t du_1 + 3 \epsilon \Sigma \partial_{rs} du_r \partial^2 u_s \cdot F_3' (*) ,$$

$$(3)_{bis} \quad F_2 d F_3 - \frac{1}{2} \left( 3 d F_2 + F_2 \frac{dJ}{J} \right) F_3 = \\ = - \epsilon F_3' [ F_2 \Sigma \phi_t Du_t - 3 \Sigma \partial_{rs} du_r \partial^2 u_s ]$$

in virtù della quale

$$\frac{2}{3} d \frac{F_3}{F_2} - \frac{1}{3} \frac{F_3 d F_2}{F_2^2} = \frac{2}{3} \frac{d F_3}{F_2} - \frac{F_3 d F_2}{F_2^2} = \\ = \frac{2}{3} \frac{\Sigma a_{rst} du_r du_s du_t du_1}{F_2} + 2 \epsilon \Sigma \partial_{rs} du_r \partial^2 u_s \cdot \frac{F_3'}{F_2^2} ,$$

sicchè:

$$\rho_0 = \rho_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} \rho_1 + 2 \epsilon \frac{F_3'}{F_2^2} \Sigma \partial_{rs} du_r \partial^2 u_s \cdot r_2 + \\ + \left( \Pi - P + \frac{2}{3} \frac{\Sigma a_{rst} du_r du_s du_t du_1}{F_2} - \frac{2}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} \right) r_2 = \\ = \rho_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} \rho_1 + 2 \frac{F_3'}{F_2^2} \rho_2 + \\ + \left( \frac{2}{3} \frac{\Sigma a_{rst} du_r du_s du_t du_1}{F_2^2} - \frac{2}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} + 2 \epsilon \frac{F_3^2}{F_2^2} + \frac{\Pi - P}{F_2} \right) \rho_3$$

che è appunto l'ultima delle (2).

(\*) Se  $J \neq 0$ , la formola può scriversi (cfr. Cap. VI, § 56 (3)<sub>bis</sub> e § 58 (1)).

Il teorema di Moutard si prova ora subito (\*). Infatti, nelle (2) non compaiono i differenziali secondi, sicchè, variando la curva  $C$  in modo che il piano di essa passi costantemente per la tangente fissa  $t$ , i coefficienti delle (2) non mutano e le (2) definiscono pertanto una *correlazione* fissa fra il punto  $y$  e il piano  $\eta$  che gode la seguente proprietà: Scelto comunque un punto  $y$  dello spazio, le polari di esso rispetto alle coniche osculatrici in  $x$  a tutte le curve piane di  $S$  che toccano  $t$  in  $x$  stanno nel piano  $\eta$  corrispondente a  $y$  nella nostra correlazione. Il luogo delle dette coniche osculatrici è pertanto identico al luogo dei punti incidenti ai piani loro corrispondenti nella correlazione, luogo che è, come è ben noto, una quadrica. Ma la correlazione definita dalle (2) è appunto la *polarità* rispetto alla quadrica dei punti d'incidenza. Infatti dalle identità subito stabilite (cfr. Cap. II § 12 (10), (13)<sub>bis</sub>, (2)<sub>bis</sub>, § 16 C (9)<sub>bis</sub> ecc.).

$$Sx\xi = 0, \quad Sxd\xi = 0, \quad SxD\xi = 0, \quad Sx\xi = 1,$$

$$Sdx \cdot \xi = 0, \quad Sdx \cdot d\xi = -F_2, \quad Sdx \cdot D\xi = 0, \quad Sdx \cdot \Xi = 0, \\ (4)$$

$$SDx \cdot \xi = 0, \quad SDx \cdot d\xi = 0, \quad SDx \cdot D\xi = \epsilon F_2, \quad SDx \cdot \Xi = 0,$$

$$SX\xi = 1, \quad SXd\xi = 0, \quad SXD\xi = 0, \quad SX\xi = \Omega = -K - J$$

si deduce subito che la correlazione definita dalle

$$\sigma_r = b_{r0}\rho_0 + b_{r1}\rho_1 + b_{r2}\rho_2 + b_{r3}\rho_3 \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

(\*) Il teorema di Moutard si potrebbe anche dedurre semplicemente dal lemma: *Se due superficie hanno in un punto O un contatto del secondo ordine, e se un piano le interseca in curve che hanno contatto del quarto ordine, ogni curva situata su una delle due superficie che tocca in O la sezione piana ora menzionata ha pure contatto del quarto ordine con l'altra superficie.* Infatti basta applicare il lemma a  $S$  e a quella quadrica che ha in  $O$  contatto del secondo ordine con  $S$  e che passa per la conica osculatrice in  $O$  a una delle curve  $C$ . Il lemma si dimostra subito se si prendono il piano della conica e il piano tangente come due facce del tetraedro di riferimento  $r$ . Ma per le ricerche che seguono (Cap. X) abbiamo bisogno dell'equazione (2).

è polarità rispetto alla quadrica dei punti d'incidenza allora ed allora soltanto che

$$b_{10}F_2 + b_{21} = 0, \quad -\varepsilon b_{20}F_2 + b_{32} = 0, \quad b_{12} + \varepsilon b_{21} = 0,$$

$$b_{00} + \Omega b_{20} - b_{33} = 0, \quad b_{01} + \Omega b_{31} + b_{13}F_2 = 0,$$

$$b_{02} + \Omega b_{22} - \varepsilon b_{23}F_2 = 0,$$

condizioni dalle (2) tutte soddisfatte,

Resta da provare la formola (3). È

$$dF_2 = d \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t = \\ + \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t du_i + 3 \Sigma a_{rst} du_r du_s \delta^2 u_i.$$

Moltiplicando per  $F_2 = \Sigma a_{ik} du_i du_k$  risulta:

$$F_2 d F_2 = F_2 \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t du_i + 3 \Sigma a_{rst} a_{ik} du_r du_s du_i du_k \delta^2 u_i.$$

Sottraendone l'identità

$$\frac{3}{2} dF_2 \cdot F_2 = 3 \Sigma a_{ik} du_i \delta^2 u_k \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t = \\ = 3 \Sigma a_{rst} a_{ik} du_r du_s du_i du_t \delta^2 u_k,$$

si ricava:

$$F_2 d F_2 - \frac{3}{2} d F_2 \cdot F_2 = F_2 \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t du_i + \\ + 3 \Sigma a_{rst} a_{ik} du_r du_s du_i ( \delta^2 u_i du_k - du_i \delta^2 u_k )$$

da cui si arriva tosto alla (3), essendo

$$\Sigma a_{rst} a_{ik} du_r du_s du_t ( \delta^2 u_i du_k - du_i \delta^2 u_k ) = \\ = -\varepsilon \sqrt{|A|} ( du \delta^2 v - dv \delta^2 u ) \Sigma \delta^{rst} a_{rst} a_{ik} du_r du_s du_t = (*)$$

(\*) Cfr. Cap. VI, § 57, (3)<sub>ter</sub>.

$$= \varepsilon \sqrt{|A|} ( du \delta^2 v - dv \delta^2 u ) \Sigma b_{rst}^k a_{ik} du_r du_s du_t = \\ = \varepsilon \Sigma \delta_{rst} du_r \delta^2 u_s \Sigma b_{rst} du_r du_s du_t = \\ = \varepsilon \Sigma \delta_{rst} du_r \delta^2 u_s F_3'.$$

Nello stesso modo si dimostra anche la formola simile alla (3)

$$F_2 d F_3' - \frac{3}{2} d F_2 F_3' =$$

$$(3)_{ter} = F_2 \Sigma b_{rst} du_r du_s du_t du_i + 3 \Sigma \delta_{rst} du_r \delta^2 u_s \cdot F_3'. (*)$$

### § 81 — Le corrispondenze $\Sigma$ . (\*\*)

#### A) Loro definizione.

1. Studieremo al prossimo Capitolo la posizione delle quadriche di Moutard appartenenti alle diverse tangenti ad una superficie in un suo punto fisso. Ci occuperemo qui di alcune corrispondenze biunivoche fra la stella dei piani passanti per un punto fisso  $x$  della nostra superficie  $S$  e il piano  $\xi$  punteggiato tangente ad  $S$  in  $x$ , che ci saranno utili per lo studio accennato. Precisamente *indicheremo con  $\Sigma$  (c) (\*\*\*) la corrispondenza in cui al punto*

$$r_0 x + r_1 x_1 + r_2 x_2$$

(\*) Se  $J \neq 0$ , essa può scriversi

$$F_2 d F_3' - \frac{1}{2} \left( 3 d F_2 + F_2 \frac{dJ}{J} \right) F_3' =$$

$$(3)_{quater} = -F_3 ( F_2 \Sigma \phi_i Du_i - 3 \Sigma \delta_{rst} du_r \delta^2 u_s ).$$

(\*\*) Le corrispondenze  $\Sigma$  che qui studieremo sono state introdotte da Čech nel Časopis pro pěst. mat. a fys., t. 50, 1921.  
(\*\*\*)  $c$  essendo una costante arbitraria.

corrisponde il piano

$$s_0 \xi + s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2,$$

essendo

$$(1) \quad r_0 : r_1 : r_2 = \left( s_0 \Sigma a_{ik} s_i s_k - \frac{2c}{3} \Sigma a_{ik} s_i s_k s_r \right) : \\ : s_1 \Sigma a_{ik} s_i s_k : s_2 \Sigma a_{ik} s_i s_k$$

e quindi, come si vede subito:

$$(1)_{bis} \quad s_0 : s_1 : s_2 = \left( r_0 \Sigma a_{ik} r_i r_k + \frac{2c}{3} \Sigma a_{ik} r_i r_k r_l \right) : \\ : r_1 \Sigma a_{ik} r_i r_k : r_2 \Sigma a_{ik} r_i r_k .$$

Dalla definizione si vede subito che ogni  $\Sigma$  ( $c$ ) ha significato intrinseco ed invariante. Anzi, il confronto di (1) e (1)<sub>bis</sub> dimostra che  $\Sigma$  ( $c$ ) è anche invariante per correlazioni.

B) La polarità di Lie.

È pure evidente la proposizione: la corrispondenza  $\Sigma$  (0) è subordinata alla polarità rispetto alla quadrica di Lie (\*). Se  $S$  è una quadrica, tutte le  $\Sigma$  ( $c$ ) si confondono con  $\Sigma$  (0); in caso opposto, esse son tutte diverse (\*\*).

Si può dire anche che la corrispondenza  $\Sigma$  ( $c$ ) associa il punto

al piano

$$r_0 x + r_1 dx \\ s_0 \xi + s_1 d\xi,$$

(\*) Cfr. Cap. III § 21.

(\*\*) eccettuati gli eventuali punti di  $S$  dove tutte e due le asintotiche avessero simultaneamente un flesso.

se

$$r_0 : r_1 = \left( F_2 s_0 - \frac{2c}{3} F_2 s_1 \right) : F_2 s_1,$$

(1)<sub>ter</sub>

$$s_0 : s_1 = \left( F_2 r_0 + \frac{2c}{3} F_2 r_1 \right) : F_2 r_1.$$

Scrivendo qui  $Du_i$  al posto di  $du_i$  si vede che la  $\Sigma$  ( $c$ ) associa anche il punto

$$r_0 x + r_2 Dx$$

al piano

$$s_0 \xi + s_2 D\xi$$

se

$$r_0 : r_2 = \left( F_2 s_0 + \frac{2c}{3} F_2 s_2 \right) : F_2 s_2,$$

(1)<sub>quater</sub>

$$s_0 : s_2 = \left( F_2 r_0 - \frac{2c}{3} F_2 r_2 \right) : F_2 r_2.$$

C) Corrispondenza di Segre.

La corrispondenza  $\Sigma$  (-3) è la corrispondenza di Segre già studiata al Cap. III § 22. Ciò si vede subito scrivendo la (1) in coordinate asintotiche e confrontando con le equazioni del citato §. Ma si possono anche facilmente trovare direttamente le equazioni della corrispondenza di Segre, definita geometricamente al l. c., in coordinate curvilinee qualunque:

Infatti, la corrispondenza di Segre associa evidentemente il punto  $(\xi d\xi d^2\xi)$  al piano  $(x dx d^2x)$ . Ora dalle (1) del § 79 si deduce

$$(\xi d\xi d^2\xi) = s \frac{\Sigma \partial_{rs} du_r \partial^2 u_s + F'_3}{F_2} (\xi d\xi D\xi) + F_2 (\xi d\xi \Xi),$$

$$(x dx d^2x) = s \frac{\Sigma \partial_{rs} du_r \partial^2 u_s - F'_3}{F_2} (x dx Dx) + F_2 (x dx X).$$

Ora (Cap. II, § 12 B (15))

$$(x dx Dx) = (x, x_1 du + x_2 dv, x_1 Du + x_2 Dv) =$$

$$= \sqrt{|A|} (du Dv - dv Du) \xi,$$

$$(\xi d\xi D\xi) = s \sqrt{|A|} (du Dv - dv Du) x,$$

sicchè (Cap. VI § 56, (5)<sub>bis</sub>)

$$(2) \quad (x dx D x) = -s F_2 \xi, \quad (\xi d\xi D\xi) = -F_2 x.$$

D'altra parte, essendo (Cap. II, § 14 A, (B) e (4))

$$Sx d\xi = SX d\xi = Sx D\xi = SX D\xi = 0,$$

si possono determinare  $\lambda$  e  $\mu$  in modo che sia

$$(x dx X) = \lambda d\xi + \mu D\xi.$$

Moltiplicando per  $dx$ , oppure per  $Dx$  se ne ricava (cfr. le (4) del § 80)

$$\lambda = 0, \quad s\mu F_2 = S(x, dx, X) Dx = -(x, dx, Dx, X).$$

Ora dalla (2) si deduce:

$$(x dx D x X) = S(x dx D x) X = -s F_2 S\xi X = -s F_2,$$

sicchè si trova la prima delle identità

$$(2)_{bis} \quad (x, dx, X) = D\xi, \quad (\xi, d\xi, X) = s Dx;$$

la seconda si dimostra nello stesso modo. Dalle (2) e (2)<sub>bis</sub> segue tosto

$$(3) \quad (x, dx, d^2 x) = (F'_3 - \Sigma \partial_{r_2} du_r \partial^2 u_r) \xi + F_2 D\xi,$$

$$s(\xi, d\xi, d^2 \xi) = -(F'_3 + \Sigma \partial_{r_2} du_r \partial^2 u_r) x + F_2 Dx.$$

Posto

$$(\xi d\xi D\xi) = r_0 \xi + r_2 Dx, \quad (x dx D x) = s_0 \xi + s_2 D\xi,$$

si vede pertanto che

$$s_0 : s_2 = (F_2 r_0 + 2 F'_3 r_2) : F_2 r_2.$$

Confrontando con (1)<sub>quater</sub> si vede che la corrispondenza di Segre coincide con  $\Sigma(-3)$  come abbiamo enunciato.

Tutte le proprietà della corrispondenza di Segre segnalate al Cap. III § 22 valgono tali e quali per ogni  $\Sigma$  (c).

D) La corrispondenza di Moutard.

Un'altra corrispondenza notevole è la  $\Sigma$  (1) che diremo *la corrispondenza di Moutard*. Essa fa corrispondere ad ogni punto P del piano tangente ad S in x il suo piano polare rispetto alla quadrica di Moutard appartenente alla tangente (xP). (\*)

Ciò si vede immediatamente ponendo  $\rho_2 = \rho_3 = 0$  nelle (2) del § 80 e confrontando con la (1)<sub>ter</sub> § 81.

Dalla definizione delle  $\Sigma$  (c) si vede subito: I piani corrispondenti nelle diverse  $\Sigma$  (c) ad un punto P scelto comunque su  $\xi$  formano un fascio intorno alla tangente coniugata a (xP); tal fascio è proiettivo al sistema dei valori di c, il piano  $\xi$  stesso corrispondendo a  $c = \infty$ . In particolare, scelto su  $\xi$  un punto qualsiasi P, ed essendo  $\pi_L, \pi_M, \pi_S$  ordinatamente i piani corrispondenti a P nella polarità di Lie, nella corrispondenza di Moutard e nella corrispondenza di Segre, il birapporto  $(\xi \pi_L \pi_M \pi_S)$  è uguale a  $-3$ ; e correlativamente. (\*\*)

Daremo tosto (al § 83) una definizione geometrica della corrispondenza  $\Sigma\left(-\frac{3}{2}\right)$ . Ci saranno pure utili, per la costruzione delle quadriche di Moutard appartenenti alle diverse tangenti ad S in x, le corrispondenze  $\Sigma\left(\frac{3}{2}\right)$  e  $\Sigma\left(-\frac{5}{4}\right)$ .

E) Proprietà delle corrispondenze  $\Sigma$  per le rigate.

Abbiamo già osservato che le proprietà della corrispondenza di Segre segnalate al Cap. III § 22 valgono tutte per ogni  $\Sigma$  (c) ( $c \neq 0$ ). Qui aggiungeremo ancora qualche altra proprietà.

(\*) Invece nella corrispondenza di Segre a P corrisponde il suo piano polare rispetto alla quadrica di Moutard appartenente alla tangente coniugata alla (xP). Ciò si vede come nel testo, usando la (1)<sub>quater</sub> al posto della (1)<sub>ter</sub>.

(\*\*) Se il punto P sta su una tangente di Darboux, i piani  $\pi_L, \pi_M, \pi_S$  coincidono e il birapporto è indeterminato.

In coordinate asintotiche le equazioni (1) e (1)<sub>bis</sub> di  $\Sigma$  (c) sono (quando

$$r_0 x + r_1 x_u + r_2 x_v, \quad s_0 \xi + s_1 \xi_u + s_2 \xi_v$$

siano un punto e un piano omologhi):

$$(4) \quad r_0 : r_1 : r_2 = \left[ s_0 s_1 s_2 - \frac{c}{3} (\beta s_1^2 + \gamma s_2^2) \right] : s_1^2 s_2 : s_1 s_2^2,$$

$$s_0 : s_1 : s_2 = \left[ r_0 r_1 r_2 + \frac{c}{3} (\beta r_1^2 + \gamma r_2^2) \right] : r_1^2 r_2 : r_1 r_2^2.$$

Se  $\beta\gamma \geq 0$  (in un punto generico di una superficie non rigata) la corrispondenza  $\Sigma$  (c) ( $c \neq 0$ ) è cubica; se invece p. es.  $\beta = 0, \gamma \neq 0$  (in un punto non flecnodale di una superficie rigata), la corrispondenza è quadratica. Cominciamo lo studio col considerare un punto generico di una rigata; sia pertanto  $\beta = 0, \gamma \leq 0$  (le  $v$  cost. essendo le generatrici).

Dimosteremo che: *Ad un fascio di piani, il cui asse passa per un punto  $x$  di una superficie rigata senza esservi tangente alla rigata, corrisponde in  $\Sigma$  (c) una conica situata nel piano  $\xi$  tangente alla rigata in  $x$ ; tale conica passa per  $x$ , tocca ivi la tangente all'asintotica curva, e la sua curvatura in  $x$  è il prodotto di  $-\frac{2c}{3}$  per la curvatura dell'asintotica (\*); (in particolare, se  $c = -\frac{3}{2}$ , la conica e l'asintotica hanno in  $x$  contatto del 2° ordine); la conica interseca la generatrice della rigata, oltre che in  $x$ , in un altro punto  $y$ , e la tangente in  $y$  alla conica è la polare del fascio di piani (cui corrisponde la conica  $\Sigma$  (c)) rispetto alla quadrica di Lie (che, si ricordi, coincide con l'iperboloide osculatore).*

(\*) In apparenza, introduciamo nell'enunciato un concetto metrico, quello della curvatura della conica e dell'asintotica. Ma basta osservare (il lettore faccia la facile dimostrazione) che: *Se due curve hanno in un punto  $x$  la stessa tangente e lo stesso piano osculatore, il rapporto delle loro curvature in  $x$  non muta per collineazioni.*

Corollario: *Dato lungo una generatrice di una rigata l'iperboloide osculatore, per determinare la corrispondenza  $\Sigma$  (c) appartenenti ad un punto  $x$  di questa generatrice, basta conoscere la curvatura in  $x$  dell'asintotica curva della rigata.*

Al fascio di piani d'asse

$$s_0 = a_1 s_1 + a_2 s_2$$

corrisponde la punteggiata dei punti  $r_0 x + r_1 x_u + r_2 x_v$  dove

$$r_0 : r_1 : r_2 = \left( a_1 s_1^2 + a_2 s_1 s_2 - \frac{c\gamma}{3} s_2^2 \right) : s_1^2 : s_1 s_2$$

situata sulla conica

$$r_1 (r_0 - a_1 r_1 - a_2 r_2) + \frac{c\gamma}{3} r_2^2 = 0.$$

Variando  $c$ , tale conica descrive un fascio cui appartiene la retta  $r_2 = 0$ , cioè la generatrice ( $x x_u$ ), contata due volte, e cui appartiene pure la conica spezzata nella retta  $r_1 = 0$ , cioè nella tangente ( $x x_v$ ) all'asintotica curva, e nella retta  $r_0 = a_1 r_1 + a_2 r_2$ , che si vede subito essere la polare del fascio di piani rispetto alla quadrica di Lie. Resta a dimostrare ciò che si è detto sulla curvatura in  $x$  della nostra conica. Il lettore vedrà facilmente che le curvature in  $x$  delle diverse coniche del fascio (ottenuto variando  $c$ ) son proporzionali a  $c$ , sicchè dobbiamo provare soltanto che, se  $c = -\frac{3}{2}$ , la conica ha in  $x$  contatto del secondo ordine con l'asintotica  $u = \text{cost}$ . Ora un punto dell'asintotica vicino ad  $x$  è

$$x + x_v dv + \frac{1}{2} x_{vv} dv^2 + \dots =$$

$$= \left( 1 + \frac{1}{2} p_{22} dv^2 + \dots \right) x + \left( \frac{1}{2} \gamma dv^2 + \dots \right) x_u + \left( dv + \frac{1}{2} \theta_v dv^2 + \dots \right) x_v + (\dots) X,$$

i termini trascurati essendo divisibili per  $dv^3$ . Posto pertanto

$$r_0 = 1 + \frac{1}{2} p_{22} dv^2 + \dots, \quad r_1 = \frac{1}{2} \gamma dv^2 + \dots,$$

$$r_2 = dv + \frac{1}{2} \theta_0 dv^2 + \dots,$$

ed osservando che allora

$$r_1 (r_0 - a_1 r_1 - a_2 r_2) + \frac{c\gamma}{3} r_2^2 = \gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{c}{3} \right) dv^2 + \dots,$$

risulta evidente ciò che si voleva provare.

F) Proprietà delle corrispondenze  $\Sigma$  per superficie non rigate.

Consideriamo ora invece un punto generico di una superficie  $S$  non rigata riferita alle asintotiche, sicchè  $\beta\gamma \geq 0$ . La retta  $(xx_u)$  genera, se  $v$  solo varia, una rigata  $R_1$ ; la retta  $(xx_v)$  genera, se  $u$  solo varia, una rigata  $R_2$ . Le rigate  $R_1$  e  $R_2$  sono pertanto i luoghi delle tangenti asintotiche lungo una curva asintotica dell'altro sistema; noi le diremo le rigate asintotiche di  $S$ ;  $R_1$  sarà la prima,  $R_2$  la seconda rigata asintotica. (\*)

Dimostriamo che: Dato un piano  $\zeta$  passante per un punto  $x$  di una superficie non rigata  $S$ , per determinare il punto  $z$  che corrisponde a  $\zeta$  nella corrispondenza  $\Sigma$  ( $c$ ) appartenente a  $S$ , si costruiscano i punti  $z_1$  e  $z_2$  corrispondenti ordinatamente a  $\zeta$  nelle corrispondenze  $\Sigma$  ( $2c$ ) (\*\*) appartenenti alle rigate asintotiche  $R_1$  e  $R_2$ : il punto cercato  $z$  è il coniugato armonico di  $x$  rispetto ai punti  $z_1$  e  $z_2$ .

(\*) Il concetto di rigata asintotica è dovuto al Wilczynski (osculating ruled surfaces); ma il teorema che segue è di Čech.

(\*\*) Con  $2c$  al posto di  $c$ ; l'osservazione fatta a pag. 5 riga 6 della Memoria di Čech: L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo (Ann. di Mat., t. 31 (3), 1922) non è corretta.

Corollario: (\*) Le corrispondenze  $\Sigma$  ( $c$ ) sono completamente determinate dalla  $\Sigma$  ( $0$ ) (che, si ricordi, è subordinata alla polarità di Lie) e dalle curvature in  $x$  delle due asintotiche.

Per fissare le idee, supponiamo che il punto  $x$  di  $S$  corrisponda ai valori  $u = v = 0$  dei parametri. La rigata  $R_1$  è generata dal punto

$$x + \bar{u} x_u, \quad \text{dove } u = 0,$$

variando  $\bar{u}$  e  $v$ . Il suo piano tangente è

$$\xi + \bar{u} \xi_u, \quad \text{dove } u = 0$$

dove il fattore di  $\xi + \bar{u} \xi_u$  è già associato al fattore di  $x + \bar{u} x_u$  al solito modo. (\*\*) Calcoliamo le forme  $F_2$  e  $F_3$  per  $R_1$  indicandole con  $F_2^{(1)}$  e  $F_3^{(1)}$ . (\*\*\*) In tutti i calcoli e formole riguardanti  $R_1$  si deve sempre porre  $u = 0$ ; si prega il lettore di ricordarsene, anche se omettiamo di rilevarlo nelle notazioni.

È

$$\begin{aligned} F_2^{(1)} &= -S d(x + \bar{u} x_u) d(\xi + \bar{u} \xi_u) = \\ &= -S [(x_v + \bar{u} a_{12} X) dv + x_u d\bar{u}] \cdot [(\xi_v + \bar{u} a_{12} \Xi) dv + \xi_u d\bar{u}] = \\ &= 2a_{12} d\bar{u} d\bar{v} - \bar{u}^2 \Omega dv^2. \quad (****) \end{aligned}$$

La  $R_1$  essendo rigata e le  $v = \text{cost.}$  le sue generatrici, la forma  $F_3^{(1)}$  si può calcolare (\*\*\*\*) dalla

$$F_3^{(1)} = \frac{1}{2} S \left( \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) dv^3,$$

(\*) Si ricordi il corollario del § 81 E.

(\*\*) Cfr. Cap. IV, § 32 B.

(\*\*\*) Per il nostro scopo basterebbe calcolare soltanto per  $\bar{u} = 0$ ; ma più tardi avremo bisogno anche dei coefficienti di  $\bar{u}$ .

(\*\*\*\*) Si ricordi che  $\Omega = SX\Xi$ .

(\*\*\*\*\*) Cfr. Cap. IV § 31.

dove

$$y = x + \bar{u} x_u, \quad \eta = \xi + \bar{u} \xi_u.$$

Derivando si trova

$$\frac{\partial y}{\partial v} = x_v + \bar{u} a_{12} X, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = x_{vv} + \bar{u} a_{12} (X_v + \theta_v X),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial v} = \xi_v + \bar{u} a_{12} \Xi, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} = \xi_{vv} + \bar{u} a_{12} (\Xi_v + \theta_v \Xi).$$

Ora per le equazioni fondamentali

$$x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x, \quad \xi_{vv} = -\gamma \xi_u + \theta_v \xi_v + \pi_{22} \xi,$$

$$X_v = l_2 x + \frac{1}{a_{12}} (\pi_{22} x_u + m_{12} x_v),$$

$$\Xi_v = \lambda_2 \xi + \frac{1}{a_{12}} (p_{22} \xi_u + \mu_{12} \xi_v); \quad (*)$$

si trova perciò:

$$S \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} = a_{12} [\gamma + \bar{u} (\pi_{22} - p_{22} + \theta_v \Omega) + \bar{u}^2 a_{12} \lambda_2],$$

$$S \frac{\partial \eta}{\partial v} \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = a_{12} [-\gamma + \bar{u} (p_{22} - \pi_{22} + \theta_v \Omega) + \bar{u}^2 a_{12} l_2].$$

Ricordando la (4) del Cap. II § 16 A si arriva dunque anche alla seconda delle formole

$$F_3^{(1)} = 2a_{12} d\bar{u} d\bar{v} - \bar{u}^2 \Omega dx^2,$$

$$(5) \quad F_3^{(1)} = a_{12} \left[ \gamma + \bar{u} (\gamma_u + \theta_u \gamma) + \frac{1}{2} \bar{u}^2 a_{12} (\lambda_2 - l_2) \right] dv^3$$

(\*) È  $\mu_{22} = p_{22}$ ,  $m_{22} = \pi_{22}$ , cfr. Cap. II § 14 C.

dove  $u = 0$ . (\*)

Similmente si trovano le forme fondamentali di  $R_2$ :

$$F_3^{(2)} = 2a_{12} du d\bar{v} - \bar{v}^2 \Omega du^2,$$

(5)<sub>bis</sub>

$$F_3^{(2)} = a_{12} \left[ \beta + \bar{v} (\beta_v + \theta_v \beta) + \frac{1}{2} \bar{v}^2 a_{12} (\lambda_1 - l_1) \right] du^3,$$

dove  $v = 0$ .

Per  $\bar{u} = \bar{v} = 0$  le (5) e (5)<sub>bis</sub> si riducono a

$$F_3^{(1)} = 2a_{12} d\bar{u} d\bar{v}, \quad F_3^{(1)} = a_{12} \gamma dv^3$$

$$F_3^{(2)} = 2a_{12} du d\bar{v}, \quad F_3^{(2)} = a_{12} \beta du^3$$

che permettono di scrivere le equazioni delle  $\Sigma$  (c) corrispondenti a  $R_1$  e  $R_2$ . Confrontando con la (4) che dà le  $\Sigma$  (c) corrispondenti ad  $S$ , si vede subito l'esattezza del teorema enunciato.

(\*) L'espressione trovata per  $F_3^{(1)}$  mostra che il coniugato armonico di  $x$  rispetto ai punti focodali di  $R_1$  è

$$(\gamma_u + \theta_u \gamma) x - 2\gamma x_u$$

ossia

$$x_u - \frac{1}{2} \frac{\partial \log (a_{12} \gamma)}{\partial u} x$$

che è un punto della (seconda) direttrice di  $S$ . Il risultato enunciato al Cap. III § 25 B e dimostrato al Cap. IV alla fine del § 37 è così confermato mediante calcolo diretto.

§ 82 — Le corrispondenze  $\Sigma$  appartenenti ad una generatrice di una rigata. (\*)

A) Trasformazioni birazionali  $\Sigma$  (c) nello spazio.

Le corrispondenze  $\Sigma$  definite al § precedente appartengono ad un punto  $x$  della superficie in considerazione, riferendosi ai punti del piano tangente  $\xi$  alla superficie in  $x$  ed ai piani passanti per  $x$ . Consideriamo in particolare una superficie *rigata*  $R$  (non sviluppabile); fissandone una generatrice  $p = (yz)$ , è chiaro che le corrispondenze  $\Sigma$  (c) (c fisso) appartenenti ai diversi punti di  $p$  si possono riunire in una corrispondenza birazionale che si riferisce a tutti i punti e piani dello spazio: per costruire p. es. il punto che corrisponde ad un piano scelto comunque nello spazio, si consideri l'intersezione  $x = y + uz$  del piano con la generatrice  $p$ , e quella corrispondenza  $\Sigma$  (c) che appartiene a  $x$ . Indicheremo la corrispondenza a tre dimensioni con lo stesso simbolo  $\Sigma$  (c) come quella sua parte che si riferisce ad un punto di  $p$ ; e dove vi sarebbe pericolo di equivoco, parleremo di *corrispondenza*  $\Sigma$  (c) *appartenente alla generatrice*  $p$  di  $R$ . Per ottenere le equazioni di  $\Sigma$  (c), supponiamo il punto generico di  $R$  dato da  $x = y + uz$ , i punti  $y$  e  $z$  dipendendo da  $v$ , e scegliamo in particolare  $y$  e  $z$  in modo che le  $u = \text{cost.}$  siano le asintotiche curve (cfr. Cap. IV, § 34 A). Di più si scelga  $v$  in modo che sia  $a_{12} = \omega = \pm 1$ ; sicchè: (Cap. IV, § 31):

$$F_2 = 2\omega du dv, \quad F_3 = \omega (A + 2Bu + Cu^2) dv^2.$$

Le equazioni (4) del § 81 mostrano che in  $\Sigma$  (c) si corrispondono il punto

(\*) I teoremi di questo § sono stati esposti da Čech nella Memoria "Projekční geometrie pěti soumězných mimoběžek", (Géométrie projective de cinq droites infiniment voisines) Publ. de la Fac. des Sc. de l'Univ. Masaryk, 1921, n° 4.

$$r_0 (y + uz) + r_1 z + r_2 (y' + uz')$$

e il piano

$$s_0 (\eta + u \zeta) + s_1 \zeta + s_2 (\eta' + u \zeta'),$$

quando sia

$$r_0 : r_1 : r_2 = \left[ s_0 s_2 - \frac{c}{3} (A + 2Bu + Cu^2) \right] : s_1 s_2 : s_2^2,$$

$$s_0 : s_1 : s_2 = \left[ r_0 r_2 + \frac{c}{3} (A + 2Bu + Cu^2) \right] : r_1 r_2 : r_2^2.$$

Un facile calcolo permette di scrivere ciò in un altro modo che è più conveniente per la discussione che faremo: *La corrispondenza*  $\Sigma$  (c) *appartenente alla generatrice* (yz) *associa il punto*

$$ly + mz + l_1 y' + m_1 z'$$

ed il piano

$$\lambda \eta + \mu \zeta + \lambda_1 \eta' + \mu_1 \zeta'$$

essendo

$$\lambda : \mu : \lambda_1 : \mu_1 =$$

$$= \left[ l (ml_1 - lm_1) + \frac{c}{3} l_1 (Al_1^2 + 2Bl_1 m_1 + Cm_1^2) \right] :$$

$$(1) \quad : \left[ m (ml_1 - lm_1) + \frac{c}{3} m_1 (Al_1^2 + 2Bl_1 m_1 + Cm_1^2) \right] :$$

$$: l_1 (ml_1 - lm_1) : m_1 (ml_1 - lm_1),$$

$$l : m : l_1 : m_1 =$$

$$= \left[ \lambda (\mu \lambda_1 - \lambda \mu_1) - \frac{c}{3} \lambda_1 (A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1 \mu_1 + C\mu_1^2) \right] :$$

$$(1)_{bis} \quad : \left[ \mu (\mu \lambda_1 - \lambda \mu_1) - \frac{c}{3} \mu_1 (A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1 \mu_1 + C\mu_1^2) \right] :$$

$$: \lambda_1 (\mu \lambda_1 - \lambda \mu_1) : \mu_1 (\mu \lambda_1 - \lambda \mu_1).$$

Osserviamo che, se  $R$  non è riferita alle asintotiche, basta scrivere  $\dot{y}, \dot{x}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$  al posto di  $y', z', \eta', \zeta'$ . Dalle (1) si vede subito: *Le corrispondenze  $\Sigma$  ( $c$ ) ( $c \neq 0$ ) appartenenti ad una generatrice  $p$  di una rigata  $R$  sono corrispondenze birazionali cubiche, se il regolo osculatore ad  $R$  lungo  $p$  non iperoscula  $R$ . (\*)*

B) Curva omologa di un fascio di piani.

Ad un fascio di piani corrisponde pertanto in generale una cubica sghemba. Noi sappiamo dal § 81 che, se l'asse del fascio è tangente a  $R$  (naturalmente in un punto di  $p$ ) la cubica si riduce ad una retta (la tangente coniugata all'asse del fascio); e se l'asse del fascio incontra  $p$ , senza essere tangente ad  $R$ , la cubica si riduce a una conica. Ma si presentano altre riduzioni che è importante rilevare: *Se l'asse del fascio di piani incontra una tangente flecnodale di  $R$  (appartenente alla generatrice  $p$ ) la curva che vi corrisponde in  $\Sigma$  ( $c$ ) ( $c \neq 0$ ) è in generale (\*\*) una conica.* Per dimostrarlo supponiamo, come è lecito, che la tangente flecnodale sia  $(yy')$ , sicchè  $A = 0$ , e  $\mu = \alpha \mu_1$  ( $\alpha$  costante) per i piani del fascio. Si vede immediatamente che, posto  $\mu = \alpha \mu_1$ , nelle (1)<sub>bis</sub> a destra si può scartare il fattore  $\mu_1$ . Da questa dimostrazione si vede subito che, almeno se  $B^2 - AC \neq 0$ , se cioè le tangenti flecnodali appartenenti a  $p$  son distinte, vale il teorema:

*Se l'asse  $r$  del fascio di piani appartiene alla congruenza lineare osculatrice di  $R$  (corrispondente alla generatrice  $p$ ), ma non interseca  $p$  e non sta su  $H$ , la linea  $r'$  che vi corrisponde in  $\Sigma$  ( $c$ ) è semplicemente una retta.*

*Ma dimostriamo tal teorema in altra maniera, valida anche se  $B^2 - AC = 0$ . (\*\*\*)* Una retta  $r$  che non interseca  $p$  si può scrivere sotto la forma

(\*) Nel caso escluso sarebbe  $A=B=C=0$  e tutte le  $\Sigma$  ( $c$ ) si ridurrebbero a  $\Sigma$  (0) (polarità rispetto all'iperboloide osculatore  $H$ ).

(\*\*) Essa può essere retta; v. più avanti.

(\*\*\*) Del resto le formole della dimostrazione che segue ci saranno ancora utili in questo paragrafo.

$$\begin{aligned} r &= (a_1 \eta + b_1 \zeta + \eta', a_2 \eta + b_2 \zeta + \zeta') = \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) (\eta \zeta) - a_2 (\eta \eta') + b_1 (\zeta \zeta') + a_1 (\eta \zeta') - \\ &\quad - b_2 (\zeta \eta') + (\eta' \zeta') = (*) \\ (2) \quad &= \omega [(a_1 b_2 - a_2 b_1) (yz) + a_2 (yy') - b_1 (zz') + \\ &\quad + b_2 (yz') - a_1 (zy') + (y' z')] . \end{aligned}$$

Posto, come al Cap. IV,  $p = (yz)$ ,  $q = (y' z')$  è dunque

$$\begin{aligned} \omega r &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) p + \frac{a_1 + b_2}{2} p' + q + \\ &+ a_2 (yy') - \frac{a_1 - b_2}{2} [(yz') + (zy')] - b_1 (zz') . \end{aligned}$$

Se  $r$  appartiene alla congruenza lineare osculatrice di  $R$  (corrispondente a  $p$ ), l'espressione precedente è combinazione lineare di  $p, p', q, q'$  e viceversa. Dal Cap. IV, § 37, (2) risulta che ciò accade allora ed allora soltanto che

$$(3) \quad b_1 : (b_2 - a_1) : -a_2 = A : 2B : C .$$

D'altra parte cerchiamo quando mai, posto

$$\lambda = a_1 \lambda_1 + a_2 \mu_1, \quad \mu = b_1 \lambda_1 + b_2 \mu_1,$$

si può scartare un fattore quadratico a destra delle (1)<sub>bis</sub>. Sostituiti i valori precedenti di  $\lambda$  e  $\mu$ , le due espressioni

$$\mu \lambda_1 - \lambda \mu_1 \quad \text{e} \quad A \lambda_1^2 + 2B \lambda_1 \mu_1 + C \mu_1^2$$

devono differire soltanto per un fattore, e si ricade nella (3), come si voleva dimostrare. Cerchiamo ancora la posizione della retta

(\*) Cap. IV, § 32.

$r'$  che corrisponde in  $\Sigma$  (c) al fascio d'asse  $r$ , se valgono le (3). Scriviamo le (3) nella forma

$$A : b_1 = 2B : (b_2 - a_1) = C : -a_2 = \tau.$$

Ai due piani  $a_1\eta + b_1\zeta + \eta'$ ,  $a_2\eta + b_2\zeta + \zeta'$  corrispondono in  $\Sigma$  (c) rispettivamente i punti (v. (1)<sub>bls</sub>)

$$\left(a_1 - \frac{c\tau}{3}\right) y + b_1 z + y',$$

$$a_2 y + \left(b_2 - \frac{c\tau}{3}\right) z + z'.$$

La retta  $r'$  cercata è quindi (\*)

$$r' = \left[ \left(a_1 - \frac{c\tau}{3}\right) y + b_1 z + y', \quad a_2 y + \left(b_2 - \frac{c\tau}{3}\right) z + z' \right] =$$

$$(2)_{bls} = \left[ a_1 b_2 - a_2 b_1 - \frac{c\tau}{3} (a_1 + b_2) \right] (yz) - a_2 (yy') +$$

$$+ b_1 (zz') + \left(a_1 - \frac{c\tau}{3}\right) (yz') - \left(b_2 - \frac{c\tau}{3}\right) (zy') + (y'z').$$

Confrontando le espressioni (2) e (2)<sub>bls</sub> si arriva facilmente al teorema: *La retta  $r_0$  coniugata armonica di  $p$  rispetto alla coppia di rette  $r$  e  $r'$  del teorema precedente (nel regolo determinato dalle rette  $p$ ,  $r$  e  $r'$ ) appartiene ad  $H$ . Scegliamo il parametro  $t$  in modo che*

$$r_0 = \omega r + r' + tp$$

rappresenti una retta. Dalle (2) e (2)<sub>bls</sub> si deduce subito che

(\*) Naturalmente anche  $r'$  appartiene alla congruenza osculatrice.

$$r_0 = \bar{t} p + \frac{c\tau}{3} p' + 2q,$$

dove il valore di  $t$  non ci interessa. La retta  $r_0$ , dipendendo linearmente da  $p$ ,  $p'$  e  $q$ , appartiene ad  $H$  (Cap. IV § 37). Per dimostrare il teorema, basta pertanto provare che  $(pr_0 r r') = -1$ . A tale scopo, supponiamo che  $(yy')$  sia una tangente flecnodale (per il valore di  $v$  appartenente a  $p$ ) ossia che  $A = 0$  e quindi per le (3) anche  $b_1 = 0$ . Si trova ora subito che le intersezioni di  $p$ ,  $r_0$ ,  $r$ ,  $r'$  con  $(yy')$  sono ordinatamente i punti

$$y, \left(a_1 + b_2 - \frac{c\tau}{3}\right) y + 2y', \quad b_2 y + y', \quad \left(a_1 - \frac{c\tau}{3}\right) y + y'$$

che formano una quaterna armonica c. d. d.

#### C) Determinazione delle $\Sigma$ .

*Scegliendo comunque la retta  $r$  purchè non incontri  $p$  nè stia su  $H$ , tutte le corrispondenze  $\Sigma$  (c) appartenenti a  $p$  sono determinate se si conosce  $p$ ,  $H$  e la curva (\*)  $r'$  corrispondente al fascio di piani d'asse  $r$  in una delle  $\Sigma$  (c) ( $c \neq 0$ ). Infatti a un piano  $\pi$ , scelto ad arbitrio, che intersechi  $p$  nel punto  $P$ , corrispondono in  $\Sigma$  (0) (che è la polarità rispetto ad  $H$ ), in  $\Sigma$  (c) ed in  $\Sigma$  (c') ordinatamente dei punti  $P_0$ ,  $P_c$ ,  $P_{c'}$  che sappiamo (§ 81 D) stare su una retta insieme con  $P$  e tali che il birapporto*

$$(PP_0 P_c P_{c'}) = c' : c.$$

Basta pertanto saper costruire  $P_c$  per quel valore di  $c$  cui appartiene  $r'$ . E ciò si può fare facilmente:

Sia  $Q$  il punto d'incontro di  $\pi$  e  $r$ . Al fascio di piani d'asse  $PQ$  (cui appartiene il piano dato  $\pi$ ) corrisponde in  $\Sigma$  (c) una

(\*) che è una cubica sghemba, oppure conica, od infine retta, secondo la posizione di  $r$ .

conica  $C$  situata nel piano tangente  $\tau$  ad  $R$  in  $P$ . (\*) Il punto  $P_c$  cercato è l'intersezione (diversa da  $P$ ) di  $C$  con la retta che congiunge  $P$  al polo di  $\pi$  rispetto ad  $H$ . (\*\*) Tutto si riduce quindi a costruire nel piano  $\tau$  la conica  $C$ . Ora  $C$  tocca nel punto  $P$  la tangente all'asintotica curva di  $R$  (che conosciamo, perchè è generatrice di  $H$ ), e tocca anche la polare di  $PQ$  rispetto ad  $H$  (\*\*); di più,  $C$  passa per il punto d'incontro (non situato su  $p$ ) di  $\tau$  ed  $r'$  (\*\*\*\*); la conica  $C$  si può dunque costruire, giacchè ne conosciamo tre punti, e le tangenti in due di essi.

In generale, (se cioè  $B^2 - AC \neq 0$ ,  $B'^2 - A'C' \neq 0$ ) le corrispondenze  $\Sigma$  (c) appartenenti a  $p$  si possono costruire, se si conoscono le due quadriche  $H$  e  $W_1$  (\*\*\*\*) e l'invariante  $h$  (\*\*\*\*\*).

Per il teorema precedente, basta trovare il luogo dei punti corrispondenti in una delle  $\Sigma$  (c) ( $c \neq 0$ ) ai piani passanti per una retta  $r$ . Per le ipotesi fatte, possiamo far uso delle formole (7) § 38 del Cap. IV, riferendo  $R$  alle linee flecnodali. Riguardando le  $l$ ,  $m$ ,  $l_1$ ,  $m_1$  come coordinate del punto

$$ly + mz + l_1 y + m_1 z$$

e  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  come coordinate del piano

$$\lambda\eta + \mu\zeta + \lambda_1\eta + \mu_1\zeta,$$

le equazioni di  $\Sigma$  (c) sono le (1) e (1)<sub>bis</sub>, dove

$$A = C = 0, \quad B = 1.$$

Se poniamo p. es.

(\*) v. il teorema di § 81 E.

(\*\*) v. il teorema di § 81 D.

(\*\*\*) v. il teorema citato su (\*\*).

(\*\*\*\*) che corrisponde in  $\Sigma$  (c) al piano ( $P_r$ ) del nostro fascio.

(\*\*\*\*\*) la quadrica  $W_1$  è stata definita al Cap. IV, § 35 C.

(\*\*\*\*\*) Cap. IV, § 35 B.

$$(4) \quad \lambda = \frac{n}{2} \mu_1, \quad \mu = 0,$$

sarà

$$l : m : l_1 : m_1 = \left( \frac{8c}{3} \lambda_1^2 + n^2 \mu_1^2 \right) : \frac{8c}{3} \lambda_1 \mu_1 : 2n \lambda_1 \mu_1 : 2n \mu_1^2.$$

Dimostriamo che, scelto convenientemente  $c$ , tutta la conica di questi punti  $ly + mz + l_1 y + m_1 z$  sta sulla quadrica  $W_1$ .

Essendo (\*)

$$A = C = 0, \quad B = 1, \quad \dot{A} = -2\delta n, \quad \dot{B} = 0,$$

$$\dot{C} = 2n, \quad \delta = \pm 1.$$

l'equazione di  $W_1$  è (cfr. Cap. IV, § 35 C, (14) pag. 215)

$$2(lm_1 + ml_1) + \delta n l_1^2 - nm_1^2 = 0.$$

Affinchè i valori precedenti di  $l$ ,  $m$ ,  $l_1$ ,  $m_1$  soddisfino a questa equazione (identicamente in  $\lambda_1$ ,  $\mu$ ) basta che si scelga

$$c = -\frac{3\delta}{16} n^2 = -\frac{3}{64} h.$$

Il piano della conica è evidentemente

$$m : l_1 = \frac{8c}{3} : 2n = -\frac{\delta}{4} n,$$

ossia il piano

$$(4)_{bis} \quad \delta n (yz \dot{x}) - 4 (y \dot{y} z) = \delta n \zeta + 4 \eta.$$

Indichiamo con  $r$  la retta base del fascio (4) e con  $\pi$  il piano (4)<sub>bis</sub>. Sappiamo per ora che: I punti che corrispondono in

(\*) Cap. IV, § 38.

$\Sigma \left( -\frac{3h}{64} \right)$  ai piani passanti per la retta  $r$  formano la conica intersezione della quadrica  $W_1$  col piano  $\pi$ . Per dedurre il teorema enunciato, occorre indicare una costruzione della retta  $r$  e del piano  $\pi$  mediante le quadriche  $H$  e  $W$ . Ricordiamo dapprima il significato geometrico del tetraedro  $y, z, \dot{y}, \dot{z}$ :  $(yz)$  è la generatrice  $p$  studiata di  $R$ ,  $(y\dot{y})$  e  $(z\dot{z})$  sono le tangenti flecnodali e  $(\dot{y}\dot{z})$  è la generatrice principale di  $H$  (\*). La retta  $r$  congiunge il punto  $\dot{y}$  all'intersezione  $ny - 2\dot{z}$  della retta  $(y\dot{z})$  colla generatrice principale

$$\delta n^2(yz) + 2n(y\dot{y}) + 2\delta n z \dot{z} + 4(\dot{y}\dot{z})$$

della quadrica  $W_2$  (cfr. (14)<sub>bi</sub>, § 35 C, Cap. IV). Il piano  $\pi$  congiunge il punto  $\dot{z}$  a quella tangente di  $R$  in  $y$  che è la coniugata armonica di  $p$  rispetto alle generatrici del secondo sistema di  $H$  e di  $W_1$  passanti per  $y$ . Lascio le verifiche al lettore.

Come una facile applicazione delle formole del Cap. IV, il lettore dimostri ancora la proposizione: Se la rigata  $R$  possiede una (ed una sola) retta direttrice  $d$ , i punti che corrispondono in  $\Sigma$  (c) ( $c \neq 0$ ) ai piani passanti per la generatrice principale della quadrica  $W_1$  formano una conica  $C$ . Il piano di  $C$  contiene: 1° il punto della generatrice studiata  $p$  situato su  $d$ , 2° l'intersezione della tangente flecnodale (diversa da  $d$ ) con la generatrice principale di  $H$ . Il piano che contiene i due punti suddetti ed è il piano coniugato armonico al piano di  $C$  rispetto ai due piani del loro fascio di cui uno contiene  $p$  e l'altro  $d$ , interseca  $W_1$  in una conica  $C'$ . Le due coniche  $C$  e  $C'$  stanno sopra un cono il cui vertice è quel flecnodo di  $p$  che non appartiene a  $d$ .

(\*) Cap. IV, § 35. Dalle definizioni di  $(\dot{y}\dot{z})$  risulta facilmente che essa si può costruire mediante le quadriche  $H$  e  $W_1$ .

§ 83 — Metriche di Weyl (\*) e corrispondenze  $\Sigma \left( -\frac{3}{2} \right)$ .

A) Metriche di Weyl.

Già ai §§ 15 F e 23 A abbiamo visto che per lo studio proiettivo di una superficie non sviluppabile è utile considerare la metrica di Riemann di elemento lineare  $F_2 = \Sigma a_{ik} du_i du_k$ . Qui vogliamo mostrare che il risultato di l. c. si può estendere alle metriche di Weyl. Una metrica di Weyl a due dimensioni è determinata da una forma differenziale quadratica

$$F_2 = a_{11} du^2 + 2a_{12} du dv + a_{22} dv^2$$

e una forma differenziale lineare che scriveremo

$$(1) \quad 2(\alpha_1 du + \alpha_2 dv),$$

convenendo che le forme

$$(2) \quad \rho F_2, \quad 2 \Sigma \alpha_i du_i - \frac{d\rho}{\rho}$$

definiscano la stessa metrica se  $\rho$  è funzione arbitraria di  $u$  e  $v$ . Le cosiddette geodetiche della metrica sono definite dall'equazione differenziale

$$(\delta^2 u - \alpha^1 F_2) : (\delta^2 v - \alpha^2 F_2) = du : dv,$$

essendo al solito  $\alpha^r = \Sigma A_{rk} \alpha_k$ , (\*\*), e  $\delta^2 u_i$  indicando i differenziali secondi controvarianti. Tale equazione si può evidentemente scrivere anche nella forma:

$$(3) \quad \Sigma \delta_{rs} du_r \delta^2 u_s + F_2 \Sigma \alpha_i Du_i = 0.$$

(\*) Weyl Raum, Zeit, Materie, 4ª edizione.

(\*\*) Si verifica facilmente che l'equazione differenziale delle geodetiche non cambia per l'operazione (2).

Le metriche di Riemann sono un caso particolare delle metriche di Weyl caratterizzato dall'equazione ( $\alpha_{r,k}$  sono le derivate covarianti di  $\alpha_r$ )

$$\Sigma \delta^{rk} \alpha_{r,k} = 0$$

che esprime che  $\Sigma \alpha_r du_r = d\alpha$  è un differenziale esatto (\*). Ma vi è un altro caso notevole che pare finora inosservato (\*\*). Nel caso attuale di due dimensioni, esso è caratterizzato dall'equazione (\*\*\*)

$$(4) \quad \Sigma a^{rk} \alpha_{r,k} = K$$

dove  $\alpha_{r,k}$  son le derivate covarianti delle  $\alpha_r$  (formate rispetto a  $F_2$ ) e  $K$  indica la curvatura di  $F_2$ .

Occorre dimostrare che la condizione (4) è invariante per l'operazione (2). Per brevità assumiamo i parametri  $u, v$  in modo che sia  $a_{11} = a_{22} = 0$ . Allora:

$$F_2 = 2a_{12} du dv, \quad K = -\frac{1}{a_{12}} \frac{\partial^2 \log |a_{12}|}{\partial u \partial v},$$

$$\Sigma a^{rk} \alpha_{r,k} = \frac{1}{a_{12}} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} \right),$$

(\*) Scegliendo nelle (2)  $\rho = e^{2\alpha}$ , la forma lineare svanisce, e la metrica di Weyl si riduce alla metrica di Riemann di elemento lineare  $e^{2\alpha} F_2$  (determinato a meno di un fattore numerico).

(\*\*) Nella teoria usuale della metrica di Weyl, ha ufficio fondamentale il parallelismo di Levi-Civita generalizzato da Weyl. Considerando in un punto  $P$  della varietà  $(u, v)$  uno spazio (a due dim.) di vettori e trasportandolo con parallelismo lungo una curva chiusa  $C$  ritornante in  $P$ , lo spazio subisce, in generale, una similitudine. Se tale similitudine si riduce all'identità, comunque si scelga il punto  $P$  e la curva chiusa  $C$  passante per  $P$ , la metrica è euclidea. Più generalmente, se la detta similitudine si riduce sempre ad una rotazione, la metrica è di Riemann. L'altro caso particolare cui accenno nel testo è quello in cui la similitudine è sempre un'omotetia.

(\*\*\*) Essa può scriversi anche

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{|A|} \alpha^1) + \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{|A|} \alpha^2) \right] = K.$$

sicchè la (4) diventa:

$$(4)_{bi} \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} + \frac{\partial^2 \log |a_{12}|}{\partial u \partial v} = 0.$$

Ora l'operazione (2) muta rispettivamente  $a_{12}, \alpha_1, \alpha_2$  in

$$\rho a_{12}, \alpha_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u}, \alpha_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v}$$

e si vede subito che la (4)<sub>bi</sub> non cambia per tale sostituzione, c. d. d. Vediamo di più che scelto  $\rho$  in modo che, eseguita la trasformazione (2), sia  $a_{12} = 1$  e quindi  $K = 0$ , la (4)<sub>bi</sub> diventa semplicemente  $\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} = 0$ , esprime cioè che

$$(4)_{ur} \quad \alpha_1 du - \alpha_2 dv = d\lambda(u, v)$$

è un differenziale esatto. Quest'osservazione permette di provare semplicemente il teorema di Čech:

*Se esiste in una metrica di Weyl (a due dimensioni) un sistema doppio ortogonale (\*) di geodetiche, la metrica soddisfa alla condizione (4); viceversa le geodetiche di una metrica di Weyl soddisfacente a (4) formano un fascio (\*\*) e se ne possono pertanto formare infiniti sistemi doppi ortogonali.*

Per dimostrare i due enunciati, possiamo supporre

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = 1.$$

Supponiamo in primo luogo che la metrica possenga un doppio sistema ortogonale di geodetiche definito da

$$\frac{dv}{du} = \pm e^{\frac{1}{2} \lambda(u, v)}$$

(\*) cioè coniugato rispetto a  $F_2$ .

(\*\*) nel senso di Cap. III § 23 D.

L'equazione differenziale (3) delle geodetiche diventa sotto le nostre ipotesi ( $a_{11} = a_{22} = 0$ ,  $a_{12} = 1$ )

$$(3)_{bis} \quad d \log \left| \frac{dv}{du} \right| - 2(\alpha_1 du - \alpha_2 dv) = 0.$$

Sostituendovi i valori di  $\frac{dv}{du}$  appartenenti al nostro doppio sistema ortogonale otteniamo

$$d\lambda = \alpha_1 du - \alpha_2 dv.$$

Tale equazione deve essere soddisfatta se

$$dv = e^{\frac{1}{2}\lambda} du$$

e anche se

$$dv = -e^{\frac{1}{2}\lambda} du$$

ed è quindi soddisfatta *identicamente*; vale a dire  $\alpha_1 du - \alpha_2 dv$  è un differenziale esatto, il che prova la prima parte dell'enunciato.

Viceversa supponiamo soddisfatta la (4)<sub>ter</sub>. L'equazione differenziale (3)<sub>bis</sub> delle geodetiche diventa

$$d \log \left| \frac{dv}{du} \right| = d\lambda(u, v)$$

ed integrata dà

$$\frac{dv}{du} = ce^\lambda, \quad c \text{ costante arbitraria,}$$

sicchè le geodetiche formano un fascio di curve c. d. d.

### B) Piani osculatori alle geodetiche di Weyl

Torniamo a considerare una superficie  $S$  non sviluppabile. Scegliendo comunque il fattore delle coordinate omogenee  $x$  dei punti di  $S$ , consideriamo la solita forma quadrica

$$F_2 = -S dx d\xi,$$

e scegliamo ad arbitrio una forma lineare (1). Le due forme definiscono sulla superficie una metrica di Weyl, di cui studieremo le geodetiche definite dalla (3). Ma ricordiamo dapprima che si era visto al Cap. III § 23 che si può far corrispondere alla coppia di forme  $F_2$  e  $\Sigma \alpha_i du_i$  una coppia di congruenze duali. È facile definire analiticamente le due congruenze senza far uso di coordinate asintotiche. Infatti da l. c. risulta subito che la generatrice della prima congruenza è l'asse del fascio di piani

$$(5) \quad d\xi + \Sigma \alpha_r du_r \cdot \xi$$

ottenuto variando i differenziali  $du_r$ ; similmente la generatrice della seconda congruenza è il luogo del punto

$$(5)_{bis} \quad dx + \Sigma \alpha_r du_r \cdot x.$$

Inoltre, si era osservato l. c. che la trasformazione (2) non cambia le nostre congruenze sicchè esse sono completamente determinate data  $S$  e su essa la metrica di Weyl. Chiameremo le rette della prima congruenza le *normali della metrica di Weyl*. (\*)

Ciò posto, dimostriamo che: *I piani osculatori alle geodetiche della nostra metrica di Weyl (\*\*) in un punto arbitrario di  $S$  corrispondono ai punti della retta duale della normale della metrica nella corrispondenza  $\Sigma \left( -\frac{3}{2} \right)$  ed involuppano quindi in generale (se cioè  $S$  non è rigata) un cono di terza classe i cui tre piani cuspidali passano per la normale della metrica e intersecano il piano tangente ad  $S$  nelle tangenti di Segre (\*\*\*)*.

Infatti, sostituendo nella prima delle equazioni (3) del § 81 il valore di  $\Sigma \alpha_r du_r \cdot \delta^2 u_r$  tratto dall'equazione (3) delle geodetiche

(\*) Le rette della seconda congruenza sono rette duali di quelle della prima, corrispondono cioè ad esse in  $\Sigma(0)$ .

(\*\*) Che, si noti, è la più generale metrica di Weyl su  $S$  che abbia come curve minime le asintotiche di  $S$ .

(\*\*\*) Una parte di questa proposizione è già stata provata, in coordinate asintotiche, al Cap. III § 23 D.

studiate si deduce che il piano osculatore ad una geodetica della metrica è rappresentato da

$$(F'_3 + F_2 \Sigma \alpha_r Du_r) \xi + D_2 \xi,$$

e le (1)<sub>quater</sub> del § 81 B mostrano che tal piano corrisponde in  $\Sigma \left( -\frac{3}{2} \right)$  al punto

$$Dx + F_2 \cdot \Sigma \alpha_r Du_r \cdot x$$

situato evidentemente sulla retta duale della normale della metrica.

C) Geodetiche formanti fascio.

In particolare, se la metrica è di Riemann,  $\Sigma \alpha_r du_r$  è un differenziale esatto e alle sviluppabili della congruenza delle normali della metrica corrisponde su  $S$  un sistema coniugato; e vale anche il teorema inverso (Cap. III § 25 A). Sappiamo inoltre che (\*), la più semplice di tali metriche intrinsecamente definita è quella in cui

$$\Sigma \alpha_r du_r = \frac{1}{2} \frac{dJ}{J}$$

o in coordinate normali

$$\Sigma \alpha_r du_r = 0.$$

La normale di questa metrica è la normale proiettiva di  $S$ .

Invece il caso particolare in cui vale la (4) è caratterizzato geometricamente dal fatto che le geodetiche della metrica formano un fascio. Viceversa dato su  $S$  un qualsiasi fascio, esiste su  $S$  una e una sola metrica di Weyl del tipo studiato (per cui cioè le asintotiche di  $S$  siano le curve minime) che ha le curve del fascio per

(\*) se  $S$  non è rigata.

geodetiche. Si scelga infatti nel fascio un doppio sistema coniugato (ciò è evidentemente possibile in  $\infty^1$  modi) e, in ogni punto  $x$  di  $S$  si costruisca la retta  $r$  che congiunge i punti corrispondenti in  $\Sigma \left( -\frac{3}{2} \right)$  ai piani osculatori delle due curve del sistema coniugato. La (5)<sub>bis</sub> mostra subito che una ed una sola delle nostre metriche di Weyl ha, per ogni posizione di  $x$ , la retta duale di  $r$  come normale. Dal teorema di § 83 B si deduce che le curve del sistema coniugato sono geodetiche di tale metrica. Per la prima parte del teorema di § 83 A, tale metrica soddisfa alla condizione (4); onde la seconda parte dello stesso teorema dimostra che tutte le curve del fascio dato ne sono geodetiche. E similmente si vede pure che non può esistere altra metrica di Weyl che soddisfi alla condizione dell'enunciato. Se ne deduce tosto il teor. (Cfr. § 23).

Dato su  $S$  un qualsiasi fascio di curve, i piani osculatori alle curve del fascio in un punto qualunque di  $S$  involucono un cono di terza classe che possiede tre piani cuspidali intersecantisi in una retta. Di più sappiamo che i tre piani cuspidali del cono contengono rispettivamente le tre tangenti di Segre.

§ 84 — Le rette canoniche in coordinate generali. (\*)

1. La proposizione che chiude il § precedente permette di ritrovare senza ulteriore calcolo i risultati trovati al Cap. III § 23 B, sulla posizione dei piani osculatori alle curve di Darboux e di Segre. Basta osservare che esiste su  $S$  un fascio (\*\*) che comprende tutte le linee di Darboux e di Segre ed applicare la proposizione citata. Ne segue senz'altro che esiste su  $S$  una metrica di Weyl del tipo studiato al § 83 di cui le linee di Darboux e di Segre sono delle geodetiche particolari. (\*\*\*) La nor-

(\*) In questo § supponiamo che  $S$  non sia rigata ( $J \neq 0$ ).

(\*\*) Definito in coordinate asintotiche da  $\beta du^2 + c\gamma dv^2 = 0$  con  $c$  costante arbitraria.

(\*\*\*) Questa metrica soddisfa evidentemente la condizione (4) del § 83.

male di tale metrica è evidentemente l'asse di  $S$ . Ne segue che l'asse di  $S$  è la retta base del fascio di piani rappresentato da (5) § 83 appena si determini il sistema covariante  $\alpha_r$  in modo che la (3) del § 83 abbia le linee di Darboux (\*) come curve integrali particolari. Ora la (3)<sub>bis</sub> del § 80 C mostra che le curve di Darboux soddisfano all'equazione

$$F_2 \Sigma \phi_r Du_r - 3 \Sigma \partial_{r,s} du_r \delta^2 u_s = 0.$$

Confrontando con la (3) del § 83 A vediamo pertanto che l'asse di  $S$  è la retta base del fascio di piani (ottenuto variando  $du_1 : du_2$ )

$$(1) \quad d\xi - \frac{1}{2} \Sigma \phi_r du_r \cdot \xi. \quad (**)$$

Conosciamo pertanto le equazioni in coordinate curvilinee qualunque di due delle rette canoniche: la normale proiettiva e l'asse. Per determinare le altre rette canoniche basta ricordare dal Cap. III § 27 i valori (costanti) dei birapporti fra esse. Troviamo così che la direttrice è la retta base del fascio

$$(1)_{bis} \quad d\xi - \frac{1}{2} \left( \Sigma \phi_i du_i + \frac{1}{2} \frac{dJ}{J} \right) \xi$$

e lo spigolo è la retta base del fascio

$$(1)_{ter} \quad d\xi - \frac{1}{4} \left( \Sigma \phi_i du_i - \frac{1}{2} \frac{dJ}{J} \right) \xi$$

(\*) Si potrebbe partire anche dalle linee di Segre.

(\*\*) Per il significato invariante dell'asse se ne deduce tosto che la forma differenziale lineare

$$\Sigma \psi_i du_i + \frac{3}{2} \frac{dJ}{J}$$

è intrinseca ed invariante, come abbiamo già enunciato al Cap. VI § 58 A. Inoltre facendo uso della penultima nota a piè di pag. si conferma il risultato

(Cap. VI. § 60 A) che  $K = -\frac{1}{3} \Sigma \alpha^r \phi_r$  è la curvatura di  $F_2$ .

Come corollario si deduce che il fascio canonico interseca il piano tangente lungo la tangente

$$(1)_{quater} \quad \Sigma \psi_i Du_i + \frac{3}{2} \frac{DJ}{J} = 0.$$

2. È facile verificare questi risultati con calcolo diretto. A tale scopo dimostriamo dapprima: In uno spostamento infinitesimo lungo una curva asintotica di  $S$  valgono le formole (\*)

$$d^2 x = \left( \frac{1}{3} \frac{dF_3}{F_3} - \frac{1}{6} \frac{dJ}{J} + \frac{1}{3} \Sigma \phi_r du_r \right) dx + \Delta x + Px,$$

(2)

$$d^2 \xi = \left( \frac{1}{3} \frac{dF_3}{F_3} - \frac{1}{6} \frac{dJ}{J} + \frac{1}{3} \Sigma \phi_r du_r \right) d\xi - \Delta \xi + \Pi \xi,$$

dove abbiamo posto

$$(2)_{bis} \quad \Delta u_i = \Sigma \alpha^r_i du_r du_i, \quad \Delta x = \Sigma x_i \Delta u_i, \quad \Delta \xi = \Sigma \xi_i \Delta u_i.$$

Cominciamo coll'osservare che, muovendosi lungo un' asintotica è (\*\*)  $duDv - dv Du = 0$ , sicchè possiamo porre:

$$Du = \lambda du, \quad Dv = \lambda dv,$$

ossia

$$a_{12} du + a_{22} dv = -\varepsilon \lambda \sqrt{|A|} du,$$

$$a_{11} du + a_{12} dv = \varepsilon \lambda \sqrt{|A|} dv.$$

Se ne deduce

$$\begin{vmatrix} a_{12} + \varepsilon \lambda \sqrt{|A|} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} - \varepsilon \lambda \sqrt{|A|} \end{vmatrix} = -A - \lambda^2 |A| = -|A| (\lambda^2 + \varepsilon) = 0$$

onde  $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ ,

(\*) Si confronti con le formole (1) del § 79 valide se  $F_2 \neq 0$ .

(\*\*) Cap. VI, § 56, (5) bis.

(3)  $Du_i = \sqrt{\varepsilon} du_i$ , se  $F_2 = 0$ . (\*)

Sostituendo nella (1) del Cap. VI § 57 si trova poi (\*\*)

(3)<sub>bis</sub>  $F'_3 = \sqrt{\varepsilon} F_3$ , se  $F_2 = 0$ .

Di più

$$\begin{aligned} (du \delta^2 v - dv \delta^2 u)^2 &= \frac{1}{A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \left| \frac{du \delta^2 u}{dv \delta^2 v} \right|^2 = \\ &= \begin{vmatrix} \Sigma a_{ik} du_i du_k & \Sigma a_{ik} du_i \delta^2 u_k \\ \Sigma a_{ik} du_i \delta^2 u_k & \Sigma a_{ik} \delta^2 u_i \delta^2 u_k \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

essendo

$$\Sigma a_{ik} du_i du_k = F_2 = 0, \quad 2 \Sigma a_{ik} du_i \delta^2 u_k = dF_2 = 0,$$

sicchè

$$\delta^2 u = \mu du, \quad \delta^2 v = \mu dv.$$

Per calcolare  $\mu$  sostituiamo nella formola

$$dF_3 = \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t + 3 \Sigma a_{rst} du_r du_s \delta^2 u_t$$

onde

$$\mu = \frac{1}{3} \frac{dF_3}{F_3} - \frac{1}{3F_3} \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t,$$

sicchè si ottiene, ricordando la (1) del Cap. VI § 58,

(3)<sub>ter</sub>  $\delta^2 u_i = \left( \frac{1}{3} \frac{dF_3}{F_3} - \frac{1}{6} \frac{dJ}{J} + \frac{1}{3} \Sigma \phi_r du_r \right) du_i$ , se  $F_2 = 0$ .

Ora dalle equazioni fondamentali si deduce subito che

$$d^2 x = \Sigma x_r \delta^2 u_r + \Delta x + P \cdot x,$$

$$d^2 \xi = \Sigma \xi_r \delta^2 u_r - \Delta \xi + \Pi \cdot \xi,$$

e basta osservare la (3)<sub>ter</sub> per arrivare alle (1).

Osserviamo anche le formole (valide qualunque siano  $du_r$ )

(\*) Passando ad un' asintotica dell' altro sistema, dobbiamo cambiare il segno di  $\sqrt{\varepsilon}$ .

(\*\*) La formola (3)<sub>bis</sub> si potrebbe dedurre anche dalla (4) del Cap. VI. § 57.

(4)  $\Sigma \delta_{ik} du_i \Delta u_k = -F'_3,$

(4)<sub>bis</sub>  $\Sigma a_{ik} \Delta u_i \Delta u_k = -\frac{1}{2} J F_2^2$

La (4) si dimostra subito. Infatti, per la (3) del Cap. VI § 57 e per la (2)<sub>bis</sub> è

$$\Sigma \delta_{ik} du_i \Delta u_k = \Sigma \delta_{ik} a_{rs}^k du_i du_r du_s = -\Sigma b_{rsi} du_i du_r du_s.$$

La (4)<sub>bis</sub> diventa, sostituendovi i valori di  $\Delta u_i$ ,

4<sub>ter</sub>  $\Sigma a_{rs}^i a_{pq}^i du_r du_s du_p du_q = -\frac{1}{2} J F_2^2.$

Per dimostrarla, ricordiamoci la dimostrazione della formola (9) del Cap. IV, § 59 D; vediamo subito che nello stesso modo come la formola citata si può anche dimostrare che

$$\Sigma a_{rs}^i a_{pq}^i \tau^r \tau^s \tau^p \tau^q du_q = \frac{1}{2} \Sigma a_{rs} \tau^r \tau^s \Sigma \tau; du_i = \frac{1}{2} \Sigma a_{rs} \tau^r \tau^s \Sigma a_{ik} \tau^k du_i,$$

$\tau^r$  essendo un sistema controvariante arbitrario. Scegliendo  $\tau^r = du_r$  si ottiene la (4)<sub>ter</sub> sotto l'ipotesi  $J = -1$  fatta l. c. Si passa poi immediatamente al caso di  $J$  qualunque.

Se in particolare  $F_2 = 0$ , sicchè il punto  $dx$  sta su una tangente asintotica, la (4)<sub>bis</sub> dimostra che il punto  $\Delta x$  sta pure su una tangente asintotica, che è, per la (4) diversa dalla precedente. Ciò posto, le (2) permettono di rifare, in coordinate curvilinee qualunque, il calcolo fatto al Cap. III § 26 per trovare lo spigolo.

Infatti posto (supponendo che  $F_2 = 0$ )

$$t = \frac{(x dx)}{3 \sqrt{F_3}},$$

dalle (1) si trova subito

$$dt = \frac{1}{3} \left( \Sigma \phi_r du_r - \frac{1}{2} \frac{dJ}{J} \right) t + \frac{(x \Delta x)}{3 \sqrt{F_3}}$$

sicchè (Cap. I § 7 D) la polare del punto

(5)  $dx - \frac{1}{4} \left( \Sigma \phi_r du_r - \frac{1}{2} \frac{dJ}{J} \right) x$

rispetto alla conica osculatrice dell' asintotica su cui supponiamo muoverci è la retta  $(x \Delta x)$  che abbiamo visto essere la tangente all' altra asintotica in  $x$ . Se ne deduce subito che l' espressione rappresenta la retta duale dello spigolo. Lascio al lettore di fare un calcolo analogo per la direttrice.

## CAPITOLO X.

INTORNO DI UN PUNTO DI UNA SUPERFICIE.  
 QUADRICHE DI MOUTARD E CONO DI SEGRE.

Questo capitolo, che un lettore frettoloso potrà omettere in prima lettura, è destinato a studiare e caratterizzare in modo geometrico ed invariante per collineazioni l'intorno del quarto ordine di un punto di una superficie: ciò che porterà a illustrare geometricamente il significato degli invarianti fondamentali da noi già trovati per via analitica.

§ 85 — **Enunciato di alcuni teoremi per le quadriche di Moutard.**

Strumento essenziale di questa ricerca è lo studio delle quadriche di Moutard. Cominceremo a studiare il sistema delle quadriche di Moutard che appartengono alle diverse tangenti di una superficie (non sviluppabile)  $S$  in un suo punto generico  $x$ . Ecco come procederemo. Essendo  $t$  una tangente ad  $S$  in  $x$ ,  $t'$  la tangente coniugata,  $M_t$  e  $M_{t'}$  le quadriche di Moutard appartenenti rispettivamente a  $t$  e  $t'$ , ed  $r$  una retta incidente a  $t$  (che però non passa per  $x$  nè sta nel piano  $\xi$  tangente a  $S$  in  $x$ ), noi daremo una serie di semplici costruzioni geometriche, che permettono di trovare le rette polari  $r'$  e  $r''$  di  $r$  rispetto a  $M_t$  e a  $M_{t'}$ ; fatto ciò, la costruzione di  $M_t$  (e di  $M_{t'}$ ) è pure fatta: infatti la

quadrica  $M_t$  è evidentemente determinata se sappiamo costruire la polare rispetto a  $M_t$  di ogni retta  $r$  incidente a  $t$ ; del resto, ricordando (\*) che il piano polare rispetto a  $M_t$  di ogni punto situato su  $t$  ( $t'$ ) corrisponde a quel punto nella corrispondenza  $\Sigma$  (1) ( $\Sigma$  (—3)), sappiamo costruire, appena note le  $\Sigma$  ( $c$ ), il piano polare rispetto a  $M_t$  di ogni punto situato in  $\xi$ , sicchè basta, per completare la determinazione di  $M_t$ , costruire la polare  $r'$  di una retta  $r$  incidente a  $t$ .

La costruzione di  $r'$  e  $r''$  da  $r$  sarà completamente discussa ai §§ seguenti; qui vogliamo premettere per maggior chiarezza, l'enunciato dei risultati (\*\*).

Sia  $P$  il punto d'incontro di  $r$  con  $\xi$ ,  $\pi$  il piano che congiunge  $r$  ad  $x$ . Il problema di determinare le rette  $r'$  e  $r''$  dalla retta  $r$  si può ricondurre a due altri molto più semplici, a costruire cioè un certo punto  $z$  situato in  $\xi$  ed un certo piano  $\zeta$  passante per  $x$ , la posizione di  $z$  e  $\zeta$  non dipendendo che dalla  $t$ . Supponiamo per un momento di conoscere  $z$  e  $\zeta$ . Sia  $r_0$  la polare reciproca di  $r$  rispetto alla quadrica di Lie,  $y_1$  e  $\eta_1$  siano rispettivamente il punto corrispondente a  $\pi$  e il piano corrispondente a  $P$  nella corrispondenza  $\Sigma$   $\left(\frac{3}{2}\right)$ . Ancora, sia  $\zeta_1$  il coniugato armonico del piano  $\pi$  rispetto alla coppia di piani  $\xi$  e  $\zeta$ ; e  $z_1$  sia il coniugato armonico del punto  $P$  rispetto alla coppia di punti  $x$  e  $z$ ; sia  $l_1$  la retta intersezione dei piani  $\eta_1$  e  $\zeta_1$ , e  $l_2$  sia la retta che congiunge i punti  $y_1$  e  $z_1$ . Allora le rette  $r'$  e  $r''$  appartengono al regolo (che può ridursi ad un fascio ordinario) determinato dalle rette  $r_0$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  e sono, dentro il regolo, determinate dai birapporti

(\*) Cap. IX § 81 D.

(\*\*) I principali risultati di questo Cap. furono dedotti per la prima volta, nella Memoria di Čech: *L'intorno di un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo*, Annali di Matematica (3) 31, pp. 191 e segg. Ivi si è fatto uso delle coordinate asintotiche e del metodo di Wilczynski. Qui invece faremo tutti i calcoli in coordinate curvilinee qualunque, senza che ne risultino delle complicazioni gravi. Ciò prova i vantaggi che possiede il metodo delle forme differenziali, introdotto dal Fubini nella geometria proiettiva, sul metodo (più vecchio) delle equazioni differenziali usato dal Wilczynski.

$$(l_1 l_2 r_0 r') = 3, \quad (l_1 l_2 r_0 r'') = \frac{1}{3}.$$

Ciò posto, resta da vedere come si possano costruire il punto  $z$  e il piano  $\zeta$ . Sia ancora  $m$  il punto che corrisponde a  $\zeta$ , e  $\mu$  il piano che corrisponde a  $z$  nella corrispondenza  $\Sigma \left( -\frac{5}{4} \right)$ . Basta costruire  $m$  e  $\mu$ . Ciò è particolarmente semplice se  $S$  è rigata. In tal caso infatti  $m$  è semplicemente l'intersezione (diversa da  $x$ ) di  $t'$  con la quadrica  $W_1$  (Cap. V § 35 C) (\*) e similmente  $\mu$  è il piano tangente (diverso da  $\xi$ ) alla quadrica  $W_2$  passante per  $t'$ . Supponiamo invece che  $S$  non sia rigata. Per costruire  $m$  e  $\mu$  anche in questo caso, indichiamo con  $\tau_1$  e  $\tau_2$  le due tangenti asintotiche ad  $S$  in  $x$ , con  $s$  lo spigolo e con  $d$  la direttrice. Siano  $R_1$  e  $R_2$  le due rigate asintotiche di  $S$  (Cap. IX, § 81 E) passanti per  $x$  e precisamente  $R_i$  contenga la retta  $\tau_i$  ( $i = 1, 2$ ). Siano  $\sigma_i$  e  $\delta_i$  i piani che congiungono  $\tau_i$  rispettivamente allo spigolo ed alla direttrice. Infine  $C_1^1$  ( $C_1^2$ ) sia la conica del piano  $\xi$  che corrisponde nella  $\Sigma \left( \frac{3}{4} \right)$  relativa alla rigata  $R_1$  ( $R_2$ ) al fascio di piani contenente i piani  $\sigma_1$  e  $\delta_2$  ( $\sigma_2$  e  $\delta_1$ ). Il punto  $m$  è allora l'intersezione (diversa da  $x$ ) di  $t'$  con quella conica del fascio determinato da  $C_1^1$  e  $C_1^2$  la cui tangente in  $x$  è la polare lineare di  $t$  rispetto alla terna delle tangenti di Darboux.

Le dimostrazioni degli enunciati che precedono si trovano ai §§ 86, 87, 88; al § 90 esaminiamo la connessione delle quadriche di Moutard relative ad una superficie  $S$  non rigata con quelle relative alle rigate asintotiche di  $S$ . Infine studiamo di nuovo al § 91 il cono di Segre e le pangeodetiche del Fubini. Questi due §§ non riguardano pertanto le quadriche di Moutard; ciò nonostante, il metodo di cui ci serviremo essendo analogo alla determinazione della posizione del punto  $z$  e del piano  $\zeta$  (v. sopra) abbiamo ritenuto opportuno metterli al presente Cap.

(\*) Si ricordi in questa connessione che noi abbiamo trovato, al Cap. IX § 82 C, un legame fra  $W_1$  e le  $\Sigma$  ( $e$ ).

## § 86 — Rette polari rispetto ad una quadrica di Moutard.

A) Rette  $r_0, r', r''$  polari di una retta  $r$  rispetto alla quadrica di Lie e alle quadriche di Moutard relative a due direzioni coniugate.

1. Consideriamo una superficie  $S$  non sviluppabile e fissiamo su essa un punto  $x$  ed una tangente non asintotica  $t = (x dx)$  uscente da  $x$ . La polarità rispetto alla quadrica di Moutard  $M_t$  appartenente a  $t$  è data dalle equazioni (2) e (2)<sub>bi</sub> del Cap. IX § 80. Sia  $t' = (x D x)$  la tangente coniugata di  $t$  ed  $M_{t'}$  la quadrica di Moutard appartenente ad essa. Per trovare le equazioni della polarità rispetto ad  $M_{t'}$ , occorre nelle formole citate sostituire  $Du_i$  a  $du_i$ , e quindi (\*)  $\varepsilon du_i$  a  $Du_i$ . Si trova così che il piano

$$\sigma_0 \xi + \sigma_1 d\xi + \sigma_2 D\xi + \sigma_3 \Xi$$

è il piano polare del punto

$$\rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X$$

rispetto a  $M_{t'}$ , se

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \rho_0 - 2 \frac{F_3}{F_2} \rho_1 - \frac{2}{3} \frac{F_3'}{F_2} \rho_2 + \\ &+ \left( \frac{2\varepsilon \Sigma a_{rst} du_r du_s Du_t}{F_2^2} + \frac{2\varepsilon F_3'^2}{9 F_2^2} - 2 \frac{F_3^2}{F_2^2} - \frac{\Pi - P}{F_2} \right) \rho_3, \\ \sigma_1 &= \rho_1 + 2 \frac{F_3}{F_2} \rho_2, \quad \sigma_2 = \rho_2 - \frac{2\varepsilon F_3'}{3 F_2} \rho_3, \quad \sigma_3 = \rho_3. \end{aligned}$$

(\*) Cfr. Cap. VI § 56.

Ciò posto, sia  $r$  una retta che intersechi  $t$ , ma non passi per  $x$  nè stia in  $\xi$ . Supponiamo che  $r$  sia determinata dal punto

$$r_0 x + r_1 dx$$

di  $t$  e dal punto generico

$$\rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 D x + \rho_3 X,$$

sicchè possiamo porre

$$(1) \quad r = (r_0 x + r_1 dx, \rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 D x + \rho_3 X).$$

Siano  $r_0, r', r''$  le rette polari rispettivamente rapporto alla  $H$  (quadratica di Lie), ed alle  $M_t$  e  $M_{t'}$ . Per le equazioni ricordate troviamo subito

$$r_0 = (r_0 \rho_1 - r_1 \rho_0) (\xi d\xi) + r_0 \rho_2 (\xi D \xi) + r_0 \rho_3 (\xi, \Xi) +$$

(1)<sub>bis</sub>

$$+ r_1 \rho_2 (d\xi D \xi) + r_1 \rho_3 (d\xi, \Xi)$$

$$r' = \left\{ r_0 \left( \rho_1 - \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2^2} \rho_3 \right) - r_1 \left[ \rho_0 + 2 \frac{F_3'}{F_2} \rho_2 + \right. \right.$$

$$\left. + \left( \frac{2}{3} \frac{\Sigma a_{r_{iii}} du_r du_i du_t du_i}{F_2^2} + \frac{2}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} + 2\epsilon \frac{F_3'^2}{F_2^2} + \frac{\Pi - P}{F_2} \right) \rho_3 \right\} (\xi d\xi) +$$

(1)<sub>ter</sub>

$$+ \left( r_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} r_1 \right) \left( \rho_2 + 2\epsilon \frac{F_3'}{F_2^2} \rho_3 \right) (\xi D \xi) + \left( r_0 + \frac{2}{3} \frac{F_3}{F_2} r_1 \right) \rho_3 (\xi \Xi) +$$

$$+ r_1 \left( \rho_2 + 2\epsilon \frac{F_3'}{F_2^2} \rho_3 \right) (d\xi D \xi) + r_1 \rho_3 (d\xi, \Xi),$$

$$r'' = \left\{ r_0 \left( \rho_1 + 2 \frac{F_3}{F_2^2} \rho_3 \right) - r_1 \left[ \rho_0 - \frac{2}{3} \frac{F_3'}{F_2} \rho_2 + \right. \right.$$

$$+ \left( \frac{2\epsilon}{3} \frac{\Sigma a_{r_{iii}} du_r du_i du_t du_i}{F_2^2} + \frac{2\epsilon}{9} \frac{F_3'^2}{F_2^2} + 2 \frac{F_3^2}{F_2^2} - \frac{\Pi - P}{F_2} \right) \rho_3 \left. \right\} (\xi d\xi) +$$

(1)<sub>quater</sub>

$$+ \left( r_0 - 2 \frac{F_3}{F_2} r_1 \right) \left( \rho_2 - \frac{2\epsilon}{3} \frac{F_3'}{F_2^2} \rho_3 \right) (\xi D \xi) + \left( r_0 - 2 \frac{F_3}{F_2} r_1 \right) \rho_3 (\xi \Xi) +$$

$$+ r_1 \left( \rho_2 - \frac{2\epsilon}{3} \frac{F_3'}{F_2^2} \rho_3 \right) (d\xi D \xi) + r_1 \rho_3 (d\xi, \Xi).$$

B) Le rette  $l$  del regolo  $r_0, r', r''$ .

Noi poniamo (\*)

$$(2) \quad l_1 = 3r' + r'' - 4r_0, \quad l_2 = r' + 3r'' - 4r_0$$

sicchè

$$l_1 = -r_1 \left[ \frac{16}{3} \frac{F_3'}{F_2} \rho_2 + \left( 2 \frac{\Sigma a_{r_{iii}} du_r du_i du_t du_i}{F_2^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{2\epsilon}{3} \frac{\Sigma a_{r_{iii}} du_r du_i du_t du_i}{F_2^2} + \frac{8}{3} \frac{F_3^2}{F_2^2} + \frac{56\epsilon}{9} \frac{F_3'^2}{F_2^2} + 2 \frac{\Pi - P}{F_2} \right) \rho_3 \left. \right] (\xi d\xi) +$$

(2)<sub>bis</sub>

$$+ \frac{16\epsilon}{3} \frac{F_3'}{F_2} \left( r_0 + \frac{F_3}{F_2} r_1 \right) \rho_3 (\xi D \xi) + \frac{16\epsilon}{3} \frac{F_3'}{F_2^2} r_1 \rho_3 (d\xi D \xi),$$

$$l_2 = \left[ \frac{16}{3} \frac{F_3}{F_2^2} r_0 - r_1 \left( \frac{2}{3} \frac{\Sigma a_{r_{iii}} du_r du_i du_t du_i}{F_2^2} + 2\epsilon \frac{\Sigma a_{r_{iii}} du_r du_i du_t du_i}{F_2^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{56\epsilon}{9} \frac{F_3^2}{F_2^2} + \frac{8\epsilon}{3} \frac{F_3'^2}{F_2^2} - 2 \frac{\Pi - P}{F_2} \right] \rho_3 (\xi d\xi) -$$

(\*)  $l_1$  e  $l_2$  sono le rette di cui si parla già al § 85.

$$-\frac{16}{3} \frac{F_3}{F_2} r_1 \left( \rho_2 - \varepsilon \frac{F'_3}{F_2} \rho_3 \right) (\xi D \xi) - \frac{16}{3} \frac{F_3}{F_2} r_1 \rho_3 (\xi \Xi).$$

È chiaro che  $l_1$  rappresenta una retta passante per  $x$  (\*) ed  $l_2$  una retta che giace nel piano  $\xi$ . Di più, detto  $P$  l'intersezione di  $\xi$  con  $r$  e  $\pi$  il piano che congiunge  $x$  ad  $r$ , sicchè per la (1)

$$(3) \quad P = r_0 x + r_1 dx, \quad \pi = -\varepsilon F_2 \rho_2 \xi + \rho_3 D \xi,$$

la posizione delle rette  $l_1$  e  $l_2$  evidentemente non cambia se la retta  $r$  descrive il fascio di centro  $P$  e di piano  $\pi$ ; ciò si vede subito osservando che nelle (2)<sub>bis</sub> e (2)<sub>ter</sub> non compaiono più  $\rho_0$  e  $\rho_1$ . Si può pertanto prevedere che le rette  $l_1$  e  $l_2$  saranno più facilmente costruibili che le rette  $r'$  e  $r''$ , il che è importante perchè, come ora mostreremo,  $r'$  e  $r''$  sono ben determinate, date  $r_0$ ,  $l_1$  e  $l_2$ .

In generale (\*\*) le tre rette  $r_0$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  determinano un regolo (serie rigata d'una quadrica). Se  $F_3 = 0$ , ossia se  $t$  è una tangente di Darboux, le (1)<sub>bis</sub>, (2)<sub>bis</sub> e (2)<sub>ter</sub> mostrano senza difficoltà che  $r_0$ ,  $l_1$  e  $l_2$  appartengono ad un fascio il cui piano passa per  $t'$  (\*\*\*) ; se invece  $F'_3 = 0$ , ossia se  $t$  è una tangente di Segre,  $r_0$ ,  $l_1$  e  $l_2$  appartengono pure ad un fascio il cui centro sta su  $t'$ . (\*\*\*\*) Ma comunque si scelga  $t$ , le (2) mostrano che le rette  $r'$  e  $r''$  appartengono al regolo o fascio determinato dalle  $r_0$ ,  $l_1$  e  $l_2$ . Dentro tal regolo esse sono determinate, come abbiamo già enunciato, dai birapporti

$$(4) \quad (l_1 l_2 r_0 r') = 3, \quad (l_1 l_2 r_0 r'') = \frac{1}{3}.$$

Ciò si può dedurre dalle sole (2), come il lettore vedrà facilmente da sè; ma lo si può dedurre anche facilmente se si osserva che i

(\*) giacchè vi passano i piani  $\xi$ ,  $d\xi$ ,  $D\xi$ .

(\*\*) sempre se  $F_3 F'_3 \neq 0$ . La dimostrazione è facile.

(\*\*\*) il piano del fascio è il piano polare di  $P$  rispetto ad  $H$ .

(\*\*\*\*) il centro del fascio è il polo di  $\pi$  rispetto ad  $H$ .

punti d'incontro con  $t'$  e i piani che congiungono a  $t'$  le rette  $r'$ ,  $r''$ ,  $r_0$ , corrispondono rispettivamente al piano  $\pi$  e al punto  $P$  nelle  $\Sigma$  (1),  $\Sigma$  (-3),  $\Sigma$  (0), mentre il punto d'incontro di  $l_2$  con  $t'$  corrisponde a  $\pi$  e il piano  $(l_1 t')$  corrisponde a  $P$  in  $\Sigma$   $\left(\frac{3}{2}\right)$ . (\*)

C) I punti  $y_1$ ,  $z_1$ , ed i piani  $\eta_1$ ,  $\zeta_1$ .

