CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

MONOGRAFIE DI MATEMATICA APPLICATA

FRANCESCO TRICOMI

FUNZIONI ANALITICHE

RISTAMPA DELLA SECONDA EDIZIONE

NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA

№ 895

S.p.A. Poligrafici il Resto del Carlino - Bologna - I-1961

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

Questo volumetto si propone di esporre gli elementi essenziali della teoria delle funzioni di variabile complessa (funzioni « analitiche ») presupponendo nel lettore solo un minimo di cognizioni matematiche precedenti: su per giù quel che viene insegnato nei nostri primi bienni universitari. Esso è stato scritto avendo specialmente di mira lo scopo di fornire le basi necessarie per una successiva trattazione delle funzioni ellittiche ma, essendosi cercato di evitare ogni grettezza nella scelta delle vie a ciò adducenti, il libro può servire anche a chi si propone altri scopi e, in particolare, quello d'impadronirsi di questo importante capitolo della Analisi in vista delle sue applicazioni a problemi concreti. In fondo, di essenziale, mancano soltanto (o, più esattamente, sono ridotte a brevissimi cenni) la teoria della trasformazione conforme, che potrà trovar posto in qualche altra monografia di questa stessa collezione, e quella delle funzioni polidrome, per cui rimandiamo alle opere indicate nell'elenco bibliografico, e in ispecie, a quelle di Bianchi e di Hurwitz-Courant.

Quanto alla trattazione della materia, essa non ha, nè potrebbe avere, considerato l'argomento più che classico, alcuna pretesa, non diciamo di originalità, ma di personalità. Tuttavia il lettore già esperto riconoscerà facilmente la mentalità dell'autore e intravederà gli scopi specifici del volumetto attraverso qualche particolare: per esempio la relativa abbondanza dell'illustrazione grafica.

Una parola infine sul breve elenco bibliografico che si trova in fondo al volume, elenco che non ha altro scopo se non quello di

fornire le necessarie indicazioni sui libri che occorrerà citare più di frequente nel testo e su alcune opere di carattere generale, particolarmente adatte per ulteriori, più approfonditi studi sull'argomento. Una bibliografia sulle funzioni analitiche avrebbe forse richiesto più spazio di tutta la materia qui trattata!

PREMESSA ALLA IIª EDIZIONE

Nel rivedere quest'operetta dopo l'esaurimento della 1ª edizione, era forte la tentazione di aggiungervi questo e quello, chè le cose mancanti di cui pur sarebbe desiderabile poter trattare sono tante! Credo però che, se vi fossi soggiaciuto, il carattere del libro si sarebbe snaturato ed esso avrebbe potuto deludere molti di quelli che ne avevano così benevolmente accolta la 1ª edizione. Del resto, trattazioni ampie della teoria delle funzioni analitiche non mancano: si pensi p. es. al magistrale trattato di OSGOOD.

Ciò considerato mi sono limitato a pochissime aggiunte, di cui le principali sono: il § 4 del Cap. II (un teorema «provvisorio» pel calcolo dei residui che, fra l'altro, semplifica grandemente la deduzione della formula di CAUCHY), *due esempi di calcolo di integrali definiti col metodo dei residui* (Cap. II, § 4, e Cap. IV, § 5) *e il § 6 del Cap. III (esplicita deduzione dello sviluppo di* $\pi/\sin \pi z$ *in serie di funzioni razionali e analoghi). Inoltre ho rimaneggiato il § 6 del Cap. II sostituendo il teorema di* GREEN *all'integrale di* POISSON *come equivalente reale della formula di* CAUCHY. *Quanto al resto, mi sono sostanzialmente contentato di chiarire meglio alcuni pochi passaggi e alcune poche dimostrazioni che, nella primitiva forma più succinta, potevano riuscire un po' difficili.*

Torre Pellice, gennaio 1943 - Torino, gennaio 1946.

PREMESSA ALLA RISTAMPA DELLA IIª EDIZIONE

In questa ristampa non ci sono che pochissimi cambiamenti: Sostanzialmente mi sono limitato ad aggiornare il breve elenco bibliografico e ad indicare esplicitamente il principio dell'argomento, *che è la forma praticamente più utile del teorema dell'indicatore logaritmico.*

Torino, ottobre 1951. F. TRICOMI

CAPITOLO I.

Fondamenti della teoria delle funzioni analitiche.

§ 1. - Complementi sulla rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

Com'è noto, i numeri complessi $z = x + iy$ possono rappresentarsi, assai utilmente, su di un piano π su cui sia stato fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali (O, x, y), facendo corrispondere al numero complesso $z_0 = x_0 + iy_0$ il punto P_0 di coordinate (x_0, y_0) e viceversa. Viene così a stabilirsi fra i numeri complessi e i punti del piano π una *corrispondenza biunivoca e continua*, senza eccezioni di sorta, purchè, in armonia con l'abituale convenzione che esista un solo numero complesso infinito, si *convenga* analogamente che il piano π sia dotato di un unico punto all'infinito (« piano di GAUSS »).

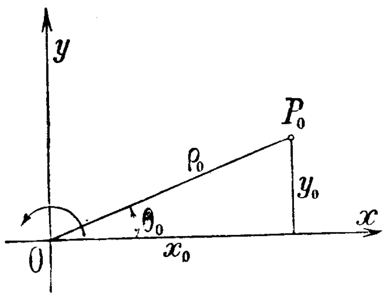


Fig. 1

La cosa essenziale è proprio questa corrispondenza biunivoca, non il fatto che la rappresentazione si effettui su di un *piano* π, pertanto, volendo, potremo anche sostituire a quest'ultimo un'altra superficie σ che possa mettersi in corrispondenza biunivoca e continua col piano π, facendo corrispondere a z_0 li punto P_0' corrispondente di P_0 su σ e viceversa.

Per esempio, potremo ricorrere ad una *sfera* che porremo in corrispondenza biunivoca col piano π mediante *proiezione stereografica*, cioè proiettandone i punti su π da uno dei due punti

della sfera stessa in cui il piano tangente è parallelo a π. La fig. 2 si riferisce al caso, particolarmente perspicuo, in cui la sfera è tangente a π in O e il centro di proiezione è il punto N della sfera diametralmente opposto ad O. La biunivocità della corrispondenza fra piano e sfera è conseguenza immediata del fatto che la retta che proietta da N un punto P di π incontra la sfera, oltre che nel punto fisso N, in uno ed un sol punto P'. Fra l'altro si ottiene così il vantaggio di eliminare ogni difficoltà inerente ai valori infiniti perchè, sulla sfera, la posizione limite di P' quando P si allontana indefinitamente da O è, in ogni caso, il punto N; pertanto, nella nuova rappresentazione, la corrispondenza biunivoca *senza eccezioni* fra punti e numeri complessi, infinito compreso, ha luogo senza bisogno di alcuna modifica agli ordinari postulati della geometria.

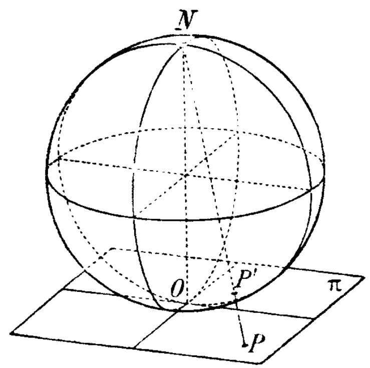


Fig. 2

Nel seguito ci serviremo continuamente delle accennate rappresentazioni geometriche, e specie di quelle sul piano, da cui, fra l'altro, prende origine buona parte delle locuzioni oggi universalmente usate nella teoria delle funzioni di variabile complessa. Così, per esempio, invece di dire che si considera un certo valore z_0 di z, suol dirsi che si considera un certo *punto* P_0 del piano complesso (o della sfera); invece di dire che ci si avvicina a x_0 in modo che il rapporto $(y - y_0)/(x - x_0)$ tenda ad un certo limite m, suol dirsi che ci si avvicina a P_0 *secondo la direzione di coefficiente angolare* m, ecc.

In particolar modo dovremo continuamente servirci del concetto di *dominio* bidimensionale (o *campo*, o *area* ecc.) cui, nelle considerazioni che dovremo qui svolgere, non è necessario dare una grande generalità e conseguente astrattezza. Intenderemo dunque con tal nome un insieme di punti del piano (o della sfera) delimitato da una o più curve *regolari*, val'a dire da curve continue dotate (tranne al più in un numero finito di punti) di tangente variabile con continuità: per esempio (nel piano) l'interno o l'esterno d'una circonferenza, d'un rettangolo, di una corona circolare, un semipiano, o anche l'intero piano meno, eventualmente, alcuni speciali punti o alcune speciali linee, ecc.

Punti *interni* sono quelli che possono riguardarsi come centri di cerchietti — di raggio sia pur piccolissimo — tutti formati da punti dell'insieme, e punti *esterni* invece quelli che sono centri di cerchietti formati di punti tutti estranei all'insieme che si considera. I rimanenti punti del piano formano il *contorno* o *frontiera* dell'insieme. Questi ultimi possono esser riguardati sia come appartenenti all'insieme sia come estranei ad esso. Nel primo caso l'insieme si dirà, più propriamente, un *dominio*; nel secondo caso, un *campo*.

È opportuno intendersi una volta per sempre sul concetto di *connessione* di un dominio, che incontreremo con frequenza nel seguito. Propriamente diremo che un dominio è *semplicemente connesso* se il suo contorno è d'un sol pezzo, val'a dire tale che si possa sempre passare da un suo punto A ad un altro qualunque suo punto B senza mai abbandonare il contorno stesso. Se invece il contorno si compone di 2, 3,...., n curve chiuse distinte, noi diremo rispettivamente che il dominio è *duplicemente, triplicemente,.... n-volte connesso*. Per esempio una corona circolare è un dominio duplicemente connesso. Proprietà essenziale dei domini pluriconnessi è che in essi esistono curve chiuse che non possono, con deformazioni continue, ridursi ad un punto senza uscire dal dominio stesso. Si consideri per esempio la curva γ nel dominio duplicemente connesso indicato nella fig. 3.

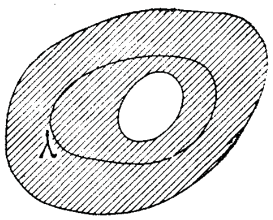


Fig. 3

Osserviamo inoltre che, talquale come nel campo reale, *intorno* di un punto al finito P_0 è un (piccolo) dominio limitato

(cioè rinchiudibile entro un conveniente cerchio) comprendente il punto P_0 nel suo interno. Nella più parte dei casi ci si può anzi addirittura riferire ad un cerchio di un certo raggio ε col centro in P_0, avendo così, fra l'altro, il vantaggio di poterlo assai semplicemente rappresentare con la disuguaglianza

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

(o $\leqslant \varepsilon$ se si vuol comprendere anche la circonferenza-frontiera) [1]. Se invece il punto P_0 è all'infinito, conviene riferirsi alla sfera su cui, non differenziandosi N dagli altri punti, è del tutto naturale definirne l'intorno come negli altri casi. Conseguentemente, sul piano complesso, l'intorno del punto all'infinito sarà costituito da tutti i punti esterni ad una curva chiusa sufficientemente ampia γ, o, con irrilevante restrizione, da tutti i punti soddisfacenti ad una disuguaglianza del tipo

$$|z| > \omega .$$

Osserviamo infine che, non solo le frontiere di domini, ma tutte le altre curve che dovremo nel seguito considerare saranno sempre (salvo esplicito avviso in contrario) curve *regolari* nel senso dianzi dichiarato, e per di più prive di nodi, cioè non intersecanti mai se stesse.

§ 2. - Estensione del concetto di funzione al campo complesso. Condizioni di monogeneità.

Il modo più spontaneo e, a prima vista, più opportuno per estendere il concetto di funzione al campo complesso, parrebbe consistere nel ritenere $w = u + iv$ *funzione* della variabile complessa $z = x + iy$ allorchè, fissato che sia un valore di z (in

---

[1] Col simbolo $|\alpha|$ denotiamo, con GAUSS, il *modulo* del numero complesso $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, cioè $+\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$. (Si cfr. la fig. 1, in cui il modulo del numero complesso corrispondente a P_0 è indicato con ρ_0 mentre il suo *argomento*, cioè l'anomalia del punto P_0 rispetto all'asse x come asse polare, è indicato con θ_0).

modo qualunque o in un certo dominio) resta in conseguenza determinato un valore (o più valori) di w. Però, anche a prescindere dall'osservazione aprioristica che così non si verrebbe a far altro se non asserire che le due variabili reali u e v sono certe funzioni delle due variabili reali x e y; vedremo subito che alle funzioni così definite non possono estendersi, sotto condizioni solo *qualitative* (cioè del genere di quelle che s'incontrano ad ogni passo nella teoria delle funzioni di variabili reali) nemmeno i concetti più fondamentali dell'Analisi. Sarà perciò opportuno subordinare il concetto di funzione nel campo complesso a due sostanziali limitazioni di carattere *quantitativo* per le funzioni reali $u(x, y)$ e $v(x, y)$ [le formule (2) di cui appresso] che, se da un lato costituiscono un'indubbia limitazione di generalità, dall'altro però conferiscono alla teoria delle funzioni di variabile complessa un suo peculiare carattere di eleganza e di semplicità che non ha riscontro nel campo reale (¹).

Fra i concetti fondamentali dell'Analisi cui più sopra si alludeva, non sono quelli di *limite* e di *continuità* che si trasportano alle funzioni complesse nel senso lato dianzi specificato con tale facilità che è del tutto superfluo insistervi. Per esempio, si dirà che la funzione $w = f(z)$ è *continua* nel punto $z_0 = x_0 + iy_0$ se, fissato, comunque un numero positivo ε, è possibile determinare un intorno I di z_0 entro cui si abbia sempre $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$; ossia se le due funzioni reali u e v sono (superficialmente) continue nel punto (x_0, y_0).

Una sostanziale difficoltà s'incontra invece nell'estensione del concetto di *derivata*.

Invero, definendo la derivata $f'(z)$ della funzione $f(z)$, tal quale come nel campo reale, quale *limite del rapporto incrementale*, cioè ponendo

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

(¹) Esiste tuttavia anche una teoria delle funzioni di variabile complessa in senso lato (che, per ragioni che subito si comprenderanno, vengono dette *poligene*), ma essa ha trascurabile importanza in confronto di quella che verrà qui svolta.

si riconosce immediatamente che, salvo a introdurre delle speciali restrizioni *di carattere quantitativo* per le funzioni u e v tale derivata *dipende dal modo con cui si fa tendere h a zero*, e precisamente dalla direzione secondo cui il punto h si avvicina all'origine.

Infatti, supposto $h = h_1 + ih_2$ e che le funzioni u e v siano dotate di derivate parziali prime u'_x, u'_y, v'_x, v'_y continue, sì che possa ad esse applicarsi il teorema del differenziale totale, si ha

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u'_x h_1 + u'_y h_2 + i(v'_x h_1 + v'_y h_2)}{h_1 + ih_2} + \frac{\omega_1 + i\omega_2}{h_1 + ih_2},$$

dove ω_1 ed ω_2 denotano due infinitesimi d'ordine superiore rispetto a $|h|$. Pertanto, passando al limite per $h_1, h_2 \to 0$ nel l'ipotesi che sia

$$\lim \frac{h_2}{h_1} = m,$$

ossia che il punto h si avvicini all'origine secondo la direzione di coefficiente angolare m (cfr. paragrafo precedente), avremo

$$f'(z) = \frac{u'_x + iv'_x + m(u'_y + iv'_y)}{1 + im}, \tag{1}$$

formula che mostra come, in generale, la derivata dipende da m (¹).

Se si vuole invece che ciò *non* sia, il limite del rapporto incrementale dovrà in particolare rimaner lo stesso nel caso che ci si approssimi all'origine nella direzione dell'asse x ($m = 0$) o in quella dell'asse y (porre $1/m = 0$ dopo aver diviso tanto il numeratore quanto il denominatore della frazione per m), e ciò fornisce la condizione

$$u'_x + iv'_y = \frac{u'_x + iv'_y}{i}$$

(¹) Dalla (1) è facile dedurre che gli infiniti possibili valori di $f'(z)$ sono geometricamente rappresentati sul piano complesso dai punti di una circonferenza.

che, separando il reale dall'immaginario, si spezza nelle due:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \tag{2}$$

le quali non sono soltanto condizioni *necessarie* per l'unicità della derivata, come risulta da quanto precede, bensì anche *sufficienti*, poichè, quand'esse sono verificate, dalla (1) può subito trarsi che

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x = v'_y - iu'_y\,, \tag{3}$$

formule in cui non vi è più traccia di m.

Le (2), che diconsi *condizioni di monogeneità* o *equazioni di* CAUCHY-RIEMANN, occupano un posto centrale in tutta la teoria delle funzioni di variabile complessa, che noi fonderemo appunto su di esse mediante la seguente **definizione fondamentale**:

La variabile complessa $w = u + iv$ si dirà **funzione (monodroma) analitica** *o* **monogena** (¹) *della variabile $z = x + iy$ nel dominio D, e si scriverà $w = f(z)$ (o formule analoghe), se ivi u e v sono funzioni continue di x e y, assieme con le loro derivate parziali del prim'ordine, e queste soddisfano alle condizioni di monogeneità* (2).

Oppure, in virtù dei risultati più sopra ottenuti, potrà dirsi che:

La variabile $w = f(z)$ è una funzione analitica di z in un certo dominio, se ivi essa ha sempre una ben determinata derivata prima $f'(z)$ rispetto a z, variabile con continuità al variare di z (²).

Da questa seconda forma della definizione segue subito, tenuto conto che le ordinarie regole di derivazione, essendo basate

---

(¹) I due aggettivi «*analitica*» e «*monogena*» saranno qui sempre riguardati come pienamente equivalenti.

(²) È stato dimostrato dal GOURSAT [5] (questo richiamo si riferisce all'elenco bibliografico che è in fondo al volume) che la condizione della continuità della derivata *non è necessaria*. Il volerla risparmiare dà però luogo ad alcune complicazioni cui, in un manuale come il presente, sarebbe fuori luogo andare incontro.

sulla definizione di derivata e le regole del calcolo algebrico formale, *per le funzioni analitiche*, restano manifestamente immutate anche nel campo complesso; che:

Somma, differenza, prodotto e quoziente di più funzioni analitiche sono ancora funzioni analitiche le cui derivate si calcolano con le ordinarie regole, e così pure funzioni analitiche di funzioni analitiche e funzioni inverse (¹).

In particolare se ne deduce che polinomi in z e quozienti di polinomi siffatti, cioè *funzioni razionali qualsiasi di z, sono certo funzioni analitiche.*

Notiamo finalmente, prima di chiudere questo paragrafo, che introducendo i due simboli, spesso molto comodi, $\mathfrak{R}(\alpha)$ e $\mathfrak{I}(\alpha)$ per denotare rispettivamente la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di un numero complesso α, dalle (3) seguono le formule, sovente utili nelle applicazioni,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{R}[f(z)] = \dfrac{\partial}{\partial y}\mathfrak{I}[f(z)] = \mathfrak{R}[f'(z)], \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{I}[f(z)] = -\dfrac{\partial}{\partial y}\mathfrak{R}[f(z)] = \mathfrak{I}[f'(z)]. \end{cases} \tag{4}$$

§ 3. - Funzioni analitiche e funzioni armoniche.

Nel prossimo Capitolo dimostreremo un teorema dei più caratteristici fra quelli che pongono in luce le differenze fra la teoria delle funzioni di variabili reali e quelle di variabili complesse. Dimostreremo invero che, a completa diversità di quel che succede nel campo reale, nella teoria delle funzioni di variabile complessa l'ipotesi dell'analiticità della funzione, cioè dell'esistenza (e continuità) della derivata *prima*, implica *l'esistenza* (e continuità) *delle derivate di tutti gli ordini* della funzione, nonchè la sviluppabilità di questa in serie di potenze.

(¹) L'ultima asserzione necessiterebbe in verità qualche ulteriore chiarimento, su cui per brevità non ci soffermeremo, rivolto soprattutto a mostrare la legittimità della considerazione della funzione inversa di una data, nell'intorno di un punto in cui la derivata di questa non si annulli.

Ammettendo pel momento la cosa limitatamente alle derivate seconde, cioè ammettendo l'esistenza e continuità delle derivate seconde di u e v rispetto a x e y, potremo trarre dalle (2) una conseguenza del più alto interesse. Invero derivando la prima delle (2) rispetto ad x (ad y), la seconda rispetto ad y (ad x) e sommando (sottraendo) si ha rispettivamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,, \tag{5}$$

equazioni che mostrano come tanto la parte reale u quanto la parte immaginaria v di una funzione analitica w *non possono essere funzioni arbitrariamente scelte di x e y*. Esse possono solo scegliersi fra le soluzioni, d'altra parte svariatissime, dell'*equazione di* LAPLACE $\Delta_2\varphi = 0$, avendo posto, com'è abitudine,

$$\Delta_2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,.$$

Per di più è facile vedere che quando sia assegnata *una* delle due funzioni u e v, per esempio u, in modo che risulti $\Delta_2 u = 0$ ma, pel rimanente, ad arbitrio; *l'altra funzione*, nel nostro caso v, *resta determinata a meno d'una costante arbitraria*.

Infatti, in virtù delle (2) si ha

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

epperò, conoscendosi il differenziale totale di v, questa funzione risulterà determinata a meno d'una costante arbitraria additiva (e potrà calcolarsi con quadrature).

Le soluzioni dell'equazione di LAPLACE continue assieme con le loro derivate prime diconsi **funzioni armoniche** e costituiscono un'*importantissima* classe di funzioni, tanto dal punto di vista teorico quanto da quello applicativo. Servendoci di tale denominazione potremo dunque enunciare che:

La parte reale e la parte immaginaria di una funzione analitica sono funzioni armoniche.

Ne segue che, salvo irrilevanti eccezioni, ogni proprietà delle funzioni analitiche si potrà interpretare come una proprietà delle funzioni armoniche, e viceversa, sì che l'intera teoria delle

funzioni di variabile complessa si può, se si vuole, interpretare, restando nel campo reale, come teoria delle coppie di soluzioni *coniugate* (u, v) dell'equazione di LAPLACE, cioè delle coppie di soluzioni legate dalle equazioni di CAUCHY-RIEMANN (2). Anzi è proprio questo il punto di vista sostanzialmente seguito in qualcuno dei trattati più importanti (per esempio dal PICARD). Noi però seguiremo invece il punto di vista « complesso », sopratutto per non rinunciare ai grandi vantaggi offerti dall'analogia (fin dove sussiste) con la teoria delle funzioni di variabile reale.

Il rapporto che è venuto a stabilirsi fra funzioni analitiche e funzioni armoniche può, fra l'altro, utilizzarsi per costruire facilmente estese classi di funzioni armoniche. Per esempio considerando la parte reale e la parte immaginaria di un polinomio di grado n in z:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

si otterranno *polinomi armonici* di tipo generale con cui, com'è stato di recente dimostrato, è poi possibile approssimare, sotto condizioni assai poco restrittive, qualsivoglia funzione armonica. In particolare per $P_n = z^n$ e $n = 1, 2, 3$ si hanno i polinomi armonici seguenti:

$$\begin{aligned} u &= x\,, & v &= y\,;\\ u &= x^2 - y^2\,, & v &= 2xy\,;\\ u &= x^3 - 3xy^2\,, & v &= 3x^2y - y^3\,; \end{aligned}$$

mentre che, in coordinate polari ρ e θ, si ha in generale, qualunque sia n,

$$u = \rho^n \cos n\theta\,, \qquad v = \rho^n \sin n\theta\,.$$

§ 4. Funzioni analitiche e trasformazioni conformi.

Data una funzione di variabile complessa, anche in senso lato, $w = u + iv$, cioè data una coppia u, v di funzioni reali delle due variabili reali x, y, resta evidentemente nel contempo definita una trasformazione geometrica univoca T che fa corrispondere a un punto $P(x, y)$ del piano z un ben determinato punto $P'(u, v)$ del piano w. Ad ogni proprietà analitica della funzione w dovrà corrispondere una proprietà geometrica della trasformazione T, e viceversa. Si presenta quindi del tutto spontaneo chiedersi quale proprietà geometrica di T farà riscontro a quella che w sia una funzione *analitica* di z. Dico che tale proprietà è quella dell'esser *conforme* cioè di *conservare gli angoli*, il che implica la fondamentale conseguenza che allora la trasformazione T, «localmente considerata» (cioè nell'immediato intorno di due punti corrispondenti), potrà riguardarsi come una *similitudine* (il cui *rapporto* però varierà in generale da coppia a coppia di punti corrispondenti).

Per dimostrare quanto sopra cominciamo con l'osservare come *in generale*, e cioè senz'alcuna ipotesi di analiticità per w ma solo supponendo che esistano, e siano continue e non simultaneamente nulle le derivate prime di u e di v, la trasformazione T, pur non essendo in generale un'omografia, *subordina una proiettività* fra due generici «fasci corrispondenti» (P) e (P'). Dico cioè che se si considera un secondo punto Q prossimo a P e lo si fa avvicinare a P secondo la direzione m, il punto Q', omologo di Q, si avvicinerà a P' secondo una direzione m' tale che fra m ed m' sussiste una relazione bilineare a coefficienti dipendenti solo dalla posizione di P, ossia che, nei due fasci di centri P e P', i raggi di coefficienti angolari m ed m' si corrispondono in una proiettività.

Infatti, detti η ed η' due infinitesimi d'ordine superiore rispetto alla distanza $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ dei due punti P e Q, pel teorema del differenziale totale, si ha

$$m' = \lim_{Q \to P} \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \eta}{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \eta'} = \lim_{Q \to P} \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\eta}{\Delta x}}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\eta'}{\Delta x}}$$

cioè

$$m' = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} m}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} m} \tag{6}$$

o anche

$$\frac{\partial u}{\partial y} mm' - \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial x} m' - \frac{\partial v}{\partial x} = 0\,; \tag{7}$$

il che mostra che la corrispondenza fra le direzioni m e m' è, come s'era detto, una proiettività.

Supponiamo ora che *la funzione w sia analitica*, allora, in virtù delle (2), la (6) potrà scriversi

$$m' = \frac{-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} m}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} m}$$

ovvero

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \omega} = \operatorname{tg}(\omega - \alpha)\,, \tag{8}$$

avendo posto:

$$m = \operatorname{tg} \omega\,, \qquad m' = \operatorname{tg} \omega'\,, \qquad \frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x} = \operatorname{tg} \alpha\,.$$

Ma dalla (8) segue $\omega' = \omega +$ cost., dunque, nel caso attuale, la proiettività fra i due fasci è *un'uguaglianza* (*diretta*) e ne

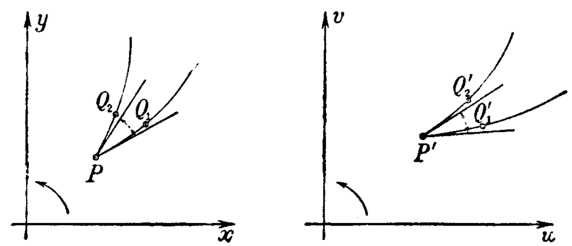


Fig. 4

segue che *la trasformazione è conforme*, anzi che gli angoli corrispondenti non sono solo uguali in valor assoluto, ma anche in segno. (Trasformazione conforme *diretta*: Fig. 4).

Viceversa, *se la trasformazione è conforme* (*diretta*) *la funzione w è monogena.*

Infatti, se la (6) rappresenta un'uguaglianza diretta, essa deve potersi ridurre alla forma (8), epperò dovrà essere

$$\frac{\partial v/\partial y}{\partial u/\partial x} = 1\,, \qquad \frac{\partial v/\partial x}{\partial u/\partial x} = -\,\frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x}\,,$$

che non sono altro se non le (2).

Se invece la (6) rappresentasse un'uguaglianza *inversa*, cioè se potesse ridursi alla forma

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\omega} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega)\,,$$

si troverebbero analogamente, in luogo delle (2), le relazioni:

$$(9) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

che possono evidentemente interpretarsi dicendo che $\overline{w} = u - iv$ è funzione analitica di z, oppure che w è funzione analitica di $\overline{z} = x - iy$.

Finalmente osserviamo esplicitamente che, come s'è già accennato, tutto questo non vale più se, nel punto che si considera, è $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = \partial v/\partial x = \partial v/\partial y = 0$, cioè, nel caso dell'analiticità, se è $f'(z) = 0$. Vedremo anzi a suo tempo (Cap. III, § 4) che non è solo il procedimento dimostrativo che cade in difetto bensì il fatto stesso, chè negli intorni dei punti in cui si annulla la derivata prima la trasformazione *non è conforme*.

§ 5. - Campi vettoriali piani.

In svariate applicazioni delle Matematiche in particolare in Meccanica e in Fisica-matematica, è necessario considerare *campi vettoriali* cioè vettori « funzioni del posto » in un dominio D a 2 o a 3 dimensioni, ossia considerare un vettore $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(P)$ le cui componenti rispetto a certi assi siano funzioni delle coordinate del punto P di D a cui lo si pensa associato.

Per esempio, le velocità o le accelerazioni dei vari punti nel moto di un corpo rigido o no, l'intensità di un campo gravitazionale, elettrico o magnetico, ecc., costituiscono altrettanti campi vettoriali.

