R. Conti
1943

T. LEVI-CIVITA

FONDAMENTI
DI
MECCANICA RELATIVISTICA

REDATTI DAL

PROF. E. PERSICO

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
MCMXXVIII

314-27 - Firenze, Tipografia Enrico Ariani, Via San Gallo, 33.

PREFAZIONE.

Sulla teoria della relatività, creata, come ognuno sa, dall' EINSTEIN, sono state pubblicate in questi ultimi anni parecchie opere d'insieme, dovute ad autori illustri, ed eccellenti sotto il duplice aspetto scientifico e didattico: fra queste anche una italiana [1]).

La breve trattazione che qui ne viene offerta presenta qualche carattere distintivo che giova rilevare esplicitamente.

In primo luogo, per ridurre quanto possibile la mole del libro, ho creduto opportuno di limitarmi a tratteggiare l'evoluzione relativistica della meccanica propriamente detta e dell'ottica geometrica, sacrificando del tutto l'elettromagnetismo. Il sacrificio è in verità increscioso, in quanto l'elettromagnetismo, che (al pari di ogni altro fenomeno fisico) rimane incluso nella relatività generale, fu storicamente connesso nel modo più intimo alla prima fase della concezione einsteiniana, avendo servito quale supporto e modello della relatività ristretta.

Viceversa la riduzione del programma ad argomenti di pura tradizione (o filiazione) newtoniana con-

[1]) R. MARCOLONGO, *Relatività*, Messina, Principato (2ª ediz., 1923).

sente una più netta e chiara visione del passaggio dallo schema classico a quello relativistico.

Perciò, anzichè enunciare i postulati della meccanica relativistica in forma tensoriale astratta, di contenuto fisico così compendioso da riuscire (senza ampio commento e acconcia esemplificazione) pressochè inaccessibile all'ordinaria intuizione, io mi sono attenuto (come già alcuni anni or sono in qualche conferenza o articolo di soggetto particolare) al criterio costante di prendere le mosse dalle leggi classiche, cercando induttivamente quali modificazioni (lievissime, in condizioni ordinarie) siano da introdursi per rispecchiare le idee dell' Einstein: in primo luogo, naturalmente, il suo principio di relatività, cioè il comportamento invariante, di fronte a tutte le trasformazioni di spazio e di tempo, subordinatamente ad un certo ds^2 quadridimensionale.

Un'ulteriore caratteristica della presente esposizione può ravvisarsi da un lato nell'aver largamente profittato non soltanto della rappresentazione geometrica, ma altresì delle proprietà differenziali spettanti alla varietà spazio-tempo; dall'altro nell'aver illustrata la particolare importanza della statica einsteiniana sotto il duplice aspetto di teoria rigorosa in alcuni casi, e di approssimazione sufficiente in altri che pur involgono campi variabili col tempo.

Per sveltire la trattazione mi sono valso dove ho potuto di teoremi di equivalenza dinamica, sia dei classici che risalgono a Hamilton e Jacobi, sia di un risultato (valido in seconda approssimazione) che enunciai nel 1926 e che si trova qui inquadrato nei §§ 11 del Cap. I e 8 del Cap. II.

A proposito delle trasformazioni di Lorentz ho aggiunto una considerazione, che credo nuova, atta a schematizzare nitidamente, così le proprietà che esse hanno in comune coi moti rigidi come le differenze specifiche.

I tre ultimi paragrafi sono dedicati alle metriche di interesse cosmologico, dovute rispettivamente all'EINSTEIN e al DE SITTER. Esse vengono qui presentate (come già feci fin dal 1917 [1])) quali due alternative derivanti da una medesima ipotesi (sensibile uniformità fisica dello spazio interstellare).

La redazione del manoscritto di questo libro risale al 1926 ed è dovuta al Dott. ENRICO PERSICO (ora Professore nella R. Università di Firenze), cui rinnovo i più cordiali ringraziamenti.

Roma, Febbraio 1928.

TULLIO LEVI-CIVITA.

[1]) Nella nota *Sulla realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XXVI (1° semestre 1917), pp. 519-531.

CAPITOLO I.

Evoluzione della meccanica e dell'ottica geometrica. Loro subordinazione ad uno schema quadridimensionale secondo Einstein.

1. IL PRINCIPIO DI HAMILTON PER UN PUNTO LIBERO NELLA MECCANICA CLASSICA. — Prendiamo le mosse dalle equazioni del moto di un punto materiale in un campo conservativo. Sia U il potenziale unitario. Le equazioni del moto, in coordinate cartesiane (riferite ad assi fissi) y_1, y_2, y_3, si scrivono

$$\ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

il punto sovrapposto indicando al solito derivazione rispetto al tempo t. Ove si designi con

$$dl_0^2 = \sum_1^3{}_i \, dy_i^2$$

il quadrato dell'elemento lineare (percorso dal mobile nel tempuscolo dt) e con v la velocità del mobile in valore assoluto, sarà

$$v^2 = \frac{dl_0^2}{dt^2} = \sum_1^3{}_i \, \dot{y}_i^2 .$$

Posto

$$L = \frac{1}{2} v^2 + U,$$

le (1) si possono notoriamente [1]) compendiare nella formula variazionale

$$(2) \qquad \delta \int L dt = 0$$

che esprime il principio di HAMILTON.

Fissiamo un momento l'attenzione sulla (2). Essa implica un intervallo di integrazione (t_0, t_1) da fissarsi preventivamente ed arbitrariamente; ed è appunto il suo sussistere per variazioni δy_i delle y_i, nulle agli estremi e del resto arbitrarie, che equivale all'essere verificate le (1) nello stesso intervallo.

Questa l'accezione più semplice del principio di HAMILTON, nel quale non si fa variare t, si assume cioè $\delta t = 0$. Sono pur classiche varie generalizzazioni, nelle quali si sottopone anche t a variazione, libera o condizionata. Di una di queste generalizzazioni che rispettano l'equivalenza fra le (1) e la (2) parleremo tra un momento. Intanto notiamo che, se si cambiano comunque le coordinate, sostituendo alla terna cartesiana y_1, y_2, y_3 coordinate curvilinee quali si vogliono, o anche più generalmente tre parametri lagrangiani, x_1, x_2, x_3, legati alle y_1, y_2, y_3 da relazioni, che possono involgere anche il tempo, regolari e invertibili nel campo che si considera,

$$(T_3) \qquad x_h = x_h\,(y_1, y_2, y_3, t) \qquad (h = 1, 2, 3);$$

ovvero, sotto forma risoluta rapporto alle y_i $(i = 1, 2, 3)$,

$$(T'_3) \qquad y_i = y_i\,(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e si introducono queste espressioni nella L, essa diviene una funzione $L\,(x \,|\, \dot{x} \,|\, t)$ degli argomenti x_h, $\dot{x}_h$ $(h = 1, 2, 3)$, t, quadratica (in generale non omogenea) nelle $\dot{x}$.

Intendendo di riguardare la L come invariante, la (2) seguiterà a sussistere rispetto ai parametri lagrangiani x, e non

[1]) Veggansi ad esempio le *Lezioni di meccanica razionale* di LEVI-CIVITA e AMALDI (Bologna, Zanichelli), Vol. II$_2$, Cap. XI, § 3.

avremo che da esplicitarla, eseguendo la variazione e poi la solita integrazione per parti, con che si trova classicamente

$$(3) \qquad \delta \int L dt = \int \sum_1^3{}_h \, \tau_h \, \delta x_h \, dt$$

dove si è posto per brevità

$$\tau_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_h} - \frac{\partial L}{\partial x_h}$$

(binomi lagrangiani). Le equazioni dinamiche assumono allora la forma (detta di LAGRANGE)

$$(4) \qquad \tau_h = 0 \qquad (h = 1, 2, 3)$$

ed è da osservare che, in virtù della invarianza del primo membro della (3), le τ_h costituiscono un tensore covariante come è ben noto [1]). Ne consegue che le equazioni (4), cioè

$$(4') \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_h} - \frac{\partial L}{\partial x_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, 3)$$

hanno carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni (T_3) che lasciano invariante la L.

2. IL TEMPO COME QUARTA COORDINATA (EQUIPARAZIONE ALLE COORDINATE SPAZIALI). CRONOTOPO. LINEE ORARIE. — Ovvia conseguenza delle equazioni (4') di LAGRANGE si è la identità

$$\frac{d}{dt}\left\{ L - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i \right\} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Ciò posto, si immagini di attribuire, nell'intervallo (t_0, t_1) anche alla variabile indipendente t una variazione δt nulla agli

[1]) Cfr. per es. le nostre *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, (redatte dal prof. ENRICO PERSICO), Roma, Stock, 1925, Cap. V, § 15.

Dovendo in appresso richiamare frequentemente nozioni di calcolo differenziale assoluto, abbrevieremo sempre le citazioni del nostro libro, usando le iniziali *C. D. A.*, seguite dall' indicazione del capitolo e del paragrafo.

estremi e del resto arbitraria. Dacchè, per questo fatto, le x_i rimangono inalterate, mentre le $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ subiscono gli incrementi

$$\delta \dot{x}_i = - \dot{x}_i \frac{d\,\delta t}{dt},$$

si riconosce immediatamente che il contributo proveniente dalla variazione di t nella (2), ossia

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,\delta dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta t + \sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\,\delta \dot{x}_i \right\},$$

può, con un'ovvia integrazione per parti, essere posto sotto la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,\delta t \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(L - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\,\dot{x}_i \right) \right\},$$

che va a zero, in virtù delle (4′), per quanto abbiamo testè rilevato.

Si possono pertanto, nel principio variazionale (2), trattare alla stessa stregua le coordinate di spazio x_1, x_2, x_3 e anche la t.

Consideriamo, per semplice convenienza di linguaggio, la varietà a quattro dimensioni V_4 corrispondente ai quattro parametri x_i, t, varietà a quattro dimensioni in cui vengono a trovarsi rappresentati simultaneamente lo spazio e il tempo e che, con locuzione introdotta dal GIOBERTI [1]), si potrà chiamare *cronotopo*.

Una terna di equazioni

$$x_i = x_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ossia, nella interpretazione cinematica, un movimento, dà luogo ad una curva di V_4, e reciprocamente. Una tale curva si chiama *linea oraria*, come ovvia generalizzazione del diagramma piano con cui (portando in ascisse i tempi e in ordinate gli spazi percorsi) si suol rappresentare l'andamento del moto sopra una

[1]) Cfr. MARCOLONGO, *Relatività* (2ª edizione, Messina, Principato, 1923), p. 104.

traiettoria prestabilita. Adottando questa locuzione, si può dire che curve integrali delle equazioni (4′) sono tutte e sole le orarie di V_4, per cui, rimanendo fissi gli estremi, si annulla la variazione dell' integrale

$$\int L dt.$$

3. TRASFORMAZIONI GENERALI DI COORDINATE NEL CRONOTOPO. RIFLESSIONI SULLA CONTEMPORANEITÀ. — La più generale trasformazione di parametri in V_4 comprende ovviamente tre equazioni del tipo (T_3), con cui si sostituiscono alle coordinate cartesiane y_1, y_2, y_3 tre loro combinazioni indipendenti x_1, x_2, x_3 involgenti anche t; e inoltre una quarta con cui si sostituisce al tempo t un' ulteriore combinazione $x_0(y_1, y_2, y_3, t)$ (indipendente dalle tre precedenti): questo nuovo parametro x, si chiama talora *tempo locale*, perchè dipende non solo dall'originario tempo, ma anche dal posto. Lo schema di una (T_4) è così

$$(T_4) \begin{cases} y_0 = x_0(x_1, y_2, y_3, t), \\ (T_3). \end{cases}$$

Una ovvia, ma importante proprietà di una siffatta trasformazione è la seguente. Se due eventi sono caratterizzati da valori differenti di y_1, y_2, y_3, ma dallo stesso valore di t, in generale avviene che, eseguita la trasformazione, non solo le coordinate spaziali x_1, x_2, x_3 dei due eventi risulteranno diverse, ma anche la coordinata temporale x_0: ciò significa che due eventi che appaiono contemporanei quando ci si riferisce al sistema y_1, y_2, y_3, t, non lo sono più, in generale, quando ci si riferisce al sistema delle x: la contemporaneità diviene dunque relativa al sistema di riferimento. Ciò non ha luogo manifestamente quando la prima delle relazioni (T_4) sia del tipo $x_0 = x_0(t)$, o in particolare $x_0 = t$, con che la (T_4) si riduce ad una (T_3). Ed è appunto per rispettare la nozione intuitiva di contemporaneità (assoluta) che nella fisica classica ci si limita a trasformazioni del tipo T_3. Senonchè una più acuta critica di quella nozione intuitiva mostra che essa — anzichè essere una necessità logica — ha origine empirica basata su risultati sperimentali di prima approssimazione: è ragionevole quindi, dato il carattere speculativo delle nostre considerazioni, ammettere la possibilità di una più generale concezione della contemporaneità.

4. Forma einsteiniana del principio di Hamilton. Suo carattere invariantivo di fronte a trasformazioni di coordinate qualisivogliono.— Finchè si assume L come invariante, la forma dell'integrale $\int L dt$ non ha evidentemente carattere invariantivo di fronte ad una (T_4), venendo in generale introdotta, al posto del dt, una espressione lineare nei differenziali di tutte e quattro le variabili x. Si potrebbe cercare di sostituire alla base L qualche cosa di più generale: allora sarebbe possibile raggiungere l'intento, ma in modo complesso e infecondo, perdendo in semplicità concettuale e formale ben più di quanto si guadagni in generalità.

Non è invece difficile arrivare ad una forma espressiva, invariante di fronte ad ogni (T_4), risguardando il principio di Hamilton come un risultato di approssimazione, così grande, ben inteso, da non essere avvertibile il divario, fra esso e l'ipotetico principio rigoroso, nelle applicazioni correnti, non solo tecniche, ma anche astronomiche. Una tale circostanza si presenta manifestamente, qualora i termini correttivi abbiano, rispetto agli omologhi della teoria ordinaria, un ordine di grandezza non superiore al centomilionesimo (10^{-8}).

Ecco una concreta realizzazione di questo criterio. Indichiamo con c una velocità costante, assai grande di fronte alla massima raggiunta nei movimenti di cui intendiamo occuparci. E conveniamo di chiamare quantità piccole del 1° ordine quelle comparabili con $\beta = \frac{v}{c}$ (v indicando il valore assoluto di una generica delle velocità spettanti ai movimenti anzidetti). Riterremo trascurabili di fronte all'unità le quantità di ordine 2° o superiore: tale supporremo anche il rapporto $\frac{U}{c^2}$.

A questo proposito notiamo che una tale circostanza si presenta effettivamente, per c comparabile colla velocità della luce, non soltanto per gli ordinari problemi di moto terrestre,

ma anche in meccanica celeste. Per rendersene conto, basta supporre che v sia una velocità planetaria e U il potenziale newtoniano che la determina, con che esso U (nel campo del moto del pianeta) ha notoriamente lo stesso ordine di grandezza di v^2.

Come ordine di grandezza di v, si può assumere 30 km. al secondo, che conviene al moto orbitale terrestre. Essendo, in cifra tonda, $c = 300000$ km./sec., si avrà

$$\frac{v}{c} \sim 10^{-4}, \text{ e quindi } \frac{v^2}{c^2} \text{ e } \frac{U^2}{c^2} \sim 10^{-8}.$$

Vedremo anzi al § **9** e al § **16** che considerazioni fisiche conducono ad assumere per c precisamente la velocità della luce.

Ciò premesso, cominciamo coll'osservare che, dovendo annullarsi dt agli estremi dell'intervallo di integrazione,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt = 0,$$

talchè si può sostituire a L come funzione integranda nella (2)

$$c^2 - L = c^2 \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{U}{c^2}\right).$$

Entro parentesi i termini $-\frac{1}{2}\beta^2, -\frac{U}{c^2}$, pur essendo trascurabili di fronte all'unità, sono essenziali perchè il principio variazionale non si riduca all'identità. Però termini d'ordine superiore si potranno senz'altro trascurare nell'approssimazione convenuta. Sarà quindi lecito scrivere

$$c^2 - L = c^2 \sqrt{1 - \beta^2 - \frac{2U}{c^2}} = c\sqrt{c^2 - v^2 - 2U},$$

e con ciò il principio di Hamilton che, per l'osservazione precedente, è equivalente a $\delta\int(c^2 - L)\, dt = 0$, può, omettendo il fattore costante c e scrivendo $\frac{dl_0^2}{dt^2}$ al posto di v^2, essere sostituito da

$$\delta \int \sqrt{c^2 - \frac{dl_0^2}{dt} - 2U}\; dt = 0$$

ossia, ponendo

(5) $$ds^2 = (c^2 - 2U)\, dt^2 - dl_0^2 \,,$$

da

(6) $$\delta \int ds = 0 \,.$$

Dacchè, con referenza a coordinate cartesiane, il dl_0^2 vale $\sum_{i=1}^{3} dy_i^2$, il ds^2 testè introdotto è una forma differenziale quadratica quaternaria; indefinita, perchè (pur con valori reali e infinitesimi di dt, dy_1, dy_2, dy_3) è suscettibile di assumere determinazioni sia positive che negative. Con tutto ciò *va ritenuto che, nell'ambito dei fenomeni di moto che stiamo considerando, si ha sempre* $ds^2 > 0$.

Basta notare che, raccogliendo $c^2 dt^2$ a fattore e riponendo v^2 per $\frac{dl_0^2}{dt^2}$, si può scrivere

$$ds^2 = c^2\, dt^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right);$$

e ciò prova l'asserto, perchè la quantità in parentesi risulta certo positiva quando sussistono le limitazioni quantitative da cui abbiamo preso le mosse.

Notiamo ora che, se si riguarda il ds^2 espresso dalla (5) come il quadrato dell'elemento lineare della varietà V_4 (che congloba lo spazio ed il tempo), la (6) rappresenta l'equazione caratteristica delle geodetiche di tale varietà [1]). È vero che la metrica di questa varietà risulta caratterizzata da una forma quadratica indefinita, ma, come fu osservato in *C. D. A.*, Cap. V, § 28, ciò non porta alcuna complicazione finchè ci si limita a considerare linee tutte costituite da elementi per i

1) *C. D. A.*, Cap. V, § 24.

quali $ds^2 > 0$, come è nel caso presente. Potremo dire dunque che la indicata modificazione del principio di HAMILTON pone una determinazione metrica nel cronotopo (varietà spazio-tempo V_4), e che il problema meccanico del moto di un punto libero sotto l'azione di forze derivanti da un potenziale, è stato trasformato — con alterazione quantitativamente lievissima delle leggi della dinamica — nel problema puramente geometrico della determinazione delle geodetiche di una certa varietà metrica quadridimensionale.

Ove si sostituiscano agli argomenti t, y_1, y_2, y_3, quattro loro combinazioni indipendenti quali si vogliono x_0, x_1, x_2, x_3, mediante una (T_4), il ds^2 perderà la forma speciale (5), per rientrare nel tipo generale di una quadrica quaternaria

(5') $$ds^2 = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

i cui dieci coefficienti g_{ik} $(= g_{ki})$ saranno naturalmente, in generale, funzioni delle x.

L'essenziale è che, attesa la natura invariante del ds^2, la (6) presenta essa pure carattere invariantivo di fronte a qualsiasi scelta di coordinate in V_4. Ciò costituisce una rilevante superiorità della (6) sopra l' originario principio di HAMILTON. Dal punto di vista concettuale va rilevato ancora che con ciò si realizza il concetto fondamentale della *relatività generale* di EINSTEIN, il quale appunto richiede che le leggi di qualsiasi fenomeno fisico siano esprimibili sotto forma invariante rispetto a tutte le possibili scelte di coordinate, spaziali e temporali, senza che il tempo debba, come nelle teorie classiche, occupare un posto privilegiato.

5. MASSA ED ENERGIA: VEDUTE SUGGERITE DALLA MODIFICAZIONE DELLA LEGGE DINAMICA. — Vediamo in modo preciso quale aspetto assumono le equazioni della dinamica dal punto materiale libero, quando alla classica funzione lagrangiana L si sostituisce la funzione

$$L^* = -c\sqrt{c^2 - v^2 - 2U}\,,$$

che scriveremo brevemente

$$L^* = -c^2 K ,$$

ponendo

$$K = \sqrt{1 - \beta^2 - \frac{2U}{c^2}} .$$

Le equazioni di LAGRANGE divengono, con la materiale sostituzione di $-c^2K$ a L,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial K}{\partial y_i} = 0 ;$$

ovvero anche, poichè

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{y}_i} = -\frac{\dot{y}_i}{c^2 K} , \tag{7}$$

avremo

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}_i}{K} = \frac{1}{K}\frac{\partial U}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Se si pensa che K è poco diverso da 1, si riconosce che queste equazioni sono quantitativamente poco diverse dalle (1). Badando poi al loro aspetto formale, e ricordando l'equazione cardinale della dinamica classica

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q} = \mathbf{F}$$

(dove il vettore $\mathbf{Q}$ è la quantità di moto ed il vettore $\mathbf{F}$ la forza), si riconosce che nella nuova teoria funge da quantità di moto per unità di massa il vettore di componenti $\frac{\dot{y}_i}{K}$. Per un punto di massa m_0 e velocità $\mathbf{v}$ la quantità di moto sarà dunque espressa vettorialmente da

$$\mathbf{Q} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{K} .$$

Se si vuol conservare la proprietà formale, secondo cui la quantità di moto è il prodotto della massa per la velocità, bisogna assumere come massa non la costante m_0, intrinseca del corpo in moto, ma la quantità

$$m = \frac{m_0}{K}$$

che, come si vede, dipende dalla velocità e dal campo di forza. Prescindendo da quest' ultimo, onde fissare precipuamente l'attenzione sul modo di dipendere dalla velocità, si è condotti all'espressione

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

da cui apparisce che m va crescendo col crescere della velocità e tenderebbe addirittura all' infinito qualora la velocità potesse raggiungere il valore di c. In questo senso si dice che la tipica velocità c, da noi introdotta per dar forma invariante al principio di HAMILTON, è una *velocità limite*.

