

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE  
MONOGRAFIE DI MATEMATICA APPLICATA

*ACont*  
*22.2.1944*

FRANCESCO TRICOMI

# FUNZIONI ELLITTICHE



NICOLA ZANICHELLI EDITORE  
BOLOGNA 1937 - XV

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI  
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

N° 374

*Tricomi*

Bologna, Società Tipografica già Compositori - 1937 - XV

## PREFAZIONE

suo grande interesse intrinseco, è di gran lunga più limpida e facile di certe cosiddette « teorie elementari » delle funzioni ellittiche in cui si è cercato di evitarla!

Un'altra questione su cui è necessaria qualche parola di chiarimento preliminare è quella delle « notazioni », nel senso di scelta delle funzioni da adottare come fondamentali: Weierstrass o Jacobi? Rispondo: Weierstrass e Jacobi, chè, anche a prescindere dalla considerazione che tanto le funzioni di Weierstrass quanto quelle di Jacobi s'incontrano, quasi con la stessa frequenza, nella letteratura, sta il fatto che, mentre da taluni punti di vista la prevalenza delle funzioni di Weierstrass è indiscutibile, da altri punti di vista, per esempio da quello dei calcoli numerici, sono invece le funzioni di Jacobi che si presentano come le più convenienti. In armonia con queste vedute, nel presente libretto alle funzioni di Weierstrass e a quelle di Jacobi è stata riconosciuta parità di diritti, dedicando, così alle une come alle altre, le stesse cure e, su per giù, lo stesso spazio.

Quanto alla trattazione, considerato che la teoria delle funzioni ellittiche è una teoria classica, giunta già da tempo ad un assetto praticamente definitivo, è chiaro che un nuovo libro sull'argomento non può avere alcuna pretesa di originalità. Tuttavia, mano mano che procedevo nella compilazione di questo libro, mi sono accorto che il lavoro andava assumendo una certa vernice di personalità, non certo per la natura delle cose esposte, che sono quasi tutte vecchie e ben note, bensì pel modo di esporle e la costante cura avuta di vivificare il più possibile le varie funzioni qui studiate. Comunque, giudicherà il lettore se questa nuova vernice giovi e dia risalto all'antico e venerabile mobilio su cui è stata applicata, o se invece lo sciupi ed offuschi....

Richiamo inoltre l'attenzione sul fatto che, per attuare una delle maggiori difficoltà che s'incontrano nello studio delle funzioni ellittiche: l'enorme massa di formule, di regola, mi sono limitato a dare nel testo solo le formule indispensabili per seguire lo sviluppo delle idee. Altre formule, pure utili ma di minor significato concettuale, sono invece raccolte in appositi quadri sinottici, oppure si

Lo scopo che questo libro si propone è di consentire al lettore, dotato della necessaria preparazione, d'impadronirsi, nel modo più semplice e facile possibile, della teoria delle funzioni ellittiche, in modo da poterla poi, senza difficoltà, applicare a problemi concreti, e in ispecie a quelli posti dalla Fisica e dalla Tecnica, spingendosi fino alla effettiva calcolazione numerica delle formule ottenute.

La teoria delle funzioni ellittiche può essere esposta da vari punti di vista che hanno, quasi tutti, il loro « pro » e il loro « contro ». Quello qui adottato, che consta nel prendere come punto di partenza la doppia periodicità, è indubbiamente il più rapido di tutti, e presenta d'altro lato il grande vantaggio di consentire fin dal principio una visione sintetica ed elevata dell'intera teoria, nelle sue linee essenziali. Vi è però l'inconveniente, cui abbiamo cercato di ovviare con una breve « introduzione storica », di risalire così a ritroso il corso della storia della teoria, invece di seguirne il suo naturale sviluppo. Inoltre si richiede che il lettore, oltre a conoscere i primi elementi delle Matematiche superiori, quali su per giù s'insegnano in tutti i nostri primi bienni universitari, abbia già una certa dimestichezza con le idee e i fatti fondamentali della teoria delle funzioni di variabile complessa <sup>(1)</sup>, la quale però, a prescindere dal

<sup>(1)</sup> Da questo punto di vista, l'altra monografia dell'A.: *Funzioni analitiche* (in questa stessa collezione), può considerarsi come una prima parte dell'opera di cui il presente volume costituisce la seconda parte.

trovano relegate, assieme colle più importanti formule del testo <sup>(1)</sup>, nella raccolta alla fine del libro. Particolare cura è stata posta nella revisione e controllo di tutte queste formule che, nella correzione delle bozze, sono state tutte collazionate, oltre che sul manoscritto, sulle fonti originali più sicure.

Una parola infine sull'elenco bibliografico alla fine del volume, che ha esclusivamente lo scopo di fornire le necessarie indicazioni sui libri che occorrerà di citare nel testo, su alcune altre poche opere che sembrano particolarmente adatte per ulteriori, più approfonditi studi sull'argomento <sup>(2)</sup> e sulle esistenti tabelle numeriche delle funzioni ellittiche. Esso non ha dunque alcuna pretesa di costituire una bibliografia delle funzioni ellittiche, per cui può invece consultarsi l'Articolo II, B<sub>3</sub> di R. Fricke nell'« Encyklopädie der Mathem. Wissenschaften ». (N.º [5] del nostro elenco).

F. TRICOMI

---

<sup>(1)</sup> Queste assieme coi loro numeri distintivi, onde facilitare i frequenti richiami.

<sup>(2)</sup> Fra queste meritano speciale menzione le due pregevoli opere italiane di BIANCHI [2] ed ENRIQUES-CHISINI [4] che, in certo modo, sono il naturale complemento di questo trattatello, ponendo in speciale luce proprio quei lati della teoria che qui restano maggiormente in ombra, e cioè il lato algebrico-aritmetico in BIANCHI, e il lato geometrico in ENRIQUES-CHISINI.

Vogliamo qui inoltre ricordare il capitolo dedicato alle funzioni ellittiche della *Modern Analysis* di WHITTAKER-WATSON [15], notevole specialmente per i numerosi, spesso interessanti esercizi proposti al lettore, che non è facile trovare altrove.

# FUNZIONI ELLITTICHE

## CAPITOLO I.

### Funzioni ellittiche di Weierstrass.

#### § 1. - Introduzione storica.

La considerazione delle funzioni ellittiche è stata imposta dall'impossibilità d'integrare in termini finiti, col solo ausilio delle trascendenti elementari, funzioni irrazionali anche assai semplici che continuamente si presentavano in svariati problemi e, fra gli altri, in quello (da cui prende origine il nome di funzioni *ellittiche*) della rettificazione dell'ellisse, cioè della determinazione della lunghezza di un arco di questa curva. Invero, supposto si tratti di un'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$ , che potremo rappresentare parametricamente mediante le equazioni

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi;$$

si dimostra che l'integrale che fornisce la lunghezza di un generico arco della curva, e cioè:

$$(1) \quad \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ = a \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \left(k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right),$$

benchè immediatamente riconducibile a quello di una funzione irrazionale (basta prendere  $\sin \varphi$  come nuova variabile), *non è esprimibile mediante trascendenti elementari* <sup>(1)</sup>; esso rappresenta quindi una nuova trascendente.

In altre parole, il calcolo integrale ha imposto la considerazione delle trascendenti ellittiche così come avrebbe imposto quella delle trascendenti elementari, se queste non fossero state già prima consi-

<sup>(1)</sup> Ammenocchè non sia  $k=0$  o  $k=1$

derate, subito dopo riconosciuta l'impossibilità di esprimere algebricamente integrali quali

$$\int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{ecc.}$$

Propriamente, con l'ausilio delle trascendenti elementari, e più specialmente della funzione  $\log x$  (o delle funzioni  $\log x$  e  $\operatorname{arctg} x$ , se non si vuol uscire dal campo reale), è possibile, come si ricorderà dal Calcolo, integrare *tutte le funzioni razionali*, nonché quelle contenenti come unica irrazionalità la radice quadrata di un polinomio di *primo* o di *secondo grado*, e cioè del tipo

$$R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c}),$$

essendo  $R$  il simbolo di una funzione razionale dei due argomenti. Se invece il grado del polinomio sotto radice è superiore al secondo oppure il radicale non è quadratico ecc., allora l'integrazione in termini finiti mediante trascendenti elementari diventa in generale impossibile, avendosi a che fare con nuove classi di trascendenti essenzialmente distinte da quelle. In particolare, se l'integrale che si considera contiene come unica irrazionalità la radice quadrata di un polinomio di *terzo* o *quarto grado*, cioè è del tipo

$$(2) \quad \int R(x, \sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}) dx,$$

non escluso il caso  $a_0=0$ , si è condotti, come vedremo, a funzioni *ellittiche*, e cioè a funzioni caratterizzate dalla capitale proprietà di godere di una *doppia periodicità*.

Considerazioni su differenziali del tipo di quello che figura nell'integrale (2) si trovano già in WALLIS (1616-1703), nelle opere di GIACOMO (1654-1705) e GIOVANNI I BERNOULLI (1667-1748) nonché, per tacere di altri precursori, nelle « Produzioni matematiche » dell'italiano CO. DI FAGNANO (1682-1766). Fu però L. EULER (1707-1783) che, sotto l'influenza dello scritto di FAGNANO, stabilì, con la scoperta del fondamentale *teorema di addizione* degli integrali *ellittici*, cioè del tipo (2), il primo caposaldo della teoria, sì che a giusto titolo un altro dei fondatori di essa: C. G. JACOBI (1804-1851), designò il 23 dicembre 1751, giorno in cui l'Accademia di Berlino diede ad esaminare ad EULER l'opera inviata dal FAGNANO, quale data di nascita delle funzioni ellittiche.

## CAPITOLO I.

### Funzioni ellittiche di Weierstrass.

#### § 1. - Introduzione storica.

La considerazione delle funzioni ellittiche è stata imposta dall'impossibilità d'integrare in termini finiti, col solo ausilio delle trascendenti elementari, funzioni irrazionali anche assai semplici che continuamente si presentavano in svariati problemi e, fra gli altri, in quello (da cui prende origine il nome di funzioni *ellittiche*) della rettificazione dell'ellisse, cioè della determinazione della lunghezza di un arco di questa curva. Invero, supposto si tratti di un'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$ , che potremo rappresentare parametricamente mediante le equazioni

$$x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi;$$

si dimostra che l'integrale che fornisce la lunghezza di un generico arco della curva, e cioè:

$$(1) \quad \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ = a \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \left( k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right),$$

benchè immediatamente riconducibile a quello di una funzione irrazionale (basta prendere  $\sin \varphi$  come nuova variabile), *non è esprimibile mediante trascendenti elementari* <sup>(1)</sup>; esso rappresenta quindi una nuova trascendente.

In altre parole, il calcolo integrale ha imposto la considerazione delle trascendenti ellittiche così come avrebbe imposto quella delle trascendenti elementari, se queste non fossero state già prima consi-

(1) Ammenocchè non sia  $k=0$  o  $k=1$

Subito dopo EULER è da mentovare A. LEGENDRE (1752-1833) cui spetta soprattutto il merito di aver compreso come nelle suaccennate ricerche fosse in germe contenuto tutto un nuovo, importante ramo dell'Analisi, cui cercò dare, con assiduo lavoro durato mezza la vita, un'organica sistemazione. All'uopo si servì del fondamentale fatto, da lui scoperto, che *gli integrali (2) possono sempre ricondursi, con procedimenti razionali, a tre tipi canonici ben determinati*, di cui uno è l'integrale (1) da noi già incontrato a proposito della rettificazione dell'ellisse, e precisamente ai tre integrali:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \\ E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \\ \Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \end{array} \right.$$

che oggi diconsi appunto integrali di LEGENDRE, rispettivamente di *prima, seconda e terza specie*, e che, con la sostituzione  $\sin \varphi = x$ , prendono rispettivamente la forma,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \\ \int \frac{dx}{(1+nx^2) \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \end{array} \right.$$

Comunque, nonostante che LEGENDRE pare abbia creduto che con le sue ricerche, raccolte e organicamente collegate a quelle dei predecessori nel suo *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes* (Paris, 1825-1826, 2 vol. e 1 di supplementi), la teoria delle funzioni ellittiche avesse ricevuta una definitiva sistemazione, uno dei passi più importanti restava ancora da fare.

Questo passo, e cioè la considerazione in luogo degli integrali ellittici (di prima specie) delle *funzioni inverse*, nonchè il passaggio dal campo reale al complesso, fu compiuto, nel quinquennio imme-

diatamente successivo alla pubblicazione del *Traité* — indubbiamente il più fecondo fra tutti per la teoria di cui si discorre — da due geniali ricercatori: il già ricordato JACOBI e il giovanissimo N. H. ABEL (1802-1829) <sup>(1)</sup>, che, stimolati da nobile emulazione, giunsero così, quasi simultaneamente, alla scoperta delle più importanti proprietà delle «funzioni ellittiche» nel senso moderno della parola (funzioni *inverse* degli integrali), e in particolare della già accennata loro *doppia periodicità* (ABEL, 1827).

Per far comprendere l'importanza del passo compiuto da ABEL e JACOBI con l'inversione degli integrali ellittici, suol citarsi l'esempio della funzione  $\sin x$ , indubbiamente più importante e godente di proprietà più semplici (soprattutto di quella di essere uniforme) della funzione inversa  $\arcsin x$ , la quale non è l'integrale di un differenziale algebrico, bensì l'inversa di un siffatto integrale:

$$(5) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pertanto, ripigliando per un momento un concetto già accennato più sopra, se le trascendenti elementari si fossero introdotte in modo analogo a quello con cui si sono introdotte le ellittiche, sarebbe stato indubbiamente più opportuno studiare, al modo di JACOBI, la funzione inversa dell'integrale (5) anzichè, al modo di LEGENDRE, l'integrale stesso.

Scendendo a qualche maggior particolare, aggiungiamo che JACOBI pone a base della teoria delle funzioni ellittiche, invece che i tre integrali di LEGENDRE, la funzione inversa  $\varphi(u)$  (funzione «amplitudine»:  $\text{am } u$ ) dell'integrale di prima specie:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

o, più esattamente, le tre funzioni uniformi

$$\sin \varphi, \quad \cos \varphi, \quad A\varphi = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}$$

<sup>(1)</sup> JACOBI ed ABEL ebbero un ignorato precursore in C. F. GAUSS (1777-1855) com'è chiaramente apparso solo in epoca relativamente recente (intorno al 1880) quand'è stata pubblicata una parte, fin'allora rimasta quasi ignota, delle carte inedite di GAUSS.

cioè

$$\sin am u, \quad \cos am u, \quad \Delta am u,$$

che ora sogliansi più brevemente indicare con le notazioni <sup>(1)</sup>

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u,$$

mostrando come esse godano, oltre che di svariatissime altre proprietà, di quella fondamentale della doppia periodicità, espressa dalle formole:

$$(6) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u + 4mK + 2niK') = \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}[u + 4mK + 2n(K + iK')] = \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2mK + 4niK') = \operatorname{dn} u, \end{cases}$$

dove  $m$  ed  $n$  sono numeri interi qualsiasi e si è posto:

$$(7) \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 \varphi}}.$$

JACOBI fa poi vedere come per mezzo di queste funzioni (che sono meromorfe) o, meglio ancora, mediante certe trascendenti intere (funzioni « *theta* ») ad esse collegate nel senso chiarito in fine dell'ultimo paragrafo di F. A. <sup>(2)</sup>, sia possibile calcolare agevolmente gli integrali di LEGENDRE, risolvendo così gli svariati problemi che a quelli si riconducono.

Posteriormente ad ABEL e JACOBI, il contributo più importante apportato alla teoria delle funzioni ellittiche è stato indubbiamente quello di K. WEIERSTRASS (1815-1897) che ha sostituito alle tre funzioni  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$  e  $\operatorname{dn} u$  un'unica funzione  $\wp u$ , che, sotto molti riguardi, si comporta più semplicemente delle prime; e similmente alle funzioni  $\vartheta$  di JACOBI ha sostituito un'altra funzione: la  $\sigma u$ , ofrente analoghi vantaggi.

<sup>(1)</sup> Per le funzioni ellittiche, come del resto anche per le funzioni circolari e il logaritmo, non si sogliono usare le parentesi; si suole cioè scrivere  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$ , ..., in luogo di  $\operatorname{sn}(u)$ ,  $\operatorname{cn}(u)$ , ecc.

<sup>(2)</sup> Con la sigla « F. A. » si allude qui, e si alluderà anche nel seguito, all'altra Monografia dell'A.: « *Funzioni Analitiche* », pubblicata nella medesima Collezione.

I vantaggi di semplicità e di chiarezza che così si ottengono sono anzi così cospicui che noi nell'attuale trattazione, seguendo l'autorevole esempio di BIANCHI [2], HURWITZ-COURANT [8] e altri AA., prenderemo appunto le mosse dalla funzione  $\wp u$  di WEIERSTRASS, nonostante che, così facendo, si proceda proprio all'incontrario dell'effettivo sviluppo storico della teoria che ci occupa. Passeremo poi alle funzioni  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$  di JACOBI e alle  $\vartheta$  che, seppur di comportamento spesso meno semplice delle funzioni di WEIERSTRASS, sono però quasi sempre da preferirsi alle prime dal punto di vista numerico-applicativo.

Vogliamo infine osservare, prima di concludere questi cenni introduttori, che integrali contenenti irrazionalità d'ordine più elevato di quelle in principio indicate: per esempio la radice quadrata di un polinomio di *grado superiore al quarto*, ecc. (integrali « *iperellittici* » o, più generalmente, « *abeliani* »), non possono condurre ad una teoria pienamente analoga a quella delle funzioni ellittiche, perchè le relative funzioni inverse dovrebbero avere *più di due periodi* distinti e, come presto vedremo, funzioni *uniformi* di una sola variabile più che doppiamente periodiche non ci sono. L'estensione è stata cioè non ostante fatta, essa risale anzi agli stessi fondatori della moderna teoria delle funzioni ellittiche: ABEL e JACOBI, ma le funzioni che così si ottengono (funzioni *iperellittiche* e *abeliane*) sono funzioni di *più* variabili che, per quanto dotate di un'importantissima proprietà (*teorema di Abel*) che estende in modo semplice il teorema d'addizione delle funzioni ellittiche, hanno importanza assai minore di quella di queste ultime.

## § 2. - Sui periodi di una funzione analitica uniforme.

Com'è noto, si dice che la funzione (uniforme)  $f(z)$  è *periodica col periodo  $p$* , o che ammette il periodo  $p$ , se il numero (in generale complesso)  $p$  è tale che, qualunque sia  $z$  <sup>(1)</sup>, è sempre

$$f(z+p) = f(z),$$

<sup>(1)</sup> Non ci soffermiamo sulla possibile, ma per noi non necessaria, generalizzazione di questa definizione che potrebbe ottenersi sostituendo al « *qualunque sia  $z$*  » una condizione meno restrittiva.

il che ovviamente implica anche

$$\dots = f(z-3p) = f(z-2p) = f(z-p) = f(z) = \\ = f(z+p) = f(z+2p) = f(z+3p) = \dots,$$

cioè

$$(8) \quad f(z+mp) = f(z),$$

qualunque sia l'intero (positivo o negativo)  $m$ .

Funzioni periodiche si trovano già fra le trascendenti elementari: per esempio  $e^z$  ha, come è noto (F. A., Cap. IV, § 3), il periodo  $2\pi i$ ,  $\sin z$  e  $\operatorname{tg} z$  rispettivamente i periodi  $2\pi$  e  $\pi$  ecc.; più generalmente la funzione

$$e^{\frac{2\pi i z}{p}}$$

o addirittura

$$\varphi\left(e^{\frac{2\pi i z}{p}}\right),$$

dove  $\varphi$  rappresenti, per esempio, una funzione razionale del suo argomento, sono funzioni periodiche col periodo *a priori* prescritto  $p$ .

Considerato però che gli esempi precedenti sono tutti esempi di funzioni *semplicemente* periodiche, cioè di funzioni dotate sostanzialmente di *un solo* periodo (prescindendo dai multipli di questo), viene naturale domandarsi se possono esistere anche funzioni *più che semplicemente periodiche*, cioè dotate di due o più periodi  $p_1, p_2, \dots$  *sostanzialmente distinti*, vale a dire tali che i loro rapporti due a due siano irrazionali o, addirittura, non reali.

La risposta è che, per le funzioni uniformi di una sola variabile complessa, *i periodi possono essere al più due*. Propriamente sussiste il seguente teorema, sostanzialmente dovuto a JACOBI:

*Una funzione analitica periodica, uniforme e non costante, o è semplicemente periodica, cioè tutti i suoi possibili periodi sono multipli di un solo:  $p_1$ , o lo è doppiamente, cioè tutti i suoi possibili periodi sono rappresentabili mediante una formula del tipo*

$$p = mp_1 + np_2,$$

*dove  $m$  ed  $n$  sono due interi qualsiasi e  $p_1$  e  $p_2$  due numeri il cui rapporto non è reale.*

La dimostrazione di questo fondamentale teorema è imperniata sul fatto che, se la funzione non è costante, il sistema  $[p]$  di tutti i suoi possibili periodi dev'essere necessariamente *isolato*, cioè privo di punti limitati a distanza finita.

Infatti, considerato che se due numeri  $p'$  e  $p''$  appartengono all'insieme  $[p]$  anche la loro differenza  $p' - p''$  manifestamente vi appartiene, l'esistenza di un punto limite dell'insieme in parola implicherebbe la presenza in esso di numeri con modulo inferiore a qualsiasi numero positivo prestabilito; implicherebbe cioè che intorno ad un qualsiasi punto di regolarità  $z_0$  della funzione dovrebbero addensarsi infiniti punti *equivalenti* ad esso, cioè di punti che, per differire per periodi da  $z_0$ , sono punti di livello della funzione, contrariamente a quanto è stato dimostrato nel § 4 del Cap. III di F. A.

Dalla proposizione ora stabilita segue che in un qualsiasi cerchio col centro nell'origine del piano complesso non può cadere che un numero finito di punti dell'insieme  $[p]$ . È dunque lecito dire: consideriamo fra questi, *zero escluso*, quello (o uno di quelli) fra questi il cui modulo è il più piccolo possibile, e sia  $p_1$ .

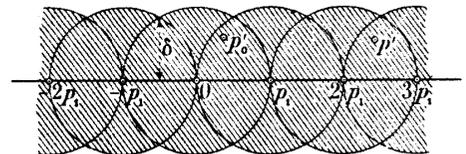


Fig. 1.

Avremo così che all'insieme  $[p]$ , cui ovviamente appartengono gl'infiniti punti (tutti allineati con l'origine)  $0, \pm p_1, \pm 2p_1, \pm 3p_1, \dots$ , non possono appartenere altri punti che siano *interni* ai cerchi di raggio  $p_1$ , aventi i centri nei punti in discorso, cioè interni all'area di cui una parte è tratteggiata nella fig. 1.

Infatti, se all'insieme appartenesse per esempio un punto  $p'$  interno al cerchio di centro  $hp_1$  ( $h$  intero) ma diverso dal centro  $hp_1$ , dovrebbe appartenervi anche il punto  $p'o = p' - hp_1$ , interno al cerchio di centro  $O$  e raggio  $p_1$  e diverso da zero, contrariamente all'ipotesi che  $p_1$  sia un periodo di modulo minimo della funzione che si considera.

Ne segue che due soli casi sono possibili:

O l'insieme  $[p]$  non contiene altri punti oltre quelli preceden-

temente considerati, e allora tutti i periodi sono compresi nella formula

$$p = mp_1,$$

dove  $m$  è un intero qualunque, e la funzione è semplicemente periodica.

Oppure l'insieme  $[p]$  contiene almeno un punto  $p_2$  fuori della retta  $r$  su cui sono allineati i punti  $hp_1$ , cioè tale che il rapporto  $p_2/p_1$  non sia reale <sup>(1)</sup>, e allora esso contiene *almeno* tutti i numeri del tipo

$$(9) \quad p = mp_1 + np_2,$$

dove  $m$  ed  $n$  sono due interi qualsiasi.

Dico anzi che se  $p_2$  è scelto, com'è sempre possibile <sup>(2)</sup>, in modo che la sua distanza dalla retta  $r$  sia la minima possibile, la (9) esaurisce tutti i punti dell'insieme  $[p]$ , cioè abbraccia tutti i possibili periodi della funzione che si considera.

Infatti, se in  $[p]$ , oltre ai punti (9), cioè ai nodi (o vertici che dir si voglia) della rete di parallelogrammi tracciata nella fig. 2, esistesse anche un altro punto  $p'$ , per esempio interno al parallelogramma di vertici

$$\begin{aligned} hp_1 + kp_2, & \quad (h+1)p_1 + kp_2, \\ hp_1 + (k+1)p_2, & \quad (h+1)p_1 + (k+1)p_2 \end{aligned}$$

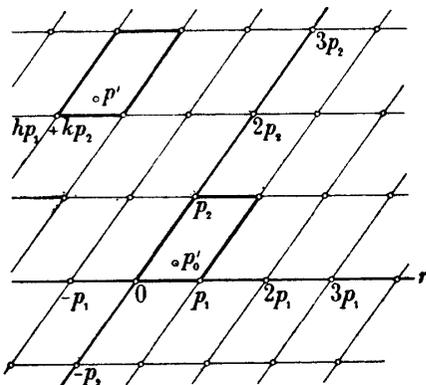


Fig. 2.

<sup>(1)</sup> Invero la condizione necessaria e sufficiente affinché le immagini di due numeri complessi sul piano di GAUSS siano allineate con l'origine è, come si verifica subito, che il rapporto dei due numeri sia reale.

<sup>(2)</sup> Basta all'uopo riflettere che i punti di  $[p]$  la cui distanza dalla retta  $r$  non supera un dato importo, pur essendo in numero infinito, sono

( $h$  e  $k$  numeri interi), allora esisterebbe in esso anche il punto equivalente

$$p'_0 = p' - hp_1 - kp_2$$

interno al parallelogramma di vertici  $0, p_1, p_2, p_1 + p_2$ , contrariamente all'ipotesi che  $p_2$  sia un periodo di distanza minima dalla retta  $r$ . E se invece  $p'$  cadesse su uno dei lati paralleli ad  $r$  della rete di parallelogrammi in parola senza coincidere con uno dei nodi di essa, allora la contraddizione si avrebbe col fatto che, come abbiamo già visto, i soli

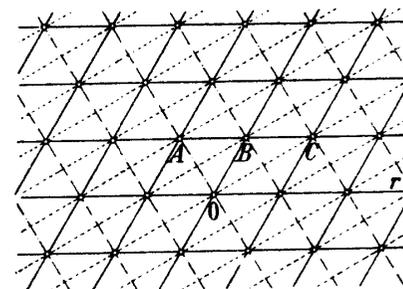


Fig. 3.

punti di  $[p]$  appartenenti alla retta  $r$  sono i multipli di  $p_1$ .

Con ciò il teorema di JACOBI è completamente dimostrato; vogliamo però ulteriormente osservare in modo esplicito che, come risulta dai ragionamenti precedenti, a differenza di quel che succede nel

caso delle funzioni semplicemente periodiche, i due numeri  $p_1$  e  $p_2$  che figurano nella (9) non sono per nulla individuati, anzi che esistono infinite possibili coppie di siffatti periodi primitivi della funzione, cioè atti a generare tutti gli altri. Questo fatto corrisponde all'altro, di carattere del tutto elementare e intuitivo che, com'è posto in evidenza nella fig. 3, due diverse reti di parallelogrammi possono benissimo essere *equivalenti* cioè avere gli stessi nodi, pur presentandosi sotto aspetti diversi. Anzi è senz'altro evidente che di reti equivalenti ad una data ce n'è sempre infinite, chè anche dopo aver fissata la direzione di una coppia di lati dei parallelogrammi e sia per esempio quella della retta  $r$  della fig. 3, ci sono ancora infinite possibilità per la scelta della direzione del-

però tali che le loro distanze da  $r$  non possono assumere se non un numero finito di valori. Invero, se così non fosse, mediante aggiunte di opportuni multipli di  $p_1$ , cioè mediante spostamenti paralleli ad  $r$ , si potrebbero raccogliere in un'area finita infiniti punti di  $[p]$ , il che è assurdo.

l'altra coppia, potendosi collegare l'origine  $O$  o col punto  $A$  della figura, o col punto  $B$ , o col punto  $C$ , ecc.

Dal precedente punto di vista geometrico-intuitivo non è però immediata la determinazione della *condizione necessaria e sufficiente per la equivalenza di due reti*, cioè di due diverse coppie  $(p_1, p_2)$  e  $(p_1', p_2')$  di periodi primitivi di una funzione, che è invece ben facile ponendosi da un punto di vista aritmetico. Invero tale condizione è manifestamente che possano trovarsi 8 numeri interi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ , tali da aversi *simultaneamente*:

$$\begin{cases} p_1' = \alpha p_1 + \beta p_2 \\ p_2' = \gamma p_1 + \delta p_2 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = \alpha' p_1' + \beta' p_2' \\ p_2 = \gamma' p_1' + \delta' p_2' \end{cases}$$

il che in particolare implica che dev'essere

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \pm 1,$$

altrimenti non potrebbe certo essere, com'è ovviamente necessario,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 1.$$

Ma se è  $D = \pm 1$ , essendo notoriamente

$$\alpha' = \frac{\delta}{D}, \quad \beta' = \frac{-\beta}{D}, \quad \gamma' = \frac{-\gamma}{D}, \quad \delta' = \frac{\alpha}{D}.$$

basta che siano interi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  affinché anche  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  risultino tali; dunque la *condizione (necessaria e sufficiente) di equivalenza delle due coppie di periodi*  $(p_1, p_2), (p_1', p_2')$  o meglio, per usare le lettere tradizionali, *delle due coppie di periodi*  $(2\omega, 2\omega'), (2\dot{\omega}, 2\dot{\omega}')$ , è che esistano 4 numeri interi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , soddisfacenti alla condizione

$$(10) \quad D = \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

tali che risulti:

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{\omega} = \alpha\omega + \beta\omega' \\ \dot{\omega}' = \gamma\omega + \delta\omega' \end{cases}$$

Se si osserva che l'area  $A$  di un parallelogrammo avente per « lati » due numeri complessi  $a$  e  $b$ , cioè del parallelogramma coi

vertici nei punti  $0, a, a+b, b$ , è manifestamente uguale alla parte immaginaria del prodotto del coniugato  $\bar{a}$  di  $a$  per  $b$ :

$$A = \mathfrak{I}(\bar{a}b);$$

le condizioni trovate sono suscettibili di un'elegante interpretazione geometrica. Invero, avendosi successivamente, in virtù delle (10)-(11)

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\bar{\omega}\dot{\omega}') &= \mathfrak{I}[(\alpha\bar{\omega} + \beta\bar{\omega}')(\gamma\omega + \delta\omega')] = \\ &= \mathfrak{I}(\alpha\gamma\bar{\omega}\omega + \beta\delta\bar{\omega}'\omega' + \alpha\delta\bar{\omega}\omega' + \beta\gamma\bar{\omega}'\omega) = \\ &= \mathfrak{I}(\alpha\delta\bar{\omega}\omega' + \beta\gamma\bar{\omega}'\omega) = \mathfrak{I}[(\alpha\delta - \beta\gamma)\bar{\omega}\omega'] = \pm \mathfrak{I}(\bar{\omega}\omega') \end{aligned}$$

si vede senz'altro che le aree dei parallelogrammi aventi per lati i periodi di due coppie equivalenti sono sempre, a prescindere dal segno, uguali fra loro. Anzi, se si sa già che i nodi di una delle due reti di periodi son tutti compresi fra quelli dell'altra, non è difficile persuadersi che l'uguaglianza delle aree dei detti parallelogrammi è addirittura condizione *necessaria e sufficiente* per l'equivalenza delle due coppie di periodi.

Osserviamo inoltre che potendosi, molto in particolare, supporre  $\alpha=1, \beta=\gamma=0, \delta=-1$ , cioè praticare la sostituzione

$$\dot{\omega} = \omega, \quad \dot{\omega}' = -\omega',$$

è possibile, pur senza scambiare fra loro i due periodi  $p_1=2\omega$  e  $p_2=2\omega'$  (si da poter, per esempio, continuare a supporre che  $2\omega$  sia un periodo di *modulo minimo* della funzione), ottenere che la parte immaginaria, certo non nulla, del rapporto

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

sia sempre *positiva*.

Invero, detti rispettivamente  $\theta$  e  $\theta'$  gli argomenti di  $\omega$  ed  $\omega'$ , si ha manifestamente

$$\mathfrak{I}(\tau) = \frac{|\omega'|}{|\omega|} \sin(\theta' - \theta),$$

epperò cambiando  $\omega'$  in  $-\omega'$ , ossia  $\theta'$  in  $\theta' + \pi$ ,  $\mathfrak{I}(\tau)$  si cambia in  $-\mathfrak{I}(\tau)$ .

È dunque lecito introdurre la convenzione, cui costantemente ci atterremo nel seguito (evitando così qualche fasti-

diosa ambiguità) che, qualunque sia la coppia  $(2\omega, 2\omega')$  di periodi primitivi considerata, sia sempre

$$(12) \quad \mathfrak{I}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) > 0,$$

senza che ciò impedisca di potere, occorrendo, simultaneamente supporre che sia  $|\omega| \leq |\omega'|$ .

In armonia con la precedente convenzione la condizione (10) dovrà essere sostituita dall'altra

$$(10') \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1,$$

chè altrimenti risulterebbe

$$\mathfrak{I}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) < 0.$$

Finalmente osserviamo che, nell'ipotesi di  $|\omega| \leq |\omega'|$ , da uno dei ragionamenti fatti nella dimostrazione del teorema di JACOBI, si può trarre una limitazione inferiore per  $\mathfrak{I}(\tau)$  ben più forte della (12).

Infatti, ricordando che nessun punto-periodo della funzione può distare dalla retta  $r$  (passante per l'origine e per  $p_1$ ) meno del segmento indicato con  $\delta$  nella fig. 1, ed essendo d'altra parte manifestamente:

$$\delta = |p_1| \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} |p_1|,$$

si ha la disuguaglianza

$$|p_2| |\sin(\theta' - \theta)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} |p_1|,$$

donde segue subito

$$\frac{|p_2|}{|p_1|} |\sin(\theta' - \theta)| = \frac{|\omega'|}{|\omega|} |\sin(\theta' - \theta)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

cioè, tenendo presente l'ultima formula di p. 12,

$$(13) \quad \mathfrak{I}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (|\omega| \leq |\omega'|).$$

### § 3. - Funzioni ellittiche generali.

In via generale, si dice oggi funzione ellittica ogni funzione analitica meromorfa, doppiamente periodica, cioè ogni funzione analitica  $f(u)$  <sup>(1)</sup> che non abbia al finito altro che poli, e sia dotata di due periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$  (il cui rapporto non sia reale), che noi, nel seguito, supporremo sempre soddisfacenti alla condizione (12), cioè tali che sia  $\mathfrak{I}(\omega'/\omega) > 0$  <sup>(2)</sup>.

Proprietà capitale di una funzione  $f(u)$  siffatta, è ovviamente quella che l'intero piano complesso può essere suddiviso in una doppia serie di infinite figure congruenti, per esempio nei parallelogrammi della rete  $(2\omega, 2\omega')$ , ciascuna delle quali è un campo fondamentale della funzione, cioè un'area in cui la funzione assume (anche più volte) tutti i valori di cui è suscettibile, ma in cui non sia contenuta alcuna coppia di punti equivalenti rispetto ai periodi  $(2\omega, 2\omega')$ .

All'uopo sia però fin d'ora esplicitamente osservato che non è per nulla necessario che i campi fondamentali siano proprio parallelogrammi coi vertici nei punti-periodi. L'unica cosa essenziale è invece che in ciascuno di essi sia sempre contenuto uno ed uno solo dei punti equivalenti rispetto alla coppia  $(2\omega, 2\omega')$ , cioè tali che la loro differenza sia della forma  $2m\omega + 2n\omega'$  con  $m$  ed  $n$  numeri interi; sicchè, per esempio, anche ciascuna delle due aree tratteggiate nella fig. 4 <sup>(3)</sup> potrebbe, allo stesso titolo di un paral-

<sup>(1)</sup> Nella teoria delle funzioni ellittiche, in cui — data l'abbondanza dei simboli e delle formule da considerare — non mancano le difficoltà formali, è opportuno rispettare tutte le convenzioni e le abitudini di scrittura ormai largamente diffuse o generalmente adottate. In armonia con ciò, d'ora in poi, indicheremo la variabile complessa di regola con  $u = u_1 + iu_2$ , invece che con  $z = x + iy$  come dianzi.

<sup>(2)</sup> Non è tuttavia da tacere ch'è entrato nell'uso, e noi vi ci uniformeremo, di chiamare « ellittiche » anche alcune funzioni quali la  $\zeta u$  e la  $\sigma u$  che presto incontreremo che, senza essere esse stesse doppiamente periodiche, sono però intimamente connesse a funzioni doppiamente periodiche. Occorre dunque distinguere fra funzioni ellittiche in senso stretto e funzioni ellittiche in senso lato. Nel presente paragrafo e nei quattro seguenti ci si riferirà sempre a funzioni ellittiche in senso stretto.

<sup>(3)</sup> In cui vanno pensate incluse solo quelle parti del contorno segnate con tratto più marcato.

lelogramma della rete, esser riguardata come campo fondamentale di una funzione ellittica di periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$ .

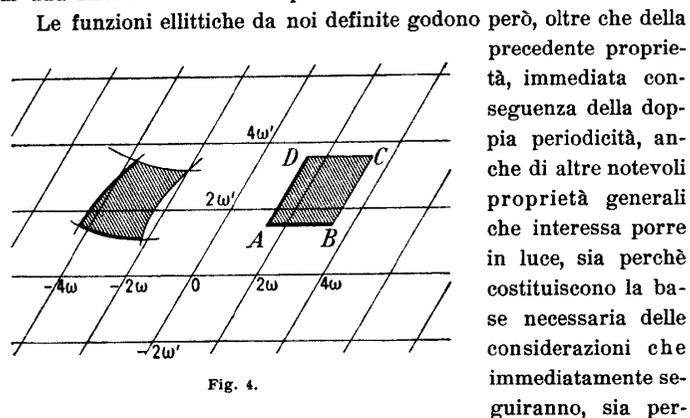


Fig. 4.

Le funzioni ellittiche da noi definite godono però, oltre che della precedente proprietà, immediata conseguenza della doppia periodicità, anche di altre notevoli proprietà generali che interessa porre in luce, sia perchè costituiscono la base necessaria delle considerazioni che immediatamente seguiranno, sia perchè si tratta di proprietà comuni a quasi tutte le funzioni che nel seguito dovremo particolarmente considerare.

All'uopo osserviamo anzitutto che tutte le funzioni ellittiche con due determinati periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$ , formano manifestamente un corpo  $K$ , cioè che somme, prodotti o quozienti, di funzioni ellittiche coi periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$ , sono ancora funzioni ellittiche dotate dei medesimi periodi <sup>(1)</sup>. Più generalmente, ogni funzione razionale, a coefficienti costanti, di funzioni del corpo  $K$  appartiene ancora al corpo  $K$ ; e così pure la derivata di una funzione del corpo, chè da

$$f(u + 2m\omega + 2n\omega') = f(u),$$

derivando rispetto ad  $u$ , segue senz'altro

$$f'(u + 2m\omega + 2n\omega') = f'(u).$$

<sup>(1)</sup> Merita però osservare esplicitamente che se  $2\omega$  e  $2\omega'$  sono periodi primitivi di  $f_1(u)$  ed  $f_2(u)$ , cioè atti a generare tutti gli altri come somme di loro multipli, non è detto che  $2\omega$  e  $2\omega'$  godano della stessa proprietà nei riguardi, per esempio, della somma  $f_1(u) + f_2(u)$  delle due funzioni. Infatti, per convincersi di ciò, basta considerare l'esempio triviale di  $f_2(u) = 1 - f_1(u)$  in cui, riducendosi la somma ad una costante, essa ammette qualsiasi periodo e quindi, in particolare, i sottomultipli di  $2\omega$  e  $2\omega'$ . Del resto, questa circo-

Un'altra proprietà generale, assai importante delle funzioni ellittiche è che una funzione siffatta non può essere mai olomorfa, cioè priva di poli a distanza finita, salvo a ridursi ad una costante.

Infatti se la funzione ellittica  $f(u)$  fosse olomorfa, detto  $N$  il massimo del suo modulo in un campo fondamentale, si avrebbe sempre

$$|f(u)| \leq N,$$

epperò, pel teorema di LIOUVILLE (F. A., Cap. II, § 6),  $f(u)$  non potrebbe differire da una costante.

Ne segue in particolare che

Due funzioni ellittiche  $f_1(u)$  ed  $f_2(u)$  non possono differire che per un fattore costante se hanno gli stessi zeri e gli stessi poli (con le stesse molteplicità), o per un termine costante se hanno gli stessi poli con le stesse caratteristiche.

Infatti nell'un caso  $f_1(u)/f_2(u)$  e nell'altro  $f_1(u) - f_2(u)$  è una funzione ellittica che, non avendo poli, deve ridursi ad una costante.

Ogni funzione ellittica  $f(u)$  effettiva, cioè non costante, deve dunque avere dei poli, e propriamente un certo numero finito  $r$  di essi in ogni campo fondamentale, chè, se questi fossero invece in numero infinito, dovrebbero avere ivi almeno un punto di condensazione, ciò che è inconciliabile con l'ipotesi che la funzione sia priva di singolarità essenziali al finito. Orbene, io dico che questo intero  $r$  (che dicesi ordine della funzione ellittica) dà non solo il numero dei poli di  $f(u)$  in ogni campo fondamentale, ma anche il numero dei suoi zeri o, più generalmente, dei punti in cui la funzione raggiunge un qualsiasi valore  $c$ ; dico cioè che:

Ogni funzione ellittica  $f(u)$  assume, in ciascun suo campo fondamentale, qualsiasi valore arbitrariamente fissato  $c$ , e precisamente  $r$  volte, se  $r$  è l'ordine della funzione, cioè il numero dei suoi poli in ogni campo fondamentale.

Infatti, osserviamo anzitutto che, potendosi pensare sostituita

stanza, che si presenta già nel campo delle funzioni semplicemente periodiche, non ci darà qui alcun fastidio perchè nei teoremi generali di cui dovremo ora e nel seguito occuparci la cosa essenziale sarà sempre che la funzione che si considera ammetta i periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$ ; non che questi e i loro multipli siano i soli possibili.

alla funzione  $f(u)$  l'altra  $f(u) - c$ , sarà sufficiente dimostrare il teorema nel caso di  $c=0$ , cioè per gli zeri della funzione. Ciò posto supponiamo scelto come campo fondamentale un parallelogramma dei periodi analogo al parallelogramma  $ABCD$  della fig. 4, sotto la sola condizione che il suo contorno  $\gamma$  non contenga nè poli nè zeri della funzione, e ricordiamo che pel teorema dell'indicatore logaritmico, cioè per la formula (17) del § 6, Cap. III, di F. A., l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

fornisce la differenza fra il numero dei poli e il numero degli zeri di  $f(u)$  entro  $\gamma$ . Tutto si riduce quindi a dimostrare che l'integrale precedente è nullo, il che è quasi evidente perchè, essendo la funzione

$$\frac{f'(u)}{f(u)}$$

anch'essa doppiamente periodica coi periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$ , si ha manifestamente:

$$\int_A^B \frac{f'(u)}{f(u)} du = - \int_C^D \frac{f'(u)}{f(u)} du, \quad \int_B^C \frac{f'(u)}{f(u)} du = - \int_D^A \frac{f'(u)}{f(u)} du.$$

Il teorema precedente pone in luce l'importanza dell'ordine  $r$  e lascia prevedere che le funzioni per cui  $r$  raggiunge i valori più piccoli possibili, dovranno avere un comportamento particolarmente semplice. Vien quindi naturale domandarsi se possa essere  $r=1$ , arrivando però alla conclusione che questo *non è possibile*.

Infatti, con l'identico ragionamento fatto in fine della dimostrazione del teorema precedente, si riconosce immediatamente che l'integrale di  $f(u)du$  esteso al contorno di un campo fondamentale che non incontri poli, è sempre zero. Ne segue (Cap. III, § 6 di F. A.) che *la somma dei residui dei poli di una funzione ellittica situanti entro un medesimo campo fondamentale è sempre nulla*, epperò di questi poli ce ne dovranno essere almeno due semplici o uno doppio.

Non esistono dunque funzioni ellittiche di ordine 1 (o di ordine 0), ne esistono invece, come presto vedremo, di ordine 2 sicchè in definitiva risulterà  $r \geq 2$ .

Possiamo inoltre osservare che una funzione ellittica  $f(u)$ , il cui

ordine  $r$  sia un numero primo (per esempio sia  $r=2$  o  $r=3$ ), non può mai ammettere come periodi dei sottomultipli di  $2\omega$  e  $2\omega'$ , epperò *questi sono necessariamente periodi primitivi della funzione*.

Infatti, se la funzione ammettesse anche i periodi  $2\omega = \frac{2\omega}{\mu}$ ,  $2\omega' = \frac{2\omega'}{\nu}$ , detto  $r'$  il suo grado nel corpo  $K'$  delle funzioni ellittiche coi periodi  $2\omega, 2\omega'$ , dovrebbe necessariamente essere

$$r = \mu\nu r';$$

il che, essendo  $r' > 1$ , è inconciliabile, tranne nel caso  $\mu = \nu = 1$ , con l'ipotesi che  $r$  sia un numero primo.

Finalmente dimostriamo una formula che costituisce un caso particolare di un celebre teorema assai più generale, dovuto ad ABEL, a cui si è fatta allusione in fine del § 1; dimostriamo cioè che se  $a_1, a_2, \dots, a_r$  sono i poli e  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  gli zeri (ciascuno ripetuto tante volte quant'è il suo ordine di molteplicità) di una qualsiasi funzione ellittica  $f(u)$ , situati entro un medesimo campo fondamentale, si ha necessariamente

$$(14) \quad \sum a - \sum \beta = 2m\omega + 2n\omega'$$

con  $m$  ed  $n$  numeri interi.

Infatti, supposto che il campo fondamentale sia lo stesso parallelogramma  $ABCD$  più sopra considerato, per la formula generalizzata dell'indicatore logaritmico, cioè per la (18) del § 6, Cap. III, di F. A., in cui sia fatto  $\lambda=1$ , si ha

$$\sum a - \sum \beta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(u)}{f(u)} u du,$$

donde, raccogliendo assieme i contributi dei lati  $AB$  e  $CD$ ,  $BC$  e  $DA$ , segue

$$\begin{aligned} \sum a - \sum \beta &= \frac{1}{2\pi i} \int_A^B \frac{f'(u)}{f(u)} [u - (u + 2\omega')] du + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_B^C \frac{f'(u)}{f(u)} [u - (u - 2\omega)] du = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ 2\omega \int_B^C \frac{f'(u)}{f(u)} du - 2\omega' \int_A^B \frac{f'(u)}{f(u)} du \right] \end{aligned}$$

cioè

$$\sum a - \sum \beta = \frac{1}{2\pi i} \{ 2\omega [\log f(u_C) - \log f(u_B)] - 2\omega' [\log f(u_B) - \log f(u_A)] \};$$

ma, essendo  $f(u_C) = f(u_B)$ ,  $f(u_B) = f(u_A)$ , le due coppie di logaritmi non possono differire che per multipli di  $2\pi i$ ; dunque la differenza  $\sum a - \sum \beta$  è necessariamente la somma di un multiplo di  $2\omega$  e di uno di  $2\omega'$ , come vuole la (14).

Ovviamente la proprietà espressa dalla (14) non cesserà di sussistere quand'anche i punti  $a$  e  $\beta$ , invece di essere poli e zeri, siano due gruppi di punti di livello qualsiasi della funzione.

#### § 4. - La funzione $\wp u$ di Weierstrass.

In armonia a quanto si è accennato nel paragrafo precedente, cerchiamo ora di costruire effettivamente una funzione ellittica con prescritti periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$  la quale sia del minimo ordine possibile, cioè d'ordine 2, prescrivendo ulteriormente, onde meglio determinarla, che essa abbia soltanto dei poli doppi nei nodi del parallelogramma dei periodi, cioè nei punti

$$(15) \quad w = 2m\omega + 2n\omega' \quad (1),$$

con le corrispondenti caratteristiche <sup>(2)</sup>:

$$\frac{1}{(u-w)^2}.$$

Anzi, considerato che per un teorema del paragrafo precedente, la funzione in discorso, ammesso che esista, è determinata a meno d'una costante addittiva, potremo del tutto individuarla aggiungendo alle condizioni precedenti l'altra che la differenza fra la funzione ed  $1/u^2$  si annulli per  $u=0$ . Giungeremo così alla

(1) D'ora innanzi useremo spesso la lettera  $w$  per denotare un punto qualsiasi dell'insieme  $2m\omega + 2n\omega'$  ( $m$  ed  $n$  numeri interi).

(2) Ovviamente la caratteristica non potrà contenere che un termine di grado  $-2$ , perchè se contenesse anche un termine di grado  $-1$ , il residuo del polo non sarebbe nullo e non sarebbe quindi soddisfatta la condizione relativa alla somma dei residui in un campo fondamentale.

fondamentale funzione  $\wp u$  di WEIERSTRASS, con l'ausilio della quale si può agevolmente dominare l'intera teoria delle funzioni ellittiche.

Propriamente, avvalendosi del teorema di MITTAG-LEFFLER per costruire anzitutto l'integrale di  $\wp u$  (il quale deve manifestamente ammettere i punti (15) come poli semplici con residuo  $-1$ ) l'unica sostanziale difficoltà da superare, è dimostrare che la serie doppia

$$(16) \quad \sum \frac{1}{w^3} = \sum_{m,n} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^3}$$

è assolutamente convergente.

Infatti, ammesso per il momento questo fatto come già dimostrato, il teorema di MITTAG-LEFFLER (F. A., Cap. IV, § 5) assicura che la serie

$$(17) \quad \zeta u = \frac{1}{u} + \sum' \left( \frac{u}{w} \right)^2 \frac{1}{u-w} = \frac{1}{u} + \sum' \left( \frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

dove l'apice apposto al sommatorio denota (come anche costantemente nel seguito) l'esclusione del termine relativo a  $w=0$ , convergerà assolutamente ed uniformemente in ogni dominio privo di punti  $w$ , rappresentando così una funzione analitica meromorfa in tutto il piano complesso, la cui derivata, cambiata di segno, soddisfa a tutte le condizioni da noi imposte alla funzione  $\wp u$ . E invero, posto

$$(18) \quad \wp u = -\zeta' u = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

si vede anzitutto immediatamente che  $\wp u$  ha effettivamente i punti  $w$  come poli doppi con le prescritte caratteristiche, nonchè che  $\wp u - 1/u^2$  si annulla per  $u=0$ . Quanto poi al fatto che la funzione  $\wp u$  sia doppiamente periodica coi periodi (necessariamente primitivi, perchè è  $r=2$ )  $2\omega$  e  $2\omega'$ , esso è una conseguenza dell'altro che aumentando  $u$  di una qualsiasi somma di multipli di  $2\omega$  e  $2\omega'$ , non si fa che cambiare l'ordine dei termini della serie (18), la quale è, come vedremo, similmente alla (16), assolutamente convergente in ogni dominio privo di punti  $w$ .

Per dimostrare che la serie (16) è assolutamente convergente,

cioè che la corrispondente serie dei moduli è convergente, ordiniamo i termini di questa seconda per « successivi anelli », cioè pensiamo raccolti assieme in successive somme parziali  $s_1, s_2, s_3, \dots$ , i termini provenienti dai nodi della rete dei periodi situati rispetti-

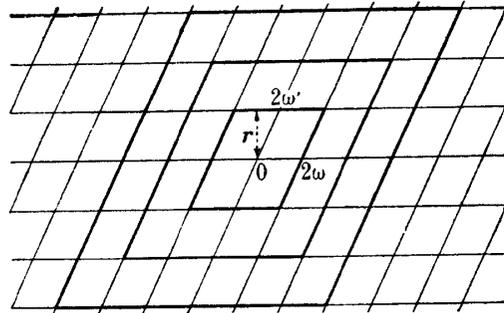


Fig. 5.

vamente sul 1°, 2°, 3°, ... dei successivi « anelli » segnati con tratto più marcato nella fig. 5, cominciando da quello più vicino all'origine. D'altra parte osserviamo che, posto

$$r = |2\omega| \mathfrak{I}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right),$$

i numeri positivi  $r, 2r, 3r, \dots$  forniscono rispettivamente, com'è facile controllare, le *minime distanze dall'origine* dei punti del 1°, 2°, 3°, ... anello. Ne segue, osservato altresì che nel 1°, 2°, 3°, ... anello cadono rispettivamente 8, 16 = 2 · 8, 24 = 3 · 8, ... punti  $w$ , che dovrà necessariamente essere

$$s_1 \leq \frac{8}{r^3}, \quad s_2 \leq \frac{2 \cdot 8}{(2r)^3} = \frac{8}{r^3} \frac{1}{2^3}, \quad s_3 \leq \frac{3 \cdot 8}{(3r)^3} = \frac{8}{r^3} \frac{1}{3^3}, \dots$$

e, in generale,

$$s_n \leq \frac{n \cdot 8}{(nr)^3} = \frac{8}{r^3} \frac{1}{n^2}.$$

Ma questo dimostra che la serie delle  $s_n$ , ammettendo come maggiore la serie convergente

$$\frac{8}{r^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

è convergente; dunque la serie (16) è assolutamente convergente, come volevasi dimostrare.

Finalmente dimostriamo che anche la serie (18) è assolutamente convergente fuori dei punti  $w$  e, più precisamente che, in ogni dominio tutto al finito  $D$ , detta serie da cui siano stati allontanati i termini (certo in numero finito) corrispondenti ai nodi della rete dei periodi cadenti entro  $D$  o sulla sua frontiera, converge assolutamente ed uniformemente.

Infatti basta osservare che, essendo identicamente

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{u(2w-u)}{w^2(u-w)^2} = \frac{1}{w^3} 2u \left(1 + \frac{u}{w-u}\right) \left(1 + \frac{u/2}{w-u}\right),$$

dette rispettivamente  $A$  la massima distanza dei punti di  $D$  dall'origine ed  $a$  la loro minima distanza dai punti  $w$  esterni a  $D$ , per queste  $w$  e per  $u$  comunque variabile in  $D$ , si ha manifestamente

$$\left| \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| \leq \frac{1}{|w|^3} 2A \left(1 + \frac{A}{a}\right)^2,$$

il che, stante la già dimostrata convergenza della serie  $\sum |w|^{-3}$ , prova l'assunto.

Notiamo infine che dalla (18), con una legittima derivazione termine a termine, segue

$$\wp' u = -\frac{2}{u^3} - 2 \sum' \frac{1}{(u-w)^3}$$

o, più semplicemente,

$$(19) \quad \wp' u = -2 \sum \frac{1}{(u-w)^3}$$

dove la somma (senza apice) è da estendere a *tutti* i numeri  $w$  della forma  $2m\omega + 2n\omega'$ , con  $m$  ed  $n$  interi.

### § 5. - Prime proprietà della funzione $\wp u$ .

#### Relazione fra $\wp u$ e $\wp' u$ .

La funzione  $\wp u$  costruita nel paragrafo precedente, o meglio  $\wp(u|\omega, \omega')$ , come più esplicitamente scriveremo sempre che sia utile mettere in evidenza anche i periodi, gode di numerose, impor-

tanti proprietà su cui sarà necessario trattarsi un po' a lungo, trattandosi della chiave di volta di tutta la teoria delle funzioni ellittiche.

Del resto si tratterà in gran parte di proprietà assai semplici ed eleganti cui non sarà difficile familiarizzarsi, giungendo così dopo poco tempo, a maneggiare la  $\wp u$  quasi con altrettanta facilità delle ordinarie trascendenti elementari, salvo un'innegabile difficoltà, inerente alla natura delle cose, e cioè che la  $\wp u$  e le altre funzioni ellittiche, non sono, in fondo, funzioni di una sola variabile complessa, bensì di più variabili, contenendo, oltre alla  $u$ , dei parametri: i due semiperiodi  $\omega$  ed  $\omega'$ . Le variabili effettive non sono però tre, come a prima vista sembrerebbe, bensì due: per esempio  $u/\omega$  ed il rapporto dei periodi  $\tau = \omega'/\omega$ , chè, come segue immediatamente dalla (18),  $\wp(u|\omega, \omega')$  è una funzione omogenea di grado  $-2$  dei suoi tre argomenti; vale cioè l'importante formula d'omogeneità:

$$(20) \quad \wp(tu|t\omega, t\omega') = t^{-2} \wp(u|\omega, \omega') \quad (1)$$

da cui, ponendo  $t = \omega^{-1}$ , si trae:

$$(21) \quad \wp(u|\omega, \omega') = \frac{1}{\omega^2} \wp\left(\frac{u}{\omega} \middle| 1, \frac{\omega'}{\omega}\right).$$

Inoltre è bene notare fin d'ora esplicitamente che vi sono infinite diverse coppie  $(\omega, \omega')$ , non proporzionali l'una all'altra, che conducono ad una medesima  $\wp u$ . Precisamente sono tutte (e sole) quelle che danno luogo a reti di parallelogrammi equivalenti nel senso del § 2, cioè contenenti gli stessi nodi.

Anzi, tenendo conto della condizione d'equivalenza colà stabilita, possiamo senz'altro asserire che la condizione necessaria e sufficiente affinché le due funzioni

$$\wp(u|\omega, \omega'), \quad \wp(u|\dot{\omega}, \dot{\omega}')$$

siano identiche fra loro, è che possano trovarsi quattro nu-

(1) Una formula analoga, e precisamente la stessa salvo il cambiamento di  $t^{-2}$  in  $t^{-3}$  vale per la funzione  $\wp'$  che, al contrario della  $\wp$  che è pari (Cfr. p. 25), è invece una funzione dispari cioè tale da aversi

$$\wp'(-u) = -\wp'u.$$

meri interi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , soddisfacenti alla condizione

$$(22) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad (1),$$

tali da aversi

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{\omega} = \alpha\omega + \beta\omega' \\ \dot{\omega}' = \gamma\omega + \delta\omega' \end{cases}$$

od anche, posto  $\omega'/\omega = \tau, \dot{\omega}'/\dot{\omega} = i$ ,

$$(24) \quad i = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}.$$

Ciò premesso, studiamo anzitutto un momento l'equazione

$$(25) \quad \wp u - c = 0,$$

dove  $c$  è una costante qualsiasi, che, essendo la  $\wp u$  una funzione di 2° ordine, dovrà avere, come già sappiamo, due e due sole

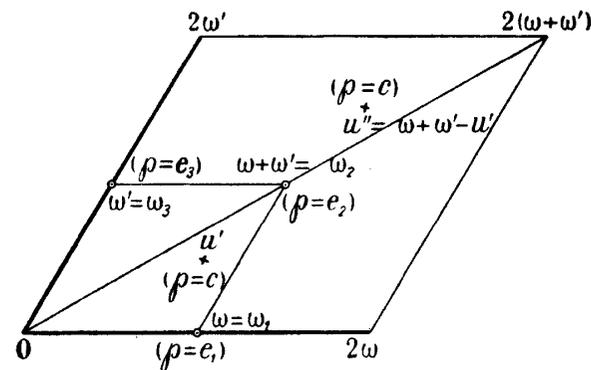


Fig. 6.

soluzioni in ogni campo fondamentale, per esempio nel parallelogramma dei periodi indicato nella fig. 6. Anzi, tenuto conto che,

(1) Scriviamo  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  e non  $= \pm 1$  perchè presupponiamo che, in armonia con la convenzione precedentemente fatta, i periodi di entrambe le funzioni soddisfino alla condizione  $\Re(\tau) > 0$ .

come immediatamente risulta dalla (18),  $\wp u$  è una funzione pari, cioè che si ha

$$\wp(-u) = \wp u$$

e, di conseguenza,

$$\wp u = \wp(2\omega - u) = \wp(2\omega' - u) = \wp(2\omega + 2\omega' - u);$$

si vede subito che i due punti  $u'$  e  $u''$  del parallelogramma in cui  $\wp u$  raggiunge un medesimo valore  $c$ , sono simmetricamente situati rispetto al centro  $\omega + \omega'$  del parallelogramma se cadono nell'interno di questo, e rispetto invece ai punti  $\omega$  od  $\omega'$  se cadono sul lato inferiore o, rispettivamente, sinistro del medesimo.

Ne segue in particolare che sarà  $u' = u''$ , cioè l'equazione (25) avrà una radice doppia, allora e solo allora che  $c$  coincide col valore di  $\wp u$  in uno dei tre centri di simmetria suddetti, cioè con uno dei tre punti

$$(26) \quad \boxed{e_1 = \wp \omega_1, \quad e_2 = \wp \omega_2, \quad e_3 = \wp \omega_3},$$

essendosi posto,

$$(27) \quad \omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega + \omega', \quad \omega_3 = \omega'.$$

I vantaggi di simmetria derivanti dall'introduzione, accanto ad  $\omega$  ed  $\omega'$ , dei tre nuovi simboli  $\omega_1, \omega_2$  ed  $\omega_3$ , potranno essere meglio apprezzati più avanti.

Le osservazioni precedenti mostrano inoltre che nei punti  $\omega_a$  ( $a=1, 2, 3$ )  $\wp'u$  dovrà necessariamente annullarsi, cioè che si ha

$$(28) \quad \boxed{\wp' \omega_a = 0, \quad (a=1, 2, 3)};$$

anzi possiamo per di più asserire che i tre punti in discorso sono i soli zeri di  $\wp'u$  nel parallelogramma considerato, essendo  $\wp'u$ , come risulta dalla semplice ispezione della (19), una funzione ellittica del terzo ordine.

Osserviamo infine che i tre numeri  $e_1, e_2, e_3$  sono sempre distinti. Infatti se fosse per esempio  $e_1 = e_3 = \varepsilon$ , la funzione ellittica di 2° ordine  $\wp u - \varepsilon$  avrebbe quattro zeri nel precedente parallelogramma, e cioè i due zeri doppi  $u = \omega_1$  ed  $u = \omega_3$ , il che è assurdo.

Le semplici considerazioni che precedono consentono di stabilire con quasi inverosimile facilità un risultato di capitale importanza, e cioè dimostrare come fra le funzioni  $\wp$  e  $\wp'$  intervenga una semplicissima relazione algebrica che, fra le altre cose, porrà già fin d'ora in luce l'addentellato esistente fra le funzioni ellittiche quali sono state da noi definite, e quei problemi di calcolo integrale cui si è accennato nel § 1. Propriamente dico che sussiste l'equazione:

$$(29) \quad \boxed{\wp'^2 u = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}.$$

Infatti, tanto il primo quanto il secondo membro sono funzioni ellittiche di 6° ordine, coi periodi  $(2\omega, 2\omega')$ , aventi entrambe come poli sestupli i punti  $2m\omega + 2n\omega'$  e come zeri doppi i punti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  ed equivalenti. Ma due funzioni ellittiche con gli stessi poli e gli stessi zeri non possono differire se non per un fattor costante; dunque l'equazione indicata vale certo a meno d'un fattor costante, che si vede poi subito essere uguale ad 1 servendosi del fatto che le caratteristiche dei poli di  $\wp u$  e  $\wp'u$  nell'origine sono rispettivamente:

$$\frac{1}{u^2}, \quad -\frac{2}{u^3}.$$

Posto

$$\wp u = z$$

il risultato ottenuto può, sotto forma un po' diversa, scriversi

$$(30) \quad \frac{du}{dz} = \frac{1}{dz/du} = \frac{1}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}}$$

cioè, tenuto conto che ad  $u=0$  corrisponde  $z=\infty$ ,

$$(31) \quad \boxed{u = \int_{\infty}^z \frac{dz}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}},$$

e si vede così come la funzione  $\wp$  coincide con la funzione inversa all'integrale « ellittico » (31), contenente la radice quadrata di un polinomio di terzo grado nella variabile d'integrazione  $z$ .

Riservandoci di tornare più tardi sull'integrale (31) ed altri analoghi, ricaviamo ora la (29) anche per un'altra via, non tanto per avere una conferma del risultato già trovato, quanto per rica-

vare alcune fondamentali relazioni concernenti le  $e_1, e_2, e_3$  e certe altre costanti.

All' uopo partiamo dalla (17) che, essendo manifestamente

$$\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} = -\frac{1}{w} \left( \frac{u^2}{w^2} + \frac{u^3}{w^3} + \frac{u^4}{w^4} + \dots \right), \quad (\text{se } |w| > |u|),$$

nell'intorno dell'origine (e propriamente entro il cerchio avente  $O$  come centro e come raggio il più piccolo dei tre numeri  $2|\omega_1|, 2|\omega_2|, 2|\omega_3|$ ), potremo scrivere sotto la forma

$$\zeta u = \frac{1}{u} - u^2 \sum' \frac{1}{w^3} - u^3 \sum' \frac{1}{w^4} - u^4 \sum' \frac{1}{w^5} - \dots$$

od anche

$$(32) \quad \zeta u = \frac{1}{u} - S_4 u^3 - S_6 u^5 - \dots,$$

avendo osservato che le somme

$$\sum' \frac{1}{w^n}$$

relative ad esponenti  $n$  dispari sono manifestamente tutte nulle, e posto:

$$(33) \quad S_4 = \sum' \frac{1}{w^4}, \quad S_6 = \sum' \frac{1}{w^6}, \dots$$

Conseguentemente, derivando successivamente due volte rispetto, ad  $u$ , avremo

$$(34) \quad \wp u = -\zeta' u = \frac{1}{u^2} + 3S_4 u^2 + 5S_6 u^4 + \dots$$

$$(35) \quad \wp' u = -\frac{2}{u^3} + 2 \cdot 3S_4 u + 4 \cdot 5S_6 u^3 + \dots,$$

donde, preoccupandosi solo dei termini con potenze negative o nulle di  $u$ , si trae

$$\wp^3 u = \frac{1}{u^6} + 3^2 S_4 \frac{1}{u^2} + 3 \cdot 5 S_6 + \dots$$

$$\wp'^2 u = \frac{4}{u^6} - 2^3 \cdot 3 S_4 \frac{1}{u^2} - 2^4 \cdot 5 S_6 + \dots;$$

è dunque:

$$\wp'^2 u - 4\wp^3 u = -60S_4 \frac{1}{u^2} - 140S_6 + \dots,$$

e quindi pure:

$$\wp'^2 u - 4\wp^3 u + 60S_4 \wp u = -140S_6 + \dots$$

Ciò posto osserviamo che la funzione ellittica a primo membro non può aver altri poli che l'origine e i punti a questa equivalenti. Ma il secondo membro ci dice che l'origine non è un polo; dunque la funzione a primo membro non ha poli epperò non può differire da una costante, e precisamente dalla costante  $-140S_6$ . Vale dunque l'identità

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - 60S_4 \wp u - 140S_6,$$

che, confrontata con la (29) scritta sotto la forma:

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - 4(e_1 + e_2 + e_3)\wp^2 u + 4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2)\wp u - 4e_1 e_2 e_3,$$

fornisce le altre identità

$$(36) \quad \begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ 4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) = -60S_4, \\ 4e_1 e_2 e_3 = 140S_6. \end{cases}$$

In altri termini, posto, com'è tradizionale:

$$(37) \quad \boxed{g_2 = -4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2), \quad g_3 = 4e_1 e_2 e_3} \quad (1),$$

si ha

$$(38) \quad \boxed{g_2 = 60 \sum' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 140 \sum' \frac{1}{w^6}}$$

e la relazione fondamentale fra  $\wp$  e  $\wp'$  può scriversi sotto la forma

$$(39) \quad \boxed{\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3},$$

di guisa che la (31) diviene:

$$(40) \quad \boxed{u = \int_{\infty}^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}, \quad (z = \wp u)}.$$

(1) In virtù della prima delle (36) si ha pure, come subito si verifica,

$$g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2).$$

I numeri  $g_2$  e  $g_3$  diconsi *invarianti* della funzione  $\wp u$ , e la individuano perfettamente. Tale nome può mettersi in relazione sia col fatto che  $g_2$  e  $g_3$  restano manifestamente invariati se ai periodi  $(2\omega, 2\omega')$  viene sostituita un'altra qualsiasi coppia  $(2\hat{\omega}, 2\hat{\omega}')$  di periodi equivalenti, sia con l'altro che cambiando  $\omega$  ed  $\omega'$  rispettivamente in  $t\omega, t\omega', g_2$  e  $g_3$  si comportano *invariantivamente*, e propriamente si moltiplicano rispettivamente per  $t^{-4}$  e  $t^{-6}$ . La sua piena giustificazione si avrà però più avanti (Cap. II, § 2).

Da quest'ultima osservazione segue in particolare che se la funzione  $\wp u$  è data, invece che per mezzo dei semiperiodi  $\omega$  e  $\omega'$ , mediante gli invarianti  $g_2$  e  $g_3$  <sup>(1)</sup>, nel qual caso scriveremo

$$\wp(u; g_2, g_3),$$

la formula d'omogeneità (20) viene sostituita dall'altra

$$(41) \quad \wp(u; g_2, g_3) = t^2 \wp(tu; t^{-4}g_2, t^{-6}g_3).$$

Notiamo infine che, nel caso ora accennato, i tre numeri  $e_1, e_2, e_3$ , cioè i cosiddetti « *invarianti irrazionali* » della funzione, dovranno calcolarsi risolvendo l'equazione di 3° grado

$$(42) \quad 4z^3 - g_2z - g_3 = 0,$$

e pertanto, supposto che (come sempre accade nelle applicazioni)  $g_2$  e  $g_3$  siano reali, saranno ovviamente da distinguere due casi secondochè il *discriminante*:

$$(43) \quad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2(e_1 - e_2)^2$$

è positivo o negativo (nullo non può essere perchè  $e_1, e_2, e_3$  devono

<sup>(1)</sup> Si badi che non è senz'altro evidente che, dati *ad arbitrio* due numeri  $g_2$  e  $g_3$ , sia pure soddisfacenti alla condizione  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ , esista sempre una funzione  $\wp u$  che li ammetta come invarianti. La cosa però sussiste come, almeno in parte, si vedrà nel paragrafo seguente in cui sarà mostrato come, noti che siano  $g_2$  e  $g_3$ , possano subito calcolarsi tutti i coefficienti dello sviluppo di  $\wp u$  in serie di potenze di  $u$ . Permarrà però il dubbio che questo sviluppo possa talvolta risultare di raggio di convergenza nullo, dubbio che verrà eliminato nel § 4 del Cap. II in cui faremo vedere come, dati  $g_2$  e  $g_3$ , possano effettivamente calcolarsi un  $\omega$  ed  $\omega'$  tali che, fra l'altro, le equazioni (38) risultino identicamente soddisfatte.

essere distinti). Se  $\Delta > 0$  gl'invarianti irrazionali sono tutt'e tre reali, mentr' invece se  $\Delta < 0$  uno è reale e gli altri due complessi coniugati. Quanto a decidere quale delle radici della (42) è  $e_1$ , quale  $e_2$  e quale  $e_3$ , quest'è cosa che, come mostrano le (26), si connette col problema, di cui dovremo in seguito occuparci, del calcolo di  $\omega$  e  $\omega'$  dati  $g_2$  e  $g_3$ . Del resto, vedremo a suo tempo

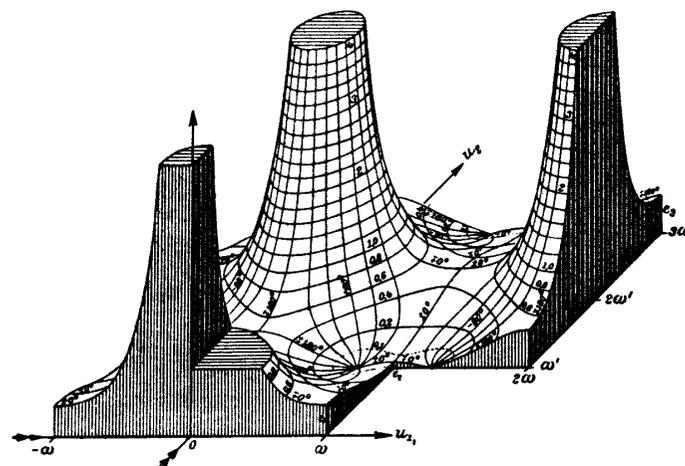


Fig. 7.

che permutare fra loro le  $e_1, e_2, e_3$  corrisponde a passare da una ad un'altra coppia di periodi equivalenti, epperò è cosa di poco rilievo.

Le figure 7 e 8 cercano di dare una rappresentazione intuitiva della più parte delle proprietà già indicate della funzione  $\wp u$ , e specialmente della sua doppia periodicità.

Propriamente la fig. 7 (tratta dalle più volte citate « *Funktions tafeln* » di JAHNKE-EMDE) rappresenta (in proiezione assonometrica) la superficie « *E* » della funzione  $\wp u$ , cioè la superficie avente come terza coordinata il modulo di  $\wp u$ , nel caso  $\omega = 2, \omega' = 1,75i$ ;

$$e_1 = 0,453, \quad e_2 = 0,093, \quad e_3 = -0,546.$$

La fig. 8 rappresenta invece le linee  $\Re(\wp u) = \text{cost.}$  (a trattini, quotate al contorno della figura) e le linee  $\Im(\wp u) = \text{cost.}$  (a tratto

pieno, quotate nell'interno) nel caso particolarmente notevole (su cui dovremo tornare più innanzi) in cui è  $g_2=0, g_3=1$ . Si notino

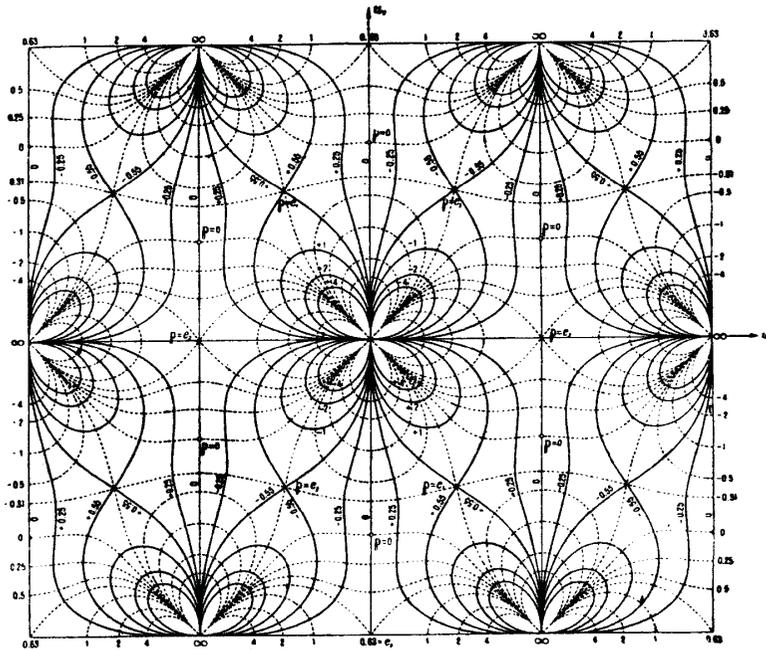


Fig. 8.

fra l'altro i punti  $\wp=e_1, \wp=e_2$  e  $\wp=e_3$  in cui, essendo  $\wp'=0$ , viene meno la mutua ortogonalità delle linee rappresentative.

§ 6. - Ulteriori proprietà della funzione  $\wp u$ .  
Teorema d'addizione.

La trovata relazione fra  $\wp$  e  $\wp'$ , che d'ora innanzi considereremo generalmente sotto la forma (39), porta, fra l'altro, alla conseguenza che, non solo la derivata prima  $\wp'$  di  $\wp$  si può esprimere algebricamente per mezzo di  $\wp$ , ma anche *tutte le altre*

derivate  $\wp'', \wp'''$ , ecc.; anzi che queste derivate sono tutte esprimibili *razionalmente* per mezzo di  $\wp, \wp', g_2$  e  $g_3$ .

Infatti dalla (39), con successive derivazioni, seguono facilmente le formule:

$$(44) \quad \begin{cases} \wp''u = 6\wp^2u - \frac{1}{2}g_2 \\ \wp'''u = 12\wp u \wp'u \\ \wp^{IV}u = 120\wp^3u - 18g_2\wp u - 12g_3 \\ \wp^Vu = 360\wp^2u \wp'u - 18g_2\wp'u \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Una delle conseguenze di queste formule è il fatto, interessante anche da un punto di vista puramente algebrico, che *le somme*

$$S_{2n} = \sum' \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^{2n}}$$

*precedentemente considerate, sono tutte razionalmente esprimibili mediante  $g_2$  e  $g_3$  (cioè, in sostanza, mediante le prime due di esse  $S_4$  ed  $S_6$ ), anzi sono addirittura polinomi in  $g_2$  e  $g_3$  con coefficienti razionali e positivi.*

Infatti, posto

$$(45) \quad (2n-1)S_{2n} = c_n,$$

cioè detti  $c_2, c_3, c_4, \dots$  i coefficienti di  $u^2, u^4, u^6, \dots$  nello sviluppo (34) di  $\wp u$ , da questa formula e da quella che subito se ne deduce derivando due volte rispetto ad  $u$ , sostituendo nella prima delle (44), si ha l'identità

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 3}{u^4} + 1 \cdot 2c_2 + 3 \cdot 4c_3u^2 + 5 \cdot 6c_4u^4 + \dots = \\ = 6 \left( \frac{1}{u^2} + c_2u^2 + c_3u^4 + \dots \right)^2 - 10c_2, \end{aligned}$$

donde, uguagliando i coefficienti delle stesse potenze di  $u$  nei due membri, seguono le formule

$$c_4 = \frac{1}{3}c_2^2, \quad c_5 = \frac{3}{11}c_2c_3, \quad c_6 = \frac{1}{13}(2c_2c_4 + c_3^2) = \frac{1}{13}\left(\frac{2}{3}c_2^3 + c_3^2\right), \dots$$

e, in generale,

$$(46) \quad c_n = \frac{3}{(n-3)(2n+1)} (c_2c_{n-2} + c_3c_{n-3} + \dots + c_{n-2}c_2), \quad (n > 3).$$

Corrispondentemente, tenuto conto delle (38), si hanno le formule:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} S_4 &= \frac{c_2}{3} = \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}, \\ S_6 &= \frac{c_3}{5} = \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7}, \\ S_8 &= \frac{c_4}{7} = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}, \\ S_{10} &= \frac{c_5}{9} = \frac{g_2 g_3}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

e lo sviluppo:

$$(48) \quad \boxed{\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} u^6 + \frac{3g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^8 + \dots}$$

che, come abbiamo già avvertito, vale nel cerchio avente per centro l'origine  $O$  e per raggio il più piccolo dei tre numeri  $2|\omega_1|$ ,  $2|\omega_2|$  e  $2|\omega_3|$ , cioè nel più grande dei cerchi col centro in  $O$  non comprendenti nel loro interno alcun altro polo della funzione (oltre  $O$ ).