Se poi, in particolare, i punti P appartengono tutti ad uno stesso piano e i vettori $\boldsymbol{w}$ sono tutti a questo paralleli, il campo vettoriale si dice *piano*. Per esempio, nella rotazione (istantanea o no) di un corpo rigido intorno ad un asse, le velocità dei punti di un piano perpendicolare all'asse, costituiscono un

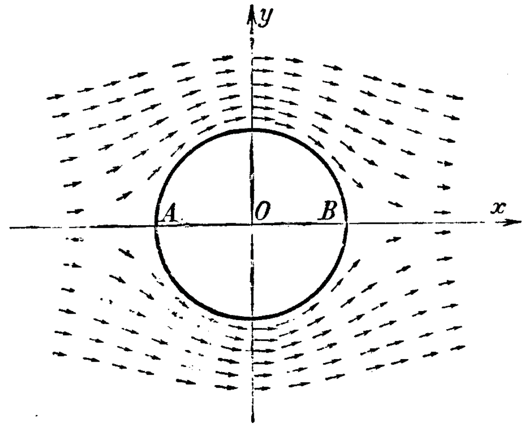


Fig. 5

campo vettoriale piano. E così pure le velocità delle singole particelle nel moto *piano* di un fluido, cioè in un moto tale che esista un fascio di piani paralleli cinematicamente equivalenti, come accade per esempio nel moto dell'acqua in canali molto profondi; nel moto che si origina, dopo il ripristino di condizioni di regime, quando un cilindro infinitamente lungo è trasversalmente investito da un'ampia corrente fluida originariamente e in traslazione uniforme, ecc.

La fig. 5 si riferisce appunto a quest'ultimo caso, nell'ipotesi che il cilindro investito (ortogonalmente) sia un cilindro circolare, retto.

Ci proponiamo ora di far vedere come, fra una categoria importantissima di campi vettoriali piani e le funzioni analitiche di una variabile complessa, esista una connessione del più alto interesse, su cui sono addirittura basati interi rami delle Matematiche (l'*Idrodinamica piana*, per esempio).

Pertanto, supposti fissati, nel piano del nostro campo vettoriale, due assi cartesiani x e y, indichiamo con $u(x, y)$ e $-v(x, y)$ ($-v$ invece di v per comodità di notazioni) le componenti del vettore $\boldsymbol{w}$ rispetto ad essi, e cerchiamo di stabilire a quali condizioni dovranno soddisfare le funzioni u e v affinchè il campo vettoriale, pensato (come sempre è possibile) quale campo delle velocità nel moto *piano, permanente* di un fluido (¹) di densità costante (che, per semplicità, supporremo uguale ad 1), corrisponda ad un moto *senza «vortici»* (campo «*irrotazionale*») e *senza «sorgenti»* nè «*inghiottitoi*» o «*pozzi*» che dir si voglia (campo «*solenoidale*»), cioè soddisfacente alle due condizioni seguenti:

1º) Ciascuna particella fluida possa riguardarsi come animata di un moto puramente traslatorio, cioè non accompagnato da rotazione (²).

2º) La quantità di fluido che penetra in un certo tempo entro una curva chiusa qualsiasi, sia uguale a quella del fluido che nel tempo stesso ne esce.

La prima condizione si traduce subito in formule scrivendo che le componenti p, q, r della rotazione istantanea della particella sono zero, o, in forma vettoriale, che $\operatorname{rot} \boldsymbol{w} = 0$. Propriamente, trattandosi qui di un moto nel piano x, y, avremo l'unica condizione $r = 0$, cioè

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 . \tag{10}$$

(¹) La natura fisica del fluido non occorre che sia precisata, anzi è bene resti del tutto indeterminata, chè così le nostre considerazioni saranno tanto applicabili a moti di fluidi veri e propri (acqua, per esempio), quanto a quelli di fluidi ideali (elettricità, calore, ecc.). L'unica cosa essenziale è che abbia senso il parlare di *quantità* di fluido, come certamente avviene negli esempi indicati. Comunque, dal punto di vista della rappresentazione intuitiva dei fatti matematici di cui dovremo discorrere, potremo sempre pensare di riferirci al moto di un fluido effettivo, purchè di densità costante: per esempio dell'acqua.

(²) Per una semplice interpretazione intuitiva della condizione d'irrotazionalità, vedi la mia Nota nei Rendiconti dei Lincei (6), 19 (1934, I), 399-401.

Per tradurre ora la seconda condizione, diciamo γ la curva chiusa arbitraria di cui in essa si discorre, e, indicato con $\boldsymbol{n}$ il *versore* (vettore unitario) che ha la direzione e il verso della normale interna a γ in un suo generico punto P, osserviamo che la quantità di fluido che «entra» in γ nel tempo dt lungo l'elemento d'arco ds circostante al punto P (o ne «esce» se il prodotto scalare è negativo) è evidentemente data da

$$\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{n}\, ds\, dt ;$$

pertanto la condizione in esame si traduce nell'uguaglianza

$$\int_\gamma \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{n}\, ds = 0 ,$$

che suole esprimersi dicendo che *il* **flusso** *totale del vettore* $\boldsymbol{w}$ *attraverso la curva* γ *è nullo*, e conduce subito all'equazione

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \tag{11}$$

Infatti, o ricorrendo ad un noto teorema di Calcolo vettoriale (¹), o (ciò che è poi lo stesso) al lemma di GAUSS (²), si vede subito che, detta C l'area racchiusa da γ, è

$$\int_\gamma \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{n}\, ds = \int_\gamma \left(u \frac{dx}{dn} - v \frac{dy}{dn}\right) ds = -\iint_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy = 0 ;$$

ma il dominio cui è esteso l'integrale doppio è arbitrario, quindi, supposto (com'è implicito) che le derivate prime di u e v siano continue, la funzione integranda dovrà essere identicamente nulla, e ne segue la (11).

La preannunciata connessione fra campi vettoriali piani *irrotazionali-solenoidali* e le funzioni di variabile complessa, di-

(¹) Teorema «*della divergenza*» o «*del flusso*» cfr. per esempio BURALI-FORTI e MARCOLONGO: *Elementi di calcolo vettoriale* (Bologna, Zanichelli, 1921).

(²) Vedi al § 1 del Capitolo seguente.

scende immediatamente dall'osservazione che le (10)-(11) non sono altro che le equazioni di CAUCHY-RIEMANN (2), ossia che ponendo

$$w = u + iv$$

(la w così definita dicesi *velocità complessa* del movimento) le condizioni d'irrotazionalità e solenoidalità assicurano che *w è una funzione analitica della variabile complessa $z = x + iy$*. Ad ogni movimento piano senza vortici e senza sorgenti [1] corrisponde dunque una ben determinata funzione analitica w, che completamente lo caratterizza, e viceversa.

Per esempio, nel caso della corrente fluida traslatoria investente un cilindro indefinito cui si riferisce la fig. 5, si ha (rispetto agli assi ivi indicati e per $|z| > a$)

$$w = c\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right),$$

dove a denota il raggio del cilindro e c la velocità (scalare) della corrente, « *all'infinito* », cioè fuori dell'azione dell'ostacolo [2].

Più ancora della funzione w ha però interesse il suo *integrale indefinito* [3], ecio è la funzione $f(z)$ determinata (a meno di una irrilevante costante arbitraria) dalla condizione che sia

$$\frac{df(z)}{dz} = w(z).$$

Invero, posto

$$f = \varphi(x, y) + i\psi(xy),$$

---

(1) S'intenda: senza vortici o sorgenti *distribuite* (*con continuità*). Non si esclude cioè che alcuni speciali punti (punti *singolari* della funzione w, cfr. Cap. III, § 5) possano fare eccezione.

(2) LAMB: *Lehrbuch der Hydrodynamik*. (Deutsche Ausgabe, Leipzig, Teubner, 1907), p. 94.

(3) Nel prossimo Capitolo ci occuperemo sistematicamente dell'integrazione delle funzioni di variabile complessa. Comunque l'integrazione indefinita di una funzione analitica, quale qui occorre, non dà luogo a nessuna speciale difficoltà e può effettuarsi con metodi perfettamente analoghi a quelli validi nel campo reale.

per le (4) si ha

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ -v &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}\right. \tag{12}$$

da cui in particolare segue che

$$w = \operatorname{grad}\varphi, \tag{13}$$

ciò che, fra l'altro, giustifica il nome di *potenziale di velocità* che suole darsi alla funzione φ, mentre la funzione ψ dicesi invece *funzione di corrente*.

Le linee $\varphi = \text{cost.}$ e $\psi = \text{cost.}$ diconsi rispettivamente *linee equipotenziali* (o *di livello*) e *linee di flusso* del campo e, in virtù delle (12), sono le une le *traiettorie ortogonali* dell'altre; si ha cioè che la ben determinata linea equipotenziale e la ben determinata linea di flusso che escono da un medesimo punto *generico* del campo (cioè da un punto in cui non sia per esempio $f' = w = 0$) hanno ivi tangenti necessariamente ortogonali fra loro [1].

Delle due, le più importanti son le linee di flusso che, essendo ovunque tangenti al vettore w del luogo, possono considerarsi quali *traiettorie* delle singole particelle fluide. Inoltre, tenuto conto che in un *tubo di flusso*, cioè nella striscietta curvilinea compresa fra due linee di flusso ψ e ψ' infinitamente prossime fra loro, la « *portata* », cioè la quantità dq di flusso che attraversa una certa sezione retta (di lunghezza ε) in un tempuscolo determinato dt, resta manifestamente costante; si ha l'equazione

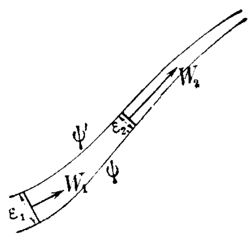


Fig. 6

$$dq = W\varepsilon\, dt = \text{cost.},$$

dove $W = |w|$ denota la velocità scalare del fluido in corrispondenza alla sezione considerata. Ne segue, considerando due

---

(1) Si noti che ciò dipende dal fatto che $f = \varphi + i\psi$ è una funzione analitica di z.

diverse sezioni ε_1 ed ε_2 del medesimo tubo di flusso, che fra e rispettive velocità scalari W_1 e W_2 del fluido interviene la relazione

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \tag{14}$$

il che mostra come dal tracciato delle linee di flusso possa desumersi non solo la direzione della velocità w delle singole parti-

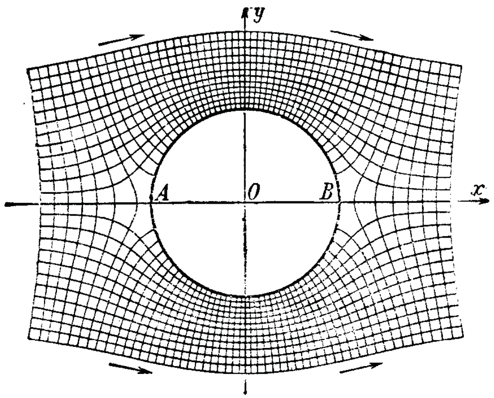


Fig. 7

celle, ma anche farsi un'idea della grandezza relativa del modulo W di w. Finalmente osserviamo che potrebbe assai facilmente dimostrarsi che la portata dq del tubo di flusso considerato coincide con la differenza fra i due valori della funzione di corrente corrispondenti alle due linee di flusso ψ e ψ' considerate.

Da tutto quanto precede segue in particolare che il modo forse più perspicuo per rappresentare geometricamente un campo vettoriale piano irrotazionale e solenoidale, consiste nel tracciare un sistema di sue linee di flusso opportunamente distanziate o, meglio ancora, linee di flusso e linee di livello insieme. All'uopo si consideri la fig. 7 in cui è stato rappresentato con tale sistema il campo vettoriale della fig. 5.

A questo proposito è però bene osservare esplicitamente che un *arbitrario* sistema ∞^1 di linee piane e le sue traiettorie orto-

gonali, *non* costituisce, in generale, la rappresentazione di un campo vettoriale piano irrotazionale e solenoidale, perchè non è in generale possibile distribuire queste linee in modo tale che esse dividano il piano in *quadratini* elementari [1], mentre questo è invece certo possibile nel caso delle linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost.}$ di cui sopra. (Basta invero pensare a quelle corrispondenti a delle rette parallele agli assi del piano u, v, dividenti questo piano in quadratini elementari). Ciò è da porsi in correlazione col fatto già osservato a p. 9 che, di una funzione monogena $w = u + iv$, non si può assegnare ad arbitrio nemmeno la u o la v soltanto.

§ 6. - Rappresentazione grafica delle funzioni di variabile complessa.

La questione ultimamente accennata della rappresentazione grafica dei campi vettoriali piani irrotazionali-solenoidali, sta manifestamente nei più stretti rapporti con la questione, praticamente anche più importante, della *rappresentazione grafica delle funzioni di variabile complessa.* Anzi, considerato che ad ogni campo vettoriale della specie indicata corrisponde una ben determinata funzione analitica w (o, a meno d'una irrilevante costante arbitraria, una funzione f) e viceversa, le due questioni possono addirittura identificarsi e riguardare per esempio la fig. 5 o, meglio, la fig. 7 come immagine geometrica della funzione

$$f(z) = \int c\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)dz = c\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \text{cost.}$$

In altre parole, riferendoci al sistema della fig. 7, una qualsiasi funzione analitica $f = \varphi + i\psi$ potrà geometricamente rappresentarsi in modo sufficientemente perspicuo e intuitivo, tracciando una rete sufficientemente fitta di *linee equipotenziali* $\varphi = \text{cost.}$ e di *linee di flusso* $\psi = \text{cost.}$, le quali, tranne in al-

[1] In generale lo divideranno in *rettangolini* elementari

cuni punti speciali, dovranno mutualmente tagliarsi ad angolo retto.

Tale metodo rappresentativo, che è quello più usato, consiste in fondo nel rappresentare sul piano, col *metodo delle proiezioni quotate*, le due superfici Φ e Ψ dello spazio (x, y, ζ) di equazioni

$$\zeta = \varphi(x, y)\,, \qquad \zeta = \psi(x, y)\,;$$

esso potrà dunque anche sostituirsi, talvolta utilmente, con altri metodi di rappresentazione di dette superficie fra quelli insegnati dalla Geometria Descrittiva o, meglio ancora, per mezzo di modelli in gesso od altro delle superficie Φ e Ψ. Oppure, seguendo il metodo di recente consigliato da EMDE [8], si potrà pensare all'unica superficie, che diremo E, di equazione

$$\zeta = |\, f(z) \,|$$

che verrà rappresentata o anch'essa col metodo delle proiezioni quotate (cioè con la sua « *Höhenkarte* ») oppure, preferibilmente, *in prospettiva assonometrica* (in *rilievo*, come dice EMDE) come nella seguente fig. 8 (tratta, salvo piccole varianti, dall'Op. cit.) che si riferisce alla funzione $f(z) = \operatorname{tg} z$, ottenuta estendendo, nel modo che verrà in appresso specificato, l'ordinaria *tangente* trigonometrica nel campo complesso.

Ricorrendo al metodo rappresentativo di EMDE sarà però bene dare anche qualche indicazione sugli argomenti θ dei valori di $f(z)$, oltre che sui moduli ρ, ciò che può agevolmente farsi tracciando sulla superficie E, oltre alle linee di livello $\rho = \text{cost.}$, anche le loro traiettorie ortogonali (*linee « di massima pendenza »*) le quali, com'è facile vedere, sono linee $\theta = \text{cost.}$

Infatti, riferendoci alla rappresentazione quotata della superficie E sul piano (x, y), le proiezioni delle curve di livello, cioè le curve $|\, f \,| = \text{cost.}$, possono riguardarsi corrispondenti ai cerchi col centro nell'origine O' del piano complesso (φ, ψ); ma, essendo la corrispondenza che intercede fra i due piani una trasformazione conforme, alle proiezioni delle linee di massima pendenza di E, che sono le traiettorie ortogonali delle proie-

zioni delle curve di livello (1), devono corrispondere le traiettorie ortogonali degli anzidetti cerchi; dunque, essendo queste delle linee $\theta = \text{cost.}$, tali sono anche le linee di massima pendenza della superficie E.

Giova infine osservare che la novità e l'interesse del metodo di EMDE non consiste tanto nell'avere sostituita un'unica super-

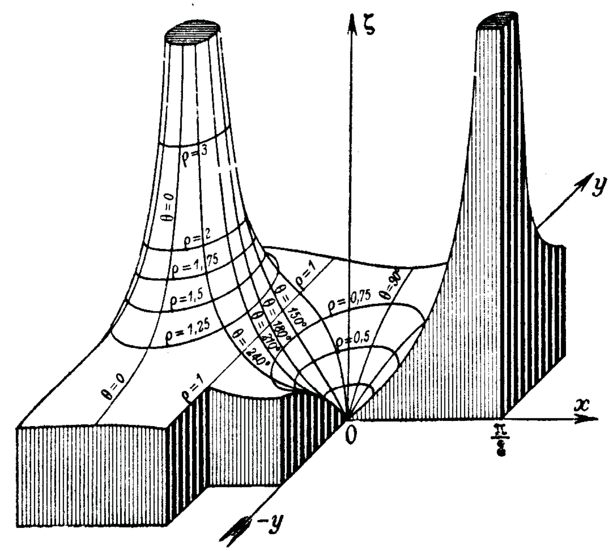


Fig. 8

ficie E alle due superficie Φ e Ψ, quanto nell'impiego della rappresentazione assonometrica in luogo della quotata e nell'avere posto in primo piano il *modulo* della funzione in luogo delle sue parti reali ed immaginaria. Invero, anche rimanendo fedeli alla rappresentazione in base alle superficie Φ e Ψ, ci si potrebbe limitare a considerare una sola di esse chè, tal quale come più sopra, si vede subito che le linee di livello dell'una corrispon-

(1) Perchè la proiezione ortogonale di un angolo retto *avente un lato parallelo al piano di proiezione*, è ancora un angolo retto.

dono alle linee di massima pendenza dell'altra; sì che una sola delle due superficie, per esempio la Φ, su cui siano tracciate tanto le linee di livello quanto quelle di massima pendenza, ci può fornire (proiettando sul piano x, y) tanto le linee equipotenziali $\varphi =$ cost. quanto le linee di flusso $\psi =$ cost.

CAPITOLO II.

L'integrazione nel campo complesso.

§ 1. - Integrale curvilineo di una funzione di variabile complessa in senso lato.

Nel campo reale il concetto d'*integrale* viene introdotto in due modi diversi, e cioè o considerandolo come il risultato dell'operazione inversa alla derivazione (integrale *indefinito*), o come limite di certe somme (integrale *definito*). Si riconosce però subito dopo, ed è anzi questo uno dei risultati più importanti di tutta la teoria, che le due definizioni sostanzialmente coincidono, sì che, nello studio delle proprietà dell'integrale e nelle sue applicazioni, ci si può appoggiare o all'uno o all'altro punto di vista, secondo che torna più opportuno.

Nel campo complesso le cose procedono analogamente cioè si può pervenire in esso al concetto d'integrale, in modo del tutto spontaneo, sia generalizzando la prima definizione, sia generalizzando la seconda. Noi qui ci atterremo alla seconda di queste vie, cioè considereremo dapprima l'integrale definito, donde poi, tal quale come nel campo reale, passeremo all'« indefinito », cioè alle funzioni aventi come derivata una funzione data. A tale scopo ci avvarremo della nozione d'*integrale curvilineo* di una funzione reale $f(x, y)$ che supporremo senz'altro nota al lettore. Del resto, le due formule:

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\gamma f(x, y)\, dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\ \psi(t)]\varphi'(t)\, dt\,, \\ \displaystyle\int_\gamma f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\ \psi(t)]\psi'(t)\, dt \end{cases}$$

che servono a ricondurre questi integrali a integrali ordinari, e a cui si giunge supponendo che l'arco di curva γ del piano (x, y)

da percorrersi (in un determinato verso) nell'integrazione, sia parametricamente rappresentato dalle equazioni

$$x = \varphi(t)\,, \qquad y = \psi(t)\,, \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)\,,$$

possono anche risguardarsi, se si vuole, come *definizione* dei due integrali curvilinei a primo membro, cui qualunque altro si riconduce col porre:

$$(2) \qquad \int_\gamma f(x, y)\, dg(x, y) = \int_\gamma f(x, y)\, \frac{\partial g}{\partial x}\, dx + \int_\gamma f(x, y)\, \frac{\partial g}{\partial y}\, dy\,.$$

Ricordiamo inoltre che se S è un qualunque dominio limitato (anche pluriconnesso) del piano (x, y) ed s ne è il contorno (completo), detta f una qualsiasi funzione di x e y, continua in S assieme con le sue derivate prime, sussistono le seguenti importantissime relazioni (« *lemma di* GAUSS ») fra integrali curvilinei estesi ad s e integrali doppi estesi ad S:

$$(3) \qquad \begin{cases} \displaystyle\iint_S \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_s f(x, y)\, dy = -\oint_s f(x, y)\, \frac{dx}{dn}\, ds \\ \displaystyle\iint_S \frac{df}{dy}\, dx\, dy = -\oint_s f(x, y)\, dx = -\oint_s f(x, y)\, \frac{dy}{dn}\, ds \end{cases}$$

intendendo che il contorno s sia percorso nell'integrazione in *verso positivo*, cioè nel verso tale che la tangente concordemente orientata formi con la normale interna alla curva l'angolo $+\pi/2$ (cioè un angolo direttamente congruente a quello formato dall'asse x con l'asse y). I simboli adottati per gli integrali curvilinei ai secondi membri (integrali « con cerchietti ») stanno a ricordare che si tratta di integrazioni estese a intere curve chiuse; essi ci torneranno spesso utili anche nel seguito.

Ciò premesso, data una funzione di variabile complessa $w = u(x, y) + iv(x, y)$ *in senso lato*, cioè senza supporre che u e v, sia pur continue assieme colle loro derivate prime, debbano necessariamente soddisfare alle equazioni di CAUCHY-RIEMANN; considerato che si ha identicamente

$$w\, dz = (u\, dx - v\, dy) + i(v\, dx + u\, dy)\,,$$

vien del tutto spontaneo chiamare *integrale definito* di w esteso all'arco di curva $AP \equiv \gamma$ del piano (x, y), ed indicare col simbolo

$$\int_\gamma w\,dz\,,$$

la quantità

$$\int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy)\,. \tag{4}$$

Tanto più che, così facendo, l'integrale di $w(z)$ risulta uguale, com'è ben facile dedurre dall'analoga proprietà degli integrali curvilinei, al limite della somma

$$\Sigma_h\, w(z_h^*)\Delta_h z$$

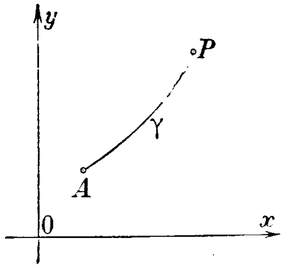


Fig. 9

(ottenuta dividendo comunque l'arco γ in parti, moltiplicando gl'incrementi $\Delta_h z$ di z in queste pei corrispondenti valori di w in punti $z_h{}^*$ comunque scelti di esse, e poi sommando) allorchè si fa tendere a zero la massima fra le lunghezze degli archi parziali.

Osserviamo infine che, se su tutto l'arco γ si ha sempre

$$|\,w(z)\,| \leqslant M\,,$$

dalla proprietà ora indicata segue senz'altro che

$$\left|\int_\gamma w(z)\,dz\right| \leqslant ML\,, \tag{5}$$

essendo L la lunghezza di γ, perchè (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore) è evidentemente $|\,dz\,| = ds$.

§ 2. - Teorema fondamentale di Cauchy.

La precedente definizione d'integrale, cui nulla è da rimproverare dal punto di vista della spontaneità e della semplicità, dà però luogo ad una gravissima difficoltà allorchè, procedendo in modo analogo a quello seguito nel campo reale, si cerca utilizzarla per costruire con essa una « *funzione integrale* », facendo variare uno degli estremi dell'integrazione (per esempio P) mentre si tiene fermo l'altro (A). Invero, dato che un integrale curvilineo dipende in generale, non solo dagli *estremi* dell'arco di curva cui è esteso, ma dall'intero cammino d'integrazione, così facendo non si otterrà dunque (in generale) una funzione *univoca* di P, bensì una funzione *a infiniti valori*, essendo infinite le curve regolari γ con cui possiamo pensare collegati due determinati punti A e P. Si presenta cioè una difficoltà analoga a quella incontrata nella definizione della derivata.

Ammaestrati dall'esperienza fatta nel caso ora ricordato, si presenta ora del tutto spontaneo domandarsi se non sia anche qui possibile eliminare la difficoltà incontrata sottoponendo la funzione w, cioè le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ ad opportune limitazioni, sia pur di carattere quantitativo. E che ciò sia effettivamente possibile, non è difficile persuadersi.

Potrebbe però temersi che si giungesse a condizioni diverse da quelle trovate nel caso della derivata, il che implicherebbe la necessità di distinguere funzioni « analitiche » nei riguardi della derivazione da funzioni « analitiche » nei riguardi dell'integrazione, con tutte le complicazioni che facilmente si comprendono. Ora, fortunatamente, ciò non è. Sussiste cioè il fatto, del tutto fondamentale per l'intera teoria, che *le stesse condizioni atte ad assicurare l'unicità della derivata assicurano l'unicità dell'integrale* (*nel senso dianzi accennato*), *e viceversa.*

Per dimostrare questo fatto cominciamo con l'osservare che, *in un dominio semplicemente connesso D*, la circostanza che l'integrale di $w(z)dz$ « da A a P » non dipenda dal cammino d'integrazione γ, è perfettamente equivalente all'altra che l'integrale esteso ad una qualsiasi curva *chiusa* di D sia sempre *nullo*.

Infatti, detti γ_1 e γ_2 due diversi cammini d'integrazione fra A e P, che — pel momento — supporremo non intrecciantesi fra loro, ed s la curva chiusa costituita da γ_1 percorso nel verso da A a P e γ_2 percorso nel verso da P ad A, si ha manifestamente

$$\int_{\gamma_1} w\,dz - \int_{\gamma_2} w\,dz = \oint_s w\,dz\,.$$

Se invece i due cammini γ_1 e γ_2 sono intrecciati, basterà, per ridursi al caso precedente, considerare un terzo cammino γ_3, non intrecciato nè con γ_1 nè con γ_2.

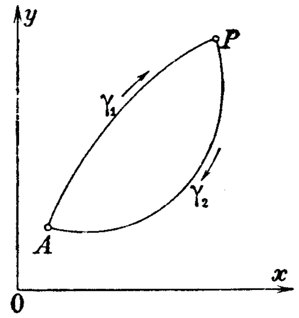


Fig. 10

Ciò posto osserviamo che, se s è una qualsiasi curva chiusa di D ed S l'area da essa racchiusa, per la (4) e per il lemma di GAUSS (formule (3)) è

$$(9)\qquad \oint_s w\,dz = \oint_s (u\,dx - v\,dy) + i\oint_s (v\,dx + u\,dy) =$$
$$= -\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy + i\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy\,,$$

ma le funzioni integrande dei due integrali doppi non sono altro se non i primi membri delle equazioni di CAUCHY-RIEMANN, scritte in modo che i secondi membri vengano nulli, dunque abbiamo il seguente, fondamentale:

TEOREMA DI CAUCHY. – *Se la funzione $w(z)$ è analitica e regolare nel dominio semplicemente connesso D, il suo integrale esteso ad una qualsiasi curva chiusa tutta contenuta in D, è sempre nullo.*

Ne segue in particolare, in virtù dell'osservazione più sopra fatta, che, per una funzione analitica, ha senso parlare di una corrispondente *funzione integrale*, non dipendendo allora l'integrale da A a P dal cammino d'integrazione γ prescelto.

Possiamo inoltre facilmente dimostrare che questa *funzione integrale*:

$$f(\zeta) = \int_A^P w(z)\,dz$$

ottenuta, come si è più sopra accennato, integrando la funzione analitica $w(z)$ « tra un punto (fisso) A e un punto (variabile) P (cui corrisponda il valore $\zeta = \xi + i\eta$ della variabile complessa) » è una nuova funzione analitica avente come derivata la funzione $w(z)$.

Infatti, posto

$$f = \varphi + i\psi\,,$$

si ha

$$\varphi = \int_A^P (u\,dx - v\,dy)\,,\qquad \psi = \int_A^P (v\,dx + u\,dy)\,,$$

donde seguono le formule

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = u\,,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -v\,,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = v\,,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = u\,,$$

che, tenendo presenti le (3) del Capitolo precedente, dimostrano l'asserto.

Si vede poi immediatamente che tutte le possibili *primitive* della funzione w, cioè tutte le possibili funzioni analitiche aventi per derivata w, sono comprese nell'espressione

$$f + C\,,$$

dove C denota una costante arbitraria, espressione che chiameremo *integrale indefinito* di w.

Infatti una funzione $\varphi_0 + i\psi_0$ avente per derivata lo zero, cioè tale che sia

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta} = \frac{\partial\psi_0}{\partial\xi} = \frac{\partial\psi_0}{\partial\eta} = 0\,,$$

è necessariamente una costante.

Finalmente osserviamo che nei precedenti ragionamenti non ci siamo direttamente avvalsi dell'*analiticità* della funzione $w(z)$, ma solo della sua *continuità* e del fatto che il suo integrale dipendeva soltanto dagli estremi del cammino d'integrazione. Pertanto anche sotto queste ultime, meno (almeno in apparenza) restrittive ipotesi, si può concludere che la corrispondente funzione integrale $f(\zeta)$ è analitica, e che per di più si ha

$$f'(\zeta) = w(\zeta) .$$

Ma, come si vedrà nel § 5, la derivata di una funzione analitica è ancora una funzione analitica; dunque al teorema di CAUCHY può associarsi il seguente teorema inverso:

TEOREMA DI MORERA. – *Se l'integrale di una funzione continua $w(z)$ esteso ad una curva chiusa qualsiasi è sempre nullo, la funzione è analitica.*

§ 3. - Integrazione in domini pluriconnessi. Teorema dei residui.