Si verifica facilmente che la (2)<sub>bis</sub> può scriversi

$$(5) \quad l_1 = (\eta_1 \zeta_1)$$

dove

$$(5)_{bis} \quad \eta_1 = \left( r_0 + \frac{F_3}{F_2} r_1 \right) \xi + r_1 d\xi,$$

$$\zeta_1 = \left[ \frac{16}{3} \frac{F'_3}{F_2} \rho_2 + \left( 2 \frac{\Sigma a_{r_0 t} du_r du_t du_t du_t}{F_2^2} + \right. \right.$$

$$(5)_{ter} \quad \left. + \frac{2\varepsilon \Sigma a_{r_0 t} du_r du_t Du_t Du_t}{F_2^2} + \frac{8}{3} \frac{F_3^2}{F_2^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{56\varepsilon}{9} \frac{F_3'^2}{F_2^2} + 2 \frac{\Pi - P}{F_2} \right] \rho_3 \xi + \frac{16\varepsilon}{3} \frac{F'_3}{F_2} \rho_3 D \xi.$$

Similmente possiamo scrivere anche  $l_2$ ; si ha e precisamente

$$(6) \quad l_2 = (y_1 z_1)$$

dove

$$(6)_{bis} \quad y_1 = \left( -\varepsilon F_2 \rho_2 + \frac{F'_3}{F_2} \rho_3 \right) x + \rho_3 D x,$$

(\*) Ciò si vede subito dalle seguenti equazioni (5)<sub>bis</sub> e (6)<sub>bis</sub> ricordando le (1)<sub>ter</sub> e le (1)<sub>quater</sub> del Cap. IX § 81.

$$z_1 = \left[ -\frac{16\varepsilon F_3}{3 F_2^2} r_0 + r_1 \left( \frac{2\varepsilon \sum a_{r,ii} du_r du_s du_t du_i}{3 F_2^2} + \right. \right. \\ (6)_{ter} \quad \left. \left. + 2 \frac{\sum a_{r,ii} du_r du_s Du_t Du_i}{F_2^2} + \frac{56\varepsilon F_3^2}{9 F_2^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{8 F_3'^2}{3 F_2^2} - 2\varepsilon \frac{\Pi - P}{F_2} \right) \right] x + \frac{16\varepsilon F_3}{3 F_2^2} r_1 dx.$$

La (6) si deduce subito dalla (2)<sub>ter</sub> trasformandola dapprima secondo le formole (\*)

$$\begin{aligned} (\xi d\xi) &= \varepsilon (xDx), & (\zeta D\xi) &= (xdx), \\ (\xi \Xi) &= \frac{\varepsilon}{F_2} (dx D x), & (d\xi D \xi) &= F_2 (xX), \\ (7) \quad (d\xi, \Xi) &= -\varepsilon \Omega (xDx) - \varepsilon (Dx, X), \\ (D\xi, \Xi) &= -\Omega (xdx) - (dx, X). \end{aligned}$$

La dimostrazione delle (7) è lasciata al lettore come facile esercizio. Esse si possono provare partendo dalle (\*\*)

$$\begin{aligned} (7)_{bis} \quad (xdx D x) &= -\varepsilon F_2 \xi, & (xdx X) &= D\xi, \\ (xDx X) &= \varepsilon d\xi, & (dx D x X) &= \varepsilon F_2 (-\Omega \xi + \Xi). \end{aligned}$$

P. es. per provare la prima delle (7), osserviamo che dalla (12) dell'Introduzione si deduce

$$[(xdx D x), (xdx X)] = (xdx) (xdx D x X)$$

e facciamo uso delle (7)<sub>bis</sub>. In altro modo si possono dedurre le (7) dalle (4) del Cap. IX § 80. P. es. si vede subito dalle citate eq. (4) che si può determinare  $\alpha$  in modo che sia

(\*) Si ricordi che  $\Omega = SX\Xi$ .

(\*\*) Le prime due (7)<sub>bis</sub> sono le (2) e (2)<sub>bis</sub> del Cap. IX § 81. La terza si riduce subito alla seconda. La dimostrazione dell'ultima è lasciata al lettore.

$$(\xi d\xi) = \alpha (xDx).$$

Ora

$$S(\xi d\xi) (dxX) = \alpha S(xDx) (dxX) = -\alpha (xdx D x X) = \varepsilon \alpha F_2;$$

d'altra parte, per la (11) dell'Introduzione,

$$S(\xi d\xi) (dxX) = \begin{vmatrix} S\xi dx & S\xi X \\ Sd\xi dx & Sd\xi X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -F_2 & 0 \end{vmatrix} = F_2, \text{ ecc.}$$

#### D) Determinazione dei punti e piani precedenti.

La retta  $l_1$  appare così come intersezione dei piani  $\eta_1$  e  $\zeta_1$ , e la retta  $l_2$  come congiungente i punti  $y_1$  e  $z_1$ . Ora dalle (3), (5)<sub>bis</sub> e (6)<sub>bis</sub> si vede subito, ricordando le (1)<sub>ter</sub> e (1)<sub>quater</sub> del Cap. IX § 81 che  $y_1$  corrisponde a  $\pi$  e  $\eta_1$  corrisponde a  $P$  in  $\Sigma \left( \frac{3}{2} \right)$ . Il problema di determinare  $l_1$  e  $l_2$  e quindi per le (4) anche quello di determinare  $r'$  e  $r''$  si riduce pertanto a trovare la posizione del punto  $z_1$  e del piano  $\zeta_1$ . Dalle (5)<sub>ter</sub> e (6)<sub>ter</sub> si vede del resto che  $z_1$  non dipende che dal punto  $P$  e  $\zeta_1$  non dipende che dal piano  $\pi$ . Ma possiamo andare più oltre.

Osserviamo dapprima che i punti  $P$  e  $z_1$  stanno su  $t$  e i piani  $\pi$  e  $\zeta_1$  passano per  $t$ . Precisamente le (5)<sub>ter</sub> e (6)<sub>ter</sub> mostrano che il punto

$$z_1 - \frac{16\varepsilon F_3}{3 F_2^2} P$$

coincide geometricamente con  $x$  e similmente il piano

$$\zeta_1 - \frac{16\varepsilon F_3'}{3 F_2^2} \pi$$

coincide geometricamente con  $\xi$ . Posto pertanto

$$(8) \quad z_1 + \frac{16\varepsilon F_3}{3 F_2^2} P = \frac{\varepsilon r_1}{F_2^2} z,$$

$$(8)_{bis} \quad \zeta_1 + \frac{16\epsilon}{3} \frac{F'_2}{F_2} \pi = \frac{p_2}{F_2} \zeta,$$

il punto  $z_1$  è il coniugato armonico di  $P$  rispetto alla coppia  $x$  e  $z$ ; il piano  $\zeta_1$  è il coniugato armonico di  $\pi$  rispetto alla coppia di piani  $\xi$  e  $\zeta$ , sicchè tutto si riduce a determinare la posizione del punto  $z$  e del piano  $\zeta$ . (\*)

Dalle (6)<sub>ter</sub> e (8) si calcola (\*\*)

$$(9) \quad z = \left( \frac{2}{3} \Sigma a_{rsi} du, du, du, du_i + 2\epsilon \Sigma a_{rsi} du, du, Du, Du_i + \frac{80}{9} \frac{F_2^2}{F_2} + \frac{4}{3} J F_2^2 - 2 F_2 (\Pi - P) \right) x + \frac{32}{3} F_2 dx.$$

Similmente si trova dalle (5)<sub>ter</sub> e (8)<sub>bis</sub>

$$(9)_{bis} \quad \zeta = \left( 2 \Sigma a_{rsi} du, du, du, du_i + \frac{2\epsilon}{3} \Sigma a_{rsi} du, du, Du, Du_i + \frac{80\epsilon}{9} \frac{F_2^2}{F_2} - \frac{4}{3} J F_2^2 + 2 F_2 (\Pi - P) \right) \xi + \frac{32\epsilon}{3} F_2 D \xi.$$

E) Il punto  $m$  e il piano  $\mu$ .

Dalla (9) si vede che il punto  $z$  non dipende che dalla tangente  $t$  (ricordiamo che esso sta su  $t$ ). Variando  $t$ ,  $z$  descrive evidentemente nel piano  $\xi$  una curva razionale che in generale è del sesto ordine e ha nel punto  $x$  un punto quintuplo in cui le tangenti ad essa sono le tangenti asintotiche e le tangenti di Darboux. Correlativamente si dica per il piano  $\zeta$ .

(\*) Cfr. § 85.

(\*\*) Abbiamo fatto uso dell'identità (4) del Cap. VI § 57.

Per il seguito è importante osservare che più semplicemente del punto  $z$  e del piano  $\zeta$  si comporta il piano  $\mu$  e il punto  $m$  che loro corrispondono in  $\Sigma \left( -\frac{5}{4} \right)$ . Si trova infatti dalle (9) e (9)<sub>bis</sub> ricordando di nuovo le (1)<sub>ter</sub> e (1)<sub>quater</sub> del Cap. IX § 81 che si può porre

$$(10) \quad m = \left[ 2 \Sigma a_{rsi} du, du, du, du_i + \frac{2\epsilon}{3} \Sigma a_{rsi} du, du, Du, Du_i - \frac{4}{3} J F_2^2 + 2 F_2 (\Pi - P) \right] x + \frac{32\epsilon}{3} F_2 Dx,$$

$$(10)_{bis} \quad \mu = \left[ \frac{2}{3} \Sigma a_{rsi} du, du, du, du_i + 2\epsilon \Sigma a_{rsi} du, du, Du, Du_i + \frac{4}{3} J F_2^2 - 2 F_2 (\Pi - P) \right] \xi + \frac{32}{3} F_2 d\xi.$$

Il punto  $m$  sta su  $t'$  e il piano  $\mu$  passa per  $t'$ . Variando  $t$ ,  $m$  descrive nel piano  $\xi$  una curva razionale che in generale è del quarto ordine e possiede in  $x$  un punto triplo in cui le sue tangenti sono le tangenti di Darboux. Correlativamente per  $\mu$ . Ai §§ seguenti esamineremo come si possano costruire  $m$  e  $\mu$ .

§ 87 — Costruzione del punto  $m$  e del piano  $\mu$ .

A) Caso di una superficie rigata.

Cominciamo col caso semplice di una superficie  $S$  rigata ( $J = 0$ ). Supponiamo

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = \omega = \pm 1, \quad x = y + uz,$$

sicchè (Cap. IV § 31)

$$F_2 = 2\omega du dv, \quad F_3 = \omega(A + 2Bu + Cu^2) dv^2,$$

$$F'_2 = \omega F_3, \quad \Pi - P = 2(B + Cu) dv^2,$$

$$\Sigma a_{rri} du_r du_i du_i = \omega [2(B + Cu) du + (A' + 2B'u + C'u^2) dv] dv^2,$$

$$\Sigma a_{rri} du_r du_i Du_i Du_i = \omega [-2(B + Cu) du + (A' + 2B'u + C'u^2) dv] dv^2.$$

L'equazione (10) del § precedente diventa pertanto

$$\frac{3\omega m}{8 dv^2} = [4(B + Cu) du + (A' + 2B'u + C'u^2) dv] (y + uz) + 4(A + 2Bu + Cu^2) [-z du + (y' + uz') dv].$$

Il secondo membro è lineare in  $du : dv$ . Variando  $du, dv$ , il punto  $m$  descrive quindi semplicemente una *retta*. In particolare posto  $dv = 0$  si trova il punto

$$(B + Cu) y - (A + Bu) z$$

che è il coniugato armonico di  $x$  rispetto ai punti flecnodali di  $(yz)$ , e posto  $du = 0$ , si trova il punto

$$(A' + 2B'u + C'u^2) (y + uz) + 4(A + 2Bu + Cu^2) (y' + uz')$$

che è il polo della generatrice  $(yz)$  rispetto alla conica osculatrice dell'asintotica curva di  $S$  passante per  $x$  (Cap. IV, § 35 C, (12)). Dunque, variando anche  $u$ , il punto  $m$  descrive, come abbiamo enunciato (§ 85), la quadrica  $W_1$  se  $B^2 - AC \neq 0$  oppure il piano  $W_1$  se  $B^2 - AC = 0$  (Cfr. Cap. V, §§ 35 C, e 36 B). Correlativamente troviamo che, variando  $du : dv$  e  $u$ , il piano  $\mu$  involuppa la quadrica (o il punto)  $W_2$ . Si ricordi che  $W_1$  e  $W_2$  sono polari rispetto ad  $H$ .

B) Superficie non rigate.

Supponiamo invece che  $S$  non sia rigata ( $J \neq 0$ ). Cominciamo con l'osservazione che le (10) e (10)<sub>bi</sub> del § 86 possono scriversi, ricordando le (1) e (3)<sub>ter</sub> del Cap. VI § 58

$$m = \left[ \left( \frac{dJ}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i du_i \right) F_3 + \varepsilon \left( \frac{1}{3} \frac{DJ}{J} - 2 \Sigma \phi_i Du_i \right) F'_3 - \right. \\ \left. - \frac{4}{3} J F_2^2 + F_2 \Sigma \left( \frac{J^r}{J} + 2 \phi^r \right) a_{rri} du_r du_i \right] x + \frac{32\varepsilon}{3} F'_3 Dx, \quad (1)$$

$$\mu = \left[ \left( \frac{1}{3} \frac{dJ}{J} - 2 \Sigma \phi_i du_i \right) F_3 + \varepsilon \left( \frac{DJ}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i Du_i \right) F'_3 + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} J F_2^2 - F_2 \Sigma \left( \frac{J^r}{J} + 2 \phi^r \right) a_{rri} du_r du_i \right] \xi + \frac{32}{3} F_3 d\xi. \quad (1)_{bi}$$

Poniamo

$$f_i = \Sigma a_{irs} du_r du_s, \quad (2)$$

sicchè

$$F_3 = \Sigma f_i du_i, \quad F'_3 = \Sigma f_i Du_i, \quad (2)_{bi}$$

$$\Sigma \left( \frac{J^r}{J} + 2 \phi^r \right) a_{rri} du_r du_i = \Sigma f_i \left( \frac{J^i}{J} + 2 \phi^i \right)$$

ed anche

$$J F_2^2 = 2 \Sigma a_{rs}^i f_i du_r du_s, \quad (2)_{ter}$$

Per dimostrare la (2)<sub>ter</sub>, partiamo dall'identità (4) del Cap. VI § 57. Per le (2)<sub>bi</sub> si deduce da essa (\*)

(\*) Si ricordi anche l'equazione (1)<sub>bi</sub> del Cap. VI § 57.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J F_2^2 &= -F_3 \Sigma f_i du_i + \varepsilon F_3' \Sigma f_i Du_i = \\ &= -\varepsilon \Sigma a_{r11} du_r Du_s Du_t \Sigma f_s du_s + \\ &+ \varepsilon \Sigma a_{r11} du_r du_s Du_t \Sigma f_s Du_s = \\ &= \varepsilon \begin{vmatrix} \Sigma a_{r11} du_r du_s Du_t & \Sigma f_s du_s \\ \Sigma a_{r11} du_r Du_s Du_t & \Sigma f_s Du_s \end{vmatrix} = \\ &= \varepsilon \begin{vmatrix} \Sigma a_{r11} du_r Du_t & f_1 \\ \Sigma a_{r12} du_r Du_t & f_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} du & dv \\ Du & Dv \end{vmatrix} \end{aligned}$$

donde per la (5)<sub>bi</sub> del Cap. VI § 56

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J F_2^2 &= -\frac{1}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} \Sigma a_{r11} du_r Du_t & f_1 \\ \Sigma a_{r12} du_r Du_t & f_2 \end{vmatrix} = \\ &= \varepsilon \Sigma \partial_{r1q} a_{r1q} f_q du_r Du_t \\ &= \varepsilon \Sigma \partial_{r1q} a^{11} \partial_{1k} a_{r1q} f_q du_r du_k \\ &= \varepsilon \Sigma \partial_{r1q} \partial_{1k} a_{r1q}^1 f_q du_r du_k \\ &= \varepsilon \Sigma \partial_{r1q} b_{rpk} f_q du_r du_k = \Sigma a_{rk}^2 f_q du_r du_k, \text{ c. d. d.} \end{aligned}$$

Sostituendo le (2)<sub>bi</sub> e (2)<sub>lor</sub> nelle (1) e (1)<sub>bi</sub>, quest'ultime diventano

$$\begin{aligned} m &= \left[ \left( \frac{dJ}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i du_i \right) \Sigma f_i du_i + \varepsilon \left( \frac{1}{3} \frac{DJ}{J} - 2 \Sigma \phi_i Du_i \right) \Sigma f_i Du_i - \right. \\ (3) \quad &- \frac{8}{3} \Sigma a_{rs}^1 f_i du_r du_s + \Sigma \left( \frac{J^i}{J} + 2 \phi^i \right) f_i \cdot F_2 \Big] x + \frac{32\varepsilon}{3} \Sigma f_i Du_i \cdot Dx, \\ \mu &= \left[ \left( \frac{1}{3} \frac{dJ}{J} - 2 \Sigma \phi_i du_i \right) \Sigma f_i du_i + \varepsilon \left( \frac{DJ}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i Du_i \right) \Sigma f_i Du_i + \right. \\ (3)_{bi} \quad &+ \frac{8}{3} \Sigma a_{rs}^1 f_i du_r du_s - \Sigma \left( \frac{J^i}{J} + 2 \phi^i \right) f_i \cdot F_2 \Big] \xi + \frac{32}{3} \Sigma f_i du_i \cdot d\xi. \end{aligned}$$

C) Coniche C e coni Γ.

Il punto *m* si ottiene dando nella (3) ai *du<sub>i</sub>* i valori corrispondenti alla tangente data *t*, e sostituendo a *f<sub>i</sub>* i loro valori (2). Ora fissando comunque *f<sub>i</sub>* e variando *du<sub>i</sub>*, il punto rappresentato dal secondo membro di (3) descrive una conica *C* situata in  $\xi$ . Correlativamente il secondo membro di (3)<sub>bi</sub> rappresenta un cono quadrico  $\Gamma$  di centro *x*. Di più, variando ora anche *f<sub>i</sub>*, le coniche *C* descrivono, come si vede subito, un fascio [C] di coniche nel piano  $\xi$  di cui *x* è un punto base, e i coni  $\Gamma$  formano una schiera [Γ] di coni di centro *x* di cui  $\xi$  è un piano base; e la tangente a *C* nel punto base *x* corrisponde a quel valore di *du : dv* per cui

$$\Sigma f_i du_i = 0$$

ed è pertanto la tangente ad *S* di coordinate

$$(4) \quad (x, \Sigma \partial^{rs} f_r x_s);$$

e similmente, la tangente coniugata alla (4) è la generatrice di  $\Gamma$  nel piano base  $\xi$ .

La costruzione di *m* e  $\mu$  si riduce quindi a determinare il fascio [C] e la schiera [Γ]. Infatti, il punto *m* sta su *t'* e su quella conica del fascio [C] la cui tangente in *x* è la polare lineare di *t* rispetto alla terna delle tangenti di Darboux; ciò risulta dal confronto di (2) e (4). Correlativamente,  $\mu$  passa per *t'* ed è piano tangente a quel cono della schiera [Γ] che tocca  $\xi$  lungo la stessa polare lineare di *t* rispetto alla terna di tangenti di Darboux.

Basta considerare soltanto (e così si è fatto nella Memoria citata al § 85) la coppia delle coniche del fascio [C] (e la coppia di coni di [Γ]) che si ottengono supponendo in (3) e (3)<sub>bi</sub>  $\Sigma a^{rs} f_r f_s = 0$ ; geometricamente esse sono quelle coniche del fascio che toccano in *x* le tangenti asintotiche di *S*. Infatti 1° la quaterna di tangenti di *S* formata dalle due tangenti asintotiche di *S*, da *t'* e dalla polare lineare di *t* rispetto alla terna di tangenti di Darboux, 2° la quaterna di punti su *t'* formata dalle intersezioni di *t'* (diverse da *x*) colle due coniche sopra dette, dal punto *x* e dal punto *m*,

3° la quaterna correlativa alla precedente sono tre quaterne proiettive.

§ 88 — I fasci di coniche  $C_k$ .

1. Generalizzando un poco i risultati del § precedente, consideriamo le coniche  $C_k$  del piano  $\xi$  che sono descritte dal punto rappresentato da

$$(1) \quad \left[ \left( \frac{dJ}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i du_i \right) \Sigma f_i du_i + s \left( \frac{1}{3} \frac{DJ}{J} - 2 \Sigma \phi_i Du_i \right) \Sigma f_i Du_i - \right. \\ \left. - \frac{8k}{3} \Sigma a_{rs} f_i du_r du_s + \Sigma \left( \frac{J^i}{J} + 2 \phi^i \right) f_i F_2 \right] x + \frac{32s}{3} \Sigma f_i Du_i \cdot Dx$$

se variano le  $du_i$ , mentre le  $f_i$  e  $k$  restano fisse. Variando anche le  $f_i$ , otteniamo un fascio  $[C_k]$  di coniche; in particolare per  $k = 1$  ritorniamo al fascio  $[C]$  del § precedente.

Correlativamente potremmo considerare i coni  $\Gamma_k$  ottenuti dall'espressione

$$(1)_{bis} \quad \left[ \left( \frac{dJ}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i du_i \right) \Sigma f_i du_i + s \left( \frac{1}{3} \frac{DJ}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i Du_i \right) \Sigma f_i Du_i + \right. \\ \left. + \frac{8k}{3} \Sigma a_{rs} f_i du_r du_s - \Sigma \left( \frac{J^i}{J} + 2 \phi^i \right) f_i F_2 \right] \xi + \frac{32}{2} \Sigma f_i du_i \cdot d\xi;$$

ma ciò è inutile, giacchè  $\Gamma_k$  è polare di  $C_k$  rispetto ad  $H$ , come si vede subito.

Per trovare il significato geometrico del fascio  $[C_k]$  ( $k$  qualunque, ma fisso) basta caratterizzare le due coniche del fascio che toccano nel punto base  $x$  le tangenti asintotiche di  $S$ . Siano  $\tau_1, \tau_2$  le tangenti asintotiche di  $S$  in  $x$ , e  $C_k^i$  la conica del fascio  $[C_k]$  che tocca  $\tau_i$  in  $x$ .

I valori di  $f_i$  corrispondenti p. es. a  $C_k^1$  soddisfano all'equazione

$$(2) \quad \Sigma a^{rs} f_r f_s = 0$$

e quindi anche alle (è  $f^i = \Sigma a^{ik} f_k$ )

$$(2)_{bis} \quad f^i = \sqrt{s} \Sigma \phi^{ir} f_r \quad (*)$$

Dimostriamo che: l'intersezione (diversa da  $x$ ) di  $C_k^1$  con  $\tau_2$  sta sul secondo spigolo. Per calcolare la detta intersezione, ricordiamo il fatto che ogni tangente asintotica è polare lineare dell'altra rispetto alla terna di tangenti di Darboux (\*\*); ciò mostra che l'espressione del punto cercato si può ottenere da (1) sostituendovi a  $du_i$  valori tali che sia

$$(3) \quad \Sigma a_{rs}^i f_i du_r du_s = 0.$$

Sarà allora evidentemente anche  $F_2 = 0$  e quindi per la (3) del Cap. IX § 84 (\*\*\*)

$$(3)_{bis} \quad Du_i = -\sqrt{s} du_i, \quad F_2 = 0.$$

Tenendo conto di (2), (2)<sub>bis</sub>, (3) e (3)<sub>bis</sub> vediamo che tutti i termini di (1) che restano diversi da zero son divisibili per  $\Sigma f_i du_i$ . Scartando questo fattore resta l'espressione

$$\left( \frac{dJ}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i du_i + \frac{1}{3} \frac{dJ}{J} - 2 \Sigma \phi_i du_i \right) dx + \frac{32}{3} dx = \\ = \frac{32}{3} \left[ dx - \frac{1}{4} \left( \Sigma \phi_i du_i - \frac{1}{2} \frac{dJ}{J} \right) x \right],$$

che rappresenta infatti un punto dello spigolo (Cap. IX § 84, (1)<sub>ter</sub>).

La tangente alla conica  $C_k$  in un suo punto qualunque si ottiene, com'è ben noto, eseguendo sull'espressione (1) l'operazione polare

$$\lambda^1 \frac{\partial}{\partial (du_1)} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial (du_2)}$$

( $\lambda^1 : \lambda^2$  è il parametro del punto mobile sulla tangente). Posto ( $\lambda_i = \Sigma a_{ik} \lambda^k$ )

$$\Delta^i = \Sigma \phi^{ir} \lambda_r$$

tale tangente si ottiene pertanto da

(\*) Passando a  $C_k^2$  occorre evidentemente cambiare il segno di  $\sqrt{s}$ .  
(\*\*) Cfr. anche le (4) e (4)<sub>bis</sub> del Cap. IX § 84.  
(\*\*\*) Cfr. la nota (\*).

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{dJ}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i du_i \right) \Sigma f_i \lambda^i + \varepsilon \left( \frac{1}{3} \frac{DJ}{J} - 2 \Sigma \phi_i Du_i \right) \Sigma f_i \Lambda^i + \right. \\ & + \left( \frac{\Sigma J_i \lambda^i}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i \lambda^i \right) \Sigma f_i du_i + \varepsilon \left( \frac{1}{3} \frac{\Sigma J_i \Lambda^i}{J} - 2 \Sigma \phi_i \Lambda_i \right) \Sigma f_i Du_i - \\ & (4) \\ & - \frac{16k}{3} \Sigma a_{rs}^i f_i du_r \lambda^s + 2 \Sigma \left( \frac{J^i}{J} + 2 \phi^i \right) f_i \Sigma a_{rs} du_r \lambda^s \Big] x + \\ & + \frac{32\varepsilon}{3} (\Sigma f_i Du_i \cdot \Sigma x_i \Lambda^i + \Sigma f_i \Lambda^i \cdot Dx). \end{aligned}$$

Applicando ciò alla tangente di  $C_k^1$  nel suo punto precedentemente determinato, dobbiamo semplificare la (4) mediante le (2)<sub>bis</sub>, (3) e (3)<sub>bis</sub>. Noi vogliamo determinare l'intersezione della detta tangente con  $\tau_1$  mostrando che essa sta sulla seconda direttrice. A tal fine possiamo porre

$$\lambda^i = \Sigma \vartheta^{ir} f_r, \quad f_r = -\varepsilon \Sigma \vartheta^{ir} \lambda^i$$

sicchè

$$\Lambda^i = \sqrt{\varepsilon} \lambda^i = \sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta^{ir} f_r$$

e

$$\Sigma f_i \lambda^i = \Sigma f_i \Lambda^i = 0.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \Sigma a_{rs}^i f_i \lambda^s du_r &= \varepsilon \Sigma a_{rs}^i \vartheta_{ii} \lambda^s \lambda^s du_r = \\ &= \varepsilon \Sigma b_{rs} \lambda^s \lambda^s du_r = 0, \end{aligned}$$

per il fatto che ogni tangente asintotica è polare dell'altra rispetto alla terna delle tangenti di Segre. Nell'espressione (4) risultano quindi nulli tutti i termini che contengono come fattore o  $\Sigma f_i \lambda^i$  oppure  $\Sigma f_i \Lambda^i$ , e il termine che contiene  $k$ . Di più, essendo

$$\Sigma a_{rs} du_r \lambda^s = \Sigma a_{rs} \vartheta^{si} f_i du_r = -\Sigma f_i Du_i = \sqrt{\varepsilon} \Sigma f_i du_i,$$

si può scartare il fattore  $\Sigma f_i du_i$  e rimane

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\Sigma J_i \lambda^i}{J} - \frac{2}{3} \Sigma \phi_i \lambda^i - \frac{1}{3} \frac{\Sigma J_i \lambda^i}{J} 2 \Sigma \phi_i \lambda^i + \right. \\ & (4)_{bis} \\ & \left. + 2 \sqrt{\varepsilon} \Sigma \left( \frac{J^i}{J} + 2 \phi^i \right) f_i \right] x - \frac{32}{3} \Sigma x_i \lambda^i \end{aligned}$$

Ora essendo

$$\Lambda^i = \sqrt{\varepsilon} \lambda^i,$$

ossia

$$\sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta^{ir} \lambda_r = \varepsilon \lambda^i,$$

si deduce

$$f_p = -\varepsilon \Sigma \vartheta_{ip} \lambda^i = -\sqrt{\varepsilon} \Sigma \vartheta^{ir} \vartheta_{ip} \lambda_r,$$

oppure

$$f_i = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \lambda_i,$$

e quindi

$$\begin{aligned} 2 \sqrt{\varepsilon} \Sigma \left( \frac{J^i}{J} + 2 \phi^i \right) f_i &= 2 \Sigma \left( \frac{J^i}{J} + 2 \phi^i \right) \lambda_i = \\ &= 2 \frac{\Sigma J_i \lambda^i}{J} + 4 \Sigma \phi_i \lambda^i. \end{aligned}$$

L'espressione (4)<sub>bis</sub> diventa pertanto

$$\begin{aligned} & \left( \frac{8}{3} \frac{\Sigma J_i \lambda^i}{J} + \frac{16}{3} \Sigma \phi_i \lambda^i \right) x - \frac{32}{3} \Sigma x_i \lambda^i = \\ & = -\frac{32}{3} \left[ \Sigma x_i \lambda^i - \frac{1}{2} \left( \Sigma \phi_i \lambda^i + \frac{1}{2} \Sigma J_i \lambda^i \right) x \right], \end{aligned}$$

che rappresenta infatti un punto della seconda direttrice come si vede dal confronto con la (1)<sub>bis</sub> del Cap. IX § 84.

Riassumiamo il risultato:

*Scegliendo comunque  $k$ , la conica  $C_k^1$  (\*) del piano  $\xi$  passa per  $x$  ed ha ivi la tangente  $\tau_1$ . Il secondo punto d'intersezione di  $C_k^1$  con  $\tau_2$  sta sul secondo spigolo. La tangente a  $C_k^1$  in questo punto interseca  $\tau_1$  in un punto situato sulla seconda direttrice.*

Ora questo è evidentemente conseguenza immediata (\*\*) del teorema:

*Sia  $R_2$  la rigata asintotica di  $S$  che ha per generatrice  $\tau_2$ . I punti di  $C_k^1$  corrispondono nella  $\Sigma \left( \frac{3k}{4} \right)$  relativa a  $R_2$  ai piani del fascio determinato dal piano che congiunge  $\tau_2$  al primo spigolo e dal piano che congiunge  $\tau_1$  alla prima direttrice. (\*\*\*)*

(\*) Similitudo per  $C_k^2$ .

(\*\*) Cfr. Cap. IX § 81 E.

(\*\*\*) La conseguenza di questo teorema per il problema di costruire le quadriche di Montard è già stata enunciata al § 85.

La dimostrazione è immediata se facciamo uso di coordinate asintotiche  $(u, v)$  su  $S$ . Infatti, l'espressione (1) diventa in tal caso, usando per semplicità forme normali ( $\beta\gamma = a_{12}$ ),

$$\left[ -\frac{8}{3} \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} du^2 f_1 - \frac{8}{3} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} dv^2 f_2 - \frac{8k}{3} (\beta du^2 f_2 + \gamma dv^2 f_1) + \frac{16}{3} du dv \left( \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} f_2 + \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} f_1 \right) \right] x + \frac{32}{3} (f_1 du - f_2 dv) (x_u du - x_v dv).$$

Per fissare le idee, sia  $(x x_v)$  la generatrice  $\tau_2$  di  $R_2$ . La conica  $C_k^1$  si ottiene, supponendo  $f_1 = 0$ , sicchè  $C_k^1$  è descritta dal punto

$$\left( \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} dv^2 + k\beta du^2 - 2 \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} du dv \right) x + 4 dv (x_u du - x_v dv).$$

La corrispondenza  $\Sigma \left( \frac{3k}{4} \right)$  relativa a  $R_2$  associa (cfr. Cap. IX alla fine del § 81), il punto

$$\left( s_0 s_2 - \frac{k\beta}{4} s_1^2 \right) x + s_1 s_2 x_u + s_2^2 x_v$$

ed il piano

$$s_0 \xi + s_1 \xi_u + s_2 \xi_v.$$

La conica  $C_k^1$  corrisponde pertanto nella  $\Sigma \left( \frac{3k}{4} \right)$  relativa a  $R_2$  al fascio di piani

$$\left( \frac{1}{2} \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} du - \frac{1}{4} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} dv \right) \xi - \xi_u du + \xi_v dv.$$

In particolare per  $du=0$  otteniamo il piano

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \xi + \xi_v$$

che contiene  $\tau_2$  e il primo spigolo, e per  $dv=0$  il piano

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} \xi + \xi_u$$

che contiene  $\tau_1$  e la prima direttrice (Cfr. Cap. III, § 25 B), c. d. d.

### § 89 — Significato geometrico degli invarianti proiettivi più semplici di una superficie.

#### A) Intorno del quarto ordine di una superficie.

In questo § ci occuperemo di superficie  $S$  non rigate e faremo uso di forme normali ( $J = -1$ ). Gli invarianti proiettivi più semplici di  $S$  sono del quarto ordine:

$$\Phi = \Sigma a^{ik} \phi_i \phi_k, \quad \Psi = \Sigma a^{ikl} \phi_i \phi_k \phi_l, \quad \Psi' = \Sigma b^{ikl} \phi_i \phi_k \phi_l, \quad (1)$$

$$\Psi^2 - \varepsilon \Psi'^2 = \frac{1}{2} \Phi^3.$$

(Cap. VI, § 59 A). Sarebbe facile dimostrare che ogni invariante proiettivo di  $S$  del quarto ordine è funzione razionale di  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\Psi'$ . Ora dalle ricerche dei §§ precedenti risulta che l'intorno del quarto ordine di  $S$  relativo ad un suo punto generico  $x$  è perfettamente determinato dalla quadrica di Lie  $H$  e dalle due coniche  $C_k^1$ ,  $C_k^2$  (\*). Infatti, dal teorema finale del § precedente risulta subito, confrontando con quelli del Cap. IX, § 81 E e § 81 F che le  $\Sigma(c)$  relative al punto  $x$  di  $S$  sono completamente determinate date  $\Sigma(0)$  (che è parte della polarità rispetto ad  $H$ ) e  $C_k^1$ ,  $C_k^2$ ; ciò posto, i teoremi enunciati al § 85 e provati negli ulteriori §§ mostrano che, date  $H$ ,  $C_k^1$  e  $C_k^2$ , possiamo costruire la quadrica di Moutard appartenente a qualsiasi tangente a  $S$  in  $x$ , e quindi anche la conica osculatrice (di contatto cinquepunto) in  $x$  di ogni sezione piana di  $S$  passante per  $x$ .

Gli invarianti (1) sono quindi invarianti proiettivi della figura composta da  $H$ ,  $C_k^1$ ,  $C_k^2$  (fissando  $k$  a piacere nostro). Più precisamente, noi dimostreremo che essi sono già invarianti della coppia di coniche  $C_k^1$  e  $C_k^2$ . Per brevità ci limitiamo all'ipotesi  $\Phi \neq 0$ ; sarà un utile esercizio per il lettore di effettuare i calcoli analoghi nell'ipotesi  $\Phi = 0$ .

(\*)  $k$  essendo una costante fissata a piacere. P. es. possiamo supporre  $k=1$ .

B) Invarianti delle coniche  $C_k^1$  e  $C_k^2$ .

Il fascio di coniche nel piano  $\xi$  determinato dalle  $C_k^1$  e  $C_k^2$  possiede un punto base in  $x$ . Siano  $y_1, y_2, y_3$  le altre intersezioni di  $C_k^1$  e  $C_k^2$ . Noi calcoleremo i birapporti

$$(\tau_i), (xy_1), (xy_2), (xy_3), \quad i = 1, 2$$

$\tau_1$  e  $\tau_2$  essendo le due tangenti asintotiche a  $S$  in  $x$ . Per ciò che si è detto sopra, tali birapporti sono funzioni degli invarianti (1).

Cerchiamo dapprima la posizione delle rette  $(xy_\nu)$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ). A tale scopo, occorre cercare il valore di  $f_1 : f_2$  tale che sia riducibile la conica  $C_k$  rappresentata dall'espressione (1) del § 88 ossia, giacchè adesso supponiamo  $J = -1$ , dall'espressione

$$(2) \quad (\Sigma \phi_i du_i \cdot \Sigma f_i du_i + 3 \epsilon \Sigma \phi_i Du_i \cdot \Sigma f_i Du_i + 4 k \Sigma a_i^2 f_i du_i du_i - 3 \Sigma \phi^i f_i \cdot \varphi_2) x - 16 \epsilon \Sigma f_i Du_i \cdot Dx.$$

Si vede senza difficoltà (\*) che le coniche  $C_k$  riducibili si ottengono scegliendo  $f_1 : f_2$  soddisfacente all'equazione cubica

$$(3) \quad \Sigma \phi^r f_r \cdot \Sigma a^{rs} f_r f_s - 2k \Sigma a^{rs} f_r f_s f_i = 0.$$

Dalla forma dell'espressione (2) si deduce poi subito che le rette  $(xy_i)$  sono quelle rette  $(xdx)$  per cui  $du_1 : du_2$  soddisfa all'equazione cubica

(\*)  $x$  essendo un punto base del fascio  $[C_k]$ , per trovare le coniche riducibili occorre evidentemente scegliere le  $f_i$  in (2) in modo che il coefficiente di  $x$  risulti divisibile per  $\Sigma f_i Du_i = \Sigma f_i a^{ir} \partial_{r_2} du_i = \Sigma f^r \partial_{r_2} du_i = \sqrt{|A|} (f^1 du_2 - f^2 du_1)$ , oppure che esso si annulli ponendo  $du_i = f^i$ . Fatta tale sostituzione, si arriva subito alla (3). (Essendo  $du_i = f^i$ , sarà

$$Du_i = \Sigma \partial^{ir} a_{r_2} f^r = \Sigma \partial^{ir} f_r).$$

$$(3)_{bis} \quad 2k \varphi'_3 + \varphi_2 \Sigma \phi_i Du_i = 0.$$

Le tangenti coniugate alle  $(xy_i)$  sono date da

$$(3)_{ter} \quad 2k \varphi_3 - \varphi_2 \Sigma \phi_i du_i = 0.$$

Dobbiamo pertanto determinare i birapporti  $R_1$  e  $R_2$  delle quaterne composte dalle radici di (3)<sub>bis</sub> e dall'una o dall'altra radice di  $\varphi_2 = 0$ . Sostituiamo del resto (3)<sub>ter</sub> a (3)<sub>bis</sub> in questo calcolo, il che è evidentemente lecito. Per far comprendere bene tal calcolo un po' complicato, facciamo una breve digressione.

C) Alcune formole preliminari.

L'identità (4)<sub>bis</sub> del Cap. VI § 57 B mostra che le forme differenziali cubiche

$$\varphi_3 + \sqrt{\epsilon} \varphi'_3, \quad \varphi_3 - \sqrt{\epsilon} \varphi'_3 \quad (*)$$

sono cubi di forme lineari; poniamo pertanto

$$(4) \quad \varphi_3 + \sqrt{\epsilon} \varphi'_3 = 2\omega_1^3, \quad \varphi_3 - \sqrt{\epsilon} \varphi'_3 = 2\omega_2^3,$$

sicchè

$$(4)_{bis} \quad \varphi_3 = \omega_1^3 + \omega_2^3, \quad \varphi'_3 = \epsilon \sqrt{\epsilon} (\omega_1^3 - \omega_2^3).$$

Dall'identità citata risulta di più

$$(2\omega_1 \omega_2)^3 = \varphi_2^3,$$

sicchè possiamo supporre

(\*) Fissiamo a piacere il segno di  $\sqrt{\epsilon}$ .

$$(4)_{ter} \quad \varphi_2 = 2\omega_1\omega_2. \quad (*)$$

La forma  $\omega_1$  è determinata a meno di un fattore che è radice cubica dell'unità; scelto tal fattore, anche  $\omega_2$  è ben determinata.

Scriviamo ancora  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$  per indicare le forme che si ottengono dalle  $\omega_1, \omega_2$  sostituendo a  $du_i$  i differenziali coniugati  $Du_i$ . È chiaro che  $\bar{\omega}_i$  differisce da  $\omega_i$  soltanto per un fattore. Per determinare tale fattore diamo in  $\omega_i$  e  $\bar{\omega}_i$  alle  $du, dv$  dei valori che annullano  $\omega_j$  ( $i > j$ ). Si vede allora subito che è (cfr. la (3) del Cap. IX § 84)

$$\bar{\omega}_i = \pm \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \omega_i.$$

Ora sostituendo i differenziali coniugati in (4), otteniamo (\*\*)

$$\varepsilon \varphi'_3 + \sqrt{\varepsilon} \varphi_3 = 2\bar{\omega}_1^3, \quad \varepsilon \varphi'_3 - \sqrt{\varepsilon} \varphi_3 = 2\bar{\omega}_2^3,$$

sicchè infine

$$(4)_{quater} \quad \bar{\omega}_1 = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = -\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \omega_2.$$

Dimostriamo adesso che, posto

$$(5) \quad \Sigma \phi_i du_i = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2,$$

è

$$\lambda_1^3 = 2 \frac{(\Psi - \sqrt{\varepsilon} \Psi')^2}{\Phi^3}, \quad \lambda_2^3 = 2 \frac{(\Psi + \sqrt{\varepsilon} \Psi')^2}{\Phi^3}$$

(5)<sub>bis</sub>

$$2\lambda_1\lambda_2 = \Phi.$$

Infatti sostituendo nella (5)  $Du_i$  al posto di  $du_i$ , otteniamo per le (4)<sub>quater</sub>

(\*) Le forme lineari  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono (anche in notazione) identiche a quelle che stanno alla base del metodo cinematico usato da Cartan nelle sue ricerche relative alla deformazione proiettiva.

(\*\*) Cap. VI, § 57, (1)<sub>bis</sub> e (1)<sub>ter</sub>.

$$\Sigma \partial_{ri} \phi^r du_i = \varepsilon \sqrt{\varepsilon} (\lambda_1 \omega_1 - \lambda_2 \omega_2)$$

e, confrontando con (5), deduciamo che:

$$2\lambda_1 \omega_1 = \Sigma (\phi_i + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} \phi^r) du_i,$$

(6)

$$2\lambda_2 \omega_2 = \Sigma (\phi_i - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} \phi^r) du_i.$$

Si deduce pertanto da (4)<sub>ter</sub>

$$2\lambda_1 \lambda_2 \cdot \Sigma a_{ik} du_i du_k = \Sigma (\phi_i + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} \phi^r) (\phi_k - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{rk} \phi^r) du_i du_k.$$

È evidentemente lecito sostituire in quest'identità  $a^{ik}$  al posto di  $du_i du_k$ . Fatto ciò, risulta

$$4\lambda_1 \lambda_2 = \Sigma a^{ik} \phi_i \phi_k + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} \phi^r \phi^i - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{rk} \phi^r \phi^k - \varepsilon \Sigma \partial_{ri} \partial_{rk} a^{ik} \phi^r \phi^i.$$

Il secondo e terzo membro a destra sono evidentemente nulli; il quarto

$$-\varepsilon \Sigma \partial_{ri} \partial_{rk} a^{ik} \phi^r \phi^i = -\varepsilon \Sigma \partial_{ri} \partial_{rk} a^{ik} a^{pr} a^{qs} \phi_p \phi_q,$$

essendo

$$\Sigma \partial_{ri} a^{ik} a^{pr} = \partial^{pk}, \quad \Sigma \partial^{pk} \partial_{rk} = \begin{cases} -\varepsilon & \text{se } p = s \\ 0 & \text{se } p > s \end{cases}$$

vale  $\Sigma a^{pr} \phi_p \phi_q = \Phi$ , sicchè l'ultima delle (5)<sub>bis</sub> è provata. Ora dalle (4) e (6) si deduce

$$4\lambda_1^3 (\varphi_3 + \sqrt{\varepsilon} \varphi'_3) = \Sigma (\phi_i + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} \phi^r) (\phi_k + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{rk} \phi^r) \times$$

$$\times (\phi_i + \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} \phi^r) du_i du_k du_i,$$

$$4\lambda_2^3 (\varphi_3 - \sqrt{\varepsilon} \varphi'_3) = \Sigma (\phi_i - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} \phi^r) (\phi_k - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{rk} \phi^r) \times$$

$$\times (\phi_i - \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} \phi^r) du_i du_k du_i.$$

Sostituendo qui  $a^{ik}$  a  $du_i du_k du_i$ , otteniamo

$$4\lambda_1^3 (\Psi + \sqrt{\varepsilon} \Psi') = \Sigma a^{ik} \phi_i \phi_k \phi_l + 3\sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} a^{ik} \phi^r \phi_k \phi_l +$$

$$+ 3\varepsilon \Sigma \partial_{ri} \partial_{sk} a^{ik} \phi^r \phi^s \phi_l + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} \partial_{sk} \partial_{tl} a^{ik} \phi^r \phi^s \phi^t,$$

$$4\lambda_2^3 (\Psi - \sqrt{\varepsilon} \Psi') = \Sigma a^{ik} \phi_i \phi_k \phi_l - 3\sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} a^{ik} \phi^r \phi_k \phi_l +$$

$$+ 3\varepsilon \Sigma \partial_{ri} \partial_{sk} a^{ik} \phi^r \phi^s \phi_l - \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \Sigma \partial_{ri} \partial_{sk} \partial_{tl} a^{ik} \phi^r \phi^s \phi^t.$$

Ma dal Cap. VI § 57 (3), (3)<sub>bis</sub> e § 59 (1) si deduce:

$$\Sigma \partial_{ri} a^{ik} \phi^r \phi_k \phi_l = -\Psi',$$

$$\Sigma \partial_{ri} \partial_{sk} a^{ik} \phi^r \phi^s \phi_l = \varepsilon \Psi,$$

$$\Sigma \partial_{ri} \partial_{sk} \partial_{tl} a^{ik} \phi^r \phi^s \phi^t = -\varepsilon \Psi',$$

sicchè risulta

$$4\lambda_1^3 (\Psi + \sqrt{\varepsilon} \Psi') = 4 (\Psi - \sqrt{\varepsilon} \Psi'),$$

$$4\lambda_2^3 (\Psi - \sqrt{\varepsilon} \Psi') = 4 (\Psi + \sqrt{\varepsilon} \Psi'),$$

onde osservando che l'identità (§ 59, (2)) che vale fra gli invarianti  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\Psi'$  può scriversi

$$(\Psi + \sqrt{\varepsilon} \Psi') (\Psi - \sqrt{\varepsilon} \Psi') = \frac{1}{2} \Phi^2$$

e ricordando l'ipotesi fatta che  $\Phi \neq 0$  otteniamo anche le altre (5)<sub>bis</sub>.

#### D) Birapporti $R_1$ ed $R_2$ .

Dopo questa digressione, ritorniamo ai birapporti  $R_1$  e  $R_2$ . Precisamente indico con  $R_1$  ( $R_2$ ) il birapporto della quaterna composta dalla terna delle radici di (3)<sub>bis</sub>, o ciò che è lo stesso di (3)<sub>ter</sub>, e dalla radice di  $\omega_1 = 0$  ( $\omega_2 = 0$ ). Per le (4)<sub>bis</sub>, (4)<sub>ter</sub> e (5) la (3)<sub>ter</sub> può scriversi

$$k(\omega^3 + \omega_2^3) - (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) \omega_1 \omega_2 = 0,$$

sicchè  $R_1$  per es. è il birapporto delle radici della forma biquadratica

$$(7) \quad k\omega_1^4 - \lambda_1 \omega_1^3 \omega_2 - \lambda_2 \omega_1^2 \omega_2^2 + k\omega_1 \omega_2^3.$$

Ora è ben facile calcolare  $R_1$ . Si trova (\*)

$$(8) \quad \frac{R_1^2 (R_1 - 1)^2}{(R_1 + 1)^2 (2R_1 - 1)^2 (R_1 - 2)^2} =$$

$$= k^2 \Phi^2 \frac{\Phi^5 + 64k(\Psi^2 + \varepsilon \Psi'^2) - 36k^2 \Phi^4 - 108k^4 \Phi^3}{[8(\Psi + \sqrt{\varepsilon} \Psi')^2 + 9k\Phi^4 - 54k^2 \Phi^3]^2}.$$

Per dimostrare la (8), ricordiamo (\*\*\*) che data una forma biquadratica

$$a_0 \omega_1^4 + a_1 \omega_1^3 \omega_2 + a_2 \omega_1^2 \omega_2^2 + a_3 \omega_1 \omega_2^3 + a_4 \omega_2^4$$

essa possiede due invarianti (relativi)

$$i = a_2^2 - 3a_1 a_3 + 12a_0 a_4,$$

$$j = 27a_1^2 a_4 + 27a_0 a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_0 a_2 a_4 - 9a_1 a_3 a_3$$

mediante cui il birapporto  $R$  delle radici della forma si esprime secondo la formola

$$\frac{(R^2 - R + 1)^3}{[(R + 1)(2R - 1)(R - 2)]^2} = \frac{i^3}{j^2}$$

o meglio (per il nostro scopo)

$$\frac{R^2 (R - 1)^2}{[(R + 1)(2R - 1)(R - 2)]^2} = \frac{4i^3 - j^2}{27j^2}.$$

(\*) L'equazione che dà  $R_2$  differisce dall'(8) soltanto nel segno di  $\sqrt{\varepsilon}$ .

(\*\*) Cfr. p. es. *Cesaro* (Corso di Analisi Algebrica; Cap 51 §§ 2 e 3).

Nel caso particolare della forma (7) è

$$i = \lambda_2^2 + 3k\lambda_1, \quad j = -2\lambda_2^2 - 9k\lambda_1\lambda_2 + 27k^3,$$

$$i^3 = \lambda_2^6 + 9k\lambda_1\lambda_2 \cdot \lambda_2^3 + 27k^2\lambda_1^2\lambda_2^2 + 27k^3\lambda_1^3$$

e quindi secondo le (5)<sub>bi</sub>,

$$i^3 = 4 \frac{(\Psi + \sqrt{\epsilon} \Psi')^4}{\Phi^6} + 9k \frac{(\Psi + \sqrt{\epsilon} \Psi')^2}{\Phi^2} +$$

$$+ \frac{27}{4} k^2 \Phi^2 + 54k^3 \frac{(\Psi - \sqrt{\epsilon} \Psi')^2}{\Phi^3},$$

$$j = -4 \frac{(\Psi + \sqrt{\epsilon} \Psi')^2}{\Phi^3} - \frac{9}{2} k \Phi + 27k^3,$$

$$4i^3 - j^2 = 27 \left( \frac{1}{4} k^2 \Phi^2 + 16k^3 \frac{\Psi^2 + \epsilon \Psi'^2}{\Phi^3} - 9k^4 \Phi - 27k^6 \right)$$

onde si arriva subito alla formola cercata (8).

### § 90. — Quadriche di Moutard relative alle rigate asintotiche.

Sia  $S$  una superficie non rigata riferita alle linee coordinate asintotiche. (\*) Sia  $t = (x dx) = (x x_u) du + (x x_v) dv$  una tangente a  $S$  in  $x$ . La quadrica di Moutard  $M$  appartenente a  $t$  è il luogo del punto (\*\*)

$$(1) \quad \rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X$$

dove

(\*) In questo § non supponiamo che le coordinate siano normalizzate.

(\*\*) Cap. IX, § 80 B, (2)<sub>quater</sub>.

$$M \equiv 2\rho_0\rho_3 - 2a_{12} du dv (\rho_1^2 - \rho_2^2) + \frac{2}{3} \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{du dv} \rho_1\rho_3 +$$

$$+ 2\omega \frac{-\beta du^3 + \gamma dv^3}{du dv} \rho_2\rho_3 + \left[ \frac{1}{6} \frac{\beta}{a_{12}} \frac{\partial \log(\beta : a_{12}^2)}{\partial u} \frac{du^2}{dv^2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{\beta}{a_{12}} \frac{\partial \log(a_{12} \beta)}{\partial v} \frac{du}{dv} + \frac{1}{6} \frac{\gamma}{a_{12}} \frac{\partial \log(a_{12} \gamma)}{\partial u} \frac{dv}{du} +$$

(2)

$$+ \frac{1}{6} \frac{\gamma}{a_{12}} \frac{\partial \log(\gamma : a_{12}^2)}{\partial v} \frac{dv^2}{du^2} - \frac{1}{36} \frac{(\beta du^3 + \gamma dv^3)^2}{(a_{12} du^3 dv^3)^2} +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{(\beta du^3 - \gamma dv^3)^2}{(a_{12} du^3 dv^3)^2} + \frac{1}{2a_{12}} (\beta_u + \beta \theta_u) \frac{du}{dv} +$$

$$+ \frac{1}{2a_{12}} (\gamma_u + \gamma \theta_u) \frac{dv}{du} + \Omega \Big] \rho_3^2 = 0.$$

Siano ora, come al Cap. IX § 81 F, pag. 477,  $R_1$  e  $R_2$  le due rigate asintotiche di  $S$  passanti per  $x$  (\*). Noi vogliamo determinare le equazioni delle quadriche di Moutard  $M_1$  e  $M_2$  relative rispettivamente a  $R_1$  e a  $R_2$  ed appartenenti a  $t$ . (\*\*). A tale scopo osserviamo che dalle (5) del § 81 F si deduce che: 1° i simboli di Christoffel formati per  $F_2^{(1)}$  sulla  $\bar{u} = 0$  hanno gli stessi valori come quelli formati per  $F_2$  sulla  $u = 0$  e quindi che in  $(\Sigma A_{ik} x_{ik})_{u=v=0}$  è indifferente calcolare le derivate covarianti per la forma  $F_2$  o per la  $F_2^{(1)}$ ; 2° che è per  $R_1$ , se  $u = \bar{u} = 0$ ,

$$\Pi^{(1)} - P^{(1)} = (\gamma_u + \gamma \theta_u) dv^2,$$

$$\Sigma a_{iii}^{(1)} du, du, du, du = a_{12} \gamma dv^3 \left( \frac{\partial \log(a_{12} \gamma)}{\partial u} du + \frac{\partial \log(\gamma : a_{12}^2)}{\partial v} dv \right),$$

(\*) Precisamente  $R_i$  contenga  $(xx_i)$  come l. c.

(\*\*) Le notazioni son quelle di l. c.

$$\Sigma a_{11}^{(1)} du, du, Du, Du_t = a_{12} \gamma dv^3 \left( -\frac{\partial \log(a_{12} \gamma)}{\partial v} du + \frac{\partial \log(\gamma : a_{12}^2)}{\partial v} dv \right).$$

Ciò posto, si vede subito che il punto (1) appartiene a  $M_1$  se

$$\begin{aligned} M_1 &\equiv 2\rho_0 \rho_2 - 2a_{12} du dv (\rho_1^2 - \rho_2^2) + \frac{2}{3} \frac{\gamma dv^3}{du dv} \rho_1 \rho_2 + \\ &+ 2\omega \frac{\gamma dv^3}{du dv} \rho_2 \rho_3 + \left[ \frac{1}{6} \frac{\gamma}{a_{12}} \frac{\partial \log(a_{12} \gamma)}{\partial u} \frac{dv}{du} + \right. \\ (2)_{bis} &+ \frac{1}{6} \frac{\gamma}{a_{12}} \frac{\partial \log(\gamma : a_{12}^2)}{\partial v} \frac{dv^2}{du^2} - \frac{1}{36} \frac{(\gamma dv^3)^2}{a_{12} du^3 dv^3} + \\ &+ \left. \frac{1}{4} \frac{(\gamma dv^3)^2}{a_{12} du^3 dv^3} + \frac{1}{2a_{12}} (\gamma_u + \gamma \theta_u) \frac{dv}{du} + \Omega \right] \rho_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Similmente si trova che il punto (1) appartiene a  $M_2$  se

$$\begin{aligned} M_2 &\equiv 2\rho_0 \rho_3 - 2a_{12} du dv (\rho_1^2 - \rho_2^2) + \frac{2}{3} \frac{\beta du^3}{du dv} \rho_1 \rho_3 - \\ &- 2\omega \frac{\beta du^3}{du dv} \rho_2 \rho_3 + \left[ \frac{1}{6} \frac{\beta}{a_{12}} \frac{\partial \log(\beta : a_{12}^2)}{\partial u} \frac{du^2}{dv^2} + \right. \\ (2)_{ter} &+ \frac{1}{6} \frac{\beta}{a_{12}} \frac{\partial \log(a_{12} \beta)}{\partial v} \frac{du}{dv} - \frac{1}{36} \frac{(\beta du^3)^2}{a_{12} du^3 dv^3} + \\ &+ \left. \frac{1}{4} \frac{(\beta du^3)^2}{a_{12} du^3 dv^3} + \frac{1}{2a_{12}} (\beta_v + \beta \theta_v) \frac{dv}{du} + \Omega \right] \rho_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Dal confronto delle (2), (2)<sub>bis</sub> e (2)<sub>ter</sub> risultano le identità

$$M_1 - M_2 = \rho_3 (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3), \quad (*)$$

(\*) I valori delle  $\alpha$  non ci interessano (e neanche quelli delle  $\alpha'$  in (3)<sub>bis</sub>).

$$(3) \quad M_1 + M_2 = M + M_0,$$

dove

$$M_0 = 2\rho_0 \rho_2 - 2a_{12} du dv (\rho_1^2 - \rho_2^2) + \left( -\frac{5}{9} \frac{\beta \gamma}{a_{12}} + \Omega \right) \rho_2^2 = 0$$

sicchè

$$(3)_{bis} \quad M - M_0 = \rho_2 (\alpha'_1 \rho_1 + \alpha'_2 \rho_2 + \alpha'_3 \rho_3).$$

Le identità (3) e (3)<sub>bis</sub> hanno una notevole interpretazione geometrica. Cominciamo coll'osservare che la quadrica  $M_0 = 0$  (o brevemente  $M_0$ ) non dipende dalla tangente  $t$ , ma soltanto dal punto  $x$  di  $S$ . Infatti, posto

$$\rho_0 x + \rho_1 dx + \rho_2 Dx + \rho_3 X = r_0 x + r_1 x_u + r_2 x_v + r_3 X,$$

si trova subito che

$$(4) \quad M_0 = 2r_0 r_3 - 2a_{12} r_1 r_2 + \left( -\frac{5}{9} \frac{\beta \gamma}{a_{12}} + \Omega \right) r_3^2 = 0.$$

Se ne deduce che la quadrica  $M_0$  è una delle quadriche di Darboux. (\*)

Ciò posto, si vede senza calcolo il significato geometrico delle (3) e (3)<sub>bis</sub>:

Nel fascio determinato dalle quadriche  $M_1$  e  $M_2$  vi è una quadrica spezzata nel piano tangente a  $S$  in  $x$  e in un altro piano; sia  $M'$  la quadrica del fascio coniugata armonica di quella spezzata rispetto alle  $M_1$  e  $M_2$ . Nel fascio determinato dalle quadriche  $M'$  e  $M_0$  vi è di nuovo una quadrica spezzata nel piano tangente e in un altro piano; la quadrica di questo nuovo fascio coniugata armonica della spezzata rispetto a  $M'$  e  $M_0$  è la quadrica  $M$ .

Mediante questo teorema, la costruzione delle quadriche di Moutard relative ad una superficie non rigata si riduce alla costruzione delle quadriche di Moutard relative alle sue rigate asin-

(\*) Cfr. Cap. III, § 21 C.

totiche. Ora la costruzione delle quadriche di Moutard si semplifica se la superficie di partenza è rigata (v. § 87), sicchè il teorema precedente dà un nuovo modo di costruire le quadriche di Moutard relative ad una superficie non rigata. Però la prima soluzione pare migliore, almeno se non si trova un significato geometrico semplice della quadrica  $M_0$ . (\*)

§ 91. — Il cono di Segre.

A) Formole preliminari.

Cominciamo dimostrando le formole, analoghe alle (1) del Cap. IX § 79

$$\begin{aligned}
 dDx &= \Sigma \partial_{rs} p_{ik}^r du_r du_s \cdot x + \frac{\Sigma \partial_{rs} du_r \delta^2 u_s + F'_2}{F_2} dx + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{dF_2 - F_3}{F_2} Dx, \\
 (1) \quad dD\xi &= \Sigma \partial_{rs} \pi_{ik}^r du_r du_s \cdot \xi + \frac{\Sigma \partial_{rs} du_r \delta^2 u_s - F'_3}{F_2} d\xi + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{dF_2 + F_3}{F_2} D\xi.
 \end{aligned}$$

La dimostrazione è analoga a quella delle formole citate. Limitiamoci alla seconda delle (1). Differenziando l'identità

$$D\xi = \Sigma \xi_i Du_i = \Sigma a^{ir} \partial_{rs} \xi_i du_s = \Sigma \partial_{rs} \xi^r du_s$$

(\*) È chiaro che deve essere possibile costruire  $M_0$ , date  $H$ ,  $C_1$ ,  $C_1^2$  (cfr. § 89).

si trova facilmente (\*)

$$dD\xi = \Sigma \partial_{rs} \xi^r \delta^2 u_s + \Sigma \partial_{rs} a^{ir} \xi_{ik} du_k du_s,$$

ossia, essendo

$$\xi_{ik} = -\Sigma a_{ik}^r \xi_r + a_{ik} \xi + \pi_{ik} \xi,$$

$$dD\xi = \Sigma \partial_{rs} \pi_{ik}^r du_k du_s \cdot \xi - \Sigma b_{ik}^r \xi_r du_k du_s + \Sigma \partial_{rs} \xi^r \delta^2 u_s.$$

Si tratta quindi soltanto di provare che, se  $F_2 \neq 0$ , posto

$$(a) \quad -\Sigma b_{ik}^r \xi_r du_k du_s + \Sigma \partial_{rs} \xi^r \delta^2 u_s = \lambda d\xi + \lambda' D\xi,$$

sarà

$$\lambda = \frac{\Sigma \partial_{rs} du_r \delta^2 u_s - F'_2}{F_2}, \quad \lambda' = \frac{1}{2} \frac{dF_2 + F_3}{F_2}.$$

A tale scopo moltiplichiamo la (a) per  $dx$ , oppure per  $Dx$ . Si trova rispettivamente (\*\*)

$$+\Sigma b_{ik}^r du_i du_k du_s - \Sigma \partial_{rs} du_r \delta^2 u_s = -\lambda F_2,$$

$$+\Sigma b_{ik}^r Du_i du_k du_s - \Sigma \partial_{rs} Du_r \delta^2 u_s = \lambda' F_2.$$

Ma

$$\Sigma \partial_{rs} Du_r \delta^2 u_s = \Sigma \partial_{rs} \delta^{rt} a_{it} du_i \delta^2 u_s = -\varepsilon \Sigma a_{is} du_i \delta^2 u_s = -\frac{\varepsilon}{2} dF_2,$$

$$\Sigma b_{ik}^r Du_i du_k du_s = \Sigma \delta^{ir} a_{rt} b_{ik}^r du_i du_k du_s =$$

$$= \varepsilon \Sigma a_{rt} a_{ks} du_k du_s du_i = \varepsilon \Sigma a_{ks} du_k du_s du_i = \varepsilon F_3, \text{ ecc.}$$

B) Nuovo calcolo di un determinante.

Adesso è facile dimostrare le identità (valide se  $F_2 \neq 0$ )

$$(x dx d^2 x d^3 x) = F_2 dG - \frac{3}{2} G dF_2 + F_3 (F'_2 - 4G) -$$

(\*) Cfr. Fubini, *I differenziali controvarianti*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 54, 1918.

(\*\*) Cfr. Cap. IX, § 79, p. 459.

$$(2) \quad -F_2 \sum b_{r,ii} du_r du_i du_i du_i - F_2^2 \sum \vartheta_{r,i} \pi_r^i du_r du_i,$$

$$\varepsilon (\xi d\xi d^2 \xi d^3 \xi) = F_2 dG - \frac{3}{2} G dF_2 + F_3 (F_3' + 4G) +$$

$$+ F_2 \sum b_{r,ii} du_r du_i du_i du_i - F_2^2 \sum \vartheta_{r,i} p_r^i du_r du_i, \quad (*)$$

dove abbiamo posto per brevità

$$(2)_{bi} \quad G = \sum \vartheta_{r,i} du_r \delta^2 u_i,$$

sicchè

$$(2)_{ter} \quad dG = \sum \vartheta_{r,i} (du_r \delta^3 u_i + \delta^2 u_r \delta^2 u_i).$$

Ci limitiamo a provare la prima delle (2). Differenziando la prima delle (3) del Cap. IX § 81 C si deduce

$$(x dx d^3 x) = (dF_3' - dG) \cdot \xi + (F_3' - G) d\xi + dF_2 \cdot D\xi + F_2 \cdot dD\xi,$$

ossia per la (1)

$$(x dx d^3 x) = (dF_3' - dG + F_2 \sum \vartheta_{r,i} \pi_r^i du_r du_i) \xi +$$

$$+ \left( \frac{3}{2} dF_2 + F_3 \right) D\xi.$$

Ora dalle citate (1) del Cap. IX § 79 si deduce facilmente

$$S\xi d^2 x = F_2, \quad SD\xi d^2 x = G - F_3',$$

sicchè

$$(x dx d^2 x d^3 x) = -Sd^2 x (x dx d^3 x) =$$

$$= -F_2 (dF_3' - dG + F_2 \sum \vartheta_{r,i} \pi_r^i du_r du_i) + (F_3' - G) \left( \frac{3}{2} dF_2 + F_3 \right)$$

donde si passa subito all'equazione cercata, ricordando la (3)<sub>ter</sub> del Cap. IX, § 80.

(\*) Lo studio di  $(x, dx d^2 x, d^3 x)$  è stato il punto di partenza delle ricerche del Fubini. Cfr. le Note: Defn. proiett. differ. ecc. (Atti dell'Accad. delle Scienze in Torino vol 49, 1914 pag. 786). Fondamenti della geom. d'una superf. (Rend. dei Lincei Vol. 27<sub>5</sub>; 1918).

B) Cono di Segre.

Al Cap. III § 22 e al Cap. IX § 81 C abbiamo esaminato la corrispondenza di Segre (\*) fra il piano  $(x dx d^2 x)$  osculatore di una curva  $c$  tracciata su  $S$  ed il punto  $(\xi d\xi d^2 \xi)$  di regresso della sviluppabile  $\gamma$  che tocca  $S$  lungo  $c$ . Abbiamo visto che il Segre nella nota citata, esaminando ancora sotto quali condizioni accade simultaneamente che il piano osculatore  $(x dx d^2 x)$  e il punto  $(\xi d\xi d^2 \xi)$  sono *stazionari* rispettivamente per  $c$  e  $\gamma$ , ha trovato che, dato  $x$ , i piani osculatori in  $x$  alle curve  $c$  siffatte involuppano un cono di vertice  $x$ , che abbiamo chiamato *cono di Segre*, in generale di sesta classe, con piano tangente quintuplo in  $\xi$ , le generatrici di contatto essendo le tangenti asintotiche e le tangenti di Darboux. Il Segre ne ha scritto l'equazione soltanto sotto l'ipotesi che la  $S$  sia definita con una equazione  $z = f(x, y)$ . Le formole (2) ci permettono in nuovo modo (cfr. § 16 E) non soltanto di scrivere l'equazione del cono di Segre in coordinate curvilinee qualunque, ma anche di costruire il piano tangente (unico) del cono che passa per una qualsiasi tangente  $t$  a  $S$  in  $x$ . Le condizioni del problema sono evidentemente

$$(x dx d^2 x d^3 x) = 0, \quad (\xi d\xi d^2 \xi d^3 \xi) = 0.$$

Esse contengono, come è chiaro a priori, i differenziali terzi. Per arrivare alla posizione dei piani osculatori alle curve  $c$ , occorre eliminare i differenziali terzi, oppure, per le (2), scrivere l'equazione

$$-(x dx d^2 x d^3 x) + \varepsilon (\xi d\xi d^2 \xi d^3 \xi) = 0,$$

che diventa per le (2) stesse e per le (3)<sub>bi</sub> del Cap. VI § 58

$$(3) \quad 8GF_3 + 2F_2 \sum b_{r,ii} du_r du_i du_i du_i + F_2^2 \sum b_{r,i}^i du_r du_i = 0.$$

(\*) *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. 17, 1908.

Confrontando con la (3) del Cap. IX § 81 vediamo pertanto che il cono di Segre è involupato (variando  $du : dv$ ) dal piano

$$(3)_{bis} \quad (8F_3F'_3 + 2F_2 \Sigma b_{r,ii} du_r du_i du_i + F_2^2 \Sigma b_{r,i} du_r du_i) \xi + 8F_2F_3 D\xi.$$

Dalle (3)<sub>bis</sub> si determina immediatamente la classe del cono e la posizione delle tangenti nel punto multiplo  $x$ , d'accordo con l'enunciato precedente. Ma dalle (1)<sub>quater</sub> del Cap. IX § 81 vediamo di più che *al cono di Segre corrisponde in  $\Sigma \left(-\frac{3}{2}\right)$  (\*) la curva del piano è luogo del punto*

$$(4) \quad (2 \Sigma b_{r,ii} du_r du_i du_i du_i + F_2 \Sigma b_{r,i} du_r du_i) x + 8F_3 Dx.$$

In generale, tale curva è d'ordine quattro, con un punto triplo in  $x$ , dove le tangenti ad essa sono le tangenti di Segre.

C) Alcune applicazioni.

Supponiamo in primo luogo che la superficie  $S$  sia rigata. Allora è ben facile vedere che la linea rappresentata dalla (4) è semplicemente *la generatrice della quadrica  $W_1$  (\*\*)* situata nel piano  $\xi$ . A tale scopo occorre provare soltanto (\*\*\*) che (4) rappresenta una retta che contiene il coniugato armonico di  $x$  rispetto alla coppia dei flecnodi ed il polo della generatrice rispetto alla conica osculatrice all'asintotica curva di  $S$  passante per  $x$ . Ora supposto

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = \omega = \pm 1, \quad x = y + uz$$

(\*) Nella Memoria citata al § 85 è scritto erroneamente  $\Sigma \left(\frac{3}{2}\right)$ .

(\*\*) o del piano  $W_1$  se le due curve flecnodali di  $S$  coincidono.

(\*\*\*) Cap. IV § 35 C e 36 B.

si trova (cfr. § 87, 87 A) che (4) si riduce, scartando il fattore  $2dv^2$ , alla

$$[4(B + Cu) du + (A' + 2B'u + C'u^2) dv] (y + uz) + 4(A + 2Bu + Cu^2) [-z du + (y' + uz') dv],$$

donde risulta l'enunciato come al § 87 A.

Adesso supponiamo invece che  $S$  non sia rigata. Dimostriamo che *la curva del piano è trasformata del cono di Segre mediante  $\Sigma \left(-\frac{3}{2}\right)$  si può generare come segue: Siano  $\tau_1$  e  $\tau_2$  le tangenti asintotiche ad  $S$  in  $x$ ;  $s_i$  ( $d_i$ ) sia l'intersezione di  $\tau_i$  col secondo spigolo (con la seconda direttrice); e [C] sia il fascio di coniche del piano  $\xi$  determinato, 1° dalla conica spezzata in  $\tau_1$  e ( $d_1 s_2$ ), e 2° dalla conica spezzata in  $\tau_2$  e ( $d_2 s_1$ ). Allora l'intersezione della curva suddetta con una tangente qualsiasi  $t$  a  $S$  in  $x$  è situata su quella conica del fascio [C] che tocca in  $x$  la polare lineare di  $t$  rispetto alla terna delle tangenti di Segre. A tale scopo osserviamo che la (1)<sub>bis</sub> del Cap. VI § 58 permette di trasformare l'espressione (4). Per brevità supponiamo  $J = -1$  (forme normali) e troviamo*

$$(4)_{bis} \quad (-2\varphi_2 \Sigma \psi_i Du_i + \varphi_2 \Sigma b_{r,ii} \psi^i du_r du_i) x + 8\varphi_3 Dx.$$

Qui poniamo

$$(5) \quad \Sigma b_{r,ii} du_r du_i = g_k$$

e quindi (Cap. VI § 57 (3)<sub>quater</sub>)

$$\Sigma \partial^{ik} g_k = -\varepsilon \Sigma a_{r,i} du_r du_i,$$

$$\varphi_3 = \Sigma a_{hi} a_{r,i} du_h du_r du_i = -\varepsilon \Sigma \partial^{ik} a_{hi} g_k du_i = \varepsilon \Sigma g_k Du_k,$$

sicchè la (4)<sub>bis</sub> diventa

$$(6) \quad (-2\varepsilon \Sigma g_i Du_i \cdot \Sigma \psi_i Du_i + \varphi_2 \cdot \Sigma g_i \psi^i) x + 8\varepsilon \Sigma g_i Du_i \cdot Dx.$$

Riguardando le  $g_i$  come fisse e variando soltanto le  $du_i$ , il punto rappresentato da (6) descrive una conica del piano  $\xi$ ; e variando  $g_i$ , tali coniche descrivono evidentemente un fascio  $[C]$  di cui  $x$  è un punto base. La (5) mostra poi che il punto della curva rappresentata da (4)<sub>vis</sub> che sta su una tangente  $t$  (ad  $S$  in  $x$ ) appartiene a quella conica di  $[C]$  che tocca in  $x$  la polare lineare di  $t$  rispetto alla terna delle tangenti di Darboux. Di più dalla (6) si vede senza difficoltà che la conica  $C^1$  di  $[C]$  che tocca in  $x$  p. es. la tangente asintotica  $\tau_1$  si spezza in  $\tau_1$  ed in un'altra retta (\*), sicchè resta soltanto a provare che tale retta residua di  $C^1$  è identica alla retta  $(d_1 s_2)$ . Ometto questo calcolo, perchè esso è perfettamente analogo a quello fatto nel § 88 (esso è semplicissimo in coordinate asintotiche). Si ricordi (§ 16 E e 24) che:

La (3) è l'equazione differenziale delle estremali dell'integrale

$$\int \frac{F_3}{F_2} \text{ (pangeodetiche).}$$

### § 92. — Superficie a pangeodetiche piane.

Non esistono superficie  $S$  per cui tutte le pangeodetiche sono piane. (\*\*). Infatti, se così fosse, l'equazione  $(x dx d^2 x d^3 x) = 0$  sarebbe evidentemente conseguenza algebrica delle  $H = 0$ ,  $dH = 0$ , essendo

$$H = (x dx d^2 x d^3 x) - \varepsilon (\xi d \xi d^2 \xi d^3 \xi).$$

Ora lungo un'asintotica curva è (\*\*\*)  $H = 0$  e quindi anche  $dH = 0$ , mentre  $(x dx d^2 x d^3 x) \neq 0$ .

Ma esistono delle superficie  $S$  con una famiglia di  $\infty^1$  pangeodetiche piane. Esse dipendono da sette funzioni arbitrarie di un

(\*) Basta osservare che, se  $\Sigma a_{ik} g^i g^k = 0$ , l'espressione (6) è divisibile per  $\Sigma g_i Du_i$  o, ciò che è lo stesso, che essa si annulla se  $g_i = du_i$ ,  $\varphi_i = 0$ .

(\*\*) Se escludiamo le quadriche. Sopra una quadrica, ogni curva può considerarsi quale pangeodetica.

(\*\*\*) Cfr. l'osservazione al principio del § 18 B.

parametro e le loro equazioni in termini finiti s'ottengono senza neanche quadrature. Sia  $[C]$  un sistema  $\infty^1$  di pangeodetiche proiettive piane di  $S$ . I piani tangenti a  $S$  nei punti di una qualunque delle  $C$  passando per un punto fisso, due  $C$  successive, e quindi anche i loro piani, sono *prospettivi*. Gli  $\infty^1$  piani  $\tau$  delle curve  $C$  sono pertanto *proiettivi* fra loro, e le curve  $C$  si corrispondono in queste proiettività. Sia  $\tau_0$  un piano fisso del sistema  $[\tau]$ ,  $r_0$  una retta qualsiasi di  $\tau_0$ ,  $[r]$  il sistema  $\infty^1$  di rette dei piani  $\tau$  corrispondenti a  $r_0$  nelle proiettività sopra definite. Si vede subito che il sistema  $[r]$  è *svilupabile*. Infatti, due piani  $\tau$  successivi essendo prospettivi, due rette  $r$  successive s'incontrano. Da queste osservazioni si vede che  $S$  si può generare come segue:

*Si scelga ad arbitrio una sviluppabile  $T$ , e sopra di essa, si costruiscano ad arbitrio quattro curve  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Sia  $\tau_0$  un piano tangente fisso di  $T$ ,  $\tau$  il piano tangente generico di  $T$ . Fra  $\tau_0$  e  $\tau$  si consideri la proiettività  $\pi$  in cui alle tangenti delle  $k_i$  giacenti in  $\tau_0$  corrispondono le tangenti delle  $k_i$  situate in  $\tau$ . Sia  $C_0$  una curva arbitraria del piano  $\tau_0$ , e  $C$  la curva del piano  $\tau$  che vi corrisponde in  $\pi$ . Se  $\tau$  involuppa  $T$ , la curva  $C$  genera una superficie  $S$  su cui le  $C$  sono pangeodetiche piane. (\*)*

Infatti due  $C$  successive risultano evidentemente prospettive.

Ora sorge spontaneo un problema interessante: *Determinare tutte le superficie con più sistemi  $\infty^1$  di pangeodetiche piane.* Osserviamo soltanto che la superficie  $xyz = 1$  (\*\*) possiede sei sistemi di pangeodetiche piane, formati dalle curve di Darboux (coniche) e dalle curve di Segre (cubiche con un punto cuspidale). La più generale pangeodetica di  $xyz = 1$  è

$$x : y : z = \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \right)^t : \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^t : \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^t,$$

dove  $t$  è il parametro e  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sono costanti arbitrarie.

(\*) La sviluppabile  $T$  può degenerare in un fascio di piani. Le curve  $k_i$  devono allora sostituirsi con dei coni, i cui vertici stanno sulla retta base del fascio.

(\*\*) Questa è l'unica superficie che sia insieme di terzo grado e di terza classe.

COMPLESSI E CONGRUENZE DI RETTE.

§ 93. — Formole preliminari.

A) Rette e complessi lineari.

1. Noi sappiamo che a coordinate  $p_{ik} = -p_{ki}$  della retta unente i punti  $x, y, z, t$  ed  $x', y', z', t'$  si assumono i determinanti

$$p_{12} = xy' - x'y, \quad p_{13} = xz' - x'z, \dots, \quad p_{34} = zt' - z't.$$

Per due rette di coordinate  $p, q$  la condizione d'incidenza è:

$$S(p, q) = p_{12}q_{34} + p_{13}q_{42} + p_{14}q_{23} + p_{34}q_{12} + p_{42}q_{13} + p_{23}q_{14} = 0.$$

Le coordinate  $p$  di una retta soddisfano alla

$$Sp^2 = 2(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}) = 0.$$

Un complesso lineare è l'insieme delle rette  $q$  le cui coordinate soddisfano a un'equazione di primo grado

$$S(\pi, q) = \pi_{12}q_{34} + \pi_{13}q_{42} + \dots + \pi_{23}q_{14} = 0.$$

Le  $\pi_{rs} = -\pi_{rs}$  sono le coordinate del complesso; se

$$S\pi^2 = 2(\pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23})$$

è nullo, il complesso è l'insieme delle rette che si appoggiano alla retta di coordinate  $p_{rs} = \pi_{rs}$ , che si chiama l'asse del complesso. Tali complessi si dicono speciali. Come è noto, due complessi lineari si incontrano in una congruenza lineare, tre complessi generalmente in un regolo (cioè in un sistema di generatrici di una quadrica), quattro complessi in due rette.

Diremo sovente retta  $p$  invece di dire retta di coordinate  $p_{rs}$ ; complesso  $\pi$  invece di dire complesso di coordinate  $\pi_{rs}$ ; se  $p$  è una retta, il complesso  $p$  è il luogo delle rette incidenti alla retta  $p$ .

Due complessi (lineari)  $\pi, \pi'$  sono detti in involuzione o coniugati se  $S\pi\pi' = 0$ . Un complesso lineare  $\pi$  è luogo delle rette  $p$ , tali che i complessi (speciali di asse)  $p$  sono coniugati a  $\pi$ .

Quando volessimo riservare gli indici ad indicare derivate, porremo:

$$p_{12} = p, \quad p_{13} = q, \quad p_{14} = r, \quad p_{34} = l, \quad p_{42} = m, \quad p_{23} = n;$$

$$\pi_{12} = \pi, \quad \pi_{13} = \alpha, \quad \pi_{14} = \rho, \quad \pi_{34} = \lambda, \quad \pi_{42} = \mu, \quad \pi_{23} = \nu.$$

B) Alcune identità.

Siano dati  $n$  complessi  $p_{12}^{(i)}, \dots, p_{34}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) con  $n = 5$  opp.  $n = 6$ . La matrice, o determinante delle loro coordinate si indicherà scrivendone la sola prima riga

$$(p_{12}^{(1)} p_{12}^{(2)} \dots p_{12}^{(n)}) \text{ o più semplicemente } (p^{(1)} p^{(2)} \dots p^{(n)})$$

e, se  $n = 5$ , cioè se si tratta di una matrice, con questa scrittura indicheremo anche i suoi massimi minori col segno stabilito dalla seguente convenzione analoga a quella del § 1 A: si aggiunge alla matrice una sesta colonna, e si prendono i complementi algebrici dei suoi termini, indicando ordinatamente con  $\pi_{34}, \pi_{42}, \pi_{23}, \pi_{13}, \pi_{12}, \pi_{14}$  i complementi di  $p_{12}^{(6)}, p_{13}^{(6)}, p_{14}^{(6)}, \dots, p_{23}^{(6)}$ .

Un determinante  $(p^{(1)} p^{(2)} \dots p^{(6)})$  cambia di segno, scam-

biando  $p_{12}$  con  $p_{34}$ ,  $p_{13}$  con  $p_{42}$ ,  $p_{14}$  con  $p_{23}$ , ossia scambiando la terna  $p, q, r$  con  $l, m, n$ ; noi, per moltiplicare  $(p^{(1)} p^{(2)} \dots p^{(6)})$  per un determinante di egual tipo  $(q^{(1)} q^{(2)} \dots q^{(6)})$ , cambieremo di segno *uno* dei fattori scambiando in esso le terne citate e poi applicheremo la regola solita del prodotto di due determinanti. Troviamo così: *Il prodotto di  $(p^{(1)} p^{(2)} \dots p^{(6)})$  per  $(q^{(1)} q^{(2)} \dots q^{(6)})$  vale il determinante delle  $c_{ij} = \text{Sp}^{(i)} q^{(j)}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) cambiato di segno.*

Col prodotto di due matrici

$$(p^{(1)} p^{(2)} \dots p^{(6)}) \text{ e } (q^{(1)} q^{(2)} \dots q^{(6)}),$$

una definente i numeri  $\pi_{rs}$ , l'altra i numeri  $\kappa_{rs}$ , secondo le precedenti convenzioni, *indicheremo*

$$S \pi \kappa = \pi_{12} \kappa_{34} + \pi_{13} \kappa_{42} + \dots + \pi_{34} \kappa_{12}.$$

Questo prodotto si potrà ottenere per note regole sul calcolo delle matrici scambiando in una di esse la terna  $p_{12}, p_{13}, p_{14}$  con  $p_{34}, p_{42}, p_{23}$ , facendo il prodotto nel modo abituale, e quindi cambiando di segno il determinante così ottenuto. Perciò:

*Il prodotto  $(p^{(1)} p^{(2)} \dots p^{(6)}) (q^{(1)} q^{(2)} \dots q^{(6)})$  vale il determinante delle  $\text{Sp}^{(i)} q^{(h)}$  cambiato di segno.*

#### C) Collineazioni e correlazioni.

Ad una collineazione  $T$  sulle coordinate  $x, y, z, t$  di punto corrisponde pure una collineazione (trasform. lineare intera omog.) sulle coordinate  $p_{rs}$  di retta che trasforma in sè l'equazione  $Slp = 0$ , e quindi moltiplica la forma  $Slp$  per un fattore. Noi senz'altro *escluderemo* le  $T$  a determinante negativo; e ci limiteremo pertanto (§ 2 B) a trasformazioni lineari che moltiplichino la  $Slp$  per un fattore positivo. Viceversa ogni trasf. lineare omogenea sulle  $p$  che moltiplichi  $Slp$  per un fattore positivo definisce una trasform. sulle rette dello spazio che porta rette incidenti in rette incidenti e che perciò equivale ad una collinea-

zione o ad una reciprocità. I due casi si distinguono dal segno del determinante della trasformazione (§ 2 B). Così per es. la

$$l' = p, \quad m' = q, \quad n' = r, \quad p' = l, \quad q' = m, \quad r' = n$$

è a determinante negativo e definisce pertanto una reciprocità.

Se  $\lambda^{(i)}, \pi^{(i)}$ , sono per  $i = 1, 2, \dots, 6$  due sestuple di complessi, e se  $S \lambda^{(i)} \lambda^{(j)} = S \pi^{(i)} \pi^{(j)}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ), allora i determinanti  $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(6)})$  e  $(\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \dots, \pi^{(6)})$  sono uguali a meno del segno, come si riconosce innalzandoli al quadrato. Esiste perciò una proiettività o una correlazione che porta le  $\lambda$  nelle  $\mu$ .

#### D) Equazioni di una retta.

La retta  $p, q, r, l, m, n$  ha in coordinate di punto le equazioni

$$\begin{aligned} ly + mx + nt = 0 & \quad -lx + rz - qt = 0 \\ -mx - ry + pt = 0 & \quad -nx + qy - pz = 0, \end{aligned}$$

che si riducono a due indipendenti. Il punto comune a un'altra retta  $p', q', \dots, n'$  è il punto

$$lp' + mq' + nr', \quad mn' - n'n, \quad nl' - n'l, \quad lm' - l'm.$$

Formole analoghe si ottengono per i piani, scambiando le terne  $p, q, r$  ed  $l, m, n$ .

#### § 94. — La forma $\varphi$ .

Se le  $p$  (cioè  $p, q, r, l, m, n$ ) sono funzioni di un parametro  $u = u_1$ , oppure di 2 parametri  $u = u_1, v = u_2$  oppure di 3 parametri  $u = u_1, v = u_2, w = u_3$ , la retta  $p$  descrive una rigata, od una congruenza, od un complesso. Sarà

(1)  $Sp^2=0$ ,  $Spp_i=0$  ( $i=1$ ; opp.  $i=1, 2$ ; oppure  $i=1, 2, 3$ ),  
cioè

$$(2) \quad Spdp=0 \quad \text{e quindi} \quad Sdp^2 = -Spd^2p.$$

Noi porremo

$$(3) \quad \varphi = Sdp^2 = -Spd^2p = \sum_1^n a_{rs} du_r du_s,$$

( $n=1$ , oppure 2 oppure 3).

L'equazione  $\varphi=0$  caratterizza, tra le rette considerate, quelle infinitamente vicine ed incidenti alla retta  $p$ . Perciò nel caso delle rigate ( $n=1$ ) se  $\varphi$  è *identicamente nullo*, la rigata è una *svilupabile*. Nel caso delle congruenze e dei complessi ( $n=2, 3$ ) l'essere  $\varphi$  *identicamente nullo* significa che ogni rigata della congruenza o complesso è *svilupabile*. Prese due rette qualsiasi  $p$  e  $q$  della congruenza o complesso, uscenti l'una da un punto  $A$ , l'altra da un punto  $B$ , noi le potremo congiungere con una rigata della congruenza o complesso *avente la retta*  $AB$  *per direttrice*. Tale rigata, essendo *svilupabile*, dovrà giacere in un piano passante per  $AB$ . Pertanto le rette  $p, q$ , cioè due rette qualsiasi della congruenza o complesso sono *complanari*. In conclusione:

*Se  $\varphi$  è identicamente nullo per una rigata, questa è una svilupabile; se  $\varphi$  è identicamente nullo per una congruenza o complesso, questo ente si riduce alle rette poste in uno stesso piano od uscenti da uno stesso punto (e perciò in particolare non può essere un complesso (\*)).*

(\*) Se  $\varphi=0$  *identicamente* nel caso dei complessi, è  $Sp^2 = Spp_i = Sp_i^2 = Sp_i p_j = 0$  per  $i, j=1, 2, 3$ . Esisteranno perciò 4 rette a 2 a 2 incidenti aventi per coordinate rispettivamente le  $p$ , oppure le  $p_1$ , opp.  $p_2$ , oppure  $p_3$ . Esse sarebbero perciò rette poste in uno stesso piano, od uscenti da uno stesso punto. E quindi esisterebbe una relazione lineare  $\alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2 + \epsilon p_3 = 0$ , che, cambiando parametri  $u_i$ , si può ridurre alla forma  $\alpha p + \beta p_3 = 0$ ; la quale, moltiplicando le  $p$  per uno stesso fattore, si può ridurre al tipo  $p_3=0$ . Le  $p$  essendo perciò funzioni delle sole  $u_1, u_2$ , la retta  $p$  descrive al più una congruenza.

Noi *trascureremo* sempre questi casi elementari.

Se il discriminante  $A$  di  $\varphi$  è diverso da zero, potremo usare i simboli del calcolo assoluto; avremo allora:

$$(4) \quad a_{rs} = Sp_r p_s = -Spp_{rs}$$

donde, derivando covariantemente  $Sp_r p_{st} + Sp_s p_{rt} = 0$  e  $Spp_{st} + Sp_t p_{rs} = 0$ . Scrivendo queste formole per  $r, s, t=1, 2$  oppure  $1, 2, 3$ , si trova in entrambi i casi:

$$(5) \quad Sp_r p_{st} = 0 \quad Spp_{rst} = 0$$

L'insieme delle superficie rigate che sono tra loro tangenti nei punti di una generatrice  $p$  ad esse comune definisce quella che diremo una *direzione* (di spazio rigato). Essa si può considerare come definita dalla retta  $p$  e dalla retta  $p+dp$  consecutiva, che si deve considerare comune a tutte quelle rigate perchè tra loro tangenti in  $p$ . Dare dunque una tale *direzione* equivale a dare la proiettività tra i punti di  $p$  e i piani ivi tangenti alle rigate considerate: proiettività che si può pensare definita facendo corrispondere ad ogni punto di  $p$  il piano che lo proietta dalla retta consecutiva  $p+dp$ . Se le  $p$  sono funzioni di  $n$  parametri  $u_i$ , una direzione (di spazio rigato) uscente da  $p$  sarà definita dando i rapporti dei corrispondenti differenziali  $du_i$ .

### § 95. — I complessi di rette con $A=0$ .

Cominciamo a determinare i complessi, per cui il discriminante  $A$  della corrispondente forma  $\varphi$  è *identicamente nullo*. E dimostriamo che:

*Se  $A=0$  identicamente, il complesso è il luogo delle tangenti ad una superficie, o delle rette incidenti ad una curva.*

In tale caso infatti la forma  $\varphi$  è prodotto di due fattori lineari  $du_i$ , i quali saranno nulli entrambi per un sistema di valori  $\frac{du_1}{\alpha_1} = \frac{du_2}{\alpha_2} = \frac{du_3}{\alpha_3}$ , che sarà anzi indeterminato, se i citati fat-

tori lineari coincidono. Siano  $\Psi(u_1, u_2, u_3) = \text{cost.}$ , e  $X(u_1, u_2, u_3) = \text{cost.}$  gli integrali di  $du_1:du_2:du_3 = \alpha_1:\alpha_2:\alpha_3$ ; assumendo le  $\Psi, X$  come nuovi parametri p. es. al posto di  $u_1, u_2$ , e indicandole senz'altro ancora con  $u_1, u_2$ , avremo che i citati fattori lineari saranno nulli per  $du_1 = du_2 = 0$  e perciò non conterranno  $du_3$ . Quindi la forma  $\varphi$  avrà nulli i coefficienti  $a_{13}, a_{23}, a_{33}$ , cosicchè

$$Sp_3^2 = Sp_1p_3 = Sp_2p_3 = Spp_3 = 0.$$

Perciò le  $p_3$  saranno coordinate di una retta incidente alla retta  $p$  e appartenente ai complessi  $p_1, p_2$ . Sia  $B$  il punto  $(p p_3)$  comune alle rette  $p, p_3$  e  $\beta$  il piano  $pp_3$ . Calcoliamo le coordinate di questo punto e di questo piano. Supposto  $l = -1$ , la retta  $p$  ha per equazioni (in coordinate non omogenee di retta e in coordinate non omogenee di punto, se si suppone anche  $t = 1$ ),

$$x = -rz + q, \quad y = mz + n, \quad \text{cosicchè:}$$

$$\varphi = dmdq + dndr$$

E le  $a_{i3} = 0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) diventano:

$$q_3 m_3 + n_3 r_3 = 0 \quad (q_i m_3 + m_i q_3) + (n_i r_3 + n_3 r_i) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Esistono pertanto 3 parametri  $\lambda, \mu, \nu$  tali che

$$m_3 = \lambda n_3, \quad r_3 = -\lambda q_3, \quad m_1 = \lambda n_1 + \mu n_3, \quad r_1 = -\lambda q_1 - \mu q_3,$$

$$m_2 = \lambda n_2 + \nu n_3, \quad r_2 = -\lambda q_2 - \nu q_3.$$

La retta  $p_3$  avrà per coordinate

$$l_3 = 0, \quad m_3, \quad n_3, \quad p_3, \quad q_3, \quad r_3 \quad (p = qm + rn)$$

e pertanto è la retta congiungente i punti

$$(q_3, n_3, 0, 0) \quad (-r - \lambda q, m - n\lambda, 1, -\lambda).$$

Il punto  $B$  è perciò il punto di coordinate

$$x' = q + \frac{r}{\lambda}, \quad y' = n - \frac{m}{\lambda}, \quad z' = -\frac{1}{\lambda}, \quad t' = 1$$

e il piano  $\beta$  è il piano, che lo contiene, di equazione

$$n_3(x + rz - q) - q_3(y - mz - n) = 0.$$

Poichè evidentemente è anche

$$(1) \quad n_3 dx' - q_3 dy' + (rn_3 + mq_3) dz' = 0,$$

avremo:

Il punto  $B$  ha al massimo  $\infty^3$  posizioni (\*) e il piano  $\beta$  non solo contiene  $B$ , ma è anche tangente al luogo del punto  $B$ . (Il caso  $q_3 = n_3 = 0$ , escluso in questa trattazione, si può studiare in modo affatto simile).