Nel medesimo campo si ha inoltre ovviamente:

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \wp' u &= -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{2 \cdot 5} u + \frac{g_3}{7} u^3 + \frac{g_2^2}{2^3 \cdot 5^2} u^5 + \frac{3g_2 g_3}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^7 + \dots \\ \zeta u &= \frac{1}{u} - \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} u^3 - \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} u^5 - \\ &\quad - \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} u^7 - \frac{g_2 g_3}{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^9 - \dots \end{aligned} \right.$$

Un'altra capitale proprietà della funzione  $\wp u$  è che essa possiede un teorema di addizione algebrico, cioè che, detti  $u_1$  ed  $u_2$  due qualsiasi valori di  $u$ , fra  $\wp u_1$ ,  $\wp u_2$  e  $\wp(u_1 + u_2)$  sussiste una relazione algebrica a coefficienti indipendenti da  $u_1$  ed  $u_2$ . Propriamente dico che si ha

$$(50) \quad \boxed{\wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2} \right)^2 - \wp u_1 - \wp u_2.}$$

Per giungere a questa formula, di cui è superfluo trattenersi ad illustrare l'importanza <sup>(1)</sup>, nel modo più semplice e spontaneo

<sup>(1)</sup> All'uopo si consideri per esempio che, noti che siano i valori di  $\wp u$  soltanto su due diverse linee del piano complesso, per esempio su due rette,

possibile, consideriamo la curva algebrica del 3° ordine  $\mathcal{C}_3$ , rappresentata dall'equazione

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

(i cui punti reali sono rappresentati, nell'ipotesi di  $e_1, e_2, e_3$  reali

ed  $e_2 = 0$  nella fig. 9), e osserviamo anzitutto che, in virtù della (39), la curva  $\mathcal{C}_3$  può essere parametricamente rappresentata dalle equazioni

$$x = \wp u, \quad y = \wp' u$$

al variare di  $u$  in un qualsiasi campo fondamentale  $\Gamma$  della  $\wp$ . Anzi, tenuto conto che dei due punti

di  $\Gamma$  corrispondenti ad un determinato valore  $x_0$  di  $\wp u$  uno solo è tale che  $\wp' u$  abbia il debito segno, e cioè il segno del corrispondente valore  $y_0$  di  $y$ , si vede che la corrispondenza fra i punti  $(x_0, y_0)$  della curva  $\mathcal{C}_3$  e i punti  $u$  di  $\Gamma$  è biunivoca.

Ciò premesso, chiediamoci quale relazione debba intercedere fra i parametri  $u_1, u_2$  e  $u_3$  di tre punti  $A, B$  e  $C$  della cubica  $\mathcal{C}_3$  affinchè questi risultino allineati su di una certa retta  $r$ .

Questo problema si risolve immediatamente per mezzo del teorema di ABEL, cioè della nostra formula (14).

Invero, supposto che l'equazione della retta  $r$  sia

$$ax + by + c = 0,$$

la condizione richiesta è che  $u_1, u_2$  e  $u_3$  siano i tre zeri cadenti entro  $\Gamma$  della funzione ellittica di terz'ordine

$$f(u) = a\wp u + b\wp' u + c;$$

ma, d'altra parte, questa funzione ha un polo di terz'ordine nel

non parallele fra loro, della rete dei periodi; con l'ausilio della (50) può subito calcolarsi, con sole operazioni algebriche, il valore di  $\wp u$  in qualsiasi altro punto del piano.

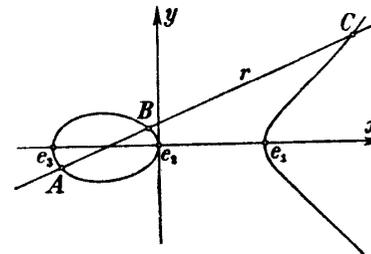


Fig. 9.

nodo della rete dei periodi cadente entro  $\Gamma$  (che, per semplicità, possiamo supporre sia addirittura l'origine); dunque, se i tre punti  $A, B$  e  $C$  sono allineati, in forza della (14), dovrà essere

$$(51) \quad u_1 + u_2 + u_3 = 2m\omega + 2n\omega'.$$

In altri termini, osservato che in conseguenza della (51) è

$$\begin{aligned} \wp u_3 &= \wp(-u_1 - u_2) = \wp(u_1 + u_2) \\ \wp' u_3 &= \wp'(-u_1 - u_2) = -\wp'(u_1 + u_2), \end{aligned}$$

si trova che i tre punti

$$\begin{cases} x_1 = \wp u_1 \\ y_1 = \wp' u_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = \wp u_2 \\ y_2 = \wp' u_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = \wp(u_1 + u_2) \\ y_3 = -\wp'(u_1 + u_2) \end{cases}$$

sono sempre allineati, ciò che, com'è ben noto dalla Geometria analitica, implica che

$$(52) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp u_1 & \wp u_2 & \wp(u_1 + u_2) \\ \wp' u_1 & \wp' u_2 & -\wp'(u_1 + u_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Non resta ora che da trasformare la (52) in modo da ridurla alla forma (50), ciò che va fatto con un po' di garbo onde evitare calcoli prolissi.

All'uopo osserviamo anzitutto che, sviluppando il determinante, l'equazione (52) prende l'aspetto

$$\begin{aligned} \wp u_1 \wp' u_2 - \wp u_2 \wp' u_1 + \wp(u_1 + u_2)(\wp' u_1 - \wp' u_2) = \\ = \wp'(u_1 + u_2)(\wp u_2 - \wp u_1) \end{aligned}$$

donde, elevando a quadrato e servendosi dell'abbreviazione

$$\wp(u_1 + u_2) = x_3,$$

per la (39) segue:

$$(53) \quad (4x_3^3 - g_2x_3 - g_3)(\wp u_1 - \wp u_2)^2 - \\ - [(\wp' u_1 - \wp' u_2)x_3 + \wp u_1 \wp' u_2 - \wp' u_1 \wp u_2]^2 = 0.$$

Abbiamo così ottenuta un'equazione di terzo grado in  $x_3$  che, stante la sua origine, avrà manifestamente le tre radici

$$x_3 = \wp(u_1 + u_2), \quad x_3 = \wp u_1, \quad x_3 = \wp u_2,$$

chè in tutt'e tre questi casi il determinante (52), in cui al posto

di  $\wp(u_1 + u_2)$  sia scritto  $x_3$ , si annulla. Ne segue che il primo membro della (53) non potrà differire se non per un fattore indipendente da  $x_3$  dal polinomio di terzo grado:

$$[x_3 - \wp(u_1 + u_2)](x_3 - \wp u_1)(x_3 - \wp u_2)$$

epperò, supposto  $\wp u_1 \neq \wp u_2$  cioè  $u_2$  non equivalente nè ad  $u_1$  nè a  $-u_1$ , scrivendo che i coefficienti dei termini di 2° e 3° grado dei due polinomi devono essere proporzionali fra loro, si ha

$$\frac{1}{4(\wp u_1 - \wp u_2)^2} = \frac{-\wp(u_1 + u_2) - \wp u_1 - \wp u_2}{-(\wp' u_1 - \wp' u_2)^2},$$

donde segue immediatamente la (50).

Per altre forme del teorema d'addizione della  $\wp u$ , vedi più avanti (formule (69)).

Non possiamo soffermarci che di volo sulle conseguenze della (50) le quali sono, per numero ed importanza, da mettersi a lato delle ben note conseguenze della formula  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \dots$  nella teoria delle funzioni circolari.

Limitiamoci solo ad osservare che, facendo tendere  $u_2$  ad  $u_1$ , dalla (50) per la regola di L'Hospital, segue senz'altro

$$(54) \quad \wp(2u) = -2\wp u + \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'' u}{\wp' u} \right)^2,$$

oppure, sostituendo a  $\wp'$  e  $\wp''$  i loro valori:

$$(55) \quad \wp(2u) = \frac{(\wp^2 u + g_2/4)^2 + 2g_3 \wp u}{4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3}.$$

Così pure meritano di essere esplicitamente osservate le seguenti formule relative all'aggiunta di semiperiodi all'argomento  $u$ :

$$(56) \quad \begin{cases} \wp(u + \omega_1) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp u - e_1} \\ \wp(u + \omega_2) = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp u - e_2} \\ \wp(u + \omega_3) = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp u - e_3} \end{cases}$$

facilmente deducibili dalla (50) e dalle (26).

§ 7. - Rappresentazione di una funzione ellittica generale mediante la  $\wp u$ .

Passiamo ora a stabilire un teorema del più alto interesse, tanto teoretico quanto pratico, che ci consentirà una chiara visione d'insieme della totalità delle funzioni ellittiche con due determinati periodi  $2\omega, 2\omega'$ , cioè delle funzioni di un corpo  $K$ , secondo la denominazione introdotta nel § 3. Propriamente dico che *qualsiasi funzione  $f(u)$  di un tal corpo si può sempre esprimere algebricamente per mezzo di  $\wp(u|\omega, \omega')$ , anzi addirittura razionalmente in  $\wp$  e  $\wp'$  mediante una formula del tipo*

$$(57) \quad f(u) = R_1(\wp) + R_2(\wp) \cdot \wp',$$

dove  $R_1$  ed  $R_2$  denotano due funzioni razionali del loro argomento.

Per stabilire questo teorema cominciamo dal caso in cui la funzione  $f(u)$  sia una funzione *pari*, cioè sia  $f(-u) = f(u)$ , osservando anzitutto che ciò implica che il grado  $r$  della funzione dovrà essere un numero *pari*:  $r = 2h$  ( $h \geq 1$ ). Invero, supposto per semplicità di aver assunto come campo fondamentale un parallelogramma dei periodi  $\Gamma$  col centro nell'origine  $O$ , ad ogni punto  $u = u_0$  di tal campo godente della proprietà che sia  $f(u) = c$  è associato un altro punto  $u = -u_0$  di  $\Gamma$  godente della stessa proprietà. In secondo luogo osserviamo che, annullandosi  $f'(u)$  soltanto in un certo numero finito di punti di  $\Gamma$ , potremo certo trovare infinite  $c$  tali che i punti in cui è  $f(u) = c$  siano tutti *distinti*.

Ciò premesso, supposto che  $a$  e  $b$  siano due diversi valori di  $c$  soddisfacenti all'ultima condizione, indichiamo con

$$\begin{aligned} &\pm u_1, \pm u_2, \dots, \pm u_h \\ &\pm v_1, \pm v_2, \dots, \pm v_h \end{aligned}$$

i punti di  $\Gamma$  in cui si ha rispettivamente

$$f(u) = a \quad \text{o} \quad f(u) = b$$

e costruiamoci la funzione ellittica del corpo  $K$ :

$$P(u) = \frac{(\wp u - \wp u_1)(\wp u - \wp u_2) \dots (\wp u - \wp u_h)}{(\wp u - \wp v_1)(\wp u - \wp v_2) \dots (\wp u - \wp v_h)},$$

che ha manifestamente come zeri semplici i  $2h$  punti  $\pm u_1, \pm u_2, \dots, \pm u_h$  e come poli, pure semplici, i  $2h$  punti  $\pm v_1, \pm v_2, \dots, \pm v_h$ . Ma anche la funzione ellittica del medesimo corpo:

$$F(u) = \frac{f(u) - a}{f(u) - b}$$

ha gli stessi zeri e gli stessi poli; dunque dovrà necessariamente essere

$$F(u) = CP(u)$$

con  $C$  costante, donde, risolvendo rispetto ad  $f(u)$ , segue

$$f(u) = \frac{a - bCP(u)}{1 - CP(u)},$$

cioè

$$(58) \quad f(u) = R[\wp(u)],$$

avendo posto

$$(59) \quad R(x) = \frac{a(x - \wp v_1)(x - \wp v_2) \dots (x - \wp v_h) - bC(x - \wp u_1)(x - \wp u_2) \dots (x - \wp u_h)}{(x - \wp v_1)(x - \wp v_2) \dots (x - \wp v_h) - C(x - \wp u_1)(x - \wp u_2) \dots (x - \wp u_h)}.$$

Se invece la funzione  $f(u)$  è *dispari*, basta allora osservare che  $f(u)/\wp' u$  è di conseguenza pari, epperò rappresentabile mediante una formula del tipo (58), per avere che

$$(60) \quad f(u) = R(\wp u) \cdot \wp' u.$$

Finalmente, se  $f(u)$  non è nè pari nè dispari, basta osservare che essa è sempre scomponibile nella somma di una funzione pari  $f_1(u)$  e di una dispari  $f_2(u)$  ponendo

$$f_1(u) = \frac{1}{2} [f(u) + f(-u)], \quad f_2(u) = \frac{1}{2} [f(u) - f(-u)],$$

per giungere senz'altro alla (57).

È quasi superfluo aggiungere che se si vuole eliminare la  $\wp' u$ , cioè avere una relazione fra le sole  $f(u)$  e  $\wp u$ , non c'è che da isolare, nella (57), il termine in  $\wp' u$  ed elevare tutto a quadrato, ottenendo così una relazione della forma

$$(61) \quad G[f(u), \wp u] = 0,$$

dove  $G$  denota un *polinomio* in due variabili.

Le formule (44) che forniscono le successive derivate di  $\wp u$

quali funzioni razionali di  $\wp$  e  $\wp'$ , nonchè la (55) che fornisce  $\wp(2u)$ , non sono che casi particolari del fondamentale teorema ora stabilito.

Così pure, un'altra immediata conseguenza del teorema precedente è che:

*Fra due qualsiasi funzioni ellittiche coi medesimi periodi, o periodi equivalenti, sussiste sempre un'equazione algebrica a coefficienti costanti.*

Infatti, basta esprimere le due funzioni mediante la corrispondente  $\wp u$  e poi eliminare questa fra le due equazioni.

Ne segue come corollario che:

*Ogni funzione ellittica  $f(u)$  soddisfa ad un'equazione differenziale algebrica del prim'ordine.*

Infatti essendo  $f'(u)$  un'altra funzione ellittica dello stesso corpo di  $f(u)$ , fra  $f(u)$  ed  $f'(u)$  sussiste una relazione algebrica a coefficienti costanti.

Inoltre si ha che:

*Ogni funzione ellittica  $f(u)$  possiede un teorema d'addizione algebrico.*

Infatti, detti  $u_1$  ed  $u_2$  due qualsiasi valori di  $u$ , fra le 6 quantità

$$\begin{array}{ll} f(u_1), & \wp u_1, \\ f(u_2), & \wp u_2, \\ f(u_1 + u_2), & \wp(u_1 + u_2), \end{array}$$

sussistono tre equazioni algebriche della forma

$$\begin{array}{l} G[f(u_1), \wp u_1] = 0, \\ G[f(u_2), \wp u_2] = 0, \\ G[f(u_1 + u_2), \wp(u_1 + u_2)] = 0 \end{array}$$

e in più il teorema d'addizione della  $\wp u$  che fa quattro. Potranno dunque eliminarsi  $\wp u_1$ ,  $\wp u_2$  e  $\wp(u_1 + u_2)$  ottenendo così una relazione algebrica, a coefficienti costanti, fra le sole  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$  ed  $f(u_1 + u_2)$ .

Notiamo infine che, come è stato dimostrato dal WEIERSTRASS, l'esistenza di un teorema d'addizione algebrico *caratterizza* le trascendenti elementari e le funzioni ellittiche. Si dimostra cioè che *se una funzione  $f(u)$ , uniforme in tutto il piano complesso è tale che fra  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$  ed  $f(u_1 + u_2)$  interviene una*

*relazione algebrica a coefficienti costanti, la funzione  $f(u)$  o è razionale, o è una trascendente elementare, o è una funzione ellittica.* Per la dimostrazione vedi per esempio BIANCHI [2], p. 324.

Riassumendo possiamo concludere che:

1). *Le funzioni ellittiche di un corpo  $K$ , cioè le funzioni meromorfe con due certi periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$  il cui rapporto non sia reale, s'identificano con la classe delle funzioni razionali di  $\wp(u|\omega, \omega')$  e  $\wp'(u|\omega, \omega')$  e godono delle seguenti ulteriori proprietà principali:*

2). *Ogni funzione ellittica priva di poli è una costante.*

3). *Ogni funzione ellittica non costante ha un determinato « ordine »  $r \geq 2$ , cioè assume, in ogni campo fondamentale, qualsiasi valore arbitrariamente prefissato  $r$  volte e non più di  $r$  volte.*

4). *Tra due qualsiasi funzioni ellittiche di un medesimo corpo intercede sempre una relazione algebrica a coefficienti costanti.*

5). *Ogni funzione ellittica soddisfa ad un'equazione differenziale algebrica del prim'ordine.*

6). *Ogni funzione ellittica possiede un teorema d'addizione algebrico.*

## § 8. - La funzione $\zeta u$ .

Il teorema stabilito nel paragrafo precedente mostra come, a stretto rigore, lo studio delle funzioni ellittiche potrebbe essere limitato a quello della sola funzione  $\wp u$ , così come per esempio lo studio delle trascendenti elementari potrebbe, in fondo, essere limitato a quello della sola funzione esponenziale  $e^z$ . Tuttavia nella teoria di cui ci occupiamo, analogamente a quel che succede nel campo elementare (in cui, accanto ad  $e^z$ , si considerano per esempio anche le funzioni  $\sin z$ ,  $\cos z$ , ecc.), è utile considerare anche alcune altre funzioni ellittiche oltre alla  $\wp u$ , e anche alcune funzioni che, pur non essendo ellittiche, cioè doppiamente periodiche, sono intimamente collegate a quelle.

Fra queste ultime funzioni ha particolare importanza una funzione cui abbiamo già avuto occasione di accennare precedentemente,

e cioè la funzione  $\zeta u$  di WEIERSTRASS, integrale di  $-\wp u du$ , che, pur non essendo doppiamente periodica, avendo per derivata una funzione ch'è invece tale, non potrà che aumentare di costanti quando  $u$  aumenta di multipli dei periodi.

Propriamente dico che, posto

$$(62) \quad \boxed{\zeta\omega = \eta, \quad \zeta\omega' = \eta'}$$

sussiste la formula

$$(63) \quad \boxed{\zeta(u + 2m\omega + 2n\omega') = \zeta u + 2m\eta + 2n\eta'}$$

essendo, al solito,  $m$  ed  $n$  due numeri interi qualsiasi.

Infatti è anzitutto chiaro che, essendo

$$\frac{d}{du} [\zeta(u + 2\omega) - \zeta u] = \wp u - \wp(u + 2\omega) = 0$$

$$\frac{d}{du} [\zeta(u + 2\omega') - \zeta u] = \wp u - \wp(u + 2\omega') = 0,$$

la funzione  $\zeta u$  non potrà che aumentare di una o l'altra di certe due costanti, che nulla impedisce chiamare rispettivamente  $2\eta$  e  $2\eta'$ , quando l'argomento  $u$  aumenta di  $2\omega$  o di  $2\omega'$ ; donde la (63). Si tratta però di far ulteriormente vedere che queste costanti sono proprio quelle definite dalle (62). All'uopo basta osservare che la funzione  $\zeta u$ , come immediatamente segue dalla sua definizione mediante la serie (17) (o dal fatto che la sua derivata è la funzione *pari*  $-\wp u$ ), è una funzione *dispari*, ossia tale che  $\zeta(-u) = -\zeta u$ . Invero, in forza di ciò, si ha senz'altro che

$$\zeta\omega = \zeta(-\omega + 2\omega) = \zeta(-\omega) + 2\eta = -\zeta(\omega) + 2\eta$$

cioè che

$$2\zeta\omega = 2\eta;$$

analogamente per  $\zeta\omega'$ .

Notiamo ancora che, in virtù della (63), accanto alle (62) può porsi la formula analoga:

$$\zeta(\omega + \omega') = \eta + \eta',$$

chè, tenuto anche qui conto della disparità di  $\zeta u$ , si ha

$$\zeta(\omega + \omega') = -\zeta(\omega + \omega' - 2\omega - 2\omega') = -\zeta(\omega + \omega') + 2\eta + 2\eta'.$$

Pertanto se, analogamente a quel che si è fatto con l'introduzione di  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$ , poniamo

$$(64) \quad \eta_1 = \eta, \quad \eta_2 = \eta + \eta', \quad \eta_3 = \eta',$$

potremo compendiosamente scrivere che

$$(62') \quad \boxed{\zeta\omega_\alpha = \eta_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3)}$$

Sussiste inoltre il fatto interessantissimo che queste due costanti  $\eta$  ed  $\eta'$ , che sono funzioni trascendenti non semplici di  $\omega$  ed  $\omega'$ , sono legate fra loro e con  $\omega$  ed  $\omega'$  dalla semplicissima *relazione di Legendre*:

$$(65) \quad \boxed{\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{1}{2}\pi i}$$

All'uopo basta integrare la funzione  $\zeta u$ , che ha solo dei poli di prim'ordine con residuo 1 nei nodi della rete  $(2\omega, 2\omega')$ , lungo il perimetro  $\gamma$  del parallelogramma  $ABCD$  del § 3, cioè di un parallelogramma dei periodi sul cui contorno non cade nessuno di detti nodi; avremo così, supposto che il contorno venga percorso in verso *positivo*, cioè, tenuto conto della convenzione (12), nel verso  $ABCD$ , che

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \oint_{\gamma} \zeta u du = \int_A^B \zeta u du - \int_B^C \zeta u du - \int_C^D \zeta u du + \int_D^A \zeta u du = \\ &= \int_A^B [\zeta u - \zeta(u + 2\omega')] du - \int_A^D [\zeta u - \zeta(u + 2\omega)] du = \\ &= \int_A^B (-2\eta') du - \int_A^D (-2\eta) du \end{aligned}$$

cioè che

$$2\pi i = -2\eta' \cdot 2\omega + 2\eta \cdot 2\omega',$$

che non è altro se non la (65).

L'importanza della funzione  $\zeta u$  risiede specialmente nel fatto che, col suo ausilio, si può giungere ad una semplice ed elegante rappresentazione di una generica funzione ellittica  $f(u)$  che ricorda molto da vicino la ben nota decomposizione di una funzione razio-

nale in fratti semplici, e può, come quella, venire utilizzata pel calcolo dell'integrale di una data funzione ellittica.

Propriamente, cominciando dal caso in cui la funzione ha solo poli semplici, dico che:

Se la funzione ellittica  $f(u)$  ha soli poli semplici ed  $a_1, a_2, \dots, a_r$  è un sistema completo <sup>(1)</sup> di questi, si ha

$$(66) \quad f(u) = A_0 + A_1 \zeta(u - a_1) + A_2 \zeta(u - a_2) + \dots + A_r \zeta(u - a_r),$$

dove  $A_1, A_2, \dots, A_r$  sono i rispettivi residui dei poli  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , ed  $A_0$  una costante da determinarsi opportunamente.

Infatti basta osservare che, essendo necessariamente

$$A_1 + A_2 + \dots + A_r = 0$$

la funzione

$$A_1 \zeta(u - a_1) + A_2 \zeta(u - a_2) + \dots + A_r \zeta(u - a_r)$$

è una funzione ellittica coi periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$  che, avendo in comune con la  $f(u)$  i poli e le rispettive caratteristiche, non può differire da quella se non per una costante  $A_0$ .

Se invece i poli della funzione  $f$  non sono tutti semplici, per esempio se  $a_h$  è un polo d'ordine  $\nu_h$  con la caratteristica

$$\frac{A_h}{u - a_h} + \frac{A_h'}{(u - a_h)^2} + \dots + \frac{A_h^{(\nu_h - 1)}}{(u - a_h)^{\nu_h}},$$

allora si deve rimpiazzare  $A_h \zeta(u - a_h)$  con la funzione

$$A_h \zeta(u - a_h) - A_h' \zeta'(u - a_h) + \frac{A_h''}{2!} \zeta''(u - a_h) - \dots + (-1)^{\nu_h - 1} \frac{A_h^{(\nu_h - 1)}}{(\nu_h - 1)!} \zeta^{(\nu_h - 1)}(u - a_h)$$

che, come si vede facilmente, ha in  $a_h$  e nei punti a questo equi-

<sup>(1)</sup> Si dice che un sistema di poli, di zeri, o più generalmente, di punti di livello  $c$  di una funzione ellittica  $f(u)$  è completo, se da esso, con aggiunta di convenienti multipli dei periodi, possono ottenersi tutti gli altri punti  $f=c$ . Evidentemente i poli, zeri, o punti  $f=c$  che cadono in un medesimo campo fondamentale formano sempre un sistema completo.

valenti un polo d'ordine  $\nu_h$  con la caratteristica precedente; avremo dunque, in luogo della (66), la formula:

$$(67) \quad f(u) = A_0 + \sum_h \left[ A_h \zeta(u - a_h) - A_h' \zeta'(u - a_h) + \dots + (-1)^{\nu_h - 1} \frac{A_h^{(\nu_h - 1)}}{(\nu_h - 1)!} \zeta^{(\nu_h - 1)}(u - a_h) \right]$$

che, sostituendo alle derivate di  $\zeta(u)$  la  $\wp u$  e le sue derivate, prende l'aspetto:

$$(67') \quad f(u) = A_0 + \sum_h \left[ A_h \zeta(u - a_h) + A_h' \wp(u - a_h) - \frac{A_h''}{2!} \wp'(u - a_h) + \dots + (-1)^{\nu_h} \frac{A_h^{(\nu_h - 1)}}{(\nu_h - 1)!} \wp^{(\nu_h - 2)}(u - a_h) \right]$$

Consideriamo a titolo d'esempio la funzione

$$f(u) = \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v}$$

in cui  $v$  è da riguardarsi come un parametro costante (per momento tale che non sia  $\wp' v = 0$ ), la quale ha manifestamente come poli semplici i punti  $u = v, u = -v$  e  $u = 0$  e tutti quelli a questi equivalenti, coi rispettivi residui 1, 1, -2. Per la (6) avremo dunque e

$$\frac{\wp' u}{\wp u - \wp v} = A_0 + \zeta(u - v) + \zeta(u + v) - 2\zeta u,$$

donde, cambiando  $v$  in  $-v$ , segue:

$$\frac{\wp' u}{\wp u - \wp v} = -A_0 + \zeta(u + v) + \zeta(u - v) - 2\zeta u,$$

ch'è la formula di prima salvo il cambiamento di  $A_0$  in  $-A_0$ . Deve dunque essere necessariamente  $A_0 = 0$ , epperò si ha l'identità

$$\frac{\wp' u}{\wp u - \wp v} = \zeta(u - v) + \zeta(u + v) - 2\zeta u$$

che, sommata con l'altra analoga che si origina scambiando fra loro  $u$  e  $v$ , fornisce

$$\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} = 2\zeta(u + v) - 2\zeta u - 2\zeta v;$$

si ha cioè la formula assai importante:

$$(68) \quad \zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2} \frac{\wp'u - \wp'v}{\wp u - \wp v},$$

che, per ragioni di continuità, non cessa di esser valida ancorchè sia  $\wp'v=0$  e può riguardarsi come un teorema d'addizione, non certo algebrico bensì *algebrico-differenziale* (perchè  $-\wp u$  è la derivata di  $\zeta u$ ), per la funzione  $\zeta u$ .

Notiamo inoltre che dalla (68) derivando rispetto ad  $u$  od a  $v$  si ottengono due nuove forme del teorema d'addizione della  $\wp u$ , la cui deduzione diretta dalla (50) non è del tutto immediata; propriamente si ha che:

$$(69) \quad \begin{aligned} \wp(u+v) &= \wp u - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\wp'u - \wp'v}{\wp u - \wp v} \right) = \\ &= \wp v - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\wp'u - \wp'v}{\wp u - \wp v} \right). \end{aligned}$$

§ 9. - La funzione  $\sigma u$ .

Un'altra notevolissima funzione che indicheremo, con WEIERSTRASS, col simbolo  $\sigma u$ , si ottiene operando sulla serie che definisce la funzione  $\zeta u$  in modo analogo a quello con cui, nell'ultimo paragrafo di F. A., si è ottenuto lo sviluppo di  $\sin \pi z$  in prodotto infinito a partire dallo sviluppo di  $\pi \operatorname{ctg} \pi z$  in serie di fratti semplici. Proviamo cioè a porre  $\zeta u$  uguale alla *derivata logaritmica* di una nuova funzione  $\sigma u$ :

$$(70) \quad \frac{\sigma'u}{\sigma u} = \zeta u = \frac{1}{u} + \sum' \left( \frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right)$$

e ad integrare ambo i membri dell'uguaglianza ottenuta; avremo così

$$\log \sigma u = \log u + \sum' \left[ \log(u-w) + \frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2} \right] + \text{cost.},$$

cioè

$$\log \sigma u = \log u + \sum' \log \left( 1 - \frac{u}{w} \right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{w} \right)^2} + \text{cost.},$$

equazione cui si può soddisfare ponendo

$$(71) \quad \sigma u = u \Pi' \left( 1 - \frac{u}{w} \right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{w} \right)^2}$$

dove, analogamente alla convenzione introdotta nei sommatore, l'apice apposto al segno di prodotto sta ad indicare, che, nel far percorrere a  $w$  l'insieme di tutti i possibili numeri  $2m\omega + 2n\omega'$ , con  $m$  ed  $n$  interi, bisogna escludere la combinazione  $m=n=0$ .

L'interesse di queste considerazioni risiede specialmente nel fatto che, essendo il prodotto (71), stante la sua origine, sempre convergente, anzi assolutamente convergente, *la funzione  $\sigma u$  è una funzione intera*, e pertanto la (70) fornisce una rappresentazione della funzione meromorfa  $\zeta u$  quale quoziente delle due funzioni intere  $\sigma u$  e  $\sigma'u$ , conformemente a quanto è stato in generale riconosciuto possibile in F. A. (Cap. IV, § 6). Inoltre non c'è che da derivare rispetto ad  $u$  per ottenere un'analogia rappresentazione anche per la  $\wp u$ , e propriamente sotto la forma:

$$(72) \quad \wp u = - \frac{d^2}{du^2} \log \sigma u = - \frac{d}{du} \frac{\sigma'u}{\sigma u} = \frac{\sigma''u - \sigma u \sigma'^2}{\sigma^2 u}.$$

Quanto allo sviluppo di  $\sigma u$  in serie di potenze di  $u$ , sviluppo che, come possiamo senz'altro asserire *a priori*, dovrà convergere in tutto il piano, possiamo facilmente ottenerlo a partire dallo sviluppo (49) di  $\zeta u$ , per mezzo delle ovvie formule

$$\frac{d}{du} \log \frac{\sigma u}{u} = \zeta u - \frac{1}{u}, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma u}{u} = 1,$$

donde segue

$$(73) \quad \sigma u = u e^{\int (\zeta u - \frac{1}{u}) du}.$$

Propriamente avremo così

$$\sigma u = u \left( 1 - P + \frac{P^2}{2!} - \frac{P^3}{3!} + \dots \right)$$

avendo posto

$$P = - \int_0^u (\zeta u - \frac{1}{u}) du = \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} u^4 + \frac{g_3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^6 + \frac{g_2^2}{2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} u^8 + \dots;$$

viene dunque uno sviluppo del tipo di quelli delle formule (49), cioè uno sviluppo procedente per le potenze dispari di  $u$  con coefficienti funzioni razionali anzi razionali-intere di  $g_2$  e  $g_3$ , che, calcolando esplicitamente i primi coefficienti, assume l'aspetto:

$$(74) \quad \sigma u = u - \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} u^3 - \frac{g_3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} u^7 - \frac{g_2 g_3}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} u^9 - \dots$$

La serie ottenuta mostra subito che la *funzione  $\sigma u$  è dispari*, cioè che  $\sigma(-u) = -\sigma u$ , mentre il prodotto infinito (71) ci dice che *essa si annulla (semplicemente) allora e solo allora che  $u = w$* ; nè l'una però nè l'altro c'illuminano direttamente sul comportamento di  $\sigma u$  quando  $u$  aumenta di un multiplo dei periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$ . Dovremo dunque cercar di chiarire questa questione per altra via e precisamente partendo dalla (63) che, introducendo la comoda abbreviazione

$$(75) \quad 2m\eta + 2n\eta' = \tilde{\eta}$$

(analoga alla  $2m\omega + 2n\omega' = w$ ), potremo scrivere più concisamente

$$\zeta(u+w) = \zeta u + \tilde{\eta},$$

e donde, integrando, segue

$$\log \sigma(u+w) = \log \sigma u + \tilde{\eta}u + \text{cost.}$$

cioè

$$(76) \quad \sigma(u+w) = ce^{\tilde{\eta}u} \sigma u,$$

dove  $c$  è una costante da determinarsi.

Per determinare la costante  $c$  occorre distinguere due casi secondochè  $m$  ed  $n$  sono due numeri *entrambi pari* oppur no, cioè secondochè  $w/2$  è anch'esso un periodo di  $\wp u$  oppur no. Nel secondo di questi due casi, essendo allora  $\sigma(w/2) \neq 0$ , basta porre nella (76)  $u = -w/2$  per avere senz'altro

$$\sigma(w/2) = ce^{-\tilde{\eta} \frac{w}{2}} \sigma(-w/2) = -ce^{-\tilde{\eta} \frac{w}{2}} \sigma(w/2),$$

cioè

$$c = -e^{\tilde{\eta} \frac{w}{2}}.$$

Nel primo caso invece, supposto che la più alta potenza di 2 divisore comune di  $m$  ed  $n$  sia  $2^h$  ( $h \geq 1$ ), potremo ottenere la formula di trasformazione di  $\sigma$  applicando  $2^h$  volte di seguito la formula precedente in cui sia stato posto  $w/2^h$  al posto di  $w$ ; abbiamo così, considerato che  $2^h$  è un numero pari, che continua a valere la (76) ma con

$$c = +e^{\tilde{\eta} \frac{w}{2}}.$$

In definitiva si ha dunque la formula:

$$(77) \quad \sigma(u+w) = \varepsilon e^{\tilde{\eta}(u+\frac{w}{2})} \sigma u,$$

dove  $\varepsilon$  vale  $+1$  o  $-1$  secondochè  $w/2$  è anch'esso un periodo di  $\wp u$  oppur no, cioè secondochè  $m$  ed  $n$  sono entrambi pari oppur no; il che implica che può porsi

$$(77') \quad \varepsilon = (-1)^{m+n+mn}.$$

L'importanza della funzione  $\sigma u$  dipende soprattutto dal fatto che, per mezzo di essa, non solo  $\zeta u$  e  $\wp u$  possono, come già sappiamo, venire espressi quali quozienti di due funzioni intere, ma anche *tutte le altre funzioni ellittiche*. Propriamente dico che *se  $f(u)$  è una generica funzione ellittica di ordine  $r$  e  $a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_r$  sono due sistemi completi rispettivamente di suoi poli e zeri, non necessariamente tutti distinti ma scelti in modo che sia*

$$(78) \quad (a_1 + a_2 + \dots + a_r) - (b_1 + b_2 + \dots + b_r) = 0,$$

come è evidentemente sempre possibile (\*), sussiste la formula

$$(79) \quad f(u) = c \frac{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\dots\sigma(u-b_r)}{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\dots\sigma(u-a_r)},$$

dove  $c$  è un'opportuna costante.

Infatti, essendo di per se evidente che la frazione a secondo membro ha come poli e zeri rispettivamente i punti  $a_1, a_2, \dots, a_r$ ;

(\*) E inverso se il secondo membro della (78) invece di esser zero fosse uguale a  $2m\omega + 2n\omega'$ , basterebbe sostituire per esempio  $a_r$  con  $a_r + 2m\omega + 2n\omega'$  per rendere la condizione soddisfatta.

$b_1, b_2, \dots, b_r$  ed equivalenti, tutto si riduce a dimostrare che questa frazione, che diremo per un momento  $F(u)$ , è una funzione ellittica del corpo  $K$ , cioè ammette i periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$ . Ora questo è una conseguenza quasi immediata della (77). Invero, in virtù di questa formula, si ha

$$F(u+w) = F(u) \prod_{h=1}^r \frac{e^{\eta(u-b_h+w/2)}}{e^{\eta(u-a_h+w/2)}} = F(u) \prod_{h=1}^r e^{(a_h-b_h)\eta} \\ = F(u) e^{\eta \sum (a_h-b_h)}$$

il che, tenuto conto della (78), mostra che  $F(u+w) = F(u)$ .

Per mostrare un'esempio d'applicazione della (79) e nel tempo stesso ottenere una formula anche di per sè molto interessante, consideriamo la funzione

$$f(u) = \wp u - \wp v,$$

intendendo che  $v$  abbia un valore fisso qualsiasi (diverso da un periodo). In questo caso è  $r=2$  e si può assumere

$$a_1 = a_2 = 0; \quad b_1 = v, \quad b_2 = -v,$$

avendo così

$$\wp u - \wp v = c \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2 u}.$$

Finalmente, per determinare la costante  $c$ , moltiplichiamo primo e secondo membro per  $u^2$  e facciamo poi tendere  $u$  a zero tenendo conto che è manifestamente

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^2 \wp u = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma u}{u} = 1;$$

avremo così

$$1 = c\sigma(-v)\sigma v = -c\sigma^2 v,$$

epperò è in definitiva:

$$(80) \quad \wp u - \wp v = - \frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v}.$$

Dalla (80), che può essere riguardata come un *teorema d'ad-*

*dizione* per la funzione  $\sigma u$ , facendo tendere  $v$  ad  $u$ , segue facilmente l'altra formula interessante:

$$(81) \quad \boxed{\wp' u = - \frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u}},$$

che, fra l'altro, può essere riguardata come una formula per calcolo di  $\sigma(2u)$ .

§ 10. - *Sull'andamento delle funzioni di Weierstrass ad invarianti reali. Loro casi particolari e di degenerazione.*

Nelle applicazioni le funzioni ellittiche sorgono quasi sempre da quei problemi d'integrazione cui si è parlato nel § 1, e cioè dalla considerazione di integrali del tipo (2), nel caso in cui la funzione  $R$  e il polinomio di terzo o quarto grado sotto radice sono a *coefficienti reali*. Ne segue che le funzioni  $\wp u$  (e connesse  $\zeta u$  e  $\sigma u$ ) di effettivo interesse applicativo, sono solo quelle *ad invarianti  $g_2$  e  $g_3$  reali*, di cui merita pertanto soffermarsi un momento a discutere l'andamento al variare di  $u$  sul piano complesso.

All'uopo osserviamo anzitutto che quando  $g_2$  e  $g_3$  sono reali, i coefficienti degli sviluppi (48), (49) e (74) di  $\wp u$ ,  $\wp' u$ ,  $\zeta u$  e  $\sigma u$  in serie di potenze di  $u$  sono tutti reali, epperò *tanto  $\wp u$ , quanto  $\wp' u$ ,  $\zeta u$  e  $\sigma u$  assumeranno valori reali per argomenti reali e valori immaginari coniugati per argomenti immaginari coniugati*. Posto cioè, per esempio,

$$\wp(u_1 + iu_2) = P_1 + iP_2$$

sarà di conseguenza

$$\wp(u_1 - iu_2) = P_1 - iP_2.$$

Inoltre  $\wp u$ , nel cui sviluppo figurano solo potenze *pari* di  $u$ , sarà *reale anche sull'asse immaginario, mentre le altre tre funzioni saranno ivi immaginarie pure*.

Quanto ai *periodi*, si vede immediatamente che *se  $\omega = r + is$  è un semiperiodo, anche il suo coniugato  $\bar{\omega} = r - is$  gode della stessa proprietà*.

Infatti, la funzione  $\wp(u + 2\bar{\omega}) - \wp u$ , dovendo necessariamente assumere, *per  $u$  reale*, valori coniugati a quelli, sempre nulli,

di  $\wp(u + 2\omega) - \wp u$ , si annullerà su tutto l'asse reale epperò dovrà essere *sempre* nulla, dunque anche  $2\bar{\omega}$  è un periodo di  $\wp u$ .

Per poter procedere oltre nella discussione di queste funzioni, e cioè essenzialmente della  $\wp u$  perchè le altre, come sappiamo, si riconducono agevolmente a questa, occorre ora distinguere due casi, secondochè il discriminante

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2,$$

certo non nullo (§ 5), è *positivo* o *negativo*.

Nel primo di questi due casi, cioè *quando è  $\Delta > 0$* , si dimostra, e lo vedremo più innanzi (Cap. II, § 4), che è *sempre possibile determinare una coppia di periodi equivalenti* ( $2\omega, 2\omega'$ ) di cui il primo sia reale ed il secondo immaginario puro.

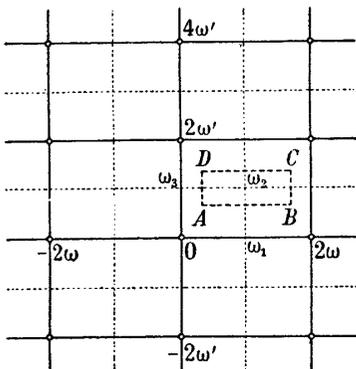


Fig. 10.

Ne segue che la rete dei periodi è in questo caso una *rete di rettangoli* (fig. 10) sui cui lati la funzione  $\wp u$  è, per di più, sempre reale. Inoltre essa è reale anche sulle mediane delle strisce della rete, cioè sulle rette punteggiate della figura, considerato che due punti simmetrici rispetto a una di queste rette sono sempre equivalenti a due punti simmetrici rispetto o all'asse reale o a quello immaginario, e pertanto i valori di  $\wp u$  ad essi corrispondenti devono essere necessariamente coniugati.

L'ultima considerazione, unita all'altra (già fatta nel § 5) che in due punti simmetrici rispetto al centro di un parallelogramma dei periodi  $\wp u$  prende valori uguali, mostra per di più che, nel caso attuale, lo studio della funzione  $\wp u$  può essere limitato ad un quarto di un parallelogramma dei periodi, per esempio al rettangolo  $(0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , chè per quattro punti situati come i punti  $A, B, C$  e  $D$  della fig. 10 si ha

$$\wp(A) = \wp(C) = \overline{\wp(B)} = \overline{\wp(D)},$$

dove, come d'abitudine, la sopralineatura sta ad indicare il *coniugato* del numero sottostante.

È soprattutto interessante notare come percorrendo il contorno di detto rettangolo in verso positivo, a partire dall'origine  $O$ , i

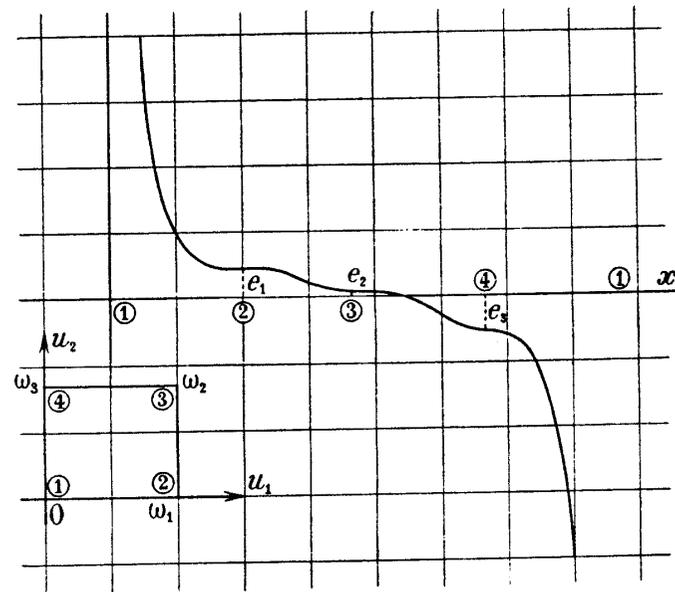


Fig. 11.

valori di  $\wp u$  su di esso, tutti reali, vanno *continuamente decrescendo* da  $+\infty$  a  $-\infty$ .

Infatti, da un lato lo sviluppo in serie di potenze di  $\wp u$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \dots$$

mostra come per  $u \rightarrow 0$  *sull'asse reale*  $\wp u$  tende a  $+\infty$  mentre tende invece a  $-\infty$  per  $u \rightarrow 0$  *sull'asse immaginario*; d'altro lato, non è possibile che su detto contorno  $\wp u$  assuma più di una sola volta qualsiasi valore reale  $c$ , chè altrimenti nel parallelogramma dei periodi  $(0, 2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3)$  vi sarebbero quattro o più punti  $\wp u = c$ , mentre possono essercene due soltanto.

Ne segue, fra l'altro, ricordando che  $\wp \omega_a = e_a$ , che, in corrispondenza ai considerati periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$ , deve necessariamente essere

$$(82) \quad e_1 > e_2 > e_3$$

epperò, essendo altresì  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ , sarà anche:

$$(83) \quad e_1 > 0, \quad e_3 < 0;$$

$e_2$  può invece essere positiva o negativa e precisamente, in virtù della seconda delle (37), avrà il segno opposto a quello di  $g_3$ .

Se ne conclude, tenuto anche conto che è  $\wp' \omega_a = 0$ , che, immaginando sviluppato su di una retta  $x$  il perimetro del rettangolo  $(0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  e riportate come ordinate i corrispondenti valori di  $\wp u$ , verrà fuori un diagramma del genere di quello della fig. 11.

Quanto ai valori di  $\wp u$  nell'interno del rettangolo in parola, considerato che essi possono facilmente dedursi da quelli sul contorno mercè il teorema d'addizione, osserveremo soltanto che essi debbono necessariamente essere *tutti complessi*, perchè in ogni parallelogramma dei periodi la funzione  $\wp u$  raggiunge già *due* volte qualsiasi valore reale  $c$ , o sui lati inclusi o sulle mediane.

Finalmente notiamo che i valori reali di  $\wp' u$  laddove anche  $\wp u$  è reale, cioè sulle rette *orizzontali* della fig. 10, possono rappresentarsi graficamente, in modo elegante ed espressivo, mediante la cubica  $\mathcal{C}_3$  già considerata nel § 6 (fig. 9).

Esempio tipico di funzione  $\wp u$  a invarianti reali e discriminante positivo, è la cosiddetta *funzione lemniscatica* <sup>(1)</sup>, cioè la funzione  $\wp$  nel caso  $g_2 > 0, g_3 = 0$ , che, in virtù della formula di omogeneità (41) in cui sia posto  $t = i$ , gode della proprietà importantissima espressa dalla formula

$$(84) \quad \boxed{\wp(iu; g_2, 0) = -\wp(u; g_2, 0)}$$

La lemniscatica è dunque una funzione ellittica a *moltiplicazione complessa*, cioè una funzione ellittica tale che esiste almeno un numero *complesso*  $m$  (nel caso in esame è  $m = i$ ) godente della proprietà che  $\wp(mu)$  è razionalmente esprimibile mediante  $\wp u$ ;

<sup>(1)</sup> La ragione del nome è che essa si presenta nel problema della rettificazione della *lemniscata* di BERNOULLI, studiato già dal FAGNANO.

ciò che, fra l'altro, implica la possibilità di calcolare algebricamente i valori di  $\wp u$  in tutto il piano complesso noti soltanto quelli sull'asse reale.

Inoltre la (84) mostra che se  $\omega$  è il semiperiodo reale della nostra  $\wp$ , il semiperiodo immaginario è  $\omega' = i\omega$ . Quanto al calcolo effettivo di  $\omega$ , e conseguentemente di  $\omega'$ , esso è un caso particolare del problema generale della determinazione dei periodi di gl' inva-

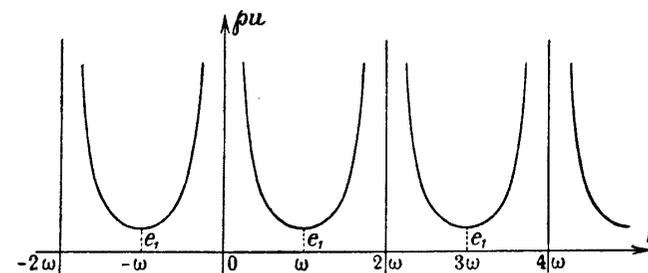


Fig. 12.

rianti di cui dovremo in seguito occuparci. Limitiamoci pertanto, per il momento, a riportare senza dimostrazione <sup>(1)</sup>, la formula cui in questo caso si perviene; essa è

$$(85) \quad \omega = \sqrt{\frac{4}{g_2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{\pi} \sqrt[4]{g_2}} \quad (2).$$

La fig. 12 mostra l'andamento della funzione  $\wp(u; 1, 0)$  per  $u$  reale che del resto, dal punto di vista qualitativo, non differisce da quello di tutte le altre funzioni  $\wp$  ad invarianti reali (salvo che, se è  $\Delta < 0$ , i minimi possono essere negativi).

Passiamo ora a dir qualcosa delle funzioni a invarianti reali ma *discriminante negativo*, in cui, pur continuandosi ad avere un periodo reale ed un periodo immaginario puro, si presenta però

<sup>(1)</sup> Vedi per esempio HALPHEN [7], T. I, p. 64.

<sup>(2)</sup> Il simbolo  $\Gamma$  denota la nota trascendente che suole designarsi con questa lettera (funzione « Gamma »).  $\Gamma(1/4)$  è circa 3,6256.

il fatto nuovo che questi *non costituiscono più una coppia di periodi primitivi*, cioè atti a generare tutti gli altri.

Volendo quindi considerare periodi *primitivi*, com'è necessario se si vuole che le funzioni  $\wp u, \zeta u$ , ecc. possano venir pensate come costruite per mezzo di essi, occorrerà rinunciare alla considerazione

di una rete periodale di rettangoli, assumendo invece come secondo periodo della coppia:  $2\omega'$ , per esempio il periodo di modulo e argomento minimo, e come primo periodo:  $2\omega$ , il suo coniugato, il che conduce ad una rete del tipo di quella rappresentata nella fig. 13. Ne segue inoltre che, conformemen-

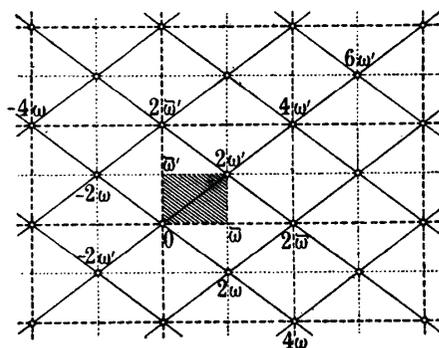


Fig. 13.

te alle (26), nel caso attuale l'unica radice reale dell'equazione (42) dovrà designarsi con  $e_2$  e le due complesse coniugate con  $e_1$  ed  $e_3$ , e propriamente con  $e_3$  quella la cui parte immaginaria è positiva.

Quanto ai periodi reale ed immaginario puro, che potremo indicare rispettivamente con  $2\tilde{\omega}$  e  $2\tilde{\omega}'$ , essi sono manifestamente dati dalle formule

$$(86) \quad \begin{cases} \tilde{\omega} = \omega + \omega' = \omega_2 \\ \tilde{\omega}' = -\omega + \omega' \end{cases}$$

ma, come s'è già detto, essi non sono primitivi, come può vedersi dalla fig. 13 [in cui la rete  $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$  (a trattini) non contiene infiniti nodi della rete  $(2\omega, 2\omega')$  (a tratto continuo)] o considerando che il determinante delle (86) vale 2, e non 1 come nelle sostituzioni che fanno passare da una coppia all'altra di periodi equivalenti.

Comunque l'esistenza di un periodo reale e di uno immaginario puro, siano essi primitivi o no, rende applicabili le considerazioni svolte più sopra a proposito della realtà o meno della funzione  $\wp u$ , consentendo così di giungere rapidamente alla conclusione che, nel caso in esame, la  $\wp u$  è reale sulle rette segnate nella fig. 13 a trattini e a puntini, e non altrove.

Così pure continua a valere il fatto che lo studio della funzione  $\wp u$  può essere limitato a quello dei suoi valori nel rettangolo  $(0, \omega, \tilde{\omega} + \tilde{\omega}' = 2\omega', \tilde{\omega}')$ , solo che l'area di questo rettangolo (tratteggiato nella fig. 13), invece di essere uguale a  $1/4$  dell'area

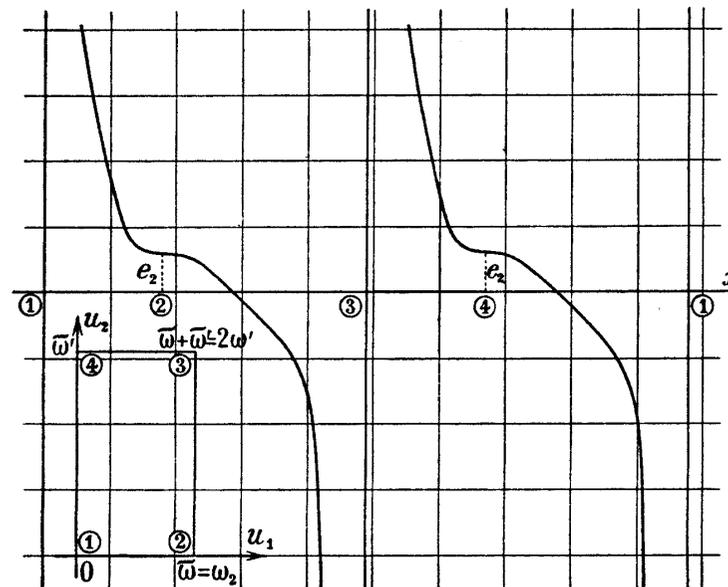


Fig. 14.

di un parallelogramma dei periodi, è stavolta uguale alla metà di quest'ultima.

Quanto all'andamento dei valori, tutti reali, di  $\wp u$  sul contorno dell'anzidetto rettangolo, ne dà un'idea il seguente diagramma (fig. 14), costruito con criteri analoghi a quello della fig. 11. Come si vede, stavolta la  $\wp u$  compie una *doppia* oscillazione fra  $+\infty$  e  $-\infty$  invece che una semplice, assumendo due volte gli stessi valori nello stesso ordine di successione.

La fig. 14 si riferisce propriamente al cosiddetto caso *equianarmonico* ( $g_2=0, g_3=1$ ), cioè alla funzione

$$\wp(u; 0, 1),$$

cui si riferisce pure la fig. 8, funzione che è una tipica rappresentante delle funzioni ellittiche a invarianti reali e discriminante negativo. Essa è, fra l'altro, al pari della lemniscatica, una funzione a moltiplicazione complessa; precisamente, come immediatamente segue dalla formula d'omogeneità (41), si ha

$$(87) \quad \wp(\varepsilon_3 u; 0, 1) = \varepsilon_3 \wp(u; 0, 1),$$

essendo  $\varepsilon_3$  una delle due radici terze complesse dell'unità, cioè

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

In questo caso, interessante anche perchè ad esso si riferiscono le sole estese tabelle numeriche delle quattro funzioni  $\wp, \wp', \zeta$  e  $\sigma$  a nostra conoscenza (1), si ha

$$e_1 = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{4}}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{4}}, \quad e_3 = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$\bar{\omega} = 1,52995, \quad \omega = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \bar{\omega}, \quad \omega' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \bar{\omega}.$$

A proposito di tabelle numeriche delle funzioni di WEIERSTRASS ad invarianti reali, osserviamo che, in virtù della formula d'omogeneità della  $\wp u$  e delle analoghe, subito scritte, per  $\wp' u, \zeta u$  e  $\sigma u$ :

$$(88) \quad \begin{cases} \wp'(u; g_2, g_3) = t^3 \wp'(tu; t^{-4}g_2, t^{-6}g_3) \\ \wp(u; g_2, g_3) = t^2 \wp(tu; t^{-4}g_2, t^{-6}g_3) \\ \zeta(u; g_2, g_3) = t \zeta(tu; t^{-4}g_2, t^{-6}g_3) \\ \sigma(u; g_2, g_3) = t^{-1} \sigma(tu; t^{-4}g_2, t^{-6}g_3) \quad (2), \end{cases}$$

(1) JAHNKE-EMDE [20], pp. 167-170.

(2) Se, invece degli invarianti, si pongono in evidenza i periodi, le formule d'omogeneità di  $\wp', \zeta$  e  $\sigma$  (analoghe alla (20) per  $\wp u$ ) assumono l'aspetto

$$(88') \quad \begin{cases} \wp'(tu | t\omega, t\omega') = t^{-3} \wp'(u | \omega, \omega') \\ \zeta(tu | t\omega, t\omega') = t^{-1} \zeta(u | \omega, \omega') \\ \sigma(tu | t\omega, t\omega') = t \sigma(u | \omega, \omega'). \end{cases}$$

Queste tre funzioni sono dunque funzioni omogenee rispettivamente di grado  $-3, -1$  e  $+1$  dei loro tre argomenti.

supposto  $g_2 \neq 0$ , ponendo  $t = |g_2|^{1/2}$ , si ha

$$(89) \quad \wp(u; g_2, g_3) = \sqrt{|g_2|} \wp(|g_2|^{1/2} u; \pm 1, |g_2|^{-1/2} g_3)$$

e formule analoghe; mentre, ponendo invece  $t = i$  e cambiando  $u$  in  $iu$ , si ha

$$(90) \quad \wp(iu; g_2, g_3) = -\wp(u; g_2, -g_3)$$

ecc. Ne segue che per dominare dette funzioni sull'intero piano complesso basterebbe possedere, oltre le già accennate tabelle relative al caso equianarmonico ( $g_2 = 0$ ), due tabelle a doppia entrata fornenti i valori di  $\wp, \wp'$  ecc., in corrispondenza ad argomenti  $u$  reali (e positivi),  $g_3$  reale qualsiasi e  $g_2 = +1$  (prima tabella) oppure  $g_2 = -1$  (seconda tabella).

Invero, le (89)-(90) e formule analoghe permetterebbero allora di calcolare immediatamente, qualunque siano  $g_2$  e  $g_3$  (purchè reali), i valori delle funzioni sull'asse reale e su quello immaginario; donde, con l'ausilio dei teoremi d'addizione, si passa subito ai valori in qualsiasi punto del piano complesso. Tali tabelle non sono però indispensabili perchè, come presto vedremo, la funzione  $\wp u$  e le altre possono essere facilmente ricondotte alle funzioni di JACOBI che sono state già intabulate.

Accenniamo infine rapidamente ai vari possibili casi di degenerazione della funzione  $\wp u$  e connesse, quando il discriminante  $\Delta$  si annulla, anche perchè le formule così ottenute illuminano da un nuovo punto di vista alcune particolarità delle funzioni non degenerate.

All'uopo osserviamo che se, ferma restando l'ipotesi che  $g_2$  e  $g_3$  siano reali, il discriminante  $\Delta$  dell'equazione cubica (42) va a zero, le tre radici  $e_1, e_2$  ed  $e_3$  di questa, pur essendo reali, non sono più distinte, epperò, supposto ancora valida la (82) o, meglio, supposto:

$$e_1 \geq e_2 \geq e_3$$

e tenuto conto della prima delle (36), sono possibili solo tre casi, e cioè:

$$\begin{array}{ll} A) & e_1 = e_2 > 0, \quad e_3 < 0; \\ B) & e_1 > 0, \quad e_2 = e_3 < 0; \\ C) & e_1 = e_2 = e_3 = 0. \end{array}$$

Corrispondentemente la funzione  $\wp u$  e connesse degenerano in

funzioni iperboliche, funzioni circolari o addirittura in funzioni razionali. Propriamente, come non è difficile desumere dall'integrale (31), nei tre casi sopradistinti si ha rispettivamente:

*Caso A).* Posto  $e_1 = e_2 = a$ , donde segue  $e_3 = -2a$ , si ha:

$$g_2 = 12a^2, \quad g_3 = -8a^3; \quad \omega = \infty, \quad \omega' = \frac{i\pi}{\sqrt{12a}};$$

$$\wp u = -2a + 3a \operatorname{Ctg}^2(\sqrt{3a}u), \quad \zeta u = -au + \sqrt{3a} \operatorname{Ctg}(\sqrt{3a}u)$$

$$\sigma u = \frac{e^{-au^{3/2}}}{\sqrt{3a}} \operatorname{Sin}(\sqrt{3a}u).$$

*Caso B).* Posto  $e_2 = e_3 = -a$ , donde segue  $e_1 = 2a$ , si ha:

$$g_2 = 12a^2, \quad g_3 = 8a^3; \quad \omega = \frac{\pi}{\sqrt{12a}}, \quad \omega' = \infty;$$

$$\wp u = -a + \frac{3a}{\sin^2(\sqrt{3a}u)}, \quad \zeta u = \sqrt{\frac{a}{3}}u + \sqrt{3a} \cot(\sqrt{3a}u),$$

$$\sigma u = \frac{e^{au^{3/2}}}{\sqrt{3a}} \sin(\sqrt{3a}u).$$

*Caso C).* Si ha:

$$g_2 = g_3 = 0, \quad \omega = \omega' = \infty;$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2}, \quad \zeta u = \frac{1}{u}, \quad \sigma u = u.$$

## CAPITOLO II.

## Integrali ellittici.

## § 1. - Riduzione degli integrali ellittici a tre tipi fondamentali.

Le considerazioni svolte nel Capitolo precedente ci offrono già la possibilità di una prima, completa soluzione (un'altra ci sarà offerta dalle funzioni di JACOBI) del problema fondamentale da cui è scaturita la teoria delle funzioni ellittiche, e cioè del problema del calcolo dell'integrale (2) del Capitolo precedente, val' a dire di un integrale indefinito del tipo

$$(1) \quad \int R(x, y) dx,$$

dove  $R$  denota una funzione razionale dei due argomenti  $x$  ed  $y$ , legati fra loro dall'equazione biquadratica (eventualmente cubica):

$$(2) \quad y^2 = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

il cui secondo membro sia un polinomio a radici tutte distinte <sup>(1)</sup>.

In tale ordine d'idee ci proponiamo anzitutto di mostrare, con LEGENDRE, come ogni *integrale ellittico* del tipo (1) possa sempre ricondursi, con operazioni puramente algebriche, all'integrale di una funzione razionale più una somma di integrali di *tre* tipi ben determinati e propriamente, *supposto pel momento*  $a_0 \neq 0$ , degli integrali

$$(3) \quad I_1 = \int \frac{dx}{y}, \quad I_2 = \int \frac{a_0 x^2 + 2a_1 x}{y} dx, \quad I_3 = \int \frac{dx}{(x-c)y},$$

che diconsi rispettivamente integrale ellittico di *prima*, di *seconda* e di *terza specie*, con l'avvertenza che se il parametro  $c$  che fi-

(1) Altrimenti, potendosi portar fuori dal radicale che fornisce  $y$  un fattore almeno di primo grado, il calcolo dell'integrale (1) si ricondurrebbe notoriamente all'integrazione di una funzione razionale.

gura nell'integrale di terza specie è infinito, questo è da prendere sotto la forma

$$(3') \quad I_3^* = \int \frac{x dx}{y}.$$

Avremo così, fra l'altro, il vantaggio di porre ben in chiaro come la cosa essenziale nel problema di cui si discorre, non sia la natura della funzione razionale  $R$ , bensì l'equazione (2).

Allo scopo indicato cominciamo con l'osservare che, in virtù della (2), alle potenze *pari* di  $y$  possono subito sostituirsi polinomi in  $x$ , e alle potenze *dispari* prodotti di  $y$  per un polinomio siffatto; non è quindi restrittivo supporre che la funzione  $R(x, y)$  sia *lineare* in  $y$ , cioè sia della forma

$$R(x, y) = \frac{M_1(x) + M_2(x)y}{N_1(x) + N_2(x)y},$$

con  $M_1, M_2, N_1, N_2$  polinomi in  $x$ . Ne segue, moltiplicando numeratore e denominatore per  $[N_1(x) - N_2(x)y]y$ , che, detti  $M'$  ed  $M''$  due nuovi polinomi in  $x$ , sarà ulteriormente

$$R(x, y) = \frac{M'(x) + M''(x)y}{[N_1^2(x) - N_2^2(x)y^2]y}$$

cioè, tenuto conto della (2),

$$R(x, y) = R_1(x) + \frac{R_2(x)}{y},$$

dove  $R_1(x)$  ed  $R_2(x)$  denotano due certe funzioni razionali della sola  $x$ . Ciò posto, supponiamo decomposta la funzione razionale  $R_2(x)$  nel classico modo, cioè nella somma di un polinomio in  $x$  e di più *fratti semplici* della forma  $A(x-c)^{-r}$  ( $r$  intero positivo); avremo così che:

$$(4) \quad \int R(x, y) dx = \int R_1(x) dx + \sum a \int \frac{x^n}{y} dx + \sum A \int \frac{dx}{(x-c)^r y},$$

dove i due sommatori sono da estendere rispettivamente a tutti i termini  $ax^n$  del suaccennato polinomio e a tutti i fratti semplici  $A(x-c)^{-r}$ .

Con la (4) è compiuta la prima fase della trasformazione che ci siamo proposti. Resta ora da far vedere come gl'integrali che

figurano nella (4), e cioè integrali del tipo:

$$J_n = \int \frac{x^n}{y} dx, \quad H_r = \int \frac{dx}{(x-c)^r y},$$

siano tutti riconducibili ad  $I_1, I_2$  ed  $I_3$ .

A tal'uopo cominciamo con l'osservare che, detto  $m$  un intero positivo o nullo, si ha manifestamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^m y) &= mx^{m-1}y + x^m y' = \frac{1}{y} \left( mx^{m-1}y^2 + \frac{1}{2} x^m \frac{d(y^2)}{dx} \right) = \\ &= \frac{1}{y} \left[ mx^{m-1}(a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} x^m (4a_0 x^3 + 12a_1 x^2 + 12a_2 x + 4a_3) \right] = \\ &= (m+2)a_0 \frac{x^{m+3}}{y} + 2(2m+3)a_1 \frac{x^{m+2}}{y} + 6(m+1)a_2 \frac{x^{m+1}}{y} + \\ &\quad + 2(2m+1)a_3 \frac{x^m}{y} + ma_4 \frac{x^{m-1}}{y} \end{aligned}$$

donde, integrando e ponendo successivamente  $m=0, 1, 2, \dots$ , seguono le formule

$$(5) \quad \begin{cases} 2a_0 J_3 + 2 \cdot 3a_1 J_2 + 6 \cdot 1a_2 J_1 + 2 \cdot 1a_3 J_0 = y \\ 3a_0 J_4 + 2 \cdot 5a_1 J_3 + 6 \cdot 2a_2 J_2 + 2 \cdot 3a_3 J_1 + a_4 J_0 = xy \\ 4a_0 J_5 + 2 \cdot 7a_1 J_4 + 6 \cdot 3a_2 J_3 + 2 \cdot 5a_3 J_2 + 2a_4 J_1 = x^2 y \\ \dots \end{cases}$$

che, essendo  $a_0 \neq 0$ , permettono di calcolare tutte le  $J_n$ , per  $n \geq 3$ , quali funzioni lineari di  $J_0, J_1$  e  $J_2$ . Ma

$$J_0 = I_1, \quad J_1 = I_3^*, \quad a_0 J_2 = I_2 - 2a_1 I_3^*;$$

dunque tutte le  $J_n$  si esprimono linearmente mediante gl'integrali fondamentali (3).

Per calcolare le  $H_r$  ci serviremo della stessa identità precedente in cui  $x$  sia stato sostituito da  $x-c$ , cioè, supposto che il polinomio  $y^2$  ordinato secondo le potenze discendenti di  $x-c$  prenda la forma

$$(2') \quad y^2 = b_0(x-c)^4 + 4b_1(x-c)^3 + 6b_2(x-c)^2 + 4b_3(x-c) + b_4,$$

ci serviremo dell'identità

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(x-c)^m y] &= (m+2)b_0 \frac{(x-c)^{m+3}}{y} + 2(2m+3)b_1 \frac{(x-c)^{m+2}}{y} + \\ &\quad + 6(m+1)b_2 \frac{(x-c)^{m+1}}{y} + 2(2m+1)b_3 \frac{(x-c)^m}{y} + mb_4 \frac{(x-c)^{m-1}}{y}, \end{aligned}$$

da cui, integrando e ponendo successivamente  $m = -1, -2, -3, \dots$ , seguono le formule:

$$(6) \quad \begin{cases} b_0 \int \frac{(x-c)^2}{y} dx + 2 \cdot 1 \cdot b_1 \int \frac{x-c}{y} dx - 2 \cdot 1 \cdot b_3 H_1 - 1 \cdot b_4 H_2 = \frac{y}{x-c} \\ -2 \cdot 1 \cdot b_1 J_0 - 6 \cdot 1 \cdot b_2 H_1 - 2 \cdot 3 \cdot b_3 H_2 - 2 \cdot b_4 H_3 = \frac{y}{(x-c)^2} \\ -b_0 \cdot J_0 - 2 \cdot 3 \cdot b_1 H_1 - 6 \cdot 2 \cdot b_2 H_2 - 2 \cdot 5 \cdot b_3 H_3 - 3 \cdot b_4 H_4 = \frac{y}{(x-c)^3} \\ \dots \end{cases}$$

che riducono il calcolo di tutte le  $H_r$  ( $r \geq 2$ ) a quello dei tre integrali fondamentali

$$J_0 = I_1, \quad J_1 = I_3^*, \quad H_1 = I_3.$$

Invero, osservato che

$$\int \frac{x-c}{y} dx = J_1 - cJ_0, \quad \int \frac{(x-c)^2}{y} dx = J_2 - 2cJ_1 + c^2 J_0,$$

se  $b_4$  non è nulla, la prima delle (6) fornisce subito  $H_2$  quale funzione lineare di  $I_1, I_2, I_3$  (1); calcolato che sia così il valore di  $H_2$ , la seconda fornisce  $H_3$ , e così via di seguito. E se invece è  $b_4 = 0$ , cioè se  $c$  è una delle radici dell'equazione  $y=0$ , considerato che non può essere allora  $b_3 = 0$  altrimenti  $c$  sarebbe radice almeno doppia di detta equazione, non v'è che da scartare la prima delle (6) e servirsi della 2ª, 3ª, ecc. per calcolare successivamente  $H_2, H_3$ , ecc.

Finalmente osserviamo che se è  $a_0 = 0$ , ma  $a_1 \neq 0$  (2), le (5) determinano tutte le  $J_n$  in funzione di  $J_0$  ed  $J_1$  soltanto, cioè di  $I_1$  e di  $I_3^*$  e, di conseguenza, lo stesso succede per le  $H_r$ . Parrebbe pertanto che in questo caso gli integrali fondamentali si riducessero a due soltanto:  $I_1$  ed  $I_3^*$ . La cosa però non va in sostanza così perchè, come vedremo meglio più avanti (§ 5), quando è  $a_0 = 0$ , stante il particolare comportamento di  $y$  all'infinito, l'integrale  $I_3^*$  non ha più un comportamento confrontabile con quello di  $I_3$ , bensì con quello di  $I_2$  nel caso generale; sicchè, in ultima analisi, la sola

(1) Nonchè di  $I_3^*$ , ma  $I_3^*$  è un caso particolare di  $I_3$ .

(2) Se fosse anche  $a_1 = 0$  l'equazione  $y=0$  avrebbe la radice  $x=\infty$  almeno doppia ed il calcolo dell'integrale (1) si ricondurrebbe, come abbiamo già osservato, all'integrazione di una funzione razionale.

differenza è che in questo caso  $I_2$  non differisce sostanzialmente da  $I_3^*$ ; propriamente si ha che  $I_2 = 2a_1 I_3^*$ .

### § 2. - Riduzione della biquadratica fondamentale alla forma canonica di Weierstrass.

Se l'equazione (2) invece di avere la forma generale che ha avesse la forma « di Weierstrass »:

$$(7) \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

l'integrale di prima specie  $I_1$  non sarebbe altro (salvo le diverse lettere) che l'integrale (40) del Cap. I, cioè la funzione inversa della  $\wp$  di WEIERSTRASS con gli invarianti  $g_2$  e  $g_3$ , e similmente, come più appresso vedremo, gli integrali fondamentali di seconda e terza specie potrebbero essere subito calcolati per mezzo delle funzioni  $\zeta$  e  $\sigma$  del Capitolo precedente. Basta questo per mostrare ampiamente l'importanza dell'ulteriore trasformazione cui vogliamo ora assoggettare gl'integrali ellittici con la riduzione della biquadratica fondamentale (2) ad una determinata *forma canonica*, per esempio a quella di WEIERSTRASS (7), avvertendo però esplicitamente che, benchè noi, per opportunità espositiva, ci siamo prima occupati della riduzione dell'integrale ai tre tipi fondamentali e poi di quella della biquadratica, nella pratica converrà invece seguire quasi sempre l'ordine inverso e cioè cominciare da quest'ultima.

Ciò premesso, cominciando dalla riduzione alla forma canonica di WEIERSTRASS, dico che *con un opportuno cambiamento lineare di variabile, l'integrale (1) può ridursi ad uno analogo relativo all'equazione (7).*

All'uopo osserviamo anzitutto che la più generale sostituzione lineare operata su  $x$ :

$$(8) \quad x = \frac{a\xi + b}{c\xi + d}, \quad (\mu = ad - bc \neq 0),$$

da cui segue

$$dx = \frac{\mu}{(c\xi + d)^2} d\xi$$

e a cui è opportuno associare la seguente trasformazione di  $y$ :

$$(8') \quad y = \frac{1}{(c\xi + d)^2} \eta,$$

cambia ovviamente l'integrale (1) in un integrale dello stesso tipo:

$$\int R_1(\xi, \eta) d\xi,$$

e l'equazione (2) nell'altra:

$$(9) \quad \eta^2 = a_0(a\xi + b)^4 + 4a_1(a\xi + b)^3(c\xi + d) + 6a_2(a\xi + b)^2(c\xi + d)^2 + 4a_3(a\xi + b)(c\xi + d)^3 + a_4(c\xi + d)^4.$$

In particolare le quattro radici  $a_1, a_2, a_3, a_4$  (necessariamente distinte) dell'equazione

$$(10) \quad a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

si muteranno nelle quattro radici  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  (pure distinte) della equazione ottenuta uguagliando a zero il secondo membro della (9); epperò, se la sostituzione è scelta in modo che risulti  $\beta_1 = \infty$ , ciò che, a patto di conoscere una delle radici della (10), può immediatamente ottenersi ponendo:

$$\xi = \frac{1}{a_1 - x}$$

cioè

$$(11) \quad x = a_1 - \frac{1}{\xi},$$

l'equazione trasformata (9) sarà necessariamente della forma

$$\eta^2 = A\xi^3 + B\xi^2 + C\xi + D,$$

epperò basterà eseguire ulteriormente il cambiamento di variabile

$$(12) \quad \xi = \xi' - \frac{B}{3A},$$

ben noto dall'Algebra, per essere ricondotti ad un'equazione della forma

$$(13) \quad \eta^2 = A\xi'^3 + B'\xi' + C',$$

e cioè, sostanzialmente, alla (7).

La trasformazione è, come si vede, semplicissima; presenta solo l'inconveniente che la sua effettiva esecuzione richiede la conoscenza di una radice dell'equazione di 4° grado (10), il che dà spesso luogo ad introduzione di fastidiose irrazionalità e di immaginari. Merita

dunque la pena, pur riservandoci di mostrare più tardi come possa essere del tutto evitata (almeno nella prima fase dei calcoli) l'effettiva risoluzione dell'equazione (10), far fin d'ora vedere come, nonostante la presenza di  $a_1$  nella (11), i coefficienti essenziali dell'equazione trasformata possono calcolarsi *razionalmente* per mezzo di quelli della primitiva. Propriamente dico che l'equazione (13), con l'ulteriore cambiamento di variabili

$$(14) \quad \xi' = \frac{4}{A} \xi_1, \quad \eta = \frac{4}{A} \eta_1$$

può scriversi sotto la forma

$$(15) \quad \eta_1^2 = 4\xi_1^3 - g_2\xi_1 - g_3,$$

avendo posto:

$$(16) \quad \begin{cases} g_2 = a_0 a_4 + 3a_2^2 - 4a_1 a_3, \\ g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_0 a_2 a_4 - a_0 a_3^2 + 2a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_2^3. \end{cases}$$

La cosa è invero una conseguenza quasi immediata della nota *proprietà invariante* delle espressioni a secondo membro delle (16) rispetto alle trasformazioni lineari del polinomio a primo membro della (10) e cioè del fatto che, operando su di questo la sostituzione lineare (8) e liberando poi da fratti col moltiplicar tutto per  $(c\xi + d)^4$ , i coefficienti del polinomio di 4° grado in  $\xi$

$$(17) \quad b_0 \xi^4 + 4b_1 \xi^3 + 6b_2 \xi^2 + 4b_3 \xi + b_4$$

così ottenuto, sono tali che le espressioni analoghe alle (16) con essi formate differiscono dalle primitive solo per fattori  $\mu^4$  e  $\mu^6$  rispettivamente<sup>(1)</sup>. Infatti, considerato che tanto la (11) quanto la (12) sono sostituzioni lineari *unimodulari* (cioè tali che  $\mu=1$ ) e che, volendo identificare il secondo membro della (13) col polinomio (17), dovrà porsi

$$b_0 = 0, \quad 4b_1 = A, \quad b_2 = 0, \quad 4b_3 = B', \quad b_4 = C';$$

<sup>(1)</sup> Per questo teorema, di solito enunciato riferendosi a coordinate omogenee  $(x = x_1/x_2)$ , vedi, per esempio, WEBER [13], I, p. 199.

l'accennata proprietà invariante ci fornisce senz'altro le equazioni:

$$g_2 = -4 \frac{A}{4} \frac{B'}{4} = -\frac{1}{4} A B',$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} 0 & A/4 & 0 \\ A/4 & 0 & B'/4 \\ 0 & B'/4 & C' \end{vmatrix} = -\frac{1}{16} A^2 C',$$

donde segue

$$B' = -\frac{4}{A} g_2, \quad C' = -\frac{16}{A^2} g_3,$$

epperò la (13) potrà scriversi sotto la forma:

$$\eta^2 = A \xi'^3 - \frac{4}{A} g_2 \xi' - \frac{16}{A^2} g_3,$$

che, avvalendosi delle (14), si riduce immediatamente alla (15).

Resta così, fra l'altro, completamente giustificato il nome di *invarianti* già dato nel Capitolo precedente a  $g_2$  e  $g_3$ .