Nel paragrafo precedente abbiamo più volte ripetuto che il dominio in cui si svolgevano le nostre considerazioni doveva supporsi *semplicemente connesso*, trattandosi di circostanza essenziale per la validità dei teoremi indicati. Invero, basta considerare la funzione semplicissima

$$w = \frac{1}{z} ,$$

evidentemente regolarmente analitica in ogni dominio *escludente l'origine*, per esempio nella corona circolare

$$1 \leqslant | z | \leqslant 2 ,$$

per accorgersi come il teorema di CAUCHY possa cadere in difetto se il dominio D è pluriconnesso. Difatti integrando w lungo un cerchio $| z | = \text{cost} = \rho_0$ contenuto in detta corona circolare (con l'ausilio delle coordinate polari ρ e θ) si trova subito che essendo ivi

$$z = \rho_0(\cos \theta + i \sin \theta)$$

e, conseguentemente,

$$dz = \rho_0(- \sin \theta + i \cos \theta) d\theta = iz d\theta$$

viene:

$$\oint w\, dz = \int_0^{2\pi} i\, d\theta = 2\pi i ,$$

si ha cioè un risultato *non nullo*, nonostante che il cammino d'integrazione sia chiuso e tutto interno ad un'area (non semplicemente connessa) in cui la funzione è analitica è regolare.

Ora, sia nella teoria sia nelle applicazioni, casi come il precedente sono frequentissimi; è cioè frequentissimo il caso in cui debba considerarsi una funzione analitica w regolare in un'area, *meno in certi punti «singolari»*, che saranno per noi *i punti della frontiera del (vero) campo di analiticità di w*. Supposto cioè che la funzione — analitica nel campo C — non sia *prolungabile* al di fuori di questo, ossia che non esista una funzione w^* — analitica in un campo C^*, più ampio di C — riducentesi a w in C; diremo *«punti singolari»* di w i punti della frontiera di C.

Come può estendersi il teorema di CAUCHY ad una funzione dotata di certi punti singolari *isolati* $z_0, z_1, \ldots$, malgrado che, soppressi che siano gl'intorni dei punti in discorso, il dominio di regolare analiticità non risulta più semplicemente connesso?

A tale quesito può darsi una risposta del tutto soddisfacente cominciando con l'osservare che se, nel dominio (semplicemente connesso) che si considera, la funzione $w(z)$ è sempre regolarmente analitica, *tranne in un unico punto z_0*, l'integrale di w lungo una curva chiusa s comprendente z_0 nel suo interno potrà benissimo esser diverso da zero, anzi così sarà in generale, ma *non muterà cambiando la curva s*; purchè, beninteso, z_0 resti sempre nell'interno e la vecchia e la nuova curva vengano descritte (ciascuna una volta sola) in versi *concordi*, cioè deducibili l'uno dall'altro con una variazione continua della figura.

Infatti, se s_1 ed s_2 sono due diverse curve s, non intrecciantesi fra loro, avviluppanti il punto z_0 (fig. 11), l'area anulare da esse delimitata potrà manifestamente rendersi semplicemente connessa, *tagliandola* lungo una curva t, che unisca un punto A_1 di s_1 con un punto A_2 di s_2 senza mai uscire dall'accennato anello. Ne segue che, a patto di considerare la curva t come *doppia*, cioè di percorrerla due volte (in versi contrari) allorchè sia da percorrere l'intero contorno (che diremo γ) dell'area tagliata, potremo applicare a questa ultima l'ordinario teorema di CAUCHY, ottenendo:

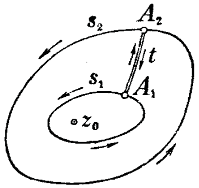


Fig. 11

$$\oint_{s_1} w(z)\,dz + \int_{A_1A_2} w(z)\,dz - \oint_{s_2} w(z)\,dz + \int_{A_2A_1} w(z)\,dz = \oint_{\gamma} w(z)\,dz = 0\ ;$$

ma i due integrali estesi a t si distruggono a vicenda, quindi resta

$$\oint_{s_1} w(z)\,dz = \oint_{s_2} w(z)\,dz\,,$$

come volevasi dimostrare.

Se invece le curve s_1 ed s_2 avessero dei punti comuni, si procederebbe come nel § 2, cioè si farebbe intervenire una terza curva s_3 dell'anello la quale non abbia punti comuni nè con s_1 nè con s_2.

Il teorema ora stabilito mostra come, ad ogni *punto singolare* isolato z_0 di una funzione analitica $w(z)$, corrisponda un numero complesso ben determinato: il valore dell'integrale di $w(z)$ lungo una curva chiusa (da pensarsi percorsa una sola volta in un verso determinato, per esempio in quello dianzi definito come verso positivo) comprendente z_0 nel suo interno. Tale numero, o per meglio dire il suo quoziente per $2\pi i$ (sì da farlo venire $=1$ nel caso della funzione $1/z$) lo diremo *residuo* della funzione $w(z)$ nel punto z_0, porremo cioè, indicandolo con R_0:

$$R_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_s w(z)\,dz \tag{7}$$

dove s è una qualsiasi curva chiusa avviluppante z_0 (ma non altri eventuali punti singolari della funzione) da immaginarsi percorsa una sola volta in verso positivo. Per esempio può supporsi che s sia un cerchietto, di raggio sufficientemente piccolo, col centro in z_0.

Ciò premesso, tornando a supporre, come in principio, che nell'area, peraltro semplicemente connessa che si considera, la funzione $w(z)$ sia analitica-regolare *tranne in un numero finito di punti* $z_0, z_1, z_2, \ldots$, è facile ottenere la desiderata estensione del teorema fondamentale di CAUCHY, sotto forma del seguente:

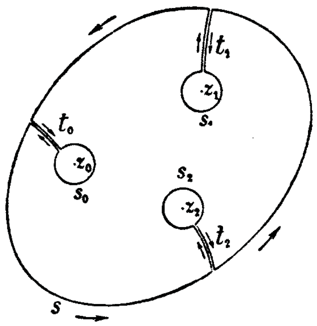


Fig. 12

TEOREMA DEI RESIDUI. – *L'integrale esteso ad una generica curva chiusa s (percorsa una sola volta, nel verso positivo) di una funzione $w(z)$ che, nel dominio semplicemente connesso che si considera sia analitica-regolare tranne in un numero finito di « singolari » $z_0, z_1, z_2, \ldots$, è uguale al prodotto di $2\pi i$ per la somma dei residui dei punti singolari che cadono entro s. L'espressione curva chiusa « generica », è da intendersi nel senso che essa non deve passare per alcuno dei punti singolari.*

Infatti, supposto per esempio che nell'interno di s cadono i tre punti singolari z_0, z_1 e z_2 (coi rispettivi residui R_0, R_1 e R_2), eliminati questi mediante tre cerchietti s_0, s_1 e s_2 (fig. 12), non aventi punti in comune nè fra loro nè con s, in virtù del teorema di CAUCHY applicato al contorno dell'area residua, resa semplicemente connessa mediante i tre tagli t_0, t_1 e t_2, avremo, non tenuto conto dei 6 contributi dei tagli che si distruggono due a due:

$$\oint_s w\,dz - \oint_{s_0} w\,dz - \oint_{s_1} w\,dz - \oint_{s_2} w\,dz = 0\ ;$$

ma i tre ultimi integrali sono uguali, a meno del fattore $2\pi i$, ai tre residui R_0, R_1 e R_2, quindi avremo in definitiva

$$\oint_s w\,dz = 2\pi i(R_0 + R_1 + R_2)\,,$$

come volevasi dimostrare.

Il teorema dei residui ha molta importanza anche dal punto di vista applicativo, costituendo esso uno dei mezzi più potenti che si abbiano a disposizione pel calcolo diretto di integrali definiti.

§ 4. - Un teorema per il calcolo dei residui e una sua applicazione.

Per ben comprendere la portata dell'ultima osservazione occorre tener presente che il residuo di una funzione in un suo punto singolare z_0, pur essendo da noi stato definito mediante l'integrale (7), di fatto può spesso calcolarsi senz'alcun diretto intervento d'integrali, epperò il teorema dei residui fa ben di più che ridurre il calcolo di un certo integrale a quello di certi altri, come a prima vista potrebbe sembrare.

Riservandoci d'indicare più avanti (Cap. III, § 3, in fine) un metodo generale pel calcolo dei residui, provvisoriamente ci sarà molto utile il seguente teorema:

Se la funzione analitica $f(z)$, regolare nell'intorno del punto z_0 tranne per $z = z_0$ (1) è tale che esiste ed è finito il limite di $(z - z_0)f(z)$ per $z \to z_0$; il limite in parola coincide col residuo della funzione nel punto z_0.

Infatti, detto R il limite in quistione e introdotta una funzione $\varphi(z)$ tale che risulti

$$f(z) = \frac{R}{z - z_0} + \varphi(z)\,, \tag{8}$$

cioè

$$(z - z_0)f(z) = R + (z - z_0)\varphi(z)\ ;$$

osserviamo anzitutto che, indicato con ε un numero positivo piccolo a piacere, potrà certo determinarsi un intorno D del punto z_0 tale che in esso sia sempre

$$|\,(z - z_0)f(z) - R\,| = |\,(z - z_0)\varphi(z)\,| < \varepsilon\,. \tag{9}$$

(1) Se la funzione fosse regolare anche in z_0, non è che il teorema cesserebbe di valere (esso continuerebbe invece a valere fornendo *zero* come valore del residuo) ma non avrebbe più alcun interesse.

Ciò premesso andiamo a calcolare il residuo R^* della funzione $\varphi(z)$ nel punto z_0 in base alla definizione (7), servendoci, com'è in nostra facoltà, di un cerchietto γ (di centro z_0) tutto compreso in D come curva d'integrazione. Avremo così che,

$$R^* = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \varphi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(z - z_0)\varphi(z)}{z - z_0}\,dz$$

cioè che

$$R^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z - z_0)\varphi(z)\,d\theta\,,$$

avendo osservato che, come subito si constata con un calcolo perfettamente analogo a quello svolto a p. 31, detto θ l'argomento di $z - z_0$, sul cerchietto γ (come su ogni altro cerchio col centro in z_0), è

$$dz = i(z - z_0)\,d\theta\,. \tag{10}$$

Prendiamo ora, nell'ultima espressione di R^*, i moduli di ambo i membri; servendoci del teorema sul modulo di un integrale e della (9), constateremo così che

$$|\,R^*\,| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\,(z - z_0)\varphi(z)\,|\,d\theta < \varepsilon\,,$$

ma ε è un numero positivo piccolo a piacere, dunque dev'essere necessariamente $R^* = 0$.

Per giungere al teorema enunciato non vi è ora che da osservare ulteriormente che il residuo di una somma di più funzioni è manifestamente uguale alla somma dei residui degli addendi. Invero, essendosi più sopra dimostrato che il residuo R^* della funzione $\varphi(z)$ in z_0 è nullo, dalla (8) discende senz'altro che il residuo di $f(z)$ in z_0 coincide con quello di $R/(z - z_0)$ che, in virtù di quanto si è visto a p. 32, è uguale ad R.

Utilizzando il teorema ora dimostrato possiamo facilmente calcolare col metodo dei residui l'integrale definito

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}}\,,$$

dove n denota un intero qualsiasi, senza passare attraverso il corrispondente integrale indefinito che, se n è un po' grande, è tutt'altro che semplice a determinarsi.

All'uopo consideriamo la funzione analitica (razionale)

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^{2n}}$$

che sull'asse reale si riduce alla nostra funzione integranda. Questa funzione ha come punti singolari tutti (e soli) gli *zeri* del denominatore, cioè le $2n$ radici d'ordine $2n$ dell'unità negativa che, come si sa dall'Algebra, sono i $2n$ punti del cerchio di raggio unitario col centro nell'origine O del piano z, aventi come argomenti le quantità

$$\frac{\pi}{2n}, \quad \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{2n}, \quad \frac{\pi}{2n} + 2\frac{2\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad \frac{\pi}{2n} + (2n-1)\frac{2\pi}{2n}$$

che, diversamente scritte, assumono l'aspetto

$$\frac{\pi}{2n}, \quad 3\frac{\pi}{2n}, \quad 5\frac{\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad (4n-1)\frac{\pi}{2n}.$$

Ne segue che, se si indica con z_0 il primo di questi punti, cioè si pone

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi}{2n},$$

i successivi punti singolari potranno rappresentarsi con le successive potenze dispari di z_0, cioè potrà asserirsi che i punti singolari di $f(z)$ sono tutti e soli i punti

$$z_k = z_0^{2k+1}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

di cui quelli relativi ai valori $0, 1, 2, \ldots, n-1$ di k cadono nel semipiano *superiore*, cioè nel semipiano $\mathfrak{I}(z) > 0$.

Ciò premesso, per preparare il terreno per l'applicazione del teorema dei residui, cerchiamo di calcolare il residuo R_k di $f(z)$ in z_k con l'ausilio del teorema precedente, cioè determinando il limite per $z \to z_k$ del prodotto $(z - z_k)f(z)$, che nel caso attuale assume l'aspetto

$$\frac{z - z_k}{1 + z^{2n}}.$$

All'uopo converrà far uso della regola di L'Hospital che fornisce

$$R_k = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{2nz^{2n-1}} = \frac{1}{2nz_k^{2n-1}}$$

donde, moltiplicando e dividendo per z_k, considerato che $z_k^{2n} = -1$, si ha

$$(11) \qquad R_k = -\frac{1}{2n} z_k.$$

Siamo ora in grado di applicare alla funzione $f(z)$ il teorema dei residui, scegliendo come cammino di integrazione sul

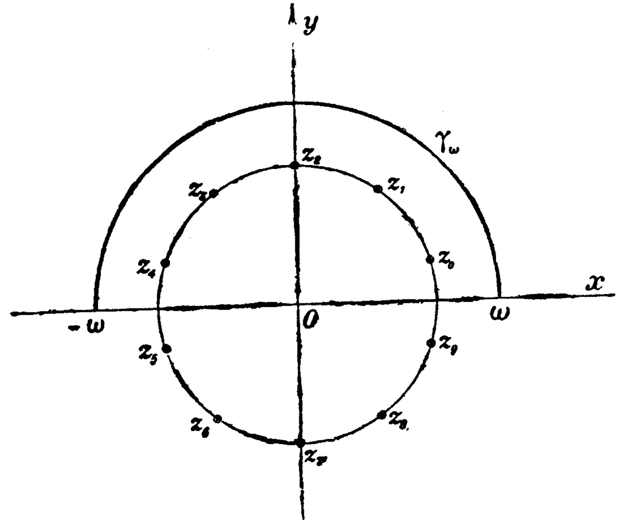


Fig. 13

piano z la curva chiusa segnata nella fig. 13 (che si riferisce al caso $n = 5$), cioè il segmento $-\omega, \omega$ dell'asse reale (essendo ω un numero reale maggiore di 1) più il semicerchio γ_ω di centro O e raggio ω contenuto nel semipiano superiore.

Avremo così, tenuto conto della (11), che

$$\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dx}{1+x^{2n}}+\int_{\gamma_\omega}\frac{dz}{1+z^{2n}}=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}R_k=-\frac{\pi i}{n}\sum_{k=0}^{n-1}z_k=-\frac{\pi i}{n}\sum_{k=0}^{n-1}z_0^{2k+1},$$

donde, per la ben nota formula sulla somma dei primi n termini di una progressione geometrica, segue che

$$\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dx}{1+x^{2n}}+\int_{\gamma_\omega}\frac{dz}{1+z^{2n}}=-\frac{\pi i}{n}z_0\frac{1-z_0^{2n}}{1-z_0^2}=-\frac{\pi i}{n}\frac{2z_0}{1-z_0^2}=\frac{2\pi i}{n(z_0-z_0^{-1})},$$

cioè

$$\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dx}{1+x^{2n}}+\int_{\gamma_\omega}\frac{dz}{1+z^{2n}}=\frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)},$$

avendo osservato che

$$z_0-z_0^{-1}=\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}-\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\sin\frac{\pi}{2n}\right)=2i\sin\frac{\pi}{2n}.$$

Finalmente andiamo a vedere che succede facendo tendere ω all'infinito: Dico che *l'integrale esteso a γ_ω tende a zero.*

Infatti su γ_ω è

$$|z^{2n}+1|\geqslant|z|^{2n}-1=\omega^{2n}-1$$

donde, tenendo conto della (10) (nel caso $z_0=0$), segue

$$\left|\int_{\gamma_\omega}\frac{dz}{1+z^{2n}}\right|\leqslant\int_0^\pi\frac{|z|}{|1+z^{2n}|}\,d\theta\leqslant\int_0^\pi\frac{\omega}{\omega^{2n}-1}\,d\theta=\frac{\pi\omega}{\omega^{2n}-1};$$

ma per $n\geqslant 1$ è ovviamente

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{\pi\omega}{\omega^{2n}-1}=0,$$

quindi sarà a più forte ragione

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma_\omega}\frac{dz}{1+z^{2n}}=0$$

Se ne conclude, al limite, che sussiste l'elegante formula

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)}. \tag{12}$$

§ 5. - Formula integrale di Cauchy e sue prime conseguenze.

Dal teorema di CAUCHY o, più esattamente, dal teorema dei residui segue subito una formula fondamentale, anch'essa dovuta a CAUCHY, che fornisce, sotto forma assai semplice, il valore in un qualsiasi punto interno z_0 di una funzione $w=f(z)$ analitica-regolare [1] in un dominio semplicemente connesso C (contorno incluso), dati che siano i soli valori di $f(z)$ sul contorno c del dominio; propriamente dico che si ha

$$\boxed{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}, \tag{13}$$

supposto che, nell'integrazione, la curva c venga descritta in verso positivo.

Infatti, considerato che la funzione

$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$$

è analitica-regolare in tutto il dominio C tranne nel punto z_0, tutto si riduce a dimostrare che il suo residuo R nel punto z_0 è uguale ad $f(z_0)$, ciò che è un'immediata conseguenza del teorema del § precedente, in quanto è evidentemente

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\varphi(z)=\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0).$$

La *formula di* CAUCHY (13) è della più alta importanza da svariati punti di vista, ma sopratutto per la circostanza che essa ci fornisce un'espressione della funzione f in cui la variabile *effettiva* (che nella (13) è la z_0) figura soltanto nella fun-

(1) D'ora innanzi, come già qualche volta nelle pagine precedenti, useremo spesso le locuzioni: funzione «analitica-regolare», funzione «regolarmente analitica», ecc. (invece di funzione «analitica», senza altro), quando vorremo esplicitamente escludere la presenza di punti singolari.

zione esplicita, semplicissima $1/(z-z_0)$, com'ancor meglio si vede riscrivendo la (13) sotto la forma

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)}{t-z}\,dt}\,, \tag{14}$$

cioè cambiando z_0 e z rispettivamente in z e t. Pertanto molte proprietà di una generica funzione analitica f potranno, per mezzo della formula di CAUCHY, ricavarsi dalle analoghe proprietà della funzione semplicissima $1/(t-z)$. Per esempio, dalla circostanza che detta funzione, per $z \neq t$, è ovviamente *derivabile quante volte si vuole*, possiamo subito dedurre il fondamentale teorema cui si è accennato nel § 3 del Cap. I, e cioè l'*indefinita derivabilità di ogni funzione analitica*, ciò che in particolare implica che *la derivata di una funzione analitica è ancora una funzione analitica.*

La proprietà in discorso sarebbe anzi di per sè evidente ammettendo che il noto teorema di derivazione sotto il segno resti valido anche nel campo complesso, come effettivamente è e non sarebbe difficile dimostrare. Invero, supponendo che z vari in un'area qualsiasi, purchè *tutta interna a c* (onde evitare che possa risultar mai $t=z$), avremmo allora senz'altro:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(t)\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{t-z}\right)dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt\,,$$

$$f''(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c f(t)\,\frac{\partial}{\partial z}\,(t-z)^{-2}dt=\frac{1\cdot 2}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)}{(t-z)^3}\,dt\,,$$

. . . .

e, più generalmente,

$$\boxed{f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt}\,,\qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{15}$$

Comunque si può evitare ogni impiego di teoremi generali calcolando direttamente le successive derivate mediante i corrispondenti rapporti incrementali. Invero dalla (14) segue senz'altro che

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi ih}\oint_c\left(\frac{1}{t-z-h}-\frac{1}{t-z}\right)f(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)}{(t-z-h)(t-z)}\,dt$$

donde, aggiungendo e togliendo dall'ultima funzione integranda la quantità

$$\frac{f(t)}{(t-z)^2}$$

e passando poi al limite per $h\to 0$, si trae subito

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt\,.$$

Similmente si trova che

$$f''(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h}=\frac{1\cdot 2}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)}{(t-z)^3}\,dt\,,\qquad \text{ecc.}$$

Con lo stesso metodo e con non minore semplicità dimostreremo più innanzi un'ulteriore fondamentale proprietà delle funzioni analitiche regolari, e cioè la loro sviluppabilità, senza eccezioni di sorta, in serie di TAYLOR.

Notiamo che se $f^*(t)$ è una qualsiasi funzione *continua* dei punti di c, la formula

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f^*(t)}{t-z}\,dt$$

definisce manifestamente, nell'*interno* di c (contorno escluso), una funzione analitica regolare di z le cui derivate sono date da una formula perfettamente analoga alla (15). Non è però detto, anzi in generale non è vero, che i valor limiti della funzione avvicinandosi al contorno debbano coincidere coi corrispondenti valori di f^*.

§ 6. - La formula di Cauchy dal punto di vista reale: Teorema di Green.

Nell'ultima parte del § 3 del Cap. I, discorrendo dei legami fra le funzioni analitiche di una variabile complessa e le funzioni armoniche, si è accennato al fatto che ogni proprietà delle prime deve ripercuotersi in una proprietà delle seconde, e viceversa. Ritornando ora in quest'ordine d'idee, cerchiamo d'interpretare la formula di CAUCHY dal punto di vista reale, cioè di stabilire la formula ad essa corrispondente nel campo delle funzioni armoniche.

Tale formula è il cosidetto *teorema di* GREEN [1]:

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \left(\frac{d \log 1/r}{dn} \cdot \varphi - \log \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dn} \right) ds \,, \tag{16}$$

che permette di calcolare il valore di una funzione armonica $\varphi(x, y)$ in un qualsiasi punto P_0, di coordinate x_0, y_0, interno ad un dominio di armonicità C della funzione, noti i valori di questa *e quelli della sua derivata normale* (interna) $d\varphi/dn$ sulla frontiera c del dominio C [2]. Nella precedente formula r denota la distanza di P_0 dal generico punto P, di coordinate x, y, che percorre la curva c durante l'integrazione.

Per dimostrare l'equivalenza fra la (16) e la formula di CAUCHY (14), cioè per far vedere come dalla (16), applicata tanto alla parte reale u:

$$u(x_0\, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \left(\frac{d \log 1/r}{dn} \cdot u - \log \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dn} \right) ds \,, \tag{16'}$$

---

[1] V. p. es. F. TRICOMI: *Lezioni di Analisi Matematica* (6ª ed., Padova, Cedam, 1947), P. II, pp. 310-314.

[2] Molto più interessante sarebbe poter determinare i valori interni di φ noti soltanto i suoi valori al contorno (e non pure quelli della derivata normale), cioè risolvere il cosidetto *problema di* DIRICHLET, ma ciò è, in generale, tutt'altro che facile!

Ad ogni modo è ormai acquisito che, sotto ipotesi pochissimo restrittive per il dominio C ed i valori deposti sulla sua frontiera, il problema di DIRICHLET ha una ed una sola soluzione.

quanto alla parte immaginaria v di $f(z)$:

$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \left(\frac{d \log 1/r}{dn} \cdot v - \log \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dn} \right) ds \,, \tag{16''}$$

possa facilmente dedursi la (14); è opportuno cominciare con l'osservare in via generale che, dette ν e ν' due qualsiasi direzioni orientate formanti fra loro l'angolo $+\pi/2$, cioè due direzioni ortogonali tali che l'angolo (ν, ν') sia direttamente congruente all'angolo (x, y) degli assi coordinati, dalle condizioni di monogeneità (2) si deduce immediatamente che, fra le derivate di u e v secondo le direzioni considerate, intervengono le relazioni

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{dv}{d\nu'} \,, \qquad \frac{dv}{d\nu} = -\frac{du}{d\nu'} \,, \tag{17}$$

che, se ν coincide con la direzione dell'asse x positivo, ridanno le (2).

Così pure è opportuno osservare preliminarmente che la derivata secondo una direzione qualsiasi ν della distanza r fra un punto fisso P_0 e un punto mobile P e dell'angolo θ che la retta P_0P forma con una direzione fissa qualsiasi, sono dati [1] dalle formule

$$\frac{dr}{d\nu} = \cos (P_0P, \nu) \,, \qquad \frac{d\theta}{d\nu} = \frac{1}{r} \sin (P_0P, \nu) \,. \tag{18}$$

Ciò premesso, detta s la direzione *positiva* della tangente alla curva c in P, cioè la direzione tale che, detta n la direzione della normale interna, risulti ang $(s, n) = +\pi/2$, avvaliamoci delle (17) per sostituire alle derivate normali di u e v che figurano nelle (16') e (16'') delle derivate tangenziali secondo s; teniamo cioè conto che, per le (17), è

$$\frac{du}{dn} = -\frac{dv}{ds} \,, \qquad \frac{dv}{dn} = \frac{du}{ds} \,,$$

---

[1] Per ottenere le (18) non c'è che da osservare che, dando a P uno spostamento infinitesimo d'ampiezza ε nella direzione ν, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore rispetto ad ε, si ha

$$\Delta r = \varepsilon \cos (P_0P, \nu) \,, \qquad r\Delta\theta = \varepsilon \sin (P_0P, \nu) \,.$$

e sommiamo quindi la (16′) con la (16″) moltiplicata per i; avremo così che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \left[\frac{d \log 1/r}{dn} \cdot f(t) + \log\frac{1}{r}\left(\frac{dv}{ds} - i\frac{du}{ds}\right)\right] ds\,,$$

avendo posto $x_0 + iy_0 = z$, $x + iy = t$. Ma, con un'integrazione per parti, si vede subito che è

$$\oint_c \log\frac{1}{r} \cdot \frac{du}{ds}\, ds = \left[\log\frac{1}{r} \cdot u\right]_c -$$

$$- \oint_c \frac{d \log 1/r}{ds} \cdot u\, ds = - \oint_c \frac{d \log 1/r}{ds} \cdot u\, ds$$

e analogamente per v; quindi la precedente formula può anche scriversi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \left[\frac{d \log 1/r}{dn} \cdot f(t) - \frac{d \log 1/r}{ds}(v - iu)\right] ds$$

cioè

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \left(\frac{d \log 1/r}{dn} + i\frac{d \log 1/r}{ds}\right) f(t)\, ds\,.$$

Osserviamo ora ulteriormente che, detto α l'angolo che la retta P_0P fa con la direzione tangenziale s, per le (18) si ha, da un lato, che

$$(19)\qquad \begin{aligned} \frac{d \log 1/r}{ds} &= -\frac{1}{r}\frac{dr}{ds} = -\frac{\cos\alpha}{r}\,, \\ \frac{d \log 1/r}{dn} &= -\frac{\cos(\alpha + \pi/2)}{r} = \frac{\sin\alpha}{r}\,; \end{aligned}$$

mentre, d'altro lato, potendosi ovviamente porre

$$t = z + r(\cos\theta + i\sin\theta)\,,$$

dove θ denota l'angolo che l'asse x positivo forma con la retta P_0P, si ha che

$$\begin{aligned} dt &= d[r(\cos\theta + i\sin\theta)] = \\ &= \left[\frac{dr}{ds}(\cos\theta + i\sin\theta) + r(-\sin\theta + i\cos\theta)\frac{d\theta}{ds}\right] ds = \\ &= [\cos\alpha(\cos\theta + i\sin\theta) + \sin\alpha(-\sin\theta + i\cos\theta)]\, ds = \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\alpha + i\sin\alpha)\, ds\,, \end{aligned}$$

donde segue immediatamente che

$$ds = \frac{dt}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\alpha + i\sin\alpha)}\,.$$

Finalmente sostituiamo i valori ora trovati nell'ultima espressione ottenuta di $f(z)$; avremo così

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_c \frac{\sin\alpha - i\cos\alpha}{r} \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\alpha + i\sin\alpha)} f(t)\, dt$$

cioè

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(t)\, dt}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}\,,$$

che, essendo $r(\cos\theta + i\sin\theta) = t - z$, non è altro che la formula di CAUCHY (14).

Resta così dimostrato che la formula di CAUCHY è l'equivalente, nel campo complesso, del teorema di **GREEN** per le funzioni armoniche. Se invece i precedenti calcoli si eseguono a ritroso, il che è senz'altro possibile, le considerazioni precedenti forniscono una nuova dimostrazione del teorema di GREEN, diversa da quelle con cui esso viene solitamente stabilito.

Ricordando che, se φ è una funzione armonica in un dominio C di frontiera c, si ha [1] che

$$(20)\qquad \oint_c \frac{d\varphi}{dn}\, ds = 0\,,$$

---

[1] Il modo più semplice per ottenere la (20) è di partire dall'equazione di LAPLACE scritta sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0$$

ed integrare duplicemente nel dominio C, applicando poi il lemma di GAUSS (p. 22); si trova così subito che

$$-\oint_c \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn}\, ds - \oint_c \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn}\, ds = -\oint_c \frac{d\varphi}{dn}\, ds = 0\,.$$

dal teorema di GREEN si può ricavare subito una capitale proprietà delle funzioni armoniche, di cui vedremo subito l'importanza nella teoria delle funzioni analitiche: il cosidetto *principio della media*, e cioè che:

Il valore assunto da una funzione armonica nel centro di un cerchio, coincide col valor medio della funzione sulla periferia del cerchio stesso.

Infatti, nell'ipotesi che la curva c della (16) sia un cerchio di un qualsiasi raggio a col centro nel punto P_0, visto che sulla periferia di questo cerchio si ha $r = a$ e che inoltre, in virtù della seconda delle (19), ivi è pure

$$\frac{d \log 1/r}{dn} = \frac{\sin \pi/2}{r} = \frac{1}{a};$$

la (16) assume la forma

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_c \varphi(x, y)\, ds - \frac{\log 1/a}{2\pi} \oint_c \frac{d\varphi}{dn} ds,$$

donde per la (20) segue che

$$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_c \varphi(x, y)\, ds, \tag{21}$$

formula che, considerato che $2\pi a$ è la lunghezza di una circonferenza di raggio a, esprime appunto l'enunciato principio della media.