Passiamo ora ad esaminare, alla luce della meccanica relativistica, il concetto di energia.

Nella meccanica classica, ad una generica funzione lagrangiana $L\,(y\,|\,\dot{y})$ (dove L non contiene esplicitamente il tempo t) corrisponde la seguente espressione dell'energia [1]:

$$H = \sum_{1}^{3}{}_i \frac{dL}{d\dot{y}_i}\,\dot{y}_i - L \tag{8}$$

la quale, nel caso che L si possa scomporre in una parte $T(y\,|\,\dot{y})$ omogenea di secondo grado nelle $\dot{y}$, e una parte U indipendente da queste, diviene, per il teorema di EULERO sulle funzioni omogenee,

$$H = T(y\,|\,\dot{y}) - U(y) .$$

[1]) LEVI-CIVITA e AMALDI, Op. cit., Vol. (II)$_1$, Cap. V, n. 43.

Come è noto, T si interpreta come energia cinetica, e $-U$ come energia potenziale. Poichè alla classica L noi abbiamo sostituito l'espressione

$$L^* = -c\sqrt{c^2 - v^2 - 2U} = -c^2K$$

conviene ora ricercare quale sia la nuova espressione H^* della energia per unità di massa.

Applicando la (8) avremo materialmente

$$H^* = \sum_{1}^{3}{}_i \frac{dL^*}{d\dot{y}_i}\dot{y}_i - L^* = -c^2\left\{\sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial K}{\partial \dot{y}_i}\dot{y}_i - K\right\}$$

da cui, tenendo conto delle (7) e dell'espressione di K, si ha in definitiva

$$H^* = \frac{c^2 - 2U}{K} = \frac{c^2 - 2U}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2U}{c^2}}}. \tag{9}$$

Si vede dunque che non è possibile scindere l'energia in una parte cinetica e una posizionale; inoltre, si vede che, per $v = U = 0$, l'energia non si annulla, ma rimane uguale a c^2: fatto notevolissimo, del quale indicheremo l'interpretazione tra un momento.

Sviluppando in serie il radicale potremo scrivere

$$H^* = c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{U}{c^2} + \dots\right),$$

e quindi, limitandoci ai termini del secondo ordine, potremo ritenere

$$H^* = c^2\left(1 - \frac{U}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = c^2 - U + \frac{1}{2}v^2.$$

Si vede così che, in questa approssimazione, l'energia si compone di una parte cinetica che ha la solita espressione $\frac{1}{2}v^2$, una parte posizionale data ancora da $-U$ (come nella meccanica classica), e inoltre di una parte costante (cioè indipendente

sia dalla posizione che dalla velocità) uguale a c^2; quest'ultima prende il nome di *energia intrinseca della massa unitaria.* Ad un punto materiale di massa m_0 (in quiete e in assenza di forze) spetta in conformità l'energia intrinseca m_0c^2. Ora, da considerazioni di altra natura si è condotti ad attribuire a questa energia intrinseca un significato ben più profondo di quello di una semplice costante additiva di valore convenzionale; si pensa cioè che essa rappresenti della effettiva energia atomica e molecolare immagazzinata nel corpo, e precisamente, in quanto (n. 4) si identifichi c colla velocità della luce, nella misura di 25 milioni di Kilowatt-ora per ogni grammo di materia. La possibilità dell'esistenza di questa enorme quantità di energia latente ci è mostrata dai fenomeni radioattivi: basta pensare che una anche esigua massa di radio è capace di irradiare per anni e anni, senza sensibile modificazione, tanto calore da portare in ogni ora da 0° al punto di ebollizione una eguale massa di acqua. Soltanto in un tempo lunghissimo (oltre 2500 anni pel radio, e, per altri elementi radioattivi, comparabile con la durata delle epoche geologiche) la provvista di calore tenderebbe ad esaurirsi. Per quanto la radioattività non sia una proprietà generale dei corpi, essa rende manifesto che (almeno in certi casi) la materia racchiude un'enorme provvista di energia, e, sotto questa forma, la constatazione è generalizzabile ad ogni atomo di materia ponderabile.

Ammessa così la possibilità dell'esistenza di questa energia intrinseca, le considerazioni precedenti conducono ad attribuire ad essa il valore m_0c^2. Anzi, se si riprende l'espressione (9) dell'energia totale, e si suppone che il potenziale U sia zero, si trova, per l'energia totale (cinetica e intrinseca) localizzata in un corpo la cui massa allo stato di quiete è m_0, l'espressione

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

che si può anche scrivere, rammentando l'espressione della massa m in funzione della velocità,

$$E = mc^2. \tag{10}$$

Questa osservazione ci conduce a rilevare un legame di proporzionalità non solo tra la massa allo stato di quiete e l'energia intrinseca, ma, più in generale, tra la massa e l energia totale localizzata nel corpo, e ci suggerisce l'ipotesi che a qualsiasi forma di energia si debba attribuire una massa legata ad essa dalla relazione (10); e, viceversa, ogni massa m corrisponda a una quantità di energia mc^2. Tale ipotesi è suffragata anche da altre considerazioni, e conduce alla veduta, di alta importanza filosofica, che energia e materia si possono risguardare come manifestazioni diverse di una stessa entità, la quale ci appare come materia ordinaria quando sia, per così dire, abbastanza concentrata, mentre si avverte, nelle forme più svariate, come energia quando non ci sono nuclei di condensazione.

6. Forma einsteiniana del principio d'inerzia. Relatività ristretta. — Le equazioni del moto sotto l'originaria forma newtoniana (1) implicano, come ben si sa, moto uniforme per forza nulla o, ciò che è lo stesso (a meno di una inessenziale costante), per $U = 0$. La (2) che equivale rigorosamente alle (1), definisce dunque per $U = 0$ dei moti uniformi. Questa proprietà seguita a sussistere anche per la nuova forma einsteiniana (6) del principio di Hamilton, che pur non è rigorosamente equivalente alle (2). Prima di dimostrarlo facciamo osservare che, per $U=0$, la (5) porge

(11) $$ds^2 = c^2\,dt^2 - dl_0^2.$$

Con un semplice cambiamento nell'unità di misura del tempo (che fra poco riconosceremo opportuno), cioè ponendo $ct = y_0$, questa forma quadratica diviene

$$ds_0^2 = dy_0^2 - dl_0^2;$$

e, in particolare, riferendo lo spazio a coordinate cartesiane ortogonali,

$$ds_0^2 = dy_0^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2.$$

Essa è analoga alla tipica espressione del ds^2 di una V_4 euclidea in coordinate cartesiane ortogonali, eccetto per i segni dei coefficienti, che la rendono indefinita, e precisamente di indice d'inerzia *tre* [1]). Perciò la V_4 cui si attribuisce tale metrica si chiama *pseudoeuclidea*, e il sistema di coordinate y_0, y_1, y_2, y_3 che dà tale forma al ds^2, si dice *pseudocartesiano*.

Ci sarà comodo talora far rientrare l'espressione di un ds pseudoeuclideo nel tipo generale (5') per il che conviene introdurre i simboli

$$\delta'^k_i = \begin{cases} \ \ 1 \text{ per } i = k = 0, \\ -1 \text{ per } i = k \neq 0, \\ \ \ 0 \text{ per } i \neq k. \end{cases}$$

Potremo allora dire che in coordinate pseudocartesiane i coefficienti del ds^2 sono

$$g_{ik} = \delta'^k_i.$$

Si ha poi anche, come è facile verificare, per gli elementi reciproci g^{ik} delle g_{ik} (complementi algebrici divisi per il valore del determinante g delle stesse g_{ik}):

(12) $$g^{ik} = g_{ik} = \delta'^k_i.$$

Tornando ora alla proprietà enunciata in principio di questo paragrafo, notiamo che per $U=0$ l'espressione di L^* si riduce a

$$L_0{}^* = \sqrt{c^2 - \sum_1^3{}_i\, \dot y_i^2},$$

e la (6), che diviene

(6'₀) $$\delta \int ds_0 = 0,$$

può essere scritta

$$\delta \int L_0{}^*\, dt = 0.$$

1) Si chiama così il numero dei coefficienti negativi di una forma quadratica in una (qualunque) espressione canonica (cioè priva dei termini rettangolari).

Le corrispondenti equazioni lagrangiane, per il fatto che L_0^* non dipende esplicitamente dalle y, dànno subito i tre integrali primi

$$\frac{\partial L_0^*}{\partial \dot{y}_i} = cost \qquad (i = 1, 2, 3),$$

donde la costanza di tutte le $\dot{y}_i$ (principio d' inerzia).

Ciò posto, consideriamo una categoria particolare, ma molto importante, di trasformazioni (T_4), così specificate. Dalla quaderna (t, y_1, y_2, y_3) si passa ad una nuova quaderna $(\bar{t}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ per cui si conserva la forma (11) del ds_0^2: inteso questo nel senso che, in virtù delle formule di trasformazione, risulti identicamente

$$ds_0^2 = c^2\,dt^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i^2 = c^2\,d\bar{t}^2 - \sum_1^3{}_i\, d\bar{y}_i^2 .$$

La $(6'_0)$ ci assicura allora che, *anche nella nuova quaderna, interpretando* $\bar{t}$ *come tempo e* $\bar{y}_1\ \bar{y}_2,\ \bar{y}_3$ *come coordinate cartesiane, il moto apparirà uniforme* (relatività ristretta).

Trasformazioni siffatte furono effettivamente costruite da Lorentz, sicchè si possono chiamare lorentziane: le designeremo, brevemente, con (Λ), riservandoci di farne uno studio completo al § 8. Ammettendone intanto l' esistenza, si può subito desumerne una proprietà caratteristica, rilevata, per la prima volta, dal prof. Marcolongo [1]), è che, ponendo $\sqrt{-1}\,ct = y_4$, con che il ds_0^2 assume la forma euclidea $-\sum_1^4{}_i\, dy_i^2$, le trasformazioni di Lorentz lasciano invariata la forma $\sum_1^4{}_i\, dy_i^2$, sicchè (prescindendo qui ancora da un passaggio attraverso l' immaginario) sono sostanzialmente identiche ai movimenti di uno spazio euclideo a quattro dimensioni.

Chiudiamo la parentesi circa l'effettiva esistenza di queste speciali trasformazioni (Λ), e segnaliamo un importante corollario. Ogni (Λ) trasforma, come s' è detto, un generico moto

1) *Sugli integrali delle equazioni dell' elettrodinamica*, « Rend. Acc. Lincei », Ser. 5ª, Vol. XV, 1º semestre 1906, pp. 344-349. Cfr. altresì loc. cit., Cap. III.

uniforme in un nuovo moto pure uniforme; non si può tuttavia affermare che, per effetto della trasformazione, rimanga inalterata la velocità. Ma un caso almeno c' è, in cui questa circostanza si presenta, e concerne i movimenti che seguono colla velocità c (quella tale velocità costante, grandissima, che abbiamo originariamente introdotto per modificare in modo quantitativamente insensibile, ma teoricamente fecondo di conseguenze, la formula di Hamilton).

Infatti, per un moto che segua colla velocità c (rispetto ai parametri t, y_1, y_2, y_3), si ha evidentemente $v^2 = \frac{dl_0^2}{dt^2}$ e quindi

$$ds_0^2 = c^2\,dt^2 - dl_0^2 = 0 .$$

Attesa l' invarianza (non solo del ds_0^2, ma addirittura della speciale forma $c^2 dt^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i^2$, di esso), quando si passa alle nuove variabili sopralineate con una trasformazione di Lorentz, si ha, anche pel movimento trasformato,

$$c^2\,d\bar{t}^2 - \sum_1^3{}_i\, d\bar{y}_i^2 = 0 .$$

e quindi la velocità è c.

7. La cinematica dei sistemi rigidi. Impostazione ordinaria e possibili varianti. — Siamo stati condotti nei precedenti paragrafi a modificare (in condizioni ordinarie, lievissimamente) la dinamica di un punto materiale P, cioè la relazione fra moto e sollecitazione. Nulla invece è stato, nè deve essere, ulteriormente modificato nei riguardi cinematici, cioè per quanto concerne la descrizione del fenomeno del cambiamento di posizione di un punto P, rispetto ad un assegnato osservatore $\bar{\Sigma}$, cioè, schematicamente, rispetto ad un sistema cartesiano durante un certo intervallo di tempo. Indicheremo, per convenienza formale, che sarà presto manifesta, con $\bar{O}\ \bar{y}_1\ \bar{y}_2\ \bar{y}_3$ questi assi di riferimento, e con $\bar{t}$ il tempo.

Equazioni del moto di P

$$\bar{y}_i = \bar{y}_i\,(\bar{t}) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{13}$$

velocità **v** quale vettore di componenti $\frac{d\bar{y}_i}{dt}$ $(i = 1, 2, 3)$; accelerazione, ecc.; tutto si conserva come d'ordinario. In particolare si ha moto uniforme quando **v** è costante, cioè le $\bar{y}_i$ sono funzioni lineari di t. In tal caso, prendendo uno degli assi, per es. quello delle $\bar{y}_1$ parallelo a **v**, si può attribuire alle (13) la forma ridotta

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_1^0 + vt\,, \quad \bar{y}_2 = \bar{y}_2^0\,, \quad \bar{y}_3 = \bar{y}_3^0\,, \tag{14}$$

v designando manifestamente la velocità in senso scalare (componente di **v** secondo $\bar{y}_1$); e $\bar{y}_2^0$, $\bar{y}_3^0$ i valori iniziali delle coordinate $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$ del punto mobile.

Ciò premesso, ricordiamo in primo luogo come si definiscono nella cinematica ordinaria i moti rigidi e come se ne imposta lo studio.

Si possono notoriamente seguire due vie:

1) Si definisce come sistema rigido un sistema di quantisivogliono punti P, P', ... di coordinate $\bar{y}_i$, $\bar{y}_i'$, ... $(i = 1, 2, 3)$, i quali si muovono in guisa che tutte le mutue distanze rimangono inalterate; in modo cioè che, per due qualisivogliono punti del sistema, P e P', e per un qualsiasi loro movimento, si ha il vincolo

$$\sum_i^3{}_1 (\bar{y}_i - \bar{y}_i')^2 = d^2\,,$$

i secondi membri d^2 essendo costanti (caratteristiche geometriche del sistema mobile).

In questi vincoli e nelle loro conseguenze differenziali rimangono compendiate tutte le proprietà concernenti le posizioni simultanee, le velocità ecc. dei vari punti del sistema.

2) Si scinde, per così dire, in due parti il contenuto delle equazioni vincolari testè richiamate, esprimendo intanto la circostanza intrinseca, cioè indipendente dal riferimento $\bar{\Sigma}$, che il sistema mobile, cambiando di posizione rispetto a $\bar{\Sigma}$, conserva configurazione inalterata. Ciò si traduce nella possibilità di collegare ai punti P, P', ... un osservatore solidale Σ schematizzabile al solito in un triedro trirettangolo $O\,y_1\,y_2\,y_3$, rispetto a cui i singoli punti del sistema mobile serbano posizione invariata. Ciò è quanto dire che le loro coordinate y_i, y_i', ..., rispetto a questi assi solidali, non mutano col tempo.

Giunti a questo punto, si ragiona abitualmente come segue: Per individuare, rispetto all'originario riferimento $\bar{\Sigma}$, la posizione dell' intero sistema mobile in un generico istante, basta mettere a posto il triedro solidale $O\,y_1\,y_2\,y_3$ rispetto ad $\bar{O}\,\bar{y}_1\,\bar{y}_2\,\bar{y}_3$. *Ci si trova così ricondotti a formule di trasformazione* (variabili da istante a istante) *fra due sistemi di assi cartesiani ortogonali*, e quindi del tipo

$$\bar{y}_i = \sum_k^3{}_1 \alpha_{ik}\, y_k + \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{15}$$

α_{ik} designando il coseno (variabile col tempo, se il moto non è traslatorio) fra l'asse fisso $\bar{O}\,\bar{y}_i$ e l'asse mobile Oy_k e le $\varphi_i(t)$ funzioni del tempo (lineari se il moto si riduce ad una traslazione uniforme).

La proposizione sottolineata, o le equivalenti formule (15) costituiscono il complemento da associare alla rigidità, per così dire intrinseca (esistenza del triedro solidale), onde riavere la cinematica dei solidi nella sua forma classica.

Ma se si analizza un po' il complemento, si riconosce che si può alquanto modificare la concezione abituale del moto dei solidi senza rinunciare nè alla rigidità intrinseca, nè alla validità della geometria euclidea.

Basta introdurre l' ipotesi (indipendente dalla geometria e dalla cinematica del punto) che le misure di distanza (e quindi anche angolari) di punti P, P', ... del nostro solido possano essere diverse, secondochè vengono effettuate da un osservatore solidale con P, P', ...; oppure dall'osservatore fisso $\bar{\Sigma}$. Ove pur si ammetta questa diversità di apprezzamento dei due osservatori, va tenuto conto che si tratta, per ipotesi, di misure fatte da ciascuno di essi secondo una metrica euclidea e che occorre pur sempre rispecchiare (come nello schema classico) la rigidità del moto, anche nei riguardi dell'osservatore fisso $\bar{\Sigma}$. Ciò richiede che ogni mutua distanza dei punti P, P', ... del nostro sistema, anche apprezzata da $\bar{\Sigma}$, rimanga invariata nel tempo. All' uopo è necessario e basta che le formule di trasformazione fra le $\bar{y}$ e le y,

$$\bar{y}_i = f_i(y_1, y_2, y_3, t) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{16}$$

dove le f_i sono funzioni *a priori* incognite, siano tali da rendere, in ogni istante,

$$dl_0^2 = \sum_1^3{}_i \, dy_i^2 = \sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial f_i}{\partial y_3} dy_3\right)^2 \tag{17}$$

indipendente da t, qualunque siano i differenziali dy.

Un caso ovvio in cui questa condizione si trova verificata si ha supponendo che le formule di trasformazione siano lineari nelle y_i (non necessariamente rapporto a t) e precisamente della forma

$$\bar{y}_i = \sum_1^3{}_k c_{ik} y_k + \varphi_i(t) \tag{18}$$

colle c costanti, completamente arbitrarie, cioè sottoposte alla sola condizione qualitativa che non si annulli il loro determinante $\| c_{ik} \|$. Si rammenti che, nelle (15), i coefficienti a_{ik} erano addirittura coseni di direzione (eventualmente variabili col tempo) di due terne ortogonali.

Una trasformazione di tipo (18) tra le y e le $\bar{y}$ è, ad ogni istante (cioè per ogni assegnato valore di t), lineare, e quindi omografica, anzi affine, sicchè conserva le rette. Dal nostro punto di vista, ciò vuol dire che le curve le quali appariscono rette all'osservatore Σ, sono tali anche per l'osservatore $\bar{\Sigma}$, e inversamente.

Sarebbe assai facile dimostrare che, se si impone ad una trasformazione (16) la duplice condizione di rendere il dl_0^2, ossia il secondo membro della (17), indipendente da t, e inoltre di conservare le geodetiche, si è necessariamente ricondotti, se non proprio ad una affinità (18), al prodotto (nel senso operativo) di una tale affinità per un moto rigido nel senso ordinario della parola. Si può anzi, con scelta opportuna dei triedri di riferimento, immaginare il passaggio fra le y e le $\bar{y}$ realizzato per composizione delle due trasformazioni seguenti:

1) una affinità rappresentata nella sua forma canonica, cioè mediante equazioni del tipo

$$y_1' = k_1 y_1, \quad y_2' = k_2 y_2, \quad y_3' = k_3 y_3, \tag{19}$$

le k essendo costanti positive;

2) una trasformazione (15) fra le $\bar{y}$ e le y'.

Non ci indugeremo sulle considerazioni elementari con cui si perviene a tale conclusione, limitandoci a rilevare che i coefficienti k delle (19) caratterizzano la *deformazione* conseguente alla corrispondenza affine fra le y e le y', mentre nel secondo passaggio fra le y' e le $\bar{y}$ (che è un ordinario moto rigido) non c' è ulteriore deformazione.