In particolare, il procedimento di riduzione ora indicato, applicato all'integrale di prima specie  $I_1$ , conduce all'identità

$$(18) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}} = \int \frac{d\xi_1}{\sqrt{4\xi_1^3 - g_2 \xi_1 - g_3}};$$

dove, in virtù delle (11), (12) e (14), la relazione fra  $x$  e  $\xi_1$  può scriversi:

$$\xi_1 = \frac{1}{4} \left( \frac{B}{3} + \frac{A}{a_1 - x} \right)$$

o, meglio,

$$(19) \quad \xi_1 = \frac{1}{4} \left[ \frac{P''(a_1)}{6} - \frac{P'(a_1)}{a_1 - x} \right], \quad x = a_1 + \frac{P'(a_1)}{4\xi_1 - \frac{1}{6} P''(a_1)},$$

avendo osservato che, posto

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = P(x),$$

dall'identità

$$A \xi^3 + B \xi^2 + C \xi + D = \xi^4 P \left( a_1 - \frac{1}{\xi} \right) =$$

$$= -P'(a_1) \xi^3 + \frac{1}{2!} P''(a_1) \xi^2 - \frac{1}{3!} P'''(a_1) \xi + \frac{1}{4!} P^{IV}(a_1)$$

segue che

$$A = -P'(a_1), \quad B = \frac{1}{2} P''(a_1).$$

Vogliamo inoltre esplicitamente notare che, tenuto conto di quanto si è osservato nelle ultime righe del paragrafo precedente, nel caso attuale, cioè quando la biquadratica fondamentale ha la forma di WEIERSTRASS, i tre integrali fondamentali di prima, seconda e terza specie si presentano sotto l'aspetto seguente:

$$J_0 = I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \quad J_1 = \frac{1}{2} I_2 = I_3^* = \int \frac{x dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

$$H_1 = I_3 = \int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$$

Finalmente osserviamo che, tenuto conto che attualmente è:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0,$$

$$a_3 = -g_2/4, \quad a_4 = -g_3,$$

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 2c,$$

$$b_3 = 3c^2 - g_2/4, \quad b_4 = 4c^3 - g_2c - g_3,$$

dalle prime delle (5)-(6) si traggono le formule praticamente importanti:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} J_2 &= \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \frac{1}{6} \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3} + \frac{1}{12} g_2 J_0 \\ J_3 &= \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \frac{1}{10} x \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3} + \frac{3}{20} g_2 J_1 + \frac{1}{10} g_3 J_0 \\ H_2 &= \int \frac{dx}{(x-c)^2 \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \\ &= \frac{2(J_1 - cJ_0) - (6c^2 - \frac{1}{2}g_2)H_1 - \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}/(x-c)}{4c^3 - g_2c - g_3}. \end{aligned} \right.$$

§ 3. - Forma canonica di Legendre.

Oltre la forma canonica di WEIERSTRASS, ha importanza la forma di Legendre:

$$(21) \quad y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$$

dell'equazione fondamentale, e ciò non tanto per ragioni storiche,

quanto perchè la quasi totalità delle tabelle numeriche oggi esistenti si riferiscono ad essa.

Come nel caso precedente, la riduzione alla forma di LEGENDRE di un integrale ellittico relativo alla generica biquadratica (2), è possibile con mezzi assai semplici e cioè parimenti con una sostituzione lineare come la (8). Propriamente si vede subito che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (8) unita alla (8') muti l'equazione (2) nell'altra:

$$\eta^2 = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2),$$

dove  $k$  (il così detto « modulo ») denota una costante, è che essa trasformi le 4 radici  $a_1, a_2, a_3, a_4$  della (10) (considerate in un ordine qualsiasi) nei quattro numeri  $\pm 1$  e  $\pm 1/k$ , cioè che siano soddisfatte le quattro condizioni:

$$a_1 = \frac{a+b}{c+d}, \quad a_2 = \frac{-a+b}{-c+d}, \quad a_3 = \frac{a/k+b}{c/k+d}, \quad a_4 = \frac{-a/k+b}{-c/k+d},$$

che, liberate dai fratti, divengono

$$(22) \quad \begin{cases} a+b - a_1c - a_1d = 0 \\ a-b - a_2c + a_2d = 0 \\ a+kb - a_3c - a_3kd = 0 \\ a-kb - a_4c + a_4kd = 0. \end{cases}$$

Le (22) costituiscono un sistema di 4 equazioni lineari omogenee nelle 4 incognite  $a, b, c, d$ , di cui interessano manifestamente le sole soluzioni proprie, cioè quelle in cui una almeno delle incognite ha valore non nullo. Il determinante dei coefficienti deve essere dunque nullo, e si ha così l'equazione in  $k$ :

$$(23) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a_1 & -a_1 \\ 1 & -1 & -a_2 & a_2 \\ 1 & k & -a_3 & -a_3k \\ 1 & -k & -a_4 & a_4k \end{vmatrix} = 0$$

a ciascuna delle cui radici corrisponderà uno o più <sup>(1)</sup> sistemi di valori di  $a, b, c, d$  (a meno di un irrilevante fattore di proporzionalità) generanti le sostituzioni lineari richieste.

<sup>(1)</sup> Secondo che la caratteristica del determinante (23) è 3 o minore di 3.

Il punto centrale della trasformazione che ci occupa è dunque la risoluzione dell'equazione di 2° grado (23), collegante i possibili valori di  $k$  alle radici (e quindi, indirettamente, ai coefficienti) della (10), equazione che, sviluppando il determinante pei minori contenuti nelle sue ultime due righe, diviene

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)k^2 - 2[(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) - 2(a_1a_2 + a_3a_4)]k + (a_1 - a_2)(a_3 - a_4) = 0$$

ovvero

$$(1 - \lambda)k^2 - 2(1 + \lambda)k + (1 - \lambda) = 0,$$

avendo osservato che, detto  $\lambda$  il birapporto delle quattro radici  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , cioè posto

$$(24) \quad \lambda = \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} : \frac{a_1 - a_4}{a_2 - a_4},$$

si ha

$$1 - \lambda = - \frac{(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)}{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)},$$

$$1 + \lambda = - \frac{(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) - 2(a_1a_2 + a_3a_4)}{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)};$$

avremo pertanto, in definitiva,

$$k = \frac{(1 \pm \sqrt{\lambda})^2}{1 - \lambda}$$

cioè (immaginando il doppio segno conglobato nel simbolo di radice)

$$(25) \quad k = \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}}.$$

La formula trovata mostra che, a differenza di quel che succedeva per  $g_2$  e  $g_3$  nel caso precedente, stavolta  $k$  non è una funzione razionale dei coefficienti della biquadratica primitiva. Anzi, ricordando che pel birapporto  $\lambda$  di quattro numeri di cui non sia prescritto l'ordine sono possibili 6 valori distinti <sup>(4)</sup>, si vede subito che, dati che siano i coefficienti  $a_0, a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  della (2),

<sup>(4)</sup> E cioè, detto  $\lambda_0$  uno di essi,  $\lambda_0, 1 - \lambda_0, 1/\lambda_0, 1/(1 - \lambda_0), \lambda_0/(\lambda_0 - 1), (\lambda_0 - 1)/\lambda_0$ .

i possibili valori di  $k$  sono dodici, cui corrispondono però solo sei valori distinti di  $k^2$  <sup>(4)</sup>.

Se non si esige che la riduzione a forma canonica debba essere compiuta mediante una sostituzione lineare, essa può essere anche effettuata in un altro modo che, fra l'altro, presenta il vantaggio di condurre ad un valore più semplice del quadrato  $k^2$  del modulo.

All'uopo cominciamo con operare una sostituzione lineare del tipo (8) sulla  $x$ , imponendo che essa mandi le quattro radici della (10), considerate per esempio nell'ordine  $a_4, a_3, a_1, a_2$ , nei quattro punti  $\xi = \infty, \xi = 0, \xi = 1, \xi = 1/k^2$ , pel che dovranno essere soddisfatte le quattro equazioni lineari ed omogenee in  $a, b, c$  e  $d$ :

$$\frac{a}{c} = a_4, \quad \frac{b}{d} = a_3, \quad \frac{a+b}{c+d} = a_1, \quad \frac{a+bk^2}{c+dk^2} = a_2,$$

donde facilmente si trae che

$$(26) \quad k^2 = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} : \frac{a_1 - a_4}{a_2 - a_4}$$

e

$$(27) \quad \frac{a}{a_4(a_3 - a_1)} = \frac{b}{a_3(a_1 - a_4)} = \frac{c}{a_2 - a_1} = \frac{d}{a_1 - a_4}.$$

Con tale sostituzione l'integrale (1) si cambierà manifestamente in uno della forma

$$\int R^*(\xi, \sqrt{\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}) d\xi,$$

epperò basta operare l'ulteriore sostituzione (quadratica)

$$\xi = \xi_1^2,$$

per fargli assumere l'aspetto

$$(28) \quad \int R_1(\xi_1, \sqrt{(1-\xi_1^2)(1-k^2\xi_1^2)}) d\xi_1,$$

cioè per ridurlo alla forma canonica di LEGENDRE.

<sup>(4)</sup> Perchè due valori di  $\lambda$  che siano l'uno il reciproco dell'altro conducono manifestamente a valori di  $k$  differenti solo pel segno. Inoltre, osservato che il cambiamento di  $\sqrt{\lambda}$  in  $-\sqrt{\lambda}$  muta  $k$  in  $1/k$ , si vede con pari facilità che di questi 6 valori di  $k^2$  tre debbono essere i reciproci degli altri tre.

In altre parole: *la sostituzione quadratica*

$$(29) \quad x = \frac{a\xi_1^2 + b}{c\xi_1^2 + d}$$

ove  $a, b, c$  e  $d$  sono quattro numeri soddisfacenti alle (27), cioè proporzionali rispettivamente a

$$a_4(a_3 - a_1), \quad a_3(a_1 - a_4), \quad a_3 - a_1, \quad a_1 - a_4,$$

muta l'integrale (1) in uno del tipo (28), ossia riduce la biquadratica fondamentale alla forma canonica di Legendre, col valore (26) del quadrato  $k^2$  del modulo.

Dipendentemente dall'ordine delle quattro radici si potrà effettuare la riduzione in 24 modi diversi <sup>(1)</sup>, ai quali corrispondono però, come si è già osservato, soltanto sei valori distinti del birapporto

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = k^2,$$

e propriamente valori tali che, se indichiamo con  $k_0^2$  uno di essi, gli altri 5 sono:

$$1 - k_0^2, \quad \frac{1}{k_0^2}, \quad \frac{1}{1 - k_0^2}, \quad \frac{k_0^2}{k_0^2 - 1}, \quad \frac{k_0^2 - 1}{k_0^2}.$$

In particolare, applicando il procedimento suindicato all'integrale di prima specie  $I_1$ , si perviene all'importante identità:

$$(30) \quad I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} = \frac{2}{\sqrt{a_0(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)}} \int \frac{d\xi_1}{\sqrt{(1 - \xi_1^2)(1 - k^2\xi_1^2)}}$$

che, ponendo in evidenza le quattro radici del radicando del primo

<sup>(1)</sup> Ricordiamo che i  $24 = 4!$  birapporti di quattro numeri (o di quattro punti, ecc.) godono, oltre che di quelle già ricordate, delle seguenti proprietà:

- 1). Scambiando fra loro due elementi qualsiasi e simultaneamente gli altri due, il birapporto non si altera.
- 2). Scambiando fra loro i due primi elementi o i due ultimi, il birapporto si muta nel suo inverso.
- 3). Scambiando fra loro i due elementi medi o i due estremi si ottiene un birapporto che, sommato col primitivo, dà uno.

membro, sopprimendo in ambo i membri il fattore  $\sqrt{a_0}$  ed eseguendo l'ulteriore sostituzione

$$\xi_1 = \sin \varphi,$$

prende l'aspetto:

$$(30') \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)}} = \frac{2}{\sqrt{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$k^2 = (a_1, a_2, a_3, a_4).$$

Il metodo di riduzione a forma canonica di cui ci siamo ora occupati, presenta, in confronto al primitivo mediante una sostituzione lineare, il vantaggio grandissimo di poter evitare ogni introduzione d'immaginarî se l'integrale di partenza è reale, cioè se  $a_0, a_1, \dots, a_4$  sono reali ed  $x$  varia in un intervallo in cui il radicando  $P(x)$  è sempre positivo, indipendentemente dalla realtà o meno delle 4 radici  $a_1, a_2, a_3, a_4$  della (10). Inoltre si possono disporre le cose in modo che il modulo  $k$  risulti sempre compreso fra 0 ed 1.

Per vedere ciò è però necessaria una discussione alquanto minuta <sup>(1)</sup>, dovendosi distinguere molti casi secondo il numero delle radici reali della (10), il segno del coefficiente della più alta potenza di  $x$  in  $P(x)$ , ecc., e considerare ciascuna volta le radici in un ordine opportuno. Ci limiteremo pertanto a riportare i risultati cui si perviene, che sono condensati nel quadro sinottico di p. 76-77 <sup>(2)</sup>, pel cui uso è da tener presente quanto segue:

1). Si suppone che il coefficiente della più alta potenza di  $x$  nel polinomio sotto radice sia stato preventivamente ridotto, com'è sempre possibile, a  $\pm 1$ . La seconda colonna indica a quale di questi due casi ci si riferisce.

<sup>(1)</sup> Vedi, al riguardo, DURÈGE-MAURER [3], Kap. 1, §§ 9 e 12. Limitatamente alla dimostrazione del fatto che  $k^2$  può sempre farsi risultare reale e compreso fra 0 ed 1 (il che è quasi di per sè evidente se le radici sono tutte reali o tutte complesse), può vedersi anche BIANCHI [2], p. 435.

<sup>(2)</sup> Le formule contenute in questo quadro sono state tolte, salvo qualche lieve cambiamento e completamento, dalla pregevole raccolta di HOUEL [19], (§ XXVII) in cui si trovano pure, nel caso delle radici tutte reali, le formule relative alla riduzione a forma canonica mediante una sostituzione lineare, poste anch'esse sotto una forma molto comoda.

2). Per abbreviare si è posto

$$a_{rs} = a_s - a_r, \quad (r, s = 1, 2, 3, 4).$$

3). Se l'equazione (10) ha due radici reali e due complesse coniugate, si suppone che quest'ultime siano:

$$a_3 = b + ic, \quad a_4 = b - ic, \quad (c > 0);$$

se invece le radici sono tutt'e quattro complesse (a due a due coniugate) si suppone che esse siano:

$$a_1 = b_1 + ic_1, \quad a_2 = b_1 - ic_1, \quad a_3 = b_2 + ic_2, \quad a_4 = b_2 - ic_2 \\ (b_1 > b_2, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0).$$

4). Nel caso (V) esistono anche altre, analoghe formule di trasformazione in cui  $b_1$  è rimpiazzato da  $b_2$  e  $c_1$  da  $c_2$ . Esse non sono però senz'altro deducibili da quelle riportate con l'accennato scambio, stante la dissimmetria inerente alla disuguaglianza  $b_1 > b_2$ .

5). La quantità  $m$  fornita dall'ultima colonna, è il fattore numerico relativo alla trasformazione dell'integrale di prima specie  $I_1$ , cioè il coefficiente indicato con questa stessa lettera nella formula:

$$(30'') \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\pm (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}} = m \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

intendendo che gli integrali dei due membri siano estesi fra i « limiti corrispondenti » indicati nel quadro.

6). Le formule di trasformazione indicate non sono le sole possibili, bensì quelle che, nella maggior parte dei casi, si sono rivelate quali le più convenienti.

CASI POSSIBILI	Limiti entro cui varia $x$		Limiti corrispondenti		FORMULE DI TRASFORMAZIONE		$k^2$	$m$
	Primo	Secondo	$x$	$\varphi$	$x =$	$\sin^2 \varphi =$		
I) Radici della (10) $P(x)$ di quarto grado 4 radici reali $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$	+	$a_1 \geq x \geq a_2$ $a_3 \geq x \geq a_4$	$a_1$	0	$\frac{a_4}{a_{41}} \cdot \frac{x-a_1}{x-a_2}$	$(a_1 a_2 a_4 a_3) = \frac{a_{41} \cdot a_{32}}{a_{42} \cdot a_{31}}$	$\frac{2}{\sqrt{a_{31} \cdot a_{42}}}$	
			$a_4$	$\pi$	$\frac{a_{42}}{a_{32}} \cdot \frac{x-a_3}{x-a_4}$			
	-	$a_4 \geq x \geq a_3$ $a_2 \geq x \geq a_1$	$a_4$	0	$\frac{a_{31}}{a_{43}} \cdot \frac{x-a_4}{a_1-x}$	$(a_3 a_2 a_4 a_1) = \frac{a_{43} \cdot a_{21}}{a_{42} \cdot a_{31}}$		
			$a_3$	$\pi$	$\frac{a_{31}}{a_{21}} \cdot \frac{x-a_2}{x-a_3}$			
II) $P(x)$ di terzo grado 3 radici reali $a_1 > a_2 > a_3$	+	$a_2 \geq x \geq a_3$ $a_1 \geq x$	$a_3$	0	$\frac{x-a_2}{a_{32}}$	$\frac{a_{32}}{a_{31}}$	$\frac{2}{\sqrt{c_{31}}}$	
			$a_2$	$\pi$	$\frac{x-a_1}{x-a_2}$			
	-	$a_3 \geq x$ $a_1 \geq x \geq a_2$	$a_3$	0	$\frac{a_{31}}{a_1-x}$	$\frac{a_{21}}{a_{31}}$		
			$a_2$	$\pi$	$\frac{a_{31}}{a_{21}} \cdot \frac{x-a_2}{x-a_3}$			

CASI POSSIBILI		Limiti corrispondenti		Quantità ausiliarie	Formule di trasformazione	k <sup>2</sup>	m
Radici della (10)	Limiti entro cui varia x	x	φ				
III)	4° grado 2 rad. reali 2 rad. compl. coniugate	a <sub>1</sub> ≤ x ≤ a <sub>2</sub>	0	$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{a_1 - b}{c}, \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{a_2 - b}{c}$ $n = \operatorname{tg} \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ $\theta_1$ acuto $\theta_2$ ottuso nel caso (+) $\theta_2$ acuto nel caso (-)	$x = \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{a_1 - a_2}{2} n \cos \varphi$ $\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \theta_2 \frac{a_1 - x}{c} - \cos \theta_1 \frac{x - a_2}{c}}{1 - n \cos \varphi}$	$\sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$	$\frac{\sqrt{-\cos \theta_1 \cos \theta_2}}{c}$
IV)	3° grado 1 rad. reale 2 rad. compl.	a <sub>1</sub> ≤ x	0	$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{a_1 - b}{c}$ $\theta_1$ ottuso nel caso (+) $\theta_1$ acuto nel caso (-)	$x = a_1 - \frac{c}{\cos \theta_1} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$ $\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \theta_1 (a_1 - x)}{c}$	$\sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1}{2} \right)$	$\frac{\sqrt{-\cos \theta_1}}{c}$
V)	4° grado 2 coppie di radici complesse coniugate	da -∞ a +∞	$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$	$(b_1 > b_2)$ $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{c_1 + c_2}{b_1 - b_2}$ $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2}$ $\operatorname{tg}^2 \theta_1 / 2 = \cos \theta_1 / \cos \theta_2$ $\theta_1, \theta_2$ e $\theta_1/2$ acuti	$(b_1 > b_2)$ $x = b_1 + c_1 \operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \frac{b_1 - b_2}{c_1}$ $\operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) = \frac{c_1}{c_2}$ $(b_1 = b_2, c_1 > c_2)$ $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ $x = b_1 - \frac{c_1}{\operatorname{tg} \varphi}$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_1}{b_1 - x}$	$\sin^2 \theta$	$\frac{\sqrt{\cos \theta}}{c_1 c_2}$
						$1 - \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2$	$\frac{1}{c_1}$

Quanto ai tre integrali fondamentali di prima, seconda e terza specie, in base alle nostre considerazioni generali del § 1, essi, nel caso in cui la biquadratica fondamentale ha la forma di LEGENDRE, si presenterebbero sotto l'aspetto:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$I_2 = \int \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Considerato però che si ha manifestamente

$$\int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{(1-k^2x^2)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = I_1 - I_2,$$

$$I_3 = \int \frac{(x+c)dx}{(x^2-c^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2-c^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \frac{1}{c} \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

e che, ponendo  $x^2 = x'$ , l'integrale

$$\int \frac{d(x^2)}{(x^2-c^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

si riduce ad un integrale elementare; possono invece considerarsi quali fondamentali, come è abitudine, i tre seguenti:

$$(31) \quad \begin{cases} F = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ E = \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx, \\ \Pi = \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \end{cases}$$

che, ponendo  $x = \sin \varphi$ ,  $-1/c^2 = n$ , prendono l'aspetto particolarmente semplice:

$$(31') \quad \begin{cases} F = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \\ E = \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \\ \Pi = \int \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}. \end{cases}$$

L'importanza pratica di questi integrali, e di riflesso della forma canonica di LEGENDRE, risiede soprattutto nel fatto che dei primi due o, per esser più precisi, delle due funzioni

$$(32) \quad \begin{cases} F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \\ E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \end{cases}$$

(dove le integrazioni sono da intendersi eseguite lungo il cammino rettilineo da 0 a  $\varphi$  e i radicali presi col segno +) esistono accurate tabelle numeriche a doppia entrata (1) che ne facilitano enormemente il calcolo. Non così invece dell'integrale di 3ª specie:

$$(33) \quad \Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

essendo praticamente pressochè impossibile costruire tabelle numeriche per funzioni di più di due variabili. Dei metodi pel calcolo numerico dell'integrale  $\Pi$  si vedranno più avanti (Cap. III, § 7).

Osserviamo finalmente che, quando la biquadratica fondamentale ha la forma di LEGENDRE, avendosi, con le notazioni del § 1,

$$a_0 = k^2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1+k^2}{6}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1,$$

le formule di ricorrenza (5) prendono l'aspetto particolarmente semplice:

$$(5') \quad \begin{cases} 2k^2 J_3 - (1+k^2) J_4 = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)} \\ 3k^2 J_4 - 2(1+k^2) J_2 + J_0 = x \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)} \\ 4k^2 J_5 - 3(1+k^2) J_3 + 2J_1 = x^2 \sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)} \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Le (6) invece non si semplificano essenzialmente, ma esse possono essere agevolmente sostituite con formule di ricorrenza più

(1) Vedi, per esempio, JAHNKE-EMDE [20], pp. 133-144, e altre tavole ivi citate.

adatte al caso per cui rimandiamo alle già citate tavole di HOÜEL [19], § XXVIII, di cui quella di uso più frequente è la seguente:

$$(34) \quad 2n \left( 1 + \frac{1+k^2}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi)^2 \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ = n \left( 1 + 2 \frac{1+k^2}{n} + 3 \frac{k^2}{n^2} \right) \Pi(\varphi, n, k) + E(\varphi, k) - \\ - \left( 1 + \frac{k^2}{n} \right) F(\varphi, k) + n \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1+n \sin^2 \varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Facendo tendere  $n$  ad  $\infty$ , la (34) fornisce la formula interessante:

$$(34') \quad \int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = F(\varphi, k) - E(\varphi, k) - \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cotg \varphi$$

che, volendo dare dei limiti all'integrale, è (stante la singolarità della funzione integranda per  $\varphi=0$ ) da interpretare nel senso che, se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono due argomenti non nulli e se il cammino d'integrazione non passa per  $\varphi=0$ , si ha

$$(34'') \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ = [F(\varphi, k) - E(\varphi, k) - \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cotg \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

§ 4. - Discussione dell'integrale ellittico di prima specie e determinazioni dei periodi di  $\wp(u; g_2, g_3)$ .

Essendo le trasformazioni di cui ci siamo finora occupati in questo Capitolo, prevalentemente di carattere algebrico-formale, non è stato finora necessario spender troppe parole per precisare le determinazioni da considerarsi dei radicali che ci si sono presentati, i cammini lungo cui dovevano pensarsi eseguite le varie integrazioni ecc. Volendo però procedere, com'è necessario, ad uno studio più approfondito dei tre integrali ellittici fondamentali, non è ora più possibile prescindere dalle suaccennate questioni, che trovano pieno chiarimento osservando che un differenziale ellittico qualsiasi, per esempio il differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

che figura nell'integrale di prima specie sotto la forma di WEIERSTRASS, pur non essendo una funzione univoca dei punti dell'ordinario piano complesso, ha invece uno ed un sol valore in ciascun punto della *superficie di Riemann* della (7), su cui dovranno pertanto considerarsi, e non sul piano, i vari possibili cammini d'integrazione, ecc.

Occorre dunque occuparsi anzitutto della costruzione della riemanniana (a due fogli) d'una funzione  $y(x)$  del tipo di quella definita dall'equazione (2), il che si ottiene con tutta facilità segnando sul piano complesso (pensato come doppio) le quattro radici  $a_1, a_2, a_3, a_4$  della (10) (che sono ovviamente i punti di diramazione della funzione) e collegando due di queste (per esempio  $a_1$  e  $a_2$ ) e le rimanenti due ( $a_3$  e  $a_4$ ) mediante curve qualsiasi (per esempio segmenti rettilinei), non mutuamente intersecantesi, lungo cui si penseranno connessi i due fogli (vedi fig. 15 in cui, per la perspicuità, la superficie è rappresentata tagliata in due pezzi).

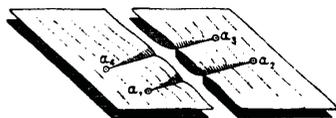


Fig. 15.

Invero la superficie connessa, cioè tutta d'un pezzo, che si è venuta così a generare, è tale che girando (una volta sola) intorno ad uno qualsiasi (ed uno solo) dei punti  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  si è obbligati a passare da un foglio all'altro, cioè a lasciar permutare fra loro le due determinazioni di  $y$ , come effettivamente avviene per la funzione.

Bastano già questi pochi cenni di natura topologica, su cui non insistiamo <sup>(1)</sup>, per poter enunciare e dimostrare la più notevole e, in certo senso, inaspettata proprietà degli integrali ellittici di prima specie, e cioè che essi restano finiti su tutta la riemanniana, punti all'infinito compresi.

Quest'importantissima proprietà che, se l'integrale

$$I_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4}}$$

<sup>(1)</sup> Per maggiori dettagli vedi, per esempio, i trattati di BIANCHI [2] e, specialmente, di HURWITZ-COURANT [8] in cui si troverà fra l'altro l'osservazione, per alcuni riguardi fondamentale, che la riemanniana da noi costruita può trasformarsi topologicamente (cioè con continuità) in un toro.

non fosse una funzione polidroma di  $z$ , sarebbe in contraddizione col teorema di LIOUVILLE, si dimostra in due righe facendo vedere come  $I_1$  resti finito anche negli intorno dei soli punti della riemanniana su cui potrebbero sorgere dei dubbi, e cioè dei punti  $a_1, a_2, a_3, a_4$  e  $\infty$ .

Infatti, tenuto conto che le radici  $a_h$  ( $h=1, 2, 3, 4$ ) sono per ipotesi tutte distinte, il polinomio  $P(z)$  sotto radicale può mettersi sotto la forma

$$b_0(z-a_h) + b_1(z-a_h)^2 + b_2(z-a_h)^3 + b_3(z-a_h)^4$$

con  $b_0 \neq 0$ , epperò la funzione integranda ammetterà, nell'intorno del punto  $z=a_h$ , uno sviluppo della forma

$$\frac{1}{\sqrt{b_0}}(z-a_h)^{-\frac{1}{2}} + B_1(z-a_h)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

donde segue

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{b_0}}(z-a_h)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}B_1(z-a_h)^{\frac{3}{2}} + \dots + \text{Cost.}$$

Quanto poi al punto all'infinito o, meglio, ai due punti  $z=\infty$ , basta eseguire la solita trasformazione  $z=1/\zeta$ , con che si ha

$$I_1 = - \int \frac{d\zeta}{\sqrt{a_0 + 4a_1\zeta + 6a_2\zeta^2 + 4a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4}}$$

per constatare come  $I_1$  resti anche colà finito, non escluso il caso in cui, come nella forma di WEIERSTRASS, sia  $a_0=0$  ma  $a_1 \neq 0$ .

La fig. 16 (tratta dalle più volte citate tavole di JAHNKE ed EMDE) dà un'idea dell'andamento del modulo di una delle determinazioni dell'integrale di prima specie di LEGENDRE  $F(\varphi, k)$  nel caso di  $k=0,8$ , lasciando intuire abbastanza bene come la funzione resti sempre finita, anche per  $\varphi \rightarrow \infty$ . La parete verticale nel mezzo della figura, che denota un salto brusco di  $|F|$ , proviene dalle discontinuità che inevitabilmente s'introducono quando si vuol considerare nella sua integrità una certa determinazione di una funzione polidroma.

Per procedere oltre nello studio degli integrali di prima specie e propriamente per cercar di dominare la loro polidromia, proponiamoci ora di determinare gli eventuali cammini chiusi, o cicli che

dir si voglia, *non riducibili per deformazione continua a punti*, esistenti sulla superficie di RIEMANN precedentemente costruita.

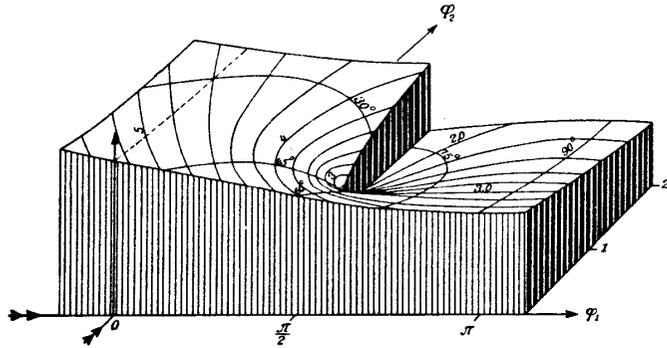


Fig. 16.

A prima vista parrebbe che essi siano almeno  $\binom{4}{2} = 6$  e cioè almeno tutti quelli involgenti due qualsiasi dei 4 punti  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  ma, con un esame più attento, non è difficile convincersi come tutti questi cicli siano topologicamente riducibili a *due* soli, opportunamente scelti fra essi: per esempio a quelli indicati con le lettere  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  nella fig. 17 (in cui l'arco punteggiato si riferisce ad un cammino sul foglio inferiore della riemanniana).

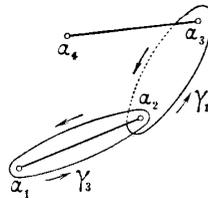


Fig. 17.

E invero se, per esempio, si considera il ciclo  $\gamma'$  della fig. 18, cioè un ciclo avvolgente i punti  $a_3$  e  $a_4$ , non è difficile riconoscere che, con ovvio simbolismo, si ha  $\gamma' \equiv -\gamma_3$ .

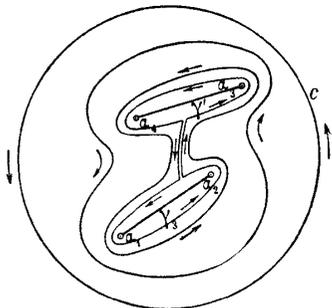


Fig. 18.

Infatti, come chiaramente si rileva dalla fig. 18, il ciclo  $\gamma_3 + \gamma'$  è topologicamente equivalente al cerchio  $c$ , che, comprendendo nel suo

interno tutt'e quattro i punti di diramazione  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$ , si riduce virtualmente a un punto (il punto all'infinito del foglio superiore) facendone crescere indefinitamente il raggio. (La cosa si vedrebbe ancor meglio lavorando sulla *sfera complessa* invece che sul piano).

Ne segue che la « differenza » fra due qualsiasi cammini della riemanniana aventi i loro estremi in due determinati punti  $a$  e  $z$  è necessariamente equivalente o ad un punto o alla « somma » di un « multiplo » di  $\gamma_1$  (val' a dire  $\gamma_1$  percorso un certo numero intero di volte) e di uno di  $\gamma_3$ , il che implica che tutti i possibili valori dell'integrale di prima specie  $I_1$  esteso da un certo  $a$  ad un certo  $z$  sono compresi nella formula

$$(35) \quad I_1(z) = I_1^{(0)}(z) + 2m\omega + 2n\omega',$$

dove  $I_1^{(0)}$  denota uno qualunque di essi,  $m$  ed  $n$  sono due numeri interi qualsiasi e si è posto:

$$(36) \quad 2\omega = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, \quad 2\omega' = \oint_{\gamma_3} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}.$$

Queste considerazioni generali, di cui è superfluo sottolineare l'importanza, applicate al caso particolare dell'integrale di 1<sup>a</sup> specie sotto la forma di WEIERSTRASS:

$$(37) \quad u = \int^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}},$$

in cui, con le notazioni del Capitolo precedente, si ha

$$a_1 = e_1, \quad a_2 = e_2, \quad a_3 = e_3, \quad a_4 = \infty,$$

ci consentono di risolvere un fondamentale problema sulla funzione  $\wp u$  che nel Capitolo precedente era stato solo adombrato, e cioè il problema della *determinazione dei periodi*  $2\omega$  e  $2\omega'$  dati *gl'invarianti*  $g_2$  e  $g_3$ , sotto la sola condizione che sia

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

Infatti, considerato da un lato che ad un determinato valore  $\wp$

del limite superiore  $z$  dell'integrale (37) corrispondono gl'infiniti valori di  $u$  dati dalla (35), e dall'altro che la  $\wp u$  è, come già sappiamo, una funzione *uniforme* di  $u$ ; dovrà necessariamente essere

$$\wp(u + 2m\omega + 2n\omega') = \wp u,$$

il che mostra come i due numeri  $2\omega$  e  $2\omega'$  dati dalle (36), dove  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  sono i cicli contraddistinti con queste lettere nella fig. 19 (1), possono identificarsi coi  $2\omega$  e  $2\omega'$  del Capitolo precedente, cioè costituiscono una coppia di periodi primitivi della funzione  $\wp(u; g_2, g_3)$ .

Naturalmente i periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$  dati dalle (36) non sono univocamente determinati perchè i cicli  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  possono scegliersi in tanti modi diversi ma, dopo quanto abbiamo visto nel Capitolo precedente, possiamo *a priori* asserire che il sostituire ai due cicli  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  altri due  $\gamma_1'$  e  $\gamma_3'$  topologicamente distinti, non potrà avere altro effetto che sostituire alla coppia  $(\omega, \omega')$  una coppia  $(\hat{\omega}, \hat{\omega}')$  equivalente alla prima nel senso del § 5 del Cap. I (2).

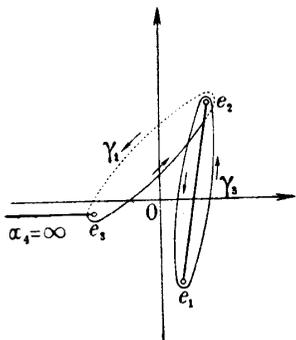


Fig. 19.

Le (36) consentono fra l'altro di dimostrare immediatamente un fatto da noi asserito, senza dimostrazione, nel Capitolo precedente (§ 10), e cioè che se gli invarianti  $g_2$  e  $g_3$  sono reali ed è per di più  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$ , è possibile scegliere una coppia di periodi equivalenti  $(2\omega, 2\omega')$  in modo tale che  $\omega$  sia reale e  $\omega'$  immaginario puro.

Infatti, ricordato che nelle condizioni suddette  $e_1, e_2$  ed  $e_3$  sono reali, ed assunti come cicli  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  (nell'ipotesi che gli indici delle  $e$  siano stati posti in modo da aversi  $e_1 > e_2 > e_3$ ) rispettivamente i due *segmenti doppi*  $(e_3, e_2)$  ed  $(e_2, e_1)$  dell'asse reale; basta scri-

(1) La condizione  $\Delta \neq 0$  assicura che la figura si presenta proprio come è stata disegnata, cioè con  $e_1, e_2, e_3$  punti *distinti*.

(2) Incluso il caso  $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ .

vere le (36) sotto la forma

$$(36') \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= \int_{e_3}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}, \\ \omega' &= \int_{e_2}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \end{aligned} \right.$$

ed osservare che nel primo integrale il radicando è sempre *positivo* (o nullo) mentre nel secondo è sempre *negativo*, per concludere che  $\omega$  è reale ed  $\omega'$  immaginario puro.

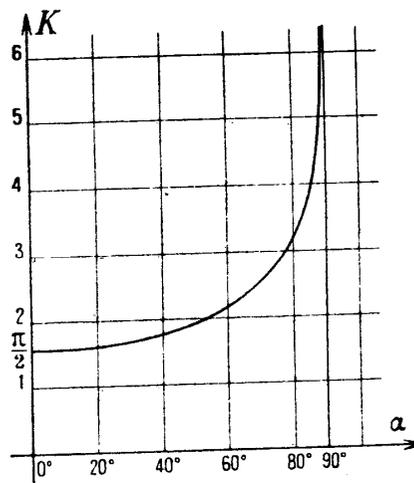


Fig. 20.

Quanto al calcolo *effettivo*, cioè numerico, di  $\omega$  e  $\omega'$  dati  $g_2$  e  $g_3$ , nella pratica, anzichè servirsi proprio delle (36'), si preferisce ridursi al problema analogo per gl'integrali sotto la forma di LEGENDRE nel modo che sarà indicato nel Capitolo seguente.

A proposito dell'integrale legendriano di prima specie, cioè in sostanza della funzione  $F(\varphi, k)$  definita dalla prima delle (32), vogliamo infine notare che se  $\varphi$  è reale e  $k$  è reale e

compreso fra 0 ed 1, ipotesi sempre realizzabili nei casi che effettivamente si presentano nelle applicazioni, al crescere di  $\varphi$  da 0 a  $\pi/2$  (intervallo a cui ci si può ovviamente limitare nello studio della  $F$ )  $F(\varphi, k)$  cresce monotonamente da zero al valore  $F(\pi/2, k)$ , che è uso chiamare *integrale completo* (di prima specie) e indicare col simbolo  $K$ , o  $K(k)$  se è necessario porre in evidenza il modulo  $k$ . Si pone cioè

$$(38) \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Anche  $K$  ha un comportamento monotono al variare di  $k$ , propriamente, al crescere di  $k$  da 0 ad 1,  $K$  cresce da  $\pi/2$  a  $+\infty$  nel modo indicato dalla fig. 20, in cui, secondo un uso molto diffuso fra i calcolatori, la variabile indipendente è  $\alpha = \arcsin k$  invece di  $k$ , cioè si è posto

$$(39) \quad k = \sin \alpha.$$

Se  $k$  è piccolo,  $K$  si calcola bene mediante la serie

$$(40) \quad K = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right]$$

facilmente deducibile dalla (38) sviluppando in serie il radicale e ricordando che

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2m)} \frac{\pi}{2}.$$

Se invece  $k$  è molto vicino ad 1, la doppia disuguaglianza, sulla cui dimostrazione non possiamo soffermarci:

$$(41) \quad \log \text{ip. } 4 \leq K + \log \sqrt{1-k^2} \leq \frac{\pi}{2},$$

fornisce un valore sufficientemente approssimato di  $K$ . Altri metodi di calcolo e altre formule su  $K$  si vedranno più innanzi (4).

### § 5. - Integrali ellittici di seconda e terza specie.

Gli integrali ellittici di seconda specie, invece di restar sempre finiti come quelli di prima, *presentano dei poli*. Propriamente, supposto di essere nel caso in cui i quattro punti di diramazione

(4) Alcuni nuovi, assai semplici, sviluppi in serie della funzione  $K$  e dell'integrale incompleto  $F$  trovansi nelle mie Note: *Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali, in ispecie sferici e Generalizzazione di una formula sui polinomi di Legendre*. [Bollett. Unione Mat. It., 14 (1935), pp. 213-218, 277-282 e 15 (1936), pp. 102-105].

Per esempio, trovansi ivi la formula:

$$K(\sin \alpha) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right] \sin(4n+1)\alpha, \quad (0 < \alpha < \pi/2).$$

sono al finito, l'integrale fondamentale

$$I_2 = \int \frac{a_0 z^3 + 2a_1 z}{\sqrt{P(z)}} \, dz$$

del § 1 (in particolare, l'integrale  $E$  di LEGENDRE) presenta due poli semplici (con residui uguali e contrari) nei punti all'infinito dei due fogli della riemanniana, restando sempre finito altrove.

Infatti con la solita sostituzione  $z = 1/\zeta$  (cfr. paragrafo precedente) si ha successivamente

$$\begin{aligned} \frac{a_0 z^3 + 2a_1 z}{P(z)} \, dz &= - \frac{(a_0 + 2a_1 \zeta) d\zeta}{\zeta^2 \sqrt{a_0 + 4a_1 \zeta + 6a_2 \zeta^2 + 4a_3 \zeta^3 + a_4 \zeta^4}} = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{a_0} \zeta^2} (a_0 + 2a_1 \zeta) \left( 1 + \frac{4a_1}{a_0} \zeta + \frac{6a_2}{a_0} \zeta^2 + \dots \right)^{-1/2} = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{a_0} \zeta^2} (a_0 + 2a_1 \zeta) \left( 1 - \frac{2a_1}{a_0} \zeta + 3 \frac{2a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2} \zeta^2 - \dots \right) = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{a_0} \zeta^2} \left( a_0 + * - \frac{a_1^2 + 3a_0 a_2}{a_0} \zeta^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

dove l'asterisco \* pone in particolare risalto la sparizione del termine in  $\zeta$  e donde, integrando, segue

$$(42) \quad I_2 = \frac{\sqrt{a_0}}{\zeta} - \frac{a_1^2 + 3a_0 a_2}{a_0 \sqrt{a_0}} \zeta + \dots + \text{cost.};$$

$I_2$  ha dunque, come s'era annunciato, due poli semplici coi residui  $\pm \sqrt{a_0}$  nei due punti impropri dei due fogli della riemanniana.

Se invece  $a_0 = 0$ , come per esempio accade nella forma di WEIERSTRASS, allora si ha:

$$\begin{aligned} \frac{z \, dz}{\sqrt{P(z)}} &= - \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{4a_1 \zeta + 6a_2 \zeta^2 + 4a_3 \zeta^3 + \zeta^4}} = \\ &= - \frac{1}{2 \sqrt{a_1} \zeta^{3/2}} \left( 1 + \frac{3a_2}{2a_1} \zeta + \dots \right)^{-1/2} = - \frac{1}{2 \sqrt{a_1}} \left( \zeta^{-3/2} - \frac{3a_2}{4a_1} \zeta^{-1/2} + \dots \right) \end{aligned}$$

e lo sviluppo (42) viene sostituito dall'altro:

$$(42') \quad I_2 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \left( \zeta^{-1/2} + \frac{3a_2}{2a_1} \zeta^{1/2} + \dots \right) + \text{cost.}$$

che pone bene in luce come in questo caso il punto all'infinito, comune ai due fogli, sia la sovrapposizione di un polo e di un punto di diramazione semplici.

Quanto alla *polidromia degli integrali di seconda specie*, non vi è naturalmente quasi nulla da cambiare a quanto si è detto nel paragrafo precedente per quelli di prima specie, epperò la (35) continua a valere sostanzialmente immutata se al posto di  $I_1(z)$  si pone  $I_2(z)$ ; si ha cioè

$$(43) \quad I_2(z) = I_2^{(0)}(z) + 2m\tilde{\omega} + 2n\tilde{\omega}',$$

avendo posto

$$(44) \quad 2\tilde{\omega} = \oint_{\gamma_1} \frac{\alpha_1 z^2 + 2\alpha_1 z}{\sqrt{P(z)}} dz, \quad 2\tilde{\omega}' = \oint_{\gamma_2} \frac{\alpha_2 z^2 + 2\alpha_2 z}{\sqrt{P(z)}} dz.$$

Se l'equazione fondamentale ha la forma di WEIERSTRASS, la riduzione dell'integrale fondamentale di 2<sup>a</sup> specie

$$I_2(z) = \int \frac{z dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

alle funzioni studiate nel Capitolo precedente, pur non essendo così immediata come nel caso dell'integrale di 1<sup>a</sup> specie (ch'è la funzione inversa  $\wp^{-1}$  della  $\wp$ ) è però sempre molto facile. Invero, posto

$$(45) \quad z = \wp u,$$

l'integrale precedente prende la forma

$$I_2(z) = \int \wp u du$$

donde, ricordando che  $\zeta u$  è l'integrale di  $-\wp u du$  e tenendo conto che  $u$  è determinata solo a meno di multipli di  $2\omega$  e  $2\omega'$ , segue

$$I_2(z) = -\zeta(u + 2m\omega + 2n\omega');$$

ma quando  $u$  aumenta di un multiplo qualunque di  $2\omega$  o  $2\omega'$   $\zeta u$  aumenta dello stesso multiplo di  $2\eta$  o  $2\eta'$  (form. (63) del Cap. I), quindi avremo in definitiva (cambiando  $m$  ed  $n$  rispettivamente in  $-m$  e  $-n$ ):

$$(46) \quad I_2(z) = \int \frac{z dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = -\zeta u + 2m\eta + 2n\eta', \quad (\wp u = z)$$

o, in forma più concisa,

$$(46') \quad I_2(z) = -\zeta(\wp^{-1} z).$$

Ne segue in particolare che i periodi  $2\tilde{\omega}$  e  $2\tilde{\omega}'$  dati dalle (44) possono nel caso attuale, senz'altro identificarsi con le costanti  $2\eta$  e  $2\eta'$  del Capitolo precedente.

Se invece l'equazione fondamentale ha la forma di LEGENDRE, l'integrale fondamentale di seconda specie cioè, in sostanza, la funzione  $E(k, \varphi)$  definita dalla

seconda delle (32), non richiede ulteriori trasformazioni, trattandosi di una funzione di comodo maneggio di cui, come della  $F(\varphi, k)$ , esistono estese tabelle numeriche. Propriamente, se  $\varphi$  è reale e  $k$ , pure reale, è compreso fra 0 e 1,  $E(\varphi, k)$  cresce sempre, al pari di  $F(\varphi, k)$ , al cre-

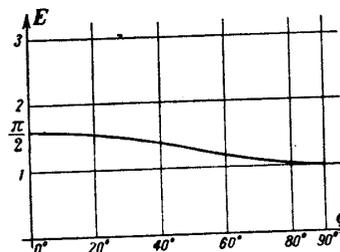


Fig. 21.

scere di  $\varphi$  da 0 e  $\pi/2$ , e propriamente da zero ad un certo valore  $E = E(\pi/2, k)$ , dato dalla formula

$$(47) \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

che prende anche qui il nome di *integrale completo* (di seconda specie). Solo che stavolta, a differenza di quel che succedeva nel caso di  $\mathbf{K}$ ,  $E(k)$  *decregge* da  $\pi/2$  a 1 al crescere di  $k$  da 0 ad 1, come è illustrato nella fig. 21 (1) e come facilmente si desume dalla (47).

Inoltre vale lo sviluppo in serie, analogo alla formula (40):

$$(48) \quad E = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right].$$

Passiamo ora a dir qualcosa degli integrali ellittici di *terza specie*, nei quali si osserva il fatto nuovo della presenza di *singolarità logaritmiche*. Propriamente l'integrale fondamentale di terza specie

$$I_3(z) = \int \frac{dz}{(z - a)\sqrt{P(z)}}$$

(1) In cui si è posto, come dianzi,  $k = \sin \alpha$ .

che manifestamente resta finito tanto all'infinito quanto nei punti di diramazione  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$ , presenta due punti d'infinito logaritmico con le rispettive parti principali

$$\frac{1}{\sqrt{P(c)}} \log(z-c) \quad \text{e} \quad -\frac{1}{\sqrt{P(c)}} \log(z-c)$$

nei due punti sovrapposti

$$z=c, \quad \sqrt{P(z)} = +\sqrt{P(c)} \quad \text{e} \quad z=c, \quad \sqrt{P(z)} = -\sqrt{P(c)}$$

della riemanniana dell'equazione fondamentale (2).

Ne segue che l'integrale in discorso non ha più *due* « periodi » come i precedenti, bensì *tre* e precisamente che i suoi valori in un punto  $z$  sono legati ad uno qualsiasi  $I_3^{(0)}(z)$  di essi dalla formula

$$(49) \quad I_3(z) = I_3^{(0)}(z) + 2m\Omega + 2n\Omega' + 2p \frac{\pi i}{\sqrt{P(c)}}$$

dove  $m, n, p$  sono tre numeri interi qualsiasi e

$$(50) \quad 2\Omega = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{(z-c)\sqrt{P(z)}}, \quad 2\Omega' = \oint_{\gamma_3} \frac{dz}{(z-c)\sqrt{P(z)}}$$

supposto che i cicli  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  siano stati determinati in modo che i due punti  $z=c$  non cadano nell'interno di essi.

Occupiamoci finalmente della riduzione degli integrali di terza specie sotto la forma di WEIERSTRASS alle funzioni studiate nel Capitolo precedente, cominciando con l'osservare che, essendo manifestamente

$$\int \frac{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3} + \sqrt{4c^3 - g_2c - g_3}}{(x-c)\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} dx = \\ = \log(x-c) + \sqrt{4c^3 - g_2c - g_3} \int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}},$$

nel caso in esame potrà assumersi come integrale fondamentale di terza specie il seguente

$$(51) \quad I_3' = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3} + \sqrt{4c^3 - g_2c - g_3}}{(x-c)\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} dx.$$

Ciò posto, operiamo la stessa trasformazione  $x = \wp\xi$  di più sopra e poniamo altresì

$$\wp\gamma = c;$$

avremo così:

$$I_3' = \frac{1}{2} \int \frac{\wp'\xi + \wp'\gamma}{\wp\xi - \wp\gamma} d\xi + \text{cost.},$$

donde, servendosi della formula (68) del Cap. I ove sia stato posto  $u = \xi, v = -\gamma$ , segue

$$I_3' = \int [\zeta(\xi - \gamma) - \zeta\xi + \zeta\gamma] d\xi + \text{cost.};$$

ma la funzione  $\zeta$  è la derivata logaritmica della  $\sigma$ , quindi sarà ancora

$$I_3' = \int \left[ \frac{d}{d\xi} \log \frac{\sigma(\xi - \gamma)}{\sigma\xi} + \zeta\gamma \right] d\xi + \text{cost.},$$

donde, integrando, segue

$$(52) \quad I_3' = \log \frac{\sigma(\xi - \gamma)}{\sigma\xi} + \zeta\gamma \cdot \xi + \text{cost.},$$

dunque, tenendo conto della indeterminazione che affetta  $\xi$  e delle (63) e (77) del Capitolo precedente, avremo in definitiva:

$$(53) \quad \boxed{I_3' = \log \frac{\sigma(\xi - \gamma)}{\sigma\xi} + \zeta\gamma \cdot \xi + 2m(\zeta\gamma \cdot \omega - \gamma\eta) + 2n(\zeta\gamma \cdot \omega' - \gamma\eta') + \text{cost.}} \\ (\wp\xi = x, \wp\gamma = c)$$

La formula ottenuta mostra in particolare che i tre periodi dell'integrale  $I_3'$  sono attualmente:

$$2(\zeta\gamma \cdot \omega - \gamma\eta), \quad 2(\zeta\gamma \cdot \omega' - \gamma\eta'), \quad 2\pi i,$$

epperò le quantità analoghe a quelle più sopra denotate con  $2\Omega$  e  $2\Omega'$  dovranno potersi esprimere quali opportune combinazioni lineari, a coefficienti interi, di queste tre quantità.

Concludendo:

Ogni integrale ellittico della forma (1) può, con operazioni puramente algebriche, ridursi ad una somma d'integ-

grali di tre tipi ben determinati (integrali ellittici di prima, seconda e terza specie,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ ) che, se l'equazione fondamentale ha la forma di Weierstrass (7), si calcolano con le formule:

$$(54) \quad \begin{cases} I_1(x) = \wp^{-1}x, \\ I_2(x) = -\zeta(\wp^{-1}x), \\ I_3'(x, c) = \log \frac{\sigma(\wp^{-1}x - \wp^{-1}c)}{\sigma(\wp^{-1}x)} + \zeta(\wp^{-1}c) \cdot \wp^{-1}x. \end{cases}$$

Se invece l'equazione fondamentale ha la forma di Legendre (21), allora gli integrali di prima e seconda specie sono sostanzialmente le funzioni  $F(\varphi, k)$  ed  $E(\varphi, k)$  di Legendre, di cui esistono comode tabelle numeriche. (Non così però per l'integrale di terza specie II).

§ 6. - Nuovo metodo d'inversione degli integrali ellittici.

Considerato il fatto che l'integrazione di funzioni irrazionali così semplici come quella che figura nell'integrale (1) ha richiesto l'introduzione di nuovi tipi di trascendenti: funzioni ellittiche e connesse, potrebbe prevedersi che il problema, a prima vista assai più difficile, dell'integrazione delle funzioni ellittiche, richieda mezzi di gran lunga più elevati. Invece ciò non è. Propriamente, come poteva intravedersi da qualche caso già presentatosi, si ha che qualunque funzione ellittica  $f(u)$  di un certo corpo  $K$  (cioè dotata di certi periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$ ) può integrarsi con l'ausilio delle sole funzioni  $\wp u$ ,  $\zeta u$  e  $ou$  dello stesso corpo, nonché delle successive derivate di  $\wp u$ .

Infatti, basta all'uopo servirsi della formula (67) del Capitolo precedente (§ 8) che mostra come ogni funzione ellittica  $f(u)$  possa rappresentarsi come una combinazione lineare di funzioni  $\zeta$  e loro successive derivate. Precisamente basta integrare ambo i membri dell'ora ricordata formula per dedurne che

$$\int f(u)du = A_0u + \sum_h \left[ A_h \int \zeta(u - a_h)du - A_h' \zeta(u - a_h) + \dots + (-1)^{\nu_h-1} \frac{A^{(\nu_h-1)}}{(\nu_h-1)!} \zeta^{(\nu_h-2)}(u - a_h) \right] + \text{cost.}$$

cioè, tenuto conto che la  $\zeta u$  è la derivata logaritmica della  $ou$ ,

$$(55) \quad \int f(u)du = A_0u + \sum_h \left[ A_h \log \sigma(u - a_h) - A_h' \zeta(u - a_h) + \frac{1}{2!} A_h'' \zeta'(u - a_h) - \dots + (-1)^{\nu_h-1} \frac{A^{(\nu_h-1)}}{(\nu_h-1)!} \zeta^{(\nu_h-2)}(u - a_h) \right] + \text{cost.}$$

Dal risultato ottenuto può dedursi un nuovo metodo, concettualmente semplicissimo, per il calcolo o, come suole anche dirsi, per l'inversione dell'integrale ellittico generale (1).

Invero, supposto preventivamente eseguita la trasformazione indicata nel § 2, si da ottenere che l'equazione fondamentale si riduca alla forma di WEIERSTRASS (7), poniamo

$$(56) \quad x = \wp(u; g_2, g_3)$$

donde segue

$$y = \wp'(u; g_2, g_3).$$

La funzione integranda  $R(x, y)$  diverrà allora una funzione razionale di  $\wp$  e  $\wp'$ , cioè una funzione ellittica generale  $f(u)$  che, decomposta che sia in elementi semplici col metodo indicato nel § 8 del Capitolo precedente, potrà venir subito integrata con l'ausilio della (55). Finalmente sostituiamo  $\wp^{-1}u$  al posto di  $x$ , ed avremo il valore, in forma del tutto esplicita, dell'integrale proposto.

Si avrà così, fra l'altro, il grandissimo vantaggio che, se non occorre di avere in forma esplicita il legame fra la primitiva  $x$  e quella che figura nella (7), non è necessaria l'effettiva risoluzione dell'equazione biquadratica (10), perchè, come si è già avuto occasione di osservare,  $g_2$  e  $g_3$  possono calcolarsi razionalmente, per mezzo delle (16), in funzione dei coefficienti della biquadratica primitiva. Si può anzi mostrare che, in questo modo, si ottiene un metodo assai semplice per la risoluzione, per via trascendente, di una generica equazione di quarto grado.

Il nuovo metodo d'inversione è, come si vede, dal punto di vista concettuale quanto mai semplice ed elegante. Occorre però osservare che, dal punto di vista pratico, cioè dell'effettiva esecuzione dei calcoli, i vantaggi da esso offerti sono più apparenti che reali, perchè i calcoli algebrici cacciati dalla porta rientrano dalla finestra quando si deve decomporre la  $f(u)$  in elementi semplici, il che necessita la determinazione dei suoi poli cioè, in ultima analisi, la riso-

luzione di un'equazione algebrica. Inoltre, pur senza disconoscere i pregi della forma di WEIERSTRASS, non bisogna dimenticare che, se la questione considerata può ridursi a soli integrali di prima e seconda specie, ricorrendo alla forma di LEGENDRE invece che a quella di WEIERSTRASS si ha il grandissimo vantaggio di poter utilizzare le esistenti comode tabelle delle funzioni  $F(\varphi, k)$  ed  $E(\varphi, k)$ .

Osserviamo finalmente che la suaccennata difficoltà relativa alla necessità di risolvere la (10), nonostante che  $g_2$  e  $g_3$  siano funzioni razionali dei suoi coefficienti, per eseguire effettivamente la riduzione dell'integrale dato alla forma di WEIERSTRASS, può talvolta essere eliminata con una opportuna modificazione del metodo di riduzione indicato nel § 2. Per esempio, se è da calcolare l'integrale di prima specie

$$(57) \quad u = \int \frac{dz}{\sqrt{a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4}},$$

può utilizzarsi la formula (1):

$$(58) \quad z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v},$$

dove le funzioni ellittiche si riferiscono agli invarianti  $g_2$  e  $g_3$  dati dalle (16), e l'argomento costante  $v$  è stato calcolato mediante le due formule concordanti:

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \wp v = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0} \\ \wp' v = \frac{2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_2^2 a_3}{a_0 \sqrt{a_0}} \end{array} \right.$$

Inoltre si ha che

$$(60) \quad \frac{dz}{du} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} [\wp' u - \wp'(u+v)],$$

ciò che, fra l'altro, mostra come la radice quadrata di  $a_0$  vada presa con lo stesso segno del radicale che figura nella (57).

(1) Cfr. BIANCHI [2], pp. 371-374.

Funzioni di Jacobi.

§ 1. - Le tre funzioni sn, cn e dn.

Loro rapporti con le funzioni di Weierstrass.

Come si è già avuto occasione di accennare, le tre funzioni sn  $v$ , cn  $v$  e dn  $v$  <sup>(1)</sup>, poste da JACOBI a base della teoria delle funzioni ellittiche, nascono dall'inversione dell'integrale di LEGENDRE di prima specie:

$$v = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

che, ponendo  $x = \sin \varphi$  e fissando i limiti d'integrazione, può scriversi:

$$(1) \quad v = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Precisamente si pone:

$$(2) \quad \boxed{\text{sn } v = \sin \varphi, \quad \text{cn } v = \cos \varphi, \quad \text{dn } v = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

donde seguono immediatamente le due relazioni algebriche:

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} \text{sn}^2 v + \text{cn}^2 v &= 1 \\ \text{dn}^2 v + k^2 \text{sn}^2 v &= 1 \end{aligned}}.$$

Naturalmente queste tre funzioni devono potersi ricondurre alla  $\wp u$  di WEIERSTRASS. La cosa può anzi vedersi assai facilmente servendosi delle considerazioni generali sugli integrali ellittici svolte nel Capitolo precedente. Propriamente converrà partire dalla definizione integrale della funzione  $\wp$  e cioè dalla (31) del Cap. I che,

<sup>(1)</sup> Si comprenderà presto il motivo per cui indichiamo qui l'argomento con  $v$  invece che con  $u$ .

con un irrilevante cambiamento di  $u$  in  $-u$ , potremo scrivere

$$u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}, \quad (\wp u = z),$$

e che trasformeremo ora col metodo indicato nel § 3 del Cap. II, in modo da ridurre il radicale alla forma canonica di LEGENDRE.

All'uopo, avvalendoci del quadro a pp. 76-77 (II, 3° sottocaso), dopo aver identificato  $a_1, a_2, a_3$  rispettivamente con  $e_3, e_2, e_1$ , pratichiamo la sostituzione:

$$z = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \varphi};$$

avremo così, posto

$$(4) \quad \boxed{k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}},$$

l'equazione:

$$u = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

che, servendosi del simbolo sn può scriversi:

$$\sin \varphi = \text{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} u);$$

ma, d'altra parte, è

$$\wp u = z = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \varphi},$$

dunque sussiste l'identità

$$(5) \quad \boxed{\wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\text{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} u)}}.$$

Se ne conclude, tenuto conto delle (3), che le tre funzioni di JACOBI relative al modulo (4) sono suscettibili delle espressioni seguenti per mezzo della  $\wp u$ :

$$(6) \quad \boxed{\begin{aligned} \text{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} u) &= \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp u - e_3}} \\ \text{cn}(\sqrt{e_1 - e_3} u) &= \sqrt{\frac{\wp u - e_1}{\wp u - e_3}} \\ \text{dn}(\sqrt{e_1 - e_3} u) &= \sqrt{\frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3}} \end{aligned}}.$$

Le formule trovate consentono di dedurre agevolmente buona parte delle proprietà delle funzioni jacobiane da quelle della  $\wp u$ . Per esempio esse mostrano a colpo d'occhio che le  $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$  sono *funzioni omogenee di grado zero* dei due semiperiodi  $\omega$  e  $\omega'$ , ossia che dipendono soltanto dal rapporto  $\omega'/\omega = \tau$  fra questi. Presentano però l'inconveniente di contenere dei radicali che, con le loro indeterminazioni, non consentono di scorgere senz'altro, ispezionando le (6), una delle più basilari proprietà di  $sn$ ,  $cn$  e  $dn$ , e cioè il loro carattere di funzioni *uniformi*.

Quest'inconveniente potrebbe eliminarsi con una facile discussione imperniata sul fatto che la funzione  $\wp(u) - e_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) ha uno zero *doppio* per  $u = e_\alpha$ ; è però più utile servirsi di una delle formule stabilite nel Cap. I per la funzione  $\sigma$  di WEIERSTRASS, e precisamente della (80) del § 9, da cui, posto  $v = \omega_\alpha$ , si trae

$$\wp u - \wp \omega_\alpha = - \frac{\sigma(u + \omega_\alpha)\sigma(u - \omega_\alpha)}{\sigma^2 u \sigma^2 \omega_\alpha},$$

ma, in virtù della « relazione di periodicità » (77) della funzione  $\sigma$  e della sua disparità, abbiamo d'altra parte che

$$\sigma(u + \omega_\alpha) = \sigma(u - \omega_\alpha + 2\omega_\alpha) = -\sigma(u - \omega_\alpha)e^{2\eta_\alpha u} = \sigma(\omega_\alpha - u)e^{2\eta_\alpha u};$$

quindi sussiste la formula

$$(7) \quad \wp u - \wp \omega_\alpha = \left[ \frac{\sigma(\omega_\alpha - u)e^{\eta_\alpha u}}{\sigma u \sigma \omega_\alpha} \right]^2, \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

o anche, sotto forma più semplice,

$$(8) \quad \wp u - e_\alpha = \left( \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} \right)^2$$

avendo introdotto, accanto a  $\sigma u$ , le tre altre funzioni intere  $\sigma_1 u$ ,  $\sigma_2 u$  e  $\sigma_3 u$  definite dalle formule:

$$(9) \quad \sigma_\alpha u = \frac{\sigma(\omega_\alpha - u)e^{\eta_\alpha u}}{\sigma \omega_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Riservandoci di tornare da qui ad un momento su queste nuove funzioni, osserviamo senz'altro come le (8), mostrando che le tre

differenze  $\wp u - e_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) sono quadrati perfetti di funzioni uniformi, eliminino ogni indeterminazione dalle formule (6).

Invero, se si conviene una volta per sempre che sia:

$$(10) \quad \sqrt{\wp u - e_\alpha} = + \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u},$$

ciò che, in particolare, implica una determinata scelta delle possibili determinazioni di tutti i radicali del tipo  $\sqrt{e_\beta - e_\alpha}$ , chè, coerentemente con la (10), dovrà assumersi:

$$(11) \quad \sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \sqrt{\wp \omega_\beta - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha \omega_\beta}{\sigma \omega_\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (1);$$

la prima delle (6) potrà scriversi sotto la forma

$$sn(\sqrt{e_1 - e_3}u) = \pm \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u},$$

dove, avendosi a che fare con un'uguaglianza fra funzioni *uniformi*, nel secondo membro sarà da prendere *o sempre il segno + o sempre il segno -*. Anzi, con una semplice discussione che per brevità omettiamo, è facile vedere che se si conviene che, nel caso reale, l'integrale (1) sia da calcolare com'è stato precisato nel § 3 del Capitolo precedente (cammino d'integrazione rettilineo e radicale positivo) il segno del secondo membro dovrà essere necessariamente il +, pervenendo così alla formula

$$(12) \quad \boxed{sn(\sqrt{e_1 - e_3}u) = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u}},$$

(1) Questa convenzione, com'è facile controllare, implica in particolare che:

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{e_3 - e_2} = -i \sqrt{e_2 - e_3}, \quad \sqrt{e_3 - e_1} = -i \sqrt{e_1 - e_3}, \\ \sqrt{e_2 - e_1} = -i \sqrt{e_1 - e_2}. \end{array} \right.$$

Vale inoltre la pena di osservare esplicitamente che, nel seguito, per *esser coerenti con la convenzione ora adottata*, dovremo considerare questi radicali  $\sqrt{e_\beta - e_\alpha}$ , come qualcosa *tutto d'un pezzo*, cioè trasformarli *in blocco*, servendoci delle (11), e non operare separatamente su  $e_\alpha$  ed  $e_\beta$ , il che potrebbe dar luogo ad errori di segno.

cui si associano analogamente le altre:

$$(12') \quad \boxed{\operatorname{cn}(\sqrt{e_1 - e_3}u) = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}},$$

$$(12'') \quad \boxed{\operatorname{dn}(\sqrt{e_1 - e_3}u) = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}}.$$

Queste formule mostrano, fra l'altro, come  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  e  $\operatorname{dn}$  siano funzioni uniformi, non solo se pensate dipendenti da  $u$ , ma anche se si pensano dipendenti da  $\tau$ .

Ciò posto indichiamo qualche proprietà delle nuove trascendenti intere  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  di cui si è rivelata opportuna l'introduzione.

Anzitutto si ha che le tre funzioni in esame sono legate fra loro e con la  $\wp u$  da due relazioni algebriche indipendenti, che si ottengono immediatamente eliminando  $\wp u$  fra le tre (8), con che viene:

$$(13) \quad \boxed{\sigma_1^2 u + e_1 \sigma^2 u = \sigma_2^2 u + e_2 \sigma^2 u = \sigma_3^2 u + e_3 \sigma^2 u}.$$

In secondo luogo osserviamo che dalla (77) del Cap. I e dalla disparità della funzione  $\sigma$  segue subito che

$$\sigma(\omega_a - u)e^{\eta_a u} = \sigma(\omega_a + u)e^{-\eta_a u};$$

pertanto le formule di definizione (9) possono anche scriversi sotto la forma:

$$(9') \quad \boxed{\sigma_a u = \frac{\sigma(\omega_a + u)e^{-\eta_a u}}{\sigma \omega_a}} \quad (a=1, 2, 3)$$

e se ne deduce in particolare che le  $\sigma_a$ , al contrario della  $\sigma$ , sono funzioni pari di  $u$ , cioè non si alterano cambiando  $u$  in  $-u$ . Inoltre si ha manifestamente che  $\sigma_a(0) = 1$ .

Quanto alla « relazione di periodicità » delle  $\sigma_a$ , cioè della relazione fra  $\sigma_a u$  e  $\sigma_a(u+w)$ , dove  $w$  è, al solito, un periodo qualsiasi:

$$w = 2m\omega + 2n\omega',$$

essa si deduce facilmente da quella della  $\wp u$  ossia dalla già più volte citata formula (77) del Cap. I; propriamente si ha che

$$\sigma_a(u+w) = \frac{\sigma(\omega_a + u + w)}{\sigma \omega_a} e^{-\eta_a(u+w)} = \varepsilon \sigma_a u e^{\tilde{\eta}\left(u + \frac{w}{2}\right) + \tilde{\eta}\omega_a - \eta_a w}.$$

Ma si ha manifestamente

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}\omega_a - \eta_a w &= (2m\eta_1 + 2n\eta_3)\omega_a - \eta_a(2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \\ &= 2m(\eta_1\omega_a - \eta_a\omega_1) - 2n(\eta_3\omega_a - \eta_a\omega_3), \end{aligned}$$

quindi, tenuto conto che alla relazione di LEGENDRE (Cap. I, formula (65)) può anche darsi la forma:

$$(14) \quad \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \eta_2\omega_3 - \eta_3\omega_2 = \frac{1}{2}\pi i,$$

avremo che

$$\tilde{\eta}\omega_a - \eta_a w = \begin{cases} -n\pi i & (\text{se } a=1), \\ (m-n)\pi i & (\text{se } a=2), \\ m\pi i & (\text{se } a=3), \end{cases}$$

epperò, tenuto anche conto del valore di  $\varepsilon$  dato dalla (77') del Cap. I, avremo in definitiva le formule:

$$(15) \quad \boxed{\begin{aligned} \sigma_1(u+w) &= (-1)^{m(n+1)} e^{\tilde{\eta}\left(u + \frac{w}{2}\right)} \sigma_1 u \\ \sigma_2(u+w) &= (-1)^{mn} e^{\tilde{\eta}\left(u + \frac{w}{2}\right)} \sigma_2 u \\ \sigma_3(u+w) &= (-1)^{(m+1)n} e^{\tilde{\eta}\left(u + \frac{w}{2}\right)} \sigma_3 u \end{aligned}}$$

Finalmente osserviamo che moltiplicando le tre (10) fra loro, in virtù dell'equazione differenziale della  $\wp u$ , si ha la formula interessante

$$(16) \quad \wp' u = -2 \frac{\sigma_1 u \sigma_2 u \sigma_3 u}{\sigma^3 u},$$

dove il segno è stato determinato tenendo conto del noto comportamento di  $\wp' u$  per  $u \rightarrow 0$ . Questa formula mostra fra l'altro che, stante la convenzione adottata circa la determinazione dei radicali  $\sqrt{\wp u - e_a}$ , volendo estrarre la radice quadrata dalla (29) del Cap. I, se ne deve dedurre che

$$(16') \quad \wp' u = -2\sqrt{\wp u - e_1}\sqrt{\wp u - e_2}\sqrt{\wp u - e_3}.$$



Ne segue in particolare che *tutt'e tre le funzioni in esame sono funzioni ellittiche di secondo ordine*, cioè che, fra l'altro, implica (Cap. I, § 3) che i periodi indicati nella tabellina di cui più sopra (p. 103), sono certo *primitivi*.

Quanto all'effettivo calcolo dei periodi in discorso, e cioè delle due quantità  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}'$ , possiamo all'uopo servirci delle considerazioni generali svolte nel § 4 del Capitolo precedente, osservato che i periodi  $4\mathbf{K}$  e  $2i\mathbf{K}'$  della funzione  $x = \operatorname{sn} v$  coincidono manifestamente con quelli dell'integrale ellittico di prima specie

$$v = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

per cui può assumersi:

$$a_1 = \frac{1}{k}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = -\frac{1}{k},$$

il che implica che potranno considerarsi quali cicli  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  (vedi paragrafo citato) rispettivamente i *segmenti doppi*  $(-1, 1)$  e  $(1, 1/k)$  dell'asse reale del piano  $x$ . Avremo così, con ovvie semplificazioni, le formule

$$\mathbf{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad i\mathbf{K}' = \int_{i/k}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

che, ponendo rispettivamente

$$x = \sin \varphi, \quad x = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}$$

con

$$(22) \quad \boxed{k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}},$$

diventano, com'è facile verificare,

$$(23) \quad \mathbf{K} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \mathbf{K}' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}}.$$

Se ne conclude, servendosi della notazione  $\mathbf{K}(k)$  già introdotta nel succitato paragrafo per l'*integrale completo di Legendre* corrispondente al modulo  $k$ , che sussistono le formule

$$(24) \quad \boxed{\mathbf{K} = \mathbf{K}(k), \quad \mathbf{K}' = \mathbf{K}(k') = \mathbf{K}(\sqrt{1 - k^2})}.$$

Le formule trovate che, fra l'altro, giustificano l'impiego della lettera  $\mathbf{K}$  nella denotazione dei periodi delle funzioni di JACOBI, mostrano come, *quando  $k$  è reale e compreso fra 0 ed 1* (ch'è il solo caso importante dal punto di vista applicativo <sup>(1)</sup>),  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}'$  sono *entrambi reali* epperò *le reti dei periodi di  $\operatorname{sn} v$  e  $\operatorname{dn} v$  sono tutt'e due rettangolari*. Non così invece quella di  $\operatorname{cn} v$  (essendo  $4\mathbf{K}$  e  $2(\mathbf{K} + i\mathbf{K}')$  i periodi di questa funzione), almeno finchè si vuol considerare una coppia di periodi *primitivi*. Nella pratica però, nel caso in esame, si suole associare anche a  $\operatorname{cn} v$  una rete di rettangoli, sostituendo tacitamente ai due periodi suindicati i due, *non primitivi*,  $4\mathbf{K}$  e  $4i\mathbf{K}'$ .

Osserviamo inoltre che le formule (24), unitamente alla (4) e alle (19), sono quelle che vengono ordinariamente usate (in luogo delle (36') del Capitolo precedente) per l'effettivo calcolo dei periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$  delle funzioni di WEIERSTRASS corrispondenti a dati valori di  $g_2$  e  $g_3$  e quindi di  $e_1, e_2, e_3$ . Tanto più che, con accorgimenti del genere di quelli già indicati nel § 3 del Cap. II (su cui dovremo pure tornare più innanzi), nell'ipotesi che  $g_2$  e  $g_3$  siano *reali*, può sempre ottenersi, indipendentemente dal segno del discriminante  $\Delta$ , che sia soddisfatta la suaccennata condizione di  $k$  reale e compreso fra 0 ed 1, sì da poter servirsi pel calcolo di  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}'$  delle comuni tabelle della funzione  $\mathbf{K}(k)$ .

Continuando nello studio delle funzioni di JACOBI notiamo ora che, come immediatamente risulta dalle (18), *la funzione  $\operatorname{sn} v$  è una funzione dispari del suo argomento, mentre invece  $\operatorname{cn} v$  e  $\operatorname{dn} v$  sono funzioni pari*. Si ha cioè

$$(25) \quad \operatorname{sn}(-v) = -\operatorname{sn} v, \quad \operatorname{cn}(-v) = \operatorname{cn} v, \quad \operatorname{dn}(-v) = \operatorname{dn} v,$$

epperò, tenendo conto delle (21), si avrà pure che

$$(25') \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(2\mathbf{K} - v) = \operatorname{sn} v, \\ \operatorname{cn}(2\mathbf{K} - v) = \operatorname{cn}(2i\mathbf{K}' - v) = -\operatorname{cn} v, \\ \operatorname{dn}(2i\mathbf{K}' - v) = -\operatorname{dn} v. \end{cases}$$

Inoltre, tenuto conto che se in un punto si conosce il valore di una delle tre funzioni  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  e  $\operatorname{dn}$ , le (3) consentono di calco-

<sup>(1)</sup> Si ricordi all'uopo quanto è stato detto nella seconda parte del § 3 del Capitolo precedente.

lare facilmente il valore delle altre due (a meno del segno, che potrà essere determinato a mezzo delle (18) o con altri ripieghi), potremo subito calcolare i valori delle funzioni in esame nei nodi del reticolato di p. 104, e cioè per tutti i mezzi periodi ed alcuni quarti di periodi. Si giunge così ai risultati condensati nella seguente tabella, pel cui uso basta tener presente che essa è da considerare come una schematizzazione del piano complesso  $v$ :

$2iK'$	sn	0	-1	0	1	0
	cn	1	0	-1	0	1
	dn	-1	$-k'$	-1	$-k'$	-1
$iK'$	sn	$\infty$	$-1/k$	$\infty$	$1/k$	$\infty$
	cn	$\infty$	$ik'/k$	$\infty$	$-ik'/k$	$\infty$
	dn	$\infty$	0	$\infty$	0	$\infty$
0	sn	0	-1	0	1	0
	cn	-1	0	1	0	-1
	dn	1	$k'$	1	$k'$	1
		$-2K$	$-K$	0	$K$	$2K$

I valori di  $k$  e  $k'$  che figurano in questa tabella sono da intendersi definiti (in valore e «segno») dalle formule (confrontare con la (4) e la (22)):

$$(26) \quad k = \frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad k' = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

dove pei radicali sono da assumersi le determinazioni definite senza ambiguità dalle (11).

La fig. 22, che si riferisce alla funzione  $sn v$  nel caso di  $k = \sqrt{0,2}$ , dà un'idea dell'andamento generale di questa funzione sul piano complesso per mezzo delle linee  $\Re(sn v) = \text{cost.}$  (tratteggiate; quote ai margini della figura) e delle linee  $\Im(sn v) = \text{cost.}$  (a tratto pieno; quote nell'interno), cioè avvalendosi dello stesso metodo di rappresentazione adoperato nel Cap. I (fig. 8) per la funzione  $\wp u$ .

Le fig. 23 e 24 invece, tratte dalle più volte citate *Funktio-*

*nentafeln* di JAHNKE-EMDE, si riferiscono rispettivamente alle funzioni  $cn u$  e  $dn u$  nel caso di  $k=0,8$ , di cui vengono rappresentate assonometricamente le superficie «E» (F. A., Cap. I, § 6), cioè le

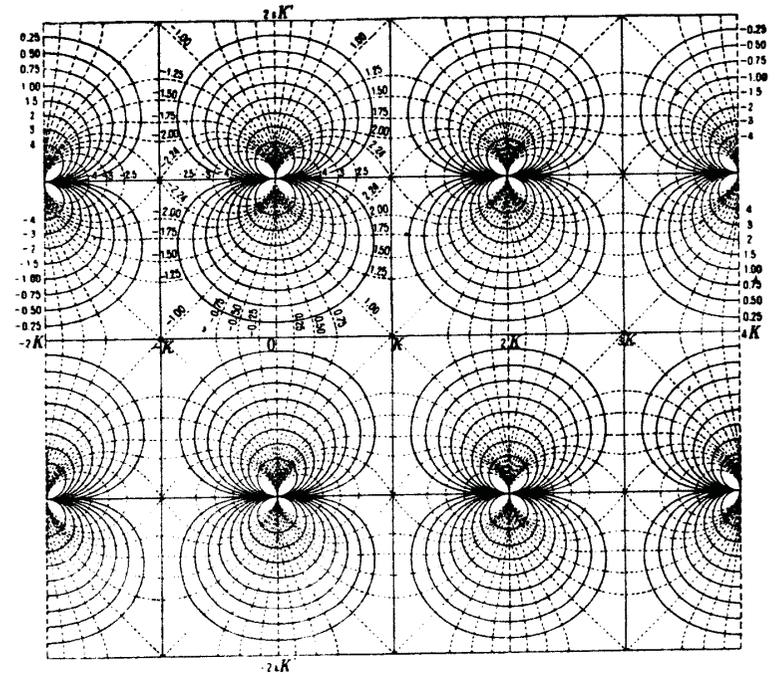


Fig. 22.

superficie aventi per terze coordinate  $|cn u|$  e  $|dn u|$  rispettivamente.

Esaminando queste figure un po' superficialmente parrebbe che i periodi delle tre funzioni non coincidessero con quelli della tabellina a p. 103, per esempio parrebbe che il periodo reale di  $sn v$  fosse  $2K$  invece che  $4K$ . Guardando però le cose più da vicino, e propriamente badando ai segni delle quote (fig. 22) o, rispettivamente, ai segnati valori delle anomalie di  $cn u$  o  $dn u$  (fig. 23 e 24), si riconosce subito che i periodi sono proprio quelli indicati nella nostra tabella.