## § 96. — L'elemento lineare proiettivo di un complesso.

### A) Il complesso $\pi$ e la forma $\chi$ .

Escluderemo il caso  $A = 0$ , esaurientemente trattato al § 95, lasciando al lettore di vedere quali delle seguenti considerazioni si possano estendere anche a tale caso. Così escluderemo dalla trattazione come *singolari* quelle eventuali generatrici del complesso

(\*) Infatti, se avesse  $\infty^3$  posizioni, allora per un valore generico di  $u, v, w$  le  $dx', dy', dz'$  sarebbero arbitrarie e non potrebbero soddisfare a (1).

In altro modo si osservi che (1) equivale alle:  $n_3 \frac{\partial x'}{\partial u_i} - q_3 \frac{\partial y'}{\partial u_i} + (rn_3 + mq_3) \frac{\partial z'}{\partial u_i} = 0$  per  $i = 1, 2, 3$ , dalle quali si deduce di nuovo lo stesso risultato.

per cui  $A$  fosse nullo. Diconsi complessi lineari  $\pi'$  tangenti al complesso dato in una generatrice  $p$  i complessi che soddisfano alle  $S\pi'p = S\pi'p_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Uno di essi è lo stesso complesso  $p$  (cioè il complesso speciale di asse  $p$ ); un altro sia  $\pi'$ ; tutti i complessi lineari tangenti saranno quelli del fascio  $\alpha p + \beta \pi'$ , che soddisfano alle

$$S(\alpha p + \beta \pi')p = S(\alpha p + \beta \pi')p_i = 0.$$

I raggi del complesso infinitamente vicini a  $p$ , che giacciono in tale complesso tangente, sono caratterizzati dalla

$$S(\alpha p + \beta \pi')\left(p + dp + \frac{1}{2}d^2p + \dots\right) = 0,$$

che si riduce alla

$$(1) \quad \alpha S p d^2 p + \beta S \pi' d^2 p = 0$$

che, in virtù delle  $S p d p = S \pi' d p = 0$ , equivale alla:

$$(1)_{bi} \quad \alpha S d p^2 + \beta S d \pi' d p = 0.$$

Se noi consideriamo per un momento le  $du_i$  come coordinate omogenee di punto in un piano  $\gamma$ , avremo in (1) l'equazione di un fascio di coniche, una delle quali è la conica  $\varphi = 0$ . È eccezionale il solo caso che tutte queste coniche coincidano, ossia che i complessi tangenti seghino tutti il complesso dato secondo le stesse rette infinitamente vicine a  $p$ . Io dico che questa proprietà caratterizza i complessi lineari. Per dimostrarlo, premettiamo una formola di carattere generale. Supposto, com'è lecito, di assumere coordinate non omogenee di retta, e di scegliere 3 di queste a variabili  $u_i$ , porremo

$$(2) \quad l = 1, \quad q = u, \quad n = v, \quad r = w \quad (p = -mu - vw).$$

Le coniche corrispondenti ai complessi lineari tangenti di coordinate  $\lambda, \mu, \nu$ , ecc. saranno (indicando per semplicità con  $p_{r_i}$  ed  $m_{r_i}$  derivate ordinarie e non covarianti)

$$(3) \quad \lambda \Sigma p_{r_i} du_r du_i + \kappa \Sigma m_{r_i} du_r du_i = 0$$

le quali anzi, tenuto conto del valore di  $p$ , saranno

$$(3)_{bi} \quad (\kappa - \lambda u) \Sigma m_{r_i} du_r du_i - 2\lambda (dm du + dv dw) = 0.$$

Tali coniche ( $q$ ) coincidono soltanto se è  $\bar{m}_{r_i} = 0$  oppure se  $p_{r_i} = 0$  (nei quali casi il complesso è lineare, perchè  $m$  oppure  $p$  è funzione lineare di  $u = q, v = n, w = r$ ), oppure se esiste un parametro  $\sigma$  tale che  $p_{r_i} = \sigma m_{r_i}$ . Derivando se ne deduce  $\sigma_i m_{r_i} = \sigma_i m_{r_i}$ . Queste equazioni lineari nelle  $\sigma_i$  danno  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  (almeno nella nostra ipotesi che  $A \neq 0$ , cioè che il discriminante ( $m_{r_i}$ ) di una delle nostre coniche, tutte coincidenti per ipotesi tra di loro, sia differente da zero). Sarà dunque  $\sigma = \text{cost.}$ ,  $p = \sigma m$  funzione lineare di  $u, v, w$ ; e quindi il complesso sarà lineare. Escluso dunque anche il caso di nessun interesse dei complessi lineari, ai complessi lineari tangenti corrisponde dunque nel piano  $\gamma$  un effettivo fascio di coniche. Tra queste noi ne potremo scegliere una in modo intrinseco invariante imponendo che sia apolare alla  $\varphi = 0$ , cioè che, posto  $S d \pi' d p = \Sigma b_{r_i} du_r du_i$ , e indicato al solito con  $A_{r_i}$  il complemento algebrico di  $a_{r_i}$  in  $A$  diviso per  $A$ , sia:

$$0 = \Sigma A_{r_i} (\alpha a_{r_i} + \beta b_{r_i}) = 2\alpha + \beta \Sigma b_{r_i} B_{r_i},$$

da cui si ricava un unico valore di  $\alpha$ . Porremo  $\pi = \alpha p + \beta \pi'$ ; le sue coordinate  $\pi$  (di complesso) risultano così determinate soltanto a meno di un fattore comune, che ora fisseremo in modo intrinseco invariante nel modo seguente. Posto  $S \pi p_{r_i} = -S \pi_r p_i = -c_{r_i}$ , sarà  $\Sigma A_{r_i} c_{r_i} = 0$ . Posto poi

$$P = \frac{1}{3} \Delta_2 p, \quad Q = \frac{1}{3} \Delta_2 q, \dots,$$

(4)

$$N = \frac{1}{3} \Delta_2 n = \frac{1}{3} \Sigma A_{r_i} n_{r_i},$$

sarà:

$$(5) \quad SpP = \frac{1}{3} \sum S A_{rs} p p_{rs} = -\frac{1}{3} \sum A_{rs} a_{rs} = -1.$$

Sarà ancora non soltanto

$$(6) \quad S\pi p = S\pi p_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

ma anche:

$$(7) \quad S\pi P = \frac{1}{3} S \sum A_{rs} \pi p_{rs} = -\frac{1}{3} \sum A_{rs} c_{rs} = 0.$$

Dunque le  $\pi$  sono proporzionali ai minori della matrice

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}} (p, p_1, p_2, p_3, P)$$

e noi le sceglieremo proprio uguali a questi minori, ponendo così:

$$(8) \quad \pi = \frac{1}{\sqrt{|A|}} (p, p_1, p_2, p_3, P)$$

e quindi:

$$(9) \quad \chi = S d p d \pi = -S \pi d^2 p =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{|A|}} (p, p_1, p_2, p_3, P, d^2 p) = \sum c_{rs} du_r du_s.$$

$$(10) \quad \sum A_{rs} c_{rs} = 0.$$

Se ne deduce anche:

$$S\pi^2 = -\frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & SpP \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & Sp_1P \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & Sp_2P \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & Sp_3P \\ SpP & Sp_1P & Sp_2P & Sp_3P & SP^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{A}{|A|} (SpP)^2 = \frac{A}{|A|} = \text{sgn } A.$$

Dunque

$$(11) \quad S\pi^2 = \varepsilon, \quad \text{ove } \varepsilon = \text{sgn } A.$$

Il complesso  $\pi$  non è mai speciale. Di più si ha:

$$(11)_{bis} \quad \frac{1}{\sqrt{|A|}} (p, p_1, p_2, p_3, P, \pi) = S\pi^2 = \varepsilon.$$

### B) L'elemento lineare proiettivo.

Si noti:

1) Un cambiamento qualsiasi di variabili  $u$  non cambia la forma  $\varphi$ , che quindi è intrinseca (propriamente); invece sia le  $\pi$  che la  $\chi$  sono impropriamente intrinseche, perchè i cambiamenti di variabili  $u$  a Iacobiano negativo cambiano di segno le  $\pi$  e la forma  $\chi$ .

2) Moltiplicando le  $x, y, z, t$  per uno stesso fattore  $\sigma$ , le  $p$  restano moltiplicate per  $\sigma^2$ , la  $\varphi$  e la  $a_{rs}$  per  $\sigma^4$ , le  $A_{rs}$  per  $\frac{1}{\sigma^4}$ ; quindi i nuovi valori  $\bar{P}$  delle  $P$  differiscono da  $\frac{1}{\sigma^2} P$  per una combinazione lineare delle  $p, p_i$ :  $\sqrt{|A|}$  resta moltiplicato per  $\sigma^6$ , e quindi  $\chi$  resta moltiplicato per  $\sigma^2$ , mentre le  $\pi$  restano inalterate.

3) Una collineazione a determinante 1 muta in sè stessa la  $\varphi$  e la  $\chi$ .

4) Una collineazione di determinante negativo è il prodotto di una collineazione 2), di una 3) e della  $x' = -x, y' = y, z' = z, t' = t$ ; la quale cambia il segno di  $p, q, r$ , lascia inalterate  $l, m, n$ ; essa pertanto cambia il segno della  $\varphi$ , e quindi anche il segno  $\varepsilon$  di  $A$  ed il segno delle  $A_{rs}$  e di 3 delle coordinate di retta e perciò lascia inalterata la  $\chi$ . Noi di solito prescindiamo da queste trasformazioni, che mutano la legge di orientazione delle rette. E potremo perciò costantemente supporre  $p. \varepsilon. s = 1$ .

5) Una correlazione  $T$  è prodotto dello scambio delle terne  $p, q, r$  ed  $l, m, n$  e di una collineazione  $T'$ ; ci limiteremo alle correlazioni  $T$  tali che la  $T'$  sia a determinante positivo. Per studiare l'effetto, basti osservare che lo scambio delle  $p, q, r$  ed  $l, m, n$  lascia  $\varphi$  inalterato, cambia  $\chi$  di segno.

In conclusione il rapporto  $\varphi : \chi^2$  è intrinseco invariante, e noi lo chiameremo l'elemento lineare proiettivo del complesso. (Se non prescindessimo dalle (4) e dalle correlazioni speciali escluse in (5), dovremmo innalzarlo al quadrato). Si noti che il risultato precedentemente ottenuto sui complessi lineari si può anche enunciare dicendo: *I complessi lineari sono caratterizzati dalla  $\chi = 0$ .*

#### C) Curvature proiettive e coordinate normali.

L'indeterminazione (di un fattore) delle  $\varphi, \chi$  si potrà togliere anche nel caso dei complessi, ricorrendo alle coordinate normali, come vedremo nel modo seguente. Consideriamo l'equazione che si ottiene uguagliando a zero il discriminante di  $\omega\varphi + \chi$ , che è, per le relazioni di apolarità

$$(12) \quad \omega^3 A + \omega \Sigma a_{rs} C_{rs} + C = 0,$$

ove  $C$  è il discriminante di  $\chi$ , e  $C_{rs}$  è il complemento algebrico di  $c_{rs}$  non diviso per  $C$ . Se si moltiplica  $\chi$  per un fattore  $\tau$  e  $\varphi$  per  $\tau^2$ , le radici  $\omega$  restano divise per  $\tau$ . Le quantità intrinseche

$$(13) \quad I = \frac{C}{A}, \quad J = \frac{\Sigma a_{rs} C_{rs}}{A} \quad (I \text{ è impr. intrinseca})$$

restano moltiplicate per  $\frac{1}{\tau^3}$  o per  $\frac{1}{\tau^2}$ . Noi potremo imporre all'una o all'altra un valore numerico prefissato, e chiamare *normali* le coordinate corrispondenti: resta escluso il caso *anormale*  $I = J = 0$ , quando cioè l'equazione in  $\omega$  ha una radice tripla nulla. (\*)

(\*) Questi ed altri complessi anormali sono studiati da Paul Menétré, Comptes Rendus t. 145 (20 Nov. 1922) pag. 941.

In coordinate normali la forma  $\varphi$ , determina una geometria metrica, (di cui essa è elemento lineare) di carattere intrinseco invariante, per mezzo della quale si possono estendere ai complessi le nozioni metriche di angolo, distanza, geodetiche, ecc., così come l'elemento lineare  $\frac{\varphi}{\chi^2}$  può servire a estendere la nozione di pangeodetiche.

Si noti ancora che non varia, al variare di  $\tau$ , la frazione

$$(14) \quad K = \frac{C^3 A}{(\Sigma a_{rs} C_{rs})^3} = \frac{I^3}{J^3},$$

che si può dunque chiamare *curvatura proiettiva del complesso*, perchè è una quantità intrinseca invariante (anche per le collineazioni e reciprocità sopra escluse). Se  $\omega_i$  sono le radici di (14), si ha:

$$(14)_{bis} \quad \begin{cases} 0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \\ K = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2}{(\omega_1 \omega_2 + \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1)^2} \end{cases}$$

Ad ogni radice  $\omega$ , della (14) corrisponde una conica  $\omega\varphi + \chi = 0$  scomposta in due rette, e un corrispondente complesso lineare tangente. Perciò: *A ogni complesso  $\Gamma$  lineare tangente corrisponde un'infinità quadratica di direzioni (di spazio rigato) tali che  $\Gamma$  è osculatore alle rigate del complesso iniziale uscenti in tali direzioni. Vi sono in generale tre e tre soli complessi  $\Gamma$  per cui questa infinità quadratica si spezza in due sistemi lineari. Io dico che questi complessi si possono chiamare bitangenti perchè toccano il complesso dato in due generatrici  $p$  e  $p + dp$  consecutive.*

Infatti dire che un complesso  $\pi'$  tocca il complesso dato in  $p$  e in  $p + dp$  equivale a dire che

$$(15) \quad 0 = S\pi'p = S\pi'p_i = S\pi'dp = S\pi'(p_i + dp_i) \\ (i = 1, 2, 3).$$

Le prime tre dicono che  $\pi'$  è un complesso tangente, cioè un complesso  $\alpha p + \beta \pi$ . Le ultime diventano:

$$\Sigma_k (\alpha a_{ik} + \beta c_{ik}) du_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

le quali determinano appunto quei valori  $\omega = \alpha : \beta$ , che annullano (12). Ad ogni radice  $\omega_i$  corrisponde generalmente un sistema di valori per  $du_1 : du_2 : du_3$ . Quindi: *Vi sono generalmente tre sistemi di  $\infty^2$  rigate del complesso, tali che per ogni retta  $p$  del complesso esce una rigata di ciascuno di questi sistemi. Per ogni generatrice  $p$  di una di queste rigate passa un complesso lineare che tocca il complesso dato nella generatrice  $p$  e nella consecutiva  $p + dp$ .*

I tre valori dei rapporti  $du_1 : du_2 : du_3$  si possono anche definire eliminando le  $\pi'$  da (15), come quei valori che annullano la matrice

$$(16) \quad (p, p_1, p_2, p_3, dp_1, dp_2, dp_3) = 0.$$

*Le rigate precedenti sono quelle che soddisfano alle (16): ciò che ne rende evidente il carattere invariante. Si noti che da quanto precede segue che queste rigate sono determinate dall'elemento lineare proiettivo. Di proprietà affatto analoghe godono altri sistemi di rigate, quelle corrispondenti ai quattro valori di  $du_1 : du_2 : du_3$ , che annullano contemporaneamente  $\varphi$  e  $\chi$ , cioè ai 4 punti comuni alle coniche  $\varphi$  e  $\chi$ . Per vederne chiaro il significato geometrico osserviamo che ad ogni punto  $du_1 : du_2 : du_3$  della conica  $\varphi = 0$  corrisponde una retta  $p + dp$  del complesso incidente alla  $p$ , e quindi determinante con questa un fascio di rette, il quale, contenendo due rette  $p$  e  $p + dp$  consecutive del complesso, è un fascio tangente al complesso, il quale apparterrà a tutti i complessi tangenti (appunto perchè questi ne contengono le rette  $p$  e  $p + dp$ ) e quindi anche alla congruenza lineare loro intersezione, che naturalmente si dice essere la congruenza lineare tangente. Essendo  $S(\alpha p + \beta \pi)^2 = \pm \beta^2$  nulla solo per  $\beta = 0$ , questa congruenza tangente ha le due direttrici coincidenti entrambe nella retta  $p$ .*

Le equazioni  $\varphi = \chi = 0$  equivalgono alle  $Spd^2 p = S\pi d^2 p = 0$ , e significano perciò che le rigate soddisfacenti alle  $\varphi = \chi = 0$  sono in ogni loro generatrice osculatrici ai corrispondenti complessi lineari tangenti, cioè alla congruenza lineare tangente. Quindi:

*Esistono generalmente in un complesso 4 sistemi di  $\infty^2$  rigate soddisfacenti alle  $\varphi = \chi = 0$ ; per ogni retta del complesso esce una rigata di ciascun sistema; ognuna di queste rigate è in una sua generatrice  $p$  osculatrice alla corrispondente congruenza lineare tangente.*

### § 97. — Le equazioni differenziali fondamentali nella teoria dei complessi.

#### A) Equazioni I, II, III.

Osserviamo che i sei complessi  $p, p_1, P, \pi$  sono *linearmente indipendenti*. Chè, se fosse

$$\alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3 + \varepsilon P + \sigma \pi = 0,$$

allora, indicandone con  $\pi'$  il primo membro, la  $S\pi'\pi = 0$  dà  $\sigma = 0$ , le  $S\pi'p_i = 0$  danno  $\beta a_{i1} + \gamma a_{i2} + \delta a_{i3} = 0$ , donde, poichè  $A \neq 0$ ,  $\beta = \gamma = \delta = 0$ . La  $S\pi'p = 0$  dà  $\varepsilon = 0$ ; e quindi dovrà anche essere  $\alpha = 0$ ; la precedente equazione avrebbe tutti i coefficienti nulli. Pertanto sei quantità qualunque si possono esprimere come combinazione lineare delle precedenti. In particolare varranno delle formole:

$$p_{r_s} = \alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2 + \delta p_3 + \tau P + \sigma \pi,$$

ove le  $\alpha, \beta, \dots, \sigma$  dipenderanno dagli indici  $r, s$ . Ricordando le (5) del § 94 e (6), (7), (11) § 96, ed osservando che

$$-S p p_{r_s} = a_{r_s}, \quad S p_{r_s} p_i = 0, \quad S p_{r_s} \pi = -c_{r_s}$$

si deduce  $\tau = a_{r_s}$ ,  $0 = \beta a_{i1} + \gamma a_{i2} + \delta a_{i3}$ , donde, poichè  $A \neq 0$ ,  $\beta = \gamma = \delta = 0$ ,  $c_{r_s} = -\sigma S\pi^2 = -\varepsilon \sigma$ . Posto  $\alpha = e_{r_s} = e_{r_s}$ , si avrà in conclusione:

$$(I) \quad p_{r_s} = a_{r_s} P - \varepsilon c_{r_s} \pi + e_{r_s} p.$$

Si noti che la forma  $\phi = \Sigma e_{r_s} du_r du_s$  ha pure significato intrinseco, ed è apolare alla  $\varphi$ , come la  $\chi$ . Infatti da (I) si deduce

$$(1) \quad p \Sigma A_{r_s} e_{r_s} = \Sigma A_{r_s} p_{r_s} - P \Sigma A_{r_s} a_{r_s} + \varepsilon \pi S A_{r_s} c_{r_s} = \\ = 3P - 3P = 0.$$

Come si comporti la  $\phi$  per effetto di una collineazione è cosa facile a studiare; noi osserveremo soltanto:

1) Anche la  $\phi$  è una forma invariante, se si calcola in coordinate normali:

2) Se si assumono coordinate di retta non omogenee, p. es. si suppone  $l=1$ , la forma  $\phi$  si riduce alla  $\varepsilon\lambda\chi$  (infatti per  $l=1$ , è  $l_{rs}=0$ ,  $L=0$ ; e la (I) dà per  $p=l$  immediatamente il risultato enunciato).

3) In generale dalle (I) si deduce che  $\phi$  è determinata dalla:

$$\varphi SP^2 - \phi = \sum SP p_{rs} du_r du_s.$$

Le (I) sono le equazioni fondamentali, esse determinano completamente il complesso, (insieme a quelli ad esso proiettivi); cosicchè la teoria delle tre forme  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\phi$  include quella di tutti gli invarianti proiettivi di un complesso; l'analogo delle equazioni di Codazzi (della geometria metrica delle superficie) sono date dalle condizioni d'integrabilità delle (I) e delle equazioni tratte dalla definizione delle forme  $\varphi$ ,  $\chi$ . Anzi le sole forme  $\varphi$ ,  $\chi$  determinano il complesso.

Per dimostrarlo, osserviamo che, oltre alle:

$$Sp_r p_s = -Sp p_{rs} = a_{rs} \quad Sp_i p_{rs} = 0 \quad -S\pi p_{rs} = c_{rs} = +S\pi_r p_s$$

valgono le:

$$SP\pi = 0 \quad \text{dove } SP\pi_i = -S\pi P_i, \quad S\pi^2 = \varepsilon, \quad S\pi\pi_i = 0$$

$$S\pi p = S\pi p_i = Sp\pi_i = 0$$

$$SpP = \frac{1}{3} \sum A_{rs} Sp p_{rs} = -\frac{1}{3} \sum A_{rs} a_{rs} = -1$$

$$SP p_i = \frac{1}{3} \sum A_{rs} Sp_i p_{rs} = 0$$

e quindi anche  $SpP_i = 0$ ,

$$SP_i p_s = -SP p_{si} = -a_{is} SP^2 - e_{is} \quad (\text{per le (I)}).$$

Anche le  $P_i$ ,  $\pi_i$  si potranno scrivere come combinazioni lineari delle  $p$ ,  $p_i$ ,  $P$ ,  $\pi$ :

$$P_i = \alpha_i p + \sum_i \beta_i^i p_i + \gamma_i P + \sigma_i \pi$$

$$\pi_i = \mu_i p + \sum_i \nu_i^i p_i + \delta_i P + \nu_i \pi.$$

Per la  $SP_i p = 0$  si ha  $\gamma_i = 0$ ; dal valore di  $SP_i p$ , si deduce:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \beta_i^i a_{is} = -a_{is} SP^2 - e_{is} \\ \text{ossia } \beta_i^j = -\varepsilon_{ij} SP^2 - \sum_{\sigma} e_{i\sigma} A_{\sigma j} \quad \left( \begin{array}{l} \varepsilon_{ii} = 0 \\ \varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{per } i \neq j \end{array} \right) \\ P_i = \alpha_i p + \sum_i \beta_i^i p_i + \sigma_i \pi. \end{array} \right.$$

E in modo simile si trova (per le  $S\pi\pi_i = S\pi p_i = 0$ ,  $S\pi_i p_r = \varepsilon_{ir}$  e  $S\pi_i P = -S\pi P_i$ )

$$(III) \quad \pi_i = \varepsilon_{ij} p + \sum_{ij} A_{ij} c_{ji} p_i.$$

Derivando (I) rispetto ad  $u_i$ , scambiando  $s$  con  $t$ , e sottraendo se ne deduce:

$$(2) \quad \begin{aligned} p_{rst} - p_{rts} &= \sum_{h,k} (ts, rh) A_{hk} p_k = \\ &= a_{rs} (\alpha_i p + \sum_i \beta_i^i p_i + \sigma_i \pi) - a_{ri} (\alpha_s p + \sum_i \beta_i^i p_i + \sigma_s \pi) \\ &\quad - \varepsilon c_{rst} \pi + \varepsilon c_{rit} \pi \\ &= \varepsilon c_{rs} (\varepsilon \sigma_i p + \sum_{ij} A_{ij} c_{ji} p_i) + \varepsilon c_{ri} (\varepsilon \sigma_s p + \sum_{i,j} A_{ij} c_{ji} p_i) \\ &\quad + (e_{rst} - e_{rit}) p + e_{rs} p_i - e_{ri} p_s. \end{aligned}$$

Siano  $s \neq t$  e sia  $l$  differente da  $s$ ,  $t$ , cosicchè  $s$ ,  $t$ ,  $l$  sono una

permutazione di 1, 2, 3. Essendo  $p, p_i, \pi, P$  linearmente indipendenti, la (2) dà, confrontando i termini in  $\pi$ :

$$a_{rs} \sigma_t - a_{rt} \sigma_s = \varepsilon c_{rst} - \varepsilon c_{rts}.$$

Poichè  $A \neq 0$ , se ne deducono i valori delle  $\sigma$  dati per mezzo della  $e_{rs}, c_{rs}$  e loro derivate, come si riconosce p. es. moltiplicando per  $A_{rs}$ , sommando rispetto ad  $r$ . Confrontando i termini in  $p_t$ , si trova che la quantità

$$a_{rs} \beta_t^i - a_{rt} \beta_s^i = -a_{rs} \sum_{\sigma} e_{t\sigma} A_{\sigma i} + a_{rt} \sum_{\sigma} e_{s\sigma} A_{\sigma i} \quad (s \neq t \neq l \neq s)$$

è pure individuata dalle  $a_{rs}, c_{rs}$ . Per  $r = 1, 2, 3$  si hanno tre equazioni; dalle quali, come per le  $\sigma$ , si deduce che anche le

$$-\beta_t^i = \sum_{\sigma} e_{t\sigma} A_{\sigma i} \quad (t \neq l)$$

sono determinate dalle forme  $\chi$  ed  $\varphi$  (cioè dalle  $a_{rs}$  e  $c_{rs}$ ). Altrettanto si deduce (confrontando i termini in  $p_t$ ) per la:

$$e_{rs} + a_{rt} \sum_{\sigma} e_{s\sigma} A_{\sigma i} - a_{rs} \sum_{\sigma} e_{t\sigma} A_{\sigma i} - a_{rs} SP^2$$

e quindi anche (essendo  $s \neq t$ ) per le

$$e_{rs} - a_{rs} SP^2 - a_{rs} \sum_{\sigma} e_{t\sigma} A_{\sigma i}$$

(quando  $s \neq t$ , e quindi, per simmetria, anche quando  $r \neq t$  cioè quando non è  $r = s = t$ ).

Se dunque  $r \neq s$ , potremo dare alla  $t$  i valori 1, 2, 3. Sommando rispetto a  $t$ , ricordando che per le relazioni di apolarità è  $\sum_{t, \sigma} A_{t\sigma} e_{t\sigma} = 0$ , ne dedurremo per  $r \neq s$  il valore di  $e_{rs} - a_{rs} SP^2$ .

Resta dunque determinato (per mezzo delle  $a_{rs}, c_{rs}$  e loro derivate) anche il valore per  $r \neq s$  di  $a_{rs} \sum_{\sigma} e_{t\sigma} A_{\sigma i}$ , e quindi anche, se non sono nulle tutte le  $a_{rs}$  per  $r \neq s$ , il valore di  $\sum_{\sigma} e_{t\sigma} A_{\sigma i}$ , e quindi anche quello di  $SP^2$ . Conoscendo già il valore di

$\sum_{\sigma} e_{t\sigma} A_{\sigma i}$  per  $t \neq l$ , ne potremo dedurre i valori di tutte le  $e_{t\sigma}$ .

Se fosse  $a_{rs} = 0$  per  $r \neq s$  (caso che potremmo del resto escludere con un cambiamento di variabili) le quantità precedenti si riducono ad  $e_{rs}$  per  $r \neq s$ , che dunque saranno determinate mediante le  $a_{rs}, c_{rs}$  e loro derivate; per  $r = s$  esse si riducono ad  $e_{rr} - a_{rr}[SP^2 - e_{ii} A_{ii}]$  ( $r \neq t$ ). Restano così determinate le  $\frac{e_{rr}}{a_{rr}} - SP^2 -$

$-\frac{e_{ii}}{a_{ii}}$ ; poichè la relazione di coniugio dà  $\sum_{\sigma} \frac{e_{\sigma\sigma}}{a_{\sigma\sigma}} = 0$ , ciò basta

a determinare sia le  $e_{rr}$  che  $SP^2$ . In ogni caso restano determinate le  $e$ , le  $\beta_t^i$  e  $SP^2$ . In particolare dunque la terza forma  $\phi$  è determinata dalle  $\varphi, \chi$ . Confrontando in fine i termini in  $p$  si riconosce che le  $a_{rs} \alpha_t - a_{rt} \alpha_s$ , e quindi anche le  $\alpha_t$  (perchè  $A \neq 0$ ) si possono determinare appena note le quantità precedenti, cioè appena siano date le forme  $\varphi, \chi$ .

Dunque, date le  $\varphi, \chi, \phi$ , anzi date le sole forme  $\varphi, \chi$  sono determinate le (I), (II), (III) insieme alla  $SP^2$ ; e quindi, a meno di una collineazione, è determinato il complesso.

#### B) Applicabilità proiettiva dei complessi.

Questo teorema ammette una notevolissima interpretazione geometrica. Se noi estendiamo ai complessi di rette la nozione di complessi proiettivamente applicabili, il nostro risultato si enuncia, come ora proveremo:

*I complessi di rette sono proiettivamente indeformabili; cioè due complessi proiettivamente applicabili sono proiettivi tra di loro, (se ci riferiamo ad applicabilità proiettive del 2° ordine).*

Naturalmente diciamo che due complessi  $C, \bar{C}$  sono proiettivamente applicabili del 2° ordine se le loro generatrici  $p, \bar{p}$  sono in corrispondenza biunivoca (definita p. es. da uguali valori dei parametri  $u_i$ ), e se, essendo  $p, \bar{p}$  due generatrici omologhe, esiste una collineazione che porta  $\bar{p}$  in  $p' = p$  e il complesso  $\bar{C}$  in un complesso  $C'$  tale che rigate omologhe uscenti da  $p' = p$  nei due complessi  $C$  e  $C'$  ivi si osculano (hanno tre generatrici consecutive

comuni). Io dico che in tal caso i due complessi hanno comuni le forme  $\varphi$ ,  $\chi$  (e quindi anche la forma  $\psi$ , e sono proiettivi per quanto abbiamo testè dedotto dalle condizioni di integrabilità).

Indicando per un momento con indici apposti alle coordinate  $p$  di retta le *derivate ordinarie delle  $p$*  si trova come al § 3 C che le nostre ipotesi equivalgono ad ammettere l'esistenza per ogni retta  $p$  del complesso di corrispondenti costanti  $\sigma$ ,  $\tau_i$ ,  $\rho_i$ ,  $\nu_{ik}$  tali che per le rette  $p$ ,  $p'$  valgono le:

$$(3) \quad p' = \sigma p; \quad p'_i = \sigma (p_i + \tau_i p);$$

$$p_{ik} = \sigma (p_{ik} + \rho_i p_k + \rho_k p_i + \nu_{ik} p)$$

(le  $\tau_i$ ,  $\rho_i$ ,  $\nu_{ik}$  indicano varie costanti, e non derivate di una  $\tau$  o di una  $\nu$ ). Si trova per la  $\varphi = -Spd^2p$ , che la forma  $\varphi'$  per  $C'$  vale (nella retta considerata) precisamente  $\sigma^2\varphi$ . Poichè  $p$  è una retta generica, e  $\bar{C}$ ,  $C'$  sono proiettivi, esisterà una funzione  $\sigma$  delle  $u, v, w$  tale che la forma  $\bar{\varphi}$  di  $\bar{C}$  valga  $\sigma^2\varphi$ . Potremo dunque moltiplicare le coordinate delle rette di  $\bar{C}$  per un tale fattore in guisa che sia  $\bar{\varphi} = \varphi' = \varphi$  e che sia  $\sigma = 1$ . Potremo allora nelle (23) intendere che le  $p_{ik}$  siano derivate covarianti; e basterà ricordare il valore dato dalle (9) del § 96 sotto forma di determinante per le forme  $\chi$ ,  $\chi'$ ,  $\bar{\chi}$  per riconoscere che anche queste sono uguali tra loro.

Oss. Se invece di collineazioni, si fosse usata una reciprocità per portare  $\bar{C}$  in  $C'$ , avremmo concluso che  $\varphi = \bar{\varphi}$ ,  $\chi = -\bar{\chi}$ .

Viceversa siano  $C$ ,  $\bar{C}$  due complessi per cui  $\varphi = \bar{\varphi}$ ,  $\chi = \bar{\chi}$ ; saranno uguali i segni  $\varepsilon$ ,  $\bar{\varepsilon}$  dei discriminanti di  $\varphi$ ,  $\bar{\varphi}$ ; e potremmo supporre p. es.  $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = 1$ . Scegliamo  $\rho$  tale che  $S(\bar{P} + \rho\bar{p})^2 = SP^2$ , cioè il  $\rho$  dato dalla:

$$\rho = \frac{1}{2} (S\bar{P}^2 - SP^2). \quad (*)$$

(\*) Dal precedente teorema segue anzi  $\rho = 0$ , perchè  $SP^2$  è completamente determinato dalle  $\varphi, \chi$ .

Allora esisterà (§ 93 C) una proiettività a modulo  $\pm 1$  che porta le sestuple  $\bar{p}, \bar{p}_1, \bar{\pi}, \bar{P} + \rho\bar{p}$  in  $p, p_1, \pi, P$ . Sia  $C'$  il complesso trasformato di  $\bar{C}$  mediante questa proiettività; esso avrà per forme  $\varphi' = \varphi$ ,  $\chi' = \pm\chi$  secondo che la proiettività considerata è a modulo  $\pm 1$ , cioè secondo che è una collineazione od una reciprocità. Se vale il segno superiore, le (I) relative ad  $C$  ed  $C'$  dicono tosto che tutte le differenze  $p'_{rr} - p_{rr}$  sono uguali ad  $(\bar{e}_{rr} + \rho a_{rr} - e_{rr})p$ ; cosicchè sono soddisfatte le (3) con  $\sigma = 1$ ,  $\tau_i = \rho_i = 0$  e il teorema è dimostrato. Il secondo caso (che valgono i segni inferiori) è invece impossibile: esso si presenterebbe se i determinanti  $(\bar{p}, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{P}, \bar{\pi})$  e  $(p, p_1, p_2, p_3, P, \pi)$  avessero segno opposto, mentre entrambi hanno il segno di  $\varepsilon$ .

### § 98. — Le congruenze con $A = 0$ .

I metodi che qui usiamo sono in parte gli stessi, che useremo nel caso generale; e molte delle considerazioni che faremo nel caso generale, si potrebbero ripetere con qualche modificazione anche se  $A = 0$ . In ogni modo, per evitare soverchie distinzioni, è bene studiare a parte, per poi completamente trascurare, il caso  $A = 0$ . In tal caso si possono scegliere i parametri  $u = u_1$  e  $v = u_2$  in guisa che:

$$\varphi = Sd p^2 = -Spd^2 p = a_{11} du^2, \quad \text{cioè che}$$

$$(1) \quad a_{12} = a_{22} = 0 \quad \text{ossia} \quad Sp_u p_v = Sp_v^2 = 0, \quad Spp_{uv} = Spp_{vv} = 0.$$

Vi è una retta di coordinate  $p_v$  incidente alla  $p$ ; il fascio da esse determinato, cioè il fascio delle rette  $\rho p + \sigma p_v$  si dirà il fascio *tangente* alla congruenza nella generatrice  $p$ . I complessi  $\pi$  tangenti sono quelli che soddisfano alle:  $S\pi p = S\pi p_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ); e perciò i complessi  $\alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2$  sono tutti e soli i complessi coniugati ai complessi tangenti, e che perciò diremo *coniugati*. Essi sono speciali se  $S(\alpha p + \beta p_1 + \gamma p_2)^2 = 0$ , ossia se  $\beta = 0$ . *Gli unici complessi coniugati speciali sono i complessi  $\alpha p + \gamma p_2$ , che hanno per asse una retta del fascio tangente; il*

quale perciò contiene tutte e sole le rette comuni ai complessi tangenti. Questo fascio è anche l'insieme delle rette comuni ai complessi coniugati. Infatti è identicamente

$$S(\rho p + \sigma p_0)(\alpha p + \beta p_u + \gamma p_0) = 0,$$

cosicchè le rette del fascio tangente appartengono a tutti i complessi coniugati; e questi complessi non hanno comune nessuna ulteriore retta  $p'$ ; altrimenti i complessi tangenti sarebbero complessi del tipo  $\alpha p + \beta p_u + \gamma p'$ . Essi sarebbero tutti degeneri; altrettanto avverrebbe perciò dei coniugati; ciò che è assurdo perchè  $S p_u^2 = a_{11} \neq 0$ .

Sia  $P$  il vertice del fascio tangente,  $\pi$  il suo piano. Quando la retta  $p$  si muove nella congruenza, il punto  $P$  comincerà a muoversi in una direzione  $PP'$ , ove  $P'$  è un punto infinitamente vicino a  $P$ . Poichè  $P$  è il punto comune alle rette  $p, p_0$ , la retta  $P'P$  si appoggerà alle rette  $p, p_0, p + dp, p_0 + dp_0$ , e in particolare apparterrà (almeno se  $du \neq 0$ ) ai complessi  $p, p_0$ ,  $p_u = \frac{(p + dp) - p - p_0 dv}{du}$  ed è perciò una retta del fascio

tangente. Dunque il piano  $\pi$  di questo fascio, contenendo le rette  $PP'$ , è tangente al luogo del punto  $P$ , la cosiddetta *superficie focale*  $S$  (che può anche ridursi a una curva o ad un punto: casi questi, di cui non ci occuperemo neppure). Le rette  $p$  della congruenza involuppano su  $S$  le linee  $u = \text{cost.}$ ; poichè il piano  $\pi$  delle rette  $p$  e  $p_0$ , cioè di due tangenti consecutive ad una  $u = \text{cost.}$ , è il piano tangente ad  $S$ , le  $u = \text{cost.}$  saranno asintotiche per  $S$ . Le congruenze con  $A = 0$  sono generalmente formate dalle tangenti a un sistema di asintotiche di una superficie  $S$ .

### § 99. — Gli elementi geometrici fondamentali di una congruenza.

#### A) Fasci centrali e focali.

Supporremo d'ora in poi  $A \neq 0$ . Ad ognuna delle due radici  $\beta_1^2, \beta_2^2$  della  $\varphi = 0$  ( $i = 1, 2$ ) considerata come equazione in  $du:dv$  corrisponde un raggio  $p + dp$  incidente al raggio  $p$ . Si noti che

l'indice  $i$  non è indice di derivazione covariante, ma solo serve a distinguere le due radici. Le  $\beta$  sono determinate soltanto a meno di fattori. Poichè valgono in ogni caso le:

$$2 \frac{A_{12}}{A_{22}} = -2 \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{\beta_1^2}{\beta_1^2} + \frac{\beta_2^2}{\beta_2^2}, \quad \frac{A_{11}}{A_{22}} = \frac{a_{22}}{a_{11}} = \frac{\beta_1^2 \beta_2^2}{\beta_1^2 \beta_2^2},$$

noi potremo (e in infiniti modi) scegliere tali fattori in guisa che:

$$(1) \quad \frac{1}{2} A_{11} = \beta_1^2 \beta_2^2, \quad A_{12} = \beta_1^2 \beta_2^2 + \beta_2^2 \beta_1^2, \quad \frac{1}{2} A_{22} = \beta_1^2 \beta_2^2$$

donde si trae:

$$\frac{1}{4A} = \frac{1}{4} (A_{11} A_{22} - A_{12}^2) = -\frac{1}{4} (\beta_1^2 \beta_2^2 - \beta_1^2 \beta_2^2)^2$$

cosicchè potremo ottenere (scambiando caso mai le  $\beta_1$  con le  $\beta_2$ ) che sia anche in segno:

$$(2) \quad \beta_1^2 \beta_2^2 - \beta_1^2 \beta_2^2 = \sqrt{-\frac{1}{A}}.$$

Sarà poi:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{22} \\ \beta_1^2 \beta_1^2 & \beta_1^2 \beta_2^2 & \beta_1^2 \beta_2^2 \\ \beta_1^2 \beta_2^2 & \beta_2^2 \beta_2^2 & \beta_2^2 \beta_2^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{A} \sqrt{-\frac{1}{A}}.$$

I due raggi  $p + dp$  incidenti a  $p$  incontrano  $p$  nei punti  $P_i$  comuni a  $p$  ed a  $p_1 \beta_1^2 + p_2 \beta_2^2$ , e determinano i piani  $\pi_i$  comuni a queste due rette ( $i = 1, 2$ ). I punti  $P_i$  diconsi *fuochi*, i piani  $\pi_i$  *piani focali*, i fasci  $(P_i, \pi_i)$  fasci *tangenti* o con *Walsch* fasci *centrali*, i fasci  $(P_1, \pi_2)$  e  $(P_2, \pi_1)$  fasci *focali*. Le rigate della congruenza soddisfacenti alla  $\varphi = 0$  sono le *sviluppabili della congruenza*; da ogni retta di questa escono pertanto due *sviluppabili*. I complessi coniugati (cioè in involuzione con tutti i complessi tangenti) sono i complessi  $\rho p + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2$ ; essi sono *speciali soltanto se*

$$S(\rho p + p_1 \gamma^1 + p_2 \gamma^2)^2 = 0,$$

ossia se  $\gamma^1 : \gamma^2$  coincide con una delle  $\beta_i^1 : \beta_i^2$ ; in tal caso hanno pertanto per asse una retta dei fasci centrali. Le rette centrali sono perciò tutte e sole le rette comuni a tutti i complessi tangenti. E viceversa un complesso lineare che contenga le rette centrali è un complesso tangente. Le rette comuni a tutti i complessi coniugati sono tutte e sole le rette focali. (uniche rette incidenti a tutti i raggi centrali).

B) Tangenti focali.

Se il raggio  $p$  si sposta infinitamente poco, il fuoco  $P_i$  andrà in una nuova posizione  $P'_i$ , il piano  $\pi_i$  in  $\pi'_i$ . Le rette  $P_i P'_i$  e  $\pi_i \pi'_i$  danno la direzione in cui si sposta  $P_i$  e l'asse intorno a cui comincia a rotare  $\pi_i$ . Poichè  $P_i$  è il punto comune ai raggi

$$p, p_1 \beta_i^1 + p_2 \beta_i^2,$$

la retta  $P_i P'_i$  apparterrà ai complessi

$$p, p_1 \beta_i^1 + p_2 \beta_i^2, dp, d(p_1 \beta_i^1 + p_2 \beta_i^2)$$

cioè ai complessi (almeno se  $\beta_i^1 : du \pm \beta_i^2 : dv$ ; cfr. la seg. nota a piè di pagina)

$$p, p_1, p_2, \beta_i^1 dp_1 + \beta_i^2 dp_2.$$

Perciò la retta  $P_i P'_i$  e similmente la retta  $\pi_i \pi'_i$  sono rette focali appartenenti al complesso  $\beta_i^1 dp_1 + \beta_i^2 dp_2$  o anche al complesso  $\sum_{r,s} p_r du_r \beta_i^s$ . (\*)

(\*) Si noti che  $\sum_{rs} p_r du_r \beta_i^s$  non può essere una combinazione lineare  $\alpha p + \rho p_1 + \sigma p_2$  delle  $p, p_1, p_2$ . Altrimenti sarebbe

$$-\sum_{rs} du_r \beta_i^s = Sp (\sum_{rs} du_r \beta_i^s) = Sp (\alpha p + \rho p_1 + \sigma p_2)$$

e perciò  $du_1 : du_2 = \beta_i^1 : \beta_i^2$ , caso che abbiamo escluso. In questo caso si potrebbe dire che  $P_i$  sta fermo, che  $P_i = P'_i$ , cosicchè non ha senso parlare della retta  $P_i P'_i$ .

Se ne deduce anzitutto che le rette  $P_i, P'_i$  tangenti al luogo del punto  $P_i$  ( $i$ -esima falda focale) sono rette focali, che cioè i fasci focali sono tangenti alle falde focali. Cioè coincidono il luogo del punto  $P_i$  e l'involuppo del piano  $\pi_i$ , come pure il luogo del punto  $P_j$  e l'involuppo del piano  $\pi_j$ . Di più, se un raggio della congruenza si sposta nella direzione  $du : dv$ , la retta  $r_i$  in cui comincia il fuoco  $P_i$  a spostarsi, e la retta  $\rho_i$  intorno a cui comincia a rotare il piano  $\pi_i$ , sono le rette focali appartenenti al complesso  $\sum_{r,s} p_r du_r \beta_i^s$ . Se questo complesso interseca uno dei fasci focali nelle rette  $p$  (comune ai due fasci), interseca necessariamente anche l'altro fascio nella retta  $p$ . Ciò che avviene se:

$$Sp (\beta_i^1 dp_1 + \beta_i^2 dp_2) = 0,$$

ossia

$$\sum a_{rs} \beta_i^r du_s = 0, \text{ ossia } du : dv = \beta_i^1 : \beta_i^2.$$

In tal caso l'altro fuoco  $P_j$  ( $j \neq i$ ) comincia a muoversi su una retta  $r_j$ , e l'altro piano focale  $\pi_j$  a rotare attorno ad una retta  $\rho_j$  appartenenti al complesso  $\beta_j^1 dp_1 + \beta_j^2 dp_2$ , cioè appartenenti al complesso

$$(4) \quad P = \sum p_{rs} \beta_i^r \beta_j^s = \frac{1}{2} \sum A_{rs} p_{rs} = \frac{1}{2} \Delta_2 p,$$

che non varia scambiando gli indici  $i, j$  e a tutti i complessi  $P + \alpha p + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2$ , che si diranno i complessi principali.

Dunque: ad ogni valore di  $du : dv$  corrispondono proiettivamente quattro rette: due  $r_1$  e  $\rho_2$  del fascio focale tangente alla prima falda focale, le altre due  $r_2$  e  $\rho_1$  del secondo fascio focale. Se  $P_i$  si muove nella direzione  $r_i$ , il piano  $\pi_j$  tangente alla  $i$ -esima falda focale ruota attorno  $\rho_j$  ( $i \neq j$ ). Perciò sulla  $i$ -esima falda focale le rette  $r_i$  e  $\rho_j$  sono coniugate.

Se una delle coppie  $r_1, \rho_1$  o ( $r_2, \rho_2$ ) coincide con la retta  $p$ , l'altra coppia è data dalle direzioni coniugate a  $p$  sulle due falde: queste direzioni sono l'intersezione dei fasci focali con uno dei complessi principali, e diconsi le direzioni principali.

## C) Asintotiche focali.

Le direzioni asintotiche della  $i^{\text{esima}}$  falda focale sono caratterizzate da ciò che  $r_i$  coincide con  $\rho_j$ , direzione coniugata di  $r_i$ . Le direzioni asintotiche delle due falde focali sono dunque caratterizzate da ciò che i 5 complessi  $p, p_1, p_2, \Sigma p_r, \beta_i^r du_r$ , ( $i = 1, 2$ ) hanno una retta comune (la tangente asintotica considerata): in altre parole che il complesso

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{|A|}} (p, p_1, p_2, \Sigma p_r, \beta_i^r du_r, \Sigma p_r, \beta_i^r du_r),$$

coniugato a ciascuno dei 5 complessi precedenti, è un *complesso speciale*. Questa proposizione è in difetto se questa matrice è identicamente nulla, e non dà perciò le coordinate di alcun complesso. In questo caso i complessi  $\Sigma p_r, \beta_i^r du_r$ , ( $i = 1, 2$ ) sarebbero una combinazione lineare dell'altro, e dei complessi  $p, p_1, p_2$ . Essi perciò determinerebbero gli stessi due raggi focali; e coinciderebbero pertanto non solo  $r_i$  con  $\rho_j$ , ma anche  $r_j$  con  $\rho_i$ ; cioè *sulle due falde focali si corrisponderebbe uno dei sistemi di asintotiche e quindi anche l'altro*. In tutti i casi vediamo dunque che l'equazione che dà le direzioni asintotiche delle due falde focali si ottiene esprimendo che il quadrato simbolico (§ 93 B) della matrice (5) è nullo. (Se la matrice fosse identicamente nulla, allora, come abbiamo testè provato, questo quadrato simbolico diverrebbe un quadrato effettivo e la congruenza sarebbe  $W$ ). Questo quadrato ottenuto con le regole del § 93 B, è un determinante (diviso per  $A$ ) che si riconosce immediatamente uguale al determinante seguente moltiplicato per  $\epsilon = \text{sgn } A$ .

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 0 & \Sigma a_r, \beta_i^r du_r & \Sigma a_r, \beta_i^r du_r \\ \Sigma a_r, \beta_i^r du_r & S(\Sigma p_r, \beta_i^r du_r)^2 & S(\Sigma p_r, \beta_i^r du_r) S(\Sigma p_r, \beta_i^r du_r) \\ \Sigma a_r, \beta_i^r du_r & S \Sigma p_r, \beta_i^r du_r, \Sigma p_r, \beta_i^r du_r & S(\Sigma p_r, \beta_i^r du_r)^2 \end{array} \right| = \\ = S \left| \begin{array}{cc} \Sigma a_r, \beta_i^r du_r & \Sigma a_r, \beta_i^r du_r \\ \Sigma p_r, \beta_i^r du_r & \Sigma p_r, \beta_i^r du_r \end{array} \right|^2 = \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ = \left| \begin{array}{cc} \beta_1^r & \beta_1^r \\ \beta_2^r & \beta_2^r \end{array} \right|^2 S(\Sigma p_r, du_r, du_r)^2$$

ove sia stato posto

$$(7) \quad \delta v_1 = -a_{21} du_1 - a_{22} du_2 \quad \delta v_2 = a_{11} du_1 + a_{12} du_2$$

(cosicchè  $\varphi = \delta v_2 du_1 - du_2 \delta v_1$ ).

## § 100. — La seconda forma fondamentale di una congruenza.

A) La forma  $\Phi$ .

Siamo dalla (6) del § 99 indotti a introdurre nella teoria un nuovo sistema covariante

$$(1) \quad h_{ijr} = -S p_r p_{ij}.$$

Derivando covariantemente la  $S p_r p_{ij} = 0$ , si ha:

$$(1)_{bis} \quad h_{ijr} = S p_r p_{ij}.$$

Poichè  $p_{ij} - p_{ji} = -\sum_{\sigma, \rho} (j\sigma, i\rho) A_{\sigma\rho} p_\rho$ , è:

$$h_{ijr} - h_{jir} = -S \sum (j\sigma, i\rho) A_{\sigma\rho} p_\rho p_r = -(j\sigma, i\rho).$$

Da queste equazioni si trae che le  $h_{ijr}$  sono simmetriche nei loro indici, eccetto  $h_{1212} = h_{2112} = h_{1221} = h_{2121}$  ed  $h_{1122} = h_{2211}$ , per cui vale la:

$$(2) \quad h_{1122} - h_{2211} = -(12, 12) = -AK,$$

se  $K$  è la curvatura della forma  $\varphi$ . Allo studio di questo sistema covariante si può sostituire quello di un sistema simmetrico  $k_{ijr}$ , ponendo:

$$(3) \quad \Phi = -S(\Sigma p_{r,i} du_r du_i)^2 = \Sigma k_{ij,r} du_r du_i du_j.$$

Si noti che dalle formole che danno i  $d^2 p$ ,  $d^3 p$  si trae:

$$(4) \quad S d p d^3 p = \Sigma a_{r,i} du_r \delta^3 u_i + \Phi; \quad S(d^2 p)^2 = \Sigma a_{r,i} \delta^2 u_r \delta^2 u_i - \Phi$$

che danno nuove definizioni della  $\Phi$ .

Si ha:

$$(5) \quad \begin{cases} h_{ij,u} = k_{ij,u} & (i = j \text{ opp. } i \neq j; i, j = 1, 2) \\ 3 k_{1122} = -S p_{11} p_{22} - 2 S p_{12}^2 = h_{1122} + 2 h_{1212} \end{cases}$$

che insieme alla (2) dà

$$(5)_{bis} \quad h_{1212} = k_{1122} + \frac{1}{3} AK \quad h_{1122} = k_{1122} - \frac{2}{3} AK.$$

Le (5) esprimono le  $h_{ij,r}$  mediante un sistema simmetrico  $k_{ij,r}$ .

Dalla (6) del § 99 si trae: L'equazione complessiva delle asintotiche sulle due falde focali è [cfr. le (1)]:

$$(6) \quad \Sigma h_{ij,r} du_i du_j \delta u_r = 0.$$

Come controllo, si può osservare che essa non muta scambiando i simboli  $d$ ,  $\delta$ , e ciò perchè ognuna delle coppie di asintotiche divide armonicamente il sistema delle sviluppabili, che danno su ogni falda focale un sistema coniugato. La (6) dà il significato geometrico del nuovo sistema covariante  $h_{ij,r}$ .

#### B) Complessi bitangenti.

Noi ci chiediamo ora: Esistono dei complessi lineari  $\pi$  bitangenti, cioè tangenti al complesso  $C$  in una retta  $p$  e in una retta  $p + dp + \frac{1}{2} d^2 p + \frac{1}{6} d^3 p$ , infinitamente vicina? È intuitivo, e il seguente calcolo lo dimostra, che, fissata la  $p$ , la retta infinitamente vicina non si può scegliere ad arbitrio. Infatti, oltre alle:

$$(\alpha) \quad S p \pi = S p_1 \pi = S p_2 \pi = 0$$

devono valere anche le:

$$S(p_1 + dp_1) \pi = S(p_2 + dp_2) \pi = 0$$

$$S \pi \left( p + dp + \frac{1}{2} d^2 p + \frac{1}{6} d^3 p \right) \pi = 0$$

che, per le precedenti, si riducono alla:

$$(\beta) \quad \begin{cases} S \pi (p_{i1} du_1 + p_{i2} du_2) = 0 & (i = 1, 2) \\ S \pi \Sigma p_{r,i} du_r du_i = 0. \end{cases}$$

Affinchè le  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  siano compatibili dev' essere

$$(7) \quad 0 = (p, p_1, p_2, p_{11} du_1 + p_{12} du_2, p_{21} du_1 + p_{22} du_2, \Sigma p_{r,i} du_r du_i)$$

equazione di 5° grado in  $du:dv$ .

Per una retta  $p$  della congruenza escono 5 rigate soddisfacenti alla (7), queste rigate formano 5 sistemi di  $\infty^1$  rigate ciascuna. Per ogni coppia di generatrici consecutive di una di queste rigate passa un complesso lineare che tocca in entrambe la congruenza. Si determinano così i complessi lineari bitangenti alla congruenza. (\*) Vedremo più avanti come anche l'equazione (7) si possa scrivere facilmente per mezzo delle  $h$ .

Possiamo trovare un'altra proprietà delle precedenti 5 direzioni (di spazio rigato) uscenti da una retta  $p$  della congruenza. La congruenza lineare iperosculatrice a tutte le rigate della congruenza uscenti dalla retta  $p$  in una direzione  $du:dv$  è l'intersezione dei complessi lineari  $\pi$  soddisfacenti alle  $S \pi p = S \pi dp = S \pi d^2 p = S \pi d^3 p = 0$ , cioè:

(\*) La parola *bitangenti* ha un significato precisato dalle  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ .

$$0 = S\pi p = S\pi dp = S\pi (p_1 \delta^2 u + p_2 \delta^2 v + \Sigma p_{r,} du_r du_s) = \\ = S\pi (p_1 \delta^3 u + p_2 \delta^3 v + 3 \Sigma p_{r,} du_r \delta^2 u_s + \Sigma p_{r,s} du_r du_s du_t).$$

Tenuto fermo  $dv : du$ , facciamo variare la rigata in guisa che  $\delta^2 u$ ,  $\delta^2 v$ ,  $\delta^3 u$ ,  $\delta^3 v$  varino nel modo più generale. La congruenza iperosculatrice descriverà generalmente tutto lo spazio rigato; noi ci chiediamo quando essa descriverà un complesso lineare  $\pi$ , ossia quando esiste un complesso  $\pi$  che soddisfa alle precedenti equazioni contemporaneamente per tutti i valori di  $\delta^2 u$ ,  $\delta^2 v$ ,  $\delta^3 u$ ,  $\delta^3 v$ . Le precedenti equazioni equivalgono alle  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ , cosicchè possiamo dire:

*I precedenti complessi bitangenti in una retta p alla nostra congruenza, cioè tangenti in p e in p + dp sono i complessi lineari luogo delle congruenze lineari iperosculatrici a tutte le rigate della congruenza passanti per le rette p e p + dp.*

C) Complessi satelliti.

Ricordando che i complessi lineari tangenti sono tutti quelli che contengono i fasci tangenti o centrali, riesce spontaneo di cercare quello  $C_i$  tra essi che contiene anche tutti i fasci centrali infinitamente vicini al fascio  $(P_i, \pi_i)$  luogo delle rette  $\alpha p + \beta_i^1 p_1 + \beta_i^2 p_2$ . Tale complesso sarà in involuzione con  $p$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ , e sarà in involuzione con tutti i complessi

$$d(\beta_i^1 p_1 + \beta_i^2 p_2)$$

cioè sarà il complesso che è in involuzione con

$$(8) \quad p, p_1, p_2, \beta_i^1 p_{11} + \beta_i^2 p_{12}, \beta_i^1 p_{12} + \beta_i^2 p_{22}$$

e quindi anche con tutti i complessi principali  $P$ , loro combinazioni lineari.

*I complessi tangenti  $C_i$  che contengono tutti i fasci centrali infinitamente vicini al fascio  $(P_i, \pi_i)$  sono i complessi satelliti (Be- gleitcomplexe del Wälsch); essi appartengono al fascio di complessi*

*coniugato a tutti i complessi principali, fascio che chiameremo satellite. I complessi satelliti sono indeterminati o coincidenti soltanto se*

$$(9) \quad \frac{1}{A^2} (P P_1 P_2 P_{11} P_{12} P_{22}) = 0$$

*ossia quando è nulla l'espressione intrinseca (quadrato della precedente con le regole del § 93 B).*

$$(10) \quad W = + \frac{1}{A^3} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a_{11} & h_{1111} & h_{1112} & h_{1122} \\ a_{12} & h_{1211} & h_{1212} & h_{1222} \\ a_{22} & h_{2211} & h_{2212} & h_{2222} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A_{11} & A_{12} & A_{22} \\ a_{11} & H_{11}^{11} & H_{11}^{12} & H_{11}^{22} \\ a_{12} & H_{12}^{11} & H_{12}^{12} & H_{12}^{22} \\ a_{22} & H_{22}^{11} & H_{22}^{12} & H_{22}^{22} \end{vmatrix}$$

ove  $H_{ij}^{\sigma} = \Sigma A_{r\rho} A_{s\sigma} h_{r\rho s i}$

$$h_{r,s} = \Sigma a_{r\rho} a_{s\sigma} H_{rs}^{\rho\sigma}.$$

Per riconoscere che questo secondo valore di  $W$  è identico a precedente si osservi che, moltiplicando il terzo membro di (10) per

$$A^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}^2 & 2 a_{11} a_{12} & a_{12}^2 \\ 0 & a_{11} a_{12} & a_{11} a_{22} + a_{12}^2 & a_{12} a_{22} \\ 0 & a_{12}^2 & 2 a_{12} a_{22} & a_{22}^2 \end{vmatrix}$$

si ottiene il determinante del secondo membro.

*Questa uguaglianza  $W = 0$  è la stessa ottenuta, esprimendo che le asintotiche si corrispondono sulle due falde focali. Dato il suo carattere intrinseco basterà per verificarlo assumere le sviluppabili a rigate coordinate  $u, v$ . In tal caso si ha*

$$a_{11} = a_{22} = 0 \quad W A^3 = a_{12}^2 (h_{1111} h_{2222} - h_{1122}^2)$$

mentre l'equazione delle asintotiche è (cfr. l'ultima delle (6) del precedente §)

$$h_{1111} du^4 - 2 h_{1122} du^2 dv^2 + h_{2222} dv^4 = 0,$$

che ha una radice  $du^2 : dv^2$  doppia proprio se  $W = 0$ .

La  $W = 0$  caratterizza le congruenze  $W$ : quelle cioè sulle cui falde focali si corrispondono le asintotiche, ossia per cui i complessi satelliti coincidono, ossia per cui vale la (9) e quindi le  $p$  soddisfano a una stessa equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine.

#### D) Complesso osculatore di una congruenza $W$ .

Quest'ultima proprietà ha una notevole interpretazione geometrica. Per vederla studiamo nel caso generale quale è il regolo osculatore a una rigata della congruenza. Esso è l'intersezione dei complessi lineari coniugati a

$$p, dp = p_1 du + p_2 dv, d^2 p = p_1 \delta^2 u + p_2 \delta^2 v + \sum p_{rs} du_r du_s.$$

Consideriamo tutte le rigate della congruenza uscenti dalla retta  $p$  in una determinata direzione  $du : dv$  (di spazio rigato), cioè tenute fisse  $du, dv$ , facciamo variare  $\delta^2 u, \delta^2 v$ . Il regolo varierà, descrivendo la congruenza intersezione dei complessi coniugati a

$$p, p_1, p_2, \sum p_{rs} du_r du_s,$$

che è la congruenza lineare osculatrice a tutte le rigate della congruenza tangenti tra loro nella retta  $p$  secondo la direzione  $du : dv$  (di spazio rigato). Notiamo incidentalmente che le sue direttrici sono due rette focali, determinate da  $du : dv$ , mentre, data una di queste rette, il valore  $du : dv$  dipende da un'equazione di secondo grado. Dunque:

Le congruenze osculatrici hanno per direttrici due rette focali, e stabiliscono così tra i fasci focali una corrispondenza 2 — 2.

Al variare della direzione  $du : dv$  la congruenza osculatrice genera un complesso quadratico; se però  $W = 0$ , ed esiste pertanto un unico complesso satellite  $\pi$  definito dalle  $S \pi p = S \pi p_i = S \pi p_{rs} = 0$ , questo complesso quadratico si riduce al complesso

satellite (contato due volte) il quale perciò si può chiamare il complesso osculatore, perchè oscula tutte le rigate della congruenza uscenti da  $p$ .

#### E) Fascio satellite e nuovi invarianti.

Posto

$$(11) \quad \lambda_{(i)} = -\frac{1}{2} \sum h_{rs} \rho_\sigma \beta_r^i \beta_s^i A_{\rho\sigma} \quad (i = 1, 2)$$

(questo  $i$  non si deve intendere essere un indice di calcolo assoluto, e tanto meno indica derivazione covariante) ciascuno dei due complessi

$$(12) \quad \pi_{(i)} = \lambda_{(i)} p + \sum_{r,s} p_{rs} \beta_r^i \beta_s^i \quad (i = 1, 2)$$

è in involuzione coi complessi principali, e appartiene perciò al fascio satellite. Poichè è una combinazione lineare dei complessi (8), esso è in involuzione anche col corrispondente complesso satellite. Si noti che, se  $W \neq 0$ , il fascio satellite non può essere tutto formato di complessi speciali. Infatti, assunte a rigate  $u, v$  le sviluppabili, è  $a_{11} = a_{22} = 0$ ; i complessi satelliti sono i complessi  $(p, p_1, p_2, p_{12}, p_{ii})$  con  $i = 1, 2$ . Se tutti i complessi del loro fascio fossero speciali, sarebbe

$$(p p_1 p_2 p_{12} p_{ii})^2 = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (p p_1 p_2 p_{12} p_{11}) (p p_1 p_2 p_{12} p_{22}) = 0$$

che, sviluppate, danno  $h_{1111} = h_{2222} = h_{1122} = 0$  e quindi  $W = 0$ .

Dunque: Se  $W \neq 0$ , il fascio satellite contiene i due complessi satelliti, i complessi (12) coniugati ai satelliti, e contiene due soli complessi speciali: quelli che hanno per asse le direzioni principali, le quali restano caratterizzate da questa proprietà e si possono facilmente calcolare. Esse hanno per coordinate

$$(13) \quad \rho \pi_1 + \sigma \pi_2 = \rho [\lambda_1 \pi + \sum p_{rs} \beta_r^1 \beta_s^1] + \sigma [\lambda_2 \pi + \sum p_{rs} \beta_r^2 \beta_s^2]$$

ove  $\rho, \sigma$  sono scelti in guisa che

$$(14) \quad 0 = S(\rho\pi_1 + \sigma\pi_2)^2 = \rho^2 S\pi_1^2 + 2\rho\sigma S\pi_1\pi_2 + \sigma^2 S\pi_2^2.$$

Si noti che, innalzando al quadrato con le regole solite si trova:

$$(pp_1 p_2 \pi_1 \pi_2 P)^2 = A(S\pi_1^2 S\pi_2^2 - [S\pi_1 \pi_2]^2).$$

Poichè per le (3) del § 99 A

$$(pp_1 p_2 \pi_1 \pi_2 P) =$$

$$= + (pp_1 p_2 p_{11} p_{12} p_{22}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & \beta_1^1 \beta_1^1 & 2\beta_1^1 \beta_1^2 & \beta_1^2 \beta_1^2 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & \beta_2^1 \beta_2^1 & 2\beta_2^1 \beta_2^2 & \beta_2^2 \beta_2^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} A_{11} & A_{12} & \frac{1}{2} A_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= (pp_1 p_2 p_{11} p_{12} p_{22}) \frac{1}{A} \sqrt{-\frac{1}{A}}$$

e poichè  $W$  è il quadrato del primo membro di (9), si ha

$$(15) \quad \begin{cases} (pp_1 p_2 \pi_1 \pi_2 P)^2 = -AW \\ S\pi_1^2 S\pi_2^2 - (S\pi_1 \pi_2)^2 = -W. \end{cases}$$

Ora nel fascio satellite i due complessi satelliti, i loro coniugati, i complessi speciali aventi per asse una retta principale formano dei birapporti, che sono invarianti proiettivi della congruenza. Tutti essi sono noti, appena sia dato il rapporto  $R$  delle radici della (14). Al calcolo di  $R$  sostituiremo quello di

$$(16) \quad \left(\frac{R-1}{R+1}\right)^2 = \frac{-S\pi_1^2 S\pi_2^2 + (S\pi_1 \pi_2)^2}{(S\pi_1 \pi_2)^2} =$$

$$= -\frac{W}{(S\pi_1 \pi_2)^2} = \frac{4W}{2K + \sum h_{rst} A_r A_s A_t}.$$

Oss. Per provare quest'ultima formola si noti che, posto  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ ,

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = \beta_1^1 \beta_2^2 - \beta_1^2 \beta_2^1 = \sqrt{-\frac{1}{A}},$$

si ha:

$$\beta_r^i \beta_s^j = \frac{1}{2} A_{rs} + \epsilon_{rs}$$

cosicchè

$$S\pi_1 \pi_2 = \sum_{rs} p_{rs} \beta_r^1 \beta_s^1 \sum_{ij} p_{ij} \beta_i^2 \beta_j^2 = -\frac{1}{4} \sum h_{rst} (A_r + \epsilon_{rt}) (A_s + \epsilon_{sj}) =$$

$$= -\frac{1}{4} \sum h_{rst} A_r A_s - \frac{1}{4} \sum h_{rst} \epsilon_{rt} \epsilon_{sj} - \frac{1}{2} \sum h_{rst} A_s \epsilon_{rt} = (*)$$

$$= -\frac{1}{4} \sum h_{rst} A_r A_s - \frac{1}{4} \sum (h_{12j} - h_{21j}) \epsilon_j \sqrt{-\frac{1}{A}} =$$

$$= -\frac{1}{4} \sum h_{rst} A_r A_s + \frac{1}{4} (h_{1122} - h_{2112} - h_{1221} + h_{2211}) \frac{1}{A} =$$

$$= -\frac{1}{4} \sum h_{rst} A_r A_s - \frac{K}{2}.$$

In (16) abbiamo un nuovo invariante proiettivo della congruenza; altri invarianti sono il birapporto delle 4 asintotiche; altri invarianti si trovano studiando il sistema delle forme fondamentali  $\varphi$  e  $\Phi$ . Ma sorgono le domande:

1\*) Si trovano così tutti gli invarianti proiettivi d'una congruenza?

(\*) Quest'ultimo termine è nullo, come si riconosce scambiando  $r$  con  $i$  ed  $s$  con  $j$ , ed osservando che  $A_{sj} = A_{js}$ ,  $\epsilon_{rt} = -\epsilon_{tr}$ .

2°) Gli invarianti delle forme  $\varphi$ ,  $\Phi$  sono anche tutti invarianti della congruenza?

Alla seconda domanda si risponde subito. Le collineazioni e le reciprocità, o lasciano inalterate le forme  $\varphi$ ,  $\Phi$ , o le moltiplicano per uno stesso fattore; in realtà perciò unico invariante proiettivo è il loro rapporto. Anche qui possiamo però introdurre coordinate *normali*, evitando così di ricorrere a tale rapporto, imponendo a qualche invariante (p. es. a  $W$ , se la congruenza non è  $W$ ) di avere qualche valore numerico prefissato *a priori*. Così la forma  $\varphi$  resta determinata; e ne concludiamo che *dalla congruenza resta determinata una geometria metrica (invariante per collineazioni) che può servire a definire la distanza di due rette della congruenza, le rigate geodetiche ecc.*

### § 101. — Le equazioni differenziali fondamentali.

Per rispondere affermativamente alla prima delle domande posteci in fine del § 100 basterà dimostrare che, note le forme  $\varphi$ ,  $\Phi$ , si può determinare la congruenza. Troveremo infatti (come per i complessi) un sistema di equazioni ai differenziali totali (le condizioni d'integrabilità delle quali sono nel caso attuale l'analogo delle equazioni di Codazzi nella geometria metrica delle superficie). Ci occuperemo per semplicità soltanto delle congruenze non  $W$  (per queste si dovrebbe cominciare a scrivere l'equazione del 2° ordine, cui soddisfano le  $p$ ). Allora le  $p$ ,  $p_i$ ,  $p_{rs}$  sono linearmente indipendenti e potremo perciò trovare delle quantità  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$  tali che:

$$(I) \quad p_{rst} = \alpha_{rst} p + \sum_{i,j} \gamma_{rsti} A_{ij} p_j + \sum_{i,j,m,n} \sigma_{rstij} A_{im} A_{jn} p_{mn}.$$

Moltiplicando per  $p_n$  e sommando, si trova:

$$S p_n p_{rst} = S \sum_{i,j} \gamma_{rsti} A_{ij} p_j p_n = \gamma_{rstn}$$

cioè

$$(1) \quad \gamma_{rstj} = h_{rstj}.$$

Moltiplicando per  $p$  e sommando si trova

$$(2) \quad 0 = \sum_{i,j,m,n} \sigma_{rstij} A_{im} A_{jn} \alpha_{mn}.$$

Moltiplicando per  $p_{fg}$  ( $f, g = 1, 2$ ) e sommando si trova:

$$(3) \quad -S p_{fg} p_{rst} = + \alpha_{rst} \alpha_{fg} + \sum_{i,j,m,n} \sigma_{rstij} h_{mnfg} A_{im} A_{jn} = \\ = \alpha_{rst} \alpha_{fg} + \sum \sigma_{rstij} H_{fg}^{ij}.$$

I primi membri sono noti, appena siano date le  $\varphi$ ,  $\Phi$  (\*). Otteniamo così nelle (2) e (3) tenute fisse  $r, s, t$ , precisamente 4 equazioni lineari nelle  $\sigma_{rst11}, \sigma_{rst12}, \sigma_{rst22}, \alpha_{rst}$ ; il determinante delle incognite è il terzo membro di (10) § 100, cioè è  $W \neq 0$ . Le (1), (2) e (3) determinano perciò completamente le equazioni fondamentali (I).

### § 102. — L'elemento lineare proiettivo d'una congruenza.

Posto, indicando con  $\rho$  ( $u, v$ ) un fattore di proporzionalità,

$$p = \rho \bar{p}, \quad \text{si ha } \varphi = \rho^2 \bar{\varphi} \quad \text{cioè } \alpha_{rs} = \rho^2 \bar{\alpha}_{rs}$$

$$\left( \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} rs \\ i \end{matrix} \right) + \varepsilon_{ir} \frac{\rho_s}{\rho} + \varepsilon_{is} \frac{\rho_r}{\rho} - \sum A_{ig} \frac{\rho_g}{\rho} \alpha_{rs}$$

$$(\varepsilon_{ii} = 1, \quad \varepsilon_{ir} = 0 \quad \text{per } i \neq r)$$

(\*) Infatti, essendo  $p_{rst} - p_{rts}$  combinazione lineare delle  $p_i$ , un'espressione  $S p_{fg} p_{rst}$  è simmetrica in  $r, s, t$ , così come è simmetrica in  $f, g$ . Vi sono perciò 8 di queste espressioni distinte tra loro, le quali si determinano subito dalle equazioni ottenute derivando covariantemente le  $h_{rstj} = -S p_{rs} p_{tj}$ .

$$p_{rs} = \bar{p}_{rs} + a_{rs} \sum A_{i\sigma} \rho_i \bar{p}_i + \bar{p}_{a_{rs}} \sum \frac{A_{i\sigma} \rho_i \rho_\sigma}{\rho} + \\ + \bar{p} \left( \bar{p}_{rs} - 2 \frac{\rho_r \rho_s}{\rho} \right)$$

ove le  $\bar{p}_{rs}$  indicano derivate covarianti di  $\rho$  rispetto a  $\bar{\varphi}$ . Perciò:

$$S(\sum p_{rs} du_r du_s)^2 = \rho^2 S(\sum \bar{p}_{rs} du_r du_s)^2 - \\ - \varphi^2 \sum \frac{A_{i\sigma} \rho_i \rho_\sigma}{\rho^2} - 2 \sum \left( \frac{\bar{p}_{rs}}{\rho} - 2 \frac{\rho_r \rho_s}{\rho} \right) \varphi du_r du_s.$$

Cioè

$$\sum k_{rsij} du_r du_s du_i du_j = \rho^2 \sum \bar{k}_{rsij} du_r du_s du_i du_j + B_2 \varphi + B_0 \varphi^2,$$

ove  $B_l (l = 0, 2)$  sono forme di grado  $l$ , dipendenti dalla  $\rho$ . Dunque, se scomponiamo (§ 4 E)

$$\sum k_{rsij} du_r du_s du_i du_j$$

in una somma

$$\Phi_4 + \varphi \Phi_2 + \varphi^2 \Phi_0,$$

ove  $\Phi_r (r = 0, 2, 4)$  sono forme di grado  $i$ , e  $\Phi_4, \Phi_2$  sono *apolari* alla  $\varphi$  (\*) allora sarà:

$$\Phi_4 = \rho^2 \bar{\Phi}_4 \quad \varphi = \rho^2 \bar{\varphi}.$$

Il rapporto  $\Phi_4 : \varphi$  è un invariante intrinseco, affatto analogo a quello che nella teoria delle superficie abbiamo chiamato l'elemento lineare proiettivo.

(\*) Si noti che, se a rigate  $u, v$  scegliamo le sviluppabili, cosicchè  $a_{11} = a_{22} = 0$ , allora  $\Phi_4 = k_{1111} du^4 + k_{2222} dv^4$ ,

$$\Phi_2 = 2 [k_{1112} du^3 + k_{2221} dv^3] : a_{12}, \quad \Phi_0 = \frac{3}{2} k_{1122} : a_{12}^2.$$

Se le  $u, v$  sono le sviluppabili ed esso vale  $(\beta du^4 + \gamma dv^4) : du dv$ , noi possiamo, cambiando il fattore  $\rho$ , ridurre le forme  $\Phi_4$  e  $\Phi_0$  alle:

$$\Phi_4 = \sqrt{\beta\gamma} (\beta du^4 + \gamma dv^4) \quad \varphi_2 = \sqrt{\beta\gamma} du dv$$

e chiamare queste *forme normali* e le corrispondenti *coordinate normali*. Questo metodo vale anche per le congruenze  $W$ , perchè basta ricordare l'equazione delle asintotiche delle falde focali quando  $a_{11} = a_{22} = 0$  per riconoscere che nelle nostre ipotesi  $\beta\gamma \neq 0$  in tutti i casi, anche se la congruenza è  $W$ .

Si noti che le deformazioni proiettive non mutano il precedente rapporto; infatti, assunte a linee  $u, v$  le sviluppabili, e supposto che le due congruenze abbiano comune la forma  $\varphi$ , le  $\bar{p}_{uv} = p_{uv} + ap$ , ecc., caratteristiche (cfr. il seg. §) per due congruenze applicabili, dicono che  $k_{iiii} = \bar{k}_{iiii}$ . Da tali equazioni segue però anche  $k_{1122} = \bar{k}_{1122}$ ; cioè per l'applicabilità proiettiva è inoltre necessario, che, scelte le coordinate di retta in guisa che le due congruenze abbiano comune la forma  $\varphi$ , non solo i precedenti rapporti abbiano valori uguali per le due congruenze, ma che esse abbiano comune anche l'invariante  $\Phi_0$ .

Non ci occupiamo di approfondire questo teorema, perchè noi studieremo la precedente questione per tutt'altra via, e perchè, per approfondire il precedente risultato, sarebbe necessario studiare le condizioni d'integrabilità delle (I) del § 101.

#### Alcune altre osservazioni.

Nelle applicazioni alla teoria delle superficie l'uso delle coordinate di retta ha un ufficio di solito affatto secondario. Abituamente si ricorre a coordinate di punto e di piano (\*). Nella teoria delle congruenze ciò si compie nel modo più semplice usando le coordinate

(\*) Però recentemente il Thomsen ha trattato la teoria delle superficie anche in coordinate di retta.

dei fuochi e dei piani focali. Si può anche ricorrere alle coordinate di un solo fuoco, dando in più sulla corrispondente falda focale il sistema coniugato, immagine delle sviluppabili; è questo il metodo che noi abbiamo già usato al Cap. V°. Si potrebbero anche usare contemporaneamente le coordinate di un fascio centrale, cioè le coordinate  $x$  di un fuoco, e le coordinate  $\xi$  del piano tangente all'altra falda focale, e studiare poi le espressioni  $Sdx d\xi$  e analoghe. Si potrebbe anche definire una congruenza partendo dai due fuochi. Se p. es. indichiamo con  $x$  ed  $x'$  i due fuochi e con  $u, v$  le sviluppabili, si potrebbe p. es. definire con Wilczynski una congruenza con equazioni differenziali di cui le prime sarebbero del tipo:

$$x_u = ax + bx' \quad x'_u = cx + ex'.$$

### § 103. — Applicabilità di complessi e congruenze.

#### A) Applicabilità del primo ordine di due complessi.

Vogliamo ora trattare di alcuni più recenti studii del Cartan, il quale estese le precedenti definizioni del Fubini anche alla deformazione proiettiva (del primo ordine) dei complessi, ed enunciò senza dimostrazione qualche teorema per la deformazione proiettiva (del secondo ordine) delle congruenze di rette.

Due complessi  $C, C'$  luogo rispettivamente della retta  $p$  e della retta  $p'$ , funzioni degli stessi parametri  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (cioè che stabilisce una corrispondenza tra le rette dei due complessi) sono proiettivamente applicabili del primo ordine, se per ogni sistema di valori delle  $u_i$  esiste una collineazione  $T$  che porta il complesso delle rette  $p'$  in un altro complesso  $\bar{C}$ , luogo delle rette  $\bar{p}$ , in guisa che per i valori considerati delle  $u_i$  valgono uguaglianze del tipo:

$$(\alpha) \quad \bar{p} = \rho p \quad \bar{p}_i = \sigma p_i + \tau_i p$$

ove  $\rho, \sigma, \tau_i$  sono convenienti costanti (che varieranno col variare

del sistema di valori dati alle  $u_i$ ). Se, come possiamo supporre senza nulla togliere alla generalità, la  $T$  è unimodulare, è *identicamente*

$$Sd p'^2 = Sd \bar{p}^2.$$

Ma dalle ( $\alpha$ ) segue che, per i valori considerati delle  $u_i$ , è:

$$Sd \bar{p}^2 = \sigma^2 Sd p^2.$$

Quindi, poichè alle  $u_i$  possiamo dare un qualunque sistema generico di valori, sarà *identicamente*

$$Sd p'^2 = \sigma^2 Sd p^2$$

ove  $\sigma$  è una funzione delle  $u_i$ .

Ciò: la condiz. necessaria per l'applicab. proiettiva del primo ordine di due complessi è che alle rigate sviluppabili dell'uno corrispondano rigate sviluppabili dell'altro. Dimosteremo che questa condizione è anche sufficiente. Infatti in tal caso le forme  $Sd p^2$  e  $Sd p'^2$  dei due complessi sono proporzionali, e con una opportuna collineazione (\*) applicata ad una di essi, potremo renderle uguali:

Sarà allora, posto  $p = p_0, p'_0 = p', p_i = \frac{\partial p}{\partial u_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$S p_i p_k = S p'_i p'_k \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Esisterà perciò una trasform. lineare intera omogenea delle  $p$ , che muta in sè la forma  $S p^2$ , e porta i valori delle  $p_i$  (corrispondenti a un determinato sistema di valori delle  $u$ ) nei corrispondenti  $p'_i$ . E questa trasform. definisce appunto una trasform. proiettiva dello spazio ambiente. Il problema della applicabilità proiettiva del prim'ordine di due complessi coincide dunque col problema della rappresentabilità conforme di due forme di secondo grado in tre differenziali  $du_i$  (forme differenziali quadratiche ternarie): problema già studiato e risoluto dal Cartan e dal Finzi.

(\*) Questa collineazione sulle  $x$ , avrà un modulo, il cui segno è quello di  $Sd p'^2 : Sd p^2$ . Qui con  $x$  indichiamo coordinate di punto.

## B) Applicabilità proiettiva di due congruenze. (F)

Per l'applicabilità proiett. del 1° ordine di due congruenze  $K, K'$  si trova come sopra la condizione che le forme  $Sd p^2, Sd p'^2$  ad esse relative siano proporzionali fra loro, condizione che equivale all'altra che, trasformando una di esse con una opportuna proiettività, le due forme  $Sd p^2$  e  $Sd p'^2$  siano identiche. Quali ulteriori condizioni sono necessarie per l'applicabilità proiettiva del secondo ordine? Come sappiamo, bisognerà che per ogni sistema di valori delle  $u_i$  esista una collineazione tale, che se essa porta  $K'$  nella congruenza  $\bar{K}$  luogo della retta  $\bar{p}$ , allora, per il sistema di valori da noi considerato delle  $u_i$ , valgano le:

$$(I) \begin{cases} \bar{p}_{uu} = \varepsilon p_{uu} + 2\beta p_u + ap & \bar{p}_{uv} = \varepsilon p_{uv} + \beta p_v + \gamma p_u + bp \\ \bar{p}_{vv} = \varepsilon p_{vv} + 2\gamma p_v + cp & \bar{p}_u = \varepsilon p_u + lp & \bar{p}_v = \varepsilon p_v + mp \end{cases}$$

con  $\beta, \gamma, a, b, c, l, m$  costanti (che però varieranno al variare dei valori dati alle  $u$ ). La identità  $Sd p^2 = Sd p'^2$  dà  $\varepsilon^2 = 1$ , cioè  $\varepsilon = \pm 1$ . Mutando le  $p$  di segno, se  $\varepsilon = -1$ , potremo rendere  $\varepsilon = 1$ .

Uguaglianze affatto simili si hanno sostituendo alle  $p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}$  le derivate covarianti rispetto alla  $Sd p^2 = Sd p'^2 = Sd \bar{p}^2 = \Sigma a_{rs} du_r du_s$ ; si trova così (posto  $\beta = \beta_1, \gamma = \beta_2, a = b_{11}, b = b_{12}, c = b_{22}$

$$(1)_{bis} \quad \bar{p}_{rs} = p_{rs} + c_{rs} p + \beta_r p_s + \beta_s p_r$$

ove:

$$c_{rs} = b_{rs} - \binom{rs}{1} l - \binom{rs}{2} m.$$

Ora:

$$S\bar{p}_v \bar{p}_{uu} = \frac{\partial}{\partial u} S\bar{p}_u \bar{p}_v - S\bar{p}_u \bar{p}_{uv} = \frac{\partial a_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{11}}{\partial v} = Sp_v p_{uu}$$

perchè  $K$  e  $\bar{K}$  hanno gli stessi coefficienti  $a_{rs}$ . Perciò, nel punto considerato, si avrà in virtù delle (1):

$$(2) \quad -m a_{11} + 2\beta a_{12} = 0 \quad \text{e similmente} \quad -l a_{22} + 2\gamma a_{12} = 0.$$

$$\text{Così:} \quad S\bar{p}_v \bar{p}_{uv} = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{22}}{\partial u} = Sp_v p_{uv} \quad \text{dove:}$$

$$(2)_{bis} \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta a_{22} + \gamma a_{11} - m a_{12} = 0 \quad \text{e similmente:} \\ \gamma a_{11} + \beta a_{22} - l a_{12} = 0. \end{array} \right.$$

Infine, poichè la differenza  $h_{1122} - h_{1212}$  dipende soltanto dalla curvatura di

$$\Sigma a_{rs} du_r du_s$$

e perciò ha valori uguali per le due congruenze, sarà ancora in virtù delle (1)<sub>bis</sub>

$$(2)_{ter} \quad \Sigma A_{rs} (\beta_r \beta_s + c_{rs}) = 0.$$

Eliminando  $l, m$  dalle (2) e (2)<sub>bis</sub> si ha:

$$a_{11} (\beta a_{22} + \gamma a_{11}) = 2\beta a_{12}^2 \quad a_{22} (\beta a_{22} + \gamma a_{11}) = 2\gamma a_{12}^2$$

$$\text{cioè:} \quad a_{12} (a_{22} \beta - a_{11} \gamma) = 0.$$

Dunque: se  $a_{12} \neq 0$ , sarà:

$$a_{22} \beta = a_{11} \gamma \quad \text{dove:} \quad 2\beta a_{11} a_{22} = 2\beta a_{12}^2, \quad 2\gamma a_{11} a_{22} = 2\gamma a_{12}^2,$$

cioè, essendo nelle nostre ipotesi  $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ , per le (2), (2)<sub>bis</sub>, (2)<sub>ter</sub>

$$(3) \quad (\text{se } a_{12} \neq 0) \quad \beta = \gamma = 0, \quad l = m = 0, \quad \Sigma A_{rs} c_{rs} = 0.$$

Se invece fosse  $a_{12} = 0$  si troverebbe:

$\gamma a_{11} = -\beta a_{22}$ ,  $l = m = 0$  (perchè  $a_{11} a_{22} \neq 0$ ) oltre alla (2)<sub>ur</sub>.

Se  $a_{11} = a_{22} = 0$ , se cioè assumiamo a rigate  $u, v$  le sviluppabili delle due congruenze che necessariamente si corrispondono, le (3) danno:

$$(4) \quad a_{11} = a_{22} = \beta = \gamma = l = m = c_{12} = b_{12} = 0$$

e le (1) diventano semplicemente:

$$(5) \quad \begin{cases} p = \bar{p}, & p_u = \bar{p}_u, & p_v = \bar{p}_v \\ \bar{p}_{uu} = p_{uu} + ap, & \bar{p}_{uv} = p_{uv}, & \bar{p}_{vv} = p_{vv} + cp. \end{cases}$$

Se noi ci muoviamo nella direzione  $du:dv$  (di spazio rigato) le rette lungo cui si muovono i fuochi, o rotano i piani focali costituiscono due coppie di rette, ciascuna delle quali è determinata (§ 99 A) come quella coppia di rette, che è intersezione di certi 4 complessi lineari. Basta osservare le formole precedenti per riconoscere che il sistema lineare  $\infty^3$  determinato da questi 4 complessi relativi ad una congruenza coincide col sistema lineare analogo relativo alla seconda congruenza, che cioè *corrispondentemente alla direzione  $du:dv$  di spazio rigato, i fuochi della  $K$  e quelli della  $\bar{K}$  si muovono in una stessa direzione così come i piani focali di  $K$  e quelli della  $\bar{K}$  rotano intorno alla stessa direzione.* Dal che segue anche in particolare (come si potrebbe anche dedurre dalle formole (6) del § 99) che ai sistemi coniugati di una falda focale di  $K$  corrispondono sistemi coniugati della falda omologa di  $\bar{K}$ ; cioè che *le falde focali di  $K$  sono tangenti alle falde omologhe di  $\bar{K}$  e che le asintotiche delle falde focali di  $K$  corrispondono alle asintotiche delle falde omologhe di  $\bar{K}$ .*

Supponiamo ora viceversa che per ogni valore di  $\frac{du}{dv}$  le rette in cui cominciamo a muoverci i fuochi od a rotare i piani focali siano le stesse rette sia per la congruenza  $K$  che per  $\bar{K}$ , e siano soddisfatte le

$$(6) \quad p = \bar{p}, \quad \bar{p}_u = p_u + lp, \quad \bar{p}_v = p_v + mp.$$

Allora i citati due sistemi lineari di  $\infty^3$  complessi relativi a  $K$  coincidono coi sistemi lineari omologhi relativi a  $\bar{K}$ . Se le  $u, v$  sono per es. le sviluppabili, questi sistemi lineari sono uno quello definito dai complessi  $p, p_u, p_v, p_{uu}du + p_{uv}dv = dp_u$ , l'altro quello definito dai complessi  $\bar{p}, \bar{p}_u, \bar{p}_v, d\bar{p}_v$ . Affinchè sia soddisfatta la nostra ipotesi dovranno dunque valere (per il sistema di valori  $u_i$  da noi considerato) le:

$$\bar{p}_{uu} = r p_{uu} + s p_u + t p_v + ap$$

$$\bar{p}_{uv} = r p_{uv} + m' p_u + l' p_v + bp$$

$$\bar{p}_{vv} = r p_{vv} + l' p_u + s' p_v + cp$$

ove  $r, s, t$ , ecc. sono opportune costanti.

Poichè  $a_{12} = -S p p_{uv} = -S \bar{p} \bar{p}_{uv}$ , dovrà essere  $r = 1$ . Con ragionamenti analoghi ai precedenti dalla  $S p_u p_{uv} = 0 = S \bar{p}_u \bar{p}_{uv}$  si trae:  $l' a_{12} - l a_{12} = 0$ , cioè  $l = l'$  e analogamente  $m = m'$ .

Dalla  $S \bar{p}_u \bar{p}_{uu} = S p_u p_{uu} = 0$  si trae  $t = 0$ , e analogamente  $t' = 0$

$$\gg S \bar{p}_u \bar{p}_{vv} = S p_u p_{vv} \quad \gg \gg s' = 0, \quad \gg \quad \gg s = 0$$

$$\gg h_{1122} - h_{1212} = \bar{h}_{1122} - \bar{h}_{1212} \quad \text{si trae infine:}$$

$$lm = l'm' = c_{12} = b - \binom{12}{1} l - \binom{12}{2} m = b$$

cosicchè, le equazioni da aggiungere alle (6) sono le:

$$(7) \quad \bar{p}_{uu} = p_{uu} + ap \quad \bar{p}_{uv} = p_{uv} + m p_u + l p_v + l m p$$

$$\bar{p}_{vv} = p_{vv} + cp.$$

Le (6), (7) coincidono con le (5), se  $l = m = 0$ . Dunque: *La coincidenza delle sopra citate rette su cui si muovono i fuochi, e di quelle attorno a cui ruotano i piani focali per la congruenza  $K$*

e per una conveniente trasformata proiettiva  $\bar{K}$  di  $K'$ , è condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di  $K, K'$ , quando si suppongono soddisfatte le  $p = \bar{p}, p_i = \bar{p}_i$ .

C) Studio delle falde focali di congruenze applicabili  
(del secondo ordine).

Supporremo qui le sviluppabili  $u = \text{cost.}, v = \text{cost.}$  reali, lasciando al lettore la facile estensione al caso di congruenze con sviluppabili complesse.

Sia  $x$  un fuoco di una retta generica  $p$  della congruenza  $K$ ; esso generi una superficie  $S$ ; sia

$$(8) \quad p = (x x_v) \quad (u, v \text{ essendo le sviluppabili}).$$

Se  $x'$  è il fuoco omologo della retta  $p'$  corrispondente alla  $p$  nella congruenza  $K'$ , le asintotiche della superficie  $S'$  luogo di  $x'$  corrispondono alle asintotiche della superficie  $S$  luogo di  $x$ ; e noi potremo normare le  $x'$  in guisa che

$$(9) \quad (x' x'_u x'_v d^2 x') = (x x_u x_v d^2 x).$$

Resterà nelle  $x'$  soltanto una indeterminazione di segno, e sarà:

$$p' = R(x' x'_v) \quad (R = \text{funzione di } u, v).$$

Posto

$$(10) \quad \begin{cases} x_{uv} = Mx_u + Qx_v + p_{12}x \text{ (cosa lecita, perchè } u, v \text{ sono coniugate)} \\ x'_{uv} = M'x'_u + Q'x'_v + p'_{12}x, \end{cases}$$

si avrà:

$$(11) \quad p_u = (x_u + Qx, x_v - Mx) \quad p_v = (x x_{vv})$$

$$Sp_u p_v = (x x_u x_v x_{vv}) = (x' x'_u x'_v x'_{vv}).$$

Confrontando con  $Sp'_u p'_v$ , che, per le precedenti ipotesi, è uguale a  $Sp_u p_v$ , se ne deduce  $R^2 = 1$ , cioè  $R = \pm 1$ . Porremo  $R = \omega = \pm 1$ , scrivendo:

$$(12) \quad p' = \omega(x' x'_v) \quad (\omega = \pm 1).$$

Ora per ogni sistema di valori delle  $u, v$  deve esistere una proiettività unimodulare che porta il punto  $x'$  nel punto  $\bar{x} = x$ , una retta tangente ad  $S'$  nella tangente omologa di  $S$ , le coordinate  $p'$  nelle  $p$ , le  $p'_u$  e  $p'_v$  nelle  $p_u, p_v$ . Indicando col simbolo  $\equiv$  due quantità che si corrispondano in tale proiettività, dovrà dunque essere per i valori considerati delle  $u, v$ :

$$(13) \quad x' \equiv r x \quad x'_u \equiv \sigma x_u + \lambda x \quad x'_v \equiv \sigma x_v + \tau x$$

$$(14) \quad \begin{cases} p' = \omega(x' x'_v) \equiv (x x_v) \\ p'_u = \omega(x' x'_{uv}) + \omega(x'_u x'_v) \equiv (x x_{uv}) + (x_u x_v) \\ p'_v = \omega(x' x'_{vv}) \equiv (x x_{vv}). \end{cases}$$

Poichè da (13) si ha  $(x' x'_v) \equiv r\sigma(x x_v)$ , da (14) si deduce:

$$(15) \quad \omega r \sigma = 1 \quad \text{cioè } \omega = r \sigma = \pm 1.$$

Se è  $x'_{vv} \equiv \bar{x}_{vv}$ , cioè se  $\bar{x}_{vv}$  sono le quantità omologhe ad  $x'_{vv}$  nella nostra collineazione (cioè sono i valori di  $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2}$  nel punto considerato calcolati per la superficie  $\bar{S}$  trasformata di  $S'$  nella collineazione) sarà (nel punto considerato) per l'ultima delle (14):

$$\omega(x' x'_{vv}) \equiv \omega r(x \bar{x}_{vv}) = (x x_{vv})$$

ossia

$$x'_{vv} \equiv \frac{x_{vv}}{\omega r} + n x \quad (n = \text{conveniente parametro})$$

donde:

$$(x' x'_u x'_v x'_{vv}) \equiv \omega \sigma^2 (x x_u x_v x_{vv})$$

e per la (9):  $\omega \sigma^2 = 1, \sigma = \pm 1, \omega = 1$ .