Si ricava da ciò, badando alle (19), e riportandosi alla nostra impostazione, ossia facendo intervenire i due osservatori Σ e $\bar{\Sigma}$, che *un segmento avente la direzione dell'asse Oy_i, e, rispetto all'osservatore solidale Σ, la lunghezza l, apparirà all'osservatore $\bar{\Sigma}$ come dotato di lunghezza $l_i = k_i l$; perciò il fattore k_i si chiama coefficiente di allungamento. L'allungamento unitario risulta in conformità* $l_i - l/l$; e si ha allungamento, in senso letterale, cioè dilatazione, o contrazione, secondochè $l_i \gtrless l$. Naturalmente le formule (19) consentono di riconoscere, più generalmente, quale alterazione di lunghezza subiscono i segmenti (e quindi i vettori) aventi un' orientazione qualsiasi. Se α_i $(i = 1, 2, 3)$ sono, rispetto agli assi $O y_1 y_2 y_3$, i coseni direttori di un segmento generico e l la lunghezza quale apparisce all'osservatore Σ, si ricava ovviamente, per la lunghezza $\bar{l}$ apprezzata da $\bar{\Sigma}$,

$$\bar{l} = l \sqrt{k_1^2 \alpha_1^2 + k_2^2 \alpha_2^2 + k_3^2 \alpha_3^2}.$$

Tornando per un momento agli ordinari movimenti rigidi (15), fissiamo in particolare l'attenzione sul caso più elementare (che ci fornirà orientamento e raffronto nelle considerazioni del paragrafo seguente) in cui si tratta di semplice traslazione uniforme. Si può allora assumere il triedro di riferimento $\bar{O} \bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3$ con uno degli assi, sia per es. quello delle $\bar{y}_1$, parallelo alla direzione (per ipotesi) costante della velocità, e il triedro solidale $O\,y_1\,y_2\,y_3$ coincidente nell'istante iniziale $t = 0$ col triedro fisso.

Per il carattere traslatorio del moto gli assi solidali si mantengono sempre paralleli agli omologhi assi fissi; e, detta v la velocità di traslazione, le formule che definiscono il moto, si riducono manifestamente a

$$\bar{y}_1 = y_1 + vt, \qquad \bar{y}_2 = y_2, \qquad \bar{y}_3 = y_3. \tag{15'}$$

Si ritrovano così, per ciascun punto solidale (y_1, y_2, y_3 costanti), le equazioni tipiche (14).

8. Unità römeriane – Studio delle trasformazioni di Lorentz. — Le (15′), che definiscono, nella forma più semplice, una ordinaria traslazione uniforme, si possono manifestamente associare all' identità

$$\bar{t} = t.$$

Si ha con ciò una trasformazione quaternaria fra le y, t e le omologhe variabili sopralineate, che indicheremo complessivamente con T.

Osserveremo poi che la rappresentazione più generale di una traslazione uniforme, con scelta arbitraria dei due triedri fisso e solidale (sotto la sola condizione che le origini coincidano nell' istante iniziale), può, come tosto si riconosce, essere ricondotta alla T e a due rotazioni indipendenti da t. Infatti, designando con $\bar{\Sigma}$ e Σ i due triedri generici (fisso e solidale) cui intendiamo riferirci, indichiamo con R una rotazione rigida di Σ (attorno all'origine O) che ne porta l'asse Oy_1 in direzione parallela alla velocità di traslazione. Sia $\bar{R}'$ una rotazione analoga (attorno ad O) del triedro $\bar{\Sigma}$; e $\bar{R}$ la rotazione inversa. Le formule di trasformazione fra le y, t e le $\bar{y}$, $\bar{t}$ rimangono compendiate nel prodotto simbolico

$$\bar{R}\;T\;R.$$

Tutto ciò premesso, ricordiamo che una ben nota conseguenza cinematica della rappresentazione classica dei moti rigidi è che, se si considera una propagazione con velocità, rispetto a Σ, $c\mathbf{u}$ qualsiasi (c essendo il modulo e $\mathbf{u}$ il versore), questa diviene $c\mathbf{u} + \mathbf{v}$ rispetto a $\bar{\Sigma}$ (essendo $\mathbf{v}$ il vettore rappresentante la velocità di traslazione di Σ rispetto a $\bar{\Sigma}$). Ora questo, come si è accennato, è in contraddizione con l'esperienza, almeno per quanto riguarda la propagazione luminosa per cui c in cm/sec ha il particolare valore 3.10^{10}; *valore che si conserva inalterato,* anche di fronte a una traslazione uniforme (esperienza di Michelson). Volendo ristabilire l'accordo con l'esperienza, si è condotti a modificare le (15′) e con esse, se occorre, la $\bar{t} = t$, in modo da rendere rigorosamente verificata non già la relazione $d\bar{l}_0^2 = dl_0^2$, ma la $d\bar{s}_0^2 = ds_0^2$, cioè un' identità tra due forme quadratiche involgenti non solo le coordinate di spazio ma anche il tempo.

Trasformazioni speciali. — Noi ci proponiamo appunto di modificare le dette formule di trasformazione (al solito lievissimamente, almeno per valori piccoli di v) in modo da conseguire l' accennata invarianza del ds_0^2. Sarà opportuno a tale scopo introdurre, in luogo di t, talvolta la variabile

$$y_0 = ct\,,$$

e talvolta la variabile immaginaria

$$y_4 = ict \qquad (i = \sqrt{-1})\,.$$

Con ciò le (15′), e $\bar{t} = t$, ponendo anche $\dfrac{v}{c} = \beta$, divengono

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = y_1 + \beta y_0\,, \\ \bar{y}_2 = y_2\,, \\ \bar{y}_3 = y_3\,, \\ \bar{y}_0 = y_0\,, \end{cases} \tag{19}$$

ovvero

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = y_1 - i\beta y_4\,, \\ \bar{y}_2 = y_2\,, \\ \bar{y}_3 = y_3\,, \\ \bar{y}_4 = y_4\,. \end{cases} \tag{19'}$$

La variabile (reale) y_0 da noi introdotta non è che il tempo misurato assumendo come unità il tempo che impiega la luce a percorrere l'unità di spazio. Con ciò la velocità della luce assume il valore 1 e le dimensioni del tempo non differiscono da quelle di una lunghezza. Vien meno così il carattere di grandezza primitiva che abitualmente si attribuisce al tempo, la relativa unità rimanendo legata all'unità di lunghezza attraverso il fenomeno della propagazione della luce. Ci sarà comodo chiamare *römeriane* le misure di tempo definite in tal guisa [da O. RÖMER (1644-1710) che, in base alle occultazioni dei satelliti di Giove, scoprì e determinò per il primo la velocità della luce] e in conformità diremo *velocità römeriane* (puri numeri) quelle riferite al tempo römeriano y_0. Manifestamente dalla $y_0 = ct$ risulta che una velocità römeriana non è che la corrispondente velocità ordinaria divisa per c: in particolare, la $\beta = \frac{v}{c}$ testè introdotta non è che la velocità römeriana della traslazione.

Secondo la già citata osservazione del MARCOLONGO (§ 6) le trasformazioni che noi vogliamo trovare debbono lasciare invariante la forma quadratica differenziale ds_0^2, che potremo scrivere (introducendo la variabile immaginaria y_4):

$$-ds_0^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2.$$

Per procurarci delle particolari trasformazioni soddisfacenti questa condizione, prenderemo intanto in considerazione delle trasformazioni lineari ed omogenee. Con ciò si troverà senz'altro realizzata, come già abbiamo fatto notare nel precedente paragrafo, la condizione (17) che consente di interpretare la trasformazione come un movimento rigido (se non in senso ordinario, nell'accezione intrinseca allora specificata). Trattandosi di trasformazioni lineari (omogenee), l'invarianza della forma differenziale $-ds_0^2$ implica quella della forma quadratica algebrica,

$$-q = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2,$$

e reciprocamente.

Prendendo norma dalle (19'), cercheremo se ci riesce di raggiungere l'intento lasciando addirittura invariate le coordinate y_2, y_3, cioè assumendo

$$\bar{y}_2 = y_2, \quad \bar{y}_3 = y_3.$$

Con ciò siamo ridotti a ricercare una trasformazione lineare tra le variabili y_1, y_4 e $\bar{y}_1$, $\bar{y}_4$, tale da lasciare invariante l'espressione

$$y_1^2 + y_4^2.$$

Si tratterà dunque (prescindendo dall'intervento dell'immaginario) di una rotazione rigida (attorno all'origine delle coordinate) nel piano y_1, y_4, e quindi della forma

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= y_1 \cos\varphi - y_4 \sin\varphi,\\ \bar{y}_4 &= y_1 \sin\varphi + y_4 \cos\varphi.\end{aligned}$$

Se ora si fanno intervenire le variabili reali, y_0 e $\bar{y}_0$ in luogo di y_4, $\bar{y}_4$, si vede che, affinchè scompaia l'immaginario dalle formule definitive, è necessario e basta che nella prima equazione sia reale il coefficiente di y_1 e immaginario puro quello di y_4, e viceversa nella seconda. Per ottenere ciò, basta che φ sia immaginario puro: ponendo infatti

$$\varphi = i\psi \quad (\text{con } \psi \text{ reale}),$$

si ha

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \cos i\psi = \cosh\psi,\\ \sin\varphi &= \sin i\psi = i \sinh\psi,\end{aligned}$$

$\cosh\psi$, $\sinh\psi$ designando al solito coseno e seno iperbolico.

Così le nostre formole di trasformazione assumono l'aspetto

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned}\bar{y}_1 &= y_1 \cosh\psi + y_0 \sinh\psi,\\ \bar{y}_2 &= y_2,\\ \bar{y}_3 &= y_3,\\ \bar{y}_0 &= y_1 \sinh\psi + y_0 \cosh\psi.\end{aligned}\right.$$

Se si rammenta che nelle (19) il puro numero β è nei casi ordinari assai piccolo, si vede che, in tali casi, le (20) differiscono quantitativamente assai poco dalle (19), purchè si supponga $\psi = \beta$, abbastanza piccolo, per modo che $\cosh\psi$ si identifichi coll' unità, e $\sinh\psi$ con β.

Ma una precisa interpretazione cinematica del parametro ψ, da cui dipende la trasformazione (20), si ha fissando per esempio l'attenzione sull'origine O degli assi mobili, vogliamo dire sul punto di coordinate $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, per un valore generico di y_0, quest' ultimo parametro avendo il significato di tempo (römeriano), quale apparisce all'osservatore Σ. Per l'osservatore fisso $\bar{\Sigma}$, rispetto a cui $\bar{y}_0$ rappresenta il tempo (sempre römeriano), e y_1, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$ il posto, si ha, in corrispondenza a O, e ad un valore generico di y_0,

$$\bar{y}_1 = y_0 \sinh\psi, \quad \bar{y}_0 = y_0 \cosh\psi,$$

annullandosi $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$. Perciò il moto di O è rettilineo, e il rapporto

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_0} = \operatorname{tgh}\psi,$$

manifestamente costante, non è altro che la sua velocità (römeriana). Seguitando a designare questo rapporto con β, abbiamo in

$$\operatorname{tgh}\psi = \beta$$

il richiesto significato cinematico del parametro ψ. Del resto, più generalmente, la stessa β compete come velocità (römeriana) a qualsiasi altro punto P solidale con Σ. Infatti, se y_1, y_2, y_3 sono costanti e y_0 generico, le (20), differenziate, danno

$$d\bar{y}_1 = \sinh\psi \; dy_0, \qquad d\bar{y}_2 = d\bar{y}_3 = 0, \qquad d\bar{y}_0 = \cosh\psi \; dy_0,$$

da cui

$$\frac{d\bar{y}_1}{d\bar{y}_0} = \operatorname{tgh}\psi = \beta, \qquad c.\,d.\,d.$$

Rammentando le formule

$$\cosh = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2}}, \quad \sinh = \frac{\operatorname{tgh}}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2}}$$

potremo mettere le (20) sotto la forma comunemente usata (trasformazioni speciali di LORENTZ)

$$(20') \qquad \begin{cases} \bar{y}_1 = \dfrac{y_1 + \beta y_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \bar{y}_2 = y_2, \\ \bar{y}_3 = y_3, \\ \bar{y}_0 = \dfrac{y_0 + \beta y_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{cases}$$

od anche, facendovi apparire il tempo in misura ordinaria, anzichè römeriana (cioè $\bar{t}$ e t al posto di $\bar{y}_0 = c\bar{t}$, $y_0 = ct$):

$$(20'') \qquad \begin{cases} \bar{y}_1 = \dfrac{y_1 + vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ \bar{y}_2 = y_2, \\ \bar{y}_3 = y_3, \\ \bar{t} = \dfrac{t + \frac{v}{c^2}\, y_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{cases}$$

Per la realità di queste formule è necessario, come si vede, che sia $\beta^2 < 1$, cioè $|v| < c$: si manifesta così ancora una volta il carattere di velocità limite della velocità della luce c.

Le formule inverse delle (20′) o delle equivalenti (20″), cioè le formule risolute rispetto alle y_1, y_2, y_3 e y_0, ovvero t, differiscono, come immediatamente si verifica, dalle formule suddette soltanto per lo scambio di v in $-v$ (e quindi di β in $-\beta$), nonchè, si intende, delle due serie di variabili: precisamente come accade per le (15′) o (19) che si riferiscono ad una traslazione ordinaria. Qualora in particolare si supponga β^2, cioè $\frac{v^2}{c^2}$ (non addirittura β), trascurabile di fronte all' unità, le prime tre delle (20″) si riducono alle formule (15′) della traslazione ordinaria, mentre la quarta dà luogo ad una alterazione additiva del tempo fra l' uno e l' altro dei due osservatori Σ e $\bar{\Sigma}$, espressa da

$$\bar{t} = t + \frac{v}{c^2}\, y_1.$$

Il termine addizionale $\frac{v}{c^2}\, y_1$ dipende, come si vede, dal posto (al quale l'osservatore $\bar{\Sigma}$ deve applicare le sue misure temporali): per questa ragione $\bar{t}$ si chiama *tempo locale*. Esso fu associato dal LORENTZ alle ordinarie traslazioni uniformi (15'), nell'intento di rendere ragione *in prima approssimazione* (cioè trascurando β^2) del comportamento dei fenomeni elettro-magnetici nei corpi in moto; il che formalmente richiede che sia rispettata (nello stesso ordine di approssimazione) la relazione $d\bar{s}_0^2 = ds_0^2$. Più tardi lo stesso LORENTZ scoperse le (20''), che assicurano rigorosamente l'invarianza del ds_0^2. L'EINSTEIN le ritrovò sotto questo punto di vista, che è la traduzione matematica del suo principio di relatività nella forma più elementare.

Torniamo alle formule (20''). Esse contengono i risultati più noti (ad alcuno dei quali insigni relativisti si sono compiaciuti di attribuire aspetti paradossali) della cinematica relativistica. Anzitutto, la non invarianza di t accenna (come già si è rilevato in generale al § **3** a proposito d'ogni T_4) ad una rinuncia al concetto abituale di contemporaneità in senso assoluto. Infatti due avvenimenti istantanei, aventi luogo in due punti diversi dello spazio, possono corrispondere allo stesso valore di t, ma non di $\bar{t}$ (basta per ciò che abbiano differente la y_1), e quindi possono essere contemporanei per un osservatore che si riferisca al sistema Σ, e non esserlo per uno che si riferisca a $\bar{\Sigma}$. Il tempo cessa quindi di essere una quantità assoluta per divenire relativo al sistema di riferimento e legato alle coordinate spaziali (*tempo locale* secondo la locuzione che, come si è ricordato, fu introdotta dal LORENTZ nelle sue ricerche sull'elettrodinamica dei corpi in movimento).

Supponiamo che due avvenimenti abbiano luogo nello stesso punto P del corpo (e quindi con le stesse y_1, y_2, y_3), ma non allo stesso istante), sibbene ad un intervallo di tempo $\Delta\bar{t}$ (misurato nel sistema Σ): per l'osservatore $\bar{\Sigma}$ l'intervallo sarà Δt e la relazione fra i due si ottiene subito dalla quarta delle (20''), badando che y_1 è costante, con che risulta

$$\Delta\bar{t} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Dunque, per l'osservatore che accompagna il punto P dove si verificano i due fenomeni, l'intervallo di tempo Δt è più breve che non per l'osservatore *fisso* $\bar{\Sigma}$; si ha cioè, rispetto alla misura di quest'ultimo, un *rallentamento del tempo*, come se l'unità di misura divenisse $1 : \sqrt{1-\beta^2}$ di quella adoperata da $\bar{\Sigma}$.

Similmente, due avvenimenti, che succedono per Σ in un medesimo posto (cioè colle stesse $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$) con un ritardo Δt dell'uno sull'altro, appariscono con maggiore ritardo a Σ. L'analogo comportamento risulta senz'altro dalla circostanza, già esplicitamente rilevata, che le formule inverse delle (20'), (20'') si ottengono materialmente con scambio di v in $-v$ e quindi di β in $-\beta$.

Cerchiamo ora di renderci conto delle eventuali diversità di apprezzamenti nelle misure di lunghezza, fatte dai due osservatori Σ e $\bar{\Sigma}$, ciascuno in un istante ben determinato del proprio tempo. Volendo per es. riportare all'osservatore $\bar{\Sigma}$ misure effettuate da Σ, conviene dapprima, nelle prime tre formole di trasformazione (20'') far apparire $\bar{t}$ al posto di t, valendosi della quarta formola. Si ha così

$$\bar{y}_1 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\; y_1 + v\bar{t}\,,$$
$$\bar{y}_2 = y_2\,,$$
$$\bar{y}_3 = y_3\,,$$

che si può risguardare come risultante dal prodotto dell'affinità

$$(21) \qquad y_1' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\; y_1\,, \qquad y_2' = y_2\,, \qquad y_3' = y_3$$

per l'ordinaria traslazione

$$\bar{y}_1 = y_1' + v\bar{t} \qquad \bar{y}_2 = y_2' \qquad \bar{y}_3 = y_3'\,.$$

Sotto questa forma è senz'altro manifesta l'alterazione delle lunghezze. Basta riportarsi alle conclusioni del precedente paragrafo notando che gli allungamenti k_1, k_2, k_3 delle formule (19) sono qui rappresentati da $\sqrt{1-\beta^2}$, 1, 1. *Perciò l'osservatore* *fisso, apprezzando distanze* (in un generico istante $\bar{t}$), *avverte* (in confronto dell'osservatore solidale il quale pure apprezzi le stesse distanze in un istante qualsiasi del proprio tempo) *contrazione, nel rapporto di* $\sqrt{1-\beta^2}$ *a* 1, *per i segmenti longitudinali, cioè aventi la direzione del moto, mentre non c'è divario per i segmenti trasversali, cioè perpendicolari alla velocità di traslazione.*

Le formule inverse, con cui si passa da $\bar{\Sigma}$ a Σ, differiscono, ripetiamolo ancora una volta, soltanto per lo scambio di v in $-v$. Valgono perciò le stesse regole, ossia, per es., anche all'osservatore mobile i segmenti fissi aventi la direzione del moto appariscono contratti nel rapporto di $\sqrt{1-\beta^2}$ a 1 in confronto della misura che ne fa l'osservatore $\bar{\Sigma}$; ecc.

Trasformazioni generali. — Vogliamo infine mostrare che, analogamente a quanto fu rilevato per le traslazioni della cinematica classica, la più generale trasformazione di LORENTZ (Λ) (cioè trasformazione lineare tra le due quaterne y_i, $\bar{y}_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) per cui rimane invariante la quadrica q) si può rappresentare sotto la forma

$$\bar{R}\,\zeta\,R$$

dove R ed $\bar{R}$ sono ordinarie trasformazioni ortogonali (rotazioni) delle terne y_1, y_2, y_3, e $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$, rispettivamente, e ζ è una trasformazione speciale di LORENTZ del tipo testè studiato.

La trasformazione (Λ) sarà una trasformazione ortogonale (quaternaria) del tipo

$$\bar{y}_h = \sum_{1}^{4}{}_k\, a_{hk}\, y_k$$

i cui coefficienti a_{hk} costituiscono una matrice ortogonale, tale cioè che si abbia (col solito significato del simbolo δ_h^j)

$$\sum_{1}^{4}{}_k\, a_{hk}\, a_{jk} = \delta_h^j \tag{23}$$

e

$$\sum_{1}^{4}{}_k\, a_{kh}\, a_{kj} = \delta_h^j \qquad (h,\, j = 1,\, 2,\, 3,\, 4). \tag{23'}$$

Affinchè poi risultino reali le variabili $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$, $\bar{y}_0$ insieme alle y_1, y_2, y_3, y_0, dovranno evidentemente essere reali le a_{hk} ($h, k < 4$), immaginarie pure le a_{h4}, a_{4h} ($h < 4$) e reale la a_{44}.

Naturalmente, interpreteremo y_1, y_2, y_3, come coordinate cartesiane rispetto a un triedro K solidale con Σ, e y_0 come variabile temporale: similmente per le $\bar{y}$.