Quanto ai valori delle funzioni di JACOBI per argomenti reali, si vede anzitutto immediatamente che, supposto  $k$  reale e compreso

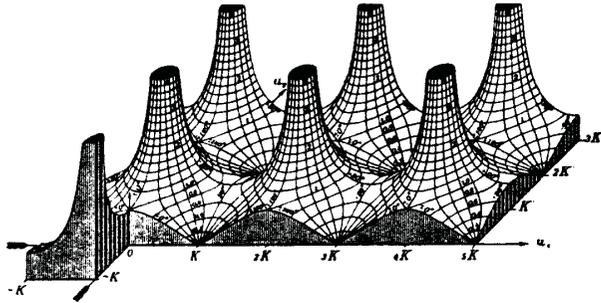


Fig. 23.

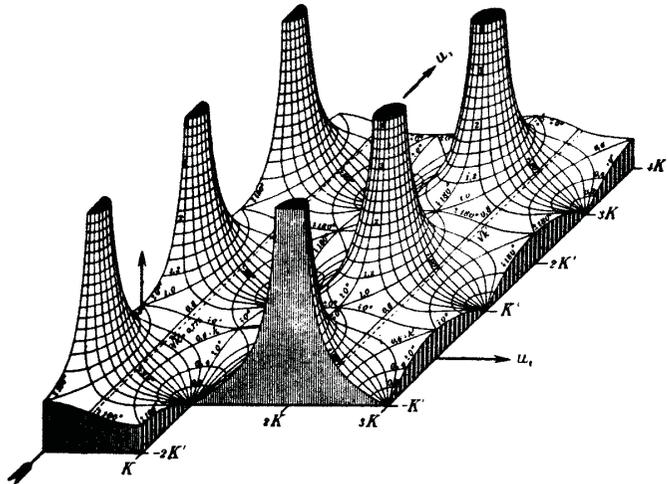


Fig. 24.

fra 0 ed 1,  $\text{sn } v$ ,  $\text{cn } v$  e  $\text{dn } v$  sono tutt'e tre sempre reali. Inoltre, tenendo conto delle (3) nonchè della tabella a p. 107, si riconosce ulteriormente che  $\text{sn } v$  e  $\text{cn } v$  oscillano fra  $-1$  ed  $1$ , mentre  $\text{dn } v$ , sempre positiva, oscilla fra  $k'$  e  $1$ . Si ha cioè l'andamento illustrato nella fig. 25, che si riferisce al caso di  $k = \sqrt{0,9}$ .

Notiamo infine che pel calcolo numerico di  $\text{sn } v$ ,  $\text{cn } v$  e  $\text{dn } v$

per  $v$  reale, se non si hanno a disposizione le comode tabelle speciali di MILNE-THOMSON [24], può ricorrersi ad una delle assai diffuse tabelle della funzione  $F(\varphi, k)$  di LEGENDRE (Cap. II, § 3).

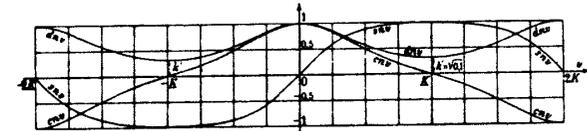


Fig. 25.

Invero se  $\varphi_0$  è il valore di  $\varphi$  in corrispondenza al quale e al valore di  $k$  che entra in considerazione la tabella fornisce  $F = v_0$  ( $0 \leq v_0 \leq K$ ), si ha manifestamente

$$\text{sn } v_0 = \sin \varphi_0, \quad \text{cn } v_0 = \cos \varphi_0, \quad \text{dn } v_0 = +\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_0}.$$

Altri metodi di calcolo si vedranno più avanti.

### § 3. - Equazioni differenziali, teoremi d'addizione ecc., delle funzioni di Jacobi.

I teoremi generali stabiliti nel Cap. I ci assicurano che  $\text{sn } v$ ,  $\text{cn } v$  e  $\text{dn } v$ , essendo funzioni ellittiche, dovranno soddisfare ad equazioni differenziali algebriche del 1° ordine e possedere teoremi d'addizione algebrici; vediamo dunque di ricavare esplicitamente queste equazioni e questi teoremi.

Le equazioni differenziali si ricavano immediatamente osservando che dalla (1) segue

$$(27) \quad \frac{d\varphi}{dv} = \frac{1}{\text{dn } v} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \text{dn } v;$$

avremo dunque:

$$\frac{d \text{sn } v}{dv} = \frac{d \sin \varphi}{d\varphi} = \cos \varphi \frac{d\varphi}{dv} = \text{cn } v \text{dn } v$$

e similmente:

$$\frac{d \text{cn } v}{dv} = \frac{d \cos \varphi}{d\varphi} = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dv},$$

$$\frac{d \text{dn } v}{dv} = \frac{d \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{d\varphi} = -\frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \text{dn } v = -k^2 \text{sn } v \text{cn } v.$$

Si hanno dunque le formole

$$(28) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}' v \equiv \frac{d \operatorname{sn} v}{dv} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \\ \operatorname{cn}' v \equiv \frac{d \operatorname{cn} v}{dv} = -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \\ \operatorname{dn}' v \equiv \frac{d \operatorname{dn} v}{dv} = -k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \end{cases}$$

cui, tenendo conto delle (3), sarebbe ben facile dar la forma di equazioni differenziali del 1° ordine e donde, con ulteriori derivazioni, segue

$$(29) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}'' v = -(1+k^2-2k^2 \operatorname{sn}^2 v) \operatorname{sn} v, \\ \operatorname{cn}'' v = -(1-2k^2 \operatorname{sn}^2 v) \operatorname{cn} v, \\ \operatorname{dn}'' v = -k^2(1-2 \operatorname{sn}^2 v) \operatorname{dn} v, \text{ ecc.} \end{cases}$$

Le formole trovate mostrano, fra l'altro, che le funzioni di JACOBI dipendono « razionalmente » dal quadrato  $k^2$  del modulo, così come la  $\wp u$  dipende razionalmente da  $g_2$  e  $g_3$ . Infatti, risultando le loro derivate prime, seconde ecc., tutte funzioni razionali di  $k^2$ , anche i coefficienti dei loro sviluppi in serie di TAYLOR risulteranno funzioni razionali di  $k^2$ . Propriamente, con un facile calcolo dei primi coefficienti, si hanno le formole (1):

$$(30) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(v, k) = v - (1+k^2) \frac{v^3}{3!} + (1+14k^2+k^4) \frac{v^5}{5!} - \dots \\ \operatorname{cn}(v, k) = 1 - \frac{v^2}{2!} + (1+4k^2) \frac{v^4}{4!} - (1+44k^2+16k^4) \frac{v^6}{6!} + \dots \\ \operatorname{dn}(v, k) = 1 - k^2 \frac{v^2}{2!} + k^2(4+k^2) \frac{v^4}{4!} - k^2(16+44k^2+k^4) \frac{v^6}{6!} + \dots \end{cases}$$

valide entro il cerchio avente per centro l'origine e per raggio la minima distanza dei poli da questa, cioè  $K'$  se  $K$  e  $K'$  sono reali.

Un'altra semplice applicazione delle (28), o più propriamente della (27), consiste nel ricavare delle nuove formole del genere delle (19) del paragrafo precedente, con l'ausilio delle quali potranno venire facilmente calcolate, nei casi che effettivamente si presentano nelle applicazioni, le quantità  $\eta$  ed  $\eta'$  incontrate nel Cap. I.

All'uopo partiamo dall'integrale di 2ª specie di LEGENDRE, o,

(1) Quando è opportuno porre in rilievo la dipendenza dal modulo, si scrive  $\operatorname{sn}(v, k)$  invece di  $\operatorname{sn} v$  ecc.

meglio, dalla definizione della funzione  $E(\varphi, k)$  di LEGENDRE (Cap. II, form. (32)):

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

operando la trasformazione

$$\sin \varphi = \operatorname{sn} v,$$

avremo così, avuto riguardo alla (27),

$$E(\varphi, k) = \int_0^v \sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v} \operatorname{dn} v dv$$

cioè

$$(31) \quad \boxed{E(\varphi, k) = \int_0^v \operatorname{dn}^2 v dv}$$

formula già in se stessa interessante, che, servendosi dell'ultima delle (6), diviene

$$E(\varphi, k) = \int_0^v \frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3} dv, \quad (\sqrt{e_1 - e_3} u = v)$$

ossia:

$$E(\varphi, k) = \sqrt{e_1 - e_3} \int_0^u \left(1 + \frac{e_3 - e_2}{\wp u - e_3}\right) du.$$

Ciò posto, per facilitare l'integrazione, serviamoci della formula relativa all'aumento di  $\omega_3$  nell'argomento di  $\wp u$ , cioè della terza delle (56) del Cap. I, avremo così, con facili trasformazioni,

$$E(\varphi, k) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^u [e_1 - \wp(u + \omega')] du$$

e se ne conclude che

$$E(\varphi, k) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} [e_1 \cdot u + \zeta(u + \omega') - \zeta(\omega')]$$

cioè che:

$$(32) \quad E(\varphi, k) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} [e_1 \cdot u + \zeta(u + \omega') - \eta'] \\ (\sin \varphi = \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} u));$$

formula da porsi accanto all'altra, quasi di per sè evidente:

$$(32') \quad F(\varphi, k) = v = \sqrt{e_1 - e_3} u, \quad \sin \varphi = \operatorname{sn} v = \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} u),$$

che qui scriviamo per consentire un confronto.

In particolare, supponendo  $v = \sqrt{e_1 - e_3} u = \mathbf{K}$ , il che implica  $u = \omega$ ,  $\varphi = \pi/2$ , si ha

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \mathbf{E}(k) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} [e_1 \omega + \zeta(\omega_2) - \eta']$$

donde, ricordando la (62') del Cap. I, segue la formula

$$(33) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} (e_1 \omega + \eta)$$

In modo perfettamente analogo, ma sostituendo a

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

il quadrato del *modulo complementare*:

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

il che si può interpretare come effetto di uno scambio di  $e_1$  con  $e_3$  (e conseguentemente di  $\omega$  con  $\omega'$ , di  $\eta$  con  $\eta'$  e di  $v$  con  $-iv$ ), si trova la formula analoga:

$$(33') \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}(k') = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}} (e_3 \omega' + \eta').$$

Le (33)-(33') risolte rispetto ad  $\eta$  ed  $\eta'$  forniscono le formule importanti:

$$(34) \quad \left. \begin{aligned} \eta &= \sqrt{e_1 - e_3} \left( \mathbf{E} - \frac{e_1}{e_1 - e_3} \mathbf{K} \right) \\ \eta' &= -i \sqrt{e_1 - e_3} \left( \mathbf{E}' + \frac{e_3}{e_1 - e_3} \mathbf{K}' \right) \end{aligned} \right\}$$

Notiamo infine che, in virtù delle (19) e delle (33)-(33'), la (65)

del Cap. I si muta nella relazione analoga:

$$(35) \quad \boxed{\mathbf{E}\mathbf{K}' + \mathbf{E}'\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{K}' = \frac{\pi}{2}}$$

ch'è la vera (storicamente) *relazione di Legendre*.

Passiamo ora ai *teoremi d'addizione* delle funzioni di JACOBI che, servendoci delle (6), potremmo ricavare da quello della §2. I calcoli cui si andrebbe così incontro sono però alquanto complicati; preferiamo perciò battere altra via, e propriamente partire dall'osservazione che, in virtù delle (20), le tre funzioni

$$f(v_1) = \operatorname{sn} v_1 \cdot \operatorname{sn}(v_1 + v_2), \quad g(v_1) = \operatorname{cn} v_1 \cdot \operatorname{cn}(v_1 + v_2), \\ h(v_1) = \operatorname{dn} v_1 \cdot \operatorname{dn}(v_1 + v_2),$$

(dove  $v_2$  denota una quantità *fissa* e, per momento, distinta dai punti  $m\mathbf{K} + ni\mathbf{K}'$ ) ammettono tutte gli stessi periodi  $2\mathbf{K}$ ,  $2i\mathbf{K}'$  e gli stessi poli  $v_1 = i\mathbf{K}'$ ,  $v_1 = i\mathbf{K}' - v_2$  ed equivalenti, e precisamente due poli semplici (i cui residui saranno ovviamente uguali e contrari) in ciascun parallelogrammo dei periodi. Per un teorema generale sulle funzioni ellittiche (Cap. I, § 3) ne segue che *convenienti* combinazioni lineari di due qualunque delle tre funzioni in discorso, i cui coefficienti dipenderanno dai residui dei poli, dovranno ridursi a delle costanti. Esisteranno dunque, in particolare, due costanti  $\alpha$ ,  $\beta$ , tali da aversi  $g + \alpha f = \text{cost.}$  e  $h + \beta f = \text{cost.}$ , cioè

$$\begin{cases} \operatorname{cn} v_1 \cdot \operatorname{cn}(v_1 + v_2) + \alpha \operatorname{sn} v_1 \cdot \operatorname{sn}(v_1 + v_2) = A, \\ \operatorname{dn} v_1 \cdot \operatorname{dn}(v_1 + v_2) + \beta \operatorname{sn} v_1 \cdot \operatorname{sn}(v_1 + v_2) = B, \end{cases}$$

dove  $A$  e  $B$  denotano due altre opportune costanti.

Per determinare le costanti in discorso poniamo anzitutto  $v_1 = 0$ , avremo così senz'altro:

$$A = \operatorname{cn} v_2, \quad B = \operatorname{dn} v_2;$$

se invece deriviamo prima rispetto a  $v_1$ , con che viene

$$\left\{ \begin{aligned} & -\operatorname{sn} v_1 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{cn}(v_1 + v_2) - \operatorname{cn} v_1 \operatorname{sn}(v_1 + v_2) \operatorname{dn}(v_1 + v_2) + \\ & \quad + \alpha \operatorname{cn} v_1 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{sn}(v_1 + v_2) + \\ & \quad + \alpha \operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn}(v_1 + v_2) \operatorname{dn}(v_1 + v_2) = 0 \\ & -k^2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{dn}(v_1 + v_2) - k^2 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{sn}(v_1 + v_2) \operatorname{cn}(v_1 + v_2) + \\ & \quad + \beta \operatorname{cn} v_1 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{sn}(v_1 + v_2) + \\ & \quad + \beta \operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn}(v_1 + v_2) \operatorname{dn}(v_1 + v_2) = 0 \end{aligned} \right.$$

e poi poniamo  $v_1=0$ , avremo similmente:

$$\alpha = \operatorname{dn} v_2, \quad \beta = k^2 \operatorname{cn} v_2;$$

avremo dunque, in definitiva, le due equazioni:

$$(36) \quad \begin{cases} \operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} (v_1 + v_2) + \operatorname{sn} v_1 \operatorname{dn} v_2 \operatorname{sn} (v_1 + v_2) = \operatorname{cn} v_2 \\ \operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} (v_1 + v_2) + k^2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \operatorname{sn} (v_1 + v_2) = \operatorname{dn} v_2, \end{cases}$$

che, per ragioni di continuità, non cesseranno di esser valide ancorchè  $v_2$ , contrariamente all'ipotesi più sopra fatta, coincidesse con uno dei punti  $mK + niK'$ .

Ciò posto cambiamo  $v_1$  e  $v_2$  rispettivamente in  $-v_1$  e  $v_1 + v_2$ , avremo così le due equazioni lineari in  $\operatorname{cn} (v_1 + v_2)$  e  $\operatorname{dn} (v_1 + v_2)$ :

$$(36') \quad \begin{cases} \operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2 - \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{dn} (v_1 + v_2) - \operatorname{cn} (v_1 + v_2) = 0 \\ \operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2 - k^2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} (v_1 + v_2) - \operatorname{dn} (v_1 + v_2) = 0 \end{cases}$$

donde si traggono ben facilmente i valori delle dette quantità razionalmente espressi mediante  $\operatorname{sn} v_1$ ,  $\operatorname{sn} v_2$ ,  $\operatorname{cn} v_1$  ecc., cioè i *teoremi d'addizione* delle funzioni  $\operatorname{cn}$  e  $\operatorname{dn}$ ; finalmente sostituiamo i valori così trovati nella prima delle (36) onde avere anche  $\operatorname{sn} (v_1 + v_2)$ ; giungeremo così, con brevi calcoli, alle fondamentali formole:

$$(37) \quad \begin{cases} \operatorname{sn} (v_1 + v_2) = \frac{\operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_2 \operatorname{dn} v_2 + \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{dn} v_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2} \\ \operatorname{cn} (v_1 + v_2) = \frac{\operatorname{cn} v_1 \operatorname{cn} v_2 - \operatorname{sn} v_1 \operatorname{dn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{dn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2} \\ \operatorname{dn} (v_1 + v_2) = \frac{\operatorname{dn} v_1 \operatorname{dn} v_2 - k^2 \operatorname{sn} v_1 \operatorname{cn} v_1 \operatorname{sn} v_2 \operatorname{cn} v_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v_1 \operatorname{sn}^2 v_2} \end{cases}$$

Le conseguenze che possono trarsi dalle (37), di cui alcune altre forme equivalenti si trovano nell'appendice di formole alla fine del volume, sono svariaticissime:

Anzitutto il fatto che, se si hanno a disposizione delle tavole numeriche che forniscono i valori di  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  e  $\operatorname{dn}$  per *argomento reale* (o si calcolino comunque questi valori), si può subito, con calcoli del tutto elementari, determinare il valore di  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  o  $\operatorname{dn}$  in un qualsiasi punto  $v_1 + iv_2$  del piano complesso.

Infatti le (37) riducono il calcolo di  $\operatorname{sn} (v_1 + iv_2)$ ,  $\operatorname{cn} (v_1 + iv_2)$  o  $\operatorname{dn} (v_1 + iv_2)$  a quello delle funzioni:

$$\operatorname{sn} v_1, \quad \operatorname{cn} v_1, \quad \operatorname{dn} v_1; \quad \operatorname{sn} iv_2, \quad \operatorname{cn} iv_2, \quad \operatorname{dn} iv_2$$

di cui le ultime tre si riconducono a funzioni jacobiane reali mediante le formole:

$$(38) \quad \begin{cases} \operatorname{sn} (iv, k) = i \frac{\operatorname{sn} (v, k')}{\operatorname{cn} (v, k')} \\ \operatorname{cn} (iv, k) = \frac{1}{\operatorname{cn} (v, k')} \\ \operatorname{dn} (iv, k) = \frac{\operatorname{dn} (v, k')}{\operatorname{cn} (v, k')} \end{cases}$$

immediatamente deducibili dalle (6) immaginando scambiate fra loro, come si è già più sopra fatto,  $e_1$  ed  $e_3$ .

Si trova così, per esempio, la formula

$$(39) \quad \operatorname{sn} (v_1 + iv_2, k) = \frac{\operatorname{sn} (v_1, k) \operatorname{dn} (v_2, k') + i \operatorname{sn} (v_2, k') \operatorname{cn} (v_2, k') \operatorname{cn} (v_1, k) \operatorname{dn} (v_1, k)}{\operatorname{cn}^2 (v_2, k') + k^2 \operatorname{sn}^2 (v_1, k) \operatorname{sn}^2 (v_2, k')},$$

e due formole analoghe per  $\operatorname{cn}$  e  $\operatorname{dn}$ .

Fra l'altro, la formula ora stabilita mostra come, per  $k$  reale e compreso fra 0 ed 1, la funzione  $\operatorname{sn} v$  sia *reale* sulle rette se-

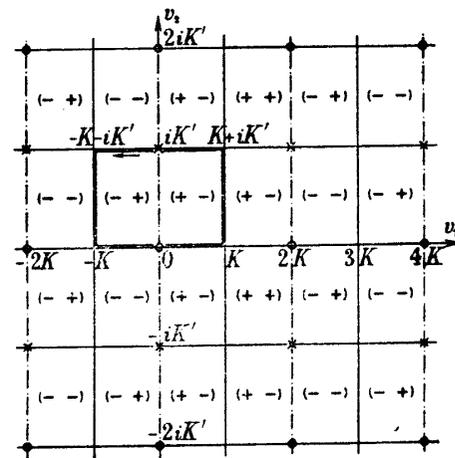


Fig. 26 (Funzione  $\operatorname{sn} v$ ).

gnate a tratto continuo nella fig. 26 (e solo *ivi*) ed *immaginaria pura* sulle rette segnate a « punto e tratto ». Naturalmente i punti

in cui queste rette si tagliano mutualmente o sono *poli* della funzione (segnati in figura con *crocette*) o *zeri* (segnati con *cerchietti*) o punti in cui s'annulla la derivata.

Nella figura sono inoltre indicati i segni della parte reale (primo

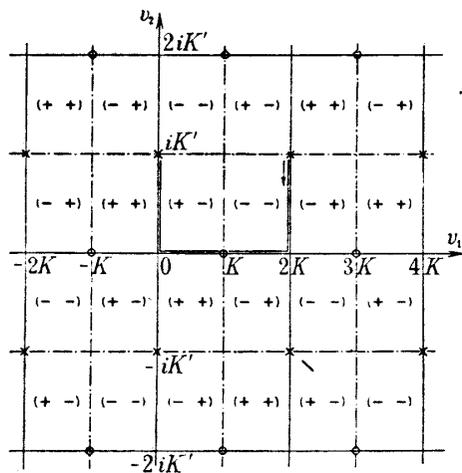


Fig. 27 (Funzione  $cn v$ ).

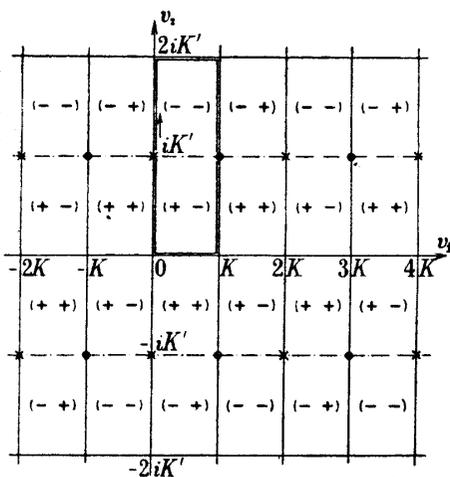


Fig. 28 (Funzione  $dn v$ ).

segno) e della parte immaginaria della funzione (secondo segno) entro ciascuna casella.

Per le funzioni  $cn v$  e  $dn v$  si ottengono due schemi analoghi illustrati nelle fig. 27 e 28.

Notiamo ancora che, con ragionamenti perfettamente analoghi a quelli svolti nel § 10 del Cap. I, si riconosce subito che sul peri-

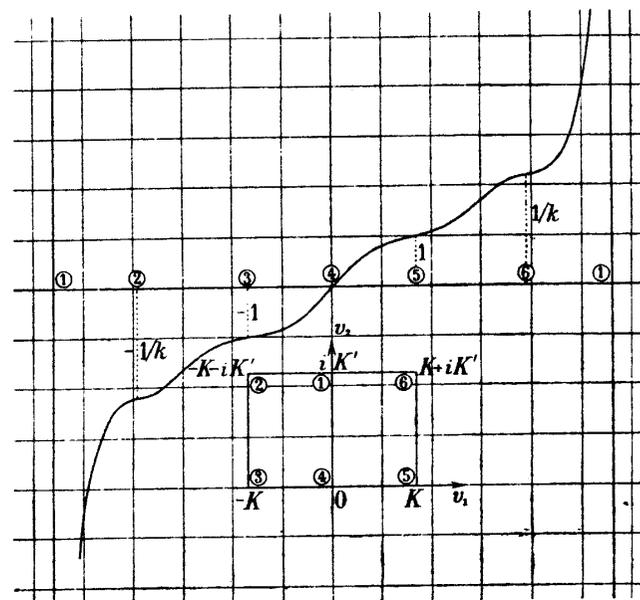


Fig. 29.

metro del rettangolo di vertici  $(-K - iK', -K, K, K + iK')$  (segnato nella fig. 26 con tratti raddoppiati) la funzione  $sn v$  assume tutti i valori reali fra  $-\infty$  e  $+\infty$  una ed una sola volta; anzi si ha che, come mostra la fig. 29 (analogha alla fig. 11 relativa alla funzione  $\wp u$ ),  $sn v$  cresce continuamente, da  $-\infty$  a  $+\infty$ , quando il perimetro di detto rettangolo viene percorso in verso positivo a partire dal punto  $iK'$ .

Considerazioni analoghe per le funzioni  $cn v$  e  $dn v$ .

Un'altra importante conseguenza delle formule d'addizione è

che da esse e dallo specchio a p. 107 possono subito trarsi le seguenti formule relative all'aggiunta di « *semiperiodi* » (4) all'argomento cui, per economia di spazio, diamo forma tabellare:

$$\text{sn}(v + m\mathbf{K} + ni\mathbf{K}')$$

$n \backslash m$	-1	0	1	2
0	$-\frac{\text{cn } v}{\text{dn } v}$	$\text{sn } v$	$\frac{\text{cn } v}{\text{dn } v}$	$-\text{sn } v$
$\pm 1$	$-\frac{\text{dn } v}{k \text{sn } v}$	$\frac{1}{k \text{sn } v}$	$\frac{\text{dn } v}{k \text{cn } v}$	$-\frac{1}{k \text{sn } v}$

$$\text{cn}(v + m\mathbf{K} + ni\mathbf{K}')$$

$n \backslash m$	-1	0	1	2
0	$k' \frac{\text{sn } v}{\text{dn } v}$	$\text{cn } v$	$-k' \frac{\text{sn } v}{\text{dn } v}$	$-\text{cn } v$
$\pm 1$	$\pm i \frac{k'}{k \text{cn } v}$	$\mp i \frac{\text{dn } v}{k \text{sn } v}$	$\mp i \frac{k'}{k \text{sn } v}$	$\pm i \frac{\text{dn } v}{k \text{sn } v}$

$$\text{dn}(v + m\mathbf{K} + ni\mathbf{K}')$$

$n \backslash m$	0	1
$\pm 2$	$-\text{dn } v$	$-\frac{k'}{\text{dn } v}$
$\pm 1$	$\mp i \frac{\text{cn } v}{\text{sn } v}$	$\pm ik' \frac{\text{sn } v}{\text{cn } v}$
0	$\text{dn } v$	$\frac{k'}{\text{dn } v}$

N. B. - Nelle orizzontali ove sono doppi segni son da considerare o sempre i segni superiori o sempre gl'inferiori.

(4) Più propriamente: semiperiodi o quarti di periodo.

Fra l'altro, dalle tabelle precedenti possono agevolmente ricavarsi i *residui dei poli* delle tre funzioni di JACOBI e si trova così che:

$$\text{nel polo } v = 2m\mathbf{K} + (2n+1)i\mathbf{K}' \left\{ \begin{array}{l} \text{sn } v \text{ ha il residuo } \frac{(-1)^m}{k} \\ \text{cn } v \text{ » » } \frac{(-1)^{m+n+1}}{k} i \\ \text{dn } v \text{ » » } (-1)^{n+1} i. \end{array} \right.$$

Ponendo nelle (37)  $v_1 = v_2 = v$  si ottengono le seguenti *formule di duplicazione dell'argomento*:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sn}(2v) = \frac{2 \text{sn } v \text{ cn } v \text{ dn } v}{1 - k^2 \text{sn}^4 v} \\ \text{cn}(2v) = \frac{\text{cn}^2 v - \text{sn}^2 v \text{ dn}^2 v}{1 - k^2 \text{sn}^4 v} \\ \text{dn}(2v) = \frac{\text{dn}^2 v - k^2 \text{sn}^2 v \text{ cn}^2 v}{1 - k^2 \text{sn}^4 v} \end{array} \right.$$

la cui particolarità più interessante è che il sistema da loro formato è razionalmente risolubile rispetto a  $\text{sn}^2 v$ ,  $\text{cn}^2 v$  e  $\text{dn}^2 v$ ; si ottengono così, cambiando  $v$  in  $v/2$ , assai facilmente le seguenti, semplici *formule di bisezione dell'argomento*:

$$(40') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sn} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{cn } v}{1 + \text{dn } v}} \\ \text{cn} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\text{dn } v + \text{cn } v}{1 + \text{dn } v}} \\ \text{dn} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\text{dn } v + k^2 \text{cn } v + k'^2}{1 + \text{dn } v}}, \end{array} \right.$$

le cui indeterminazioni di segno possono derimersi per mezzo dei dati contenuti nelle fig. 26, 27 e 28.

Queste formule permettono fra l'altro di calcolare facilmente i valori delle tre funzioni di JACOBI nei quarti (od ottavi) di periodo:  $\frac{1}{2}\mathbf{K}$ ,  $\frac{1}{2}i\mathbf{K}'$ ,  $\frac{3}{2}\mathbf{K}$ ,... Si ottengono così i risultati condensati nella seguente tabella (analogha a quella di p. 107) in cui figurano i sei radicali

$$\begin{array}{lll} l = \sqrt{k}, & m = \sqrt{1+k}, & n = \sqrt{1-k}, \\ l' = \sqrt{k'}, & m' = \sqrt{1+k'}, & n' = \sqrt{1-k'} \end{array}$$

di cui si dovranno assumere le determinazioni che si riducono a

numeri positivi quando  $k$  e  $k'$  sono numeri reali compresi fra 0 ed 1 <sup>(1)</sup>:

		0	$\frac{1}{2} \mathbf{K}$	$\mathbf{K}$	$\frac{3}{2} \mathbf{K}$
$i\mathbf{K}'$	sn	$\infty$	$\frac{1}{\sqrt{1-k'}}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{\sqrt{1-k'}}$
	cn	$\infty$	$-i \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}$	$-i \frac{k'}{k}$	$-i \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}$
	dn	$\infty$	$-i \sqrt{k'}$	0	$i \sqrt{k'}$
$\frac{1}{2} i\mathbf{K}'$	sn	$\frac{i}{\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{2k}} (\sqrt{1+k} + i\sqrt{1-k})$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{2k}} (\sqrt{1+k} - i\sqrt{1-k})$
	cn	$\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2k}} (1-i)$	$-i \sqrt{\frac{1-k}{k}}$	$-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2k}} (1+i)$
	dn	$\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}} (\sqrt{1+k'} - i\sqrt{1-k'})$	$\sqrt{1-k}$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}} (\sqrt{1+k'} + i\sqrt{1-k'})$
0	sn	0	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$
	cn	1	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$	0	$-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$
	dn	1	$\sqrt{k'}$	$k'$	$\sqrt{k'}$
		0	$\frac{1}{2} \mathbf{K}$	$\mathbf{K}$	$\frac{3}{2} \mathbf{K}$

Dai teoremi d'addizione da noi stabiliti per le funzioni sn, cn e dn possono con tutta facilità dedursi corrispondenti « teoremi

<sup>(1)</sup> La possibilità di determinare, in tutti i casi, questi sei radicali senza ambiguità per mezzo della convenzione indicata, riposa su di una loro proprietà per nulla evidente, e cioè sul fatto che essi, pensati come funzioni del rapporto  $\tau = \omega'/\omega$  dei periodi, costituiscono delle funzioni analitiche uniformi di  $\tau$  in tutto il semipiano  $\Re(\tau) > 0$ . Tale proprietà risulterà, nel caso di  $l$  ed  $l'$ , da due formule che stabiliremo fra breve (le (75) del § 6).

Notiamo inoltre che la convenzione adottata implica le seguenti relazioni, ben facili a verificarsi, fra i radicali in discorso:

$$mn = k', \quad m'n' = k, \quad \sqrt{2}mm' = 1 + k + k'.$$

d'addizione » per le funzioni  $F(\varphi)$  ed  $E(\varphi)$  di LEGENDRE, che, in realtà, hanno storicamente preceduti i primi.

Propriamente, posto  $v_1 + v_2 = -v_3$  e

$$v_1 = F(\varphi_1), \quad v_2 = F(\varphi_2), \quad v_3 = F(\varphi_3).$$

Dalla prima delle (36') segue senz'altro che, se  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$  sono opportuni angoli <sup>(1)</sup> tali che sia

$$(41) \quad \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_3} = \cos \varphi_3,$$

sarà di conseguenza:

$$(42) \quad F(\varphi_1) + F(\varphi_2) + F(\varphi_3) = 0;$$

ciò che, sostanzialmente, costituisce il teorema d'addizione degli integrali ellittici trovato da EULER.

Per stabilire il teorema analogo relativo alla funzione  $E(\varphi)$ , cominciamo con l'osservare che, posto per abbreviare

$$\Delta(\varphi) = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi},$$

la seconda delle (36') può scriversi

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2) - \Delta(\varphi_3) = k^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3.$$

Permutando circolarmente  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  si ottengono le analoghe formule:

$$\Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_3) - \Delta(\varphi_2) = k^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3$$

$$\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3) - \Delta(\varphi_1) = k^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3$$

donde, moltiplicando rispettivamente per  $d\varphi_1, d\varphi_2$  e  $d\varphi_3$  e sommando, segue subito che:

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_1)\Delta(\varphi_2)\Delta(\varphi_3) \left( \frac{d\varphi_1}{\Delta(\varphi_1)} + \frac{d\varphi_2}{\Delta(\varphi_2)} + \frac{d\varphi_3}{\Delta(\varphi_3)} \right) - \\ - (\Delta(\varphi_1)d\varphi_1 + \Delta(\varphi_2)d\varphi_2 + \Delta(\varphi_3)d\varphi_3) = \\ = k^2 d(\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3). \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> « Opportuni » angoli nel senso che, fissati che siano per esempio  $\varphi_1$  e  $\varphi_3$ ,  $\varphi_2$  deve essere scelto in un quadrante opportuno, altrimenti nel secondo membro della (42) andrebbe posto, invece di 0, un multiplo indeterminato dei periodi  $4\mathbf{K}$  e  $2i\mathbf{K}'$  dell'integrale di 1ª specie  $F$ .

Ma, in virtù della (42), si ha manifestamente

$$dF(\varphi_1) + dF(\varphi_2) + dF(\varphi_3) = \frac{d\varphi_1}{A(\varphi_1)} + \frac{d\varphi_2}{A(\varphi_2)} + \frac{d\varphi_3}{A(\varphi_3)} = 0,$$

mentre d'altro lato è

$$A(\varphi_1)d\varphi_1 + A(\varphi_2)d\varphi_2 + A(\varphi_3)d\varphi_3 = d[E(\varphi_1) + E(\varphi_2) + E(\varphi_3)];$$

dunque, quando sussiste la (41), sussiste anche l'equazione

$$-d[E(\varphi_1) + E(\varphi_2) + E(\varphi_3)] = k^2 d(\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3)$$

donde, integrando ed osservando che per  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  (il che implica  $\varphi_3 = 0$ ) si ha

$$E(\varphi_1) = E(\varphi_2) = E(\varphi_3) = 0,$$

segue

$$(42') \quad E(\varphi_1) + E(\varphi_2) + E(\varphi_3) = -k^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3$$

ch'è il cercato teorema d'addizione.

Finalmente notiamo che in corrispondenza ai tre possibili casi di degenerazione delle funzioni di WEIERSTRASS distinti con le lettere (A), (B) e (C) nel § 10 del Cap. I, le funzioni di JACOBI degenerano nel modo seguente:

$$\text{Caso A) } k=0, k'=1; K=\frac{\pi}{2}, K'=\infty;$$

$$\operatorname{sn} v = \sin v, \quad \operatorname{cn} v = \cos v, \quad \operatorname{dn} v = 1.$$

$$\text{Caso B) } k=1, k'=0; K=\infty, K'=\frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{sn} v = \operatorname{Tg} v, \quad \operatorname{cn} v = \operatorname{dn} v = \frac{1}{\operatorname{Cos} v}.$$

$$\text{Caso C) } K=K'=\infty;$$

$$\operatorname{sn} v = 0, \quad \operatorname{cn} v = \operatorname{dn} v = 1.$$

#### § 4. - Definizione e prime proprietà delle funzioni $\vartheta$ di Jacobi.

Vogliamo ora occuparci di un ultimo gruppo di trascendenti: le cosiddette funzioni « theta » di JACOBI che, pur non essendo

funzioni ellittiche in senso stretto, hanno un'importanza di primo ordine nella teoria di cui ci occupiamo; e ciò tanto dal punto di vista teorico, essendo esse il punto di partenza di importanti estensioni delle funzioni ellittiche, quanto dal punto di vista pratico, trattandosi di funzioni dotate di sviluppi in serie a convergenza straordinariamente rapida, col cui ausilio possono nel miglior modo calcolarsi i valori numerici di tutte le funzioni da noi precedentemente considerate.

Le funzioni in discorso sono quattro trascendenti intere  $\vartheta_1(v)$ ,  $\vartheta_2(v)$ ,  $\vartheta_3(v)$  e  $\vartheta_4(v)$  intimamente collegate alle quattro funzioni  $\sigma u$ ,  $\sigma_1 u$ ,  $\sigma_2 u$  e  $\sigma_3 u$  di WEIERSTRASS; propriamente noi, risalendo a ritroso il corso della storia, possiamo pensarle ricavate dalle  $\sigma$  cercando di ottenere, non che divengano doppiamente periodiche (il che sarebbe impossibile senza rinunciare al loro carattere di funzioni intere), ma che ammettano almeno un periodo, e precisamente che si riproducano inmutate o cambiate di segno quando  $u$  si accresce di  $2\omega$ , il che implica l'esistenza del periodo  $2\omega$  o  $4\omega$ .

All'uopo, considerato che in virtù della (77) del Cap. I e delle (15) di questo Capitolo, si ha

$$\begin{aligned} \sigma(u+2\omega) &= -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u, & \sigma_1(u+2\omega) &= -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_1 u, \\ \sigma_2(u+2\omega) &= +e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_2 u, & \sigma_3(u+2\omega) &= +e^{2\eta(u+\omega)}\sigma_3 u, \end{aligned}$$

e considerato altresì che, in virtù delle (88') del Cap. I, delle formule di definizione (9) delle  $\sigma_a$ , nonchè del fatto che le  $\eta_a$  sono valori di  $\zeta$ , le funzioni

$$\frac{1}{\omega} \sigma(u|\omega, \omega') \quad \text{e} \quad \sigma_a(u, \omega, \omega') \quad (a=1, 2, 3)$$

sono funzioni omogenee di grado zero dei loro tre argomenti e però dipendono sostanzialmente solo dai rapporti di due di questi al terzo, per esempio dalle quantità:

$$(43) \quad v = \frac{u}{2\omega}, \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega} \quad (1);$$

(1) L'argomento  $v$  qui introdotto è manifestamente diverso da quello denotato con questa stessa lettera nel § 2;  $\tau$  invece è lo stesso di quello del Cap. I.

potremo conseguire il fine indicato ponendo:

$$(44) \begin{cases} \vartheta_1(v|\tau) = \frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega} u^2} \sigma u, & \vartheta_2(v|\tau) = A_2 e^{-\frac{\eta}{2\omega} u^2} \sigma_1 u, \\ \vartheta_3(v|\tau) = A_3 e^{-\frac{\eta}{2\omega} u^2} \sigma_2 u, & \vartheta_4(v|\tau) = A_4 e^{-\frac{\eta}{2\omega} u^2} \sigma_3 u \quad (1), \end{cases}$$

dove  $A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  sono quattro costanti che determineremo più avanti.

Infatti, per un accrescimento  $2\omega$  di  $u$ , cui corrisponde un accrescimento 1 di  $v$ , si ha

$$\vartheta_\alpha(v+1|\tau) = \pm A_\alpha e^{-\frac{\eta}{2\omega}(u+2\omega)^2 + 2\eta(u+\omega)} \sigma_{\alpha-1} u = \pm A_\alpha e^{-\frac{\eta}{2\omega} u^2} \sigma_{\alpha-1} u$$

se  $\alpha=2, 3, 4$ , ed una formula perfettamente analoga se  $\alpha=1$ . Pertanto, in forza delle formole sulle funzioni  $\sigma$  riportate nella pagina precedente, risulta che:

$$(45) \begin{cases} \vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v), & \vartheta_2(v+1) = -\vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(v+1) = \vartheta_3(v), & \vartheta_4(v+1) = \vartheta_4(v) \end{cases}$$

E se  $u$  si accresce invece di  $2\omega'$ , cioè  $v$  si accresce di  $\tau$ ?

Un facile calcolo appoggiato sulle relazioni di periodicità delle  $\sigma$  e la relazione di LEGENDRE mostra che si ha allora:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(v+\tau) &= \frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega}(u+2\omega')^2} \sigma(u+2\omega') = \\ &= -\frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega}(\omega' u + \omega'^2 + 2\eta'(u+\omega')) - \frac{\eta}{2\omega} u^2} \sigma u = \\ &= -e^{-\frac{2}{\omega}(\eta\omega' - \eta'\omega)u - 2\frac{\omega'}{\omega}(\eta\omega' - \eta'\omega)} \vartheta_1(v) = -e^{-2i\pi v - i\tau} \vartheta_1(v) \end{aligned}$$

cioè

$$\vartheta_1(v+\tau) = -\frac{1}{qz^2} \vartheta_1(v)$$

avendo posto:

$$(46) \quad \boxed{z = e^{i\pi v}, \quad q = e^{i\pi\tau}}$$

(1) Quando non sarà necessario mettere in evidenza la dipendenza da  $\tau$  scriveremo  $\vartheta_\alpha(v)$  invece di  $\vartheta_\alpha(v|\tau)$ .

Similmente si opera sulle altre tre funzioni, giungendo così alle formole:

$$(47) \quad \boxed{\begin{aligned} \vartheta_1(v+\tau) &= -q^{-1}z^{-2}\vartheta_1(v), & \vartheta_2(v+\tau) &= +q^{-1}z^{-2}\vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(v+\tau) &= +q^{-1}z^{-2}\vartheta_3(v), & \vartheta_4(v+\tau) &= -q^{-1}z^{-2}\vartheta_4(v) \end{aligned}}$$

Inoltre, ricordando che  $\sigma u$  è una funzione *dispari* mentre  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  sono invece *pari*, risulta che  $\vartheta_1$  è una funzione *dispari* e  $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$  sono invece *pari*, cioè che si ha:

$$(48) \quad \boxed{\begin{aligned} \vartheta_1(-v) &= -\vartheta_1(v), & \vartheta_2(-v) &= \vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(-v) &= \vartheta_3(v), & \vartheta_4(-v) &= \vartheta_4(v) \end{aligned}}$$

Quanto agli *zeri* delle funzioni  $\vartheta$ , essi si desumono immediatamente da quelli delle  $\sigma$  (§ 2) giungendo così ai risultati condensati nella fig. 30, in cui i numeri dentro ai cerchietti sono gli indici

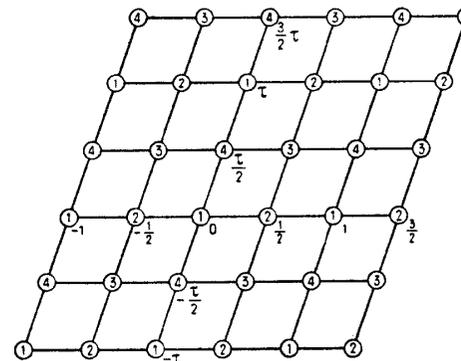


Fig. 30.

delle  $\vartheta$  che si annullano nel punto. Si vede così a colpo d'occhio che, per esempio, la funzione  $\vartheta_1(v)$  si annulla in tutti e soli i punti

$$v = m + n\tau,$$

con  $m$  ed  $n$  numeri interi.

La circostanza che le funzioni  $\vartheta$ , a differenza delle  $\sigma$ , ammettono un periodo, è importante soprattutto dal punto di vista degli sviluppi in serie, sussistendo il seguente teorema generale:

Se la funzione intera  $f(u)$  ammette il periodo  $p$ , essa può rappresentarsi con una serie procedente per le potenze positive e negative della quantità

$$\zeta = e^{\frac{2\pi u}{p} i}$$

assolutamente convergente in tutto il piano complesso  $\zeta$  tranne, ovviamente, nell'origine. Si ha cioè, qualunque sia  $u$ ,

$$(49) \quad f(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

od anche, con un opportuno raggruppamento di termini

$$(49') \quad f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \cos n \frac{2\pi u}{p} + \beta_n \sin n \frac{2\pi u}{p} \right),$$

dove  $a_n, \alpha_n$  e  $\beta_n$  sono opportune costanti.

Questo teorema è una facile conseguenza della sviluppabilità in serie di LAURENT. Invero, se riguardiamo la  $f$  come funzione di  $\zeta$ , ossia se poniamo:

$$\varphi(\zeta) = f(u) = f\left(\frac{p}{2\pi i} \log \zeta\right),$$

non v'è dubbio che la funzione  $\varphi(\zeta)$  così ottenuta è anch'essa una funzione analitica *uniforme*, perchè l'indeterminazione del logaritmo (che, come si ricorderà, è determinato a meno di multipli di  $2\pi i$ ) implica soltanto che l'argomento della  $f$  è determinato a meno di multipli di  $p$ , ciò che non ha alcuna influenza sul valore di  $\varphi(\zeta)$ . Ma, d'altra parte, dato il carattere di funzione olomorfa di  $f(u)$ , la  $\varphi(\zeta)$  non può avere, al finito, nessun altro punto singolare all'infuori dell'origine, che è singolare per il logaritmo; dunque, pel teorema di LAURENT, in qualunque corona circolare col centro nell'origine, la funzione data è rappresentabile mediante una serie assolutamente ed uniformemente convergente del tipo (49), o, ciò che è poi lo stesso, mediante una « serie di Fourier » del tipo (49').

Applichiamo questo teorema generale alle funzioni theta cominciando dal caso delle funzioni  $\vartheta_3(v)$  e  $\vartheta_4(v)$  che, giusto le (45), ammettono il periodo 1; avremo così, dette  $a_n^{(a)}$  ( $a=3, 4$ ) delle opportune costanti,

$$\vartheta_a(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(a)} (e^{2\pi v i})^n,$$

cioè, servendosi della prima delle (46),

$$\vartheta_a(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(a)} z^{2n} \quad (a=3, 4).$$

Ciò posto, per determinare i coefficienti  $a_n^{(a)}$ , serviamoci delle due ultime delle (47). Poichè, in forza delle (46), il mutamento di  $v$  in  $v+\tau$  muta  $z$  in  $qz$ , le (47) danno luogo alle identità:

$$\vartheta_a(v+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(a)} q^{2n} z^{2n} = \pm q^{-1} z^{-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(a)} z^{2n},$$

in cui il segno superiore (+) si riferisce al caso  $a=3$  mentre l'inferiore (-) si riferisce al caso  $a=4$ , identità donde seguono senz'altro le relazioni ricorrenti:

$$a_{n+1}^{(a)} = \pm q^{2n+1} a_n^{(a)} \\ (+ \text{ se } a=3, - \text{ se } a=4)$$

che forniscono subito le formule:

$$a_{\pm n}^{(3)} = a_0^{(3)} q^{n^2}, \quad a_{\pm n}^{(4)} = (-1)^n a_0^{(4)} q^{n^2}.$$

Ne segue, completando la determinazione di  $\vartheta_3$  e  $\vartheta_4$  (finora determinate soltanto a meno d'un fattore costante) col porre com'è del tutto spontaneo

$$a_0^{(3)} = a_0^{(4)} = 1,$$

che le funzioni in discorso sono rappresentate dalle serie seguenti:

$$(50') \quad \boxed{\begin{aligned} \vartheta_3(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n}, \\ \vartheta_4(v) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n}, \\ (z &= e^{i\pi v}) \end{aligned}}$$

che, raccogliendo assieme i termini corrispondenti a valori di  $n$  uguali e contrari, assumono l'aspetto anche più espressivo:

$$(51') \quad \boxed{\begin{aligned} \vartheta_3(v) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2m\pi v = \\ &= 1 + 2(q \cos 2\pi v + q^4 \cos 4\pi v + q^9 \cos 6\pi v + \dots) \\ \vartheta_4(v) &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2m\pi v = \\ &= 1 - 2(q \cos 2\pi v - q^4 \cos 4\pi v + q^9 \cos 6\pi v - \dots) \end{aligned}}$$

Passiamo ora alle altre due funzioni  $\vartheta_1(v)$  e  $\vartheta_2(v)$  che, avendo il periodo 2 invece che 1, saranno a priori rappresentate da serie della forma

$$\vartheta_a(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(a)} z^n, \quad (a=1, 2).$$

Tenendo però conto che quando  $v$  aumenta di 1 si cambia  $z$  in  $-z$ , le funzioni in discorso, in virtù delle prime due delle (45), dovranno essere entrambe funzioni *dispari* di  $z$ ; avremo quindi, più semplicemente,

$$\vartheta_a(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{2m+1}^{(a)} z^{2m+1}, \quad (a=1, 2).$$

Per determinare i coefficienti serviamoci anche qui delle (47) che ci forniscono subito le identità

$$\vartheta_a(v+\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{2m+1}^{(a)} q^{2m+1} z^{2m+1} = \mp q^{-1} z^{-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{2m+1}^{(a)} z^{2m+1},$$

(- se  $a=1$ , + se  $a=2$ )

donde seguono le formole:

$$a_{2m+1}^{(1)} = -q^{2m} a_{2m-1}^{(1)}, \quad a_{2m+1}^{(2)} = q^{2m} a_{2m-1}^{(2)}$$

e, successivamente, le altre:

$$a_{\pm(2m+1)}^{(1)} = \pm (-1)^m q^{m(m+1)} a_{\pm 1}^{(1)}, \quad a_{\pm(2m+1)}^{(2)} = q^{m(m+1)} a_{\pm 1}^{(2)},$$

le quali, tenuto anche conto che

$$m(m+1) = \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

conducono alle serie:

$$(52) \quad \begin{cases} \vartheta_1(v) = a_1^{(1)} q^{-\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} (z^{2m+1} - z^{-(2m+1)}) \\ \vartheta_2(v) = a_1^{(2)} q^{-\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} (z^{2m+1} + z^{-(2m+1)}) \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} \vartheta_1(v) = 2i a_1^{(1)} q^{-\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \sin(2m+1)\pi v \\ \vartheta_2(v) = 2 a_1^{(2)} q^{-\frac{1}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \cos(2m+1)\pi v. \end{cases}$$

Finalmente, completiamo la definizione di  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  ponendo uguali a due le costanti che precedono i due ultimi sommatori; avremo così le formole:

$$(51'') \quad \begin{aligned} \vartheta_1(v) &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \sin(2m+1)\pi v = \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} (\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v + q^6 \sin 5\pi v - \dots) \\ \vartheta_2(v) &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2} \cos(2m+1)\pi v = \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} (\cos \pi v + q^2 \cos 3\pi v + q^6 \cos 5\pi v + \dots) \end{aligned}$$

cui si associano le (52) che, tenuto conto dei fissati valori di  $a_1^{(1)}$  e  $a_1^{(2)}$ , possono mettersi sotto la forma:

$$(50'') \quad \begin{cases} \vartheta_1(v) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n-1}, \\ \vartheta_2(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n-1} \end{cases},$$

$(z = e^{i\pi v})$

avendo posto in una parte dei termini  $m = -n$  e nell'altra  $m = n-1$ .

In tutte queste formole per  $q^{\frac{1}{4}}$  è, per convenzione, da assumere il valore ben determinato:

$$(53) \quad q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4} i\pi}.$$

Riunendo in un unico quadro i più importanti dei risultati ottenuti abbiamo le formole:

$$(51) \quad \begin{aligned} \vartheta_1(v) &= 2q^{\frac{1}{4}} (\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v + q^6 \sin 5\pi v - \dots) \\ \vartheta_2(v) &= 2q^{\frac{1}{4}} (\cos \pi v + q^2 \cos 3\pi v + q^6 \cos 5\pi v + \dots) \\ \vartheta_3(v) &= 1 + 2(q \cos 2\pi v + q^4 \cos 4\pi v + q^9 \cos 6\pi v + \dots) \\ \vartheta_4(v) &= 1 - 2(q \cos 2\pi v - q^4 \cos 4\pi v + q^9 \cos 6\pi v - \dots) \end{aligned}$$

$(q = e^{i\pi})$

donde ponendo  $v=0$  oppure, nel caso di  $\vartheta_1$ , ponendo  $v=0$  dopo aver derivato rispetto a  $v$ , seguono le altre (4):

$$(54) \quad \begin{cases} \vartheta_1'(0) = 2\pi q^{\frac{1}{4}}(1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots) \\ \vartheta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + \dots) \\ \vartheta_3(0) = 1 + 2(q + q^4 + q^9 + \dots) \\ \vartheta_4(0) = 1 - 2(q - q^4 + q^9 - \dots) \end{cases}$$

Queste serie, oltre ad offrire il vantaggio di mostrare in modo del tutto perspicuo come le funzioni theta dipendano, oltre che da  $v=u/2\omega$ , solo da  $q$ , cioè (in sostanza) dal rapporto  $\tau$  dei periodi, offrono l'altro, di capitale importanza pratica, di una *convergenza estremamente rapida*, specie se applicate in opportune condizioni, sempre realizzabili.

Invero, anzitutto gli esponenti delle successive potenze di  $q$  crescono assai rapidamente e, d'altro lato, si possono sempre disporre i calcoli in modo che  $|q|$  risulti molto piccolo.

Per convincersi di quest'ultimo fatto basta ricordare che se i periodi fondamentali  $\omega$  ed  $\omega'$  sono scelti in modo che sia  $|\omega| \leq |\omega'|$ ,  $\mathfrak{I}(\tau) > 0$ , il che, come sappiamo già (Cap. I, § 2), è sempre possibile, per la (13) di detto Capitolo si ha:

$$\mathfrak{I}(\tau) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e conseguentemente:

$$(55) \quad |q| = e^{-\pi\mathfrak{I}(\tau)} \leq e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} = 0,0658\dots < \frac{1}{15}.$$

Anzi se, come quasi sempre succede nelle effettive applicazioni,  $\tau$  è immaginario puro, sarà addirittura

$$(55') \quad q = e^{-\pi|\tau|} \leq e^{-\pi} = 0,0432\dots < \frac{1}{23}.$$

(4) Molti Autori omettono l'indicazione dell'argomento quando si tratta del valore di una funzione  $\vartheta$  o di una delle sue derivate per  $v=0$ . Scrivono cioè semplicemente  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_1'$ , ecc., invece di  $\vartheta_1(0)$ ,  $\vartheta_1'(0)$ , ecc. Noi però, per timore di equivoci, non ci serviremo di questa pur comoda abbreviazione.

Per mostrare un esempio di questa rapida convergenza calcoliamoci  $\vartheta_3(0)$  (ch'è una serie maggiorante tanto di  $\vartheta_3(v)$  quanto di  $\vartheta_4(v)$ ) nel caso  $\tau=1,5i$  cui corrisponde  $q=0,008983285$ . Si ha:

$$\begin{aligned} 1 &= 1,000\ 000\ 000 \\ 2q &= 0,017\ 966\ 570 \\ \hline 2q^4 &= 0,000\ 000\ 013 \\ \hline \vartheta_3(0) &= 1,017\ 966\ 583 \end{aligned}$$

Come si vede, già i primi due termini della serie danno il valore di  $\vartheta_3$  con un errore poco superiore a  $10^{-8}$ !

Notiamo infine ch'è specialmente nella teoria delle funzioni  $\vartheta$  che si rivela l'opportunità della convenzione fatta nel § 2 del Cap. I di scegliere i periodi fondamentali in modo che sia sempre  $\mathfrak{I}(\tau) > 0$ . Invero, essendo

$$|q| = e^{-\pi\mathfrak{I}(\tau)}$$

è proprio questa convenzione quella che assicura la convergenza delle serie  $\vartheta$  nella forma in cui sono state da noi scritte.

Nel paragrafo seguente sarà, fra l'altro, brevemente discusso e illustrato l'andamento delle funzioni theta quando  $v$  e  $q$  sono entrambi reali.

#### § 5. - Relazioni delle funzioni theta fra loro e con le altre funzioni precedentemente considerate. Loro andamento sull'asse reale.

La rapidissima convergenza delle serie (51) mostra l'opportunità di stabilire delle relazioni fra le funzioni theta e le altre funzioni precedentemente considerate, quali per esempio  $\wp$ ,  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ , ecc., onde potere servirsi delle prime per il calcolo numerico delle seconde.

Cominciamo dalle relazioni fra le  $\vartheta$  e le  $\sigma$ , per ottenere le quali non c'è che da determinare le costanti  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$  che figurano nelle (44), ciò che è quasi immediato nei riguardi delle ultime tre, bastando porre  $u=v=0$  nelle corrispondenti formule per avere che

$$A_a = \vartheta_a(0), \quad (a=2, 3, 4).$$

Per determinare  $A_1$  occorre invece derivare ambo i membri della

prima delle (44) rispetto ad  $u$ , con che si ottiene

$$\frac{1}{2\omega} \vartheta_1'(v) = \frac{A_1}{\omega} e^{-\frac{\eta}{2\omega} u^2} \left( \sigma' u - \frac{\eta}{\omega} u \sigma u \right),$$

e porre poi  $u=v=0$ ; avremo così, ricordando che  $\sigma'(0)=1$ ,

$$A_1 = \frac{1}{2} \vartheta_1'(0).$$

In definitiva si hanno dunque le formule:

$$(56) \quad \begin{cases} \sigma u = 2\omega e^{2\omega} \frac{\eta u^2 \vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}, & \sigma_1 u = e^{2\omega} \frac{\eta u^2 \vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)} \\ \sigma_2 u = e^{2\omega} \frac{\eta u^2 \vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)}, & \sigma_3 u = e^{2\omega} \frac{\eta u^2 \vartheta_4(v)}{\vartheta_4(0)} \end{cases} \quad \left( v = \frac{u}{2\omega} \right)$$

di cui le ultime tre possono condensarsi nell'unica formula:

$$(56') \quad \sigma_a u = e^{2\omega} \frac{\eta u^2 \vartheta_{a+1}(v)}{\vartheta_{a+1}(0)}, \quad (a=1, 2, 3).$$

Ricordando che fra le quattro funzioni  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  intercedono due relazioni algebriche indipendenti: le (13) del § 1, dalle (56) segue subito che lo stesso dovrà succedere per le funzioni  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ . Si ha cioè che fra le quattro funzioni theta di uno stesso argomento  $v$  intercedono le due relazioni algebriche indipendenti:

$$(57) \quad \frac{\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_2^2(0)} + 4e_1 \omega^2 \frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_1'^2(0)} = \frac{\vartheta_3^2(v)}{\vartheta_3^2(0)} + 4e_2 \omega^2 \frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_1'^2(0)} = \frac{\vartheta_4^2(v)}{\vartheta_4^2(0)} + 4e_3 \omega^2 \frac{\vartheta_1^2(v)}{\vartheta_1'^2(0)}$$

ottenute sostituendo nelle (13) i secondi membri delle (56).

Trovata l'espressione delle funzioni  $\sigma$  per mezzo delle  $\vartheta$  si passa subito a quella delle altre. Così, per esempio le (8) forniscono senz'altro:

$$(58) \quad \wp(u | \omega, \omega') = e_a + \frac{1}{4\omega^2} \left[ \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_{a+1}(0)} \frac{\vartheta_{a+1}(v)}{\vartheta_1(v)} \right]^2, \\ \left( v = \frac{u}{2\omega}, \quad q = e^{i\pi \frac{\omega'}{\omega}}, \quad a=1, 2, 3 \right)$$

mentre la (16) fornisce:

$$(58') \quad \wp'(u | \omega, \omega') = -\frac{1}{4\omega^3} \frac{\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_4(v)\vartheta_1'^3(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)\vartheta_1^3(v)},$$

e, d'altra parte, si ha

$$\zeta u = \frac{d}{du} \log \sigma u = \frac{d}{du} \left[ \log \vartheta_1(v) + \frac{\eta}{2\omega} u^2 \right] = \frac{1}{2\omega} \frac{d}{dv} \log \vartheta_1(v) + \frac{\eta}{\omega} u$$

cioè

$$(59) \quad \zeta u = \frac{1}{2\omega} \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} + \frac{\eta}{\omega} u.$$

Similmente dalle (12) si traggono le formule:

$$(60) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} u) = 2\omega \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_1'(0)} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ \operatorname{cn}(\sqrt{e_1 - e_3} u) = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ \operatorname{dn}(\sqrt{e_1 - e_3} u) = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}, \end{cases}$$

che, al pari delle (12), sono da intendersi nel senso che ad ogni terna di valori di  $e_1, e_2, e_3$  tali da aversi

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = k^2,$$

dove  $k$  è il modulo di LEGENDRE cui si riferiscono  $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}$  e  $\operatorname{dn}$ , corrispondono valori di  $\omega$  ed  $\omega'$  tali che sussistono le (60).

Considerato che le precedenti equazioni impongono solo due condizioni alle tre  $e_a$ , se si pone ulteriormente

$$e_1 - e_3 = 1$$

cioè se si assume

$$(61) \quad e_1 = \frac{2 - k^2}{3}, \quad e_2 = \frac{2k^2 - 1}{3}, \quad e_3 = -\frac{1 + k^2}{3},$$

osservato inoltre che, in forza delle (19), è allora

$$\omega = K, \quad \tau = iK'/K,$$

le (60) possono anche scriversi sotto la forma più semplice ed esplicita:

$$(62) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u, k) = 2K \frac{\vartheta_4(0) \vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0) \vartheta_4(v)}, \\ \operatorname{cn}(u, k) = \frac{\vartheta_4(0) \vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0) \vartheta_4(v)}, \\ \operatorname{dn}(u, k) = \frac{\vartheta_4(0) \vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0) \vartheta_4(v)}, \\ (v = \frac{u}{2K}, \quad q = e^{-\pi K'/K}). \end{cases}$$

Riservandoci di mostrare più innanzi come queste formule possano essere ulteriormente semplificate (nei riguardi dei fattori costanti che in esse compaiono), occupiamoci ora di una questione che non conviene più differire, e cioè della determinazione di alcune semplici relazioni colleganti le funzioni  $\vartheta$  fra loro, oltre le (57).

A tale scopo cominciamo col supporre che  $v$  si muti in  $v + \frac{1}{2}$ ; tenuto conto che

$$\begin{aligned} \sin(2m+1)\left(v + \frac{1}{2}\right)\pi &= (-1)^m \cos(2m+1)v\pi, \\ \cos(2m+1)\left(v + \frac{1}{2}\right)\pi &= (-1)^{m+1} \sin(2m+1)v\pi, \\ \cos 2m\left(v + \frac{1}{2}\right)\pi &= (-1)^m \cos 2mv\pi, \end{aligned}$$

le (51) mostrano senz'altro che

$$(63) \quad \begin{array}{|l} \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(v), \quad \vartheta_2\left(v + \frac{1}{2}\right) = -\vartheta_1(v), \\ \vartheta_3\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_4(v), \quad \vartheta_4\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_3(v) \end{array}$$

Per studiare invece l'effetto del cambiamento di  $v$  in  $v + \frac{\tau}{2}$ , converrà riferirsi alle (50') e (50'') dopo aver osservato che  $z$  viene mutata in  $z\sqrt{q}$  dall'accennato cambiamento, avremo così per esempio che

$$\vartheta_3\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2+n} z^{2n} = q^{-\frac{1}{4}+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n}$$

donde, cambiando  $n$  in  $n-1$ , segue:

$$(64) \quad \vartheta_3\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n-1} = q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \vartheta_2(v).$$

Analogamente si trovano le altre formule:

$$(64') \quad \begin{cases} \vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \vartheta_4(v), \\ \vartheta_2\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \vartheta_3(v), \\ \vartheta_4\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \vartheta_1(v). \end{cases}$$

In conclusione, ricordando anche le (45) e (47) e ponendo, per abbreviare,

$$(65) \quad q^{-1} z^{-2} = e^{-i\pi(2v+\tau)} = A(v), \quad q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} = e^{-i\pi(v+\tau/4)} = B(v),$$

si ha il seguente quadro delle relazioni di parentela fra le funzioni theta, il cui uso non richiede speciali delucidazioni:

$\vartheta(v)$	$\vartheta(-v)$	$\vartheta(v+1)$	$\vartheta(v+\tau)$	$\vartheta(v+1+\tau)$	$\vartheta\left(v + \frac{1}{2}\right)$	$\vartheta\left(v + \frac{\tau}{2}\right)$	$\vartheta\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)$
$\vartheta_1(v)$	$-\vartheta_1(v)$	$-\vartheta_1(v)$	$-A(v)\vartheta_1(v)$	$A(v)\vartheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$iB(v)\vartheta_1(v)$	$B(v)\vartheta_3(v)$
$\vartheta_2(v)$	$\vartheta_2(v)$	$-\vartheta_2(v)$	$A(v)\vartheta_2(v)$	$-A(v)\vartheta_2(v)$	$-\vartheta_1(v)$	$B(v)\vartheta_3(v)$	$-iB(v)\vartheta_4(v)$
$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_3(v)$	$A(v)\vartheta_3(v)$	$A(v)\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$	$B(v)\vartheta_2(v)$	$iB(v)\vartheta_1(v)$
$\vartheta_4(v)$	$\vartheta_4(v)$	$\vartheta_4(v)$	$-A(v)\vartheta_4(v)$	$-A(v)\vartheta_4(v)$	$\vartheta_3(v)$	$iB(v)\vartheta_1(v)$	$B(v)\vartheta_2(v)$

In particolare, ponendo  $v=0$ , questo quadro fornisce immediatamente i valori delle funzioni  $\vartheta$  nei vertici della rete  $v = \frac{1}{2}m + \frac{\tau}{2}n$  ( $m$  ed  $n$  numeri interi) in funzione di  $\vartheta_2(0)$ ,  $\vartheta_3(0)$  e  $\vartheta_4(0)$ ; per esempio si ha che

$$\vartheta_2\left(\frac{\tau}{2}\right) = B(0)\vartheta_3(0) = q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3(0), \text{ ecc.}$$

Se invece si pone  $v=0$  dopo aver derivato rispetto a  $v$ , osservato che

$$(66) \quad \vartheta_2'(0) = \vartheta_3'(0) = \vartheta_4'(0) = 0,$$

si ottengono, con pari facilità, i valori delle derivate delle theta nei

punti anzidetti in funzione di  $\vartheta_1'(0)$ ,  $\vartheta_2(0)$ ,  $\vartheta_3(0)$  e  $\vartheta_4(0)$ ; per esempio dalla formula

$$\vartheta_2\left(v + \frac{\tau}{2}\right) = B(v)\vartheta_3(v)$$

si ha

$$\vartheta_2\left(\frac{\tau}{2}\right) = B'(0)\vartheta_3(0) + B(0)\vartheta_3'(0) = -i\pi q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3(0), \text{ ecc.}$$

In particolare sull'asse reale valgono le formule:

$$(66') \begin{cases} \vartheta_1'(1/2) = 0, & \vartheta_2'(1/2) = -\vartheta_1'(0), & \vartheta_3'(1/2) = \vartheta_4'(1/2) = 0; \\ \vartheta_1'(1) = -\vartheta_1'(0), & \vartheta_2'(1) = \vartheta_3'(1) = \vartheta_4'(1) = 0. \end{cases}$$

La figura seguente (fig. 31) mostra l'andamento delle funzioni  $\vartheta(v)$  per  $v$  reale nel caso di  $q=0,1$ . Se però  $q$  ha un diverso valore, purchè sempre compreso fra 0 ed 1, le cose non cambiano sostanzialmente (4). Essa è da interpretare nel senso che le curve tracciate rappresentano le funzioni  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_3$  se  $v$  viene letta sulla scala all'orlo superiore della figura, e invece rispettivamente le funzioni  $\vartheta_2$  e  $\vartheta_4$  se  $v$  viene letta sulla scala dell'orlo inferiore, giusto le formule

$$\vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(v), \quad \vartheta_3\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_4(v).$$

Come si vede,  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  hanno un comportamento del tutto simile a quello di un seno o, rispettivamente, di un coseno, salvo che il periodo è 2 invece di  $2\pi$  e che i limiti entro cui oscillano sono  $-\vartheta_2(0)$  e  $+\vartheta_2(0)$  invece che  $-1$  e  $+1$ . Similmente  $\vartheta_3$  e  $\vartheta_4$  hanno un comportamento analogo a quello delle due funzioni  $1 + \cos 2x$  e  $1 - \cos 2x$ , salvo che il periodo è 1 invece di  $\pi$  e i limiti di oscillazione sono  $\vartheta_3(0)$  e  $\vartheta_4(0)$  invece che 0 e 2. Questi risultati possono facilmente tenersi a mente ricordando che *tutt' e quattro le funzioni  $\vartheta(v)$ , si comportano qualitativamente, per  $v$  reale, come le funzioni rappresentate dai primi termini o dai primi due termini dei loro sviluppi in serie trigonometriche,*

(4) La discussione dell'andamento delle funzioni  $\vartheta$  può agevolmente effettuarsi per *via teorica*, cioè senza appoggiarsi su dati numerici, grafici e simili, servendosi dei legami con le funzioni  $\sigma$  e con la  $\wp$ ; vedi all'uopo per esempio HALPHEN [7], T. I, pp. 285-286.

ciò che è di per se stesso evidente se  $q$  è molto piccolo, ma non altrettanto evidente se invece  $q$  è grande, cioè prossimo ad 1.

La rappresentazione grafica fornita dalla fig. 31 è completata dalla seguente fig. 32 in cui è rappresentato graficamente, il modo

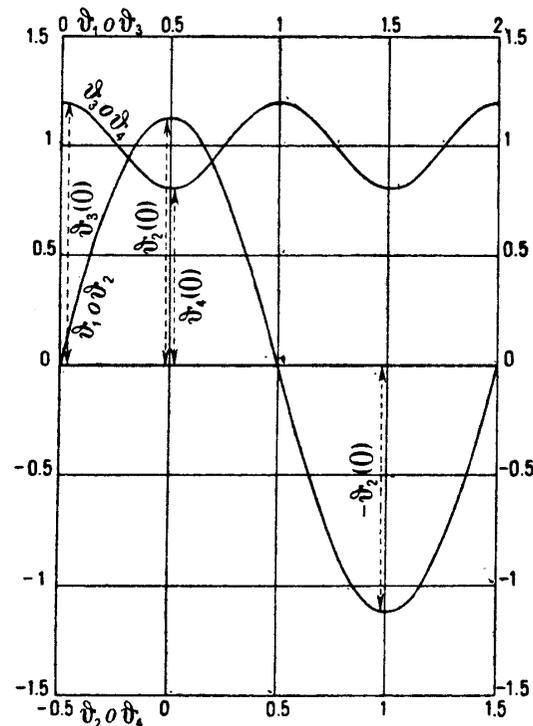


Fig. 31.

di variare di  $\vartheta_2(0)$ ,  $\vartheta_3(0)$  e  $\vartheta_4(0)$  al variare di  $q$  tra 0 ed 1. Veramente la variabile indipendente del grafico non è proprio  $q$  bensì, come è abituale in tabelle numeriche e grafici di questo genere, l'angolo  $\alpha$  il cui seno è il corrispondente modulo  $k$  di LEGENDRE; si pone cioè (cfr. le (62))

$$q = e^{-\pi K'/K} \text{ con } k = \sin \alpha,$$

ossia :

$$(67) \quad q = e^{-\pi \frac{K(\cos \alpha)}{K(\sin \alpha)}} \quad (1).$$

Al tendere di  $\alpha$  a  $\pi/2$   $\vartheta_2(0)$  e  $\vartheta_3(0)$  tendono entrambe a infinito, però

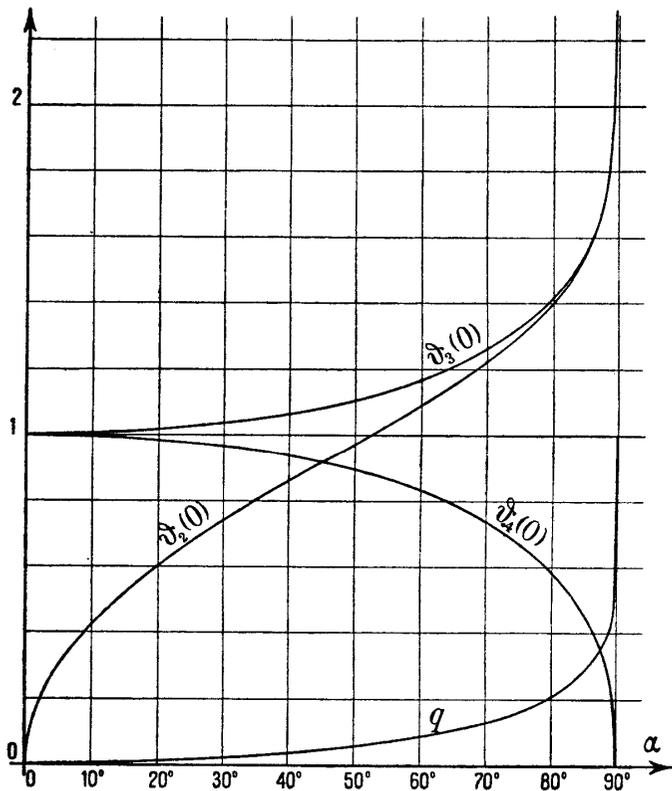


Fig. 32.

così lentamente che per  $k^2 = 0,9999$  cioè per  $\alpha = 89^\circ 25' 43''$ ,  $\vartheta_3(0)$ , ch'è la più grande delle due, non ha ancora raggiunto il valore 2.

(1) Nelle *Funktionentafeln* di JAHNKE-EMDE [20] vi è un'estesa tabella numerica (pp. 122-124) fornente i valori di  $\text{Log } q$  a quattro decimali in funzione di  $\alpha$  variabile da 0 a  $90^\circ$  di  $5'$  in  $5'$ .

La fig. 32 mostra fra l'altro che la precedente fig. 31 si presenterà proprio com'è stata da noi disegnata, cioè con le due curve che s'intrecciano fra loro intorno all'ascissa 0,5 della scala superiore, se è  $\alpha > 45^\circ$ , cioè è  $q > e^{-\pi} = 0,0432\dots$ . Se invece è  $\alpha < 45^\circ$ ,  $q < 0,0432\dots$ , la curva  $\vartheta_1, \vartheta_2$  resta tutta al disotto della curva  $\vartheta_3, \vartheta_4$ .

La circostanza che per  $\alpha > 45^\circ$  si presentino valori reali di  $q$  maggiori di  $e^{-\pi}$  non è in contraddizione con quanto si è detto in fine del § 4, perchè allora è  $K' < K$ , epperò il periodo reale  $\omega$  delle corrispondenti funzioni di WEIERSTRASS non è più un periodo di modulo minimo, come si era ivi supposto. Comunque vedremo nel § 2 del prossimo Capitolo che, se è  $|q| > e^{-\pi}$ , con una semplice trasformazione delle funzioni theta, si può subito ritornare al caso  $|q| < e^{-\pi}$ .

Notiamo infine che da alcuni grafici delle funzioni theta, per esempio dalla fig. 47 (p. 116) delle *Funktionentafeln* di JAHNKE-EMDE [20], parrebbe trarsi che  $\vartheta_3(1/4) = \vartheta_4(1/4) = 1$ ; ciò però è vero solo *approssimativamente*, se  $q$  non è troppo vicino ad 1.

§ 6. - Altre proprietà delle funzioni theta e thetanulle.

Fra le funzioni theta intervengono, oltre alle già incontrate, numerosissime altre relazioni per la maggior parte delle quali rimandiamo il lettore a trattati più ampi (1), trattandosi di formule di scarso o nullo interesse applicativo. Così ad esempio pei cosiddetti *teoremi d'addizione* delle funzioni theta, e cioè per le numerose relazioni algebriche intercedenti fra funzioni  $\vartheta$  degli argomenti

$$a, b, c, d, \frac{1}{2} (\pm a \pm b \pm c \pm d),$$

di cui ci limiteremo ad indicarne solo una a titolo d'esempio:

$$(68) \quad \vartheta_2(a)\vartheta_2(b)\vartheta_2(c)\vartheta_2(d) = \\ = \vartheta_3\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{a-b+c-d}{2}\right)\vartheta_3\left(\frac{-a+b+c-d}{2}\right) - \\ - \vartheta_4\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\vartheta_4\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)\vartheta_4\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)\vartheta_4\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right).$$

(1) Vedi, per esempio, TANNERY-MOLK [12], T. II, Cap. III o anche WEIERSTRASS-SCHWARZ [14], p. 48, formule [B].

Così pure dobbiamo contentarci di un semplice accenno ai curiosi e formalmente semplici *teoremi d'addizione trascendenti* (o meglio *integrali*) delle trascendenti in esame recentemente scoperti da G. DOETSCH <sup>(1)</sup>, i quali trovano la loro origine nell'osservazione estremamente interessante che *le trasformate di Laplace* <sup>(2)</sup> *delle funzioni  $\vartheta$ , pensate come funzioni di  $\tau$  o, più esattamente di  $\tau/\pi$ , sono trascendenti elementari.* Propriamente sussistono le seguenti formule per la cui dimostrazione rimandiamo al succitato lavoro di DOETSCH:

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{L}[\vartheta_1(v|i\pi t)] &= \frac{\sin 2v\sqrt{-s}}{\sqrt{-s} \cos \sqrt{-s}}, & \left(-\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}\right) \\ \mathfrak{L}[\vartheta_2(v|i\pi t)] &= -\frac{\sin(2v-1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s} \cos \sqrt{-s}}, & (0 \leq v \leq 1) \\ \mathfrak{L}[\vartheta_3(v|i\pi t)] &= -\frac{\cos(2v-1)\sqrt{-s}}{\sqrt{-s} \sin \sqrt{-s}}, & (0 \leq v \leq 1) \\ \mathfrak{L}[\vartheta_4(v|i\pi t)] &= \frac{\cos 2v\sqrt{-s}}{\sqrt{-s} \sin \sqrt{-s}}, & \left(-\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

Un'altra importante proprietà delle funzioni  $\vartheta(v|\tau)$ , non senza connessione con la precedente, è che *tutt'e quattro queste funzioni nonchè le loro derivate, sono soluzioni dell'equazione lineare a derivate parziali di 2° ordine:*

$$(70) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} - 4i\pi \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = 0}.$$

Infatti basta osservare che, in virtù delle (50), tutt'e quattro

<sup>(1)</sup> *Transzendente Additionstheoreme der elliptischen Thetafunktionen und andere Thetarelationen vom Faltungstypus* [Mathematische Annalen, 90 (1923), pp. 19-25].

<sup>(2)</sup> Si chiama *trasformata di Laplace* di una funzione  $f(t)$  e si indica spesso con  $\mathfrak{L}[f(t)]$  la funzione

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

La trasformazione di LAPLACE è di grandissima importanza nello studio di alcuni tipi di equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali, anche dal punto di vista numerico-pratico.

le  $\vartheta$  sono combinazioni lineari a coefficienti costanti (tanto rispetto a  $v$  quanto a  $\tau$ ) delle quantità:

$$q^{n^2} z^{2n} = e^{i\pi(n^2\tau+2nv)}, \quad q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{2n-1} = e^{i\pi[(n-\frac{1}{2})^2\tau+2(n-\frac{1}{2})v]}$$

che, come immediatamente si verifica, sono soluzioni della (70).