Cambiando eventualmente il segno delle  $x'$ , che abbiamo osservato essere non ancora determinate di segno, potremo rendere  $\sigma = 1$ , e quindi per (15)

$$\omega = \sigma = r = 1.$$

Quella delle (14) che corrisponde a  $p'_u$  diventa, se la nostra collineazione porta  $x'_{uv}$  in  $\bar{x}_{uv}$

$$(x \bar{x}_{uv}) + \omega (x_u + \lambda x, x_v + \mu x) = (x x_{uv}) + (x_u x_v)$$

cioè:

$$(\omega - 1)(x_u x_v) + \lambda \omega (x x_v) + \mu \omega (x_u x) + (x, \bar{x}_{uv} - x_{uv}) = 0$$

$$(\omega - 1)(x_u x_v) + (x, \lambda \omega x_v - \tau \omega x_u + \bar{x}_{uv} - x_{uv}) = 0.$$

Donde si ricava, oltre che di nuovo  $\omega = 1$ , anche la:

$$x'_{uv} \equiv \bar{x}_{uv} = x_{uv} + \tau x_u - \lambda x_v + \rho x.$$

Da (10), (13) si trae, ponendo  $\delta M = M' - M$ ,  $\delta Q = Q' - Q$  e analoghe:

$$x'_{uv} \equiv M' (x_u + \lambda x) + Q' (x_v + \mu x) + p'_{12} x = x_{uv} + x_u \delta M +$$

$$+ x_v \delta Q + x (\delta p_{12} + M' \lambda + Q' \mu).$$

Confrontando con la precedente si trae:  $\tau = \delta M$ ,  $\lambda = -\delta Q$  e infine

$$\rho = \delta p_{12} + M' \lambda + Q' \mu = \delta p_{12} + Q \delta M - M \delta Q.$$

Cosicchè in conclusione le nostre formole sono (per il considerato sistema di valori delle  $u, v$ )

$$(16) \quad x' \equiv x \quad x'_u \equiv x_u - x \delta Q \quad x'_v \equiv x_v + x \delta M$$

$$x'_{uv} \equiv x_{uv} + n x \quad x'_{uv} \equiv x_{uv} + x_u \delta M + x_v \delta Q + x (\delta p_{12} + Q \delta M - M \delta Q).$$

Nel seguito sottintenderemo sovente che le nostre formole valgono solo per i considerati valori delle  $u, v$ .

Dovremo ora trovare sotto quali condizioni avviene che, dando alle  $u, v$  gli incrementi  $du, dv$ , il secondo fuoco

$$(17) \quad x'_1 = x'_v - M' x' \quad \left[ \text{non si confonda con } x'_1 = \frac{\partial x'}{\partial u} \right]$$

della congruenza  $K'$  si sposti lungo una retta, che nella nostra collineazione è trasformata della retta lungo cui si sposta il secondo fuoco

$$(18) \quad x_1 = x_v - M x$$

della congruenza  $K$ , insieme alla proprietà analoga per il secondo piano focale.

La (17) dà per le (16)

$$\begin{aligned} x'_1 &\equiv x_v + x \delta M - M' x = (x_v + x \delta M) - (M + \delta M) x = \\ &= x_v - M x \equiv x_1 \end{aligned}$$

cioè (per i considerati valori delle  $u, v$ )

$$(19) \quad x'_1 \equiv x_1.$$

Ora valgono le:

$$x'_{1u} = \frac{\partial x_1}{\partial u} = x_{uv} - M_u x - M x_u = Q x_v + (p_{12} - M_u) x;$$

$$x'_{1v} = x_{vv} - M_v x - M x_v$$

insieme alle analoghe per  $x'_{1u}, x'_{1v}$ . La condizione sopra enunciata per i fuochi si enuncia dicendo che esistono dei parametri  $R, L, T$  tali che

$$R x'_{1u} + L x'_1 \equiv x_{1u} \quad R x'_{1v} + T x'_1 \equiv x_{1v}.$$

La prima dice che:

$$R [Q' x' + (p'_{12} - M'_u) x'] + L x'_1 \equiv Q x_v + (p_{12} - M_u) x$$

la quale, per le

$$x' \equiv x, \quad x'_v \equiv x_v + x \delta P,$$

equivale alla:

$$R (Q + \delta Q) x_v + x [R (Q + \delta Q) \delta M + R p'_{12} - R M'_u] + \\ + L (x_v - M x) = Q x_v + (p_{12} - M_u) x.$$

Le seconda equivale similmente alla:

$$R (x_{vv} + v x) - M'_v x - M' (x_v + x \delta M) + T x_v - T P x = \\ + x_{vv} - M_v x - M x_v.$$

Confrontando in questa i termini in  $x_{vv}$  si trae  $R = 1$ . Confrontando poi gli altri termini nella seconda e nella prima equazione trovata si ha:

$$T = \delta M = \mu \quad n = \delta M_v + M' \delta M + M \delta M = \delta M_v + \delta (M^2)$$

$$L = -\delta Q = \lambda \quad (Q + \delta Q) \delta M + \delta p_{12} - \delta M_u + M \delta Q = 0.$$

cioè (per i considerati valori delle  $u, v$ )

$$(20) \quad x'_{1u} - x'_1 \delta Q \equiv x_{1u} \quad x'_{1v} + x'_1 \delta M \equiv x_{1v}$$

$$(21) \quad n = \delta M_v + \delta (M^2)$$

$$(I) \quad \delta (M Q + p_{12} - M_u) = 0.$$

Le (19) e (20) sono affatto analoghe alle prime delle (16); la (21) determina  $n$ .

La relazione più importante è la (I); essa dice che le equazioni (10) di Laplace relative al nostro sistema coniugato per le due superficie  $S$  ed  $S'$  hanno uguale il primo invariante (per il sistema considerato di valori delle  $u, v$ ). Si noti che le equazioni (10) sono relative alle coordinate di punto (F).

D) Continuazione. - Formole duali delle precedenti.

Riassumendo noi abbiamo con le (16), (21) e (I) tenuto conto delle  $p' \equiv p, p'_i \equiv p_i$ , e del fatto che nella nostra collineazione si corrispondono le rette lungo cui cominciano a muoversi i fuochi  $x, x_1$  ed  $x', x'_1$  quando le  $u, v$  ricevono gli incrementi  $du, dv$ . Per trovare tutte le condizioni affinché le congruenze siano proiettivamente applicabili, basterà trovare quando nella nostra collineazione si corrispondono le rette intorno a cui cominciano a rotare i piani focali.

Osserviamo a tal fine che le rette  $(\xi, \xi_u)$  ed  $(x, x_v)$  coincidono, e che il rapporto delle  $(\xi, \xi_u)$  alle omologhe  $(x, x_v)$ , dipendendo soltanto dalle  $a_{rs}$ , è identicamente uguale al rapporto delle  $(\xi', \xi'_u)$  alle omologhe  $(x', x'_v)$ . Perciò, posto  $p = (\xi, \xi_u)$ , potremo ragionare su queste come prima sulle  $(x, x_v)$ . E allora, per dualità, noi possiamo senz'altro prevedere il risultato finale. Ma, per essere completi e perchè sia ben chiaro il tutto, preferiamo trovare tale risultato per via diretta. Dobbiamo dunque ricercare le rette attorno a cui ruotano i piani focali quando le  $u, v$  ricevono gli incrementi  $du, dv$ . I piani focali  $\xi, \xi'$  tangenti ad  $S, S'$  ruotano attorno alle tangenti alle  $S, S'$  coniugate delle rette su cui cominciano a muoversi i fuochi  $x, x'$ ; la nostra condizione è quindi certo soddisfatta per tali piani perchè su  $S, S'$  si corrispondono asintotiche e sistemi coniugati. La condizione relativa ai secondi piani focali sarà pure soddisfatta in modo analogo allora soltanto che anche  $S_1$  ed  $S'_1$  si corrispondano con conservazione delle asintotiche (e quindi anche dei sistemi coniugati). Scriviamo dunque questa condizione.

Le coordinate  $\xi, \xi'$  sono date da

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{|A_1|}} (x x_u x_v) \quad \text{e analoghe per } \xi' \equiv \xi.$$

Varranno equazioni del tipo:

$$(10)_{bis} \quad \xi_{uv} = \mu \xi_u + \nu \xi_v + \pi_{12} \xi, \quad \xi'_{uv} = \mu' \xi'_u + \nu' \xi'_v + \pi'_{12} \xi'.$$

La teoria delle superficie insegna che  $M + \mu$ ,  $Q + \kappa$  dipendono solo dai simboli di Christoffel per la forma  $F_2$  comune ad  $S$ ,  $S'$ . Perciò  $\mu + M$  e  $\kappa + Q$  sono rispettivamente uguali a  $\mu' + M'$ ,  $\kappa' + Q'$ . Posto  $\delta\mu = \mu' - \mu$  e analoghe, sarà così:

$$(10)_{ter} \quad \delta\mu = -\delta M \quad \delta\kappa = -\delta Q.$$

Poichè, se  $T\xi'$ ,  $T\xi'_u$  ecc. sono i trasformati di  $\xi'$ ,  $\xi'_u$  ecc. mediante la nostra collineazione:

$$\begin{aligned} 0 &= S\xi'_u x' = S(T\xi'_u)(Tx') = Sx(T\xi'_u), \quad 0 = Sx\xi_u - \\ -a_{11} &= S\xi'_u x'_u = S(T\xi'_u)(Tx'_u) = S(T\xi'_u)(x_u - x\delta Q) = Sx_u(T\xi'_u) - \\ &\quad - a_{11} = Sx_u \xi_u, \end{aligned}$$

sarà

$$Sx[(T\xi'_u) - \xi_u] = 0, \quad Sx_u[(T\xi'_u) - \xi_u] = 0$$

$$\text{e analogamente } Sx_v[(T\xi'_u) - \xi_u] = 0;$$

sarà perciò:

$$T\xi'_u = \xi_u + \alpha_1 \xi \quad \text{ossia} \quad \xi'_u \equiv \xi_u + \alpha_1 \xi, \quad \xi'_v \equiv \xi_v + \alpha_2 \xi.$$

Si tratta di determinare  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$ ; a tal fine si noti che l'identità dei coefficienti  $a_{rs}$  della  $F_2$  per  $S$  ed  $S'$  provano che

$$\begin{aligned} &S(\xi_u + \alpha_1 \xi)(x_{vv} + nx) - S(\xi_v + \alpha_2 \xi)(x_{uv} + x_u \delta M + x_v \delta Q + \\ &+ x[\delta p_{12} + Q\delta M - M\delta Q]) = S(T\xi'_u)(Tx'_{vv}) - S(T\xi'_v)(Tx'_{uv}) = \\ &= S\xi'_u x'_{vv} - S\xi'_v x'_{uv} = \frac{\partial a_{22}}{\partial u} - \frac{\partial a_{12}}{\partial v} = S\xi_u x_{vv} - S\xi_v x_{uv}. \end{aligned}$$

Se ne deduce  $\alpha_1 = -\delta Q$  e similmente  $\alpha_2 = \delta M$ , donde (nel punto considerato):

$$(16)_{bis} \quad \xi'_u \equiv \xi_u - \xi \delta Q \quad \xi'_v \equiv \xi_v + \xi \delta M \quad (\text{oltre alla } \xi' \equiv \xi).$$

Dalle (10)<sub>bis</sub> e (10)<sub>ter</sub> si deduce poi:

$$(16)_{ter} \quad \xi'_{uv} \equiv \xi_{uv} - \xi_u \delta M - \xi_v \delta Q + (\mu \delta \kappa - \kappa \delta \mu + \delta \pi_{12}) \xi.$$

Posto al solito  $2X = \Delta_2 x = \frac{1}{a_{11}} x_{11} + \frac{1}{a_{22}} x_{22}$  si ha:

$$SX\xi_i = 0; \quad \text{quindi} \quad \frac{1}{a_{11}} S\xi_i x_{uu} + \frac{1}{a_{22}} S\xi_i x_{vv}$$

ha un valore dipendente solo dalle  $a_{rs}$  e perciò ha lo stesso valore sulle due superficie. Poichè

$$S\xi'_i x'_{vv} = S(T\xi'_i)(Tx'_{vv}) = S(\xi_i + \alpha_i \xi)(x_{vv} + nx) = S\xi x_{vv} + \alpha_i a_{22},$$

se ne deduce che

$$S\xi'_i x'_{uu} = S(T\xi'_i)(Tx'_{uu}) = S(\xi_i + \alpha_i \xi)(Tx'_{uu}) = S\xi_i x_{uu} - \alpha_i a_{11}.$$

Perciò:

$$Sx'\xi'_{uu} = a_{11} = Sx\xi_{uu};$$

$$Sx'_u \xi'_{uu} = -\frac{\partial a_{11}}{\partial u} - S\xi'_u x'_{uu} = -\frac{\partial a_{11}}{\partial u} - S\xi_u x_{uu} -$$

$$-a_{11} \delta Q = Sx_u \xi_{uu} - a_{11} \delta Q.$$

Così

$$Sx'_v \xi'_{uu} = -\frac{\partial a_{12}}{\partial u} - S\xi'_v x'_{uv} = -\frac{\partial a_{12}}{\partial u} - S(T\xi'_v)(Tx'_{uv}) =$$

$$= -\frac{\partial a_{12}}{\partial u} - (\xi_u - \xi \delta Q)(x_{uv} + x_u \delta M + x_v \delta Q + x[\dots]) =$$

$$= -\frac{\partial a_{12}}{\partial u} - S\xi_u x_{uv} + a_{11} \delta M = Sx_v \xi_{uu} + a_{11} \delta M.$$

In conclusione:

$$S(x_i + \alpha_i x) \xi_{uu} = Sx_i \xi_{uu} + \alpha_i a_{11} = Sx'_i \xi'_{uu} = S(x_i + \alpha_i x)(T\xi'_{uu})$$

$$S x' \xi'_{uu} = S x (T \xi'_{uu}) = S x \xi_{uu},$$

ossia :

$$S x (T \xi'_{uu} - \xi_{uu}) = 0 \quad S (x_i + \alpha x) (T \xi'_{uu} - \xi_{uu}) = 0.$$

Perciò :

$$(16)_{\text{quater}} \quad T \xi'_{uu} = \xi_{uu} + \nu x \quad \text{ossia} \quad \xi'_{uu} \equiv \xi_{uu} + \nu x,$$

dove  $\nu$  è un parametro che calcoleremo ben presto.

Le (16)<sub>bis</sub>, (16)<sub>ter</sub>, (16)<sub>quater</sub> sono le formole *duali* delle (16).  
Le due seconde falde focali sono involupate dai piani

$$\xi_1 = \xi_u - \kappa \xi \quad \xi'_1 = \xi'_u - \kappa' \xi'.$$

Valgono le :

$$\begin{aligned} \xi'_{1v} &= \xi'_{uv} - \kappa'_v \xi' - \kappa' \xi'_v = \mu' \xi'_u + (\pi'_{12} - \kappa'_v) \xi' \equiv \mu' \xi_u + \\ &\quad + (\pi'_{12} - \mu' \delta Q - \kappa'_v) \xi = \\ &= \xi_{1v} + \xi_u \delta \mu + \xi (\delta \pi_{12} - \mu' \delta Q - \delta \kappa_v) = \\ &= \xi_{1v} + \xi_1 \delta \mu + \xi (\delta \pi_{12} + \kappa \delta \mu + \mu' \delta \kappa - \delta \kappa_v) \end{aligned}$$

cioè

$$(20)_{\text{bis}} \quad \xi'_{1v} \equiv \xi_{1v} + \xi_1 \delta \mu + \xi (\delta \pi_{12} + \delta [\kappa \mu] - \delta \kappa_v)$$

e le

$$\begin{aligned} \xi'_{1u} &= \xi'_{uu} - \kappa'_u \xi' - \kappa' \xi'_u \equiv \xi_{uu} + \nu \xi - \kappa'_u \xi - \kappa' (\xi_u - \xi \delta Q) = \\ &= \xi_{1u} - \xi_u \delta \kappa + \xi (+\nu - \delta \kappa'_u + \kappa' \delta Q) = \\ &= \xi_{1u} - \xi_1 \delta \kappa - \xi (\kappa \delta \kappa - \kappa' \delta Q - \nu + \delta \kappa'_u) \end{aligned}$$

cioè

$$(20)_{\text{ter}} \quad \xi'_{1u} \equiv \xi_{1u} - \xi_1 \delta \kappa + \xi (\nu \delta [\kappa^2 + \kappa_u]).$$

Le (20)<sub>bis</sub> e (20)<sub>ter</sub> sono *duali* delle (20). Le equazioni delle asintotiche sulle due falde focali si ottengono annullando

$$S (\xi'_{1u} du + \xi'_{1v} dv) (x'_{1u} du + x'_{1v} dv) \quad \text{e analoga in } \xi_1, x_1.$$

Poichè nella prima alle  $\xi'_{1u}$ ,  $\xi'_{1v}$ ,  $x'_{1u}$ ,  $x'_{1v}$  possiamo sostituire  $T \xi'_{1u}$  e analoghe, otterremo per le formole precedenti che la differenza di queste due forme è :

$$\{(v - \delta [\kappa^2 + \kappa'_u]) du + \delta (\pi_{12} + \kappa \mu - \kappa_v) dv\} \times$$

$$\times S (\xi x_{1u} du + \xi x_{1v} dv) \quad (*)$$

ove :

$$S (\xi x_{1u}) = -S x_1 \xi_u = 0 \quad S (\xi x_{1v}) = -S x_1 \xi_v = a_{22}.$$

Tale differenza è pertanto

$$a_{22} \{(v - \delta [\kappa^2 + \kappa'_u]) du + \delta (\pi_{12} + \kappa \mu - \kappa_v) dv\} dv.$$

Essendo le  $u$ ,  $v$  coniugate anche sulle seconde falde focali, sarà :

$$(21)_{\text{bis}} \quad v = \delta (\kappa^2 + \kappa'_u)$$

che ci dà la  $v$  con una formola *duale* della (21), che dava  $n$ .

Si avrà dunque corrispondenza delle asintotiche sulle seconde falde focali soltanto se

$$(II) \quad \delta (\pi_{12} + \kappa \mu - \kappa_v) = 0,$$

formola duale della (I). Questa formola, insieme alle precedenti, si poteva anche ottenere, come già dicemmo, ripetendo i precedenti ragionamenti, già svolti per le coordinate  $x$  ed  $x'$  di punto, per le coordinate  $\xi$ ,  $\xi'$  di piano tangente. L'uguaglianza degli invarianti  $(p_{12} + QM - M_u)$  e  $(\pi_{12} + \kappa \mu - \kappa_v)$  è anche sufficiente per l'applicabilità proiettiva delle due congruenze. In tal caso la

(\*) Si ricordi che  $S \xi x_1 = S \xi_1 x_1 = S \xi_1 x_{1u} = S \xi_1 x_{1v} = 0$ .

collezione  $T$  che porta  $x', x'_u, x'_v, x'_{uv}$  in  $x, x_u - x\delta Q, x_v + x\delta M, x_{uv} + x\delta(M_v + M^2)$  è unimodulare perchè  $(x'x'_u x'_v x'_{uv}) = (xx_u x_v x_{uv})$ . I calcoli precedenti dimostrano che la  $T$  porta ciascuna falda focale di  $K'$  in una superficie  $\bar{S}$  tale che una direzione tracciata su  $\bar{S}$  ed uscente dal punto assegnato coincide con la direzione omologa della corrispondente falda focale di  $K$ . Poichè valgono poi le  $p \equiv p', p_i \equiv p'_i$ , segue appunto che  $K, K'$  sono applicabili.

Possiamo adunque asserire: *Condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di due congruenze (del 2° ordine) è che le asintotiche di una prima falda focale dell'una corrispondano alle asintotiche della falda focale omologa dell'altra, e che su tali falde il sistema coniugato delle sviluppabili abbia p. es. lo stesso primo invariante per la corrispondente equazione di Laplace relativa alle coordinate di punto, e lo stesso secondo invariante per l'equazione di Laplace relativa alle coordinate di piano tangente.*

Naturalmente si corrisponderanno anche le asintotiche delle seconde falde focali.

#### E) Trasformazione delle precedenti condizioni.

Di più notiamo che, per note proprietà degli invarianti di una equazione di Laplace, il precedente teorema lascia completamente indeterminato il fattore di proporzionalità per le coordinate di punto e di piano tangente delle considerate falde focali. Se esse sono scelte nel modo sopra citato, si osservi che, oltre alle

$$M = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a_{121}}{a_{11}} \quad Q = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{a_{122}}{a_{22}}$$

valgono le:

$$\mu = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{a_{121}}{a_{11}} \quad \kappa = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{a_{122}}{a_{22}};$$

sostituendo alla (II) la differenza ottenuta sottraendola dalla (I), si otterrà essendo  $\delta \begin{pmatrix} r\delta \\ t \end{pmatrix} = 0$  perchè  $a_{rs} = a'_{rs}$ :

$$\delta(\pi_{12} - p_{12}) + \delta \left( \frac{a_{121}}{a_{11}} \right)_u + \delta \left( \frac{a_{122}}{a_{22}} \right)_v - 2 \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\delta a_{122}}{a_{22}} - 2 \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{\delta a_{121}}{a_{11}} = 0.$$

Ora essendo  $a_{12} = 0$  le (11) del § 14 B dicono, ricordando le relazioni di coniugio, che:

$$\begin{aligned} \pi_{12} - p_{12} &= \frac{a_{1121} - a_{1112}}{a_{11}} = - \frac{a_{2221}}{a_{22}} - \frac{a_{1112}}{a_{11}} = \\ &= - \frac{1}{a_{22}} \left( \frac{\partial a_{222}}{\partial u} - 3 \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} a_{122} - 3 \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} a_{222} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{a_{11}} \left( \frac{\partial a_{111}}{\partial v} - 3 \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} a_{111} - 3 \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} a_{112} \right) = \\ &= - \frac{1}{a_{22}} \left( \frac{\partial a_{222}}{\partial u} - \frac{3}{2} \frac{\partial \log a_{11}}{\partial v} a_{122} - \frac{3}{2} \frac{\partial \log a_{22}}{\partial u} a_{222} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{a_{11}} \left( \frac{\partial a_{111}}{\partial v} - \frac{3}{2} \frac{\partial \log a_{11}}{\partial v} a_{111} - \frac{3}{2} \frac{\partial \log a_{22}}{\partial u} a_{112} \right) \end{aligned}$$

ossia:

$$(22) \quad \pi_{12} - p_{12} = - \frac{1}{a_{22}} \frac{\partial a_{222}}{\partial u} - \frac{1}{a_{11}} \frac{\partial a_{111}}{\partial v}.$$

Sostituendo a  $\pi_{12} - p_{12}$  questo valore, la formola precedente diventa:

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{a_{22}} (\delta a_{222})_u - \frac{1}{a_{11}} (\delta a_{111})_v - \delta \left( \frac{a_{222}}{a_{22}} \right)_u - \delta \left( \frac{a_{111}}{a_{11}} \right)_v + \\ &\quad + \frac{1}{a_{11}} \frac{\partial a_{11}}{\partial v} \frac{\delta a_{111}}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} \frac{\partial a_{22}}{\partial u} \frac{\delta a_{222}}{a_{22}} = 0 \end{aligned}$$

ossia:

$$(23) \quad \delta \left( \frac{a_{222}}{a_{22}} \right)_u + \delta \left( \frac{a_{111}}{a_{11}} \right)_v = 0.$$

Dunque: *Alla identità (II) dei due invarianti per l'equazione di Laplace relativa alle coordinate di piano tangente si potrà sostituire la (23), che contiene solo coefficienti dell'elemento lineare proiettivo ed è quindi identicamente soddisfatta se le falde focali S ed S' sono proiettivamente applicabili.*

Notiamo un'altra forma che si può dare a (23) per le relazioni di coniugio:

$$\delta \left( \frac{a_{112}}{a_{11}} \right)_u + \delta \left( \frac{a_{122}}{a_{22}} \right)_v = 0$$

ossia:

$$\delta \left[ \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a_{112}}{a_{11}} \right]_u + \delta \left[ \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{a_{122}}{a_{22}} \right]_v = 0$$

ossia:

$$(24) \quad \delta (M_u + Q_v) = 0.$$

Riferendoci dunque alle sole equazioni (10) in coordinate di punto possiamo dire:

*Due congruenze sono proiettivamente applicabili se p. es. le prime falde focali si corrispondono con conservazione delle asintotiche, cosicchè si possa supporre che esse abbiano uguale forma  $F_2$ ; e se le equazioni di Laplace (10) per le coordinate di punto rispetto al sistema coniugato determinato dalle sviluppabili abbiano uguali primi invarianti ed eguali valori di  $M_u + Q_v$ .*

Non riesce poi difficile del resto verificare che solo in tal caso le  $p = (x x_v)$  soddisfano a tutte le condizioni (5).

#### F) Il caso singolare di Cartan.

La rigata  $du: dv = L$  ha nel punto  $x + \rho x_1$  il piano tangente  $\xi''$  determinato dalle:

$$S \xi'' x = S \xi'' x_1 = 0$$

$$S \xi'' (L x_u + x_v) + \rho S \xi'' (L x_{1u} + x_{1v}) = 0.$$

$$\text{Quindi} \quad \xi'' = \xi + \sigma \xi_u$$

ove

$$-\sigma L a_{11} + \rho S (\xi + \sigma \xi_u) x_{vv} = 0,$$

ossia

$$-\sigma L a_{11} + \rho a_{22} - \rho \sigma \left\{ \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a_{221}}{a_{11}} \right\} a_{11} = 0.$$

Dunque, se  $\delta a_{221} = 0$ , tale piano tangente è lo stesso per rigate omologhe. L'uguaglianza degli invarianti dà poi  $\delta a_{222} = 0$ .

*Dunque: Se le falde focali omologhe delle due congruenze sono proiettivamente applicabili, rigate omologhe delle due congruenze hanno in punti omologhi due piani tangenti che si corrispondono nella collineazione che porta una delle due congruenze in una terza congruenza, che ha un contatto di secondo ordine con l'altra delle congruenze assegnate.*

#### G) Nuova trasformazione delle precedenti condizioni.

Date le superficie S, S' vogliamo vedere se esse possono essere falde focali di congruenze applicabili. I precedenti risultati non si possono applicare senz'altro, se non si conoscono le linee corrispondenti alle sviluppabili.

Variando le precedenti notazioni, siano  $u, v$  le asintotiche delle S, S', che necessariamente si corrispondono; e sia  $du - \rho dv = 0$  l'equazione delle linee involupate sulle S, S' dalle sviluppabili delle congruenze. Per i risultati del § 17 C, avremo che: *Le S, S' sono falde focali di due congruenze applicabili, se su di esse si corrispondono le asintotiche u, v, e se esiste una funzione p (u, v) tale che sulle due superficie le due quantità:*

$$(25) \quad (\beta \rho)_v - \left( \frac{\gamma}{\rho} \right)_u$$

•

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 \left( -L + \rho \beta_u - \frac{1}{2} \beta^2 \rho^2 + 2 \beta \rho_u \right) + \\ + \left( M - \frac{\gamma_v}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\rho^2} + 2 \gamma \frac{\rho_v}{\rho^2} \right) \end{array} \right.$$

abbiano uguali valori. In tal caso le nostre congruenze sono quelle formate dalle tangenti alle linee  $du - \rho dv = 0$  delle due superficie  $S, S'$ .

#### H) Il caso singolare.

Un caso particolare notevole si ottiene (Cfr. F) supponendo che le due superficie  $S, S'$  siano proiettivamente applicabili, ossia abbiano uguali  $\beta, \gamma$ . Allora la condizione (25) è soddisfatta qualunque sia la  $\rho$ . E per le linee  $\frac{du}{dv} = \rho$  involupate sulle superficie dai raggi della congruenza si ha:

$$\rho^2 \delta L - \delta M = 0, \quad \text{ossia} \quad du^2 (\delta L) - dv^2 (\delta M) = 0.$$

Non potendo essere  $\rho = 0$ ,  $\infty$ , sarà  $\delta L \neq 0$ ,  $\delta M \neq 0$  e, come segue dal § 16 D, potremo perciò rendere, mutando i parametri delle  $u, v$ ,  $\delta L = \delta M = 1$ . Dovrà essere allora  $\beta_v = \gamma_u$ ; e le nostre linee saranno le  $u \pm v = \text{cost}$ , le quali formano un sistema coniugato  $R$ . Si ha dunque il caso particolare già enunciato dal Cartan (che lo ha chiamato il caso *singolare*) senza alcuna dimostrazione: *Una classe di congruenze applicabili si trova scegliendo due superficie  $R$  applicabili, e tirando le tangenti all'uno od all'altro dei due sistemi di linee che su di esse formano un sistema coniugato  $R$ .* Questo caso è anche dal nostro punto di vista *singolare*, perchè soltanto per esso la condizione relativa a (25) è soddisfatta *identicamente* (qualunque sia  $\rho$ ). Questo caso si può anche caratterizzare come il caso delle congruenze  $W$ , le cui trasformate di Laplace sono ancora congruenze  $W$ , oppure con la proprietà geometrica enunciata in F.

Tranne l'enunciato del Cartan che una congruenza è in gene-

rale proiettivamente indeformabile del 2° ordine, e che le congruenze deformabili (le precedenti escluse) dipendono da una funzione arbitraria di due variabili, non si ha finora alcuna ricerca sulle classi di superficie  $S, S'$  che si trovano nelle condizioni sopra enunciate.

#### I) Altra deduzione delle formole precedenti.

Le formole ottenute in G si possono naturalmente dedurre direttamente, assumendo fin da principio coordinate asintotiche  $u, v$  sulle nostre due superficie, ed applicando le formole del § 41 del Cap V. Abbiamo le due superficie la stessa  $\alpha_{12} = e^{\theta}$ , e siano:

$$x_1 = \mu x + 2(Ax_u + Bx_v) \quad x'_1 = \mu' x' + 2(A'x'_u + B'x'_v)$$

i secondi fuochi delle nostre due congruenze, dove  $\mu$  è dato dalla (2) del citato §, e  $\mu'$  è la quantità analoga calcolata per la seconda superficie. Sarà  $A : B = \rho$ . Si vede facilmente che la proiettività che porta la congruenza  $K'$  in una congruenza  $\bar{K}$  che ha il voluto contatto con  $K$  deve portare  $x'$  in  $x$ , la retta  $(x'x'_u)$  in  $(xx_u)$ , ecc.; e che più precisamente si ha (con conveniente scelta delle coordinate omogenee) (cfr. le (5) del § 103)

$$x' \equiv x \quad x'_u \equiv x_u + lx \quad x'_v \equiv x_v + mx$$

$$x'_{uv} \equiv x_{uv} + \Lambda x + mx_u + lx_v \quad \text{ove} \quad 2l + \frac{A}{B} \delta \beta = 2m + \frac{B}{A} \delta \gamma = 0.$$

Esprimendo che al variare di  $dv : du$  i fuochi  $x_1$  ed  $x'_1$  si muovono in una stessa direzione, che cioè  $x'_1 \equiv x_1$ ,  $Rx'_{1u} + Sx'_v \equiv x_{1u}$ ,  $Rx'_{1v} + Tx'_1 \equiv x_{1v}$ , si trova eliminando  $\Lambda, R, S, T$  che:

$$A \left[ -\frac{1}{2} \frac{A}{B} \mu \delta \beta + \delta \mu_u + 2A \delta p_{11} + l(\mu + \delta \mu + \right. \\ \left. + 2A_u + 2A \theta_u) + 2m(B_u + A\beta + A\delta \beta) \right] =$$

$$= B \left[ -\frac{1}{2} \frac{B}{A} \mu \delta \gamma + \delta \mu_v + 2 B \delta p_{22} + m (\mu + \delta \mu + \right. \\ \left. + 2 B_v + 2 B \theta_v) + 2 l (A_v + B \gamma + B \delta \gamma) \right].$$

Sostituendo a  $\mu$ ,  $l$ ,  $m$  i loro valori, osservando che:

$$\delta \mu = \frac{A^2}{B} \delta \beta + \frac{B^2}{A} \delta \gamma,$$

la precedente condizione diventa per le (5) del § 16:

$$0 = 2 A^2 \delta q_{11} + \frac{A^3}{B} \delta \beta_u - 2 A^2 \delta \beta_v + \\ + \delta \beta \left[ 2 A^2 \frac{B_v}{B} - 2 A A_v + 2 A^2 \frac{A_u}{B} - 2 \frac{A^3}{B^2} B_u - \frac{A^4}{B^2} \beta \right] - \\ - 2 B^2 \delta q_{22} - \frac{B^3}{A} \delta \gamma_v + 2 B^2 \delta \gamma_u + \\ + \delta \gamma \left[ 2 B^2 \frac{A_u}{A} - 2 B B_u + 2 B^2 \frac{B_v}{B} - 2 \frac{B^3}{A^2} A_v - \frac{B^4}{A^2} \gamma \right] - \\ - \frac{1}{2} \delta \left[ \left( \frac{A^2}{B} \beta \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \delta \left[ \left( \frac{B^2}{A} \gamma \right)^2 \right].$$

La condizione analoga per i piani focali si ottiene semplicemente mutando  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $B$  in  $-\beta$ ,  $-\gamma$ ,  $-B$ . Potremo dunque annullare separatamente quei termini della formola precedente che con tale cambiamento mutano di segno e quelli che restano immutati.

I primi danno:

$$A^2 \left( -2 \delta \beta_v + 2 \frac{B_v}{B} \delta \beta - 2 \frac{A_v}{A} \delta \beta \right) + \\ + B^2 \left( 2 \delta \gamma_u - 2 \frac{A_u}{A} \delta \gamma + 2 \frac{B_u}{B} \delta \gamma \right) = 0$$

ossia, poichè  $A : B = \rho$ , si ritrova la condizione che (25)<sub>bu</sub> ha uguali valori sulle due superficie.

Dai termini che restano immutati di segno si ritrova che:

$$A^2 \left( 2 q_{11} + \rho \beta_u + 2 \beta \rho_u - \frac{1}{2} \rho^2 \beta^2 \right) + \\ + B^2 \left( -2 q_{22} - \frac{\gamma_v}{\rho} + 2 \gamma \frac{\rho_v}{\rho^2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\rho^2} \right)$$

ha uguali valori sulle due superficie. Si ritrova cioè la condizione relativa a (26).

Il cono cubico di direzioni tangenti in  $O$  alla quadrica ed a  $V_n$  è

$$P_3 + P_2 P = 0.$$

Vi sono  $\infty^n$  di questi coni dipendenti dalle costanti  $h$ . Se il discriminante  $A$  di  $P_2$  è diverso da zero, ve ne è tra essi uno e uno solo (cfr. Introd. § 4 B) *apolare* o *coniugato* a  $P_2$ .

Ponendo  $\tau = P_2$ ,  $\xi_i = x_i P_2$ , nello spazio  $\pi_n$  ad  $n$  dimensioni, ove le  $\xi_i$ ,  $\tau$  sono coordinate omogenee si trova una ipersuperficie  $W$  di terzo grado con punto doppio; il cono tangente nel punto doppio di  $W$  è l'immagine del cono asintoto; le sezioni iperpiane l'immagine dei coni cubici precedenti, la sezione *principale* l'immagine del cono cubico apolare al cono asintoto.

Se  $A = 0$ , potremmo talvolta al cono cubico apolare a  $P_2$  sostituire un altro cono definito pure in modo invariante; p. es. se  $n = 3$  sostituire ad esso il cono immagine di quella sezione piana di  $W$  che passa per due delle rette di  $W$ , che escono dal punto  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Ma tale considerazione introduce degli irrazionali.

#### B) Formole fondamentali. (F)

Passiamo al lato analitico della trattazione; supponiamo le  $x, y, \dots, t$  funzioni di  $n$  parametri  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , e, *per ora*, indichiamo provvisoriamente con indici apposti alle  $x, y, \dots$  le loro derivate.

Poniamo:

$$(1) \quad \begin{cases} F_2 = \lambda(x, x_1, x_2, \dots, x_n, d^2 x) \\ \Phi_3 = \lambda(x, x_1, x_2, \dots, x_n, d^3 x) - \frac{3}{2} dF_2. \end{cases}$$

Come nel caso delle superficie si prova che  $F_2 = 0$  è l'equazione del cono asintotico e che  $\Phi_3 = 0$  è l'equazione di uno dei citati coni cubici (variabile con  $\lambda$  e col fattore per cui si moltiplicano le coordinate omogenee). Tra questi coni cubici quello

## CAPITOLO XII.

### INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA

#### PROIETTIVO - DIFFERENZIALE NEGLI IPERSPAZI.

#### § 104. — Le forme fondamentali delle ipersuperficie.

##### A) Preliminari geometrici. (F)

Riprendiamo gli stessi metodi che ci hanno servito per le superficie. In uno spazio  $S_{n+1}$  ad  $n+1$  dimensioni siano  $x, y, \dots, t$  un sistema di  $n+2$  coordinate omogee; talvolta porremo la prima di esse uguale ad 1, le  $n$  successive a  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , l'ultima a  $z$ . Le  $x_i$  e la  $z$  costituiranno un sistema di  $n+1$  coordinate non omogenee. Sia data una ipersuperficie  $V_n$ ; senza limitare la generalità potremo supporre che  $z = 0$  sia l'iperpiano tangente nel punto  $O$  generico  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . A meno di termini del quart'ordine varrà uno sviluppo:

$$z = P_2(x) + P_3(x),$$

ove  $P_i$  è (per  $i = 2, 3$ ) un polinomio omogeneo di grado  $i$  nelle  $x$ . La  $P_2 = 0$  definisce le direzioni lungo le quali l'iperpiano tangente incontra  $V_n$ ; direzioni che pertanto formano un cono quadrico, detto cono *asintotico*. Le quadriche di  $S_{n+1}$ , la cui intersezione con  $V_n$  ha in  $O$  un cono di terzo grado di direzioni tangenti, sono le quadriche la cui equazione è del tipo:

$$z - P_2 + z(hz + P) = 0, \quad \text{ove } P = \sum h_i x_i \quad (h, h_i = \text{cost.}).$$

apolare ad  $F_2$  si trova, come ora proveremo, ponendo  $\lambda = \frac{1}{n+2} \frac{1}{\sqrt{|B|}}$ ,

se  $B$  è il discriminante di

$$(x, x_1, x_2, \dots, x_n, d^2 x) = \sum b_{rs} du_r du_s.$$

Posto  $B_{rs}$  uguale al compl. algebrico di  $b_{rs}$  in  $B$ , diviso per  $B$ , e

$$\Phi_3 = \lambda \sum b_{rst} du_r du_s du_t,$$

si avrà in tale ipotesi

$$b_{rst} = (x x_1 x_2 \dots x_n x_{rst}) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_{rs}}{\partial u_t} + \frac{\partial b_{rt}}{\partial u_s} + \frac{\partial b_{st}}{\partial u_r} \right) + \frac{1}{2(n+2)} \left( b_{rs} \frac{\partial \log B}{\partial u_t} + b_{rt} \frac{\partial \log B}{\partial u_s} + b_{st} \frac{\partial \log B}{\partial u_r} \right),$$

e quindi

$$\sum_{r,s} B_{rs} b_{rst} = \sum_{r,s} B_{rs} \left[ (x x_1 x_2 \dots x_n x_{rst}) - \frac{\partial b_{rt}}{\partial u_s} \right] - \sum_r \binom{r t}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log B}{\partial u_t},$$

ove  $\binom{r t}{r}$  sono i simboli di Christoffel di seconda specie per la  $\sum b_{rs} du_r du_s$ . Gli ultimi due termini del secondo membro si elidono; basterà dunque provare che è nullo il primo, cioè che è nullo

$$(2) \quad \sum_{i,r,s} B_{rs} (x x_1 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} \dots x_n x_{rst})$$

Ora, se  $X, Y \dots$  è un sistema di quantità tali che  $(x x_1 \dots x_n X) = 1$ , dalla definizione delle  $b_{rs}$  segue che valgono delle formole

$$x_{rs} = b_{rs} X + \mu_{rs} x + \sum_j \nu_{rj} x_j,$$

ove le  $\mu, \nu$  sono quantità che ora non ci interessano. Pertanto la (2) vale

$$\sum_{i,r,s} B_{rs} [\nu_{it} b_{rt} - b_{it} \nu_{rt}] = \sum_i (\nu_{it} - \nu_{it}) = 0,$$

come si doveva provare.

Il valore della forma  $\Phi_3$  corrispondente a questo valore di  $\lambda$  si indicherà con  $F_3$ . In generale ogni altro valore di  $\Phi_3$  differisce da  $F_3$  per il prodotto di  $F_2$  per una forma di primo grado. Ma noi intenderemo sempre di aver fissato  $\frac{1}{\lambda} = \frac{n+2}{\sqrt{|B|}}$ .

E porremo

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} F_2 &= \sum a_{rs} du_r du_s = \frac{1}{\sqrt{|A|}} (x x_1 \dots x_n d^2 x) \\ F_3 &= \sum a_{rst} du_r du_s du_t \end{aligned} \right.$$

ove  $A$  è il discriminante di  $F_2$ , e quindi  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{|A|}}$ .

Le forme  $F_2, F_3$  sono determinate dalla ipersuperficie in modo *impropriamente intrinseco* (perchè cambiando e soltanto di segno per trasformazioni sulle  $u_r$  a Iacobiano negativo) e *invariante* per collineazioni a modulo 1. Le collineazioni a modulo  $-1$  le cambiano di segno; quelle moltiplicative le moltiplicano per uno stesso fattore positivo, cosicchè in ogni caso  $\frac{F_3}{F_2}$  è *intrinseco invariante* e riceve il nome di *elemento lineare proiettivo*.

Notiamo che, se  $n$  è dispari, alla  $\sqrt[n+2]{|B|}$  potremo sostituire la  $\sqrt[n+2]{|B|}$ , senza timore di introdurre quantità immaginarie nel caso di ipersuperficie reali.

Invece di considerare la ipersuperficie come luogo di punti la possiamo anche considerare come involuppo di iperspazi  $\xi, \eta, \dots, \tau$ , cioè degli iperpiani tali che:

$$(4) \quad S \xi x = S \xi x_i = 0 \quad \text{e pertanto anche} \quad S x \xi_i = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Queste  $\xi, \eta, \dots, \tau$  sono dalle (4) determinate solo a meno di un

fattore, che resterà completamente determinato se imponiamo che

$$(5) \quad S \xi d^2 x = -S d \xi dx = S x d^2 \xi = F_2$$

da cui segue

$$(x x_1 x_2 \dots x_n d^2 x) (\xi \xi_1 \dots \xi_n d^2 \xi) = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & F_2 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots \\ F_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1} A F_2^2.$$

Posto  $\varepsilon = \text{sgn}(-1)^{n-1} A$ , se ne deduce per (3) che la posizione (5) sulle  $\xi$  equivale a porre

$$(\xi \xi_1 \dots \xi_n d^2 \xi) = \varepsilon (x x_1 \dots x_n d^2 x) = \varepsilon F_2 \sqrt{|A|}.$$

Si avrà

$$(6) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{|A|}} (x x_1 \dots x_n), \quad x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}} (\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Sarà poi, come si deduce dalla definizione di  $F_3$  e dalle (6):

$$(7) \quad F_3 = S \xi d^3 x - \frac{3}{2} d F_2 = d F_2 - S d \xi d^2 x - \frac{3}{2} d F_2 =$$

$$= -S d \xi d^2 x - \frac{1}{2} d F_2 = d F_2 + S d x d^2 \xi - \frac{1}{2} d F_2 =$$

$$= \frac{1}{2} d F_2 + S d x d^2 \xi = \frac{3}{2} d F_2 - S x d^3 \xi$$

od anche (Öech)

$$(8) \quad F_3 = \frac{1}{2} S (d x d^2 \xi - d \xi d^2 x) = \frac{1}{2} S (\xi d^3 x - x d^3 \xi).$$

Scegliendo in altro modo il fattore di indeterminazione per le  $\xi$ , questa formola non darebbe più  $F_3$  apolare ad  $F_2$ , ma un'altra forma del sistema lineare delle  $\Phi_3$ , cioè  $\sigma F_3 + F_2 \Sigma \sigma_i d u_i$ ; perchè, se  $\bar{\xi} = \rho \xi$ , allora

$$S (d x d^2 \bar{\xi} - d \bar{\xi} d^2 x) = \rho S (d x d^2 \xi - d \xi d^2 x) +$$

$$+ d \rho (2 S d x d \xi - S \xi d^2 x) = \rho S (d x d^2 \xi - d \xi d^2 x) - 3 d \rho F_2.$$

Indicando con  $x_r, x_s$ , ecc. derivate *covarianti* rispetto ad  $F_2$ , sarà anche:

$$(9) \quad a_{rs} = -S \xi_r x_s = -S \xi_s x_r = S \xi x_{rs} = S x \xi_{rs}.$$

Poichè

$$d^3 x = \Sigma x_r \delta^3 u_r + 3 \Sigma x_{rs} d u_r \delta^2 u_s + \Sigma x_{rst} d u_r d u_s d u_t,$$

$$d F_2 = 2 \Sigma a_{rs} d u_r \delta^2 u_s,$$

si trae tosto dalle precedenti che

$$F_3 = \Sigma (S \xi x_{rst}) d u_r d u_s d u_t,$$

donde, derivando covariantemente le (9) (\*):

$$(10) \quad a_{rst} = S \xi x_{rst} = -S \xi_s x_{rt} = -S \xi_r x_{st} = -S \xi_t x_{rs} =$$

$$= S x_t \xi_{rs} = S x_r \xi_{st} = S x_s \xi_{rt} = -S x \xi_{rst}.$$

Le relazioni di coniugio danno poi:

$$(11) \quad \sum_{r,s} A_{rs} a_{rst} = 0 \quad \text{per } t = 1, 2, \dots, n.$$

(\*) Si ricordi che le derivate covarianti delle  $a_{rs}$  sono nulle, e perciò non sono indicate con  $a_{rst}$ .

## C) Le equazioni differenziali fondamentali.

Potremo infine scrivere le equazioni differenziali che dalle forme  $F_2, F_3$  (e, per ora, da una terza forma  $P$ ) permettono di risalire all'ipersuperficie. Poniamo:

$$X = \frac{1}{n} \Delta_2 x \text{ e analoghe.}$$

Sarà

$$(12) \quad SX\xi = \frac{1}{n} \sum A_{rs} S\xi x_{rs} = \frac{1}{n} \sum A_{rs} a_{rs} = 1.$$

$$(13) \quad SX\xi_i = \frac{1}{n} \sum_{r,s} A_{rs} S\xi_i x_{rs} = -\frac{1}{n} \sum_{r,s} A_{rs} a_{rsi} = 0$$

e quindi, derivando la penultima, anche

$$(14) \quad S\xi X_i = 0.$$

Analogamente si definiscono le  $\Xi$ , e si dimostrano per queste le formole duali delle precedenti. Allora le  $x, x_1, x_2, \dots, x_n, X$  sono linearmente indipendenti, e pertanto valgono formole del tipo:

$$x_{rs} = \lambda_{rs} x + \sum_i \mu_{rsi} x_i + \nu_{rs} X$$

ove le  $\lambda, \mu, \nu$  sono quantità da determinare. Moltiplicando per  $\xi$  e sommando si trova:

$$\nu_{rs} = S\xi x_{rs} = a_{rs}.$$

Moltiplicando per  $\xi_i$  e sommando, si trova

$$-a_{irs} = S\xi_i x_{rs} = -\sum_i \mu_{rsi} a_{ii}, \text{ cioè } \mu_{rsi} = \sum_i A_{ii} a_{irs}$$

cosicchè si ha in conclusione: (F)

$$(I) \quad x_{rs} = \sum_{i,i} a_{rsi} A_{ii} x_i + a_{rs} X + p_{rs} x.$$

Moltiplicando per  $A_{rs}$  e sommando rispetto  $r, s$ , si trae:

$$(15) \quad \sum A_{rs} p_{rs} = 0.$$

Dunque: Si presenta, come nel caso delle superficie, necessaria l'introduzione di una nuova forma intrinseca

$$P = \sum p_{rs} du_r du_s$$

pure apolare ad  $F_3$  (ma, come le  $F_2, F_3$  invariante solo per collineazioni unimodulari). Formole analoghe si hanno per le  $\xi$ :

$$(I)_{bi} \quad \xi_{rs} = -\sum_{i,i} a_{rsi} A_{ii} \xi_i + a_{rs} \Xi + \pi_{rs} \xi,$$

ove ancora la forma

$$\Pi = \sum \pi_{rs} du_r du_s$$

è apolare alla  $F_2$ . Derivando covariantemente la (I), se ne deduce poi:

$$x_{rsi} = \sum a_{rsii} A_{ij} x_j + \sum a_{rsi} A_{ij} (\sum a_{ijk} A_{kk} x_k) + p_{rsi} x + p_{rs} x_i + a_{rsi} X + \sum a_{rsi} A_{ij} p_{ij} x + a_{rs} X_i.$$

Ora per le  $S\xi X_i = 0$ , varrà una formola del tipo:  $X_i = g_i x + \sum_h l_i^h x_h$  (della determinazione delle  $g, l$  ci occuperemo altrove).

Quindi:

$$(16) \quad x_{rsi} = \sum_j [\sum a_{rsii} A_{ij} + \sum a_{rsi} A_{ik} a_{ikh} A_{hj} + a_{rs} l_i^{(j)}] x_j + (p_{rsi} + \lambda_i a_{rs}) x + p_{rs} x_i.$$

Valgono formole duali per le  $\xi_{rsi}$ .

## D) Alcune applicazioni dei risultati precedenti.

Noi abbiamo escluso in molti punti del precedente paragrafo che  $A = 0$ . Quale significato ha tale esclusione? Esso si trova subito, osservando che per  $A = 0$  vi è almeno una direzione  $du_1 : du_2 : \dots : du_n$  doppia per il cono asintoto; essa, cambiando variabili, si può portare nella  $du_2 = du_3 = \dots = du_n = 0$ , cosicchè sarà  $a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$ ; cioè, oltre alle

$$(17) \quad S\xi x = S\xi x_1 = \dots = S\xi x_n = 0, \quad \text{varranno le:}$$

$$(17)_{bis} \quad S\xi_1 x = S\xi_1 x_1 = \dots = S\xi_1 x_n = 0.$$

Ora, avendo noi supposto che la nostra varietà sia proprio una ipersuperficie, composta di  $\infty^n$  punti, e non meno, la matrice  $(x x_1 \dots x_n)$  non è nulla. E le  $\xi$  dalle (17) sono determinate a meno di un fattore. Dal confronto di (17) ed  $(17)_{bis}$  si deduce pertanto che le  $\xi_1$  sono proporzionali alle  $\xi$ , che cioè vale un'equazione:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1} = \rho \xi \quad (\rho = \text{fattore di proporzionalità}).$$

Quindi potremo moltiplicare le  $\xi$  per un tale fattore che  $\xi_1 = 0$ . Quindi l'iperpiano tangente  $\xi$  dipenderebbe dalle sole  $n - 1$  variabili  $u_2, u_3, \dots, u_n$ . E viceversa. Perciò:

*Se la nostra varietà è non soltanto luogo proprio di  $\infty^n$  punti, ma anche involuppo proprio di  $\infty^n$  iperpiani, cioè è una vera ipersuperficie sia come luogo di punti, che come involuppo di iperpiani, allora  $A \neq 0$ . E viceversa.*

Se  $A = 0$ , gli iperpiani tangenti saranno dunque  $\infty^r$  con  $r < n$ . Scegliamo i parametri  $u$  in guisa che le  $\xi$  non dipendano dalle  $u_i$  con  $i > r$ . Poichè i punti  $x$  sono i punti soddisfacenti alle:

$$(18) \quad S\xi_h x = S\xi x = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

essi saranno del tipo:

$$(19) \quad x = x^{(0)} + \sum_{h=1}^s v_h x^{(h)} \quad (h = 1, 2, \dots, s = n - r)$$

se  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(s)}$  sono un sistema completo di soluzioni delle (18). E perciò la  $V_n$  sarà luogo di  $\infty^r$  spazii lineari  $S_r$ , nei punti di uno qualsiasi dei quali ha uno stesso iperpiano tangente. È pure importante un'altra osservazione valida nel caso più generale: Se

$$u_i = u_i(u_1, u_2, \dots, u_{v-1}) \quad (i = v, v + 1, \dots, n)$$

*sono le equazioni che definiscono la sezione  $V'$  di  $V_n$  con uno spazio lineare a  $v$  dimensioni, allora, sostituendo in  $F_2, \Phi_3$  alle  $u_v, \dots, u_n$  i precedenti valori, si trovano le forme corrispondenti che indicheremo con  $F'_2$  e  $\Phi'_3$  di questa sezione  $V'$ .*

Dato il carattere intrinseco e invariante (per collineazioni a modulo 1) delle nostre formole, e dato che uno spazio lineare od è un iperpiano, oppure è sezione di iperpiani, potremo supporre che sia  $v = n$ , che l'iperpiano secante sia  $x = 0$ , e infine che sulla  $V_n$  valga la  $x = u_1$ . In tali ipotesi, se  $(x, y, \dots, t)$  e  $(\xi, \eta, \dots, \tau)$  è un elemento di  $V_n$ , di cui il punto giaccia sull'iperpiano secante, allora  $(y, \dots, t)$  ed  $(\eta, \dots, \tau)$  sono evidentemente in quest'ultimo le coordinate dello stesso punto e del corrispondente  $S_{n-1}$  che, nell'iperpiano secante  $x = 0$  considerato come spazio totale, è l'iperpiano ivi tangente alla  $V'$ . Basta ricordare le  $F_2 = -S dx d\xi, \Phi_3 = \frac{1}{2} S(dx d^2\xi - d\xi d^2x)$ , perchè il nostro enunciato risulti evidente. Ne segue subito:

*Se  $F_3 = 0$ , ossia se una, e quindi tutte le forme  $\Phi_3$  sono divisibili per  $F_2$ , allora, se  $A \neq 0$ , la nostra ipersuperficie è una quadrica e viceversa.*

Infatti, se  $\Phi_3$  è divisibile per  $F_2$ , ciò avverrà, per l'osserv. precedente, anche per l'intersezione di  $V_n$  con uno spazio lineare  $S_3$  generico a tre dimensioni, in cui l'intersezione citata sarà una superficie, che avrà la sua forma  $\Phi'_3$  divisibile per  $F'_2$ , cioè  $F'_3 = 0$ ; e quindi, come già ci è noto, sarà una quadrica. Poichè ogni  $S_3$  generico taglia  $V_n$  in una quadrica, anche  $V_n$  stessa sarà una quadrica di  $S_{n+1}$ .

A questa dimostrazione si può fare un'obiezione. Il teorema che le superficie di un  $S_3$ , per cui  $\Phi'_3$  è divisibile per  $F'_2$ , sono quadriche vale nell'ipotesi sempre sottintesa che  $F'_2$  abbia un discriminante diverso da zero. Che cosa avverrebbe nella dimostrazione precedente se la  $F'_2$  della sezione di  $V_n$  con un  $S_3$  generico avesse un discriminante sempre uguale a zero, cioè  $F'_2$  fosse sempre un quadrato perfetto? In tal caso necessariamente anche  $F_2$  sarebbe un quadrato perfetto (e in particolare avrebbe  $A = 0$  contro l'ipotesi fatta nell'enunciato). Ma possiamo facilmente esaurire la ricerca, abbandonando l'ipotesi  $A \neq 0$ . La sezione di  $V_n$  con un  $S_3$  generico sarebbe sempre una sviluppabile (od un caso limite di questa). Le generatrici delle sviluppabili intersezione di  $V_n$  con tutti gli  $S_3$  che escono da un punto generico  $O$  di  $V_n$  sono rette appartenenti a  $V_n$ , per cui  $F_2 = 0$  e (poichè  $F_2$  è un quadrato) formano di solito un  $S_{n-1}$  lineare intersezione di  $V_n$  con l'iperpiano tangente in  $O$ . Lungo una linea qualunque di questo  $S_{n-1}$  si dimostra (come nel teorema iniziale di questo §) che l'iperpiano tangente non cambia. La ipersuperficie è perciò involuppo di  $\infty^1$  iperpiani (le cui caratteristiche sono i precedenti spazii  $S_{n-1}$ ): ecco le uniche ipersuperficie per cui non solo  $A = 0$ , ma anche  $\Phi_3$  è divisibile per  $F_2$ .

Infine le ipersuperficie per cui  $F_2$  è identicamente nullo sono gli iperpiani.

## § 105. — La quadrica di Čech.

### A) Polarità e quadrica di Čech.

Possiamo ora definire la quadrica di Čech, che è la generalizzazione della conica osculatrice a una curva piana e della quadrica di Lie per le superficie. Consideriamo (sempre se  $A \neq 0$ ), per un punto generico  $O = (x)$  della nostra ipersuperficie, quella corrispondenza che al punto di coordinate

$$\lambda x + \mu X + \sum_i v^i x_i$$

fa corrispondere l'iperpiano

$$\lambda \xi + \mu \Xi + \sum v^i \xi_i,$$

sempre inteso di aver fissato i fattori di proporzionalità per le  $x$ ,  $\xi$  nel modo sopra definito (\*). Se dunque moltiplichiamo le  $x$  per uno stesso fattore  $\rho$ , le  $\xi$  restano moltiplicate pure per  $\rho$ , e, come si vede facilmente, la reciprocità sopra definita resta invariata. Tale reciprocità è dunque definita in modo invariante e naturalmente anche intrinseco (per ogni punto della  $V_n$ ). Affinchè il punto  $\lambda x + \mu X + \sum v^i x_i$  e l'iperpiano  $\lambda' \xi + \mu' \Xi + \sum v'^i \xi_i$  si appartengano, dev'essere:

$$(\lambda \mu' + \lambda' \mu) \sum a_{ik} v^i v'^k + \mu \mu' S X \Xi = 0.$$

La simmetria nelle variabili accentate o non accentate dimostra che la nostra reciprocità non è che la polarità rispetto alla quadrica

$$2 \lambda \mu + \mu^2 S X \Xi - \sum a_{ik} v^i v^k = 0$$

che chiameremo la quadrica di Čech. Le quadriche nel fascio determinato dalla quadrica di Čech, e dall'iperpiano tangente  $\mu^2 = 0$  contato due volte sono tutte e sole le quadriche che intersecano  $V_n$  nel cono di direzioni avente per equazione  $F_3 = 0$ . Infatti un punto di  $V_n$  posto in un intorno di  $O$  ha per coordinate

$$x + dx + \frac{1}{2} d^2 x + \frac{1}{6} d^3 x + \dots =$$

(\*) Si ricordi la definizione di  $X$ ,  $\Xi$  del § 104 C. Si vede facilmente che al punto

$$\lambda x + \sum v^i x_i + \frac{\mu}{2} \sum A_{rs} x_{rs}$$

corrisponde il piano

$$\lambda \xi + \sum v^i x_i + \frac{\mu}{2} \sum A_{rs} \xi_{rs}$$

anche supponendo che gli indici delle  $x$  e  $\xi$  indichino derivate ordinarie (non covarianti).

$$= x + \sum x_i du_i + \frac{1}{2} (\sum x_i \delta^2 u_i + \sum x_{r,r} du_r du_r) + \\ + \frac{1}{6} (\sum x_i \delta^3 u_i + 3 \sum x_{r,s} du_r \delta^2 u_s + \sum x_{r,r} du_r du_r du_r)$$

cioè, tenendo conto delle equazioni fondamentali:

$$\lambda x + \mu X + \sum v^i x_i, \quad \text{ove:}$$

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2} \sum p_{r,r} du_r du_r + \dots$$

$$\mu = \frac{1}{2} F_2 + \frac{1}{2} \sum a_{r,r} du_r \delta^2 u_r + \frac{1}{6} F_3 + \dots$$

$$v^i = du_i + \frac{1}{2} \delta^2 u_i + \frac{1}{2} \sum a_{r,s} A_{ji} du_r du_s + \dots$$

Cosicchè in un punto dell'intorno di  $O$  si ha:

$$2\lambda\mu - \sum a_{i,i} v^{(i)} v^{(i)} = F_2 + \sum a_{r,r} du_r \delta^2 u_r + \frac{1}{3} F_3 - F_2 - \\ - \sum a_{i,i} du_i \delta^2 u_i - \sum a_{r,r} du_r du_r du_r + \dots = -\frac{2}{3} F_3 + \dots$$

I termini di grado inferiore (terzo) si annullano appunto sul cono  $F_3 = 0$ .

A questo proposito, anche senza entrare in particolari di dimostrazione, vogliamo aggiungere una osservazione. Come risulterà da un teorema di Čech, che ben presto proveremo, il luogo delle rette polari di un punto  $x'$  dell'iperpiano tangente rispetto alle coniche osculatrici delle sezioni di  $V_n$  con un piano  $S_2$  passante per la retta  $x'x$  è un iperpiano  $\xi'$  passante per  $x$ . Questo iperpiano  $\xi'$  si può anche definire come l'iperpiano polare di  $x'$  rispetto a una qualsiasi delle quadriche del § 104 A e B, a cui corrisponde un cono  $\Phi_3$  di direzioni contenente la retta  $x'x$ . Nel-

l'uno o nell'altro di questi modi equivalenti si stabilisce una corrispondenza birazionale tra gli iperpiani  $\xi'$  della stella  $x$  e i punti  $x'$  dell'iperpiano tangente  $\xi$  (\*). Agli iperpiani  $\xi'$  che passano per una retta generica uscente da  $x$  corrisponde nell'iperpiano tangente  $\xi$  (ad  $n$  dimensioni) una ipersuperficie (ad  $n-1$  dimensioni) cubica con punto doppio in  $x$ , la quale ha in  $x$  il cono  $F_2 = 0$  di direzioni come cono tangente; questa ipersuperficie è immagine del sistema lineare delle forme  $\Phi_3$  (\*\*).

Al teorema di Moutard corrisponde un analogo teorema di Čech.

#### B) Teorema di Čech.

1. Sia  $\omega$  un  $S_v$  ( $1 \leq v \leq n-1$ ) tangente in un punto  $O$  ad un'ipersuperficie  $V_n$  (con  $A > 0$ ); le quadriche di Čech in  $O$  (a  $v$  dimensioni) delle ipersuperficie  $V_v$  sezioni di  $\Sigma$  mediante tutti gli spazi  $S_{v+1}$  passanti per  $\omega$  riempiono una quadrica ad  $n$  dimensioni.

Posto  $v = 1$ ,  $n = 2$ , si ottiene il teorema di Moutard.

Per dimostrare il teorema nel caso generale, scegliamo la piramide di riferimento [indico con  $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$  le coordinate omogenee] in modo che le equazioni di  $\omega$  siano

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-v+1} = 0$$

ed inoltre che  $x_1 = 0$  sia l'equazione dell'iperpiano tangente a  $V_n$  in  $O$ . In  $O$  si avrà pertanto:

$$(1) \quad \frac{\partial x_1}{\partial u_1} = \frac{\partial x_1}{\partial u_2} = \dots = \frac{\partial x_1}{\partial u_n} = 0.$$

Scegliamo i parametri  $u_1, u_2, \dots, u_n$  in modo che le tangenti a  $V_n$  in  $O$  situate in  $\omega$  siano quelle per cui

(\*) Se  $n=2$ , tale corrispondenza è la corrispondenza  $\Sigma_1$  di Moutard studiata al Cap. IX.

(\*\*) Cfr. E. Bertini, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, 2ª ed., Cap. XV, n° 1.

$$(2) \quad du_{v+1} = du_{v+2} = \dots du_n = 0.$$

Un  $S_{v+1}$  passante per  $\omega$  è determinato da equazioni del tipo:

$$(3) \quad x_2 - \lambda_1 x_1 = 0, \quad x_3 - \lambda_2 x_1 = 0, \dots \quad x_{n-v+1} - \lambda_{n-v} x_1 = 0$$

in cui le  $\lambda$  siano costanti qualunque. Esso interseca  $V_n$  in una  $V_v$ ; le coordinate dei punti di  $V_v$  si ottengono facilmente in funzione di  $u_1, u_2, \dots, u_v$ ; basta infatti, date le  $x_1 \dots x_{n+2}$  su  $V_n$  in funzione di  $u_1, \dots, u_n$ , calcolare  $u_{v+1} \dots u_n$  come funzioni di  $u_1 \dots u_v$  dalle equazioni (3) ottenendo p. es.

$$u_{v+1} = \varphi_{v+1}(u_1, u_2, \dots, u_v; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-v}),$$

(4)

$$u_n = \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_v; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-v}),$$

e sostituire poi le  $\varphi_{v+k}$  al posto di  $u_{v+k}$  nelle  $x_i$ . Dall'ipotesi (2) si vede subito che si ha in  $O$ , qualunque siano le  $\lambda$ ,

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi_{v+1}}{\partial u_i} = \dots = \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, v).$$

Calcoliamo anche i valori delle derivate seconde delle  $\varphi$  in  $O$ . Dalle (3) si deduce

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x_\rho}{\partial u_i \partial u_j} + \sum_k \left( \frac{\partial^2 x_\rho}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 x_\rho}{\partial u_j \partial u_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \right) + \\ & + \sum_{k,l} \frac{\partial^2 x_\rho}{\partial u_k \partial u_l} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j} + \sum_k \frac{\partial x_\rho}{\partial u_k} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j} = \lambda_{\rho-1} \left[ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_i \partial u_j} + \right. \\ & + \sum_k \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_i \partial u_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_j \partial u_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \right) + \sum_{k,l} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_k \partial u_l} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi_l}{\partial u_j} + \\ & \left. + \sum_k \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j} \right]. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \rho = 2, 3, \dots, n-v+1 \\ i, j = 1, 2, \dots, v; k, l = v+1, v+2, \dots, n. \end{array}$$

Nel punto  $O$  valgono le (1) e le (5), sicchè le precedenti si riducono ivi alle

$$\frac{\partial^2 x_\rho}{\partial u_i \partial u_j} + \sum_k \frac{\partial x_\rho}{\partial u_k} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j} = \lambda_{\rho-1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_i \partial u_j}.$$

Il determinante  $\left| \frac{\partial x_\rho}{\partial u_k} \right|$  ( $\rho = 2, 3, \dots, n-v+1, k = v+1, v+2, \dots, n$ ) si riconosce subito diverso da zero, sicchè si trova nel punto  $O$

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j} = c_{ij,k}^{(0)} + c_{ij,k}^{(1)} \lambda_1 + \dots + c_{ij,k}^{(n-v)} \lambda_{n-v},$$

dove le  $c$  sono costanti numeriche.

C) Continuazione e fine della dimostrazione.

Passiamo al calcolo delle forme fondamentali  $F'_2, F'_3$  per  $V_v$ . Essendo  $F_2, F_3$  quelle di  $V_n$ , dalla formola del § 104 (5) e dal secondo teorema del § 104  $D$  si deduce tosto che

$$F'_2 = [\sigma F_2], \quad F'_3 = \left[ \sigma \left( F_3 - 3 \frac{d\sigma}{\sigma} F_2 \right) \right],$$

dove (anche nel seguito) le parentesi [ ] indicano la sostituzione (4) e  $\sigma$  si sceglie in modo che  $F'_3$  risulti apolare a  $F'_2$ . Ciò determina univocamente  $\frac{d\sigma}{\sigma}$ ; sia

$$(7) \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = E_1 du_1 + \dots + E_v du_v.$$

È importante osservare che, lasciando le  $\lambda$  indeterminate, le  $E$  risultano funzioni razionali delle  $[a_{ri}]$ ,  $[a_{ri}]$  e  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}$  ( $k = v+1, \dots, n, i = 1 \dots v$ ), sicchè le  $\frac{\partial E_j}{\partial u_i}$  sono polinomi lineari nelle

$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial u_i \partial u_j}$  con coefficienti funzioni razionali delle  $[a_{rs}]$ ,  $[a_{rst}]$ ,  $\left[\frac{\partial a_{rs}}{\partial u_p}\right]$ ,  $\left[\frac{\partial a_{rst}}{\partial u_p}\right]$ ,  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}$ . Le (5) e (6) mostrano quindi che si ha nel punto  $O$

$$(8) \quad E_i = e_i,$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial u_j} = e_{ij}^{(0)} + e_{ij}^{(1)} \lambda_1 + \dots + e_{ij}^{(n-v)} \lambda_{n-v}$$

dove le  $e$  sono costanti. Di più, comunque si fissino le  $\lambda$ , il secondo membro della (7) è un differenziale esatto. Per fissare completamente  $\sigma$ , noi poniamo la condizione che sia  $\sigma = 1$  nel punto  $O$  per tutti i valori delle  $\lambda$ ; sicchè in  $O$

$$(8)_{bis} \quad \sigma = 1, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial u_i} = E_i, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial E_i}{\partial u_j} + E_i E_j.$$

Dalla prima nota a piè di pagina al § 105 A risulta, ragionando similmente come al § 105 D, che l' $S_v$  polare del punto

$$(9) \quad \mu [x] + \mu_1 \frac{\partial [x]}{\partial u_1} + \dots + \mu_v \frac{\partial [x]}{\partial u_v} + \sum_{ij} B_{ij} \frac{\partial^2 [x]}{\partial u_i \partial u_j}$$

rispetto alla quadrica di Čech di  $V_v$  sta nell'iperpiano

$$(10) \quad \mu [\sigma \xi] + \mu_1 \frac{\partial [\sigma \xi]}{\partial u_1} + \dots + \mu_v \frac{\partial [\sigma \xi]}{\partial u_v} + \sum_{ij} B_{ij} \frac{\partial^2 [\sigma \xi]}{\partial u_i \partial u_j}$$

dove  $[\sigma F_2] = \sum b_{ij} du_i du_j$  e  $B_{ij}$  sono i complessi algebrici di  $b_{ij}$  nel det.  $|b_{ij}|$  divisi per il det., la parentesi  $[ ]$  indicando al solito la sostituzione (4). Ora per i valori delle  $u$  corrispondenti al punto  $O$ , le (9) e (10) diventano per le (5), (6), (8) e (8)<sub>bis</sub>:

$$y \equiv \mu x + \mu_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + \dots + \mu_v \frac{\partial x}{\partial u_v} + \sum_{ij} A_{ij} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} + \sum_k C_k^{(0)} \frac{\partial x}{\partial u_k} +$$

$$+ \lambda_1 \sum_k C_k^{(1)} \frac{\partial x}{\partial u_k} + \dots + \lambda_{n-v} \sum_k C_k^{(n-v)} \frac{\partial x}{\partial u_k},$$

$$\eta \equiv \mu \xi + \mu_1 \left( \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + e_1 \xi \right) + \dots + \mu_v \left( \frac{\partial \xi}{\partial u_v} + e_v \xi \right) +$$

$$+ \sum_{ij} A_{ij} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \partial u_j} + e_i \frac{\partial \xi}{\partial u_j} + e_j \frac{\partial \xi}{\partial u_i} + e_i e_j \xi \right) +$$

$$+ \sum_k C_k^{(0)} \frac{\partial \xi}{\partial u_k} + D^{(0)} \xi +$$

$$+ \lambda_1 \left( \sum_k C_k^{(1)} \frac{\partial \xi}{\partial u_k} + D^{(1)} \xi \right) + \dots + \lambda_{n-v} \left( \sum_k C_k^{(n-v)} \frac{\partial \xi}{\partial u_k} + D^{(n-v)} \xi \right),$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, v; \quad k = v + 1, \quad v + 2, \dots, n)$$

dove

$$C_k^{(\rho)} = \sum_{ij} A_{ij} e_{ij,k}^{(\rho)}, \quad D^{(\rho)} = \sum_{ij} A_{ij} e_{ij}^{(\rho)} \quad (\rho = 0, 1, 2, \dots, n - v).$$

Il punto  $y$  sta sulla quadrica di Čech di  $V_v$  se  $Sy\eta = 0$ . Ora questa è un'equazione quadratica (non omogenea) (che sarebbe facile scrivere) negli  $n + 1$  parametri

$$\mu, \mu_1, \dots, \mu_v, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-v}.$$

Potendosi tali parametri riguardare come coordinate (non omog.) di  $y$ , il teorema è stabilito.

§ 106. — Rette normali; coordinate normali.

Sia per ogni punto  $x$  di  $V_v$  assegnata una retta uscente da  $x$  e non posta sull'iperpiano tangente  $\xi$ ; sia  $x' \neq x$  un punto di questa retta. Sarà

$$S\xi x' \neq 0.$$

Ogni altro punto della retta avrà coordinate del tipo  $x' + \rho x$ ; affinché esso sia un *fuoco*, cioè sia intersezione della retta considerata e di una retta infinitamente vicina uscente dal punto  $x + dx = x + \sum x_i du_i$  della ipersuperficie  $V$ , dovranno esistere due parametri  $\beta, \gamma$  tali che:

$$d(x' + \rho x) = \beta x + \gamma x'.$$

Scriviamo le coordinate  $x'$  nella forma

$$x' = \lambda x + X + \sum v^i x_i.$$

L'iperpiano  $\xi_i + \alpha_i \xi$ , che passa per  $x$ , passerà anche per  $x'$  se

$$0 = S x' (\xi_i + \alpha_i \xi) = -v_i + \alpha_i \quad \text{ossia} \quad \alpha_i = v_i,$$

ove  $v_i$  è il sistema duale del sistema controvariante  $v^i$

$$v_i = \sum_r a_{ir} v^r, \quad v^i = \sum_r A_{ir} v_r.$$

Dire che  $d(x' + \rho x)$  è combinazione lineare di  $x, x'$  è come dire che esso giace sugli iperpiani  $\xi_i + v_i \xi$  (che si intersecano appunto nella retta considerata) cioè che

$$S (\xi_i + v_i \xi) d(x' + \rho x) = 0, \quad \text{ossia} \quad S (x' + \rho x) d (\xi_i + v_i \xi) = 0$$

cioè

$$\sum_k du_k \left\{ \rho a_{ik} + S x' \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \partial u_k} - v_i v_k + \frac{\partial v_i}{\partial u_k} \right\} = 0.$$

Eliminando le  $du_k$ , si trova un'equazione di grado  $n$  in  $\rho$ , a cui corrisponderanno  $n$  fuochi del nostro raggio. Supponiamo che essa abbia tutte le radici distinte; è facile riconoscere che le  $n$  direzioni corrispondenti  $du_1 : du_2 : \dots : du_n$  sono a 2 a 2 coniugate rispetto al cono asintotico, soltanto se  $\frac{\partial v_i}{\partial u_k} = \frac{\partial v_k}{\partial u_i}$ , ossia se  $\sum v_i du_i$  è un differenziale esatto  $d v$  (ciò si prova p. es. scegliendo le  $u$  in modo che nel punto considerato queste direzioni coincidano con le

direzioni coordinate  $[du_1 = du_2 = \dots = du_{i-1} = du_{i+1} = \dots = du_n = 0]$  e imponendo poi la condizione  $a_{ik} = 0$  per  $i \neq k$ ).

Viceversa, se  $\sum v_i du_i$  è un differenziale esatto, cambiando il fattore di proporzionalità per la  $x, \xi$ , potremo rendere  $v_i = 0$ . Ed è facile riconoscere che nelle nostre ipotesi le  $n$  direzioni considerate sono (per  $v_i = 0$ ) a due a due coniugate rispetto al cono asintotico.

In tal caso l'insieme delle nostre rette si dice essere una congruenza *coniugata* alla  $V_n$  (estendendo locuzioni già usate nella teoria delle superficie).

Le congruenze coniugate a  $V_n$  sono quelle formate dalle intersezioni dei piani  $(\text{ev } \xi)_i$ , che coincidono con la retta congiungente  $x$  ad  $X + \sum v^i x_i$ . In altre parole, facendo variare il solito fattore di proporzionalità, si ottengono dalle rette intersezioni dei piani  $\xi_i$ , ossia dalle rette congiungenti  $x$  ad  $X$  tutte e sole le congruenze coniugate alla nostra ipersuperficie (almeno se ci limitiamo a congruenze con fuochi distinti). Per questa congruenza le  $n$  direzioni citate sono quelle dello  $n^{\text{esimo}}$  autopolare rispetto al cono asintoto  $F_2 = 0$  e all'altro cono quadrico definito dall'uguagliare a zero la forma  $\Pi = \sum \pi_{rs} du_r du_s$  duale della forma  $P$ .

Ad ognuna di queste congruenze potremo dare il nome di congruenze delle *normali*. Come ne sceglieremo una nel modo più semplice possibile? Questa domanda, per quanto ora si è detto, equivale all'altra: Come si fissano nel modo più semplice i fattori di proporzionalità per le coordinate di punto  $x$  e di iperpiano tangente, ben inteso in modo che sia sempre soddisfatta la (5) o la (6) del § 104 B? O, in altre parole ancora, tra le coppie di forme  $\varphi_2, \varphi_3$  tali che  $\varphi_2 : \varphi_3 = F_2 : F_3$ , come ne fissiamo una in modo intrinseco invariante col metodo più semplice possibile? Noi p. es., analogamente a quanto si è fatto (§ 15 C) nel caso  $n = 2$ , potremmo (F) costruire un invariante assoluto  $I$  del sistema delle forme  $F_2, F_3$  formando il quoziente di due convenienti potenze dei discriminanti di  $F_3$  ed  $F_2$ , e moltiplicare poi le  $x, \xi$  per un tale fattore che questo quoziente  $I$  abbia, se possibile, un valore numerico prefissato. Ma per  $n > 2$  vi sono altri metodi: quelli (F) che, invece che ai discriminanti, ricorrono ad altri invarianti del sistema delle forme  $F_2, F_3$ . Tutti questi metodi ricorrono per la determinazione di  $\rho$  a sole derivate terze. Questa molteplicità di metodi che si pre-

senta nel caso  $n > 2$  è dovuta al fatto seguente. Se  $\rho$  e  $\rho'$  sono due fattori, ciascuno dei quali può servire, secondo i metodi precedenti, a *normare* le coordinate e le forme fondamentali, allora  $\rho : \rho'$  (che è un'espressione formata da prodotti e quozienti di invarianti simultanei di  $F_2, F_3$ ) è una *curvatura proiettiva* della ipersuperficie; un numero cioè (dipendente da derivate di ordine non superiore al terzo) di *carattere intrinseco-invariante*. Queste *curvature* non esistono nel caso  $n = 2$ .

Per la generalizzazione alle ipersuperficie della nozione di linee di Segre rinviamo alla Memoria del ČECH: *I fondamenti della geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo di Fubini*. (Ann. di Matematica 1923 Ser. 3 tomo 31), ove si troverà anche una generalizzazione delle superficie *isotermo-asintotiche*.

### § 107. — L'applicabilità proiettiva delle ipersuperficie. (F)

I metodi stessi, che abbiamo usato per le superficie e per i complessi di rette, si applicano sia alla definizione di ipersuperficie proiettivamente applicabili, sia al teorema:

*Condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva di due superficie è che abbiano uguale elemento lineare proiettivo  $F_3 : F_2$ , o, ciò che è lo stesso, che le coordinate omogenee dei loro punti si possano scegliere in modo che le due ipersuperficie definiscano una stessa coppia di forme  $F_2$  ed  $F_3$ . Trovare le ipersuperficie applicabili su una ipersuperficie data corrisponde dunque, date le forme  $F_2$  ed  $F_3$  a trovare le possibili forme  $P$  tali che siano soddisfatte le condizioni di integrabilità delle equazioni fondamentali, che senz'altro riscriviamo:*

$$(1) \quad x_{\rho s} = \sum a_{\rho st} A_{ti} x_i + a_{\rho s} X + p_{\rho s} x.$$

Le condizioni d'integrabilità sono:

$$x_{\rho st} - x_{\rho ts} = - \sum (st, \rho h) A_{hk} x_k$$

che scriveremo nella forma:

$$(2) \quad \sum_{\rho} A_{r\rho} (x_{\rho st} - x_{\rho ts}) = - \sum (st, \rho h) A_{hk} A_{r\rho} x_k.$$

Porremo anche:

$$(3) \quad X_i = g_i x + \sum_{\rho} l_{\rho i}^{\rho} x_{\rho} = g_i x + \sum l_{\rho i} A_{\rho j} x_j.$$

Porremo  $p_i = \sum_j p_{ij} A_{ji}$ . Sviluppando (2) tenendo conto delle (1) e (3) si deve ottenere una identità in  $x, x_j$ , ed  $X$ . Ma il coefficiente di  $X$  si riconosce tosto nullo nei due membri Uguagliando pertanto nei due membri i coefficienti di  $x_k$  e di  $x$ , si trova:

$$(4) \quad [st, rk] = \eta_{rs} l_i^k - \eta_{ir} l_s^k + \eta_{ik} p_s^r - \eta_{sk} p_i^r.$$

$$(5) \quad \sum_{\rho} A_{r\rho} \left[ p_{\rho st} - p_{\rho ts} + \sum_h (a_{\rho rh} p_i^h - a_{i\rho h} p_s^h) \right] + \eta_{rs} g_i - \eta_{ri} g_s = 0$$

ove è posto:  $\eta_{rr} = 1, \eta_{rs} = 0$  per  $r \neq s$ , ed è posto anche

$$[st, rk] = \sum A_{hk} A_{r\rho} \times$$

$$\times \left[ a_{h\rho st} - a_{h\rho ts} + (ts, \rho h) + \sum_{i,j} A_{ij} (a_{\rho ti} a_{hjs} - a_{\rho si} a_{hij}) \right] (*).$$

Esprimendo che, derivando le (3), si trova  $X_{ii} = X_{ii}$ , si deduce in modo simile:

$$(6) \quad \begin{cases} l_{ii} = l_{ii} \\ g_{is} + \sum l_{ih} A_{hj} p_{js} = g_{si} + \sum l_{sh} A_{hj} p_{ji} \\ g_i \eta_{sh} - g_s \eta_{ih} + \sum A_{hk} (l_{his} - l_{hsi}) + \sum_{\rho,h} (l_{\rho sh}^{\rho} - l_{\rho sh}^s) A_{hk} = 0. \end{cases}$$

Le (4) danno

(\*) Si notino le identità:  $[st, rk] = -[ts, rk]$

$$[st, rk] + [st, kr] = \sum_{h,j} A_{rt} A_{kj} (a_{jts} - a_{jst})$$

$$[st, sk] - [ts, ks] = \sum A_{kj} A_{st} a_{ijts}.$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} [st, rs] = -p_i^r \quad (\text{per } t \neq r, r \neq s, t \neq s) \\ [st, ss] = l_i^s - p_i^s \quad (s \neq t) \\ [st, sr] = l_i^r \quad (t \neq s, t \neq r, s \neq r) \\ [st, st] = l_i^t + p_i^t \quad (s \neq t) \end{array} \right.$$

mentre la relazione di coniugio di  $P$  ed  $F_2$  dà:

$$(8) \quad \sum_s p_i^s = 0.$$

Se  $n > 2$ , ed  $r \neq t$ , potrò trovare un indice  $s$  differente sia da  $r$ , che da  $t$ ; cosicchè la prima e la terza equazione danno tutte le  $l_i^r$ ,  $p_i^r$  in funzione dei coefficienti delle forme  $F_2, F_3$ , dai quali soltanto dipendono i simboli [...]. L'ultima poi delle (7), insieme alla (8) permettono di determinare le  $p_i^r$  e le  $l_i^r$ . E l'ultima delle (6) permette poi di determinare anche le  $g_i$ . Dunque, date le forme  $F_2$  ed  $F_3$ , sono determinate le  $g$ , le  $l$ , ed anche la forma  $P$ .

Dunque: Una ipersuperficie (ad  $n > 2$  dimensioni di uno spazio ad  $n + 1$  dimensioni) è proiettivamente indeformabile. Cioè: Due ipersuperficie proiettivamente applicabili sono anche proiettive tra di loro. Questi teoremi valgono naturalmente nel caso  $A \neq 0$  cioè per le ipersuperficie luogo proprio di  $\infty^n$  punti, e involuppo di  $\infty^n$  iperpiani. Del come si possa estendere la ricerca al caso  $A=0$  non ci occuperemo qui rinviando a una nota di uno degli A. (\*)

Sarà bene piuttosto vedere con Čech il significato geometrico di alcune delle quantità che si sono presentate nel calcolo precedente. Così la  $\sum l_{ii} du_i \delta u_i = 0$  (ove le  $du_i, \delta u_i$  definiscono due differenti direzioni) è un'equazione di carattere intrinseco. Sia  $t$

(\*) Fubini Il problema della deform. proiett. delle superficie. Rend. della R. Accad. dei Lincei, ser. 5, vol. 27<sub>2</sub>, pag. 147 (anno 1918). Chi desideri vedere come si possa affrontare la ricerca delle ipersuperficie con un gruppo continuo di deform. proiettive in sè stesse veda la Mem. dello stesso A.: *Fondamenti di geom. proiettivo-differ.* Rend. del Circ. Matem. di Palermo (1910) tomo 43. Cfr. anche CARTAN Sur la déform. project. des surfaces. Annales de l'École Norm. Supér.

la retta tangente a  $V_n$  nella direzione definita dai  $du$ , e  $\tau$  la tangente all'ipersuperficie luogo del punto  $X$  nella direzione dei  $\delta u$ ,  $t'$  la tangente a  $V_n$  nel punto considerato che incontra  $\tau$ . L'equazione citata è la condizione perchè  $t$  e  $t'$  siano coniugate (rispetto al cono asintoto). Ciò si dimostra subito, osservando che  $\tau$  è la retta dal punto  $X$  al punto  $\sum X_r \delta u_r = x \sum g_r \delta u_r + \sum A_{ij} l_{ij} x_i \delta u_r$ ; cosicchè  $t'$  è la retta dal punto  $x$  al punto  $x + \sum x_i d' u_i$ , ove

$$d' u_i = \sum_{rj} A_{ij} l_{rj} \delta u_r, \quad \text{cosicchè}$$

$$\sum a_{ik} d' u_i du_k = \sum l_{rk} \delta u_r du_k.$$

La equazione  $\sum g_i du_i = 0$  caratterizza quelle direzioni, tali che la tangente alla direzione corrispondente sulla ipersuperficie luogo del punto  $X$  incontra l'intersezione degli iperpiani  $\xi$  e  $\Xi$ .

Accanto alle (3) valgono formole duali:

$$(3)_{bis} \quad \Xi_i = \gamma_i \xi + \sum_i \lambda_i \xi_i.$$

Da esse si trae

$$\gamma_i = SX \Xi_i, \quad g_i = SX_i \Xi, \quad \text{dove:}$$

$$\sum \gamma_i du_i + \sum g_i du_i = dSX \Xi.$$

Quindi in particolare, se uno dei differenziali  $\sum \gamma_i du_i$  e  $\sum g_i du_i$  è esatto, è esatto anche l'altro. Teorema che si può rendere intuitivo nel modo seguente. Se  $g$  è una funzione il cui differenziale è  $\sum g_i du_i$ , allora l'iperpiano passante per  $X - gx$  e tangente alla ipersuperficie  $W$  luogo di questo punto (determinata a meno della costante additiva che figura in  $g$ ) è l'iperpiano passante per  $X - gx$  e per i punti

$$(X - gx)_i = gx_i + \sum_i l_i^i x_i.$$

Se questi punti sono indipendenti, esso passa per tutti i punti  $x_i$ , cioè passa per l'intersezione degli iperpiani  $\xi$  e  $\Xi$ . Viceversa, se esiste una ipersuperficie  $W$  posta in corrispondenza biunivoca con  $V_n$  e

tale che un punto di  $W$  stia sulla retta  $(x, X)$ , mentre l'iperpiano tangente passi per l'intersezione degli iperpiani omologhi  $\xi, \Xi$ , il differenziale  $\Sigma g_i du_i$  è esatto. Ma, poichè le ipotesi fatte sono autoduali, ne segue che anche  $\Sigma \gamma_i du_i$  è esatto, come avevamo già provato per via analitica.

### § 108. — Alcune generalizzazioni.

La precedente teoria si può generalizzare alle varietà di  $\infty^n$  elementi, ciascuno composto di un punto  $x$  e di un corrispondente iperpiano  $\xi$  che passa per  $x$ , dipendenti da  $n$  parametri  $u_i$  e soddisfacenti alle:

$$S\xi x = S\xi x_i = S\xi_i x = 0,$$

anche quando lo spazio ambiente è a  $n + d + 1$  dimensioni con  $d > 0$ . (Per  $d = 0$  si ritorna alla teoria delle ipersuperficie). Pongasi

$$F_2 = S\xi d^2 x = -Sd\xi dx = Sx d^2 \xi = \Sigma a_{rs} du_r du_s,$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2} S(d x d^2 \xi - d \xi d^2 x) = \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t.$$

Moltiplicando le  $x$  per uno stesso fattore  $\rho$ , le  $\xi$  per un fattore  $\sigma$ , i nostri elementi restano immutati, e le forme  $F_2, \Phi_3$  si mutano in  $\rho\sigma F_2, \rho\sigma\Phi_3 + \frac{3}{2}(\sigma d\rho - \rho d\sigma)F_2 = \rho\sigma \left[ \Phi_3 + \frac{3}{2}F_2 d \log \frac{\rho}{\sigma} \right]$ .

Nel sistema lineare  $\Phi_3 + F_2 \Sigma \lambda_i du_i$  potremmo scegliere una forma  $F_3$  apolare ad  $F_2$ , almeno se (come supporremo d'ora in poi) il discriminante  $A$  di  $F_2$ , è diverso da zero. Ma generalmente non si possono, se  $d > 0$ , determinare, come per le ipersuperficie, i fattori  $\rho, \sigma$  in modo che  $\Phi_3$  coincida con  $F_3$ , ossia non potremo più scrivere le relazioni di apolarità tra  $\Sigma a_{rst} du_r du_s du_t$  ed  $F_2$ . Per definire un punto analogo al punto  $X$ , dovremo per-

ciò accontentarci di definirlo come uno dei punti che soddisfano alle:

$$S\xi X = 1 \quad S\xi_i X = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Se  $X$  è una soluzione di queste equazioni, le altre ne differiranno per una combinazione delle  $X^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, d$ ), essendo  $x, X^{(\lambda)}$   $d + 1$  punti linearmente indipendenti soddisfacenti alle:

$$S\xi X^{(\lambda)} = 0 \quad S\xi_i X^{(\lambda)} = 0,$$

e cioè posti nello spazio (pseudonormale) *caratteristico* intersezione degli iperpiani  $\xi$  e  $\xi_i$ . Si noti che l'apice  $(\lambda)$  non è qui un simbolo di calcolo assoluto. In modo correlativo si definiscano  $\Xi$  e  $\Xi^{(\lambda)}$ . Valgono equazioni del tipo:

$$x_{rs} = \Sigma a_{rst} A_{it} x_i + a_{rs} X + p_{rs} x + \Sigma_{\lambda} p_{rs}^{(\lambda)} X^{(\lambda)}$$

$$\xi_{rs} = -\Sigma a_{rst} A_{it} \xi_i + a_{rs} \Xi + \pi_{rs} \xi + \Sigma_{\lambda} \pi_{rs}^{(\lambda)} \Xi^{(\lambda)}.$$

Diciamo che due tali varietà  $V_n, V'_n$  di elementi in corrispondenza biunivoca sono *proiettivamente applicabili in due punti omologhi*  $A, A'$ , se, *proiettando dallo spazio caratteristico di  $V_n$  i piani osculatori in  $A$  alle curve di  $V_n$  uscenti da  $A$ , e dallo spazio caratteristico di  $V'_n$  i piani osculatori in  $A'$  alle curve omologhe di  $V'_n$  uscenti da  $A'$ , si trovano stelle collineari.*

Vale il seg. teorema di Čech, per la cui dimostrazione (affatto simile a quella da noi data per le ipersuperficie) rinviamo alla Mem. del Čech più volte citata:

*Due varietà  $V_n$  e  $V'_n$  sono proiettivamente applicabili, se hanno uguale elemento lineare proiettivo  $F_3:F_2$ . Ne segue che, in caso affermativo, anche le varietà correlative sono proiettivamente applicabili tra loro.*

§ 109. — Le superficie  $V_2$  non paraboliche in  $S_4$   
e la loro prima forma fondamentale.