I triedri K e $\bar{K}$ sono *a priori* orientati arbitrariamente: vediamo ora di determinare una rotazione R per K e una $\bar{R}$ per $\bar{K}$ tali da avere

$$\Lambda = \bar{R}\,\zeta\,R\,.$$

A tal uopo consideriamo, con referenza a $\bar{K}$, il vettore di componenti a_{14}, a_{24}, a_{34}, e indichiamo con $\bar{\mathbf{i}}$ il relativo versore. Se noi ruotiamo il triedro K in modo che il suo asse $\bar{y}_1$ venga ad avere la direzione di $\bar{\mathbf{i}}$, avremo

$$a_{24} = a_{34} = 0:$$

assumiamo questa come rotazione $\bar{R}$.

Ora dalla identità (23) e da quelle testè scritte risulta

$$\sum_{1}^{3}{}_k\, a_{2k}^2 = \sum_{1}^{3}{}_k\, a_{3k}^2 = 1\,,$$

$$\sum_{1}^{3}{}_k\, a_{2k}\, a_{3k} = 0\,,$$

sicchè i due vettori individuati (rispetto a K) dalle componenti a_{2k}, a_{3k} ($l = 1, 2, 3$) sono unitari e ortogonali. Li chiameremo $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, e assumeremo come rotazione R quella che porta il triedro K ad avere gli assi y_2, y_3 coincidenti in direzione con i vettori $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, talchè venga ad essere

$$a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0\,.$$

In seguito alle due rotazioni R e $\bar{R}$ la matrice delle a viene quindi ad assumere uno schema del tipo

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix}$$

e, per le proprietà gruppali delle sostituzioni ortogonali, questa matrice dovrà ancora corrispondere ad una tale sostituzione (poichè essa risulta dal prodotto della primitiva per due rotazioni). Ciò porta di conseguenza l'annullarsi di altri quattro elementi della matrice stessa: infatti, dall'ortogonalità della prima con la seconda e la terza linea risulta rispettivamente

$$a_{12} = a_{13} = 0,$$

e similmente dall'ortogonalità della quarta con la seconda e la terza,

$$a_{42} = a_{43} = 0.$$

Si ha dunque in definitiva la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{Vmatrix}$$

la quale corrisponde ad una trasformazione del tipo (20), cioè ad una trasformazione speciale di LORENTZ ζ. È così dimostrato, che, premesse le due rotazioni R (sulla terna K) ed $\overline{R}$ (sulla $\overline{K}$), la trasformazione generale (Λ) si riduce ad una speciale ζ.

Finora abbiamo considerato le sole trasformazioni lineari: resterebbe ora da indagare se non sia da attendersi una maggiore generalità sopprimendo tale restrizione. Ci limiteremo a questo proposito a rilevare che le sole trasformazioni che, oltre a rispettare l'invarianza del ds_0^2, fanno corrispondere a valori finiti delle y valori finiti delle $\overline{y}$, e viceversa, sono le trasformazioni lineari da noi studiate [1]).

9. MOTI RELATIVI – COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ – GIUSTIFICAZIONE CINEMATICA DI UNA FORMULA DI FRESNEL. — Per collegare tra di loro i diversi aspetti di un medesimo movimento

[1]) Per la dimostrazione, cfr. C. MUNARI, *Sopra una espressiva interpretazione cinematica del principio di Relatività*, « Rend. Acc. Lincei », Vol. 23 (1° semestre 1914), p. 781.

— diciamo specificamente del movimento di un assegnato punto P — con referenza a due diversi osservatori Σ e $\overline{\Sigma}$, basta in sostanza ricorrere alle formule di trasformazione fra le corrispondenti coordinate. Ciò vale sia nella cinematica ordinaria, sia in quella relativistica, colla sola avvertenza che in quest' ultima, fra le coordinate sottoposte a trasformazione compare anche il tempo y_0.

Consideriamo in particolare una traslazione lorentziana, la quale, come abbiamo visto nel precedente paragrafo, previa scelta opportuna dei due triedri che schematizzano gli osservatori e che si seguitano a designare con Σ e $\overline{\Sigma}$, è definita dalle formule (20').

Ciò premesso, supporre assegnato il moto — che si potrà dire *relativo* — del punto P rapporto a Σ vuol dire formalmente conoscere le espressioni $y_i(y_0)$ $(i = 1, 2, 3)$ delle sue tre coordinate spaziali, in funzione di y_0 (tempo römeriano). Per ricavare la rappresentazione del moto assoluto, cioè con referenza a $\overline{\Sigma}$, basta manifestamente procurarsi le espressioni delle coordinate $\overline{y}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ del punto P in funzione della nuova variabile temporale $\overline{y}_0$; e a ciò provvedono senz'altro le formule di trasformazione (20'). In verità, quando vi si introducono per le y_i le espressioni $y_i(y_0)$, che loro competono per il punto mobile P, tutte le $\overline{y}$ divengono funzioni conosciute di y_0, e basta immaginare questo parametro ricavato dalla quarta equazione

$$\overline{y}_0 = \frac{y_0 + \beta y_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(in cui y_1 è, per ipotesi, funzione conosciuta di y_0) e sostituito nelle prime tre, per avere in forma esplicita le equazioni del moto assoluto.

Sopra tutto interessante è la relazione che ne segue per le due velocità assoluta e relativa. Non si ha più la regola (vettoriale) velocità assoluta = velocità relativa + velocità di trascinamento (la quale ultima, nel caso delle traslazioni, si riduce naturalmente alla velocità di traslazione, qualunque sia la posizione istantanea di P). La composizione (relativistica) delle velocità è un po' più complicata. Per rendersene conto nel caso più espressivo, consideriamo un moto (relativo) che avvenga parallelamente alla traslazione $\mathbf{v}$. In tale ipotesi le coordinate y_2, y_3 del punto P sono costanti, e lo stesso accade, a norma delle (20′), per $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$ ossia, anche rispetto a $\bar{\Sigma}$, il moto segue nel senso della traslazione. Si ha poi, differenziando la prima e la quarta delle (20′),

$$d\bar{y}_1 = \frac{dy_1 + \beta\, dy_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$d\bar{y}_0 = \frac{dy_0 + \beta\, dy_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ove si ponga per brevità

$$\beta_a = \frac{d\bar{y}_1}{d\bar{y}_0}, \qquad \beta_r = \frac{dy_1}{dy_0},$$

con che β_a e β_r rappresentano manifestamente le velocità (in senso scalare e römeriano) del punto P rispetto a $\bar{\Sigma}$ e a Σ (velocità assoluta e velocità relativa), le formule precedenti, dividendone la prima per la seconda, danno

(24) $$\beta_a = \frac{\beta_r + \beta}{1 + \beta\beta_r},$$

che è la così detta legge einsteiniana di composizione delle velocità. Moltiplicando per c e ricordando che $y_0 = ct$, $\bar{y}_0 = c\bar{t}$, si può manifestamente far apparire, in luogo delle velocità römeriane $\beta_a = \dfrac{d\bar{y}_1}{d\bar{y}_0}$, $\beta_r = \dfrac{dy_1}{dy_0}$, le corrispondenti velocità ordinarie $v_a = \dfrac{d\bar{y}_1}{d\bar{t}}$, $v_r = \dfrac{dy_1}{dt}$, nonchè v, e scrivere

(24′) $$v_a = \frac{v_r + v}{1 + \beta\beta_r}.$$

Se tanto la velocità v_r di P (rispetto a Σ) quanto la velocità di traslazione v sono piccole di fronte a c, il denominatore differisce dall'unità per un termine del secondo ordine, trascurando il quale si è ricondotti (come ben prevedibile, dato il criterio da noi seguito) alla relazione fondamentale della cinematica ordinaria, che può ben dirsi galileiana,

$$v_a = v_r + v.$$

In generale la (24) mostra che, per $|\beta|$ e $|\beta_r|$ minori dell'unità, anche $|\beta_a| < 1$; mentre, per $|\beta|$ o $|\beta_r|$ eguali all'unità, tale risulta anche $|\beta_a|$. Per constatarlo basta osservare che, ogni qualvolta

$$|\beta| < 1 \text{ e } |\beta_r| < 1,$$

$$(1 + \beta\beta_r)^2 - (\beta + \beta_r)^2 = (1-\beta^2)(1-\beta_r^2)$$

è sempre positivo, talchè

$$\beta_a^2 = \left(\frac{\beta + \beta_r}{1 + \beta\beta_r}\right)^2 < 1;$$

mentre per $|\beta| = 1$, ovvero $|\beta_r| = 1$, risulta appunto $\beta_a^2 = 1$, *c. d. d.*

Si ritrova ancora una volta il carattere limite della velocità c della luce: per quanto sia v prossima ad essa, purchè inferiore ($\beta_r < 1$), anche componendola con un'altra velocità di traslazione v, minore di c, ma prossima quanto si vuole a c ($|\beta| < 1$), non si riesce mai a raggiungere c, ossia risulta sempre $|\beta_a| < 1$. Viceversa la velocità c per Σ resta sempre c per ogni $\bar{\Sigma}$, qualunque sia la velocità di traslazione (lorentziana), con cui si muovono i due osservatori uno rispetto all'altro.

Nell'ambito delle velocità dei corpi ponderabili (piccole di fronte a c), la (24′) si riduce sensibilmente, come si è detto, alla formula galileiana $v_a = v_r + v$; ma quando il fenomeno di moto preso in considerazione sia una propagazione luminosa in un mezzo trasparente, con che la velocità assume ordine di grandezza comparabile a quello di c, allora il divario fra la cinematica einsteiniana e quella galileiana diviene rilevante, e si presta a controllo sperimentale.

Effettivamente l'EINSTEIN ha potuto trarne un magnifico argomento in appoggio della veduta relativistica deducendo razionalmente [1]) (per via puramente cinematica) dalla (24′) una formula di FRESNEL concernente il parziale trascinamento delle onde luminose da parte dei mezzi trasparenti in moto traslatorio: formula che ebbe piena conferma in esperienze eseguite per la prima volta dal FIZEAU (1851) e ripetute con mezzi più progrediti da MICHELSON e MORLEY e da ZEEMAN.

Ecco schematicamente di che si tratta. In un mezzo di indice di rifrazione n la luce si propaga, come è noto, con velocità $\frac{c}{n}$, se il mezzo è in quiete. Supponiamolo invece animato da velocità v nel senso della propagazione della luce (o nel senso opposto): la cinematica ordinaria farebbe prevedere che la velocità di propagazione (rispetto all'osservatore) divenisse $\frac{c}{n} \pm v$: invece il FIZEAU e gli altri, ricorrendo a delicate esperienze interferenziali, trovarono che le cose vanno come se la velocità v non si aggiungesse (o sottraesse) alla c/n per intero, ma moltiplicata per il coefficiente (< 1) $1 - \frac{1}{n^2}$, detto *coefficiente di trascinamento*: la velocità di propagazione risulta dunque

$$\frac{c}{n} \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \tag{25}$$

Le (25) non sono manifestamente d'accordo colla cinematica galileiana. Ma s'accordano egregiamente colla einsteiniana. Infatti, consideriamo, per fissare le idee, il caso in cui il moto del mezzo avviene nel senso della propagazione della luce. Nella (25) va allora preso il segno $+$. D'altra parte vale la (24′) in cui si ponga, per v_r, $\frac{c}{n}$ e quindi, per β_r, $\frac{1}{n}$. Con ciò la (24′) dà

$$v_a = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \beta \frac{1}{n}},$$

[1]) Anche prima di EINSTEIN, il LORENTZ aveva data una giustificazione teorica della formula di FRESNEL, basata sulla sua celebre teoria elettronica dei fenomeni elettromagnetici nei corpi in movimento. La spiegazione einsteiniana ha manifestamente un carattere più seducente.

ossia, a meno di termini di secondo ordine $\left(\text{nel rapporto } \beta = \frac{v}{c}\right)$,

$$v_a = \left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 - \frac{\beta}{n}\right) = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v - \frac{v\beta}{n}.$$

L'ultimo termine è ancora del secondo ordine rispetto al primo, sicchè rimane appunto la formula di FRESNEL

$$v_a = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v.$$

10. ULTERIORE GENERALIZZAZIONE DELLA METRICA DI V_4, CHE COINCIDE, IN PRIMA APPROSSIMAZIONE, CON LA DINAMICA ORDINARIA. — Vogliamo ora vedere se non sia possibile attribuire alla V_4 altre metriche leggermente diverse da quella caratterizzata dalla (5), ma tali sempre che il principio dinamico ad esse subordinato equivalga ancora, in prima approssimazione, al principio di HAMILTON.

Riprendiamo a tal uopo la forma generale (5′) del ds^2, e osserviamo in primo luogo che la forma particolare (5) considerata al § **4** rientra in quella, ove si identifichino la coordinata temporale x_0 con ct, le coordinate spaziali x_1, x_2, x_3 con le coordinate cartesiane y_1, y_2, y_3, e si ponga

$$g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2}, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ik} = -\delta_i^k \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{26}$$

Se ora vogliamo prendere in considerazione una metrica i cui coefficienti g differiscano poco dai valori (26), porremo

$$g_{00} = 1 - 2\varphi, \qquad g_{0i} = -\gamma_i, \qquad g_{ik} = -\delta_i^k - \gamma_{ik}, \tag{26′}$$

dove

$$\varphi = \frac{U}{c^2} + \psi$$

coll'intesa che le quantità γ (le quali dimensionalmente sono numeri puri) siano del 2° ordine (al pari di $\frac{U}{c^2}$) o d'ordine superiore, rispetto a v/c, mentre ψ, anch'esso delle dimensioni di un numero, si risguarderà di 3° ordine almeno.

Con ciò, riprendendo le variabili y che stanno a designare coordinate poco diverse dalle cartesiane, il ds^2 si scrive

$$ds^2 = (1 - 2\varphi)\, dy_0^2 - 2dy_0 \sum_{i=1}^{3} \gamma_i\, dy_i - \tag{27}$$

$$- \sum_{ik=1}^{3} (\delta_i^k + \gamma_{ik})\, dy_i\, dy_k\,.$$

Se conveniamo di indicare con un apice la derivazione rispetto ad y_0, e poniamo

$$\left\{\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{v^2}{c^2} = \sum_{i=1}^{3} y_i'^2\,, \\ T_1 &= \sum_{i=1}^{3} \gamma_i\, y_i'\,, \\ T_2 &= \frac{1}{2} \sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik}\, y_i'\, y_k', \end{aligned}\right. \tag{28}$$

avremo

$$\frac{ds^2}{dy_0{}^2} = 1 - 2\varphi - 2T_1 - 2T_2 - \beta^2\,.$$

Va notato che, per essere le $y_i' = \frac{1}{c}\frac{dy_i}{dt}$ del 1° ordine, T_1 risulta del 3°, e T_2 del 4° ordine almeno. Introduciamo per brevità di scrittura, il quadrinomio

$$\Gamma = \varphi + T_1 + T_2 + \frac{1}{2}\beta^2,$$

osservando che esso si compone di termini del 2° ordine, che si possono scrivere $\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right)$, più termini di ordine superiore. Avremo allora

$$\frac{ds^2}{dy_0{}^2} = 1 - 2\Gamma$$

e potremo estrarre la radice quadrata, trascurando le potenze di Γ superiori alla 2ª (cioè termini di ordine superiore al 4°). Otterremo, in questa approssimazione,

$$\frac{ds}{dy_0} = 1 - \Gamma - \frac{1}{2}\Gamma^2,$$

cioè, riscrivendo cdt per dy_0, e moltiplicando per c^2dt,

$$cds = c^2dt - c^2dt\left(\Gamma + \frac{1}{2}\Gamma^2\right).$$

Sostituendo nell'equazione variazionale della dinamica

$$\delta\int cds = 0$$

questa espressione, e rammentando che δt si annulla agli estremi dell'intervallo, si vede che quell'equazione si riduce a

$$\delta\int c^2\left(\Gamma + \frac{1}{2}\Gamma^2\right) dt = 0$$

e che quindi la corrispondente funzione lagrangiana è

$$L = c^2\left(\Gamma + \frac{1}{2}\Gamma^2\right),$$

ovvero, sviluppando e trascurando i termini di ordine superiore al 4° (nel senso precisato dianzi, cioè a prescindere dal fattore c^2),

$$L = \frac{1}{2}v^2 + U + c^2\,T_1 + c^2\,T_2 + c^2\,\psi + \tag{29}$$

$$+ \frac{c^2}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}v^2 - U}{c^2}\right)^2 + \frac{v^2 U}{c^2}\,.$$

I primi due addendi di questa espressione (ridotti a dimensione zero, cioè divisi per c^2) sono del 2° ordine; essi costituiscono la funzione lagrangiana della meccanica classica, dalla quale abbiamo preso le mosse.

Gli addendi successivi (analogamente ridotti a dimensione zero) sono di ordine superiore: quindi daranno luogo a piccoli termini correttivi nelle equazioni del movimento. La metrica (27) che abbiamo assunta ci dà dunque ancora, in prima approssimazione, per le sue geodetiche, le stesse leggi che si deducono dal classico principio di HAMILTON. Essa contiene (oltre al potenziale U) le *dieci* funzioni ψ, γ_i, γ_{ik} piccole (come fu convenuto e ripetutamente invocato nelle successive trasformazioni), ma *a priori* arbitrarie delle quattro variabili y (posto e tempo). Vedremo più innanzi come, in base alla legge di gravitazione universale e ad un criterio tensoriale, si sia condotti a determinare le suddette dieci funzioni (da altrettante equazioni differenziali), riuscendo con ciò a render conto di alcuni lievissimi divari che si sono rilevati tra le previsioni della meccanica newtoniana e il moto effettivo dei corpi celesti. Tale più raffinata corrispondenza fra teoria e osservazioni giustifica fisicamente la nuova impostazione dell'EINSTEIN, la quale d'altra parte realizza incontestabilmente un enorme progresso speculativo per il suo carattere invariante di fronte a tutte le trasformazioni delle coordinate, non solo di spazio, ma anche di tempo.

11. CASO PARTICOLARE NOTEVOLE – CORRISPONDENTI TRAIETTORIE E LORO IDENTITÀ CON QUELLE SPETTANTI AD UN ORDINARIO PROBLEMA DI MECCANICA. — Applichiamo ora l'espressione (29) di L a un caso speciale (di cui vedremo l'interesse al § **8** del Cap. II). E precisamente supponiamo che si abbia (esattamente, o a meno di termini d'ordine superiore al terzo e al quarto rispettivamente)

$$T_1 = 0\,,$$
$$T_2 = \frac{1}{2}\chi\frac{v^2}{c^2}\,,$$

essendo χ una funzione delle y, del 2° ordine almeno. Inoltre, ammettiamo che, come U, anche ψ e χ non dipendano esplicitamente dal tempo. Vedremo in seguito un esempio caratteristico in cui si verifica tale circostanza.

Ciò posto, la (29) si può scrivere

$$(30)\qquad L = \frac{1}{2}v^2\left(1+\frac{2U}{c^2}+\chi\right)+U+c^2\psi+\frac{c^2}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}v^2-U}{c^2}\right)^2.$$

Si noti ora che, nell'ultimo termine, $\left(\frac{\frac{1}{2}v^2-U}{c^2}\right)^2$ è di 4° ordine, mentre la parte principale di L è di 2° ordine: quindi è lecito, nel detto ultimo termine, valutare $\frac{\frac{1}{2}v^2-U}{c^2}$ soltanto in prima approssimazione. Ma sappiamo che in prima approssimazione vale la meccanica classica, e quindi sussiste l'integrale della forza viva sotto la forma

$$\frac{1}{2}v^2 - U = E_0 = \text{cost}\,;$$

dunque l'ultimo addendo della (30) si può sostituire con la costante $\frac{1}{2}E_0/c^2$, ovvero anche sopprimere, inquantochè una costante non porta contributo all'equazione variazionale.