Dallo sviluppo della funzione  $\sigma$  in prodotto infinito (Cap. I, form. (71)), o, meglio ancora, applicando direttamente il teorema generale di WEIERSTRASS sulle funzioni olomorfe di cui nel Cap. IV di F. A., con calcoli nei cui particolari non entriamo <sup>(1)</sup>, si ottengono i seguenti sviluppi delle funzioni theta in prodotti infiniti semplici:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_1(v) &= 2q_0 q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}), \\ \vartheta_2(v) &= 2q_0 q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}), \\ \vartheta_3(v) &= q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}), \\ \vartheta_4(v) &= q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}), \end{aligned} \right.$$

avendo posto

$$(71') \quad q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \quad (2).$$

Essi sono tutti validi sotto la sola condizione  $|q| < 1$ .

Gli sviluppi precedenti possono essere, fra l'altro, utilizzati per ottenere gli sviluppi in serie trigonometriche dei logaritmi delle funzioni theta. All'uopo occorre partire dal noto sviluppo <sup>(3)</sup>:

<sup>(1)</sup> Vedi per esempio, BIANCHI [2], Cap. XIV.

<sup>(2)</sup> Derivando la prima delle (71) si vede molto facilmente che è

$$(71'') \quad 2\pi q^{\frac{1}{4}} q_0^3 = \vartheta_1'(0).$$

<sup>(3)</sup> Immediatamente ottenibile, supposto  $\varphi$  reale, uguagliando le parti reali dei due membri nella ben nota formula:

$$\log \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots, \quad (|z| < 1),$$

dove sia stato posto  $z = re^{i\varphi}$ .

$$\log \frac{1}{\sqrt{1-2r \cos \varphi + r^2}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} r^m \cos m\varphi$$

valido se

$$|r| < e^{-|\mathbf{I}(\varphi)|}$$

cioè (supposto  $|r| < 1$ ) nella striscia parallela all'asse reale

$$-\mathbf{R}\left(\log \frac{1}{r}\right) < \mathbf{I}(\varphi) < \mathbf{R}\left(\log \frac{1}{r}\right);$$

ed osservare che, nel caso di

$$\varphi = 2\pi v, \quad r = q^{2n-1}, \quad (n=1, 2, \dots),$$

la precedente condizione, cioè

$$-\mathbf{R}(\log q^{1-2n}) < \mathbf{I}(2\pi v) < \mathbf{R}(\log q^{1-2n}),$$

$$(n=1, 2, 3, \dots)$$

od anche

$$(2n-1)\mathbf{R}(i\pi) < 2\pi\mathbf{I}(v) < -(2n-1)\mathbf{R}(i\pi),$$

$$(n=1, 2, 3, \dots),$$

è certo soddisfatta supposto che sia

$$(72) \quad -\mathbf{I}\left(\frac{\tau}{2}\right) < \mathbf{I}(v) < \mathbf{I}\left(\frac{\tau}{2}\right).$$

Nell'ipotesi (72) può dunque porsi

$$\log(1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}) = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} q^{(2n-1)m} \cos 2m\pi v,$$

$$(n=1, 2, \dots),$$

epperò, sostituendo nell'ultima delle (71) dopo aver presi i logaritmi di ambo i membri, si avrà:

$$\log \vartheta_4(v) = \log q_0 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} q^{m(2n-1)} \cos 2m\pi v,$$

donde, scambiando l'ordine dei due sommatori, il che è lecito, segue

$$\log \vartheta_4(v) = \log q_0 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2m\pi v}{m} \sum_{n=1}^{\infty} (q^m)^{2n-1}$$

cioè

$$\log \vartheta_4(v) = \log q_0 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m}} \frac{\cos 2m\pi v}{m},$$

e combinando con la formula relativa a  $v=0$ :

$$\log \frac{\vartheta_4(v)}{\vartheta_4(0)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4q^m}{1-q^{2m}} \frac{\sin^2 m\pi v}{m}$$

od anche

$$\log \frac{\vartheta_4(v)}{\vartheta_4(0)} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 m\pi v}{m \mathbf{S}in m \log q^{-1}}.$$

Analogamente si trattano le altre tre funzioni, con l'avvertenza che nel caso di  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  lo sviluppo del logaritmo occorre solo a partire dall'esponente 2 di  $q$ , epperò la (72) è sostituita dalla condizione meno restrittiva:

$$(72') \quad -\mathbf{I}(\tau) < \mathbf{I}(v) < \mathbf{I}(\tau),$$

pervenendo così alle formule:

$$(73) \quad \begin{aligned} \log \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1(0)} &= \log \sin \pi v - \\ &\quad - 2 \left( q \frac{\cos^2 \pi v}{\mathbf{S}in \log q^{-1}} - q^2 \frac{\cos^2 2\pi v}{2 \mathbf{S}in 2 \log q^{-1}} + q^3 \frac{\cos^2 3\pi v}{3 \mathbf{S}in 3 \log q^{-1}} - \dots \right) \\ \log \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)} &= \log \cos \pi v - \\ &\quad - 2 \left( q \frac{\sin^2 \pi v}{\mathbf{S}in \log q^{-1}} - q^2 \frac{\sin^2 2\pi v}{2 \mathbf{S}in 2 \log q^{-1}} + q^3 \frac{\sin^2 3\pi v}{3 \mathbf{S}in 3 \log q^{-1}} - \dots \right) \\ \log \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)} &= -2 \left( \frac{\sin^2 \pi v}{\mathbf{S}in \log q^{-1}} - \frac{\sin^2 2\pi v}{2 \mathbf{S}in 2 \log q^{-1}} + \frac{\sin^2 3\pi v}{3 \mathbf{S}in 3 \log q^{-1}} - \dots \right) \\ \log \frac{\vartheta_4(v)}{\vartheta_4(0)} &= 2 \left( \frac{\sin^2 \pi v}{\mathbf{S}in \log q^{-1}} + \frac{\sin^2 2\pi v}{2 \mathbf{S}in 2 \log q^{-1}} + \frac{\sin^2 3\pi v}{3 \mathbf{S}in 3 \log q^{-1}} + \dots \right) \end{aligned}$$

di cui le prime due valgono sotto la condizione (72') mentre le ultime due valgono sotto la (72).

Dalle (73), derivando rispetto a  $v$ , si traggono subito le espressioni delle *derivate logaritmiche delle funzioni theta*, per esempio:

$$(73') \quad \frac{d}{dv} \log \vartheta_1(v) = \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} = \pi \cotg \pi v + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{\sin 2n\pi v}{\mathbf{S}in n \log q^{-1}}, \quad \text{ecc.}$$

e, con non minore facilità, le seguenti formule, di cui vedremo presto l'importanza, valide sotto le stesse condizioni delle corrispondenti (73):

$$(73'') \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_1(v+w)}{\vartheta_1(v-w)} &= \frac{1}{2} \log \frac{\sin \pi(v+w)}{\sin \pi(v-w)} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{\sin 2n\pi v \cdot \sin 2n\pi w}{n \operatorname{Sin} n \log q^{-1}}, \\ \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_2(v+w)}{\vartheta_2(v-w)} &= \frac{1}{2} \log \frac{\cos \pi(v+w)}{\cos \pi(v-w)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-q)^n \frac{\sin 2n\pi v \cdot \sin 2n\pi w}{n \operatorname{Sin} n \log q^{-1}}, \\ \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_3(v+w)}{\vartheta_3(v-w)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2n\pi v \cdot \sin 2n\pi w}{n \operatorname{Sin} n \log q^{-1}}, \\ \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_4(v+w)}{\vartheta_4(v-w)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi v \cdot \sin 2n\pi w}{n \operatorname{Sin} n \log q^{-1}}. \end{aligned} \right.$$

Passiamo ora a stabilire alcune formule, in parte assai importanti, in cui figurano principalmente le funzioni « *thetanulle* » cioè le quattro quantità

$$\begin{aligned} \vartheta_2(0|\tau), \\ \vartheta_3(0|\tau), \\ \vartheta_4(0|\tau), \\ \vartheta_1'(0|\tau), \end{aligned}$$

già considerate nei paragrafi precedenti.

All'uopo cominciamo col trasformare le formule (11) del § 1, fornenti i valori dei radicali  $\sqrt{e_\beta - e_\alpha}$ , sostituendo, a mezzo delle (56), le funzioni  $\vartheta$  alle funzioni  $\sigma$ , avremo così, con facili calcoli appoggiati sul quadro di pag. 136, le uguaglianze:

$$(74) \left\{ \begin{aligned} \sqrt{e_1 - e_2} &= i \sqrt{e_2 - e_1} = \frac{1}{2\omega} \frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)}, \\ \sqrt{e_1 - e_3} &= i \sqrt{e_3 - e_1} = \frac{1}{2\omega} \frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_4(0)}, \\ \sqrt{e_2 - e_3} &= i \sqrt{e_3 - e_2} = \frac{1}{2\omega} \frac{\vartheta_1'(0)\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)}. \end{aligned} \right.$$

Queste formule, nonostante siano da considerarsi solo come provvisorie, potendo esse venire ulteriormente molto semplificate, permettono già di dedurre alcune conseguenze assai interessanti. Invero, dividendo membro a membro la terza e la prima per la seconda e ricordando le (26), si hanno subito le seguenti

importanti espressioni dei moduli  $k$  e  $k'$  di LEGENDRE per mezzo delle *thetanulle*:

$$(75) \quad \boxed{\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}} \quad (1),$$

che mostrano come  $\sqrt{k}$  e  $\sqrt{k'}$  siano funzioni analitiche *uniformi* del rapporto  $\tau$  dei periodi. Ne segue inoltre che, soddisfacendo  $k$  e  $k'$  all'equazione

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

le *thetanulle* soddisferanno all'altra:

$$\frac{\vartheta_2^4(0)}{\vartheta_3^4(0)} + \frac{\vartheta_4^4(0)}{\vartheta_3^4(0)} = 1$$

cioè:

$$(76) \quad \boxed{\vartheta_2^4(0) + \vartheta_4^4(0) = \vartheta_3^4(0)}.$$

Per ricavare un'altra importante relazione fra le *thetanulle* (che, fra l'altro, sarà quella che ci permetterà di semplificare ulteriormente le (74)) partiamo dalla (58) sviluppando le due funzioni  $\vartheta$  del secondo membro in serie di potenze di  $v$ ; avremo così, tenuto conto che  $\vartheta_1$  è una funzione dispari mentr' invece  $\vartheta_{\alpha+1}$  ( $\alpha > 0$ ) è pari, l'uguaglianza:

$$\wp u = e_\alpha + \frac{1}{4\omega^2} \left[ \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} \frac{\vartheta_{\alpha+1}(0) + \vartheta''_{\alpha+1}(0) \frac{v^2}{2!} + \dots}{\vartheta_1'(0)v + \vartheta_1'''(0) \frac{v^3}{3!} + \dots} \right]^2,$$

donde successivamente si trae:

$$\wp u = e_\alpha + \frac{1}{u^2} \left[ \frac{1 + \frac{\vartheta''_{\alpha+1}(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} \frac{v^2}{2!} + \dots}{1 + \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} \frac{v^2}{3!} + \dots} \right]^2 =$$

(1) Scrivendo le (75) si è implicitamente venuto ad assumere ben determinati « segni » pei due radicali. È ben facile controllare, tenendo conto che il caso di  $k$  e  $k'$  reali e compresi fra 0 ed 1, corrisponde al caso di  $\tau$  immaginario puro, cioè di  $q$  reale e compreso fra 0 ed 1, che tali « segni » concordano con la convenzione fatta nel § 3.

$$\begin{aligned} &= e_\alpha + \frac{1}{u^2} \left[ 1 + \frac{v^2}{2} \left( \frac{\vartheta''_{\alpha+1}(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} \right) + \dots \right]^2 = \\ &= e_\alpha + \frac{1}{u^2} \left[ 1 + v^2 \left( \frac{\vartheta''_{\alpha+1}(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} \right) + \dots \right] = \\ &= e_\alpha + \frac{1}{u^2} \left[ 1 + \frac{u^2}{4\omega^2} \left( \frac{\vartheta''_{\alpha+1}(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Ma, come ben si ricorderà, lo sviluppo di  $\wp u$  in serie di potenze di  $u$  è privo del termine costante; dunque dovrà aversi identicamente

$$(77) \quad e_\alpha = -\frac{1}{4\omega^2} \left( \frac{\vartheta''_{\alpha+1}(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} - \frac{1}{3} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} \right), \quad (\alpha=1, 2, 3).$$

Ricordando che  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ , la formula trovata fornisce l'identità

$$\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} + \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} + \frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)} = \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}$$

cui, in virtù della (70), può darsi la forma

$$\frac{1}{\vartheta_2(0)} \frac{d\vartheta_2(0)}{d\tau} + \frac{1}{\vartheta_3(0)} \frac{d\vartheta_3(0)}{d\tau} + \frac{1}{\vartheta_4(0)} \frac{d\vartheta_4(0)}{d\tau} = \frac{1}{\vartheta_1'(0)} \frac{d\vartheta_1'(0)}{d\tau}$$

ossia:

$$\frac{d}{d\tau} \log \vartheta_2(0) + \frac{d}{d\tau} \log \vartheta_3(0) + \frac{d}{d\tau} \log \vartheta_4(0) = \frac{d}{d\tau} \log \vartheta_1'(0)$$

od anche:

$$\frac{d}{d\tau} \log \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)} = 0.$$

Dovrà pertanto essere

$$\vartheta_1'(0) = C\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)$$

dove  $C$  denota una costante rispetto a  $\tau$  che, considerati gli sviluppi (54), si vede subito essere uguale a  $\pi$ ; sussiste dunque l'identità di Jacobi:

$$(78) \quad \boxed{\vartheta_1'(0) = \pi\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)}.$$

È molto notevole il fatto che fra le quattro thetanulle, che sono funzioni trascendenti di  $\tau$ , sussistano *due relazioni algebriche* molto semplici: la (76) e la (78), che vengono in certo qual modo a rimpiazzare le generali relazioni (57) fra  $\vartheta_1(v)$ ,  $\vartheta_2(v)$ ,  $\vartheta_3(v)$  e  $\vartheta_4(v)$ , le quali per  $v=0$  si riducono a banali identità.

Servendosi della (78) le (74) prendono la seguente, più semplice, forma definitiva:

$$(79) \quad \boxed{\begin{aligned} \sqrt{e_1 - e_2} &= i\sqrt{e_2 - e_1} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_1^2(0) \\ \sqrt{e_1 - e_3} &= i\sqrt{e_3 - e_1} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_3^2(0) \\ \sqrt{e_2 - e_3} &= i\sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_2^2(0) \end{aligned}}$$

donde, ricordando la prima delle (19), segue fra l'altro che

$$(80) \quad \boxed{\sqrt{K} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \vartheta_3(0)} \quad (').$$

Avremo inoltre, tenendo presenti le (75), che le relazioni (62) fra  $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$  e le funzioni theta potranno scriversi, più semplicemente, sotto la forma:

$$(81) \quad \boxed{\begin{aligned} sn(u, k) &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ cn(u, k) &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ dn(u, k) &= \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ \left( v = \frac{u}{2K}, \quad q = e^{-\pi K'/K} \right) \end{aligned}}$$

(') Val la pena d'osservare che la (80) può modificarsi in modo da ottenere uno sviluppo di  $\sqrt{K}$  ancora più convergente della serie  $\vartheta_3(0)$ .

Infatti, dalla prima delle (74) dividendo per  $\sqrt{e_1 - e_3}$  può trarsi che

$$k' = \frac{\pi}{2\omega \sqrt{e_1 - e_3}} \vartheta_1^2(0) = \frac{\pi}{2K} \vartheta_1^2(0)$$

donde segue

$$\sqrt{k'} \sqrt{K} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \vartheta_1(0)$$

epperò, sommando con la (80), verrà

$$(80') \quad \sqrt{K} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{1+\sqrt{k'}} [\vartheta_3(0) + \vartheta_1(0)] = \frac{\sqrt{2\pi}}{1+\sqrt{k'}} (1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots)$$

ch'è lo sviluppo cercato.

Quanto al calcolo di  $q$  dato  $k$ , se non si ha a disposizione una delle apposite tabelle come quella di JAHNKE-EMDE cui si è accennato in fine del paragrafo precedente, o una tabella dell'integrale completo  $K$  di LEGENDRE, si può far uso della serie convergentissima:

$$(82) \quad q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 + 150\varepsilon^{13} + \dots$$

dove

$$(83) \quad 2\varepsilon = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

che si ottiene risolvendo rispetto a  $q$  l'equazione

$$(84) \quad \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{2(q + q^9 + \dots)}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots}$$

facilmente deducibile dalla seconda delle (75).

Un'altra notevolissima applicazione delle ultime formule trovate consiste nella semplificazione dei coefficienti che figurano nelle relazioni algebriche (57) fra le funzioni theta di uno stesso argomento, che possono ridursi alla seguente forma straordinariamente semplice:

$$(85) \quad \begin{cases} \vartheta_2^2(v) = -k' \vartheta_1^2(v) + k \vartheta_3^2(v) \\ \vartheta_4^2(v) = k \vartheta_2^2(v) + k' \vartheta_3^2(v) \end{cases}$$

Infatti, risolvendo rispetto a  $\vartheta_2^2(v)$  l'equazione risultante dall'eguagliare il primo col secondo membro delle (57), si ha

$$\vartheta_2^2(v) = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)} \vartheta_3^2(v) + \frac{4(e_2 - e_1)\omega^2 \vartheta_2^2(0)}{\vartheta_1'^2(0)} \vartheta_1^2(v)$$

dove, servendosi dell'identità di JACOBI (78) e della prima delle (79), segue

$$\vartheta_2^2(v) = \frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)} \vartheta_3^2(v) = \frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0)} \vartheta_1^2(v)$$

che, tenuto conto delle (75), non è altro se non la prima delle (85). Nello stesso modo si dimostra l'altra.

Dalle (85), tenuto conto che

$$\frac{k}{1 - k'} = \frac{1 + k'}{k},$$

si trae facilmente che  $\vartheta_2^2(v) \mp \vartheta_1^2(v)$  è proporzionale a  $\vartheta_3^2(v) \mp \vartheta_4^2(v)$ ; propriamente si hanno le due equazioni:

$$(85') \quad \begin{cases} \vartheta_2^2(v) - \vartheta_1^2(v) = \frac{k}{1 - k'} [\vartheta_3^2(v) - \vartheta_4^2(v)] \\ \vartheta_2^2(v) + \vartheta_1^2(v) = \frac{1 - k'}{k} [\vartheta_3^2(v) + \vartheta_4^2(v)] \end{cases}$$

che possono rimpiazzare le (85). Da esse segue subito che

$$(86) \quad \vartheta_2^2(v) - \vartheta_1^2(v) = \vartheta_3^2(v) - \vartheta_4^2(v),$$

dove, ponendo  $v=0$ , ritorna la (76).

Notiamo inoltre che elevando a quadrato le (79) e risolvendo rispetto ad  $e_1, e_2$  ed  $e_3$  le equazioni così ottenute, le (77) possono sostituirsi con le formule più semplici:

$$(87) \quad \begin{cases} e_1 = \frac{\pi^2}{12\omega^2} [\vartheta_3^2(0) + \vartheta_4^2(0)], \\ e_2 = \frac{\pi^2}{12\omega^2} [\vartheta_2^2(0) - \vartheta_1^2(0)], \\ e_3 = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} [\vartheta_2^2(0) + \vartheta_3^2(0)]. \end{cases}$$

Invece, moltiplicando fra loro le (79) avremo, in virtù della (43) del Cap. I, l'altra formula interessante:

$$\sqrt[4]{\Delta} = \sqrt[4]{g_2^3 - 27g_3^3} = 2 \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^3 [\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)]^2$$

che, in forza della (78), può più semplicemente scriversi:

$$(88) \quad \sqrt[4]{\Delta} = \frac{\pi}{4\omega^3} \vartheta_1'^2(0).$$

Dalle (87) possono facilmente trarsi le formule

$$(89) \quad \begin{cases} g_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4 [\vartheta_2^2(0) + \vartheta_3^2(0) + \vartheta_4^2(0)] \\ g_3 = \frac{4}{27} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6 [\vartheta_2^2(0) + \vartheta_3^2(0)] [\vartheta_3^2(0) + \vartheta_4^2(0)] [\vartheta_4^2(0) - \vartheta_2^2(0)], \end{cases}$$

talvolta comode per il controllo dei calcoli numerici.

Finalmente vogliamo ricavarci una formula che ci consenta di calcolare la quantità  $\eta$ , e quindi anche  $\eta'$ , per mezzo delle serie  $\vartheta$ .

All'uopo serviamoci della relazione fra  $\sigma$  e  $\vartheta_1$ , cioè della prima delle (56), per ritrovare i primi termini dello sviluppo di  $\sigma u$  in serie di potenze di  $u$ ; avremo così:

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \vartheta_1(v) = \frac{2\omega}{\vartheta_1'(0)} \left(1 + \frac{\eta u^2}{2\omega} + \dots\right) \left[\vartheta_1'(0)v + \vartheta_1'''(0) \frac{v^3}{3!} + \dots\right]$$

donde, con calcoli facili, segue:

$$\sigma u = u + \frac{1}{2\omega} \left[\eta + \frac{1}{12\omega} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}\right] u^3 + \dots$$

Ma, si confronti la (74) del Cap. I, lo sviluppo di  $\sigma u$  non contiene il termine in  $u^3$ ; dunque dovrà essere

$$(90) \quad \boxed{\eta = -\frac{1}{12\omega} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}},$$

ch'è la formula cercata.

#### § 7. - Utilizzazione delle funzioni theta pel calcolo degli integrali di terza specie.

Le funzioni theta possono essere utilizzate pel calcolo numerico non solo delle funzioni ellittiche  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$ ,  $\text{dn}$ ,  $\wp$  ecc., ma anche degli integrali ellittici fondamentali di prima, seconda e terza specie cui, come ben sappiamo, può essere ricondotto qualsiasi altro integrale ellittico.

Nel caso degli integrali di prima e seconda specie la cosa non ha che scarso interesse pratico, esistendo comode tabelle di questi integrali. Tuttavia merita di essere osservata la semplice formula:

$$(91) \quad \boxed{E(\varphi, k) = \frac{1}{2\mathbf{K}} \frac{\vartheta_4'(u/2\mathbf{K})}{\vartheta_4(u/2\mathbf{K})} + \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} u, \quad u = F(\varphi, k)}$$

che, con l'ausilio della funzione  $\vartheta_4$ , riconduce il calcolo dell'integrale di 2ª specie di LEGENDRE  $E$  (1) a quello di 1ª specie  $F$ . Essa

(1) La quantità  $E$  pensata come funzione di  $u = F(\varphi)$  invece che come funzione di  $\varphi$ , è stata indicata da JACOBI, e dopo di lui da molti altri AA.,

si deduce facilmente dalle (32) e (33) osservando che, in virtù della (59), è

$$(59') \quad \zeta(u + \omega) = \frac{1}{2\omega} \frac{d}{dv} \log \vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{\eta}{\omega} (u + \omega) = \\ = \frac{1}{2\omega} \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} - \frac{i\pi}{2\omega} + \frac{\eta}{\omega} (u + \omega).$$

Naturalmente, avendo posto semplicemente  $u = F(\varphi, k)$  (il che implica  $e_1 - e_3 = 1$ ), la funzione  $\vartheta$  che figura nella (91) sarà da calcolare in corrispondenza al valore di  $q$  indicato nelle (62), cioè si dovrà porre

$$(91') \quad \log q = -\frac{\pi \mathbf{K}'}{\mathbf{K}}.$$

Molto maggior interesse ha invece l'espressione degli integrali di terza specie mediante le funzioni theta, non essendo praticamente possibile costruire tabelle numeriche di questi integrali, che sono funzioni di *tre* variabili indipendenti (1). Val dunque la pena di soffermarsi un momento a considerare la cosa con qualche dettaglio.

Il caso in cui la biquadratica fondamentale ha la forma di WEIERSTRASS è presto sbrigato perchè, essendosi già fatto vedere, nel Cap. II, come il corrispondente integrale fondamentale di terza specie:

$$I_3' = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3} + \sqrt{4c^3 - g_2c - g_3}}{(x-c)\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} dx$$

col simbolo  $E(u)$ . Altri (HOÛEL) scrivono invece  $el(u)$ . Con tali simboli la (91) può dunque scriversi

$$(91'') \quad E(u) \equiv el(u) = \frac{1}{2\mathbf{K}} \frac{\vartheta_4'(u/2\mathbf{K})}{\vartheta_4(u/2\mathbf{K})} + \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} u,$$

il che mostra come la  $el(u)$ , a differenza della  $E(\varphi)$  di LEGENDRE, sia una funzione *univoca* del suo argomento.

Notiamo ancora che, sempre seguendo JACOBI, molti introducono un simbolo speciale ( $Z$  o  $zn$ ) pel primo termine del secondo membro della (91), cioè pongono:

$$Z(u) \equiv zn u = el(u) - \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} u = \frac{1}{2\mathbf{K}} \frac{\vartheta_4'(u/2\mathbf{K})}{\vartheta_4(u/2\mathbf{K})}.$$

(1) In un recente lavoro di E. J. NYSTRÖM [*Praktische Auswertung von elliptischen Integralen dritter Gattung*, Commentationes Helsingfors, 8 (1935), n.º 12, 17 p.] sono dati dei nomogrammi e dei metodi di calcolo numerico per integrali di terza specie, che sembrano dare in pratica buoni risultati. Per gli integrali di terza specie *completi*, vedi anche più avanti (p. 207).

possa essere ricondotto alle funzioni  $\wp$ ,  $\zeta$  e  $\sigma$ ; non vi sarà ora che da trasformare la formula allora trovata (la (52) del Cap. II) e cioè:

$$I_3' = \log \frac{\sigma(u-\gamma)}{\sigma u} + u \cdot \zeta \gamma + \text{cost.}, \quad x = \wp u, \quad c = \wp \gamma$$

in modo da farvi comparire le funzioni theta.

Ci serviremo a questo scopo della prima delle (56) e della (59) che ci forniscono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \log \frac{\sigma(u-\gamma)}{\sigma u} &= \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{u-\gamma}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)} + \frac{\eta}{2\omega} (u-\gamma)^2 - \frac{\eta}{2\omega} u^2 = \\ &= \log \frac{\vartheta_1\left(\frac{u-\gamma}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)} - \frac{\eta}{\omega} \gamma \cdot u + \text{cost.} \end{aligned}$$

e

$$u \cdot \zeta \gamma = \frac{u}{2\omega} \frac{\vartheta_1'\left(\frac{\gamma}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\gamma}{2\omega}\right)} + \frac{\eta}{\omega} \gamma \cdot u,$$

avremo perciò in definitiva la formula:

$$(92) \quad I_3' = \log \frac{\vartheta_1(v-\beta)}{\vartheta_1(v)} + \frac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} v + \text{cost.}$$

avendo posto per abbreviare:

$$v = \frac{u}{2\omega}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2\omega},$$

cioè

$$(92') \quad x = \wp(2\omega v), \quad c = \wp(2\omega\beta).$$

Passiamo ora al caso, praticamente assai più importante, in cui l'integrale di terza specie ha la forma di LEGENDRE:

$$II(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

che cercheremo ricondurre al precedente trasformando l'uno nell'altro i due integrali fondamentali.

All'uopo partiamo dall'integrale  $I_3'$  operando su di esso la stessa sostituzione usata in principio di questo Capitolo per collegare le funzioni sn, cn e dn alla  $\wp$ , poniamo cioè:

$$(93) \quad x = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \varphi};$$

avremo così:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 - g_2x - g_3} &= 2 \sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} = \\ &= 2(e_1 - e_3)^{\frac{3}{2}} \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \\ dx &= -2(e_1 - e_3) \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} d\varphi, \quad \left(k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}\right); \end{aligned}$$

pertanto, posto pure, analogamente alla (93):

$$(93') \quad c = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \alpha},$$

potremo scrivere che

$$I_3' = - \int \frac{\frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}{\left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi + \text{cost.}$$

cioè

$$\begin{aligned} I_3' &= \int \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cotg \varphi}{\sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha} d\varphi + \\ &+ \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \cdot \cotg \alpha \int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(\sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \text{cost.} \end{aligned}$$

Ma il primo integrale è un integrale elementare che si calcola subito assumendo come nuova variabile  $\sin^2 \varphi$ , mentre il secondo, aggiungendo e togliendo  $\sin^2 \alpha$  dal numeratore, può mettersi sotto la forma:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \int \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \alpha}\right) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}};$$

dunque avremo la formula

$$\begin{aligned} I_3' &= \frac{1}{2} \log \left| 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \varphi} \right| + \\ &+ \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \cdot \cotg \alpha \cdot \left[ F(\varphi, k) - \Pi\left(\varphi, -\frac{1}{\sin^2 \alpha}, k\right) \right] + \text{cost.}, \end{aligned}$$

che, tenuto conto della (92), fornisce:

$$(94) \quad \sqrt{1-k^2 \sin^2 a} \cdot \cotg a \cdot \Pi \left( \varphi, \frac{-1}{\sin^2 a}, k \right) = \frac{1}{2} \log \left| 1 - \frac{\sin^2 a}{\sin^2 \varphi} \right| + \\ + \left[ 2\omega \sqrt{1-k^2 \sin^2 a} \cdot \cotg a - \frac{\vartheta_4'(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} \right] v - \\ - \log \frac{\vartheta_4(v-\beta)}{\vartheta_4(v)} + \text{cost.}, \quad (2\omega v = F(\varphi, k)).$$

Per semplificare la formula ottenuta, cominciamo con l'osservare che avendosi, in forza della (93'),

$$\wp \gamma = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 a},$$

ferma l'ipotesi  $e_1 - e_3 = 1$  del § 5, sarà

$$(94') \quad \sin a = \text{sn}(\gamma, k),$$

però potremo anzitutto porre

$$\sin a = \text{sn} \gamma, \quad \cos a = \text{cn} \gamma, \quad \sqrt{1-k^2 \sin^2 a} = \text{dn} \gamma$$

donde, tenuto conto che  $\omega = K$ , in virtù della prima delle (81), segue

$$2\omega \sqrt{1-k^2 \sin^2 a} \cdot \cotg a = 2K \frac{\text{cn} \gamma \cdot \text{dn} \gamma}{\text{sn} \gamma} = 2K \frac{\frac{d}{d\gamma} \text{sn} \gamma}{\text{sn} \gamma} = \\ = \frac{d}{d\beta} \log \text{sn} \gamma = \frac{d}{d\beta} \log \left[ \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_4(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} \right] = \frac{\vartheta_4'(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} - \frac{\vartheta_4'(\beta)}{\vartheta_4(\beta)},$$

la (94) potrà dunque più semplicemente scriversi:

$$(95) \quad \frac{\text{cn} \gamma \cdot \text{dn} \gamma}{\text{sn} \gamma} \Pi \left( \varphi, \frac{-1}{\sin^2 \gamma}, k \right) = \\ = \frac{1}{2} \log \left| 1 - \frac{\text{sn}^2 \gamma}{\sin^2 \varphi} \right| - \frac{\vartheta_4'(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} v - \log \frac{\vartheta_4(v-\beta)}{\vartheta_4(v)},$$

avendo ulteriormente osservato che la costante al secondo membro dev'essere necessariamente nulla perchè per  $\varphi=0$  (che implica  $v=0$ ) tutti gli altri termini si annullano.

Per ottenere un'ulteriore semplificazione, cambiamo ora  $\gamma$  in  $-\gamma$  nella (95); avremo così

$$(95') \quad - \frac{\text{cn} \gamma \cdot \text{dn} \gamma}{\text{sn} \gamma} \Pi \left( \varphi, \frac{-1}{\sin^2 \gamma}, k \right) = \\ = \frac{1}{2} \log \left| 1 - \frac{\text{sn}^2 \gamma}{\sin^2 \varphi} \right| + \frac{\vartheta_4'(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} v - \log \frac{\vartheta_4(v+\beta)}{\vartheta_4(v)}$$

donde, cambiando di segno, sommando con la (95) e dividendo per 2, segue finalmente:

$$(96) \quad \frac{\text{cn} \gamma \cdot \text{dn} \gamma}{\text{sn} \gamma} \Pi \left( \varphi, \frac{-1}{\sin^2 \gamma}, k \right) = \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_4(v+\beta)}{\vartheta_4(v-\beta)} - \frac{\vartheta_4'(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} v, \\ v = \frac{1}{2K} F(\varphi, k), \quad \beta = \frac{1}{2K} \gamma, \quad q = e^{-\pi K'/K}.$$

formula da cui, volendo, potrebbe farsi sparire il rapporto  $\vartheta_4'(\beta)/\vartheta_4(\beta)$  giovandosi della (91).

La formula trovata permette un comodo calcolo dell'integrale di terza specie  $\Pi(\varphi, n, k)$ , purchè il parametro  $n$ , che deve qui identificarsi con  $-1/\text{sn}^2 \gamma$ , sia minore di  $-1$ . Se invece questa condizione non è verificata allora s'introducono, pur nel caso di  $n$  e  $\varphi$  reali e  $k$  reale e compreso fra 0 ed 1, degli immaginari che richiedono qualche speciale accorgimento onde non arrechino molestie nei calcoli numerici. Propriamente è opportuno far uso delle formule raccolte, assieme con la (96), nel quadro seguente, che contiene l'essenziale delle formule all'uopo stabilite da HOUEL:

Casi	Si pone		$m \Pi(\varphi, n, k) =$
	$n =$	$m =$	
1°) $-\infty < n < -1$	$-\frac{1}{\text{sn}^2(\gamma, k)}$	$\frac{\text{cn}(\gamma, k) \text{dn}(\gamma, k)}{\text{sn}(\gamma, k)}$	$\frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_4(v+\beta)}{\vartheta_4(v-\beta)} - \frac{\vartheta_4'(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} v$
2°) $-1 < n < -k^2$	$-\text{dn}^2(\gamma, k')$	$k'^2 \frac{\text{sn}(\gamma, k') \text{cn}(\gamma, k')}{\text{dn}(\gamma, k')}$	$-\frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_2(v+i\beta)}{\vartheta_2(v-i\beta)} - i \frac{\vartheta_2'(i\beta)}{\vartheta_2(i\beta)} v$
3°) $-k^2 < n < 0$	$-k^2 \text{sn}^2(\gamma, k)$	$\frac{\text{cn}(\gamma, k) \text{dn}(\gamma, k)}{\text{sn}(\gamma, k)}$	$-\frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_4(v+\beta)}{\vartheta_4(v-\beta)} + \frac{\vartheta_4'(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} v$
4°) $0 < n < +\infty$	$k^2 \frac{\text{sn}^2(\gamma, k')}{\text{cn}^2(\gamma, k')}$	$\frac{\text{dn}(\gamma, k')}{\text{sn}(\gamma, k') \text{cn}(\gamma, k')}$	$\frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_4(v+i\beta)}{\vartheta_4(v-i\beta)} + i \frac{\vartheta_4'(i\beta)}{\vartheta_4(i\beta)} v$

L'argomento  $\gamma$  deve essere scelto, com'è sempre possibile, in modo che risulti compreso fra 0 e  $\mathbf{K}$  (1° e 3° caso) o fra 0 e  $\mathbf{K}'$  (2° e 4° caso) (4). Quanto a  $v$ ,  $\beta$  e  $q$ , essi verranno calcolati, come prima, mediante le formole:

$$v = \frac{1}{2\mathbf{K}} F(\varphi, k), \quad \beta = \frac{1}{2\mathbf{K}} \gamma, \quad q = e^{-\pi\mathbf{K}'/\mathbf{K}}.$$

Le formole del 2° e 4° caso contengono degli immaginari ma solo in apparenza. Invero, ricordando che

$$\sin ix = i \mathbf{Sin} x, \quad \cos ix = \mathbf{Cos} x, \quad \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix},$$

dalle (73') e (73'') si ricava subito che:

$$(97) \left\{ \begin{aligned} i \frac{\vartheta_1'(i\beta)}{\vartheta_1(i\beta)} &= \pi \mathbf{Cotg} \pi\beta - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{\mathbf{Sin} 2n\pi\beta}{\mathbf{Sin} n \log q^{-1}} \\ i \frac{\vartheta_3'(i\beta)}{\vartheta_3(i\beta)} &= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{Sin} 2n\pi\beta}{\mathbf{Sin} n \log q^{-1}} \\ \frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_2(v+i\beta)}{\vartheta_2(v-i\beta)} &= -\operatorname{arctg} (\mathbf{Tg} \pi\beta \cdot \mathbf{tg} \pi v) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-q)^n \frac{\sin 2n\pi v \mathbf{Sin} 2n\pi\beta}{n \mathbf{Sin} n \log q^{-1}} \\ \frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_4(v+i\beta)}{\vartheta_4(v-i\beta)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi v \cdot \mathbf{Sin} 2n\pi\beta}{n \mathbf{Sin} n \log q^{-1}}. \end{aligned} \right.$$

Queste serie sono certo tutte convergenti se i periodi fondamentali sono scelti in modo che sia soddisfatta la (12) del Cap. I. Infatti, essendo  $\gamma$  compreso fra 0 e  $\mathbf{K}'$  e, di conseguenza:

$$0 < \beta < \frac{\mathbf{K}'}{2\mathbf{K}} = \mathbf{I} \left( \frac{\tau}{2} \right),$$

la condizione (72) è verificata.

(4) In HOÜEL [19], §§ XX-XXI si mostra come, operando all'occorrenza la sostituzione  $u = \mathbf{K} - u_1$  (o  $u = \mathbf{K}' - u_1$ ),  $\gamma$  possa essere addirittura ristretto nell'intervallo  $(0, \mathbf{K}/2)$  o  $(0, \mathbf{K}'/2)$ , il che può essere utile dal punto di vista della precisione dei calcoli numerici.

Dal punto di vista pratico è però da osservare che, mentre la prima e la terza serie, sono sempre sufficientemente convergenti per i calcoli numerici; non si può dire lo stesso della seconda e della quarta, nei cui termini mancano le successive potenze di  $q$ .

Ad evitare questo inconveniente osserviamo che, sostituendo  $v + i\beta$  al posto di  $v$  nell'ultima delle (51), si ha

$$\vartheta_4(v+i\beta) = A(v, \beta) + iB(v, \beta),$$

avendo posto per abbreviare

$$(98) \left\{ \begin{aligned} A(v, \beta) &= 1 - 2q \cos 2\pi v \cdot \mathbf{Cos} 2\pi\beta + \\ &\quad + 2q^4 \cos 4\pi v \cdot \mathbf{Cos} 4\pi\beta - \dots \\ B(v, \beta) &= 2q \sin 2\pi v \cdot \mathbf{Sin} 2\pi\beta - \\ &\quad - 2q^4 \sin 4\pi v \cdot \mathbf{Sin} 4\pi\beta + \dots; \end{aligned} \right.$$

potremo pertanto scrivere che

$$\frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_4(v+i\beta)}{\vartheta_4(v-i\beta)} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + \frac{B}{A} i}{1 - \frac{B}{A} i},$$

donde, confrontando con la surricordata formula che fornisce  $\operatorname{arctg} x$  sotto forma di logaritmo, segue subito la formula:

$$(99) \quad \frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_4(v+i\beta)}{\vartheta_4(v-i\beta)} = \operatorname{arctg} \frac{B(v, \beta)}{A(v, \beta)},$$

atta a rimpiazzare l'ultima delle (97).

Similmente, essendo

$$\vartheta_3(i\beta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \mathbf{Cos} 2n\pi\beta, \quad i\vartheta_3'(i\beta) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n^2} \mathbf{Sin} 2n\pi\beta,$$

la seconda delle (97) potrà essere rimpiazzata con l'altra formula:

$$(100) \quad i \frac{\vartheta_3'(i\beta)}{\vartheta_3(i\beta)} = 4\pi \frac{q \mathbf{Sin} 2\pi\beta + 2q^4 \mathbf{Sin} 4\pi\beta + 3q^9 \mathbf{Sin} 6\pi\beta + \dots}{1 + 2q \mathbf{Cos} 2\pi\beta + 2q^4 \mathbf{Cos} 4\pi\beta + 2q^9 \mathbf{Cos} 6\pi\beta + \dots}$$

che, sebbene formalmente meno semplice, è molto preferibile dal punto di vista dei calcoli numerici.

Trasformazioni delle funzioni ellittiche.

§ 1. - Teorema fondamentale sulle funzioni  $\wp$  legate algebricamente fra loro.

Una delle più profonde differenze fra le funzioni elementari e le ellittiche è, come s'è già avuto occasione di osservare (nel § 5 del Cap. I, p. 23), che queste, al contrario di quelle, contengono oltre ad una variabile principale od « argomento » ( $u$  o  $v$  ecc.), anche altre variabili secondarie o « parametri » che dir si voglia: i semiperiodi  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , oppure  $g_2$  e  $g_3$ ,  $k$ ,  $q$ , ecc. Si tratta dunque, in sostanza, di funzioni di *più* variabili, ciò che talvolta, per esempio nella costruzione di tabelle numeriche delle funzioni, dà luogo a difficoltà (necessità di ricorrere a tabelle a *doppia entrata*, ecc.) che non hanno riscontro nel campo delle trascendenti elementari.

Finora noi non ci siamo occupati se non incidentalmente della dipendenza delle funzioni ellittiche dagli accennati parametri: ad esempio ce ne siamo implicitamente un po' occupati nel cit. § 5 del Cap. I, in cui abbiamo dimostrato che la condizione necessaria e sufficiente affinché le funzioni  $\wp$  costruite a partire da due diverse coppie  $(\omega, \omega')$  e  $(\dot{\omega}, \dot{\omega}')$  di semiperiodi, coincidano fra loro, è che si abbia

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{\omega} = a\omega + \beta\omega' \\ \dot{\omega}' = \gamma\omega + \delta\omega' \end{cases}$$

dove  $a, \beta, \gamma$  e  $\delta$  sono quattro *interi* tali da aversi:

$$(2) \quad a\delta - \beta\gamma = 1.$$

Infatti tale teorema dimostra che, sotto le condizioni ora ricordate, si ha

$$(3) \quad \wp(u | \omega, \omega') = \wp(u | a\omega + \beta\omega', \gamma\omega + \delta\omega'),$$

ciò che manifestamente costituisce una proprietà della  $\wp$  di WEIERSTRASS riguardata come funzione di  $\omega$  e  $\omega'$ .

Possiamo ora domandarci, assai più generalmente, *quali relazioni debbano intercedere fra due coppie di semiperiodi  $(\omega, \omega')$  e  $(\dot{\omega}, \dot{\omega}')$  affinché fra le corrispondenti funzioni  $\wp$ :*

$$x = \wp(u | \omega, \omega'), \quad y = \wp(u | \dot{\omega}, \dot{\omega}')$$

*interceda una relazione algebrica, cioè della forma*

$$(4) \quad F(x, y) = 0,$$

dove  $F$  denota un polinomio nelle due variabili  $x$  e  $y$ . Vedremo subito che *la condizione necessaria e sufficiente affinché ciò si verifichi, è che fra i semiperiodi intervengano delle relazioni della forma*

$$(5) \quad \begin{cases} \varrho\dot{\omega} = a\omega + \beta\omega' \\ \varrho\dot{\omega}' = \gamma\omega + \delta\omega' \end{cases}$$

*dove  $a, \beta, \gamma, \delta, \varrho$  denotano numeri interi (che potremo sempre supporre primi fra loro) tali da aversi*

$$(6) \quad D = a\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

*anzi addirittura*

$$(6') \quad D = a\delta - \beta\gamma > 0,$$

*supposto che i quattro semiperiodi siano tali che sia*

$$\Re\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) > 0, \quad \Re\left(\frac{\dot{\omega}'}{\dot{\omega}}\right) > 0.$$

(Si cfr. il § 2 del Cap. I).

Infatti, pensiamo attribuiti ad  $u$  gli infiniti valori

$$u = u_0 + 2h\dot{\omega}, \quad (h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ed osserviamo che, se sussiste la (4), al corrispondente valore

$$y_0 = \wp(u_0 | \dot{\omega}, \dot{\omega}')$$

di  $y$  non potranno essere associati che al più  $\nu$  valori distinti di  $x$ , se  $\nu$  è il grado del polinomio  $F$  in  $x$ . Ne segue che delle infinite quantità

$$\wp(u_0 + 2h\dot{\omega} | \omega, \omega')$$

non ce ne potranno essere che al più  $\nu$  distinte, epperò esisteranno certo due valori distinti  $h'$  ed  $h''$  di  $h$  tali da aversi

$$\wp(u_0 + 2h'\omega | \omega, \omega') = \wp(u_0 + 2h''\omega | \omega, \omega'),$$

il che implica che dovrà essere necessariamente

$$u_0 + 2h'\omega = \pm (u_0 + 2h''\omega) + 2m\omega + 2n\omega'$$

con  $m$  e  $n$  numeri interi, donde, essendo  $u_0$  qualsiasi (e quindi, in generale, diverso da un semiperiodo) segue

$$h^*\omega = m\omega + n\omega',$$

avendo posto  $h^* = h' - h''$ .

In modo del tutto simile, partendo dagli infiniti valori

$$u = u_0 + 2k\omega', \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

si trova la relazione

$$k^*\omega' = m'\omega + n'\omega'$$

con  $k^*$ ,  $m'$ ,  $n'$  numeri interi; quindi, detto  $\rho$  il minimo comune multiplo di  $h^*$  e  $k^*$ , se sussiste la (4), fra i semiperiodi  $(\omega, \omega')$  e  $(\rho\omega, \rho\omega')$  dovranno necessariamente intervenire delle relazioni del tipo (5), il cui determinante dei coefficienti  $D$  non potrà esser nullo, chè altrimenti i due semiperiodi  $\omega$  ed  $\omega'$  avrebbero un rapporto reale, anzi addirittura razionale.

La reciproca è quasi di per sè evidente: Invero, se fra i semiperiodi  $(\omega, \omega')$  e  $(\rho\omega, \rho\omega')$  sussistono le relazioni (5), le due funzioni ellittiche  $\wp(u | \omega, \omega')$  e  $\wp(u | \rho\omega, \rho\omega')$  avranno a comune i due periodi  $2\rho\omega, 2\rho\omega'$ , epperò (Cap. I, § 7) fra di esse intercederà necessariamente una relazione algebrica.

Il teorema ora dimostrato, che è la base della cosiddetta *teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche*, cioè della teoria che insegna a ricercare le effettive relazioni del tipo (4) colleganti due funzioni ellittiche i cui semiperiodi siano legati da relazioni del tipo (5), riceve un essenziale complemento dall'osservazione che *la relazione algebrica (4) può sempre «razionalizzarsi»*, cioè che può sempre determinarsi una terza variabile  $z$  tale da aversi

$$x = R(z), \quad y = S(z)$$

dove  $R$  ed  $S$  sono i simboli di due funzioni razionali del loro argomento (4).

Infatti basta porre

$$z = \wp(u | \rho\omega, \rho\omega')$$

ed osservare che  $x$  ed  $y$ , essendo delle funzioni ellittiche *pari*, ammettenti entrambe i periodi  $2\rho\omega$  e  $2\rho\omega'$ , sono certo razionalmente esprimibili mediante  $\wp(u | \rho\omega, \rho\omega')$  [Cap. I, § 7, form. (58)].

Osserviamo che, quando ci si trova in queste condizioni, cioè quando la relazione fra le due funzioni:

$$x = \wp(u | \omega, \omega') \quad \text{e} \quad y = \wp(u | \rho\omega, \rho\omega')$$

è razionale, e precisamente del tipo:

$$(7) \quad x = \frac{P(y)}{Q(y)},$$

cioè

$$(7') \quad P(y) - xQ(y) = 0,$$

con  $P$  e  $Q$  polinomi (primi fra loro) in  $y$ ; allora l'intero  $\rho$  dev'essere necessariamente uguale ad  $uno$ , epperò le (5) assumono l'aspetto:

$$(8) \quad \begin{cases} \omega = a\omega + \beta\omega' \\ \omega' = \gamma\omega + \delta\omega' \end{cases}$$

si ricade dunque sulle (1) considerate indipendentemente dalla (2), e reciprocamente.

Infatti, se vale la (7), i periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$  di  $y$  sono anche periodi di  $x$  epperò dovranno valere le (8); viceversa, se valgono le (8),  $x$  ammetterà i periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$  epperò, essendo altresì una funzione pari di  $u$ , potrà esprimersi razionalmente mediante  $y = \wp(u | \omega, \omega')$ .

Quanto al significato del determinante dei coefficienti:

$$D = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

(4) Geometricamente interpretata quest'osservazione ci dice che la curva algebrica di equazione  $F(x, y) = 0$  è sempre una curva *razionale*.

dalle (8), si dimostra agevolmente <sup>(1)</sup> che questo  $D$ , chè è necessariamente un numero intero, coincide col grado dell'equazione (7') in  $y$ , cioè col maggiore dei gradi dei due polinomi  $P(y)$  e  $Q(y)$ ;  $D$  fornisce dunque il numero dei valori  $y_0$  di  $y$  corrispondenti ad un generico valore determinato  $x_0$  di  $x$ , e dicesi pertanto *ordine* (o *grado*) della trasformazione di periodi (8).

La circostanza dianzi posta in luce che, nel passaggio dalla funzione  $x = \wp(u | \omega, \omega')$  alla funzione  $y = \wp(u | \omega', \omega)$ , si può inserire come termine intermedio la funzione  $z = \wp(u | \rho\omega, \rho\omega')$ , legata razionalmente ad entrambe; è di ovvia importanza per l'intera teoria della trasformazione delle funzioni  $\wp$  e, di conseguenza, anche di tutte le altre funzioni ellittiche. Essa mostra invero che, in tale teoria, ci si può limitare a considerare soltanto trasformazioni « *razionali* » del tipo (8) invece delle più generali trasformazioni (5).

§ 2. - Trasformazioni di prim'ordine:  
Loro effetto sulle funzioni di Jacobi.

Servendosi delle denominazioni ultimamente introdotte il risultato già stabilito nel ricordato § 5 del Cap. I, può più semplicemente enunciarsi dicendo che:

*La funzione  $\wp$  di Weierstrass, e così pure le funzioni  $\zeta$  e  $\sigma$  nonchè gli invarianti  $g_2$  e  $g_3$ , restano invariati per qualsiasi trasformazione razionale di prim'ordine dei periodi.*

In questo teorema risiede uno dei principali pregi delle funzioni ellittiche di WEIERSTRASS in confronto di quelle di JACOBI. Invero vedremo subito che quest'ultime, e cioè tanto le funzioni  $sn$ ,  $cn$  e  $dn$  quanto le *theta*, non si comportano così semplicemente, risultando in generale alterate da una trasformazione di prim'ordine.

Per determinare le relative formule di trasformazione, alcune delle quali hanno molto interesse anche dal punto di vista applicativo, cominciamo con l'osservare che, come può dimostrarsi con considerazioni algebriche del tutto elementari <sup>(2)</sup>, ogni sostitu-

<sup>(1)</sup> Vedi, per esempio, BIANCHI [2], pp. 472-473.

<sup>(2)</sup> Cfr., per esempio, WEBER [13], 3. Absch., § 30 (pp. 101-102) o TANNERY-MOLK [12], I, n.º 148-150, pp. 243-246.

*zione di prim'ordine  $S$  può scomporsi in un prodotto di potenze delle due speciali trasformazioni*

$$A = \begin{cases} \dot{\omega} = \omega \\ \dot{\omega}' = \omega + \omega' \end{cases} \quad B = \begin{cases} \dot{\omega} = \omega' \\ \dot{\omega}' = -\omega. \end{cases}$$

In altre parole, tenuto conto che  $B^2$ , cioè il risultato dell'applicazione della sostituzione  $B$  due volte di seguito, è manifestamente la *sostituzione identica*  $\dot{\omega} = \omega, \dot{\omega}' = \omega'$  <sup>(1)</sup>; si dimostra che è possibile trovare degli interi  $m, n, p, \dots, t$  tali che sussista l'egualianza simbolica:

$$S = A^m \cdot B \cdot A^n \cdot B \cdot A^p \cdot B \cdot \dots \cdot A^t$$

il cui significato è manifesto <sup>(2)</sup>. Potremo dunque limitarci a studiare l'effetto delle « *sostituzioni generatrici* »  $A$  e  $B$  sulle funzioni jacobiane.

All'uopo osserviamo anzitutto che, in virtù della definizione stessa delle quantità  $\eta$  ed  $\eta'$  (form. (62) del Cap. I), si ha:

$$\text{(per la sost. } A) \quad \dot{\eta} = \eta, \quad \dot{\eta}' = \zeta(\omega + \omega') = \eta + \eta';$$

$$\text{(per la sost. } B) \quad \dot{\eta} = \eta', \quad \dot{\eta}' = -\eta;$$

dunque le quantità  $\eta$  ed  $\eta'$  per effetto delle sostituzioni  $A$  e  $B$  (e quindi anche per effetto di qualsiasi altra sostituzione di prim'ordine sui periodi) si trasformano con le stesse formule con cui si trasformano  $\omega$  e  $\omega'$ .

<sup>(1)</sup> Veramente eseguendo il calcolo si trova la sostituzione  $\dot{\omega} = -\omega, \dot{\omega}' = -\omega'$ , ma questa non differisce dall'identità perchè, per una nota convenzione, due sostituzioni differenti solo pel segno dei coefficienti:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \alpha\omega + \beta\omega' \\ \dot{\omega}' = \gamma\omega + \delta\omega' \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{\omega} = -\alpha\omega - \beta\omega' \\ \dot{\omega}' = -\gamma\omega - \delta\omega' \end{cases}$$

non si considerano distinte.

<sup>(2)</sup> Notiamo, benchè la cosa qui abbia poco interesse, che scrivendo per esempio  $ST$  noi intenderemo che venga eseguita *prima* la sostituzione  $S$  e poi la  $T$ . (Altri Autori adottano invece la convenzione contraria).

In secondo luogo osserviamo che, in virtù delle formole  $e_a = \wp \omega_a$  ( $a=1, 2, 3$ ), si ha

$$\begin{aligned} (9A) \quad & \dot{e}_1 = e_1, \quad \dot{e}_2 = e_3, \quad \dot{e}_3 = e_2, \\ (9B) \quad & \dot{e}_1 = e_3, \quad \dot{e}_2 = e_2, \quad \dot{e}_3 = e_1, \quad (4) \end{aligned}$$

e che inoltre, tenuto anche conto di quanto più sopra si è osservato relativamente ad  $\eta$  ed  $\eta'$ , sussistono le formule:

$$\begin{aligned} (9'A) \quad & \dot{\sigma}_1 u = \sigma_1 u, \quad \dot{\sigma}_2 u = \sigma_3 u, \quad \dot{\sigma}_3 u = \sigma_2 u; \\ (9'B) \quad & \dot{\sigma}_1 u = \sigma_3 u, \quad \dot{\sigma}_2 u = \sigma_2 u, \quad \dot{\sigma}_3 u = \sigma_1 u. \end{aligned}$$

Pertanto le sostituzioni  $A$  e  $B$  (e quindi anche tutte le altre sostituzioni di prim'ordine) non fanno altro che permutare fra loro, e nello stesso modo,  $e_1, e_2, e_3$  e  $\sigma_1 u, \sigma_2 u, \sigma_3 u$ . Propriamente la sostituzione  $A$  scambia fra loro gli indici 2 e 3, e la sostituzione  $B$  gli indici 1 e 3.

Ciò premesso, onde preparare tutti gli elementi necessari per lo studio delle trasformazioni di prim'ordine sulle funzioni  $sn, cn$  e  $dn$ , esaminiamo l'effetto delle sostituzioni  $A$  e  $B$  sui tre radicali

$$\sqrt{e_1 - e_3}, \quad \sqrt{e_2 - e_3}, \quad \sqrt{e_1 - e_2},$$

servendoci, onde evitare incertezze di segno, delle formule (11) del Cap. III che li collegano alle funzioni sigma. Si trovano così, con calcoli facili, le formule:

$$(10A) \quad \begin{cases} \sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{e_1 - e_2}, \\ \sqrt{e_2 - e_3} = i \sqrt{e_2 - e_3}, \\ \sqrt{e_1 - e_2} = \sqrt{e_1 - e_3} \end{cases}$$

$$(10B) \quad \begin{cases} \sqrt{e_1 - e_3} = -i \sqrt{e_1 - e_3}, \\ \sqrt{e_2 - e_3} = -i \sqrt{e_1 - e_2}, \\ \sqrt{e_1 - e_2} = -i \sqrt{e_2 - e_3} \end{cases}$$

(4) D'ora innanzi ci serviremo sistematicamente della convenzione, già precedentemente tacitamente introdotta, di contraddistinguere gli elementi trasformati col sovrapporre un punto al relativo simbolo. Scriveremo cioè  $e_1, \sigma_1, \omega$ , ecc. per denotare ciò che diventano rispettivamente  $e_1, \sigma_1, \omega$ , ecc. quando si opera la trasformazione di periodi che nel momento si considera. Inoltre,

da cui, ricordando le (26) del Capitolo precedente, seguono subito le altre:

$$(11A) \quad \boxed{\dot{k} = \frac{ik}{k'}, \quad \dot{k}' = \frac{1}{k'}},$$

$$(11B) \quad \boxed{\dot{k} = k', \quad \dot{k}' = k}.$$

Similmente, appoggiandosi sulle (19) del Cap. III, si trova che:

$$(11'A) \quad \boxed{\dot{K} = k'K, \quad \dot{K}' = k'(K' - iK)},$$

$$(11'B) \quad \boxed{\dot{K} = K', \quad \dot{K}' = K}.$$

Possiamo ora passare alle funzioni  $sn, cn$  e  $dn$  vere e proprie e, all'uopo, cominciamo con l'operare con  $A$  su ambo i membri della (12) del Cap. III che riconduce la funzione  $sn$ , alle sigma; avremo così, tenendo conto della prima delle (11A) nonché delle (9'A), che:

$$sn \left( \sqrt{e_1 - e_2} u, \frac{ik}{k'} \right) = \sqrt{e_1 - e_2} \frac{\sigma u}{\sigma_2 u}$$

cioè:

$$sn \left( \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} \sqrt{e_1 - e_3} u, \frac{ik}{k'} \right) = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u}.$$

Ma [Cap. III, form. (26) e (12'')] è:

$$\sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} = k', \quad \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} = dn \left( \sqrt{e_1 - e_3} u, k \right);$$

dunque, posto come già dianzi

$$\sqrt{e_1 - e_3} u = v,$$

avremo la formula:

$$(12A) \quad \boxed{sn \left( k'v, \frac{ik}{k'} \right) = k' \frac{sn(v, k)}{dn(v, k)}},$$

per maggior chiarezza, quando una formula si riferirà ad una trasformazione di periodi che sia stata precedentemente indicata con una lettera, per esempio  $A$ , faremo seguire questa lettera al numero della formula, scrivendo cioè, per esempio, (9A), (10A) ecc. invece che (9), (10),... solamente.

cui, con calcoli perfettamente analoghi, si associano le altre due:

$$(12'A) \quad \begin{cases} \operatorname{cn} \left( k'v, \frac{ik}{k'} \right) = \frac{\operatorname{cn}(v, k)}{\operatorname{dn}(v, k)} \\ \operatorname{dn} \left( k'v, \frac{ik}{k'} \right) = \frac{1}{\operatorname{dn}(v, k)} \end{cases}$$

Con non minore facilità, operando invece con la sostituzione  $B$ , si trovano le formule:

$$(12B) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(-iv, k') = -i \frac{\operatorname{sn}(v, k)}{\operatorname{cn}(v, k)} \\ \operatorname{cn}(-iv, k') = \frac{1}{\operatorname{cn}(v, k)} \\ \operatorname{dn}(-iv, k') = \frac{\operatorname{dn}(v, k)}{\operatorname{cn}(v, k)} \end{cases}$$

le quali, tenuto conto che se  $k'$  si cambia in  $k$ ,  $k$  si cambia in  $k'$ , sostanzialmente coincidono con le (38) del Cap. III.

Tutte le altre formule su trasformazioni lineari delle funzioni  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$  che si trovano in diversi libri, si riconducono facilmente alle (12A-B). Ai fini pratici meritano tuttavia di essere esplicitamente notate quelle relative alle seguenti tre altre sostituzioni:

$$C=ABA, \quad D=BC, \quad E=CB,$$

che, assieme con le (12A-B), trovansi raccolte nel seguente specchio che fornisce i valori in funzione di  $\operatorname{sn}(v, k)$ ,  $\operatorname{cn}(v, k)$  e  $\operatorname{dn}(v, k)$  delle funzioni  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  e  $\operatorname{dn}$  il cui argomento  $\dot{v}$  e il cui modulo  $\dot{k}$  sono dati dalla seconda e terza colonna. Nella prima colonna è inoltre indicato, sotto la lettera della sostituzione, come questa permuta gli indici 1, 2, 3 di  $e_1, e_2, e_3$  e  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Sono pure indicati i valori di  $\mathbf{K}'$ , epperò anche — implicitamente — quelli di  $\mathbf{K}$ , bastando all'uso leggere (in un'altra delle righe della tabella) il valore di  $\mathbf{K}$  corrispondente a quel valore di  $\dot{k}$  che, nel caso che si considera, figura come valore di  $\dot{k}'$ .

Sostituzione	$\dot{v}$	$\dot{k}$	$\dot{k}'$	$\mathbf{K}$	$\operatorname{sn}(\dot{v}, \dot{k})$	$\operatorname{cn}(\dot{v}, \dot{k})$	$\operatorname{dn}(\dot{v}, \dot{k})$
$A = \begin{cases} \dot{\omega} = \omega \\ \dot{\omega}' = \omega + \omega' \end{cases}$ (1, 3, 2)	$k'v$	$\frac{ik}{k'}$	$\frac{1}{k'}$	$k'K$	$k' \frac{\operatorname{sn}(v, k)}{\operatorname{dn}(v, k)}$	$\frac{\operatorname{cn}(v, k)}{\operatorname{dn}(v, k)}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}(v, k)}$
$B = \begin{cases} \dot{\omega} = \omega' \\ \dot{\omega}' = -\omega \end{cases}$ (3, 2, 1)	$-iv$	$k'$	$k$	$K'$	$-i \frac{\operatorname{sn}(v, k)}{\operatorname{cn}(v, k)}$	$\operatorname{dn}(v, k)$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(v, k)}$
$C = \begin{cases} \dot{\omega} = \omega + \omega' \\ \dot{\omega}' = \omega' \end{cases}$ (2, 1, 3)	$kv$	$\frac{1}{k}$	$\frac{k'}{ik}$	$k(K + iK')$	$k \operatorname{sn}(v, k)$	$\operatorname{dn}(v, k)$	$\operatorname{cn}(v, k)$
$D = \begin{cases} \dot{\omega} = -\omega + \omega' \\ \dot{\omega}' = -\omega \end{cases}$ (2, 3, 1)	$-ik'v$	$\frac{1}{k'}$	$\frac{k}{ik'}$	$k'(K' + iK)$	$-ik' \frac{\operatorname{sn}(v, k)}{\operatorname{cn}(v, k)}$	$\operatorname{dn}(v, k)$	$\frac{1}{\operatorname{cn}(v, k)}$
$E = \begin{cases} \dot{\omega} = \omega' \\ \dot{\omega}' = -(\omega + \omega') \end{cases}$ (3, 1, 2)	$-ikv$	$\frac{k'}{ik}$	$\frac{1}{k}$	$kK'$	$-ik' \frac{\operatorname{sn}(v, k)}{\operatorname{dn}(v, k)}$	$\frac{\operatorname{cn}(v, k)}{\operatorname{dn}(v, k)}$	$\frac{\operatorname{cn}(v, k)}{\operatorname{dn}(v, k)}$

Da quanto precede risulta fra l'altro che le tre funzioni  $sn, cn, dn$  nonchè le  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  e le quantità  $e_1, e_2, e_3; k, k'$ , possono (non debbono!) alterarsi per una sostituzione di prim'ordine sui periodi, in quanto questa può sostituire alle tre quantità  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , quantità non ad esse equivalenti a meno di multipli dei periodi, come in particolare succede nel caso delle 5 sostituzioni  $A, B, C, D$  ed  $E$  più sopra considerate.

Da questa semplice osservazione discende la conseguenza importante che la condizione necessaria e sufficiente affinchè una certa sostituzione di prim'ordine  $S$  non alteri gli elementi surricordati, in particolare le funzioni  $sn, cn, dn$  e il modulo  $k$ , è che essa lasci « sostanzialmente inalterate » le  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , cioè che sussistano le uguaglianze:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \omega_1 + 2m_1\omega + 2n_1\omega' \\ \dot{\omega}_2 = \omega_2 + 2m_2\omega + 2n_2\omega' \\ \dot{\omega}_3 = \omega_3 + 2m_3\omega + 2n_3\omega' \end{cases}$$

dove  $m_1, n_1, \dots, n_3$  denotano dei numeri interi. Ma affinchè ciò sia, essendo  $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$ , è manifestamente necessario e sufficiente che si abbia

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = a\omega_1 + \beta\omega_3 = \omega_1 + 2m_1\omega + 2n_1\omega' = (1 + 2m_1)\omega_1 + 2n_1\omega_3 \\ \dot{\omega}_3 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_3 = \omega_3 + 2m_3\omega + 2n_3\omega' = 2m_3\omega_1 + (1 + 2n_3)\omega_3 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} a = 1 + 2m_1, & \beta = 2n_1, \\ \gamma = 2m_3, & \delta = 1 + 2n_3; \end{cases}$$

dunque, facendo uso della comoda notazione delle congruenze <sup>(1)</sup>, la condizione affinchè le funzioni  $sn, cn, dn$  ecc. restino invariate, è che si abbia

$$a \equiv 1, \quad \beta \equiv 0, \quad \gamma \equiv 0, \quad \delta \equiv 1, \quad (\text{mod. } 2),$$

<sup>(1)</sup> Notoriamente, nel campo dei numeri interi, si dice che  $m$  è congruo ad  $n$  secondo il modulo  $p$ , e si scrive

$$m \equiv n, \quad (\text{mod. } p),$$

se  $m$  ed  $n$  divisi per  $p$  danno lo stesso resto, cioè se la loro differenza è un multiplo di  $p$ .

ciò che noi, più concisamente, indicheremo scrivendo:

$$(13) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{mod. } 2)$$

ed enuncieremo dicendo che la sostituzione  $S$  dev'essere congrua all'identità, modulo 2. Si ha cioè che:

Le funzioni  $sn, cn, dn$  di Jacobi restano invariate per tutte e sole le sostituzioni lineari dei periodi congrue alla sostituzione identica secondo il modulo 2.

Un'altra importante conseguenza delle precedenti considerazioni è che le formule contenute nell'ultimo specchio esauriscono tutti i casi di trasformazioni di prim'ordine delle funzioni di Jacobi.

Infatti una qualsiasi sostituzione di prim'ordine  $S$  sui periodi, non può che permutare fra loro  $e_1, e_2, e_3$  e  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , mandando i loro indici in una delle altre 5 possibili permutazioni dei numeri 1, 2, 3, e cioè:

$$1, 3, 2; \quad 3, 2, 1; \quad 2, 1, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2;$$

ma questo è quello stesso che fanno le sostituzioni  $A, B, C, D$  ed  $E$  rispettivamente; dunque  $S$  trasforma  $sn, cn, dn$  ecc. tal quale come  $A, B, C, D$  od  $E$  rispettivamente <sup>(1)</sup>.

Osserviamo inoltre che, come risulta dalla terza colonna della tabella a pag. 168, i soli possibili valori del quadrato  $k^2$  del modulo associati ad una coppia  $(2\omega, 2\omega')$  di periodi e a tutte quelle ad essa equivalenti nel senso del § 2 del Cap. I, sono i sei seguenti:

$$k^2, \quad \frac{k^2}{k^2-1}, \quad 1-k^2, \quad \frac{1}{k^2}, \quad \frac{1}{1-k^2}, \quad \frac{k^2-1}{k^2}$$

e coincidono pertanto coi 6 possibili valori del birapporto di quattro numeri considerati in tutti gli ordini possibili. Ciò è in immediata connessione col fatto, posto in luce nel § 3 del Cap. II, che  $k^2$  si può identificare col birapporto  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  delle radici della forma biquadratica fondamentale.

<sup>(1)</sup> E propriamente come quella che permuta gli indici di  $e_1, e_2, e_3$  nello stesso modo di  $S$ .

Occupiamoci infine delle trasformazioni di prim'ordine delle funzioni  $F(\varphi, k)$  ed  $E(\varphi, k)$  di LEGENDRE.

Per la funzione  $F$  la cosa è quasi immediata, e precisamente, avvalendosi della (32') del Cap. III e della prima delle (10A), si trova subito che, nel caso della sostituzione  $A$ , si ha

$$\dot{F} = F\left(\dot{\varphi}_A, \frac{ik}{k'}\right) = \sqrt{e_1 - e_2} u = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}} \sqrt{e_1 - e_3} u = k'v$$

cioè

$$(14A) \quad \boxed{F\left(\dot{\varphi}_A, \frac{ik}{k'}\right) = k' F(\varphi, k)} ;$$

avendo indicato con  $\dot{\varphi}_A$  ciò che diventa l'amplitudine  $\varphi$  mediante la sostituzione  $A$ , ossia — tenuto conto delle (12-12'A) — un opportuno (1) angolo tale da aversi:

$$(15A) \quad \begin{cases} \sin \dot{\varphi}_A = \operatorname{sn}\left(\dot{v}, \frac{ik}{k'}\right) = k' \frac{\operatorname{sn}(v, k)}{\operatorname{dn}(v, k)} = k' \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ \cos \dot{\varphi}_A = \operatorname{cn}\left(\dot{v}, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\operatorname{cn}(v, k)}{\operatorname{dn}(v, k)} = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \end{cases}$$

donde segue

$$(15'A) \quad \operatorname{tg} \dot{\varphi}_A = k' \operatorname{tg} \varphi.$$

Analogamente, nel caso della sostituzione  $B$ , si trova che

$$(14B) \quad \boxed{F(\dot{\varphi}_B, k') = -i F(\varphi, k)} ,$$

con

$$(15B) \quad \sin \dot{\varphi}_B = -i \operatorname{tg} \varphi, \quad \cos \dot{\varphi}_B = \operatorname{sec} \varphi.$$

(1) Si ricordi (cfr. p. 122) che delle uguaglianze fra funzioni *polidrome*, quali sono  $F$  ed  $E$ , o vanno intese quali uguaglianze a meno di *multipli dei periodi*; oppure, qualora ci si riferisca a determinati *rami* delle funzioni considerate, non possono valere se non sul piano complesso opportunamente *tagliato*, onde evitare che detti rami possano permutarsi fra loro.

Nel caso attuale occorre dunque, affinché la (14A) valga proprio sotto la forma in cui è stata scritta, che, analogamente a quanto si osservò a p. 122, l'angolo  $\varphi_A$  sia scelto *in un opportuno quadrante*. Altrimenti dovrebbe aggiungersi, al secondo membro, un multiplo indeterminato dei periodi di  $F$ , che sono  $4\mathbf{K}$  e  $2i\mathbf{K}'$  sulla riemanniana e  $2\mathbf{K}$ ,  $2i\mathbf{K}'$  sul piano complesso ordinario. (Cfr. TANNERY-MOLK [12], t. 3°, p. 251).

Analoga osservazione per le formule che seguono.

Un po' meno semplice è invece la deduzione delle formule di trasformazione della  $E(\varphi, k)$ ; propriamente, partendo dalla (32) del Cap. III, nel caso della sostituzione  $A$  si ha:

$$\begin{aligned} E\left(\dot{\varphi}_A, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} [\dot{e}_1 u + \zeta(u + \omega') - \eta'] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} [e_1 u + \zeta(u + \omega' + \omega) - \eta' - \eta] \end{aligned}$$

donde, tenuto fra l'altro conto della (68) del Cap. I e delle (6) e (16') del Cap. III, segue successivamente:

$$\begin{aligned} E\left(\dot{\varphi}_A, \frac{ik}{k'}\right) &= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \left[ e_1 u + \zeta(u + \omega') - \eta' + \frac{1}{2} \frac{\wp'(u + \omega')}{\wp(u + \omega') - e_1} \right] = \\ &= \frac{1}{k'} \left[ E(\varphi, k) - \frac{\sqrt{\wp(u + \omega') - e_2} \sqrt{\wp(u + \omega') - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{\wp(u + \omega') - e_1}} \right] = \\ &= \frac{1}{k'} \left[ E(\varphi, k) - \frac{\operatorname{dn}(v + i\mathbf{K}')}{\operatorname{sn}(v + i\mathbf{K}') \operatorname{cn}(v + i\mathbf{K}')} \right] = \\ &= \frac{1}{k'} \left[ E(\varphi, k) - \frac{-i \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v}}{-i \frac{\operatorname{dn} v}{k \operatorname{sn} v} \frac{1}{k \operatorname{sn} v}} \right] = \frac{1}{k'} E(\varphi, k) - \frac{k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{k' \operatorname{dn} v} \end{aligned}$$

si ha quindi, in definitiva, la formula:

$$(16A) \quad \boxed{E\left(\dot{\varphi}_A, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{k'} E(\varphi, k) - \frac{k^2 \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cos} \varphi}{k' \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}} .$$

In modo perfettamente analogo si trova l'altra formula:

$$(16B) \quad \boxed{E(\dot{\varphi}_B, k') = i [E(\varphi, k) - F(\varphi, k) - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi]}$$

e quelle relative alle sostituzioni  $C$ ,  $D$  ed  $E$  che, dal punto di vista pratico, è molto comodo aver pure sott'occhio. I risultati cui così si perviene sono condensati nel seguente quadro che non richiede particolari delucidazioni e che, a quanto ci risulta, compare per la prima volta in questo libro.

Sostituz.	$k$	$\sin \dot{\varphi}$	$\cos \dot{\varphi}$	$F(\dot{\varphi}, k)$	$E(\dot{\varphi}, k)$
A (1, 3, 2)	$\frac{ik}{k'}$	$k' \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$	$\frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$	$k' F(\varphi, k)$	$\frac{1}{k'} \left[ E(\varphi, k) - k^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right]$
B (3, 2, 1)	$k'$	$-i \operatorname{tg} \varphi$	$\frac{1}{\cos \varphi}$	$-i F(\varphi, k)$	$i [E(\varphi, k) - F(\varphi, k) - \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi]$
C (2, 1, 3)	$\frac{1}{k}$	$k \sin \varphi$	$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$	$k F(\varphi, k)$	$\frac{1}{k} [E(\varphi, k) - k'^2 F(\varphi, k)]$
D (2, 3, 1)	$\frac{1}{k'}$	$-ik' \operatorname{tg} \varphi$	$\frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}$	$-ik' F(\varphi, k)$	$\frac{i}{k'} [E(\varphi, k) - k'^2 F(\varphi, k) - \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi]$
E (3, 1, 2)	$\frac{k'}{ik}$	$\frac{-ik \sin \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$	$-ik F(\varphi, k)$	$\frac{i}{k} \left[ E(\varphi, k) - F(\varphi, k) - k^2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right]$

§ 3. - Trasformazioni di prim'ordine delle funzioni theta.

Per potere ora studiare le trasformazioni di prim'ordine delle funzioni theta, osserviamo anzitutto che quando si opera una qualsiasi sostituzione (anche non di prim'ordine) del tipo (1) sui periodi, il rapporto  $\tau = \omega'/\omega$  fra questi, si trasforma com'è indicato dalla (24) del Cap. I, e cioè secondo la formula

$$i = \frac{\gamma + \delta \tau}{\alpha + \beta \tau},$$

donde, nel caso della sostituzione generatrice  $A$ , immediatamente si deduce che

$$(17A) \quad i = 1 + \tau, \quad \dot{v} = \frac{u}{2\omega} = v, \quad \dot{q} = q e^{i\pi} = -q.$$

Conseguentemente, per le fondamentali formule (51) del Capitolo precedente (p. 130), nel caso  $A$  avremo:

$$\dot{\vartheta}_1 = e^{i\pi} \vartheta_1, \quad \dot{\vartheta}_2 = e^{i\pi} \vartheta_2, \quad \dot{\vartheta}_3 = \vartheta_4, \quad \dot{\vartheta}_4 = \vartheta_3$$

o, più esplicitamente,

$$(18A) \quad \begin{cases} \vartheta_1(v|1+\tau) = e^{i\pi} \vartheta_1(v|\tau), & \vartheta_2(v|1+\tau) = e^{i\pi} \vartheta_2(v|\tau) \\ \vartheta_3(v|1+\tau) = \vartheta_4(v|\tau), & \vartheta_4(v|1+\tau) = \vartheta_3(v|\tau) \end{cases}$$

Meno immediata è invece la determinazione dell'effetto della sostituzione  $B$  nelle funzioni theta perchè, risultando ora

$$(17B) \quad i = -\frac{1}{\tau}, \quad \dot{v} = \frac{u}{2\omega'} = \frac{v}{\tau}, \quad \dot{q} = e^{-i\pi/\tau},$$

il che implica la seguente relazione trascendente fra  $q$  e  $\dot{q}$ :

$$(17'B) \quad \boxed{\log q \cdot \log \dot{q} = \pi^2},$$

non è facile scorgere direttamente come si modificano le serie (51).

Per girare la difficoltà avvaliamoci della prima delle formule (56) del Capitolo precedente per ricondurre la funzione  $\vartheta_1$  alla  $\sigma$ , e altresì

della (88) del medesimo Capitolo per trarne il valore di  $\vartheta_1'(0)$ ; serviamoci cioè della formula:

$$(19) \quad \vartheta_1(v|\tau) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \sqrt[8]{\Delta} e^{-\frac{\eta v^2}{2\omega}} \sigma u, \quad (\Delta = g_2^3 - 27g_3^2)$$

ed operiamo su di essa con la  $B$ . Ricordando che la  $\sigma u$  e  $\Delta$  non si alterano con tale sostituzione mentre  $\omega$  si cambia in  $\omega' = \tau\omega$  e  $v$  in  $v/\tau$ , avremo senz'altro che:

$$(19B) \quad \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \sqrt{\tau} \sqrt[8]{\Delta} e^{-\frac{\eta' u'^2}{2\omega'}} \sigma u$$

donde segue

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon_8 \sqrt{\tau} e^{\left(\frac{\eta}{\omega} - \frac{\eta'}{\omega'}\right) \frac{u^2}{2}} \vartheta_1(v|\tau),$$

avendo indicata con  $\varepsilon_8$  una radice ottava dell'unità, la cui introduzione proveniente dal fatto che le determinazioni di  $\sqrt[8]{\Delta}$  nelle (19) e (19B) non sono necessariamente le stesse. Ma, tenendo presente la (65) del Cap. I, si ha

$$\frac{u^2}{2} \left( \frac{\eta}{\omega} - \frac{\eta'}{\omega'} \right) = \frac{u^2(\eta\omega' - \eta'\omega)}{2\omega\omega'} = \frac{i\pi u^2}{4\omega\omega'} = \frac{i\pi v^2}{\tau};$$

dunque sarà ancora

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon_8 \sqrt{\tau} e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}} \vartheta_1(v|\tau).$$

Non resta ora che a determinare  $\varepsilon_8$ , pel che conviene dividere la formula precedente per  $\vartheta_1(v|\tau)$  e far poi tendere  $v$  a zero; avremo così, servendoci della regola dell'Hospital pel calcolo del limite del primo membro, la formula

$$\frac{1}{\tau} \frac{\vartheta_1'(0 | -\frac{1}{\tau})}{\vartheta_1'(0|\tau)} = \varepsilon_8 \sqrt{\tau}$$

donde, facendo  $\tau = i$  segue subito

$$\varepsilon_8 = \frac{1}{i\sqrt{i}}.$$

In definitiva sussiste dunque la formula

$$(20B) \quad \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}} \vartheta_1(v|\tau)$$

dove pel radicale a secondo membro è da scegliere la determinazione che si riduce a  $+1$  per  $\tau = i$ .