Diamo un altro esempio del modo con cui i metodi svolti in questo libro (\*) si possono applicare ad altri tipi di varietà iperspaziali, studiando le varietà  $V$  di punti a due dimensioni contenute in uno spazio a quattro dimensioni, in cui  $x, y, z, t, w, o, \xi, \eta, \zeta, \tau, \omega$  sono coordinate non omogenee di punto o di iperpiano. La  $V$  sia definita dando queste in funzione di due parametri  $u = u_1$  e  $v = u_2$ . Soli iperpiani tangenti sono gli  $\infty^1$  iperpiani soddisfacenti a

$$(1) \quad S\xi x = S\xi x_1 = S\xi x_2 = 0.$$

Cerchiamo se tra essi ve ne sono di quelli bitangenti, cioè tangenti in due punti  $x$  ed  $x + dx$ , così chiamando gli iperpiani soddisfacenti alle (1) e alle:

(\*) I risultati di questo e dei seg. §§ sono dovuti al Fubini. Questi in altre due Note: *Nuove ricerche di geom. proiettivo-differenziale* (Rend. della R. Acc. dei Lincei ser. 5 vol. 29<sub>2</sub>) e *I differenziali controvarianti* (ibidem) si propone di esaminare come i metodi svolti in questo libro si possano applicare alla varietà  $V_r$  luogo di punti contenute in uno spazio  $S_{n+1}$  ad  $n+1$  dimensioni per  $2 \leq r < n$ . Uno dei metodi proposti è di studiare l'insieme delle proiezioni di  $V_r$  sugli  $S_{r+1}$  di  $S_{n+1}$ , proiezioni che in  $S_{r+1}$  sono ipersuperficie; le forme  $F_2$  ed  $F_3$  per queste dipendono dalla proiezione eseguita; e perciò, data  $V_r$ , non sono determinate, ma descrivono sistemi lineari di forme. L'estensione duque si ottiene sostituendo a una coppia di forme  $F_2$  ed  $F_3$  la coppia di due sistemi lineari di forme quadratiche e cubiche, la cui teoria è ancora da costruire.

Si potrebbe anche cercare di costruire una teoria che assuma a punto di partenza delle forme isolate; ma non sempre si trova facilmente come prima forma una forma differenziale quadratica. Si presentano di solito invece forme di grado superiore al secondo. Se quindi non si riesce, coi metodi della teoria delle forme, a dedurre delle forme covarianti quadratiche, bisognerebbe costruire un calcolo assoluto rispetto a forme di grado maggiore di 2. Cosa molto complicata, perchè si trovano formole in cui compare a denominatore lo Hessiano della forma considerata.

$$S\xi(x + dx) = S\xi(x_1 + dx_1) = S\xi(x_2 + dx_2) = 0$$

cioè alle:

$$(2) \quad S\xi x = S\xi x_1 = S\xi x_2 = S\xi dx_1 = S\xi dx_2 = 0.$$

Queste equazioni nelle  $\xi$  sono compatibili se

$$(3) \quad (x, x_1, x_2, dx_1, dx_2) = 0.$$

Questa è evidentemente un'equazione di carattere intrinseco invariante. Posto

$$(x x_1 x_2 dx_1 dx_2) = \Sigma b_{rs} du_r du_s,$$

si debbono distinguere due casi:

$\alpha$ ) Il caso (*parabolico*) in cui  $B = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$ , che noi per brevità trascuriamo:

$\beta$ ) Il caso generale in cui  $B \neq 0$ . Cominciamo ad occuparci di questo, ponendo:

$$\frac{(x x_1 x_2 dx_1 dx_2)}{\sqrt{|B|}} = \Sigma a_{rs} du_r du_s = F_2$$

il cui discriminante  $A$  vale  $B: |B|^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{B}$ .

Questa forma è propriamente intrinseca, è invariante per trasformazioni a modulo +1, cambia di segno per collineazioni a modulo -1, si moltiplica per  $\rho^{\frac{5}{3}}$ , se moltiplichiamo le  $x, y, \dots$  per uno stesso fattore positivo  $\rho$ . È utile osservare però che noi potremmo trascurare le collineazioni a modulo negativo anche perchè, cambiando di segno tutti i coefficienti di una collineazione, questa non muta, mentre il suo modulo cambia di segno.

Le due direzioni soddisfacenti alla  $F_2 = 0$  sono le direzioni corrispondenti ai due iperpiani bitangenti, che noi indicheremo con  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$ .

Il fascio  $\lambda \xi^{(1)} + \mu \xi^{(2)}$  è il fascio degli iperpiani  $S_2$  tangenti;

il suo sostegno è il piano  $S_2$  tangente. Un iperpiano tangente incontra la superficie  $V_2$  data nelle due direzioni determinate da

$$0 = S(\lambda \xi^{(1)} + \mu \xi^{(2)}) d^2 x = -\lambda S d \xi^{(1)} dx - \mu S d \xi^{(2)} dx = \\ = \lambda S x d^2 \xi^{(1)} + \mu S x d^2 \xi^{(2)}.$$

Al variare di  $\lambda$ ,  $\mu$ , questa coppia descrive un' involuzione, i cui raggi doppi sono le direzioni definite da  $F_2 = 0$ , che si ottengono ponendo  $\lambda = 0$  oppure  $\mu = 0$ . Infatti (p. es. per  $\mu = 0$ ) si ha la coppia

$$S \xi^{(1)} d^2 x = S \xi^{(1)} (x_{uu} du^2 + 2 x_{uv} du dv + x_{vv} dv^2) = 0.$$

Ma il primo membro è un quadrato perfetto; infatti la direzione corrispondente su  $V_2$  a  $\xi^{(1)}$  annulla  $S \xi^{(1)} dx_1 = S \xi^{(1)} (x_{uu} du + x_{uv} dv)$  e  $S \xi^{(1)} dx_2 = S \xi^{(2)} (x_{vv} dv + x_{uv} du)$ , cioè annulla le derivate (rispetto a  $du$  o  $dv$ ) del primo membro della equazione considerata.

Quindi: Mentre un iperpiano generico tangente in un punto generico  $O$  di  $V_2$  incontra  $V_2$  in una linea che in  $O$  ha un punto doppio, i soli iperpiani  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  la incontrano in una linea che in  $O$  ha un cuspidale, e si dicono perciò iperpiani cuspidali.

Così si possono chiamare cuspidali (principali, caratteristiche) le linee di  $V_2$  per cui  $F_2 = 0$ . Esse formano 2 sistemi di  $\infty^1$  linee ciascuno, e sono in qualche modo l' analogo delle asintotiche di una superficie dello spazio ordinario.

Ancora una osservazione sulla forma  $F_2$ , che noi assumeremo a base di un calcolo assoluto. I 6 punti  $x, x_1, x_2, x_{11}, x_{12}, x_{22}$  non possono essere linearmente indipendenti, perchè punti di un  $S_4$ . Tra essi intercederà pertanto una relazione lineare completamente determinata (a meno di un fattore inessenziale). Perchè se ne intercedessero due, allora p. es. le  $x_{uu}, x_{vv}$  sarebbero combinazioni lineari di  $x, x_u, x_v, x_{uv}$ ; altrettanto avverrebbe di  $dx_u, dx_v$ ; e quindi le  $b_{rs}$  sarebbero tutte nulle, mentre qui si suppone  $B \neq 0$ . Tale relazione lineare si trova subito. Aggiungendo alla matrice  $(x x_u x_v x_{11} x_{12} x_{22})$  una riga uguale alla prima, si ha un determinante di sesto ordine con due righe uguali e quindi identicamente nullo. Sviluppandolo secondo gli elementi della riga aggiunta si trova

$$(x x_u x_v x_{11} x_{12}) x_{22} - (x x_1 x_2 x_{11} x_{22}) x_{12} + (x x_1 x_2 x_{12} x_{22}) x_{11} - \\ - (x x_1 x_{11} x_{12} x_{22}) x_2 + (x x_2 x_{11} x_{12} x_{22}) x_1 - (x_1 x_2 x_{11} x_{12} x_{22}) x = 0$$

cioè, dividendo per

$$A \sqrt[3]{|B|} = \varepsilon \sqrt[3]{B^2} \quad (\varepsilon = \text{sgn } A)$$

$$(4) \quad A_{22} x_{22} + 2 A_{12} x_{12} + A_{11} x_{11} + l^{(1)} x_1 + l^{(2)} x_2 + m x = 0$$

ove le  $l, m$  sono definite dalle:

$$m = -\varepsilon (x_1 x_2 x_{11} x_{12} x_{22}) : \sqrt[3]{B^2}$$

$$l^{(1)} dv - l^{(2)} du = \varepsilon (x dx x_{11} x_{12} x_{22}) : \sqrt[3]{B^2}$$

(Notisi che  $(x dx x_{11} x_{12} x_{22}) : \sqrt[3]{|B|}$  è un' espressione intrinseca).

Se ne deduce subito che le linee principali coincidono con le caratteristiche dell' equazione cui soddisfano le coordinate dei punti della  $V_2$ : ciò che spiega perchè a tali linee si dia anche il nome di linee caratteristiche.

Assunte a linee  $u, v$  le linee cuspidali, si ha  $a_{11} = a_{22} = 0$ , e  $x_{uv} = x_{12}$ ; e tale equazione diventa:

$$(5) \quad 2 A_{12} x_{uv} + l^{(1)} x_1 + l^{(2)} x_2 + m x = 0.$$

Gli iperpiani cuspidali  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  diventano l' uno l' iperpiano

$$(x x_u x_v x_{uv}) \text{ passante per i punti } x, x_u, x_v, x_{uv}$$

l' altro iperpiano

$$(x x_u x_v x_{vv}) \text{ passante per i punti } x, x_u, x_v, x_{vv}.$$

Ciò rende evidente che: Gli iperpiani cuspidali sono quegli iperpiani tangenti che osculano (hanno un contatto tripunto con) le linee cuspidali. I due piani  $S_2$  osculatori alle linee cuspidali di un sistema in due punti consecutivi di una linea cuspidale dell' altro sistema giacciono in un iperpiano cuspidale. Infatti i piani oscula-

tori in un punto  $x$  e in un punto  $x + x_v dv$  alle linee  $v = \text{cost.}$  uscenti da essi sono i piani l'uno dei punti  $x, x_u, x_{uu}$ , l'altro dei punti  $x + x_v dv, x_u + x_{uv} dv, x_{uu} + x_{uuv} dv$ . In virtù della (5) e della equazione che se ne deduce derivando rispetto ad  $u$ , si riconosce che questi punti giacciono tutti nell'iperpiano dei punti  $x, x_u, x_v, x_{uu}$ .

Poichè le proiezioni  $V'_2$  di  $V_2$  su un  $S_3$  hanno in questo  $S_3$  per coordinate di un loro punto quattro combinazioni lineari a coefficienti costanti delle  $x, y, z, w$ , che ancora soddisferanno alle (4) o (5), si ha: *Alle linee cuspidali o caratteristiche di  $V_2$  corrisponde su una superficie di  $S_3$ , che dalle  $V_2$  si ottenga con una proiezione, un sistema coniugato.*

*Le tangenti alle linee cuspidali di un sistema in due punti consecutivi delle linee cuspidali dell'altro sistema [p. es. la retta dei punti  $x, x_1$  e la retta dei punti  $x + x_2 dv, x_1 + x_{12} dv$ ] giacciono nel piano  $S_2$  tangente (piano dei punti  $x, x_u, x_v$ ) e perciò si incontrano in un punto. Altrettanto dicasi per le tangenti alle linee cuspidali dell'altro sistema. I due punti  $2A_{12}x_1 + l^{(2)}x, 2A_{12}x_2 + l^{(1)}x$  così ottenuti sono quelli che si ottengono da  $x$  mediante la trasformazione di Laplace applicata alla (5). Essi generano pertanto due superficie, trasformate di Laplace della data, tra cui intercede corrispondenza delle linee principali.*

Risultati correlativi si ottengono per i sistemi  $W_2$  di  $\infty^2$  iperpiani.

*Per ogni iperpiano  $\pi$  di  $W$  esistono  $\infty^1$  punti di contatto posti su una retta. Da ognuno di questi punti  $P$  escono due iperpiani di  $W$  infinitamente vicini a  $\pi$ ; cioè il cono circoscritto a  $W$  da uno di questi punti  $P$  ha  $\pi$  come iperpiano bitangente. I due iperpiani citati coincidono per due sole posizioni  $P'$  e  $P''$  del punto  $P$ : cioè i coni circoscritti da  $P'$  o da  $P''$  a  $W$  hanno, potremmo dire,  $\pi$  come iperpiano stazionario (\*). Possiamo definire (per dualità) le sviluppabili principali ecc. ecc.*

Applichiamo questi risultati alle due varietà  $W^{(1)}$  e  $W^{(2)}$  descritte dagli iperpiani  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$ . Occupiamoci p. es. di

$$\xi^{(1)} = (x x_u x_v x_{uu}).$$

(\*) Cioè sono duali di una linea in cui a  $\pi$  corrisponde un punto doppio a tangenti coincidenti.

La retta di contatto corrispondente è l'intersezione di  $\xi^{(1)}, \xi_u^{(1)}, \xi_v^{(1)}$ . E, per semplicità di calcolo, scriviamo la (5) nella forma:

$$(6) \quad x_{uv} = g^{(1)}x_1 + g^{(2)}x_2 + nx.$$

Si trova, scrivendo senz'altro  $\xi$  anzichè  $\xi^{(1)}$ , e tenendo conto di questa:

$$(7) \quad \begin{cases} \hat{\xi}_u = g^{(2)}\xi + (x x_u x_v x_{uuu}) \\ \hat{\xi}_v = 2g^{(1)}\xi + (x x_u x_{vv} x_{uu}) \end{cases}$$

I punti  $x$  ed  $x_u$  giacciono pertanto in  $\hat{\xi}, \hat{\xi}_u, \hat{\xi}_v$ . Quindi: *La rigata delle rette tangenti alle linee principali  $v = \text{cost.}$  è la rigata delle rette di contatto della varietà  $W^{(1)}$  formata dai corrispondenti iperpiani principali  $\xi^{(1)}$ . E un risultato analogo vale per  $W^{(2)}$ . E si osservi che tale rigata è il luogo dei punti  $x + w x_u$  (\*) e che appunto valgono le:*

$$\begin{aligned} S\xi(x + w x_u) &= S\xi(x + w x_u)_u = S\xi(x + w x_u)_v = \\ &= S\xi(x + w x_u)_w = 0 \end{aligned}$$

*cioè che la rigata  $V_3$  formata dalle tangenti alle linee principali  $v = \text{cost.}$  ha come iperpiano tangente lungo tutta una generatrice il corrispondente iperpiano principale  $\xi^{(1)}$ .*

Si può dimostrare facilmente che le due rigate  $V_3$  sono trasformate di Laplace l'una dell'altra, e che le corrispondenti sviluppabili principali o caratteristiche corrispondono proprio alle linee principali della superficie iniziale  $V_2$ .

Infatti i sei punti  $x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{vv}, x_{uuu}$  di uno spazio a quattro dimensioni non possono essere linearmente indipendenti, e, poichè i primi cinque non sono legati da alcuna relazione lineare, l'ultimo  $x_{uuu}$  è combinazione lineare dei precedenti. Basta dunque vedere la prima delle (7), e ricordare la definizione di  $\xi^{(1)}$  e  $\xi^{(2)}$  per dedurre che  $\xi_u^{(1)}$  è combinazione lineare di  $\xi^{(1)}$  e di  $\xi^{(2)}$ ; altrettanto si trova per  $\xi_v^{(2)}$ : ciò che prova il nostro teorema.

(\*) Non si confonda con la  $w$  del § 109.

Troviamo su una generatrice di una delle nostre ipersuperficie rigate, p. es. di  $V_3^{(1)}$  i due punti principali. Essi sono i punti comuni a  $\xi$ ,  $\xi_u$ ,  $\xi_v$  e rispettivamente a  $\xi_{uu}$  od a  $\xi_{vv}$ ; cioè essi sono quei punti  $x' = x + w'x_u$  della retta di contatto che soddisfano alla:  $S\xi_{uu}x' = 0$  [oppure  $S\xi_{vv}x' = 0$ ], che, per le  $S\xi_u x' = 0$  [ $S\xi_v x' = 0$ ] è equivalente alla  $S\xi_{uu}x'_u = 0$  [oppure  $S\xi_v x'_v = 0$ ]. Il primo punto è perciò  $x' = x$  (per cui  $w' = 0$ ). Il secondo è  $x' = x_u - g^{(2)}x$ , per cui  $x'_v = g^{(1)}x_u + (n + g^{(2)})x$ . Quindi:

*I trasformati di Laplace del punto  $x$  sono insieme allo stesso punto  $x$ , i punti principali delle due ipersuperficie rigate formate dalle tangenti principali dell'uno o dell'altro sistema.*

§ 110. — La seconda forma fondamentale di una  $V_2$  in  $S_4$ .

A) La forma  $F_5$ .

Per completare la determinazione della nostra superficie occorrono altri elementi oltre la forma  $F_2$  e l'equazione (4) o (6) del § 109. Per trovarli potremmo ricorrere a semplici considerazioni analitiche, o procedere per via geometrica. Scegliamo questa seconda via. Gli  $S_2$  osculatori ad una linea  $C$  uscente da un punto  $x$  di  $V_2$  sono quelli determinati dai tre punti

$$x, \quad \Sigma x_r du_r, \quad \Sigma x_r \delta^2 u_r + \Sigma x_{rs} du_r du_s.$$

Se noi teniamo fissi  $x$  e la direzione  $du_1 : du_2$ , facendo variare la linea  $C$  uscente in questa direzione, gli  $S_2$  osculatori descriveranno lo  $S_3$  determinato dai punti

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad \Sigma x_{rs} du_r du_s$$

che noi chiameremo lo  $S_3$  osculatore nel punto  $x$  alla direzione  $du : dv$ , perchè è osculatore a tutte le curve uscenti da  $x$  in tale direzione.

*Quali sono le curve tali che lo  $S_3$  osculatore in un loro punto*

*alla loro direzione coincide con lo  $S_3$  iperosculatore alla curva? (cioè ha un contatto quadripunto con questa?).* Esse sono evidentemente le curve, per cui la forma impropriamente intrinseca

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{|A|}} (x, x_1, x_2, \Sigma x_{rs} du_r du_s, d^3 x)$$

è nulla. Questa forma vale evidentemente

$$\begin{aligned} & 3 \frac{du \delta^2 v - dv \delta^2 u}{\sqrt{|A|}} (x, x_1, x_2, x_{11} du + x_{12} dv, x_{21} du + x_{22} dv) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{|A|}} (x, x_1, x_2, \Sigma x_{rs} du_r du_s, \Sigma x_{rst} du_r du_s du_t) = \\ & = 3\sqrt{|A|} F_2 (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) + \Phi_5 \end{aligned}$$

ove:

$$(2) \quad \Phi_5 = \frac{1}{\sqrt{|A|}} (x, x_1, x_2, \Sigma x_{rs} du_r du_s, \Sigma x_{rst} du_r du_s du_t)$$

è pure una forma (impropriamente  $(*)$ ) intrinseca dipendente però dai soli differenziali primi. Essa resta, come  $F_2$ , invariata per collineazioni a modulo 1; vediamo ciò che avviene quando le  $x, y, \dots$ , si moltiplicano per uno stesso fattore  $\rho$ . La  $F_2$  si muta in  $\bar{F}_2 = \rho^{\frac{5}{3}} F_2$ . Facilmente si verifica col calcolo effettivo dei nuovi valori di  $\delta^2 u, \delta^2 v$  che il nuovo valore di

$$\sqrt{|A|} F_2 (du \delta^2 v - dv \delta^2 u)$$

è

$$\rho^{\frac{10}{3}} \sqrt{|A|} F_2 (du \delta^2 u - dv \delta^2 u) + F_2^2 R_1,$$

ove  $R_1$  è una forma di primo grado in  $du, dv$ , che dipende da  $\rho$ .

$(*)$  perchè tali sono  $\frac{1}{\sqrt{|A|}} (x, x_1, x_2, d^3 x, d^3 x)$  e  $3\sqrt{|A|} F_2 (du \delta^2 v - dv \delta^2 u)$ , di cui essa è differenza.

Poichè anche  $\frac{1}{\sqrt{|A|}}(x, x_1, x_2, d^2x, d^3x)$  resta moltiplicato per

$\rho^5 : \rho^{\frac{5}{3}} = \rho^{\frac{10}{3}}$ , troviamo che il nuovo valore di  $\Phi_5$  vale

$$\bar{\Phi}_5 = \rho^{\frac{10}{3}} \Phi_5 - 3F_2^2 R_1.$$

Cerchiamo di sostituire alla  $\Phi_5$  una forma di comportamento più semplice. Servirà ancora il metodo delle forme *apolari*, che ci ha tante volte servito in questo libro. Cerchiamo di scrivere  $\Phi_5$  nella forma:

$$\Phi_5 = F_5 + F_2 F_3 + F_2^2 F_1, (*)$$

ove  $F_5$  ed  $F_3$  siano apolari ad  $F_2$ . Poniamo:

$$X = \frac{1}{2} \Sigma A_{rs} x_{rs} = -\frac{1}{2} l^{(1)} x_1 - \frac{1}{2} l^{(2)} x_2 - \frac{m}{2} x$$

$$\Sigma \bar{x}_{rs} du_r du_s = \Sigma x_{rs} du_r du_s - X F_2, \text{ cosicchè}$$

$$\Sigma A_{rs} \bar{x}_{rs} = 0$$

(cioè la forma  $\Sigma \bar{x}_{rs} du_r du_s$  è apolare ad  $F_2$ ) e, derivando:

$$\Sigma \bar{x}_{rst} du_r du_s du_t = \Sigma x_{rst} du_r du_s du_t - F_2 dX$$

$$dX = -\frac{1}{2} l^{(1)} dx_1 - \frac{1}{2} l^{(2)} dx_2 + \text{termini in } x, x_1, x_2.$$

$$\Sigma A_{rst} \bar{x}_{rst} = 0.$$

(\*) Questa trasformazione, che io ho chiamato *divisione covariante di  $\Phi_5$  per  $F_2$* , è possibile in uno e in uno solo modo, come si vede p. es. osservando che, se  $F_2$  è scritto nella forma  $2a_{12} du dv$ , le  $F_i$  sono del tipo  $adu^4 + b dv^4$ . Se  $F_2, \Phi_5$  hanno carattere intrinseco, lo hanno pure le forme  $F_1, F_3, F_5$  così determinate (§ 4 E).

Sarà poi:

$$\begin{aligned} \Phi_5 &= \frac{1}{\sqrt{|A|}} \left( x, x_1, x_2, dx_1 du + dx_2 dv, -\frac{1}{2} l^{(1)} dx_1 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} l^{(2)} dx_2 \right) F_2 + \frac{1}{\sqrt{|A|}} (x, x_1, x_2, \Sigma x_{rs} du_r du_s, \Sigma \bar{x}_{rst} du_r du_s du_t) = \\ &= -\frac{1}{2} (l^{(2)} du - l^{(1)} dv) F_2^2 + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{|A|}} (x, x_1, x_2, \Sigma \bar{x}_{rs} du_r du_s, \Sigma \bar{x}_{rst} du_r du_s du_t). \end{aligned}$$

[Si ricordi che  $X$  è combinazione lineare delle  $x, x_1, x_2$ ]. Poichè, se  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  sono due forme apolari alla  $F_2$ , il loro prodotto si può scrivere nella forma  $\varphi_5 + \varphi_1 F_2^2$ , ove  $\varphi_5$  è apolare ad  $F_2$  (\*), ne otteniamo in conclusione (essendo  $\Sigma \bar{x}_{rs} du_r du_s$  e  $\Sigma \bar{x}_{rst} du_r du_s du_t$  apolari ad  $F_2$ ) che

$$\Phi_5 = F_1 F_2^2 + F_5,$$

ove  $F_1$  è una forma di primo grado in  $du, dv$ ,  $F_5$  una forma di quinto grado apolare ad  $F_2$ . Moltiplicando le  $x$  per un fattore positivo  $\rho$ , la  $F_1$  si trasforma in modo complicato, mentre  $F_5$  si muta semplicemente in  $\rho^{\frac{10}{3}} F_5$ , cosicchè

$$\frac{F_5}{F_2^2}$$

resta *invariato*; questa espressione è un *invariante* (improprio).

Anche qui possiamo definire delle coordinate *normali*, imponendo che il quoziente  $\Delta$  di convenienti potenze dei discriminanti di

(\*) Ciò si vede subito, riducendo  $F_2$  alla forma  $2a_{12} du dv$ .

$F_2, F_3$ , quoziente che è una espressione intrinseca, abbia un valore numerico prefissato. Sarà *anormale* il caso  $\Delta = 0$ . I valori corrispondenti  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , delle  $F_1, F_2, F_3$ , delle tre forme costituiscono un sistema di forme *intrinseco* ed *invariante* della nostra superficie. Si tratta di vedere se da esse questa è determinata.

B) Significato geometrico della  $F_5$ .

Prima di occuparci di questo problema, cerchiamo di trovare il significato geometrico della nuova forma  $F_5$ . Assumiamo coordinate non omogenee, ponendo  $w = 1$ . Chiameremo iperpiano all'infinito l'iperpiano  $w = 0$ ; e sia  $O$  un punto generico della superficie. L'iperpiano  $w = 0$  è per ora assoggettato alla sola condizione di non contenere  $O$ . Sceglieremo ad assi delle  $x, y$  le tangenti principali, a iperpiani  $z = 0$  e  $t = 0$  i corrispondenti iperpiani tangenti cuspidali. Trascurando i termini di 4° ordine varranno nell'intorno di  $O$  formole del tipo

$$z = x^2 + h_{111}x^3 + 3h_{112}x^2y + 3h_{122}xy^2 + h_{222}y^3 + \dots$$

$$t = y^2 + k_{111}x^3 + 3k_{112}x^2y + 3k_{122}xy^2 + k_{222}y^3 + \dots$$

dove le  $h, k$  sono delle costanti. Le quadriche che tagliano la  $V_2$  in una linea che in  $O$  ha un punto quadruplo sono le quadriche

$$\begin{aligned} & \lambda(t - y^2 - k_{111}xz - 3k_{112}zy - 3k_{122}xt - k_{222}yt) + \\ & + \mu(z - x^2 - h_{111}xz - 3h_{112}zy - 3h_{122}xt - h_{222}yt) + \\ & + \nu z^2 + 2\rho zt + \sigma t^2 = 0. \end{aligned}$$

Per  $\lambda = 0$  contengono l'asse delle  $y$ , per  $\mu = 0$  l'asse delle  $x$ . Nel punto  $(x', 0, 0, 0, 0, w')$  dell'asse delle  $x$  quelle delle precedenti quadriche che contengono l'asse delle  $x$  hanno come iperpiano tangente

$$x'(-k_{111}z - 3k_{122}t) + w't = 0$$

cosicchè l'iperpiano  $z = 0$  ha (se  $k_{111} \neq 0$ ) come punto di contatto  $\frac{w'}{x'} = 3k_{122}$ . Se noi scegliamo *questo punto* come punto all' $\infty$  dell'asse delle  $x$  (cioè come punto  $y = z = t = w = 0$ , punto che si poteva ancora scegliere ad arbitrio sull'asse delle  $x$ ) sarà  $k_{122} = 0$ . Così sarà  $h_{112} = 0$ , purchè a punto all' $\infty$  dell'asse delle  $y$  scegliamo (se  $h_{222} \neq 0$ ) il punto di contatto dell'iperpiano  $t = 0$  con quelle delle nostre quadriche che passano per l'asse delle  $y$ . In sostanza noi con ciò *abbiamo fissato sul piano tangente  $xy$  una retta* (la congiungente i precedenti punti di contatto, per cui facciamo passare l'iperpiano  $w = 0$ ). Prendiamo ora il piano polare del punto all' $\infty$  dell'asse delle  $x$  rispetto a quelle delle nostre quadriche che passano per l'asse delle  $y$ :

$$-2x - h_{111}z - 3h_{122}t = 0.$$

Se noi lo assumiamo a iperpiano coordinato  $x = 0$  (ciò che è lecito, com'è ben evidente) sarà  $h_{111} = h_{122} = 0$ . In modo analogo scegliendo l'iperpiano  $y = 0$ , otterremo  $k_{222} = k_{112} = 0$ . In questo modo i nostri sviluppi si riducono alla forma:

$$t = y^2 + Ax^3 + \dots \quad z = x^2 + A'y^3 + \dots$$

ove, come prima, sono trascurati i termini di quart'ordine.

Gli iperpiani  $z = 0, t = 0, x = 0, y = 0$  sono stati completamente determinati; resta solo l'*arbitrarietà dell'iperpiano  $w = 0$*  (scelto per iperpiano all' $\infty$ ), per il quale è soltanto fissata la *retta del piano tangente  $xy$ , per cui deve passare. Il punto all' $\infty$  dell'asse delle  $x$  ha come iperpiani polari rispetto alle nostre quadriche  $\lambda A'z + 2\mu x = 0$ , i quali sono il fascio di iperpiani attorno al piano  $x = z = 0$ , che, come vedremo, è osculatore a una linea principale. E analogamente dicasi del piano  $y = z = 0$ .*

Infatti  $z = 0$ , essendo un iperpiano cuspidale, contiene tre punti infinitamente vicini della corrispondente linea principale; basterà dimostrare che in  $O$  su tale linea è  $d^2x = 0$ . Troviamo l'equazione delle linee principali. Posto  $x = u, y = v$ , essa è:

$$0 = \begin{vmatrix} dz_x & dt_x \\ dz_y & dt_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2dx + \dots & 6Axdx + \dots \\ 6A'ydy + \dots & 2dy + \dots \end{vmatrix}$$

ove i termini non scritti sono binomii di primo grado in  $dx$ ,  $dy$ , i cui coefficienti sono nulli del second'ordine almeno per  $x = y = 0$ . Tale equazione è dunque

$$0 = P_{11}dx^2 + 2(1 + P_{12})dxdy + P_{22}dy^2$$

ove le  $P$  sono infinitesime almeno del second'ordine per  $x = y = 0$ . Differenziando si avrà, trascurando i termini nulli per  $x = y = 0$

$$dxd^2y + dyd^2x = 0.$$

Quindi una direzione principale è  $dx = 0$ , e per la linea principale corrispondente vale la  $d^2x = 0$ , come volevamo provare. (Che anche  $z = 0$  sia osculatore, si può provare anche osservando che, trascurando i termini nulli per  $x = y = 0$  si ha:  $d^2z = 2dx^2$ , che è nullo per  $dx = 0$ ). Si noti che è anche

$$(3) \quad F_2 = Q_{12}dx^2 + 2(1 + Q_{12})dxdy + Q_{22}dy^2,$$

ove le  $Q$  sono pure infinitesimi del second'ordine almeno per  $x = y = 0$ , i simboli di Christoffel invece almeno del primo. Nel punto  $O$  pertanto  $\delta^2x = d^2x$ ,  $\delta^2y = d^2y$ . Ricordando questo, se ne deduce che le derivate seconde covarianti di  $z$  e di  $t$  rispetto  $x = u = u_1$  ed  $y = v = u_2$  coincidono in  $O$  con le ordinarie. E, poichè

$$d^3z = z\delta^3x + z_y\delta^3y + \Sigma z_{rs}du_r\delta^2u_s + \Sigma z_{rst}du_rdu_sdu_t,$$

$$z_x = z_y = 0 \quad (\text{nel punto } O)$$

e la stessa formola vale, sostituendo a  $\delta^2u_s$  le  $d^2u_s$ , alle derivate covarianti le ordinarie, avremo che in  $O$  anche le derivate terze covarianti di  $z$  e di  $t$  rispetto ad  $x = u_1$  ed  $y = u_2$  coincidono con le ordinarie. Si calcola così subito che, a meno di un fattore puramente numerico, è, nel punto  $O$ :

$$F_5 = Adx^5 - A'dy^5.$$

L'intersezione della nostra superficie coll'iperpiano  $x - \mu y = 0$

è una curva, che dall'iperpiano tangente  $z + \lambda t = 0$  è intersecata nei punti ove

$$x^2 + \lambda y^2 + A'y^3 + \lambda Ax^3 + \dots = 0, \quad \text{ossia:}$$

$$0 = (\lambda + \mu^2)y^2 + (A' + \lambda A\mu^3)y^3 + \dots$$

Avremo un punto *quadruplo* d'intersezione in  $O$  se

$$\lambda + \mu^2 = 0 \quad A' + \lambda A\mu^3 = 0$$

ossia

$$\lambda = -\mu^2 \quad A' - A\mu^5 = 0.$$

*Gli iperpiani  $x - \mu y = 0$  tagliano  $V_2$  in una curva che ha con un iperpiano tangente (precisamente con  $z - \mu^2 t = 0$ ) una intersezione quadrupla soltanto quando l'iperpiano considerato passa per una delle 5 direzioni che annullano  $F_5$ .*

Oss. Nel ragionamento precedente si è escluso che  $k_{111} = 0$  oppure  $h_{222} = 0$ . Se fosse  $k_{111} = 0$  le nostre quadriche ( $\mu = 0$ ) che passano per l'asse delle  $x$  avrebbero tutte sull'asse delle  $x$  per punto doppio il punto

$$x = \frac{1}{3k_{122}}.$$

Dunque anche in questo caso si può rendere  $k_{122}$  nullo prendendo questo punto doppio a punto all'∞ dell'asse delle  $x$ . Altrettanto dicasi di  $h_{112}$ . Se  $k_{111} = 0$  oppure  $h_{222} = 0$  (caso in cui quelle delle nostre quadriche che passano per l'asse delle  $x$  o per l'asse delle  $y$  hanno un punto doppio) si ha questa unica differenza che la  $F_5$  si riduce ad una quinta potenza od è identicamente nulla (se  $k_{111} = h_{222} = 0$ ): in questo caso analogo a quello delle rigate e delle quadriche dello spazio ordinario, il discriminante di  $F_5$  è nullo (caso anormale, perchè non si possono coi metodi precedenti normare le coordinate di un punto della  $V_2$ ). Abbiamo così trovato un primo carattere geometrico delle superficie anormali.

*I due punti scelti come punti all'∞ degli assi delle  $x$ ,  $y$  (punti di contatto di  $z = 0$  e  $t = 0$  con certe quadriche) non*

sono che i due punti trasformati di Laplace del punto  $x$ , (sopra trovati per tutt'altra via). Infatti nel sistema di coordinate testè definito tali punti all'  $\infty$  hanno uno per coordinate  $x_u, y_u, z_u, t_u, w = 0$  e l'altro  $x_v, y_v, z_v, t_v, 0$  (tutte calcolate nel punto  $O$  della  $V_2$ ). Basterà dimostrare che nel punto  $O$  i coefficienti  $g$  delle (6) del § 109 sono nulli; e, poichè nel punto  $O$  si ha  $x_u = 1, y_v = 1, x_v = y_u = 0$ , basterà provare che ivi  $x_{uv} = y_{uv} = 0$ . Si avranno infatti in  $O$  due sviluppi

$$x = u + \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + \dots \quad y = v + pu^2 + 2quv + rv^2 + \dots$$

Sostituendo nella  $F_2$ , data dalla (3), i coefficienti di  $du^2$  e di  $dv^2$  devono risultare identicamente nulli. Ora tali coefficienti si trovano, con la materiale sostituzione

$$4(pu + qv) + \dots, \quad 4(\beta u + \gamma v) + \dots,$$

dove i termini trascurati sono del secondo grado. Perciò in particolare  $p = q = \beta = \gamma = 0$ , da cui segue appunto che per  $u = v = 0$  si ha  $x_{uv} = y_{uv} = 0$ . Segue anche  $x_{vv} = y_{uu} = 0$ , cioè che il piano  $x = z = 0$  è osculatore alla linea  $u = 0$ , il piano  $y = t = 0$  alla  $v = 0$ , come già sapevamo. Possiamo dedurre un nuovo modo di definire geometricamente gli iperpiani  $x = 0, y = 0$ . Così p. es. l'iperpiano  $x = 0$  è un iperpiano passante per il piano osculatore della  $v = 0$ ; se  $x' = 0$  è uno qualsiasi degli iperpiani passanti per esso, gli altri sono  $x' + \lambda z = 0$ . Quello da noi scelto per iperpiano  $x = 0$  è l'unico tale che  $z - x^2 = 0$  sia una quadrica, la cui intersezione con  $V_2$  sia una linea avente in  $O$  un punto triplo, le cui tangenti coincidono con la direzione principale  $y = 0$  (con l'asse delle  $x$ ). Le quadriche  $z - x^2 = 0$ , o anche più generalmente le quadriche  $\lambda z^2 + 2\mu zt + \nu z^2 + z - x^2 = 0$  sono facilmente definibili per via geometrica.

§ 111. — Le equazioni differenziali fondamentali. (F)

Per risalire dalle forme  $F_1, F_2, F_5$  alle superficie dovremo al solito ricorrere ad equazioni differenziali, le cui condizioni d'integrabilità daranno tutte le relazioni intercedenti tra le forme.

Noi ci limiteremo a studiarle nel caso che le  $u, v$  siano le linee principali, scrivendole nella forma:

$$(1) \quad \begin{cases} x_{uuu} = A x_{vv} + B x_{uu} + p x_u + q x_v + r x \\ x_{vvv} = B' x_{vv} + A' x_{uu} + \kappa x_u + \pi x_v + \rho x \\ x_{uv} = h x_u + k x_v + l x. \end{cases}$$

Notiamo, che posto  $\alpha_{12} = e^\alpha$ , si ha

$$(x x_u x_v x_{uu} x_{vv}) = 2e^{3\alpha}$$

donde, derivando rispetto  $u$ , oppure rispetto  $v$ :

$$(2) \quad (2k + B) = 3\alpha_u, \quad (2h + B') = 3\alpha_v.$$

D'altra parte

$$F_1 F_2^2 + F_5 = e^{-\alpha} (x, x_1, x_2, x_{uu} du^2 + x_{vv} dv^2, \Sigma x_{,ii} du, dv, du, dv).$$

Ora

$$x_{111} = \frac{\partial x_{11}}{\partial u} - 2\alpha_u x_{11} = \frac{\partial}{\partial u} (x_{uu} - \alpha_u x_u) - 2\alpha_u (x_{uu} - \alpha_u x_u)$$

$$x_{112} = \frac{\partial x_{11}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (x_{uu} - \alpha_u x_u) = \frac{\partial}{\partial v} (x_{uv}) - \alpha_{uv} x_u - \alpha_u x_{uv}$$

$$x_{221} = \frac{\partial}{\partial v} (x_{vv}) - \alpha_{vv} x_v - \alpha_v x_{vv}$$

$$x_{222} = \frac{\partial}{\partial v} (x_{vv} - \alpha_v x_v) - 2\alpha_v (x_{vv} - \alpha_v x_v).$$

Quindi:

$$F_1 F_2^2 + F_5 = 2e^{2\alpha} \times$$

$$\left| \begin{array}{cc} du^2 & dv^2 \\ (B - 3\alpha_u) du^3 + 3h du^2 dv + A' dv^3 & A du^3 + 3k du dv^2 + (B' - 3\alpha_v) dv^3 \end{array} \right|$$

$$(3) \quad F_1 F_2^2 + F_5 = 2 e^{2\alpha} [A du^5 - A' dv^5] + \\ + 2 e^{2\alpha} du^2 dv^2 [\{3(k + \alpha_u) - B\} du + \{B' - 3(h + \alpha_v)\} dv].$$

Assegnare  $F_1, F_5, F_2$  equivale in virtù delle (2) e (3) ad assegnare le  $A, A', B, B', h, k$ . Dimosteremo che possiamo calcolare i residui coefficienti  $l, p, q, r, \pi, \kappa, \rho$ . Ora derivando l'ultima delle (1) si deduce, tenendo conto della prima:

$$x_{uuu} = h A x_{vv} + (2h_u + l + h B + h k) x_{uu} + \\ + (h p + \lambda) x_u + (h q + \mu) x_v + (h r + \nu) x$$

ove  $\lambda, \mu, \nu$  sono espressioni formate con le  $h, k, l$  e loro derivate, che ci è inutile scrivere esplicitamente.

Dalla prima delle (1) si deduce, tenendo conto delle altre:

$$x_{uuu} = (B_v + A A' + B h) x_{uu} + (A_v + A B' + q) x_{vv} + \\ + (A \kappa + p_v + p h + \tau) x_u + (A \pi + q_v + p k + r + z) x_v + \\ + (A \rho + r_v + p l + w) x$$

ove  $\tau, z, w$  sono formate esclusivamente con le  $A, B, A', B', h, k, l$ . Confrontando successivamente i coefficienti di  $x_{uu}, x_{vv}, x_u, x_v, x$ , si determinano l'uno dopo l'altro i valori di

$$l \quad q \quad p_v + A \kappa \quad A \pi + p k + r \quad A \rho + r_v + p l - h r.$$

Similmente dal calcolo di  $x_{vvu}$  si deducono i valori

$$l \quad \kappa \quad \pi_u + A' q \quad A' p + \pi h + \rho \quad A' r + \rho_u + \pi l - h \rho.$$

Cosicchè in conclusione restano determinati

$$(4) \quad l, q, \kappa, p_v, \pi_u, r + A \pi + p k, \rho + A' p + \pi h, \\ A \rho + r_v + p l - h r, A' r + \rho_u + \pi l - h \rho$$

In particolare sarà

$$r = -A \pi - p k + M \quad \rho = -A' p - \pi h + N$$

ove  $M, N$  sono note; sostituendo questi valori di  $r, p$  nelle ultime delle (4), che sono pure note, si trovano, notando che  $p_v, \pi_u$  sono noti, i valori di

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} -p(-A A' + l - k_v + h k) + (A \pi)_v = p(+A A' + \\ + I) + (A \pi)_v \\ -\pi(-A A' + l - h_u + h k) + (A' p)_u = \\ = \pi(A A' + J) + (A' p)_u, \end{array} \right.$$

ove  $I, J$  sono gli invarianti dell'ultima delle (1). Insieme ai valori già noti di  $\pi_v, p_u$  ciò basta generalmente a determinare  $\pi, p$ , tutt'al più a meno di costanti arbitrarie.

Senza entrare in particolari di questa ricerca, vogliamo piuttosto caratterizzare le superficie *anormali* (con  $A = 0$  oppure  $A' = 0$ ). Se per es.  $A = 0$ , la prima delle (1) dà

$$(6) \quad x_{uuu} = B x_{uu} + p x_u + q x_v + r x.$$

Se  $q = 0$ , le  $v = \text{cost.}$  apparterranno ad un piano  $S_2$ , perchè ogni  $S_2$  osculatore (contenente  $x, x_u, x_{uu}$ ) è anche iperosculatore (contiene  $x_{uuu}$ ). Se  $q \neq 0$ , si ricavi dalla (6) il valore di  $x_v$  e lo si sostituiscia nella equazione che si deduce derivando la stessa (6) rispetto ad  $u$ , e sostituendo ad  $x_{uv}$  il valore dato dall'ultima delle (1). Si troverà un'equazione lineare omogenea che lega  $x, x_u, x_{uu}, x_{uuu}$  ed  $x_{uuuu}$ . Le cinque soluzioni  $x, y, z, t, w$  di questa equazione non identica del quarto ordine sono dunque legate da un'equazione

$$(7) \quad r_1 x + r_2 y + r_3 z + r_4 t + r_5 w = 0$$

dove le  $r$  sono funzioni della sola  $v$ ; alla stessa equazione soddisferebbero le

$$\frac{\partial^i x}{\partial u^i}, \frac{\partial^i y}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial^i w}{\partial u^i} \quad \text{per } i = 1, 2, 3$$

e quindi per (6) le  $x_v, \dots, w_v$ . Sarebbe pertanto anche

$$(8) \quad \frac{dr_1}{dv} x + \frac{dr_2}{dv} y + \dots + \frac{dr_5}{dv} w = 0.$$

Confrontando le (7), (8) si ha che due casi sono possibili:

1°) Le  $\frac{dr_i}{dv}$  sono proporzionali alle  $r_i$ ; sopprimendo un fattore comune, sarebbe  $r_i = \text{cost.}$ , e quindi la nostra  $V_2$  apparterebbe ad un  $S_3$ , caso che abbiamo escluso.

2°) Le (7), (8) sono equazioni distinte, e rappresentano perciò un  $S_2$  che contiene la corrispondente  $v = \text{cost.}$  Ritorniamo cioè al caso  $q = 0$ ; del resto avevamo sopra già calcolato il valore di  $q$ ; da quel calcolo si deduce appunto che, se  $A = 0$ , anche  $q = 0$ . In conclusione dunque: *Le superficie anormali sono tutte e sole quelle per cui uno dei sistemi di linee principali è formato da linee piane (di un  $S_2$ ). Se la forma  $F_5$  fosse identicamente nulla ( $A = A' = 0$ ), ciò avverrebbe per entrambi i sistemi di linee principali, e viceversa. (\*)*

(\*) Per l'estensione del concetto di superficie proiettivamente applicabili cfr. le Note del Dr. Bersano:

«Contatti del secondo e del terzo ordine tra varietà iperspaziali». Rend. Istituto Lombardo Vol. LVI (1923) e «Sulla applicabilità proiettiva di una particolare classe di varietà iperspaziali» Rend. Lincei, Vol. XXXII serie V (1923).

In dette Note si dimostrano i seguenti teoremi:

I. Condizione necessaria e sufficiente perchè due varietà  $V_k$  di  $S_n$  siano proiettivamente applicabili del secondo (del terzo) ordine è che - essendo le due  $V_k$  riferite biunivocamente in modo che a punti omologhi spettino eguali valori delle coordinate curvilinee - siano collineari le configurazioni degli  $S_2$  [ $S_3$ ] osculatori - in punti omologhi - a curve omologhe. (Questo teorema costituisce un'estensione del teorema di Čech di cui al § 20 B).

II. Condizione necessaria e sufficiente perchè due  $V_k$  di  $S_n$  - che siano ciascuna soluzione di una e una sola equazione alle derivate parziali del secondo ordine - siano proiettivamente applicabili del 2° ordine, è che i

### § 112. — Superficie rigate appartenenti ad uno spazio ad un numero impari di dimensioni. (Č)

Questo e il seguente § riassumono i metodi del Čech per lo studio delle superficie rigate.

Consideriamo una rigata  $R$  appartenente allo spazio  $S_r$  ad  $r = 2n + 1$  dimensioni. Per definire  $R$ , partiamo da due curve  $C_y$  e  $C_z$ , in corrispondenza biunivoca, le coordinate  $y$  e  $z$  dei punti di  $C_y$  e  $C_z$  essendo funzioni di un parametro  $v$ . Indichiamo con apici le derivate rispetto a  $v$ . Il punto generico  $x$  di  $R$  è

$$(i) \quad x = t_1 y + t_2 z.$$

coni caratteristici uscenti da punti omologhi siano generati da direzioni omologhe. (La corrispondenza tra le due  $V_k$  è la stessa di quella del teor. I).

Ne segue che, perchè due  $V_2$  di  $S_4$  siano proiettivamente applicabili del secondo ordine, occorre e basta che le due forme  $F_2$  differiscano soltanto per un fattore.

In quanto alla applicabilità del 3° ordine, essa trae di conseguenza la collinearità delle due  $V_2$ . Infatti se due  $V_2$  ( $V'$ ,  $V''$ ) sono proiettivamente applicabili del 3° ordine, ad ogni punto  $O$  di  $V'$  si potrà associare una  $V'''$  collineare con  $V''$  e avente in  $O$  un contatto del terzo ordine con  $V'$ .  $V'''$  e  $V''$  saranno perciò, in  $O$ , legate dalle:

$$x' = x'''; \quad x'_r = x'''; \quad x'_{rs} = x'''; \quad x'_{rst} = x'''; + \chi_{st} x'' + \chi_{rt} x'' + \chi_{rs} x'' \quad (r, s, t = 1, 2) \text{ e analoghe}$$

dove  $x', \dots; x'', \dots$ , sono le coordinate non omogenee rispettivamente di  $V'$  e  $V'''$  ed è posto:  $x_{rst} = \frac{\partial^3 x}{\partial u_r \partial u_s \partial u_t}$ . Ne segue che le forme  $f_1, f_2,$

$f_5$  costruite per  $V'$  coincidono con quelle costruite per le  $V'''$ . Ma  $V''$  e  $V'''$  sono collineari, e nella I nota è anzi dimostrato che esistono infinite collineazioni che mutano  $V''$  in una  $V'''$  avente in  $O$  un contatto del 3° ordine con  $V'$ . Tra queste omografie scegliamo quelle che sono unimodulari. Ne seguirà che  $V'$  e  $V''$  hanno le stesse forme fondamentali  $f_1, f_2, f_5$ . Se ne trae ancora (teor. I) che: Due  $V_2$  di  $S_4$  sono collineari se sono tali le configurazioni degli  $S_2$  osculatori a curve omologhe uscenti da punti omologhi.

Supponiamo, limitandoci a tale caso *generale*, che il determinante

$$(y x y' z' \dots y^{(n)} z^{(n)})$$

non sia identicamente zero, ed, escludendo gli eventuali punti isolati in cui tale determinante svanisce, scegliamo il parametro  $v$  in modo che sia identicamente

$$(2) \quad (y z y' z' \dots y^{(n)} z^{(n)}) = \omega = \pm 1.$$

La teoria che andiamo ad esporre è la generalizzazione del metodo già usato al Cap. IV nel caso particolare  $n = 1$ . I punti  $y, z, \dots, y^{(n)}, z^{(n)}$  essendo linearmente indipendenti, le coordinate di  $y$  e  $z$  soddisfano alle equazioni differenziali

$$(3) \quad y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}, \quad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^n c_i y^{(i)} + d_i z^{(i)}.$$

Derivando (2) si deduce che

$$(4) \quad a_n + d_n = 0.$$

È evidente che l'iperpiano

$$(5) \quad \xi = (y z y' z' \dots y^{(n-1)} z^{(n-1)}, t_1 y^{(n)} + t_2 z^{(n)})$$

contiene gli  $S_n$  osculatori a tutte le curve di  $R$  passanti per il punto (1) di  $R$ . Esso si dice pertanto l'iperpiano  $n$  — tangente (o  $n$  — osculatore) di  $R$  in  $x$ . Si dicono, con Bompiani, *quasiasintotiche* le curve di  $R$  tali che, in ogni loro punto, l'iperpiano  $n$  — tangente  $\xi$  contenga l' $S_{n+1}$  osculatore alla curva. Proprietà caratteristica di una quasiasintotica è evidentemente

$$S \xi \frac{d^{n+1}}{dv^{n+1}} (t_1 y + t_2 z) = S \xi [t_1 y^{(n+1)} + t_2 z^{(n+1)} + (n+1) (t_1' y^{(n)} + t_2' z^{(n)})] = 0.$$

Sostituendovi i valori di  $y^{(n+1)}, z^{(n+1)}$  dati dalle equazioni differenziali (3) ed il valore (5) di  $\xi$  si trova

$$(6) \quad (n+1) (t_1 t_2' - t_2 t_1') + b_n t_1^2 + (d_n - a_n) t_1 t_2 - c_n t_2^2 = 0.$$

Dalla forma di quest'equazione differenziale si deduce subito il teorema di Bompiani:

*Le curve quasiasintotiche di  $R$  segnano sulle generatrici punteggiate tutte proiettive tra di loro.* Di più si vede come al Cap. IV § 34 A, che possiamo scegliere  $y$  e  $z$  in modo che il punto (1) descriva una quasiasintotica sempre che  $t_1 : t_2$  sia costante. Sotto tale ipotesi l'equazione (6) deve ridursi a  $t_1 t_2' - t_2 t_1' = 0$  sicchè

$$b_n = c_n = d_n - a_n = 0.$$

Confrontando con (4) vediamo che

$$a_n = b_n = c_n = d_n = 0$$

sicchè le equazioni (3) diventano

$$(7) \quad y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}, \quad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i y^{(i)} + d_i z^{(i)}.$$

Le nostre ipotesi restano soddisfatte, introducendo  $\eta$  e  $\zeta$  al posto di  $y$  e  $z$  mediante le formole (\*) ( $\lambda, \mu, \nu, \rho$ , essendo numerici)

$$(8) \quad \eta = \lambda y + \mu z, \quad \zeta = \nu y + \rho z, \quad \lambda \rho - \mu \nu = 1.$$

Come al Cap. IV § 34 B vediamo che,  $\tau_1, \tau_2$  essendo cogredienti a  $t_1, t_2$ , le  $n$  forme bilineari

$$(9) \quad f_i(t, \tau) = -b_i t_1 \tau_1 + a_i t_1 \tau_2 - d_i t_2 \tau_1 + c_i t_2 \tau_2 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

(\*) Per brevità, supponiamo orientate le generatrici di  $R$  sicchè non abbiamo bisogno di studiare il caso  $\lambda \rho - \mu \nu < 0$ .

non cambiano per la trasformazione (8). E lo stesso vale adunque delle forme quadratiche

$$(10) \quad f_i(t) = -b_i t_1^2 + (a_i - d_i) t_1 t_2 + c_i t_2^2 \quad (i = 0, 1 \dots n-1)$$

e delle espressioni

$$(11) \quad 2j_i = a_i + d_i \quad (i = 0, 1 \dots n-1).$$

La rigata  $R$  è evidentemente determinata, a meno di collineazioni, dalle forme bilineari (9) o, ciò che è lo stesso, dalle forme quadratiche (10) e dalle  $j_i$ . Ma tali forme non sono ancora *invarianti*; infatti le nostre ipotesi restano soddisfatte facendo la trasformazione

$$(12) \quad Y = \rho y, \quad Z = \rho x, \quad V = \int |\rho|^{\frac{2}{n}} dv.$$

Alle equazioni (3) corrispondono le altre due della stessa forma

$$\frac{d^{n+1} Y}{dV^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^{n-1} Y}{dV^{n-1}} + B_i \frac{d^{n-1} Z}{dV^{n-1}},$$

$$\frac{d^{n+1} Z}{dV^{n+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{d^{n-1} Y}{dV^{n-1}} + D_i \frac{d^{n-1} Z}{dV^{n-1}}.$$

Un facile calcolo dà che

$$(13) \quad A_{n-1} - D_{n-1} = |\rho|^{-\frac{4}{n}} (a_{n-1} - d_{n-1}),$$

$$B_{n-1} = |\rho|^{-\frac{4}{n}} b_{n-1}, \quad C_{n-1} = |\rho|^{-\frac{4}{n}} c_{n-1}$$

mentre gli altri coefficienti delle equazioni (7) si trasformano in modo complicato. Se ne deduce

$$(13)_{bis} \quad (A_{n-1} - D_{n-1})^2 + 4B_{n-1}C_{n-1} = |\rho|^{-\frac{8}{n}} \times$$

$$\times [(a_{n-1} - d_{n-1})^2 + 4b_{n-1}c_{n-1}].$$

Se il discriminante di  $f_{n-2}(t)$  è diverso da zero, possiamo quindi togliere ogni ambiguità in modo intrinseco ed invariante supponendo che

$$(14) \quad (a_{n-1} - d_{n-1})^2 + 4b_{n-1}c_{n-1} = 4\varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Possiamo dire *arco proiettivo* di  $R$  la variabile  $v$  corrispondente alle ipotesi (2) e (14). Le forme bilineari (9) corrispondenti all'ipotesi (14) sono intrinseche ed invarianti.

È facile dedurre il sistema completo degli invarianti proiettivi di  $R$ . Per maggior chiarezza, riprendiamo la notazione del Cap. IV ponendo

$$(15) \quad -b_{n-1} = A, \quad a_{n-1} - d_{n-1} = 2B, \quad c_{n-1} = C$$

sicchè

$$f_{n-1}(t) = A t_1^2 + 2B t_1 t_2 + C t_2^2,$$

$$B^2 - AC = \varepsilon = \pm 1$$

e poniamo, come al Cap. IV, § 35 B

$$(16) \quad B'^2 - A'C' = h, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = k.$$

Supposto  $h \neq 0$ , noi sappiamo da l. c. che  $h$  e  $k$  determinano  $f_{n-1}(t)$  a meno di sostituzioni (8) a coefficienti numerici. Posto ancora

$$g(t) = \begin{vmatrix} A t_1 + B t_2 & B t_1 + C t_2 \\ A' t_1 + B' t_2 & B' t_1 + C' t_2 \end{vmatrix},$$

le forme quadratiche  $f_{n-1}(t)$ ,  $f'_{n-1}(t) = A' t_1^2 + 2B' t_1 t_2 + C' t_2^2$  e  $g(t)$  sono linearmente indipendenti, se  $h \neq 0$ , cosicchè valgono delle identità della forma

$$f_i(t) = L_i f_{n-1}(t) + M_i f'_{n-1}(t) + N_i g(t) \quad (i = 0, 1 \dots n-2).$$

È chiaro che (sotto le ipotesi (14) e  $h \neq 0$ ), il segno  $\varepsilon = \pm 1$  è le quantità

$$(17) \quad h (h > 0 \text{ se } \varepsilon = -1), \quad k, \quad j_i \quad (i = 0, 1 \dots n-1) \\ L_i, \quad M_i, \quad N_i \quad (i = 0, 1 \dots n-2)$$

formano un sistema completo di invarianti proiettivi di  $R$ .

### § 113. — Superficie rigate appartenenti ad uno spazio ad un numero pari di dimensioni. ( $\tilde{C}$ )

Consideriamo ora una rigata  $R$  appartenente ad uno spazio  $S_r$  a  $r = 2n$  dimensioni. Come nel caso di  $r$  impari, definiamo la rigata mediante due curve direttrici  $C_y$  e  $C_z$ , sicchè il punto generico di  $R$  è anche qui

$$(1) \quad x = t_1 y + t_2 z$$

$y$  e  $z$  dipendendo dal parametro  $v$ . Limitiamoci al caso generale supponendo che non siano nulli identicamente tutti i minori del massimo ordine della matrice

$$(2) \quad \xi = (y z y' z' \dots y^{(n-1)} z^{(n-1)}).$$

Tali determinanti sono le coordinate dell'iperpiano  $\xi$  che è evidente  $(n-1)$  — tangente in tutti i punti della generatrice  $yz$  di  $R$ . L'iperpiano  $\xi$  è di più  $n$  — tangente nel punto (1) se

$$(3) \quad (y z y' z' \dots y^{(n-1)} z^{(n-1)}, \quad t_1 y^{(n)} + t_2 z^{(n)}) = 0,$$

mentre negli altri punti della generatrice  $(yz)$  lo spazio  $n$  — tangente riempie tutto lo spazio ambiente  $S_r$ . Si osservi che la (3) determina univocamente il punto (1) della generatrice generica di  $R$ ; infatti nel caso contrario,  $y^{(n)}$  e  $z^{(n)}$  sarebbero per ogni  $v$  combinazioni lineari dei punti che compaiono nella matrice (2) donde

si concluderebbe facilmente che lo spazio d'appartenenza di  $S_r$  avrebbe meno di  $2n$  dimensioni, contro l'ipotesi. Determinando, per ogni valore di  $v$ , il rapporto  $t_1 : t_2$  dalla (3), il punto (1) descrive una curva ben determinata di  $R$  che diremo col Bompiani la *curva quasiasintotica* di  $R$ . Essa è pertanto l'unica curva di  $R$  in cui punti lo spazio  $n$  — tangente a  $R$  ha dimensione  $< 2n$ .

Supponiamo d'ora innanzi che la curva  $C_y$  sia quasiasintotica sicchè

$$(4) \quad (y z y' z' \dots y^{(n-1)} z^{(n-1)} y^{(n)}) = 0;$$

e scegliamo il parametro  $v$  in modo che sia identicamente

$$(4)_{bis} \quad (y z y' z' \dots y^{(n-1)} z^{(n-1)} z^{(n)}) = 1,$$

escludendo senz'altro i valori isolati di  $v$  in cui il determinante  $(4)_{bis}$  sia uguale a zero. Dalla (4) si deduce che le coordinate di  $y$  e  $z$  soddisfano all'equazione differenziale della forma

$$(5) \quad y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}.$$

In generale  $b_{n-1} \neq 0$ ; se  $b_{n-1} \equiv 0$ , la (5) dimostra che, in ogni punto della quasiasintotica  $C_y$ , l' $S_n$  osculatore a  $C_y$  sta nello spazio  $(n-1)$  — tangente ivi ad  $R$ . Limitiamoci a trattare il caso generale  $b_{n-1} \neq 0$ .

Le equazioni (4) e  $(4)_{bis}$  restano soddisfatte senza cambiare il parametro  $v$  sostituendo a  $y$  e  $z$  rispettivamente  $\eta$  e  $\zeta$  dove

$$(6) \quad \eta = \rho^{n+1} y, \quad \zeta = \rho^{-n} z + \lambda y$$

$\rho$  e  $\lambda$  essendo funzioni qualunque di  $v$ . Ne vogliamo approfittare per semplificare la (5). Eseguendo la (6), alla (5) corrisponde la

$$\eta^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \eta^{(i)} + \beta_i \zeta^{(i)}$$

dove, come un facile calcolo dimostra,

$$(7) \quad \alpha_{n-1} = a_{n-1} - \lambda \rho^n b_{n-1} + n(n+1) \frac{\rho'}{\rho}, \quad \beta_{n-1} = \rho^{2n+1} b_{n-1}.$$

Possiamo pertanto scegliere  $\rho$  e  $\lambda$  in modo che risulti

$$(8) \quad \alpha_{n-1} = 0, \quad \beta_{n-1} = 1;$$

infatti a tale scopo occorre e basta scegliere

$$(8)_{bis} \quad \rho = b_{n-1}^{-\frac{1}{2n+1}}, \quad \lambda = b_{n-1}^{-\frac{n+1}{2n+1}} \left[ a_{n-1} - \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{b'_{n-1}}{b_{n-1}} \right].$$

Le equazioni (4) e (4)<sub>bis</sub> restano pure soddisfatte facendo la trasformazione

$$(9) \quad \mathfrak{y} = \sigma^n y, \quad \mathfrak{z} = z, \quad \mathfrak{v} = \int \sigma dv.$$

Alla (5) corrisponde ora la

$$\frac{d^n \mathfrak{y}}{d \mathfrak{v}^n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i \mathfrak{y}}{d \mathfrak{v}^i} + b_i \frac{d^i \mathfrak{z}}{d \mathfrak{v}^i}$$

ed un facile calcolo prova che

$$(9)_{bis} \quad a_{n-1} = \frac{1}{\sigma} \left[ a_{n-1} + \frac{n(n+1)}{2} \frac{\sigma'}{\sigma} \right], \quad b_{n-1} = \sigma^{n-1} b_{n-1}.$$

Posto ancora

$$Y = \rho^{n+1} \mathfrak{y}, \quad Z = \rho^{-n} \mathfrak{z} + \lambda \mathfrak{y}, \quad V = \mathfrak{v},$$

sarà, analogamente alla (5),

$$\frac{d^n Y}{d V^n} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^i Y}{d V^i} + B_i \frac{d^i Z}{d V^i}.$$

Affinchè risulti  $A_{n-1} = 0$ ,  $B_{n-1} = 1$ , occorre e basta secondo le (8)<sub>bis</sub> che

$$(9)_{ter} \quad \rho = b_{n-1}^{-\frac{1}{2n+1}}, \quad \lambda = b_{n-1}^{-\frac{n+1}{2n+1}} \left[ a_{n-1} - \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{d \log b_{n-1}}{d \mathfrak{v}} \right].$$

Supponiamo ora che sia  $a_{n-1} = 0$ ,  $b_{n-1} = 1$  (il che si poteva raggiungere mediante una trasformazione (6)). Le equazioni (9)<sub>bis</sub> diventano

$$a_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} \frac{\sigma'}{\sigma^2}, \quad b_{n-1} = \sigma^{n-1},$$

sicchè le (9)<sub>ter</sub> danno

$$\rho = \sigma^{-\frac{n-1}{2n+1}}, \quad \lambda = \frac{3}{2} \frac{n(n+1)}{2n+1} \sigma^{-\frac{n^2+4n+1}{2n+1}} \sigma'.$$

Abbiamo pertanto ottenuto il risultato: *Si possono in infiniti modi scegliere le curve  $C_y$  e  $C_z$ , i fattori delle coordinate  $y$  e  $z$ , e il parametro  $v$ , in modo che valga la (4)<sub>bis</sub> e la*

$$(10) \quad y^{(n)} = z^{(n-1)} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i y^{(i)} + b_i z^{(i)}.$$

La più generale trasformazione che non leda tali ipotesi è

$$Y = \tau^{n^2+n+1} y, \quad Z = \tau^{n(n-1)} z + \frac{3}{2} n(n+1) \tau^{n^2-n-1} \tau' y,$$

(11)

$$V = \int \tau^{2n+1} dv,$$

$\tau$  essendo funzione arbitraria di  $v$  ( $\tau \neq 0$ ).

Eseguendo la (11), alla (10) corrisponde la

$$\frac{d^n Y}{d V^n} = \frac{d^{n-1} Z}{d V^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} A_i \frac{d^i Y}{d V^i} + B_i \frac{d^i Z}{d V^i}.$$

Un calcolo piuttosto lungo e che ometto, dà

$$(12) \quad B_{n-2} = \tau^{-(2n+1)} \left[ b_{n-2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} \frac{\tau'}{\tau} \right],$$

$$(12)_{bis} \quad A_{n-2} = \tau^{-2(2n+1)} \left[ a^{n-2} - \frac{3}{2} n(n+1) \frac{\tau'}{\tau} b_{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} n(n^2-1)(n-4) \frac{\tau''}{\tau} - \frac{1}{24} n(n^2-1)(4n^2-19n-42) \frac{\tau'^2}{\tau^2} \right].$$

Derivando la (12) e confrontando con la (12)<sub>bis</sub> si deduce che

$$(12)_{ter} \quad (n+2) A_{n-2} + \frac{1}{3} n(n+1)(n-4) \frac{d B_{n-2}}{d V} - \\ - \frac{1}{6} \frac{n(n+1)(4n^2-5n+10)}{(n-1)(n+2)} B_{n-2}^2 = \\ = \tau^{-2(n+1)} \left[ (n+2) a_{n-2} + \frac{1}{3} n(n+1)(n-4) b'_{n-2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \frac{n(n+1)(4n^2-5n+10)}{(n-1)(n+2)} b_{n-2}^2 \right].$$

L'ultima equazione prova che si può *in generale* togliere ogni ambiguità supponendo

$$(13) \quad a_{n-2} = -\frac{1}{3} \frac{n(n+1)(n-4)}{n+2} b'_{n-2} + \\ + \frac{1}{6} \frac{n(n+1)(4n^2-5n+10)}{(n-1)(n+2)^2} b_{n-2}^2 + \varepsilon$$

dove a  $\varepsilon^2$  si può dare un valore numerico scelto comunque, purchè diverso da zero, p. es.  $\varepsilon = \pm 1$ .

Il parametro  $v$  corrispondente a (13) può dirsi l'*arco proiettivo* di  $R$ ; le  $y$  e  $z$  son perfettamente determinate a meno di una sostituzione unimodulare a coefficienti numerici. Dalla (4) si deduce derivando che, accanto alla (10) vale l'equazione della forma

$$(14) \quad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i y^{(i)} + d_i z^{(i)}.$$

Ed è chiaro che il segno  $\varepsilon$  e le quantità

$$a_i, b_j, c_k, d_k \quad (i=0, 1 \dots n-3; j=0, 1 \dots n-2; \\ k=0, 1 \dots n-1)$$

formano un sistema completo di invarianti proiettivi di  $R$ .

La normalizzazione ora esposta diventa impossibile se vale la (13) con  $\varepsilon = 0$ . In tal caso il procedimento più rapido è il seguente. La (12) prova che si può in ogni caso scegliere  $v$  in modo che sia  $b_{n-2} = 0$ . Ma tale normalizzazione non è invariante, perchè la condizione  $b_{n-2} = 0$  resta inalterata ponendo

$$Y = \tau^{n+1} y, \quad Z = \tau^{n(n-1)} z, \quad V = \tau^{2n+1} v, \quad \tau \text{ costante.}$$

Mediante tale sostituzione, le  $a_i, b_i, c_i, d_i$  si cambiano rispettivamente in  $A_i, B_i, C_i, D_i$  dove

$$A_i = t^{n-i} a_i, \quad B_i = t^{n-i-1} b_i, \quad C_i = t^{n-i+3} c_i, \quad D_i = t^{n-i+1} d_i, \quad t = \tau^{2n+1}.$$

Nel caso eccezionale [quando  $\varepsilon = 0$  nella (13)], facendo  $b_{n-2} = 0$  sarà anche  $a_{n-2} = 0$ . Sia  $a_{n-3} = b_{n-2} = 0$ , ma p. es.  $a_{n-2} \neq 0$ . Allora il differenziale

$$(15) \quad a_{n-3}^{-\frac{1}{n-3}} dv = dw$$

e le quantità

$$\frac{1}{a_{n-3}} \frac{d a_{n-3}}{d w}, \quad \frac{a_i^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}} \quad (i=0, 1 \dots n-4), \quad \frac{b_i^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3-1}} \quad (i=0, 1 \dots n-3),$$

(16)

$$\frac{c_i^{n-3}}{a_{n-3}^{n-i+2}} \quad (i=0, 1 \dots n-1), \quad \frac{d_i^{n-3}}{a_{n-3}^{n-i+1}} \quad (i=0, 1 \dots n-1)$$

sono evidentemente invarianti proiettivi di  $R$ ; e la  $R$  è completamente determinata a meno di collineazioni, date le quantità (16) in funzione della variabile  $w$  definita da (15). Si osservi che, per determinare le (16), le quadrature non sono necessarie che in apparenza.

APPENDICI

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= A(u+a)^{\frac{3}{2}}(v+a)^{\frac{3}{2}}, & y &= B(u+b)^{\frac{3}{2}}(v+b)^{\frac{3}{2}}, \\ z &= C(u+c)^{\frac{3}{2}}(v+c)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

pour les quelles les six constantes  $A, B, C, a, b, c$  sont telles que les cinq expressions

$$A^2 a^i + B^2 b^i + C^2 c^i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

ont des valeurs déterminées, sont applicables les unes sur les autres (\*).

2. - Après avoir essayé d'étudier le problème général de la déformation continue et de trouver la place qu'occupait le problème spécial précédent dans ce problème général, je suis revenu aux surfaces (1) dont l'équation cartésienne est

$$(2) \quad \alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{3}} = 1.$$

J'ai remarqué d'abord que dans la déformation continue précédente, la courbe  $u = v$ , qui est une ligne asymptotique sur chaque surface, reste invariable de forme. On a ainsi un exemple de la déformation continue d'une surface autour d'une ligne asymptotique. J'ai démontré que cette déformation peut se faire autour de chaque ligne asymptotique (\*\*).

Il résulte de là que les  $\infty^3$  surfaces (2) peuvent être groupées en  $\infty^1$  familles, chaque famille étant composée de  $\infty^2$  surfaces toutes applicables les unes sur les autres. Il s'agit maintenant de trouver la relation entre les coefficients de (2) qui caractérise chaque famille de surfaces applicables.

A cet effet j'ai posé

$$x = P^{\frac{3}{2}}, \quad y = Q^{\frac{3}{2}}, \quad z = R^{\frac{3}{2}}$$

où

(\*) *C. R.* de l'Ac. des Sc. 128 (1899)

(\*\*) *C. R.* 1902, le 21 avril 1902.

## APPENDICE I<sup>a</sup>

### Sur la déformation de certaines surfaces tétraédrales, les surfaces $S$ et les réseaux $R$ .

Note de M. GEORGES TZITZEICA Prof. à l'Université de Bucarest (\*).

1. - Le point de départ de mes recherches a été un problème particulier de déformation de certaines surfaces tétraédrales.

Considérons le réseau des lignes de courbure d'une quadrique. Les normales de la quadrique forment une congruence conjuguée, au sens de M. GUICHARD, au réseau; elles découpent donc sur la quadrique, d'après un théorème de Ribaucour (\*\*), un autre réseau, qui est, avec celui des lignes de courbure, harmonique à une même congruence cyclique. Le réseau cyclique correspondant est à invariants tangentiels égaux, donc il reste invariable dans une déformation continue à un paramètre.

C'est cette déformation continue que j'ai tout d'abord étudiée et j'ai obtenu le résultat suivant:

*Toutes les surfaces*

(\*) L'illustre geometra rumeno ha cortesemente acconsentito ad esporre in questa nota, di carattere piuttosto storico, la serie delle idee che lo hanno guidato nei suoi studii sulle superficie  $S$  e le reti  $R$ . Queste idee, veramente originali, interesseranno certo moltissimo i lettori di questo libro.

(\*\*) DARBOUX, *Th. des surfaces*, II, p. 289, ou bien ma *Geom. diff. proj. des réseaux*, p. 92.

$$P = p_1 u + p_2 v + p_3, \quad Q = q_1 u + q_2 v + q_3, \quad R = r_1 u + r_2 v + r_3$$

et j'ai démontré (\*) qu'en faisant des transformations linéaires sur les variables  $u$  et  $v$ , on peut réduire l'élément linéaire de (2) à l'une des formes

$$(3) \quad ds^2 = v du^2 + 2n du dv + dv^2,$$

$$(4) \quad ds^2 = u du^2 + 2m du dv + v dv^2.$$

D'une manière plus précise, on obtient l'élément linéaire (3) si

$$\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}} = 0$$

et (4) si

$$\alpha^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}.$$

3. - Il restait à trouver toutes les surfaces admettant l'élément linéaire (3) ou (4), pour que le problème de la déformation des surfaces (2) fût complètement résolu. J'ai fait voir (\*\*) que la recherche des surfaces ayant l'élément linéaire (3) se ramène à celle des surfaces minima, tandis que la recherche des surfaces ayant l'élément linéaire (4) conduit à celle des surfaces  $S$  pour lesquelles on a

$$(5) \quad \frac{K}{p^4} = \text{const.},$$

où  $K$  est la courbure totale en un point  $M$  de  $S$  et  $p$  la distance d'un point fixe  $O$  au plan tangent en  $M$  à  $S$ .

(\*) *C. R.* le 18 juin, 1906.

(\*\*) *C. R.*, le 25 juin, 1906. Dans cette Note une faute de calcul, que j'ai corrigée implicitement dans les publications ultérieures, m'a fait dire que les surfaces d'élément linéaire (4) se ramènent à l'étude des surfaces à courbure totale constante.

C'est de cette manière que je suis arrivé à l'étude des surfaces  $S$  (\*). (Cfr. § 25 E et 28 D).

4. - J'ai commencé l'étude des surfaces  $S$  en démontrant que leur recherche conduit à l'étude des systèmes complètement intégrables de la forme (\*\*)

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{uu} = a\theta_u + b\theta_v, \\ \theta_{uv} = h\theta, \\ \theta_{vv} = a'\theta_u + b'\theta_v. \end{array} \right.$$

A partir de ce point deux voies se sont trouvées ouvertes devant moi. Je les ai suivies alternativement. Elles se sont réunies, comme on le verra dans la suite, dans la théorie des réseaux  $R$ .

Il résultait tout d'abord du système (6) que les surfaces  $S$  (\*\*\*) gardent la propriété (5) après une transformation affine et il n'est pas difficile de voir qu'il en est de même après une transformation par polaires réciproques. Il fallait expliquer ces résultats.

J'ai démontré qu'une transformation affine laisse, à un facteur constant près, le rapport  $\frac{K}{p^4}$  invariable, tandis que une transformation duale le remplace par son inverse.

(\*) Voir mon mémoire *Deformare a unei clase de suprafase tetraedrale* publié en 1916 dans les *Ann. de l'Ac. Roumaine*

Il lettore noti che alla sesta riga di pag. 153 (§ 25 E) si deve leggere  $\sqrt{-K}$  e non  $\frac{1}{\sqrt{-K}}$ , (come è scritto per un errore di stampa). Egli riconoscerà allora immediatamente che le superficie ivi studiate coincidono con quelle dello Tzitzeica.

(\*\*) *C. R.*, le 10 juin 1907, ou bien *Rend. del Cir. mat. di Palermo* (Tomo XXV et XXVIII, 1908 et 1909).

(\*\*\*) On les a d'abord désignées ainsi dans la littérature scientifique. Plus tard on a reconnu que ce sont des sphère affines. Quelques géomètres (M. JONAS et DEMOULIN) m'ont fait l'honneur de leur donner mon nom.

J'ai cherché ensuite une définition purement affine des surfaces  $S$ . Je l'ai trouvée d'abord pour les surfaces réglées, (\*) à savoir qu'elles ont leurs lignes flecnodales confondues à l'infini. Pour les surfaces  $S$  générales les surfaces réglées asymptotiques, c. à d. les surfaces réglées formées par les tangentes aux lignes asymptotiques d'une famille aux points où elles coupent une ligne asymptotique de l'autre famille, ont, comme développables asymptotiques, des cônes ayant tous le même sommet (\*\*). Cette définition s'applique aussi aux surfaces réglées.

5. — Comme les lignes asymptotiques jouent un rôle essentiel dans la théorie des surfaces  $S$ , j'ai été naturellement conduit à chercher une transformation de ces surfaces à l'aide des congruences  $W$ , analogue à celle des surfaces à courbure totale constante ou à celle des surfaces applicables sur une quadrique (\*\*\*) .

J'ai abordé alors la théorie générale des congruences  $W$ , à l'aide d'un théorème remarquable de DARBOUX (\*\*\*\*), au quel j'ai donné une nouvelle démonstration à l'aide d'une interprétation géométrique dans un espace à cinq dimensions. J'ai fait voir (\*\*\*\*\*) qu'à toute congruence  $W$  il correspond un réseau tracé sur une variété à quatre dimensions dans un espace projectif à cinq dimensions et réciproquement. Aux deux complexes formés par les tangentes des deux surfaces focales d'une congruence  $W$  correspondent deux congruences, conjuguées au réseau précédent et formées par des droites appartenant à la variété quadratique. Les deux foyers d'un rayon d'une de ces congruences sont les images des deux tangentes asymptotiques de la surface focale correspondante.

6. — Revenons au système (6) et montrons la seconde voie que j'ai suivie en même temps que la précédente. On peut considérer ce système comme définissant les coordonnées projectives d'un réseau plan : c'est la perspective sur un plan des lignes

(\*) *C. R.*, le 9 déc. 1907; voir aussi *Atti del IV Congresso intern. dei Mat.* [Roma, 1908], et *Rend. del Circ. mat. di Palermo*, T. XXVIII (1909).

(\*\*) *C. R.* le 27 - I - 1908.

(\*\*\*) *C. R.*, le 18 avril 1910.

(\*\*\*\*) DARBOUX, *Th. des surfaces*, II, p. 345.

(\*\*\*\*\*) *C. R.*, le 28 - XI - 1910 et le 3 - I - 1911, ou bien ma *Géom. diff. proj.* p. 260.

asymptotiques d'une surface  $S$ . Cette perspective est, d'après un théorème de M. KOENIGS, un réseau à invariants égaux, ce qui est du reste visible sur le système (6).

J'ai été ainsi obligé d'étudier les réseaux à invariants égaux. J'ai complété un autre théorème de M. KOENIGS, concernant certaines coniques attachées à un réseau à invariants égaux et en revenant au réseau plan défini par (6) j'ai montré qu'il se reproduit après trois transformations de Laplace (\*).

De sorte qu'en faisant correspondre à une congruence  $W$  de notre espace un réseau quadratique d'un espace à cinq dimensions, j'ai été naturellement conduit à considérer d'une manière spéciale les congruences  $W$  dont l'image est un réseau à invariants égaux.

Un troisième théorème de M. KOENIGS, appliqué à un tel réseau et à une des deux congruences quadratiques conjuguées donne un nouveau réseau quadratique à invariants égaux, à partir du quel on peut continuer la même opération. En revenant à notre espace on obtient une suite de Laplace dont toutes les congruences sont  $W$ . Un réseau quelconque de la suite est ce qu'on appelle un réseau  $R$ . C'est de cette manière que je suis arrivé à l'étude des réseaux  $R$  (\*\*).

(\*) *C. R.* le 30 - XI - 1908. J'ai ajouté dans la même Note un second exemple de suite de Laplace périodique et je suis revenu plus tard. (en 1913) sur cette question. Voir le chap. VII de ma *Géom. diff. proj. des réseaux*.

(\*\*) *C. R.*, le 24 - IV et le 4 - XII - 1911, ou bien ma *Géom. diff. proj.* p. 263.

### UNA OSSERVAZIONE BIBLIOGRAFICA

---

Il lettore che desideri conoscere altre ricerche sulla teoria delle superficie  $R$  vegga, oltre a due note di G. FUBINI in corso di stampa nei *Rend. della R. Accademia dei Lincei* (2° Semestre 1926) i seguenti lavori fondamentali del Prof. A. DEMOULIN della Università di Gand:

*Sur les surfaces R et les surfaces  $\Omega$*  (Comptes Rendus; tome 153, p. 590, 705, 797, 927).

*Sur les congruences qui appartiennent à un complexe linéaire et sur les surfaces  $\Phi$*  (Bull. de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique; 4 mai 1920; pp. 215 - 232) (\*).

---

(\*) Risultati importanti sono contenuti nelle Note dello stesso A.: *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques* (C. R. Juillet 1924).

*Sur les surfaces réglées* (C. R. jun 1908) *Sur la théorie des lignes asymptotiques* (C. R. août 1908). *Sur la quadrique de Lie* (C. R. Septembre 1908). *Sur quelques propriétés des surfaces courbes* (C. R. Sept. et Octobre 1908).

---

## APPENDICE II\*

### I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve e delle superficie

DI ENRICO BOMPIANI

In un gruppo di lavori qui appresso elencati (\*) ho cercato di dare un fondamento geometrico diretto alla teoria proiettiva delle curve e delle superficie (nello spazio ordinario).

(\*) A - *Corrispondenza puntuale fra due superficie e rappresentazione conforme*. Rendic. R. Accad. dei Lincei, s. V., vol. XXXII, 1923.

B - *Nozioni di geometria proiettivo-differenziale relative ad una superficie dello spazio ordinario*. Ibidem, vol. XXXIII, 1924.

C - *Costruzione di invarianti proiettivo-differenziali di una superficie*. Ibidem s. VI, vol. II, 1926.

D - *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane*. Ibidem, volume III, 1926.

E - *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato*. Ibidem, vol. III, 1926 (2 Note).

F - *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario*. Atti R. Accad. Scienze di Torino, vol. LIX, 1924.

G - *Le forme di Fubini nella teoria proiettiva delle superficie*. Rendic. Istituto Lombardo, vol. LVII, 1924.

H - *Sulla geometria proiettivo-differenziale delle superficie*. Rendic. Semin. Matem. dell' Università di Roma, vol. II, 1923-24.

I - *Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee sopra una superficie dello spazio ordinario*. Bollettino Unione Matem. Ital., a. III, 1924.

Chi abbia letto il presente Trattato ha certo notato l'importanza che nello studio di tali enti assumono certe forme differenziali (arco proiettivo delle curve piane o sghembe; elemento lineare proiettivo di FUBINI; etc.) e come da esse dipenda la costruzione di invarianti numerici (p. es. curvatura proiettiva delle superficie) o geometrici (p. es. normale proiettiva di FUBINI) fondamentali per la teoria. L'introduzione di queste forme ha carattere analitico; la loro invarianza risulta da proprietà formali.

Se si confronta questa teoria con quella metrica delle curve o delle superficie (considerate o nel gruppo dei movimenti o nel gruppo delle applicabilità) si scorge subito una diversità profonda nel loro modo di sviluppo: chè infatti in quest'ultima le forme differenziali che stanno a base della trattazione hanno un significato geometrico immediato (che si riconduce in ogni caso all'invariante elementare « distanza di due punti » o « angolo di due direzioni »): ed è proprio questo significato che ne suggerisce e ne giustifica l'uso.

K - *Contributo alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie*. Ibidem, a. III, 1924.

L - *Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari*. Ibidem, a. IV, 1925.

M - *Per lo studio proiettivo-differenziale delle singolarità*. Ibidem, a. V, 1926.

N - *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie*. Ibidem, a. V, 1926.

O - *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie*. Annali di Matematica, s. IV, t. I, 1923-24.

P - *Rappresentazione geodetico-proiettiva fra due superficie*. Ibidem, t. III, 1925-26.

Q - *Sul contatto di due curve sghembe*. Memorie Accad. Scienze di Bologna, s. VIII, t. III, 1925-26.

R - *Rappresentazione fra una superficie e le sue parallele*. Mathem. Zeitschrift. Bd. 24, H. 2, 1925.

Questi Lavori saranno citati includendone la lettera d'ordine nel testo fra [...]. I richiami al vol. I del presente Trattato saranno fatti così: [G. P. D. pag. ...].

Non è così nella geometria proiettiva. E la differenza ha origine da una difficoltà sostanziale che si presenta in questa teoria e che conviene porre chiaramente in evidenza.

La domanda da esaminare è questa: quale può essere il significato proiettivo di una forma differenziale (del primo ordine)?

Sia data una varietà di elementi, « punti », individuati sulla varietà stessa per mezzo di un sistema di coordinate essenziali  $u_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Una forma differenziale (di qualsiasi grado  $e$ ) del 1° ordine in queste coordinate acquista un valore ben determinato quando sia data un'  $n$  — upla di valori per le coordinate  $u_i$  (che in generale figurano nei coefficienti della forma) e un'  $n$  — pla di valori per i loro differenziali  $du_i$ . In termini geometrici, la forma acquista un valore ben determinato quando sia dato un punto  $P(u_i)$  e un punto  $P'(u_i + du_i)$  della nostra varietà. Se la forma è invariante rispetto a determinate trasformazioni, cioè se essa ha un significato geometrico per la geometria della varietà relativa ad un determinato gruppo, ciò vuol dire che è possibile costruire un invariante (rispetto a quel gruppo) di due punti infinitamente vicini  $P$  e  $P'$ .

Se il gruppo considerato è quello metrico (fondamentale) la distanza fornisce l'invariante desiderato. Ma se il gruppo è quello proiettivo la nostra esigenza sembra contrastare col fatto che l'invariante elementare (birapporto) di questo gruppo acquista un senso solo per quattro (e non per due) elementi di una forma di prima specie.

A sciogliere questa apparente contraddizione (in cui risiede la difficoltà sopra accennata) intervengono alcuni *invarianti proiettivi infinitesimi* di contatto (fra curve o superficie) che dipendono effettivamente, per dirla in breve, da *due* soli elementi infinitamente vicini. Questi invarianti infinitesimi sono, a mio modo di vedere, la chiave di volta per la ricostruzione geometrica di tutta la teoria del FUBINI; ma, anche prima di vedere che cosa precisamente essi siano, è facile intendere ch'essi hanno una portata che trascende di gran lunga questa teoria. È noto infatti che tutt'i gruppi che hanno un reale interesse geometrico si lasciano considerare come gruppi lineari (con certe varietà algebriche invarianti): or bene, i nostri invarianti (birapporti) infinitesimi forniscono per ciascuna di queste geometrie un metodo razionale

per la costruzione delle forme differenziali invarianti che la caratterizzano (\*).

Illustrerò la natura e l'ufficio di questi invarianti infinitesimi ricostruendo rapidamente la teoria delle curve e delle superficie. Data l'importanza di queste, esporrò altri due metodi, non di portata generale come il precedente, ma particolari a questi enti, per ottenere le forme fondamentali di FUBINI, la curvatura proiettiva, il fascio canonico etc.: il primo modella la teoria delle applicabilità proiettive su quella delle ordinarie applicabilità (in senso metrico) sostituendo alle geodetiche un sistema doppiamente infinito di curve proiettivamente invarianti della superficie; il secondo studia la geometria della superficie come ente dello spazio rigato e si giova della rappresentazione iperspaziale delle congruenze delle tangenti asintotiche sulla quadrica di  $S_5$ . E il Lettore avrà così occasione di riconoscere quale sia la fecondità e la generalità delle ricerche di geometria iperspaziale, qui riassunte nell'Appendice III, che, come sopra ho accennato, sintetizzano, per così dire, ogni ramo di geometria differenziale.

## I. — Curve piane.

### 1. — Invariante di Segre.

Siano  $C$  e  $\bar{C}$  due curve piane aventi in un punto  $O$  un contatto di ordine  $n$ , intero ( $\geq 1$ ), e sia  $O$  punto ordinario per esse.

Si consideri una trasversale prossima ad  $O$  la quale seghi  $C$ ,  $\bar{C}$  e la tangente  $t$  comune in  $O$  rispettiv. nei punti  $P$ ,  $\bar{P}$ ,  $T$  (prossimi ad  $O$ ). Sia  $M$  un punto preso a piacere sulla trasversale (diverso dai tre considerati) e si formi il birapporto  $D = (P\bar{P}TM)$ .

(\*) Il FUBINI, nella sua idea primitiva, pensava al gruppo proiettivo ampliato; e perciò, abbandonati i punti e i birapporti si riferiva agli elementi (di ordine elevato il minimo possibile) della varietà studiata: cioè nel caso delle superficie ad  $x, y, z, p, q, r, s, t, \dots$

Si faccia ora tendere la trasversale (con una legge scelta a piacere) a passare per  $O$ , con la sola condizione che la posizione limite sia  $\pm t$ , e pure con legge arbitraria si faccia variare  $M$  su di essa, con la condizione che la posizione limite di  $M$  sulla posizione limite della trasversale sia  $\pm O$ .

Si deve a C. SEGRE (\*) il seguente risultato: *il limite del birapporto  $D$  è un'invariante proiettivo delle due curve considerate in  $O$ : esso non dipende affatto dalle posizioni limiti della trasversale e del punto  $M$ .*

Se le equazioni delle due curve, riferite ad un qualsiasi sistema di coordinate proiettive non omogenee avente origine in  $O$  e la tangente  $t$  come asse  $x$  sono

$$(1) \quad y = x^2 \Sigma a_i x^i \quad (a_0 \neq 0), \quad (\bar{1}) \quad y = x^2 \Sigma \bar{a}_i x^i \quad (\bar{a}_0 \neq 0)$$

detto invariante vale  $a_0 | \bar{a}_0$ .

Questo *invariante di SEGRE*, come lo chiameremo, è dunque un *carattere proiettivo finito* relativo al contatto delle due curve; esso vale 1 se le due curve hanno un contatto d'ordine superiore al primo ( $n > 1$ ).

## 2. - Invariante assoluto di un'equazione di Laplace.

Di questo invariante di SEGRE vogliamo far subito un'applicazione di cui ci gioveremo in seguito.

Data l'equazione di Laplace (\*\*)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} + c x = 0$$

è noto che  $n+1$  soluzioni  $x$ , indipendenti di essa si possono interpre-

(\*) *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche etc.* Rend. Accad. dei Lincei, s. V, vol. VI, 1897.

(\*\*) Si veda p. es. la Memoria *Sull'equazione di Laplace.* Rendic. Circ. Matem. di Palermo, t. XXXIV, 1912.

tare come coordinate proiett. omog. di un punto (di uno  $S_n$ ) che descrive al variare di  $u, v$  una superficie  $\Phi$  sulla quale le linee  $u$  ( $v = \text{cost}$ ) e  $v$  ( $u = \text{cost}$ ) costituiscono un doppio sistema coniugato. Se da un punto  $P(x_i)$  di  $\Phi$  si passa ai punti  $P^1$  di coordinate  $x_i^1 = \frac{\partial x_i}{\partial v} + a x_i$ , e  $P^{-1}$  di coordinate  $x_i^{-1} = \frac{\partial x_i}{\partial u} + b x_i$ , questi punti descrivono a lor volta due superficie  $\Phi^1$  e  $\Phi^{-1}$  (trasformate di Laplace di  $\Phi$ ) sulle quali le linee  $u$  ( $dv = 0$ ) e  $v$  ( $du = 0$ ) formano ancora doppi sistemi coniugati. Il piano tangente in  $P$  a  $\Phi$  è osculatore alla linea  $u$  passante per  $P^1$  su  $\Phi^1$  e alla linea  $v$  per  $P^{-1}$  su  $\Phi^{-1}$ : sicchè in esso si può considerare una conica  $\Gamma^1$  osculatrice in  $P^1$  alla linea  $u$  e tangente in  $P^{-1}$  alla linea  $v$  e un'altra conica  $\Gamma^{-1}$  osculatrice alla  $v$  per  $P^{-1}$  e tangente alla  $u$  per  $P^1$ .