I rimanenti termini della L si possono separare in due gruppi, secondo che dipendono o no dalla velocità, ponendo

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}v^2\left(1+\frac{2U}{c^2}+\chi\right),$$
$$\mathbf{U} = U + c^2\psi\,,$$

e quindi scrivendo

$$L = \mathbf{T} + \mathbf{U}\,.$$

Questa forma della funzione lagrangiana corrisponde esattamente a quella che si ha nella meccanica classica (per un sistema con tre gradi di libertà, se non proprio per un punto materiale) qualora si assimili $\mathbf{T}$ alla forza viva ed $\mathbf{U}$ al potenziale, ed è noto [1]) che, qualora (come in questo caso) **T** sia una forma quadratica nelle $\dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt}$ non contenente esplicitamente t, ed **U** sia una funzione delle sole coordinate lagrangiane y, l'equazione

$$\delta \int (\mathbf{T} + \mathbf{U})\, dt = 0$$

ammette l'integrale (delle forze vive)

$$\mathbf{T} - \mathbf{U} = E$$

dove E è una costante (energia totale), e le traiettorie corrispondenti a un dato valore di E si identificano con le geodetiche di una varietà il cui quadrato dell'elemento lineare sia definito da

$$ds^2 = 2\,(\mathbf{U} + E)\,\mathbf{T}\,dt^2$$

(principio dell'azione stazionaria). Applicando tutto ciò al caso nostro avremo l'integrale delle forze vive sotto la forma

$$\frac{1}{2}\,v^2 \left(1 + \frac{2\,U}{c^2} + \chi\right) - (U + c^2 \psi) = E$$

e per ogni prefissato valore di E, potremo affermare che le traiettorie coincidono con le geodetiche della varietà metrica

$$ds_1^2 = 2\,(U + c^2 \psi + E) \left(1 + \frac{2\,U}{c^2} + \chi\right) dl_0^2$$

dove

$$dl_0^2 = \sum_1^3{}_i\, dy_i^2\,,$$

[1]) Cfr. p. es. Levi-Civita e Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale*, Bologna, Zanichelli, vol. II (Parte seconda), cap. XI, n^i 19 e 16; oppure Whittaker, *Analytical Dynamics*, 2ª edizione (Cambridge University Press), cap. IX.

ovvero anche con le traiettorie del moto, nello spazio ordinario, di un punto materiale con energia totale nulla, e sottoposto a forze derivanti dal potenziale:

$$U^* = (U + c^2 \psi + E) \left(1 + \frac{2U}{c^2} + \chi\right) \tag{31}$$

che si può anche scrivere (trascurando il termine costante E e termini di ordine superiore)

$$U_1 = U + c^2 \psi + \frac{2\,U^2}{c^2} + U\chi + E\left(\frac{2\,U}{c^2} + \chi\right), \tag{31'}$$

la corrispondente energia totale essendo allora E.

12. Comportamento qualitativo delle metriche relativistiche – Principio geodetico per la dinamica del punto materiale – Elementi lineari stazionari e, in particolare, statici. — Per quanto si è accennato alla fine del § **10**, la metrica della varietà spazio-tempo V_4 nell'intorno di un punto generico deve ritenersi nei casi concreti legata ai fenomeni fisici che si svolgono nello spazio e nel tempo soprattutto nelle vicinanze del punto e dell'istante che si considera (nel senso che sarà debitamente specificato nel capitolo seguente). Tuttavia, nei casi ordinari, come si è visto, si deve restare molto prossimi ad una metrica pseudo-euclidea. Questa circostanza induce a ritenere che nella realtà fisica la metrica di V_4 goda delle stesse proprietà qualitative che competono alle metriche pseudo-euclidee. In particolare, l'indice d'inerzia deve essere 3, il che implica (come si potrebbe verificare) che in ogni quaterna di direzioni ortogonali spiccate da un punto generico, tre hanno carattere spaziale ($ds^2 < 0$) e una ha carattere temporale ($ds^2 > 0$).

Per metrica relativistica intenderemo d'ora innanzi una metrica indefinita soggetta a queste restrizioni qualitative.

Nelle V_4 a metrica definita non c'è luogo ad alcuna distinzione qualitativa tra le linee, mentre nelle V_4 relativistiche, come abbiamo già osservato, si hanno in ogni punto tre specie di direzioni secondo che il ds^2 è < 0 o > 0 o $= 0$, e corrispondentemente si distinguono linee *spaziali*, linee *temporali* e linee *di lunghezza nulla*. Naturalmente molto più complessa è la classificazione delle varietà a 2 o a 3 dimensioni immerse in una V_4 a metrica indefinita; e la stessa scelta delle variabili di riferimento (che, geometricamente, equivale a quella delle ipersuperficie coordinate) richiederebbe, in generale, che fosse preliminarmente approfondito il comportamento locale sotto questo punto di vista.

Noi eviteremo ogni discussione del genere, limitando alquanto l'arbitrarietà di scelta delle coordinate, col prendere norma da quanto accade nei ds^2 pseudoeuclidei riferiti al tempo ordinario t (o a una sua funzione lineare y_0) e a tre coordinate di spazio, del resto qualsivogliono, x_1, x_2, x_3. Le quattro linee coordinate risultano allora l'una (y_0) di natura temporale, le altre spaziali; inoltre sopra ogni ipersuperficie $y_0 = \text{cost}$ si ha

$$(ds^2)_{y_0=\text{cost}} = -dl^2,$$

risultando dl^2 una quadrica differenziale definita positiva, sicchè si può dire che sopra ogni sezione temporale del cronotopo vale una metrica puramente spaziale, come quelle della ordinaria geometria. Noi supporremo costantemente di riferire la V_4 relativistica a coordinate x_0, x_1, x_2, x_3, per le quali si mantiene questo comportamento qualitativo.

Tutto ciò premesso, si ammette con l'EINSTEIN come legge fondamentale della dinamica del punto materiale in circostanze fisiche ben determinate, cioè (ripetiamolo) per un assegnato ds^2, il seguente *principio geodetico*, che deriva per ovvia induzione dai vari casi particolari dei §§ **4** e **10.** Le linee orarie di un generico punto materiale libero si identificano con le geodetiche del corrispondente ds^2, e più precisamente con geodetiche di specie temporale; in altre parole, esse verificano il principio variazionale

$$\delta \int ds = 0$$

rendendo in pari tempo $ds^2 > 0$.

Tra le metriche relativistiche hanno particolare interesse quelle nelle quali è possibile scegliere un sistema di riferimento

tale, che i dieci coefficienti g_{ik} risultino tutti indipendenti dal parametro temporale x_0: tali metriche si dicono (in relazione al particolare riferimento scelto) *stazionarie*. La giustificazione di codesta denominazione appare evidente, qualora si rammenti che in fisica un fenomeno, che si svolge in un mezzo continuo e che è caratterizzato da un certo numero di parametri funzioni del posto e del tempo (per es. il moto di un fluido), si dice *stazionario* quando detti parametri non dipendono esplicitamente dal tempo.

In particolare, una metrica stazionaria si dirà *statica* quando si annullano i coefficienti g_{0i} ($i = 1, 2, 3$) dei tre termini rettangoli in dx_0, cioè quando nella espressione

$$L^2 = g_{00} + 2\sum_{1}^{3}{}_i\, g_{0i}\, x_i' + \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, x_i'\, x_k' \tag{32}$$

(in cui l'apice designa derivazione rispetto a x_0) mancano i termini di 1° grado nelle x_i'. La giustificazione di questo nome è alquanto più indiretta, e risulta dalle considerazioni seguenti:

È ben noto e del resto si verifica immediatamente che le equazioni lagrangiane (4'), ogni qual volta L sia una funzione pari delle x' (come nel caso che stiamo considerando), definiscono moti *reversibili*, cioè tali che se $P = P(t)$ rappresenta il moto a partire da una certa posizione iniziale P_0 con una velocità iniziale $\mathbf{v}_0$, basta cambiare t in $-t$ [considerare cioè il moto definito da $P = P(-t)$] per avere la soluzione corrispondente alla medesima posizione iniziale e a velocità iniziale invertita. D'altra parte, nella meccanica classica, il moto di un punto risulta notoriamente reversibile ogniqualvolta il campo di forza sia invariabile rispetto al tempo, cioè sia (nel senso ordinario della parola) un campo *statico*. Di qua l'appellativo di statiche alle metriche relativistiche, le cui geodetiche godono di reversibilità rispetto alla variabile temporale x_0.

Nel caso statico, si suol porre

$$g_{00} = V^2 \qquad g_{ik} = -a_{ik} \tag{32'}$$

con che la (32) diviene

$$L^2 = V^2 - \sum_{ik}^{3} {}_{1} a_{ik} x_i' x_k';$$

e il coefficiente V^2 ha un notevole significato meccanico, che ora illustreremo.

Se a un dato istante si annulla la velocità del mobile, cioè ognuna delle x_i' (caso del moto incipiente a partire dalla quiete), si ha in particolare dalle (4′) e dalle (32′)

$$\sum_{k}^{3} {}_{1} a_{ik} x_k'' = -\frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x_i},$$

le quali definiscono le x_i'' (i due apici significando, ben s' intende, duplice derivazione rispetto a x_0) in funzione del posto. I secondi membri

$$X_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x_i},$$

in quanto derivate di una medesima funzione $-\frac{1}{2} V^2$ costituiscono manifestamente (*C. D. A.*, Cap. IV, § 11) un sistema covariante (di fronte a trasformazioni quali si vogliono di coordinate spaziali). Le X_i costituiscono perciò le componenti covarianti (*C. D. A.*, Cap. V, §§ 6 e 20) di un vettore *spaziale* $\mathbf{F} = \mathrm{grad}\left(-\frac{1}{2} V^2\right)$. Le componenti contravarianti

$$X^i = \sum_{k}^{3} {}_{1} a^{ik} X_k$$

di questo vettore, in base alle formule precedenti, si identificano con le accelerazioni incipienti. Perciò il vettore $\mathbf{F}$ porge ovviamente la misura statica della forza (unitaria) del campo (accelerazione incipiente di un punto materiale libero, o, se si vuole, forza unitaria che è d' uopo vincere per mantenere il punto in quiete).

Si noti che in queste formule figura il tempo römeriano $x_0 = ct$, e quindi le accelerazioni di cui qui si parla sono anche

esse römeriane, cioè corrispondono alle accelerazioni ordinarie divise per c^2.

Consideriamo, accanto al punto di coordinate P, un punto vicinissimo P' di coordinate $x_i + dx_i$ e il trinomio (invariante)

$$\sum_{i}^{3} {}_{1} X_i \, dx_i = -\frac{1}{2} dV^2.$$

Definendo, come è naturale, il lavoro elementare di $\mathbf{F}$ relativo allo spostamento PP' come nell' ordinario spazio euclideo, quale prodotto dello spostamento per la proiezione ortogonale della forza, l' identità precedente mostra che $-\frac{V^2}{2}$ costituisce la funzione potenziale (in unità römeriane) della forza che si esercita nel campo in condizioni statiche.

Il potenziale ordinario può in conformità ritenersi espresso da $-\frac{1}{2} c^2 V^2$.

Come si è visto or ora, nel caso statico la forza del campo si esprime molto semplicemente mediante il solo coefficiente $g_{00} = V^2$. In condizioni più generali, tutta la meccanica del punto è sintetizzata nel principio geodetico di EINSTEIN, o, se si vuole, nelle conseguenti equazioni lagrangiane (4′): si può ancora istituire una analoga considerazione per il moto incipiente, e trarne l'espressione della forza del campo (in un posto e in un istante generico) in funzione delle g, ma tale determinazione non riesce altrettanto semplice ed espressiva come nel caso statico. Si può dire in sostanza che i concetti di massa, di forza, di energia rimangono tutti conglobati nella metrica quadridimensionale, ma, almeno in generale, non appare agevole, nè feconda la separazione di questi concetti e il loro collegamento ai coefficienti del ds^2.

13. VERSORI IN UNA V_4 CON METRICA PSEUDOEUCLIDEA. — È degno di nota il fatto che un *versore* (cioè un vettore unitario) nella varietà V_4 conglobante lo spazio e il tempo, essendo dotato di quattro parametri (o momenti) di cui solo tre indipendenti (in virtù della identità quadratica esprimente che la lunghezza del vettore è unitaria (*C. D. A.*, Cap. V, § 3), può sempre farsi corrispondere ad un vettore a tre dimensioni: particolarmente espressiva riesce l'interpretazione di tale vettore come velocità.

Consideriamo infatti — limitandoci ad una V_4 pseudoeuclidea — un generico movimento, che definisca le y_1, y_2, y_3 in funzione della y_0; e che darà luogo, in V_4, ad una linea oraria. Se il movimento avviene (come dapprima supporremo) con velocità minore di c, si tratta di una linea temporale, in quanto il relativo

$$ds^2 = dy_0^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i^2 = dy_0^2\,(1-\beta^2)$$

è positivo. Se invece la velocità è maggiore di c (cioè $\beta > 1$) il ds^2 risulta negativo, e si tratta di un versore spaziale (*C. D. A.*, Cap. V, § 28). Comunque, indicando al solito con β_i le componenti $\frac{dy_i}{dy_0}$ della velocità römeriana, e con $\alpha_i = \frac{\beta_i}{\beta}$ i coseni direttori di tale velocità, si hanno manifestamente, per i parametri della linea oraria (cioè del versore $\boldsymbol{\xi}$ ad essa tangente) le espressioni

$$\xi^0 = \frac{dy_0}{|ds_0|} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\xi^i = \frac{dy_i}{dy_0}\,\frac{dy_0}{|ds_0|} = \frac{\beta_i}{|\sqrt{1-\beta^2}|} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\alpha_i\ (i<0).$$

In base a queste formule, date le tre componenti di un ordinario vettore β, restano determinati i quattro parametri ξ^i di un vettore unitario (versore) $\boldsymbol{\xi}$ a quattro dimensioni, e viceversa. Naturalmente, assieme al vettore β rimane univocamente fissato (purchè sia soltanto $\beta \neq 0$) il suo *versore* (nel senso ordinario) $\boldsymbol{\alpha}$. Ci sarà comodo designarlo talvolta col nome di versore *ridotto* dal versore quadridimensionale $\boldsymbol{\xi}$. Per $\beta = 0$ il versore $\boldsymbol{\xi}$ ha nulle le componenti ξ^1, ξ^2, ξ^3 e si chiama in conformità *puramente temporale*. Se invece si considera il caso limite di una velocità grandissima in una direzione $\boldsymbol{\alpha}$ (si fa cioè

tendere β all'infinito conservando determinati rapporti fra le β^i) allora si ha $\xi^0 = 0$, mentre le altre ξ^i si riducono ai coseni direttori α^i del versore ridotto. La direzione quadridimensionale $\boldsymbol{\xi}$ si chiama, in questo caso, *puramente spaziale*, è tangente alla varietà tridimensionale $x_0 = \text{cost.}$ (spazio) e anzi coincide col versore $\boldsymbol{\alpha}$ appartenente a questa varietà.

Tutto ciò si estende facilmente al caso di una V_4 di metrica generica riferita a coordinate qualsivogliono x_0, x_1, x_2, x_3, la prima temporale e le altre tre spaziali, e caratterizzata dalla forma

$$ds^2 = \sum_0^3{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k = dx_0^2\, L^2$$

dove L^2 designa, come al § **12**, l'espressione

$$V^2/c^2 + 2\sum_1^3{}_i\, g_{0i}\, x_i' - \beta^2,$$

e, al solito, $\beta = \frac{dl}{dx_0}$.

Dato un versore generico di parametri

$$\xi^i = \frac{dx_i}{|ds|} \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

avremo

$$\xi^0 = \frac{dx_0}{|ds|} = \frac{1}{L},$$

$$\xi^i = \frac{dx_i}{|ds|} = \frac{dx_i}{dx_0}\,\frac{dx_0}{|ds|} = \frac{x_i'}{L} = \frac{\beta}{L}\,\frac{dx_i}{dl} \qquad (i>0).$$

14. Digressione sulle geodetiche di lunghezza nulla. — Chiamiamo τ un parametro qualsiasi di cui le coordinate x si possano risguardare come funzioni, e poniamo

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{ds^2}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\sum_0^3{}_{ik}\, g_{ik}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_k$$

(indicando col punto la derivazione rispetto a τ). Consideriamo le equazioni (del moto di un sistema materiale) compendiate nel principio variazionale

$$\delta \int 2T d\tau = 0 . \tag{33}$$

Sappiamo dalla meccanica che, interpretando τ come tempo e T come forza viva di un sistema materiale, le equazioni lagrangiane compendiate dalla (33), cioè le

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{34}$$

definiscono il moto spontaneo del sistema, e ammettono, come è noto, l'integrale primo

$$T = E = \text{cost} .$$

Ogniqualvolta il valore della costante E è diverso da zero, si può agevolmente, ricorrendo alla equazione $T = E$, eliminare il parametro τ dalla (33) e ricavarne una equazione variazionale atta a definire le traiettorie. Si ha infatti, per la definizione di T,

$$\sqrt{2T}\, d\tau = ds$$

con che l'espressione dell'*azione*, cioè dell'integrale $\int 2T d\tau$ che figura nella (33), si può scrivere

$$\int \sqrt{2E}\,\sqrt{2T}\, d\tau = \sqrt{2E}\int \sqrt{2T}\, d\tau = \sqrt{2E}\int ds .$$

Dunque, per $E \neq 0$, l'equazione variazionale (33), per eliminazione del parametro τ, dà luogo alla

$$\delta \int ds = 0 \tag{35}$$

che è l'equazione caratteristica delle geodetiche nella V_4 il cui elemento lineare è ds: da questa equazione si deducono,

(*C. D. A.*, Cap. V, § 24), le equazioni differenziali delle geodetiche

$$\ddot{x}_i + \sum_{0}^{3}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} \dot{x}_j \dot{x}_l = 0 \tag{36}$$

dove il punto indica derivazione rispetto a s. A queste stesse equazioni, sostituendo soltanto τ ad s, si perverrebbe esplicitando le (34) e risolvendole rispetto alla $\ddot{x}$. In definitiva, per $E \neq 0$, è indifferente definire le geodetiche di V_4 come traiettorie provenienti dal principio variazionale (33), o mediante la tipica proprietà estremale (35).

Vogliamo ora esaminare a parte il caso di $E = 0$, vale a dire (per essere $T = E$ e $ds^2 = 2\,T d\tau^2$) $ds = 0$ lungo tutta la linea di cui si tratta, la quale prende perciò in questo caso il nome di *geodetica* di *lunghezza nulla* (beninteso, siffatte linee sono reali soltanto se il ds^2 è una forma indefinita). In questo caso, la (35) non è più adatta alla definizione delle geodetiche, nè vale più la deduzione delle equazioni differenziali richiamata poc'anzi poichè in essa si assume addirittura s come variabile indipendente, escludendo così che possa essere identicamente $ds = 0$. Però le equazioni (34) conservano il loro significato, e ci porgono quindi il mezzo per definire le geodetiche di lunghezza nulla per mezzo di un passaggio al limite (in condizione di perfetta regolarità analitica) dalle geodetiche proprie. Chiameremo cioè *geodetiche di lunghezza nulla* le linee rappresentate da soluzioni del sistema lagrangiano (34) corrispondenti al valore zero della costante E.

Le equazioni differenziali (34), per le geodetiche proprie, forniscono direttamente x_0, x_1, x_2, x_3, in funzione di un parametro τ (in particolare s). Si può immaginare di eliminare il parametro a integrazione eseguita ottenendo per es. x_1, x_2, x_3 espresse in funzione di x_0. Ma è anche possibile, sempre per le geodetiche proprie, eliminare preventivamente il parametro, ottenendo direttamente dalla (35) tre equazioni differenziali che definiscono x_1, x_2, x_3 in funzione di x_0. Basta a tal uopo introdurre nella (35) la x_0 come variabile indipendente con che la (35) stessa si scrive

$$\delta \int L\, dx_0 = 0 \tag{35'}$$

dove si è posto, come al § **12**,

$$L^2 = \frac{ds^2}{dx_0{}^2} = g_{00} + 2 \sum_1^3{}_i\, g_{0i}\, x_i{}' + \sum_1^3{}_{ik}\, g_{ik}\, x_i{}'\, x_k{}' .$$

Dalla (35′) si deducono, col metodo ben noto, le tre equazioni lagrangiane richieste, che sono

$$\frac{d}{dx_0} \frac{\partial L}{\partial x_i'} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1 , 2 , 3) .$$

Esse equivalgono completamente alla (35′), perchè, come si rilevò al § **2**, la quarta equazione (che si otterrebbe facendo variare anche x_0 e eguagliando a zero il coefficiente di δx_0) è necessaria conseguenza delle tre ora scritte.

Tali equazioni, come già la (35), perdono significato nel caso delle geodetiche di lunghezza nulla ($E = 0$): si può tuttavia pervenire ad un'analoga riduzione anche in questo caso; ma conviene seguire altra via e rinunciare alla forma lagrangiana pura. Ecco come si può fare.

Partiamo dalla (33) anzichè dalla (35) e osserviamo che dalle definizioni di T ed L risulta ovviamente

$$2T = L^2 \frac{dx_0{}^2}{d\tau^2} .$$

Supponiamo che lungo la geodetica (o arco di geodetica) di lunghezza nulla che si considera non sia costante x_0 [1]).

Si può allora assumere nell'integrale (33) (in corrispondenza ad una generica geodetica della specie suaccennata) x_0 invece di τ come variabile indipendente, scrivendo

$$\delta \int L^2 \frac{dx_0}{d\tau}\, dx_0 = 0 .$$

[1]) Per le limitazioni introdotte al § 8, questa condizione si può sempre ritenere soddisfatta, nel campo reale. Infatti, ove si ponga, in ds^2, $dx_0 = 0$, rimane una forma definita negativa, che non può annullarsi lungo una effettiva linea, quando cioè non si annullano contemporaneamente dx_1, dx_2, dx_3.