Quanto alle formule di trasformazione delle altre tre funzioni theta, esse potrebbero ricavarsi con un procedimento analogo al precedente appoggiandosi sulle ultime tre formule (56) del Cap. III. Si giunge però più rapidamente allo scopo servendosi invece del quadro a pag. 127 per ricondurre le funzioni  $\vartheta_2, \vartheta_3$  e  $\vartheta_4$  alla  $\vartheta_1$ , e precisamente mediante le formule:

$$\begin{aligned} \vartheta_2(v) &= \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right), \\ \vartheta_3(v) &= q^{\frac{1}{2}} z \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right), \\ \vartheta_4(v) &= \frac{1}{i} q^{\frac{1}{2}} z \vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

Si trovano così, con facili calcoli, le formule:

$$(20'B) \quad \begin{aligned} \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}} \vartheta_1(v|\tau) \\ \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}} \vartheta_3(v|\tau) \\ \vartheta_4\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{i\pi v^2}{\tau}} \vartheta_2(v|\tau) \end{aligned}$$

Le formule trovate, e particolarmente le (20-20'B) presentano, oltre ad un interesse teorico che non ha bisogno di illustrazioni, anche un *notevolissimo interesse pratico* in rapporto ai calcoli numerici sulle funzioni theta e conseguentemente, su tutte le altre funzioni ellittiche. Propriamente sono queste, le (20-20'B), le formule cui si alludeva nel § 5 del Cap. III (p. 140), mediante cui il caso  $|q| > e^{-\pi}$  può essere ricondotto al caso  $|q| < e^{-\pi}$ .

Infatti, essendo, in forza della (17'B):

$$(-\log |q|)(-\log |\dot{q}|) = \pi^2,$$

se è  $-\log |q| < \pi$ , cioè  $|q| > e^{-\pi}$ ; si ha necessariamente che  $-\log |\dot{q}| > \pi$ , cioè che  $|\dot{q}| < e^{-\pi}$ .

Le (20'B) per  $v=0$  forniscono in particolare le formole:

$$(21B) \quad \begin{cases} \vartheta_2\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \vartheta_4(0 \mid \tau), \\ \vartheta_3\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \vartheta_3(0 \mid \tau), \\ \vartheta_4\left(0 \mid -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \vartheta_2(0 \mid \tau), \end{cases}$$

di cui è specialmente notevole la seconda che, scritta sotto la forma:

$$(21'B) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi n^2 \tau} = \sqrt{\frac{i}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\pi n^2}{\tau}}$$

assume l'aspetto di un elegante teorema sulle serie, la cui dimostrazione diretta sarebbe tutt'altro che facile.

Notiamo pure che, facendo la (17'B) corrispondere a valori reali di  $q$  tendenti ad 1 *dalla sinistra*, valori reali di  $\dot{q}$  tendenti a +0 e quindi valori di  $\vartheta_3(0)$  e  $\vartheta_4(0)$  vicinissimi ad 1, dalle prime due delle (20'B) possono trarsi le interessanti formole:

$$(22) \quad \vartheta_2(0) \sim \vartheta_3(0) \sim \sqrt{\frac{i}{\tau}} = \sqrt{\frac{\pi}{-\log q}} \quad (q \rightarrow 1-0) \quad (1).$$

Quanto a  $\vartheta_4(0)$ , essa tende invece a zero per  $q \rightarrow 1$ , e così pure  $\vartheta_1'(0)$  per l'identità di JACOBI.

(1) Con la scrittura

$$f(x) \sim \varphi(x), \quad (x \rightarrow x_0)$$

che si legge: «  $f(x)$  asintoticamente uguale a  $\varphi(x)$ , per  $x$  tendente ad  $x_0$  », suol denotarsi il fatto che le due funzioni sono tali da aversi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1,$$

esserò assumono valori molto vicini fra loro nelle prossimità del punto  $x_0$ .

§ 4. - Cenno sulle funzioni modulari.

Le funzioni ellittiche, oltre che condurre alla considerazione delle funzioni doppiamente periodiche, che praticamente s'identificano con esse, hanno anche condotto ad una delle più importanti estensioni del concetto stesso di doppia periodicità, e propriamente alla considerazione delle cosiddette funzioni *modulari* e, più generalmente, *automorfe*.

Queste nuove, importanti funzioni, di cui noi non possiamo dar qui che una vaga idea (1), trovano la loro origine nello studio della dipendenza delle funzioni ellittiche o di quantità ad esse connesse (per esempio  $g_2, g_3, k^2$ , ecc.) dai periodi  $2\omega$  e  $2\omega'$ , o, più esattamente, dal rapporto  $\tau = \omega'/\omega$  di questi. Esse sono caratterizzate dalla proprietà fondamentale di assumere lo stesso valore, non più in tutti i punti  $z$  deducibili da uno stesso punto  $z_0$  mediante due certe traslazioni di ampiezze  $2\omega$  e  $2\omega'$ , cioè in tutti i punti:

$$(23) \quad z = \gamma + z_0, \quad \text{con} \quad \gamma = 2m\omega + 2n\omega',$$

dove  $m$  ed  $n$  denotano due interi; bensì, più generalmente, in tutti i punti  $z$  deducibili da  $z_0$  mediante le sostituzioni lineari:

$$z = \frac{\gamma + \delta z_0}{\alpha + \beta z_0}$$

di un certo *gruppo* infinito (2), per esempio mediante le sostituzioni (1) del § 1, che com'è facile dimostrare, formano gruppo. Tali funzioni vengono dette in generale *automorfe* e, nell'ultimo caso, più propriamente, *funzioni modulari*.

Un fondamentale esempio di funzioni di questa natura è fornito dal cosiddetto *invariante assoluto* delle funzioni di WEIERSTRASS, cioè dalla quantità:

$$(24) \quad J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2},$$

(1) Per maggiori ragguagli vedi BIANCHI [2], FRICKE [6].

(2) Un insieme di operazioni tali che abbia senso parlare di *prodotto* di due sue operazioni (cioè di risultato dell'applicazione prima dell'una poi dell'altra) nonchè di *inversa* di un'operazione, diceasi costituire un *gruppo*, se tali prodotti e tali inverse sono ancora operazioni dell'insieme.

che, essendo  $g_2$  e  $g_3$  funzioni omogenee rispettivamente di grado  $-4$  e  $-6$  (cfr. Cap. I, § 5) di  $\omega$  e  $\omega'$ , risulta ovviamente una funzione omogenea di grado *zero* di dette variabili, cioè dipende soltanto dal loro rapporto  $\tau = \omega'/\omega$ . Ciò è, del resto, confermato anche dalle formule (88) e (89) del Cap. III dalle quali può agevolmente dedursi l'elegante formula:

$$(25) \quad J = \frac{1}{54} \frac{[\vartheta_2^3(0) + \vartheta_3^3(0) + \vartheta_4^3(0)]^3}{\vartheta_2^3(0)\vartheta_3^3(0)\vartheta_4^3(0)},$$

che mostra per di più come questo  $J = J(\tau)$  sia una funzione analitica regolare di  $\tau$  in tutto il piano complesso *escluso l'asse reale* <sup>(1)</sup>.

Infatti, osservato preliminarmente come, per ottenere il valore di  $J$  corrispondente ad un determinato valore  $\tau_0$  di  $\tau$ , basti servirsi della (24) dopo aver calcolati (per mezzo delle (38) del Cap. I) i valori di  $g_2$  e  $g_3$  corrispondenti ad una *qualsiasi* coppia di semiperiodi il cui rapporto sia  $\tau_0$  (per esempio  $\omega = 1, \omega' = \tau_0$ ); è quasi di per sè evidente che se due valori  $\tau_0$  e  $\tau_1$  di  $\tau$  sono tali da aversi

$$(26) \quad \tau_1 = \frac{\gamma + \delta\tau_0}{\alpha + \beta\tau_0}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ interi}, \alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

potendosi allora associare ad essi le due coppie di semiperiodi *equivalenti*:

$$\begin{cases} \omega = 1 & \dot{\omega} = \alpha + \beta\tau_0 \\ \omega' = \tau_0 & \dot{\omega}' = \gamma + \delta\tau_0, \end{cases}$$

nei due casi si avranno gli stessi valori per  $g_2$  e  $g_3$ , e quindi *a fortiori* per  $J$ .

<sup>(1)</sup> Veramente, stante la convenzione fondamentale del § 2 del Cap. I, la funzione  $J(\tau)$  risulterebbe definita nel solo semipiano  $\Re(\tau) > 0$ ; noi possiamo però immediatamente prolungarla per *riflessione* in tutto il piano complesso (asse reale escluso), convenendo che sia

$$J(\bar{\tau}) = J(\tau).$$

Comunque, nel seguito, ci limiteremo sempre a considerare solo punti del semipiano  $\Re(\tau) > 0$ , il che sarà possibile per fatto che le sostituzioni (1), in virtù della condizione  $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ , non conducono mai fuori di detto semipiano.

Reciprocamente, se  $\tau_0$  e  $\tau_1$  sono due valori di  $\tau$  tali da aversi  $J(\tau_0) = J(\tau_1)$ , cioè, con ovvie notazioni:

$$\frac{g_2^3(1, \tau_0)}{g_3^3(1, \tau_0) - 27g_2^3(1, \tau_0)} = \frac{g_2^3(1, \tau_1)}{g_3^3(1, \tau_1) - 27g_2^3(1, \tau_1)},$$

detto  $\lambda$  un conveniente fattore di proporzionalità, si avrà:

$$g_2^3(1, \tau_0) = \lambda g_2^3(1, \tau_1), \quad g_3^3(1, \tau_0) = \lambda g_3^3(1, \tau_1)$$

od anche:

$$g_2(1, \tau_0) = \mu^2 g_2(1, \tau_1), \quad g_3(1, \tau_0) = \mu^3 g_3(1, \tau_1),$$

avendo indicata con  $\mu$  una conveniente determinazione di  $\sqrt[3]{\lambda}$ .

Per l'omogeneità delle funzioni  $g_2(\omega, \omega')$  e  $g_3(\omega, \omega')$  ne segue che, sostituendo ai semiperiodi  $1, \tau_0$  i semiperiodi  $1/\mu$  e  $\tau_0/\mu$  i nuovi valori di  $g_2$  e  $g_3$  che così si ottengono verranno esattamente uguali a  $g_2(1, \tau_1)$  e  $g_3(1, \tau_1)$ , epperò le due funzioni ellittiche

$$\wp(u | \mu^{-1}, \tau_0 \mu^{-1}) \quad \text{e} \quad \wp(u | 1, \tau_1)$$

coincidono necessariamente fra loro. Ma se le funzioni  $\wp$  costruite in base a due diverse coppie di semiperiodi coincidono, le due coppie di semiperiodi devono essere equivalenti (Cap. I, § 5), dunque dovranno esistere quattro interi  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  soddisfacenti alla condizione  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , tali da aversi

$$\begin{cases} 1 = \alpha\mu^{-1} + \beta\tau_0\mu^{-1} \\ \tau_1 = \gamma\mu^{-1} + \delta\tau_0\mu^{-1}, \end{cases}$$

epperò anche

$$\tau_1 = \frac{\gamma + \delta\tau_0}{\alpha + \beta\tau_0}.$$

Resta così dimostrato che *la condizione necessaria e sufficiente affinché risulti  $J(\tau_0) = J(\tau_1)$  è che valga la (26)*, e se ne deduce la conseguenza importantissima che, se riusciremo a determinare un dominio  $\Gamma$  del semipiano  $\Re(\tau) > 0$  (che verrà detto anche qui « *campo fondamentale* ») godente, rispetto alle sostituzioni (26) del *gruppo modulare*, di proprietà analoghe a quelle di un parallelogramma dei periodi rispetto alle sostituzioni (23), cioè tale che due suoi punti (eccezion fatta del contorno) non siano *mai* omo-

loghi rispetto alla (26), mentr' invece ogni punto  $P_0$  del semipiano  $\Re(\tau) > 0$  esterno a  $\Gamma$  trovi in questo un suo omologo  $P_1$ ; allora la funzione  $J(\tau)$  assumerà in  $\Gamma$ , una ed una sola volta <sup>(1)</sup>, tutti i valori di cui è suscettibile, epperò il suo studio potrà essere limitato all'interno di questo campo.

La determinazione del campo fondamentale (o, meglio, di un campo fondamentale)  $\Gamma$  del gruppo modulare, benchè problema, in fondo, di carattere elementare, non è molto agevole. All'uopo è, come anche in altri casi, utile procedere anzitutto ad un amplia-

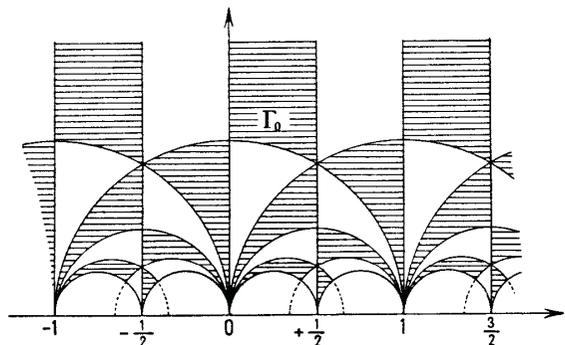


Fig. 33.

mento del gruppo stesso aggiungendo ad esso le riflessioni rispetto all'asse immaginario, cioè le sostituzioni

$$(27) \quad \tau_1 = -\bar{\tau}_0$$

dove  $\bar{\tau}_0$  denota, come di consueto, il coniugato di  $\tau_0$ . Si trova così, con considerazioni su cui non possiamo soffermarci <sup>(2)</sup>, che si può assumere come campo fondamentale  $\Gamma_0$  del gruppo ampliato, la parte della striscia

$$0 \leq \Re(\tau) \leq \frac{1}{2}$$

<sup>(1)</sup> Come si vede il comportamento della funzione modulare  $J(\tau)$  è, da un certo punto di vista, più semplice di quello delle funzioni ellittiche che, come ben sappiamo, assumono, in ogni parallelogramma dei periodi, ciascun valore almeno due volte.

<sup>(2)</sup> Vedi, per esempio BIANCHI [2], Cap. II, § 19, p. 62 e seg.

soprastante al cerchio  $|\tau|=1$ . Tale campo e tutti i suoi omologi nelle trasformazioni del gruppo modulare ampliato (26)-(27), ricoprono una ed una sola volta tutto il semipiano complesso  $\Re(\tau) > 0$  come ne dà un'idea la fig. 33, in cui, per maggiore perspicuità, le aree in discorso sono alternativamente tratteggiate e non <sup>(1)</sup>. La figura è incompleta nelle vicinanze dell'asse reale, nell'intorno dei cui punti, tutti singolari per le trasformazioni di cui ci occupiamo e per la funzione  $J(\tau)$ , si addensano infiniti campi elemen-

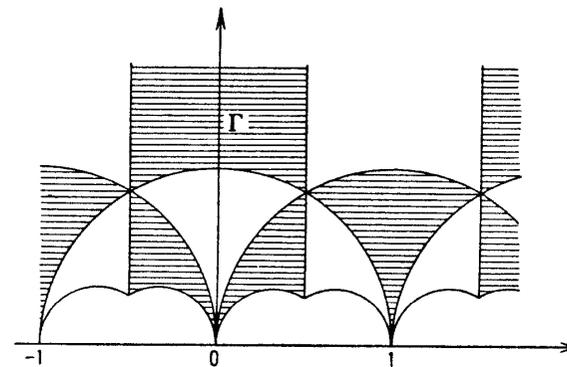


Fig. 34.

tari via via più piccoli (« da wohnen die Dämonen », come disse il GORDAN).

Per avere il campo fondamentale  $\Gamma$  del primitivo gruppo e i suoi omologi, non vi è ora che da associare opportunamente due a due i campi precedenti. Si ottiene così la « rete modulare » rappresentata nella fig. 34 che costituisce, nel caso della funzione  $J(\tau)$ , l'analogo della rete dei parallelogrammi dei periodi (cfr., per esempio, la fig. 2) nel caso delle funzioni doppiamente periodiche.

<sup>(1)</sup> La figura è composta, oltre che dalle semirette  $\Re(\tau) = \frac{n}{2}$ , da tutti e soli i semicerchi di raggio  $\frac{1}{n}$ , ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) coi centri nei punti razionali  $\frac{m}{n}$  dell'asse reale, tali che sia  $m^2 \equiv 1 \pmod{n}$ .

Osserviamo finalmente che le denominazioni: funzioni *modulari*, gruppo *modulare*, ecc. trovano la loro origine nel fatto che, storicamente, il capostipite delle funzioni della categoria in esame, è stato il quadrato  $k^2$  del *modulo* delle funzioni di JACOBI pensato come funzione di  $\tau$ . Tale funzione si riconduce però agevolmente alla  $J(\tau)$  più sopra considerata, sussistendo fra le due la relazione algebrica:

$$(28) \quad J = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4(1 - k^2)^2}.$$

Infatti, dalle note formule:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

segue subito che

$$1 - k^2 k'^2 = \frac{(e_1 - e_3)^2 - (e_2 - e_3)(e_1 - e_2)}{(e_1 - e_3)^2} = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - e_1 e_2 - e_2 e_3 - e_3 e_1}{(e_1 - e_3)^2} = \frac{3}{4} \frac{g_2}{(e_1 - e_3)^2};$$

ma, d'altra parte, è

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{g_2^3}{16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2} = \frac{g_2^3(e_1 - e_3)^6}{16 \left( \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \right)^2 \left( \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \right)^2},$$

dunque risulta

$$J = \frac{\left[ \frac{4}{3} (1 - k^2 k'^2) \right]^3}{16 k^4 k'^4} = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4},$$

che è la (28).

La (28), ch'è un'equazione di 6° grado in  $k^2$ , può ciò non ostante risolversi per radicali rispetto a tale quantità, essendo tale che, se  $k_0^2$  è una sua radice, le altre 5 sono necessariamente:

$$1 - k_0^2, \quad \frac{1}{k_0^2}, \quad \frac{1}{1 - k_0^2}, \quad \frac{k_0^2 - 1}{k_0^2}, \quad \frac{k_0^2}{k_0^2 - 1},$$

com'è agevole verificare direttamente o dedurre, senz'alcun calcolo, dalle considerazioni in fine del paragrafo precedente.

§ 5. - Trasformazioni di second'ordine delle funzioni di Weierstrass.

Passando a dire qualcosa sulle trasformazioni d'ordine superiore e, in particolare, su quelle di second'ordine delle funzioni ellittiche, osserviamo anzitutto che le trasformazioni di un certo ordine  $n > 1$ , a differenza di quelle del prim'ordine, *non costituiscono gruppo*.

Invero, convenuto d'indicare brevemente col simbolo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

la sostituzione

$$\begin{cases} \omega = \alpha \dot{\omega} + \beta \dot{\omega}' \\ \omega' = \gamma \dot{\omega} + \delta \dot{\omega}' \end{cases} \quad (1).$$

dalla relazione, subito verificata,

$$(29) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \beta_2 & \beta_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2 \\ \alpha_1 \gamma_2 + \gamma_1 \delta_2 & \beta_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 \end{pmatrix}$$

segue senz'altro che il determinante della sostituzione prodotto è uguale al prodotto dei determinanti delle sostituzioni fattori, epperò *il prodotto di due sostituzioni di ordini  $n_1$  ed  $n_2$  è una sostituzione d'ordine  $n_1 n_2$* .

D'altro lato, l'ultima proposizione mostra che il prodotto di una sostituzione d'ordine  $n$  per una di prim'ordine è ancora una sostituzione d'ordine  $n$ , epperò, date due diverse sostituzioni  $S$  e  $T$  di un medesimo ordine  $n$ , può accadere che esse non differiscano che per « *fattori di primo ordine* », ossia che valga un'eguaglianza simbolica della forma

$$(30) \quad T = H \cdot S \cdot K,$$

(1) La ragione per cui giova qui supporre che la sostituzione, così com'è scritta, operi sui semiperiodi  $(\dot{\omega}, \dot{\omega}')$  invece che sui semiperiodi  $(\omega, \omega')$  come precedentemente, è che altrimenti (si cfr. il § 1)  $\wp(u|\omega, \omega')$  risulterebbe funzione razionale di  $\wp(u|\dot{\omega}, \dot{\omega}')$ , mentre è preferibile che, viceversa, la seconda risulti funzione razionale della prima. Nel caso delle sostituzioni di prim'ordine questa questione non è sorta perchè l'inversa di una sostituzione di prim'ordine è ancora una sostituzione di prim'ordine.

dove  $H$  e  $K$  denotano due sostituzioni del prim'ordine (di cui una può eventualmente mancare, cioè ridursi all'identità).

Se questo succede, considerato che l'effetto di una sostituzione di prim'ordine su di una funzione ellittica lo abbiamo già esaurientemente studiato, è chiaro che il problema della trasformazione mediante la sostituzione  $S$  non sarà sostanzialmente diverso da quello della trasformazione mediante la  $T$ , epperò le due sostituzioni potranno considerarsi come *equivalenti* <sup>(1)</sup>.

Per comprendere l'importanza di quest'osservazione basta riferirsi al caso  $n=2$ , che è del resto il solo su cui particolarmente ci soffermeremo. Invero, si può facilmente dimostrare <sup>(2)</sup> che *tutte le sostituzioni del second'ordine sono fra loro equivalenti* dal punto di vista più sopra indicato, epperò lo studio delle trasformazioni di second'ordine delle funzioni ellittiche può essere limitato ad una sola, arbitrariamente scelta fra esse, per esempio a quella relativa alla sostituzione

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per esempio, lo studio delle trasformazioni di 2° ordine della funzione  $\wp$  può essere limitato a quello della sua trasformazione mediante la  $L$ , cioè mediante la sostituzione:

$$(L) \quad \dot{\omega} = \frac{\omega}{2}, \quad \dot{\omega}' = \omega'.$$

Per determinare la relativa formula di trasformazione, osserviamo che la funzione trasformata

$$\wp \left( u \left| \frac{\omega}{2}, \omega' \right. \right)$$

è una funzione ellittica ammettente gli stessi periodi  $(2\omega, 2\omega')$  della primitiva, ma di ordine 4 rispetto a questi, e propriamente dotata,

<sup>(1)</sup> Questo concetto di equivalenza si differenzia da quello adottato da altri Autori. Per esempio quello adottato dal BIANCHI [2] è più restrittivo e corrisponde a sostituire la (30) con l'eguaglianza  $T=H \cdot S$ .

<sup>(2)</sup> Per una semplice dimostrazione di questa proposizione (sotto enunciato un po' diverso) vedi HURWITZ-COURANT [8], pag. 249.

nel parallelogramma fondamentale  $(0, 2\omega, 2\omega + 2\omega', 2\omega')$ , dei due poli doppi 0 ed  $\omega = \omega_1$  con le rispettive caratteristiche:

$$\frac{1}{u^2}, \quad \frac{1}{(u - \omega_1)^2}.$$

Ne segue, pel teorema fondamentale sulla rappresentazione di una funzione ellittica mediante la  $\wp$  e la  $\zeta$  (Cap. I, § 8), che dovrà valere la formula:

$$\wp \left( u \left| \frac{\omega}{2}, \omega' \right. \right) = A_0 + \wp(u | \omega, \omega') + \wp(u - \omega_1 | \omega, \omega')$$

dove  $A_0$  denota una costante, il cui valore potrà essere determinato osservando che è:

$$\wp(u | \omega, \omega') = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \dots$$

$$\wp(u - \omega_1 | \omega, \omega') = e_1 + \frac{\wp''(\omega_1)}{2!} u^2 + \dots$$

$$\wp \left( u \left| \frac{\omega}{2}, \omega' \right. \right) = \frac{1}{u^2} + \frac{\dot{g}_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \dots,$$

dev'essere dunque

$$A_0 = -e_1,$$

e si ha così la formula:

$$(31L)^{(1)} \quad \boxed{\wp \left( u \left| \frac{\omega}{2}, \omega' \right. \right) = \wp(u | \omega, \omega') + \wp(u - \omega_1 | \omega, \omega') - e_1},$$

cui, servendosi delle formule (56) del Cap. I per l'addizione dei semiperiodi, può anche darsi la forma:

$$(31'L) \quad \boxed{\wp \left( u \left| \frac{\omega}{2}, \omega' \right. \right) = \wp(u | \omega, \omega') + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(u | \omega, \omega') - e_1}}.$$

La circostanza che nei secondi membri delle formule precedenti — riferiamoci, per fissare le idee, alla (31L) — figurino anche degli elementi *non invarianti per sostituzioni di primo ordine* e cioè  $e_1$

<sup>(1)</sup> Manteniamo la convenzione adottata nel § 3 di far seguire al numero di una formula di trasformazione la lettera con cui è stata denotata la sostituzione cui essa si riferisce.

ed  $\omega_1$ , è degna di particolare attenzione perchè ci pone in guardia contro un'erronea conseguenza che, a prima vista, parrebbe potersi dedurre dal fatto che tutte le sostituzioni di second'ordine sono equivalenti fra loro, e cioè che esista un'unica trasformata di second'ordine di una determinata funzione  $\wp u$ . Tali trasformate sono invece tre.

Infatti, se una certa sostituzione di 2° ordine  $S$  è legata alla  $L$  dall'eguaglianza simbolica

$$S = H \cdot L \cdot K,$$

dove  $H$  e  $K$  hanno lo stesso significato di più sopra, essa opererà sulla  $\wp u$  secondo la (31L) soltanto se la sostituzione di prim'ordine  $K$  lascia fermo  $\omega_1$  e, di conseguenza, anche  $e_1$ . Se invece  $K$  muta  $\omega_1$  in  $\omega_3$  o in  $\omega_2$  le formule di trasformazioni saranno rispettivamente:

$$(31G) \quad \wp\left(u \mid \omega, \frac{\omega'}{2}\right) = \wp(u \mid \omega, \omega') + \wp(u - \omega_3 \mid \omega, \omega') - e_3$$

$$(31I) \quad \wp\left(u \mid \omega, \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \wp(u \mid \omega, \omega') + \wp(u - \omega_2 \mid \omega, \omega') - e_2$$

dove le lettere  $G$  ed  $I$  stanno a ricordare che due tipiche sostituzioni di second'ordine per cui si verificano le indicate circostanze, sono le seguenti:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

che, mentre lasciano ferma  $\omega$ , cambiano  $\omega'$  in  $\frac{\omega'}{2}$  e  $\frac{\omega + \omega'}{2}$  rispettivamente.

Per questo motivo la maggior parte degli Autori, per esempio il BIANCHI, considerano come « distinte » le tre sostituzioni  $L, G, I$ , che altri designano anzi col nome di « sostituzioni elementari » del 2° ordine (4). Stà però il fatto che, d'accordo col teorema indi-

(4) La ragione dei simboli  $L, G$  ed  $I$  da noi adottati per queste sostituzioni sta in ciò, che le trasformazioni connesse colle due prime sono sostanzialmente identiche rispettiv. ad una celebre trasformazione d'integrali detta di LANDEN e ad una trasformazione che parecchi Autori chiamano di GAUSS, mentre quella connessa con l'ultima è da taluni detta *trasformazione irrazionale*.

cato in principio di questo paragrafo,  $G$  ed  $I$  possono essere ricondotte ad  $L$  mediante le equazioni simboliche

$$(32) \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ch'è ben facile verificare eseguendo i prodotti con l'ausilio della (29). Pertanto, come s'è già detto, ogni funzione ellittica ha, in sostanza, una sola formula di trasformazione di second'ordine.

Le formule (31), per esempio (31L), hanno grande importanza anche dal punto di vista pratico-numerico soprattutto perchè, nel caso di  $g_2, g_3$  reali, permettono di ricondurre il caso in cui il discriminante  $\Delta$  è negativo a quello in cui  $\Delta$  è positivo.

Invero, basta all'uopo osservare che il passaggio (86) (Cap. I, § 10) dai semiperiodi  $(\omega, \omega')$  ai semiperiodi  $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$  (non più primitivi, ma l'uno reale e l'altro immaginario puro) da noi operato nel caso di  $\Delta < 0$ , non è altro se non una trasformazione di periodi di 2° ordine, e propriamente (coi simboli attuali) la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

È pertanto ben facile scrivere una formula esprimente razionalmente la funzione  $\wp(u \mid \omega, \omega')$  per mezzo della  $\wp(u \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ , la quale, avendo un periodo primitivo reale e l'altro immaginario puro, sarà necessariamente a discriminante positivo. Propriamente, considerato che la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cambia  $\omega_1$  in  $\omega_2$ , tale formula è, *mutatis mutandis*, la (31I), e cioè

$$(33) \quad \wp(u \mid \omega, \omega') = \wp(u \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') + \wp(u - \tilde{\omega} - \tilde{\omega}' \mid \tilde{\omega}, \tilde{\omega}') - \tilde{e}_2.$$

Per mezzo delle (31-31'L) possiamo anche facilmente calcolare ciò che diventano  $e_1, e_2$  ed  $e_3$  mediante la trasformazione  $L$ . Invero, detti rispettivamente  $\dot{e}_1, \dot{e}_2$  ed  $\dot{e}_3$  i valori trasformati, dalla (31L) si ha manifestamente:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \wp\left(\frac{\omega}{2} \mid \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \wp\left(\frac{\omega}{2} \mid \omega, \omega'\right) + \wp\left(-\frac{\omega}{2} \mid \omega, \omega'\right) - e_1 = 2\wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - e_1 \\ \dot{e}_3 &= \wp\left(\omega' \mid \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \wp(\omega' \mid \omega, \omega') + \wp(\omega' + \omega - 2\omega \mid \omega, \omega') - e_1 = \\ &= e_3 + e_2 - e_1 = -2e_1 \\ & \quad (\dot{e}_2 = -\dot{e}_1 - \dot{e}_3). \end{aligned}$$

Dato che  $\wp\left(\frac{\omega}{2}\right)$  non lo abbiamo ancora calcolato, osserviamo che la (31'L) fornirebbe invece

$$\dot{e}_1 = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - e_1},$$

si hanno quindi le due equazioni in  $\dot{e}_1$  e  $\wp\left(\frac{\omega}{2}\right)$ :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = 2\wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - e_1 \\ \dot{e}_1 \left[ \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - e_1 \right] = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) \left[ \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - e_1 \right] + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \end{cases}$$

donde, con facile calcolo, si trae:

$$(34) \quad \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}$$

e

$$(35L) \quad \begin{cases} \dot{e}_1 = e_1 + 2\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \\ \dot{e}_2 = e_1 - 2\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \\ \dot{e}_3 = -2e_1. \end{cases}$$

Le determinazioni dei radicali (cui, al solito, deve attribuirsi il significato precisato dalle (11) del Cap. III) sono stati determinate riferendosi al caso di  $e_1, e_2, e_3$  reali.

Passiamo ora a determinare le formule di trasformazione (L) delle altre funzioni di WEIERSTRASS e, all'uopo, integriamo anzitutto rispetto ad  $u$  ambo i membri della (31L) in cui, per comodità di calcolo,  $u - \omega_1$  sia stato, com'è lecito, mutato in  $u + \omega_1$ ; avremo così, detta  $C$  una costante opportuna, la formula:

$$-\zeta\left(u \mid \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = -\zeta(u \mid \omega, \omega') - \zeta(u + \omega_1 \mid \omega, \omega') - e_1 u + C.$$

Per determinare  $C$  procediamo analogamente a quel che si è fatto nel caso della  $\wp$ , cioè osserviamo che per la seconda delle (49) del Cap. I, è:

$$\zeta\left(u \mid \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60} u^3 - \dots, \quad \zeta(u \mid \omega, \omega') = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{60} u^3 - \dots$$

e che inoltre è

$$\zeta(u + \omega_1 \mid \omega, \omega') = \zeta(\omega_1) + u\zeta'(\omega_1) + \dots = \eta_1 - e_1 u + \dots;$$

deve dunque essere  $C = \eta_1$ , e ne segue la formula:

$$(36L) \quad \zeta\left(u \mid \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \zeta(u \mid \omega, \omega') + \zeta(u + \omega_1 \mid \omega, \omega') + e_1 u - \eta_1.$$

Dalla (36L), ponendo  $u = \omega_1/2$  o  $u = \omega_3$ , segue in particolare che:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \zeta\left(2\omega_1 - \frac{\omega_1}{2}\right) + \frac{1}{2} e_1 \omega_1 - \eta_1 = \\ &= \zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + 2\eta_1 - \zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \frac{1}{2} e_1 \omega_1 - \eta_1 = \eta_1 + \frac{1}{2} e_1 \omega_1 \\ \dot{\eta}_3 &= \zeta(\omega_3) + \zeta(\omega_1 + \omega_3) + e_1 \omega_3 - \eta_1 = \\ &= \eta_3 + \eta_2 + e_1 \omega_3 - \eta_1 = 2\eta_3 + e_1 \omega_3 \end{aligned}$$

avremo dunque, essendo d'altra parte  $\dot{\eta}_2 = \dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_3$ , le formule:

$$(37L) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_1 + \frac{1}{2} e_1 \omega_1, \\ \dot{\eta}_2 &= \eta_2 + \eta_3 + \frac{1}{2} e_1 (\omega_2 + \omega_3), \\ \dot{\eta}_3 &= 2\eta_3 + e_1 \omega_3. \end{aligned}$$

Per determinare la formula di trasformazione della  $\sigma u$ , integriamo ancora una volta rispetto ad  $u$ ; dalle (36L), detta  $\log c'$  una nuova costante da determinarsi, avremo così che

$$\log \sigma\left(u \mid \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \log \sigma(u \mid \omega, \omega') + \log \sigma(u + \omega_1 \mid \omega, \omega') + \frac{1}{2} e_1 u^2 - \eta_1 u + \log c'$$

cioè:

$$\sigma\left(u \mid \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = c' \sigma(u \mid \omega, \omega') \sigma(u + \omega_1 \mid \omega, \omega') e^{\frac{1}{2} e_1 u^2 - \eta_1 u}.$$

Ma (si cfr. la (74) del Cap. I) è:

$$\begin{aligned} \sigma\left(u \mid \frac{\omega}{2}, \omega'\right) &= u - \frac{g_2}{240} u^5 - \dots, & \sigma(u \mid \omega, \omega') &= u - \frac{g_2}{240} u^5 - \dots, \\ \sigma(u + \omega_1 \mid \omega, \omega') &= \sigma \omega_1 + u \sigma' \omega_1 + \dots, & e^{\frac{1}{2} e_1 u^2 - \eta_1 u} &= 1 - \eta_1 u + \dots; \end{aligned}$$

dunque deve essere necessariamente  $c' = 1/\sigma \omega_1$ , e se ne conclude che vale la formula:

$$(38L) \quad \sigma\left(u \mid \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = e^{\frac{1}{2} e_1 u^2} \sigma(u \mid \omega, \omega') \frac{\sigma(u + \omega_1 \mid \omega, \omega')}{\sigma \omega_1} e^{-\eta_1 u}$$

che, costituendo gli ultimi fattori del secondo membro la funzione  $\sigma_1\omega$ , può anche scriversi:

$$(38'L) \quad \sigma\left(u \left| \frac{\omega}{2}, \omega' \right.\right) = e^{\frac{1}{2}e_1 u^2} \sigma(u | \omega, \omega') \sigma_1(u | \omega, \omega')$$

Ottenuta così la formula di trasformazione della funzione  $\sigma$ , la determinazione di quelle relative a  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  non è che una questione di calcoli materiali; propriamente, cambiando  $u$  in  $u + \omega_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, 3$ ) dalla (38L) si ricava facilmente la formula

$$(39L) \quad \sigma_\alpha\left(u \left| \frac{\omega}{2}, \omega' \right.\right) = \frac{\sigma(u + \dot{\omega}_\alpha)\sigma(u + \dot{\omega}_\alpha + \omega_1)}{\sigma \dot{\omega}_\alpha \cdot \sigma(\dot{\omega}_\alpha + \omega_1)} e^{\frac{1}{2}e_1 u^2 + (e_1 \dot{\omega}_\alpha - \eta_1 - \dot{\eta}_\alpha)u}$$

che per  $\alpha=3$ , avendosi allora  $\dot{\omega}_3 = \omega_3$ , fornisce subito:

$$(40L) \quad \sigma_3\left(u \left| \frac{\omega}{2}, \omega' \right.\right) = e^{\frac{1}{2}e_1 u^2} \sigma_2(u | \omega, \omega') \sigma_3(u | \omega, \omega')$$

I casi  $\alpha=1$  ed  $\alpha=2$  richiedono invece qualche passaggio di più perchè, avendosi allora rispettivamente

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\omega}{2}, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{\omega}{2} + \omega',$$

$\dot{\omega}_\alpha$  non è più un semiperiodo della funzione  $\wp$  corrispondente alle  $\sigma$  del secondo membro; occorre precisamente avvalersi della formula:

$$(41) \quad -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v} = \left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2 - \wp(v) + e_1,$$

immediatamente deducibile dalla (80) del Cap. I e dalla (8) del Cap. III (nel caso  $\alpha=1$ ), con l'ausilio della quale, nonchè della (34), si trova che:

$$(42L) \quad \begin{cases} \sigma_1\left(u \left| \frac{\omega}{2}, \omega' \right.\right) = e^{\frac{1}{2}e_1 u^2} [\sigma_1^2(u | \omega, \omega') - \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \sigma^2(u | \omega, \omega')] \\ \sigma_2\left(u \left| \frac{\omega}{2}, \omega' \right.\right) = e^{\frac{1}{2}e_1 u^2} [\sigma_1^2(u | \omega, \omega') + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \sigma^2(u | \omega, \omega')] \end{cases}$$

§ 6. - Trasformazioni di second'ordine delle funzioni di Jacobi.

Passiamo ora ad occuparci delle trasformazioni di 2° ordine ( $L$ ) delle funzioni di JACOBI e, a tal fine, indaghiamo anzitutto come si trasformino i tre radicali

$$\sqrt{e_1 - e_3}, \quad \sqrt{e_2 - e_3}, \quad \sqrt{e_1 - e_2},$$

avvalendoci all'uopo, onde evitare delle incertezze di segno, delle precedenti formule di trasformazione delle funzioni  $\sigma$  invece che delle (35L). Propriamente, ricordando le (11) e (11') del Cap. III, avremo subito, con ovvie notazioni, la formula:

$$\begin{aligned} i\sqrt{e_1 - e_3} &= \sqrt{e_3 - e_1} = \frac{\sigma_1 \dot{\omega}_3}{\sigma \dot{\omega}_3} = \frac{e^{\frac{1}{2}e_1 \omega_3^2} (\sigma_1^2 \omega_3 - \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \sigma^2 \omega)}{e^{\frac{1}{2}e_1 \omega_3^2} \sigma \omega_3 \sigma_1 \omega_3} = \\ &= \frac{\sigma_1 \omega_3}{\sigma \omega_3} - \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}}{\sigma_1 \omega_3 / \sigma \omega_3} = \sqrt{e_3 - e_1} - \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_3 - e_1}} = \\ &= i(\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_1 - e_2}) \end{aligned}$$

cioè:

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_1 - e_2},$$

od anche, ricordando le (26) del Cap. III,

$$(43L) \quad \sqrt{e_1 - e_3} = (1 + k') \sqrt{e_1 - e_3}.$$

In modo perfettamente simile si trova che:

$$(43'L) \quad \sqrt{e_2 - e_3} = \sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2} = (1 - k') \sqrt{e_1 - e_3}.$$

La trasformazione del terzo radicale è invece leggermente diversa; precisamente, avendosi che

$$\begin{aligned} \sqrt{e_1 - e_2} &= \frac{\sigma_2 \dot{\omega}_1}{\sigma \dot{\omega}_1} = \frac{e^{\frac{1}{2}e_1 \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2} \left[ \sigma_1^2 \left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \sigma^2 \left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right]}{e^{\frac{1}{2}e_1 \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2} \sigma \left(\frac{\omega_1}{2}\right) \sigma_1 \left(\frac{\omega_1}{2}\right)} = \\ &= \frac{\sigma_1 \left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sigma \left(\frac{\omega}{2}\right)} + \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}}{\sigma_1 \left(\frac{\omega}{2}\right) / \sigma \left(\frac{\omega}{2}\right)}, \end{aligned}$$

bisogna far ricorso, per calcolare il quoziente  $\sigma_1\left(\frac{\omega}{2}\right)/\sigma\left(\frac{\omega}{2}\right)$ , alle (12)-(12') del Cap. III che, unitamente alle (19) del medesimo Capitolo e al quadro di p. 121, forniscono:

$$\frac{\sigma_1\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\text{cn}\left(\sqrt{e_1 - e_3}\omega/2\right)}{\text{sn}\left(\sqrt{e_1 - e_3}\omega/2\right)} = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\text{cn}(K/2)}{\text{sn}(K/2)} = \sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{k'};$$

si ha dunque:

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{k'} + \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{k'}}$$

cioè, moltiplicando e dividendo la frazione per  $\sqrt{k'}$ ,

$$(43''L) \quad \boxed{\sqrt{e_1 - e_2} = 2\sqrt{k'} \sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Dalle formule trovate si traggono varie conseguenze importanti e, in primo luogo, le formule di trasformazione (L) di  $k$  e  $k'$ . Invero, dalle (26) del Capitolo precedente segue ora immediatamente che:

$$(44L) \quad \boxed{\dot{k} = \frac{1 - k'}{1 + k'}, \quad \dot{k}' = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'}};$$

formule di cui la prima può anche porsi sotto la forma:

$$(44'L) \quad \dot{k} = \left(\frac{k}{1 + k'}\right)^2 = \left(\frac{1 - k'}{k}\right)^2.$$

Abbiamo ora a disposizione tutto quanto occorre per stabilire senza alcuna pena le formule di trasformazione (L) di sn, cn e dn; propriamente dalle formule precedenti e dalla (12) del Cap. III segue subito che

$$\begin{aligned} \text{sn}\left(\sqrt{e_1 - e_3}u, \dot{k}\right) &= \text{sn}\left[(1 + k')\sqrt{e_1 - e_3}u, \frac{1 - k'}{1 + k'}\right] = \\ &= \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\partial u}{\partial_3 u} = (1 + k')\sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma u \sigma_1 u}{\sigma_2 u \sigma_3 u} = \\ &= (1 + k') \frac{\text{sn}\left(\sqrt{e_1 - e_3}u\right) \text{cn}\left(\sqrt{e_1 - e_3}u\right)}{\text{dn}\left(\sqrt{e_1 - e_3}u\right)} \end{aligned}$$

cioè, posto  $\sqrt{e_1 - e_3}u = v$ , si ha che

$$(45L) \quad \boxed{\text{sn}\left[(1 + k')v, \frac{1 - k'}{1 + k'}\right] = (1 + k') \frac{\text{sn}(v, k) \text{cn}(v, k)}{\text{dn}(v, k)}}.$$

Similmente si procede nel caso di cn e dn, giungendo alle seguenti formule:

$$(45'L) \quad \boxed{\begin{aligned} \text{cn}\left[(1 + k')v, \frac{1 - k'}{1 + k'}\right] &= \frac{1 - (1 + k') \text{sn}^2(v, k)}{\text{dn}(v, k)} \\ \text{dn}\left[(1 + k')v, \frac{1 - k'}{1 + k'}\right] &= \frac{1 - (1 - k') \text{sn}^2(v, k)}{\text{dn}(v, k)} \end{aligned}}$$

Come sappiamo dalla teoria generale svolta nel paragrafo precedente, queste formule, unite a quelle delle trasformazioni di primo ordine raccolte nel quadro a p. 168, permettono di dominare completamente tutte le trasformazioni di second'ordine delle funzioni sn, cn e dn. Tuttavia, dal punto di vista pratico, è utile aver esplicitamente sott'occhio le formule relative alla trasformazione di GAUSS (G) che si traggono facilmente dalla prima delle equazioni simboliche (32); esse sono le seguenti:

$$(44G) \quad \boxed{\dot{k} = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k}, \quad \dot{k}' = \frac{1 - k}{1 + k}}$$

$$(45G) \quad \boxed{\begin{aligned} \text{sn}\left[(1 + k)v, \frac{2\sqrt{k}}{1 + k}\right] &= (1 + k) \frac{\text{sn}(v, k)}{1 + k \text{sn}^2(v, k)} \\ \text{cn}\left[(1 + k)v, \frac{2\sqrt{k}}{1 + k}\right] &= \frac{\text{cn}(v, k) \text{dn}(v, k)}{1 + k \text{sn}^2(v, k)} \\ \text{dn}\left[(1 + k)v, \frac{2\sqrt{k}}{1 + k}\right] &= \frac{1 - k \text{sn}^2(v, k)}{1 + k \text{sn}^2(v, k)} \end{aligned}}$$

Non riportiamo invece le formule della trasformazione irrazionale (I) perchè più complicate (1).

È interessante osservare che i due diversi procedimenti usati nel § 3 del Cap. II per ridurre alla forma canonica di LEGENDRE

(1) Vedasi all'uopo, per esempio, JAHNKE-EMDE [20], ultima riga del primo quadro di p. 161.

un dato integrale ellittico, possono ricondursi l'uno all'altro mediante una trasformazione di second'ordine dei periodi.

Invero, nei due casi, come mostrano le (25) e (26) del citato paragrafo, si ha

$$k = \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} \quad \text{o} \quad k_1 = \sqrt{\lambda},$$

dove  $\lambda$  denota il birapporto delle quattro radici della biquadratica fondamentale, epperò i due moduli di LEGENDRE sono legati dalla relazione

$$k = \frac{1 - k_1}{1 + k_1},$$

che (salvo un irrilevante scambio fra  $k_1$  e  $k_1'$ , corrispondente ad una sostituzione di prim'ordine di tipo  $B$  sui periodi) può identificarsi con la prima delle (44L).

Pertanto, o si adoperi l'un metodo di riduzione o si adoperi l'altro, servendosi delle (45L) si deve giungere alle medesime formule finali.

Passando ora alle formule di trasformazione (L) delle funzioni theta, osserviamo in primo luogo che, in virtù delle (43) e (46) del Cap. III, nel caso in esame si ha manifestamente

$$(46L) \quad \dot{v} = 2v, \quad \dot{t} = 2\tau, \quad \dot{z} = z^2, \quad \dot{q} = q^2.$$

In secondo luogo osserviamo che, avendo già indagato come si trasformano i tre radicali  $\sqrt{e_1 - e_3}$ ,  $\sqrt{e_2 - e_3}$  ed  $\sqrt{e_1 - e_2}$ , per le (79) del Cap. III potremo immediatamente scrivere le formule di trasformazione delle funzioni  $\vartheta_2(0)$ ,  $\vartheta_3(0)$  e  $\vartheta_4(0)$ ; propriamente si trova che:

$$\dot{\vartheta}_2^2(0) = \frac{2\dot{\omega}}{\pi} \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\omega}{\pi} (\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2}) = \frac{1}{2} [\vartheta_3^2(0) - \vartheta_4^2(0)]$$

$$\dot{\vartheta}_3^2(0) = \frac{2\dot{\omega}}{\pi} \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\omega}{\pi} (\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_1 - e_2}) = \frac{1}{2} [\vartheta_3^2(0) + \vartheta_4^2(0)]$$

$$\dot{\vartheta}_4^2(0) = \frac{2\dot{\omega}}{\pi} \sqrt{e_1 - e_2} = \frac{2\omega}{\pi} \sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{k} = \vartheta_3^2(0) \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)} = \vartheta_3(0)\vartheta_4(0).$$

Moltiplicando fra loro queste tre formule e ricordando l'identità di JACOBI, si ha poi

$$\frac{1}{\pi^2} \dot{\vartheta}_1'^2(0) = \frac{1}{4} \vartheta_3(0)\vartheta_4(0)[\vartheta_3^2(0) - \vartheta_4^2(0)]$$

donde, per la (76) del Cap. III, segue

$$\dot{\vartheta}_1'^2 = \frac{\pi^2}{4} \vartheta_2^2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0) = \frac{\pi}{4} \vartheta_2^2(0)\vartheta_1'(0) = \frac{1}{4} \frac{\vartheta_2^2(0)\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)}.$$

Si hanno dunque, sotto forma più esplicita, le formule:

$$(47L) \quad \left. \begin{aligned} \vartheta_1'(0|2\tau) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\vartheta_2^2(0|\tau)\vartheta_1'(0|\tau)} = \frac{\vartheta_2(0|\tau)\vartheta_1'(0|\tau)}{2\sqrt{\vartheta_3(0|\tau)\vartheta_4(0|\tau)}} \\ \vartheta_2(0|2\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\vartheta_2^2(0|\tau) - \vartheta_4^2(0|\tau)} \\ \vartheta_3(0|2\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\vartheta_2^2(0|\tau) + \vartheta_4^2(0|\tau)} \\ \vartheta_4(0|2\tau) &= \sqrt{\vartheta_3(0|\tau)\vartheta_4(0|\tau)} \end{aligned} \right\}$$

dove i radicali sono ovviamente da prender tutti « *col segno più* », cioè in modo tale che, quando  $q$  è reale e compreso fra 0 ed 1, si riducano a numeri reali positivi.

Trovate così le formule di trasformazione delle funzioni theta-nulle, si passa agevolmente a quelle delle theta per argomento qualsiasi, giovandosi delle (56) del Cap. III e delle formule di trasformazione delle funzioni sigma stabilite nel paragrafo precedente. Precisamente, cominciando dalla  $\vartheta_1$ , si ha

$$2\dot{\omega} e^{\dot{\eta}u^2/2\dot{\omega}} \frac{\dot{\vartheta}_1(\dot{v})}{\dot{\vartheta}_1'(0)} = e^{\frac{1}{2}e_1u^2} 2\omega e^{\eta u^2/2\omega} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)} e^{\eta u^2/2\omega} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)}$$

ma, tenendo conto che  $\dot{\omega} = \omega/2$  e della prima delle (37L), si constata subito che i fattori esponenziali nei due membri sono uguali; dunque resta semplicemente:

$$\dot{\vartheta}_1(\dot{v}) = \frac{2\dot{\vartheta}_1'(0)}{\vartheta_1'(0)\vartheta_2(0)} \vartheta_1(v)\vartheta_2(v),$$

od anche, trasformando opportunamente il fattore costante con l'ausilio della prima e dell'ultima delle (47L) e dell'identità di JACOBI:

$$\dot{\vartheta}_1(\dot{v}) = \frac{\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)}{\dot{\vartheta}_4(0)}.$$

Con pari facilità si trasformano le altre tre funzioni theta, ottenendo nel complesso le formule seguenti, in cui, al posto

delle thetanulle trasformate possono sostituirsi i valori dati dalle (47L):

$$(48L) \quad \left. \begin{aligned} \vartheta_1(2v | 2\tau) &= \frac{\vartheta_1(v | \tau)\vartheta_2(v | \tau)}{\vartheta_1(0 | 2\tau)} \\ \vartheta_2(2v | 2\tau) &= \frac{\vartheta_2^2(v | \tau) - \vartheta_1^2(v | \tau)}{2\vartheta_2(0 | 2\tau)} = \frac{\vartheta_3^2(v | \tau) - \vartheta_4^2(v | \tau)}{2\vartheta_2(0 | 2\tau)} \\ \vartheta_3(2v | 2\tau) &= \frac{\vartheta_2^2(v | \tau) + \vartheta_1^2(v | \tau)}{2\vartheta_2(0 | 2\tau)} = \frac{\vartheta_3^2(v | \tau) + \vartheta_4^2(v | \tau)}{2\vartheta_2(0 | 2\tau)} \\ \vartheta_4(2v | 2\tau) &= \frac{\vartheta_3(v | \tau)\vartheta_4(v | \tau)}{\vartheta_1(0 | 2\tau)} \end{aligned} \right\}$$

Queste formule contengono l'essenziale della trasformazione quadratica delle funzioni theta, e permettono di dominare l'intero campo delle svariatissime formule che, combinando le (48L) con le formule relative alle sostituzioni di prim'ordine e avvalendosi delle numerose identità intercedenti fra le theta, possono stabilirsi al riguardo. Per esempio, osservando che la sostituzione (di quart'ordine) *BLBL* muta *v* e  $\tau$  rispettivamente in  $-2v$  e  $\tau$ , possono per questa via ottenersi le seguenti *formule di duplicazione dell'argomento delle funzioni*  $\vartheta$ :

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_1(2v) &= \frac{2\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_4(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)} \\ \vartheta_2(2v) &= \frac{\vartheta_2^2(v)\vartheta_3^2(v) - \vartheta_1^2(v)\vartheta_4^2(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3^2(0)} \\ \vartheta_3(2v) &= \frac{\vartheta_2^2(v)\vartheta_3^2(v) + \vartheta_1^2(v)\vartheta_4^2(v)}{\vartheta_2^2(0)\vartheta_3(0)} \\ \vartheta_4(2v) &= \frac{\vartheta_3^4(v) - \vartheta_2^4(v)}{\vartheta_3^2(0)} = \frac{\vartheta_4^4(v) - \vartheta_1^4(v)}{\vartheta_4^2(0)} \end{aligned} \right.$$

§ 7. - Considerazioni riassuntive sulle trasformazioni delle funzioni ellittiche e, in particolare, su quella di Landen. Media aritmetico-geometrica di Gauss.

Per comprendere tutta l'importanza della teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche, di cui nei paragrafi precedenti abbiamo tracciate le linee essenziali, non è inopportuno soffermarsi un istante a considerare esplicitamente come essa consenta di risolvere, in gene-

rale in modo assai semplice, dei problemi di Analisi che, altrimenti, potrebbero presentare delle anche grandi difficoltà. All'uopo si consideri per esempio il teorema sulle serie espresso dalla (21'B) del § 3, che con tanta facilità abbiamo dedotto dalle formule di trasformazione di prim'ordine delle funzioni theta o, meglio ancora, la condizione necessaria e sufficiente trovata nel § 1, affinché due funzioni  $x = \wp(u | \omega, \omega')$  e  $y = \wp(u | \omega', \omega)$  siano legate da una relazione algebrica.

Invero, ricondando la ben nota equazione differenziale della  $\wp u$ , nel secondo caso si hanno le due uguaglianze

$$\begin{aligned} du &= \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}} = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \\ du &= \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - \dot{g}_2\wp - \dot{g}_3}} = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \dot{g}_2y - \dot{g}_3}} \end{aligned}$$

da cui trae:

$$(50) \quad \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - \dot{g}_2y - \dot{g}_3}},$$

epperò il problema da noi risolto equivale alla ricerca degli eventuali *integrali algebrici* dell'equazione differenziale (50), cioè ad un problema di natura tutt'altro che elementare.

Da un altro punto di vista, molte delle formule di trasformazione di cui ci siamo occupati possono, con lievi adattamenti, essere considerate come *formule di trasformazioni di integrali ellittici* l'uno nell'altro; e si giunge così alla constatazione, che è stata considerata come una delle meraviglie dell'Analisi (1), che tali integrali, dopo cento (per così dire) diverse trasformazioni e manipolazioni, finiscono col risorgere tali e quali, salvo mutamenti nei valori dei parametri che in essi compaiono.

Per indicare un semplice e classico esempio di queste trasformazioni d'integrali, consideriamo l'integrale ellittico

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}}$$

(1) È stato giustamente osservato che agli integrali ellittici, ben più che alla spirale d'ARCHIMEDE, poteva applicarsi il paragone dell'*araba Fenice* risorgente dalle proprie ceneri!

dove  $a$  e  $b$  sono due numeri che supporremo, benchè ciò non sia essenziale, reali, positivi e tali da aversi  $a > b$ .

L'integrale  $I$  può ridursi alla forma canonica di LEGENDRE in più modi e anzitutto con trasformazioni di carattere del tutto elementare. Invero, aggiungendo e togliendo  $2ab$  dal radicando, si ha

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{(a+b)^2 - 2ab(1 - \cos \theta)}} = \frac{1}{a+b} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

epperò, ponendo

$$(51) \quad \frac{\theta}{2} = \varphi, \quad \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} = k,$$

viene

$$I = \frac{2}{a+b} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

di guisa che, con le notazioni del § 4 del Cap. II, avremo

$$(52) \quad I = \frac{2}{a+b} K(k) = \frac{2}{a+b} K\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

La riduzione a forma canonica può però compiersi anche per un'altra via, e cioè praticando la sostituzione:

$$(53) \quad \frac{a \sin \theta}{a \cos \theta + b} = \operatorname{tg} \psi,$$

ch'è suscettibile di un'assai semplice interpretazione geometrica.

Invero, tracciato un cerchio di centro  $O$  e raggio  $a$  (in realtà basta un semicerchio, vedi fig. 35) e segnato nell'interno di esso un punto  $A$  alla distanza  $b$  dal centro  $O$ , si constata subito che le anomalie  $\theta$  e  $\psi$  di un medesimo punto  $P$  del cerchio rispetto

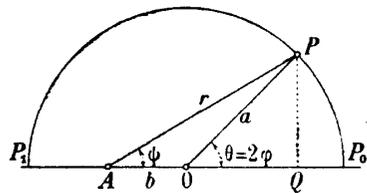


Fig. 35.

ai poli  $O$  ed  $A$ , contate entrambe a partire dalla retta  $AO$ , sono precisamente legate dalla relazione (53): All'uopo non c'è che da abbassare da  $P$  la perpendicolare  $PQ$  su  $OA$ , ed osservare che è  $AQ = a \cos \theta + b$ ,  $QP = a \sin \theta$ .

Dalla figura precedente risulta inoltre che il radicale che figura sotto integrale in  $I$  non è altro se non la distanza  $r$  del punto  $P$  da  $A$ , e inoltre che i differenziale di  $\theta$  e  $\psi$  sono legati dalla relazione

$$a \cos(\psi - \theta) d\theta = r d\psi,$$

che del resto si può anche facilmente dedurre differenziando la (53).

Le osservazioni precedenti, unite all'altra che quando  $P$  occupa le posizioni  $P_0$  e  $P_1$  (vedi figura) si ha rispettivamente  $\theta = \psi = 0$  o  $\theta = \psi = \pi$ , permettono di scrivere le uguaglianze:

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{r} = \frac{1}{a} \int_0^\pi \frac{d\psi}{\cos(\psi - \theta)} = \frac{1}{a} \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2(\psi - \theta)}},$$

ma, d'altra parte, dalla (53) si trae subito che

$$\sin(\psi - \theta) = \frac{b}{a} \sin \psi;$$

dunque avremo in definitiva

$$I = \frac{1}{a} \int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \psi}} = \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \psi}},$$

cioè

$$(54) \quad I = \frac{2}{a} K\left(\frac{b}{a}\right).$$

Confrontando i risultati ottenuti coi due diversi procedimenti, si ha la formula

$$K\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a}{a+b} K\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)$$

che, osservato come dalla seconda delle (51) segua:

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \frac{a-b}{a+b}, \quad \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{b}{a}, \quad \frac{1+k'}{2} = \frac{a}{a+b},$$

può anche scriversi sotto la forma:

$$(55L) \quad \boxed{K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{1+k'}{2} K(k)}$$

La formula ottenuta non è altro se non la formula di trasformazione (L) della quantità  $K$  e, come tale, può ritrovarsi in un istante per mezzo delle formule da noi stabilite nei paragrafi precedenti.

Propriamente dalla prima delle (19) del Cap. III e dalle (43L) e (44L) di questo Capitolo, segue senz'altro che:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= K \left( \frac{1-k'}{1+k'} \right) = \sqrt{e_1 - e_3} \dot{\omega} = (\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_1 - e_2}) \frac{\omega}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_2}} \right) \sqrt{e_1 - e_3} \omega = \frac{1+k'}{2} K(k). \end{aligned}$$

L'esempio considerato, anche storicamente assai importante perchè è proprio per la via da noi ora seguita che LANDEN ha trovata la sua celebre trasformazione (da cui è poi scaturita tutta la teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche), mostra l'indiscutibile superiorità dei metodi svolti nel presente Capitolo su quelli fondati sulla diretta trasformazione degli integrali ellittici. Pertanto, volendo associare alla (55) un'analogia formula relativa alla funzione  $E(k)$ , non staremo ad operare sull'integrale (47) del Cap. II, ma ci avvarremo invece della formula (33) del Cap. III che, assieme colle (35L), (37L), (43L) e (44L) di questo, fornisce subito:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= E \left( \frac{1-k'}{1+k'} \right) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} (\dot{e}_1 \dot{\omega} + \dot{\eta}) = \\ &= \frac{2}{(1+k') \sqrt{e_1 - e_3}} \left[ (e_1 + 2\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}) \frac{\omega}{2} + \eta + \frac{1}{2} e_1 \omega \right] = \\ &= \frac{1}{1+k'} \left( \frac{e_1 \omega + \eta}{\sqrt{e_1 - e_3}} + \sqrt{e_1 - e_2} \omega \right) = \frac{1}{1+k'} \left( E + \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}} K \right); \end{aligned}$$

sussiste dunque la formula:

$$(56L) \quad \boxed{E \left( \frac{1-k'}{1+k'} \right) = \frac{1}{1+k'} [E(k) + k'K(k)]}$$

Se invece dell'integrale completo  $K$  si considera la funzione  $F(\varphi, k)$ , si vede con tutta facilità che la (55) viene sostituita dalla formula analoga

$$(55'L) \quad F \left( \psi, \frac{1-k'}{1+k'} \right) = (1+k') F(\varphi, k),$$

dove le amplitudini  $\varphi$  e  $\psi$  sono legate dalla relazione (53) (dove  $\theta$  è da sostituire con  $2\varphi$ ), che può anche essere posta sotto la forma

$$(53'L) \quad \sin \psi = (1+k') \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

od anche

$$(53''L) \quad \operatorname{tg}(\psi - \varphi) = k' \operatorname{tg} \varphi.$$

La formula di trasformazione di  $E(\varphi, k)$  è invece meno immediata a stabilire; propriamente, con calcoli analoghi a quelli che ci son serviti per stabilire la (16A), si trova che:

$$(56'L) \quad E \left( \psi, \frac{1-k'}{1+k'} \right) = \frac{2}{1+k'} [E(\varphi, k) + k'F(\varphi, k)] - \frac{1-k'}{1+k'} \sin \psi.$$

Questa formula e la (56L) — benchè non di rado utili nei calcoli — non si trovano negli ordinari trattati sulle funzioni ellittiche.

La trasformazione di LANDEN ha importanza anche dal punto di vista pratico-numerico, perchè fornisce uno dei metodi più comodi e precisi per il calcolo numerico degli integrali ellittici.

All'uopo cominciamo con l'osservare che, quando  $k$  (come sempre si verifica nelle applicazioni) è un numero reale compreso fra 0 e 1, per le (44—44'L) anche  $\dot{k}$  soddisferà a queste condizioni, e per di più sarà

$$\dot{k} = \frac{k^2}{(1+k')^2} < k^2 < k.$$

Ne segue che, immaginando di applicare la trasformazione di LANDEN più volte di seguito, detti  $k_1, k_2, k_3, \dots$  i successivi moduli trasformati, posto cioè

$$k_1 = \dot{k}, \quad k_2 = \dot{k}_1, \quad k_3 = \dot{k}_2, \dots,$$

sarà

$$k_2 < k_1^2 < k^4, \quad k_3 < k_2^2 < k^8, \dots$$

e, in generale,

$$(57) \quad k_n < k^{2^n}, \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

il che mostra come i successivi moduli trasformati tendano, e rapidamente, a zero. Ma se il modulo di un integrale ellittico può considerarsi praticamente nullo, l'integrale si calcola immediatamente: per esempio (cfr. Cap. II, § 4) viene  $K = \pi/2$ ; dunque l'appli-

cazione ripetuta della trasformazione di LANDEN fornisce un metodo pel calcolo numerico degli integrali ellittici.

Stante le interessanti conseguenze che se ne deducono, val la pena di esaminare con maggiori dettagli l'applicazione del metodo suaccennato al caso dell'integrale  $\mathbf{K}$ .

In questo caso la formula che deve giocare è la (55L) da cui, ponendo (analogamente a quel che si è fatto per  $k, k_1, \dots$ ):

$$k_0' = k', \quad k_1' = k_1', \quad k_2' = k_1', \dots,$$

si trae che

$$\mathbf{K}(k) = \frac{2}{1+k'} \mathbf{K}(k_1), \quad \mathbf{K}(k_1) = \frac{2}{1+k_1'} \mathbf{K}(k_2),$$

$$\mathbf{K}(k_2) = \frac{2}{1+k_2'} \mathbf{K}(k_3), \dots;$$

si ha dunque la formula:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{K}(k_n) \prod_{r=0}^{n-1} \frac{2}{1+k_r'}.$$

Ne segue che:

$$(58) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{r=0}^{n-1} \frac{2}{1+k_r'} = \frac{\mathbf{K}(k)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{K}(k_n)} = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k),$$

epperò il prodotto infinito il cui fattore generale è  $2/(1+k_r')$  è convergente e sussiste la formula molto semplice:

$$(59) \quad \boxed{\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \prod_{r=0}^{\infty} \frac{2}{1+k_r'}}.$$

che fornisce il valore di  $\mathbf{K}$ .

Per avvalersi della (59) bisogna anzitutto calcolarsi, a partire da

$$k_0' = k' = \sqrt{1-k^2}, \quad (1)$$

le successive  $k_1', k_2', \dots$ , pel che servirà la seconda delle (44L) che fornisce senz'altro la formula ricorrente:

$$k'_{n+1} = k_n' = \frac{2\sqrt{k_n'}}{1+k_n}, \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

(<sup>1</sup>) Qui e nel seguito i radicali s'intenderanno presi tutti in senso aritmetico.

cui si può dare un'aspetto assai più espressivo ponendo, in analogia con la formula  $k=b/a$  più sopra trovata:

$$k_n' = \frac{b_n}{a_n},$$

con che essa diviene

$$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{2\sqrt{b_n/a_n}}{1+b_n/a_n} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{\frac{1}{2}(a_n+b_n)},$$

e può pertanto essere soddisfatta ponendo:

$$(60) \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Resta così dimostrato che se noi indichiamo con  $a_0$  e  $b_0$  due qualsiasi numeri reali e positivi tali da aversi

$$(61) \quad \frac{b_0}{a_0} = k' = \sqrt{1-k^2},$$

e costruiamo le successive coppie  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$  mediante le formule ricorrenti (60), cioè calcolando ciascuna volta la *media aritmetica* e la *media geometrica* dei due numeri precedenti, otterremo due successioni indefinite di numeri:

$$(62) \quad a_0, a_1, a_2, \dots \quad \text{e} \quad b_0, b_1, b_2, \dots$$

atte a fornirci le  $k_1', k_2', \dots$  mediante le semplicissime formule

$$(63) \quad k_n' = \frac{b_n}{a_n}, \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

donde, in particolare, segue che dovrà essere.

$$(64) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1.$$

Non solo però il rapporto  $b_n/a_n$  tende ad un limite determinato per  $n \rightarrow \infty$ , bensì anche  $a_n$  e  $b_n$  isolatamente considerati (<sup>1</sup>). Invero dalla (63) segue che

$$\frac{2}{1+k_n'} = \frac{a_n}{\frac{1}{2}(a_n+b_n)} = \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

(<sup>1</sup>) Questo fatto che qui viene, quasi senza calcoli, dedotto dalle considerazioni precedenti, potrebbe essere anche dimostrato direttamente con considerazioni del tutto elementari sulle formule ricorrenti (60).

e, successivamente, che

$$\prod_{r=0}^{n-1} \frac{2}{1+k_r'} = \frac{a_0}{a_n};$$

dunque, in forza della (58), sarà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_0} = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(k)$$

donde, tenuto anche conto della (64), si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\pi a_0}{2\mathbf{K}(k)}.$$

Se ne conclude cioè che, indicato, con GAUSS, col simbolo  $M(a_0, b_0)$  la « media aritmetico-geometrica » dei due numeri  $a_0$  e  $b_0$ , ossia il comun limite delle due successioni (62) formate a partire da essi; reggono le formule:

$$(65) \quad M(a_0, b_0) = \frac{\pi a_0}{2\mathbf{K}(k)} = \frac{\pi a_0}{2\mathbf{K}(\sqrt{1-b_0^2/a_0^2})}, \quad (a_0 \geq b_0)$$

donde, supponendo per semplicità  $a_0 = 1$ , segue:

$$(66) \quad \mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2M(1, k')} = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-k^2})}.$$

La considerazione della media aritmetico-geometrica ci consente inoltre di dare una risposta molto semplice ad una questione rimasta non completamente esaurita nel Capitolo precedente, e cioè alla questione delle relazioni fra le quattro funzioni thetanulle:  $\vartheta_1'(0)$ ,  $\vartheta_2(0)$ ,  $\vartheta_3(0)$  e  $\vartheta_4(0)$ .

Invero si osservò a suo tempo (nel § 6 del Capitolo III) che fra queste quattro funzioni sussistono le due relazioni algebriche:

$$\vartheta_1'(0) = \pi \vartheta_2(0) \vartheta_3(0) \vartheta_4(0) \quad \text{e} \quad \vartheta_2^2(0) + \vartheta_4^2(0) = \vartheta_3^2(0),$$

ma nulla si disse su una terza relazione fra di esse che pur vi dev'essere. Orbene questa terza relazione, ch'è invece trascendente, può essere espressa dalla semplicissima equazione:

$$(67) \quad M[\vartheta_3^2(0), \vartheta_4^2(0)] = 1.$$

Infatti per la (65) si ha

$$M[\vartheta_3^2(0), \vartheta_4^2(0)] = \frac{\pi \vartheta_3^2(0)}{2\mathbf{K}(\sqrt{1-\vartheta_4^2(0)/\vartheta_3^2(0)})} = \frac{\pi \vartheta_3^2(0)}{2\mathbf{K}(\vartheta_2^2(0)/\vartheta_3^2(0))},$$

ma, per le (75) e (80) del Cap. III, è

$$2\mathbf{K}(\vartheta_2^2(0)/\vartheta_3^2(0)) = 2\mathbf{K}(k) = \pi \vartheta_3^2(0);$$

dunque la media aritmetico-geometrica di  $\vartheta_3^2(0)$  e  $\vartheta_4^2(0)$  è uguale ad uno.

In forma diversa, la relazione trascendente in discorso può essere espressa dalla formula:

$$(68) \quad \mathbf{K}[\vartheta_2^2(0)/\vartheta_3^2(0)] = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0).$$

Finalmente approfittiamo del fatto che in questo Capitolo abbiamo avuto occasione d'intrattenerci su alcune proprietà delle due funzioni  $\mathbf{K}(k)$  ed  $\mathbf{E}(k)$ , per indicare qui le notevoli relazioni esistenti fra queste funzioni e le loro derivate rispetto a  $k^2$ :

$$(69) \quad 2k^2 \frac{d\mathbf{E}}{dk^2} = \mathbf{E} - \mathbf{K}, \quad 2(1-k^2) \frac{d(\mathbf{K}-\mathbf{E})}{dk^2} = \mathbf{E}.$$

Queste equazioni, che possono anche scriversi sotto la forma

$$(69') \quad k \frac{d\mathbf{E}}{dk} = \mathbf{E} - \mathbf{K}, \quad k \frac{d\mathbf{K}}{dk} = \frac{\mathbf{E}}{1-k^2} - \mathbf{K},$$

possono ricavarsi o osservando che le serie che danno  $\mathbf{K}$  ed  $\mathbf{E}$  (cfr. Cap. II, §§ 4 e 5, pp. 87 e 90) sono serie ipergeometriche <sup>(1)</sup> o, più elementarmente, con delle derivazioni sotto il segno.

Se invece degli integrali completi  $\mathbf{K}$  ed  $\mathbf{E}$  si considerano gli

<sup>(1)</sup> Propriamente, ponendo con GAUSS

$$F(a, b, c; x) = 1 + \frac{ab}{1!c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \dots,$$

si ha

$$\mathbf{K} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right), \quad \mathbf{E} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; k^2\right).$$

Cfr., per esempio, HALPHEN [7], t. 1°, pp. 349-353. Vedi anche FRICKE [5], p. 193.

integrali di LEGENDRE  $F(\varphi, k)$  ed  $E(\varphi, k)$ , allora le (69) vengono rimpiazzate dalle equazioni analoghe:

$$(70) \quad 2k^2 \frac{\partial E}{\partial k^2} = E - F, \quad 2(1-k^2) \frac{\partial(F-E)}{\partial k^2} = E - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Val inoltre la pena di osservare che da queste formule si deduce facilmente che:

$$(71) \quad \int_0^\varphi (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi = \frac{E}{1-k^2} - \frac{k^2}{1-k^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Notiamo finalmente, sempre a proposito delle funzioni  $F$  ed  $E$ , che l'integrale di LEGENDRE di terza specie  $\Pi(\varphi, n, k)$ , pur non potendosi — come già sappiamo (Cap. II, § 5) — *in generale* (cioè per valori generici di  $\varphi$ ,  $n$  e  $k$ ) esprimere per mezzo delle funzioni  $F$  ed  $E$ , può però essere a queste riducibile in casi speciali, per esempio quando si tratti di un'integrale *completo* ( $\varphi = \pi/2$ ). Le relative formule, che non riportiamo perchè complicate, trovansi in LEGENDRE [8], t. II, pp. 134 e 138. Di esse si sono utilmente avvalsi CONFORTO e VIOLA in un loro recentissimo lavoro <sup>(1)</sup>, compiuto nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo in Roma. Sugli integrali di terza specie completi vedasi anche un lavoro di HAMEL <sup>(2)</sup>, che ne fornisce una semplice espressione approssimata, particolarmente utile quando il modulo  $k$  è prossimo ad 1.

<sup>(1)</sup> F. CONFORTO e VIOLA: *Sul calcolo di un integrale doppio che interviene nella determinazione degli ipocentri sismici*. [«La Ricerca Scientifica» (2) 2 (1936)].

<sup>(2)</sup> G. HAMEL: *Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals für grosse Werte des Moduls*. [Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft, 31 (1932), pp. 17-32; oppure JAHNKE-EMDE [20], p. 151].

## CAPITOLO V.

## Esempi di applicazioni delle funzioni ellittiche.

## § 1. - Uso delle tabelle numeriche delle funzioni e degli integrali ellittici.

Un problema la cui soluzione richieda la considerazione di funzioni ellittiche, può essere trattato tanto introducendo le funzioni  $\wp$ ,  $\zeta$  e  $\sigma$  di WEIERSTRASS, quanto introducendo le  $sn$ ,  $cn$  e  $dn$  di JACOBI, oppure servendosi delle funzioni theta, o anche rimanendo fedeli alle tre antiche funzioni  $F$ ,  $E$  e  $\Pi$  di LEGENDRE che, del resto, sono spesso quelle che più spontaneamente si presentano nei calcoli.

I primi due metodi, che dal punto di vista teorico, cioè per la discussione del problema ecc. sono i principali, sono sostanzialmente equivalenti, nel senso che nessuno dei due presenta tali vantaggi da farlo decisamente preferire all'altro, sì che entrambi si trovano impiegati, quasi con la stessa frequenza, nella letteratura sull'argomento.

Dal punto di vista pratico-numerico invece, il vantaggio dei metodi imperniati sulla riduzione della biquadratica fondamentale alla forma di LEGENDRE è innegabile ed innegata, soprattutto per fatto che tutte (praticamente) le tabelle numeriche di funzioni ellittiche finora calcolate si riferiscono, direttamente o indirettamente, alla forma canonica di LEGENDRE <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> La ragione principale per cui non sono state finora, si può dire mai, costruite tabelle della funzione  $\wp(u; g_2, g_3)$  di WEIERSTRASS e connesse, non è forse tanto quella che si tratta di funzioni di *tre* variabili (chè, considerate le relazioni di omogeneità, queste possono subito ridursi a *due*), bensì l'altra che, avendo  $\wp$  e  $\zeta$  dei poli sull'asse reale, la loro intabulazione, l'interpolazione dei dati tabulari, ecc., riescono spesso assai scomode. Vedasi all'uopo la tabella dei valori di  $\wp$ ,  $\wp'$ ,  $\zeta$  e  $\sigma$  nel caso equianarmonico ( $g_2 = 0$ ,  $g_3 = 1$ ) data da JAHNKE-EMDE [20] a pp. 168-170.

Dalla circostanza suaccennata segue che anche nel caso in cui, nella trattazione di un certo problema, si sia ritenuto utile ricorrere alle funzioni di WEIERSTRASS, all'atto di passare alle applicazioni numeriche occorrerà sostituire a dette funzioni le loro espressioni mediante  $sn$ ,  $cn$  e  $dn$  o le funzioni theta, sicchè, in ultima analisi, gli effettivi calcoli numerici dovranno sempre compiersi nell'ambito delle funzioni di JACOBI-LEGENDRE o delle theta.

Il calcolo con le funzioni theta è molto agevole stante le rapidissima convergenza delle serie che le rappresentano; inoltre oggi si hanno anche buone tabelle di queste funzioni <sup>(1)</sup>. Tuttavia, fuori del caso degli integrali di terza specie (in cui l'intervento delle funzioni theta o sigma è inevitabile e inerente alla natura stessa delle cose), si preferisce in generale eseguire i calcoli numerici a mezzo delle tabelle delle funzioni  $F$  ed  $E$  di LEGENDRE o (ciò che poi è, in fondo, lo stesso) per mezzo delle funzioni  $sn$ ,  $cn$  e  $dn$ ; probabilmente per la ragione principale che le tabelle delle funzioni legendriane sono le più antiche di tutte e, ancor oggi, le più facilmente reperibili <sup>(2)</sup>.

Uniformandoci a quest'abitudine, nei pochi esempi di applicazioni delle funzioni ellittiche trattati nelle pagine che seguono, i calcoli numerici saranno, di regola, imperniati sull'uso delle tavole di LEGENDRE; tanto più che, così facendo, non si viene che ad aumentare di pochissimo il lavoro rispetto a quel che potrebbe essere avendo a disposizione anche altre tavole, per esempio quelle di MILNE-THOMSON [23] che danno direttamente i valori con 5 decimali di  $sn v$ ,  $cn v$  e  $dn v$  in funzione di  $v$  e  $k^2$ .

L'operazione fondamentale che si compie mediante le tavole di

<sup>(1)</sup> Le brevi tavole riportate da HOUEL [19] e da JAHNKE-EMDE [20] hanno soprattutto lo scopo di mostrare l'andamento delle funzioni. Sono invece particolarmente adatte per i calcoli numerici le tavole a 10 decimali di ADAMS [16] e quelle di NAGAOKA-SAKURAI [25] e HAYASHI [17] (7 od 8 decimali).