Dal principio della media segue in particolare che *le funzioni armoniche sono sempre estremate al contorno*, ossia che tanto il massimo quanto il minimo di una funzione armonica in un'area devono necessariamente cadere sul contorno di essa.

Infatti, se per esempio il minimo cadesse in un punto interno P, si potrebbe allora costruire un cerchietto C col centro in P sulla periferia del quale i valori della funzione siano sempre maggiori del valore in P (o, in parte, uguali a quel valore), ciò che è in contradizione col fatto che la media di questi valori dev'essere uguale al valore della funzione in P, ammenocchè essa

non sia *costante* in tutto il cerchietto C, epperò anche [1] in tutto il campo di armonicità.

Notiamo infine come dall'ultima proposizione discenda immediatamente l'*unicità* della soluzione nel problema di DIRICHLET. Infatti, se esistessero due diverse funzioni armoniche u_1 ed u_2 assumenti gli stessi valori sul contorno di un'area, la loro differenza $u_1 - u_2$, ch'è pure una funzione armonica, dovendo essere estremata al contorno, avrà tanto il minimo quanto il massimo uguali a *zero*; ciò che mostra come, in tutta l'area, debba esser sempre $u_1 = u_2$.

§ 7. - Principio della media e teorema di Liouville.

Le proprietà delle funzioni armoniche più sopra indicate si rispecchiano ovviamente in analoghe proprietà delle funzioni analitiche. In particolare ciò si dica per il *principio della media* (21), chè, applicando questa formula tanto alla parte reale u quanto alla parte immaginaria v di una qualsiasi funzione analitica $f(z)$ considerata su di una circonferenza di raggio a, col centro nel punto $z = x + iy$, si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[(x + a\cos\varphi) + i(y + a\sin\varphi)]\, d\varphi, \tag{22}$$

avendo osservato che, al variare di φ da 0 a 2π, il punto di coordinate $(x + a\cos\varphi,\ y + a\sin\varphi)$ percorre la circonferenza considerata e che $ds = a\,d\varphi$. In parole: *Il valore di una funzione analitica in un punto è uguale alla media dei valori da essa assunti su di un cerchio avente quel punto come centro.*

Quanto al teorema sui massimi e minimi, esso si mantiene per il modulo; propriamente si ha che:

Il modulo di una funzione $f(z)$ analitica-regolare in un dominio D, raggiunge il suo **massimo** *sul contorno dell'area. Lo stesso si dica pel* **minimo**, *se nell'area è sempre $f(z) \neq 0$.*

[1] Si può invero dimostrare che se una funzione armonica in un certo campo A resta costante in un dominio costituente una parte di A, essa è certamente costante in tutto A. Cfr. W. F. OSGOOD, [10], I, p. 693.

Infatti, supposto senz'altro escluso il caso che il modulo di $f(z)$ si mantenga costante, caso in cui il teorema diventa triviale [1]; supponiamo che, se possibile, il massimo M di $|f(z)|$ si raggiunga in un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ *interno* a D, e costruiamoci un cerchietto di centro P e raggio sufficientemente piccolo a, tale che sulla sua periferia sia $|f(z)| < M$, senza però escludere che, su una parte di essa, possa invece aversi $|f(z)| = M$. Dalla (22) (in cui sia posto $z = z_0$) potremo allora trarre che:

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f[(x_0 + a\cos\varphi) + i(y_0 + a\sin\varphi)]|\, d\varphi < M \;;$$

ma ciò è assurdo, quindi ecc. Quanto, alla proposizione relativa al minimo del modulo, essa si riconduce immediatamente alla precedente considerando la funzione $1/f(z)$, ciò che è certamente lecito se nel dominio D è sempre $f(z) \neq 0$.

A proposito del modulo di una funzione analitica-regolare in un'area notiamo ulteriormente che dalla formula di CAUCHY e dalla (5) del § 1, si può trarre un'importantissima limitazione di esso, noto che sia un *valor maggiorante* dei suoi valori sul contorno c dell'area, cioè un numero M tale che *ivi* sia sempre

$$|f(z)| \leq M .$$

Infatti, detta δ la minima distanza del punto interno z che si considera dai punti del contorno c, su di questo si ha ovviamente

$$\left|\frac{f(t)}{t-z}\right| \leq \frac{M}{\delta}$$

donde, per la (14) e la (5), segue

$$|f(z)| \leq \frac{ML}{2\pi\delta}, \tag{23}$$

avendo indicato con L la lunghezza della curva c.

---

[1] Può del resto facilmente dimostrarsi che se il modulo di una funzione analitica si mantiene costante in un dominio, anche la funzione è costante in quel dominio, e quindi (nota a pagina 37) in tutto il suo campo di analiticità. Cfr. HURWITZ-COURANT [7], p. 300.

Quello che più conta è però che col metodo indicato si riesce, noto che sia M, non solo a maggiorare il modulo di $f(z)$ bensì anche quelli delle *derivate di qualsivoglia ordine* di $f(z)$. Invero, sostituendo la (14) con la (15), si trova, tal quale come più sopra

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!\,ML}{2\pi\delta^{n+1}}, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

In particolare, se la curva c è un cerchio di raggio r col centro in z, si ha

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!\,M}{r^n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

L'ultima disuguaglianza consente di dimostrare con la più grande facilità una delle più interessanti proposizioni dell'intera teoria delle funzioni analitiche, e cioè il seguente:

TEOREMA DI LIOUVILLE. – *Se una funzione analitica è regolare e limitata nell'intero piano, essa è necessariamente una costante.*

Infatti, se indichiamo con M un confine superiore di $|f(z)|$ nell'intero piano, dalla (25) nel caso di $n = 1$, si trae

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r},$$

qualunque sia r. Ma ciò mostra evidentemente che è $f'(z) = 0$ qualunque sia z, dunque (cfr. § 2) $f(z)$ è necessariamente una costante.

Capitolo III.

Sviluppi in serie.

§ 1. - Sulle serie di funzioni nel campo complesso.

Notoriamente la teoria delle serie si estende senz'alcuna difficoltà al campo complesso; in particolare questo avviene pel concetto di serie *uniformemente* convergente chè, tal quale come nel campo reale, una serie di funzioni analitiche:

$$f(z) = u_1(z) + u_2(z) + \dots$$

verrà detta *uniformemente convergente* nel dominio D del piano complesso se, dato un numero positivo ε piccolo a piacere, può sempre determinarsi un indice n_0 tale che, per ogni $n > n_0$ e *qualunque sia z in D*, sia sempre

$$\left| f(z) - \sum_{h=1}^{n} u_h(z) \right| < \varepsilon .$$

Ne segue senz'altro che *la somma di una serie siffatta è necessariamente una funzione continua*, che *l'integrale della serie è uguale alla serie degli integrali*, ecc.; noi non ci soffermeremo pertanto su queste quasi ovvie generalizzazioni. Merita invece la pena di soffermarsi un momento su di un altro teorema, dovuto (come molti altri di questa teoria) al Weierstrass, che, pur non presentando alcuna difficoltà, non ha però un immediato riscontro nelle serie di funzioni di variabili reali:

Se le funzioni $u_1(x)$, $u_2(x)$,.... sono regolarmente analitiche nel dominio semplicemente connesso D del piano complesso, contorno compreso, e se, su questo, la serie

$$u_1(z) + u_2(z) + \dots \tag{1}$$

converge uniformemente, essa convergerà pure uniformemente, in tutto D e la sua somma costituisce ivi una funzione analitica-regolare $f(z)$, le cui derivate di qualsivoglia ordine possono calcolarsi derivando termine a termine la serie.

La convergenza uniforme della serie anche nell'interno di D segue immediatamente dal fatto che, pel teorema sui massimi e minimi del modulo di una funzione analitica, il massimo modulo della somma

$$u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots + u_{n+p}(z)$$

viene raggiunto, qualunque sia l'intero p, sul contorno c di D.

Per dimostrare invece che la funzione-somma $f(z)$ è analitica e che le sue derivate possono calcolarsi con la derivazione termine a termine, cominciamo con l'osservare che anche la serie

$$\frac{u_1(t)}{t-z} + \frac{u_2(t)}{t-z} + \dots$$

è, al pari della data, uniformemente convergente su c, e quindi integrabile termine a termine, ossia tale da aversi

$$\lim_{n\to\infty} \oint_c \frac{S_n(t)}{t-z}\, dt = \oint_c \frac{f(t)}{t-z}\, dt ,$$

avendo indicato con S_n la somma dei primi n termini della (1).

Ne segue, applicando anzitutto la formula di Cauchy alla funzione ovviamente analitica $S_n(z)$:

$$S_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{S_n(t)}{t-z}\, dt$$

e passando poi al limite per $n \to \infty$, che sussiste la formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(t)}{t-z}\, dt ,$$

ciò che, per l'osservazione in fine del § 5 del Cap. II, basta per concludere che la funzione $f(z)$ è analitica nell'interno di D.

Analogamente, partendo invece dalla serie, pure uniformemente convergente,

$$\frac{u_1(t)}{(t-z)^{m+1}} + \frac{u_2(t)}{(t-z)^{m+1}} + \dots$$

dove m denota un qualsivoglia intero positivo, si constata che

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(t)}{(t-z)^{m+1}} dt = \lim_{n\to\infty} \frac{m!}{2\pi i} \oint_c \frac{S_n(t)}{(t-z)^{m+1}} dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n^{(m)}(z) = u_1^{(m)}(z) + u_2^{(m)}(z) + \dots .$$

ciò che mostra come le derivate di tutti gli ordini di $f(z)$ possano calcolarsi derivando termine a termine la serie (1).

§ 2. - Serie di potenze.

Fra le serie di funzioni hanno, come nel campo reale, ma qui anche più accentuatamente, speciale importanza le *serie di potenze*, cioè le serie del tipo

(2) $$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots ,$$

dove a_0, a_1, a_2,.... (« *coefficienti* » della serie) sono delle costanti reali o complesse qualsiasi.

Una delle più semplici e più importanti proprietà di queste serie è che il loro campo di convergenza è sempre un *cerchio* col centro nell'origine, il cui raggio può anche raggiungere i valori estremi 0 ed ∞.

Precisamente dico che, *data una serie del tipo* (2), *esiste sempre un numero positivo* ρ ($0 \leqslant \rho \leqslant \infty$), *che dicesi* **raggio** di convergenza *della serie, tale che essa risulti sempre convergente* (*anzi assolutamente convergente*) *per ogni z in modulo minore di* ρ, *mentre non è mai convergente per* $|z| > \rho$ [1]. *Dico inoltre che*

[1] Quanto al comportamento della serie sulla circonferenza $|z|=\rho$ che limita il cerchio di convergenza, esso differisce da caso a caso, e ci sono tanto esempi di serie di potenze convergenti sull'intera circonferenza limite (p. es. la serie $\Sigma z^n/n^2$), quanto di serie ivi mai convergenti (p. es. Σz^n). Tuttavia vedremo più avanti (p. 61) che sulla circonferenza in parola cade sempre un punto singolare almeno della funzione definita dalla serie.

la serie stessa converge uniformemente in ogni dominio tutto contenuto nel cerchio $|z| < \rho$.

Questo fondamentale teorema può stabilirsi, con un unico

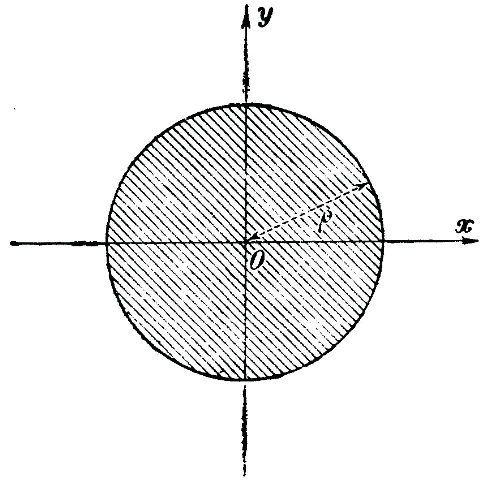


Fig. 14

ragionamento, assieme con l'altro che permette di determinare il numero ρ, e cioè col seguente:

TEOREMA DI CAUCHY-HADAMARD. – *Il raggio di convergenza della serie di potenze* $\Sigma a_n z^n$ *coincide con l'inverso del « massimo limite » della successione*

(3) $$|a_1|, \quad \sqrt{|a_2|}, \quad \sqrt[3]{|a_3|}, \dots, \quad \sqrt[n]{|a_n|}, \dots,$$

coll'intesa che se questo massimo limite, cioè il massimo dell'insieme dei punti limiti della successione, risulta nullo, il raggio di convergenza è da ritenersi infinito, cioè la serie è dovunque convergente.

Infatti, detto L il massimo limite di cui si discorre (che, pel momento, supporremo non nullo) e z_0 un qualsiasi punto del piano complesso tale che sia

$$|z_0| < \frac{1}{L},$$

indichiamo con r un numero tale da aversi $|z_0| < r < 1/L$ e osserviamo che, essendo in conseguenza $1/r > L$, solo un numero finito di elementi della successione (3) potranno risultare maggiori di $1/r$, epperò esisterà certamente un intero n_0 tale che per $n > n_0$ sia sempre

$$\sqrt[n]{|a^n|} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Ne segue che per $n > n_0$ sarà

$$|a_n z_0^n| = (\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z_0|)^n \leqslant \left(\frac{|z_0|}{r}\right)^n,$$

ma la serie

$$\Sigma \left(\frac{|z_0|}{r}\right)^n,$$

essendo una serie geometrica con ragione compresa fra 0 ed 1, è certo convergente; dunque *a fortiori* convergerà la serie $\Sigma |a_n z_0^n|$ che, per $n > n_0$, ammette la precedente come maggiorante.

Se invece è

$$|z_0| > \frac{1}{L},$$

essendo allora $1/|z_0| < L$, esisteranno infiniti valori dell'indice n: diciamoli $n_1, n_2, n_3, \dots$ tali da far sì che sia

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z_0|}$$

e, conseguentemente,

$$|a_{n_k} z_0^{n_k}| > \frac{1}{|z_0|^{n_k}} |z_0|^{n_k} = 1 ;$$

è pertanto impossibile che sia

$$\lim_{n\to\infty} |a_n z_0^n| = 0 ,$$

come sarebbe necessario se la nostra serie fosse convergente nel punto z_0.

Abbiamo così dimostrato che (supposto $L > 0$) la serie data è convergente, anzi assolutamente convergente, per $|z_0| < 1/L$ e non convergente invece se è $|z_0| > 1/L$, dunque il suo campo di convergenza è il cerchio col centro nell'origine di raggio $\rho = 1/L$.

Quanto alla convergenza *uniforme* della serie in ogni dominio D tutto compreso nel cerchio di convergenza $|z| < \rho$, essa è una conseguenza immediata del teorema di WEIERSTRASS sulla uniforme (ed assoluta) convergenza di una serie di funzioni ammettente una maggiorante a termini costanti convergente [1].

Invero, detto z_0 un qualsiasi punto tale che si abbia

$$\Delta < |z_0| < \rho ,$$

avendo indicato con Δ il massimo di $|z|$ nel dominio D; in tutto D è ovviamente

$$|a_n z^n| < |a_n z_0^n| ,$$

epperò la serie (2) ammette come maggiorante la serie a termini costanti

$$\Sigma |a_n z_0^n| ,$$

ch'è certo convergente, perchè per ipotesi è $|z_0| < \rho$.

Finalmente, se fosse $L = 0$, cioè se la successione (3) avesse come suo unico punto limite lo zero, il che accade allora e solo allora che è

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 ,$$

---

[1] Questo teorema si trasporta dal campo reale (in cui ordinariamente lo si dimostra) al campo complesso senz'alcuna difficoltà, cioè con la solita sostituzione delle parole: *valore assoluto*, con la parola: *modulo*.

detto z_0 un punto qualsiasi del piano, η un numero positivo minore di $1/|z_0|$ ed n_0 un intero tale che per $n > n_0$ sia sempre

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \eta \;;$$

si avrà

$$|a_n z_0^n| \leqslant (\eta\,|z_0|)^n ,$$

il che, tenuto conto che è $\eta\,|z_0| < 1$, mostra come la serie data sia convergente in z_0; dunque, nel caso in esame, questa è dapertutto convergente.

Dal teorema di CAUCHY-HADAMARD può subito dedursi il seguente *corollario* che è quello più di frequente adoperato nella pratica:

Se, almeno da un certo n in poi, è $a_n \neq 0$ ed esiste il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} ,$$

esso è il raggio di convergenza della serie $\Sigma\, a_n z^n$.

Infatti, se si indica con λ il limite precedente, si ha allora notoriamente (CESARO [4], p. 100) che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\lambda} .$$

Per esempio, si vede così immediatamente che le tre serie

$$\Sigma\, z^n , \qquad \Sigma \frac{z^n}{n!} , \qquad \Sigma\, n!\, z^n$$

hanno come raggi di convergenza rispettivamente 1, ∞ e 0.

Dal teorema di CAUCHY-HADAMARD segue inoltre che *la serie ottenuta derivando termine a termine una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della primitiva*, e quindi che derivando (o integrando) termine a termine la serie *quante volte si vuole*, si otterranno tante serie di potenze tutte dotate del medesimo raggio di convergenza.

Infatti, essendo notoriamente (1)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 ,$$

le due successioni

$$|a_1|, \quad \sqrt{|a_2|}, \quad \sqrt[3]{|a_3|}, \ldots, \quad \sqrt[n]{|a_n|}, \ldots$$

e

$$|a_1|, \quad \sqrt{2\,|a_2|}, \quad \sqrt[3]{3\,|a_3|}, \ldots, \quad \sqrt[n]{n\,|a_n|}, \ldots,$$

di cui la seconda si riferisce alla serie derivata scritta sotto la forma

$$\frac{1}{z}\,\Sigma\, n a_n z^n ,$$

hanno manifestamente gli stessi punti limiti (2).

Se ne conclude che *una serie di potenze definisce, nell'interno del proprio cerchio di convergenza, una funzione analitica regolare, derivabile (o integrabile) termine a termine quante volte si vuole.*

§ 3. - Sviluppo in serie di Taylor e di Laurent.

Ci siamo soffermati un po' lungamente sulle serie di potenze perchè queste, come si è già accennato, occupano un posto di primo piano nella teoria delle funzioni di variabile complessa, che anzi da qualche autore (WEIERSTRASS) viene addirittura

---

(1) Si ha invero che

$$\log \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0 .$$

(2) È invero ben facile persuadersi che, se due successioni $A_1, A_2, A_3, \ldots$ e $B_1, B_2, B_3, \ldots$ sono tali che $\lim A_n/B_n = 1$ (cioè sono tali che $A_n \backsim B_n$), ogni punto limite della prima è pure punto limite della seconda, e viceversa.

fondata sullo studio delle serie di potenze. Invero sussiste il fatto, di fondamentale importanza, che *la classe delle funzioni rappresentabili mediante serie di potenze coincide sostanzialmente con quella delle funzioni analitiche nel nostro senso, cioè delle funzioni dotate di derivata unica.* Propriamente sussiste il seguente:

TEOREMA DI SVILUPPABILITÀ IN SERIE. - *Se il cerchio C di centro z_0 è compreso in un'area C' in cui la funzione $f(z)$ è regolarmente analitica, questa è rappresentabile entro il cerchio mediante la serie di potenze di $z - z_0$:*

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n} \tag{4}$$

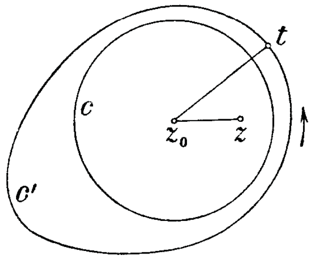


Fig. 15

che, per analogia con la locuzione usata nel campo reale, chiameremo «serie di Taylor» della funzione f nel punto z_0.

Questo bellissimo teorema, tanto più semplice del suo analogo nel campo reale, si dimostra assai facilmente come si è già avuto occasione di accennare, e cioè «riconducendo» la funzione f alla funzione semplicissima $1/(t - z)$ mediante la formula di CAUCHY. Precisamente osserviamo da un lato che si ha identicamente

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{t - z_0}}$$

e dall'altro che, per la nota formula relativa alla somma di una serie geometrica, finchè è

$$\left| \frac{z - z_0}{t - z_0} \right| < 1,$$

cioè è $|t - z_0| > |z - z_0|$, si ha

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{t - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{t - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{t - z_0}\right)^2 + \dots$$

Ne segue che, detto c' il contorno di C', per z interno al cerchio C (contorno escluso) in virtù della formula di CAUCHY, potrà porsi:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} \frac{f(t)}{t - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} \frac{1}{t - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{t - z_0}\right)^n f(t)\, dt$$

donde, integrando termine a termine e tenendo conto della (10) del Cap. II, segue senz'altro la (4):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{c'} \frac{f(t)\, dt}{(t - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Questo fondamentale teorema chiarisce bene, fra l'altro, l'intimo significato, inafferrabile nel campo reale, del *raggio di convergenza* r della serie di TAYLOR di una funzione f in un punto z_0: *esso non è altro che la minima distanza di z_0 dai punti singolari della funzione.*

All'uopo cominciamo col dimostrare che, detto δ l'estremo inferiore delle distanze dei punti singolari della funzione da z_0, è necessariamente $\delta = r$.

Infatti, se fosse $\delta > r$ potremmo costruire l'area C' di cui si discorre nel teorema precedente in modo che in essa fosse contenuto un cerchio C col centro in z_0 di raggio maggiore di r, mentr'invece, se fosse $\delta < r$, almeno un punto singolare dovrebbe cadere nell'*interno* del cerchio di convergenza, contrariamente a quanto si è stabilito nel paragrafo precedente.

Ciò premesso, vogliamo fare ulteriormente vedere che δ non è soltanto l'*estremo inferiore* delle distanze dei punti singolari da z_0, bensì il loro *minimo*, cioè che, come si è già accennato, *sulla periferia del cerchio di convergenza di una serie di potenze, deve cader sempre almeno un punto singolare della funzione da essa definita.*

Infatti, se i punti della periferia γ del cerchio di convergenza fossero tutti punti di regolarità della funzione $f(z)$, detto ζ uno qualsiasi di essi, la funzione sarebbe sviluppabile in una serie di potenze di $z - \zeta$ convergente entro un certo cerchio C_ζ col centro nel punto ζ, il cui raggio (non nullo) vogliamo indicare con $r(\zeta)$. Tenuto conto che, come si è già dimostrato, $r(\zeta)$

può identificarsi con l'estremo inferiore delle distanze dei punti singolari di $f(z)$ da ζ; è evidente che $r(\zeta)$ è una funzione *continua* di ζ o, se così si preferisce, dell'arco della circonferenza γ su cui ζ può muoversi. Ma, per un noto teorema dovuto a WEIERSTRASS, ogni funzione continua *raggiunge* tanto il suo estremo inferiore (che perciò diventa un *minimo*) quanto il suo estremo superiore (*massimo*); dunque l'estremo inferiore η di $r(\zeta)$ su γ, dovendo coincidere col valore di $r(\zeta)$ in un certo punto ζ_0 di γ, sarà certo *maggiore di zero.*

Ne segue che, al variare di ζ, i cerchi di convergenza C_ζ ricoprono almeno tutta la corona circolare compresa fra γ e la circonferenza concentrica γ' di raggio $r + \eta$, epperò la funzione $f(z)$ è regolare anche dentro γ', ciò che, per il teorema di sviluppabilità, implica che il suo sviluppo in serie di potenze di $z - z_0$ dovrebbe avere come raggio di convergenza almeno $r + \eta$, mentre si è supposto che tale raggio sia r. Nascendo la contradizione dall'aver supposto che tutti i punti di γ fossero regolari per la funzione $f(z)$, se ne conclude che fra essi trovasi almeno un punto singolare della funzione stessa.

Vogliamo infine notare esplicitamente che *lo sviluppo di Taylor è unico*, cioè che, se una funzione $f(z)$ è sviluppabile, in un intorno del punto z_0, mediante una serie di potenze del tipo

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots, \tag{5}$$

questa è necessariamente quella di TAYLOR, cioè è

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{6}$$

Infatti, essendo le serie di potenze derivabili termine a termine quante volte si vuole, dalla (5) può trarsi

$$f^{(n)}(z) = n!\, a_n + \frac{(n+1)!}{1!} a_{n+1}(z - z_0) + \frac{(n+2)!}{2!} a_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots,$$

donde, ponendo $z = z_0$, segue la (6).

Ciò posto, considerato che la serie di TAYLOR è ovviamente lo strumento più acconcio per lo studio di una funzione analitica nell'intorno di un suo punto di regolarità, cerchiamo di procurarci uno strumento analogo per lo studio di una funzione $f(z)$ nell'intorno di un suo *punto singolare isolato* z_0. Al-

l'uopo serve assai bene lo *sviluppo di Laurent*, che ci consente di rappresentare una funzione analitica $f(z)$ regolare nell'intorno di z_0 tranne (eventualmente) nel punto z_0, mediante una serie di potenze, positive e negative di $z - z_0$. Propriamente sussiste il seguente:

TEOREMA DI LAURENT. – *Se la corona circolare (c_1, c_2) di centro z_0 è compresa in un dominio anulare (c_1', c_2') in cui la funzione $f(z)$ è regolarmente analitica, questa è rappresentabile entro la corona mediante la serie di potenze positive e negative di $z - z_0$:*

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n} \tag{7}$$

i cui coefficienti sono dati dalla formula

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(t)\,dt}{(t - z_0)^{n+1}}, \tag{8}$$

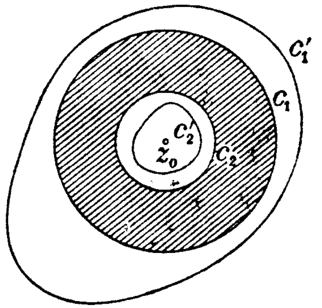


Fig. 16

dove c denota una qualsiasi curva chiusa, avviluppante z_0 dell'area anulare, da intendersi percorsa una sola volta nel verso positivo. Per esempio potrebbe essere $c \equiv c_1$, oppure $c \equiv c_1'$, ecc.

Infatti, procedendo in un modo perfettamente analogo a quello seguito nella dimostrazione del teorema di TAYLOR, osserviamo anzitutto che, per la formula di CAUCHY, si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1'} \frac{f(t)}{t - z}\,dt - \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2'} \frac{f(t)}{t - z}\,dt,$$

supposto che il contorno interno c_2' venga percorso non già nel verso positivo che gli competerebbe quale contorno (parziale) dell'area anulare (c_1', c_2'), bensì nel verso opposto, cioè concorde con quello cui con si deve immaginar percorso c_1'. Osserviamo inoltre che, tal quale come nel caso precedente, si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1'} \frac{f(t)}{t - z}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

avendo posto

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1'} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\, dt, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Quanto all'integrale esteso a c_2', avendosi identicamente

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1-\frac{t-z_0}{z-z_0}},$$

considerato inoltre che sul cerchio c_2' è certo

$$\left|\frac{t-z_0}{z-z_0}\right| < 1.$$

e quindi pure

$$\frac{1}{1-\frac{t-z_0}{z-z_0}} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^m;$$

accanto alla formula precedente avremo l'altra analoga:

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2'} \frac{f(t)}{t-z}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2'} \frac{1}{z-z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^m f(t)\, dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (z-z_0)^{-(m+1)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2'} (t-z_0)^m f(t)\, dt.$$

che, cambiando $-(m+1)$ in n, assume l'aspetto

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2'} \frac{f(t)}{t-z}\, dt = \sum_{n=-1}^{-\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2'} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\, dt.$$

Non vi è ora che da sommare i due risultati ottenuti e da osservare che, tanto l'integrale che dà a_n quanto l'ultimo scritto, possono venire estesi entrambi a c_1' o entrambi a c_2' o, più generalmente, alla curva c di cui si parla nell'enunciato, per avere la formula

$$(7') \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

dove a_n è dato dalla formula (8) tanto se n è positivo quanto se esso è negativo o nullo; formula che non differisce dalla (7) che per l'impiego di due simboli di sommatoria invece di uno solo.

Notiamo che anche *lo sviluppo di* LAURENT *è unico.*

All'uopo cominciamo con l'osservare che l'integrale

$$I_m = \oint_c (z-z_0)^m\, dz,$$

dove c è la stessa curva di più sopra ed m un intero qualsiasi (positivo, negativo o nullo) è sempre *zero*, tranne nel caso $m = -1$, nel quale vale invece $2\pi i$.

Infatti, supposto (com'è lecito) che la curva c sia un cerchio col centro in z_0 di un certo raggio r e praticata la sostituzione

$$z = z_0 + r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

che (formula (10) del Cap. II) implica

$$dz = i(z-z_0)\, d\theta,$$

si ha

$$I_m = i\int_0^{2\pi} (z-z_0)^{m+1} d\theta = ir^{m+1}\int_0^{2\pi} [\cos(m+1)\theta + i \sin(m+1)\theta]\, d\theta$$

donde segue subito

$$(9) \quad I_m = \begin{cases} \dfrac{ir^{m+1}}{m+1} [\sin(m+1)\theta - i\cos(m+1)\theta]_0^{2\pi} = 0, & (m \neq -1) \\ 2\pi i, & (m = -1). \end{cases}$$

Ciò premesso supponiamo che la funzione f ammetta un altro sviluppo della forma (7) ma coi coefficienti a_n'; dalla uguaglianza

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - a_n')(z-z_0)^n = 0,$$

dividendo per $(z-z_0)^{n+1}$ e integrando poi termine a termine (cosa certo lecita a causa della uniforme convergenza delle serie di potenze) lungo la curva c di prima, tenuto conto del precedente risultato relativo all'integrale I_m, segue subito che

$$a_n - a_n' = 0 \;;$$

contrariamente all'ipotesi che i due sviluppi siano distinti.