Il parametro τ è una funzione (*a priori* incognita) della x_0, tale che $\frac{dx_0}{d\tau}$ resta finito e non nullo. Si può quindi porre

$$\frac{d\tau}{dx_0} = \frac{1}{\Lambda\,(x_0)} = e^{\int \lambda\,(x_0)\, dx_0}$$

Λ e λ essendo essi pure finiti e diversi da zero. Con ciò la precedente formula variazionale diviene

$$\delta \int L^2\, \Lambda\, dx_0 = 0$$

da cui si ricavano per le geodetiche le equazioni

$$\frac{d}{dx_0} \frac{\partial\,(L^2 \Lambda)}{\partial x_i'} - \frac{\partial\,(L^2 \Lambda)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1 , 2 , 3)$$

che si possono scrivere, sviluppando e dividendo per Λ,

$$\frac{d}{dx_0} \frac{\partial L^2}{\partial x_i'} - \frac{\partial L^2}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial L^2}{\partial x_i'} .$$

Tra queste è immediata l'eliminazione del parametro λ: designando per brevità con τ_i il binomio lagrangiano al primo membro, si hanno in definitiva le due equazioni

$$\frac{\tau_1}{\dfrac{\partial L^2}{\partial x_1'}} = \frac{\tau_2}{\dfrac{\partial L^2}{\partial x_2'}} = \frac{\tau_3}{\dfrac{\partial L^2}{\partial x_3'}}$$

che vanno associate a

$$L^2 = 0 .$$

15. Richiami elementari di ottica geometrica. — Entro un mezzo trasparente, omogeneo, la luce (in assenza di azioni perturbatrici) si propaga notoriamente in linea retta con velocità costante. Nel caso dell'isotropia, cui esclusivamente ci riferiremo, la velocità è sempre la stessa in tutte le direzioni e costituisce quindi una costante caratteristica del mezzo, che per il vuoto vale, in cifra tonda,

$$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm./sec.}$$

ossia 300.000 km. al secondo.

Se invece si tratta di mezzo eterogeneo, in cui l'indice di rifrazione n (che è proporzionale all'inverso della velocità di propagazione) varia da punto a punto, allora i raggi non hanno in generale andamento rettilineo, ma sono incurvati secondo una legge che dipende dal modo di variare di n col posto, cioè dalla funzione $n(x, y, z)$. A questa legge si può dare una forma compendiosa ed espressiva nel modo seguente [1]). Fissati il punto di partenza P_0 e il punto di arrivo P_1, di un raggio luminoso, il tempo impiegato da questo per andare da P_0 a P_1 lungo una linea s sarà ovviamente proporzionale all'integrale

$$t = \int_{P_0 P_1} n ds$$

poichè n, come si è detto, è inversamente proporzionale alla velocità. Orbene, la linea effettiva seguìta dalla luce è quella che rende minimo tale integrale, e che quindi soddisfa la condizione

$$\delta t = 0.$$

Questo principio variazionale, che riassume tutta l'ottica geometrica, porta il nome di principio di FERMAT.

16. L'OTTICA GEOMETRICA SECONDO EINSTEIN E IL SIGNIFICATO DELLA COSTANTE c. — Nella ordinaria schematizzazione geometrica dei raggi luminosi si ammette, come nella meccanica newtoniana, un riferimento assoluto. Per rendere espressiva la rappresentazione, si immagina questo offerto da un ipotetico mezzo in quiete, che costituisce come il supporto dei fenomeni ottici: il così detto etere cosmico. Negli spazi privi di materia ponderabile la luce si propaga in linea retta con velocità costante c

[1]) Cfr. per es. LEVI-CIVITA e AMALDI, op. cit., Cap. XI, n. 18.

rispetto all'etere, o, ciò che è lo stesso, rispetto ad assi fissi: intendendo per fissi, immobili rispetto all'etere. c è dunque la velocità della luce quale apparisce ad un generico osservatore O, in quiete rispetto all'etere.

Consideriamo un solido C animato da moto traslatorio con velocità u, e un fascio di raggi paralleli propagantisi nello stesso senso del moto.

Rispetto all'osservatore O, il fenomeno luminoso si schematizza — lo abbiamo richiamato or ora — come un particolare moto uniforme dotato di velocità c.

Secondo i criteri della cinematica ordinaria, l'analoga velocità rispetto ad un osservatore O' solidale con C vale $c - u$.

Ora (per quanto, nell'ambito delle velocità realizzabili con corpi materiali, sia piccolo il rapporto $\frac{u}{c}$ e ancor più il suo quadrato $\frac{u^2}{c^2}$, che solo è accessibile ad effettivo controllo sperimentale) si può ritenere sicuramente acquisito, in seguito ad una classica esperienza di MICHELSON, ripetuta anche da altri fisici, e recentemente, su nuove basi, dal prof. MAJORANA, che la velocità di propagazione è ancora c anche rispetto a O'.

Per spiegare questa constatazione sperimentale, basta evidentemente che ciò che macroscopicamente apparisce come traslazione di un corpo C con velocità u, sia, in un più affinato stadio di misura, una trasformazione (Λ): risultando effettivamente dallo studio di queste trasformazioni che ogni ordinaria traslazione uniforme è pressochè confondibile con una (Λ) (a meno di un decimilionesimo, purchè sia $\frac{u}{c} \leq 10^{-4}$).

Rimangono pertanto rispettate la legge classica dell'ottica geometrica (che la propagazione sia rettilinea, uniforme, con velocità c), nonchè le famose esperienze cui poc'anzi alludevamo ove si ammetta che sia, anche per la propagazione della luce (come pel moto di un punto materiale in assenza di forze),

$$\delta \int ds_0 = 0 \qquad \text{(moto uniforme)},$$

colla specificazione

$$ds_0^2 = 0$$

(il che è quanto dire moto dotato di velocità c); e si risguardi d'altra parte il fenomeno della traslazione dei solidi come tenuissimamente diverso dall'ordinaria descrizione cinematica, sì da corrispondere ad una trasformazione (Λ).

Dunque quegli speciali movimenti che corrispondono a propagazione della luce nell'etere, in assenza di circostanze perturbatrici, sono dominati dalla forma

$$ds_0^2 = c^2 dt^2 - dl_0^2 \tag{37}$$

in cui la costante c ha un valore numerico ben determinato.

Per i moti usuali (velocità al più planetaria) e sotto l'azione di forze conservative — diciamo in presenza di masse assegnate — ha eguale funzione una forma

$$ds^2 = (c^2 - 2U)\, dt^2 - dl_0^2 \tag{37'}$$

in cui, da un lato la costante c è soltanto sottoposta alla restrizione qualitativa di essere abbastanza grande, e d'altro lato l'influenza delle masse modifica alquanto il coefficiente di dt^2. Se si aspira alla unità di concezione dei fenomeni fisici, si è ovviamente tratti ad ammettere che, *caeteris paribus*, una stessa forma differenziale ds^2 domini così il moto dei punti materiali come l'andamento dei raggi luminosi, fungendo da base in entrambi i casi. Si dovrà perciò attribuire alla costante c, nel caso dinamico generale, lo stesso valore specifico che le compete nel fenomeno ottico particolare. Allora intanto, in assenza di circostanze perturbatrici, in particolare di masse a distanza sensibile, con che $U = 0$, il ds^2 meccanico si identifica effettivamente col ds_0^2, dell'ottica limite.

Di più, dacchè nel caso di $U = 0$ (cioè in assenza di masse a distanza sensibile) si è compendiata l'ottica geometrica, mercè l'intervento del ds_0^2, in due leggi che si presentano come limite di leggi dinamiche, si è condotti ad esperire l'estensione dello stesso criterio anche al caso in cui esistono masse ($U \neq 0$). La propagazione della luce sarà quindi retta in ogni eventualità dai postulati seguenti:

1° (come per i moti materiali). Principio geodetico

$$\delta \int ds = 0. \tag{38}$$

2° $ds^2 = 0$, il che è quanto dire che si tratta di moti per cui il quadrato della velocità $\frac{dl^2}{dt^2}$ vale

$$c^2 - 2U = c^2 \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right).$$

La velocità V risulta quindi leggermente diversa da c, ossia (a meno di termini assolutamente trascurabili) espressa da

$$V = c \left(1 - \frac{U}{c^2}\right).$$

I due postulati si possono compendiare in un espressivo enunciato geometrico:

Nella nostra metrica di V_4 le linee orarie della luce sono geodetiche di lunghezza nulla.

Si noti che tale enunciato ha forma invariante, e quindi si presta a caratterizzare l'andamento dei raggi luminosi anche se, anzichè al particolare sistema t, y_1, y_2, y_3, ci si riferisce a un sistema di coordinate qualsiasi x_0, x_1, x_2, x_3. Anzi tale enunciato si presta ad una ovvia generalizzazione, inquantochè è naturale ammettere che esso continui a valere anche quando il ds^2 che caratterizza la metrica della V_4, pur soddisfacendo le restrizioni qualitative del § 8, non sia riducibile alla particolare forma (37').

17. Interpretazione ottico-geometrica della condizione $ds^2 = 0$. — Ad ogni direzione (d) dello spazio quadridimensionale (t, x_1, x_2, x_3), cioè ad ogni sistema di incrementi dt, dx_1, dx_2, dx_3, si può ovviamente far corrispondere un vettore (velocità) **V** dello spazio fisico di elemento lineare

$$dl^2 = -\sum_{1}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{39}$$

con che si intende, in modo preciso, dello spazio euclideo tangente (nel punto generico, a partire dal quale si considerano gli incrementi suddetti).

Assumeremo per sistema contravariante di questo vettore, rispetto alla metrica (39), i rapporti

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Attribuendo loro la forma

$$\frac{dx_i}{dl} \frac{dl}{dt}$$

si mettono in evidenza i parametri di direzione $\frac{dx_i}{dl}$ e perciò il fattore positivo $\frac{dl}{dt}$ misura la lunghezza del vettore. Riportandoci alla (39), abbiamo per il quadrato di tale lunghezza

$$v^2 = \frac{dl^2}{dt^2} = \sum_{ik}^{3}{}_{1} a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k .$$

Un altro vettore **w**, funzione esclusivamente del posto e del tempo (soltanto del posto in condizioni stazionarie), si può far corrispondere alla terna g_{0i} (covariante rispetto a trasformazioni qualsivogliono delle sole coordinate di spazio), assumendo tale terna per componenti covarianti del vettore. Allora, designando al solito con a^{ik} i coefficienti della forma reciproca alla (39) e ponendo

$$w^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{1} a^{ik} g_{0i} g_{0k} ,$$

si ha in w la lunghezza e (per $w > 0$) nei rapporti $\frac{g_{0i}}{w}$ i momenti (sistema reciproco ai parametri) della direzione di questo vettore. Va notato che, se le coordinate spaziali x hanno le dimensioni di una lunghezza, i coefficienti a_{ik} del dl^2, e quindi i loro reciproci a^{ik}, sono puri numeri, mentre i coefficienti g dei termini rettangoli in dt hanno le dimensioni di una velocità. Perciò il vettore **w** è interpretabile come velocità al pari di **v**. Tale conclusione — lo si constata ovviamente — rimane valida, anche lasciando indeterminate le dimensioni delle coordinate x_1, x_2, x_3.

Detto φ l'angolo di **v** con **w**, supposti per un momento entrambi diversi da zero, si ha, in base alla metrica (39),

$$\cos\varphi = \sum_{i}^{3}{}_{1} \frac{g_{0i}}{w} \frac{\dot{x}_i}{v}$$

d'onde l' identità

$$vw \cos\varphi = \sum_{i}^{3}{}_{1} g_{0i} \dot{x}_i \tag{40}$$

che sussiste anche se eventualmente si annullano v o w.

Tutto ciò premesso, in base alle (39) e (40), l'espressione generale (5') del ds^2 può essere scritta

$$ds^2 = dt^2 (V^2 + 2 v w \cos\varphi - v^2),$$

ponendo $V^2 = g_{00}$.

Si rende così manifesto che la condizione $ds^2 = 0$, caratteristica della propagazione della luce, ne definisce la velocità v in funzione del posto e della direzione del raggio, nonchè del tempo, nel caso generale, in cui i coefficienti del ds^2, e con essi V, w e φ, dipendono da t.

Rappresentando con β e con p i rapporti (positivi entrambi e numeri puri) $\frac{v}{V}$ e $\frac{w}{V}$, si ha per β la equazione di secondo grado

$$\beta^2 - 2 p \cos\varphi \, \beta - 1 = 0 \tag{41}$$

le cui radici hanno per prodotto -1, e sono quindi una positiva e l'altra negativa. Per il suo significato v dev'essere positiva, talchè la (41) la definisce *univocamente*.

Quando si annullano tutti i termini rettangoli in dt (caso statico), $w = 0$, quindi $\beta = 1$, e v coincide con V. In generale è $p > 0$, e il divario da V (fissato un posto e un istante) dipende dalla direzione del raggio, ossia dall' angolo φ che esso forma con **w**. Si ha ancora $v = V$ per ogni raggio perpendicolare a **w**. La (41) mostra poi ovviamente che i valori massimo e minimo di β si hanno in corrispondenza a $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$. Ciò è quanto dire che la massima velocità di propagazione

$$V\,(\sqrt{1+p^2}+p)$$

ha luogo secondo **w**; la minima

$$V\,(\sqrt{1+p^2}-p)$$

nella stessa direzione, ma in senso opposto.

Come si vede, all'infuori del caso statico, la propagazione della luce nello spazio fisico ha comportamento non soltanto anisotropo ma addirittura irreversibile.

18. Il principio di Fermat nelle metriche relativistiche stazionarie. — Si è visto al § **14** come si possono esplicitare le equazioni differenziali della propagazione luminosa, girando la difficoltà cui darebbe luogo il principio variazionale $\delta\int ds = 0$ per $ds^2 = 0$. Non è privo d'interesse notare che per ogni ds stazionario l'andamento dei raggi luminosi si può anche caratterizzare associando all'equazione $ds^2 = 0$, il principio di Fermat del minimo tempo, cioè assumendo

$$\delta\int dx_0 = 0, \tag{42}$$

dove dx_0 si intende legato a x_0, alle coordinate di spazio e ai differenziali di queste da $ds^2 = 0$. Naturalmente, mentre nel principio geodetico quadridimensionale espresso dalla (38) vanno ritenute nulle, agli estremi dell'intervallo di integrazione, non soltanto dx_1, dx_2, dx_3, ma anche dx_0, nella (42) va evidentemente soppressa quest'ultima condizione la quale ridurrebbe la (42) a una pura identità.

Ci proponiamo ora di stabilire l'equivalenza, per ogni metrica stazionaria, dei due principî d'ottica geometrica: geodeticità quadridimensionale, minimo tempo.

Per far ciò conviene considerare le geodetiche di lunghezza nulla derivanti per via di limite dalle geodetiche temporali

($ds^2 > 0$), cioè (§ **12**) dalle linee orarie di un punto materiale, mobile nel campo caratterizzato dal ds^2. Per queste, ove si designi con c una costante arbitraria da identificarsi colla velocità della luce in assenza d'ogni circostanza perturbatrice, si suol porre

$$\left\{\begin{aligned} & x_i' = \frac{dx_i}{dx_0} && (i = 1, 2, 3), \\ & \beta^2 = \frac{dl^2}{dx_0^2} = \sum_{ik}^{3} a_{ik}\, x_i'\, x_k', \\ & L^2 = \frac{ds^2}{dx_0^2} = V^2 + 2\sum_{i}^{3} g_{0i}\, x_i' - \sum_{ik}^{3} a_{ik}\, x_i'\, x_k', \end{aligned}\right. \tag{43}$$

la funzione L ammettendo derivate parziali finite (perchè è escluso che si annulli il ds^2 e quindi la L).

La (38) può essere scritta

$$\delta\int L\, dx_0 = 0. \tag{44}$$

La variazione fatta rispetto alle coordinate x_1, x_2, x_3, porta classicamente alle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dx_0}\frac{\partial L}{\partial x_i'} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{45}$$

mentre la variazione di x_0 dà luogo a

$$\frac{d}{dx_0}\left(\sum_{i}^{3} \frac{\partial L}{\partial x_i'}\, x_i' - L\right) + \frac{\partial L}{\partial x_0} = 0$$

che è necessaria conseguenza delle (45).

Nell'ipotesi, caratteristica del caso stazionario, che L non contenga esplicitamente x_0, se ne ricava l'integrale

$$L - \sum_{i}^{3} \frac{\partial L}{\partial x_i'}\, x_i' = E \tag{46}$$

dove la costante E rappresenta l'energia totale del punto mobile.

Moltiplicando per L, il primo membro può essere scritto

$$\frac{1}{2} L^2 + \frac{1}{2}\left(L^2 - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L^2}{\partial x_i'} x_i'\right).$$

In virtù della terza delle (43), L^2 è un polinomio di secondo grado in x_1', x_2', x_3': esso si presenta già scisso in tre addendi omogenei dei gradi rispettivi $0, 1, 2$. Per il teorema di EULERO sulle funzioni omogenee, sparisce il termine lineare dalla differenza $L^2 - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L^2}{\partial x_i'} x_i'$ la quale si riduce a $V^2 + \beta^2$. Con ciò la (46), moltiplicata per L, porge

$$\frac{1}{2} L^2 + \frac{1}{2}\left(V^2 + \beta^2\right) = EL. \tag{47}$$

Il primo membro è essenzialmente positivo anche per $L = 0$, anzi $\geq \frac{1}{2} V^2$ (che è da ritenersi dotato di limite inferiore non nullo nel campo che si considera). Il prodotto EL *può così riguardarsi quale funzione delle x e delle x', la quale rimane regolare e diversa da zero, anche quando L converge a zero*; in tale ipotesi la costante E tende manifestamente all'infinito.

D'altra parte, per tutti i movimenti cui compete una medesima energia totale E, si può sostituire alla (44), in cui si suppone che δx_0 si annulli agli estremi dell'intervallo di integrazione, un principio analogo che presenta sul primo il vantaggio di non richiedere più la detta condizione. All'uopo basta notare che, per δx_0 nulla agli estremi, $\delta \int dx_0 = 0$, e, per conseguenza, la (44) equivale a $\delta \int (L - E)\, dx_0 = 0$ od anche, per $E \neq 0$, a $\delta \int \left(1 - \frac{L}{E}\right) dx_0 = 0$; infine che, in quest'ultima, si può lasciar cadere il vincolo che δx_0 si annulli agli estremi, perchè, portando il δ sotto il segno e applicandolo a dx_0 (in quanto compare sia esplicitamente, sia pel tramite delle x'), si ha, materialmente,

$$-\frac{1}{E}\int \delta x_0 \left(L - E - \sum_1^3{}_i \frac{\partial L}{\partial x_i'} x_i'\right)$$

che si annulla in virtù della (46).

Rimane dunque acquisito che, per un assegnato valore (non nullo) di E, le equazioni del moto si possono, *senza alcun vincolo relativo a* δx_0, compendiare nella formula

$$\delta \int \left(1 - \frac{L}{E}\right) dx_0 = 0. \tag{47}$$

La funzione sotto il segno può scriversi $1 - \frac{L^2}{EL}$ donde apparisce, avuto riguardo al rilevato comportamento del denominatore EL, che essa si mantiene regolare e tende all'unità, nell'ipotesi che L converga a zero. Ora è appunto tale ipotesi che fa passare dai moti materiali al caso limite della propagazione luminosa. Attesa la regolarità, il passaggio al limite può essere invertito cogli operatori $\delta \int$, e così la (47) dà luogo al principio di FERMAT

$$\delta \int dx_0 = 0.$$

Al principio di FERMAT si può dare forma puramente geometrica riferita alla metrica spaziale di elemento lineare dl: basta a tal uopo dare a dx_0 il suo valore ricavato da $ds^2 = 0$ in funzione delle x_0, x_1, x_2, x_3, dx_1, dx_2, dx_3, e introdurlo nell'ultima formula scritta. Il risultato diventa particolarmente espressivo nel caso statico ($g_{0i} = 0$, per $i = 1, 2, 3$) nel quale risulta manifestamente $dx_0 = \frac{dl}{V}$, e il principio di FERMAT si scrive

$$\delta \int \frac{dl}{V} = 0.$$

Si vede così che i raggi luminosi coincidono con le geodetiche dello spazio (tridimensionale) di elemento lineare $\frac{dl}{V}$, ovvero (volendo riferirsi allo spazio fisico dl^2 e applicando ancora una volta (cfr. § **11**) il teorema della minima azione) con un fascio di traiettorie corrispondenti al potenziale $\frac{1}{2V^2}$ e all'energia totale 0.

19. TENSORE DEGLI SFORZI E SUA DIVERGENZA SECONDO LO SCHEMA CLASSICO. — Sia dato un mezzo continuo, e in esso un elemento superficiale $d\sigma$ (faccetta) su cui si fissi una delle due facce come positiva, coordinandovi un verso della direzione normale. Converremo sia quello che corrisponde al passaggio dalla faccia negativa alla positiva e ne indicheremo con $\mathbf{n}$ il versore. Come è ben noto [1]), si chiama *sforzo*, relativo alla faccia positiva dell'elemento considerato, il risultante delle azioni molecolari che le particelle situate dalla banda negativa dell'elemento esercitano su quelle situate dalla banda positiva [2]). Un tale risultante è (nei casi normali, cui esclusivamente intendiamo riferirci) dello stesso ordine di $d\sigma$, e si rappresenta sotto la forma $\boldsymbol{\Phi}_n\, d\sigma$, chiamandosi $\boldsymbol{\Phi}_n$ lo *sforzo specifico* sulla faccia positiva dell'elemento superficiale normale ad $\mathbf{n}$.