<sup>(2)</sup> Le tavole originarie di LEGENDRE, che danno i valori con 9 decimali di  $F(\varphi, k)$  ed  $E(\varphi, k)$  ed i valori con 12 decimali degli integrali completi  $K$  ed  $E$  per  $\varphi$  ed  $\arcsin k$  procedenti di grado in grado, furono pubblicate nel 2° volume del *Traité* [10]. Di esse esiste una recente edizione fototipica (Stuttgart, Wittwer, 1931). Nella più parte dei casi bastano però delle tabelle con minor numero di decimali (4 o 5), quali per esempio quelle che si trovano in JAHNKE-EMDE [20], pp. 134-144 e 150.

LEGENDRE è la determinazione dei valori di  $F(\varphi, k)$  ed  $E(\varphi, k)$  corrispondenti ad un dato  $\varphi$  compreso fra  $0^\circ$  e  $90^\circ$  e a un dato  $k$  compreso fra 0 ed 1 o, più esattamente, a un dato valore dell'arco (compreso fra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ) il cui seno è  $k$ , poichè, quasi sempre, il secondo argomento delle tabelle è, invece di  $k$ , l'angolo

$$(1) \quad \alpha = \arcsin k. \\ (0, \pi/2)$$

Quest'operazione non presenta altra difficoltà se non quella di richiedere una *doppia interpolazione*, come sempre accade quando si ha a che fare con tabelle a doppia entrata, con la facilitazione che, in genere, ci si può limitare a considerare le sole differenze prime. Ecco, per esempio, come si conduce il calcolo di  $F(\varphi, k)$  per  $\varphi = 35^\circ, 264$ ,  $\alpha = 4^\circ, 061$  mediante una tabella di valori a 4 decimali di  $F$  di cui riportiamo qui sotto la parte che interessa (con indicazione delle differenze nei due sensi):

$\varphi$	$\alpha = 0^\circ$	Diff.	$\alpha = 5^\circ$	Diff.	$\alpha = 10^\circ$
34°	0.5934	3	0.5937	7	0.5944
	175		174		175
35°	0.6109	2	0.6111	8	0.6119
	174		175		176
36°	0.6283	3	0.6286	9	0.6295
	175		175		175
37°	0.6458	3	0.6461	9	0.6470

Si ha :

$$F = 0.6111 + \left( 0.264 \cdot 175 - \frac{0,939}{5} \cdot \frac{2+8}{2} \right) \cdot 10^{-4} = 0,6156.$$

L'interpolazione diviene scomoda soltanto se è da calcolare  $F$  per valori di  $\varphi$  ed  $\alpha$  *entrambi* prossimi a  $90^\circ$  perchè, come abbiamo visto già nel § 4 del Cap. II, è

$$\lim_{k \rightarrow 1} F(\pi/2, k) = \lim_{k \rightarrow 1} K = \infty.$$

Questa difficoltà si gira facilmente ricorrendo al teorema d'addizione della funzione  $F$ , se si ha a disposizione una tabellina fornente

con sufficiente precisione i valori di  $K$  corrispondenti a valori di  $\alpha$  prossimi a  $90^\circ$ , com'è per esempio quella fornita da JAHNKE-EMDE a p. 150, in cui i valori (con 4 decimali) di  $K$  son dati da  $\alpha = 80^\circ$  fino ad  $\alpha = 89^\circ$  di 12' in 12' e da  $89^\circ$  a  $89^\circ, 54'$  di 6' in 6'.

All'uopo si consideri che l'accennato teorema d'addizione (Cap. III, § 3), ci dice che se  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$  sono tre qualsiasi angoli tali da aversi

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_3} = \cos \varphi_3,$$

sarà di conseguenza

$$F(\varphi_1) + F(\varphi_2) + F(\varphi_3) = 2nK$$

con  $n$  intero; chè, supposto il primo membro reale, il periodo immaginario  $2iK'$  di  $F$  non entra manifestamente in considerazione. Posto  $\varphi_3 = \pi/2$ , il che implica  $F(\varphi_3) = K$ , ne segue che se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono due angoli tali da aversi

$$(2) \quad \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - k' \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = 0,$$

condizione che (supposto  $0 < \varphi_1 < \pi/2$ ) può soddisfarsi col porre

$$(2') \quad \varphi_2 = \arcsin \frac{1}{k' \operatorname{tg} \varphi_1}, \\ (0, \pi/2)$$

sarà di conseguenza

$$F(\varphi_2) = (2n - 1)K - F(\varphi_1).$$

Ma, essendo  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  entrambi compresi fra 0 e  $\pi/2$ ,  $F(\varphi_1)$  ed  $F(\varphi_2)$  sono entrambe comprese fra 0 e  $K$  epperò dovrà essere necessariamente  $n = 1$ ; dunque si ha in definitiva la formula

$$(3) \quad F(\varphi_2, k) = K(k) - F(\varphi_1, k)$$

che, unitamente con la (2'), elimina la suaccennata difficoltà d'interpolazione.

Per esempio, sia da calcolare  $F(\varphi, k)$  per

$$\varphi = 87^\circ, 659, \quad \alpha = \arcsin k = 85^\circ, 939.$$

Essendo

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \cos 85^\circ, 939 = \sin 4^\circ, 061,$$

posto  $\varphi = \varphi_1$ , la (2') fornisce

$$\varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}_{(0, \pi/2)} \frac{1}{\sin 4^\circ,061 \cdot \operatorname{tg} 87^\circ,659} = 30^\circ,$$

mentre la suaccennata tabella di pag. 150 di JAHNKE-EMDE, con una facile interpolazione, fornisce

$$K(\sin 85^\circ,939) = 4,0377;$$

avremo dunque:

$$F(87^\circ,659; \sin 85^\circ,939) = 4,0377 - F(30^\circ; \sin 85^\circ,939) = 3,4886.$$

Le tavole di LEGENDRE e, più propriamente, la tavola dei valori di  $F(\varphi, k)$  permettono fra l'altro di determinare immediatamente i valori di  $\operatorname{sn} v$ ,  $\operatorname{cn} v$  e  $\operatorname{dn} v$  corrispondenti ad un dato  $v$  e un dato  $k$ . Invero, supposto che sia  $0 < v < K$ , caso a cui ci si può sempre (molto facilmente) ridurre, si cercherà nelle tabelle qual'è quell'angolo  $\varphi$  che, in corrispondenza al dato valore di  $k$ , conduce ad un valore di  $F$  tale da aversi  $F(\varphi, k) = v$ ; trovato questo  $\varphi$  si avrà senz'altro:

$$\operatorname{sn} v = \sin \varphi, \quad \operatorname{cn} v = \cos \varphi, \quad \operatorname{dn} v = +\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

E se invece è dato, per esempio,  $\operatorname{sn} v$  e si cerca  $v$ , il calcolo è ancora più semplice perchè si evita l'entrata « all'incontrario » nella tabella della funzione  $F$ . Invero, supposto per semplicità che sia  $\operatorname{sn} v > 0$  e posto

$$\operatorname{arc\,sin}_{(0, \pi/2)}(\operatorname{sn} v) = \varphi,$$

si ha senz'altro

$$v = F(\varphi, k).$$

## § 2. Rettificazione dell'ellisse e dell'iperbole.

Passando ora, soprattutto allo scopo di mostrare *in atto* le formule ed i metodi studiati nei Capitoli precedenti, ad indicare qualche esempio concreto di applicazioni delle funzioni ellittiche, occupiamoci anzitutto del classico problema della *rettificazione dell'ellisse*, cioè del problema della valutazione della lunghezza  $s$  di un dato arco di ellisse, da cui le funzioni che ci occupano traggono il loro stesso nome.

Sia l'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ed osserviamo che, posto

$$x = a \sin \varphi,$$

la curva può essere rappresentata parametricamente mediante le semplicissime equazioni:

$$(4) \quad x = a \sin \varphi, \quad y = b \cos \varphi.$$

Ne segue che

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

epperò, posto

$$(5) \quad \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = k,$$

detta cioè  $k$  l'*eccentricità* dell'ellisse, la lunghezza  $s$  dell'arco di curva compresa fra il punto  $\varphi = 0$ , ch'è uno degli estremi del diametro minore, ed un generico punto di parametro  $\varphi$ , sarà data dalla formula

$$s = a \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

cioè si avrà:

$$(6) \quad s = aE(\varphi, k).$$

Questo semplicissimo ma importante risultato può anche interpretarsi dicendo che la funzione  $E(\varphi, k)$  di Legendre rappresenta gli archi (contati a partire da uno degli estremi del diametro minore) di una ellisse di eccentricità  $k$  e semiasse maggiore uguale ad 1. In particolare l'integrale completo  $E$  fornisce la lunghezza di un quarto di detta ellisse, mentre la lunghezza  $l$  di un'intera ellisse di semiasse maggiore  $a$  ed eccentricità  $k$ , è data dalla formula

$$(6') \quad l = 4aE(k).$$

Meno semplice ma più istruttivo <sup>(1)</sup> è invece il problema della rettificazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che, introducendo le funzioni iperboliche **Sin** e **Cos**, potremo rappresentare con le equazioni parametriche analoghe alle (4):

$$(7) \quad x = a \text{Cos } \psi, \quad y = b \text{Sin } \psi,$$

donde segue immediatamente:

$$ds = \sqrt{a^2 \text{Sin}^2 \psi + b^2 \text{Cos}^2 \psi} d\psi = \sqrt{b^2 + (a^2 + b^2) \text{Sin}^2 \psi} d\psi.$$

L'espressione ottenuta mostra che, se non ci si preoccupa di rimanere nel campo reale, anche gli archi d'iperbole possono essere rappresentati con una formula analoga alla (6). Invero, essendo manifestamente (cfr. il § 4 del Cap. IV di F. A.):

$$\sin i\psi = i \text{Sin } \psi,$$

può porsi ulteriormente

$$ds = \frac{b}{i} \sqrt{1 - \frac{a^2 + b^2}{b^2} \sin^2(i\psi)} d(i\psi)$$

donde, integrando fra 0 e  $\psi$ , segue senz'altro

$$(8) \quad s = \frac{b}{i} E\left(i\psi, \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}\right).$$

Del resto, l'eliminazione dell'immaginario dalla (8) è ben facile avvalendosi delle formule di trasformazione di prim'ordine delle funzioni  $F$  ed  $E$  indicate nel § 2 del Capitolo precedente. Propriamente, servendosi delle formule (D) del quadro alla fine di detto paragrafo, si ha subito che

$$E\left(i\psi, \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}\right) = \frac{i}{k'} [E(\varphi, k) - k'^2 F(\varphi, k) - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \text{tg } \varphi],$$

<sup>(1)</sup> Più istruttivo perchè mostrerà come, nella risoluzione di problemi mediante funzioni ellittiche, possa talvolta giungersi per vie diverse a formule che, pur essendo equivalenti, a prima vista sembrano discordare fra loro.

avendo posto

$$(9) \quad k' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad k = \sqrt{1 - k'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e detto  $\varphi$  un angolo tale da aversi:

$$\sin i\psi = -ik' \text{tg } \varphi$$

cioè

$$i \text{Sin } \psi = -ik' \text{tg } \varphi$$

donde segue

$$(10) \quad \text{tg } \varphi = -\frac{1}{k'} \text{Sin } \psi = -\frac{y}{k'b}.$$

Perveniamo così alla formula:

$$s = \frac{b}{k'} [E(\varphi, k) - k'^2 F(\varphi, k) - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \text{tg } \varphi]$$

cioè:

$$(11) \quad s = \sqrt{a^2 + b^2} [E(\varphi, k) - (1 - k^2) F(\varphi, k) - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \text{tg } \varphi]$$

che, non contenendo più traccia d'immaginario e dato inoltre che le funzioni  $E$  ed  $F$  si riferiscono ad un valore reale e compreso fra 0 ed 1 del modulo  $k$ , si presta senz'altro al calcolo numerico mediante le tavole delle funzioni di LEGENDRE.

Risultati analoghi possono anche ottenersi per altra via, e cioè applicando all'integrale che fornisce  $s$ , che possiamo scrivere sotto la forma

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \int_0^y \sqrt{y^2 + \frac{b^4}{a^2 + b^2}} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \int_0^y \frac{y^2 + b^4/(a^2 + b^2)}{\sqrt{(y^2 + b^2)[y^2 + b^4/(a^2 + b^2)]}} dy,$$

il 2° metodo di riduzione a forma canonica indicato nel § 3 del Cap. II. Precisamente, osservato che attualmente le 4 radici della biquadratica fondamentale sono:

$$\pm bi, \quad \pm \frac{b^2 i}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

ep però ci si trova nel caso  $V$  (2° sottocaso) del quadro a pp. 76-77, con

$$b_1 = b_2 = 0, \quad c_1 = b, \quad c_2 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

dovremo praticare la sostituzione

$$y = -\frac{b}{\operatorname{tg} \varphi^*} \quad (1)$$

che ci fornirà senz'altro:

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \frac{1}{c_1} \int_{-\pi/2}^{\varphi^*} \frac{b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi^* + b^4 / (a^2 + b^2)}{\sqrt{1 - (1 - c_2^2 / c_1^2) \sin^2 \varphi^*}} d\varphi^*$$

cioè

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \int_{-\pi/2}^{\varphi^*} \frac{\operatorname{cotg}^2 \varphi^* + 1 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*}} d\varphi^* = \sqrt{a^2 + b^2} \int_{-\pi/2}^{\varphi^*} \frac{1 \sin^2 \varphi^* - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*}} d\varphi^*,$$

avendo tenuto conto che

$$1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} = k^2.$$

Non resta ora che ricordare la (34'') del Cap. II, da cui si trae che:

$$\int_{-\pi/2}^{\varphi^*} \frac{d\varphi^*}{\sin^2 \varphi^* \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*}} = F(\varphi^*) - E(\varphi^*) - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*} \operatorname{cotg} \varphi^* + \mathbf{K} - \mathbf{E},$$

per concludere che è

$$(12) \quad s = \sqrt{a^2 + b^2} \{ (1 - k^2) [F(\varphi^*, k) + \mathbf{K}] - [E(\varphi^*, k) + \mathbf{E}] - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*} \operatorname{cotg} \varphi^* \}$$

con

$$(12') \quad \operatorname{tg}^* = -\frac{b}{y}.$$

Le due formule (11) e (12), apparentemente diverse, sono invece perfettamente equivalenti.

(1) Scriviamo  $\varphi^*$  invece di  $\varphi$  per evitare confusioni con la  $\varphi$  di prima.

Invero, guidati dalla osservazione che alla  $F(\varphi, k)$  della (11) fa riscontro nella (12) la quantità  $-F(\varphi^*, k) - \mathbf{K}$ , consideriamo i due argomenti  $v_1$  e  $v_2 = -v_1 - \mathbf{K}$  e cerchiamo di determinare la relazione intercedente fra le relative amplitudini  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , nonché quella intercedente fra le funzioni  $E(\varphi_1)$  ed  $E(\varphi_2)$  a queste corrispondenti.

Considerato che, se si pone  $v_3 = \mathbf{K}$  (cui si può far corrispondere l'amplitudine  $\varphi_3 = \pi/2$ ), si ha

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0,$$

le relazioni cercate ci saranno immediatamente fornite dai teoremi d'addizione degli integrali ellittici di cui al § 3 del Cap. III. Precisamente dalle (41) e (42') di detto § avremo senz'altro le equazioni:

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sqrt{1 - k^2} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = 0$$

$$E(\varphi_1) + E(\varphi_2) + \mathbf{E} = -k^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

di cui la prima, che non è altro se non la (2) del § precedente, può scriversi

$$k' \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = 1;$$

ma, d'altra parte, dalla (10) e dalla (12') si trae pure che

$$k' \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi^* = 1;$$

dunque possiamo identificare  $\varphi$  e  $\varphi^*$  con  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  rispettivamente, e scrivere le formule

$$F(\varphi, k) = -F(\varphi^*, k) - \mathbf{K}$$

$$E(\varphi, k) = -E(\varphi^*, k) - \mathbf{E} - k^2 \sin \varphi \sin \varphi^* = -E(\varphi^*, k) - \mathbf{E} + \frac{k^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*}}.$$

Pertanto dalla (11) potrà trarsi

$$\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} = (1 - k^2) [F(\varphi^*) + \mathbf{K}] - [E(\varphi^*) + \mathbf{E}] + \frac{k^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*}} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi = (1 - k^2) [F(\varphi^*) + \mathbf{K}] - [E(\varphi^*) + \mathbf{E}] + \frac{k^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*}} - \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*} \operatorname{tg} \varphi^*}$$

cioè

$$\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} = (1 - k^2)[F(\varphi^*) + K] - [E(\varphi^*) + E] - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi^*} \cotg \varphi^*$$

che non è altro se non la (12).

Finalmente, facciamo un'applicazione numerica calcolando, a mezzo della (11) e della tabella delle funzioni di LEGENDRE di JAHNKE-EMDE [20] l'arco  $s_1$  di un'iperbole equilatera di semiassi  $a=b=1$  compreso fra un vertice ( $y=0$ ) e un punto alla distanza  $y=1$  dall'asse reale (vedi fig. 36). Essendo in questo caso:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{2}, \\ k = k' &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{arc sin } 45^\circ, \\ \text{tg } \varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

e, di conseguenza,

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{2}{3}, \\ \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \varphi &= -54^\circ.44'.7'', \\ F(\varphi, k) &= -1,0281, \\ E(\varphi, k) &= -0,8911, \end{aligned}$$

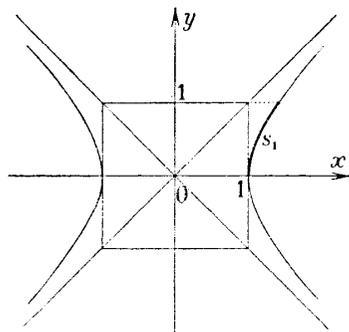


Fig. 36.

dalla (11) avremo:

$$s_1 = \sqrt{2} \left( -0,8911 + \frac{1}{2} 1,0281 \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} = 1,0997.$$

### § 3. - Geodetiche dell'ellissoide di rotazione.

Un'altro classico problema in cui s'incontrano le funzioni ellittiche è quello della determinazione delle *geodetiche* di un'ellissoide di rotazione, cioè delle linee di minor percorso fra due punti di questa superficie.

Questo problema ha un'importanza pratica di prim'ordine, oggi assai accentuatasi coi voli a grandi distanze e simili, chè, potendosi la nostra terra riguardare, con grandissima approssimazione, ap-

punto quale un ellissoide di rotazione; non appena si esca dal campo in cui essa può riguardarsi come piana (« *campo topografico* »: distanze dell'ordine di grandezza di una decina di chilometri) o come sferica (« *campo geodetico* »: distanze intorno a 150 km), sono appunto le geodetiche in discorso che prendono il posto delle rette sul piano e dei cerchi massimi sulla sfera.

Supposto che l'ellissoide di rotazione che si considera sia (come accade nel caso della terra) un ellissoide *schiacciato*, cioè provenga dalla rotazione di un'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$  intorno all'asse minore  $2b$ , e che l'ellisse meridiana sia parametricamente rappresentata (nel piano  $x, z$ ) dalle equazioni:

$$(13) \quad x = a \cos \omega, \quad z = b \sin \omega;$$

osserviamo anzitutto che il passaggio dal parametro  $\omega$  di un punto  $P$  della superficie alla *latitudine*  $\lambda$  del medesimo (angolo della normale in  $P$  all'ellissoide col piano equatoriale ( $x, y$ )) è un problemino elementarissimo di Geometria Analitica: ricerca dei coseni della normale alla curva rappresentata parametricamente dalle equazioni (13). Si trovano così le formule:

$$(14) \quad \text{tg } \lambda = \frac{a}{b} \text{tg } \omega, \quad \text{tg } (\lambda - \omega) = \frac{c \sin \omega \cos \omega}{1 - c \cos^2 \omega}$$

dove

$$(15) \quad c = \frac{a - b}{a}$$

è il cosiddetto « *schiacciamento* ». (Nel caso della Terra:  $1/c = 299,15$  secondo BESSEL (1841);  $= 298,3$  secondo HELMERT (1907)).

Un'altra importante relazione ci è data dal teorema di CLAIRAUT sulle *superficie di rotazione*, in virtù del quale *lungo ogni geodetica di una superficie siffatta, il prodotto del raggio del parallelo per il seno dell'azimut, cioè dell'angolo che localmente la geodetica forma col meridiano, resta costante*. Propriamente, detto  $\psi$  l'accennato azimut, si ha l'equazione

$$(16) \quad \cos \omega \sin \psi = \cos C,$$

dove  $C$  denota una costante propria alla geodetica che si considera.

Dalla (16) può agevolmente dedursi un'equazione differenziale

per le geodetiche che, integrata, conduce <sup>(1)</sup> alle seguenti due formule particolarmente importanti:

$$(17) \quad \begin{cases} s = \frac{ae}{k} \sin C \cdot E(\varphi, k) \\ L = \frac{k}{\varepsilon \sin C \cos C} \Pi(\varphi, \operatorname{tg}^2 C, k) - k\varepsilon \cot C \cdot F(\varphi, k) \end{cases}$$

con

$$(18) \quad k = \sin \theta, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{ae}{b} \sin C, \quad \cos \varphi = \frac{\sin \omega}{\sin C},$$

dove  $s$  denota la lunghezza dell'arco di geodetica di costante  $C$  compreso fra il punto  $P_0$  cui compete  $\psi = \pi/2$  (e, di conseguenza,  $\omega = C$ ,  $\varphi = 0$ ) e un altro qualsiasi punto  $P$  della curva,  $L$  è la differenza di longitudine fra  $P$  e  $P_0$ , ed  $\varepsilon$  è l'eccentricità  $\sqrt{a^2 - b^2}/a$  dell'ellisse meridiana che, espressa mediante lo schiacciamento  $c$ , risulta uguale a  $\sqrt{c(2-c)}$ .

Come si vede, uno dei problemi fondamentali della Geodesia, e cioè il calcolo delle coordinate geografiche di un punto  $P_2$  collegato ad un dato punto  $P_1$  mediante un arco di geodetica di data lunghezza  $s_2 - s_1$  e dato azimut iniziale  $\psi_1$  <sup>(2)</sup>, si riduce mediante formule semplici al calcolo di certi integrali ellittici di 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> specie.

Per mostrare una concreta applicazione numerica delle precedenti formule supponiamo, con HOÜEL <sup>(3)</sup>, che al punto  $P_1$  corrisponda il valore  $\omega_1 = 45^\circ$  del parametro  $\omega$  (il che implica  $\lambda_1 = 45^\circ 5' 45''$ , che è la latitudine dei quartieri nord della città di Torino) e cerchiamo di determinare dove si arriva spostandosi di 5000 Km. verso  $NE$ , ossia calcoliamoci la latitudine  $\lambda_2$  di  $P_2$  e la differenza di longitudine  $L_2 - L_1$  fra  $P_2$  e  $P_1$  nell'ipotesi che sia

$$s_2 - s_1 = 5000 \text{ Km.}, \quad \psi_1 = 45^\circ,$$

<sup>(1)</sup> Cfr. LEGENDRE [10], T. I, pag. 361.

<sup>(2)</sup> Qui e nel seguito affettiamo con l'indice 1 i dati relativi all'estremo  $P_1$  dell'arco di geodetica, e con l'indici 2 quelli relativi all'altro estremo  $P_2$ .

<sup>(3)</sup> [19] pp. LXIII-LXV. Per rendere possibile un confronto abbiamo assunto gli stessi dati di HOÜEL (che, per di più, conducono casualmente ad un valore per noi interessante della latitudine  $\lambda_1$  di  $P_1$ ) ma abbiamo rifatti tutti i calcoli *ex-novo*.

prendendo come base l'ellissoide di BESSEL, per cui si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} a^{km} &= 3,80464, & \operatorname{Log} \frac{a}{b} &= 0,00145, \\ \operatorname{Log} c &= \bar{3},52411, & \operatorname{Log} \varepsilon &= \bar{2},91221 \quad (1). \end{aligned}$$

Considerato che, com'è agevole persuadersi con un calcolo, anche grossolano, fatto supponendo la Terra sferica, in questo caso il punto  $P_0$  di poc' anzi in cui è  $\psi = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$  cade fra  $P_1$  e  $P_2$ , le formule da adoperarsi non saranno proprio le (17), bensì le altre:

$$(17') \quad \begin{cases} s_2 - s_1 = \frac{ae}{k} \sin C [E(\varphi_1, k) + E(\varphi_2, k)] \\ L_2 - L_1 = \frac{k}{\varepsilon \sin C \cos C} [\Pi(\varphi_1, \operatorname{tg}^2 C, k) + \Pi(\varphi_2, \operatorname{tg}^2 C, k)] - \\ \quad - k\varepsilon \cot C [F(\varphi_1, k) + F(\varphi_2, k)]. \end{cases}$$

Il calcolo si conduce come segue, servendosi, quando non è detto altro, delle tavole delle funzioni  $F(\varphi)$  ed  $E(\varphi)$  di JAHNKE-EMDE [20] (ogni operazione con dette tavole è contrassegnata con un *asterisco* \*)

$$[\text{per la (16)}] \quad \cos C = \cos \omega_1 \sin \psi_1 = \cos 45^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}; \quad C = 60,$$

$$[\text{per l'ultima delle (18)}] \quad \cos \varphi_1 = \frac{\sin \omega_1}{\sin C} = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \varphi_1 = 35^\circ,264$$

Log $a/b$	= 0,00145	Log $(s_2 - s_1)^{km}$	= 3,69897
Log $\varepsilon$	= $\bar{2},91221$	Log $1/a\varepsilon$	= $\bar{3},28315$
Log $\sin C$	= $\bar{1},93753$	Log $k$	= $\bar{2},85010$
Log $\operatorname{tg} \theta$	= $\bar{2},85119$	Log $1/\sin C$	= $\bar{0},06247$
$\theta = 4^\circ,061$		Log $(E_1 + E_2)$	= $\bar{1},89469$

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= 0,7847 \\ E_1 &= 0,6153^* \\ E_2 &= 0,1694 \\ \varphi_2 &= 9^\circ,707^*. \end{aligned}$$

*Calcolo degli integrali di 3<sup>a</sup> specie  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  mediante le*

<sup>(4)</sup> Qui e nel seguito indichiamo col simbolo «Log» («L» maiuscola) i logaritmi in base 10, mentre «log» denota quelli in base  $e$ .

formule del quadro a pag. 156 (caso 4°) e le (97)-(99) del Cap. III:

$$\frac{\operatorname{sn}^2(\gamma, k')}{\operatorname{cn}^2(\gamma, k')} = \frac{n}{k^2} = \frac{\operatorname{tg}^2 C}{k^2}, \quad k' = \sin(90 - \theta) = \sin 85^\circ,939$$

$$\operatorname{Log} \operatorname{tg} C = 0,23856$$

$$\operatorname{Log} 1/k = 1,14990$$

$$\operatorname{Log} \operatorname{tg} \operatorname{am} \gamma = 1,38846$$

$$\operatorname{am} \gamma = 87^\circ,659.$$

Il calcolo di  $\gamma = F(87^\circ,659; \sin 85^\circ,939)$  che sarebbe malcomodo per via diretta, è stato già effettuato nel § 1 con l'ausilio del teorema d'addizione delle funzioni  $F$ . Possiamo dunque senz'altro scrivere che

$$\gamma = 3,4886$$

e conseguentemente, essendo

$$\mathbf{K}(k) = 1,5728, \quad (*)$$

$$F_1 = F(\varphi_1, k) = 0,6156 \quad (1), \quad F_2 = F(\varphi_2, k) = 0,1694,$$

viene

$$\beta = \frac{\gamma}{2\mathbf{K}} = 1,1091, \quad v_1 = \frac{F_1}{2\mathbf{K}} = 0,1957, \quad v_2 = \frac{F_2}{2\mathbf{K}} = 0,0539.$$

D'altro lato la tabella alle pp. 122-124 di JAHNKE-EMDE [20] fornisce senz'altro, in corrispondenza a  $\theta = \operatorname{arc} \sin k = 4^\circ,061$ :

$$\operatorname{Log} q = \bar{4},4972$$

valore cui, detto  $M$  il modulo di passaggio da logaritmi naturali a decimali ( $M = 0,43429$ ), si associa subito:

$$\operatorname{log} q^{-1} = \frac{3,5028}{M} = 8,0597,$$

mentre d'altro lato è  $2\pi\beta = 6,9686$ .

Per la prima delle (97) del Cap. III avremo dunque:

$$i \frac{\vartheta_1'(i\beta)}{\vartheta_1(i\beta)} = \pi \operatorname{Cos} 3,4843 - 2\pi \cdot 10^{\bar{4},4972} \frac{\operatorname{Sin} 6,9686}{\operatorname{Sin} 8,0597} + \dots$$

(1) Cfr. § 1.

ma, considerato il valore relativamente grande degli argomenti dei due seni iperbolici, si ha con sufficiente approssimazione:

$$\operatorname{Log} \frac{\operatorname{Sin} 6,9686}{\operatorname{Sin} 8,0597} = \operatorname{Log} e^{6,9686 - 8,0597} = -1,0911M = \bar{1},5262,$$

dunque, trascurando altresì i termini non scritti, avremo:

$$i \frac{\vartheta_1'(i\beta)}{\vartheta_1(i\beta)} = \pi \operatorname{Cos} 3,4843 - 2\pi \cdot 10^{\bar{4},4972} \cdot 10^{\bar{1},5262}$$

donde, con l'ausilio delle tavole delle funzioni iperboliche di HOÜEL [19] pp. 36-55, segue subito

$$i \frac{\vartheta_1'(i\beta)}{\vartheta_1(i\beta)} = 3,1468.$$

Proseguendo il calcolo degli integrali  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  in base alle (98) e (99) del Cap. III, con la semplificazione (che nel nostro ordine di approssimazione è lecita):

$$\operatorname{Log} \operatorname{Sin} 2\pi\beta = \operatorname{Log} \operatorname{Cos} 2\pi\beta = 2\pi\beta M - \operatorname{Log} 2$$

donde segue

$$\operatorname{Log} (2q \operatorname{Sin} 2\pi\beta) = \operatorname{Log} (2q \operatorname{Cos} 2\pi\beta) = \bar{1},5236,$$

si ha ulteriormente:

$$\operatorname{Log} \cos 2\pi v_1 = \operatorname{Log} \cos 70^\circ,455 = \bar{1},5245$$

$$\bar{1},5236$$

$$\operatorname{Log} (2q \cos 2\pi v_1 \cdot \operatorname{Cos} 2\pi\beta) = \bar{1},0481$$

$$\operatorname{Log} \sin 2\pi v_1 = \bar{1},9746$$

$$\bar{1},5236$$

$$\operatorname{Log} (2q \sin 2\pi v_1 \cdot \operatorname{Sin} 2\pi\beta) = \bar{1},4982$$

$$\operatorname{Log} \cos 2\pi v_2 = \operatorname{Log} \cos 19^\circ,387 = \bar{1},9746$$

$$\bar{1},5236$$

$$\operatorname{Log} (2q \cos 2\pi v_2 \cdot \operatorname{Cos} 2\pi\beta) = \bar{1},4982$$

$$\operatorname{Log} \sin 2\pi v_2 = \bar{1},5211$$

$$\bar{1},5236$$

$$\operatorname{Log} (2q \sin 2\pi v_2 \cdot \operatorname{Sin} 2\pi\beta) = \bar{1},0447.$$

Sarà dunque approssimativamente:

$$A(v_1, \beta) = 1 - 10^{\bar{1},0484} = 0,8883, \quad A(v_2, \beta) = 1 - 10^{\bar{1},4982} = 0,6851$$

$$\text{Log } B(v_1, \beta) = \bar{1},4982, \quad \text{Log } B(v_2, \beta) = \bar{1},0447$$

donde segue:

$$\frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_4(v_1 + i\beta)}{\vartheta_4(v_1 - i\beta)} = \text{arc tg } \frac{B(v_1, \beta)}{A(v_1, \beta)} = 19^{\circ},50 = 0,3403$$

$$\frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_4(v_2 + i\beta)}{\vartheta_4(v_2 - i\beta)} = \text{arc tg } \frac{B(v_2, \beta)}{A(v_2, \beta)} = 9^{\circ},19 = 0,1604;$$

ma, d'altra parte si trova che

$$m = \frac{\text{dn}(\gamma, k')}{\text{sn}(\gamma, k') \text{cn}(\gamma, k')} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 85^{\circ},939 \cdot \sin^2 87^{\circ},659}}{\sin 87^{\circ},659 \cdot \cos 87^{\circ},659} = 10^{0,30124};$$

dunque avremo:

$$10^{0,30124} \Pi_1 = 0,3403 + 3,1468 v_1 = 0,9562$$

$$10^{0,30124} \Pi_2 = 0,1604 + 3,1468 v_2 = 0,3299$$

donde segue infine:

$$\Pi_1 = 0,4779, \quad \Pi_2 = 0,1649.$$

L'ultima parte del calcolo si conduce come segue:

Log ( $\Pi_1 + \Pi_2$ )	= $\bar{1},80808$	Log ( $F_1 + F_2$ )	= $\bar{1},89487$
Log $k$	= $\bar{2},85010$	Log $k$	= $\bar{2},85010$
Log $2/\sin 2C$	= $0,36350$	Log $\cotg C$	= $\bar{1},76144$
Log $1/\varepsilon$	= $1,08779$	Log $\varepsilon$	= $\bar{2},91221$
	0,10947		3,41862

$$1^{\circ} \text{ termine } (L_2 - L_1) = 1,2867 \quad 2^{\circ} \text{ termine } (L_2 - L_1) = 0,0026$$

$$L_2 - L_1 = 1,2841 = 73^{\circ}.34',3$$

Inoltre, servendosi dell'ultima delle (18) e della seconda delle (14), dal trovato valore  $\varphi_2 = 9^{\circ},707$  si trae che

$$\omega_2 = 58^{\circ}.33',9, \quad \lambda_2 - \omega_2 = 0^{\circ}.5',1,$$

$$\lambda_2 = 58^{\circ}.39',0$$

Se ne conclude che se  $P_1$  cade in Torino ( $L_1 = 7^{\circ}.40',4$  Est Greenwich) le coordinate geografiche di  $P_2$  sono:

$$\lambda_2 = 58^{\circ}.39',0 \text{ Nord}, \quad L_2 = 80^{\circ}.14',7 \text{ Est Greenwich},$$

epperò questo punto cade in Siberia, a nord di Novo-Sibirsk.

HOÜEL facendo uso delle sue tabelline (condensate in una sola pagina!) delle funzioni  $F$  ed  $E$ , trovava invece

$$L_2 - L_1 = 73^{\circ}.38', \quad \lambda_2 = 58^{\circ}.40',$$

e, molto più laboriosamente, con le grandi tavole di LEGENDRE [10] a 9 decimali, i valori praticamente esatti:

$$L_2 - L_1 = 73^{\circ}.32'.14'',9, \quad \lambda_2 = 58^{\circ}.41'.39'',1.$$

Trascurando lo schiacciamento della Terra, con la risoluzione di un triangolo sferico, si sarebbe invece trovato:

$$L_2 - L_1 = 73^{\circ}.50', \quad \lambda_2 = 58^{\circ}.38'.$$

#### § 4. - Asta caricata di punta.

Consideriamo un'asta caricata di punta, cioè un solido elastico di forma cilindrica o prismatica sollecitato alle due basi da due forze uguali e contrarie, parallele alle generatrici, quale per esempio è una colonna o un pilastro sulla cui base superiore grava, in tutto o in parte, il peso di una costruzione, mentre contro la base inferiore esercita la reazione del suolo.

Se il carico  $P$  non è eccessivo e la lunghezza  $l$  dell'asta non è troppo grande in confronto alle sue dimensioni trasversali, l'asse dell'asta resta rettilineo e la deformazione si riduce sostanzialmente ad una contrazione proporzionale a  $P$ , com'è ben noto dai primi elementi di teoria dell'elasticità. Se però  $P$ , crescendo, raggiunge e supera un certo carico critico  $P^*$ , si dimostra che l'equilibrio dell'asta nella posizione contratta non è più stabile, epperò questa, con pratica certezza, s'inarca da un lato dando luogo nel mezzo ad una saetta di flessione rapidissimamente crescente con  $P$ , ciò che, nel caso di costruzioni murarie e simili, vuol dire: crollo disastroso.

Da quanto sopra si deduce la grande importanza pratica della determinazione del carico critico  $P^*$  <sup>(1)</sup>, (a cui, in generale, bisogna ben guardarsi dall'avvicinarsi!) che, nel caso che c'interessa, è stato determinato fin dal 1744 da EULER, stabilendo la celebre formula, che ritroveremo più innanzi:

$$(19) \quad P^* = \pi^2 \frac{EI}{l^2},$$

dove  $l$  è la lunghezza dell'asta,  $E$  il modulo di YOUNG del materiale (supposto omogeneo ed isotropo) che la compone, ed  $I$  il momento d'inerzia della sezione trasversa rispetto all'asse principale, baricentrale d'inerzia per cui tale momento è minimo. Per esempio nel caso di un'astuccina rotonda d'acciaio ( $E = 2,2 \cdot 10^6$  kg/cm.<sup>2</sup> circa) lunga 50 cm. e di diametro 0,4 cm.,  $P^*$  risulta uguale a circa 11 Kg-peso.

In casi del genere di quest'ultimo, cioè nel caso d'aste metalliche e simili, l'oltrepassamento del carico critico  $P^*$  non vuol dire necessariamente: *disastro*, perchè l'asta può inflettersi, anche notevolmente, senza rompersi.

Sorge pertanto il problema, la cui trattazione richiede la considerazione

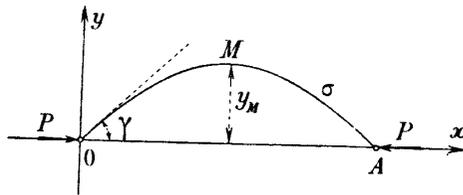


Fig. 37.

di funzioni ellittiche, di studiare il comportamento dell'asta, e cioè principalmente la forma assunta dal suo asse, quando il carico  $P$  assume valori maggiori di  $P^*$ .

All'uopo supponiamo anzitutto che l'asse  $OA$  in parola, originariamente rettilineo e disposto lungo l'asse  $x$ , abbia assunto una forma come quella indicata nella fig. 37, cioè la forma di una curva piana  $\sigma$  (e precisamente: contenuta nel piano  $x, y$  della figura) la quale sia incontrata in uno ed un solo punto dalle parallele all'asse  $y$ , e presenti fra  $O$  ed  $A$  uno ed un solo massimo  $M$ ,

<sup>(1)</sup> Meglio sarebbe dire: *primo* carico critico perchè ce ne sono anche dei successivi la cui importanza pratica è però, di solito, trascurabile.

e *nessun minimo* <sup>(1)</sup> Successivamente osserviamo che il momento risultante delle reazioni elastiche agenti in un generico punto  $(x, y)$  della curva dev'essere, pel principio di solidificazione, uguale a  $P \cdot y$ , e, d'altro lato, uguale ad  $EI/\rho$ , dove  $\rho$  denota il raggio di curvatura di  $\sigma$  nel punto considerato <sup>(2)</sup>. Si avrà pertanto, avuto riguardo ai segni, l'equazione differenziale:

$$(20) \quad \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{P}{EI}y = 0,$$

dove il radicale va preso col segno positivo.

Dalla (20), integrando rispetto a  $y$ , segue

$$(21) \quad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{1}{2} \lambda y^2 = C,$$

avendo posto

$$(22) \quad \lambda = \frac{P}{EI}$$

e denotata con  $C$  una costante arbitraria la cui interpretazione geometrica si ottiene subito ponendosi nel punto  $O$  di  $\sigma$ . Invero, detto  $\gamma$  l'angolo che la tangente a  $\sigma$  in questo punto forma con l'asse  $x$ , si ha manifestamente

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1+y_0'^2}} = C,$$

ciò che, fra l'altro, mostra come, nelle condizioni in cui ci siamo posti, deve necessariamente essere

$$(23) \quad 0 \leq C \leq 1.$$

Inoltre, tenendo conto che nel punto  $M$  è manifestamente  $y' = 0$ ,

<sup>(1)</sup> Quest'ipotesi, necessaria per la validità delle formule che seguono, richiederebbe una discussione tutt'altro che semplice perchè sono teoricamente possibili anche posizioni d'equilibrio in cui la curva  $\sigma$  presenta fra  $O$  ed  $A$  due, tre o più *onde* successive, invece di una sola. Pare però che, d'accordo con l'intuizione meccanica, queste posizioni d'equilibrio con onde multiple siano tutte instabili, qualunque sia il carico  $P$ . I vari ricercatori che si sono finora occupati dell'argomento sono però giunti a risultati parzialmente contraddittori. Vedi all'uopo in *Handbuch der Physik* (GEIGER-SCHEEL), 6. Band (Berlin, Spinger, 1928), pp. 277-282 e lavori ivi citati.

<sup>(2)</sup> Cfr. per esempio G. COLONNETTI: *La statica delle costruzioni*. (Torino, Utet, 1928), p. 225.

si vede immediatamente che l'ordinata massima  $y_M$  della curva  $\sigma$  in  $M$  (« saetta di flessione ») è legata a  $C$  dalla relazione

$$(24) \quad y_M = \sqrt{\frac{2(1-C)}{\lambda}}.$$

Risolviendo la (21) rispetto ad  $y'$  si ha

$$y'^2 = \frac{1 - \left(C + \frac{1}{2}\lambda y^2\right)^2}{\left(C + \frac{1}{2}\lambda y^2\right)^2}$$

donde segue

$$\frac{dx}{dy} = \frac{C + \frac{1}{2}\lambda y^2}{\sqrt{1 - \left(C + \frac{1}{2}\lambda y^2\right)^2}};$$

pertanto la determinazione di  $x$  in funzione  $y$ , cioè la determinazione della forma della curva  $\sigma$ , dipende dal calcolo dell'integrale ellittico:

$$x = \int \frac{C + \frac{1}{2}\lambda y^2}{\sqrt{1 - \left(C + \frac{1}{2}\lambda y^2\right)^2}} dy.$$

Quest'integrale si riduce a forma canonica coi metodi indicati nel Cap. II; precisamente, osservato che le quattro radici del radicando sono

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{2(1-C)}{\lambda}}, & a_2 &= -\sqrt{\frac{2(1-C)}{\lambda}} = -a_1, \\ a_3 &= i\sqrt{\frac{2(1+C)}{\lambda}}, & a_4 &= -i\sqrt{\frac{2(1+C)}{\lambda}}, \end{aligned}$$

applicando le formule del Caso III del quadro a pp. 76-77, cioè praticando la sostituzione

$$(25) \quad y = \sqrt{\frac{2(1-C)}{\lambda}} \cos \varphi$$

e ponendo

$$(26) \quad k = \sqrt{\frac{1-C}{2}},$$

avremo

$$x = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int \frac{1 - 2k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi + \text{cost.},$$

donde, osservato che a  $\varphi = \pi/2$  corrisponde  $y = 0$ , può ulteriormente trarsi che

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{1 - 2k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 2 \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right\} \end{aligned}$$

cioè che

$$x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \{ 2[\mathbf{E}(k) - E(\varphi, k)] - [\mathbf{K}(k) - F(\varphi, k)] \}.$$

Se ne conclude che la curva  $\sigma$  o, meglio, il suo arco  $OM$ , può essere rappresentato parametricamente mediante le equazioni

$$(27) \quad x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \{ 2[\mathbf{E} - E(\varphi)] - [\mathbf{K} - F(\varphi)] \}, \quad y = \frac{2k}{\sqrt{\lambda}} \cos \varphi, \\ (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$$

od anche (si confronti la (91) del Cap. III), posto

$$F(\varphi, k) = v,$$

mediante le equazioni:

$$(27') \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ (2\mathbf{E} - \mathbf{K}) \left(1 - \frac{v}{\mathbf{K}}\right) - \frac{1}{\mathbf{K}} \frac{\partial_4'(v/2\mathbf{K})}{\partial_4(v/2\mathbf{K})} \right\} \\ y = \frac{2k}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{cn} v, \quad (0 \leq v \leq \mathbf{K}) \end{cases}$$

in cui non vi è più traccia di funzioni non uniformi.

Ciò posto resta ancora da determinare  $k$  (cioè, in sostanza,  $C$ ), il che può ottenersi servendosi del fatto che l'asta in esame ha una data lunghezza  $l$ , cioè che l'arco  $OM$  di  $\sigma$  dev'essere lungo  $l/2$ . Si ha così l'equazione

$$\frac{1}{2} l = \int_0^{y_M} \frac{ds}{dy} dy = \int_0^{y_M} \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dy} dy = \int_0^{y_M} \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(C + \frac{1}{2}\lambda y^2\right)^2}}$$

che, con la sostituzione (25), diventa

$$\frac{1}{2} l = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

cioè

$$(28) \quad \mathbf{K}(k) = \frac{1}{2} l \sqrt{\lambda},$$

permettendo così, con l'ausilio delle tavole di LEGENDRE, un facile calcolo di  $k$ .

L'ultima formula ottenuta consente, fra l'altro, di ritrovare immediatamente la formula euleriana (19) relativa al primo carico critico  $P^*$ . Invero, essendo  $\mathbf{K} \geq \pi/2$ , il minimo valore  $\lambda^*$  di  $\lambda$  per cui la (28) può sussistere è

$$\lambda^* = \left(\frac{2}{l} \frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{l^2},$$

cui corrisponde appunto il valore  $P^*$  di  $P$  dato dalla (19).

Finalmente osserviamo che introducendo in luogo di  $x, y$  e  $y_M$  le coordinate ridotte:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \eta_M = \frac{y_M}{l}$$

e, in luogo di  $P$ , il carico ridotto:

$$p = \frac{P}{P^*},$$

il che implica

$$\lambda = \frac{\pi^2}{l^2} p,$$

le formule precedenti assumono *forma universale*, cioè indipendente dalle costanti elastiche e geometriche della speciale asta che si considera; propriamente si ha

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi = \frac{x}{l} &= \frac{1}{\pi \sqrt{p}} \{ 2[\mathbf{E} - E(\varphi)] - [\mathbf{K} - F(\varphi)] \} \\ \eta = \frac{y}{l} &= \frac{2k}{\pi \sqrt{p}} \cos \varphi, \quad \eta_M = \frac{2k}{\pi \sqrt{p}}, \quad \mathbf{K} = \frac{\pi}{2} \sqrt{p}, \end{aligned} \right.$$

donde segue in particolare che:

$$(30) \quad \eta_M = \frac{k}{\mathbf{K}}.$$

Nell'applicazione di queste formule *non bisogna dimenticare che esse valgono sotto la condizione (23) (1)* cioè nell'ipotesi che sia

$$0 \leq 1 - 2k^2 \leq 1$$

val'a dire

$$0 \leq k^2 \leq \frac{1}{2},$$

il che implica

$$\frac{\pi}{2} \leq \mathbf{K} \leq 1,8540747$$

donde segue

$$(31) \quad 1 \leq p \leq 1,39320.$$

Un facile calcolo con l'ausilio delle tavole di LEGENDRE conduce ai seguenti dati numerici per mezzo dei quali è stata

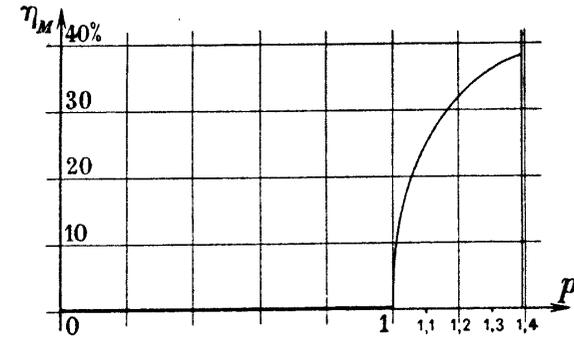


Fig. 38.

costruita la fig. 38 che, al contrario di quella riportata a pag. 280 del citato « *Handbuch der Physik* » VI, si riferisce a formule

(1) Questa condizione pare sia stata invece dimenticata da GECKELER nel precedentemente citato, pregevole Articolo dell' « *Handbuch der Physik* » in cui, fra l'altro, il grafico dei valori di  $\eta_M$  è prolungato sino a  $p=1,6$  circa, mentre deve fermarsi prima di 1,4.

rigorose:

$p$	$K$	arc sin $k$	$\eta_M$
1,05	1,6096	17°,80	0,1899
1,10	1,6476	24,77	0,2543
1,15	1,6845	29,84	0,2954
1,25	1,7562	37,36	0,3455
1,35	1,8251	42,96	0,3734

Al  $p$  massimo, cioè a  $p=1,39320$ , corrisponde  $\eta_M=0,3814$ .

La precedente figura mostra chiaramente quale profonda discontinuità fisica rappresenti il carico critico  $P^*$  nel problema della trave caricata di punta. Comunque la cosa si può rendere anche più manifesta confrontando fra loro la diminuzione  $\Delta D$  della distanza  $D$  fra i due punti  $O$  ed  $A$  dovute ad un determinato aumento  $\Delta P$  del carico  $P$ , subito prima e subito dopo del raggiungimento del carico critico  $P^*$ .

All'uopo osserviamo anzitutto che, prima del raggiungimento di  $P^*$ , cioè quando l'asta si contrae soltanto, si ha notoriamente

$$(32) \quad \frac{\Delta D}{l} = \frac{\Delta P}{ES'}$$

dove  $S$  denota l'area della sezione trasversa della sbarra. Subito dopo il raggiungimento del carico critico  $P^*$  si ha invece, tenuto conto della prima delle (27') e del fatto che, in corrispondenza all'ascissa  $x_M$  del punto di mezzo, è  $v=0$ :

$$\Delta D = l - 2x_M = l - \frac{2}{\sqrt{\lambda}} (2E - K) = l - \frac{2K}{\sqrt{\lambda}} + \frac{4}{\sqrt{\lambda}} (K - E)$$

ma, per la (28), è

$$\frac{2K}{\sqrt{\lambda}} = l$$

mentre, per la seconda delle (69) del Cap. IV, quando  $k^2$  è

piccolissimo si ha sensibilmente (a meno di termini dell'ordine di  $k^4$ ):

$$K - E = \left[ \frac{E}{2(1 - k^2)} \right]_{k^2=0} k^2 = \frac{\pi}{4} k^2;$$

dunque potremo, con sufficiente approssimazione, porre

$$\Delta D = \frac{4}{\sqrt{\lambda}} \frac{\pi}{4} k^2 = \frac{\pi k^2}{\sqrt{\lambda}}.$$

od anche

$$(33) \quad \Delta D = 4 \left( l - \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \right),$$

avendo osservato che, per  $k^2$  piccolissimo, la (28) può, nello stesso ordine d'approssimazione di più sopra, scriversi:

$$\frac{1}{2} l \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} \right)$$

donde segue

$$k^2 = 4 \left( \frac{l \sqrt{\lambda}}{\pi} - 1 \right).$$

Ciò posto osserviamo che, essendo attualmente

$$\lambda = \frac{P^* + \Delta P}{EI} = \frac{\pi^2}{l^2} \left( 1 + \frac{\Delta P}{P^*} \right),$$

a meno di termini dell'ordine del quadrato di  $\Delta P/P^*$ , si avrà

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{l}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{P^*} \right),$$

epperò la (33) potrà anche scriversi:

$$(33') \quad \frac{\Delta D}{l} = 2 \frac{\Delta P}{P^*},$$

Confrontando con la (32) si conclude che  $\Delta D/l$  può esprimersi con una formula d'identica struttura tanto prima quanto dopo il raggiungimento del carico critico  $P^*$ , purchè, nel secondo di questi due casi, il modulo di YOUNG  $E$  del materiale venga sostituito da un modulo fittizio  $E'$  definito dalla formula

$$E'S = \frac{1}{2} P^*,$$

che fornisce

$$(34) \quad E' = \frac{\pi^2 I}{2l^2 S} E.$$

In particolare, nel caso di un'asta rotonda di raggio  $r$  ( $I = \pi r^4/4, S = \pi r^2$ ) si ha

$$(34') \quad E' = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{r}{l}\right)^2 E$$

e, più in particolare ancora, nel caso dell'asta circolare cui si è accennato in principio ( $r=0,2, l=50$ ):

$$E' = 2\pi^2 10^{-6} E;$$

pertanto per quest'asta l'oltrepassamento del carico critico  $P^*$  equivale (in certo modo) ad una brusca, virtuale riduzione del modulo di YOUNG del materiale a circa *due centomillesimi* del suo valore primitivo.

§ 5. - Pendolo semplice.

Il classico problema del *pendolo semplice*, cioè del moto (senza attrito) di un punto materiale pesante su di una circonferenza posta in un piano verticale, conduce, non appena si abbandoni la consueta ipotesi delle oscillazioni *infinitamente piccole*, a funzioni ellittiche.

Detta  $l$  la lunghezza del pendolo, ossia il raggio dell'anzidetta circonferenza  $\gamma$  (di centro  $C$ ) su cui si muove il punto materiale  $P$  (la cui massa designeremo con  $m$ ), e detto  $\theta$  l'angolo variabile che la retta  $CP$  forma con la verticale  $CP_0$  per  $C$ ; l'energia cinetica  $T$  di  $P$  è manifestamente data dalla formula

$$T = \frac{1}{2} m \left[ \frac{d(l\theta)}{dt} \right]^2 = \frac{1}{2} ml^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2,$$

dove  $t$ , al solito, designa il tempo. D'altra parte, considerato che la differenza  $P_0P'$  (vedi fig. 39) fra la quota di  $P$  in una sua generica

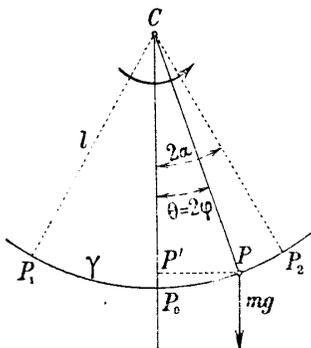


Fig. 39.

posizione e quella che gli compete nella sua posizione più bassa  $P_0$ , è data da

$$l(1 - \cos \theta);$$

l'energia potenziale di  $P$  potrà assumersi uguale a

$$\Pi = mgl(1 - \cos \theta),$$

dove  $g$  denota l'accelerazione di gravità. Pel *teorema delle forze vive* avremo dunque l'equazione:

$$T + \Pi = \frac{1}{2} ml^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta) = \text{cost.},$$

od anche, dividendo per  $ml^2$ :

$$(35) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos \theta) = 2h,$$

avendo indicata con  $h$  una costante positiva, che è manifestamente legata alla velocità

$$v_0 = l \left( \frac{d\theta}{dt} \right)_{\theta=0}$$

assunta da  $P$  in  $P_0$  dalla relazione

$$(36) \quad v_0^2 = 4l^2 h.$$

Per integrare la (35) senza fare alcun'ipotesi di infinita piccolezza delle oscillazioni, cominciamo col porre

$$(37) \quad \theta = 2\varphi,$$

con che l'equazione, divisa per 2, assume la forma

$$\left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{g}{l} \sin^2 \varphi = h;$$

e supponiamo ulteriormente che la costante  $h$  (cioè, in sostanza,  $v_0$ ) non sia troppo grande, e propriamente che essa sia tale da aversi

$$(38) \quad 0 < h \leq \frac{g}{l} \quad (1),$$

(1) Quest'ipotesi è quella che conduce al caso più interessante di un *moto oscillatorio*. Se invece fosse  $h > g/l$ , si dimostra che il pendolo assume un moto rotatorio (non uniforme) intorno a  $C$ , percorrendo, sempre nello stesso verso, l'intera circonferenza  $\gamma$ .

di modo che sia lecito porre

$$(39) \quad h = \frac{g}{l} \sin^2 \alpha,$$

ottenendo così l'equazione differenziale:

$$(40) \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi).$$

La (40) fornisce anzitutto l'interpretazione geometrica di  $\alpha$ . Invero, dovendo, per la realtà di  $d\varphi/dt$ , evidentemente essere:

$$\sin^2 \varphi \leq \sin^2 \alpha$$

donde, supposto  $\alpha$  compreso fra 0 e  $\pi/2$ , segue

$$(41) \quad -\alpha \leq \varphi \leq \alpha;$$

si vede senz'altro che  $\alpha$  coincide col massimo di  $|\varphi|$ , ossia che  $2\alpha$  è la massima elongazione angolare del pendolo rispetto alla verticale.

Ciò premesso osserviamo che dalla (40), estraendo la radice quadrata, può trarsi

$$\frac{dt}{d\varphi} = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi}}$$

donde, integrando, segue

$$(42) \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi}}.$$

Per calcolare l'integrale ellittico a cui siamo stati così ricondotti potremo stavolta utilmente servirci del metodo indicato nell'ultimo § del Cap. II; propriamente, posto anzitutto

$$(43) \quad k = \sin \alpha,$$

converterà porre ulteriormente

$$(44) \quad \sin \varphi = k \operatorname{sn}(u, k),$$

con che si avrà

$$\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi} = k \operatorname{cn} u,$$

$$d\varphi = \frac{k \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\cos \varphi} du = \frac{k \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} du = k \operatorname{cn} u \cdot du;$$

la (42) si ridurrà pertanto semplicemente a

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int du = \sqrt{\frac{l}{g}} u + \text{cost.}$$

donde, introdotta l'irrelevante ipotesi che l'origine dei tempi cada in un istante in cui è  $P \equiv P_0$ , segue finalmente

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} u,$$

cioè

$$u = \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Se ne conclude che le formule risolutive del nostro problema sono:

$$(45) \quad \boxed{\sin \varphi = k \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right), \quad \cos \varphi = \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right), \quad (k = \sin \alpha)}.$$

Dalle formule trovate possono agevolmente dedursi tutte le particolarità cinematiche del movimento, anzi con tanta facilità che appare superfluo soffermarvisi. In particolare dalle (45) segue che il movimento è un movimento periodico con periodo  $T$  (durata di un'oscillazione completa, cioè da  $\theta = 2\alpha$  a  $\theta = -2\alpha$  e ritorno) dato dalla equazione

$$\sqrt{\frac{g}{l}} T = 2\mathbf{K},$$

donde si trae subito

$$(46) \quad T = 2\mathbf{K} \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right).$$

Per esempio, se l'ampiezza massima delle elongazioni del pendolo è di  $10^\circ$ , cioè è  $\alpha = 5^\circ$ , la (46) mostra che il periodo d'oscillazione è dato, senza sensibile errore, dalla formula

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 5^\circ \right) = 1,0019\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

cioè supera del 0,19% circa il valore che sarebbe stato dato dalla ben nota formula elementare  $T = \pi \sqrt{l/g}$ , valida per  $\alpha \rightarrow 0$ .

§ 6. - Un problema di trasformazione conforme  
posto dall'Aerodinamica.

In un importantissimo problema di Aerodinamica e propriamente nel problema della determinazione del campo aerodinamico intorno ad un *biplano indefinito*, che sta a base della teoria dei biplani (areoplani con *due* coppie di ali), la cosa più importante e più difficile è la determinazione di una trasformazione conforme che muti il campo esterno a due cerchi  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , privi di punti comuni (vedi fig. 40), nell'intero piano *meno due segmenti rettilinei paralleli*, soddisfacendo inoltre ad una certa condizione all'infinito. Occupiamoci della risoluzione di questo problema, che costituisce una brillante applicazione della teoria delle funzioni ellittiche, seguendo l'elegante metodo all'uopo escogitato dal Prof. CARLO FERRARI <sup>(1)</sup>; tanto più che ci troveremo qui di fronte ad un'applicazione di tipo affatto diverso dalle solite, e precisamente ad un'applicazione in cui le funzioni ellittiche non s'introducono attraverso un problema d'integrazione, bensì attraverso alla loro specifica proprietà di essere *doppiamente periodiche*.

A questo scopo, assunto come asse  $y$  la congiungente  $O_2O_1$  i centri  $O_1$  e  $O_2$  dei due cerchi dati  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , e come asse  $x$  la perpendicolare a questa retta passante pel *centro*  $O$  dell'involuzione determinata dalle intersezioni  $A_1, A_1'$  e  $A_2, A_2'$  di  $O_2O_1$

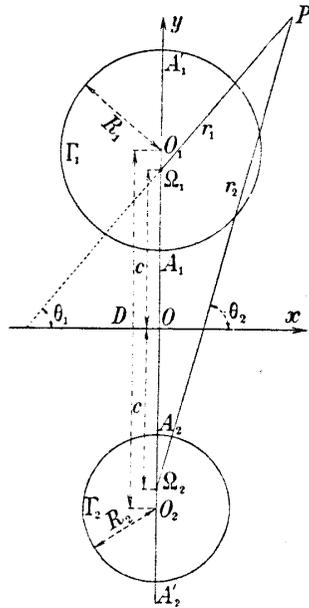


Fig. 40.

<sup>(1)</sup> « Sulla trasformazione conforme di due cerchi in due profili alari ». Mem. della Accad. delle Scienze di Torino, (2) 67 (1930).

con  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  <sup>(1)</sup>, osserviamo in primo luogo che la *funzione elementare*

$$(47) \quad Z = i \log \frac{z + ic}{z - ic},$$

dove  $c$  denota la metà della distanza fra i punti uniti  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$  dell'involuzione predetta <sup>(2)</sup>, trasforma conformemente il piano  $z = x + iy$  in un'infinità di strisce parallele all'asse  $Y$  e d'ampiezza  $2\pi$  del piano  $Z = X + iY$ , e, in particolare, il campo esterno ai due cerchi  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  nei rettangoli staccati su queste strisce dalle due rette  $Y = a$  ed  $Y = -\beta$ , dove  $a$  e  $\beta$  sono due costanti di cui ora diremo.

<sup>(1)</sup> Notoriamente diceasi *centro* di un involuzione fra punti di una retta, l'omologo del punto all'infinito della retta-sostegno. Ne segue in particolare che, detta  $D$  la distanza fra i centri dei due dati cerchi  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  ed indicati con  $R_1$  ed  $R_2$  i raggi di questi, il punto  $O$  della retta  $O_1O_2$  da assumersi come origine delle coordinate è individuato dalla relazione segmentaria

$$O_2O - OO_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{D},$$

donde, essendo d'altro lato  $O_2O + OO_1 = D$ , si trae subito:

$$O_2O = \frac{1}{2} \left( D + \frac{R_2^2 - R_1^2}{D} \right), \quad OO_1 = \frac{1}{2} \left( D - \frac{R_2^2 - R_1^2}{D} \right).$$

<sup>(2)</sup> I due punti  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$  sono certo reali perchè le due coppie  $A_1, A_1'$  e  $A_2, A_2'$  sono *separate*. Inoltre, ricordando che l'equazione di una involuzione assume, quando si prende come origine delle ascisse  $\xi, \xi'$  proprio il suo centro, la forma semplicissima

$$\xi \xi' = \text{cost.};$$

si ha anzitutto che dev'essere

$$\Omega_2O = O\Omega_1 = c$$

e, in secondo luogo, che regge l'uguaglianza

$$c^2 = OA_1 \cdot OA_1' = (OO_1 - R_1)(OO_1 + R_1) = \overline{OO_1}^2 - R_1^2$$

donde segue facilmente:

$$c = \frac{1}{2D} \sqrt{[D^2 - (R_2 + R_1)^2][D^2 - (R_2 - R_1)^2]}.$$

Infatti, essendo evidentemente:

$$X = -\mathbf{I} \left( \log \frac{z+ic}{z-ic} \right) = \text{arc tg } \frac{y-c}{x} - \text{arc tg } \frac{y+c}{x}$$

$$Y = \mathbf{R} \left( \log \frac{z+ic}{z-ic} \right) = \log \left| \frac{z+ic}{z-ic} \right| = \log \frac{\sqrt{x^2+(y+c)^2}}{\sqrt{x^2+(y-c)^2}}$$

cioè

$$(48) \quad X = \theta_1 - \theta_2, \quad Y = \log \frac{r_2}{r_1},$$

dove  $r_1$  ed  $r_2$  denotano rispettivamente le distanze del punto  $P(x, y)$  da  $\Omega_1$  ed  $\Omega_2$  e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  gli angoli che le due rette  $\Omega_1 P$  ed  $\Omega_2 P$  formano con l'asse  $x$ ; è chiaro anzitutto che ad un determinato punto  $P$  del piano  $(x, y)$  corrispondono infiniti punti del piano  $(X, Y)$  aventi tutti la stessa ordinata  $Y$  ed ascisse  $X$  differenti per multipli interi di  $2\pi$ , ossia che la (47) trasforma conformemente il piano  $z$  nelle infinite strisce d'ampiezza  $2\pi$  di cui più sopra è detto. Inoltre, avendosi per una nota proprietà di Geometria elementare <sup>(1)</sup>,  $r_2/r_1 = \text{cost.}$ , tanto sulla circonferenza  $\Gamma_1$  quanto sulla  $\Gamma_2$ , a queste due circonferenze corrisponderanno sul piano  $Z$  le due parallele all'asse  $X$  di equazioni  $Y = a$  ed  $Y = -\beta$ , essendosi posto

$$\log \left( \frac{r_2}{r_1} \right)_{\text{su } \Gamma_1} = a, \quad \log \left( \frac{r_2}{r_1} \right)_{\text{su } \Gamma_2} = -\beta,$$

il che dimostra la seconda parte dell'enunciato.

Quanto ai valori numerici di  $a$  e  $\beta$  essi sono dalle formule:

$$(49) \quad \begin{cases} a = \log \frac{c + OO_1 - R_1}{c - (OO_1 - R_1)} = \log \frac{2cD + (D - R_1 + R_2)(D - R_1 - R_2)}{2cD - (D - R_1 + R_2)(D - R_1 - R_2)} \\ \beta = \log \frac{c + O_2O - R_2}{c - (O_2O - R_2)} = \log \frac{2cD + (D + R_1 - R_2)(D - R_1 - R_2)}{2cD - (D + R_1 - R_2)(D - R_1 - R_2)} \end{cases}$$

che, fra l'altro, mostrano come  $a$  e  $\beta$  siano entrambe positive.

Ciò premesso, fissiamo come immagine del campo esterno a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sul piano  $Z$ , il rettangolo  $H$  definito dalle disuguaglianze:

$$-\pi \leq X \leq \pi, \quad -\beta \leq Y \leq a,$$

<sup>(1)</sup> Alludiamo al teorema relativo al cosiddetto *cerchio di Apollonio*, e cioè al fatto che il rapporto delle distanze di un punto di una circonferenza da due punti fissi che separino armonicamente gli estremi di un diametro, si mantiene costante al variare del punto sulla circonferenza.

e supponiamo inoltre di aver già determinata una certa funzione analitica uniforme

$$F(Z) = \xi(X, Y) + i\eta(X, Y)$$

trasformante ulteriormente l'anzidetto rettangolo nell'intero piano  $(\xi, \eta)$  meno due certi segmenti paralleli all'asse  $\xi$ , nonchè tale che sia soddisfatta la condizione all'infinito

$$(50) \quad \frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dZ} \cdot \frac{dZ}{dz} = 1, \quad (\text{per } z = \infty); \quad (1)$$

cosa potremo dire *a priori* su questa funzione?

È chiaro anzitutto che se la funzione  $F$  dovrà esistere in tutto il piano  $Z$  e non solo nella striscia  $|X| \leq \pi$ , e che se essa dovrà esser tale che, pensata come dipendente da  $z$  invece che da  $Z$ , risulti ancora una funzione uniforme;  $F(Z)$  non potrà alterarsi quando  $Z$  si accresce di un multiplo qualsiasi di  $2\pi$ , dovrà dunque trattarsi di una funzione periodica col periodo  $2\pi$ .

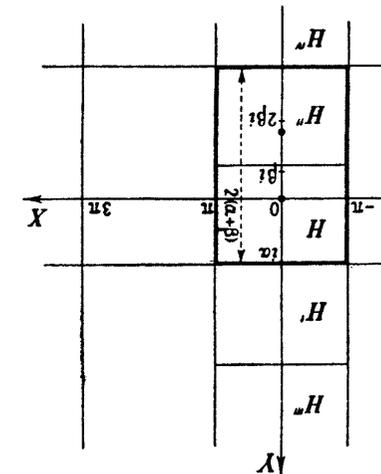


Fig. 41.

D'altro lato, tenuto conto che alle due circonferenze  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  del piano  $z$ , cioè ai due lati orizzontali del rettangolo  $H$  del piano  $Z$ , corrispondono per ipotesi due segmenti paralleli all'asse  $\xi$  del piano  $F$ , cioè due luoghi di punti  $\eta = \text{cost.}$ ; essendo

$$\frac{dF}{dZ} = \frac{\partial \xi}{\partial X} + i \frac{\partial \eta}{\partial X},$$

è evidente che su detti due lati orizzontali di  $H$  la derivata

$$f(Z) = \frac{dF}{dZ}$$

della funzione  $F$  dovrà essere di necessità *reale*, epperò potrà essere,

<sup>(1)</sup> Veramente nel lavoro di FERRARI è posto solo la condizione  $|dF/dz| = 1$  (per  $z = \infty$ ), ma è facile vedere che ciò non basta per giungere alla formula finale e ci vuole invece la condizione *più forte* (50).

con SCHWARZ, prolungata per *riflessione* <sup>(1)</sup> (F. A., Cap. IV, § 1) nei due rettangoli  $H'$  ed  $H''$  (vedi fig. 41) uguali ed adiacenti ad  $H$  della striscia  $|X| \leq \pi$ , e, successivamente, nei rettangoli  $H'''$ ,  $H^{IV}$ , ecc.... Ma due riflessioni successive equivalgono ad una traslazione, quindi la funzione  $f(z)$  dovrà rimanere invariata, non solo (come la  $F$ ) per traslazioni d'ampiezza  $2\pi$  parallele all'asse  $X$ , ma anche per traslazioni parallele all'asse  $Y$  d'ampiezza pari a due volte l'altezza del rettangolo  $H$ , cioè *dovrà essere una funzione doppiamente periodica coi periodi*:

$$2\omega = 2\pi \quad \text{e} \quad 2\omega' = 2(a + \beta)i.$$

Finalmente osserviamo che, avendosi manifestamente

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{2c}{z^2 + c^2}, \quad Z(\infty) = 2n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

la (50) può sussistere soltanto se la funzione  $f(Z)$  ha nel rettangolo fondamentale  $H + H''$ , un polo doppio nel punto  $Z = 0$ , che è uno degli omologhi del punto  $z = \infty$ , e, di conseguenza, un altro polo doppio nel punto « riflesso »  $-2i\beta$ ; poli i quali, essendo <sup>(2)</sup>

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{2c}{z^2} + \dots = \frac{2c}{\left(-\frac{2c}{Z} + \dots\right)^2} + \dots = \frac{1}{2c} Z^2 + \dots,$$

dovranno avere per caratteristiche rispettivamente

$$\frac{2c}{Z^2} \quad \text{e} \quad \frac{2c}{(Z + 2i\beta)^2}.$$

Da quando precede e dal teorema fondamentale (Cap. I, § 8) sulla rappresentazione di una funzione doppiamente periodica mediante la  $\wp$  e la  $\zeta$ , discende senz'altro che la derivata  $f'(Z)$  della funzione  $F(Z)$  dovrà necessariamente avere la forma

$$f'(Z) = 2c[\wp(Z | \omega, \omega') + \wp(Z + 2i\beta | \omega, \omega')] + C,$$

<sup>(1)</sup> Cioè stabilendo che in due punti simmetrici rispetto alla retta di riflessione la funzione debba assumere valori complessi *coniugati*.

<sup>(2)</sup> Si tenga presente che, come immediatamente si deduce dalla (47), è

$$z = \frac{-c}{\operatorname{tg} Z/2} = -c \left( \frac{2}{Z} + \frac{1}{6} Z + \dots \right).$$

dove  $C$  denota una costante; epperò, integrando, si avrà

$$(51) \quad F(Z) = -2c[\zeta(Z | \omega, \omega') + \zeta(Z + 2i\beta | \omega, \omega')] + CZ,$$

avendo tralasciato di aggiungere una costante d'integrazione che non avrebbe altro effetto se non di spostare l'origine sul piano  $F$ .

Finalmente, per determinare la costante  $C$ , serviamoci del fatto che per  $X = -\pi$  ed  $Y = a$  od  $Y = -\beta$  deve manifestamente risultare  $F(Z + 2\pi) = F(Z)$ , perchè  $F(z)$  è funzione univoca dei punti delle due circonferenze  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Avremo così l'equazione

$$\begin{aligned} F(Z + 2\pi) - F(Z) &= -2c\{[\zeta(Z + 2\omega) - \zeta(Z)] + [\zeta(Z + 2i\beta + 2\omega) - \zeta(Z + 2i\beta)]\} + 2\pi C = \\ &= -8c\eta + 2\pi C = 0, \end{aligned}$$

donde segue

$$C = \frac{4\eta}{\pi} c,$$

di modo che si conclude che è

$$(52) \quad \boxed{F(Z) = -2c \left[ \zeta(Z | \omega, \omega') + \zeta(Z + 2i\beta | \omega, \omega') - \frac{2\eta}{\pi} Z \right]}$$

$\omega = \pi, \quad \omega' = (a + \beta)i$

Sarebbe facile verificare che la funzione trovata soddisfa effettivamente alle condizioni del problema.

Il calcolo numerico della funzione  $F$  viene dal FERRARI effettuato mediante degli sviluppi in serie trigonometriche. Esso può però venire effettuato, molto più facilmente e sicuramente, mediante le funzioni theta. Invero basterà all'uopo servirsi delle formule (59) e (90) del Cap. III, e cioè:

$$\zeta u = \frac{1}{2\omega} \frac{\theta_1'(u/2\omega)}{\theta_1(u/2\omega)} + \frac{\eta}{\omega} u, \quad \eta = -\frac{1}{12\omega} \frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)},$$

con che la (52) prende l'aspetto:

$$(53) \quad F(Z) = -c \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{\theta_1'(Z/2\pi)}{\theta_1(Z/2\pi)} + \frac{1}{\pi} \frac{\theta_1'[(Z + 2i\beta)/2\pi]}{\theta_1[(Z + 2i\beta)/2\pi]} - \frac{i\beta}{3\pi^2} \frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)} \right\}$$

con

$$(54) \quad q = e^{\frac{i\pi\omega'}{\omega}} = e^{-(a+\beta)}.$$

Nel caso particolare notevole in cui, avendosi  $R_1=R_2$ , risulta

$$\alpha = \beta = \log \frac{2c + D - 2R_1}{2c - D + 2R_1}$$

e, di conseguenza,  $2i\beta = \omega'$ ; avvalendosi della (59') del Cap. III (p. 152) oltre che delle (59) e (90), la (52) può anche mettersi sotto la forma, più vantaggiosa pel calcolo numerico:

$$(53') \quad F(Z) = -c \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_1'(Z/2\pi)}{\vartheta_1(Z/2\pi)} + \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_4'(Z/2\pi)}{\vartheta_4(Z/2\pi)} - i \left[ 1 + \frac{\beta}{3\pi^2} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} \right] \right\}, \quad (1)$$

$$q = e^{-2\beta}, \quad (R_1 = R_2).$$

I quozienti di funzioni theta che si presentano nelle precedenti formule hanno le espressioni seguenti:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_1'(u/2\pi)}{\vartheta_1(u/2\pi)} = \frac{\cos \frac{1}{2}u - 3q^2 \cos \frac{3}{2}u + 5q^6 \cos \frac{5}{2}u - \dots}{\sin \frac{1}{2}u - q^2 \sin \frac{3}{2}u + q^6 \sin \frac{5}{2}u - \dots}$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_4'(u/2\pi)}{\vartheta_4(u/2\pi)} = \frac{4q \sin u - 8q^4 \sin 2u + \dots}{1 - 2q \cos u + 2q^4 \cos 2u - \dots},$$

$$\frac{1}{\pi^2} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = - \frac{1 - 27q^2 + 125q^6 - \dots}{1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots},$$

immediatamente deducibili dalle (51) del Cap. III; in essi, ai seni e coseni immaginari vanno sostituite le loro note espressioni mediante le funzioni circolari ed iperboliche.

Consideriamo come esempio il caso, considerato anche dal FERRARI, in cui è

$$R_1 = R_2 = 1, \quad D = 6$$

e, conseguentemente,

$$c = \sqrt{8}, \quad \alpha = \beta = 1,7628, \quad q = 0,02943;$$

e sia inoltre

$$Z = 0,882 + 1,73i.$$

(1) Anche più semplicemente la (53') può dedursi dalla (53) servendosi della formula

$$\frac{\vartheta_1'(v + \tau/2)}{\vartheta_1(v + \tau/2)} = \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} - i\pi,$$

subito ottenuta derivando logaritmicamente rispetto a  $v$  la prima delle (64') del Cap. III.

Preparando il calcolo di  $F(Z)$  mediante la (53') troviamo anzitutto:

$$\sin \frac{1}{2}Z = 0,599 + 0,883i \quad \cos \frac{1}{2}Z = 1,263 - 0,417i$$

$$\sin Z = 2,25 + 1,74i \quad \cos Z = 1,85 - 2,11i$$

$$\sin \frac{3}{2}Z = 6,52 + 1,63i \quad \cos \frac{3}{2}Z = 1,65 - 6,45i.$$

Ne segue, trascurando i termini dell'ordine di  $q^4$  e superiore, che è

$$\frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_1'(Z/2\pi)}{\vartheta_1(Z/2\pi)} = \frac{1,269 - 0,400i}{0,593 + 0,882i} = 0,350 - 1,195i$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_4'(Z/2\pi)}{\vartheta_4(Z/2\pi)} = \frac{0,265 + 0,205i}{0,892 + 0,124i} = 0,322 + 0,211i$$

$$\frac{\beta}{3\pi^2} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = - \frac{\beta}{3\pi^2} \frac{0,9766}{0,9974} = -0,5753$$

epperò viene

$$F(Z) = -\sqrt{8}(0,350 - 1,195i + 0,322 + 0,211i - 0,425i) =$$

$$= -\sqrt{8}(0,672 - 1,409i) = -1,90 + 4,01i.$$

Un calcolo di controllo ha per altra via fornito:

$$F(Z) = -1,88 + 4,07i;$$

in media, si ha dunque:

$$F(Z) = -1,89 + 4,04i,$$

ciò che, se non va d'accordo col corrispondente valore numericamente trovato da FERRARI (ch'è invece, causa una svista,  $-1,52 + 4,1i$ ) s'accorda però benissimo con la curva dal medesimo Autore tracciata con un metodo grafico fondato su una interessante formula approssimata.

**TAVOLE RIASSUNTIVE  
DELLE PRINCIPALI FORMULE**

N. B. — Le formule contrassegnate con (\*) non si trovano esplicitamente nel testo, ma possono facilmente dedursi da quelle ivi riportate. Se il segno \* segue il numero di una formula, per esempio (56\*), ciò vuol dire che la corrispondente formula figura nel testo sotto una forma un po' diversa.

CAPITOLO I.