È pure noto che l'equazione di Laplace possiede due *invarianti relativi*

$$h = \frac{\partial a}{\partial u} + ab - c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab - c$$

e quindi un *invariante assoluto*  $h/k$ . Eccone il significato geometrico [E]:

*L'invariante assoluto di un'equazione di Laplace è proprio l'invariante di Segre (relativo a  $P^1$  o a  $P^{-1}$ ) delle due coniche bitangenti  $\Gamma^1$  e  $\Gamma^{-1}$ . Se l'equazione ha invarianti (relativi) uguali le due coniche coincidono e si ha il teorema di Koenigs.*

## 3. - Invarianti di contatto fra curve piane [D].

Ritorniamo alla considerazione del birapporto  $D$ . L'equazione della trasversale  $r$  sia

$$(2) \quad x = \alpha(\varepsilon) y + \varepsilon$$

variabile con  $\varepsilon$  in modo che  $\alpha_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon)$  sia finito; ha funzione  $\alpha$  (che per semplicità si può supporre analitica) caratterizza

la  $\infty^1$  di rette in cui varia  $r$ . Il punto  $M$  appartenente ad  $r$  abbia coordinate  $x_0, y_0$  (in generale funzioni di  $\varepsilon$ ); e sia  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M \neq O$ .

Il calcolo effettivo di  $D = D_0 + D_1\varepsilon + D_2\varepsilon^2 + \dots$  fornisce i seguenti risultati:

#### A. CONTATTO DEL 1° ORDINE FRA $C$ E $\bar{C}$ .

1. -  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D = a_0/\bar{a}_0 \neq 1$ : invariante di Segre.

2. - Il termine del 1° ordine in  $D$  dipende dalla posizione limite di  $r$  (per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), ma **non** da quella di  $M$ .

Esiste quindi una retta  $r_0$  proiettivamente invariante determinata dagli intorni del 3° ordine di  $O$  su  $C$  e  $\bar{C}$  per la quale è  $D_1 = 0$ . Eccone una costruzione: si consideri una qualsiasi conica avente un contatto del 3° ordine con  $C$  in  $O$ , e una conica analoga per  $\bar{C}$ : le rette che da  $O$  proiettano gli ulteriori punti d'intersezione delle due coniche sono divise armonicamente da  $t$  e da  $r_0$ .

3. - Si consideri il punto di contatto  $R_0$  di  $r_0$  con la curva involuppo delle rette  $r$ : si può determinare una posizione  $M_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M$  su  $r_0$  per la quale è  $D_2 = 0$ ; si faccia variare  $R_0$ : le punteggiate descritte da  $R_0$  ed  $M_0$  (su  $r_0$ ) sono proiettive.

Sicchè: Gli intorni del 4° ordine di  $O$  su  $C$  e su  $\bar{C}$  determinano sulla retta invariante  $r_0$  una proiettività (non involutoria, nè parabolica): il punto unito  $O_1 \neq O$  è quindi un punto proiettivamente invariante.

Il birapporto di  $O, O_1$  e dei due punti ove la loro retta  $r_0$  incontra le coniche osculatrici in  $O$  a  $C$  e a  $\bar{C}$  è proprio l'invariante di Segre.

4. - Se si prendono come rette  $r$  quelle per  $O_1$  ed  $M \equiv O_1$  ogni termine dello sviluppo di  $D$  è un invariante per collineazioni rispetto a  $C$  e a  $\bar{C}$ .

#### B. CONTATTO D'ORDINE INTERO $> 1$ .

1. - L'invariante di SEGRE è  $= 1$ .

2. - Il termine principale di  $\log D$  [infinitesimo di ordine  $n - 1$  in  $\varepsilon$  se il contatto è d'ordine  $n$ ] è un'invariante proiettivo dipendente esclusivamente dagli intorni di ordine  $n + 1$  di  $O$  sulle due curve  $C$  e  $\bar{C}$ : contrariamente a quanto avveniva per il contatto semplice, esso **non** dipende affatto dalle posizioni limiti di  $r$  e di  $M$ .

3. - Procedendo come nel caso precedente (A, 2) si trova una retta invariante determinata dagli intorni di ordine  $n + 2$  di  $O$  sulle due curve.

#### 4. - Invarianti proiettivi di una curva piana [D].

Se  $O$  è un punto regolare, non sestattico, di una curva piana  $C$  si consideri la conica  $\Gamma^2$  osculatrice in  $O$  e la cubica  $\Gamma^3$ , nodata in  $O$ , a contatto 7-punto in  $O$  con  $C$ : posto  $\bar{C} \equiv \Gamma^2$  e successivamente  $\bar{C} \equiv \Gamma^3$  il risultato indicato al n° precedente in B. 2. fornisce due invarianti infinitesimi di  $C$  dipendenti rispett. dagli intorni di ordini 5 e 7 di  $O$  (e di gradi 3 e 5 in  $\varepsilon$ ), cioè due forme differenziali del 1° ordine (nel differenziale del parametro che individua i punti della curva), o anche, integrando lungo  $C$ , due invarianti integrali. Il primo invariante infinitesimo e il rapporto (finito) di convenienti potenze dei due forniscono, a meno di fattori numerici inessenziali, l'arco proiettivo e la curvatura proiettiva, utilizzata da L. BERWALD e G. SANNIA per la riduzione a forma intrinseca ed invariante dell'equazione differenziale di una curva piana.

La retta invariante, di cui in B.3., è la normale proiettiva a  $C$  in  $O$ .

Si hanno così con sole considerazioni geometriche tutti gli elementi occorrenti per lo studio di una curva piana (priva di singolarità).

## 5. - Singolarità: punti di flesso [M].

Lo studio dei punti singolari è generalmente evitato nella geometria proiettivo-differenziale, mentre esso è proprio di sua pertinenza.

Studiare l'intorno di un dato ordine di un punto (singolare o no) di una curva vuol dire assegnare elementi geometrici (punti, rette, etc.) comuni a tutte le curve aventi in comune quell'intorno.

Per il flesso si hanno questi risultati:

*Se  $O$  è flesso di una curva  $C$ , le cubiche, a contatto 5-punto con  $C$  in  $O$ , dotate di cuspidi hanno le tangenti cuspidali passanti per uno stesso punto  $O_1$  della tangente in  $O$ : questo punto rappresenta l'intorno del 4° ordine del flesso su  $C$ .*

*Le cubiche cuspidate aventi contatto del 5° ordine con  $C$  in  $O$  hanno le loro cuspidi sopra una retta uscente da  $O$ : questa retta (insieme con  $O_1$ ) rappresenta l'intorno del 5° ordine di  $O$  su  $C$ .*

*$V$  è una cubica cuspidata avente contatto del 6° ordine con  $C$  in  $O$ : la sua cuspidi  $O_2$  (sulla retta precedente) individua (con  $O_1$ ) l'intorno del 6° ordine di  $O$  su  $C$ .*

Vale certo la pena (anche in vista della teoria delle superficie) di caratterizzare analogamente gli intorni di altri punti singolari.

## II. — Curve sghembe.

## 1. - Invarianti di contatto.

La teoria (proiettiva) del contatto di due curve sghembe, analoga a quella per le curve piane, non è stata fatta. C. SEGRE (\*) ha studiato il caso di due curve aventi in comune la tangente e il piano osculatore in un punto: si trova in questo caso un invariante

(\*) *Sugli elementi curvilinei che hanno comune la tangente e il piano osculatore.* Rendic. Acc. dei Lincei, s. V, vol. XXXIII, 1924.

riante (di Segre) finito; ma questo risultato è prevedibile perché, nell'ipotesi attuale e finché non si esce dagli intorni del 2° ordine delle due curve, si rimane sostanzialmente nel problema piano.

Nel caso generale del contatto di ordine  $n$ , intero  $\geq 1$ , in  $O$  delle due curve  $C$  e  $\bar{C}$  il procedimento da seguire per la ricerca degli invarianti di contatto è il seguente: Si seghino le due curve  $C$ ,  $\bar{C}$  e la tangente comune  $t$  con un piano  $\omega$  prossimo ad  $O$  nei punti  $P$ ,  $\bar{P}$ ,  $T$ ; poi si proiettino questi punti da una retta  $l$  per  $O$  e si consideri il birapporto  $D$  dei tre piani  $\pi$ ,  $\bar{\pi}$ ,  $\tau$  così ottenuti e di un 4° piano arbitrario  $\sigma$  per  $l$ .

Lo studio di  $D$ , cioè della sua dipendenza da  $\omega$ ,  $l$ ,  $\sigma$  fornirà gli invarianti di contatto delle due curve.

P. es.: Se  $n = 1$ , il  $\lim D$  quando  $\omega$  tende ad  $O$  non dipende affatto da  $\sigma$ , e non varia comunque vari  $l$  in un piano per  $t$ ; ed è precisamente uguale al birapporto di questo piano, del piano principale (di HALPHEN) relativo alle due curve in  $O$ , e dei loro due piani osculatori [si ha quindi un fascio di birapporti].

Se questi coincidono (è il caso trattato dal SEGRE) l'invariante precedente conserva ancora senso, ma non dipende più affatto dalla retta  $l$  ed è uguale all'invariante di SEGRE relativo alle proiezioni delle due curve da un punto qualunque sul piano osculatore comune.

Ulteriori ricerche avranno certo interesse. Il fatto che si ottenga un fascio di birapporti (cioè due essenziali) in relazione ad ogni intorno di  $O$  sulle due curve dipende dall'altro (e serve a precisarlo in modo proiettivo) che l'aumento di un'unità nel loro ordine di contatto equivale a due condizioni indipendenti.

## 2. - Piano, retta e punto principali [Q].

Indipendentemente dalla ricerca precedente, possiamo subito introdurre due nuovi invarianti geometrici relativi a due curve a contatto d'ordine  $n$  in  $O$ .

HALPHEN ha scoperto il piano principale luogo di un punto tale che i coni proiettanti da esso le due curve abbiano un contatto d'ordine  $n + 1$  lungo la generatrice per  $O$ .

Analogamente si prova che: *esistono in detto piano una retta principale e un punto principale tali che i coni proiettanti le due curve da un punto della retta o dal punto principale hanno lungo la generatrice per  $O$  un contatto d'ordine  $n+2$  o risp.  $n+3$ .*

### 3. - Invarianti proiettivi di una curva sghemba [Q].

Si associ al punto  $O$  di  $C$  la cubica sghemba osculatrice  $\Gamma^3$ . Con essa e con le quadriche a contatto 7-punto in  $O$  con  $C$  (passanti inoltre per il *punto di Sannia*) si ottiene un ben determinato sistema di riferimento (tetraedro fondamentale e punto unità). L'**arco proiettivo** di  $C$  si ottiene da quello di una sua proiezione piana (p. es. sul piano osculatore); *la conoscenza del punto principale relativo a  $C$  e a  $\Gamma^3$  in  $O$  equivale alla conoscenza delle due curvatures proiettive* (di SANNIA).

Sicchè anche in questo caso, come per le curve piane, si sono trovati in modo geometrico diretto tutti gli elementi fondamentali della teoria.

## III. — Superficie. — Le forme fondamentali.

### A. METODO DEGLI INVARIANTI INFINITESIMI.

#### 1. - Invarianti infinitesimi di contatto fra superficie.

Una sistemazione organica della teoria delle superficie deve fondarsi, come quella delle curve, sulla teoria del contatto di due superficie, cioè sulla determinazione degli invarianti proiettivi, finiti e infinitesimi, di contatto. La ricerca offre qui molto maggior varietà che nel caso delle curve, per le varie circostanze che possono presentare le due superficie anche quando sia fissato il loro ordine di contatto.

Ma qui, in vista del particolare risultato che si vuol raggiungere (ricostruzione geometrica delle forme invarianti di FUBINI) basterà occuparsi di un caso particolare della teoria stessa (corrispondente a quanto si è fatto per le curve piane in I-4).

#### 2. - L'elemento lineare proiettivo di una superficie [F].

Considero una superficie  $\sigma$  non rigata e un suo punto  $O$  generico (cioè tale che nessuna delle tangenti asintotiche sia a contatto più che tripunto con  $\sigma$ ). Quando occorrerà, mi servirò della rappresentazione parametrica  $x_i(u, v)$  in cui le linee  $u (dv=0)$  e  $v (du=0)$  rappresentino le asintotiche e le  $x_i$  siano le coordinate normali di FUBINI soddisfacenti al sistema [G. P. D., pagine 89-90]

$$(4) \quad \begin{cases} x_{u,u} = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + \nu x \\ x_{v,v} = \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} x_v + \gamma x_u + \nu x \end{cases}$$

Questa scelta è fatta al solo scopo di rendere più brevi i calcoli, ma non è affatto necessaria: essa, com'è noto, dipende dalla normalizzazione delle forme fondamentali, che noi ritroveremo in modo affatto indipendente; sicchè anzi *le nostre costruzioni geometriche danno un procedimento diretto per raggiungere tale normalizzazione (delle forme e delle coordinate proiettive)*.

Si consideri la quadrica  $Q$  di LIE [G. P. D., pag. 131] relativa ad  $O$ . Sia  $r$  una retta prossima ad  $O$  che seghi  $\sigma$ ,  $Q$  e il piano  $\tau$  tangente in  $O$  a  $\sigma$  rispettivamente nei punti  $O'$ ,  $O_q$ ,  $T$  prossimi ad  $O$ ; e sia  $M$  un punto preso a piacere su  $r$  diverso dai precedenti. Come varia il birapporto  $D = (O', O_q, T, M)$  al variare di  $r$  e di  $M$  (su  $r$ )? Se  $O'$  tende ad  $O$  sopra una curva non tangente ad una asintotica in  $O$  si ha:

$\alpha. \lim_{O' \rightarrow O} D = 1$  (è l'analogo dell'invariante di SEGRE), *indipendentemente dalle posizioni limiti della retta  $r$  e del punto  $M$ .*

$\beta$ . Il termine principale di  $\log D$  (invariante proiettivo infinitesimo) è indipendente dalle posizioni limiti (per  $O' \rightarrow O$ ) di  $r$  e di  $M$  e dipende soltanto dalla tangente in  $O$  alla curva sulla quale  $O'$  tende ad  $O$ ; esso vale

$$\frac{1}{3} \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{du dv}$$

(ove  $du/dv$  dà la tangente considerata), cioè fornisce un significato immediato dell'elemento lineare proiettivo di FUBINI (\*).

$\gamma$ . Se  $O'$  tende ad  $O$  sopra un'asintotica  $\lim_{O' \rightarrow O} D = 2/3$  per la quadrica di LIE; mentre è  $= 1$  se ad essa si sostituisce una quadrica avente (per generatrici le tangenti asintotiche in  $O$ ) contatto del 3° ordine con l'asintotica.

### 3. - Le due forme normali di Fubini [F].

Pure con un birapporto infinitesimo si lascia esprimere la forma normale quadratica di FUBINI.

Si consideri una qualsiasi curva di  $\sigma$  uscente da  $O$  in direzione  $du/dv$  e da un suo punto  $O'$  si conducano le asintotiche che taglieranno quelle per  $O$  in due punti  $O'_1$  e  $O'_2$ ; della loro congiungente si considerino i punti  $C'$  e  $C''$  d'intersezione con la quadrica di LIE e il birapporto  $D' = (O'_1 C' C'' O'_2)$ .

Il termine principale del birapporto  $D'$  quando  $O' \rightarrow O$  è un invariante proiettivo infinitesimo che dipende solo dalla tangente in  $O$  alla curva descritta da  $O'$  e vale

$$\frac{1}{9} \beta \gamma du dv$$

cioè (a meno di un fattore numerico) fornisce il significato geometrico della forma quadratica normale di Fubini,  $\varphi_2 = 2 \beta \gamma du dv$ .

(\*) Il TERRACINI, in una Nota Lincea in corso di stampa (1926<sub>2</sub>) ne dà la seguente interpretazione: le due tangenti asintotiche in  $O$  e quelle in  $O'$  segano la retta comune ai loro piani in 4 punti; uno dei loro birapporti ha per termine principale, quando  $O' \rightarrow O$ ,  $4/9$  del quadrato dell'elemento lineare proiettivo.

Il risultato vale, con un semplice cambiamento del fattore numerico, quando invece della quadrica di LIE si prenda una qualsiasi quadrica contenente le tangenti asintotiche di  $\sigma$  in  $O$ . In particolare, se la quadrica si spezza si ha il seguente risultato espressivo:

Se da un punto generico (non appartenente a  $\tau$ !) si proiettano sul piano tangente  $\tau$  le corde  $OO'_1$  ed  $OO'_2$  di  $\sigma$ , il termine principale del birapporto di queste due rette e delle tangenti asintotiche in  $O$  vale  $\frac{1}{4} \beta \gamma du dv$  (qualunque sia il centro di proiezione).

Questa semplicissima costruzione fornisce quindi direttamente la forma normale  $\varphi_2$  e, insieme con la precedente, la forma cubica normale  $\varphi_3 = 2 \beta \gamma (\beta du^3 + \gamma dv^3)$ : ed è proprio questa semplicità che dà ragione dell'importanza e dell'opportunità della normalizzazione raggiunta dal FUBINI per via analitica!

### 4. - Le prime forme elementari [N].

Chiamo così le forme monomie

$$\beta \frac{du^2}{dv}, \quad \gamma \frac{dv^2}{du}$$

la cui invarianza si dimostra subito sottoponendo le (1) ad una qualunque delle operazioni che non mutano la superficie  $\sigma$  e le linee parametriche (asintotiche) su di essa. La considerazione di queste forme elementari è forse più vantaggiosa di quelle normali del FUBINI: anche il loro significato geometrico è più semplice. Esso si ottiene pure da birapporti infinitesimi (nei quali non interviene la quadrica di LIE).

Si consideri un arco di curva  $OO'$  (di  $\sigma$ ) uscente da  $O$  ( $u, v$ ) in direzione  $du/dv$  e il punto d'intersezione  $O'_1$  dell'asintotica  $u$  uscente da  $O$  e dell'asintotica  $v$  uscente da  $O'$ : se  $T$  è il punto ove la  $O'_1 O'$  sega il piano tangente in  $O$  ed  $M$  è un punto qualsiasi di questa retta, il termine principale del birapporto  $(O'_1 O' T M)$  al tendere di  $O'$  ad  $O$  (purchè  $M$  non tenda ad  $O$ ) vale  $\frac{1}{6} \beta \frac{du^2}{dv}$ ; analogamente si ha l'altra forma elementare considerando invece

di  $O_1$  il punto  $O_2$  intersezione dell'asintotica  $v$  per  $O$  con l'asintotica  $u$  per  $O'$ .

La somma e il prodotto (dei termini principali) di questi due birapporti danno senz'altro l'elemento lineare proiettivo di Fubini e la forma quadratica normale (a meno di fattori numerici).

Il prodotto di una delle due forme elementari per il quadrato dell'altra fornisce i due invarianti, dipendenti ciascuno da un solo differenziale

$$d_1 s^3 = \beta^2 \gamma du^3, \quad d_2 s^3 = \beta \gamma^2 dv^3:$$

è conveniente assumere  $d_1 s$  e  $d_2 s$  (determinati a meno di una radice cubica dell'unità) come **elementi d'arco proiettivi delle asintotiche in  $O$** .

Consideriamo ora il reticolato delle linee asintotiche su  $\sigma$  e in particolare una *maglia* di esso, definita dai vertici  $O(u, v)$ ,  $(u + du, v)$ ,  $(u, v + dv)$ ,  $(u + du, v + dv)$ . La differenza fra gli archi proiettivi di due lati opposti della maglia, p. es. di quelli situati su asintotiche  $u$  ( $dv = 0$ ) è l'invariante infinitesimo

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} dv = \frac{d_2 d_1 s}{d_1 s};$$

sicchè:

*Le linee di Segre sono le diagonali di un reticolato di asintotiche i cui lati contigui (infinitesimi) hanno archi proiettivi uguali (per le linee di Darboux, che costituiscono l'altro sistema di linee diagonali, i lati contigui sono uguali e di segno opposto). Le linee canoniche sono diagonali di un reticolato di asintotiche in cui in ogni maglia le differenze degli archi proiettivi delle coppie di lati opposti sono uguali (e di segno opposto, per le linee coniugate a quelle canoniche).*

Anche del rapporto  $\left(\frac{d_1 s}{d_2 s}\right)^3 = \frac{\beta}{\gamma} \frac{du^3}{dv^3}$  può darsi un significato molto semplice: esso è il termine principale del birapporto dei punti  $O_1 O_2$ , del punto ove questa retta incontra il piano tangente e di un quarto punto arbitrario su di essa (non tendente ad  $O$  con  $O'$ ).

Dal prodotto dei birapporti che definiscono  $\varphi_2 = 2\beta\gamma du dv$  e p. es.  $\beta du^2/dv$  si ha il significato di  $d_1 s^3$  (indipendente dalla curva scelta a definire quei birapporti).

##### 5. - Alcuni elementi geometrici.

La conoscenza delle forme e, quindi, delle coordinate normali equivale geometricamente a fissare un tetraedro di riferimento relativo al punto  $O$  i cui vertici sono i punti  $x, x_u, x_v, x_{uv}$  che indicherò con  $O, O_1, O_2, O_3$ . Comunque si vari il fattore di proporzionalità delle  $x_i$ , cioè si assumano in loro vece le  $y_i = \rho x_i$  con  $\rho(u, v) \neq 0$  nel campo che si considera, i punti analoghi ad  $O_1, O_2$  descrivono le due tangenti asintotiche uscenti da  $O$ , mentre la retta  $OO_3$  è sempre la polare reciproca di  $O_1 O_2$  rispetto alla quadrica di LIE,  $Q$  (precisamente: i lati  $O_1 O_2$  e  $OO_3$  del tetraedro sono fissati appena si assegnino i valori di  $\rho_u/\rho$  e di  $\rho_v/\rho$ , cioè il  $d \log \rho$ ; per fissare  $O_3$  bisogna assegnare  $\rho$ ). Se le  $x$  sono coordinate normali di FUBINI, il lato  $OO_3$  è la normale proiettiva di FUBINI. Essa è stata definita geometricamente in vari modi. Il seguente è dovuto al TERRACINI (\*). È noto che esistono infinite omografie trasformanti la  $\sigma$  in una  $\sigma'$  avente un contatto del 3° ordine con  $\sigma$  in  $O$  (e tali che ciascuna tangente asintotica in  $O$  abbia per corrispondente sè stessa). Ogni tale omografia conserva anche l'intorno del 4° ordine di  $\sigma$  per una quaterna di direzioni di  $\sigma$  uscenti da  $O$ . Ad ogni retta uscente da  $O$ , considerata come retta unita in tali omografie corrisponde (in due modi diversi) un fascio di quaterne (associate) come le precedenti.

Se le quaterne associate ad una retta per  $O$  sono apolari alla terna di Segre (e perciò basta che lo sia una) quella retta è la normale proiettiva.

Un'altra costruzione della normale proiettiva, data di recente

(\*) Sul significato geometrico della normale proiettiva. Rend. Acc. dei Lincei, s. VI, vol. III, 1926.

dal FUBINI (\*\*) la ricollega alla considerazione delle quadriche di LIE relative ad  $O$  e ai punti infinitamente vicini sulle asintotiche per  $O$ .

Passo a caratterizzare [B] il vertice  $O_3$  del tetraedro fondamentale. Si considerino le due rigate costituite dalle normali proiettive uscenti dai punti delle due asintotiche per  $O$ . Il piano tangente ad una di esse in  $O$  tocca l'altra in un punto  $C (\neq O)$  della normale; sia  $M$  l'ulteriore punto d'incontro di questa normale con  $Q$ : il vertice  $O_3$  è il quarto armonico dopo  $O, C, M$ .

La quadrica  $Q$  di LIE (osculatrice lungo la generatrice per  $O$  ad una qualsiasi delle rigate delle tangenti asintotiche di un sistema uscenti dai punti dell'asintotica dell'altro sistema passante per  $O$ ) è un elemento essenziale nella determinazione sia degli invarianti infinitesimi (forme fondamentali) sia degli altri elementi geometrici (tetraedro relativo ad  $O$ ). Il seguente teorema [B] dà una proprietà dei singoli punti di essa:

*La quadrica di Lie è il luogo dei punti singolari della rete di complessi determinata dalla congruenza lineare speciale osculatrice in  $O$  ad una delle asintotiche e dal complesso lineare osculatore alla rigata delle tangenti asintotiche dell'altro sistema nei punti dell'asintotica considerata.*

Ancora da essa si può far dipendere [B] la determinazione delle terne di DARBOUX e di SEGRE e delle due direttrici di WILCZYNSKI; per queste si ha il teorema [K]:

*Si considerino i 4 punti ( $\neq O$ ) in cui  $Q$  tocca il proprio involuppo e i due lati, reciproci rispetto a  $Q$ , del quadrangolo (di Demoulin) da essi determinato; le due rette appoggiate ad essi, una per  $O$  l'altra nel piano tangente ivi  $\tau$ , sono le direttrici di Wilczynski.*

Altri elementi geometrici atti a caratterizzare i successivi intorno di un punto  $O$  della superficie si troveranno applicando p. es. le considerazioni fatte in I. 5 alle sezioni di  $\sigma$  con piani passanti per una tangente asintotica: ma una ricerca in tal senso non è ancora compiuta.

(\*\*) Nuova trattazione elementare dei fondamenti etc. Rend. Istit. Lombardo, vol. LIX, 1926.

## B. METODO DEI SISTEMI ASSIALI

### 1. - Definizione dei sistemi assiali.

All'esposizione di questo metodo occorre premettere la definizione di sistema assiale di curve sopra una superficie  $[A, O]$ . Per ogni punto  $O$  di  $\sigma$  si dia una retta (non contenuta in  $\tau$ ); i piani osculatori alle curve del sistema passanti per  $O$  contengono la retta. Il sistema assiale si dirà associato alla congruenza delle rette date (assi).

Dualmente, a partire da una congruenza di rette contenute nei piani  $\tau$  (ma non passanti per i relativi punti  $O$  di  $\sigma$ ), si possono definire i sistemi radiali (in corrispondenza alle due interpretazioni della retta-asse e della retta-raggio).

Se le rette delle due congruenze di un sistema assiale e di un sistema radiale una passante per  $O$ , l'altra contenuta in  $\tau$ , sono polari rispetto a  $Q$  i due sistemi si diranno polari  $[G]$ .

Ad ogni forma lineare  $l \bar{g}_1 \equiv l(h_1 du - h_2 dv)$  [ove  $l$  è un fattore numerico, ed  $h_1$  e  $h_2$  sono funzioni di  $u$  e  $v$ ] è associato un sistema assiale definito da

$$\beta\gamma (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) = -\beta\gamma (\beta du^3 - \gamma dv^3) + \varphi_2 l (h_1 du - h_2 dv)$$

e un sistema radiale (polare del precedente) definito da

$$\beta\gamma (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) = \beta\gamma (\beta du^3 - \gamma dv^3) + \varphi_2 l (h_1 du - h_2 dv)$$

ove  $\delta$  indica differenziali controvarianti costruiti rispetto a  $\varphi_2 = 2\beta\gamma du dv$  [il fattore  $\beta\gamma$  è posto soltanto per dare a ciascun termine carattere invariantivo].

L'importanza di questi sistemi per la teoria delle superficie e delle loro corrispondenze apparirà in seguito.

### 2. - Un invariante fondamentale. Curve anarmoniche.

Un secondo metodo  $[G]$  per la ricostruzione delle forme normali del FUBINI è basato sulla conoscenza di un sistema  $\infty^2$  di curve di  $\sigma$  invarianti per applicabilità proiettive. L'ordinaria

teoria dell'applicabilità si serve appunto del sistema  $\infty^2$  delle geodetiche: ma mentre in questo caso il dato fondamentale è il  $ds^2$ , di significato noto, nel caso proiettivo è proprio la conoscenza di una forma (p. es. quadratica) che ci manca e che anzi vogliamo ricostruire. È insomma la stessa difficoltà segnalata fin dal principio e che si ripresenta sotto altra forma.

A risolverla ci gioviamo qui del fatto che una direzione di  $\sigma$  uscente da un suo punto  $O$  possiede un invariante proiettivo. Tale è infatti l'invariante assoluto della quaterna di rette costituita dalle tre tangenti di DARBOUX e dalla direzione  $du/dv$  in  $O$ . Questo invariante finito, del 1° ordine, vale, a meno di un fattore numerico inessenziale  $I = \bar{\varphi}_3/\varphi_2^{3/2}$ ; e l'analogo, quando alle tangenti di DARBOUX si sostituiscono quelle di SEGRE è  $I' = \varphi_3/\varphi_2^{3/2}$ . Di questi due invarianti finiti del 1° ordine si conosce dunque il significato geometrico.

Chiamo **curve anarmoniche** quelle per le quali  $I = \text{costante}$ . La loro equazione differenziale è

$$\begin{aligned} \beta\gamma (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) &= \frac{1}{3} \frac{\delta \bar{\varphi}_3}{\varphi_3} \varphi_2 \\ &= -\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} du - \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} dv \right) \varphi_2. \end{aligned}$$

*I piani cuspidali del cono involupato dai piani osculatori alle curve anarmoniche in  $O$  passano per la retta di Segre relativa ad  $O$  (cioè per la retta, trovata da ČECH, per cui passano i piani osculatori alle curve di SEGRE in  $O$ ).*

3. - Le forme di Fubini [G].

Insieme ad  $I$  è naturalmente invariante  $d \log I$  completamente definito appena si dia un elemento del 2° ordine di una curva  $O$ ; si ha

$$d \log I = \frac{3 \varphi_3}{\varphi_3 \cdot \varphi_2} \beta\gamma (dv \delta^2 u - du \delta^2 v) + \frac{\delta \bar{\varphi}_3}{\varphi_3}.$$

Da questo invariante differenziale del 2° ordine si ricava un invariante del 1° ordine quando si calcoli per le curve di un sistema  $\infty^2$  proiettivamente definito su  $\sigma$  (sostituendo ai  $\delta^2$  in  $d \log I$  i loro valori tratti dall'equazione differenziale del sistema).

Tale è p. es. il *sistema assiale associato alla congruenza delle rette di Segre* (ritrovate or ora proprio in relazione ad  $I$ ); indicando con  $d_s \log I$  il valore di  $d \log I$  calcolato per una di queste curve si ha

$$d_s \log I^{2/3} = \varphi_2 / \varphi_2$$

che dà il *significato geometrico dell'elemento lineare proiettivo di Fubini. Ma di più*

$$\left[ \frac{d_s \log I^{2/3}}{I'} \right]^2 = \varphi_2, \quad \left[ \frac{d_s \log I^{2/3}}{I'^{2/3}} \right]^3 = \varphi_3,$$

*cioè la considerazione degli invarianti geometrici  $I$  ed  $I'$  e del sistema assiale associato alla ongruenza delle rette di Segre (pure definito in modo geometrico, indipendentemente da qualsiasi considerazione analitica) fornisce direttamente sia l'elemento lineare proiettivo di Fubini sia le sue forme normali. E l'opportunità della scelta di esse risulta di nuovo messa in luce dalla semplicità e naturalezza del loro significato.*

4. - Altre forme invarianti del 1° ordine.

Con lo stesso metodo può ottenersi il significato di altre forme invarianti. Accenniamo brevemente ad alcune [G].

α) Sulle geodetiche di  $\varphi_2$  è  $d_g \log I = \delta \bar{\varphi}_3 / \bar{\varphi}_3$  e similmente per  $d_g \log I'$ ; sicchè *calcolando  $d \log I$  sopra un elemento di 2° ordine di una qualsiasi curva e sulla geodetica di  $\varphi_2$  tangente si ha*

$$\left( \frac{\varphi_3}{\bar{\varphi}_3} \right)^2 = \frac{(d - d_g) \log I}{(d - d_g) \log I'}$$

*invariante finito del 1° ordine (e non del 2°, come poteva attendersi).*

β) Data la forma  $l\bar{g}_1 \equiv l(h_1 du - h_2 dv)$  cioè un sistema assiale e il sistema radiale polare, si considerino i piani osculatori in  $O(u, v)$  alle curve di questi sistemi in direzione  $d$ , il piano normale (contenente la normale pr.) per  $d$  e il piano  $\tau$  tangente in  $O$  a  $\sigma$ : il birapporto di questi piani è l'invariante finito del 1° ordine  $\varphi_2 \cdot l\bar{g}_1/\bar{\varphi}_3$ . Troveremo in seguito il significato di  $l\bar{g}_1$ .

IV. — Invarianti delle curve sopra una superficie.

1. — Curvatura proiettiva.

Data una curva  $C$  di  $\sigma$  uscente da un suo punto  $O$  le due forme normali, o l'elemento lineare proiettivo, ne costituiscono invarianti differenziali (infinitesimi) del 1° ordine [e con essi si può formare un invariante finito].

Vogliamo procurarci ora invarianti del 2° e del 3° ordine (cioè dipendenti dai differenziali 2° e 3° di  $u$  e  $v$ ) che diremo **curvatura e torsione proiettiva** (della curva in  $O$ ).

Sarà comodo porre  $ds^2 = \varphi_2$  ed indicare con  $\delta^2 u, \delta^2 v, \dots$  i differenziali controvarianti rispetto a  $\varphi_2$ .

Si consideri  $[F]$  la tangente  $t$  in  $O$  a  $C$  e la proiezione sul piano tangente  $\tau$ , fatta da un punto della normale proiettiva, di una corda  $OO'$  di  $C$ , e infine il birapporto  $D$  di queste due rette e delle due tangenti asintotiche.

La parte principale del  $\log D$  per  $O' \rightarrow O$  su  $C$  è

$$\frac{\beta\gamma (du\delta^2 v - dv\delta^2 u)}{\varphi_2} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\varphi}_3}{\varphi_2}$$

ove  $\bar{\varphi}_3 = 2\beta\gamma(\beta du^3 - \gamma dv^3)$ ; questo invariante proiettivo infinitesimo, diviso per  $ds$ , fornisce un invariante finito di  $C$  (**curvatura proiettiva**).

Proprietà caratteristica dei sistemi assiali di curve su  $\sigma$  è che la curvatura proiettiva è una funzione lineare dei parametri  $du/ds$ ,  $dv/ds$  della direzione che si considera uscente da  $O$ .

La **curvatura asintotica** di FUBINI di  $C$  in  $O$  è  $\beta\gamma(du\delta^2 v -$

$- dv\delta^2 u)/ds^3$ . Il suo significato geometrico, facilmente ricavabile dal precedente, è questo:

Su  $C$  e sulla geodetica di  $\varphi_2$  tangente a  $C$  in  $O$  si prendano i punti  $O'$  ed  $O''$  e si proiettino le corde  $OO'$  ed  $OO''$  da un punto della normale proiettiva sul piano tangente: il log. del birapporto di queste due proiezioni e delle due tangenti asintotiche in  $O$ , diviso per  $ds$ , ha per limite, quando  $O'$  ed  $O'' \rightarrow O$ , la curvatura asintotica di  $C$  in  $O$ .

2. — Curvatura relativa di due curve.

Più in generale  $[G]$  date due curve tangenti in  $O$ , in direzione  $d$ , si consideri in  $O' = O + dO$  il log. del birapporto delle tangenti alle due curve e delle tangenti asintotiche. Il suo termine principale è l'invariante infinitesimo

$$\frac{(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)_2 - (du\delta^2 v - dv\delta^2 u)_1}{du dv}$$

(ove gli indici 1 e 2 a numeratori stanno a distinguere gli elementi relativi alle due curve). Questo invariante infinitesimo, diviso per  $ds = \sqrt{2\beta\gamma du dv}$ , può dirsi **curvatura proiettiva relativa** delle due curve in  $O$ .

Se una di esse è l'estremale di  $\varphi_2$  tangente all'altra si ha proprio la curvatura asintotica di FUBINI.

Si hanno inoltre i teoremi  $[G]$ :

L'invariante infinitesimo precedente relativo ad una curva assiale e alla curva ad essa tangente del sistema radiale polare non dipende affatto dalla scelta di questi sistemi (cioè dalla forma  $l\bar{g}_1$  o dalla congruenza che li definisce) e vale  $2\bar{\varphi}_3/\varphi_2$ ; e si ha qui un nuovo mezzo per definire l'elemento lineare proiettivo di FUBINI.

L'invariante infinitesimo relativo ad una curva di un sistema assiale in  $O$  e alla curva, ivi tangente, del sistema assiale associato alla congruenza delle normali proiettive vale precisamente  $2l\bar{g}_1$

(forma che serve a definire il primo sistema assiale). Si ha così il significato dell'invariante integrale  $\int \bar{g}_1$  lungo una curva di  $\sigma$ .

Altri risultati in [G].

3. - Le forme elementari e gli invarianti di curvatura [N].

La ricerca di un invariante di curvatura di una curva  $C$  equivale in sostanza a determinare una scelta intrinseca dei differenziali secondi sulla curva stessa. Nelle formole precedenti i differenziali secondi  $\delta^2$  sono appunto controvarianti rispetto alla forma quadratica  $ds^2 = 2\beta\gamma du dv$ . Ma noi abbiamo in realtà due forme invarianti indipendenti, p. es. le due forme normali di FUBINI, o se si vuole le due forme elementari. Sicchè appare più giustificato procedere in modo che tutt'e due queste forme giochino nella formazione dell'invariante cercato.

E si potrà procedere così: Si prendano su  $C$  due archi (infinitesimi)  $OO'$  e  $O'O''$  con la condizione che una delle forme elementari o una loro funzione assuma per essi lo stesso valore: si determini poi la variazione subita dall'altra forma, o da un'altra funzione delle due forme, per la sostituzione dell'arco  $O'O''$  all'arco  $O'O'$ ; questa variazione è, data la sua definizione, un invariante (infinitesimo) di curvatura (da cui si passa subito ad un invariante finito).

Per esemplificare si considerino le due funzioni delle forme elementari

$$ds^2 = 2\beta\gamma du dv, \text{ e } \frac{d_2 s}{d_1 s} \text{ ovv. } \log\left(\frac{d_2 s}{d_1 s}\right) = \frac{1}{3} \log \gamma / \beta + \log \frac{dv}{du}.$$

Se si pone la condizione che  $OO'$  e  $O'O''$  abbiano lo stesso  $ds$  la variazione  $\delta$  subita da  $d_2 s / d_1 s$  per il passaggio da  $OO'$  ad  $O'O''$  è definita da

$$\frac{\delta}{ds} \log\left(\frac{d_2 s}{d_1 s}\right) = \frac{2}{3} \left( \psi_1 \frac{du}{ds} - \psi_2 \frac{dv}{ds} \right) + 2\beta\gamma \frac{du \delta^2 v - dv \delta^2 u}{ds}$$

ove  $\psi_1 = \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}$ ,  $\psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}$  e  $\delta^2$  sono i differenziali controvarianti rispetto a  $\varphi_2$ .

Se invece è  $d_2 s / d_1 s$  che si assume costante sugli archi  $OO'$  ed  $O'O''$  la variazione  $\Delta$  subita dal  $ds$  della curva  $C$  in questo passaggio è definita da

$$2 \frac{\Delta ds}{ds^2} = \frac{1}{3} \left( \psi_1 \frac{du}{ds} + \psi_2 \frac{dv}{ds} \right) + \beta\gamma \frac{du \Delta^2 v + dv \Delta^2 u}{ds^3}$$

ove

$$\Delta^2 u = d^2 u + \frac{1}{3} \frac{\partial \log \beta / \gamma}{\partial u} du^2; \quad \Delta^2 v = d^2 v + \frac{1}{3} \frac{\partial \log \gamma / \beta}{\partial v} dv^2.$$

Mentre la condizione d'invarianza nel 1° caso è  $du \delta^2 v + dv \delta^2 u = 0$  (che in fondo equivale al Lemma di RICCI) nel 2° caso è invece  $du \Delta^2 v - dv \Delta^2 u = 0$ ; ma, è bene ripeterlo, la scelta dell'una o dell'altra condizione è in nostro arbitrio.

4. - Metodo generale per la costruzione di invarianti.

Trasporto proiettivo [C].

Oltre ai metodi precedenti per la costruzione di invarianti differenziali del 2° ordine v'è un metodo di portata più generale (in quanto può applicarsi anche a problemi diversi dall'attuale) fondato sulle osservazioni seguenti.

Sia dato un problema di variazione relativo all'integrale  $\int f(u, v, v') du = \int ds$  e una forma quadratica in  $du, dv$  definita anche a meno d'un fattore (cioè un'equazione quadratica nei differenziali  $du, dv$ ). In un punto  $O(u, v)$  si consideri una direzione  $d(du/dv)$  e un'altra direzione  $\delta(\delta u/\delta v)$ . Si può definire come parallela a  $\delta$  in  $O' = O + dO$  in rapporto al problema di variazione assegnato quella direzione uscente da  $O'$  per la quale il (log. del) birapporto di essa, della estemale di  $\int ds$  per  $OO'$  e delle due direzioni che annullano la forma quadratica (in  $O'$ ) è uguale al (log. del) birapporto delle analoghe direzioni in  $O$ .

Come si vede se il  $ds$  è il solito elemento lineare della geometria riemanniana e se l'equazione quadratica in  $du/dv$  è proprio  $ds^2 = 0$  si ha senz'altro il trasporto parallelo di LEVI-CIVITA. Ma in molti casi, come appunto nella teoria proiettiva delle superficie, può essere necessario distinguere il problema di variazione, cioè lasciar libera la scelta della funzione  $f$ , dalla scelta dell'equazione quadratica; si ottiene così da due diversi punti di vista una maggior generalità: e nella scelta di  $f$  e nell'indeterminazione del fattore della forma quadratica.

Mettiamoci nel caso della geometria proiettivo-differenziale. Data  $\sigma$  risulta definito (senza alcuna normalizzazione) l'elemento lineare proiettivo di FUBINI (anche per le superficie rigate, finora escluse)

$$ds = \frac{\beta du^2 + \gamma dv^2}{du dv}$$

e così pure l'equazione quadratica  $du \times dv = 0$  che rappresenta in ogni punto le tangenti asintotiche (mentre  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  esigono una normalizzazione).

Si possono perciò applicare le considerazioni precedenti alle pangeodetiche [estremali di  $\int (\beta du^2 + \gamma dv^2)/du dv$ ] e a  $du dv = 0$ ; e quindi si può definire il trasporto proiettivo di una direzione  $\xi_1 = \frac{\delta u}{\delta s}$ ,  $\xi_2 = \frac{\delta v}{\delta s}$  (v. le formole relative in [C]). È chiaro che, definito questo trasporto (ripetiamolo: indipendente da ogni normalizzazione) si può servirsene per la costruzione di invarianti proiettivi.

Così p. es. data una curva uscente da  $O$  in direzione  $d$ , se si fa il trasporto proiettivo di  $d \equiv \delta$  secondo  $d$  cioè se si costruisce in  $O' = O + dO$  la tangente alla pangeodetica uscente da  $O$  in direzione  $d$ , il log. del birapporto di questa, della tangente in  $O'$  alla curva e delle tangenti asintotiche (in  $O'$ ) diviso per il  $ds$  dà un invariante di 2° ordine relativo alla curva (che può dirsi curvatura pangeodetica) espressa da [C]:

$$\frac{2\beta\gamma (du \delta^2 v - dv \delta^2 u)}{\varphi_3} + \frac{1}{2} (\psi_1 du - \psi_2 dv) \frac{\varphi_2}{\varphi_3} - \frac{1}{2} (\beta \psi_2 du^2 - \gamma \psi_1 dv^2) \frac{\varphi_2^2}{\varphi_3^2}$$

ove  $\delta^2$  indica di nuovo differenziali secondi controvarianti rispetto a  $\varphi_2$  [ma va qui ripetuto che il servirsi nella scrittura, per brevità, delle forme normali  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  non implica affatto la loro conoscenza] e  $\psi_1 = \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}$ ,  $\psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}$ .

Quanto s'è detto per l'elemento lineare proiettivo può ripetersi per i problemi relativi a  $\delta \int \sqrt{\varphi_2} = 0$  e a  $\delta \int \sqrt{\varphi_3} = 0$  quando si sia trovato, come in III A o in III B, il significato di  $\varphi_2$  e di  $\varphi_3$ ; e così pure per le estremali delle forme elementari.

5. - La torsione proiettiva. - Sezioni piane.

Per definire un invariante del 3° ordine di  $C$  procediamo così. Si consideri un punto  $O'$  prossimo ad  $O$  su  $C$  e un punto  $O''$  sulla sezione piana osculatrice in  $O$  a  $C$ , e si proiettino, da un punto della normale proiettiva su  $\tau$ , le due corde  $OO'$  ed  $OO''$ . Se  $O'$  ed  $O''$  tendono insieme ad  $O$  il log. del birapporto delle due proiezioni e delle tangenti asintotiche in  $O$  (cioè l'angolo infinitesimo proiettivo delle due proiezioni), diviso per  $ds (= \sqrt{2\beta\gamma} du dv)$  è un invariante del 3° ordine di  $C$  che si dirà torsione proiettiva; esso vale:  $S/ds^3$  ove

$$S = \beta\gamma (du \delta^3 v - dv \delta^3 u) \varphi_2 - \frac{1}{2} \beta\gamma (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) \varphi_3 + 3\beta\gamma (\beta du^2 \delta^2 u - \gamma dv^2 \delta^2 v) \varphi_2 - \frac{1}{4} \varphi_3 \bar{\varphi}_3 + \bar{\psi}_2 \varphi_2^2 - \bar{\varphi}_4 \varphi_2$$

$$\bar{\varphi}_2 = \left( n + \frac{3}{2} \beta \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \right) du^2 - \left( \nu + \frac{3}{2} \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} \right) dv^2$$

$$\bar{\varphi}_4 = \beta^2 \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} du^4 - \beta \gamma^2 \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} dv^4.$$

Un altro modo per giungere ad un invariante differenziale del 3° ordine, non essenzialmente diverso dal precedente, è questo: *La distanza proiettiva di O' dal piano osculatore in O, quando si prenda come assoluto la quadrica di Lie, divisa per  $ds^{3/2}/\sqrt{3}$ , è l'invariante  $S/\varphi_3 \varphi_2^{3/4}$ . Il rapporto fra gli ultimi due invarianti dà un nuovo significato geometrico dell'invariante finito (del 1° ordine)  $\varphi_3/\varphi_2^{3/2}$ .*

Si noterà che la (prima) curvatura proiettiva è invariante per applicabilità proiettive di  $\sigma$  (quindi anche per collineazioni) mentre la torsione proiettiva è invariante solo per collineazioni. Ciò è in completo accordo col fatto (e serve a chiarirlo) che le applicabilità proiettive operano su  $\sigma$  come collineazioni fino all'intorno del 2° ordine di un punto generico, ma non fino al 3°.

*L'equazione  $S = 0$  è l'equazione differenziale (intrinseca, cioè espressa con soli elementi relativi a  $\sigma$ ) delle sezioni piane di  $\sigma$ .*

#### 6. - La terza forma fondamentale di Fubini.

Chiamiamo così la forma normale quadratica di Fubini che uguagliata a zero fornisce le linee di curvatura proiettive di  $\sigma$ :

$$c_1 du^2 - c_2 dv^2 = \left( n + \beta \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \right) du^2 - \left( \nu + \gamma \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} \right) dv^2.$$

Ebbene [F]:

*Il valore della terza forma fondamentale, relativo ad un punto e ad una direzione, si ottiene moltiplicando per  $ds^2$  la torsione proiettiva della linea assiale, associata alla congruenza delle normali proiettive (III B, 1 per  $l=0$ ) che esce dal punto nella direzione assegnata.*

### V. - Invarianti proiettivi di una superficie.

#### 1. - Osservazioni generali.

$\alpha$ ) Sia dato un invariante del 1° ordine  $I_1$  (dipendente cioè da  $u, v, du, dv$ ): se è dato un sistema  $\infty^1$  di curve (dipendenti da un'equazione differenziale del 1° ordine) definito proiettivamente su  $\sigma$  si avrà un invariante  $I_0$  relativo al punto  $u, v$  della superficie calcolando  $I_1$  sulla curva del sistema che vi passa (o sulle curve che vi passano, nel qual caso si otterranno invarianti irrazionali dai quali si traggono facilmente invarianti razionali): basterà sostituire in  $I_1$  l'espressione (o le espressioni) di  $du/dv$  tratte dall'equazione differenziale.

Potranno servire allo scopo le linee asintotiche, le linee di DARBOUX e quelle di SEGRE, le linee di curvatura proiettiva etc. (purchè per il sistema adottato  $I_1$  non perda senso o assuma semplicemente un valore numerico).

$\beta$ ) Analogamente da un invariante del 2° ordine  $I_2$  (contenente  $u, v, du, dv, d^2u, d^2v$ ) si trae un invariante  $I_0$  calcolandolo per gli elementi del 2° ordine delle curve di un sistema  $\infty^1$  (come quelli già considerati); oppure  $\gamma$ ) un invariante  $I_1$  calcolandolo per le curve di un sistema  $\infty^2$  proiettivamente definito su  $\sigma$  (p. es. per il sistema di linee assiali associato alle normali proiettive, o alle rette di SEGRE etc.); e dall'invariante  $I_1$  si passa come s'è detto ad un invariante  $I_0$ .

Si hanno così *invarianti puntuali di una superficie* Gli invarianti ottenuti saranno tali per applicabilità proiettive o soltanto per collineazioni secondo che in essi si possono far figurare soltanto  $\beta$  e  $\gamma$  o invece anche  $n$  e  $\nu$  (o  $c_1$  e  $c_2$ ).

#### 2. - Invarianti dell'elemento lineare proiettivo.

Ad illustrare in modo concreto le considerazioni precedenti  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) vogliamo ritrovare [C], dandone il significato geometrico, alcuni *invarianti dell'elemento lineare proiettivo*, in base ai quali,

come si sa dalla teoria svolta dal CARTAN e dal Čech, è possibile decidere dell'applicabilità proiettiva di due superficie.

$$\text{Poniamo come prima } \phi_1 = \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}, \quad \phi_2 = \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}.$$

Calcolando, secondo  $\alpha$ ), l'invariante  $\phi_1 \frac{du}{ds} - \phi_2 \frac{dv}{ds}$  per le linee di DARBOUX e per le linee di SEGRE si ottengono invarianti (irrazionali, e da essi, con opportune combinazioni, invarianti razionali) che equivalgono alla conoscenza degli invarianti  $\Phi, \Psi, \Psi'$  di Čech [G. P. D., pag. 333].

Calcolando, secondo  $\beta$ ), la curvatura pangeodetica delle linee di SEGRE in un punto e facendone il prodotto si ha di nuovo l'invariante  $\Psi'$ .

Secondo  $\gamma$ ) la curvatura pangeodetica delle linee assiali associate alla congruenza degli spigoli di GREEN è un invariante del 1° ordine; il prodotto dei valori ch'esso assume per le linee di SEGRE è l'invariante  $\Psi''$ .

Ancora: la curvatura pangeodetica della estremale di  $\varphi_2$  uscente da un punto in direzione canonica equivale (noti  $\Psi'$  e  $\Psi''$ ) alla conoscenza di  $\Phi$ .

Invece le curvature pangeodetiche delle linee canoniche e delle loro coniugate, secondo  $\beta$ ), equivalgono alla conoscenza di  $\Theta$  e  $\Theta'$  (noti  $\Phi, \Psi, \Psi'$  e i due invarianti  $H$  e  $K$ ).

### 3. - Le forme elementari e gli invarianti precedenti.

Ma il metodo più regolare per l'acquisto degli invarianti e che ne dà un significato geometrico immediato è il seguente [N].

Consideriamo di nuovo gli elementi d'archi (proiettivi) di asintotiche definiti da

$$d_1 s^3 = \beta^2 \gamma du^3, \quad d_2 s^3 = \beta \gamma^2 dv^3.$$

La variazione subita da ciascuno di essi passando da un lato di una maglia asintotica all'opposto, riferita al prodotto dei due ele-

menti iniziali è evidentemente un invariante della superficie; si hanno così i due invarianti (irrazionali) del 1° ordine

$$\frac{d_1 d_2 s}{d_1 s d_2 s} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 \gamma}} \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}, \quad \frac{d_2 d_1 s}{d_1 s d_2 s} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{\beta \gamma^2}} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}$$

da cui gli invarianti razionali

$$\Phi = \frac{2}{\beta \gamma} \phi_1 \phi_2; \quad \Psi = \frac{1}{\beta^2 \gamma} \phi_1^3 + \frac{1}{\beta \gamma^2} \phi_2^3; \quad \Psi' = \frac{1}{\beta^2 \gamma} \phi_1^3 - \frac{1}{\beta \gamma^2} \phi_2^3.$$

La variazione subita dal 1° invariante spostandosi lungo l'asintotica  $v$ , riferita al suo elemento d'arco è l'invariante del 2° ordine:

$$\frac{d_2}{d_2 s} \left( \frac{d_1 d_2 s}{d_1 s d_2 s} \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta \gamma^2}{\partial u \partial v};$$

analogamente si ha

$$\frac{d_1}{d_1 s} \frac{d_2 d_1 s}{d_1 s d_2 s} = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta^2 \gamma}{\partial u \partial v};$$

e da essi

$$-K = \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} = \left( \frac{d_1 d_2 d_1 s}{d_1 s} + \frac{d_2 d_1 d_2 s}{d_2 s} \right) / d_1 s d_2 s$$

$$-\frac{1}{3} H = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta / \gamma}{\partial u \partial v} = \left( \frac{d_1 d_2 d_1 s}{d_1 s} - \frac{d_2 d_1 d_2 s}{d_2 s} \right) / d_1 s d_2 s$$

(con  $d_1 s d_2 s = \beta \gamma du dv$ ).

Cerchiamo ora la variazione subita dal 1° invariante  $\frac{d_1 d_2 s}{d_1 s d_2 s}$  quando ci si sposti lungo l'asintotica  $u$  dell'elemento  $d_1 s$ . È naturalmente da porsi  $d_1 d_1 s = 0$  il che fornisce

$$\frac{d_1^2 u}{d_1 s^2} = -\frac{1}{3} \frac{1}{(\beta^2 \gamma)^{2/3}} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial u}$$

e in conseguenza si ha

$$\frac{1}{3} \left( \frac{\partial^2 \log \beta \gamma^2}{\partial u^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial u} \right) \frac{1}{(\beta^2 \gamma)^{2/3}} = \frac{d_1}{d_1 s} \left( \frac{d_1 d_2 s}{d_1 s d_2 s} \right)$$

e analogo invariante scambiando 1 e 2 (e così  $\beta$  e  $\gamma$ ,  $u$  e  $v$ ).

In luogo di essi si possono prendere gli altri due:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \frac{1}{\beta^2 \gamma} \left( \frac{\partial^2 \log \beta \gamma^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} \right) \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} = \\ = \frac{1}{2} \frac{d_1}{d_1 s} \left( \frac{d_1 d_2 s}{d_1 s d_2 s} \right)^2 - \left( \frac{d_1 d_2 s}{d_1 s d_2 s} \right)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \frac{1}{\beta \gamma^2} \left( \frac{\partial^2 \log \beta^2 \gamma}{\partial v^2} - \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial v} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \right) \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} = \\ = \frac{1}{2} \frac{d_2}{d_2 s} \left( \frac{d_2 d_1 s}{d_1 s d_2 s} \right)^2 - \left( \frac{d_2 d_1 s}{d_2 s d_1 s} \right)^3 \end{aligned}$$

e da questi per somma e differenza si hanno gli altri due

$$\Theta = \frac{\psi_1^2}{\beta^2 \gamma} \frac{\partial \log \psi_1 / \beta \gamma}{\partial u} + \frac{\psi_2^2}{\beta \gamma^2} \frac{\partial \log \psi_2 / \beta \gamma}{\partial v}$$

$$\Theta' = \frac{\psi_1^2}{\beta^2 \gamma} \frac{\partial \log \psi_1 / \beta \gamma}{\partial u} - \frac{\psi_2^2}{\beta \gamma^2} \frac{\partial \log \psi_2 / \beta \gamma}{\partial v}.$$

Così apparisce chiara la formazione di questi invarianti: quelli del 1° ordine misurano la differenza degli archi (proiettivi) dei lati opposti di una maglia asintotica; quelli del 2° ordine non sono altro che le derivate di essi secondo le asintotiche passanti per il punto in cui si calcola l'invariante.

#### 4. - Invarianti per collineazioni.

Agli invarianti precedenti (di cui altri significati possono trovarsi nei miei lavori) aggiungiamo ora alcuni invarianti per collineazioni [K]. Com'è noto la quadrica di LIE relativa al punto  $O$  e quella relativa ad un punto infinitamente vicino sopra un'asintotica si tagliano (oltre che nelle due tangenti asintotiche in  $O$ ) in due rette appoggiate alla tangente all'asintotica considerata (sono due lati del quadrangolo di DEMOULIN).

Per ogni tangente asintotica si possono quindi considerare i quattro piani seguenti: il piano tangente, il piano normale (contenente la normale proiettiva) e i piani contenenti due lati del quadrangolo di DEMOULIN. Se si fa, per ciascuna tangente asintotica, il prodotto di due convenienti birapporti dei detti piani (allo scopo di ottenere invarianti razionali) si hanno i due *invarianti per collineazioni*

$$\frac{1}{\psi_2^2} \left\{ \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial v} (\beta \psi_2) - \gamma \psi_1 - 2v \right\}, \quad \frac{1}{\psi_1^2} \left\{ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial u} (\gamma \psi_1) - \beta \psi_2 - 2v \right\}.$$

Ciò vale se  $\psi_1 \neq 0$  e  $\psi_2 \neq 0$ . Se p. es.  $\psi_1 = 0$  ( $\psi_2 \neq 0$ ), nel qual caso le linee canoniche sono asintotiche di un sistema ( $dv = 0$ ), i quattro piani relativi ad una tangente asintotica ( $dv = 0$ ) formano gruppo armonico; se ciò avviene per tutt'e due le tangenti asintotiche è  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  la superficie è a linee canoniche indeterminate (e le linee di Darboux sono estremali di  $\varphi_2$ ). Le precedenti proprietà sono caratteristiche [K].

Invariante per collineazioni è il birapporto dei due fuochi della normale proiettiva e dei punti d'intersezione con la quadrica di LIE; esso vale [G]

$$\frac{K - 1 + 2\sqrt{c_1 c_2 / \beta \gamma}}{K - 1 - 2\sqrt{c_1 c_2 / \beta \gamma}}$$

ove  $K = -\frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v}$  è la curvatura di  $\varphi_2$  e  $c_1$  e  $c_2$  sono i

coefficienti della 3ª forma fondamentale. Esso è armonico se e solo se  $K = 1$ .

È pure invariante il birapporto dei piani tangenti alle due rigate delle normali proiettive secondo le asintotiche uscenti da  $O$  in  $O$  e nel quarto vertice  $O_3$  del tetraedro canonico (già definito geometricamente in III A, 5) e vale  $[G]$ :

$$c_1 c_2 / \beta^2 \gamma^2 (K - 1)^2.$$

Invarianti per collineazioni, dipendenti dalle derivate di  $n$  e di  $v$  si ottengono applicando i procedimenti esposti nel n° precedente alle due forme elementari invarianti per collineazioni  $ndu^2$  e  $v dv^2$ : ad evitare errori è bene notare che queste forme sono invarianti per cambiamenti dei parametri sulle asintotiche, ma non per cambiamento del fattore di normalizzazione (cioè, a differenza delle forme elementari invarianti per applicabilità proiettive che si costruiscono partendo o dal sistema (1) o da uno qualsiasi dei suoi trasformati, le nuove forme vanno costruite in relazione al sistema (1) cui soddisfano le coordinate normali di FUBINI).

## VI. — La geometria delle superficie nello spazio rigato.

### Metodo iperspaziale.

#### 1. — Rappresentazione iperspaziale del complesso delle tangenti ad una superficie $[E]$ (\*)

La superficie  $\sigma$  può considerarsi, oltre che come luogo di punti o come involuppo dei suoi piani tangenti, come l'insieme delle sue tangenti, cioè come un ente (complesso particolare di

(\*) Vedi anche la mia Memoria già citata, *Sull'equazione di Laplace*, n. 17.

rette) dello spazio rigato. Quando si adotti questo punto di vista (\*) l'ambiente naturale per lo studio di  $\sigma$  è la varietà (quadratica) delle rette di  $S_3$ , cioè una iperquadrica  $\Omega$  (a 4 dimensioni) dello spazio lineare a 5 dimensioni  $S_5$ . I punti di  $\Omega$  "rappresentano", le rette dello spazio ordinario  $S_3$ : come si rappresenta una superficie  $\sigma$  (complesso delle sue tangenti) su  $\Omega$ ?

Questo complesso contiene  $\infty^2$  fasci di rette: e poichè ogni fascio si rappresenta in una retta di  $\Omega$  la superficie  $\sigma$  si rappresenta in una  $V_3$  rigata (le cui generatrici appartengono ad  $\Omega$ ). Evidentemente ciò non basta a caratterizzare il nostro particolare complesso. Bisogna esprimere il fatto che le faccette (punto e piano) infinitamente vicine dei fasci sono in posizione congiunta o, ciò che fa lo stesso, che in ciascun fascio esistono due rette (le tangenti asintotiche) che appartengono anche a fasci infinitamente vicini. In  $S_5$  (entro  $\Omega$ ): ogni retta  $g$  della  $V_3$  è incontrata da due generatrici infinitamente vicine, cioè possiede due fuochi  $A$  e  $A^*$ : questi due fuochi rappresentano le tangenti asintotiche, siano  $a$  ed  $a^*$ , uscenti dal punto  $O$  di  $\sigma$  (rappresentato, come centro del fascio, in  $g$ ). Quando  $O$  descrive  $\sigma$  (quindi  $g$  la  $V_3$ )  $A$  e  $A^*$  descrivono due superficie  $\Phi$  e  $\Phi^*$  le quali rappresentano le due congruenze delle tangenti asintotiche (del sistema cui appartiene  $a$  o rispettiv.  $a^*$ ) di  $\sigma$ .

Per la natura stessa di  $V_3$ , cioè per il fatto che le sue rette si lasciano ordinare, in due modi diversi, in  $\infty^1$  sviluppabili, circoscritte a  $\Phi$  (o a  $\Phi^*$ ) e i cui spigoli di regresso stanno su  $\Phi^*$  (o su  $\Phi$ ), risulta che 1°) ciascuna superficie  $\Phi$  e  $\Phi^*$  possiede un doppio sistema coniugato; 2°)  $\Phi$  e  $\Phi^*$  sono trasformate di Laplace una dell'altra.

(\*) Ad esso si riferisce il notevole lavoro di G. THOMSEN: *Ueber eine liniengeometrische Behandlungsweise der projektiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung*. [Abhandlungen des Math. Seminars, Hamburg; vol. IV, 1925] ove, fra l'altro, il T. caratterizza le congruenze di quadriche (e non di regoli, come si farà appresso) che sono di LIE per una superficie. Sicchè, in termini iperspaziali, si tratta piuttosto dello studio di una superficie di  $S_3$  che di una situata sopra una iperquadrica di  $S_5$ .

Qual'è il significato dei due sistemi coniugati esistenti su  $\Phi$  e su  $\Phi^*$ ?

Sia  $a$  tangente all'asintotica  $u$  ( $dv = 0$ ) in  $O$  [e  $a^*$  all'asintotica  $v$  ( $du = 0$ )]. La sviluppabile tangente a quell'asintotica si rappresenta in una curva di  $\Phi$  e (poichè due tangenti dell'asintotica  $u$  infinitamente vicine s'incidono) le tangenti a questa curva sono rette  $g$  di  $V_3$ ; cioè questa curva appartiene al doppio sistema coniugato di  $\Phi$  (essendo lo spigolo di regresso di una sviluppabile contenuta in  $V_3$ ). Analogamente si vede che la rigata delle tangenti alle asintotiche  $u$  ( $dv = 0$ ) nei punti di una asintotica  $v$  ( $du = 0$ ) si rappresenta in una curva di  $\Phi$  pure appartenente al doppio sistema coniugato. Sicchè:

*Se i punti  $A$  di  $\Phi$  rappresentano le tangenti asintotiche alle linee del sistema  $u$  ( $dv = 0$ ) di  $\sigma$ , su  $\Phi$  rimane definito un doppio sistema coniugato ( $u, v$ ): le linee  $u$  ( $dv = 0$ ) rappresentano le sviluppabili tangenti alle asintotiche  $u$ ; le linee  $v$  rappresentano le rigate delle tangenti alle asintotiche  $u$  nei punti delle linee  $v$  di  $\sigma$ .*

*Analoghe osservazioni per  $\Phi^*$  scambiando ovunque  $u$  e  $v$ .  $\Phi^*$  è la trasformata di Laplace di  $\Phi$  secondo le linee  $u$  (e così  $\Phi$  è la trasformata di  $\Phi^*$  secondo le linee  $v$ ).*

Indichiamo ancora con  $\Phi_1$  la trf.<sup>ta</sup> di LAPLACE di  $\Phi$  secondo le linee  $v$  e con  $\Phi_1^*$  la trf.<sup>ta</sup> di L. di  $\Phi^*$  secondo le linee  $u$ ; sicchè

$$\Phi_1 \Phi \Phi^* \Phi_1^*$$

sono 4 superficie consecutive nella successione delle trasformate di LAPLACE.

## 2. - Regoli di Lie.

Sulla quadrica di LIE, relativa al punto  $O$  di  $\sigma$ , distinguiamo due regoli: quello di cui fa parte  $a$  e l'altro cui appartiene  $a^*$ . Consideriamo p. es. il primo. Esso è individuato da  $a$  e dalle due tangenti asintotiche dello stesso sistema infinitamente vicine uscenti da punti della linea  $v$  per  $O$ . In  $S_5$ : i tre punti immagini delle tre tangenti ora nominate determinano il piano osculatore in  $A$  alla linea  $v$  di  $\Phi$ ; questo piano ( $\sigma$ , se si vuole, la sua intersezione con  $\Omega$ ) rappresenta il regolo di LIE (e l'altro regolo appar-

tenente alla stessa quadrica di LIE si ottiene in modo analogo ragionando su  $\Phi^*$ ; il che equivale a prendere il piano polare del precedente). Sicchè:

*I regoli di Lie (di un sistema) relativi a  $\sigma$  si rappresentano nei piani osculatori alle linee  $v$  di  $\Phi$  (o alle linee  $u$  di  $\Phi^*$ ).*

Se si osserva che il piano osculatore in  $A$  alla linea  $v$  di  $\Phi$  è il piano tangente nel punto corrispondente  $A_1$  alla trasformata  $\Phi_1$  si arriva alla seguente **condizione caratteristica** per le congruenze di regoli che sono di Lie per una superficie:

*Condizione necessaria e sufficiente affinchè  $\infty^2$  piani di  $S_5$  rappresentino i regoli di Lie relativi ad una superficie  $\sigma$  è che 1) essi siano tangenti ad una superficie, sia  $\Phi_1$ , possedente un doppio sistema coniugato; 2) le due trasformate successive in un senso (con le notazioni di prima, secondo le linee  $u$ ), siano  $\Phi$  e  $\Phi^*$ , appartengano all'iperquadrica  $\Omega$  delle rette. La terza trasformata  $\Phi_1^*$  (nello stesso senso) rappresenta, con i suoi piani tangenti, i regoli dell'altro sistema.*

La condizione 2) relativa alla seconda trasformata  $\Phi^*$  può esser sostituita da quest'altra: *gli  $S_3$  osculatori alle linee  $u$  di  $\Phi_1$  siano tangenti ad  $\Omega$ .*

## 3. - Rigate asintotiche lungo le linee di Darboux e di Segre.

Chiamiamo *rigata asintotica* una rigata le cui generatrici siano tangenti alle asintotiche (di un sistema) lungo una linea di  $\sigma$ . Se questa è un'asintotica dell'altro sistema i suoi regoli osculatori sono appunto i regoli di LIE.

Ora vogliamo prendere in esame le rigate asintotiche circoscritte a  $\sigma$  lungo le linee di DARBOUX o di SEGRE e caratterizzare la totalità  $\infty^2$  dei loro regoli osculatori.

Per ciò ritorniamo alla superficie  $\Phi$  (se le rigate in esame hanno per generatrici tangenti alle asintotiche  $u$  di  $\sigma$ ) di  $S_5$  e ricordiamo una proprietà generale delle superficie di  $S_5$ .

Ho definito (\*) su queste certi sistemi doppi, *coniugati di 2<sup>a</sup>*

(\*) *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi.* Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XLVI, 1922. V. anche in questo Volume, Appendice III, § 9.

specie, con la seguente proprietà: *Le tangenti alle curve di un sistema nei punti di una linea dell'altro formano una rigata d'indice di sviluppabilità 2* (cioè due generatrici infinitamente vicine, ma non tre, sono linearmente indipendenti).

Una volta definito il coniugio di 2<sup>a</sup> specie (in cui le linee dei due sistemi hanno ufficio differente, a differenza di quanto avviene per quello di 1<sup>a</sup> specie) ci si può chiedere se esistano *direzioni autoconiugate* (di 2<sup>a</sup> specie) o *principali*. E si trova (\*) che: *sopra una superficie generica di  $S_3$  esistono in ogni punto 5 direzioni autoconiugate; a meno che la superficie possieda un doppio sistema coniugato ordinario, nel qual caso in ogni punto esistono tre sole direzioni autoconiugate o principali.*

In questo caso le **linee principali**, involupate dalle tangenti principali, hanno la seguente proprietà caratteristica: lo spazio  $S_3$  osculatore ad una di esse in un punto è contenuto nello  $S_4$  cui appartiene l'intorno del 2° ordine del punto della superficie [con la mia terminologia, questo  $S_4$  è 2-**osculatore** alla superficie nel punto e le linee principali sono **quasi-asintotiche**  $\gamma_{2,3}$  sulla superficie].

La superficie  $\Phi$  possiede appunto un doppio sistema coniugato; quindi tre sistemi di linee principali. E precisamente:

*Le linee principali di  $\Phi$  (o di  $\Phi^*$ ) rappresentano le rigate asintotiche (di un sistema) circoscritte a  $\sigma$  lungo le linee di Darboux. La loro proprietà caratteristica equivale al teor. di Čech per cui le due rigate asintotiche lungo una linea di Darboux hanno questa per linea flecnodale e ciascuna rigata è costituita dalle tangenti quadripunte dell'altra.*

Inoltre:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\infty^2$  regoli di  $S_3$  siano quelli osculatori alle rigate asintotiche lungo le curve di Darboux di una superficie  $\sigma$  è che i piani rappresentativi in  $S_3$  siano osculatori alle linee principali di una superficie  $\Phi$  che possieda un doppio sistema coniugato le cui tangenti in un sistema siano rette di  $\Omega$ .*

Se in ogni punto  $A$  di  $\Phi$  si costruisce la coniugata armonica di una tangente principale rispetto alle linee  $u$  e  $v$  (del doppio

(\*) l. c. sopra.

sistema coniugato) queste tangenti involupano un nuovo sistema di linee (di cui tre per ogni punto) rappresentanti le *rigate asintotiche* (di un sistema; per avere quello dell'altro si operi allo stesso modo su  $\Phi^*$ ) *circoscritte a  $\sigma$  lungo le linee di Segre.*

#### 4. - Nuove quadriche invarianti.

Se si approfitta del fatto (\*) che i piani osculatori a curve (di  $\Phi$ ) uscenti da un punto secondo direzioni divise armonicamente dalle tangenti alle linee  $u$ ,  $v$  stanno in uno stesso  $S_3$ , si conclude che il piano osculatore ad una linea principale in  $A$  e quello osculatore alla linea ora costruita (la cui tangente è coniugata armonica etc.) si tagliano in una retta: ma di più le tre rette relative al punto  $A$  (in relazione alle tre linee principali per  $A$ ) stanno in un piano  $\pi$ . Analogamente si ottiene un piano  $\pi^*$  relativo al punto  $A^*$  di  $\Phi^*$ . Interpretando tutto ciò nello spazio ordinario si ha il teorema:

*In ogni punto  $O$  di  $\sigma$  si consideri una linea di Darboux, la linea di Segre coniugata e i regoli osculatori in  $O$  alle rigate asintotiche (di un sistema; cui appartiene p. es.  $\mathbf{a}$ ) circoscritte lungo esse a  $\sigma$ . Questi due regoli hanno in comune, oltre alla generatrice  $\mathbf{a}$  in  $O$  un'altra retta; le tre rette che così si ottengono (variando la linea di Darboux in  $O$ ) stanno con  $\mathbf{a}$  in uno stesso regolo (e vi formano una quaterna equianarmonica); alla quadrica sostegno appartiene pure la tangente  $\mathbf{a}^*$ .*

*Questa quadrica e quella di Lie relativa ad  $O$  si segano ulteriormente (cioè oltre che in  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^*$ ) in due rette.*

Un'altra quadrica, pure invariante per applicabilità proiettive di  $\sigma$ , si ottiene scambiando  $\mathbf{a}$  ed  $\mathbf{a}^*$  nelle costruzioni precedenti. Queste due quadriche coincidono (fra loro e con quella di LIE) se e solo se  $\sigma$  è una superficie di coincidenza. [G. P. D., pag. 157].

(\*\*\*) *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* Atti Accad. Torino, vol. XLVIII, 1913; n. 7.

## 5. - Il fascio canonico.

Possiamo giovarci dei piani  $\pi$  e  $\pi^*$  costruiti per dare una nuova costruzione del fascio canonico. Si prova infatti che il piano  $\pi$  incontra la retta  $A^*A_1^*$  in un punto  $\bar{A}^*$ ; e così il piano  $\pi^*$  incontra la retta  $AA_1$  in un punto  $\bar{A}$ . La proiettività  $AA_1\bar{A} \dots \bar{A}A^*A_1^*\bar{A}^* \dots$  determina una quadrica, il cui  $S_3$  ambiente, come si prova facilmente, è quello dei due piani di  $\Omega$  passanti per la retta  $A\bar{A}$ . Le due generatrici di questa quadrica situate nei due piani ora detti (e diverse dalla  $AA^*$ ) rappresentano (con i loro punti) il fascio canonico di  $\sigma$  relativo al punto  $O$  e il suo polare rispetto alla quadrica di Lie (in  $O$ ): i punti in cui esse tagliano la  $AA^*$  rappresentano la tangente canonica e la sua coniugata; e quelli in cui tagliano la  $A_1A_1^*$  rappresentano le direttrici di Wilczynski, etc.

Ritengo che le considerazioni precedenti siano atte a dare un'idea della fecondità del metodo iperspaziale per lo studio di una superficie  $\sigma$  dello spazio ordinario. È chiaro che le configurazioni di cui ci siamo serviti non sono che le più immediate per lo studio di  $\sigma$ ; ma tutta la successione delle trasformate di Laplace di  $\Phi$  e  $\Phi^*$ , i loro sistemi coniugati e i piani ad essi osculatori, gli  $S_4$  2-osculatori a queste superficie, etc., forniscono configurazioni geometriche naturalmente legate a  $\sigma$  e invarianti per applicabilità proiettive di essa. Ogni particolarità relativa a detta successione (p. es. l'esser terminata da una parte o da tutt'e due; l'esser periodica etc.) dà luogo a particolarità di  $\sigma$  e mette in luce famiglie di superficie notevoli rispetto al gruppo delle applicabilità proiettive.

Alcune di queste famiglie, le prime che si sono presentate, ritroveremo in seguito da questo punto di vista.

Ma di più questo metodo iperspaziale fornisce in modo del tutto spontaneo alcuni invarianti fondamentali della teoria. È appunto di questi che vogliamo occuparci.

## 6. - Determinazione iperspaziale delle forme elementari [E] (\*).

Lo spazio  $S_4$  2-osculatore in  $A$  a  $\Phi$  è tangente in  $A^*$  ad  $\Omega$ ; e viceversa lo  $S_4^*$  2-osculatore in  $A^*$  a  $\Phi^*$  è tangente ad  $\Omega$  in  $A$ .

Si consideri ora un punto  $A' \notin A$  di  $\Phi$  e la maglia formata dalle linee  $(u, v)$  di  $\Phi$  passanti per  $A$  e  $A'$ : precisamente sia  $A'_1$  (o  $A'_2$ ) il punto d'intersezione della linea  $u$  (o  $v$ ) uscente da  $A$  con la linea  $v$  (o  $u$ ) uscente da  $A'$ .

La retta  $A'A'_1$  tagli lo  $S_4^*$  nel punto  $T_1^*$  e sia  $M$  un punto generico di essa. Si faccia poi tendere  $A'$  ad  $A$  sopra una curva avente in  $A$  la direzione  $du/dv$ .

Il termine principale del birapporto  $(A'_1A'T_1^*M)$  quando  $A' \rightarrow A$  come s'è detto (mentre  $M$  tende ad un punto qualsiasi della tangente in  $A$  alla linea  $v$ , purchè  $\neq A$ ), vale  $1/12$  del quadrato della forma elementare  $\beta du^2/dv$ .

Operando analogamente sul punto  $A^*$  di  $\Phi^*$  si ha il significato di  $\gamma dv^2/du$ .

Da queste due forme si hanno subito quelle di FUBINI (III A, 4; pag. 684); ma anche la forma quadratica normale ha un significato iperspaziale molto semplice.

Si consideri la retta  $A'_1A'_2$  e siano  $T$  e  $T^*$  i suoi punti d'intersezione con  $S_4$  ed  $S_4^*$ .

Il termine principale del birapporto  $(A'_1A'_2T^*T)$ , quando  $A' \rightarrow A$  come s'è detto, vale  $1/24$  della forma normale  $\varphi_2 = 2\beta\gamma du dv$ .

Infine ecco il significato del rapporto degli elementi d'arco proiettivi delle asintotiche uscenti da  $O$ .

Se la retta  $A'A'_1$  incontra lo  $S_4$  in  $T_1$  ed  $M$  è un punto generico di essa, non tendente ad  $A$  quando  $A' \rightarrow A$ , si ha

$$\lim_{A' \rightarrow A} (T_1A'A_1M) = -\beta du^3/\gamma dv^3 = -(d_1s/d_2s)^3.$$

Questi risultati si enunciano facilmente nello  $S_3$  di  $\sigma$ .

(\*) Nota II.: Ancora sulla geometria delle superficie etc. [Rend. Lincei, 1926<sub>2</sub>].

7. - Invarianti e classi di superficie invarianti.

Dalle coordinate  $x_i$  del punto  $O$  di  $\sigma$  si passa a quelle  $p_i$  del punto  $A$  di  $\Phi$  con le posizioni

$$p_1 = x_1 \frac{\partial x_2}{\partial u} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad p_2 = x_1 \frac{\partial x_3}{\partial u} - x_3 \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

$$p_3 = x_1 \frac{\partial x_4}{\partial u} - x_4 \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad p_4 = x_1 \frac{\partial u_4}{\partial u} - x_4 \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

$$p_5 = x_4 \frac{\partial x_2}{\partial u} - x_2 \frac{\partial x_4}{\partial u}, \quad p_6 = x_2 \frac{\partial x_3}{\partial u} - x_3 \frac{\partial x_2}{\partial u}$$

in modo che l'equazione di  $\Omega$  è  $p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$ .

L'equazione di LAPLACE cui soddisfa  $\Phi$ , o meglio il suo sistema coniugato, è

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} - \left( \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \beta \gamma}{\partial u} \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} + \beta \gamma \right) p = 0.$$

Essa ha gli invarianti relativi

$$h = - \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} + \beta \gamma, \quad k = \beta \gamma$$

quindi l'invariante assoluto

$$h/k = - \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} + 1.$$

Analogamente dall'equazione relativa a  $\Phi^*$  si ricava l'invariante assoluto (ove  $h^* = k$ )

$$k^*/h^* = - \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \partial v} + 1.$$

Di questi due invarianti (del 2° ordine) di  $\sigma$  si ha il significato geometrico come invarianti di contatto (di coniche) secondo quanto è stato detto in I, 2 (pag. 675).

Da essi si hanno per somma e per differenza i due invarianti

$$\frac{h}{k} + \frac{k^*}{h^*} = - \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} + 2;$$

$$\frac{h}{k} - \frac{k^*}{h^*} = - \frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta / \gamma}{\partial u \partial v}$$

che sono due degli invarianti fondamentali dell'elemento lineare proiettivo (il primo, diminuito di 2, è la curvatura proiettiva media di  $\sigma$  secondo Fubini).

S'intende che: gli invarianti assoluti delle successive trasformate di LAPLACE di  $\Phi$  e di  $\Phi^*$  danno pure invarianti di  $\sigma$  per applicabilità proiettive; così p. es. indicando  $h_1$  e  $k_1 (= h)$  gli invarianti relativi a  $\Phi_1$ , si ha l'invariante

$$\frac{h_1}{k_1} = - \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v} + 2 - \frac{k}{h}$$

cioè l'invarianza di  $-\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v}$ .

Più interessante è vedere come, da queste considerazioni iperspaziali, vengano naturalmente messe in luce alcune classi di superficie.

1) Se  $h = 0$  le asintotiche di un sistema su  $\sigma$  appartengono a complessi lineari (v. *Sull'equazione di Laplace*, n. 17) e si ritrova così l'equazione caratteristica di Čech [G. P. D., p. 113].

2) Se  $h + k^* = 0$ , cioè se gli invarianti assoluti di  $\Phi$  e di  $\Phi^*$  sono uguali e di segno opposto si ha pure un'altra classe di superficie studiata da Čech [G. P. D., pag. 151].

3) Se  $h = k^*$ , cioè se gli invarianti assoluti di  $\Phi$  e di  $\Phi^*$  sono uguali, la superficie è isotermo-asintotica.

4) Se  $h = k$ , cioè se  $\Phi$  è ad invarianti (relativi) uguali è  $\beta = U \cdot V \neq 0$  e (con le eventuali trasformazioni  $U du = d\bar{u}$ ,  $V dv = d\bar{v}$ ,  $\bar{\gamma} = V^2 U \gamma$  può farsi  $\bar{\beta} = 1$  cioè) le forme normali

possono ridursi al tipo  $\varphi_2 = 2\bar{\gamma} d\bar{u} d\bar{v}$ ,  $\varphi_3 = \bar{\gamma} d\bar{u}^3 + \bar{\gamma}^2 d\bar{v}^3$  quindi  $\sigma$  è una superficie  $R_0$  [G. P. D., pag. 361].

5) Se  $h_1 = k$  cioè se  $\Phi$  e  $\Phi_1$  hanno gli stessi invarianti (scambiati di posto) si hanno le superficie caratterizzate da

$$-\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} + \frac{\gamma}{\beta} = U(u) \cdot V(v).$$

6) Se  $h_1 = k_2$ , cioè se  $\Phi_1$  ha invarianti relativi uguali si hanno le superficie caratterizzate da

$$-\beta \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} + \beta^2 \gamma = U(u) \cdot V(v).$$

7) Se  $h_1 = 0$  si hanno le superficie caratterizzate da

$$\frac{\partial^2 \log (h \beta^2)}{\partial u \partial v} = \beta \gamma.$$

È così via. Le superficie delle ultime tre classi (che involgono la prima trasformata  $\Phi_1$  di  $\Phi$ ) non sono state ancora studiate (\*).

(\*) Ad un'altra classe di superficie, pure invariante per applicabilità proiettive, si arriva ponendosi la domanda seguente [I]: Dato un sistema assiale ( $\infty^2$ ) di linee sopra una superficie non rigata, contiene esso un doppio sistema coniugato ( $\infty^1$ )? La risposta è in generale negativa; può contenerne al più uno o due; a meno che tutte le linee del sistema assiale si possano distribuire in  $\infty^1$  sistemi coniugati, nel qual caso la superficie ha curvatura  $K = -\frac{1}{\beta \gamma} \frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} = -8$ , o la congruenza cui quel sistema assiale è associato è necessariamente quella degli spigoli di GREEN (e quindi quel sistema è unico).

Se invece la superficie è rigata esistono infiniti sistemi assiali (dipendenti da una funzione arbitraria) le cui curve si possono distribuire in  $\infty^1$  doppi sistemi coniugati (e gli assi per ciascun punto stanno in un piano che, al variare del punto sulla generatrice per esso, involupa una cubica sghemba).

Se poi la superficie è una quadrica, basta che un sistema assiale contenga un doppio sistema coniugato affinché tutte le sue curve si possano distribuire in  $\infty^1$  sistemi coniugati. L'esistenza di tre tali sistemi (i cui assi in un punto non siano complanari) è caratteristica delle quadriche.

8. - Sistemi di curve invarianti.

I sistemi assiali di curve sopra una superficie  $\sigma$ , le estremali di  $\varphi_2$  e delle forme elementari, le linee anarmoniche soddisfano tutti ad equazioni del tipo

$$du d^2 v - dv d^2 u = a du^3 + b du^2 dv + c du dv^2 + e dv^3$$

o, introducendo i differenziali controvarianti  $\delta$  rispetto a  $\varphi_2$

$$(1) \quad \begin{aligned} \beta \gamma (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) &= \theta_1 \beta^2 \gamma du^3 + \theta_2 \beta \gamma^2 dv^3 + l \bar{g}_1 \cdot \varphi_2 \\ &= \theta_1 d_1 s^3 + \theta_2 d_2 s^3 + l \bar{g}_1 \cdot \varphi_2 \end{aligned}$$

ove  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono invarianti (finiti) ed  $l \bar{g}_1 = l h_1 du - l h_2 dv$  è una forma differenziale invariante di 1° ordine.

Questi sistemi di curve molto generali, la cui equazione è stata indicata da FUBINI, si lasciano tutti caratterizzare geometricamente rimanendo nello  $S_3$  di  $\sigma$ : mi sembra opportuno premettere a questa caratterizzazione la loro genesi iperspaziale.

In ogni punto  $A$  di una superficie  $\Phi$  dotata di un doppio sistema coniugato (non necessariamente appartenente ad  $S_3$ ) si dia un piano situato nello  $S_4$  2-oscultore in  $A$  ma non incidente (in una retta) il piano tangente in  $A$  a  $\Phi$ . Rimane allora definito  $[L]$  su  $\Phi$  un sistema  $\infty^2$  di curve dotato della seguente proprietà: *i piani osculatori alle curve passanti per  $A$  tagliano in rette il piano dato (piano d'appoggio) per  $A$ .*

Un tal sistema di curve si dirà **sistema planare**. Sia ora  $\Phi$  la superficie di  $\Omega$  che rappresenta le tangenti asintotiche  $a$  di  $\sigma$  [E, Nota II.]. Al piano d'appoggio generico in  $A$  corrisponde, nello  $S_3$  di  $\sigma$ , un regolo, o se si vuole una **quadrica d'appoggio**, diciamola  $Q$ , contenente le due tangenti asintotiche  $a$  ed  $a^*$  uscenti da  $O$  ( $A$  è generica nel senso di non contenere altra tangente asintotica di  $\sigma$  infinitamente vicina ad  $a$ ). Al piano oscultore ad una curva di  $\Phi$  in  $A$  corrisponde il regolo oscultore lungo  $a$  alla rigata delle tangenti alle asintotiche  $u$  lungo una curva di  $\sigma$ : diciamo la quadrica, cui detto regolo appartiene, **quadrica asintotica osculatrice del 1° sistema** in  $O$  alla curva (una quadrica del 2° sistema si otterrebbe scambiando le asintotiche  $u$  con le  $v$ ).

Ad un sistema planare di curve su  $\Phi$  corrisponde su  $\sigma$  un sistema  $\infty^2$  di curve così definite:

*Sia data in ogni punto  $O$  di  $\sigma$  una (generica) quadrica  $Q$  contenente le tangenti asintotiche in  $O$ . Le quadriche asintotiche osculatrici del 1° sistema in  $O$  alle curve in esame segano ulteriormente (cioè fuori delle tangenti asintotiche in  $O$ )  $Q$  in rette.*

In altri termini: ciascuna di queste quadriche sega  $Q$  in un quadrilatero d'appoggio di cui fanno parte le tangenti asintotiche in  $O$ .

La trasformazione di LAPLACE che porta da  $\Phi$  a  $\Phi^*$  fa corrispondere ad un sistema planare di  $\Phi$  un sistema planare di  $\Phi^*$ ; cioè in  $S_3$ :

*Le quadriche asintotiche del 2° sistema osculatrici in  $O$  alle curve ora definite tagliano in quadrilateri sghembi una stessa quadrica  $Q^*$ , completamente individuata da  $Q$ .*

Insomma nella definizione di questi sistemi di curve si possono scambiare i due sistemi di asintotiche purchè alla quadrica d'appoggio  $Q$  (in ogni punto  $O$ ) se ne sostituisca un'altra, ben determinata,  $Q^*$ .

*I sistemi definiti dalle precedenti proprietà sono rappresentati su  $\sigma$  da un'equazione differenziale del tipo (1).*

Sicchè dare la (1) equivale geometricamente ad assegnare in ogni punto  $O$  di  $\sigma$  una quadrica  $Q$  (o  $Q^*$ ) nel modo detto. Ora vogliamo effettivamente costruire  $Q$  a partire da  $\theta_1, \theta_2, l\bar{g}_1$  e di più, per ogni tangente  $du/dv$ , costruire la quadrica asintotica osculatrice del 1° sistema alla curva di (1) che ha quella tangente, o se si vuole, il relativo quadrilatero d'appoggio (\*).

Poniamo

(\*) Le quadriche asintotiche osculatrici del 1° e del 2° sistema relative alla curva (1) uscente da  $O$  in direzione  $du/dv$  si tagliano (fuori delle tangenti asintotiche) in una conica per  $O$ ; il luogo di queste coniche al variare di  $\theta_1, \theta_2, l\bar{g}_1$ , (fissata  $du/dv$ ) è una ben determinata quadrica (formante fascio con la quadrica di LIE e col piano tangente contato due volte). Le due quadriche osculatrici si toccano in tutti i punti delle due tangenti asintotiche uscenti da  $O$  se e solo se la tangente  $du/dv$  è una tangente di DARBOUX. La quadrica luogo ora determinata è indipendente dalla tangente  $du/dv$  se è solo se  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  cioè per le superficie a linee canoniche indeterminate.

$$T = |X, x, x_u, x_v|, \quad N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|, \quad N_2 = |X, x, x_v, x_{uv}|,$$

$$\Omega = |X, x_u, x_v, x_{uv}|$$

ove i secondi membri indicano determinanti costruiti con le coordinate normali  $x_i (u, v)$  di  $O$  e con quelle  $X_i$  di un punto generico di  $S_3$ ; e inoltre  $H = -\left(\frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} + \beta \gamma\right) / \beta \gamma = K - 1$

e, come prima,  $\psi_1 = \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u}, \quad \psi_2 = \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}.$

In relazione al sistema (1) giova considerare la retta di equazioni

$$2) \quad N_1 = \left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2}\right) T, \quad N_2 = -(lh_2 + \psi_2) T$$

definita dalla sola forma  $l\bar{g}_1$ ; la diremo **retta invariante**; i i piani di cui si sono scritte ora le equazioni passano per essa e rispettivamente per la tangente asintotica  $\alpha$  od  $\alpha^*$ . (Un'altra retta invariante si avrebbe riferendosi a  $Q^*$  invece che a  $Q$ ).

Consideriamo separatamente dal caso generale i casi  $\theta_1^2 = 1$  nei quali si spezza  $Q$  (e analogamente  $\theta_2^2 = 1$  nei quali si spezza  $Q^*$ ).

$\alpha$ ) I sistemi per i quali  $\theta_1 = -1$  (o  $\theta_2 = +1$ ).

Se  $\theta_1 = -1$ ,  $Q$  si spezza nel piano tangente  $T = 0$  e nel piano

$$-2(lh_2 + \psi_2)N_1 + 2\left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2}\right)N_2 +$$

$$3) \quad + \left[2\left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2}\right)(lh_2 + \psi_2) - \beta \gamma (H + \theta_2)\right] T = 2\Omega.$$

*Le quadriche asintotiche osculatrici del 1° sistema alle curve del sistema (1) per  $\theta_1 = -1$  toccano il piano (3) nei punti della conica sua intersezione col cono quadrico*

$$4) \quad \left[\left(lh_1 + \frac{\psi_1}{2}\right) T - N_1\right]^2 + \beta T [(lh_2 + \psi_2) T + N_2] = 0;$$

il punto di contatto della quadrica relativa alla tangente  $du/dv$  appartiene alla generatrice del cono complanare con la retta invariante e con la coniugata armonica di detta tangente (rispetto a quelle asintotiche).

Dalle equazioni (3) e (4) si ha ancora :

Se nel sistema (1) si lasciano fissi  $\theta_1 = -1$  ed  $l\bar{g}_1$ , i piani (2) formano fascio intorno alla polare della retta invariante rispetto alla quadrica di Lie, e le coniche luogo dei punti di contatto in essi si distribuiscono sul cono (4).

Conclusioni analoghe per  $\theta_2 = +1$  si hanno per  $Q^*$ .

Si può aggiungere che se  $\theta_1 = -1$  (o  $\theta_2 = +1$ ) il cono di 3<sup>a</sup> classe involupato dai piani osculatori in  $O$  alle curve del sistema (1) si spezza in un piano e in un cono quadrico  $[G, n. 3]$ ; se  $\theta_1 = -1$  e  $\theta_2 = 1$  si hanno i sistemi assiali dei quali qui risultano nuove proprietà.

$\beta$ ) I sistemi per i quali  $\theta_1 = +1$  (o  $\theta_2 = -1$ ).

Per  $\theta_1 = 1$ ,  $Q$  si spezza nei due piani (2).