Se ci si riferisce ad assi cartesiani ortogonali $Oy_1\, y_2\, y_3$, si designeranno ovviamente con Φ_{ni} $(i = 1, 2, 3)$ le tre componenti del vettore $\boldsymbol{\Phi}_n$. Per caratterizzare la distribuzione degli sforzi intorno ad un medesimo punto P, si ricorre ai tre sforzi $\boldsymbol{\Phi}_1$, $\boldsymbol{\Phi}_2$, $\boldsymbol{\Phi}_3$ che si esercitano su le faccette uscenti da P, parallelamente ai piani coordinati, più precisamente aventi i versori normali nelle direzioni positive degli assi coordinati. Le loro componenti si designano ordinatamente con

$$\begin{matrix} \Phi_{11}, & \Phi_{12}, & \Phi_{13}; \\ \Phi_{21}, & \Phi_{22}, & \Phi_{23}; \\ \Phi_{31}, & \Phi_{32}, & \Phi_{33} \end{matrix}$$

risultando (dai postulati della meccanica) che la matrice testè scritta è simmetrica, ossia che

$$\Phi_{32} = \Phi_{23}\,, \quad \Phi_{13} = \Phi_{31}\,, \quad \Phi_{21} = \Phi_{12}\,.$$

Come si vede, queste Φ_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ si riducono sostanzialmente a sei.

[1]) Cfr. per es A. E. H. Love, ***Mathematical theory of elasticity***, 4ª edizione (Cambridge University Press), 1927, cap. II.

[2]) Alcuni autori, in particolare il Love, invertono nelle definizioni l'ufficio delle due regioni, e quindi in virtù del principio di reazione, il verso del vettore qualificato come sforzo. Cambia in conformità il segno delle componenti e rimane invertita la disuguaglianza che discrimina se un dato sforzo ha, rispetto all'elemento, carattere di pressione ovvero di trazione.

Dette n^k le componenti del versore $\mathbf{n}$ (coseni direttori), si ha la formola fondamentale

$$\boldsymbol{\Phi}_n = \sum_{1}^{3}{}_k\, \boldsymbol{\Phi}_k\, n^k \tag{48}$$

e quindi per le tre componenti secondo gli assi coordinati

$$\Phi_{n|i} = \sum_{1}^{3}{}_k\, \Phi_{ik}\, n^k\,.$$

Naturalmente, se $\boldsymbol{\xi}$ è una direzione generica di coseni direttori ξ^i, il prodotto scalare $\boldsymbol{\Phi}_n \times \boldsymbol{\xi}$, cioè la componente dello sforzo $\boldsymbol{\Phi}_n$ secondo $\boldsymbol{\xi}$, si esplicita sotto la forma

$$\boldsymbol{\Phi}_n \times \boldsymbol{\xi} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, \Phi_{ik}\, n^k\, \xi^i\,.$$

Attesa la simmetria delle Φ_{ik}, si può, nel sommatorio precedente, sostituire Φ_{ki} a Φ_{ik}, con che esso si presenta, in base alla (48), come il prodotto scalare $\boldsymbol{\Phi}_\xi \times \mathbf{n}$, donde la relazione di reciprocità, cioè l'eguaglianza

$$\boldsymbol{\Phi}_n \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Phi}_\xi \times \mathbf{n}\,.$$

Per $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{n}$ si ha in particolare la componente secondo la normale alla faccetta dello sforzo spettante alla faccetta stessa, il così detto *sforzo normale*. In base alle nostre convenzioni, secondochè questa componente normale è positiva o negativa, lo sforzo ha carattere di pressione ovvero di trazione. Per quanto s'è detto or ora, il criterio discriminante è fornito dal segno della espressione

$$\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, \Phi_{ik}\, \xi^i\, \xi^k\,.$$

Tutto ciò premesso, scriviamo, per uniformità di notazione, $\boldsymbol{\xi}'$ in luogo di $\mathbf{n}$ e fissiamo l'attenzione sulla forma bilineare

$$\Phi = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, \Phi_{ik}\, \xi^i\, \xi'^k$$

la quale rappresenta sia la componente secondo ξ dello sforzo specifico che si esercita sulla faccetta normale a ξ', sia la componente secondo ξ' dell'analogo sforzo spettante all'elemento normale a ξ.

Se ora si sostituiscono alle y delle coordinate curvilinee x qualisivogliono (risguardando, ben s' intende, come invariante la natura geometrica dello spazio caratterizzata dal ds^2) i parametri ξ^i, ξ'^i delle direzioni ξ, ξ' costituiscono, come ben sappiamo, due sistemi contravarianti, riducentisi ai coseni in coordinate cartesiane, mentre lo scalare Φ testè definito si comporterà, per il suo significato intrinseco, come un invariante: ne segue (*C. D. A.*, Cap. IV, § 4) che i coefficienti della forma bilineare Φ (riferita a tali parametri come argomenti) costituiranno un sistema covariante doppio simmetrico che si chiama il *tensore degli sforzi* e si seguita a designare con Φ_{ik} (estendendo la notazione adottata nel caso di coordinate cartesiane ortogonali). Naturalmente, a un tale tensore competeranno anche le componenti contravarianti $\Phi^{ik} = \Phi^{ki}$ e le miste $\Phi_i^{\ k}$, che si otterranno per composizione coi coefficienti della forma fondamentale, nel modo noto.

Il tensore degli sforzi dipende in generale dal posto, e quindi (con referenza a coordinate generiche x) le Φ_{ik} si possono in ogni caso pensare come funzioni delle coordinate, dotate quindi di derivate sia ordinarie che covarianti e contravarianti. Come si sa (*C. D. A.*, Cap. V, § 7), da un tensore doppio X_{ik} si può trarre un vettore $\mathbf{Y}$ collegato ad esso in modo intrinseco, che è chiamato la sua divergenza e le cui componenti, per es. covarianti, sono, per $n = 3$, definite da

$$Y_i = \sum_{kl}^{3} a^{kl} X_{ik|l} \,. \tag{50}$$

Ora, la divergenza del tensore degli sforzi ha un notevole significato meccanico, che si può subito trovare riferendosi a coordinate cartesiane. Si sa infatti che le forze molecolari esercitate sopra una data particella da tutte quelle circostanti hanno

per risultante un vettore $\boldsymbol{\chi}$, le cui componenti, in coordinate cartesiane ortogonali, sono date da

$$\chi_i = -\sum_{k}^{3} \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial y_k} \,. \tag{51}$$

Se ora si pensa che, in tale sistema di riferimento, la divergenza di Φ_{ik} è proprio espressa dalla sommatoria a secondo membro, e che d'altra parte le componenti covarianti di un vettore si identificano in tal caso con le componenti ordinarie, si riconosce subito che il vettore $\boldsymbol{\chi}$ non è che la divergenza del tensore degli sforzi cambiata di segno. Applicando la formula (50) potremo quindi scrivere

$$\chi_i = -\sum_{kl}^{3} a^{kl} \Phi_{ik|l} \,. \tag{51'}$$

20. Richiamo delle equazioni fondamentali della meccanica dei sistemi continui, riferite ad assi fissi: loro trasformazione in coordinate generali (di spazio). — È noto che, quando non si fa alcuna ipotesi sulla natura del mezzo, e quindi non si particolarizzano gli sforzi, le equazioni fondamentali della meccanica dei sistemi continui si riducono all'equazione dinamica

$$\mu \mathbf{a} = \mu \mathbf{F} + \boldsymbol{\chi} \tag{52}$$

(dove μ è la densità, $\mathbf{a}$ la accelerazione, $\mathbf{F}$ la forza di massa e $\boldsymbol{\chi}$ il vettore definito nel paragrafo precedente), e all'equazione di continuità

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) = 0 \tag{53}$$

($\mathbf{v}$ essendo la velocità) che si può anche scrivere

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{53'}$$

dove il simbolo $\frac{d\mu}{dt}$ rappresenta notoriamente una derivata sostanziale, la quale cioè contempla la dipendenza di μ da t in quanto, al variare di t, ci si riferisca costantemente a una medesima particella.

Se ora vogliamo esplicitare queste due equazioni con riferimento a coordinate x qualsivogliono, legate alle y da formule non involgenti il tempo, dobbiamo solamente procurarci le espressioni delle componenti covarianti (o contravarianti) del vettore **a**, poichè quelle di χ ci sono già note dal paragrafo precedente [vedi formola (51′)] e l'espressione invariante di div (μ **v**) è ben nota (*C. D. A.*, Cap. VI, § 7): quanto alla forza **F**, essa si intenderà naturalmente assegnata per mezzo delle sue componenti covarianti (o contravarianti).

L'accelerazione **a** è definita da

$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{dt}$$

dove la derivata (sostanziale) si intende fatta rispetto ad un osservatore (il che è quanto dire assi, o, più generalmente, reticolo coordinato), fisso nel senso meccanico della parola.

Riferendosi alle coordinate y tale relazione si esplicita nelle tre relazioni scalari

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_1^3{}_k \frac{\partial v_i}{\partial y_k} v_k . \tag{54}$$

Se ora, con riferimento a coordinate x qualisivogliono legate alle y da relazioni non involgenti il tempo, si considera il sistema semplice

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_1^3{}_k v_{i|k} v^k \tag{54'}$$

(in cui le $v_{i|k}$ designano derivate covarianti delle v_i) si riconosce agevolmente il suo carattere covariante. Infatti da un lato le $\dfrac{\partial v_i}{\partial t}$ (essendo t un parametro non coinvolto nelle trasformazioni) sono covarianti al pari delle v_i, e d'altro lato le $\sum_1^3{}_{ik} v_{i|k} v^k$ sono covarianti per la legge di saturazione degli

indici. Se poi si osserva ancora una volta che, in coordinate cartesiane ortogonali, le derivate covarianti si riducono alle ordinarie, e così pure alle ordinarie si riducono le componenti covarianti e contravarianti di un vettore, si riconosce che, in tali coordinate, le espressioni (54′) si identificano coi secondi membri delle (54), cioè con le componenti (covarianti) di a_i: tale identità si manterrà dunque anche con referenza alle x, e potremo scrivere

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_1^3{}_k v_{i|k} v^k .$$

Possiamo ora esplicitare le equazioni (52), (53) con referenza alle coordinate x: la prima darà luogo alle equazioni (covarianti)

$$\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_1^3{}_k v_{i|k} v^k\right) = \mu F_i - \sum_1^3{}_{kl} a^{kl} \Phi_{ik|l} \tag{55}$$

e la seconda all'equazione invariante

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \sum_1^3{}_i (\mu v_i)^i = 0 , \tag{56}$$

ovvero

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \sum_1^3{}_i (\mu v^i)_i = 0 . \tag{56'}$$

21. Riferimenti galileiani. — Tra le trasformazioni puramente spaziali sono particolarmente semplici quelle che fanno passare da un sistema di assi cartesiani fissi (nel senso meccanico della parola) ad un sistema di assi cartesiani in moto traslatorio uniforme rispetto a quelli, cioè ad un sistema di riferimento *galileiano*. La definizione di forza, quella di sforzo specifico sopra un elemento superficiale generico, e quella di divergenza (sia di un vettore che di un tensore) non vengono modificate in una trasformazione siffatta, la velocità **v** di un punto generico subisce invece un'alterazione costante, rappresentata dalla velocità di traslazione $\boldsymbol{\tau}$: tale aggiunta però non altera evidentemente l'accelerazione (cioè la derivata sostanziale di $\mathbf{v}$). Da tutto ciò si desume che rimane immutata, in tale trasformazione, l'equazione dinamica (52), e del pari immutata rimane l'equazione di continuità, come si scorge dalla sua forma (53'), nella quale figura, oltre la div $\mathbf{v}$ (invariante come si è testè osservato) la derivata *sostanziale* di μ, derivata che, per il suo intrinseco significato, è manifestamente indipendente dagli assi di riferimento.

Del resto è ben noto che tutte le leggi della meccanica classica rimangono immutate di fronte ad una traslazione uniforme degli assi di riferimento.

22. Forma equivalente del sistema (52), (53). — Nelle equazioni generali del moto dei sistemi continui compare esplicitamente la forza di massa $\mu\,\mathbf{F}$. Dal punto di vista formale si può sempre (ed in infiniti modi) risguardare la $\mathbf{F}$ come la divergenza di un opportuno tensore, e quindi — immaginando questo conglobato nelle Φ_{ik} — è lecito porre senz'altro $\mathbf{F}=0$ nella equazione (52).

Dal punto di vista applicativo ciò non è sempre conveniente, risultando in molti casi preferibile la trattazione diretta, mentre in linea speculativa tale subordinazione della forza di massa agli sforzi è non soltanto legittima, ma altresì rispondente alla veduta fisica che esclude le azioni a distanza, affermando che ogni sollecitazione si trasmette per azioni mediate. In virtù di tali considerazioni porremo ormai $\mathbf{F}=0$ nell'equazione vettoriale (52).

Ci proponiamo ora di trasformare (senza alterazione sostanziale) le tre equazioni scalari riassunte nella (52), e l'equazione di continuità (53) in modo da presentarle tutte e quattro sotto un aspetto uniforme. A tal uopo, cominciamo col riferirci a coordinate cartesiane ortogonali y; e proiettiamo l'equazione (52) (postovi per quanto si è detto testè, $\mathbf{F}=0$) sull'asse y^i. Avremo, come discende in particolare anche dalla (55),

$$\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_1^3{}_k \frac{\partial v_i}{\partial y_k}\,v_k\right)=-\sum_1^3{}_k \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial y_k}, \tag{57}$$

mentre l'equazione di continuità (53) [ovvero (53')] assume la forma ben nota

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\sum_1^3{}_k \frac{\partial(\mu v_k)}{\partial y_k}=0. \tag{58}$$

Aggiungendo alla (57) la (58) moltiplicata per v_i si ha

$$\frac{\partial(\mu v_i)}{\partial t}+\sum_1^3{}_k \frac{\partial(\mu v_i v_k)}{\partial y_k}=-\sum_1^3{}_k \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial y_k}$$

che può essere scritta

$$\frac{\partial(\mu v_i)}{\partial t}+\sum_1^3{}_k \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\mu v_i v_k+\Phi_{ik}\right)=0. \tag{57'}$$

Si vede ora che i primi membri delle (58) e (57') si presentano tutti e quattro come somme di derivate parziali rispetto alle variabili indipendenti t, y_1, y_2, y_3. Ricordiamo poi dal § 5 che, μ designando la densità di materia, $\varepsilon=c^2\mu$ può interpretarsi come densità di energia; d'altra parte il vettore $\mu\mathbf{v}$ (densità di quantità di moto) rappresenta, come è facile persuadersi, il flusso di materia (per unità di superficie e di tempo), e quindi il flusso di energia sarà $c^2\mu\mathbf{v}=\varepsilon\mathbf{v}$.

Per dare ora maggiore uniformità alle equazioni (58), (57'), e per porre in evidenza le quantità di cui si è testè notata l'interpretazione fisica, conviene introdurre al posto di t e delle v, le loro espressioni römeriane $y_0=ct$, $\beta_i=\dfrac{v_i}{c}$ e porre ulteriormente

$$T_{00}=\varepsilon\ =c^2\mu, \tag{59}$$

$$T_{0i}=T_{i0}=-\varepsilon\beta_i=-c\mu v_i, \tag{60}$$

$$T_{ik}=T_{ki}=\Phi_{ik}+\varepsilon\beta_i\beta_k=\Phi_{ik}+\mu v_i v_k \quad (i,k=1,2,3). \tag{61}$$

Con ciò le quattro equazioni (58), (57'), rimangono compendiate in

$$\frac{\partial T_{i0}}{\partial y_0}-\sum_1^3{}_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial y_k}=0 \qquad (i=0,1,2,3). \tag{62}$$

Nelle posizioni (59), (60), (61) si legge il significato delle varie T: T_{00} rappresenta la densità dell'energia; le T_{0i} $(i = 1, 2, 3)$ sono le componenti (cambiate di segno) del relativo flusso (römeriano); le T_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ si riducono, in condizioni statiche $(v_i = 0)$, agli ordinari sforzi, dai quali differiscono in generale per i termini addizionali $\varepsilon\beta_i\beta_k = \mu v_i v_k$ (che sono però, in circostanze ordinarie, poco rilevanti di fronte ai primi). Per distinguere (quando occorre) le T_{ik} dagli sforzi ordinari Φ_{ik} le chiameremo *sforzi cinetici*.

23. Modificazione einsteiniana delle equazioni del moto dei sistemi continui in un caso particolare. — Le originarie equazioni (52), (53), e così le equivalenti (62), hanno carattere invariante di fronte a una ordinaria traslazione uniforme degli assi di riferimento. Ricordiamo ora che, nell'intento di dar forma invariante, rispetto ad una generica (T_4), alla dinamica del punto materiale, siamo stati indotti a modificare leggermente, attraverso il principio di Hamilton, le equazioni del moto; e ne è risultato che, in assenza di forze esterne, le equazioni così modificate conservano la loro forma materialmente inalterata non già di fronte alle traslazioni ordinarie ma di fronte alle trasformazioni di Lorentz, di cui poi abbiamo approfondito lo studio al § **8**.

Se si pensa che nella dinamica dei sistemi continui deve trovarsi inclusa come caso limite (corrispondente ad un mezzo di densità nulla dappertutto tranne in una regione piccolissima) la meccanica di un unico punto materiale, si riconosce intanto come sia assolutamente necessario mettere d'accordo i postulati che si introducono per la meccanica dei sistemi continui con le modificazioni già accolte nella meccanica del punto materiale. Si richiede pertanto che le equazioni (62), in assenza di sforzi, conservino forma immutata di fronte a trasformazioni lorentziane. Assumendo in base alle (59), (60), (61) le espressioni

(63) $$T_{00} = \varepsilon, \qquad T_{0i} = -\varepsilon\beta_i, \qquad T_{ik} = \varepsilon\beta_i\beta_k,$$

tale condizione non è rigorosamente soddisfatta (l'invarianza sussistendo invece, come abbiamo rilevato poc'anzi, di fronte alle ordinarie traslazioni); ma è subito visto che basta una modificazione (al solito lievissima nelle condizioni ordinariamente realizzate) per assicurare la desiderata invarianza di fronte a trasformazioni lorentziane.

All'uopo si ricorre, come già nella dinamica del punto, alla forma quadridimensionale

$$ds_0^2 = dy_0^2 - dl_0^2$$

essendo al solito $dl_0^2 = \sum_1^3 {}_i\, dy_i^2$.

Ove si indichino con dy_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ gli incrementi delle coordinate del generico elemento materiale del nostro sistema che si prende in considerazione, e con dl e ds_0 i corrispondenti elementi di traiettoria (spaziale) e di linea oraria, si ha per definizione

(64) $$\beta_i = \frac{dy_i}{dy_0}$$

donde

(64′) $$\beta^2 = \frac{dl_0^2}{dy_0^2}$$

e

(64″) $$ds_0^2 = dy_0^2\,(1 - \beta^2).$$

I parametri della linea oraria sono

$$\lambda^i = \frac{dy_i}{ds_0}$$

(dove abbiamo soppresso il segno di valore assoluto perchè trattandosi di moto di un punto materiale, è da ritenersi $\beta^2 < 1$, ossia $ds_0^2 > 0$) e sono espressi mediante le β_i, a norma delle (64), (64′), (64″), da

$$\lambda^0 = \frac{dy_0}{ds_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\lambda^i = \frac{dy_i}{ds_0} = \frac{\beta_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Di qui, avuto riguardo alla formula generale

$$\lambda_i = \sum_0^3 {}_k \, g_{ik} \lambda^k$$

e ai valori delle $g_{ik}^o = g^{oik}$ corrispondenti al ds_0^2 [vedi § **6**, formula (12)] si ricavano i momenti

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

$$\lambda_i = - \frac{\beta_i}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Se, in base a queste formule, si prendono in considerazione i monomi

$$\varepsilon \lambda_i \lambda_k$$

e si confrontano con le espressioni (63) delle T_{ik}, si riconosce ovviamente che il divario di ciascuno di essi dalla corrispondente T_{ik} è del 2° ordine.