Notiamo inoltre, benchè la cosa sia quasi superflua, che se la funzione $f(z)$ è regolare anche in z_0 gli integrali figuranti nel secondo sommatorio della (7') vanno tutti a zero e lo sviluppo di LAURENT si riduce a quello di TAYLOR.

Finalmente vogliamo osservare che dalla (9), integrando la (7) termine a termine, segue immediatamente che *il residuo della funzione $f(z)$ nel punto singolare z_0, coincide col coefficiente a_{-1} del suo sviluppo di* LAURENT.

Quest'importante risultato, ch'è quello su cui generalmente ci si appoggia per calcolare i residui, contiene come caso particolare il *teorema provvisorio* del § 4 del Cap. II.

Infatti, se i coefficienti delle potenze negative nello sviluppo di LAURENT della funzione $f(z)$ intorno al punto z_0, *sono tutti nulli eccetto a_{-1}*, si ha evidentemente

$$(z - z_0)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+1} + a_{-1}$$

e quindi

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-1} = \textit{residuo}.$$

Se invece anche uno solo dei coefficienti delle potenze negative oltre a_{-1} è diverso da *zero*, il limite di $(z - z_0)f(z)$ per $z \to z_0$ non è finito e il teor. del Cap. II non è applicabile.

Basta questo a far comprendere l'importanza del progresso ora realizzato in confronto del Cap. II.

§ 4. - Zeri e punti di livello di una funzione analitica.

Con gli sviluppi di TAYLOR e di LAURENT ci siamo creati, come dianzi si diceva, gli strumenti adatti per lo studio *locale* di una funzione analitica f nell'intorno sia di un punto di regolarità sia di un punto singolare isolato.

Cominciando dal primo caso, osserviamo anzitutto che, in virtù della formula di TAYLOR, se è $f(z_0) = 0$, cioè se z_0 è, come suol dirsi, uno *zero* della funzione, potrà porsi

$$f(z) = (z - z_0)g(z)\,,$$

dove

$$g(z) = f'(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2\,!}(z - z_0) + \ldots$$

è una nuova funzione, anch'essa regolare in z_0. Più generalmente, se in z_0 si ha

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0\,, \qquad f^{(n)}(z_0) \neq 0 \quad \text{(1)},$$

nel qual caso il punto z_0 si dirà uno *zero di ordine n* della funzione, si avrà

$$f(z) = (z - z_0)^n g^*(z) \tag{10}$$

con $g^*(z)$ funzione regolare e non nulla nel punto z_0: e viceversa. Dunque uno zero di ordine n della funzione ($n = 1, 2, \ldots$) può tanto definirsi come un punto z_0 in cui la funzione si annulla assieme con le sue prime $n - 1$ derivate, quanto come un punto tale che per $z \to z_0$ $|f(z)|$ diviene infinitesimo d'ordine n rispetto a $|z - z_0|$.

Quel che più conta non è però l'osservazione precedente bensì l'altra che *gli zeri, siano essi semplici o multipli, di una funzione analitica regolare* (*non identicamente nulla*) *sono sempre isolati*. Dico cioè che si può sempre determinare un intorno di un punto z_0 siffatto, tale che in esso la funzione non si annulli mai fuori di z_0.

---

(1) È facile vedere che se z_0 è, come s'è supposto, un punto di regolarità della funzione, esiste sempre un n finito tale da aversi $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Infatti, se le derivate di tutti gli ordini della funzione f si annullassero in z_0, in qualunque cerchio col centro in z_0 la funzione sarebbe rappresentata da una serie della forma

$$0 + 0 \cdot (z - z_0) + 0 \cdot (z - z_0)^2 + \cdots$$

epperò avrebbe sempre valore *zero*.

Infatti basta osservare che, essendo $|g^*(z_0)| > 0$, pel teorema della conservazione del segno, potrà certo determinarsi un intorno di questo punto in cui sia sempre $|g^*(z)| > 0$ e conseguentemente $g^*(z) \neq 0$ donde, per la (10), segue

$$f(z) \neq 0\,, \qquad (z \neq z_0)\,.$$

Più generalmente, sostituendo alla considerazione della funzione $f(z)$ quella della funzione $f(z) - c$, dove c è una costante, potremo enunciare che:

L'insieme dei punti « di livello » di una funzione analitica-regolare $f(z)$, cioè dei punti in cui la funzione assume un determinato valore c, non può avere altri punti limiti all'infuori dei punti singolari della funzione.

In particolare ne segue che in ogni *dominio* (1) di regolarità della funzione, non può cadere che un *numero finito* degli anzidetti punti di livello, altrimenti (2) ci dovrebbe essere almeno un punto limite.

Inoltre: *Se due funzioni analitiche regolari f_1 e f_2 coincidono fra loro in un'area piccola a piacere, o su di un pezzetto sia pur piccolissimo di una linea, o addirittura soltanto in un numero infinito di punti di un dominio, appartenente al loro campo di analiticità, esse devono necessariamente essere identiche.*

Invero, se così non fosse, la differenza $f_1 - f_2$ avrebbe nel dominio infiniti zeri senz'essere identicamente nulla.

Nel seguito avremo più volte agio di apprezzare la capitale importanza del teorema con tanta facilità ora stabilito, che, non meno di quelli sull'indefinita derivabilità e sulla sviluppabilità in serie di TAYLOR, pone in luce la profonda differenza fra la teoria delle funzioni analitiche e quella delle funzioni di variabili reali.

Notiamo infine, prima di passare allo studio dei punti singolari, che un punto $z = z_0$ in cui si annulli la derivata prima di una funzione $w = u + iv$, pur non essendo certo un punto

(1) Qui é indispensabile riferirsi proprio ad un *dominio* di regolarità, compresa cioè la frontiera.

(2) Pel cosidetto teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS (cfr. KNOPP [9], p. 408 oppure F. TRICOMI, Op. cit. a p. 43, P. I. p. 62).

singolare della funzione, si presenta però come singolare nei riguardi della rappresentazione grafica di essa mediante le linee $u =$ cost., $v =$ cost. (cfr. il § 6 del Cap. I), mancando allora, localmente, la conformità della trasformazione fra il piano z e il piano w.

Infatti, dette rispettivamente ρ, θ e σ, φ le coordinate polari *locali* di due punti corrispondenti nei due piani, cioè posto

$$z - z_0 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,,$$
$$w(z) - w(z_0) = \sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

e supposto inoltre, per maggiore generalità, che in $z = z_0$ non si annulli soltanto la derivata prima w' ma che si annullino anche le derivate seconda, terza, ecc., fino all'ordine $n - 1$ $(n = 2, 3, ...)$; dallo sviluppo di TAYLOR, che si presenterà qui sotto la forma

$$w(z) = w(z_0) + c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + ...,$$

avremo:

$$\sigma(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_n\rho^n[\cos(\alpha_n + n\theta) + i\sin(\alpha_n + n\theta)] +$$
$$+ r_{n+1}\rho^{n+1}\{\cos[\alpha_{n+1} + (n+1)\theta] + i\sin[\alpha_{n+1} + (n+1)]\} + ...,$$

avendo indicati con r_n e α_n, r_{n+1} e α_{n+1}, ecc., moduli e argomenti di c_n, c_{n+1}, ecc. Pertanto, nelle immediate vicinanze di z_0, cioè per ρ piccolissimo, la trasformazione fra i due piani non differirà essenzialmente da quella definita dalle formule

$$\sigma = r_n\rho^n\,, \qquad \varphi = \alpha_n + n\theta$$

che mostrano come due angoli corrispondenti (coi vertici uno in z_0 l'altro in $w(z_0)$) invece di essere uguali sono l'uno (il secondo) l'*n-plo* dell'altro.

La fig. 17 si riferisce al caso particolarmente semplice della funzione $w = z^2$, in cui le linee $u =$ cost. e $v =$ cost. sono le iperboli equilatere

$$x^2 - y^2 = \text{cost.} \quad \text{e} \quad xy = \text{cost.}\,,$$

delle quali quelle (degenerate nella coppia degli asintoti) che passano per l'origine, *non* si tagliano ivi ad angolo retto.

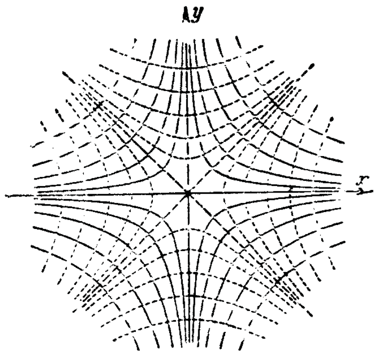


Fig. 17

Se invece, sempre essendo $n = 2$, z^2 ha un coefficiente con argomento $\alpha_2 \neq 0$, in virtù della relazione

$$\theta = \frac{\varphi - \alpha_2}{2},$$

la figura non cambia essenzialmente ma ruota dell'angolo $\alpha_2/2$ nel verso negativo delle rotazioni.

§ 5. - Poli e punti singolari essenziali.

Passando ora allo studio dei *punti singolari isolati* di una funzione analitica $f(z)$, sgombriamo anzitutto il terreno dalle cosiddette *singolarità eliminabili*, cioè da punti isolati che appariscano come singolari a causa del valore assegnato alla funzione *nel punto*, nonostante che nell'intorno essa resti *limitata*, come per esempio se ne avrebbe uno prendendo una funzione analitica regolare anche nel punto z_0 e concedendosi il capriccio d'imporre che il valore di f in z_0 non debba essere più il primitivo $f(z_0)$ bensì $f(z_0) + 1$. *Tali punti non interrompono la regolare analiticità della funzione.* Invero, dato che la funzione resta

limitata nell'intorno del punto, gl'integrali che forniscono i coefficienti delle potenze negative nello sviluppo di LAURENT tendono a zero al restringersi della curva c_2' intorno al punto z_0, e quindi devono essere tutti identicamente nulli; pertanto la funzione è rappresentabile mediante un'ordinaria serie di potenze (solo positive) di $z - z_0$, epperò diventa una funzione regolarmente analitica anche in $z = z_0$ non appena si assuma; se non è già così, come suo valore in questo punto la quantità:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1'} \frac{f(t)\,dt}{t - z_0}.$$

Se invece la funzione *non resta limitata* nell'intorno del punto $z = z_0$, allora nello sviluppo di LAURENT relativo a questo punto non possono mancare termini con potenze negative di $z - z_0$, e sono da distinguersi due casi, separati da un vero abisso, secondochè questi termini sono in numero finito o infinito.

Cominciamo dal primo caso, cioè da quello in cui lo sviluppo di LAURENT contiene soltanto un numero finito di termini con potenze negative (che è il caso di gran lunga più elementare):

$$(11) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}, \quad (m \geq 1),$$

(per comodità di scrittura, si sono usate le lettere b_1, b_2,.... invece dei primitivi simboli a_{-1}, a_{-2},....). Si vede subito che il prodotto di $f(z)$ per $(z - z_0)^m$ è una funzione analitica regolare anche in z_0; dunque nel caso in esame si ha

$$(12) \qquad f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

con $g(z)$ funzione regolare anche in z_0 e non ivi nulla (se, come è implicito, si suppone $b_m \neq 0$).

Ne segue in particolare che la funzione $1/f(z)$ è regolare anche in z_0 e che essa presenta ivi uno zero di ordine m.

La singolarità in questione viene detta un *polo* della funzione, e propriamente un polo *d'ordine m*, chè, come immediatamente risulta dalla (12), il modulo di $f(z)$ è un *infinito d'ordine m* (rispetto a $|z - z_0|$) per $z \to z_0$. I termini con potenze

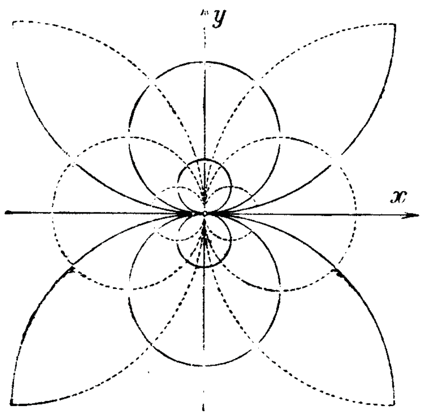


Fig. 18

negative di $z - z_0$ che figurano nella (11), formano la *caratteristica* del polo.

Oltremodo espressivo è l'aspetto del *rilievo* di una funzione (cfr. Cap. I, § 6) nelle prossimità di un polo: questo si presenta come una specie di torrione (infinitamente alto) elevantesi dalla superficie E di EMDE. Si confronti all'uopo la nostra fig. 8 in cui sono visibili due siffatti torrioni: uno intero e l'altro in spaccato. Nella medesima figura si consideri inoltre l'andamento, pure interessante, della superficie nell'intorno dell'origine O, che è uno *zero* (semplice) della funzione ivi rappresentata.

Quanto all'aspetto delle linee $u =$ cost. e $v =$ cost. nell'intorno di un polo (semplice), ne dà un'idea la fig. 18 che si riferisce al caso della funzione semplicissima $w = 1/z$, in cui le curve in parola sono i cerchi rappresentati rispettivamente dalle equazioni

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \text{cost.} \quad \text{e} \quad \frac{y}{x^2 + y^2} = \text{cost.}$$

Come si vede le *linee di flusso* ($v =$ cost., a tratto pieno in figura) passano tutte, al pari delle *linee equipotenziali* ($u =$ = cost.), per il polo, ciò che è da mettersi in relazione col fatto che questo è da riguardarsi come una *sorgente* nel moto fluido connesso alla funzione nel senso del § 5 del Cap. I.

Invero si consideri all'uopo che, dalle formule del citato paragrafo, senz'alcuna applicazione del lemma di GAUSS (che non sarebbe lecita in presenza di singolarità), segue che il *flusso* $\mathcal{F}$ del vettore

$$\boldsymbol{w} = u\boldsymbol{i} - v\boldsymbol{j}$$

attraverso una qualsiasi curva chiusa γ è dato, anche se questa abbraccia singolarità, dalla formula

$$\mathcal{F} = \oint_\gamma \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{n}\, ds = \oint_\gamma \left(u\frac{dx}{dn} - v\frac{dy}{dn}\right) ds = -\oint_\gamma (v\,dx + u\,dy)$$

che, confrontata con la (6) del Cap. II fornisce,

$$\mathcal{F} = -\mathbf{I}\left[\oint_\gamma w\,dz\right]. \tag{13}$$

In particolare dunque, se la curva abbraccia un solo punto singolare, per esempio un polo, col residuo R, si ha

$$\mathcal{F} = -\mathbf{I}[2\pi i R]$$

o, più semplicemente,

$$\mathcal{F} = -2\pi\mathbf{R}[R], \tag{14}$$

ciò che, nel caso della funzione $w = 1/z$, il cui residuo nell'origine è 1 (cfr. Cap. II, § 3), conduce al valor $\mathcal{F} = -2\pi$ pel flusso *entrante* in una curva circondante il polo. Questo agisce dunque come una sorgente di « *portata* » 2π.

Notiamo inoltre che un calcolo perfettamente analogo al precedente conduce ad una formula simile alla (14) per un altro integrale importante, e cioè per la « *circuitazione* » o « *intensità* *vorticosa* » $\mathcal{C}$ del vettore $\boldsymbol{w}$ lungo una curva γ involgente singolarità:

$$\mathcal{C} = \oint_\gamma \boldsymbol{w} \times dP\,.$$

Invero si ha

$$\mathcal{C} = \oint_\gamma (u\,dx - v\,dy) = \mathfrak{R}\left[\oint_\gamma w\,dz\right]$$

donde, supponendo che γ involga (per semplicità) un solo punto singolare col residuo R, segue

$$\mathcal{C} = -2\pi\mathfrak{I}[R]\,. \tag{15}$$

Gli ultimi risultati ottenuti possono condensarsi in un unico enunciato dicendo che *un punto singolare isolato della funzione* $w = u + iv$ *cui corrisponda il residuo* $R = R_1 + iR_2$, *è da riguardarsi come una sorgente di portata* $-2\pi R_1$ *e, nel tempo stesso, come un «vortice» d'intensità* $-2\pi R_2$ *pel moto fluido di cui* w *è la velocità complessa, cioè pel moto in cui le componenti della velocità sono* u *e* $-v$.

Ad evitare equivoci non bisogna però dimenticare che il moto fluido in discorso viene spesse volte associato piuttosto alla funzione integrale della w (cfr. Cap. I, § 5) anzichè alla funzione w stessa. E così pure non bisogna dimenticare che possono benissimo darsi punti singolari isolati che non siano nè vortici nè sorgenti, in quanto il residuo R è zero in tutti quei casi in cui è $a_{-1} = b_1 = 0$ (e solo allora).

Con le ultime considerazioni, che non presuppongono in alcun modo che il punto singolare che si considera sia un *polo*, siamo scivolati, quasi senza accorgerci, nello studio delle singolarità isolate *non polari* di una funzione analitica, cioè di quelle in cui lo sviluppo di LAURENT presenta *infiniti termini con potenze negative*. Queste singolarità, che non possono evidentemente mai incontrarsi fra le funzioni razionali, vengono dette *essenziali* e il loro specifico studio è incomparabilmente più difficile dello studio dei poli, così come incomparabilmente più complicato è l'andamento della funzione nella loro prossimità, in confronto di quello in prossimità di un polo. Noi potremo pertanto dire qui ben poco al riguardo, ci limiteremo anzi, sostanzialmente, a dare il solo enunciato di un celebre teorema dovuto al PICARD, cui direttamente o indirettamente si riattaccano buona parte delle più recenti ricerche sulla teoria delle funzioni di variabile complessa:

TEOREMA DI PICARD. – *I valori di una funzione analitica in un intorno, comunque piccolo, di un punto singolare essenziale isolato, riempiono l'intero piano complesso eccezion fatta, al più, di* **due** *punti.*

Per la dimostrazione, non facile, di questo teorema, che può risguardarsi come uno dei più belli dell'intera Matematica, rimandiamo ai trattati citati nell'indice bibliografico (e in particolare al BIANCHI [2] o all'HURWITZ-COURANT [7]). Invero l'unica cosa (ma di assai più modesta portata!) che può qui essere rapidamente stabilita al riguardo è (teorema di CASORATI) che *nell'intorno di una singolarità essenziale isolata* z_0, *una funzione* $f(z)$ *deve necessariamente approssimarsi indefinitamente a qualunque valore prefissato* a (ma non necessariamente raggiungerlo). Infatti, se così non fosse, la funzione

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

sarebbe limitata e perciò regolare (a patto di determinare opportunamente $g(z_0)$, cfr. p. 56) nel punto z_0, il che implica che

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + a$$

potrebbe, al massimo, avere un polo.

Finalmente osserviamo che lo studio *locale* di una funzione analitica nell'intorno di un suo punto z_0, singolare o no, adombrato in questo paragrafo e nel precedente, può agevolmente estendersi al *punto all'infinito*. All'uopo il modo più semplice di procedere è di eseguire la trasformazione

$$z = \frac{1}{\zeta}\,,$$

con che la funzione data $f(z)$ si muterà in una funzione $\varphi(\zeta)$ della ζ, di cui dovrà studiarsi il comportamento nell'intorno dell'origine: Secondo che $\varphi(\zeta)$ è regolare per $\zeta = 0$, oppure presenta un polo di un certo ordine m, ecc., diremo che lo stesso avviene per la funzione $f(z)$ per $z = \infty$.

Notiamo che l'indicata definizione di regolarità per $z = \infty$ *implica l'annullarsi, almeno di second'ordine, della derivata della funzione per* $z \to \infty$. E invero, avendosi

$$\varphi'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -f'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2} = -z^2 f'(z)\,,$$

se l'accennata condizione non si verifica $\varphi'(\zeta)$ non può conservarsi finita per $\zeta \to 0$.

Notiamo inoltre che una funzione regolare in $z = \infty$ avrà, ciò nonostante, un residuo in generale *non nullo* in quel punto.

Infatti, potendo una siffatta funzione ovviamente rappresentarsi mediante una serie della forma:

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots ,$$

integrando lungo una curva « circondante il punto all'infinito », cioè, per esempio, lungo un cerchio c di raggio grandissimo col centro nell'origine, si avrà, come immediatamente si verifica con l'ausilio della (9) in cui si sia posto $z_0 = 0$,

$$R_\infty = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z)\,dz = -a_1\,, \tag{16}$$

avendo osservato che il cerchio deve venir percorso in verso positivo *rispetto all'area esterna*, e cioè nel verso ordinariamente considerato come negativo.

§ 6. - Sulla totalità dei punti singolari di una funzione analitica. Indicatore logaritmico.

Lo studio delle singolarità delle funzioni analitiche, di cui si è data un'idea nei paragrafi precedenti, non costituisce una *curiosità* d'interesse meramente matematico, bensì un'inderogabile necessità. E invero, anche a prescindere dalla circostanza che, all'infuori delle costanti, *non esistono funzioni prive di singolarità almeno polari* (teorema di LIOUVILLE, Cap. II, § 6), si

constata che le più importanti proprietà di una funzione analitica possono mettersi in relazione, spesso semplice, con le sue singolarità; e così pure le più salienti caratteristiche dei fenomeni fisici (elettrici, aerodinamici, ecc.) che ad essa possono connettersi. È stato quindi giustamente detto di una funzione: « *dimmi le tue singolarità e ti dirò chi sei* ». [B. FINZI: *Sulla teoria del volo*, Rend. Semin. Mat.-Fis. Milano, 7 (1933), p. 126].

Fra l'altro, è proprio in base alle singolarità che si procede alla pur necessaria *classificazione* delle funzioni analitiche.

All'uopo occorre anzitutto distinguere due grandi classi secondo che esistono o non esistono punti singolari essenziali. Cominciando dal 2° caso, è facile dimostrare che:

Una funzione $f(z)$ senza singolarità essenziali è necessariamente razionale.

Infatti, osserviamo in primo luogo che non possono esservi infiniti poli, chè altrimenti questi ammetterebbero almeno un punto limite (al finito o all'infinito) il quale, non potendo essere nè un punto di regolarità nè un polo (perchè negli intorni di questi la funzione è regolare) dovrebbe essere una singolarità essenziale. Vi sarà dunque solo un numero finito di poli z_1, $z_2, \dots, z_k$ le cui rispettive *caratteristiche*, cioè le somme dei termini con potenze negative dei rispettivi sviluppi di LAURENT, indicheremo con $B_1(z)$, $B_2(z), \dots, B_n(z)$. Ciò posto, non resta che a considerare la somma $C(z)$ di queste caratteristiche, che è evidentemente una funzione razionale di z, per giungere al teorema. Invero la funzione $f(z) - C(z)$, non avendo nè poli nè singolarità essenziali, non può esser altro se non una costante.

Osserviamo inoltre che la funzione razionale $f(z)$ è in particolare *intera*, cioè è un *polinomio* (di un certo grado n), allora e solo allora che i suoi poli sono tutti raccolti all'infinito, cioè quando presenta, come sua unica singolarità, un polo (d'ordine n) nel punto $z = \infty$.

Passando ora alle funzioni $w = f(z)$ *dotate di singolarità essenziali*, osserviamo anzitutto che esse sono tutte *trascendenti* nel senso che non possono mai essere *algebriche*, cioè definibili mediante equazioni del tipo

$$\Phi(w, z) = 0\,,$$

dove φ denota un polinomio in due variabili. Infatti, come si sa dall'Algebra [1], funzioni siffatte o sono razionali, e allora non possono aver che poli, o sono *polidrome*, cioè a più valori, e allora non rientrano nelle nostre attuali considerazioni, chè, secondo la definizione fondamentale, non ci siamo finora occupati, nè attualmente ci occupiamo, che di funzioni *monòdrome*.

Fra le funzioni trascendenti, le più semplici possibili sono manifestamente quelle dotate, come unica singolarità, di un punto singolare essenziale in $z = \infty$. Esse diconsi funzioni *intere*, e possono risguardarsi come la più naturale estensione dei polinomi, essendo rappresentabili *nell'intero piano complesso* da un'unica serie di potenze positive, per esempio da una serie della forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots.$$

Infatti il raggio di convergenza di questa serie, dovendo coincidere con la minima distanza dei punti singolari della funzione dall'origine, è necessariamente infinito.

Subito dopo le funzioni intere o *olomorfe*, come anche si dice [2], vengono, in ordine di semplicità, le *meromorfe*, cioè quelle che, oltre ad una singolarità essenziale all'infinito, presentanoun numero finito o infinito di poli. Esse possono sempre ricondursi al quoziente di due funzioni olomorfe, come vedremo nel prossimo Capitolo (§ 6).

Finalmente si hanno le funzioni con diverse o addirittura con infinite singolarità essenziali, che però s'incontrano di rado.

Riservandoci di tornare nel prossimo Capitolo sulle funzioni olomorfe e meromorfe, e specialmente su alcune di esse (trascendenti *elementari*), indichiamo qui finalmente qualche semplice proprietà generale della totalità dei punti singolari di una funzione analitica:

Anzitutto si ha manifestamente che *l'insieme di questi punti è necessariamente chiuso, cioè contiene i propri punti limiti.*

---

(1) Cfr., per esempio, F. TRICOMI, Op. cit. a p. 43, P. I., p. 273.

(2) È tuttavia da osservare che molti AA. adoperano l'espressione: funzione *olomorfa* in un altro senso, e cioè come sinonimo di funzione (analitica) *regolare*.

Infatti un punto limite di punti singolari è anch'esso singolare [1], anzi non può nemmeno essere un polo: deve necessariamente essere una singolarità essenziale.

Un'altra proprietà generale, pur quasi di per sè evidente, è che:

La somma dei residui di una funzione analitica dotata di sole singolarità isolate è, tenuto conto anche dell'eventuale residuo non nullo all'infinito, necessariamente uguale a zero.

Infatti l'integrale della funzione lungo una curva chiusa qualsiasi (non passante per punti singolari), pensata percorsa una sola volta nel verso positivo rispetto all'area interna, è nel tempo stesso uguale al prodotto di $2\pi i$ per la somma dei residui dei punti singolari interni, e a quello di $-2\pi i$ per la somma dei residui dei punti singolari esterni e del punto all'infinito.

Meno immediata è invece una proprietà collegante il numero dei poli di una funzione $f(z)$ con quello degli zeri della medesima, fondata sulla considerazione del cosidetto *indicatore logaritmico* [2], e cioè dell'integrale della funzione

$$L(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

All'uopo osserviamo che, se la funzione $f(z)$ nell'intorno del punto $z = z_0$ si può mettere sotto la forma

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

con m intero qualsiasi (positivo, negativo o nullo) e $g(z)$ funzione regolare in $z = z_0$ e non ivi nulla, si ha successivamente

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$$

$$L(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

od anche

$$L(z) = \frac{m}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots, \tag{17}$$

---

(1) Ciò che, del resto, discende anche dal fatto generale che la frontiera di un dominio è sempre un insieme *chiuso*.

(2) La ragione del nome è che, come si vedrà nel prossimo Capitolo (§ 4), $L(z)$ può riguardarsi come la derivata del « *logaritmo* » di $f(z)$.

visto che la funzione $g'(z)/g(z)$ è regolare nel punto $z = z_0$.

Ne segue che il punto z_0 è un polo semplice della funzione L col residuo m sempre che z_0 è uno zero $(m > 0)$ o un polo $(m < 0)$ d'ordine $|m|$ della funzione f, ed è invece un punto di regolarità di L se z_0 non è nè un punto singolare nè uno zero della f $(m = 0)$; se ne conclude che:

Se la curva chiusa γ non passa nè per punti singolari nè per zeri della funzione analitica $f(z)$ e se per di più entro di essa non cadono punti singolari essenziali della funzione, la differenza fra la somma degli ordini di molteplicità degli zeri della funzione che cadono entro γ e quella degli ordini di molteplicità dei poli è uguale all'integrale della «derivata logaritmica» $L(z)$ di $f(x)$ lungo γ (da percorrersi una sola volta, in verso positivo) diviso per $2\pi i$.

In formule, detti m_1, $m_2, \dots,$ m_h le molteplicità degli zeri che cadono entro γ ed n_1, $n_2, \dots,$ n_k quelle dei poli, si ha

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (m_1 + m_2 + \dots + m_h) - (n_1 + n_2 + \dots + n_k).$$

In particolare, se la funzione è priva di singolarità essenziali, cioè è razionale, applicando il teorema sulla somma dei residui dell'intero piano dopo aver osservato che il residuo di $L(z)$ nel punto all'infinito è zero se questo punto non è nè uno zero nè un polo della funzione, si ha che:

La somma degli ordini di molteplicità degli zeri di una funzione razionale nell'intero piano complesso è uguale alla somma degli ordini di molteplicità dei poli.

O, più brevemente, convenendo di contare uno zero od un polo d'ordine m come m zeri o poli semplici:

Una funzione razionale ha, nell'intero piano complesso, tanti zeri quanti poli.

Ma un polinomio di grado n è una funzione che ha come unica singolarità un polo d'ordine n all'infinito; dunque:

Un polinomio di grado n *ha sempre* n *e solo* n *zeri (semplici o multipli), cioè un'equazione algebrica di grado* n *ha sempre* n *e solo* n *radici (fra semplici e multiple).*

Abbiamo così ritrovato in due righe il non facile teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche.