Le quadriche asintotiche del 1° sistema osculatori in  $O$  alle curve integrali di (1) per  $\theta_1 = 1$  passano tutte per uno stesso punto  $P$  (dipendente da  $\theta_2$ ) della retta invariante; viceversa se ciò accade è  $\theta_1 = 1$ . Il punto appartiene alla quadrica di Lie relativa ad  $O$  se e solo se  $\theta_2 = 0$ .

I piani in  $P$  tangenti a queste quadriche involupano un cono la cui traccia su  $T = 0$  non dipende affatto da  $\theta_2$  (ma solo da  $l\bar{g}_1$ ) ed è la conica di equazione

$$4(lh_2 + \phi_2)N_1^2 - 4\left(lh_1 + \frac{\phi_1}{2}\right)N_1N_2 + \beta N_2^2 + 4\Omega N_1 = 0$$

passante per  $O$ .

Il piano tangente in  $P$  alla quadrica relativa alla tangente  $du/dv$  tocca questa conica nel punto  $\pm O$  in cui essa è incontrata dalla quarta armonica dopo  $a$ , la tangente data ed  $a^*$ .

$\gamma$ ). Il caso generale  $\theta_1^2 \pm 1$  (o  $\theta_2^2 \pm 1$ ).

Per un punto generico dello spazio passano le quadriche asintotiche del 1° sistema osculatori in  $O$  a curve del sistema (1) relative a tre direzioni  $du/dv$ .

Il luogo dei punti per i quali queste direzioni costituiscono una terna apolare alle tangenti asintotiche in  $O$  è la retta invariante (2).

Caratterizzata così la retta invariante la caratterizziamo  $Q$ . Il loro punto d'intersezione  $\pm O$  dipende solo da  $l\bar{g}_1$  e da  $\theta_2$ ; cioè

Tutte le quadriche d'appoggio  $Q$  relative agli infiniti sistemi (1) che si ottengono variando  $\theta_1$  (fissi  $l\bar{g}_1$  e  $\theta_2$ ) passano per uno stesso punto della retta invariante (relativo alla terna  $du^3 = 0$ ).

Il luogo del punto ora determinato al variare di  $l\bar{g}_1$  è una nuova quadrica  $\tilde{Q}$  caratterizzata solo da  $\theta_2$ , di equazione

$$N_1N_2 = \left\{ \Omega + \frac{1}{2} \beta \gamma (\mathbf{H} + \theta_2) T \right\} T;$$

essa appartiene al fascio formato dalla quadrica di LIE (con la quale coincide se e solo se  $\theta_2 = 0$ ) e dal piano tangente in  $O$  contato due volte ed è individuata dal suo ulteriore punto d'intersezione ( $\pm O$ ) con la normale proiettiva: infatti il birapporto dei punti  $OO_3$  (vertici del tetraedro fondamentale; v. pag. 687) e dei punti d'intersezione della  $OO_3$  con  $\tilde{Q}$  e con la quadrica di LIE vale  $1 + \theta_2 / \mathbf{H}$ , cioè si sa costruire appena dato  $\theta_2$  (poichè  $\mathbf{H}$  dipende solo dalla curvatura proiettiva  $K$  di  $\sigma$  in  $O$ ) (\*).

Ad un'altra quadrica invariante  $\tilde{Q}^*$ , individuata in modo analogo da  $\theta_1$  soltanto, si arriva operando su  $Q^*$ .

Ora siamo in grado di dare la costruzione della quadrica d'appoggio  $Q$  in  $O$  relativa al sistema (1).

Si costruisca, data  $l\bar{g}_1$ , la retta invariante  $c$ , dato  $\theta_2$ , la quadrica  $\tilde{Q}$  nel modo ora detto. Poi nel fascio determinato dai piani

(\*) La quadrica  $\tilde{Q}$  si può anche caratterizzare (indipendentemente dal suo punto d'incontro con la normale proiettiva) così: essa è asintotica osculatrice del 1° sistema alla curva del sistema (1) uscente da  $O$  in direzione  $du = 0$ . Sicchè per costruire  $\tilde{Q}$  basta conoscere l'elemento del 2° ordine di questa curva in  $O$ . Questa curva ha per piano osculatore in  $O$ , come l'asintotica  $v$ , il piano ivi tangente a  $\sigma$  e l'invariante proiettivo di contatto di queste due curve (v. pag. 679) vale  $1 - \theta_2$ . In particolare esse si osculano se  $\theta_2 = 0$ ; se invece  $\theta_2 = 1$  la curva in esame del sistema (1) ha un flesso in  $O$ .

asintotici (2) per la retta invariante e da  $\bar{Q}$  si costruisca la quadrica avente con  $\bar{Q}$  in  $O$  l'invariante di contatto (\*)  $\frac{\theta_1+1}{\theta_1-1}$ : questa è  $Q$ .

Passiamo alla costruzione della quadrica asintotica del primo sistema osculatrice alla curva di (1) uscente da  $O$  in direzione  $du/dv$ : basterà determinarne il quadrilatero d'appoggio su  $Q$ , o, ciò che fa lo stesso, il punto di contatto, non appartenente alle tangenti asintotiche, con  $Q$ . Essa è fornita dai teoremi seguenti:

*Il luogo dei punti di contatto con  $Q$  delle quadriche osculatrici in  $O$  alle curve di (1) è la cubica sghemba intersezione residua (tolta la retta invariante) di  $Q$  con il cono di equazione*

$$\left[ (lh_1 + \frac{\psi_1}{2}) T - N_1 \right]^2 + \frac{\beta}{2} (1 - \theta_1) [(lh_2 + \psi_2) T + N_2] T = 0$$

dipendente solo da  $\bar{g}_1$  e da  $\theta_1$  (su di esso stanno quindi le  $\infty^1$  cubiche ottenute variando  $\theta_2$ ; mentre le  $\infty^2$  cubiche ottenute variando  $\theta_1$  e  $\theta_2$  si distribuiscono sopra un fascio di coni bitangenti etc.).

*Il punto di contatto relativo alla tangente  $du/dv$  si ottiene secondo la cubica col piano della retta invariante e della tangente coniugata armonica di quella data (rispetto ad  $a$  ed  $a^*$ ),*

Aggiungiamo infine le seguenti osservazioni.

*Per i sistemi (1) caratterizzati da  $\theta_1 = -\theta_2$  e per essi soli si ha  $\bar{Q} \equiv \bar{Q}^*$ ; e queste due quadriche coincidono con la quadrica di Lie se e solo  $\theta_i = 0$ .*

*I sistemi per i quali  $\theta_1 = \theta_2$  son caratterizzati dal fatto che una retta arbitraria per  $O$  taglia la quadrica di Lie e le due quadriche  $\bar{Q}$  e  $\bar{Q}^*$  in punti formanti con  $O$  un gruppo armonico.*

Si ha p. es.  $\theta_i = 0$  per le curve anarmoniche e per le estremali delle forme elementari (pag. 684) [N].

(\*) Due superficie aventi in un punto  $O$  le stesse tangenti asintotiche hanno un invariante proiettivo di contatto (limite di un birapporto) del tutto analogo all'invariante di SEGRE per due curve piane (I, 1; pag. 674). Se nell'intorno di  $O$  sono rappresentate dalle equazioni  $x = axy + \dots$ ,  $x = a'xy + \dots$ , detto invariante vale  $a/a'$ . [F].

## VII. — Corrispondenze puntuali fra superficie.

### A. TEOREMI GENERALI [A, O].

#### 1. — Corrispondenza cremoniana fra stelle di piani.

Le applicabilità proiettive (di FUBINI) di una superficie  $\sigma$  costituiscono una delle scoperte più notevoli in questo campo, poichè di esse non si aveva idea prima delle ricerche del FUBINI stesso. Esse sono ben caratterizzate dal fatto di agire, fino all'intorno del 2° ordine di un punto generico  $O$  di  $\sigma$ , come collineazioni.

A ben rilevare la posizione ch'esse assumono fra le corrispondenze puntuali fra due superficie, cioè a riconoscere quali particolari caratteri deve possedere una tal corrispondenza per essere un'applicabilità proiettiva, giova prendere in esame le proprietà relative al 2° ordine di una corrispondenza puntuale qualsiasi.

Siano  $O$  ed  $\bar{O}$  dei punti (regolari) generici di  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  poste in corrispondenza puntuale (biunivoca, e regolare fino all'intorno del 2° ordine, in due campi sufficientemente limitati entro i quali cadono  $O$  ed  $\bar{O}$ ).

La corrispondenza puntuale subordina: 1) una corrispondenza proiettiva fra gli intorni del 1° ordine (fasci di tangenti) di  $O$  ed  $\bar{O}$ , 2) una corrispondenza fra i piani delle due stelle di centri  $O$  ed  $\bar{O}$  quando si assumano come corrispondenti piani contenenti intorni del 2° ordine (di curve) corrispondenti in  $O$  ed  $\bar{O}$ .

*La corrispondenza fra due le stelle di piani  $\{O\}$  ed  $\{\bar{O}\}$  è Cremoniana del 3° ordine; i suoi piani fondamentali, p. es. in  $\{O\}$ , sono il piano tangente  $\tau$  in  $O$  e due piani generalmente determinati e distinti dal precedente che si tagliano in una retta che si dirà asse della corrispondenza relativo al punto  $O$  (e così si ha un asse relativo ad  $\bar{O}$ ).*

*Questi due piani fondamentali ( $\pm \tau$ ) sono i piani osculatori in  $O$  alle curve corrispondenti a quelle che hanno un flesso in  $\bar{O}$ .*

Uno di essi viene a coincidere con  $\tau$  se ad una tangente asintotica in  $O$  corrisponde una tangente asintotica in  $\bar{O}$ ; ma esso diviene indeterminato se alle curve di  $\sigma$  che hanno quella per tangente di flesso corrispondono su  $\bar{\sigma}$  curve aventi pure un flesso (in  $\bar{O}$ , e per tangente di flesso la corrispondente tangente asintotica); in termini infinitesimali: se ai tre punti infinitamente vicini comuni ad una tangente asintotica e a  $\sigma$  corrispondono tre punti situati sulla corrispondente tangente asintotica (e su  $\bar{\sigma}$ ).

## 2. - Corrispondenze proiettive fra stelle di rette.

Vogliamo ora considerare un'altra corrispondenza fra le stelle di rette uscenti da  $O$  e da  $\bar{O}$ , così definita.

Nella corrispondenza Cremoniana precedente ai piani di un fascio per  $O$  corrispondono, in  $\bar{O}$ , i piani di un involuppo cubico  $\bar{\Gamma}^3$ : facciamo corrispondere alla retta asse del fascio di piani per  $O$  la retta per cui passano i tre piani cuspidali di  $\bar{\Gamma}^3$ .

La corrispondenza così stabilita fra la stella di rette di centro  $O$  e la stella di centro  $\bar{O}$  è una proiettività generalmente non degenera; sia  $\omega$ .

Analogamente esiste una proiettività,  $\bar{\omega}$ , che fa passare da una retta asse di un fascio di piani per  $\bar{O}$  alla retta appartenente ai tre piani cuspidali dell'involuppo cubico corrispondente.

Il prodotto delle due proiettività  $\omega$  ed  $\bar{\omega}$  è un'omologia nella stella di centro  $O$  in cui sono unite tutte le tangenti in  $O$  a  $\sigma$ : l'ulteriore retta unita è l'asse della corrispondenza in  $O$ .

L'omologia diviene speciale se ad una tangente asintotica in  $O$  corrisponde una tangente asintotica in  $\bar{O}$ .

Le due proiettività  $\omega$  ed  $\bar{\omega}$  sono una inversa dell'altra in uno di questi due casi: 1°) quando ad una tangente asintotica in  $O$  corrisponde una tangente asintotica in  $\bar{O}$  e ai tre punti (infinitamente vicini) comuni a quella e a  $\sigma$  corrispondono i tre punti analoghi su questa; 2°) quando si corrispondono tutt'e due le tangenti asintotiche.

## 3. - Sistemi assiali corrispondenti.

Altra caratterizzazione delle corrispondenze, in relazione alle proprietà del 2° ordine, si ha dalla considerazione dei sistemi assiali (III B 1). Precisamente:

*In una corrispondenza puntuale generica tra  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  vi è uno ed un solo sistema assiale di  $\sigma$  cui corrisponda un sistema assiale di  $\bar{\sigma}$ : l'asse del sistema in un punto  $O$  è precisamente l'asse della corrispondenza relativo ad  $O$ .*

*Fanno eccezione i casi seguenti: Se su  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  si corrispondono le asintotiche di un sistema, o di tutti e due i sistemi, non esistono in generale sistemi assiali corrispondenti. Però nel 1° caso se ai tre punti comuni ad una tangente asintotica e a  $\sigma$  corrispondono i tre punti comuni alla tangente asintotica corrispondente e a  $\sigma$  gli assi relativi ad  $O$  e ad  $\bar{O}$  risultano indeterminati e descrivono due fasci proiettivi (di centri  $O$  ed  $\bar{O}$ ); nel 2° caso se la circostanza ora rilevata si presenta per tutt'e due i sistemi di asintotiche ad ogni sistema assiale di  $\sigma$  corrisponde un sistema assiale di  $\bar{\sigma}$  e la corrispondenza è un'applicabilità proiettiva.*

Quest'ultima affermazione è il teor. di Čech sulle applicabilità proiettive. Di queste si può dare la caratterizzazione seguente: *Se su due superficie  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  si corrispondono le linee di Darboux (e di conseguenza le asintotiche) e se ad un sistema assiale di  $\sigma$  corrisponde un sistema assiale di  $\bar{\sigma}$  la corrispondenza è un'applicabilità proiettiva (\*).*

---

(\*) Per le proprietà metriche delle corrispondenze, con particolari applicazioni alla rappresentazione conforme, e alla corrispondenza fra superficie parallele vedansi le Note [A, O, R]. Nello studio delle corrispondenze puntuali fra superficie si può dare un teorema, più generale del precedente, per i sistemi definiti al n. 8 del Cap. VI; ritornerò su di essi nel caso delle corrispondenze asintotiche (v. l'ultimo n. di questo capitolo).

## B. CORRISPONDENZE PARTICOLARI.

## 1. - Le corrispondenze proiettivo-conformi e proiettivo-simili.

Dopo le applicabilità proiettive di FUBINI, le corrispondenze più semplici sono quelle che conservano l'elemento lineare proiettivo a meno di un fattore. Precisamente, se punti corrispondenti di due superficie  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  hanno le stesse coordinate  $u, v$ , noi studiamo quelle corrispondenze per le quali i loro elementi lineari proiettivi  $E$  ed  $\bar{E}$  (di FUBINI) sono legati da una relazione del tipo  $\bar{E} = \rho E$  ove  $\rho(u, v)$  è finita e differente da zero nel campo che si considera. È chiaro che dovendosi avere per  $E = 0, \bar{E} = 0$  e viceversa si corrispondono su  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  le linee di DARBOUX (e di SEGRE) e di conseguenza le asintotiche. Dall'ultimo teorema precedente sappiamo che, se  $\rho \neq 1$ , non vi sono sistemi assiali corrispondenti su  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$ .

Queste corrispondenze, che appare giustificato di chiamare **proiettivo-conformi**, si possono caratterizzare col seguente teorema:

*In ogni corrispondenza fra  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  che conservi le asintotiche (corrispondenza asintotica) esiste un sistema assiale di curve di  $\bar{\sigma}$  tale che alla sua retta asse in  $\bar{O}$  corrisponde in  $O$  un involuppo cubico i cui piani cuspidali passano per la normale proiettiva (in  $O$ ). Se e solo se la corrispondenza è **proiettivo-conforme** i tre piani cuspidali detti contengono le tangenti di Segre (in  $O$ ).*

Analogamente possiamo classificare le corrispondenze, che diremo **proiettivo-simili**, per cui  $\rho = \text{costante}$ .

*Condizione necessaria e sufficiente affinché la corrispondenza sia **proiettivo-simile** è che il sistema assiale del teorema precedente sia quello associato alle normali proiettive di  $\bar{\sigma}$ .*

(Si capisce che nei teoremi ora dati si può scambiare ovunque  $\sigma$  con  $\bar{\sigma}$ ).

Varrebbe la pena di approfondire queste trasformazioni anche perchè, data la relativa ristrettezza delle famiglie di superficie che ammettono applicabilità proiettive (non collineazioni) sarebbe inte-

ressante stabilire la generalità delle superficie che ammettono trasformazioni proiettivo-conformi o proiettivo-simili. Queste si presentano spontaneamente nella ricerca seguente.

## 2. - Le corrispondenze geodetico-proiettive [P].

Diremo due superficie  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  in **corrispondenza geodetico-proiettiva** se su di esse si corrispondono le pangeodetiche (estremali dell'elemento lineare proiettivo di FUBINI). È chiaro che se  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  sono in corrispondenza proiettivo-simile su di esse si corrispondono le pangeodetiche. È la domanda inversa che interessa, e precisamente interessano quei casi che, per analogia col problema dell'ordinaria rappresentazione geodetica, si possono chiamare di LIOUVILLE. Si hanno i teoremi:

*Se due superficie non rigate sono in corrispondenza geodetico-proiettiva, o i loro elementi lineari differiscono (al più) per un fattore costante (corrispondenza proiettivo-simile) oppure tutt'e due le superficie sono a linee canoniche indeterminate e i loro elementi lineari possono ridursi ai tipi*

$$F_3/F_2 = \frac{(dU + dV) dU dV}{dU^2 + dU dV + dV^2}; \quad \bar{F}_3/\bar{F}_2 = \frac{hk(hdU + kdV) dU dV}{h^2 dU^2 + hk dU dV + k^2 dV^2}$$

con  $h$  e  $k$  costanti.

*In tal caso le due superficie possono rappresentarsi (per punti) su due piani in modo che alle loro pangeodetiche corrispondano le rette dei due piani; le corrispondenze geodetico-proiettive fra le due superficie hanno per immagini le omografie fra i piani rappresentativi.*

*Non esistono rappresentazioni geodetico-proiettive di una superficie rigata sopra una non rigata.*

*Se le due superficie sono rigate (e se non sono in corrispondenza proiettivo-simile, caso banale) i loro elementi lineari proiettivi sono riducibili ai tipi*

$$[u + N(v)]^2 v'^2 du, \quad \frac{[u + N(v)]^2 v'^2 du}{v^3 + [u + N(v)] v^2 v'}$$

ove  $dv = 0$  rappresenta le generatrici rettilinee (corrispondenti) mentre  $du = 0$  rappresenta le asintotiche (curvilinee) di  $\sigma$  e  $uv + F(v) = \text{cost.}$ , con  $dF = Ndv$ , le asintotiche di  $\bar{\sigma}$  (non corrispondenti alle precedenti).

Le geodetiche proiettive di una tal superficie ( $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$ ) punteggiano proiettivamente due generatrici rettilinee. Esse si ottengono tutte, nel piano rappresentativo cartesiano  $(u, v)$  imprimendo alle immagini delle asintotiche di  $\bar{\sigma}$  una traslazione parallela all'asse  $u$ .

La costruzione di queste rigate dipende dall'integrazione di un'equazione differenziale lineare ordinaria del 4° ordine.

Appartiene a questa classe di rigate (e sono tutte applicabili proiettivamente su di essa quelle per cui  $N = \text{cost.}$ ) la rigata cubica di CAYLEY. Essa e le sue geodetiche proiettive si costruiscono così:

Data una cubica sgemba  $C$ , un suo punto  $O$  e la tangente ivi  $t$ , si congiunga un punto variabile su  $C$  con l'intersezione del piano in esso osculatore con  $t$ . Su questa rigata le geodetiche proiettive sono (le cubiche) segate dai coni quadrici osculatori lungo  $t$  al cono che da  $O$  proietta  $C$ .

### 3. - Le corrispondenze asintotiche.

Più generali delle corrispondenze precedenti sono quelle che fanno corrispondere su due superficie  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  le loro asintotiche (se di più si corrispondono le linee di DARBOUX si hanno le corrispondenze proiettivo-conformi del n. 1).

Le due forme quadratiche normali  $\varphi_2$  e  $\bar{\varphi}_2$  di  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  differiscono per un fattore ( $\neq 0$ ) sicchè potrà scriversi  $\bar{\varphi}_2 = e^{2h} \varphi_2$  con  $h = h(u, v)$ . Perciò lo studio delle corrispondenze asintotiche equivale allo studio su  $\sigma$  delle metriche (quadratiche) conformi a  $\varphi_2$ , o, se si vuole, di un'equazione (e non di una forma) quadratica.

E si ha  $[B]$ :

Le estremali di una qualsiasi metrica  $e^{2h} \varphi_2$  sono definite dall'equazione differenziale

$$\beta\gamma (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) = \left( \frac{\partial h}{\partial u} du - \frac{\partial h}{\partial v} dv \right) \varphi_2$$

(i  $\delta^2$  essendo eseguiti rispetto a  $\varphi_2$ ). I piani ad esse osculatori in un punto  $O$  di  $\sigma$  inviluppano un cono di 3ª classe i cui piani cuspidali tagliano il piano  $\tau$  tangente a  $\sigma$  in  $O$  nelle tre tangenti di Segre e passano per una retta, che dirò **pseudo-normale** relativa ad  $O$  e alla forma  $e^{2h} \varphi_2$  (per  $h = \text{cost.}$  si ha la normale proiettiva di FUBINI), congiungente i punti  $x$  ed  $x_{uv} + h_v x_u + h_u x_v$ .

Le sviluppabili della congruenza di pseudo-normali (qualunque sia  $h$ ) segano su  $\sigma$  un doppio sistema coniugato cioè ogni congruenza di pseudonormali è coniugata a  $\sigma$ . Viceversa ogni congruenza coniugata a  $\sigma$  determina, a meno di un fattore numerico, una metrica  $e^{2h} \varphi_2$  per la quale la congruenza è quella delle pseudo-normali.

Condizione necessaria e sufficiente affinché la pseudonormale relativa ad un punto generico  $O$  di  $\sigma$  appartenga al piano canonico in  $O$  è che sia

$$h(u, v) = \int \theta \left( \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} du + \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v} dv \right) = \int \theta (\psi_1 du + \psi_2 dv)$$

ove  $\theta$  è un qualunque fattore integrante di  $\psi_1 du + \psi_2 dv$  (per  $\theta = 0$  si ha la normale proiettiva).

Dal confronto dell'equazione di queste estremali con l'equazione delle linee anarmoniche risulta che:

Proprietà caratteristica delle superficie isoterma-asintotiche è che le loro curve anarmoniche sono geodetiche di una metrica conforme a  $\varphi_2$ .

Ad altre proprietà notevoli delle corrispondenze asintotiche si arriva considerando sulle due superficie i sistemi (invarianti per applicabilità proiettive) studiati al n° 8 del capitolo precedente. Si ha per essi il seguente teorema generale:

In una corrispondenza asintotica fra  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  ad ogni sistema definito su  $\sigma$  dall'equazione differenziale

$$(1) \quad \beta\gamma (du \delta^2 v - dv \delta^2 u) = \theta_1 \beta^2 \gamma du^3 + \theta_2 \beta \gamma^2 dv^3 + l (h_1 du - h_2 dv) \varphi_2$$

corrisponde su  $\bar{\sigma}$  un ben determinato sistema

$$(1) \quad \bar{\beta} \bar{\gamma} (du \bar{\delta}^2 v - dv \bar{\delta}^2 u) = \bar{\theta}_1 \bar{\beta}^2 \bar{\gamma} du^3 + \bar{\theta}_2 \bar{\beta} \bar{\gamma}^2 dv^3 + \bar{l} (\bar{h}_1 du - \bar{h}_2 dv) \bar{\varphi}_2$$

(ove i  $\bar{\delta}^2$  sono ora differenziali controvarianti rispetto alla forma

$\bar{\varphi}_2 = 2 \bar{\beta} \bar{\gamma} du dv$  di  $(\bar{\sigma})$ ; e le equazioni che determinano la corrispondenza fra questi sistemi sono

$$\bar{\beta} \bar{\theta}_1 = \beta \theta_1, \quad \bar{\gamma} \bar{\theta}_2 = \gamma \theta_2; \quad \bar{l} \bar{h}_1 = l h_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \bar{\beta} \bar{\gamma} / \beta \gamma}{\partial u},$$

$$\bar{l} \bar{h}_2 = l h_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \bar{\beta} \bar{\gamma} / \beta \gamma}{\partial v}.$$

Risulta dalle due prime di queste relazioni che i sistemi (1) per i quali  $\theta_1 = 0$  oppure  $\theta_2 = 0$  oppure  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  formano tre sottoclassi invarianti per qualsiasi trasformazione asintotica di una superficie. Ricordando le caratterizzazioni geometriche, già indicate, di queste sottoclassi si ha in particolare per l'ultima:

Ogni sistema (1) di  $\sigma$  per cui le quadriche invarianti  $\bar{Q}$  e  $\bar{Q}^*$  coincidono in ogni punto con la quadrica di Lie ha per corrispondente su un  $\bar{\sigma}$  sistema dotato della stessa proprietà. (\*)

La corrispondenza di particolari sistemi (1) e  $(\bar{1})$  su  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  dà modo di caratterizzare particolari tipi di corrispondenze; p. es.:

Se esiste su  $\sigma$  un sistema per cui  $\theta_1 = -\theta_2$ , cioè per cui le due quadriche invarianti  $\bar{Q}$  e  $\bar{Q}^*$  coincidano in ogni punto cui corrisponda su  $\bar{\sigma}$  un sistema dotato della stessa proprietà (cioè  $\bar{\theta}_1 = -\bar{\theta}_2$ ) la corrispondenza è necessariamente proiettivo-conforme (cioè  $\bar{\beta} / \beta = \bar{\gamma} / \gamma$ ).

Analogamente: se su  $\sigma$  e  $\bar{\sigma}$  si corrispondono due sistemi (uno di  $\sigma$  e uno di  $\bar{\sigma}$ ) per i quali  $l(h_1 du - h_2 dv) \equiv \bar{l}(\bar{h}_1 du - \bar{h}_2 dv)$  le due forme quadratiche  $\varphi_2$  e  $\bar{\varphi}_2$  differiscono soltanto per un fattore costante ( $\bar{\beta} \bar{\gamma} = k \cdot \beta \gamma$ ).

E infine: se ad un sistema (1) le cui curve tangenti alle asintotiche  $u$  hanno un flesso nel punto di contatto corrisponde un sistema dotato della stessa proprietà ( $\theta_1 = \bar{\theta}_1 = 1$ ) è invariante nella corrispondenza la prima forma elementare ( $\bar{\beta} = \beta$ ).

(\*) A questo tipo appartengono le estremali, sopra studiate, di  $e^{2h} \cdot \varphi_2$ ; la corrispondenza fra le congruenze di pseudo-normali segue dal fatto che  $l(h_1 du + h_2 dv)$  e  $\bar{l}(\bar{h}_1 du + \bar{h}_2 dv)$  sono (o non sono) insieme differenziali esatti.

## APPENDICE III<sup>a</sup>

### ESPOSIZIONE DI ALCUNI RISULTATI DI GEOMETRIA PROIETTIVA DIFFERENZIALE NEGLI IPERSPAZI

Nota del Prof. ALESSANDRO TERRACINI della R. Università di Torino.

In queste pagine si espongono alcuni risultati della natura indicata nel titolo, ottenuti dal SEGRE, dal BOMPIANI e dal TERRACINI nei seguenti lavori:

C. SEGRE. — A — *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLII (1907).

B — *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi.* Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tomo XXX (1910).

C — *Aggiunta alla memoria: « Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi ».* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXX (1910).

D — *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti.* Rend. della R. Accademia dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. XXX (1° Sem. 1921).

E — *Le linee principali di una superficie di  $S_5$  e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. XXX (1° Sem. 1921).

F — *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LVI (1921).

G — *Id. id.* Nota II. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LVII (1922).

E. BOMPIANI. — A — *Sull'equazione di Laplace.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXXIV (1912).

B — *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi.* Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians (Cambridge) vol. II (1913).

C — *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLVIII (1913).

D — *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLIX (1913).

E — *Sur les configurations de Laplace.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 156 (1913).

F — *Sullo spazio di immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve.* Rend. del R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, vol. XLVII (1914).

G — *Contributo allo studio dei sistemi lineari di rette nello spazio a quattro dimensioni.* Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lett. ed Arti, tomo LXXIII (1913).

H — *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXXVII (1914).

I — *Pour la géométrie de l'équation de Laplace.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 160 (1915).

J — *Sur les équations de Laplace à invariants égaux.* Comptes rendus de l'Ac. des Sciences, t. 160 (1915).

K — *Risoluzione geometrica del problema di Moutard sulla costruzione delle equazioni di Laplace ad integrale esplicito.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. XXIV (1° Sem. 1915).

L — *Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari od omogenee.* Note I e II. Rend. del R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, vol. LII (1919).

M — *Sur les courbes quasi-asymptotiques des surfaces dans un espace quelconque.* Comptes rendus de l'Ac. des Sciences, t. 168 (1919).

N — *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XLVI (1922).

O — *Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. XXX (2° Sem. 1921).

P — *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici.* Memorie della R. Acc. dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. XIII (1921).

Q — *Sulla rappresentazione iperspaziale delle curve piane.* Rend. Lincei serie 5<sup>a</sup>, vol. XXI (2° sem. 1922).

R — *Sulla corrispondenza puntuale fra due superficie a punti planari.* Boll. Un. Mat. Italiana, anno IV (1926).

A. TERRACINI. — A — Sulle  $V_k$  per cui la varietà degli  $S_h$  ( $h+1$ ) — seganti ha dimensione minore dell'ordinario. Rend. del Circolo Matemat. di Palermo, tomo XXXI (1911).

B — Sulle  $V_k$  che rappresentano più di  $\frac{k(k-1)}{2}$  equazioni di Laplace linearmente indipendenti. Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tomo XXXIII (1912).

C — Sulle varietà di spazi con carattere di sviluppabili. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLVIII (1913).

D — Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà. Nota I. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLIX (1913-1914).

E — *Id. id.* Nota II. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, volume LI (1916).

F — *Id. id.* Nota III. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LV (1919-1920).

G. — Sulla varietà degli spazi tangenti a una data varietà. Nota I e Nota II. Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. XXIX (2° Sem. 1920).

H — Su due problemi, concernenti la determinazione di alcune classi di superficie, considerati da G. Scorza e da F. Palatini. Atti della Soc. dei Natur. e Matem. di Modena, serie 5<sup>a</sup>, vol. VI (1921-1922).

I — Sulle superficie i cui spazi osculatori presentano particolari incidenze coi piani tangenti o fra loro. Atti della Società dei Natur. e Matem. di Modena, serie 5<sup>a</sup>, vol. VI (1921-1922).

J — Su una proprietà caratteristica della superficie di Veronese. Atti della Società dei Natur. e Matem. di Modena, serie 5<sup>a</sup>, vol. VII (1922).

Avvertiamo una volta per tutte che nel seguito uno spazio di  $n$  dimensioni sarà designato talora con  $S_n$ , talora con  $[n]$ ; e, inoltre, che parlandosi di uno  $S_p$  tangente a una  $V_k$  in un suo punto  $x$ , con  $p > k$  si intenderà, se  $p < k$  uno  $S_p$  per  $x$  e contenuto nello  $S_k$  ivi tangente alla  $V_k$ , e se  $p > k$  uno  $S_p$  passante per tale  $S_k$ .

### § 1. — I successivi intorno di un punto su una varietà.

1. — Se (nello spazio a  $n$  dimensioni  $S_n$ )  $x$  è un punto generico di una varietà a  $k$  dimensioni  $V_k$ , si chiama spazio  $r$ -tangente alla  $V_k$  nel punto  $x$  lo spazio (minimo) cui appartengono  $x$  e i suoi punti derivati (rispetto ai  $k$  parametri essenziali

cui è riferita la  $V_k$ ) fino a quelli di ordine  $r$  incluso (\*). Gli spazi 2-tangenti si chiameranno brevemente spazi osculatori. Per  $k = 1$  lo  $S_r$   $r$ -tangente a una curva in un suo punto si chiamerà anche, secondo l'uso,  $S_r$  osculatore.

Gli spazi  $r$ -tangenti a una  $V_k$  possono coincidere con lo  $S_n$  ambiente; anzi ciò avviene sempre a partire da un certo valore di  $r$ . Se ciò non avviene, ogni iperpiano passante per lo spazio  $r$ -tangente nel punto  $x$  produce nella  $V_k$  una sezione per la quale il punto  $x$  ha molteplicità  $r + 1$  almeno.

Lo spazio  $r$ -tangente in  $x$  si può anche definire come il minimo spazio cui appartengono gli  $S_r$  osculatori in tal punto alle curve generiche tracciate sulla  $V_k$  e passanti per esso. Però, per  $r > 1$ , tale spazio  $r$ -tangente, in generale, non è più riempito da quegli  $S_r$  osculatori.

Per esempio, si consideri una superficie generica (\*\*)  $F$  di  $S_n$ , con  $n \geq 5$ , e lo spazio ad essa osculatore (2-tangente) in un suo punto generico  $x$ . Se  $\tau_1, \tau_2$  sono i due parametri cui è riferita

la  $F$ , posto  $x^{(1)} = \frac{\partial x}{\partial \tau_1}$ , ecc. (\*\*), i piani osculatori in  $x$  alle

linee della  $F$  passanti per  $x$  riempiono una  $V_4^2$ , quella che si ottiene come luogo degli  $S_3$  che dal piano tangente in  $x$  proiettano il punto (variabile su una conica al variare del parametro  $\rho$ )  $x^{(1)} + 2\rho x^{(2)} + \rho^2 x^{(22)}$ . Anzi, ognuno degli  $S_3$  ora nominati è riempito dai piani osculatori alle curve di  $F$  che passano per  $x$  con una tangente determinata (\*\*\*\*). Tutto questo risulta subito osservando che il piano osculatore in  $x$  a una linea di  $F$  definita da  $\tau_2 = \tau_2(\tau_1)$  è determinato dai punti

(\*) Su questa definizione non tutti sono concordi: invece che di spazio  $r$ -tangente qualcuno parla di spazio  $r$ -osculatore (cfr. p. es. BOMPIANI C, n. 5), o di spazio  $(r+1)$ -tangente (così DEL PEZZO: *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni*. Rendiconto della R. Acc. di Napoli, 1886). Cfr. poi anche BOMPIANI L.

(\*\*) Il significato preciso di questa parola risulterà chiarito dal seguito.

(\*\*\*) Notazioni e convenzioni analoghe manteniamo per il seguito.

(\*\*\*\*) Cfr. per tutto ciò p. es. SEGRE A.

$$x, x^{(1)} + \frac{d\tau_2}{d\tau_1} x^{(2)}, x^{(11)} + 2 \frac{d\tau_2}{d\tau_1} x^{(12)} + \left(\frac{d\tau_2}{d\tau_1}\right)^2 x^{(22)} + \frac{d^2\tau_2}{d\tau_1^2} x^{(2)};$$

mantenendo fisso  $\frac{d\tau_2}{d\tau_1}$ , si ottengono i punti di uno  $S_3$ , ecc.

Più in generale (\*), si trova che i piani osculatori alle curve di una  $V_k$  in un suo punto  $x$  costituiscono generalmente un cono, formato da  $\infty^{k-1}$   $S_{k+1}$  passanti per lo  $S_k$  tangente alla  $V_k$  in  $x$  (in corrispondenza delle  $\infty^{k-1}$  rette tangenti alla  $V_k$  in  $x$ ), avente l'ordine  $2^{k-1}$ . Gli iperpiani tangenti a questo cono sono, fra tutti gli iperpiani tangenti alla  $V_k$ , quelli per cui il cono quadrico tangente nel punto  $x$  di contatto alla sezione che essi producono nella  $V_k$  ha una generatrice doppia. Queste generatrici, se  $2k < n$ , esauriscono la totalità delle rette tangenti in  $x$  alla  $V_k$ ; se no, sono  $\infty^{n-k-2}$  e formano un cono d'ordine  $\binom{k}{n-k-1}$ .

2. — Le considerazioni accennate conducono ad estendere la definizione adottata per lo spazio  $r$ -tangente. Consideriamo, col BOMPIANI (C), un elemento  $E_h$  d'ordine  $h$  di una curva, vale a dire l'insieme di un suo punto e dei relativi  $S_1, S_2, \dots, S_h$  ivi osculatori alla curva: e poi la figura costituita dagli  $S_r$  osculatori in un punto  $x$  di una  $V_k$  alle curve della  $V_k$  aventi in comune un dato  $E_h$  (s'intende relativo al punto  $x$ ): lo spazio (minimo) contenente tutti quegli  $S_r$  si può chiamare  $r$ -tangente in  $x$  alla  $V_k$  secondo l'elemento  $E_h$  fissato.

Per  $h = r - 1$ , quegli  $S_r$  costituiscono un sistema lineare intorno allo  $E_{r-1}$ , e riempiono generalmente uno  $S_{k+r-1}$ .

Per  $h = r - 2$ , se  $r = 2$ , si trova quanto si è detto alla fine del n. 1: se invece  $r > 2$ , gli  $S_r$  in questione descrivono un sistema lineare, intorno allo spazio  $(r - 1)$ -tangente secondo lo  $E_{r-2}$  fissato, e, generalmente, entro un  $S_{2k+r-2}$ .

Per  $h = r - 3$ , se  $r = 3$ , il luogo degli  $S_3$  è generalmente

(\*) Cfr. il n. 13 di DEL PEZZO citato in (\*) a p. 734 e i n° 17-19 di SEGRE B.

un cono di dimensione  $3k$ , avente per vertice lo  $S_k$  tangente alla  $V_k$  in  $x$ , e d'ordine

$$\sum_{i=1}^k 3^{i-1} \binom{2k-i-1}{k-1}.$$

Se invece, sempre per  $h = r - 3$ , si ha  $r = 4$ , si ottiene generalmente uno  $S_{2k+1}$  — cono, di dimensione  $3k + 1$ , e d'ordine  $2^{k-1}$ ; se finalmente  $r > 4$ , gli  $S_r$  in questione riempiono una varietà lineare.

Più in generale, per ogni valore di  $r - h$ , sussiste il risultato che, a partire da un certo valore di  $r$ , quegli  $S_r$  riempiono una varietà lineare.

3. — Se anzichè una  $V_k$  si considera, nello  $S_n$ , una totalità  $\infty^k$  di iperpiani, si possono ripetere per questa le considerazioni duali di quelle dei n.° precedenti. Rileviamo in particolare che su un iperpiano generico della  $\infty^k$  si ha uno  $S_{n-1-k}$  primo caratteristico, o più brevemente *caratteristico* (cioè comune ad esso e ai suoi infinitamente vicini del primo ordine); e poi uno spazio secondo caratteristico (che può anche mancare) duale dello spazio 2-tangente a una  $V_k$  in un suo punto, ecc.

Data una varietà luogo  $V_k$ , il sistema di tutti i suoi iperpiani tangenti (cioè passanti per gli  $S_k$  tangenti) produce su ognuno di essi uno spazio (primo) caratteristico che giace sulla  $V_k$  ed è l'insieme dei punti nei quali l'iperpiano è tangente alla varietà (SEGRE B, n. 16): e viceversa (cioè dualmente), una infinità di iperpiani costituisce sempre l'insieme degli iperpiani tangenti per una varietà luogo (il luogo degli spazi caratteristici che possono ridursi a singoli punti). Donde segue (mediante proiezione in  $S_{k+1}$ ) che, se una  $V_k$  è toccata da ogni suo  $S_k$  tangente in più di un punto, essa è toccata da ogni  $S_k$  tangente generico in tutti i punti di uno spazio (\*): se gli  $S_k$  tangenti sono  $\infty^h$ , i loro spazi di contatto sono degli  $S_{k-h}$ .

(\*) Questa proprietà non si estende agli spazi osculatori: la Sig.na M. CASTELLANI ha osservato che ogni  $S_5$  osculatore generico di una superficie può avere più di un punto di osculazione, senza averne infiniti; e ha determinato quali sono le superficie in tali condizioni. (Sulle superficie i cui spazi osculatori sono biosculatori. Rend. Lincei (5) XXXI, 1922).

§ 2. — Generalità sulle varietà rappresentanti sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali.

4. — Lo spazio osculatore a una superficie  $F$  nel suo punto  $x$  è individuato dai punti

$$x, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(11)}, x^{(12)}, x^{(22)}.$$

Perciò, se la dimensione dello spazio ambiente è almeno 5, quegli spazi osculatori hanno generalmente dimensione 5. Più in generale, se la dimensione dello spazio d'immersione è abbastanza elevata, gli spazi  $r$ -tangenti di una  $V_k$  hanno generalmente dimensione  $\binom{k+r}{k} - 1$ .

Ma può avvenire che quella dimensione si abbassi, per ogni punto generico della  $V_k$ , di  $i$  unità: ciò avviene quando il punto  $x$  è legato ai suoi successivi punti derivati fino all'ordine  $r$  incluso da  $i$  relazioni lineari omogenee linearmente indipendenti. In tal caso, le coordinate proiettive omogenee di un punto che descriva la  $V_k$  appaiono come soluzioni di un sistema lineare omogeneo alle derivate parziali di ordine  $r$ , costituito da  $i$  equazioni linearmente indipendenti; si dice allora che la  $V_k$  rappresenta quel sistema alle derivate parziali (o anche, talvolta, che la  $V_k$  è una  $V_k$  integrale di quel sistema). Così, p. es., le superficie dello spazio ordinario (non piani) rappresentano due distinte equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del 2° ordine, o, come diremo più brevemente, due equazioni di Laplace (\*).

Benchè, in generale, una  $V_k$  non sia ancora proiettivamente determinata da un tale sistema alle derivate parziali, tuttavia l'introduzione di una  $V_k$  rappresentante un dato sistema può essere assai utile per lo studio del sistema stesso; come si vedrà nei n.º seguenti già per il caso  $k = r = 2$ .

(\*) Useremo nel seguito questa locuzione, qualunque sia il numero delle variabili.

La particolarità sopra indicata non si può certo presentare per  $r = 1$  (giacchè ciò equivarrebbe ad abbassare la dimensione della  $V_k$ ) e perciò, per qualsiasi  $r$ , ogni sistema del tipo considerato rappresentato da una  $V_k$  deve essere tale che da esso non consegua nessuna equazione del primo ordine. Ciò porta intanto subito alla conseguenza

$$(1) \quad i \leq \binom{k+r}{k} - (k+1).$$

§ 3. — Superficie rappresentanti equazioni di Laplace.

5. — Fermiamoci sul caso  $k = r = 2$ . Allora sarà al massimo  $i = 3$ ; Se il massimo è raggiunto, i tre punti  $x^{(11)}$ ,  $x^{(12)}$ ,  $x^{(22)}$  si esprimono come combinazioni lineari di  $x$ ,  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ , e perciò il piano di questi tre punti contiene ogni linea della superficie passante per  $x$ ; la superficie in questione è dunque un piano. Se  $i = 2$  si trova che la superficie sta in  $S_3$ , oppure è una superficie sviluppabile (cfr. più avanti il n. 10). Se poi  $i = 1$ , si hanno le superficie (che già comparivano in lavori precedenti) a cui è espressamente dedicata la nota A del SEGRE.

Sia  $\Phi$  una tale superficie, e

$$(2) \quad A x^{(11)} + B x^{(12)} + C x^{(22)} + D x^{(1)} + E x^{(2)} + F x = 0$$

la corrispondente equazione di Laplace (\*).

Giova considerare, in relazione con essa, l'equazione differenziale

$$(3) \quad C d\tau_1^2 - B d\tau_1 d\tau_2 + A d\tau_2^2 = 0.$$

(\*) Nella Nota: *La geometria delle superficie considerate nello spazio rigato* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 6ª, vol. III, 1926) il BOMPIANI ha trovato un significato, come limite di un birapporto, dell'invariante assoluto (rapporto dei due invarianti relativi) della (2); quando esso è = 1 si ha il teorema di KOEHLER sulle equazioni ad invarianti uguali.

Si ha intanto questa proprietà: le coppie di tangenti in un punto generico  $x$  alle sezioni iperpiane che hanno in  $x$  un punto doppio (anzichè essere tutte le  $\infty^2$  coppie di tangenti in  $x$  a  $\Phi$ ) sono le  $\infty^1$  coppie di un'involuzione, i cui raggi doppi sono definiti dalla (3). Perciò questi raggi doppi appaiono come tangenti in  $x$  alle sezioni iperpiane *cuspidate*.

Si chiamano poi *linee caratteristiche* della superficie  $\Phi$  le linee integrali della (3): esse costituiscono un solo sistema quando la equazione (2) è parabolica. Ebbene, le tangenti alle caratteristiche di un sistema nei punti di una caratteristica dell'altro sistema costituiscono una sviluppabile. E, se i due sistemi di caratteristiche sono distinti, il verificarsi di una tale proprietà basta già per concludere che una superficie che possieda un doppio sistema di linee in quelle condizioni rappresenta un'equazione di Laplace (non parabolica). Se la (2) è parabolica, in ogni punto della  $\Phi$  il piano tangente a questa coincide col piano osculatore alla linea caratteristica passante per quel punto (e viceversa). Insomma le linee caratteristiche di una superficie  $\Phi$  si comportano come si comportano nello spazio ordinario due sistemi (distinti) di linee coniugate, oppure quello delle asintotiche di una superficie, secondo che la (2) è non parabolica, oppure è parabolica: perciò quelle linee spesso si chiamano *coniugate* oppure rispettivamente *asintotiche*.

6. — Se la (2) non è parabolica, alla corrispondente superficie  $\Phi$  si può applicare la *trasformazione di Laplace* (come la si applica ai sistemi coniugati nello spazio ordinario). Precisamente, si costruiscano le  $\infty^1$  sviluppabili circoscritte alla data superficie  $\Phi$  lungo le  $\infty^1$  caratteristiche del 1° sistema: il luogo dei loro spigoli di regresso sarà generalmente una superficie  $\Phi_1$ , la quale sarà toccata dalle  $\infty^2$  rette tangenti agli spigoli di regresso, vale a dire dalle rette tangenti alle caratteristiche del 2° sistema di  $\Phi$ . Ebbene, la  $\Phi_1$  è ancora una superficie della specie  $\Phi$ , *trasformata di Laplace* della data. Se la (2) si riduce alla forma canonica

$$(2') \quad x^{(12)} + ax^{(1)} + bx^{(2)} + cx = 0,$$

e si assumono p. es. le linee  $\tau_1$  (cioè le linee su cui varia  $\tau_1$ ) come caratteristiche del primo sistema, il punto  $x^{(2)} + ax$  de-

scrive la  $\Phi_1$ , e precisamente in modo che la retta che lo congiunge al punto  $x$  della  $\Phi$  è tangente comune di queste due superficie nei punti considerati. Analogamente, il punto  $x^{(1)} + bx$  descrive in generale un'altra superficie  $\Phi_{-1}$  pure trasformata di Laplace della superficie  $\Phi$ . Da  $\Phi_1$ , operando analogamente, si ottengono in generale due superficie delle quali l'una coincide sempre con  $\Phi$ , mentre l'altra è generalmente una nuova superficie  $\Phi_2$ . Analogamente per  $\Phi_{-1}$ . Così prende origine una successione, generalmente illimitata, di superficie

$$(4) \quad \dots \Phi_{-2}, \Phi_{-1}, \Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots$$

ciascuna delle quali è trasformata di Laplace delle due che la comprendono.

7. — È particolarmente notevole il caso in cui la successione (4) si chiude (cioè non è proseguibile) da una parte almeno; giacchè allora l'equazione (2) corrispondente alla  $\Phi$  si integra per quadrature.

Un criterio generale per sapere quando ciò avviene è dovuto al BOMPIANI (A). Partiamo dall'osservazione che gli  $S_h$  ( $h < n$ ) osculatori alle caratteristiche  $\tau_2$  di  $\Phi$  nei punti di una caratteristica  $\tau_1$  riescono osculatori a una curva  $\tau_1$  della superficie  $\Phi_h$  della successione (4). Allora, se questa successione si chiude, e  $\Phi_{h-1}$  ne è l'ultima superficie non degenera, si presenta necessariamente o l'una o l'altra delle due seguenti circostanze:

1°) la sviluppabile circoscritta alla  $\Phi_{h-1}$  lungo una generica linea  $\tau_1$  si riduce a un cono (il cui vertice, al variare di quella linea  $\tau_1$  descrive la curva che, come superficie degenera, chiude la successione di Laplace);

2°) le sviluppabili circoscritte alla  $\Phi_{h-1}$  lungo le varie linee  $\tau_1$  hanno lo stesso spigolo di regresso (nel qual caso  $\Phi_{h-1}$  è una sviluppabile il cui spigolo di regresso  $\varphi$  chiude la successione).

Nel secondo caso l'osservazione da cui siamo partiti prova che le linee  $\tau_2$  della  $\Phi$  stanno entro altrettanti  $S_h$  osculatori alla  $\varphi$ ; nel primo, la stessa osservazione dice che gli  $S_h$  osculatori alle linee  $\tau_2$  di  $\Phi$  nei punti di una linea  $\tau_1$  passano per uno stesso punto.

Interpretando analiticamente quanto si è detto, si arriva al seguente *criterio di chiusura*: condizione necessaria e sufficiente affinché la successione di Laplace relativa a un'equazione (2') si chiuda da una parte almeno dopo  $h$  trasformazioni è che  $h + 2$  soluzioni generiche di essa verifichino un'equazione del tipo

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} \left( \alpha_0 \frac{\partial^h x}{\partial \tau_2^h} + \alpha_1 \frac{\partial^{h-1} x}{\partial \tau_2^{h-1}} + \dots + \alpha_{h-1} \frac{\partial x}{\partial \tau_2} + \alpha_h x \right) = 0.$$

Precisamente, se è nulla l'espressione fra parentesi, la chiusura avviene (per la superficie rappresentante quell'equazione (2') che si ottiene, in  $S_{h+1}$ , in corrispondenza delle  $h + 2$  soluzioni considerate) nel secondo fra i due modi di cui sopra si è detto (*caso di GOURSAT*); se no, avviene nel primo (*caso generale*). È poi anche possibile la chiusura secondo il *caso misto* quando gli  $S_h$  delle singole linee  $\tau_2$  hanno in comune uno  $S_{h-\mu}$  (e allora la successione si chiude dopo  $h - \mu$  trasformazioni).

Il BOMPIANI (K) ha anche applicato le considerazioni che precedono al problema (di MOUTARD) di costruire le equazioni di Laplace con successione chiusa da entrambe le parti, problema già considerato da DARBOUX e dal NICOLETTI.

8. — Insieme con le superficie rappresentanti equazioni di Laplace, si possono considerare delle *configurazioni di Laplace* (BOMPIANI E). Si chiama configurazione di Laplace una  $\infty^2$  di spazi  $S_\nu$  che si ripartiscano in due modi diversi negli  $S_\nu$  di  $\infty^1$  sviluppabili ordinarie (\*), in modo che altrettanto sussista per gli  $S_{\nu+1}$  che congiungono le coppie di  $S_\nu$  infinitamente vicine in tali sviluppabili (condizione che generalmente — per  $\nu > 0$  — è conseguenza della precedente). La sezione di una tale configurazione con uno  $S_{n-\nu}$  è una superficie rappresentante un'equazione di Laplace.

(\*) V. più avanti la nota a p. 744.

In base all'osservazione di cui al n. 7, in principio, posto  $k + h = \nu < n - 1$ , lo spazio  $S_\nu$  definito in un punto generico di una superficie  $\Phi$  dagli  $S_k$  e  $S_h$  rispettivamente osculatori in esso alle linee  $\tau_1$  e  $\tau_2$  risulta osculatore a una linea  $\tau_1$  di  $\Phi_k$  e a una linea  $\tau_2$  di  $\Phi_{-h}$ : perciò quegli  $\infty^2 S_\nu$  appartengono a una configurazione di Laplace. Se si tagliano questi  $\infty^2$  spazi con lo  $S_{n-\nu}$  che congiunge  $n - \nu + 1$  punti della piramide fondamentale di riferimento, si ottiene dunque una superficie della specie  $\Phi$ . Ciò significa che se le  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sono soluzioni della (2'), i determinanti  $p_{1,2,\dots,\nu,\alpha}$  di ordine  $\nu + 1$  formati con le prime  $\nu$  orizzontali e poi con un'ulteriore orizzontale (p. es. con la  $\alpha^{i\text{esima}}$ ) della matrice

$$\left| \begin{array}{cccc} x_i, & \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2}, \dots, & \frac{\partial^k x_i}{\partial \tau_2^k}, & \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1}, \dots, & \frac{\partial^h x_i}{\partial \tau_1^h} \end{array} \right|$$

— dove abbiamo scritto esplicitamente solo l'orizzontale  $i^{\text{esima}}$  fra le  $n + 1$  della matrice — sono soluzioni di un'altra equazione di Laplace (con le stesse caratteristiche della data). Così si trovano, in modo molto semplice, le proprietà che il DARBOUX, nel secondo volume delle sue *Leçons*, ha assegnato per le espressioni che egli chiama  $(h, k)$ .

Il BOMPIANI (I) si è anche servito di considerazioni di questa natura per studiare le relazioni fra i casi di chiusura delle successioni di Laplace relative a una data equazione di Laplace e ad alcune sue trasformate: p. es., se la successione di Laplace relativa alla (2') si chiude da una parte dopo  $k_1$  trasformazioni secondo il caso generale, o rispettivamente secondo il caso di GOURSAT, l'equazione di Laplace di cui le espressioni  $(h, k)$  sono soluzioni, secondo quanto si è detto sopra, si chiude ancora, secondo il caso generale, dopo  $k_1 + h$  trasformazioni, o rispettivamente, secondo il caso di GOURSAT, dopo  $k_1 - k$  trasformazioni. Se poi è invece  $k + h = n - 1$ , e si considera l'equazione di Laplace di cui sono soluzioni i determinanti di ordine  $n$  estratti dalla matrice di sopra, la successione di Laplace relativa a questa equazione si chiude da una parte dopo  $k_1 + h$  trasformazioni secondo il caso di GOURSAT, se quella relativa alle (2') si chiude da una parte dopo  $k_1$  trasformazioni secondo il caso generale.

Con le trasformazioni di una equazione di Laplace dei tipi indicati si passa dunque da successioni di Laplace chiuse secondo il caso generale, o secondo quello di GOURSAT, a successioni chiuse nello stesso modo o nel modo opposto, dipendentemente dal tipo della trasformazione (\*).

#### § 4. — Varietà rappresentanti sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali aventi dimensione assai elevata.

9. — Si è visto alla fine del n. 4 che il numero  $i$  delle equazioni linearmente indipendenti del sistema alle derivate parziali d'ordine  $r$  rappresentato da una  $V_k$  non può superare il limite indicato nella (1). E al principio del n. 5 si è detto, per  $k = r = 2$ , a quali classi di superficie conducono i casi in cui è  $i > 1$  ( $i = 3, i = 2$ ).

Lo studio dei casi a cui si è condotti per i valori abbastanza grandi di  $i$  è stato eseguito da un lato per le superficie ed equazioni di ordine qualunque ( $k = 2, r$  arbitrario) (\*\*), e da un altro lato per varietà di dimensione qualunque, e equazioni del 2° ordine ( $k$  arbitrario,  $r = 2$ ) (\*\*\*)).

Nel primo caso riesce utile l'osservazione che, se le dimensioni degli spazi  $r$ -tangente e  $(r + 1)$ -tangente in ogni punto generico di una superficie differiscono di una unità, e sono  $\rho, \rho + 1$ , la superficie contiene  $\infty^1$  curve negli  $S_{\rho-r}$  di una svilup-

(\*) A proposito delle superficie  $\Phi$  ricordiamo anche la nota R del BOMPIANI, dove l'A. introduce la nozione dei sistemi planari di curve sopra quelle superficie. Si ottiene uno di quei sistemi prefissando genericamente per ogni punto della superficie un piano appartenente allo  $S_q$  2-tangente ivi e imponendo alle curve della superficie che il piano osculatore in ogni loro punto sia sempre incidente in una retta al piano prefissato passante per esso. Questi sistemi planari danno luogo a proposizioni notevoli nello studio delle corrispondenze puntuali fra due superficie  $\Phi$ .

(\*\*) V. BOMPIANI L.

(\*\*\*) V. TERRACINI B, e, per  $k = 3$ , SEGRE C.

pabile ordinaria (eventualmente degenera) (\*), ovvero la superficie sta in  $S_{\rho+1}$ .

In base ad essa si giunge facilmente al risultato che le superficie rappresentanti un sistema d'ordine  $r$ , con

$$i = \frac{r(r-1)}{2} + h$$

( $h > 0$ ) equazioni linearmente indipendenti, o sono costituite da  $\infty^1$  linee negli  $S_{r-h}$  di una  $\infty^1$  sviluppabile ordinaria, oppure stanno in  $S_{2r-h}$ .

Quell'osservazione riesce utile anche per valori di  $i$  meno elevati di quanto indichi la (5): il BOMPIANI assegna, per  $0 \geq h \geq -5$ , le corrispondenti classi di superficie.

10. — Consideriamo invece, col TERRACINI, il caso di  $k$  arbitrario e  $r = 2$ . Allora, se

$$(6) \quad i = \frac{k(k-1)}{2} + l$$

con  $l > 0$ , si può affermare che la  $V_k$  sta su una varietà  $U_q$  luogo di  $\infty^q S_p$ , tale che gli  $S_q$  ad essa tangenti nei punti di uno  $S_p$  stanno in uno  $S_{2k-h-1}$ , essendo  $0 \leq h \leq k-1$  (dove subito segue, per  $k = 2$ , quanto si è detto al principio del n. 5). La dimostrazione di questo teorema avviene attraverso la considerazione del sistema degli iperpiani passanti per gli  $S_{2k-1}$  osculatori della  $V_k$ : il luogo dei loro spazi secondi caratteristici (n. 3) è precisamente la varietà  $U_q$  di cui si parla nell'enunciato.

(\*) Si dice che una  $\infty^1$  di spazi  $S_h$  è una *sviluppabile ordinaria* quando due  $S_h$  infinitamente vicini stanno in uno  $S_{h+1}$ ; essa è costituita dagli  $S_h$  osculatori a una curva, oppure (casi degeneri) dagli  $S_h$  che da uno spazio fisso  $S_g$  proiettano gli  $S_{h-g-1}$  osculatori a una curva di  $S_h$  ( $0 \leq g \leq h-1$ ). D'ora in poi, dicendo *sviluppabile ordinaria senz'altro*, s'intenderà di non escludere che essa sia eventualmente degenera.

Il teorema di cui ora si è detto riconduce tutte le  $V_k$  in questione entro classi molto ristrette. Però, per  $k > 2$ , queste classi comprendono anche alcune  $V_k$  che non rappresentano sistemi di equazioni così ampi come indica la (6); cosicchè si presenta il problema di sceverare quelle classi da tali  $V_k$  (p. es. per  $k = 3$  bisogna scartare i coni proiettanti da un punto una superficie non rappresentante alcuna equazione di Laplace). Ritourneremo più avanti (n. 14) su tale argomento: per il momento ci limitiamo ad osservare che, se in relazione con ogni varietà  $V_k$  si considera la varietà  $W$  ricoperta dai suoi  $S_k$  tangenti (varietà  $W$  che, per  $V_k$  immerse in spazi sufficientemente ampi, ha in generale dimensione  $2k$ ), la varietà  $W$  relativa a ogni  $V_k$  fra quelle indicate nella tesi del precedente teorema, ha certamente dimensione  $\leq 2k - 1$ .

### § 5. — Alcuni altri particolari sistemi di equazioni di Laplace rappresentati da $V_k$ .

11. — Prima di riferire alcuni altri risultati, introduciamo la nozione del sistema lineare delle *forme quadratiche associate* al sistema di equazioni di Laplace rappresentato da una  $V_k$ : ad esso si giunge introducendo accanto a ogni equazione una corrispondente forma quadratica (nelle variabili  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ ), ottenuta sostituendo a ogni termine contenente una derivata secondo  $x^{(i)}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k$ ) il suo coefficiente moltiplicato per  $\theta_i \theta_j$ . Tali forme associate uguagliate a zero in uno  $S_{k-1}$ , dove le  $\theta$  si interpretino come coordinate proiettive omogenee, rappresentano altrettante *quadrice associate* (\*). Si verifica senza difficoltà che i sistemi lineari di quadriche associate al sistema di equazioni di

(\*) TERRACINI D. Analogamente si definiscono le forme (di grado superiore al secondo) associate a equazioni lineari omogenee alle derivate parziali di ordine più elevato. Altri preferiscono interpretare le  $\theta$  come coordinate non omogenee in uno  $S_k$  e sostituire alle quadriche del testo dei coni quadrici di tale  $S_k$ . Cfr. p. es. BOMPIANI in D.

Laplace rappresentato da una data  $V_k$  sono tutti proiettivamente equivalenti fra loro, al variare del sistema di  $k$  parametri essenziali cui si riferiscano i punti della  $V_k$ .

Se il sistema delle quadriche associate contiene tutte le quadriche contenenti un iperpiano  $S_{k-2}$  fisso dello  $S_{k-1}$  (più eventualmente altre quadriche), la  $V_k$  integrale è una rigata *svilupabile*, cioè toccata da uno stesso  $S_k$  tangente lungo ogni generatrice, come si vede subito osservando che il sistema parziale di equazioni di Laplace, le cui quadriche associate contengono lo  $S_{k-2}$  fisso  $a_1(\tau)\theta_1 + a_2(\tau)\theta_2 \dots + a_k(\tau)\theta_k = 0$ , esprime che lo  $S_k$  tangente alla  $V_k$  non muta spostandosi lungo le linee

$$\frac{d\tau_1}{a_1} = \frac{d\tau_2}{a_2} = \dots = \frac{d\tau_k}{a_k},$$

e applicando la proprietà accennata alla fine del n. 3.

Se poi, per  $k > 2$ , quel sistema non contiene altre quadriche (se cioè, per il numero  $i$  delle equazioni di Laplace linearmente indipendenti rappresentate dalla  $V_k$ , si ha  $i = k$ ), allora la  $V_k$  integrale è necessariamente un cono generico, cioè un cono proiettante da un punto una  $V_{k-1}$  che non rappresenta nessuna equazione di Laplace (TERRACINI D n. 5, e BOMPIANI D n. 10.)

12. — La proposizione finale del n. precedente è stata estesa in sensi diversi dal BOMPIANI e dal TERRACINI.

Così il TERRACINI (D n. 7, e E n. 2-4) ha studiato che cosa avviene quando, ferma restando l'ipotesi dell'esistenza di un sistema parziale  $\infty^{k-1}$  di quadriche associate contenenti uno  $S_{k-2}$  fisso, si assumono, per il numero  $i$  delle equazioni di Laplace linearmente indipendenti, dei valori superiori a  $k$ . Se (per  $k > 3$ )  $i \leq 2k - 3$ , la  $V_k$  integrale è ancora un cono, che questa volta proietta da un punto una  $V_{k-1}$  rappresentante  $i - k$  equazioni di Laplace linearmente indipendenti. Se poi  $i = 6$  per  $k = 4$ , oppure per  $k > 4$  è  $2k - 2 \leq i \leq 3k - 4$ , la  $V_k$  integrale è un cono nelle stesse condizioni ora dette, oppure una

rigata sviluppabile con linea direttrice (\*), oppure ancora, se  $k = 4$ , è costituita dai piani tangenti di una superficie, o da  $\infty^2$  piani tangenti a una curva.

Un'altra estensione (TERRACINI D. n. 9, e BOMPIANI D. n. 14) consiste in ciò: se il sistema lineare delle quadriche associate è quello delle quadriche per uno  $S_{k-l-1}$  fisso ( $0 < l < k-1$ ), la  $V_k$  è uno  $S_{l-1}$  — cono generico (proiettante da uno  $S_{l-1}$  una  $V_{k-l}$  che non rappresenta nessuna equazione di Laplace) (\*\*).

Il BOMPIANI (D) ha poi considerato altre estensioni del medesimo teorema finale del n. 11. Chiamiamo, come egli fa, *sistema a caratteristica* un sistema di equazioni di Laplace, le cui quadriche associate contengano uno stesso  $S_{k-2}$ , ammettendo però anche che possa essere  $i < k$ : il sistema è *parabolico* se quello  $S_{k-2}$  contato due volte fa parte del sistema delle quadriche associate (come avviene sempre per  $i = k$ ). Per un tale sistema la  $V_k$  integrale, ammesso che non rappresenti ulteriori equazioni di Laplace, se  $i > 2$  si compone di  $\infty^{k-i}$  conici generici, e se  $i = 2$  è una  $\infty^{k-1}$  di rette i cui  $S_k$  tangenti nei singoli punti di una generatrice stanno in uno stesso  $S_{2k-2}$  (\*\*\*) (eventualmente costituita da  $\infty^{k-2}$  superficie sviluppabili). Nel caso non parabolico, la  $V_k$  è una  $\infty^{k-i-1}$  di varietà  $V_{i+1}$  ciascuna delle quali è così fatta, che in essa vi sono  $\infty^1$  varietà  $G_i$  e  $\infty^i$  linee  $\gamma$  tali che le tangenti alle linee  $\gamma$  nei punti di una  $G_i$  passano per un punto,

(\*) Come si dirà al n. 26, una  $V_k$  rigata con  $S_k$  tangente fisso lungo ogni generatrice ha le sue rette tangenti a  $k-1$   $V_{k-1}$ , ciascuna delle quali può essere sostituita da una varietà di minor dimensione incontrata da quelle rette; qui ci si trova precisamente in presenza di questa particolarità.

(\*\*) Per  $l = k-1$  si ottengono  $\infty^1$  di  $S_{k-1}$  sviluppabili ordinarie. E per  $0 < l < k-1$ , se oltre alle quadriche per lo  $S_{k-l-1}$  fisso, esistono altre quadriche associate, la  $V_k$  è una  $\infty^{k-1}$  di  $S_l$  lungo ciascuno dei quali essa è toccata da uno stesso  $S_k$  (BOMPIANI D. n. 13).

(\*\*\*) Questo tipo di soluzioni manca fra quelli elencati dal BOMPIANI ed è invece assegnato (insieme con la esplicita rappresentazione analitica) al n. 4 di TERRACINI G. Il BOMPIANI considera poi ancora dei sistemi da lui chiamati *totalmente parabolici* che si ottengono raggruppando in modo opportuno più sistemi parabolici.

mentre gli  $S_i$  tangenti alle  $G_i$  nei punti di una linea  $\gamma$  appartengono a una sviluppabile ordinaria (\*).

13. — La ricerca della  $V_k$  tali che per ogni loro punto vi sia uno spazio  $S_p$  ( $1 \leq p \leq k$ ) costituito di tangenti tripunte conduce pure a un particolare sistema di equazioni di Laplace, sistema avente come sistema di quadriche associate quello delle quadriche contenenti doppiamente uno  $S_{k-p-1}$ . Se la  $V_k$  non rappresenta ulteriori equazioni di Laplace, e  $2 \leq p \leq k$ , essa è necessariamente una  $\infty^{k-p}$  di  $S_p$  generica (cioè non rappresentante altre equazioni di Laplace se non quelle che traducono la proprietà sopra esposta (TERRACINI D. n. 10; cfr. anche BOMPIANI D. n. 17).

Il TERRACINI (D. n. 11) ha anche considerato il caso in cui vi sono uno  $S_p$ , uno  $S_q$ , ecc. ( $2 \leq p < k$ ,  $2 \leq q < k$ , ecc. con  $p+q+\dots \leq k$ ) nelle condizioni di sopra, linearmente indipendenti tra loro — salvo, s'intende, la circostanza che essi escono da uno stesso punto della  $V_k$  — (cosicchè le quadriche associate alle equazioni di Laplace rappresentate dalla  $V_k$  contengono doppiamente uno  $S_{k-p-1}$ , uno  $S_{k-q-1}$  ecc.). Allora, se la  $V_k$  non rappresenta altre equazioni di Laplace, essa contiene necessariamente gli  $S_p$ , gli  $S_q$ , ecc. delle tangenti tripunte. In particolare, se  $p+q=k$ , il TERRACINI ha dimostrato che la  $V_k$  è una  $V_k$  di SEGRE, d'ordine  $\frac{(p+q)!}{p!q!}$  di uno spazio  $[pq+p+q]$  rappresentante, nel modo indicato dal SEGRE, le coppie di punti di uno  $S_p$  e di uno  $S_q$ .

(\*) La memoria D. del BOMPIANI contiene poi anche lo studio di alcuni sistemi *a caratteristica* del terz' ordine analoghi ai precedenti, sistemi costituiti da equazioni del secondo e del terzo ordine, le cui forme associate (rispettivamente quadratiche o cubiche) contengono a fattore una stessa forma lineare. Il BOMPIANI si occupa particolarmente del caso in cui esiste una espressione  $A$  del tipo  $a_1 x^{(1)} + a_2 x^{(2)} + \dots + a_k x^k$  tale che alcune delle sue derivate prime siano combinazioni lineari della  $x$  e delle derivate prime di  $x$  (in modo però che questo sistema parziale risulti parabolico secondo la terminologia adottata) e tutte le derivate seconde della  $A$  siano combinazioni lineari della  $x$  e delle sue derivate prime e seconde.

Anche un'altra notevole categoria di  $V_k$  è stata caratterizzata in base al relativo sistema di equazioni di Laplace: quella delle  $V_k$  (estensione delle superficie con un doppio sistema di coni circoscritti) che ammettono una rappresentazione parametrica del tipo

$$x = \varphi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p) + \psi(\tau_{p+1}, \dots, \tau_k).$$

Per concludere che una  $V_k$  appartiene a tale categoria basta sapere che il sistema delle quadriche associate coincide con quello delle quadriche contenenti uno  $S_{k-p-1}$  e uno  $S_{k-q-1}$  con  $p + q = k$ , fra loro sghembi (TERRACINI D n. 12) (\*).

§ 6. — La varietà degli spazi tangenti a un'altra varietà.

14. — Già si è accennato al n. 10 alla varietà  $W$  ricoperta dagli  $S_k$  tangenti a una varietà  $V_k$ . Se  $x$  è il punto che descrive la  $V_k$ , un punto generico  $y$  della  $W$  è dato da

$$y = x + \lambda_1 x^{(1)} + \dots + \lambda_k x^{(k)}$$

al variare dei parametri  $\tau_1, \dots, \tau_k$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Siccome il sistema costituito dal punto  $y$  e dai suoi derivati primi rispetto ai  $2k$  parametri ora nominati si riduce subito a

$$x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \lambda_1 x^{(11)} + \dots + \lambda_k x^{(1k)}, \dots, \lambda_1 x^{(k1)} + \dots, \lambda_k x^{(kk)},$$

è chiaro che se la  $V_k$  rappresenta  $i > \frac{k(k-1)}{2}$  equazioni di Laplace linearmente indipendenti, la varietà  $W$  ha dimensione minore di quella,  $2k$ , che le compete in generale per  $V_k$  immerse in spazi abbastanza elevati. Precisamente, se  $i = \frac{k(k-1)}{2} + l$ , la dimensione delle  $W$  è  $\leq 2k - l$ .

(\*) Per  $p = 1$  cfr. anche la fine del n. 12.

Tutto ciò è evidente; meno evidente è che viceversa, dal fatto che la  $W$  abbia dimensione  $2k - l$ , si può inferire che la  $V_k$  rappresenti proprio  $i = \frac{k(k-1)}{2} + l$  equazioni di Laplace

linearmente indipendenti, con una sola eccezione, e cioè che quella particolarità si presenta anche quando il sistema delle forme quadriche associate al sistema (meno ampio di quanto ora si è detto) di equazioni di Laplace rappresentato dalla  $V_k$  abbia un sistema apolare con matrice jacobiana nulla, di caratteristica  $k - l$  (TERRACINI D n. 3) (\*).

Questo teorema viene così a completare quello del n. 10 fornendo un mezzo (mediante la sua seconda alternativa) per scartare le  $V_k$  cui si è accennato nell'ultimo capoverso di quel n. La determinazione effettiva delle  $V_k$ , cui la seconda alternativa si riferisce, costituisce però un problema assai complesso. Per  $k < 4$  abbiamo già precedentemente avuto occasione di dire che essa non ha luogo per  $k = 2$ , e conduce, per  $k = 3$ , ai coni generici: il caso  $k = 4$  è stato trattato dal TERRACINI (E): per  $l = 2$ , la  $V_k$  è uno  $S_1$  — cono generico: per  $l = 1$ , la  $V_k$  è un cono proiettante da un punto una  $V_3$  che rappresenta nessuna, o una, o due equazioni di Laplace linearmente indipendenti; oppure è una generica sviluppabile con curva direttrice, o è formata dai piani tangenti a una superficie generica, o è una  $\infty^2$  generica di piani tangenti a una curva; o è la  $V_4^6$  di  $S_8$  di SEGRE rappresentante le coppie di punti di due piani, o è costituita da superficie poste negli  $S_5$  di uno  $S_2$  — cono generico, o infine è una generica  $\infty^2$  di piani con  $S_5$  tangente fisso lungo ogni piano generatore.

Le varietà  $V_k$ , delle quali si è parlato in questo n., aventi cioè una varietà  $W$  di dimensione  $2k - l$ , si possono altresì

(\*) Se, in quest'ultimo caso,  $i$  ha il valore minimo possibile cioè

$$lk - \frac{l(l-1)}{2} \text{ (con } l < k - 1),$$

la  $V_k$  è uno  $S_{l-1}$  — cono generico.

considerare come quelle per cui due  $S_k$  generici infinitamente vicini fra loro stanno sempre in uno  $S_{2k-1}$  (\*).

15. — Supposto ora che la varietà  $W$  del n. precedente abbia dimensione  $2k$ , si conosce subito, in base a quanto si è osservato in principio del n. 14, che, per una qualsiasi  $V_k$  generica, la  $W_{2k}$  è toccata da uno stesso  $S_{2k}$  nei punti di ogni retta tangente alla  $V_k$ : dimodochè gli  $S_{2k}$  tangenti alla  $W_{2k}$  nei singoli punti di un suo  $S_k$  generatore sono  $\infty^{k-1}$ , o meno; anzi, in generale sono proprio  $\infty^{k-1}$ . D'altro lato, se la  $V_k$  rappresenta  $\frac{k(k-1)}{2}$  equazioni di Laplace linearmente indipendenti, la  $W_{2k}$  è toccata da uno stesso  $S_{2k}$  addirittura in tutti i punti di un suo  $S_k$  tangente generico (\*\*). Il TERRACINI ha studiato (in G) i casi intermedi: vale a dire ha cercato di caratterizzare mediante il modo in cui sono costituiti i corrispondenti sistemi di equazioni di Laplace, le  $V_k$  ( $k \geq 3$ ) tali che entro ogni loro  $S_k$  tangente generico gli spazi,  $\gamma$ , di contatto della corrispondente  $W_{2k}$  coi singoli suoi  $S_{2k}$  tangenti abbiano dimensione  $g$  con  $1 < g < k$ . La proprietà richiesta si traduce in una proprietà del sistema delle quadriche associate, per il cui enunciato rimandiamo alle due Note ora citate. La determinazione effettiva dei sistemi di quadriche che godono di tale proprietà costituisce in generale un problema assai complicato; il TERRACINI lo ha risolto per  $k \leq 4$  trovando che per  $k = 4$  la soluzione è data dai sistemi lineari  $\infty^2$  di quadriche contenenti un piano; dai sistemi lineari  $\infty^3$  contenenti un sistema  $\infty^2$  (e non più ampio) del tipo ora detto; dai sistemi lineari  $\infty^3$  di quadriche per due rette sghembe oppure mutuamente tangenti lungo

(\*) Il BOMPIANI al n. 29 di D. considera l'abbassamento di dimensione che ha luogo per la varietà ricoperta non più dagli  $S_k$  tangenti, ma dagli spazi osculatori di una classe di  $V_k$  da lui studiata in quella memoria, classe a cui si è accennato nella nota a pag. 748.

(\*\*) In tal caso gli  $S_{2k}$  tangenti alla  $W_{2k}$  sono (al massimo)  $\infty^k$ . Si badi che possono tali  $S_{2k}$  essere  $\infty^k$  anche in altre ipotesi: ma allora i loro  $S_k$  di contatto con la  $W_{2k}$  non coincidono più con gli  $S_k$  tangenti alla  $V_k$ . Per  $k = 2$  ciò avviene soltanto per le superficie di Veronese (SEGRE A n. 27).

una retta; dai sistemi lineari  $\infty^4$  contenenti un sistema lineare  $\infty^3$  di uno dei tipi precedenti; dai sistemi lineari  $\infty^4$  che ammettono due rette sghembe polari fisse, oppure contengono tutte le coppie dei piani di un fascio (\*). Per  $k = 3$  il TERRACINI ha determinato effettivamente non solo i tipi dei sistemi di quadriche associate, ma i tipi di  $V_3$  che godono della proprietà richiesta (per  $g = 2$ , il solo caso che si possa attualmente presentare): sono le  $V_3$  che si ottengono per  $k = 3$ ,  $i = 2$  dalla fine del n. 12, e inoltre le  $V_3$  rigate con  $S_4$  tangente fisso lungo ogni retta generatrice.

### § 7. — Comportamento degli spazi osculatori a una varietà in relazione con le sue sezioni iperpiane.

16. — Quando di una  $V_k$  si considerano le sezioni iperpiane generiche, i loro spazi tangenti coincidono sempre con le tracce degli  $S_k$  tangenti alla  $V_k$  sull'iperpiano secante. Ma, se anzichè gli spazi tangenti si considerano gli spazi osculatori, le cose possono procedere in modo diverso. Indichiamo con  $S_\omega$  lo spazio osculatore alla  $V_k$  in un suo punto  $x$ , e con  $S_{\omega'}$  lo spazio osculatore nello stesso  $x$  alla  $V_{k-1}$  sezione della  $V_k$  con un iperpiano  $\sigma$  passante genericamente per  $x$ ; allora  $S_{\omega'}$  in generale, ma non sempre, esaurisce l'intersezione  $\sigma S_\omega$ , cosicchè  $\omega' = \omega - 1$  non appena sia  $\omega \leq \frac{(k-1)(k+2)}{2} + 1$ , mentre per  $\omega > \frac{(k-1)(k+2)}{2} + 1$ , è  $\omega' = \frac{(k-1)(k+2)}{2}$ . Ma vi sono delle  $V_k$  eccezionali, tali che, per le loro sezioni iperpiane generiche,  $\omega'$  ha un valore più piccolo di quelli ora indicati. Esse sono (TERRACINI D n. 8) le  $V_k$  rappresentanti un sistema di  $i = \frac{k(k+3)}{2} - \omega$  equazioni di Laplace linearmente indipendenti, tale che la matrice jacobiana

(\*) Dai sistemi lineari  $\infty^4$  nominati vanno però esclusi quelli che eventualmente risultino dotati di retta base.

delle loro forme associate sia identicamente nulla di caratteristica  $k - (\omega - \omega' - 1)$ .

Tali  $V_k$  non esistono per  $k = 2$ ; per  $k = 3$  sono i luoghi generici di piani entro  $S_n$  con  $n \geq 6$  (luoghi generici nel senso che quelle  $V_3$  non devono rappresentare altre equazioni di Laplace se non le  $\infty^2$  che esprimono che le varietà stesse sono luoghi di piani). Per  $k = 4$ , si ottiene un numero assai maggiore di tipi: la loro determinazione è stata iniziata dal TERRACINI (F), ma non ancora condotta a termine (\*).

### § 8. — Le linee quasi asintotiche di una varietà.

17. — Su una superficie generica in  $S_n$  con  $n > 3$  non esistono linee asintotiche: in luogo di esse il BOMPIANI (\*\*) ha introdotto delle linee *quasi-asintotiche*. Si chiama quasi-asintotica  $\gamma_{p,q}$  ogni linea tracciata sulla superficie, tale che lo spazio congiungente lo  $S_q$  osculatore alla linea in un suo punto generico con lo spazio  $p$ -tangente alla superficie nel medesimo punto ( $p < q$ ) abbia sempre dimensione minore di quella che compete a una linea generica della superficie (vale a dire minore di quella dell'ultimo spazio nominato aumentato di  $q - p$ , purchè questa somma sia  $\leq n$ ). Il concetto si estende poi subito a  $V_k$  qualunque.

Limitandoci per ora al caso delle superficie, su una superficie qualunque esistono sempre delle quasi-asintotiche, pur di fissare convenientemente gli indici  $p$  e  $q$ . Così, si trova subito che su una superficie di  $S_n$  esistono sempre  $\infty^{n-2}$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,n-1}$ . Viceversa, per  $n = 5$ ,  $n = 6$ , l'esistenza di  $\infty^{n-2}$  quasi asintotiche  $\gamma_{1,n-1}$  su una superficie permette di desumere che la superficie sta in uno  $S_n$ , come il BOMPIANI ha dimostrato in F, esprimendo anche la presunzione che altrettanto valga per tutti i valori

(\*) Ciò avverrà in un'ulteriore Nota IV in continuazione delle D, E, F.

(\*\*) Per il caso delle superficie rigate, in H: un cenno di questo e di un altro caso particolare si trova già in BOMPIANI B. Per il concetto di quasi-asintotiche in generale, dal punto di vista proiettivo, cfr. i lavori dello stesso BOMPIANI che saranno citati fra poco: non ci occupiamo qui delle proprietà metriche trovate dal BOMPIANI in altri lavori.

più elevati di  $n$  (\*). Diverso è il caso di  $n = 4$ : vale il risultato precedente solo se si aggiunge l'ipotesi che la superficie in questione rappresenti un'equazione di Laplace: se essa non ne rappresenta nessuna, e possiede  $\infty^2$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$  è una superficie di Veronese, secondo quanto sarà detto or ora.

Il BOMPIANI (O, P) ha anche studiato il caso di una superficie possedente  $\infty^2$  quasi-asintotiche  $\gamma_{k-1,k+1}$ : se gli spazi  $k$ -tangenti della superficie hanno la dimensione  $\frac{k(k+3)}{2}$  (cioè se la superficie non rappresenta nessuna equazione alle derivate parziali di ordine  $k$ ) essa è necessariamente la superficie razionale normale di ordine  $k^2$ , di uno spazio  $\left[ \frac{k(k+3)}{2} \right]$ , che rappresenta, in modo ben noto, la totalità delle curve piane algebriche di ordine  $k$  (e quelle  $\gamma_{k-1,k+1}$  appartengono ad  $S_k$  e sono le curve razionali normali  $C^k$  della superficie). Il BOMPIANI ha pure stabilito un teorema analogo relativo alle  $V_3$  contenenti  $\infty^4$   $\gamma_{k-1,k+1}$  quasi asintotiche.

Nel caso delle superficie razionali normali sopra accennato, quelle quasi asintotiche intervengono in modo notevole, insieme con gli spazi osculatori in punti o lungo le stesse curve, sul problema della effettiva costruzione della varietà rappresentativa della totalità delle curve piane con date singolarità, anche infinitamente vicine (BOMPIANI Q).

18. — Il teorema di KOENIGS, relativo alle proiezioni su un piano delle asintotiche di una superficie dello spazio ordinario, è stato esteso dal BOMPIANI (M), il quale ha dimostrato che, se una superficie possiede due sistemi  $\infty^1$  di quasi-asintotiche  $\gamma_{p,p+1}$ ,  $\gamma_{q,q+1}$  i quali si proiettino (su uno spazio di dimensione  $\leq p+q$ ) secondo un doppio sistema coniugato, questo è necessariamente a invarianti uguali.

(\*) La dimostrazione per ogni valore di  $n$  è stata data dal BOMPIANI nel caso delle superficie rigate. E per queste egli ha anche trovato un altro criterio per l'appartenenza di una rigata ad un dato spazio, fondato sulla conoscenza di una sola quasi-asintotica (al n. 4 di F).

### § 9. — Altri notevoli sistemi di linee esistenti sulle superficie.

19. — Il BOMPIANI (N) ha cercato di estendere alle superficie degli iperspazi la nozione dei sistemi coniugati dello spazio ordinario. Sappiamo già che le linee coniugate di una superficie rappresentante un'equazione di Laplace costituiscono appunto una tale estensione. Ma qui si tratta di trovare dei sistemi di linee che esistano su tutte le superficie. Partiamo dall'osservazione che i piani tangenti a una superficie  $F$  nei singoli punti di un suo elemento  $E_\nu$  d'ordine  $\nu$  (cfr. il n. 2) appartengono a uno spazio di dimensione  $\leq 2\nu + 2$ .

Allora, se la dimensione  $n$  dello spazio ambiente è dispari ( $n = 2\nu + 1$ ), si consideri un elemento  $E_\nu$  di curva della superficie  $F$  passante genericamente per un suo punto  $x$ : i piani tangenti alla  $F$  nei punti di  $E_\nu$  successivi a  $x$  determinano uno  $S_{2\nu}$  che taglia il piano tangente in  $x$  lungo una retta tangente in  $x$ , *tangente coniugata di specie  $\nu$  dell'elemento  $E_\nu$* . A ogni sistema  $\infty^1$  di curve  $C$  tracciate su  $F$  si può così associare un sistema parimenti  $\infty^1$  di curve  $K$  suo coniugato di specie  $\nu$ , involupato dalle tangenti che sono coniugate agli elementi d'ordine  $\nu$  delle curve del primo sistema. Si badi però che, per  $\nu > 1$ , in generale la relazione fra i due sistemi  $C$  e  $K$  non è involutoria. Invece la costruzione stessa prova che la notissima proprietà dei sistemi coniugati ordinari trova la sua estensione in quella che le tangenti coniugate di specie  $\nu$  agli elementi  $E_\nu$  di una curva della  $F$  sono tali che  $\nu + 1$  consecutive non sono linearmente indipendenti. Anticipando la nozione del (primo) *indice di sviluppabilità* di una rigata, che sarà posta al n. 24 (massimo numero di generatrici consecutive fra loro in generale linearmente indipendenti) possiamo dire che la rigata di quelle tangenti coniugate ha indice di sviluppabilità  $\nu$  (anzichè  $\nu + 1$ ); e viceversa.

Il BOMPIANI ha particolarmente approfondito il caso del coniugio di 2<sup>a</sup> specie: l'analogia coi sistemi coniugati ordinari continua anche in ciò che, assumendo come linee parametriche quelle di un doppio sistema coniugato di 2<sup>a</sup> specie, le coordinate di un punto che descriva la superficie appaiono come soluzioni di

un'equazione lineare omogenea alle derivate parziali del 3<sup>o</sup> ordine. È inoltre notevole il fatto che, dato il sistema  $K$ , mentre in generale esistono  $\infty^2$  linee della superficie  $F$  tali che  $\infty^1$  fra esse si possono assumere come linee  $C$ , se la  $F$  rappresenta un'equazione di Laplace esistono soltanto due sistemi  $\infty^1$  di linee  $C$  (e viceversa). Se poi si suppone che sulla superficie  $F$  esista un sistema di linee  $K$  tale che risulti indeterminato il corrispondente sistema  $C$ , ne consegue che, o la superficie sta in  $S_4$ , oppure le  $K$  sono linee contenute in piani di una sviluppabile ordinaria; se invece il sistema delle linee  $C$  ha indeterminato il coniugato di 2<sup>a</sup> specie, si arriva alla conclusione che la superficie sta in  $S_4$ , oppure rappresenta un'equazione di Laplace per cui le  $C$  sono caratteristiche, oppure infine che le linee  $C$  stanno negli  $S_3$  di una sviluppabile ordinaria.

Negli spazi pari  $S_{2\nu+2}$ , assegnato ad arbitrio un sistema  $\infty^1$  di curve  $C$ , non è più *in generale* possibile ottenere un coniugato di specie  $\nu$  (da definirsi come sopra); così in  $S_6$ , su una superficie generica esistono (in tutto)  $\infty^2$  curve  $C$  tali che ad  $\infty^1$  di esse scelte come curve  $C$  si può associare un sistema  $\infty^1$  di curve  $K$  loro coniugate di seconda specie. Questo risultato, e quello che gli corrisponde in  $S_5$  sono stati invertiti dal BOMPIANI così: le superficie tali che per ogni loro sistema  $\infty^1$  di curve  $C$  esista un coniugato di seconda specie, sono le superficie di  $S_5$  e quelle contenenti  $\infty^1$  linee nei piani di una sviluppabile ordinaria: le superficie con  $\infty^2$  curve  $C$ , tali che ad  $\infty^1$  fra esse si possa associare un sistema  $\infty^1$  di linee  $K$  coniugate di seconda specie, sono le superficie di  $S_6$  e quelle contenenti  $\infty^1$  linee negli  $S_3$  di una sviluppabile ordinaria.

20. — Nella sua Nota testè analizzata il BOMPIANI considera, per una superficie generica  $F$  dello  $S_6$ , le linee *autoconiugate di 2<sup>a</sup> specie*: esse si ripartiscono in cinque sistemi  $\infty^1$  (che si riducono a soli tre, se la  $F$  possiede un doppio sistema coniugato ordinario), e coincidono con le *linee principali* già studiate in altri lavori dal SEGRE e dallo stesso BOMPIANI. Tali linee, oltre che dal punto di vista ora detto, si possono anche considerare come le linee involupate su una superficie di  $S_6$  dalle *tangenti principali*, vale a dire dalle rette definite in uno dei seguenti modi:

1) Fra gli  $\infty^1 S_4$  che segano la  $F$  secondo una linea avente una cuspidale nel punto  $x$  della  $F$  stessa ( $S_4$  tangenti al cono  $V_4^2$  di cui si è detto al n. 1 — v. la fine di quel n. —) ve ne sono cinque per cui  $x$  è un *taenodo*: le relative tangenti sono le tangenti principali alla  $F$  in  $x$  (SEGRE B n. 24).

2) Fra le direzioni della  $F$  uscenti da  $x$ , quelle delle tangenti principali si possono caratterizzare come appartenenti a curve della  $F$  passanti per  $x$  e tali che i loro  $S_3$  osculatori in  $x$  coincidano con gli  $S_3$  2-tangenti (cfr. il n. 2) alla  $F$  in  $x$  secondo le tangenti stesse (BOMPIANI C n. 7).

Una linea principale della stessa  $F$  si può poi anche definire (SEGRE E) come una linea della  $F$  tale che lo spazio congiungente i piani tangenti alla  $F$  in due punti infinitamente vicini della linea stessa,  $x$  e  $x + dx$  o sia uno  $S_3$ , oppure abbia, in  $x$ , con la linea stessa, contatto quadripunto (anzichè tripunto come avviene in generale).

Le linee principali sono indeterminate solamente sulla superficie di Veronese, e sulle sviluppabili di  $S_5$  (SEGRE E).

21. — Oltre che nel modo accennato al n. 19, la nozione degli ordinari sistemi coniugati si può estendere anche in altri sensi, rinunciando però alla genericità della superficie entro lo spazio ambiente che si considera. Per es. il BOMPIANI (nella Nota II di L) ha considerato alcuni sistemi di curve di una superficie in relazione col fatto che esse rappresentino una o più equazioni lineari alle derivate parziali del terzo ordine. Così, se p. es. i punti  $x^{(12)}$  e  $x^{(122)}$  stanno sempre nello  $S_5$  2-tangente alla superficie nel suo punto generico  $x$ , il doppio sistema  $\tau_1 = \text{cost}, \tau_2 = \text{cost}$  viene a godere di proprietà che ricordano assai da vicino quelle degli ordinari sistemi coniugati: la rigata delle tangenti alle linee  $\tau_2$  nei singoli punti di una linea  $\tau_1$  ha indice di sviluppabilità uguale a 2 e analogamente scambiando  $\tau_1$  con  $\tau_2$  (d'accordo col n. 20).

## § 10. — Varietà luoghi di spazi.

22. — Fra le altre varietà sono state particolarmente studiate le varietà *luoghi di spazi*, cui si è già avuto occasione di accennare qua e là nei precedenti paragrafi, ricordando fra l'altro la nozione di  $\infty^1$  di spazi *svilupabile ordinaria*.