- (17)  $\zeta u = \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{u}{w}\right)^2 \frac{1}{u-w} = \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right)$  ( $w = 2m\omega + 2n\omega'$ )
- (18)  $\wp u = -\zeta' u = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$
- (19)  $\wp' u = -2 \sum' \frac{1}{(u-w)^3}$   $\wp(-u) = \wp u$
- (20)  $\begin{cases} \wp(tu|t\omega, t\omega') = t^{-2} \wp(u|\omega, \omega') \\ \wp'(tu|t\omega, t\omega') = t^{-3} \wp'(u|\omega, \omega') \\ \zeta(tu|t\omega, t\omega') = t^{-1} \zeta(u|\omega, \omega') \end{cases}$
- (26)  $\begin{cases} e_1 = \wp \omega_1 \\ e_2 = \wp \omega_2 \\ e_3 = \wp \omega_3 \end{cases} \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (27) \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega \\ \omega_2 = \omega + \omega' \\ \omega_3 = \omega' \end{cases}$
- (28)  $\wp' \omega_a = 0, \quad (a=1, 2, 3) \quad (29) \quad \wp'^2 u = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)$
- (31)  $u = \int_{\infty}^z \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}} \quad \text{se } \wp u = z$
- (37-38)  $\begin{cases} g_2 = -4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) = 60 \sum' \frac{1}{w^4} & \sum e_a^2 = \frac{1}{2} g_2, \\ g_3 = 4e_1 e_2 e_3 = 140 \sum' \frac{1}{w^6} & (*) \sum e_a^3 = \frac{3}{4} g_3, \quad (*) \sum e_a^4 = \frac{1}{8} g_2^2 \end{cases}$
- (39)  $\wp'^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3, \quad (41) \quad \wp(u; g_2, g_3) = t^2 \wp(tu; t^{-1} g_2, t^{-4} g_3)$
- (43)  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2(e_1 - e_2)^2$
- (44)  $\wp'' u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2, \quad \wp''' u = 12\wp u \wp' u$
- (48)  $\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2 \cdot 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} u^6 + \frac{3g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^8 + \dots$
- (49)  $\begin{cases} \wp' u = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{2 \cdot 5} u + \frac{g_3}{7} u^3 + \frac{g_2^2}{2^3 \cdot 5^2} u^5 + \dots \\ \zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} u^3 - \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} u^7 - \dots \end{cases}$
- (50)  $\wp(u_1 + u_2) = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2} \right)^2 - \wp u_1 - \wp u_2 =$   

$$= \frac{2(\wp u_1 \wp u_2 - \frac{1}{4} g_2)(\wp u_1 + \wp u_2) - g_3 - \wp' u_1 \wp' u_2}{2(\wp u_1 - \wp u_2)^2}$$
- (52)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp u_1 & \wp u_2 & \wp(u_1 + u_2) \\ \wp' u_1 & \wp' u_2 & -\wp'(u_1 + u_2) \end{vmatrix} = 0$
- (55)  $\wp(2u) = \frac{(\wp^2 u + g_2/4)^2 + 2g_3 \wp u}{4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3}$
- (\*)  $[\wp(u+v) - \wp(u-v)](\wp u - \wp v)^2 = -\wp' u \wp' v$

(segue Cap. I).

- (56\*)  $\wp(u + \omega_a) = e_a + \frac{(e_a - e_\beta)(e_a - e_\gamma)}{\wp u - e_a} \quad (a, \beta, \gamma \text{ permut. qual. di } 1, 2, 3)$
- Se  $f(u)$  è  $\begin{cases} \text{pari, } \delta f(u) = R(\wp u) \\ \text{disp. } \delta f(u) = \wp' u \cdot R(\wp u) \\ \text{qual. } \delta f(u) = R_1(\wp u) + \wp' u \cdot R_2(\wp u) \end{cases} \quad (R, R_1, R_2 \text{ funzioni razionali})$
- (62)  $\zeta \omega = \eta, \quad \zeta \omega' = \eta'; \quad (62') \quad \zeta \omega_a = \eta_a \quad (\eta_1 = \eta, \eta_2 = \eta + \eta', \eta_3 = \eta')$
- (63)  $\zeta(u + 2m\omega + 2n\omega') = \zeta u + 2m\eta + 2n\eta', \quad (65) \quad \eta \omega' - \eta' \omega = \frac{1}{2} \pi i$
- Se  $f(u)$  ha nel parallelogr. fondamentale i poli  $a_1, a_2, \dots, a_r$  con le caratteristiche  $\frac{A_h}{u - a_h} + \frac{A_h'}{(u - a_h)^2} + \dots + \frac{A_h^{(\nu_h - 1)}}{(u - a_h)^{\nu_h}}$  ( $\nu_h$  ordine di molt. del polo  $a_h, h = 1, 2, \dots, r$ ) si ha:
- (67\*)  $f(u) = \sum_{h=1}^r \left[ A_h \zeta(u - a_h) + A_h' \wp(u - a_h) - \frac{A_h''}{2!} \wp'(u - a_h) + \dots + (-1)^{\nu_h} \frac{A_h^{(\nu_h - 2)}}{(\nu_h - 1)!} \wp^{(\nu_h - 1)}(u - a_h) \right] + \text{const.}$
- (68)  $\zeta(u+v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}$
- (69)  $\wp(u+v) = \wp u - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \right) = \wp v - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \right)$
- (\*)  $\wp(u+v) + \wp(u-v) = 2\wp u - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \log(\wp u - \wp v) =$   

$$= 2\wp v - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \log(\wp u - \wp v)$$
- (70)  $\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u, \quad (71) \quad \sigma u = u \prod' \left( 1 - \frac{u}{w} \right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{w} \right)^2}, \quad \sigma(-u) = -\sigma u$
- (72)  $\wp u = -\frac{d^2}{du^2} \log \sigma u = \frac{\sigma'' u - \sigma u \sigma'^2}{\sigma^2 u}$
- (74)  $\sigma u = u - \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} u^5 - \frac{g_3}{2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^7 -$   

$$- \frac{g_2^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} u^9 - \frac{g_2 g_3}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} u^{11} - \dots$$
- (77)  $\sigma(u+w) = \pm e^{\bar{\eta}(u+w/2)} \sigma u \quad (\bar{\eta} = 2m\eta + 2n\eta')$   
 (+ se  $w/2$  è periodo, - in altro caso)
- Se  $a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_r$  sono due sistemi *completi* di poli e di zeri della funzione ellittica  $f(u)$ , tali che sia  $a_1 + a_2 + \dots + a_r = b_1 + b_2 + \dots + b_r$ , si ha
- (79)  $f(u) = c \frac{\sigma(u - b_1) \sigma(u - b_2) \dots \sigma(u - b_r)}{\sigma(u - a_1) \sigma(u - a_2) \dots \sigma(u - a_r)}, \quad \text{dove } c \text{ è una costante.}$
- (80)  $\wp u - \wp v = -\sigma(u+v)\sigma(u-v)/\sigma^2 u \sigma^2 v, \quad (81) \quad \wp' u = -\sigma(2u)/\sigma^2 u$

CAPITOLO II.

(2-2'\*)  $P(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = b_0(x-c)^4 + 4b_1(x-c)^3 + 6b_2(x-c)^2 + 4b_3(x-c) + b_4$   
 $J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad H_r = \int \frac{dx}{(x-c)^r \sqrt{P(x)}}$   
 (5\*)  $(m+2)a_0J_{m+3} + 2(2m+3)a_1J_{m+2} + 6(m+1)a_2J_{m+1} + 2(2m+1)a_3J_m + ma_4J_{m-1} = x^m y, \quad (m=0, 1, 2, \dots)$   
 (6\*)  $(2-m)b_0H_{m-3} + 2(3-2m)b_1H_{m-2} + 6(1-m)b_2H_{m-1} + 2(1-2m)b_3H_m - mb_4H_{m+1} = \frac{y}{(x-c)^m}, \quad (m=1, 2, \dots)$

(16)  $g_2 = a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3, \quad g_3 = a_0a_2a_4 - a_0a_3^2 + 2a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_2^3$

(18\*)  $\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}}$

(19\*)  $\xi = \frac{1}{4} \left[ \frac{P''(a_1)}{6} - \frac{P'(a_1)}{a_1 - x} \right], \quad x = a_1 + \frac{P'(a_1)}{4\xi - P''(a_1)/6}, \quad (P(a_1) = 0)$

(20\*) (Weierstr.) 
$$\begin{cases} J_2 = \frac{1}{6} \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3} + \frac{1}{12} g_2 J_0, \\ J_3 = \frac{1}{10} x \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3} + \frac{3}{20} g_2 J_1 + \frac{1}{10} g_3 J_0 \\ (4c^3 - g_2c - g_3)H_2 = 2(J_1 - cJ_0) - (6c^2 - \frac{1}{2}g_2)H_1 - \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}/(x-c) \end{cases}$$

(Per la riduzione alla forma canonica di Legendre, v. il quadro a pp. 76-77 del testo)

(32)  $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$

(33)  $\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$

(34'')  $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = [F(\varphi, k) - E(\varphi, k) - \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cotg \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$

(36')  $\omega = \int_{e_2}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}, \quad \omega' = \int_{e_2}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$

(38)  $\mathbb{K} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (47) \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$

(40)  $\mathbb{K} = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right) \quad (4)$

(4) Cfr. p. 206.

(segue Cap. II).

(48)  $E = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; k^2\right) \quad (4)$

(54) 
$$\begin{cases} I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \wp^{-1}x, & I_2 = \int \frac{x dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = -\zeta(\wp^{-1}x) \\ I_3' = \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3} + \sqrt{4c^3 - g_2c - g_3}}{(x-c)\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} dx = \\ = \log \frac{\sigma(\wp^{-1}x - \wp^{-1}c)}{\sigma(\wp^{-1}x)} + \zeta(\wp^{-1}c) \cdot \wp^{-1}x \end{cases}$$

Se è  $u = \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$  si ha, intendendo che  $g_2$  e  $g_3$  siano calcolati mediante le (16):

(58)  $z = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2\sqrt{a_0}} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}, \quad (59^*) \quad \begin{cases} a_0 \wp v = a_1^2 - a_0 a_2 \\ a_0^3 \wp' v = 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_2^2 a_3 \end{cases}$

(\*)  $\int \wp u du = -\zeta u, \quad \int \wp^2 u du = \frac{1}{6} \wp' u + \frac{1}{12} g_2 u,$

(\*)  $\int \wp^3 u du = \frac{1}{120} \wp''' u - \frac{3}{20} g_2 \zeta u + \frac{1}{10} g_3 u$

(\*)  $\wp' v \cdot \int \frac{du}{\wp u - \wp v} = 2u\zeta v + \log \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)}$

(\*)  $\int \frac{\alpha \wp u + \beta}{\gamma \wp u + \delta} du = \frac{\alpha}{\gamma} u - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 \wp' v} \left[ \log \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)} + 2u\zeta v \right], \quad (\wp v = -\delta/\gamma) \quad (2)$

CAPITOLO III.

(1)  $v = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (2) \quad \begin{cases} \sin \varphi = \operatorname{sn} v \\ \cos \varphi = \operatorname{cn} v \\ \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \operatorname{dn} v \end{cases}$

(3)  $\operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{dn}^2 v = 1$

(4)  $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad (5) \quad \wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3} u)}$

(6)  $\begin{cases} \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3} u) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{\wp u - e_3}} \\ \operatorname{cn}(\sqrt{e_1 - e_3} u) = \sqrt{\frac{\wp u - e_1}{\wp u - e_2}} \\ \operatorname{dn}(\sqrt{e_1 - e_3} u) = \sqrt{\frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3}} \end{cases} \quad (8) \quad \wp u - e_a = \left( \frac{\sigma_a u}{\sigma u} \right)^2$

(4) Cfr. p. 206.  
 (5) Le ultime quattro formule sono tratte da JAHNKE-EMDE [20], p. 171, dove però la quarta formula contiene un errore di segno; così pure in TANNERY-MOLK [12], t. IV, p. 110 (ultima formula).

(segue Cap. III).

$$(9-9') \quad \sigma_\alpha u = \frac{\sigma(\omega_\alpha - u)}{\sigma\omega_\alpha} e^{\eta_\alpha u} = \frac{\sigma(\omega_\alpha + u)}{\sigma\omega_\alpha} e^{-\eta_\alpha u}$$

$$(10) \quad \sqrt{\beta \mathcal{D}u - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}$$

$$(11) \quad \sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha \omega_\beta}{\sigma \omega_\beta}, \quad (11'*) \quad \sqrt{e_\beta - e_\alpha} = -i \sqrt{e_\alpha - e_\beta} \quad (\beta > \alpha),$$

$$(12) \quad \text{sn}(\sqrt{e_1 - e_3}u) = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u}, \quad \text{cn}(\sqrt{e_1 - e_3}u) = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}, \quad \text{dn}(\sqrt{e_1 - e_3}u) = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}$$

$$(13) \quad \sigma_1^2 u + e_1 \sigma^2 u = \sigma_2^2 u + e_2 \sigma^2 u = \sigma_3^2 u + e_3 \sigma^2 u$$

$$(15^*) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha(u+w) = e_\alpha e^{\eta(u+w/2)} \sigma_\alpha u; \\ \varepsilon_1 = (-1)^{m(n+1)}, \quad \varepsilon_2 = (-1)^{mn}, \quad \varepsilon_3 = (-1)^{n(m+1)} \end{cases}$$

$$(16-16') \quad \mathcal{D}'u = -2 \frac{\sigma_1 u \cdot \sigma_2 u \cdot \sigma_3 u}{\sigma^2 u} = -2 \sqrt{\beta \mathcal{D}u - e_1} \sqrt{\beta \mathcal{D}u - e_2} \sqrt{\beta \mathcal{D}u - e_3}$$

$$(19) \quad \sqrt{e_1 - e_3} \omega = \mathbf{K}, \quad \sqrt{e_1 - e_3} \omega' = i\mathbf{K}'$$

$$(21) \quad \text{sn}(v+2\mathbf{K}) = -\text{sn} v, \quad \text{cn}(v+2\mathbf{K}) = \text{cn}(v+2i\mathbf{K}') = -\text{cn} v, \quad \text{dn}(v+2i\mathbf{K}') = -\text{dn} v$$

$$(22) \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \quad (24) \quad \mathbf{K}' = \mathbf{K}(k') = \mathbf{K}(\sqrt{1 - k^2})$$

$$(25) \quad \text{sn}(-v) = -\text{sn} v, \quad \text{cn}(-v) = \text{cn} v, \quad \text{dn}(-v) = \text{dn} v$$

$$(26) \quad k = \frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad k' = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

$$(28) \quad \frac{d \text{sn} v}{dv} = \text{cn} v \text{dn} v, \quad \frac{d \text{cn} v}{dv} = -\text{sn} v \text{dn} v, \quad \frac{d \text{dn} v}{dv} = -k^2 \text{sn} v \text{cn} v$$

$$(29) \quad \begin{cases} \text{sn}' v = -(1 + k^2 - 2k^2 \text{sn}^2 v) \text{sn} v \\ \text{cn}' v = -(1 - 2k^2 \text{sn}^2 v) \text{cn} v \\ \text{dn}' v = -k^2(1 - 2 \text{sn}^2 v) \text{dn} v \end{cases}$$

$$(30) \quad \begin{cases} \text{sn} v = v - (1 + k^2) \frac{v^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{v^5}{5!} - \dots \\ \text{cn} v = 1 - \frac{v^2}{2!} + (1 + 4k^2) \frac{v^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4) \frac{v^6}{6!} + \dots \\ \text{dn} v = 1 - k^2 \frac{v^2}{2!} + k^2(1 + k^2) \frac{v^4}{4!} - k^2(16 + 44k^2 + k^4) \frac{v^6}{6!} + \dots \end{cases}$$

$$(*) \quad \text{sn} v \sim v, \quad \text{cn} v \sim \cos v, \quad \text{dn} v \sim \cos kv \quad (\text{per } v \rightarrow 0)$$

$$(31) \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \text{dn}^2 v \, dv$$

$$(32) \quad E(\varphi, k) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} [e_1 \cdot u + \zeta(u + \omega') - \eta'], \quad (\text{sin } \varphi = \text{sn}(\sqrt{e_1 - e_3}u))$$

$$(32') \quad F(\varphi, k) = \sqrt{e_1 - e_3} u$$

$$(33) \quad E = \frac{e_1 \omega + \eta}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad (33') \quad E' = E(k') = i \frac{e_3 \omega' + \eta'}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

(segue Cap. III).

$$(34) \quad \eta = \sqrt{e_1 - e_3} \left( E - \frac{e_1}{e_1 - e_3} \mathbf{K} \right), \quad \eta' = -i \sqrt{e_1 - e_3} \left( E' + \frac{e_3}{e_1 - e_3} \mathbf{K}' \right)$$

$$(35) \quad \mathbf{EK}' + \mathbf{E}'\mathbf{K} - \mathbf{KK}' = \frac{\pi}{2}$$

$$(37) \quad \begin{cases} \text{sn}(v_1 + v_2) = \frac{\text{sn} v_1 \text{cn} v_2 \text{dn} v_2 + \text{sn} v_2 \text{cn} v_1 \text{dn} v_1}{1 - k^2 \text{sn}^2 v_1 \text{sn}^2 v_2} \\ \text{cn}(v_1 + v_2) = \frac{\text{cn} v_1 \text{cn} v_2 - \text{sn} v_1 \text{dn} v_1 \text{sn} v_2 \text{dn} v_2}{1 - k^2 \text{sn}^2 v_1 \text{sn}^2 v_2} \\ \text{dn}(v_1 + v_2) = \frac{\text{dn} v_1 \text{dn} v_2 - k^2 \text{sn} v_1 \text{cn} v_1 \text{sn} v_2 \text{cn} v_2}{1 - k^2 \text{sn}^2 v_1 \text{sn}^2 v_2} \end{cases}$$

$$(38) \quad \begin{cases} \text{sn}(iv, k) = i \frac{\text{sn}(v, k')}{\text{cn}(v, k')} \\ \text{cn}(iv, k) = \frac{1}{\text{cn}(v, k')} \\ \text{dn}(iv, k) = \frac{\text{dn}(v, k')}{\text{cn}(v, k')} \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} \text{sn}(v_1 + v_2) + \text{sn}(v_1 - v_2) = \frac{2 \text{sn} v_1 \text{cn} v_2 \text{dn} v_2}{1 - k^2 \text{sn}^2 v_1 \text{sn}^2 v_2} \\ \text{cn}(v_1 + v_2) + \text{cn}(v_1 - v_2) = \frac{2 \text{cn} v_1 \text{cn} v_2}{1 - k^2 \text{sn}^2 v_1 \text{sn}^2 v_2} \\ \text{dn}(v_1 + v_2) + \text{dn}(v_1 - v_2) = \frac{2 \text{dn} v_1 \text{dn} v_2}{1 - k^2 \text{sn}^2 v_1 \text{sn}^2 v_2} \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} \text{sn}(v_1 + v_2) \text{sn}(v_1 - v_2) = \frac{\text{sn}^2 v_1 - \text{sn}^2 v_2}{1 - k^2 \text{sn}^2 v_1 \text{sn}^2 v_2} \\ \text{cn}(v_1 + v_2) \text{cn}(v_1 - v_2) = \frac{\text{cn}^2 v_1 - \text{sn}^2 v_2 \text{dn}^2 v_1}{1 - k^2 \text{sn}^2 v_1 \text{sn}^2 v_2} \\ \text{dn}(v_1 + v_2) \text{dn}(v_1 - v_2) = \frac{\text{dn}^2 v_1 - k^2 \text{sn}^2 v_2 \text{cn}^2 v_1}{1 - k^2 \text{sn}^2 v_1 \text{sn}^2 v_2} \end{cases}$$

$$(40) \quad \begin{cases} \text{sn}(2v) = \frac{2 \text{sn} v \text{cn} v \text{dn} v}{1 - k^2 \text{sn}^4 v} \\ \text{cn}(2v) = \frac{\text{cn}^2 v - \text{sn}^2 v \text{dn}^2 v}{1 - k^2 \text{sn}^4 v} \\ \text{dn}(2v) = \frac{\text{dn}^2 v - k^2 \text{sn}^2 v \text{cn}^2 v}{1 - k^2 \text{sn}^4 v} \end{cases} \quad (40') \quad \begin{cases} \text{sn} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{cn} v}{1 + \text{dn} v}} \\ \text{cn} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\text{cn} v + \text{dn} v}{1 + \text{dn} v}} \\ \text{dn} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\text{dn} v + k^2 \text{cn} v + k'^2}{1 + \text{dn} v}} \end{cases}$$

Se è

$$(41) \quad \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 \varphi_3} = \cos \varphi_3,$$

per opportune determinazioni di  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$  si ha:

$$(42) \quad F(\varphi_1) + F(\varphi_2) + F(\varphi_3) = 0$$

$$(42') \quad E(\varphi_1) + E(\varphi_2) + E(\varphi_3) = -k^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3$$

(segue Cap. III).

$$(43) \quad v = \frac{u}{2\omega}, \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

$$(45) \quad \begin{cases} \vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v), & \vartheta_2(v+1) = -\vartheta_2(v), \\ \vartheta_3(v+1) = \vartheta_3(v), & \vartheta_4(v+1) = \vartheta_4(v) \end{cases}$$

$$(46) \quad z = e^{i\pi v}, \quad q = e^{i\pi\tau}; \quad u = 2\omega v$$

$$(47) \quad \begin{cases} \vartheta_1(v+\tau) = -q^{-1}z^{-2}\vartheta_1(v), & \vartheta_2(v+\tau) = q^{-1}z^{-2}\vartheta_2(v), \\ \vartheta_3(v+\tau) = q^{-1}z^{-2}\vartheta_3(v), & \vartheta_4(v+\tau) = -q^{-1}z^{-2}\vartheta_4(v) \end{cases}$$

$$(48) \quad \begin{cases} \vartheta_1(-v) = -\vartheta_1(v), & \vartheta_2(-v) = \vartheta_2(v) \\ \vartheta_3(-v) = \vartheta_3(v), & \vartheta_4(-v) = \vartheta_4(v) \end{cases}$$

$$(50-51) \quad \begin{cases} \vartheta_1(v) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n-\frac{1}{2}} z^{2n-1} = 2q^{\frac{1}{4}} (\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v + q^6 \sin 5\pi v - \dots) \\ \vartheta_2(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n-\frac{1}{2}} z^{2n-1} = 2q^{\frac{1}{4}} (\cos \pi v + q^2 \cos 3\pi v + q^6 \cos 5\pi v + \dots) \\ \vartheta_3(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} = 1 + 2(q \cos 2\pi v + q^4 \cos 4\pi v + q^9 \cos 6\pi v + \dots) \\ \vartheta_4(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} = 1 - 2(q \cos 2\pi v - q^4 \cos 4\pi v + q^9 \cos 6\pi v - \dots) \end{cases}$$

$$(56) \quad \sigma u = 2\omega e^{\frac{\eta}{2\omega} u} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}, \quad \sigma_a u = e^{\frac{\eta}{2\omega} u} \frac{\vartheta_{\alpha+1}(v)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)}$$

$$(58) \quad \wp u = e_a + \frac{1}{4\omega^2} \left[ \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_{\alpha+1}(0)} \frac{\vartheta_{\alpha+1}(v)}{\vartheta_1(v)} \right]^2 \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$(58') \quad \wp' u = -\frac{1}{4\omega^3} \frac{\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_4(v)\vartheta_1'^3(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)\vartheta_1^3(v)}$$

$$(59) \quad \zeta u = \frac{1}{2\omega} \frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} + \frac{\eta}{\omega} u$$

$$(61) \quad e_1 = \frac{2-k^2}{3}, \quad e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \quad e_3 = -\frac{1+k^2}{3}; \quad \omega = K, \quad \tau = i \frac{K'}{K}$$

$$(63) \quad \begin{cases} \vartheta_1\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(v), & \vartheta_2\left(v + \frac{1}{2}\right) = -\vartheta_1(v) \\ \vartheta_3\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_4(v), & \vartheta_4\left(v + \frac{1}{2}\right) = \vartheta_3(v) \end{cases}$$

$$(70) \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = 4i\pi \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

(segue Cap. III).

$$(71) \quad \begin{cases} \vartheta_1(v) = 2q_0 q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \\ \vartheta_2(v) = 2q_0 q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \\ \vartheta_3(v) = q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}) \\ \vartheta_4(v) = q_0 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}) \end{cases}$$

$$(71') \quad q_0 = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \quad (75) \quad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}$$

$$(76) \quad \vartheta_2^2(0) + \vartheta_4^2(0) = \vartheta_3^4(0) \quad (78) \quad \vartheta_1'(0) = \pi \vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)$$

$$(79) \quad \begin{cases} \sqrt{e_1 - e_2} = i \sqrt{e_2 - e_4} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_1^2(0) \\ \sqrt{e_1 - e_3} = i \sqrt{e_3 - e_4} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_3^2(0) \\ \sqrt{e_2 - e_3} = i \sqrt{e_3 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_2^2(0) \end{cases} \quad (80) \quad \sqrt{K} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \vartheta_3(0)$$

$$(81^*) \quad \operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(u/2K)}{\vartheta_4(u/2K)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(u/2K)}{\vartheta_4(u/2K)}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(u/2K)}{\vartheta_4(u/2K)}$$

$$(85) \quad \vartheta_2^2(v) = -k' \vartheta_1^2(v) + k \vartheta_3^2(v), \quad \vartheta_4^2(v) = k \vartheta_1^2(v) + k' \vartheta_3^2(v)$$

$$(85') \quad \vartheta_2^2(v) - \vartheta_1^2(v) = \frac{k}{1-k'} [\vartheta_3^2(v) - \vartheta_4^2(v)], \quad \vartheta_2^2(v) + \vartheta_3^2(v) = \frac{1-k'}{k} [\vartheta_1^2(v) + \vartheta_4^2(v)]$$

$$(86^*) \quad \vartheta_1^2(v) + \vartheta_3^2(v) = \vartheta_2^2(v) + \vartheta_4^2(v) \quad (87) \quad \begin{cases} e_1 = \frac{\pi^2}{12\omega^2} [\vartheta_3^4(0) + \vartheta_4^4(0)] \\ e_2 = \frac{\pi^2}{12\omega^2} [\vartheta_2^4(0) - \vartheta_1^4(0)] \\ e_3 = -\frac{\pi^2}{12\omega^2} [\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)] \end{cases}$$

$$(88) \quad \sqrt[4]{\Delta} = \frac{\pi}{4\omega^3} \vartheta_1'^2(0)$$

$$(89) \quad \begin{cases} g_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4 [\vartheta_2^8(0) + \vartheta_3^8(0) + \vartheta_4^8(0)] \\ g_3 = \frac{4}{27} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6 [\vartheta_2^4(0) + \vartheta_3^4(0)] [\vartheta_3^4(0) + \vartheta_4^4(0)] [\vartheta_4^4(0) - \vartheta_1^4(0)] \end{cases}$$

$$(90) \quad \eta = -\frac{1}{12\omega} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} \quad (91) \quad \begin{cases} E(\varphi, k) = \frac{1}{2K} \frac{\vartheta_1'(u/2K)}{\vartheta_4(u/2K)} + \frac{E}{K} u \\ u = F(\varphi, k) \end{cases}$$

$$(96^*) \quad \begin{cases} \frac{\operatorname{cn} \gamma \operatorname{dn} \gamma}{\operatorname{sn} \gamma} \prod \left( \varphi, \frac{-1}{\operatorname{sn}^2 \gamma}, k \right) = \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta_1(v+\beta)}{\vartheta_1(v-\beta)} - \frac{\vartheta_4'(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} v \\ v = \frac{F(\varphi, k)}{2K}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2K}, \quad \log q = -\pi \frac{K'}{K} \end{cases}$$

(Da TANNERY-MOLK [12], t. IV, pp. 112-113).

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sn} u \, du &= -\frac{1}{k} \log (\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u) & \int \operatorname{cn} u \, du &= \frac{i}{k} \log (\operatorname{dn} u - ik \operatorname{sn} u) \\ \int \operatorname{dn} u \, du &= i \log (\operatorname{cn} u - i \operatorname{sn} u) & \int \frac{du}{\operatorname{sn} u} &= \log \frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} \\ \int \frac{du}{\operatorname{cn} u} &= \frac{1}{k'} \log \frac{\operatorname{dn} u + k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} & \int \frac{du}{\operatorname{dn} u} &= \frac{1}{ik'} \log \frac{\operatorname{cn} u + ik' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \\ \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \, du &= \frac{1}{k'} \log \frac{\operatorname{dn} u + k'}{\operatorname{cn} u} & \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \, du &= \frac{i}{kk'} \log \frac{ik' - k \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \\ \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \, du &= -\frac{1}{k} \log \frac{1 - k \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} & \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} \, du &= \log \frac{1 - \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \\ \int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \, du &= \log \frac{1 - \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} & \int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \, du &= \log \frac{1 + \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \\ \int \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \, du &= -\frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u & \int \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \, du &= -\operatorname{cn} u \\ \int \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \, du &= \operatorname{sn} u & \int \frac{du}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} &= \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} \, du + \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \, du \\ \int \operatorname{sn}^2 u \, du &= \frac{u}{k^2} - \frac{1}{k^2} E(u) = & \int \frac{du}{\operatorname{sn}^2 u} &= \left(1 - \frac{E}{K}\right) u - \frac{1}{2K} \frac{\partial_1'(u/2K)}{\partial_1(u/2K)} \\ &= \frac{1}{k^2} \left[ \left(1 - \frac{E}{K}\right) u - \frac{1}{2K} \frac{\partial_1'(u/2K)}{\partial_1(u/2K)} \right] \\ \int \frac{du}{\operatorname{cn}^2 u} &= & \int \frac{du}{\operatorname{dn}^2 u} &= \frac{1}{k'^2} \left[ \frac{E}{K} u + \frac{1}{2K} \frac{\partial_3'(u/2K)}{\partial_3(u/2K)} \right] \\ &= \frac{1}{k'^2} \left[ \left(k'^2 - \frac{E}{K}\right) u - \frac{1}{2K} \frac{\partial_2'(u/2K)}{\partial_2(u/2K)} \right] \\ \int \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \, du &= \log \operatorname{sn} u & \int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \, du &= -\log \operatorname{cn} u \\ \int \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \, du &= -\frac{1}{k^2} \log \operatorname{dn} u & \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} \, du &= \frac{1}{k'^2} \log \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \\ \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} \, du &= \log \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} & \int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} \, du &= \log \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \\ \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u} \, du &= \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} & \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} \, du &= -\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \\ \int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u} \, du &= -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} & \int \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u} \, du &= -\frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \\ \int \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} \, du &= \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} & \int \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} \, du &= \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \end{aligned}$$

CAPITOLO IV.

Trasformazioni del prim'ordine:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} \dot{\omega} = \omega \\ \dot{\omega}' = \omega + \omega' \end{cases}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \dot{\omega} = \omega' \\ \dot{\omega}' = -\omega \end{cases}$$

$$(3) \quad \mathcal{P}(u | \dot{\omega}, \dot{\omega}') = \mathcal{P}(u | \omega, \omega')$$

$$(A) \quad \dot{\eta} = \eta, \quad \dot{\eta}' = \eta + \eta' \quad (B) \quad \dot{\eta} = \eta', \quad \dot{\eta}' = -\eta$$

$$(9-9'A) \quad \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \omega_1, & \dot{\omega}_2 &= \omega_2 + 2\omega, & \dot{\omega}_3 &= \omega_2 \\ \dot{e}_1 &= e_1, & \dot{e}_2 &= e_3, & \dot{e}_3 &= e_2 \\ \dot{\sigma}_1 u &= \sigma_1 u, & \dot{\sigma}_2 u &= \sigma_3 u, & \dot{\sigma}_3 u &= \sigma_2 u \end{aligned}$$

$$(9-9'B) \quad \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \omega_3, & \dot{\omega}_2 &= \omega_2 - 2\omega, & \dot{\omega}_3 &= \omega_1 - 2\omega \\ \dot{e}_1 &= e_3, & \dot{e}_2 &= e_2, & \dot{e}_3 &= e_1 \\ \dot{\sigma}_1 u &= \sigma_3 u, & \dot{\sigma}_2 u &= \sigma_2 u, & \dot{\sigma}_3 u &= \sigma_1 u \end{aligned}$$

$$(10A) \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \sqrt{e_1 - e_2}, \quad \sqrt{e_2 - e_3} = i \sqrt{e_2 - e_1}, \quad \sqrt{e_1 - e_2} = \sqrt{e_1 - e_3}$$

$$(10B) \quad \sqrt{e_1 - e_3} = -i \sqrt{e_1 - e_2}, \quad \sqrt{e_2 - e_3} = -i \sqrt{e_1 - e_2}, \quad \sqrt{e_1 - e_2} = -i \sqrt{e_2 - e_3}$$

$$(11-11'A) \quad \dot{k} = \frac{ik}{k'}, \quad \dot{k}' = \frac{1}{k'}, \quad \dot{K} = k'K, \quad \dot{K}' = k'(K' - iK)$$

$$(11-11'B) \quad \dot{k} = k', \quad \dot{k}' = k, \quad \dot{K} = K', \quad \dot{K}' = K$$

(Per le formule di trasformazione di sn, cn e dn, vedi il quadro a pag. 168)

$$(14A) \quad F(\dot{\varphi}_A, \frac{ik}{k'}) = k' F(\varphi, k) \quad (14B) \quad F(\dot{\varphi}_B, k') = -i F(\varphi, k)$$

$$(15A) \quad \sin \dot{\varphi}_A = k' \sin \varphi / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}, \quad \cos \dot{\varphi}_A = \cos \varphi / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

$$(15B) \quad \sin \dot{\varphi}_B = -i \operatorname{tg} \varphi, \quad \cos \dot{\varphi}_B = \operatorname{sec} \varphi$$

$$(16A) \quad E(\dot{\varphi}_A, \frac{ik}{k'}) = \frac{1}{k'} E(\varphi, k) - \frac{k^2}{k'} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$(16B) \quad E(\dot{\varphi}_B, k') = i[E(\varphi, k) - F(\varphi, k) - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi]$$

$$(17A) \quad \dot{\tau} = 1 + \tau, \quad \dot{v} = v, \quad \dot{q} = -q$$

$$(17B) \quad \dot{\tau} = -\frac{1}{\tau}, \quad \dot{v} = \frac{v}{\tau}, \quad \log q \cdot \log \dot{q} = \pi^2$$

$$(18A) \quad \begin{cases} \dot{\vartheta}_1(v | 1 + \tau) = e^{\frac{i\pi}{\tau}} \dot{\vartheta}_1(v | \tau) \\ \dot{\vartheta}_2(v | 1 + \tau) = e^{\frac{i\pi}{\tau}} \dot{\vartheta}_2(v | \tau) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\vartheta}_3(v | 1 + \tau) = \dot{\vartheta}_4(v | \tau) \\ \dot{\vartheta}_4(v | 1 + \tau) = \dot{\vartheta}_3(v | \tau) \end{cases}$$

(segue Cap. IV).

$$(20B) \left\{ \begin{aligned} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{i\pi}{\tau} v^2} \vartheta_1(v|\tau) \\ \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{i\pi}{\tau} v^2} \vartheta_4(v|\tau) \\ \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{i\pi}{\tau} v^2} \vartheta_3(v|\tau) \\ \vartheta_4\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} e^{\frac{i\pi}{\tau} v^2} \vartheta_2(v|\tau) \end{aligned} \right. \quad (21B) \left\{ \begin{aligned} \vartheta_2\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} \vartheta_4(0|\tau) \\ \vartheta_3\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} \vartheta_3(0|\tau) \\ \vartheta_4\left(0 \middle| -\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{i}} \vartheta_2(0|\tau) \end{aligned} \right.$$

$$(22) \quad \vartheta_2(0) \sim \vartheta_3(0) \sim \sqrt{\frac{\pi}{-\log q}}, \quad (q \rightarrow 1-0)$$

Trasformazioni del second'ordine:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot L \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot L \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(31L) \quad \wp\left(u \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \wp u + \wp(u - \omega_1) - e_1$$

$$(31G) \quad \wp\left(u \middle| \omega, \frac{\omega'}{2}\right) = \wp u + \wp(u - \omega_3) - e_3$$

$$(31I) \quad \wp\left(u \middle| \omega, \frac{\omega + \omega'}{2}\right) = \wp u + \wp(u - \omega_2) - e_2$$

$$(34) \quad \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}$$

$$(35L) \quad \dot{e}_1 = e_1 + 2\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}, \quad \dot{e}_2 = e_1 - 2\sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3}, \quad \dot{e}_3 = -2e_1$$

$$(36L) \quad \zeta\left(u \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \zeta u + \zeta(u + \omega_1) + e_1 u - \eta_1$$

$$(37L) \quad \dot{\eta}_1 = \eta_1 + \frac{1}{2} e_1 \omega_1, \quad \dot{\eta}_2 = \eta_2 + \eta_3 + \frac{1}{2} e_1(\omega_2 + \omega_3), \quad \dot{\eta}_3 = 2\eta_3 + e_1 \omega_3$$

$$(38'L) \quad \sigma\left(u \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = e^{\frac{1}{2} e_1 u^2} \sigma u \cdot \sigma_1 u \quad (40L) \quad \sigma_3\left(u \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = e^{\frac{1}{2} e_1 u^2} \sigma_2 u \cdot \sigma_3 u$$

$$(42L) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_1\left(u \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right) &= e^{\frac{1}{2} e_1 u^2} (\sigma_1^2 u - \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \sigma^2 u) \\ \sigma_2\left(u \middle| \frac{\omega}{2}, \omega'\right) &= e^{\frac{1}{2} e_1 u^2} (\sigma_1^2 u + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3} \sigma^2 u) \end{aligned} \right.$$

$$(43-43'-43''L) \left\{ \begin{aligned} \sqrt{e_1 - e_3} &= (1+k') \sqrt{e_1 - e_3} \\ \sqrt{e_2 - e_3} &= (1-k') \sqrt{e_1 - e_3} \\ \sqrt{e_1 - e_2} &= 2\sqrt{k'} \sqrt{e_1 - e_3} \end{aligned} \right. \quad (44L) \quad \left\{ \begin{aligned} k &= (1-k')/(1+k') \\ k' &= 2\sqrt{k'}/(1+k') \end{aligned} \right.$$

(segue Cap. IV).

$$(45L) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sn}\left[(1+k')v, \frac{1-k'}{1+k'}\right] &= (1+k') \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v} \\ \operatorname{cn}\left[(1+k')v, \frac{1-k'}{1+k'}\right] &= \frac{1-(1+k') \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{dn} v} \\ \operatorname{dn}\left[(1+k')v, \frac{1-k'}{1+k'}\right] &= \frac{1-(1-k') \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{dn} v} \end{aligned} \right.$$

$$(44G) \quad \dot{k} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \dot{k}' = \frac{1-k}{1+k}$$

$$(45G) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sn}\left[(1+k)v, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] &= (1+k) \frac{\operatorname{sn} v}{1+k \operatorname{sn}^2 v} \\ \operatorname{cn}\left[(1+k)v, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] &= \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1+k \operatorname{sn}^2 v} \\ \operatorname{dn}\left[(1+k)v, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] &= \frac{1-k \operatorname{sn}^2 v}{1+k \operatorname{sn}^2 v} \end{aligned} \right.$$

$$(46L) \quad \dot{v} = 2v, \quad \dot{\tau} = 2\tau, \quad \dot{z} = z^2, \quad \dot{q} = q^2$$

$$\vartheta_1'(0|2\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\vartheta_2^2(0)\vartheta_4^2(0)} = \frac{1}{2} \frac{\vartheta_2(0)\vartheta_4'(0)}{\sqrt{\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)}}$$

$$(47L) \quad \vartheta_2(0|2\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\vartheta_3^2(0) - \vartheta_4^2(0)}$$

$$\vartheta_3(0|2\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\vartheta_3^2(0) + \vartheta_4^2(0)}$$

$$\vartheta_4(0|2\tau) = \sqrt{\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)}$$

$$(48L) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_1(2v|2\tau) &= \frac{\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(0|2\tau)} \\ \vartheta_2(2v|2\tau) &= \frac{\vartheta_2^2(v) - \vartheta_1^2(v)}{2\vartheta_3(0|2\tau)} = \frac{\vartheta_3^2(v) - \vartheta_4^2(v)}{2\vartheta_2(0|2\tau)} \\ \vartheta_3(2v|2\tau) &= \frac{\vartheta_2^2(v) + \vartheta_1^2(v)}{2\vartheta_2(0|2\tau)} = \frac{\vartheta_3^2(v) + \vartheta_4^2(v)}{2\vartheta_3(0|2\tau)} \\ \vartheta_4(2v|2\tau) &= \frac{\vartheta_3(v)\vartheta_4(v)}{\vartheta_4(0|2\tau)} \end{aligned} \right.$$

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta_1(2v) &= \frac{2\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_4(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_4(0)} \\ \vartheta_2(2v) &= \frac{\vartheta_2^2(v)\vartheta_3^2(v) - \vartheta_1^2(v)\vartheta_4^2(v)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3^2(0)} \\ \vartheta_3(2v) &= \frac{\vartheta_2^2(v)\vartheta_3^2(v) + \vartheta_1^2(v)\vartheta_4^2(v)}{\vartheta_2^2(0)\vartheta_3(0)} \\ \vartheta_4(2v) &= \frac{\vartheta_3^4(v) - \vartheta_2^4(v)}{\vartheta_4^2(0)} = \frac{\vartheta_4^4(v) - \vartheta_1^4(v)}{\vartheta_4^2(0)} \end{aligned} \right.$$

(segue Cap. IV).

$$(52-54) \quad \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}} = \frac{2}{a+b} \mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \right) = \frac{2}{a} \mathbf{K} \left( \frac{b}{a} \right)$$

$$(53'L) \quad \sin \psi = \frac{(1+k') \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (53''L) \quad \operatorname{tg}(\psi - \varphi) = k' \operatorname{tg} \varphi$$

$$(55-56L) \quad \dot{\mathbf{K}} = \frac{1+k'}{2} \mathbf{K}, \quad \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{1+k'} (\mathbf{E} + k' \mathbf{K})$$

$$(55'L) \quad F\left(\psi, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = (1+k)F(\varphi, k)$$

$$(56'L) \quad E\left(\psi, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{2}{1+k'} [E(\varphi, k) + k'F(\varphi, k)] - \frac{1-k'}{1+k'} \sin \psi$$

$$(59) \quad \mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \prod_{r=0}^{\infty} \frac{2}{1+k_r'}$$

$$\left( k_0' = k', k_{n+1}' = \frac{2\sqrt{k_n'}}{1+k_n'}, \text{ oppure } k_n' = \frac{b_n}{a_n} \text{ con } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases} \right)$$

$$(65) \quad M(a_0, b_0) = \frac{\pi a_0}{2\mathbf{K}(\sqrt{1-b_0^2/a_0^2})} (a_0 \geq b_0), \quad (66) \quad \mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-k^2})}$$

$$(67) \quad M[\vartheta_3^2(0), \vartheta_4^2(0)] = 1$$

$$(69) \quad 2k^2 \frac{d\mathbf{E}}{dk^2} = \mathbf{E} - \mathbf{K}, \quad 2(1-k^2) \frac{d(\mathbf{K}-\mathbf{E})}{dk^2} = \mathbf{E}$$

$$(69') \quad k \frac{d\mathbf{E}}{dk} = \mathbf{E} - \mathbf{K}, \quad k \frac{d\mathbf{K}}{dk} = \frac{\mathbf{E}}{1-k^2} - \mathbf{K}$$

$$(70) \quad 2k^2 \frac{\partial E}{\partial k^2} = E - F, \quad 2(1-k^2) \frac{\partial(F-E)}{\partial k^2} = E - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$(71) \quad \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{E}{1-k^2} - \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{1-k^2 \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

CAPITOLO V.

Se è  $\varphi_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{k' \operatorname{tg} \varphi_1}$  ( $0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$ ), si ha (3)  $F(\varphi_2, k) = \mathbf{K}(k) - F(\varphi_1, k)$ .

Se  $s$  è l'arco dell'ellisse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  compreso fra i punti  $(x=0, y=b)$  e  $(x=a \sin \varphi, y=b \cos \varphi)$  si ha (per  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ):

$$(5-6) \quad s = aE(\varphi, k) \text{ con } k = \sqrt{a^2 - b^2}/a.$$

Se  $T$  è la durata d'una oscillazione completa di un pendolo di lunghezza  $l$ , la cui massima elongazione angolare è  $\pm 2\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ), si ha

$$(46^*) \quad T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \mathbf{K}(\sin \alpha).$$

CONFRONTO DI ALCUNE NOTAZIONI

	Nel testo	Jacobi	Weierstrass	Tannery-Molk	Halphen	Bianchi	Jahnke-Emde
	$\omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega + \omega', \omega_3 = \omega'$	—	$\omega, \omega', \omega'$	$\omega_1, -\omega_2, \omega_3$	$\omega, \omega', \omega'$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	$\omega, -\omega'$
	$\eta_1 = \eta, \eta_2 = \eta + \eta', \eta_3 = \eta'$ $\bar{\eta} = 2m\eta + 2n\eta'$	—	$\eta, \eta', \eta'$ $2\bar{\eta}$	$\eta_1, -\eta_2, \eta_3$	$\eta, \eta', \eta'$ $2\bar{\eta}$	$\eta_1, \eta_2, \eta_3$	—
	$\sqrt{e_1 - e_2}, \sqrt{e_1 - e_3}, \sqrt{e_2 - e_3}$	—	come nel testo	$\sqrt{e_1 - e_2}, \sqrt{e_1 - e_3}, -\sqrt{e_2 - e_3}$	come nel testo	come nel testo	—
	$\vartheta_1(\varphi)$	$H(2\mathbf{K}\varphi)$	$\vartheta_1(\varphi)$	$\vartheta_1(\varphi)$	$\vartheta_1(\varphi)$	$\vartheta_1(\varphi)$	$\vartheta_1(\varphi)$
	$\vartheta_2(\varphi)$	$H_1(2\mathbf{K}\varphi)$	$\vartheta_2(\varphi)$	$\vartheta_2(\varphi)$	$\vartheta_2(\varphi)$	$\vartheta_2(\varphi)$	$\vartheta_2(\varphi)$
	$\vartheta_3(\varphi)$	$\Theta_1(2\mathbf{K}\varphi)$	$\vartheta_3(\varphi)$	$\vartheta_3(\varphi)$	$\vartheta_3(\varphi)$	$\vartheta_3(\varphi)$	$\vartheta_3(\varphi)$
	$\vartheta_4(\varphi)$	$\Theta(2\mathbf{K}\varphi)$	$\vartheta_4(\varphi)$	$\vartheta_4(\varphi)$	$\vartheta_4(\varphi)$	$\vartheta_4(\varphi)$	$\vartheta(\varphi)$
	$q$ $\frac{1}{2\mathbf{K}} \frac{\vartheta_1'(u/2\mathbf{K})}{\vartheta_4(u/2\mathbf{K})}$	$q$ $Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$	$h$ $Z(u)$	$q$ $Z(u)$	$q$ —	$q$ $Z(u)$	$q = e^{\pi u}$ $2\pi u$

N. B. - Le quantità designate nel testo coi simboli indicati nella prima colonna, sono designate dagli altri A.A. coi simboli indicati nelle successive colonne. La citazione JACOBI si riferisce ai *Fundamenta nova*.

## ELENCO BIBLIOGRAFICO

## A). Teoria ed applicazioni delle funzioni ellittiche.

- [1]. APPELL-LACOUR: *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*. (Paris, Gauthier-Villars, 1897).
- [2]. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*. (2ª Ed.; Pisa, Spoerri, 1916).
- [3]. DURÈGE-MAURER: *Theorie der elliptischen Funktionen*. (5ª Ed.; Leipzig, Teubner, 1907).
- [4]. ENRIQUES-CHISINI: *Funzioni ellittiche ed abeliane*. (Vol. IV della *Teoria geometrica delle equazioni, ecc.*). (Bologna, Zanichelli, 1934).
- [5]. FRICKE: *Articolo IIB3* in « *Encyklop. d. Math. Wissen.* » (Bd. II<sup>2</sup>, 177-348), (1913).
- [6]. FRICKE: *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen*. I, II. (Leipzig, Teubner, 1916-1922).
- [7]. HALPHEN: *Traité des fonct. ellipt. et de leurs applications*. I, II e III (frammenti). (Paris, Gauthier-Villars, 1886-1891).
- [8]. HURWITZ-COURANT: *Funktionentheorie*. (3ª Ed.; Berlin, Springer, 1929).
- [9]. KING: *On the direct numerical calculation of elliptic functions and integrals*. (Cambridge, University press, 1924).
- [10]. LEGENDRE: *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*. I, II e suppl. (Paris, de Huzard-Courcier, 1825-1828).
- [11]. MONTESSUS DE BALLOR: *Leçons sur les fonctions elliptiques en vue de leurs applications*. (Paris, Gauthier-Villars, 1917).
- [12]. TANNERY-MOLK: *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*. I, II, III e IV. (Paris, Gauthier-Villars, 1893-1902).
- [13]. WEBER: *Lehrbuch der Algebra*. I, II, III. (2ª Ed.; Braunschweig, Vieweg, 1895-1908).
- [14]. WEIERSTRASS-SCHWARZ: *Formeln und Lehrsätze usw.* (Göttingen, 1885; 2ª Ed. Berlin, Springer, 1893; Ed. francese: Paris, Gauthier-Villars, 1894).
- [15]. WHITTAKER-WATSON: *Modern Analysis*. (4ª Ed.; Cambridge, University press, 1927).

## B). Tavole numeriche.

- [16]. ADAMS: *Smithsonian mathematical formulae...* (Washington, 1922). (Valori a 10 decimali di  $F(\varphi)$ ,  $Z(u)$ ,  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_4$ , ecc.).
- [17]. HAYASHI: *Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderer Funktionen*. (Berlin, Springer, 1930). (Valori naturali a 8 decimali corrispondenti ai logaritmi di NAGAOKA e SAKURAI [25]).
- [18]. HAYASHI: *Tafeln für die Differenzenrechnung usw.* (Berlin, Springer, 1933). (Le precedenti tavole [17] vengono, nei riguardi delle funzioni ellittiche, completate con l'aggiunta di una tabella a 10 decimali dell'integrale completo E).
- [19]. HOÛEL: *Recueil de formules et de tables numériques*. (Paris, Gauthier-Villars, 1901). (Tavole a 3 o 4 decimali di  $E$ ,  $F$ , ecc. nonché di funzioni circolari, iperboliche, ecc. Ricca collezione di formule, in parte non facilmente reperibili altrove).
- [20]. JAHNKE-EMDE: *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*. (2ª Ed.; Leipzig, Teubner, 1933). (Ricca collezione di tabelle numeriche, formule e grafici delle più importanti funzioni, fra le altre, delle ellittiche. Originale, perspicua illustrazione grafica delle funzioni nel campo complesso. In particolare, tabelle numeriche a 4 decimali di  $F$ ,  $E$ ,  $\log q$  in funzione di  $\arcsin k$ , ecc.).
- [21]. LEGENDRE: *Tafeln der elliptischen Integrale*. (Stuttgart, Wittwer, 1931). (Riproduzione fototipica delle tavole numeriche di  $F$  ed  $E$  a 9 decimali contenute nel 2º vol. del *Traité* di LEGENDRE).
- [22]. MILNE-THOMSON: *Proc. London math. Soc.*, 33 (1930), pp. 160-164. (Tavole di  $K$ ,  $E$  e  $\vartheta_3^{-2}(0)$  con 10 decimali).
- [23]. MILNE-THOMSON: *The Zeta Function of Jacobi*. (Reprint from the *Proc. R. Soc. Edinburgh*, 52, II, 1931-1932). (Valori di detta funzione con 7 decimali).
- [24]. MILNE-THOMSON: *Die elliptischen Funktionen von Jacobi*. (Berlin, Springer, 1931). (Valori naturali, con 5 decimali, di  $sn u$ ,  $cn u$ ,  $dn u$ , per  $u$  procedente di centesimo in centesimo e  $k^2$  di decimo in decimo).
25. NAGAOKA-SAKURAI: *Table n. 1*. (Tokyo, Inst. of phys. and chem. res., 1922). (Logaritmi delle funzioni thetanulle, dei quozienti delle theta, degli integrali completi, ecc., con 7 decimali).

INDICI

INDICE ALFABETICO <sup>(1)</sup>.

- ABEL 4, 5, 6, 18.  
 ADAMS 210, 264.  
 Aggiunta di semiperiodi all'argom. di  $\wp$  36.  
 — di sn, en, dn 119.  
 Amplitudine 4, 171.  
 Andamento dei valori reali di  $\wp$  52, 54, 56.  
 — di sn, en, dn 109-110, 118.  
 — delle funz.  $\wp$  137-140.  
 APOLLONIO (cerchio di —) 241.  
 APPELL-LACOUR 263.  
 Araba Fenice 198.  
 Area dei parallelogr. dei periodi 12.  
 Asta caricata di punta 226-235.  
 BERNOULLI 2, 53.  
 BESSEL 220, 222.  
 BIANCHI (L.) VII, 6, 40, 74, 81, 95, 142, 163, 178, 181, 185, 187, 262, 263.  
 Biplano 239.  
 Birapporto delle radici della bi-quadr. fondamentale 71-73.  
 Bisezione dell'arg. (per sn, en, dn) 120.  
 Calcolo di  $\wp(\omega/2)$  189.  
 — di integr. ell. mediante la trasf. di LANDEN 202-205.
- Calcolo numer. delle funz. di WEIERSTRASS 57-58, 151, 209-210, 244.  
 — delle funz. sn, en, dn 109-110, 115-116, 151, 213.  
 — delle funz.  $\wp$  131-132, 176, 210.  
 Campo fondamentale 14, 180-181.  
 Carico critico 226-227, 231, 235.  
 CHISINI, v. ENRIQUES-CHISINI.  
 Cicli della riemanniana ellitt. 82-84.  
 CLAIRAUT (teorema di —) 220.  
 COLONNETTI 228.  
 Comportamento delle funzioni thetanulle per  $q \rightarrow 1$  177.  
 CONFORTO-VIOLA 207.  
 Congruenza fra sostituzioni 170.  
 Convenzione sul rapp. dei periodi 12-13.  
 — sul prodotto di sostituzioni 164.  
 — di scrittura nella teoria delle funz. ell. 5, 14, 29, 131.  
 — — della trasformaz. 165-166.  
 Corpo di funz. ellittiche 15.  
 Costruzione della funz.  $\wp$  20-22.  
 COURANT, v. HURWITZ-COURANT  
 Cubica connessa con la funz.  $\wp$  34.  
 Dämonen 182.  
 Data di nascita delle funz. ell. 2.  
 Definizione di funzione ellittica 14.
- Degenerazione delle funz. di WEIERSTRASS 58-59.  
 — delle funz. sn, en, dn 123.  
 Derivate di  $\wp$  (d'ordine sup.) 32.  
 — di sn, en, dn 111.  
 — delle funz.  $\wp$  137, 144-145, 157-158, 244-246.  
 — delle funz. thetanulle 136-137, 151.  
 — di  $F$  ed  $E$  rispetto a  $k^2$  207.  
 — di  $K$  ed  $E$  rispetto a  $k^2$  207.  
 Determinazione dei periodi 29, 54, 84-86, 105-106.  
 Differenziale ellittico 80.  
 Dipendenza da parametri (delle funz. ellittiche) 23, 159.  
 Discriminante 29, 51, 150, 188.  
 DOETSCH 141.  
 Duplicazione dell'arg. per  $\wp$  36.  
 — per  $\sigma$  50.  
 — per sn, en, dn 120.  
 — per le funz.  $\wp$  197.  
 DURÈGE-MAURER 74, 263.  
 Effetto di una trasf. di 1° ordine sulle funz.  $\wp$ ,  $\zeta$  e  $\sigma$  163.  
 — su  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ , ecc. 164-165.  
 — sui radicali  $\sqrt{e_a - e_\beta}$  165.  
 — su  $k$ ,  $k'$ ,  $K$  e  $K'$  166.  
 — sulle funz. sn, en, dn 166-170.  
 — sulle funz.  $F$  ed  $E$  di LEGENDRE 171-173.  
 — sulle funz.  $\wp$  174-177.  
 — su  $\tau$ ,  $v$ ,  $q$  174.  
 — di una trasf. di 2° ordine su  $\wp$  185-188.  
 — della trasf. di LANDEN su  $\wp$  186.  
 — su  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  188-189.  
 — su  $\zeta$  189-190.  
 — su  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  190.  
 — sulle funz.  $\sigma$  190-191.  
 — sui radicali  $\sqrt{e_a - e_\beta}$  192-193.  
 — su  $k$  e  $k'$  193.  
 — sulle funz. sn, en, dn 193-194.  
 — su  $\tau$ ,  $v$ ,  $z$  e  $q$  195.  
 — sulle funz. thetanulle 195-196.  
 — sulle funz.  $\wp$  196-197.  
 Effetto della trasf. di LANDEN su  $K$  ed  $E$  200-201.  
 — sulle funz.  $F$  ed  $E$  201-202.  
 — della trasf. di GAUSS sulle funz. sn, en e dn 194.  
 Eliminazione degli immaginari dalle form. per gli integrali di 3° specie 157-158.  
 — del caso  $|q| > e^{-\pi}$  176.  
 — —  $\Delta < 0$  188.  
 Ellisse (rettificazione dell' —) 1, 213-214.  
 Ellissoide di rot. (geodetiche dell' —) 219-226.  
 EMDE, v. JAHNKE-EMDE.  
 ENRIQUES-CHISINI VII, 263.  
 Equazione  $\wp u = c$  24-25.  
 — a der. parz. delle funz.  $\wp$  141.  
 — alg. fra  $\wp$  e  $\wp'$  26-28.  
 — fra  $J$  e  $k^2$  183.  
 — diff. delle funzioni ellitt. 39.  
 — della funz.  $\wp$  26-28, 102.  
 — di sn, en, dn 111.  
 Equianarmonico (caso) (31), 56-57, 209.  
 Equivalenza di periodi 11, 23-24, 159.  
 — di trasf. di 2° ordine 185, 187.  
 Espressione di integrali ell. mediante funz. di WEIERSTRASS 89-93, 95.  
 — med. funz.  $\wp$  151-158, 223-225.  
 EULER 2, 3, 227.  
 FAGNANO (di) 2, 53.  
 FERRARI 239, 242, 244, 245, 246.  
 Forma canonica di WEIERSTRASS 65.  
 — di LEGENDRE 69.  
 Formula d'omogeneità di  $\wp$  23, 29, 57.  
 — di  $\wp'$  23, 57.  
 — di  $\zeta$  e  $\sigma$  57.  
 Formule di ricorrenza fra int. ell. generici 63-64.  
 — fra int. ell. di WEIERSTRASS 69.  
 — di LEGENDRE 79-80.  
 FOURIER (serie di —) 127.  
 FRICKE VII, 178, 206, 263.

<sup>(1)</sup> I nomi, continuamente ripetuti nel testo, di JACOBI, LEGENDRE e WEIERSTRASS nonchè espressioni quali: *funzioni ellittiche*, *funzioni intere*, ecc. non sono qui prese in considerazione.

- Funzione*  $\wp$  5, 19 e seg.  
 —  $\wp'$  22 e seg.  
 — sn, cn, dn 5, 97 e seg.  
 —  $\vartheta$  5, 123 e seg.  
 — thetanulle 145 e seg.  
 —  $\zeta$  20, 27, 33, 40 e seg.  
 —  $\sigma$  5, 45 e seg.  
 —  $\sigma_n$  99 e seg.  
 — lemniscatica 53-54.  
 —  $F, E, \Pi$  di LEGENDRE 3, 79 e seg.  
 —  $E(u) \equiv el u$  152.  
 —  $Z(u) \equiv zn u$  152.  
 —  $K(k)$  86 e seg.  
 —  $E(k)$  90 e seg.  
*Funzioni* automorfe e modulari 178.  
 — iperellittiche e abeliane 6.  
 — ipergeometriche 206.  
 — periodiche 6.  
 — ellittiche (definizione) 14.  
 — — in senso stretto e lato 14.  
 — — olomorfe (inesistenza di —) 16.  
 — — di ordine 1 (inesistenza di —) 17.  
 — — con ordine numero primo 17-18.  
 — — con gli stessi zeri e poli 16.  
 — — generali (proprietà delle —) 40.  
 — — di WEIERSTRASS ad invarianti reali 50-51, 85.  
 GAUSS 4, 9, 187, 194, 205, 206.  
 GECKELER 232.  
 GEIGER-SCHEEL 228.  
*Geodetiche* dell'ellissoide di rotazione 219-226.  
 GORDAN 182.  
*Grado* di una trasf. di periodi 163.  
*Gruppo* 178.  
 — modulare 180.  
 HALPHEN 54, 137, 206, 262, 263.  
 HAMEL 207.  
 HAYASHI 210, 264.  
 HELMERT 220.  
 HOÜEL 74, 80, 156, 157, 210, 221, 224, 226, 264.  
 HURWITZ-COURANT 6, 81, 185, 263.  
*Identità* di due funz.  $\wp$  23-24, 159.  
 — di JACOBI 147.  
*Integrale completo* di 1<sup>a</sup> specie  $K$  86 e seg.  
 — — di 2<sup>a</sup> specie  $E$  90 e seg.  
 — — di 3<sup>a</sup> specie 207.  
*Integrali ellittici* 2-3, 61, e seg.  
 — — di LEGENDRE 3, 78-80 e seg.  
 — — di WEIERSTRASS 69, 84-85, 89, 91-93, 152-153.  
 — — di 1<sup>a</sup> specie 61, 80-87.  
 — — di 2<sup>a</sup> specie 61, 87-90.  
 — — di 3<sup>a</sup> specie 61, 79, 90-93, 151-158.  
 — iperellittici e abeliani 6.  
*Integrazione* di funz. ell. 93-94, 252, 257.  
*Interpretazione geom.* delle funz.  $\wp$  e  $\wp'$  34.  
 — — della trasf. di LANDEN 199.  
*Interpolazione* (doppia) 211-213.  
*Invariante assoluto* 178-180, 183.  
*Invarianti* di  $\wp$  (28), 29, 67-68, 150.  
 — irrazionali 29.  
*Inversione* di integrali ell. 94.  
*Iperbole* (rettificazione dell' —) 215-219.  
 JAHNKE-EMDE 30, 57, 79, 82, 108, 139, 140, 194, 207, 209, 210, 212, 213, 219, 222, 223, 252, 262, 264.  
 KING 263.  
 LACOUR, v. APPELL-LACOUR.  
 LANDEN (trasf. di —) 187 e seg.  
 LAPLACE (trasf. di —) 141.  
 LAURENT (serie e teorema di —) 127.  
*Legame* algebr. fra funz.  $\wp$  160-161.  
*Limitatezza* degli integrali ell. di 1<sup>a</sup> specie 81-82.  
*Limitazioni superiori* per  $|q|$  131.  
 LIOUVILLE (teorema di —) 16, 82.  
*Logaritmi* delle funz.  $\vartheta$  142-145.  
 MAURER, v. DURÈGE-MAURER  
*Media aritmetico-geometrica* 205-206

- MILNE-THOMSON 110, 210, 264.  
 MITTAG-LEFFLER (teorema di —) 20.  
*Modulo* 70 e seg.  
 MOLK, v. TANNERY-MOLK.  
*Moltiplicazione complessa* (funzioni ellittiche a —) 53.  
 MONTESSUS DE BALLOR 263.  
 NAGAOKA-SAKURAI 210, 264.  
*Nodi* (della rete dei periodi) 9.  
 NYSTRÖM 152.  
*Ordine* di una funz. ell. 16.  
 — di una trasf. di periodi 163.  
*Parte immaginaria* del rapporto dei periodi 12-13.  
*Pendolo* 235-238.  
*Periodi* dell'int. ell.  $F$  171.  
 — equivalenti 10-11, 23, 85, 179.  
 — primitivi 10, 15, 55.  
*Periodicità* (di una funzione) 6-13.  
 — delle funz. sn, cn, dn 5, 103-104.  
 — —  $\vartheta$  125.  
*Prodotto* di due sostit. 164, 184.  
*Proprietà* generali delle funz. ell. 40.  
*Punti equivalenti* 8, 14.  
*Quadri* di valori delle funz. sn, cn, dn 107, 119, 121.  
*Quadro sinottico* per la rid. a forma canonica degli integrali ell. 76-77.  
 — — delle relaz. fra funz.  $\vartheta$  136.  
 — — delle trasf. di 1<sup>o</sup> ordine di sn, cn, dn 168.  
 — — — delle funz.  $F$  ed  $E$  173.  
 — — pel calcolo degli integr. di 3<sup>a</sup> specie 156.  
*Radicali* del tipo  $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$  100, 145, 148, 165, 192-193, 262.  
*Rapida convergenza* delle serie  $\vartheta$  131-132.  
*Rapporto dei periodi* 7, 9, 12-13, 23, 99, 124, 179-180.  
*Rappresentazione* di funzioni ell. mediante  $\wp$  37 e seg.  
*Rappresentazione* di funz. ell. mediante  $\wp$  e  $\zeta$  43-44.  
 — — mediante  $\sigma$  48-49.  
 — grafica di  $\wp$  30, 31, 34, 52-56.  
 — — di  $F$  82-83.  
 — — di  $K$  86.  
 — — di  $E$  90.  
 — — di sn, cn, dn 108-110, 118.  
 — — delle funz.  $\vartheta$  138-140.  
 — integrale della funz.  $\wp$  26, 28.  
*Razionalità* delle relazioni alg. fra funz.  $\wp$  161-162.  
*Relazione* di LEGENDRE 42, 114.  
 — di period. della funz.  $\zeta$  41.  
 — — della funz.  $\sigma$  48.  
 — — delle funz.  $\sigma_n$  102.  
 — fra  $\wp$  e  $\wp'$  26, 28, 102.  
 — fra  $g_2, g_3$  ed  $e_1, e_2, e_3$  28.  
 — fra funz. ell. coi stessi periodi 39.  
 — fra  $k$  ed  $e_1, e_2, e_3$  98, 107, 134.  
 — fra  $k'$  ed  $e_1, e_2, e_3$  105, 107.  
 — fra  $k$  e  $q$  149.  
*Relazioni* fra  $g_2, g_3$  e i coeff. della biquadr. fondamentale 67.  
 — fra sn, cn, dn e  $\wp$  98.  
 — fra le funz.  $\sigma$  e  $\wp$  99-100.  
 — fra sn, cn, dn e le funz.  $\sigma$  100-101, 103.  
 — fra le funz.  $E, \zeta$  e dn 112-113.  
 — fra  $E, E'$  ed  $\eta, \eta'$  113.  
 — fra le funz.  $\vartheta$  125-126, 135-136.  
 — fra le funz.  $\vartheta$  e le  $\sigma$  133.  
 — — e  $\wp, \wp', \zeta$  133-134.  
 — — e la funz.  $E$  151.  
 — — e gli integr. ell. di 3<sup>a</sup> specie 153, 156.  
 — fra le funz. thetanulle ed  $e_1, e_2, e_3$  150.  
 — — e  $g_2, g_3, \Delta$  150.  
 — — e i radic.  $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$  148.  
 — — e  $k, k'$  146.  
 — — e  $K$  148.  
 — — ed  $\eta$  151.  
*Relazioni algebriche* fra le funz. sn, cn, dn 97.  
 — — fra le funz.  $\sigma$  101.

*Relazioni algebriche* fra le funz.  $\wp$  133, 149-150.  
 — — fra le funz. thetanulle 146-147.  
 — *trascendenti* fra le medesime 205-206.  
*Residui* dei poli di una funz. ell. 17.  
 — — di sn, cn, dn 120.  
*Rete* dei periodi 9.  
 — modulare 182.  
*Reti* equivalenti 10-11, 23.  
*Rettificazione* dell'ellisse 1, 213-214.  
 — dell'iperbole 215-219  
*Riduzione* di integr. ell. a 3 tipi 61-65.  
 — — a forma canonica 65-80.  
 — alla forma can. di LEGENDRE 70-80, 194-195.  
 — — di WEIERSTRASS 65-69.  
*Riflessione* (analitica) 179, 181, 243.  
  
*Saetta* di flessione 229.  
 SAKURAI, v. NAGAOKA-SAKURAI.  
 SCHEEL, v. GEIGER-SCHEEL.  
*Schemi* di distr. di zeri e poli 104, 116-117, 126.  
 SCHWARZ 243, 263.  
*Scomposizione* delle sost. di 1° ordine 164.  
*Segni* di sn, cn, dn 116-117.  
 — dei radicali  $\sqrt{\wp - e_\alpha}$  e  $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$  100.  
*Serie ipergeometriche* 206.  
*Sistema completo* di poli (o di zeri) 43.  
*Somma* dei residui di una funz. ell. 17.  
*Somme*  $S_4, S_6, S_8, \dots$  27, 32-33.  
*Sostituzioni* generatrici delle trasf. di 1° ordine 164.  
 — A e B 164.  
 — C, D ed E 167.  
 — L, G ed I 185, 187.  
 — di 1° ordine che non alterano sn, cn, dn 169-170.  
 — di ordine sup. 184 e seg.  
 — di 2° ordine 185.  
 — elementari 187.  
 — equivalenti 185.  
*Superficie* di RIEMANN 81.  
  
*Sviluppo* in prod. inf. di  $\sigma$  46.  
 — — delle  $\wp$  142.  
 — in serie di  $\wp, \wp', \zeta$  33.  
 — di  $\sigma$  47.  
 — di K 87.  
 — di E 90.  
 — di sn, cn, dn 111.  
 — delle funz.  $\wp$  128-130.  
 — delle funz. thetanulle 131.  
 — dei log. delle  $\wp$  142-145.  
  
*Tabelle* numeriche per le funz. di WEIERSTRASS 57-58, 209.  
 — — per le funzioni ell. in genere 209 e seg.  
 TANNERY-MOLK 140, 163, 171, 252, 257, 262, 263.  
*Teorema* di ABEL 6, 18-19.  
 — di JACOBI sui periodi di una funz. 7-10.  
 — d'addizione di  $\wp$  33-36, 45, 249, 250.  
 — — delle funz. ell. generali 39.  
 — — di  $\zeta$  45.  
 — — di  $\sigma$  49-50.  
 — — delle funz. sn, cn, dn 114-115, 254.  
 — — della funz. F 122, 212, 218.  
 — — della funz. E 123, 218.  
 — — delle funz.  $\wp$  140.  
 — — integrali per le  $\wp$  141.  
 — sui punti di livello 16-17.  
 — sulle funz. anal. periodiche 126-127.  
 — sulle funzioni  $\wp$  legate algebricamente fra loro 160-161.  
*Trasformate* di LAPLACE delle funz.  $\wp$  141.  
*Trasformazione* delle funzioni ell. (teoria della  $\rightarrow$ ) 159 e seg.  
 — di GAUSS (delle funz. ell.) 187, 194.  
 — di LANDEN 187 e seg.  
 — (funzionale) di LAPLACE 141.  
 — irrazionale 187, 194.  
*Trasformazioni* di 1° ordine delle funz. di WEIERSTRASS 163.

*Trasformazioni* di 1° ordine delle funz. sn, cn, dn 166-170.  
 — — delle funz. F ed E 171-173.  
 — — delle funz.  $\wp$  174-177.  
 — di 2° ordine delle funz. di WEIERSTRASS 185-191.  
 — — delle funz. sn, cn, dn 193-194.  
 — — delle funz.  $\wp$  195-197.  
 TRICOMI 5, 87.  
  
*Uguaglianze asintotiche* 177.  
  
*Valori* di  $\wp$  per arg. reali 50-57.  
 — — per arg. imm. puri 58.  
 — di sn, cn, dn 107, 121.  
 — — per arg. reali 109-110.  
 — — per arg. imm. 116.  
 — delle funz.  $\wp$  per arg. reali 137-140.  
 VIOLA, v. CONFORTO e VIOLA.  
  
 WALLIS 2.  
 WEBER, 67, 163, 263.  
 WHITTAKER-WATSON VII, 263.  
  
 YOUNG (modulo di — *fittizio*) 234.  
  
*Zeri* di  $\wp'$  25.  
 — delle funz.  $\sigma_\alpha$  104.  
 — e poli di sn, cn, dn 104, 116-117.  
 — delle funz.  $\wp$  126.  
  
 ALCUNI SIMBOLI (†):  
 $e_1, e_2, e_3$  25, 28, 134, 150, 165, 188-189.  
 E, E' 90, 113-114, 201, 206, 214.  
 $g_2, g_3$  28, 67, 150, 180.  
 J 178-180, 183.  
 $k, k'$  70-74, 98, 105, 107, 113, 134, 146, 149, 166, 168, 170, 183, 193, 195, 202.  
 K, K' 86-87, 103-106, 113-114, 123, 134, 148, 166, 168, 171, 200-206, 238.  
 $q$  125, 131, 139, 149, 174, 176, 195, 262.  
 $q_0$  142.  
 $S_4, S_6, \dots$  27, 32-33.  
 $v$  (per le sn, cn, dn) 103; (per le funzioni  $\wp$ ) 124, 174, 195.  
 $w$  19.  
 $z$  125, 195.  
 $\Delta$  29, 51, 150, 188.  
 $\eta, \eta'$  41, 90, 113, 151, 164.  
 $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  42, 190, 262.  
 $\tilde{\eta}$  47, 262.  
 $\tau$  12, 24, 124, 174, 179-180, 195.  
 $\omega, \omega'$  11 e seg. 262.  
 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  25 e seg., 262.

(†) Si indicano le pagine dove si trovano la definizione dei simboli appresso indicati e le più importanti formule che ad essi si riferiscono.

ERRATA-CORRIGE

- Pag. 44, riga 14, in luogo di: *Per la* (6)...., leggere: *Per la* (66)....  
 • 55, formule (86), il primo membro della 2° form. dev'essere  $\bar{\omega}'$  e non  $\bar{\omega}$ .  
 • 87, formula (41), entrambi i logaritmi sono *iperbolici*, cioè in base  $e$ .  
 • 141, formule (69), il 2° membro della 4ª formula deve essere preceduto dal segno —.  
 • 207, riga 6 dal basso, in luogo di: LEGENDRE [8], leggere: LEGENDRE [10].  
 • 217, formula (12'), in luogo di:  $tg^*$ , leggere:  $tg \varphi^*$ .  
 • 252, formula (48), entro la [ ] i due + sono da cambiare in —, come è a p. 90.

## INDICE DELLA MATERIA

PREFAZIONE . . . . . Pag. v

## CAPITOLO I.

## Funzioni ellittiche di Weierstrass.

§ 1. - Introduzione storica . . . . .	Pag. 1
§ 2. - Sui periodi di una funzione analitica uniforme . . . . .	» 6
§ 3. - Funzioni ellittiche generali . . . . .	» 14
§ 4. - La funzione $\wp u$ di Weierstrass . . . . .	» 19
§ 5. - Prime proprietà della funzione $\wp u$ . Relazione fra $\wp u$ e $\wp' u$ . . . . .	» 22
§ 6. - Ulteriori proprietà della funzione $\wp u$ . Teorema d'addizione . . . . .	» 31
§ 7. - Rappresentazione di una funzione ellittica generale mediante la $\wp u$ . . . . .	» 37
§ 8. - La funzione $\zeta u$ . . . . .	» 40
§ 9. - La funzione $\sigma u$ . . . . .	» 45
§ 10. - Sull'andamento delle funzioni di Weierstrass ad invarianti reali. Loro casi particolari e di degenerazione . . . . .	» 50

## CAPITOLO II.

## Integrali ellittici.

§ 1. - Riduzione degli integrali ellittici a tre tipi fondamentali . . . . .	Pag. 61
§ 2. - Riduzione della biquadratica fondamentale alla forma canonica di Weierstrass . . . . .	» 65
§ 3. - Forma canonica di Legendre . . . . .	» 69
§ 4. - Discussione dell'integrale ellittico di prima specie e determinazione dei periodi di $\wp(u; g_2, g_3)$ . . . . .	» 80
§ 5. - Integrali ellittici di seconda e terza specie . . . . .	» 87
§ 6. - Nuovo metodo d'inversione degli integrali ellittici . . . . .	» 93

## CAPITOLO III.

## Funzioni di Jacobi.

§ 1. - Le tre funzioni $sn$ , $cn$ e $dn$ . Loro rapporti con le funzioni di Weierstrass . . . . .	Pag. 97
§ 2. - Periodicità ed altre proprietà delle funzioni di Jacobi . . . . .	» 103
§ 3. - Equazioni differenziali, teoremi d'addizione, ecc. delle funzioni di Jacobi . . . . .	» 110
§ 4. - Definizione e prime proprietà delle funzioni $\theta$ di Jacobi . . . . .	» 123
§ 5. - Relazioni delle funzioni theta fra loro e con le altre funzioni precedentemente considerate. Loro andamento sull'asse reale . . . . .	» 132
§ 6. - Altre proprietà delle funzioni theta e thetanulle . . . . .	» 140
§ 7. - Utilizzazione delle funzioni theta pel calcolo degli integrali di terza specie . . . . .	» 151

## CAPITOLO IV.

## Trasformazioni delle funzioni ellittiche.

§ 1. - Teorema fondamentale sulle funzioni $\wp$ legate algebricamente fra loro . . . . .	Pag. 159
§ 2. - Trasformazioni di prim'ordine: Loro effetto sulle funzioni di Jacobi . . . . .	» 163
§ 3. - Trasformazioni di prim'ordine delle funzioni theta . . . . .	» 174
§ 4. - Ceno sulle funzioni modulari . . . . .	» 178
§ 5. - Trasformazioni di second'ordine delle funzioni di Weierstrass . . . . .	» 184
§ 6. - Trasformazioni di second'ordine delle funzioni di Jacobi . . . . .	» 192
§ 7. - Considerazioni riassuntive sulle trasformazioni delle funzioni ellittiche e, in particolare, su quella di Landen. Media aritmetico-geometrica di Gauss . . . . .	» 197

## CAPITOLO V.

## Esempi di applicazioni delle funzioni ellittiche.

§ 1. - Uso delle tabelle numeriche delle funzioni e degli integrali ellittici . . . . .	Pag. 209
§ 2. - Rettificazione dell'ellisse e dell'iperbole . . . . .	» 213
§ 3. - Geodetiche dell'ellissoide di rotazione . . . . .	» 219
§ 4. - Asta caricata di punta . . . . .	» 226
§ 5. - Pendolo semplice . . . . .	» 235
§ 6. - Un problema di trasformazione conforme posto dall'Aerodinamica . . . . .	» 239
TAVOLE RIASSUNTIVE DELLE PRINCIPALI FORMULE . . . . .	» 247
CONFRONTO DI ALCUNE NOTAZIONI . . . . .	» 262
ELENCO BIBLIOGRAFICO . . . . .	» 263
INDICE ALFABETICO . . . . .	» 267
ERRATA-CORRIGE . . . . .	» 272

\_\_\_\_\_