Da quanto si dirà fra breve (Cap. IV, § 4) a proposito della *funzione logaritmica* segue immediatamente che

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = [\log f(z)]_{z_1}^{z_2}, \quad \log f(z) = \log|f(z)| + i \arg f(z).$$

Ammettendo per un momento questo risultato ed indicando con $[\arg f(z)]_\gamma$ l'incremento eventualmente subito dall'argomento di $f(z)$ allorchè si percorre con continuità (nel verso positivo) una certa curva chiusa γ, a partire da un certo punto P_0 in cui la determinazione di $\arg f(z)$ viene fissata in modo arbitrario; la somma a secondo membro della (18) (che indicheremo momentaneamente con Σ) può anche calcolarsi con la più semplice formula

$$(18') \qquad \Sigma = [\arg f(z)]_\gamma / 2\pi.$$

Questo è il cosiddetto *principio dell'argomento.*

Notiamo infine che la (18) può generalizzarsi in modo da ottenere, invece che il valore di Σ (che può riguardarsi come la differenza fra le somme delle λ-*esime* potenze degli zeri della funzione e quella dei poli, nel caso di $\lambda = 0$) più generalmente il valore di

$$(m_1 Z_1^\lambda + m_2 Z_2^\lambda + \dots + m_h Z_h^\lambda) - (n_1 P_1^\lambda + n_2 P_2^\lambda + \dots + n_k P_k^\lambda),$$

dove λ è un intero positivo qualsiasi e Z_1, $Z_2, \dots,$ Z_h; P_1, $P_2, \dots,$ P_k sono rispettivamente gli zeri (coi rispettivi ordini di molteplicità m_1, $m_2, \dots,$ m_h) e i poli (coi rispettivi ordini di molteplicità n_1, $n_2, \dots,$ n_k) della funzione situati nell'interno di una curva chiusa γ.

Sotto le stesse condizioni della (18), si ha invero

$$(19) \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} z^\lambda dz = (m_1 Z_1^\lambda + \dots + m_h Z_h^\lambda) - (n_1 P_1^\lambda + \dots + n_k P_k^\lambda).$$

Infatti basta osservare che nell'intorno di un punto z_0 che sia uno zero $(m > 0)$ oppure un polo $(m < 0)$ d'ordine $|m|$ della funzione $F(z)$, in virtù della (17) si ha

$$\frac{f'(z)}{f(z)} z^\lambda = \frac{[z_0 + (z - z_0)]^\lambda}{z - z_0} [m + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots] =$$
$$= \frac{m z_0^\lambda}{z - z_0} + c_0 z_0^\lambda + m\lambda z_0^{\lambda - 1} + \dots,$$

epperò z_0 è un polo semplice, col residuo $m z_0^\lambda$, della funzione che figura sotto integrale nella (19).

Capitolo IV.

Speciali classi di funzioni.

§ 1. - Idee sull'estensione del campo di definizione di una funzione. Prolungamento analitico.

Con le considerazioni svolte nei Capitoli precedenti ci siamo spinti abbastanza innanzi nella conoscenza delle più importanti proprietà generali delle funzioni analitiche, e ci siamo costruiti gli utensili più necessari per operare su di esse. Ma per fabbricare qualcosa gli utensili soli non bastano, ci vuole anche la materia prima; ora, nei riguardi delle funzioni di variabile complessa, come stiamo in articolo « materie prime »?

Basta farsi questa domanda per constatare come, nel momento attuale, ci sia poco da stare allegri, chè, all'infuori delle funzioni razionali (la cui estensione non ha offerta alcuna difficoltà), tutte le altre anche le più semplici e familiari dal punto di vista reale, non sono *senz'altro* estendibili al campo complesso.

Invero, cosa significa, per esempio, il *seno* di z se z è un numero complesso? *Di per sè* certo nulla, chè la ben nota definizione del seno mediante il cosiddetto *cerchio trigonometrico*, cade insanabilmente in difetto se z non è reale.

S'impone dunque la necessità di studiare un modo per estendere al campo complesso le più comuni funzioni, e principalmente le cosiddette *trascendenti elementari* (esponenziale, logaritmo, funzioni trigonometriche dirette ed inverse), procurando che si conservino, fin quando è possibile, le proprietà di cui queste funzioni godono nel campo reale.

Il procedimento che, si può dire in tutta la Matematica, costantemente si segue per estendere una funzione fuori del campo in cui primitivamente era stata definita, consiste nell'attaccarsi a qualche proprietà caratteristica della funzione, che conservi significato nel più vasto campo cui si vuol pervenire.

Per esempio, considerato che il *fattoriale* di un numero n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots . \cdot (n-1) \cdot n$$

che, di per sè, è una funzione definita soltanto nel campo dei numeri interi positivi, gode delle proprietà caratteristiche

$$n! = n \cdot (n-1)!\,, \qquad 1! = 1\,;$$

e che (come agevolmente si vede con una integrazione per parti) delle stesse proprietà gode pure l'integrale improprio:

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx\,,$$

sì che, per n intero positivo, è $I_n = n!$; viene del tutto spontaneo, dopo aver constatato che l'integrale I_n non perde di significato ancorchè il numero reale n non sia più un intero positivo (basta solo che sia $n > -1$), cercare di estendere il fattoriale fuori del campo dei numeri interi col porre ivi « *per definizione* » $n! = I_n$. Si perviene così, com'è noto, ad una delle più interessanti funzioni dell'Analisi: la funzione « *gamma* », chè propriamente è

$$I_n = \Gamma(n+1)\,.$$

Nel caso che qui particolarmente interessa dell'estensione di funzioni speciali (per esempio delle trascendenti elementari) dal campo reale al campo complesso, la proprietà cui conviene generalmente attaccarsi è *la sviluppabilità della funzione* (mediante la formula di Taylor) *in serie di potenze*. Invero una serie di potenze, pur che sia convergente, conserva un significato ben determinato tanto se la variabile è reale quanto se è complessa.

Per esempio, considerato che la funzione esponenziale e^x [1] è, nel campo reale, rappresentabile mediante la nota serie, da per tutto convergente:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots ,$$

---

[1] Come d'abitudine, con e intendiamo designare il numero irrazionale:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818 \ldots .$$

vien del tutto spontaneo stabilire che, nel campo complesso, sia, *per definizione*,

$$(1) \qquad \boxed{e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots} \quad (^1).$$

Si presenta però la difficoltà che non sempre capiterà, come nell'esempio precedente, una serie da per tutto convergente, cioè con raggio di convergenza infinito; sicchè, supposto in generale che la serie sia della forma:

$$(2) \qquad a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots ,$$

la funzione non resterà definita nell'intero piano complesso, bensì soltanto in un cerchio C_0 di centro z_0 e un certo raggio ρ_0.

Questa difficoltà è stata brillantemente superata dal Weierstrass, che sulle serie di potenze ha voluto fondare addirittura l'intera teoria delle funzioni di variabile complessa, con una idea semplice e geniale nel tempo stesso, e cioè osservando che, se la serie (2) viene trasformata ordinandola, invece che secondo le potenze di $z - z_0$, secondo le potenze di $z - z_1$, dove z_1 è un punto di C_0 diverso da z_0, la nuova serie

$$(3) \qquad b_0 + b_1(z - z_1) + b_2(z - z_1)^2 + \dots$$

così ottenuta, che non è altro se non lo sviluppo in serie di Taylor riferito a z_1 della funzione analitica rappresentata dalla (2), convergerà in un cerchio C_1, di centro z_1 e raggio ρ_1, che, in generale, *uscirà in parte fuori del cerchio* C_0. Essa verrà cioè a *prolungare* la funzione fuori del suo primitivo campo di definizione (e propriamente nell'area tratteggiata nella

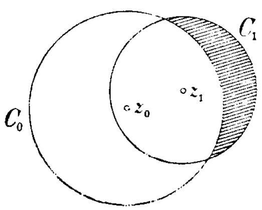


Fig. 19

(1) Ad evitare erronee interpretazioni sia qui esplicitamente notato che, per quanto il procedimento fondato sulle serie di potenze sia solo *uno* dei possibili metodi per l'estensione di speciali funzioni dal campo reale al campo complesso; il risultato cui con esso si arriva è necessa-

fig. 19), chè non vi è dubbio alcuno che le due serie rappresentino una *medesima* funzione analitica, dato che i loro valori necessariamente coincidono in tutta l'area comune ai due cerchi.

Non vi è ora che da pensare, invece che ad una sola «*dedotta*»: la (3), a tutte le analoghe serie deducibili, nel modo indicato, direttamente o indirettamente, dall'originario «*elemento analitico*» (2), per giungere al concetto di *prolungamento analitico* in tutta la sua generalità e nel tempo stesso, a quello di *funzione analitica secondo Weierstrass*, ampliando così notevolmente il concetto di funzione da noi primitivamente adottato.

Senza insistere sui dettagli, nè soffermarsi sulle difficoltà che possono incontrarsi su questa via (di cui la principale sarà brevemente discussa nel prossimo paragrafo) limitiamoci ad ulteriormente osservare che, col procedimento accennato, si arriverà *in generale* a ricoprire tutto il piano complesso mediante cerchi di convergenza di serie dedotte, *eccezion fatta di alcuni speciali punti*, che verranno detti anche qui *singolari*, fra cui certamente si trovano quelli designati con tal nome nel Capitolo precedente. In altre parole, il «*campo d'esistenza*» della funzione prolungata abbraccerà in generale tutto il piano complesso meno alcuni speciali punti, in numero finito o infinito, che ne costituiscono la frontiera. In casi speciali può però benissimo accadere che dal campo d'esistenza restino invece escluse intere aree (*funzioni a spazi lacunari*). Per esempio questo accade per la funzione definita dalla serie

$$z + z^n + z^{n^2} + z^{n^3} + \dots$$

(n numero intero > 1), per cui il campo di esistenza coincide col cerchio di convergenza, cioè col cerchio che ha per centro l'origine e raggio l'unità.

Vogliamo finalmente osservare che il metodo di Weierstrass delle serie dedotte non è il solo possibile per prolungare

riamente *quello stesso* cui potrebbe per altra via pervenirsi. Infatti due funzioni analitiche-regolari assumenti gli stessi valori sull'asse reale (o anche solo su un pezzetto di esso o di altra curva) sono necessariamente *identiche*, in forza del teorema di cui in principio del § 4 del Cap. III. V. anche più avanti (pp. 85-86).

una funzione analitica fuori del campo in cui essa è stata primitivamente data.

Infatti, se in due domini *contigui* D_1 e D_2, cioè aventi una parte AB del contorno in comune (vedi fig. 20), sono date due certe funzioni analitiche $f_1(z)$ e $f_2(z)$, ***assumenti gli stessi valori nei punti del pezzo di contorno comune*** AB, è facile vedere che esse, assieme considerate, ***costituiscono in*** $D_1 + D_2$ ***un'unica funzione analitica*** $F(z)$, nonostante che le considerazioni del § 4 del Cap. III non siano qui senz'altro applicabili.

Per dimostrare questo teorema consideriamo una qualsiasi curva chiusa c del dominio $D_1 + D_2$ e integriamo lungo di essa la funzione $F(z)$ osservando anzitutto che, se c si svolge tutta in D_1 o tutta in D_2, pel teorema di CAUCHY è certo

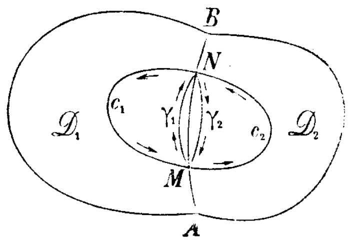


Fig. 20

$$\oint_c F(z)\,dz = 0\,.$$

Se invece la curva c si svolge parte in D_1 e parte in D_2, per esempio se essa, come quella della fig. 20, taglia il contorno comune AB in due certi punti M ed N che la spezzano nei due archi c_1 e c_2 rispettivamente appartenenti a D_1 e D_2; congiungiamo questi due punti M ed N con due nuovi archi di curva γ_1 e γ_2, appartenenti anch'essi rispettivamente a D_1 e D_2 ma ***vicinissimi fra loro*** e all'arco MN del contorno comune, e osserviamo che è manifestamente

$$\oint_c F(z)\,dz = \oint_{c_1+\gamma_1} f_1(z)\,dz + \oint_{c_2+\gamma_2} f_2(z)\,dz - \int_{\gamma_1} F(z)\,dz - \int_{\gamma_2} F(z)\,dz\,,$$

donde, essendo i primi due integrali del secondo membro entrambi uguali a zero, segue

$$-\oint_c F(z)\,dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} F(z)\,dz\,.$$

Ma, data l'ipotesi fatta sul comportamento delle funzioni $f_1(z)$ ed $f_2(z)$ su AB, la funzione $F(z)$ è continua anche attraverso questa curva, epperò, considerato altresì che i due archi γ_1 e γ_2 vanno percorsi durante l'integrazione in ***versi contrari***, il secondo membro dell'ultima uguaglianza si potrà rendere numericamente tanto piccolo quanto si vuole col prendere gli archi γ_1 e γ_2 sufficientemente vicini fra loro; dunque anche nel caso ora in esame è necessariamente

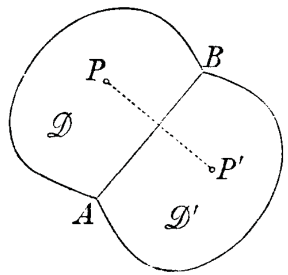


Fig. 21

$$\oint_c F(z)\,dz = 0\,.$$

Ne segue, pel teorema di MORERA, che la funzione $F(z)$ è analitica in tutto il dominio $D_1 + D_2$.

In particolare questo teorema si può applicare ad una funzione $f(z)$ definita in un dominio D il cui contorno contenga una parte ***rettilinea*** AB su cui la funzione assuma valori ***reali***.

Invero, detto D' il dominio simmetrico di D rispetto alla retta AB (vedi fig. 21), se si definisce ivi una funzione $f_1(z)$ col convenire che il valore di f_1 in un punto P' di D' sia il *coniugato* del valore di f nel punto P, simmetrico di P' rispetto ad AB, tutte le condizioni volute dal teorema precedente sono soddisfatte, epperò $f(z)$ ed $f_1(z)$ costituiscono in $D + D'$ una unica funzione analitica $F(z)$ (1).

In ciò consiste la cosidetta *riflessione analitica* di SCHWARZ nel campo delle funzioni di variabile complessa.

(1) Il modo forse più semplice per persuadersi che la funzione f_1 è analitica in D', è il considerare che fra questo dominio e il « piano f_1 » intercede una trasformazione conforme *diretta*; in quanto, cosí come D' è ottenuto da D mediante una simmetria rispetto alla retta AB, il piano f_1 può pensarsi ottenuto dal piano f con una simmetria rispetto all'asse reale. Si passa dunque da D' al piano f_1 con una trasformazione conforme diretta (quella intercedente fra il piano z e il piano f) preceduta e seguita da una simmetria.

§ 2. - Cenni sulle funzioni a più valori.

La difficoltà cui si è fatto più sopra allusione è che la funzione $w = f(z)$ ottenuta prolungando nel modo di WEIERSTRASS una determinata serie di potenze, *non è, in generale, ad un sol valore*, bensì *a più valori*, cioè associa ad ogni valore di z compreso nel suo campo di esistenza, non già *uno* bensì *più* (anche infiniti) valori di w, sicchè non rientra senz'altro nella classe cui si applica la definizione fondamentale del Cap. I.

Infatti, si consideri, a titolo d'esempio, lo schema di prolungamento analitico indicato nella fig. 22, relativa ad una funzione che, nella regione che interessa, presenta i due soli punti singolari A e B. Come si vede il cerchio di convergenza (tratteggiato in figura) dell'ottava *dedotta*, copre di nuovo il centro z_0 dell'elemento analitico iniziale, e pertanto questa ottava serie associa a questo punto (come a tutti gli altri dell'area comune col primitivo cerchio di convergenza) un certo valore $w_0{}^*$ di w che, in generale, non sarà lo stesso w_0 che originariamente colà si aveva. E se invece che nel modo indicato si ritornasse in z_0 per una altra strada (per esempio girando intorno ad A e a B, invece che intorno ad A soltanto) verrebbe, in generale, un terzo valore $w_0{}^{**}$, e così via.

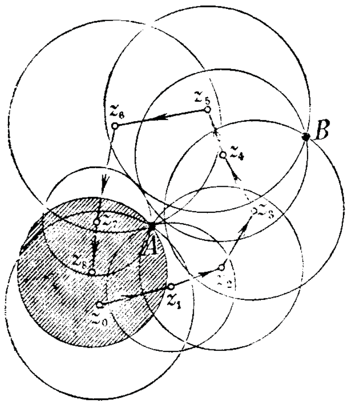


Fig. 22

Del resto, non è solo il prolungamento analitico che conduce a funzioni a più valori, bensì anche altre considerazioni, per esempio l'*integrazione indefinita* di cui si disse nel § 2 del Cap. II.

Infatti, se il dominio in cui la funzione integranda $f(z)$ è regolarmente analitica non è *semplicemente connesso*, l'integrale

fra due determinati punti A e P di $f(z)dz$ *può* dipendere dal cammino d'integrazione.

Per esempio, se la funzione $f(z)$ è sempre regolare nell'area semplicemente connessa D (fig. 23), *meno nel punto singolare* S, i suoi integrali fra A e P fatti lungo le due curve γ_1 e γ_2 differiranno visibilmente per $2\pi iR$, se R è il residuo di $f(z)$ in S. Anzi è facile vedere (considerando che si può andare da A in P o senza girare intorno ad S o girandovi intorno 1, 2,.... volte in verso positivo o in verso negativo) che, più generalmente, tutti i possibili valori in P dell'integrale in parola sono dati, fermo restando A, dalla formula

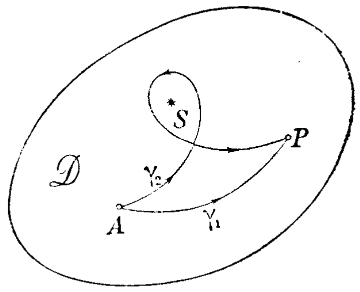


Fig. 23

$$\varphi_0(z) + 2k\pi iR,$$

dove $\varphi_0(z)$ denota uno qualsiasi dei valori dell'integrale (per esempio quello relativo al cammino γ_1) e k un numero intero *qualsiasi*. In altre parole, se, nel dominio D, si vuole parlare di una *funzione integrale* connessa alla $f(z)$, nonostante che questa presenti ivi il punto singolare S, dovrà considerarsi come tale la funzione *a infiniti valori*:

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + 2k\pi iR + C\,; \tag{4}$$

e similmente se, invece di un sol punto singolare S, ve ne sono diversi. La quantità $2\pi iR$ prende il nome di *modulo di periodicità* (1) della funzione $\varphi(z)$.

Più elementarmente ancora, si perviene in genere a funzioni a più valori nella risoluzione di equazioni algebriche, cioè

(1) Taluni autori dicono invece che $2\pi iR$ è un *periodo* della funzione $\varphi(z)$; ma è meglio evitare questa locuzione che può dare luogo ad equivoci.

quando la relazione fra z e w è data, sotto forma implicita, mediante un'equazione della forma

$$\mathcal{P}(w, z) = 0 ,$$

dove $\mathcal{P}$ denota un polinomio in due variabili, come già si era avuto occasione di osservare nel Capitolo precedente. Queste funzioni diconsi *algebriche.*

Notiamo infine che se, come in tutti gli esempi precedenti accade, la funzione che si considera è tale che partendo da un qualsiasi punto z_0 del piano complesso con una certa determinazione $w_0{}^*$ di w ed ivi ritornando dopo aver percorso un opportuno *cammino*, possa passarsi *con continuità* da $w_0{}^*$ ad una qualsiasi altra determinazione $w_0{}^{**}$ di w in z_0; essa viene preferibilmente detta, anzichè genericamente funzione « *a più valori* », funzione « *polidroma* ».

Una delle principali difficoltà che s'incontrano nello studio delle funzioni del genere ora accennato, risiede nel fatto che, in genere, i loro valori non possono mettersi in corrispondenza biunivoca e continua coi punti dell'ordinario piano complesso, e ciò neanche limitandosi a considerare una sola delle loro « *determinazioni* » o, com'anche si dice, dei loro « *rami* ».

Per farsi una chiara idea dell'ostacolo da superare, si consideri l'esempio semplicissimo della funzione algebrica a due valori

$$w = \sqrt{z} . \tag{5}$$

Sembrerebbe a prima vista che, limitandosi a considerare una sola delle due determinazioni della radice quadrata, cioè ponendo per esempio

$$w_1 = + \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}\right) ,$$

dove ρ e θ sono rispettivamente il modulo e l'argomento di z $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$, venga raggiunto lo scopo di isolare una funzione w_1 di tipo ordinario. Un esame un po' più approfondito mostra però subito che, pur essendo i valori di w_1 in corrispondenza biunivoca coi punti del piano z, tale corrispondenza *non è continua* nell'intorno dei punti dell'asse reale positivo.

Questa grave difficoltà è stata genialmente superata dal RIEMANN sostituendo, all'ordinario piano complesso altre superficie, variabili da caso a caso, i cui punti possano invece mettersi in corrispondenza biunivoca e continua con i valori della funzione $w = f(z)$ che si considera. (« *Superficie di Riemann* » o, più brevemente, « *riemanniana* » della funzione).

Naturalmente, data che sia la funzione f, la sua riemanniana non è per nulla pienamente determinata; essa conserva invece ancora una larghissima arbitrarietà, chè, dovendo solo soddisfare alla condizione che i suoi punti siano in corrispondenza biunivoca e continua coi valori di f, da un suo qualsiasi *modello* se ne traggono subito quant'altri se ne vogliono, operando su di esso arbitrarie trasformazioni *topologiche*, cioè deformandolo come si vuole, sotto la sola condizione che la deformazione sia biunivoca e continua.

Fra i possibili modelli della riemanniana di una funzione, uno dei più semplici si ottiene puramente e semplicemente supponendo che l'ordinario piano z sia un piano *multiplo*, e precisamente formato di tanti « *fogli* » uguali quanti sono i valori della funzione, in modo da poter associare ad ogni punto di un determinato foglio uno ed uno solo dei valori della funzione. Occorre però, e questa è la sola difficoltà da superare, opportunamente *connettere* tali fogli fra loro, e cioè stabilire degli opportuni ponti di passaggio dall'uno all'altro, in modo da ottenere che la corrispondenza coi valori della funzione resti continua comunque ci si sposti sui fogli così collegati.

Per esempio, nel caso della funzione (5), tenuto conto che le due possibili determinazioni di w:

$$w_1 = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}\right), \qquad w_2 = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{2} + i \sin\frac{\theta + 2\pi}{2}\right)$$

si permutano fra loro allora e solo allora che *si compie un giro intorno all'origine O del piano z*, i due fogli qui da considerarsi potranno connettersi fra loro incrociandoli lungo una linea qualsiasi, per esempio una semiretta, che, partendo dall'origine O, si allontani indefinitamente. Vedasi all'uopo la fig. 24 in cui, per necessità grafica, i due fogli, e specie quello superiore, sono rappresentati solo in parte e alquanto deformati.

Non di rado però è più utile considerare la riemanniana di una funzione, invece che sotto la forma di un piano a più fogli, sotto quella di una superficie di tipo ordinario (e cioè per esempio una *sfera*, un *toro*, ecc.), ciò che solitamente si consegue partendo dal modello a più fogli e trasformandolo opportunamente con continuità. Vedasi, pei dettagli, i trattati già altra volta citati.

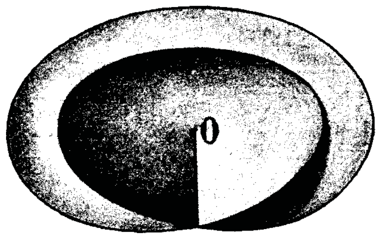


Fig. 24

Oltre alle singolarità isolate già precedentemente esaminate (poli e punti singolari essenziali), per una funzione a più valori entrano in considerazione anche singolarità isolate di un terzo tipo, eventualmente sovrapposte alle precedenti, e cioè punti in cui vengono a coincidere due o più determinazioni della funzione *senza che ci sia modo di separarle*, cioè in modo tale che, girando intorno al punto singolare, l'una si muti nell'altra. Punti siffatti diconsi *di diramazione*, e più propriamente *algebrici* (*di ordine n*) se le determinazioni che si permutano fra loro sono in numero finito ($n + 1$), e *trascendenti* nel caso contrario. Per esempio la funzione $w = \sqrt{z}$ presenta un punto di diramazione algebrico del 1° ordine nell'origine e un altro nel punto all'infinito.

Questi nuovi punti singolari potrebbero agevolmente caratterizzarsi mediante il comportamento dei rami della funzione $f(z)$ nel loro intorno, deducendone indi come conseguenza che, nel caso di un punto algebrico z_0 (di ordine $m - 1$) la funzione può agevolmente *uniformizzarsi*, cioè trasformarsi in una funzione (localmente) uniforme $\varphi(\zeta)$ mediante la sostituzione

$$(6) \qquad z = z_0 + \zeta^m .$$

Ai nostri scopi è però sufficiente assumere la possibilità dell'accennata uniformizzazione, addirittura come *definizione* di punto di diramazione algebrico, deducendone così come immediata conseguenza che, se la funzione uniformizzata φ è *regolare* nell'intorno dell'origine, la funzione f o, meglio, quel gruppo di sue determinazioni che si permutano fra loro girando intorno a z_0, sarà rappresentabile, nell'intorno di detto punto, mediante una serie di potenze intere positive di $(z - z_0)^{\frac{1}{m}}$, cioè mediante una serie della forma

$$(7) \qquad f(z) = a_0 + a_1(z - z_0)^{\frac{1}{m}} + a_2(z - z_0)^{\frac{2}{m}} + a_3(z - z_0)^{\frac{3}{m}} + \dots$$

Se invece $\zeta = 0$ è un *punto singolare* (isolato) della funzione φ, allora nello sviluppo (7) si aggiungeranno un numero finito (caso del polo) o infinito (caso della singolarità essenziale) di potenze negative di $(z - z_0)^{\frac{1}{m}}$, e il punto $z = z_0$ dovrà pensarsi come proveniente dalla sovrapposizione di un punto di diramazione puro e di un polo o di una singolarità essenziale della funzione $f(z)$.

Notiamo infine che i punti di diramazione di cui ora brevemente si è discorso, sono quelli decisivi per la costruzione delle superficie di Riemann a più fogli a cui precedentemente si è accennato. Invero, si constata facilmente che i vari fogli possono sempre connettersi fra loro tagliandoli lungo opportune linee colleganti i punti di diramazione della funzione.

§ 3. - La funzione esponenziale.

Tornando ora alla questione dell'estensione delle trascendenti elementari nel campo complesso secondo le direttive indicate nel § 1, cominciamo dallo studio della *funzione esponenziale*, cioè, giusto quanto si è accennato, della funzione olomorfa definita, qualunque sia z, dalla serie:

$$(7) \qquad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

A tal'uopo osserviamo anzitutto che la formula su cui, nel campo reale, si basa tutto il calcolo degli esponenziali, e cioè:

$$(8) \qquad \boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}}$$

resta ancora vera nel campo complesso.

Infatti, supposto per un primo momento che z_2 sia reale e dettone a il valore, la circostanza che la (8) sia valida nel campo reale ci assicura che la funzione

$$\varphi(z_1) = e^{a+z_1} - e^a e^{z_1},$$

analitica-regolare nell'intero piano complesso z_1, è sempre nulla sull'asse reale del piano medesimo. Ma una funzione analitica regolare che sia nulla sull'intero asse reale (o anche solo su un segmento piccolo a piacere di questa o di altra linea) è necessariamente *sempre nulla* (Cap. III, § 4), quindi è $\varphi(z_1) \equiv 0$, cioè la (8) vale, per z_2 reale, qualunque sia z_1. Finalmente liberiamoci della restrizione che z_2 debba essere reale, applicando una seconda volta lo stesso ragionamento di cui sopra. Osserviamo cioè che, per quanto si è già dimostrato, comunque sia fissato z_1, la funzione analitico-regolare

$$\varphi_1(z_2) = e^{z_1+z_2} - e^{z_1}e^{z_2}$$

è nulla sull'intero asse reale del piano z_2. Essa è pertanto nulla qualunque sia z_2, reale o complesso, cioè la (8) è valida incondizionatamente, qualunque siano z_1 e z_2 [1].

Dalla (8) segue in particolare che

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy},$$

ma, d'altra parte, sostituendo nella serie, si ha

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right)$$

cioè, ricordando i noti sviluppi in serie del seno e del coseno,

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \; ; \tag{9}$$

[1] Si richiama l'attenzione sul metodo dimostrativo seguito che è manifestamente suscettibile di ampie generalizzazioni ad altri casi. Anzi, fondandosi su di esso, potrebbe agevolmente pervenirsi ad un enunciato, assai generale ma alquanto vago, su cui noi non insisteremo, asserente la *permanenza* (nell'estensione di funzioni dal campo reale al complesso e casi simili) delle relazioni esprimibili mediante l'annullarsi di opportune funzioni analitiche.

dunque sussiste la formula fondamentale:

$$\boxed{e^z = e^x(\cos y + i \sin y)}\,, \tag{10}$$

che riconduce il calcolo di un esponenziale complesso a quello di un'esponenziale reale e di funzioni trigonometriche.

Dalla formula trovata, che è una delle più interessanti dell'Analisi, possono facilmente trarsi una folla di conseguenze su cui passeremo di volo, trattandosi di cose assai semplici e che, più o meno, vengono accennate in ogni corso di Calcolo infinitesimale. Propriamente ci limiteremo a ricordare che:

1°) *La funzione esponenziale è una funzione periodica col periodo $2\pi i$, e nessun altro.*

Infatti, qualunque sia l'intero k, si ha

$$e^{z+2k\pi i} = e^x[\cos(y + 2k\pi) + i \sin(y + 2k\pi)] = $$
$$= e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

D'altra parte, se è $e^{z_1} = e^{z_2}$ cioè $e^{z_1 - z_2} = 1$, posto

$$z_1 - z_2 = \xi + i\eta,$$

deve evidentemente aversi

$$e^\xi \cos\eta = 1\,, \qquad e^\xi \sin\eta = 0\,,$$

il che implica

$$\xi = 0\,, \qquad \eta = 2k\pi\,, \qquad (k \text{ intero})\,,$$

epperò è necessariamente

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i\,.$$

2°) *La funzione e^z non è mai nulla.*

Infatti è

$$|e^z| = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} = e^{\Re(z)} \neq 0\,.$$

3°) *Il seno ed il coseno reali sono esprimibili mediante esponenziali immaginari.*

Infatti, dalla (9) in cui sia posto $y = \varphi$ e dalla formula analoga ottenuta ponendo $y = -\varphi$, si ottengono, sommando e sottraendo, le celebri formule (di Euler):

$$(11) \qquad \boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}$$

Notiamo inoltre che, tal quale come nel campo reale, si ha

$$(12) \qquad \boxed{\frac{de^z}{dz} = e^z},$$

come immediatamente si controlla derivando termine a termine la serie (1); e che, d'ora innanzi, quando dovremo scrivere un numero complesso di cui siano dati il modulo ρ e l'argomento θ, in virtù della (9) potremo usare la scrittura comodissima:

$$\rho e^{i\theta}$$

invece che $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ come finora si è fatto.