Per una qualsiasi  $V_{k+1}$  luogo di  $\infty^1 S_k$ , gli  $S_{k+1}$  tangenti nei singoli punti di uno  $S_k$  generatore corrispondono omograficamente ai loro punti di contatto. Però questa omografia può essere degenerare, il che avviene quando esista uno spazio *singolare* o *focale*  $[k_1]$  comune allo  $S_k$  generatore considerato e al suo successivo (cfr., anche per quel che segue SEGRE B n. 1-5). Se ciò avviene per ogni  $S_k$  generico delle  $\infty^1$ , questa si dice *svilupabile*. Se poi ogni  $S_k$  generico della  $\infty^1$  deve avere un  $[k_1]$  singolare, poi ogni  $[k_1]$  singolare, entro la relativa  $\infty^1$ , deve avere un  $[k_2]$  singolare, ecc. . . . e così via fino a  $[k_v]$  (senza che la  $\infty^1$  sviluppabile di  $S_k$  sia un cono), questa varietà si ottiene partendo da  $\infty^1$  di  $[k_v]$  i cui spazi generatori non ammettano generalmente punti singolari, tirando in modo generico  $\infty^1 [k_{v-1}]$  per gli spazi congiungenti due  $[k_v]$  consecutivi, poi  $\infty^1 [k_{v-2}]$  per gli spazi congiungenti due  $[k_{v-1}]$  consecutivi, e così via. Da ciò risulta anche che per l'esistenza della  $\infty^1$  di  $S_k$  devono valere le disuguaglianze

$$n - k \geq k - k_1 \geq k_1 - k_2 > \dots \geq k_{v-1} - k_v \geq k_v + 1.$$

23. — Se ora prendiamo a esaminare più in generale una  $\infty^\alpha$  di  $S_k$  ( $\alpha \geq 1$ ), la considerazione degli  $S_{k+\alpha}$  tangenti nei punti di uno spazio generatore alla  $V_{k+\alpha}$  luogo della  $\infty^\alpha$  conduce alla seguente proprietà: in generale gli  $\infty^k [k + \alpha]$  tangenti alla  $V_{k+\alpha}$  nei singoli punti di un suo  $S_k$  generatore fissato  $G$  e gli  $\infty^{\alpha-1} [2k + 1]$  ognuno dei quali congiunge  $G$  con uno  $S_k$  infinitamente vicino della  $\infty^\alpha$  riempiono una medesima  $V_{2k+\alpha}$  (cono di vertice  $G$ ) il cui ordine è  $\binom{k + \alpha - 1}{k}$  e la classe è  $\binom{k + 1}{\alpha - 1}$ , oppure  $\binom{\alpha}{k}$ , secondo che  $\alpha \leq k + 1$ , oppure  $\alpha \geq k + 1$ : in generale, lo spazio di appartenenza di questa varietà è  $\alpha k + \alpha + k$ , se questo numero è  $\leq n$ .

Quanto all'esistenza di punti *singolari* o *focali* (comuni a due  $S_k$  infinitamente vicini) sugli  $S_k$  generici dell' $\infty^\alpha$ , in generale, essi esistono solo quando  $2k + \alpha > n$ ; e formano allora una varietà di dimensione  $2k + \alpha - n - 1$  e d'ordine  $\binom{n-k}{\alpha-1}$ , a meno che sia  $k + \alpha > n$ , nel qual caso abbracciano tutto lo spazio generatore (cfr. per tutto ciò SEGRE B, n. 6-12) (\*).

24. — Particolarmente sono stati studiati i sistemi di rette. Per essi, quanto si è detto or ora porta alla conclusione che per una  $\infty^\alpha$  di rette, in generale, soltanto se  $\alpha > n - 2$  esistono su ogni retta generatrice dei punti singolari, abbracciando tutta la retta se  $\alpha > n - 1$ , ed essendo invece in numero di  $n - 1$  se  $\alpha = n - 1$  (\*\*).

Ma a risultati aventi una maggior portata si giunge introducendo col BOMPIANI (\*\*\*) il concetto di *indici di sviluppabilità* di una superficie rigata. Come già si è accennato, si dice che una superficie rigata ha  $\nu$  come *primo indice di sviluppabilità* quando  $\nu$  generatrici consecutive sono in generale linearmente indipendenti, mentre non lo sono  $\nu + 1$ . Se non è  $n = 2\nu - 1$ , la  $\infty^1$  degli  $S_{2\nu-1}$  ciascuno dei quali contiene  $\nu$  generatrici consecutive della rigata risulta una sviluppabile ordinaria, e le generatrici della rigata risultano immerse negli  $S_\nu$  di questa sviluppabile (intersezioni di  $\nu S_{2\nu-1}$  consecutivi). Allora la generatrice generica, immersa in uno  $S_\nu$  della sviluppabile, incontra certo lo  $S_{\nu-1}$  della sviluppabile stessa contenuto in tale  $S_\nu$ : ma può avvenire che incontri

(\*) Per una  $\infty^\alpha$  di  $S_k$  si possono anche considerare punti singolari o fochi di ordine superiore: così i fochi di 2° ordine, punti d'incontro di tre spazi successivi. Per es. per un sistema di  $\infty^2$  piani in  $S_4$ , su ogni piano di  $\Sigma$  vi sono in generale 5 fochi di 2° ordine, mentre i fochi di primo ordine costituiscono su ognuno di quei piani una conica: e, se queste coniche non sono tutte degeneri, solamente i sistemi  $\infty^2$  di piani costituiti dai piani delle coniche di una  $F^4$  proiezione della superficie di Veronese, o della  $F^3$  rigata di  $S_4$  son tali che tutti i punti delle coniche focali sono fochi di 2° ordine (SEGRE D). Per altre questioni dello stesso tipo v. SEGRE F.

(\*\*) Cfr. SEGRE: *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori*. Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo II, 1888.

(\*\*\*) H., cfr. anche B.

lo spazio  $[v_1]$  della sviluppabile stessa essendo  $v_1 < \nu - 1$ . Comunque sia  $v_1 \leq \nu - 1$  (per le generatrici generiche) si dice che  $v_1$  è il *secondo indice di sviluppabilità* della rigata considerata, ponendo  $v_1 = -1$  quando gli  $S_\nu$  della sviluppabile costituiscono un cono il cui spazio vertice è incontrato da tutte le generatrici della rigata. Se invece  $n = 2\nu - 1$  si sostituisca alla  $\infty^1$  di  $S_{2\nu-1}$  testè considerata, la  $\infty^1$  di  $S_{2\nu-2}$  che nasce nel seguente modo: congiungendo lo  $S_{2\nu-3}$  di  $\nu - 1$  generatrici consecutive a una prefissata genericamente  $g$  con un punto arbitrario di  $g$  si ha uno  $S_{2\nu-2}$ , che taglia la consecutiva di  $g$  in un punto: questo è congiunto allo  $S_{2\nu-3}$  delle  $\nu - 1$  generatrici consecutive alla consecutiva di  $g$  mediante uno  $S_{2\nu-2}$ , ecc. ecc. Si ha così una  $\infty^1$  di  $S_{2\nu-2}$  sviluppabile, sulla quale si può ragionare come sopra, con l'avvertenza che essa non è più univocamente determinata dalla rigata, bensì può variare in un sistema  $\infty^1$  dipendentemente dalla scelta del punto arbitrario di  $g$ , di cui si è detto: come valore di  $v_1$ , *secondo indice di sviluppabilità* della rigata, si assume il più piccolo fra i valori di  $v_1$  relativi alle singole  $\infty^1$  di  $S_{2\nu-2}$  sviluppabili.

Da quanto precede si può anche concludere che la più generale rigata di  $S_n$  avente indici di sviluppabilità  $\nu$  e  $v_1$  è tale che le sue generatrici sono negli  $S_\nu$  di una sviluppabile ordinaria e ne incontrano i  $[v_1]$  (dove di queste sviluppabili ve ne sono certo  $\infty^1$  se  $n = 2\nu - 1$ , e  $v_1 = \nu - 2$ ).

Passiamo ora a un sistema  $\infty^\alpha$  di rette con  $\alpha \geq 1$ : se  $\alpha < n - 1$ , quanto si è detto in principio di questo n. non informa per nulla sul modo di costituzione della rigata. Invece il BOMPIANI (H) ha ricercato, entro il sistema  $\infty^\alpha$ , le rigate coi minimi indici di sviluppabilità (analoghe dunque alle superficie rigate sviluppabili contenute in una generica congruenza di rette). Il risultato è questo (valido per  $\infty^\alpha$  generiche): se  $n - \alpha$  è dispari, i minimi indici di sviluppabilità per una superficie rigata del sistema sono  $\frac{n - \alpha + 1}{2}$ ,  $\frac{n - \alpha - 1}{2}$ ; ogni elemento (\*)

(\*) Intendiamo qui come elemento di ordine  $h$  di una superficie rigata l'insieme di  $h + 1$  sue generatrici consecutive.

$E_{\frac{n-\alpha-1}{2}}$  (entro il sistema) determina  $\alpha$  di queste rigate (cosicchè vi sono  $\alpha$  sistemi  $\infty^{(\alpha-1)\frac{n-\alpha+1}{2}}$  di tali rigate): se  $n - \alpha$  è pari, i minimi indici per una superficie rigata del sistema sono  $\frac{n-\alpha}{2} + 1$ ,  $\frac{n-\alpha}{2} - 1$ : ogni elemento  $E_{\frac{n-\alpha}{2}}$  determina  $\infty^1$  fra queste rigate (cosicchè vi sono  $\infty^{(\alpha-1)(\frac{n-\alpha}{2}+1)}$  di queste rigate).

25. — Il BOMPIANI ha approfondito lo studio delle quasi-asintotiche di una superficie rigata ponendole in relazione coi suoi indici di sviluppabilità (\*). Si dice che una rigata *presenta il caso normale* quando i suoi indici di sviluppabilità hanno i massimi valori compatibili con la dimensione dell'ambiente: cioè, se  $n$  è pari,

$$\nu = \frac{n}{2}, \quad \nu_1 = \nu - 1,$$

e, se  $n$  è dispari,

$$\nu = \frac{n-1}{2}, \quad \nu_1 = \nu - 2.$$

Allora, per una rigata che presenti il caso normale si hanno, fra l'altro, le seguenti proprietà. Esistono  $\infty^{n-2h} \gamma_{h, n-h}$ : una di esse risulta determinata da un suo elemento  $E_{n-2h-1}$ . In ogni rigata immersa in uno spazio di dimensione pari  $n = 2\nu$  esiste, in generale, una sola  $\gamma_{\nu, \nu}$ . Ogni rigata appartenente a uno spazio di dimensione dispari  $2\nu - 1$  possiede in generale  $\infty^1 \gamma_{\nu-1, \nu}$ , che segano le generatrici in punteggiate proiettive.

Se poi il primo indice di sviluppabilità è  $\nu$ , con  $\nu$  qualunque, e il secondo è  $\nu_1$ , la rigata possiede una  $\gamma_{\nu_1+1, \nu}$  ( $0 \infty^1$  di queste curve se  $n = 2\nu - 1$ ,  $\nu_1 = \nu - 2$ ) coincidente con lo spigolo di

(\*) Per una rigata una  $\gamma_{h, 1}$  si può anche definire come una curva tale che per lo  $S_{l-k}$  osculatore alla curva in ogni suo punto generico si possa condurre uno  $S_{l-1}$  appoggiato ad  $l + 1$  generatrici consecutive della rigata. Cfr. anche i §§ 112-113.

regresso della sviluppabile di cui si è detto nella prima metà del n. 24; mancano però tutti i sistemi  $\gamma_{h, l}$  con  $l \leq n - \nu$ , i quali vengono assorbiti dalla  $\gamma_{\nu_1+1, \nu}$  ora detta.

Mediante gli indici di sviluppabilità finora considerati il BOMPIANI ha dato la rappresentazione analitica di una *rigata qualsiasi* mediante un sistema di due equazioni differenziali lineari omogenee. Se la rigata è generata come luogo delle congiungenti i due punti  $x(t), y(t)$  tale sistema è (posto  $x' = \frac{dx}{dt}$ , ecc.) del tipo

$$\begin{cases} a_{10}x + a_{11}x' + \dots + a_{1\nu}x^{(\nu)} + b_{10}y + b_{11}y' + \dots + b_{1\nu_1}y^{(\nu_1)} = 0, \\ a_{20}x + a_{21}x^{(1)} + \dots + a_{2, \nu-1}x^{(\nu-1)} + b_{20}y + b_{21}y' + \dots + b_{2, \nu-\nu_1+1}y^{(\nu-\nu_1+1)} = 0, \end{cases}$$

dove le  $a$  e  $b$  sono funzioni di  $t$ . Viceversa, assegnato ad arbitrio un sistema del tipo indicato, gli corrisponde una classe di rigate proiettivamente identiche con gli indici di sviluppabilità  $\nu$  e  $\nu_1$ .

### § 11. — Luoghi di spazi con carattere di sviluppabili.

26. — La nozione di sviluppabile ordinaria si può estendere in modi diversi; ad alcuni di questi si è già accennato nei numeri precedenti.

Un altro modo deriva dalla considerazione delle  $V_k$  con meno di  $\infty^k S_k$  tangenti (SEGRE B n° 28-31): già sappiamo dal n. 3 che allora la  $V_k$  è un luogo di spazi (di dimensione  $\geq 1$ ) con uno  $S_k$  tangente fisso lungo ogni spazio generatore (\*). Nel caso più semplice, in cui la  $V_k$  è una  $\infty^\alpha$  di rette, con  $S_{\alpha+1}$  tangente fisso lungo ogni retta generatrice, esistono  $\alpha$  varietà  $V_\alpha$  a cui le generatrici sono tangenti, ognuna delle  $V_\alpha$  potendo essere sostituita da una varietà di minor dimensione incontrata (senza contatto)

(\*) Tali  $V_k$  sono spesso ancora designate come *sviluppabili*: così anche noi abbiamo parlato, in questo senso, di rigate sviluppabili p. es. al n. 11.

dalle  $\infty^\alpha$  rette (\*). La ricerca di tali  $\infty^\alpha$  di rette si può far dipendere (in generale) da quella di una delle  $\alpha$   $V_\alpha$  di cui ora si è detto: se con  $x(\tau_1, \dots, \tau_\alpha)$  si designa nel modo consueto un punto che descriva una di queste  $V_\alpha$ , in modo che le linee  $\tau_i$  siano su tale  $V_\alpha$  involupate dalle tangenti che descrivono la  $\infty^\alpha$  di rette in questione, occorre e basta che stiano in un  $S_{\alpha+1}$  i punti:

$$x, x^{(1)}, \dots, x^{(\alpha)}, x^{(11)}, x^{(12)}, \dots, x^{(1\alpha)},$$

e perciò la  $V_\alpha$  rappresenta le  $\alpha-1$  equazioni di Laplace linearmente indipendenti in cui si traduce l'imposizione di tale proprietà (\*\*). Questa  $V_\alpha$  si può caratterizzare geometricamente dicendo che il sistema lineare di coni quadrici tangenti in un suo punto generico  $x$  alle sezioni della  $V_\alpha$  con gli iperpiani che ivi la toccano è tale che una retta della stella ha lo stesso  $S_{\alpha-1}$  polare rispetto a tutti i coni (\*\*); oppure che essa possiede un sistema  $\infty^{\alpha-1}$  di linee tali che gli  $S_\alpha$  tangenti ad essa nei punti di una tale linea sono gli  $S_\alpha$  di una sviluppabile ordinaria. Inoltre gli  $S_{\alpha+1}$  di una tale sviluppabile sono appunto gli  $S_{\alpha+1}$  tangenti fissi lungo le singole  $\infty^\alpha$  generatrici alla  $V_{\alpha+1}$  di cui nella prima parte di questo n.; dimodochè, come ora risulta da quanto si è detto più sopra, se una  $V_{\alpha+1}$  rigata è tale che lungo ogni sua generatrice esiste uno  $S_{\alpha+1}$  tangente fisso, gli  $\infty^\alpha$   $S_{\alpha+1}$  tangenti si distribuiscono in generale (in  $\alpha$  modi diversi) in  $\infty^{\alpha-1}$  sistemi semplicemente infiniti, composti degli spazi  $S_{\alpha+1}$  di una sviluppabile ordinaria.

(\*) Più in generale, se lungo ogni retta generatrice vi è uno  $S_c$  tangente, con  $2 \leq c \leq \alpha + 1$ , vi sono  $c-1$  varietà  $V_\alpha$  toccate dalle generatrici (con un'avvertenza analoga a quella del testo).

(\*\*) Il sistema costituito da queste equazioni è di quelli che al n. 12 si sono chiamati a caratteristica (generalmente si tratterà di sistemi non parabolici). Il secondo modo di caratterizzare tale  $V_\alpha$  fra i due che stiamo per esporre è appunto da raffrontare con la fine del n. 12.

(\*\*\*) Ogni  $V_{n-2}$  di  $S_n$  si trova, come facilmente si vede, in queste condizioni, e quindi si può assumere come una delle  $V_\alpha$  considerate nel testo.

27. — Altri modi di generalizzare la nozione di superficie sviluppabile conducono alle seguenti proposizioni.

Una  $V_{n-1}$  dello  $S_n$  tale che ogni suo punto sia *parabolico* vale a dire tale che il suo cono quadrico delle tangenti tripunte abbia sempre una generatrice doppia, contiene ogni tale retta e ha lungo essa un iperpiano tangente fisso (SEGRE B n. 27).

Se entro una  $V_{\alpha+1}$  rigata ogni superficie rigata ha il primo indice di sviluppabilità  $\nu$  (con  $\nu \leq \alpha - 1$ ), la  $\infty^\alpha$  si compone di  $\infty^{\nu-1}$  coni aventi i loro vertici sopra uno  $S_{\nu-1}$ , oppure appartiene ad uno spazio di dimensione  $\leq 2\nu$  (BOMPIANI H n. 17).

Al BOMPIANI (H n. 18) è anche dovuto un risultato più generale: consideriamo una  $V_{\mu+1}$  rigata, e conveniamo di dire che essa ha indice di sviluppabilità  $\nu$  quando è fisso lo spazio  $\nu$ -tangente nei punti di una generatrice generica e non lo spazio  $(\nu-1)$ -tangente (\*). Allora, in uno spazio ambiente di dimensione maggiore di

$$\frac{(\mu+1) \dots (\mu+\nu-1) (\mu+2\nu)}{\nu!} - 1$$

una  $V_{\alpha+1}$  rigata tale che ogni  $V_{\mu+1}$  rigata in essa contenuta abbia indice di sviluppabilità  $\nu$   $\left[ \text{con } \alpha \geq \mu + \binom{\mu+\nu-1}{\nu-1} \right]$  è composta di rette uscenti dai punti di uno spazio avente la dimensione

$$\binom{\mu+\nu-1}{\nu-1} - 1.$$

28. — Un altro indirizzo nelle ricerche di cui ci stiamo occupando è il seguente. Come deve essere costituito un sistema  $\Sigma$  di  $\infty^\alpha S_k$  ( $\alpha > 1$ ) affinché uno  $S_k$  generico di  $\Sigma$  incontri sempre in uno  $S_l$  (con  $l \geq 0$ ) tutti gli  $S_k$  del sistema che gli sono infinitamente vicini? Se lo  $S_l$  singolare di ogni  $S_k$  è fisso per tutte le  $\infty^1$  contenute nello  $\infty^\alpha$  passanti per esso, il SEGRE (B n. 26) ha

(\*) Per  $\mu=1$  la definizione si riduce a quella già nota per il primo indice di sviluppabilità di una superficie rigata.

trovato che la varietà luogo di tutti gli  $S_l$  così ottenuti risulta tale che tutti gli  $S_k$  della  $\infty^\alpha$  le sono tangenti, a meno che lo  $S_l$  non sia lo stesso per tutti gli  $S_k$ ; e viceversa.

La determinazione dei sistemi  $\Sigma$  in questione nel caso di  $\alpha = 2$  è stato compiuto dal SEGRE (B, n.° 32-35) per le  $\infty^2$  di piani, e per le  $\infty^2$  di  $S_k$  qualunque dal TERRACINI (C). Occorre e basta che sia verificata una delle seguenti condizioni:

1) gli  $S_k$  di  $\Sigma$  stanno in uno spazio di dimensione  $2k-l$ , oppure passano tutti per uno stesso  $S_l$ , oppure ancora essi tagliano in  $S_{l+1}$  uno  $S_{l+2}$  fisso;

2) gli  $S_k$  di  $\Sigma$  sono tangenti ciascuno lungo uno  $S_l$  ad una  $U_{l+1}$  luogo di  $\infty^1 S_l$  ( $l < k-1$ );

3) gli  $S_k$  di  $\Sigma$  si ottengono considerando una  $\infty^2$  di  $S_m$  ( $l \leq m \leq k$ ;  $l < k-1$ ) tale che la  $U_{m+2}$  loro luogo ammetta lungo ciascuno di essi uno  $S_{k+m-l}$  tangente fisso, e conducendo uno  $S_k$  generico per ogni  $S_m$  della  $\infty^2$  entro il corrispondente  $S_{k+m-l}$  tangente.

Al TERRACINI è pure dovuta la determinazione dei sistemi  $\Sigma$  in questione costituiti da piani, per  $\alpha$  qualunque (i sistemi di rette si trattano in modo ovvio). Supposto  $l=0$  (se  $l=1$  si hanno soltanto delle soluzioni banali) e lasciando ormai da parte il caso  $\alpha=2$ , e i casi in cui per ogni piano è fisso il punto in cui è incontrato dai piani infinitamente vicini, oppure lo  $S_4$  che lo congiunge con tali piani (la prima di queste ipotesi è già stata considerata più sopra, e la seconda si riduce alla prima per dualità in  $S_5$ ), si ha che per  $\alpha > 3$  i sistemi  $\Sigma$  sono costituiti da piani che incontrano in rette un piano fisso: per  $\alpha=3$  si hanno anche i sistemi  $\infty^3$  di piani di una quadrica generale  $V_4^2$  dello  $S_5$ , e i sistemi dei piani che passano per le singole rette di una  $\infty^2$  ricoprente una  $U_3$ , dotata di  $S_3$  tangente fisso lungo ogni generatrice, e sono situati entro i corrispondenti  $S_3$  tangenti.

Consideriamo ancora il caso in cui  $\alpha$  è abbastanza grande ( $\alpha \geq k+1$ ) e  $k$  qualunque (TERRACINI C n.° 7-10), e supponiamo che gli  $S_l$  d'intersezione di uno  $S_k$  di  $\Sigma$  con gli infinitamente vicini siano sempre distribuiti, per così dire, in modo uniforme sopra quello  $S_k$ , cioè che per un punto generico di tale  $S_k$  pas-

sino  $\infty^{\alpha-k-1+l} S_k$  di  $\Sigma$  ad esso infinitamente vicini, i quali non seghino generalmente tale  $S_k$  in uno spazio di dimensione  $> l$ ; allora si trova che gli  $S_k$  di  $\Sigma$  stanno in una varietà  $\Gamma_{2k-l}$  di dimensione  $2k-l$ , e che essi (anche se non sono infinitamente vicini) si segano a due a due generalmente in uno  $S_l$  (in modo però che per un punto generico di uno  $S_k$  della  $\Gamma$  passano  $\infty^{\alpha-k+l} S_k$  della  $\Gamma$ , i quali generalmente non incontrano quello  $S_k$  in uno spazio di dimensione  $> l$ ). Supponiamo, per semplicità, che sia  $l=0$ : il TERRACINI ha trovato che la varietà  $\Gamma$  sta necessariamente in uno spazio di dimensione  $\leq \frac{k(k+3)}{2}$ ; e che, se la dimensione dello spazio ambiente raggiunge questo massimo, oppure almeno supera  $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ , la  $\Gamma$  in questione è necessariamente quella che rappresenta nel noto modo di GRASSMANN la totalità delle rette di uno spazio di  $k+1$  dimensioni (cosicchè è proprio  $\alpha = k+1$ ), oppure è una sua proiezione.

## § 12. — Un tipo particolare di luoghi di spazi.

29. — L'ultimo risultato citato risolve, in un caso particolare, il problema della determinazione di una  $\infty^\alpha$  di  $S_k$  che ricoprono una varietà di dimensione  $< \alpha + k$ . In generale, questo problema sembra offrire notevoli difficoltà. Già per gli stessi sistemi di rette, dopo il caso banale di  $\alpha=2$ , e quello di  $\alpha=3$ , nel quale si trova facilmente che, se per ogni punto di una  $V_3$  passano  $\infty^1$  rette della  $V_3$  stessa, questa è una quadrica non degenera dello  $S_4$ , oppure si compone di  $\infty^1$  piani (\*), per  $\alpha=4$  la soluzione completa non è più nota: il TOGLIATTI (\*\*) ha trovato che se una  $V_4$  è ricoperta da  $\infty^4$  rette (e non da  $\infty^5$ ) essa è luogo di  $\infty^2$  piani,

(\*) SEVERI: *Intorno ai punti impropri...*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tomo XV, 1901, n. 10.

(\*\*) *Sulle varietà a k dimensioni contenenti  $\infty^k$  rette.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LVII, (1921).

oppure è luogo di  $\infty^1$  quadriche  $V_3^2$  non degeneri di  $S_4$ , oppure appartiene al massimo a uno  $S_7$ ; e se lo spazio d'appartenenza ha proprio dimensione 7, quella  $V_4$  si ottiene come sezione mediante uno  $S_7$  della  $V_6^2$  di  $S_9$  che rappresenta, al modo di GRASSMANN, le rette di uno  $S_4$  (\*).

30. — Il problema di cui si è detto al principio nel n. precedente è stato particolarmente studiato nel caso in cui gli  $\infty^\alpha S_n$  in questione sono gli  $S_h(h+1)$ -seganti di una varietà  $G_p$ . Lasciando da parte il caso in cui  $G$  è una curva, che conduce solo a soluzioni banali, il caso in cui  $G$  è una superficie è stato trattato in modo completo da F. PALATINI (\*\*), e dal TERRACINI (H). Le superficie per le quali la varietà  $M$  ricoperta dagli  $S_h(h+1)$ -seganti ha dimensione minore di quella che compete all'analoga varietà relativa ad una superficie generica immersa nel medesimo spazio ambiente sono le superficie luoghi di  $\infty^1$  linee situate in altrettanti  $S_q$  per uno  $S_{q-1}$  fisso, con  $q \leq h$ , immerse in  $S_n$ , con  $n \geq 2h + q + 2$  (per le quali la varietà degli  $S_h(h+1)$ -seganti ha dimensione  $2h + q + 1$ ), e le superficie algebriche razionali dello  $S_{3h+2}$  rappresentabili in un piano mediante il sistema lineare delle curve d'ordine  $2h$  aventi in comune un punto  $2(h-1)^{plo}$  ed  $(h-1)$  punti doppi, o anche, per  $h=4$ , mediante il sistema lineare di tutte le quartiche (per tutte queste superficie la varietà degli  $S_h(h+1)$ -seganti ha dimensione  $(3h+1)$ ).

Il fatto che per  $h=1$  si ottenga dal teorema ora enunciato, insieme coi con, la superficie di Veronese (in accordo con un risultato precedentemente ottenuto dal SEVERI, loc. cit., v. il n.° 8) paragonato con quello che questa superficie è pure caratterizzata

(\*) In un certo senso analoga alla questione di cui si è detto in questo n. è la ricerca delle superficie contenenti almeno  $\infty^2$  linee di tipo prestabilito: p. es.  $\infty^2$  linee piane, ciò che conduce a una notissima proprietà delle superficie di Veronese (che la caratterizza insieme con pochi altri tipi di superficie), oppure  $\infty^2$  linee spaziali, caso a cui sono dedicate le due Note di SEGRE F e G.

(\*\*) *Sulle superficie algebriche i cui  $S_h(h+1)$ -seganti non riempiono lo spazio ambiente*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, volume XL, (1906).

dall'essere in  $S_n$ , con  $n \geq 5$ , la sola superficie non cono i cui piani tangenti si incontrano a due a due (\*) rientra nel teorema dovuto al TERRACINI (A), che pone in relazione l'eventuale abbassamento di dimensione della varietà degli  $S_h(h+1)$ -seganti di una varietà  $G_p$  immersa in uno spazio di dimensione  $n \geq (h+1)p + h$  con l'esistenza di  $h+1$  qualsiasi suoi  $S_p$  tangenti in uno spazio di dimensione minore dell'ordinario; in quanto questa dimensione e quella si riducono, l'una in conseguenza dell'altra, a  $(h+1)p + h - i$  (con  $i < 0$ ) (\*\*). In tal caso, di più, lo spazio  $[(h+1)p + h - i]$  di  $h+1$  qualsiasi  $S_p$  tangenti della  $G_p$  in questione è tangente alla  $G_p$  in tutti i punti di una certa varietà di dimensione

$$\geq \frac{i + \frac{i}{h}}{h+1}.$$

31. — Per  $p=2$ ,  $h=1$  quanto or ora si è detto conduce alle superficie (che sono poi con o superficie di Veronese) tali che lo  $S_4$  di due loro piani tangenti generici risulti tangente alla superficie stessa in  $\infty^1$  altri punti. Lo SCORZA (\*\*\*) e il TERRACINI (H) hanno anche studiato le superficie, immerse in  $S_n$ , con  $n \geq 6$ , (non con) tali che lo  $S_5$  individuato da due loro piani tangenti generici contenga necessariamente i piani tangenti in  $\infty^1$

(\*) In questo ordine di idee, citiamo il teorema più generale secondo il quale la sola superficie non rigata di  $S_n$ , con  $n \geq 5$ , i cui piani tangenti si appoggino ad almeno  $\infty^1$  piani, senza appoggiarsi di conseguenza ad una retta è la superficie di Veronese (V. TERRACINI J, e per un caso particolare COMESSATTI: *Intorno alle superficie algebriche irregolari...*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, tomo XLVI 1922).

(\*\*) Perciò la determinazione che lo SCORZA ha compiuto delle  $V_3$  e delle  $V_4$  con gli  $S_3$ , o rispettivamente  $S_4$  tangenti mutuamente secantisi (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXV, 1908, e tomo XXVII, 1909) fornisce le  $V_3$  e  $V_4$  per cui la varietà delle corde ha dimensione minore dell'ordinario (la ricerca, per quanto riguarda la  $V_4$ , non è però condotta completamente a termine).

(\*\*\*) *Un problema sui sistemi lineari di curve appartenenti a una superficie algebrica*. Rend. del R. Ist. Lombardo, serie II, vol. XLI, 1908.

punti, e hanno trovato, come tali, le sviluppabili, i luoghi di  $\infty^1$  linee (eventualmente rette) in altrettanti piani per una retta fissa, e infine le superficie situate su un cono  $V_3^4$  di Veronese.

32. — Il TERRACINI (I) ha anche considerato, in relazione con una superficie  $F$ , le varietà, rispettivamente  $\Phi_i$  e  $H_3$ , costituite dagli  $S_3$  che ne congiungono i singoli punti ai singoli piani tangenti, e dagli  $S_5$  che ne congiungono le coppie di piani tangenti, allo scopo di studiarne gli eventuali abbassamenti di dimensione e anche alcune altre particolarità che esse possono presentare, come ora si dirà; particolarità tutte che stanno in stretta relazione con i problemi di determinare le superficie  $F$  per le quali hanno una intersezione di dimensione maggiore dell'ordinario:

- a) un piano tangente e uno  $S_4$  osculatore generici;
- b) un piano tangente e uno  $S_5$  osculatore generici;
- c) due  $S_4$  osculatori generici;
- d) due  $S_5$  osculatori generici.

In base all'osservazione che, se gli spazi  $r$ -tangenti generici di una superficie  $F$  sono degli  $S_d$ , e se essi incontrano uno  $S_p$  fisso in spazi di dimensione  $i \geq d - r$ , la  $F$  sta, con lo  $S_p$ , in uno spazio di dimensione  $d + p - i$  (cosicchè tutti gli  $S_d$  generici di questo spazio ambiente segano lo  $S_p$  in  $S_i$ ), è chiaro che, detta  $i$  la dimensione dell'intersezione considerata nei precedenti problemi a), b), c), d), nei casi a) e b) è necessariamente  $i = 0$ , mentre il problema c) si spezza in due problemi  $c_1)$ ,  $c_2)$ , secondo che si supponga  $i = 1$ ,  $i = 0$ ; e il problema d) in tre problemi  $d_1)$ ,  $d_2)$ ,  $d_3)$  secondo che si supponga  $i = 2$ ,  $i = 1$ ,  $i = 0$ . Quanto alla dimensione dello spazio ambiente, essa deve essere supposta  $\geq 7$  nel problema a),  $\geq 8$  nel problema b),  $\geq 9 - i$  nel problema c), e  $\geq 11 - i$  nel problema d).

Allora le superficie che risolvono il problema a) sono anche le sole superficie di  $S_n$ , con  $n \geq 7$ , per cui la dimensione  $t$  della varietà  $\Phi$  ha dimensione  $< 7$  (e precisamente dimensione 6). Inoltre le superficie di  $S_n$ , con  $n > 7$  per cui la varietà  $\Phi_7$  è toccata da uno stesso  $S_7$  nei singoli punti di ogni  $S_3$  generatore sono le superficie che risolvono il problema b), e inoltre le superficie di quegli spazi che rappresentano una equazione di Laplace senza essere soluzioni del problema a).

Quanto alla varietà  $H$ , le superficie  $F$  non sviluppabili di  $S_n$  per le quali essa ha dimensione  $e < 9$  sono (\*) le superficie che risolvono il problema  $c_1)$ , e per esse  $e = 7$ , e le superficie che risolvono il problema  $c_2)$  oppure il problema  $d_1)$  e per esse  $e = 8$ . Che se poi la  $H_3$ , in  $S_n$ , con  $n \geq 10$ , ha da essere toccata da uno stesso  $S_5$  nei singoli punti di ogni suo  $S_5$  generatore, le corrispondenti superficie sono quelle che risolvono il problema  $d_2)$ , e inoltre le superficie di quegli spazi che rappresentano una equazione di Laplace senza essere soluzioni del problema c).

Finalmente, quanto alla soluzione effettiva dei problemi a), b), c), d), essa è fornita (salvo una limitazione che sarà detta più avanti, per quanto riguarda il problema d)), dalle seguenti superficie.

*Problema a)*,  $n \geq 7$ . Luoghi (non degeneranti in coni) di  $\infty^1$  linee (eventualmente rette) in altrettanti piani per una retta fissa.

*Problema b)*,  $n \geq 8$ . Luoghi di  $\infty^1$  linee (eventualmente piane, ma non rette) in altrettanti  $S_3$  per un piano fisso, non rappresentati equazioni di Laplace, e le superficie algebriche razionali di  $S_9$  o di  $S_8$  rappresentabili su un piano mediante sistemi lineari di cubiche.

*Problema  $c_1)$* ,  $n \geq 8$ . Il problema coincide col problema a), salvo la diversa limitazione per la dimensione dello spazio ambiente.

*Problema  $c_2)$* ,  $n \geq 9$ . Luoghi di  $\infty^1$  linee (eventualmente rette) in altrettanti piani di una sviluppabile ordinaria con un punto fisso, non costituenti però una sviluppabile; e luoghi di  $\infty^1$  linee in altrettanti  $S_3$  per un piano fisso che rappresentano una (sola) equazione di Laplace.

*Problema  $d_1)$* ,  $n \geq 9$ . Il problema coincide col problema b), salvo la diversa limitazione per la dimensione dello spazio ambiente.

*Problema  $d_2)$* ,  $n \geq 10$ . Luoghi di  $\infty^1$  linee (eventualmente piane, ma non rette) situate in altrettanti  $S_3$  di una sviluppabile ordinaria con retta fissa, o di  $\infty^1$  linee (eventualmente appartenenti a  $S_3$ , o a  $S_2$ , ma non rette) situate in altrettanti  $S_4$  per uno  $S_5$  fisso, con la restrizione, in entrambi i casi, che quelle superficie non rappresentino equazioni di Laplace; infine le superficie (non

(\*) Prescindendo, s'intende, dalla soluzione triviale della superficie di  $S_3$ .

coni) situate su un cono  $V_3^2$  proiettante da un punto la superficie algebrica razionale, rappresentata su un piano mediante il sistema lineare delle curve di terzo ordine.

*Problema  $d_3$* ,  $n \geq 11$ . Però il problema non è stato risolto se non per  $n \geq 13$ , ottenendosi in tali spazi: le superficie situate su un cono proiettante da un punto una superficie di  $S_{n-1}$  rappresentante una (sola) equazione di Laplace senza che esse rappresentino alcuna equazione di Laplace; le superficie luoghi di  $\infty^1$  linee giacenti in altrettanti  $S_4$  di una sviluppabile con piano fisso, oppure in altrettanti  $S_5$  per uno  $S_4$  fisso, purchè, in entrambi i casi, esse non rappresentino equazioni di Laplace, e senza escludere che quelle linee eventualmente appartengano a spazi di dimensione minore, purchè sempre  $> 1$ ; le superficie luoghi di  $\infty^1$  linee in altrettanti  $S_6$  per uno  $S_5$  fisso, colla condizione che le tangenti a quelle linee incontrino lo  $S_5$  fisso in punti appartenenti a una medesima superficie di Veronese (ma non tutti giacenti su una curva), e infine le superficie di  $S_{14}$  o di  $S_{13}$  algebriche razionali rappresentabili su un piano con un sistema lineare  $\infty^{14}$  o  $\infty^{13}$  di curve del quarto ordine.

## APPENDICE IV<sup>a</sup>

### Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari.

Nota del Prof. ALESSANDRO TERRACINI della R. Università di Torino.

Di queste superficie mi occupai - da un punto di vista prevalentemente sintetico - in alcuni lavori (\*), sui quali, per cortese invito del prof. FUBINI, riferisco qui brevemente.

1. - Prendiamo le mosse dall'osservazione di SEGRE (cfr. vol. I. § 49, p. 278): se la rigata sghemba ( $g$ ) viene trasformata mediante una congruenza  $W$  in una superficie ( $\gamma$ ) non rigata, le asintotiche  $\gamma$  di questa superficie corrispondenti alle generatrici rettilinee di ( $g$ ) appartengono a complessi lineari. Invero, come ha osservato SEGRE, se  $\gamma$  è una di queste asintotiche e  $g$  è la corrispondente generatrice della ( $g$ ), la considerazione delle  $\infty^1$  rette della congruenza che hanno i loro fuochi rispettivamente su queste due linee mostra che per ogni punto della curva  $\gamma$ , entro il cor-

(\*) *Sulle congruenze  $W$  di cui una falda focale è una quadrica*, Scritti matematici offerti ad ENRICO D' OVIDIO, Torino, 1918; *Sulle superficie le cui asintotiche dei due sistemi sono cubiche sghembe*, Nota I, Atti della Soc. Nat. e Mat. di Modena, serie V, vol. V, 1919; *Sulle superficie con un sistema di asintotiche in complessi lineari*, Atti della R. Acc. di Torino, vol. LIX, 1924. In questi lavori si trovano varie citazioni. - Nella seconda di queste Note è data, per la prima volta, una rappresentazione parametrica per tutte le superficie con le asintotiche dei due sistemi in complessi lineari.

rispondente piano osculatore, passa una retta di una congruenza lineare fissa; ciò che è sufficiente a dedurne l'appartenenza di  $\gamma$  a un complesso lineare.

Anche il teorema inverso, di FUBINI (vol. I., p. 280) secondo il quale ogni superficie ( $\gamma$ ) con un sistema di asintotiche  $\gamma$  in complessi lineari è trasformata per congruenze  $W$  di  $\infty^3$  rigate, è suscettibile di una dimostrazione geometrica, che riproduco qui per dare un'idea dell'apparato dimostrativo su cui poggia anche il seguito della teoria.

Chiamo  $\Gamma$  il complesso lineare cui appartiene un'asintotica generica  $\gamma$ ; e cerco se è possibile scegliere, entro ognuno degli  $\infty^1$  complessi lineari  $\Gamma$ , una sua retta  $g$  in modo che la superficie rigata ( $g$ ) che è luogo di  $g$  venga a godere della proprietà che la congruenza lineare speciale delle rette ad essa tangenti nei punti di una sua generatrice generica  $g$  sia sempre entro il corrispondente complesso lineare  $\Gamma$ .

Per maggior chiarezza, trasportiamo il problema nello  $S_3$  della  $\Phi$  rappresentativa delle rette nello spazio; e consideriamo, in esso, la linea ( $P_\Gamma$ ) luogo dei poli - rispetto a  $\Phi$  - degli  $\infty^1 S_4$  immagini dei complessi  $\Gamma$ . La ricerca della rigata ( $g$ ) si traduce nella ricerca di una linea ( $g$ ) tracciata su  $\Phi$ , tale che la retta ad essa tangente in un suo punto generico  $g$  - retta polare dello  $S_3$  immagine della congruenza lineare speciale testè nominata - passi per il polo  $P_\Gamma$  dello  $S_4$  immagine di  $\Gamma$ . Perciò tutto si riduce a far sì che le rette tangenti alla linea ( $g$ ) si appoggino tutte quante alla linea ( $P_\Gamma$ ) (in punti variabili). Ora, se per ogni punto della  $\Phi$  si immaginano le rette che lo congiungono colle intersezioni del proprio  $S_4$  tangente colla linea ( $P_\Gamma$ ), queste rette tangenti involuppano sulla  $\Phi$  uno o più sistemi  $\infty^3$  di linee. Ciascuna di queste linee soddisfa alle proprietà richieste per la linea ( $g$ ), solo che si abbia cura di scartare da esse le rette della  $\Phi$  appoggiata alla ( $P_\Gamma$ ).

Ritornando ora allo spazio ordinario, se da un punto  $P$  scelto genericamente su una asintotica  $\gamma$  della superficie ( $\gamma$ ) si conduce la retta  $t$  del corrispondente complesso lineare  $\Gamma$  appoggiata alla corrispondente retta  $g$  di una, fissata arbitrariamente, tra le  $\infty^3$  rigate sghembe ( $g$ ) ora costruite, è manifesto che questa retta è tangente, non solo alla  $\gamma$  nel punto  $P$ , ma anche alla rigata ( $g$ ) nel punto  $gt$ . Al variare del punto  $P$  su  $\gamma$ , e dell'asin-

totica  $\gamma$  sulla  $(\gamma)$ , la  $t$  descrive dunque una congruenza  $W$  nelle condizioni richieste.

Dalla dimostrazione risulta anche che le  $\infty^3$  rigate del precedente enunciato non dipendono dalla superficie  $(\gamma)$  considerata in sè, ma solo dagli  $\infty^1$  complessi lineari  $\Gamma$  cui appartengono le sue asintotiche (fissati i quali la determinazione della  $(\gamma)$  dipende ancora da una funzione arbitraria); e ancora che due qualunque fra quelle  $\infty^3$  rigate sono trasformate l'una dell'altra per congruenze  $W$  (corrispondendosi quelle loro generatrici che corrispondono a una stessa asintotica). — Ed è anche facile verificare che non esistono altre rigate di cui la  $(\gamma)$  sia trasformata per congruenze  $W$ , salvo le  $\infty^3$  testè determinate (almeno fintantochè si imponga che le generatrici rettilinee della rigata corrispondano proprio alle asintotiche  $\gamma$ ). (\*)

2. — Volendo costruire una superficie  $(\gamma)$  le cui asintotiche  $\gamma$  di un sistema, generalmente curve, appartengano a complessi lineari, si possono assegnare ad arbitrio gli  $\infty^1$  complessi lineari  $\Gamma$  (non speciali) cui debbono appartenere quelle asintotiche, e un'asintotica  $\gamma_0$  appartenente a un complesso  $\Gamma_0$  prescelto fra quegli  $\infty^1$ ; con ciò la superficie  $(\gamma)$  risulta pienamente determinata. Invero (adottando per brevità il linguaggio degli infinitamente vicini) considero la congruenza lineare in cui  $\Gamma_0$  è segato dal complesso lineare  $\Gamma_1$  ad esso infinitamente vicino entro la  $\infty^1$  assegnata, e la rigata della congruenza formata dalle rette di questa che escono dai singoli punti di  $\gamma_0$ . Questa rigata ammette come asintotica  $\gamma_0$ ; e le varie sue asintotiche curve appartengono ai vari complessi lineari del fascio  $\Gamma_0 \Gamma_1$ : essa possiede dunque un'asintotica  $\gamma_1$  (infinitamente vicina a  $\gamma_0$ ) nel complesso lineare  $\Gamma_1$ . Analogamente si passa da  $\gamma_1$  a un'ulteriore asintotica  $\gamma_2$ ; e  $(\gamma)$  viene costruita

(\*) Alle proprietà del testo aggiungiamo quella che due asintotiche  $\gamma$  generiche sono tra loro proiettive. Se infatti chiamiamo  $R(\gamma)$  la rigata delle tangenti, nei singoli punti di un'asintotica  $\gamma$ , alle asintotiche dell'altro sistema, rigata le cui generatrici appartengono a una congruenza lineare, dal fatto — subito verificato — che le asintotiche curvilinee di  $R(\gamma)$  — fra cui appunto è la  $(\gamma)$  — sono fra loro proiettive (corrispondendosi i punti su esse segati dalle generatrici) segue l'enunciato, appena si osservi che la  $(\gamma)$  appare come l'involuppo delle  $\infty^1$  superficie  $R(\gamma)$ .

come luogo delle successive curve  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ , ecc. che risultano effettivamente sue asintotiche (cfr. la fine del n. 3). Nè esistono altre superficie soddisfacenti alle condizioni richieste.

In questo modo, se gli  $\infty^1$  complessi  $\Gamma$  sono condotti ad arbitrio per le congruenze lineari speciali delle tangenti ad una rigata  $(g)$  lungo le singole sue generatrici, si ottengono tutte le trasformate (non rigate) per congruenze  $W$  della superficie  $(g)$ .

Alcune proprietà interessanti si legano alla considerazione delle due superficie rigate  $(g')$  e  $(g'')$  descritte dalle direttrici  $g'$  e  $g''$  delle  $\infty^1$  congruenze lineari caratteristiche per gli  $\infty^1$  complessi lineari  $\Gamma$  relativi a una superficie  $(\gamma)$  del tipo considerato. Secondochè  $g'$  e  $g''$  sono generalmente distinte o no, ho chiamata la superficie  $(\gamma)$  *non speciale o speciale*. Ebbene, attraverso la rappresentazione iperspaziale, si trova anzitutto che le due rigate  $(g')$  e  $(g'')$  sono trasformate l'una dell'altra per congruenze  $W$ ; e poi che, viceversa, si può partire da due rigate  $(g')$  e  $(g'')$  falde focali di una congruenza  $W$ , e fissare una corrispondenza arbitraria fra i punti di due loro generatrici corrispondenti prefissate,  $g'$  e  $g''$ : allora esiste una (anzi due) superficie  $(\gamma)$  ben determinata, con un sistema di asintotiche  $\gamma$  in complessi lineari, per le quali le tangenti principali dell'altro sistema si appoggiano a generatrici corrispondenti delle rigate  $(g')$  e  $(g'')$ , determinando fra  $g'$  e  $g''$  proprio la corrispondenza prefissata.

Ma la rappresentazione iperspaziale conduce a risultati notevoli anche per il caso delle superficie *speciali*. Per esse, si trova anzitutto che fra le trasformate per congruenze  $W$  di una data rigata  $(g)$  ve ne sono infinite di speciali, e che la determinazione dei relativi  $\infty^1$  complessi lineari dipende da un'equazione di RICCATI. Allora, se per ognuno di questi  $\infty^1$  sistemi di complessi lineari si immagina la rigata  $(g')$  luogo delle direttrici delle congruenze lineari speciali caratteristiche, due qualunque fra queste rigate  $(g')$  sono ancora trasformate l'una dell'altra per congruenze  $W$  (corrispondendosi le direttrici omologhe di una stessa generatrice  $g$ ). Ancora: si parta da una rigata qualunque  $(g')$ , e poi si tracci, in modo generico, una rigata  $(r_0)$  contenuta in una (qualsiasi) congruenza lineare speciale avente per direttrice una generatrice prefissata  $g'_0$  della  $(g')$ : esiste una superficie  $(\gamma)$  speciale bene determinata, con un sistema di asintotiche  $\gamma$  in complessi lineari, per

la quale le tangenti principali dell'altro sistema si ripartiscono fra  $\infty^1$  congruenze lineari speciali aventi per direttrici le singole generatrici della ( $g'$ ), in modo che quelle corrispondenti alla  $g'$ , costituiscano precisamente la ( $r_0$ ).

3. - Per le superficie ( $\gamma$ ) con un sistema di asintotiche in complessi lineari ho anche studiate le trasformazioni per congruenze  $W$ .

Anzitutto, riprendendo l'osservazione iniziale del n. 2, al variare della linea  $\gamma_0$  entro il complesso  $\Gamma_0$ , e restando fissi gli  $\infty^1$  complessi lineari  $\Gamma$ , si ottengono infinite superficie, dipendenti da una funzione arbitraria, con le asintotiche di un sistema tutte appartenenti a quei complessi lineari. Ebbene, due qualunque fra quelle superficie sono falde focali di una congruenza  $W$ , corrispondendosi su esse le asintotiche appartenenti a uno stesso complesso lineare. Ma, di più, risulta subito che se l'insieme delle superficie testè nominate si amplia con l'aggiunta delle  $\infty^3$  rigate che sono trasformate per congruenze  $W$  di una qualunque fra esse, tutte queste superficie sono ancora, a due a due, falde di congruenze  $W$ .

Però, è essenziale notare che due superficie ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ ) ciascuna delle quali abbia le asintotiche di un sistema (rispettivamente  $\gamma$  e  $\delta$ ) appartenenti a complessi lineari possono essere le falde focali di una congruenza  $W$  (corrispondendosi appunto quei sistemi di asintotiche) in modo che i complessi lineari delle asintotiche corrispondenti siano generalmente distinti. Convieni pertanto distinguere in due classi le trasformazioni per congruenze  $W$  delle superficie in questione. Precisamente, un esame più accurato della questione mostra che, collocate in una *prima classe* le trasformazioni di cui si è detto al principio di questo n., conviene attribuire alla *seconda classe* non solo quelle per le quali asintotiche corrispondenti stanno in complessi lineari generalmente distinti; ma anche quelle che, pure appartenendo già alla prima classe, hanno tuttavia in comune con le trasformazioni ora nominate la particolarità che ciascuna delle rigate luoghi delle congiungenti punti corrispondenti di un'asintotica  $\gamma$  e di un'asintotica  $\delta$  sta in una congruenza lineare (anzichè in un complesso lineare, come avviene per le rimanenti trasformazioni della prima classe). Queste

ultime trasformazioni appartengono dunque contemporaneamente a entrambe le classi.

Posta questa definizione, mentre per le trasformazioni della prima classe non vi è altro da aggiungere, si pone ancora il problema di assegnare tutte quelle della seconda classe. Orbene, esso viene completamente risoluto dalla seguente costruzione. Assegnata una superficie ( $\gamma$ ) con un sistema di asintotiche  $\gamma$  in complessi lineari  $\Gamma$ , per trovare nel modo più generale una superficie ( $\delta$ ) che sia sua trasformata per congruenze  $W$  della *seconda classe*, si assuma ad arbitrio, entro ogni complesso  $\Gamma$ , una congruenza lineare  $C$ , in modo che le  $\infty^1$  congruenze lineari così ottenute siano caratteristiche per una  $\infty^1$  di complessi lineari, e si tracci per ogni punto di ogni asintotica  $\gamma$  la retta della corrispondente congruenza  $C$ . La congruenza così ottenuta è una congruenza  $W$ , e la sua seconda falda focale fornisce la superficie ( $\delta$ ) richiesta. Di più, le stesse considerazioni geometriche con le quali si dimostra tale teorema provano che nota ( $\gamma$ ), ogni superficie ( $\delta$ ) (la cui determinazione dipende da una funzione arbitraria) si ottiene con sole operazioni di derivazione.

Per le trasformazioni per congruenze  $W$  delle superficie in questione si ha anche un teorema di permutabilità. Ad esso sono giunto ricostruendo anzitutto da un punto di vista geometrico il teorema di permutabilità per le corrispondenze  $W$  in generale; ciò che avviene sfruttando sistematicamente la nozione di coppie di curve trasformate asintotiche l'una dell'altra, nozione già approfondita dal BIANCHI e suscettibile essa stessa di una trattazione sintetica assai semplice. Nel caso particolare che qui ci interessa quelle considerazioni geometriche, opportunamente completate, conducono al seguente risultato. Se nel teorema di permutabilità si suppone di partire da tre superficie ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) aventi ciascuna un sistema di asintotiche in complessi lineari, *ognuna* delle  $\infty^1$  superficie che sono contemporaneamente trasformate per congruenze  $W$  della ( $\alpha$ ) e della ( $\gamma$ ) ha ancora un sistema di asintotiche in complessi lineari, se le trasformazioni fra ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) e fra ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) appartengono alla *medesima* classe; mentre nell'ipotesi opposta fra quelle  $\infty^1$  superficie ve ne è *una e una sola* dotata di tale proprietà.

4. - Possiamo ora a considerare una superficie non rigata

$\Theta \equiv (\gamma, \gamma')$ , le cui asintotiche dei due sistemi, rispettivamente  $\gamma$  e  $\gamma'$  stiano in complessi lineari, rispettivamente  $\Gamma$  e  $\Gamma'$ . Ogni complesso  $\Gamma$  è in involuzione con ogni complesso  $\Gamma'$ , perchè se le corrispondenti asintotiche  $\gamma$  e  $\gamma'$  escono dal punto  $P$ , la quadrica di LIE di  $\Theta$  relativa al punto  $P$  viene ad avere le sue due schiere contenute l'una in  $\Gamma$  e l'altra in  $\Gamma'$ .

Quindi i due sistemi lineari contenenti l'uno gli  $\infty^1$  complessi  $\Gamma$  e l'altro gli  $\infty^1$  complessi  $\Gamma'$  risultano involutorii; donde segue - essendosi escluse le rigate - che quei due sistemi lineari sono due reti involutorie ( $K$ ), ( $K^1$ ).

Possiamo allora distinguere i seguenti tre casi:

I. - Le due reti hanno rispettivamente per basi le due schiere di una quadrica  $Q$  non degenerare (caso generale).

II. - Delle due reti una ha per base due fasci di rette  $M\sigma$ ,  $N\tau$ , l'altra i due fasci  $M\tau$ ,  $N\sigma$ , dove  $M$ ,  $N$  sono due punti distinti, e  $\sigma$ ,  $\tau$  due piani distinti, tutti appartenenti a una retta  $r$ .

III. - Le due reti hanno per base uno stesso fascio di rette  $M\mu$  contato doppiamente.

Le superficie in questione, corrispondenti ordinatamente ai tre casi, si chiameranno di *prima*, *seconda* e *terza specie*.

Ogni trasformata per congruenze  $W$  (non rigata) di una quadrica non degenerare è una superficie di prima specie, come risulta da una duplice applicazione dell'osservazione di SEGRE ricordata in principio. E, viceversa, ogni superficie di prima specie è trasformata per congruenze  $W$  di una quadrica non degenerare,  $Q$ ; perchè ora la linea ( $P_T$ ) del n. 1 sta in un piano segante la  $\Phi$  secondo una conica non degenerare, che si può assumere come una delle  $\infty^3$  linee ( $g$ ) del l. c.; la quadrica in questione è quella della schiera rappresentata su  $\Phi$  da quella conica.

Perciò, la ricerca delle superficie di prima specie è ricondotta a quella delle congruenze  $W$  di cui una falda focale è una quadrica  $Q$ . Un teorema del BIANCHI assicura che tutte queste congruenze si ottengono conducendo le tangenti alle curve di un qualsiasi sistema *isotermo-coniugato* di quella quadrica. È pressochè immediata la seguente interpretazione di quel teorema, che fornisce già una costruzione assai semplice di tutte le superficie di prima specie: si parta da una quadrica  $Q$  e la si trasformi in sè me-

diante una corrispondenza che muti in sè ciascun sistema di generatrici: le tangenti alle  $\infty^1$  curve trasformate delle sezioni fatte con i piani di un fascio generico costituiscono una congruenza  $W$ , la cui seconda falda focale è la più generale superficie di prima specie.

Altre costruzioni per queste superficie ritroveremo più avanti. Qui osserviamo che se, in coordinate proiettive omogenee  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , la  $Q$  è data parametricamente da

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = u : v : uv : 1$$

mentre il sistema involupato su  $Q$ , cui si è accennato, è

$$\frac{du}{a(u)} + \frac{dv}{b(v)} = 0, (*)$$

si trova, in base a quanto si è detto per la superficie  $\Theta$  richiesta (posto  $a' = \frac{du}{du}$ , ecc.)

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 =$$

$$= (b' - a')u + 2a : (b' - a')v - 2b : (b' - a)uv - 2(bu - av) : b' - a',$$

e per le coordinate  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  di un piano che descriva la superficie involuppo

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 =$$

$$(a' + b')v - 2b : (a' + b')u - 2a : -(a' + b') : -(a' + b')uv + 2(av + bu).$$

Se  $\Theta$  è una superficie di *seconda specie*, fissata p. es. una sua asintotica  $\gamma$ , la rigata descritta da una retta che tocchi  $\Theta$  in un punto di  $\gamma$  e sia incidente alla retta  $r$  sta chiaramente in una

(\*) In queste equazioni bisogna però supporre che nè  $a(u)$  nè  $b(v)$  siano polinomi quadratici, se non si vogliono ottenere delle rigate. La medesima avvertenza vale per le superficie di seconda e di terza specie.

congruenza lineare speciale di asse  $r$ , contenente i due fasci  $M\sigma$ ,  $N\tau$  (intersezione del complesso lineare  $\Gamma$ , contenente la  $r$ , col complesso lineare speciale di asse  $r$ ); e viceversa. In altre parole, si può ottenere quella superficie come seconda falda focale di una congruenza rettilinea, tale che la prima falda degeneri nella retta  $r$ , e che le rigate della congruenza determinate dalle singole asintotiche della seconda falda siano in quelle congruenze lineari speciali di cui ora si è detto. Perciò si ottengono tutte le superficie di seconda specie partendo (in tutti i modi possibili) da  $r$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ , e determinando la  $\Theta$  in modo che sussista la proprietà ora detta. Se si assume il tetraedro  $X_1 X_2 X_3 X_4$  di riferimento in modo che  $X_1 \equiv M$ ,  $X_2 \equiv N$ ,  $X_1 X_2 X_3 \equiv \sigma$ ,  $X_1 X_2 X_4 \equiv \tau$ , si trova per la  $\Theta$ .

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (a' - b')u - 2a : (a' - b')v + 2b : 2uv : -2$$

con  $a(u)$ ,  $b(v)$  funzioni arbitrarie e

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = 2v : -2u : a' + b' : (a' + b')uv - 2(av + bu).$$

Per una superficie  $\Theta$  di terza specie si può seguire un procedimento analogo che conduce a riguardare la  $\Theta$  come seconda falda focale di una congruenza rettilinea con la prima falda degenerata in una qualsiasi retta  $r$  del fascio  $M\mu$ , e tale che le rigate della congruenza determinate dalle singole asintotiche della seconda falda stiano in congruenze lineari speciali di asse  $r$ , le quali siano basi di fasci di complessi lineari appartenenti rispettivamente alle reti  $(K)$ ,  $(K')$ . Ciò porta alle equazioni parametriche

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 =$$

$$= (a' - b')(u - v) - 2(a + b) : 2h(a' - b') : 2(u + v) : 4;$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 =$$

$$= 1 : \frac{v - u}{2h} : \frac{1}{2}(a' + b') : -\frac{1}{4}\{(a' + b')(u + v) - 2(a + b)\},$$

dove attualmente  $X_1 \equiv M$ ,  $X_1 X_2 X_3 \equiv \mu$ , e  $h$  indica una costante.

Alle superficie di tutte tre le specie si lega poi la considerazione di altre congruenze  $W$ : tali sono entrambe le congruenze direttrici di WILCZYŃSKI (come risulta facilmente dalla rappresentazione iperspaziale). Ma, limitandoci a superficie di prima specie, si può affermare, di più, che ciascuna di quelle congruenze direttrici determina per sezione sulla quadrica  $Q$  una corrispondenza che muta in sè ciascuna delle due schiere, e che, in conseguenza, per ogni raggio di una di quelle congruenze i fuochi, e anche i piani focali sono coniugati rispetto alla  $Q$ . Ancora per le superficie di prima specie è chiaro che le tangenti principali di un sistema nei punti di un'asintotica dell'altro sistema si appoggiano a una stessa coppia di generatrici della  $Q$ . Anzi, si possono assegnare ad arbitrio le due corrispondenze che in tal modo prendono origine entro ciascuna delle due schiere di  $Q$ , e, mediante le formole sopra indicate, si trova che la corrispondente superficie di prima specie è determinata, per quadrature, con una costante arbitraria.

5. - Ad alcuni sviluppi interessanti conduce anche il problema dell'esistenza e della costruzione di una superficie  $\Theta \equiv (\gamma, \gamma')$  contenente due asintotiche  $\gamma_0$  e  $\gamma'_0$  assegnate. Si tratterà, naturalmente, di due curve uscenti da uno stesso punto  $P_0$ , aventi ivi il medesimo piano osculatore (ma, come si può supporre, non la stessa tangente) e appartenenti rispettivamente a due complessi lineari in involuzione  $\Gamma_0, \Gamma'_0$ . Limitiamoci per brevità alle superficie di prima specie. Per esse, conviene intanto adottare, qualora le si consideri come trasformate per congruenze  $W$  di una data quadrica  $Q$ , una costruzione diversa da quella già ricordata: si assumano ad arbitrio le rette della congruenza che toccano  $Q$  nei punti di due generatrici  $g, g'$  di schiere diverse: allora la retta della congruenza  $W$  uscente da un punto generico  $M$  della  $Q$  sarà la generatrice uscente da  $M$  della schiera individuata dalle tre rette della congruenza che escono dagli ulteriori tre vertici del quadrilatero sghembo formato da  $g, g'$  e dalle due generatrici di  $Q$

uscanti dal punto  $M$ ; la seconda falda focale della superficie così costruita dà ancora, nel modo più generale, una superficie di prima specie.

Ciò posto, il problema sopra enunciato si risolve così. Si dovranno fissare le due reti involutorie  $(K)$ ,  $(K')$  di complessi lineari, in modo che contengano rispettivamente  $\Gamma_0$  e  $\Gamma'_0$ , e che si trovino nelle condizioni del caso I del n. 4: ciò si può fare in  $\infty^4$  modi. Chiamando  $Q$  la quadrica ricoperta dalle schiere basi di  $(K)$  e di  $(K')$ , sia  $M$  un suo punto di contatto con una tangente del fascio  $M_0\mu_0$ , e siano  $g$ ,  $g'$  le due generatrici per  $M$ , giacenti, la prima, con tutta la sua schiera  $(g)$ , nei complessi di  $(K')$ , la seconda, con la sua schiera  $(g')$  in quelli di  $(K)$ . La congruenza lineare speciale delle rette tangenti alla  $Q$  per es. lungo la  $g$  viene a stare nel complesso  $\Gamma_0$  (col quale ha in comune una schiera e poi ancora una retta); cosicchè esiste una rigata  $E$ , contenente come generatrice la retta  $MP_0$ , le cui singole generatrici toccano  $Q$  in un punto di  $g$  e sono osculanti di  $\gamma_0$ . Così esiste una rigata  $E'$  che si comporta in modo analogo rispetto a  $g'$ ,  $\gamma'_0$ . Ebbene, se si applica la costruzione sopra esposta, assumendo come rigate della congruenza  $W$  circoscritte alla  $Q$  lungo le rette  $g$ ,  $g'$  rispettivamente  $E$ ,  $E'$ , la seconda falda focale è proprio una delle superficie richieste. Si ottengono dunque in tal modo  $\infty^4$  superficie di prima specie che risolvono il problema posto, nè ve ne sono altre.

6. - Chiuderò osservando come anche l'identità già osservata nel testo (vol I, § 47 B) fra le superficie di prima specie e le superficie a curvatura nulla della metrica ellittica si giustifichi con semplici considerazioni geometriche.

Infatti, per dimostrare che le superficie  $\Theta$  sono, nel senso ora detto, a curvatura nulla, basta dimostrare che le asintotiche dei due sistemi hanno torsione costante  $\pm \frac{1}{R}$ , essendo  $\frac{1}{R^2}$  la cur-

vatura dello spazio ellittico. Ora, se  $P$ ,  $P_1$  sono due punti infinitamente vicini di una di quelle asintotiche, e  $\pi$ ,  $\pi_1$  i corrispondenti piani osculatori, la quaterna di punti formata da  $P$ ,  $P_1$  e dalle due intersezioni della loro retta colla  $Q$  è mutata dalla polarità nulla del complesso lineare cui appartiene quell'asinto-

tica 22) nella quaterna di piani costituita da  $\pi$ ,  $\pi_1$  e dai piani tangenti alla  $Q$  condotti per la stessa retta  $PP_1 \equiv \pi\pi_1$ ; donde appunto segue la proprietà esposta.

Per stabilire l'inverso, si può partire dalla proprietà delle superficie a curvatura nulla in una metrica ellittica, che le tangenti principali di un sistema nei punti di un'asintotica dell'altro sistema sono parallele nel senso di CLIFFORD. Applicando questa proposizione a un'asintotica  $\gamma$  (per la quale quelle tangenti principali, formanti la rigata  $R(\gamma)$ , si considerino come congiungenti dei singoli punti di  $\gamma$  con quelli giacenti sull'asintotica infinitamente vicina  $\gamma_1$  nelle direzioni delle tangenti principali considerate) e all'asintotica  $\gamma_1$ , ne discende che p. es. l'asintotica  $\gamma_1$  sta nel complesso lineare congiungente la congruenza lineare avente per direttrici le generatrici dell'assoluto a cui si appoggiano le rette di  $R(\gamma)$  con l'analogha congruenza lineare infinitamente vicina a cui appartiene  $R(\gamma_1)$ .

**INDICE**

## CAP. II. — I FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE.

Prefazione . . . . . pag. v

## INTRODUZIONE.

§ 1. — <i>Coordinate, versi, orientazioni</i> . . . . .	pag. 1
(Coordinate di punto, piano e retta. I simboli $S, \Sigma$ . Orientazioni di una retta. Orientazione di un fascio. Alcune identità di matrici).	
§ 2. — <i>Collineazioni</i> . . . . .	» 8
(Preliminari. Collineazioni nello spazio rigato).	
§ 3. — <i>Contatto di curve e superficie</i> . . . . .	» 11
(Contatto di curve. Contatto di superficie. Contatto di superficie in corrispondenza biunivoca).	
§ 4. — <i>Osservazioni varie</i> . . . . .	» 16
(Curve razionali di terzo grado. Varietà di terzo grado. La retta principale del Togliatti. Una ulteriore generalizzazione. La divisione covariante).	

## CAP. I. — LA TEORIA DELLE CURVE.

§ 5. — <i>La teoria delle curve in geometria euclidea</i> . . . . .	pag. 23
(Gli invarianti fondamentali. Equazioni intrinseche di una curva. Nuova deduzione degli invarianti fondamentali).	
§ 6. — <i>Geometria proiettivo-differenziale delle curve</i> . . . . .	» 26
(Preliminari analitici. Applicazione della teoria delle curve. Le curve come luogo ed involuppo. Le equazioni differenziali fondamentali. Le curve di un complesso lineare. Significato del segno di $\omega = \pm 1$ . Le collineazioni a modulo qualsiasi. Coordinate normali).	
§ 7. — <i>Gli elementi geometrici fondamentali</i> . . . . .	» 37
(Sistema nullo osculatore. Il tetraedro principale. Altri elementi geometrici. Una osservazione).	
§ 8. — <i>Le curve piane</i> . . . . .	» 45
(Una osservazione).	

§ 9. — <i>Formole di calcolo assoluto</i> . . . . .	pag. 49
(Differenziali controvarianti. Alcune definizioni. Le geodetiche. Derivate covarianti. Una generalizzazione. I simboli a quattro indici e alcuni parametri differenziali. Relazioni di apolarità).	
§ 10. — <i>Riassunto di alcuni teoremi metrici</i> . . . . .	» 56
(Triedri diretti e inversi. Le forme fondamentali di Gauss di una superficie. Raggi e linee di curvatura. Elemento lineare dell'immagine sferica. Superficie applicabili).	
§ 11. — <i>Prime considerazioni di geom. proiettiva</i> . . . . .	» 61
(Le direzioni asintotiche. Le direzioni di Darboux).	
§ 12. — <i>Le forme differenziali fondamentali</i> . . . . .	» 64
(Primo metodo. Nuovo metodo per definire le $F_2, F_3$ . Le forme $F_2, F_3$ nella geometria metrica. Una osservazione).	
§ 13. — <i>Prime applicazioni</i> . . . . .	» 73
(Superficie correlative. Significato geometrico del fattore di proporzionalità delle $\xi$ ).	
§ 14. — <i>Le equazioni differenziali fondamentali e la terza forma differenziale</i> . . . . .	» 78
(Formole fondamentali. La forma P — II. Altre equazioni fondamentali. Il teorema fondamentale).	
§ 15. — <i>Varii sistemi di coordinate <math>x, \xi</math></i> . . . . .	» 83
(Un primo sistema di coordinate. Coordinate non omogenee. Superficie rigate. Coordinate normali. Rette normali. Metrica normale).	
§ 16. — <i>Il caso di linee coordinate asintotiche</i> . . . . .	» 89
(Le forme $F_2, F_3, P, II, Q$ . Flecnodi. Osservazioni varie. Condizioni di integrabilità. Calcolo di $(x dx d^2x d^3x)$ . Il cono di Segre. Confronto con le formole della Geom. metrica).	
§ 17. — <i>Applicazione agli invarianti di un sistema coniugato</i> . . . . .	» 102
(Calcolo di tali invarianti. Sistemi coniugati ad invarianti uguali. Un'altra applicazione).	
§ 18. — <i>Nuovi studi in coordinate asintotiche <math>u, v</math></i> . . . . .	» 109
(Coordinate non omogenee e di Lelievre. Asintotiche appartenenti a complessi lineari. Superficie di cui tutte le asintotiche appartengono a complessi lineari).	
§ 19. — <i>Le rette tangenti</i> . . . . .	» 117
§ 20. — <i>Applicabilità proiettiva</i> . . . . .	» 118
(Il teorema fondamentale. Una proprietà caratteristica di due superficie proiettivamente applicabili. Un'altra proprietà caratteristica delle superficie proiettivamente applicabili).	

CAP. III. — GLI ELEMENTI GEOMETRICI FONDAMENTALI.

§ 21. — *La quadrica di Lie* . . . . . pag. 125  
 (Sua definizione. Interpretazioni geometriche della forma  $\varphi_2$  e dell'elemento lineare  $\varphi_1, \varphi_2$ . Fascio delle quadriche di Darboux. La quadrica di Lie come iperboloidi osculatore).  
 § 22. — *La corrispondenza di Segre* . . . . . » 132  
 § 23. — *Geodetiche, e analoghi sistemi di curve* . . . . . » 133  
 (Primi teoremi. Terne apolari. Le coppie apolari e la conica di Wilczynski. Interpretazione non euclidea della metrica proiettiva. Curve di un fascio; l'asse della superficie).  
 § 24. — *Le pangeodetiche. Il fascio canonico* . . . . . » 141  
 § 25. — *Congruenze di rette* . . . . . » 144  
 (Sviluppabili e fuochi. Le direttrici di Wilczynski. Congruenze  $K$  coniugate e  $K'$  armoniche ad  $S$ , tra cui si corrispondono le sviluppabili. Le superficie a curvatura  $-2$ . Le congruenze a sviluppabili indeterminate).  
 § 26. — *Lo spigolo (edge) di Green* . . . . . » 153  
 § 27. — *Il fascio canonico* . . . . . » 155  
 § 28. — *Le superficie per cui una retta canonica passa per un punto fisso, e superficie duali* . . . . . » 160  
 (Caso delle normali proiettive. Formole generali. Il caso  $1+k=0$  (per l'asse). Il caso  $k=0$  delle direttrici. Le superficie di Taitzeica-Wilczynski).  
 § 29. — *Le superficie di Čech a linee di Darboux piane* . . . . . » 170  
 § 30 — *Breve riassunto di altre ricerche* . . . . . » 177

CAP. IV. — SUPERFICIE RIGATE.

§ 31. — *Applicazione delle formole generali del Capitolo II al caso particolare di una superficie rigata* . . . . . pag. 181  
 § 32. — *Deduzione diretta dei risultati precedenti e prime applicazioni* . . . . . » 187  
 (Nuova deduzione delle (11). Applicazione alla quadrica di Lie).  
 § 33. — *Orientazione delle generatrici; espressioni intrinseche. Formole relative al cambiamento di variabili* . . . . . » 193  
 § 34. — *Linee asintotiche, la forma bilineare intrinseca* . . . . . » 198  
 (Linee asintotiche. La forma bilineare fondamentale. Congruenza flecnodale).  
 § 35. — *Normalizzazione delle coordinate delle generatrici per superficie rigate a due curve flecnodali distinte* . . . . . » 206  
 (Coordinate normali. Invarianti fondamentali d'una rigata a linee flecnodali distinte. Alcune applicazioni geometriche).  
 § 36. — *Normalizzazione delle coordinate delle generatrici per superficie rigate a curve flecnodali coincidenti* . . . . . » 216

(Determinazione di queste rigate per mezzo di invarianti. Alcune interpretazioni geometriche).  
 § 37. — *Il complesso lineare osculatore* . . . . . pag. 222  
 § 38. — *Ulteriore studio di superficie rigate a curve flecnodali distinte, prive di retta direttrice* . . . . . » 226  
 § 39. — *La trasformazione flecnodale* . . . . . » 231  
 § 40. — *L'applicabilità proiettiva di superficie rigate* . . . . . » 238

CAP. V. — CONGRUENZE, CONGRUENZE  $W$  E TRASFORMAZIONI PER CONGRUENZE  $W$ .

§ 41. — *Congruenze di assegnata prima falda focale* . . . . . pag. 243  
 (Formole fondamentali. Nuova interpretazione delle formole precedenti).  
 § 42. — *Formole fondamentali della teoria delle congruenze  $W$*  . . . . . » 250  
 § 43. — *Le congruenze  $W$  con  $N = \text{cost.}$*  . . . . . » 253  
 § 44. — *Confronto coi risultati classici della geometria metrica* . . . . . » 255  
 § 45. — *L'equazione delle congruenze  $W$  in coordinate di retta* . . . . . » 260  
 § 46. — *Le congruenze di Wilczynski* . . . . . » 263  
 § 47. — *Congruenze  $W$  di cui una falda focale  $S$  è quadrica* . . . . . » 266  
 (Primi teoremi. Interpretazione nella geometria non euclidea. Inversione dei teoremi dati in  $A$ ).  
 § 48. — *Congruenze  $W$  con le due falde rigate (non quadriche)* . . . . . » 276  
 § 49. — *Superficie trasformate delle rigate con congruenze  $W$*  . . . . . » 278  
 § 50. — *Composizione di Bianchi di due congruenze  $W$*  . . . . . » 280  
 § 51. — *Le trasformazioni  $W$  di Fubini delle superficie isoterma-asintotiche* . . . . . » 283  
 § 52. — *Le trasformazioni di Ionas per congruenze  $W$  delle superficie  $R$*  . . . . . » 287  
 § 53. — *Le trasformazioni di Ionas delle superficie di Ionas* . . . . . » 290  
 § 54. — *Il teorema di Fubini per le trasformazioni delle superficie  $R$*  . . . . . » 293  
 (Una osservazione sulla teoria delle congruenze  $W$ ).

CAP. VI. — INVARIANTI DELL' ELEMENTO LINEARE PROIETTIVO.

§ 55. — *Alcune considerazioni preliminari* . . . . . pag. 295  
 § 56. — *I differenziali coniugati* . . . . . » 297  
 § 57. — *La forma differenziale  $F_3$*  . . . . . » 300  
 (Definizione di  $F_3$ . Alcune identità notevoli).  
 § 58. — *La forma differenziale  $\Sigma \phi_i du_i$*  . . . . . » 305  
 (Definizione delle  $\phi_i$ . Relazioni con le  $p_{r,2} - \Pi_{r,2}$ ).  
 § 59. — *Gli invarianti del primo ordine dell' elemento lineare proiettivo* . . . . . » 307  
 (Definizione. Alcune identità nel caso  $\Phi \neq 0$ . Altre identità. Il caso  $\Phi = 0, \Psi \neq 0$ ).

- § 60. — *Invarianti del secondo ordine dell'elemento lineare proiettivo*. . . . . pag. 315  
(Definizione. Il caso  $\Phi \neq 0$ . Il caso  $\Phi = 0$ . Il caso delle  $\Phi$  e  $\Psi$  costanti).
- § 61. — *Il primo problema dell'applicabilità proiettiva*. . . . . » 319  
(Preliminari. Condizioni necessarie. Condizioni sufficienti. Nuova forma delle condizioni sufficienti).
- § 62. — *Continuazione. Elementi lineari proiettivi con un gruppo continuo di trasformazioni in sé*. . . . . » 325  
(Alcune formole preliminari. Un lemma. Il teorema fondamentale).

CAP. VII. — CONDIZIONI D'INTEGRABILITÀ E SUPERFICIE PROIETTIVAMENTE APPLICABILI

- § 63. — *Condizioni d'integrabilità delle equazioni fondamentali* (Equazioni preliminari. Trasformazione delle (5). Calcolo delle  $l_1$ ). . . . . pag. 335
- § 64. — *Continuazione*. . . . . » 340  
(Condizioni d'integrabilità delle (1)<sub>61s</sub>. Studio delle (1). Studio della (2). Esame delle condizioni d'integrabilità. Teorema riassuntivo).
- § 65. — *Trasformazione delle equazioni trovate per superficie non rigate. Caso di coordinate normali*. . . . . » 345  
(Il caso  $J \neq 0$ . Nuovo enunciato per le coordinate normali).
- § 66. — *Nuova trasformazione delle equazioni trovate per il caso di coordinate normali*. . . . . » 350  
(Introduzione della funzione ausiliaria  $\sigma$ . Studio delle (2)).
- § 67. — *Deformazione proiettiva*. . . . . » 353  
(Il problema fondamentale. Il sistema coniugato di deformazione proiettiva. Superficie  $R$  e  $R_0$ . Deformazione proiettiva di una superficie data).
- § 68. — *Teoremi vari sulle superficie  $R$  e  $R_0$* . . . . . » 360  
(Elemento lineare riferito alle asintotiche. Un teorema per le superficie  $R_0$  o  $R$ ).
- § 69. — *Le superficie proiettivamente deformabili in  $\infty^3$  modi* (Preliminari. Il caso  $K = 0$ . Continuazione. Formole finali relative al caso  $K = 0$ . Il caso  $K = \text{cost.} \neq 0$ . Le formole finali nel caso  $K = \text{cost.} \neq 0$ . Teorema riassuntivo e osservazioni varie. Quadro finale delle forme fondamentali delle superficie con  $H = 0$ ,  $K = \text{cost.}$ ). . . . . » 364
- § 70. — *Nuovo metodo per lo studio dei problemi precedenti*. . . . . » 384  
(Principio del metodo. Le superficie con  $\beta = 1$  deformabili in  $\infty^3$  modi. Superficie con  $\beta = 1$ ,  $K \neq 0$ , deformabili al più in  $\infty^2$  modi. Le superficie  $R$  deformabili in  $\infty^3$  modi).

CAP. VIII. — SUPERFICIE NON RIGATE CHE AMMETTONO UN GRUPPO CONTINUO DI DEFORMAZIONI PROIETTIVE IN SÈ

- § 71. — *Superficie con  $\infty^2$  deformazioni proiettive (o collineazioni) in sé*. . . . . pag. 389  
(Preliminari. Il primo caso  $K = 0$ . Il caso  $K \neq 0$ . Secondo caso  $K + 2 = 0$ . Terzo caso  $K(K + 2) \neq 0$ . Quadro delle forme fondamentali delle superficie con  $\infty^2$  deformazioni proiettive in sé).
- § 72. — *Nuova deduzione dei precedenti risultati*. . . . . » 394  
(Metodo di Fubini. Metodo di Lie per i gruppi di collineazioni).
- § 73. — *Superficie con  $\infty^1$  deformazioni proiettive in sé. Specie A.* (Loro determinazione. Altri metodi di calcolo). . . . . » 398
- § 74. — *Risoluzione di un'equazione ausiliaria*. . . . . » 403  
(Preliminari. Primo modo di soddisfare alla (5). Secondo modo di soddisfare alla (5). Non esistenza di ulteriori soluzioni di (E). Quadro di soluzioni dell'equazione).
- § 75. — *Superficie con  $\infty^1$  deformazioni proiettive in sé. Riduzione del problema all'equazione studiata al § precedente*. . . . . » 416
- § 76. — *Verifiche per le specie  $B_1$  e  $B_2$* . . . . . » 418  
(Superficie della specie  $B_1$ . Superficie della specie  $B_2$ ).
- § 77. — *Verifiche per la specie  $B_3$* . . . . . » 423
- § 78. — *Verifiche per le specie  $B_4$ ,  $B_5$ ,  $B_6$* . . . . . » 436  
(Specie  $B_4$ . Specie  $B_5$ . Specie  $B_6$ ).

CAP. IX. — QUADRICHE DI MOUTARD E CORRISPONDENZE  $\Sigma$  ( $\check{C}$ ).

- § 79. — *Trasformazione delle equazioni fondamentali*. . . . . pag. 457
- § 80. — *Il teorema di Moutard*. . . . . » 460  
(Un lemma. Dimostrazione del teorema di Moutard. Dimostrazione).
- § 81. — *Le corrispondenze  $\Sigma$* . . . . . » 470  
(Loro definizione. La polarità di Lie. Corrispondenza di Segre. La Corrispondenza di Moutard. Proprietà delle corrispondenze  $\Sigma$  per le rigate. Proprietà delle corrispondenze  $\Sigma$  per superficie non rigate).
- § 82. — *Le corrispondenze  $\Sigma$  appartenenti ad una generatrice di una rigata*. . . . . » 481  
(Trasformazioni birazionali  $\Sigma$  ( $c$ ) nello spazio. Curva omologa di un fascio di piani. Determinazione delle  $\Sigma$ ).
- § 83. — *Metriche di Weyl e corrispondenze  $\Sigma$  ( $-\frac{3}{2}$ )*. . . . . » 490  
(Metriche di Weyl. Piani osculatori alle geodetiche di Weyl. Geodetiche formanti fascio).
- § 84. — *Le rette canoniche in coordinate generali*. . . . . » 496

CAP. X. — INTORNO DI UN PUNTO DI UNA SUPERFICIE  
QUADRICHE DI MOUTARD E CONO DI SEGRE

- § 85. — *Enunciato di alcuni teoremi per le quadriche di Moutard* pag. 501  
 § 86. — *Rette polari rispetto ad una quadrica di Moutard* » 504  
 (Rette  $r_0, r', r''$  polari di una retta  $r$  rispetto alla quadrica di Lie e alle quadriche di Moutard relative a due direzioni coniugate. Le rette  $l$  del regolo  $r_0 r' r''$ . I punti  $y_1, x_1$ , ed i piani  $\eta_1, \zeta_1$ . Determinazione dei punti e piani precedenti. Il punto  $m$  e il piano  $\mu$ ).  
 § 87. — *Costruzione del punto  $m$  e del piano  $\mu$*  » 512  
 (Caso di una superficie rigata. Superficie non rigate. Coniche  $C$  e coni  $\Gamma$ ).  
 § 88. — *I fasci di coniche  $C_k$*  » 517  
 § 89. — *Significato geometrico degli invarianti proiettivi più semplici di una superficie* » 522  
 (Intorno del quarto ordine di una superficie. Invarianti delle coniche  $C_k^1$  e  $C_k^2$ . Alcune formule preliminari. Birapporti  $R_1$  ed  $R_2$ ).  
 § 90. — *Quadriche di Moutard relative alle rigate asintotiche* » 529  
 § 91. — *Il cono di Segre* » 533  
 (Formule preliminari. Nuovo calcolo di un determinante. Cono di Segre. Alcune applicazioni).  
 § 92. — *Superficie a pangeodetiche piane* » 539

CAP. XI (F). — COMPLESSI E CONGRUENZE DI RETTE

- § 93. — *Formule preliminari* pag. 541  
 (Rette e complessi lineari. Alcune identità. Collineazioni e correlazioni. Equazioni di una retta).  
 § 94. — *La forma  $\varphi$*  » 544  
 § 95. — *I complessi di rette con  $\Delta = 0$*  » 546  
 § 96. — *L'elemento lineare proiettivo di un complesso* » 548  
 (Il complesso  $\pi$  e la forma  $\chi$ . L'elemento lineare proiettivo. Curvature proiettive e coordinate normali).  
 § 97. — *Le equazioni differenziali fondamentali nella teoria dei complessi* » 556  
 (Equazioni I, II, III. Applicabilità proiettiva dei complessi).  
 § 98. — *Le congruenze con  $\Delta = 0$*  » 563  
 § 99. — *Gli elementi geometrici fondamentali di una congruenza* » 563  
 (Fasci centrali e focali. Tangenti focali. Asintotiche focali).  
 § 100. — *La seconda forma fondamentale di una congruenza* » 568  
 (La forma  $\Phi$ . Complessi bitangenti. Complessi satelliti. Complesso osculatore di una congruenza  $W$ . Fascio satellite e nuovi invarianti).

- § 101. — *Le equazioni differenziali fondamentali* pag. 577  
 § 102. — *L'elemento lineare proiettivo d'una congruenza* » 578  
*Alcune altre osservazioni* » 580  
 § 103. — *Applicabilità di complessi e di congruenze* » 581  
 (Applicabilità del primo ordine di due complessi. Applicabilità proiettiva di due congruenze ( $F$ ). Studio delle falde focali di congruenze applicabili (del secondo ordine). Continuazione. Formule duali delle precedenti. Trasformazione delle precedenti condizioni. Il caso singolare di Cartan. Nuova trasformazione delle precedenti condizioni. Il caso singolare. Altra deduzione delle formule precedenti).

CAP. XII. — INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA  
PROIETTIVO-DIFFERENZIALE NEGLI IPERSPAZI

- § 104. — *Le forme fondamentali delle ipersuperficie* pag. 605  
 (Preliminari geometrici ( $F$ ). Formole fondamentali ( $F$ ). Le equazioni differenziali fondamentali. Alcune applicazioni dei risultati precedenti).  
 § 105. — *La quadrica di Čech* » 615  
 (Polarità e quadrica di Čech. Teorema di Čech. Continuazione e fine della dimostrazione).  
 § 106. — *Rette normali; coordinate normali* » 622  
 § 107. — *L'applicabilità proiettiva delle ipersuperficie ( $F$ )* » 625  
 § 108. — *Alcune generalizzazioni* » 629  
 § 109. — *Le superficie  $V_2$  non paraboliche in  $S_4$  e la loro prima forma fondamentale* » 631  
 § 110. — *La seconda forma fondamentale di una  $V_2$  in  $S_4$*  » 637  
 (La forma  $F_5$ . Significato geometrico della  $F_5$ ).  
 § 111. — *Le equazioni differenziali ( $F$ )* » 645  
 § 112. — *Superficie rigate appartenenti ad uno spazio ad un numero impari di dimensioni ( $\tilde{C}$ )* » 650  
 § 113. — *Superficie rigate appartenenti ad uno spazio ad un numero pari di dimensioni ( $\tilde{C}$ )* » 655

APPENDICE I.<sup>a</sup>

(Note de M. G. TZITZEICA)

- Sur la déformation de certaines surfaces tétraédrales, les surfaces  $S$  et les réseaux  $R$ .* pag. 663  
*Una osservazione bibliografica* » 669

APPENDICE II.<sup>a</sup>

(Nota di E. BOMPIANI)

- I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve e delle superficie* pag. 671

I. — <i>Curve piane</i>	pag. 674
(1. Invariante di Segre. 2. Invariante assoluto di un'equazione di Laplace. 3. Invarianti di contatto fra curve piane. 4. Invarianti proiettivi di una curva piana. 5. Singolarità: punti di flesso).	
II. — <i>Curve sghembe</i>	» 679
(1. Invarianti di contatto. 2. Piano, retta e punto principali. 3. Invarianti proiettivi di una curva sghemba).	
III. — <i>Superficie. Le forme fondamentali</i>	» 681
(1. Invarianti infinitesimi di contatto fra superficie. 2. L'elemento lineare proiettivo di una superficie. 3. Le due prime forme normali di Fubini. 4. Le prime forme elementari. 5. Alcuni elementi geometrici). — (1. Definizione dei sistemi assiali. 2. Un invariante fondamentale. Curve anarmoniche. 3. Le forme di Fubini. 4. Altre forme invarianti del 1° ordine).	
IV. — <i>Invarianti delle curve sopra una superficie</i>	» 691
(1. Curvatura proiettiva. 2. Curvatura relativa di due curve. 3. Le forme elementari e gli invarianti di curvatura. 4. Metodo generale per la costruzione di invarianti. Trasporto proiettivo. 5. La torsione proiettiva. Sezioni piane. 6. La terza forma fondamentale di Fubini).	
V. — <i>Invarianti proiettivi di una superficie</i>	» 698
(1. Osservazioni generali. 2. Invarianti dell'elemento lineare proiettivo. 3. Le forme elementari e gli invarianti precedenti. 4. Invarianti per collineazioni).	
VI. — <i>La geometria delle superficie nello spazio rigato. Metodo iperspaziale</i>	» 703
(1. Rappresentazione iperspaziale del complesso delle tangenti ad una superficie. 2. Regole di Lie. 3. Rigate asintotiche lungo le linee di Darboux e di Segre. 4. Nuove quadriche invarianti. 5. Il fascio canonico. 6. Determinazione iperspaziale delle forme elementari. 7. Invarianti e classi di superficie invarianti. 8. Sistemi di curve invarianti).	
VII. — <i>Corrispondenze puntuali fra superficie</i>	» 720
(1. Corrispondenza Cremoniana fra stelle di piani. 2. Corrispondenze proiettive fra stelle di rette. 3. Sistemi assiali corrispondenti). — 1. (Le corrispondenze proiettivo-conformi e proiettivo-simili. 2. Le corrispondenze geodetico-proiettive. 3. Le corrispondenze asintotiche).	

APPENDICE III.<sup>a</sup>

(Nota di A. TERRACINI)

<i>Esposizione di alcuni risultati di geometria proiettiva-differenziale negli iperspazi</i>	pag. 729
§ 1. — <i>I successivi intorni di un punto su una varietà</i>	» 731

§ 2. — <i>Generalità sulle varietà rappresentanti sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali</i>	pag. 725
§ 3. — <i>Superficie rappresentanti equazioni di Laplace</i>	» 736
§ 4. — <i>Varietà rappresentanti sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali aventi dimensione assai elevata</i>	» 741
§ 5. — <i>Alcuni altri particolari sistemi di equazioni di Laplace rappresentati da <math>V_k</math></i>	» 743
§ 6. — <i>La varietà degli spazi tangenti ad un'altra varietà</i>	» 747
§ 7. — <i>Comportamento degli spazi osculatori a una varietà in relazione con le sue sezioni iperpiane</i>	» 750
§ 8. — <i>Le linee quasi asintotiche di una varietà</i>	» 751
§ 9. — <i>Altri notevoli sistemi di linee esistenti sulle superficie</i>	» 753
§ 10. — <i>Varietà luoghi di spazi</i>	» 756
§ 11. — <i>Luoghi di spazi con carattere di sviluppabili</i>	» 760
§ 12. — <i>Un tipo particolare di luoghi di spazi</i>	» 764

APPENDICE IV.<sup>a</sup>

(Nota di A. TERRACINI)

<i>Sulle superficie aventi un sistema, o entrambi, di asintotiche in complessi lineari</i>	» 771
--	-------

Finito di stampare  
il giorno 28 Febbraio 1927  
nella Tipografia del Seminario  
in Padova

## CASA EDITRICE N. ZANICHELLI - BOLOGNA

- MAGGI GIAN ANTONIO — *Dynamiche fisica*. Lezioni sulle leggi generali del movimento dei corpi naturali. Terza edizione.
- *Elementi di statica e teoria dei vettori applicati*, con una introduzione sul calcolo vettoriale.
- *Geometria del movimento*. Lezioni di Cinematica con un'appendice sulla Geometria della massa. Terza edizione riveduta e ritoccata.
- FABINI CLAUDIO — *Trattato di Topografia* - Quinta edizione.
- *Metodo dei minimi quadrati*. Appendice al Trattato di Topografia.
- PINCHERLE SALVATORE — *Lezioni di algebra complementare dettate nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti*.
- Volume Primo - *Analisi algebrica*.
- Volume Secondo - *Teoria delle equazioni*.
- *Lezioni di calcolo infinitesimale*. Due volumi.
- *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche* - Parte prima.
- PINCHERLE SALVATORE e U. AMALDI — *Le operazioni distributive e le loro applicazioni alla analisi*.
- FORRO FRANCESCO — *Trattato di astronomia* - Volume Primo.
- QUESTIONI RIGUARDANTI LE MATEMATICHE ELEMENTARI, raccolte e coordinate da Federico Enriques.
- Parte Prima - *Critica dei principi*. Due volumi.
- Parte Seconda - *I problemi classici della Geometria e le equazioni algebriche*.
- ROUSE BALL W. W. — *Compendio di storia delle matematiche*. Versione dall'inglese con aggiunte e modificazioni dei dottori Dionisio Gambioli e Giulio Puliti, riveduta, corretta e accresciuta da Gino Loria.
- Volume Primo - *Le matematiche dall'antichità al rinascimento*.
- Volume Secondo - *Le matematiche moderne sino ad oggi*.
- SEVERI FRANCESCO — *Trattato di Geometria algebrica*. Volume I - Parte I: Geometria delle serie lineari.
- SCHIAPARELLI GIOVANNI — *Scritti sulla storia della astronomia antica*.
- Parte prima - *Scritti editi*. Tomo primo e secondo.
- TONELLI LEONIDA — *Fondamenti di calcolo delle variazioni*. Due volumi.
- TORRICELLI EVANGELISTA — *Opere editte in occasione del III centenario della nascita col concorso del Comune di Faenza da Gino Loria e Giuseppe Vassura*
- Geometria - Lezioni accademiche - Meccanica - Scritti vari - Racconto d'alcuni problemi - Carteggio scientifico. 4 volumi.

Chiedere Catalogo alla Casa Editrice N. Zanichelli - Bologna