Così pure merita osservare esplicitamente che se n è un numero intero qualsiasi, si ha

$$e^{n\pi i} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n,$$

e quindi anche

$$e^{z+n\pi i} = (-1)^n e^z.$$

Nella fig. 25 è rappresentata (in proiezione assonometrica) una parte della superficie

$$\zeta = \mathfrak{R}[e^z] = e^x \cos y$$

e, nel tempo stesso, della superficie

$$\zeta = \mathfrak{I}[e^z] = e^x \sin y,$$

chè per passare dalla prima alla seconda basta pensare soltanto spostata l'origine nel punto $(0, -\pi/2)$. Propriamente nella figura si sono tracciate alcune delle intersezioni della superficie in parola coi piani $x =$ cost. (sinusoidi « accorciate » o « allungate ») e coi piani $y =$ cost. (curve logaritmiche), onde mettere così bene in luce quella che è forse la più interessante pro-

prietà della funzione esponenziale, e cioè il suo duplice carattere: di funzione monotona sull'asse reale e sulle parallele a questo, e di funzione oscillante-sinusoidale sull'asse immaginario e sulle parallele ad esso. Inoltre la figura, rientrando

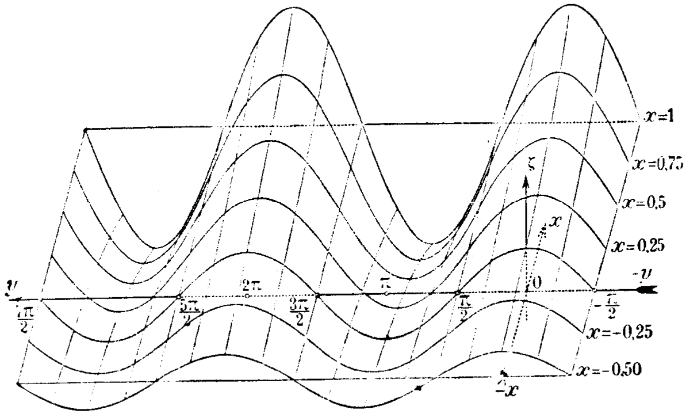


Fig. 25

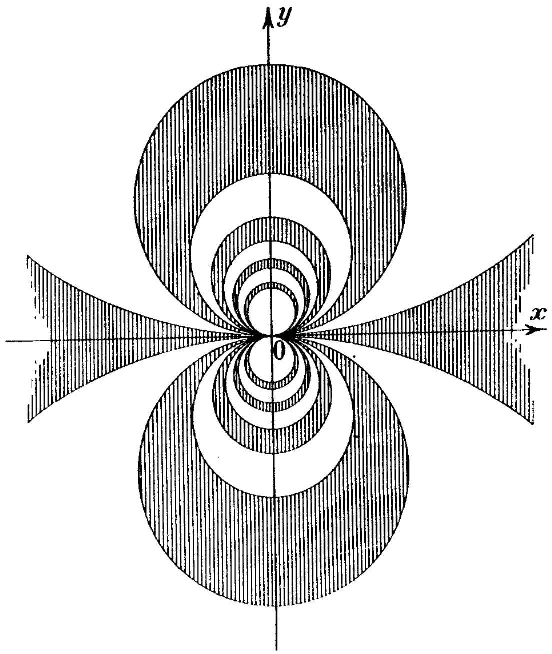
manifestamente in sè stessa con una traslazione d'ampiezza 2π fatta parallelamente all'asse y, rende oltremodo evidente la periodicità della funzione col periodo $2\pi i$.

La circostanza che la funzione esponenziale ammetta il periodo $2\pi i$, implica in particolare che essa assumerà tutti i valori di cui è suscettibile (e cioè tutti i numeri complessi eccettuati 0 e ∞) in ogni striscia d'ampiezza 2π parallela all'asse x, per esempio in quella delimitata dalle rette $y = \pm\pi$. Ma tali striscie vanno evidentemente ad *addensarsi* nell'intorno del punto $z = \infty$, nel senso che in ogni intorno di questo punto ce ne sono quante se ne vuole; dunque il punto $z = \infty$ è, com'era facile prevedere *a priori*, una *singolarità essenziale* della nostra funzione, e per di più tale che esistono ambedue i possibili valori eccezionali (e sono propriamente 0 e ∞) di cui nel teorema di Picard.

La circostanza che le accennate striscie vadano ad addensarsi nell'intorno del punto $z = \infty$, si vede molto bene sulla sfera complessa, oppure *trasportando il punto* $z = \infty$ *al finito*, e precisamente nell'origine, col sostituire alla considerazione della funzione e^z quella della funzione $e^{\frac{1}{z}}$; ciò che, essendo

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

geometricamente corrisponde ad assoggettare il piano (x, y) ad una trasformazione per raggi vettori reciproci di centro O e



potenza 1, seguita da una (irrilevante) simmetria rispetto all'asse reale.

Si ottiene così la fig. 26 in cui le aree tratteggiate o lasciate in bianco corrispondono ad alcune di dette striscie di larghezza 2π. Malgrado che la figura sia, per necessità di cose,

incompleta, l'addensamento dei *campi fondamentali* della funzione (cioè delle aree in cui essa assume tutti i valori di cui è suscettibile) intorno alla singolarità essenziale $z = 0$ è evidentissimo.

§ 4. - Le altre trascendenti elementari.

Ci siamo intrattenuti relativamente a lungo sulla funzione esponenziale perchè ad essa, nel campo complesso, possono subito riattaccarsi, direttamente o indirettamente, tutte le altre trascendenti elementari. In particolare questo si dica pel *logaritmo*, che noi definiremo, tal quale come nel campo reale, quale *funzione inversa dell'esponenziale*, cioè stabilendo che w sia da chiamarsi *logaritmo* (*naturale*) di z, e sia da scrivere $w = \log z$ (1), se è

$$e^w = z. \tag{13}$$

Potremo così fin dal primo momento prevedere, considerata la periodicità dell'esponenziale, che il logaritmo dovrà risultare una funzione a *infiniti valori* col modulo di periodicità $2\pi i$, cioè che, detto w_0 uno dei possibili logaritmi di z, tutti gli altri saranno dati dalla formula

$$\log z = w_0 + 2k\pi i, \tag{14}$$

dove k denota un intero qualunque.

Questa previsione *a priori* viene confermata dal fatto che, se, al solito, si pone $z = x + iy$, $w = u + iv$, dalla (13) si ha

$$e^u \cos v = x, \qquad e^u \sin v = y,$$

donde, considerato che $e^u > 0$, segue subito, da un lato che è

$$e^u = +\sqrt{x^2 + y^2} = |z| \tag{15}$$

(1) Anche nel seguito intenderemo sempre che il simbolo log, senz'altro, denoti i logaritmi *naturali*, cioè in base e.

e, dall'altro, che è

$$\cos v = \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin v = \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}}$$

cioè, con ovvia notazione, che è

$$v = \arg z \, ;$$

ma, dando al simbolo « log » il significato già ad esso attribuito nel campo dei numeri reali positivi, dalla (15) si trae che

$$u = \log |z| \, ;$$

dunque avremo in definitiva la formula

$$\boxed{\log z = \log |z| + i \arg z} \tag{16}$$

che, in particolare, conferma, come si diceva, la (14).

In molti casi può evitarsi la considerazione, talvolta fastidiosa, di infiniti logaritmi, riferendosi al cosidetto *valor principale* del logaritmo, cioè a quello la cui parte immaginaria è compresa fra $-\pi$ (escluso) e $+\pi$ (incluso). Ciò si dica in ispecie del caso in cui il numero di cui si vuole il logaritmo sia reale positivo, nel quale il valor principale coincide manifestamente con il consueto logaritmo reale.

Fondandosi sulla (13) o sulla (16) e, più semplicemente ancora, servendosi del *principio di permanenza* accennato nel paragrafo precedente, sarebbe ben facile estendere ai logaritmi complessi le ben note proprietà dei logaritmi reali. Noi ci limiteremo pertanto soltanto a ricordare che:

$$\left\{\begin{array}{ll} \log (z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2 & \\ \log z^\alpha = \alpha \log z \, , & (\alpha \text{ reale, qual.}) \\ \dfrac{d(\log z)}{dz} = \dfrac{1}{z} & \\ \underline{\log} (1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \dots \, , & (|z| < 1), \end{array}\right. \tag{17}$$

avvertendo che formule quali le prime due di questo gruppo sono da intendere (in relazione alla polidromia) nel senso che,

per esempio, sommando una determinazione di $\log z_1$ con una di $\log z_2$ si ottiene *una* delle determinazioni di $\log (z_1 \cdot z_2)$, ecc. Quanto all'ultima formula si è scritto « $\underline{\log}$ » invece di « log » per ricordare che la serie a secondo membro fornisce (se $|z| < 1$) una sola delle determinazioni del logaritmo e propriamente il suo valor principale.

Nella fig. 27 qui sotto, abbiamo cercato di rendere quando più perspicuo fosse possibile il comportamento del logaritmo (più esattamente di $-\log z$) intorno al punto di diramazione trascendente. $z = 0$. Propriamente la superficie a forma d'imbuto rovesciato rappresenta (in un'opportuna scala) i valori di $-\mathfrak{R}[\log z]$, cioè di $-\log |z|$, mentre l'altra (un'elicoide) rappresenta (in scala diversa) i valori di $\mathfrak{I}[\log z]$.

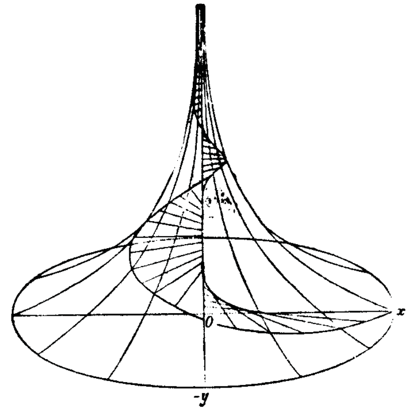


Fig. 27

Come si vede, *girando* intorno all'origine la parte reale ritorna al valore primitivo mentre quella immaginaria diminuisce o aumenta di 2π, secondochè il giro è stato compiuto in verso positivo o in verso negativo.

Osserviamo infine, prima di lasciare la funzione logaritmica, che, per mezzo di essa, è facile definire e studiare la potenza a base ed esponente qualsiasi.

Infatti, è del tutto spontaneo porre, per definizione,

$$\log z^\zeta = \zeta \log z$$

cioè

$$z^\zeta = e^{\zeta \log z} \, ; \tag{18}$$

non bisogna però dimenticare che, così facendo, la potenza pensata come funzione di z, risulterà *in generale*, analogamente al logaritmo, una *funzione ad infiniti valori* (¹). Invece, se la si pensa come funzione di ζ, cioè la si considera come un *esponenziale,* allora si può facilmente evitare ogni polidromia riferendosi ad una speciale determinazione del logaritmo, per esempio al suo valor principale, come intenderemo sempre nel seguito.

In ogni caso, il valore della potenza corrispondente al valor principale del logaritmo, suol dirsi anch'esso *valor principale.*

Passando ora alle *funzioni trigonometriche* e, per esse, alle funzioni *seno* e *coseno* (chè le altre si esprimono razionalmente mediante queste due) abbiamo a disposizione due vie equivalenti, parimenti semplici, per farne l'estensione nel campo complesso: o servirci delle formule di EULER (11), convenendo che esse restino ancor valide allorchè al posto di φ si sostituisce un numero complesso qualsiasi z; oppure avvalerci dei noti sviluppi in serie (con raggio di convergenza infinito) di queste due funzioni, ponendo cioè, anche per z complesso:

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} \sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dots \\[2mm] \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dots \end{cases}$$

In particolare, si riconosce agevolmente (il più semplice è di servirsi delle formule di EULER e del *teorema d'addizione* (8) della funzione esponenziale) che continuano a sussistere le due formule fondamentali

$$\text{(20)} \qquad \begin{cases} \sin (z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\ \cos (z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \, , \end{cases}$$

donde, notoriamente, possono poi agevolmente dedursi tutte le altre numerose formule della teoria delle funzioni trigonometriche, e in ispecie le due:

$$\text{(21)} \qquad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z \, , \qquad \frac{d \cos z}{dz} = - \sin z \, .$$

(¹) Si noti che la (18) implica

$$| z \; | = | z |^{\Re \zeta} e^{-\Im \zeta \cdot \arg z} \, .$$

Se l'argomento è immaginario puro: $z = iy$, le formule di EULER forniscono in particolare

$$\cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \, , \qquad \sin iy = - \frac{e^y - e^{-y}}{2i} = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

formule che, correntemente, sogliono scriversi sotto la forma

$$\text{(22)} \qquad \cos iy = \mathfrak{Cos}\, y \, , \qquad \sin iy = i\, \mathfrak{Sin}\, y$$

avendo posto:

$$\text{(23)} \qquad \mathfrak{Cos}\, y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \, , \qquad \mathfrak{Sin}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \, .$$

S'introducono così due notazioni e due nomi speciali (rispettivamente *coseno* e *seno iperbolico*) (¹) per denotare le due combinazioni lineari di esponenziali (23), ciò che che non è certo indispensabile ma è sovente comodo, sovratutto perchè le funzioni iperboliche così introdotte soddisfano a relazioni perfettamente analoghe a quelle cui soddisfano gli ordinari seni e coseni (salvo qualche cambiamento di segno) e poi perchè di esse sono state costruite delle comode tabelle numeriche. (Cfr. JAHNKE-EMDE [8], oppure HOÜEL [6]).

Servendosi delle notazioni (23) dalle (20) seguono le formule importanti:

$$\text{(24)} \qquad \begin{cases} \sin z = \sin x\, \mathfrak{Cos}\, y + i \cos x\, \mathfrak{Sin}\, y \\ \cos z = \cos x\, \mathfrak{Cos}\, y - i \sin x\, \mathfrak{Sin}\, y \end{cases}$$

con l'ausilio delle quali è stata costruita la fig. 28 che dà un'idea dell'andamento delle linee u = cost. e v = cost. nel caso in esame. Propriamente la figura, così com'è disegnata,

(¹) La ragione del nome è che $\mathfrak{Cos}$ e $\mathfrak{Sin}$ possono interpretarsi come coordinate di un punto mobile su di un'*iperbole equilatera*, così come il coseno e il seno ordinario (« circolari ») nel caso di un punto mobile su di un *cerchio*. Naturalmente, una volta introdotti seno e coseno iperbolico non c'è ragione di fermarsi lì e si può, tal quale come nel campo delle funzioni circolari, parlare di una *tangente iperbolica* ($\mathfrak{Tg}$) definita quale rapporto del seno al coseno iperbolico, ecc.

si riferisce alla funzione $\sin z$, ma basta immaginare spostata l'origine nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ per ottenere quella relativa alla funzione $\cos z$. L'*equidistanza* delle linee tracciate, cioè la differenza fra le quote di due linee u o v contigue, è costantemente

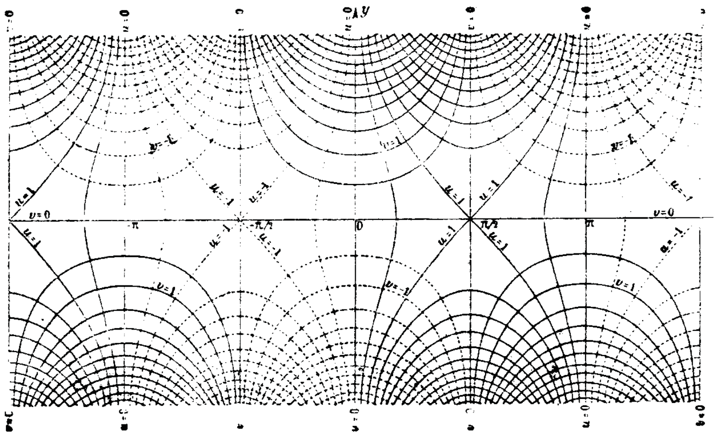


Fig. 28

di $1/2$. Inoltre, per maggiore chiarezza, si sono disegnate *a tratti* le linee che si riferiscono a valori *negativi* di u o di v.

Quel che più salta agli occhi guardando la figura è la periodicità, col periodo 2π, delle funzioni $\sin z$ e $\cos z$.

Per la funzione (meromorfa) $\operatorname{tg} z$, definita, com'è ovvio, per mezzo della formula

$$(25) \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

vedasi la fig. 8 nel § 6 del Cap. I che pone particolarmente in luce i *poli* che la funzione presenta nei punti in cui è $\cos z = 0$, cioè nei punti dell'asse reale la cui ascissa è un multiplo dispari di $\pi/2$. Si ricordi inoltre che per la tangente il periodo è π invece di 2π.

Finalmente, soffermiamoci un istante sulle *funzioni circolari inverse* arc sin e arc tg che definiremo tal quale come nel

campo reale, e che, come già lì del resto, risultano *infinitivoche* al pari del logaritmo. Senza insistere sull'estensione, del resto ovvia, delle formule già conosciute dal campo reale, per esempio delle due formule

$$(26) \qquad \frac{d \operatorname{arc\,tg} z}{dz} = \frac{1}{1+z^2}, \qquad \frac{d \operatorname{arc\,sin} z}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}};$$

limitiamoci ad osservare che *le funzioni in discorso si riconducono entrambe al logaritmo* mediante la formula importante

$$(27) \qquad \boxed{\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}},$$

cui si associa l'altra:

$$(28) \qquad \operatorname{arc\,sin} z = \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} =$$
$$= \frac{1}{2i} \log (1-z^2)\left(1 + \frac{iz}{\sqrt{1-z^2}}\right)^2 = \frac{1}{i} \log (\sqrt{1-z^2} + iz).$$

Il modo forse più semplice per verificare la (27) è derivare ambo i membri, dopo aver constatato che la formula è certo vera per $z = 0$.

Lasciamo al lettore la cura di studiare, da sè o coll'ausilio dei trattati già più volte citati, le interessanti *trasformazioni conformi* connesse colle funzioni considerate in questi ultimi due paragrafi.

§ 5. - Esempio di calcolo di integrali di funzioni polidrome.

Vogliamo ora dare un esempio di calcolo, col metodo dei residui, di un integrale operante su di una funzione polidroma, e precisamente dell'integrale

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\, dx,$$

dove α denota un qualsiasi numero complesso *la cui parte reale sia compresa fra 0 ed 1*. (Altrimenti l'integrale divergerebbe).

In quest'integrale figura la potenza ad esponente complesso $\alpha - 1$ di x che, come più sopra si è visto, è una funzione polidroma ad infiniti valori, cui però — tenuto conto che la base x è un numero reale positivo — è del tutto spontaneo attribuire il valore

$$x^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\log x}, \tag{29}$$

essendo $\log x$ l'ordinario logaritmo reale di x.

Ciò premesso consideriamo la funzione analitica

$$f(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = \frac{e^{(\alpha-1)(\log|z|+i\arg z)}}{1+z}$$

e fissiamo la nostra attenzione sul suo *ramo*, che diremo $f^*(z)$, in cui è

$$0 \leqslant \arg z < 2\pi,$$

che sul semiasse reale-positivo si riduce alla (29). Siffatta funzione $f^*(z)$ è continua su tutto il piano complesso tranne sul semiasse reale-positivo, chè avvicinandosi ad un punto x di questo dal semipiano $\mathfrak{I}(z) > 0$, si ha

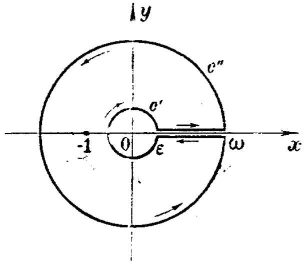


Fig. 29

$$\lim_{z\to x} f^*(z) = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}, \tag{30}$$

essendo la potenza di x intesa nel senso (29), mentre avvicinandosi dal semipiano $\mathfrak{I}(z) < 0$ si ha invece

$$\lim_{z\to x} f^*(z) = \frac{e^{(\alpha-1)(\log x+2\pi i)}}{1+x} = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,e^{2\alpha\pi i}. \tag{30'}$$

Per cercar di calcolare l'integrale I_α proviamo ad integrare la funzione $f^*(z)$ lungo il « cammino » indicato nella fig. 29, composto di due circonferenze c' e c'', una di raggio $\varepsilon < 1$ e l'altra di raggio $\omega > 1$, col centro nell'origine, e del segmento *doppio* (ε, ω) del semiasse reale-positivo, sul cui *bordo superiore* i valori di $f^*(z)$ vanno calcolati mediante la (30), mentre sul suo *bordo inferiore* essi vanno calcolati mediante la (30').

Considerato che la funzione analitica monodroma $f^*(z)$ non ha altre singolarità nell'interno del precedente cammino d'integrazione all'infuori di un polo semplice nel punto $z = -1$, cui compete evidentemente il residuo

$$e^{(\alpha-1)(\log|-1|+i\pi)} = e^{(\alpha-1)\pi i} = -e^{\alpha\pi i};$$

per il teorema dei residui potremo manifestamente stabilire l'uguaglianza

$$\int_\varepsilon^\omega \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx + \oint_{c''} f^*(z)\,dz + e^{2\alpha\pi i}\int_\omega^\varepsilon \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx + \oint_{c'} f^*(z)\,dz = $$
$$= -2\pi i e^{\alpha\pi i},$$

intendendo che le due circonferenze siano percorse nei versi indicati dalle frecce, e quindi è:

$$(e^{2\alpha\pi i}-1)\int_\varepsilon^\omega \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \tag{31}$$
$$= 2\pi i e^{\alpha\pi i} + \oint_{c'} f^*(z)\,dz + \oint_{c''} f^*(z)\,dz.$$

Dalla precedente uguaglianza risulta che per ottenere I_α si deve ora passare al limite per $\varepsilon \to 0$, $\omega \to \infty$; ma che accade allora dei due integrali estesi a c' e c''? Per rispondere a questa domanda osserviamo anzitutto che sulla circonferenza c', di raggio ε, si ha

$$|1+z| \geqslant 1-\varepsilon,$$
$$|z^{\alpha-1}| = e^{\mathfrak{R}[(\alpha-1)(\log|z|+i\arg z)]} =$$
$$= e^{\mathfrak{R}(\alpha-1)\cdot\log|z| - \mathfrak{I}(\alpha)\cdot\arg z} = \varepsilon^{\mathfrak{R}(\alpha)-1}e^{-\mathfrak{I}(\alpha)\arg z}$$

donde, tenuto conto che $0 \leqslant \arg z < 2\pi$ e detto A il più grande fra i due numeri

$$1, \quad e^{-\mathfrak{I}(\alpha)2\pi},$$

segue che

$$|1+z| \geqslant 1-\varepsilon, \qquad |z^{\alpha-1}| \leqslant A\varepsilon^{\mathfrak{R}(\alpha)-1};$$

dunque sulla circonferenza c' è

$$|f^*(z)| \leqslant \frac{A}{1-\varepsilon}\,\varepsilon^{\Re(\alpha)-1}.$$

Analogamente sulla circonferenza c'' avremo invece

$$|f^*(z)| \leqslant \frac{A}{\omega-1}\,\omega^{\Re(\alpha)-1},$$

epperò, servendoci della limitazione (5) del Cap. II per il modulo dell'integrale di una funzione di variabile complessa, potremo asserire che

$$\left|\oint_{c'} f^*(z)dz\right| \leqslant 2\pi A\,\frac{\varepsilon^{\Re(\alpha)}}{1-\varepsilon}, \qquad \left|\oint_{c''} f^*(z)dz\right| \leqslant 2\pi A\,\frac{\omega}{\omega-1}\,\omega^{\Re(\alpha)-1}.$$

Ma, essendo $0 < \Re(\alpha) < 1$, è manifestamente

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{\Re(\alpha)}}{1-\varepsilon} = 0\,, \quad \lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega}{\omega-1}\,\omega^{\Re(\alpha)-1} = 0\,;$$

dunque gli integrali di $f^*(z)$ estesi a c' e c'' tendono entrambi a *zero* per $\varepsilon \to 0$, $\omega \to \infty$, epperò dalla (31) si deduce che

$$(e^{2\alpha\pi i} - 1)I_\alpha = 2\pi i e^{\alpha\pi i}$$

cioè che

$$I_\alpha = \frac{2\pi i}{e^{\alpha\pi i} - e^{-\alpha\pi i}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\,. \tag{32}$$

Dal risultato ottenuto — che ha importanza nella teoria delle funzioni euleriane [1] — si può ricavare come caso molto particolare il valore dell'integrale (12) del Cap. II.

---

[1] Invero, non è difficile dimostrare che è

$$I_\alpha = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

essendo la funzione Γ quella a cui si è accennato a p. 82.

Invero, supponendo che sia $\alpha = 1/2n$ con n intero positivo, dalla (32) si ricava che

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2n}-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi/2n)}$$

donde, ponendo $x = \xi^{2n}$, segue

$$2n\int_0^\infty \frac{\xi^{1-2n}}{1+\xi^{2n}}\,\xi^{2n-1}\,d\xi = \frac{\pi}{\sin(\pi/2n)}$$

cioè

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{1+\xi^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin(\pi/2n)}\,,$$

formula equivalente alla (12) del Cap. II.

§ 6. - Funzioni meromorfe. Teorema di Mittag-Leffler.

Passiamo ora ad esaminare qualcuna delle più essenziali proprietà generali delle funzioni *meromorfe* (o, più particolarmente, *olomorfe*), cioè delle funzioni aventi un'unica singolarità essenziale nel punto all'infinito; che, come si è già avuto occasione di accennare, sono le sole trascendenti veramente importanti dal punto di vista applicativo [1], e comprendono in particolare le trascendenti elementari di cui ci siamo più sopra occupati.

A tal uopo osserviamo anzitutto che la *somma*, il *prodotto* o il *quoziente* di più funzioni meromorfe è ovviamente ancora una funzione meromorfa, e così pure la *derivata* di una funzione meromorfa [2].

---

[1] A prescindere da irrilevanti trasformazioni che possono trasportare la singolarità essenziale al finito, quale per esempio la considerazione di $e^{1/z}$ al posto di e^z.

[2] Non così invece l'*integrale* che non sarà più, in generale, una funzione uniforme a causa dei residui dei poli (come accade per esempio nel caso dell'integrale di $1/z$). Se però non ci son poli, cioè se la funzione è *olomorfa*, allora anche l'integrale è olomorfo, e se ci sono solo poli multipli con residuo nullo, l'integrale è meromorfo.

Un'altra osservazione non meno semplice ma importante è che, se la funzione $f(z)$ che si considera *ha soltanto un numero finito di poli* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con le rispettive *caratteristiche*

$$g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), \quad g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right), \ldots, \quad g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) \quad (^1),$$

la differenza fra $f(z)$ e

$$\sum_{k=1}^{n} g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

non avendo più alcuna singolarità a distanza finita, è necessariamente una funzione olomorfa $G(z)$; dunque le funzioni meromorfe con un numero finito di poli possono sempre rappresentarsi con una formula del tipo:

$$(33) \qquad f(z) = G(z) + \sum_{k=1}^{n} g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

ossia come somme di una funzione olomorfa e di una funzione razionale. Viceversa, è di per se evidente che, lasciando arbitraria la funzione olomorfa G, la (33) rappresenta la più generale funzione olomorfa avente i soli poli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con le rispettive caratteristiche $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

E se invece i poli sono in numero infinito?

Allora le cose si complicano perchè la sommatoria che figura nella (33) si muta in una serie, che può benissimo non risultare convergente. La difficoltà non è però sostanziale e può essere sormontata, come ha dimostrato il MITTAG-LEFFLER, con un opportuno ritocco dei termini della serie in discorso, pervenendo così ad una formula, non molto diversa dalla (33), fornente l'espressione generale di una funzione meromorfa avente per poli assegnati punti, con assegnate caratteristiche, che può

---

[1] Indichiamo cioè genericamente con g_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ il polinomio avente per coefficienti quelli delle potenze negative di $z - a_k$ nello sviluppo di LAURENT della funzione $f(z)$ nell'intorno del punto $z = a_k$.

risguardarsi come l'estensione trascendente della ben nota decomposizione di una funzione razionale in fratti semplici.

A questo scopo osserviamo preliminarmente che l'insieme dei poli, dovendo essere necessariamente privo di punti limiti al finito (chè altrimenti questi sarebbero singolarità essenziali della funzione), è di conseguenza *numerabile*; anzi, considerato che in ogni cerchio col centro nell'origine o fra due di questi cerchi concentrici, non può cadere che un numero finito di poli, ben facilmente ordinabili in modo che i loro moduli risultino crescenti (o, meglio, *non decrescenti*), possiamo addirittura pensarlo numerato in modo che, detti $a_0, a_1, a_2, \ldots$, i successivi poli, si abbia

$$|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots.$$

Ciò premesso possiamo enunciare e dimostrare il seguente:

TEOREMA DI MITTAG-LEFFLER. – *Data una qualsiasi successione di numeri complessi distinti, di moduli non decrescenti* $a_0, a_1, a_2, \ldots$, *avente come suo unico punto limite il punto all'infinito e supposto che a ciascuno di questi numeri* a_n *sia associato un arbitrario polinomio in* $1/(z - a_n)$:

$$g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = G_n(z);$$

è possibile determinare certi polinomi

$$H_1(z), \qquad H_2(z),$$

in modo tale che la serie

$$(34) \qquad F(z) = G_0(z) + [G_1(z) - H_1(z)] + [G_2(z) - H_2(z)] + \ldots$$

converga assolutamente ed uniformemente in ogni dominio finito non contenente (nè nell'interno nè sulla frontiera) nessuno dei punti $a_0, a_1, a_2, \ldots$; *rappresentando così in tutto il piano complesso, una funzione meromorfa avente per poli i punti* $a_0, a_1, a_2, \ldots$, *con le rispettive caratteristiche* $g_0, g_1, g_2, \ldots$. *Conseguentemente*

$$(35) \qquad f(z) = F(z) + G(z),$$

dove $G(z)$ è un'arbitraria funzione olomorfa, è la più generale funzione meromorfa godente della proprietà suindicata [1].

La dimostrazione del teorema è fondamentalmente basata sulla osservazione che, essendo ovviamente la funzione razionale $G_n(z)$ sviluppabile in una serie di potenze di z uniformemente convergente in ogni cerchio C_n, col centro nell'origine, che lasci il punto a_n all'esterno; detta H_n una ridotta d'ordine sufficientemente elevato di detta serie, il modulo della differenza $G_n - H_n$ si manterrà, entro detto cerchio, tanto piccolo quanto si vuole.

Propriamente converrà pensare anzitutto prefissata una successione di cerchi C_1, C_2, C_3,...., tutti col centro nell'origine e raggi r_1, r_2, r_3,.... non decrescenti, tali che, pur essendo

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty ,$$

i punti a_n, a_{n+1},.... cadano sempre all'esterno di C_n, cioè sia sempre $r_n < | a_n |$. Per esempio, se $| a_1 |$ (certo non nullo chè, al più, potrà essere $a_0 = 0$), $| a_2 |$, $| a_3 |$,.... fossero numeri tutti *distinti*, potremmo prendere $0 < r_1 < | a_1 | < r_2 < | a_2 | < r_3 < < | a_3 | < ....$; mentre invece se per esempio fosse $| a_1 | = | a_2 |$, $| a_3 | = | a_4 |$,.... potremmo prendere $0 < r_1 = r_2 < | a_1 | = | a_2 | < < r_3 = r_4 < | a_3 | = | a_4 | < ....$; e similmente in altri casi.

D'altro lato supponiamo pure prefissata una serie a termini positivi costanti

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + ... ,$$

sottoposta alla sola condizione di essere convergente, ed osserviamo che, posto

$$G_n(z) = A_{n,0} + A_{n,1}z + A_{n,2}z^2 + ...$$

[1] Il teorema di MITTAG-LEFFLER è veramente, nella sua definitiva redazione, molto più generale, comprendendo fra l'altro anche il caso in cui tutti o parte dei punti a_0, a_1, a_2,.... siano singolarità essenziali della funzione. Ai nostri scopi basta però limitarsi al caso dei poli, caso la cui generalizzazione non offrirebbe del resto difficoltà.

per quanto si è detto in principio sarà certo possibile associare all'intero n un altro intero N tale che la ridotta, *N-esima* di questa serie, cioè il polinomio

$$H_n(z) = A_{n,0} + A_{n,1}z + A_{n,2}z^2 + ... + A_{n,N-1}z^{N-1}$$

soddisfi in tutto C_n alla condizione:

$$| G_n(z) - H_n(z) | < \varepsilon_n .$$

Ne segue che, detto D un dominio qualsiasi del piano complesso, purchè tutto al finito, e C_m il primo dei cerchi della successione C_1, C_2,.... che lo comprenda tutto nel suo interno, la serie

$$[G_{m+1}(z) - H_{m+1}(z)] + [G_{m+2}(z) - H_{m+2}(z)] + ... ,$$

cioè la serie (34) tolti i primi $m + 1$ termini, ammetterà in D come maggiorante la serie convergente

$$\varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} + ...$$

epperò convergerà ivi, assolutamente e uniformemente. Ma, d'altro lato, la somma di un numero finito di termini della (34):

$$G_0(z) + [G_1(z) - H_1(z)] + ... + [G_m(z) - H_m(z)]$$

è una funzione razionale avente come poli i punti a_0, a_1,...., a_m con le rispettive caratteristiche g_0, g_1,...., g_m; dunque la serie (34) converge assolutamente ed uniformemente in ogni dominio finito D da cui siano stati tolti (per esempio mediante piccoli cerchietti) i punti a_1, a_2, a_3,.... che eventualmente vi cadono, e rappresenta così, in tutto il piano complesso, una funzione meromorfa coi poli a_0, a_1, a_2,.... e le rispettive caratteristiche g_0, g_1, g_2,....

Data l'importanza della formula di decomposizione (34)-(35), vale la pena di soffermarsi un momento sul caso particolarmente notevole in cui i poli siano *tutti semplici*, nel quale si giunge a risultati più espliciti che nel caso generale.

All'uopo osserviamo che in questo caso, detto c_n il residuo del generico polo a_n, cioè detta $c_n/(z-a_n)$ la sua caratteristica, si ha manifestamente (in C_n)

$$G_n(z) = \frac{c_n}{z-a_n} = -\frac{c_n}{a_n}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{a_n}} = -\frac{c_n}{a_n}\left(1+\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{a_n}+\dots\right)$$

donde segue

$$H_n(z) = -\frac{c_n}{a_n}\left(1+\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{a_n^2}+\dots+\frac{z^{N-1}}{a_n^{N-1}}\right)$$

e, conseguentemente,

$$G_n(z)-H_n(z) = c_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}+\frac{z}{a_n^2}+\dots+\frac{z^{N-1}}{a_n^N}\right) =$$
$$= -\frac{c_n}{a_n}\left(\frac{z^N}{a_n^N}+\frac{z^{N+1}}{a_n^{N+1}}+\dots\right) = \frac{c_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^N ;$$

la (34) si presenterà dunque sotto le forme più semplici:

(34') $$F(z) = \frac{c_0}{z-a_0}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}+\frac{z}{a_n^2}+\dots+\frac{z^{N-1}}{a_n^N}\right)$$

e

(34'') $$F(z) = \frac{c_0}{z-a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{a_n}\right)^N\frac{c_n}{z-a_n},$$

in cui N è un intero, in generale dipendente da n, sottoposto alla sola condizione che la serie a secondo membro risulti convergente (assolutamente ed uniformemente) in ogni dominio finito in cui non cade nessuno dei poli $a_1, a_2, \dots$.

Per facilitare la determinazione di N nei casi concreti che possono presentarsi, osserviamo ulteriormente che, qualunque sia il dominio finito D che si considera e per quanto piccolo sia fissato il numero positivo ε, da un certo $n = n_0$ in poi, i punti a_n saranno così lontani da D da aversi ivi

$$1-\varepsilon < \left|1-\frac{z}{a_n}\right| < 1+\varepsilon$$

e, conseguentemente,

$$\left|\left(\frac{z}{a_n}\right)^N\frac{c_n}{a_n}\right|\frac{1}{1+\varepsilon} < \left|\left(\frac{z}{a_n}\right)^N\frac{c_n}{z-a_n}\right| < \left|\left(\frac{z}{a_n}\right)^N\frac{c_n}{a_n}\right|\frac{1}{1-\varepsilon}, \qquad (n \geqslant n_0):$$

pertanto la serie (34'') convergerà (assolutamente ed uniformemente) in ogni dominio finito privo di poli, allora e solo allora che lo stesso succede per la serie

(36) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{a_n}\right)^N\frac{c_n}{a_n}.$$

Ne segue in particolare che se i poli a_n e i corrispondenti residui c_n sono tali che esista un intero p *fisso* per cui la serie

(37) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n|}{|a_n|^{p+1}}$$

risulti convergente, allora la (34') o (34'') potrà scriversi attribuendo ad N il valore fisso $N = p$.

Similmente si vede che se la serie di potenze $\Sigma\, c_n z^n$ ha raggio di convergenza *non nullo*, allora si può certamente porre $N = n$, ecc.

Finalmente consideriamo a titolo d'esempio la funzione meromorfa semplicissima

$$f(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

che ha manifestamente come poli, tutti semplici, i punti 0, ± 1, ± 2, $\pm 3, \dots$, coi rispettivi residui $1, -1, 1, -1, \dots$, sicchè la serie (37) si presenterà sotto l'aspetto

$$2\left(\frac{1}{1^{p+1}}+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\dots\right).$$

Ma questa serie è notoriamente convergente già per $p = 1$; dunque nel caso in esame si può assumere $N = 1$, ottenendo così

$$F(z) = \frac{1}{z}+\sum_{h=1}^{\infty}(-1)^h\left(\frac{z}{h}\,\frac{1}{z-h}+\frac{z}{-h}\,\frac{1}{z+h}\right)$$

cioè

$$F(z) = \frac{1}{z}+2z\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-1)^h}{z^2-h^2} = \frac{1}{z}+\sum_{h=1}^{\infty}(-1)^h\left(\frac{1}{z-h}+\frac{1}{z+h}\right),$$

donde segue

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h \left(\frac{1}{z-h} + \frac{1}{z+h} \right) + G(z) \quad [1], \tag{38}$$

avendo indicata con $G(z)$ una funzione olomorfa.

La cosa forse piú interessante è però che, nell'esempio considerato, la funzione olomorfa $G(z)$ si riduce addirittura ad una costante e precisamente a *zero*, come vedremo nel prossimo paragrafo.

§ 7. - Alcuni notevoli sviluppi in serie di funzioni razionali.

Ci proponiamo ora di dimostrare che, come si è già accennato, *la funzione olomorfa*

$$G(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \tag{38'}$$

è identicamente nulla.

A tale scopo osserviamo anzitutto che, trattandosi evidentemente di una funzione: (1) dispari, (2) periodica col periodo reale 2, (3) limitata (perchè olomorfa) in ogni dominio tutto al finito; detto α un numero positivo qualsiasi e posto

$$z = x + iy\,,$$

non sarà restrittivo limitarsi a considerarla nella regione

$$-1 \leqslant x \leqslant 1\,, \qquad y \geqslant \alpha\,;$$

nel senso che — se riusciremo a dimostrare che $G(z)$ è limitata in tale regione — ne potremo dedurre che essa è limitata anche nell'intero piano complesso z, epperò, per il teorema di LIOUVILLE, che dovrà ridursi ad una costante. Risulterà inoltre che tale costante è necessariamente lo *zero*, perchè la maggiorante di $G(z)$ che troveremo, tenderà a *zero* per $y \to \infty$.

Per quel che riguarda i primi due termini di $G(z)$, la cosa è

[1] Parrebbe a prima vista che il 2° membro della (38) potesse scriversi più semplicemente, sotto la forma

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{z-h} + G(z)\,;$$

la cosa non è però opportuna perchè quest'ultima serie non è assolutamente convergente.

quasi di per sè evidente perchè, essendo

$$|\sin \pi z| = |\sin \pi x \operatorname{\mathfrak{Cos}} \pi y + i \cos \pi x \operatorname{\mathfrak{Sin}} \pi y| =$$
$$= \sqrt{\sin^2 \pi x + \operatorname{\mathfrak{Sin}}^2 \pi y} \geqslant \operatorname{\mathfrak{Sin}} \pi y\,,$$

risulta

$$\left| \frac{\pi}{\sin \pi z} \right| \leqslant \frac{\pi}{\operatorname{\mathfrak{Sin}} \pi y} \leqslant \frac{\pi}{\operatorname{\mathfrak{Sin}} \pi \alpha}\,.$$

Per quel che riguarda la rimanente parte di $G(z)$, cioè la serie, indicandola con $G_1(z)$, si vede subito che può porsi

$$G_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-(2m-1)} + \frac{1}{z+(2m-1)} - \frac{1}{z-2m} - \frac{1}{z+2m} \right] =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[z-(2m-1)](z-2m)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[z+(2m-1)](z+2m)}\,;$$

ma, qualunque sia l'intero n, nella regione considerata si ha

$$|z \pm n| = \sqrt{(n \pm x)^2 + y^2} \geqslant \sqrt{(n-1)^2 + y^2}\,,$$

donde segue

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[z \pm (2m-1)](z \pm 2m)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2m-2)^2 + y^2}\,\sqrt{(2m-1)^2 + y^2}} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-2)^2 + y^2}\,;$$

quindi, posto per un momento

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-2)^2 + y^2} = \frac{1}{y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + y^2} = F(y)\,,$$

si ha

$$|G_1(z)| < 2F(y)\,.$$

Questo mostra in primo luogo che la funzione $G_1(z)$ è limitata perchè, nella regione considerata, si ha ovviamente

$$0 < F(y) < \frac{1}{\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\pi^2}{24}\,.$$

In secondo luogo è pure ovvio che la maggiorante $2F(y)$ trovata tende a *zero* per $y \to \infty$, perchè questo è quello che manifestamente succede per tutti i termini della serie, assolutamente ed uniformemente convergente, per mezzo di cui è stata definita la funzione $F(y)$.

Se ne conclude, come si è già accennato, che *la funzione $G(z)$ è necessariamente nulla.*

Resta così dimostrata la formula, veramente notevole,

$$(39) \qquad \boxed{\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right)},$$

che costituisce un complemento essenziale alla teoria elementare delle funzioni trigonometriche.

Dalla (39) possono facilmente dedursi alcuni altri sviluppi analoghi. Per esempio, cambiando z in $z + 1/2$, si ha subito

$$(40) \qquad \frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z+(n+1/2)} - \frac{1}{z-(n+1/2)}\right),$$

donde, cambiando z in iz e riducendo le due frazioni sotto sommatorio ad un unico denominatore, si deduce che

$$(41) \qquad \frac{\pi}{\mathfrak{Cos}\, \pi z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(n+1/2)^2+z^2}.$$

Meno immediata è invece la deduzione dell'analogo sviluppo per la funzione $\pi \operatorname{cotg} \pi z$. All'uopo conviene invero far ricorso ancora al teorema di MITTAG-LEFFLER che, considerato che la funzione in quistione ha come poli semplici tutti gl'interi, positivi, negativi o nulli, col residuo costante $+1$, analogamente al caso di $\pi/\sin \pi z$, fornisce

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\frac{1}{z+n} + \frac{z}{-n}\frac{1}{z-n}\right) + g(z)$$

cioè

$$(42) \qquad \pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) + g(z),$$

avendo indicata con $g(z)$ una certa funzione olomorfa.

Ciò premesso serviamoci dell'identità

$$\pi \operatorname{cotg} \pi \frac{z}{2} - \pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

che, sostituendo alle due cotangenti i valori dati dalla (42) e al secondo membro il valore dato dalla (39), dopo facili riduzioni fornisce

$$g(z/2) - g(z) = 0.$$

La funzione olomorfa $g(z)$ avrebbe dunque, fra l'altro, come punti di livello i punti

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{8}, \ldots.$$

aventi come punto di condensazione lo *zero*, il che, per quanto si è visto a p. 67, è assurdo, salvo che la funzione non si riduca ad una costante. Se ne conclude che la funzione $g(z)$ è necessariamente una costante, anzi che è la costante *zero*, perchè, ponendo $z = 1/2$ nella (42), tutti i termini si distruggono tranne il termine $g(1/2)$. Vale dunque lo sviluppo

$$(43) \qquad \pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right),$$

donde, cambiando z in $z + 1/2$ o in $iz/2 + 1/2$, segue rispettivamente

$$(44) \qquad \pi \operatorname{tg} \pi z = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+(n+1/2)} + \frac{1}{z-(n+1/2)}\right)$$

e

$$(45) \qquad \mathfrak{Tg}\, \frac{\pi z}{2} = \frac{4z}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2+z^2}.$$

Derivando invece la (43) rispetto a z si ha

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z+n)^2} + \frac{1}{(z-n)^2}\right)$$

cioè

$$(46) \qquad \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

Gli sviluppi ottenuti in questo paragrafo possono, fra l'altro, utilizzarsi per ritrovare immediatamente le ben note proprietà di periodicità delle funzioni rappresentate, il che non sarebbe altrettanto facile partendo invece, per es., dai loro sviluppi in serie di potenze.

§ 8. - Funzioni olomorfe. Teorema di Weierstrass.

Allo stesso modo che le funzioni meromorfe generali sono la più semplice e naturale estensione delle ordinarie funzioni razionali, le funzioni olomorfe, o *intere* che dir si voglia, cioè le funzioni dotate come unica singolarità di un punto singolare essenziale all'infinito, possono risguardarsi come la più semplice e naturale estensione dei polinomi. Conseguentemente viene naturale domandarsi se sia possibile estendere ad esse le note proprietà degli ordinari polinomi.

Per alcune di queste proprietà la cosa è effettivamente possibile, ma per altre certamente no, come per esempio succede nel caso del teorema fondamentale dell'Algebra, che manifestamente equivale all'asserzione che un polinomio $P(z)$ assume qualsivoglia valore complesso prefissato. Infatti, la funzione intera semplicissima e^z non assume mai, come già sappiamo, il valore *zero*, e così pure la funzione

$$e^{g(z)} \tag{47}$$

dove $g(z)$ denota una funzione intera qualsiasi.

Reciprocamente, si può facilmente dimostrare che *l'esponenziale* (47) *rappresenta il più generale tipo di funzione intera senza zeri.*

Infatti, se $f(z)$ è una funzione olomorfa *mai nulla* (al finito), anche la sua derivata logaritmica (cfr. Cap. III, § 6)

$$L(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d \log f(z)}{dz}$$

sarà olomorfa, e così pure il suo integrale

$$g(z) = \int L(z)\,dz\ ;$$

ma d'altra parte si ha

$$f(z) = e^{g(z)}\ ;$$

quindi, ecc.

L'osservazione precedente lascia già intravedere in qual senso ed entro quali limiti sarà possibile estendere alle funzioni intere uno dei più fondamentali risultati della teoria delle equazioni algebriche, e cioè il fatto che un polinomio è determinato (a meno d'un coefficiente costante) allorchè sono dati i suoi *zeri*, cioè le radici dell'equazione che si ottiene uguagliandolo a zero. Propriamente è da aspettarsi che il fattor costante venga qui rimpiazzato da un fattore esponenziale del tipo (47), ossia che la più generale funzione olomorfa $f(z)$ avente per zeri i prescritti punti a_1, a_2, a_3,...., sia rappresentabile mediante una formula del tipo

$$f(z) = e^{g(z)}\Pi(z - a_n)$$

dove il prodotto Π è da estendere a tutti i binomi $z - a_n$ corrispondenti ai singoli zeri. Non vi è anzi dubbio, dopo quanto più sopra si è detto, che le cose vadano proprio così se *il numero dei zeri della funzione è finito.* Se invece il numero dei zeri è infinito sorge la difficoltà, analoga a quella presentatasi nel paragrafo precedente, che il *prodotto infinito* Π può non esser convergente [1]. Essa si supera però, come è ora facile compren-

[1] La teoria dei *prodotti infiniti* si riconduce agevolmente a quella delle serie, osservando che la condizione necessaria e sufficiente affinchè il prodotto infinito

$$\Pi = \prod_{h=1}^{\infty} a_h$$

sia *convergente* e *non nullo*, cioè affinchè sia

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{h=1}^{n} a_h = \Pi \neq 0\,,$$

è manifestamente che, con opportune determinazioni dei logaritmi, la serie

$$\Sigma = \log a_1 + \log a_2 + ...$$

risulti convergente. Inoltre è

$$\Pi = e^{\Sigma}\,.$$

Un prodotto infinito *assolutamente* convergente, è un prodotto convergente indipendentemente dall'ordine dei fattori.

Per maggiori dettagli, v. KNOPP [9], Kap. 7°, 11° e 12°.

dere, in modo analogo a quello seguito a proposito del teorema di MITTAG-LEFFLER, giungendo così al seguente:

TEOREMA DI WEIERSTRASS. – *Data una qualsiasi successione di numeri complessi, non nulli, non necessariamente distinti,* a_1, a_2, a_3,...., *avente come suo unico punto limite il punto all'infinito e che noi supporremo ordinata in modo che si abbia*

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant |a_3| \leqslant .... ;$$

è possibile associare ad ogni intero n un altro intero N in modo tale che il prodotto infinito

$$\Pi = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + ... + \frac{z^N}{Na_n^N}} \tag{48}$$

sia dapertutto (assolutamente ed uniformemente) convergente, donde segue che l'espressione

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \Pi ,$$

con g(z) funzione olomorfa, rappresenta la più generale funzione olomorfa avente gli assegnati punti come zeri (semplici) e (eventualmente) per di più uno zero d'ordine m nell'origine (¹).

Il teorema di WEIERSTRASS si deduce senz'alcuna difficoltà da quello di MITTAG-LEFFLER (²) osservando che la derivata logaritmica della funzione $f(z)$ (che, pel momento, supporremo non annullarsi nell'origine) è ovviamente una funzione meromorfa avente (Cap. III, § 6) come poli semplici, con residuo 1, tutti e soli i punti a_1, a_2, a_3,....

Invero, detto N un numero, in generale dipendente da n, tale che la serie dei moduli dei termini della (36), che qui diviene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^N}{|a_n|^{N+1}} , \tag{49}$$

(¹) La circostanza che i punti a_1, a_2,.... si suppongono zeri *semplici* della funzione è solo in apparenza restrittiva, non essendosi supposto che i punti in discorso debbano essere necessariamente distinti.

(²) Che però storicamente ha seguíto quello di WEIERSTRASS.

risulti convergente; per la (35) e la (34′) avremo

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = G(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + ... + \frac{z^{N-1}}{a_n^N}\right).$$

Ciò posto, integriamo ambo i membri fra 0 e z lungo un cammino che eviti i punti a_1, a_2, a_3,...., dopo avere osservato che la serie a secondo membro è uniformemente convergente, e quindi integrabile termine a termine, in ogni dominio finito non contenente detti punti; avremo così la formula:

$$\log f(z) = \log f(0) + \int_0^z G(z)\,dz +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + ... + \frac{z^N}{Na_n^N}\right],$$

senza che ci sia bisogno di preoccuparsi della posizione del cammino d'integrazione rispetto ai punti a_1, a_2,...., dato che una variazione di questo non può portare che a differenze multiple intere di $2\pi i$, che possono pensarsi assorbite nelle indeterminazioni dei logaritmi. Ma, posto

$$\log f(0) + \int_0^z G(z)\,dz = g(z) ,$$

la precedente formula può anche scriversi

$$\log f(z) = \log e^{g(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \log\left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + ... + \frac{z^N}{Na_n^N}}\right];$$

dunque, passando dai logaritmi ai numeri, con che sparisce ogni indeterminazione, avremo

$$f(z) = e^{g(z)} \Pi ,$$

cioè

$$\boxed{f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + ... + \frac{z^N}{Na_n^N}}} \tag{50}$$

avendo ulteriormente aggiunto il fattore z^m $(m \geqslant 0)$ per tener conto dell'eventuale annullarsi della nostra funzione nell'origine.

Notiamo esplicitamente che, analogamente a quanto si è già osservato nel paragrafo precedente, se esiste un intero p (« *rango* » della funzione) tale che la serie

$$\frac{1}{|a_1|^{p+1}} + \frac{1}{|a_2|^{p+1}} + \frac{1}{|a_3|^{p+1}} + \dots \tag{51}$$

risulti convergente, allora nella (50) potrà porsi costantemente $N = p$.

In particolare, nel caso della funzione $\sin \pi z$, partendo dalla (43) scritta sotto la forma

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right)$$

e integrando rispetto a z fra 0 e z, si deduce che

$$\left[\log \frac{\sin \pi z}{z}\right]_0^z = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log (z+n)(z-n)\right]_0^z$$

cioè che

$$\log \frac{\sin \pi z}{z} - \log \pi = \log \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

donde, passando dai logaritmi ai numeri segue subito la celebre formula (di EULER):

$$\boxed{\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}\,. \tag{52}$$

Per ottenere una formula analoga pel coseno, osserviamo anzitutto che

$$\cos \pi z = \frac{\sin 2\pi z}{2 \sin \pi z}$$

e sostituiamo poi ai due *seni* i loro valori dati dalla (52); avremo così che

$$\cos \pi z = \frac{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - 4z^2/n^2)}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^2/n^2)}$$

donde, separando nel prodotto al numeratore i fattori corrispondenti a valori pari di n $(n = 2k)$ da quelli relativi a valori dispari $(n = 2k + 1)$, segue

$$\cos \pi z = \frac{\prod_{k=1}^{\infty}(1 - 4z^2/4k^2) \prod_{k=1}^{\infty}[1 - 4z^2/(2k-1)^2]}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^2/n^2)}$$

epperò, riducendo, si ha la formula

$$\cos \pi z = \prod_{k=1}^{\infty} [1 - 4z^2/(2k-1)^2],$$

che può anche scriversi:

$$\cos \pi z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(k - 1/2)^2}\right). \tag{53}$$

Il teorema di WEIERSTRASS occupa un posto centrale in tutta la teoria delle funzioni intere, i cui anche più recenti sviluppi si riattaccano quasi sempre direttamente o indirettamente ad esso (cfr. per esempio BIEBERBACH [3], II Bd., 6. Abschn.; VIVANTI [12]). In particolare il teorema di WEIERSTRASS ha condotto a stabilire delle semplici relazioni fra il *modo di crescere* della funzione per $z \to \infty$ e la distribuzione dei suoi zeri, di cui è superfluo sottolineare l'importanza e di cui ci si può fare un'alquanto pallida idea osservando che, se gli zeri della funzione sono tali che la serie (51) sia convergente, e se per di più si suppone (per semplicità) che $g(z)$ si riduca ad una costante, la *parte prevalente* di $|f(z)|$ per $z \to \infty$ è manifestamente data dal prodotto

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{z^p}{p a_n^p}} = e^{k_p z^p},$$

avendo posto

$$k_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p a_n^p}.$$

Pertanto, nel caso esaminato, il modulo della funzione cresce in modo confrontabile con quello di $e^{k_p z^p}$, se p è il minimo intero per cui la serie delle $(p + 1)$-*esime* potenze delle inverse degli zeri della funzione risulta assolutamente convergente.

Più generalmente, se $g(z)$ invece di ridursi ad una costante è un *polinomio* di un certo grado q, la crescenza del modulo della funzione è dominata dal *più grande dei due interi* p *e* q, che dicesi *genere* della funzione.

Senza ulteriormente addentrarci nelle ora accennate considerazioni, che ci condurrebbero troppo lontano, limitiamoci per ultimo ad osservare come dal teorema di WEIERSTRASS segua immediatamente che *ogni funzione meromorfa* $f(z)$ *può rappresentarsi quale quoziente di due opportune funzioni olomorfe* $g(z)$ *e* $h(z)$:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \tag{54}$$

ciò che, in molti casi, consente di ricondurre lo studio delle funzioni meromorfe a quello delle olomorfe.

Infatti, basta pensare costruita, per mezzo del teorema di WEIERSTRASS, una funzione olomorfa $h(z)$ avente come zeri i poli di $f(z)$ (con le stesse molteplicità), ed osservare che il prodotto $f(z)h(z)$, non avendo nessuna singolarità a distanza finita, è necessariamente una funzione intera (trascendente o no) $g(z)$, per ottenere senz'altro la (54).

ELENCO BIBLIOGRAFICO

[1] BAGNERA G. - *Lezioni sopra la teoria delle funzioni analitiche* (Litogr. a cura del Dr. RICCI. Roma, Sampaolesi, 1927).

[2]. BIANCHI L. - *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche.* (2ª Ed.; Pisa, Spoerri, 1916).

[3]. BIEBERBACH L. - *Lehrbuch der Funktionentheorie.* I, II. (Leipzig, Teubner, 1921-1927).

[4]. CESÀRO E. - *Corso di analisi algebrica, ecc.* (Torino, Bocca, 1894).

[4bis]. CHURCHILL R. V. - *Introduction to complex variables and applications.* (New York, McGraw-Hill, 1948).

[4ter]. COPSON E. T. - *Theory of functions of a complex variable.* (Oxford Univ. Press, 1935).

[5]. GOURSAT E. - *Cours d'analyse mathématique.* I, II, III. (2ª Ed., Paris, Gauthier-Villars, 1910-1915).

[6]. HOÜEL J. - *Recueil de formules et de tables numériques.* (4ª Ed.; Paris, Gauthier-Villars, 1901).

[7]. HURWITZ A. - COURANT R. - *Funktionentheorie.* (3ª Ed.; Berlin, Springer, 1929).

[8]. JANKHE E. - EMDE F. - *Funktionentafeln*: I *Tafeln höheren Funktionen.* (4ª Ed.; Leipzig, Teubner, 1948). - II *Tafeln elementarer Funktionen.* (2ª Ed.; ibidem, 1948).

[8bis]. KOBER H. - *Dictionary of conformal representations.* (London, Admirality Computing Serv., 1945).

[9]. KNOPP K. - *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* (3ª Ed.; Berlin, Springer, 1931). (4ª Ed.; 1947).

[10]. KNOPP K. - *Funktionentheorie.* (Berlin, W. de Gruyter; I, 5ª Ed., 1937; II, 4ª Ed., 1931: Samml. Göschen, Bd. 668 u. 703).

[11]. OSGOOD W. F. - *Lehrbuch der Funktionentheorie.* I, II¹, II². (5ª Ed. tedesca; Leipzig, Teubner, 1928-1932).

[12]. PICARD E. - *Traité d'analyse.* I, II, III. (3ª Ed.; Paris, Gauthier-Villars, 1922-1928).

[12bis]. SANSONE G. - *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa.* (Padova, « Cedam », 1947).

[12ter]. TITCHMARSH E. C. - *Theory of functions.* (2ª Ed.; Oxford, Univ. Press, 1939).

[13]. VIVANTI G. - *Elementi della teoria delle funzioni analitiche ecc.* (2ª Ed.; Milano, Hoepli, 1928).

[14]. WHITTAKER E. T. - WATSON G. N. - *Modern Analysis.* (4ª Ed.; Cambridge, University Press, 1927).

INDICE ALFABETICO

INDICE