Ciò premesso, basta, come ora constateremo, sostituire nelle equazioni (62) ai valori (63) delle T_{ik} le determinazioni lievissimamente diverse

$$T_{ik} = \varepsilon \lambda_i \lambda_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3) \tag{65}$$

per raggiungere il desiderato comportamento di fronte a trasformazioni lorentziane, e desumerne anzi nel modo più spontaneo il criterio da seguire per stabilire e trasformare le equazioni nelle ipotesi più generali. All' uopo conviene prima di tutto osservare che, in quanto si assuma come forma fondamentale il ds^2, i secondi membri delle (65), e quindi le T_{ik}, costituiscono un sistema doppio covariante. D'altra parte, ove si abbia ancora una volta riguardo ai particolari valori g_{ik}^o dei coefficienti del ds^2 espresso in coordinate y, appare manifesto che le derivate covarianti delle T_{ik} coincidono con le derivate ordinarie, e che i primi membri delle (62) possono anche pensarsi scritti sotto la forma

$$\sum_0^3 {}_{kl} \, g^{kl} \frac{\partial T_{ik}}{\partial y_l} = \sum_0^3 {}_{kl} \, g^{kl} \, T_{ik|l} = \sum_0^3 {}_k \, T_{ik}^{|k}$$

e non sono altro quindi che le componenti covarianti della divergenza del tensore T_{ik} (*C. D. A.*, Cap. VI, § 7). Quelle equazioni stanno così complessivamente ad esprimere il fatto — invariantivo di fronte a trasformazioni qualisivogliono delle coordinate di spazio e di tempo (*C. D. A.*, Cap. IV, § 12) — che si annulla la divergenza del detto tensore. Ciò posto, basta rammentare che una trasformazione lorentziana lascia materialmente immutata la forma del ds_0^2, per poter affermare che le equazioni (62), con la determinazione (65) delle T_{ik}, seguitano a sussistere anche in seguito ad una qualsiasi trasformazione lorentziana, *c. d. d.*

24. Caso generale - Introduzione del tensore energetico e significato delle sue componenti in coordinate generali. — In assenza di sforzi, siamo stati condotti ad attribuire alle T_{ik} corrispondenti al moto di un generico sistema continuo la determinazione tensoriale

$$T_{ik} = \varepsilon \lambda_i \lambda_k ,$$

ε essendo la densità d'energia, e le λ i momenti della linea oraria dell'elemento materiale.

D'altra parte, considerando, con referenza a coordinate cartesiane, una distribuzione qualsiasi di sforzi, per trasformare le equazioni del moto in coordinate spaziali qualunque (lasciando inalterato il tempo) abbiamo preso le mosse dall' invarianza della forma bilineare $\Phi = \sum_1^3 {}_{ik} \Phi_{ik} \xi^i \xi'^k$ (che ci ha mostrato il carattere tensoriale tridimensionale delle Φ_{ik} quando si passa a coordinate generiche), nonchè dal carattere vettoriale della velocità, e invariantivo della densità. Volendo ora considerare più generalmente trasformazioni (T_4) di spazio e di tempo (cioè della quaterna y_0, y_1, y_2, y_3 in una nuova quaterna x_0, x_1, x_2, x_3) conservando i risultati acquisiti nei due casi particolari testè richiamati (vedi §§ **23** e **20**) basta ammettere più generalmente il carattere tensoriale delle T_{ik} (definite fisicamente con referenza ad un particolare sistema di coordinate) di fronte a trasformazioni qualisivogliono. Il tensore così introdotto si chiama *tensore energetico.*

Ciò equivale ad ammettere l' invarianza di una forma bilineare in quattro variabili

$$B = \sum_{0}^{3}{}_{ik} T_{ik}\, \xi^i\, \xi'^k$$

che abbia per coefficienti le T_{ik} e per argomenti i parametri

$$\xi^i = \frac{dx_i}{ds} \qquad\qquad \xi'^i = \frac{d'x_i}{ds'}$$

di due versori quadridimensionali arbitrari ξ, ξ'. È subito visto che in questo postulato rientrano i due ricordati casi particolari. Infatti, in assenza di sforzi, il carattere tensoriale delle T_{ik} risulta dalle adottate espressioni (65), mentre, per trasformazioni (T_3), che lasciano inalterata la coordinata temporale, l'invarianza della B trae seco quella della forma Φ, come risulta dalle considerazioni seguenti:

Quando si passa da un sistema x ad un sistema $\bar{x}$ si ha per l' invarianza della B, con evidente significato dei simboli,

$$\sum_{0}^{3}{}_{ik} T_{ik}\, dx_i\, d'x_k = \sum_{0}^{3}{}_{ik} \bar{T}_{ik}\, d\bar{x}_i\, d'\bar{x}_k .$$

Se si tratta di una (T_3), avremo che $dx_0 = d\bar{x}_0$, $d'x_0 = d'\bar{x}_0$, e quindi

$$T_{00}\, dx_0\, d'x_0 + dx_0 \sum_{1}^{3}{}_k T_{0k}\, d'x_k + d'x_0 \sum_{1}^{3}{}_k T_{0k}\, dx_k + \sum_{1}^{3}{}_{ik} T_{ik}\, dx_i\, d'x_k =$$

$$= \bar{T}_{00}\, dx_0\, d'x_0 + dx_0 \sum_{1}^{3}{}_k \bar{T}_{0k}\, d'\bar{x}_k + d'x_0 \sum_{1}^{3}{}_k \bar{T}_{0k}\, d\bar{x}_k + \sum_{1}^{3}{}_{ik} \bar{T}_{ik}\, d\bar{x}_i\, d'\bar{x}_k$$

la quale, dovendo sussistere identicamente qualunque siano i differenziali dx_0, $d'x_0$, implica

$$T_{00} = \bar{T}_{00},$$

$$\sum_{1}^{3}{}_k T_{0k}\, dx_k = \sum_{1}^{3}{}_k \bar{T}_{0k}\, dx_k ,$$

$$\sum_{1}^{3}{}_{ik} T_{ik}\, dx_i\, d'x_k = \sum_{1}^{3}{}_{ik} \bar{T}_{ik}\, dx_i\, d'x_k ,$$

e queste, attesa l'arbitrarietà dei differenziali dx_i, $d'x_i$, esprimono appunto che T_{00} è un invariante (densità di energia), che le T_{0k} sono le componenti di un vettore (flusso di energia cambiato di senso) e T_{ik} quelle di un tensore covariante doppio (sforzi cinetici), *c. d. d.*

Vogliamo ora esaminare, con referenza a coordinate pseudocartesiane y, il significato fisico che assume la forma B quando i versori ξ, ξ' si scelgano in modo particolare.

Supponiamo dapprima che entrambe le direzioni siano puramente temporali, cioè che sia

$$dx_i = d'x_i = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, 3)$$

e quindi

$$ds^2 = dy_0^2 \qquad ds'^2 = d'y_0^2 .$$

Allora i soli parametri diversi da 0 sono ξ^0 e ξ'^0 che sono eguali a 1, e resta

$$B = T_{00}:$$

in tal caso cioè la B rappresenta la densità d'energia.

Supponiamo ora ξ, ξ' puramente spaziali ($dy_0 = d'y_0 = 0$, e conseguentemente $ds^2 = -dl_0^2$, $ds'^2 = -dl'^2_0$). Rimane allora

$$B = \sum_{1}^{3}{}_{ik} T_{ik} \frac{dy_i}{dl_0} \frac{d'y_k}{dl'_0} ,$$

cioè la B si riduce all' invariante lineare degli sforzi cinetici.

Supponiamo infine ξ puramente spaziale e ξ' puramente temporale (cioè $dy_0 = 0$, $ds^2 = -dl_0^2$, $dy'_i = 0$, $ds'^2 = dy'^2_0$): la B diviene

$$B = -\sum_{1}^{3}{}_i T_{0i} \frac{dy_i}{dl_0}$$

e si identifica quindi col flusso di energia nella direzione ξ cambiato di segno.

Possiamo ora riconoscere il significato fisico delle T_{ik} con referenza ad un sistema di coordinate qualsiasi. Ciò si desume agevolmente dall' invarianza della forma B ammettendo che il significato fisico di questa forma nei casi particolari testè accennati rimanga lo stesso in qualunque sistema di riferimento. E precisamente:

a) Densità di energia in un istante e in un posto generici x_0, x_1, x_2, x_3, sarà ciò che diventa la B per ξ, ξ' puramente temporali, ossia per

$$\xi^0 = \xi'^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, \quad \xi^i = \xi'^i = 0 \quad (i > 0);$$

tale densità sarà cioè

$$\frac{T_{00}}{g_{00}}.$$

b) Flusso di energia secondo una determinata direzione (spaziale) α di parametri $\alpha^i = \frac{dx_i}{dl}$, sarà ciò che diventa $-B$ quando vi si pone

$$\xi^i = \frac{dx_i}{|ds|} = \frac{dx_i}{dl} = \alpha^i, \qquad \xi^0 = 0,$$

$$\xi'^i = 0, \qquad \xi'^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{V},$$

vale a dire sarà

$$-\frac{1}{V}\sum_1^3{}_i T_{i0}\,\alpha^i.$$

Se, in particolare, la direzione α coincide con una delle direzioni coordinate (per es. la x_h) si ha

$$\alpha^h = \frac{1}{\sqrt{g_{hh}}}$$

e le altre α^i sono nulle: quindi il flusso di energia in quella direzione è dato da

$$-\frac{1}{V}\,\frac{T_{h0}}{\sqrt{g_{hh}}}.$$

c) la componente secondo una direzione α dello sforzo cinetico relativo a una faccetta normale a una direzione α' sarà ciò che diviene B quando vi si ponga

$$\xi_i = \frac{dx_i}{ds} = \frac{dx_i}{dl} = \alpha^i, \qquad \xi^0 = 0;$$

$$\xi'^i = \frac{d'x_i}{ds'} = \frac{d'x_i}{dl'} = \alpha'^i, \quad \xi'^i = 0,$$

ossia

$$\sum_1^3{}_{ik} T_{ik}\,\alpha_i\,\alpha'_k.$$

Se in particolare la direzione α coincide con quella di una delle linee coordinate (per es. x_r) e α' con quella di un'altra (per es. x_s) si avrà

$$\alpha_r = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}, \qquad \alpha'_s = \frac{1}{\sqrt{g_{ss}}},$$

e tutte le altre α saranno nulle; quindi la componente sulla direzione x_r dello sforzo cinetico relativo ad una faccetta normale a x_s sarà

$$\frac{T_{rs}}{\sqrt{g_{rr}\,g_{ss}}}.$$

Prima di chiudere questo paragrafo vogliamo fare un' ultima osservazione. Abbiamo visto che in assenza di sforzi (materia disgregata) il tensore energetico assume la forma particolarmente semplice

$$T_{ik} = \varepsilon\,\lambda_i\,\lambda_k. \tag{65}$$

Un altro caso particolare notevole è quello in cui il tensore energetico ha la forma

$$T_{ik} = \varepsilon\,\lambda_i\,\lambda_k - p g_{ik} \tag{66}$$

(p essendo una qualsiasi funzione del posto e del tempo, invariante). Per vederne il significato fisico, basta prendere in considerazione un determinato punto della V_4, e riferirsi a coordinate (almeno localmente, pseudocartesiane (il che come si sa, è sempre possibile). Allora le g_{ik} assumono le determinazioni δ'^{k}_{i}, mentre le λ_i, se si fa coincidere la direzione x_0 con quella della linea oraria, divengono tutte 0, eccetto λ_0 che è 1.

Si avrà quindi in tali condizioni

$$\begin{aligned} T_{00} &= \varepsilon - p, \\ T_{ik} &= 0 \qquad (i \neq k\,;\ i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3), \\ T_{ii} &= p \qquad (i > 0)\,. \end{aligned}$$

Le due ultime formule ci dicono che su ogni faccetta si esercita uno sforzo normale ad essa, ed indipendente dalla sua orientazione: lo scalare p misura proprio il valore di tale sforzo (per unità di superficie). Il mezzo in considerazione si comporta dunque come un fluido perfetto (cioè incapace di trasmettere sforzi di taglio) e p rappresenta la sua pressione. Occorre appena far notare che, se p è negativa, rappresenta invece una trazione uniforme in tutti i sensi (che, come è noto, può essere sopportata, entro certi limiti, anche dai liquidi reali).

25. Forma relativistica delle equazioni del moto di un sistema continuo. — Nel caso particolare di sforzi nulli, si è visto al § **23** come, riguardando le T_{ik} come elementi di un tensore, si possa attribuire alle equazioni generali del moto di un sistema continuo la forma

$$\sum_{0}^{3}{}_{k}\, T_{ik}{}^{|k} = 0 \qquad (i = 0,\,1,\,2,\,3), \tag{67}$$

valida in coordinate generali x, qualunque sieno le trasformazioni (involgenti spazio e tempo) cui si sottopongono le originarie coordinate y. La giustificazione sta nel carattere invariantivo delle (67) (esprimenti che si annulla la divergenza del tensore T_{ik}) associata alla constatazione che, nelle originarie coordinate y, le (67) si riducono alle (62) e le T_{ik} coincidono (a meno di termini del 2° ordine, se non proprio rigorosamente) colle espressioni (63) che loro competono nella meccanica classica. Tutto ciò vale senz'altro, anche quando si lascia cadere l'ipotesi particolare [che ci ha suggerito la legge di trasformazione delle T_{ik} di fronte alle trasformazioni (T'_4)] che gli sforzi sieno nulli. Basta ritenere, come già abbiamo convenuto, il carattere tensoriale delle T_{ik}, in ogni caso, il che vuol dire in particolare anche se intervengono sforzi Φ_{ik}, a partire dalle loro determinazioni sperimentali, fatte per es. con referenza alle coordinate da cui abbiamo preso le mosse.

Con ciò le (67) rimangono acquisite finchè si tratti di metrica pseudoeuclidea, pur essendo qualisivogliono le coordinate di riferimento: ma l'espressione invariantiva delle leggi del moto, giustificata in tale ipotesi, si estende senz'altro, per ragionevole postulato, al caso generale di una metrica qualsiasi, in virtù dell'osservazione geometrica che in un intorno del primo ordine ogni metrica si comporta come se fosse a coefficienti costanti, quindi: euclidea in senso proprio, nel caso del ds^2 definito, e pseudoeuclidea nei casi che interessano la meccanica relativistica (vedi § **12**). Effettivamente, nelle equazioni (67) intervengono soltanto derivate contravarianti delle T_{ik} il che è quanto dire combinazione delle loro derivate prime ordinarie, delle g_{ik} e delle derivate prime ordinarie di queste: non si esce pertanto dalla considerazione di un intorno di primo ordine del punto generico che si studia.

26. Una classe particolare di moti di un sistema continuo. — Nella meccanica classica l'equazione (52) del moto di un mezzo continuo, in assenza di forze e di azioni molecolari (sistema disgregato), si riduce manifestamente ad

$$\mathbf{a} = 0$$

cui va associata l'equazione di continuità. Ne consegue che l'equazione vettoriale è soddisfatta senz'altro da moti rettilinei uniformi delle singole particelle, la densità rimanendo poi subordinatamente individuata dall'equazione di continuità. Ciò è concettualmente evidente. Volendo tradurlo in formule basta attribuire ad ogni particella materiale, che inizialmente si trovi in P_0, una velocità $\mathbf{v}(P_0)$ funzione (*a priori* arbitraria) del posto P_0: l'equazione geometrica del moto è allora evidentemente

$$P(t) = P_0 + \mathbf{v}(P_0)\,t \tag{68}$$

da cui si vede che la soluzione dipende in sostanza da tre funzioni arbitrarie di tre argomenti ciascuna.

Volendo esplicitare la legge di variazione della densità, è forse preferibile ricorrere all'equazione molecolare di continuità anzichè all'equazione stessa sotto la forma (63), che ne rispecchia l'aspetto locale. Notoriamente, ove si introduca il determinante funzionale D delle coordinate attuali $y(t)$ rispetto alle coordinate iniziali y^0, si ha

$$\mu D = \mu_0$$

essendo μ_0 la determinazione iniziale di μ, *a priori* arbitraria al pari della distribuzione iniziale delle velocità. La (68) proiettata sugli assi, ove si indichino con $v_i(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$ le componenti di $\mathbf{v}$, dà

$$y_i = y_i^0 + v_i t .$$

da cui

$$D = \left\| \delta_i^k + \frac{\partial v_i}{\partial y_k{}^0}\, t \right\| .$$

Risulta da ciò che D è un polinomio di 3° grado in t, che si riduce all'unità per $t = 0$. Naturalmente (supposto che le v sieno finite e continue insieme alle loro derivate prime) il moto si mantiene regolare sempre chè D non si annulli: l'eventuale più piccola radice positiva dell'equazione di 3° grado $D = 0$ caratterizza l'ampiezza dell'intervallo di regolarità; ecc.

Un caso particolare degno di rilievo è quello in cui la densità si mantiene costante per ciascuna particella (sistemi incompressibili): in tal caso $\frac{d\mu}{dt} = 0$, e l'equazione di continuità, sotto l'originaria forma euleriana (63') dà

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \tag{69}$$

Ciò implica in particolare che tale divergenza si annulli nell'istante iniziale, e ci dà quindi, come condizione necessaria perchè la densità si conservi, che sia solenoidale il campo delle velocità iniziali (cioè che sia $\operatorname{div} \mathbf{v}(P_0) = 0$): tale condizione però non è sufficiente. Infatti, perchè si conservi la densità, è necessario e basta che sia $D = 1$ in qualsiasi istante t, e lo sviluppo di D come polinomio di 3° grado in t mostra che ciò richiede tre condizioni, corrispondenti all'annullarsi dei coefficienti di t, t^2, t^3: la (69) esprime solo la prima di queste condizioni. D'altra parte, se queste condizioni sono soddisfatte inizialmente, μ rimane costante per ogni particella (cioè $\frac{d\mu}{dt} = 0$) il che, tornando alla (69), assicura che questa equazione è soddisfatta in ogni istante, ossia che il campo delle velocità rimane sempre solenoidale [1]).

Ci siamo trattenuti alquanto su questa classe di soluzioni elementari, perchè essa è agevolmente generalizzabile ad una V_4 qualsiasi. All'uopo ricordiamo che se $\lambda_i(x_0, x_1, x_2, x_3)$ designano i momenti di una generica congruenza di linee nella V_4, condizione necessaria e sufficiente perchè questa sia geodetica è (*C. D. A.*, Cap. X, § 1) che sia nullo il vettore di curvatura, ossia le sue componenti covarianti, cioè che sia

$$\sum_{0}^{3}{}_l\, \lambda_{i|l}\, \lambda^l = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{70}$$

Ciò premesso, ci proponiamo di mostrare che, in una V_4 di metrica qualsiasi, si ottengono soluzioni delle equazioni (67) prendendo per linee orarie le linee di una qualsiasi congruenza geodetica, ossia supponendo che le λ verifichino le (70) e fissando la densità μ (e per essa la ε che compare nella espressione (65) del tensore energetico di un sistema disgregato cioè in assenza di azioni molecolari) in modo opportuno. Per rico-

[1]) Cfr. CISOTTI, *Moti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni*, « Rend. Acc. Lincei », ser. V, vol. XIX (1° semestre 1910), pp. 373-376. L'osservazione è ivi limitata ai moti permanenti.

nosce1lo basta introdurre materialmente nelle equazioni generali (67), che scriveremo

$$\sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{kl}\, T_{ik|l} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

le espressioni $\varepsilon\, \lambda_i\, \lambda_k$ delle T_{ik}. Avremo

$$T_{ik|l} = \varepsilon_l\, \lambda_i\, \lambda_k + \varepsilon\, \lambda_{i|l}\, \lambda_k + \varepsilon\, \lambda_i\, \lambda_{k|l}$$

e quindi sostituendo

$$\lambda_i \sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{kl}\, \varepsilon_l\, \lambda_k + \varepsilon \sum_{0}^{3}{}_{k}\, \lambda_i^{|k}\, \lambda_k + \varepsilon\, \lambda_i \sum_{0}^{3}{}_{k}\, \lambda_k^{|k} = 0$$
$$(i = 0, 1, 2, 3).$$

Il secondo termine si annulla in virtù della (70) e con ciò le quattro equazioni si riducono all' unica condizione

$$(71) \qquad \sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{kl}\, \varepsilon_l\, \lambda_k + \varepsilon \sum_{0}^{3}{}_{k}\, \lambda_k^{|k} = 0.$$

Basta pertanto individuare ε in base a questa perchè le equazioni del moto sieno tutte soddisfatte, *c. d. d.*

Si può dare una forma alquanto più espressiva all'equazione (71) che definisce ε, notando che (*C. D. A.*, Cap. X, § 2)

$$\sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{kl}\, \varepsilon_l\, \lambda_k = \sum_{0}^{3}{}_{l}\, \varepsilon_l\, \lambda^l = \frac{d\varepsilon}{ds}$$

(s designando l'arco della linea oraria) e che

$$\sum_{0}^{3}{}_{k}\, \lambda_k^{|k} = \operatorname{div} \boldsymbol{\lambda};$$

dove $\boldsymbol{\lambda}$ rappresenta il versore definito dalle λ.

Quindi la (71) si può scrivere

$$(71') \qquad \frac{d\varepsilon}{ds} + \varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{\lambda} = 0,$$

e si ha allora proprio la forma dell'equazione di continuità.

Se in particolare si prende in considerazione una congruenza geodetica solenoidale ($\operatorname{div} \boldsymbol{\lambda} = 0$) l' ultima equazione diviene

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = 0$$

donde ε = cost. lungo ogni linea oraria: cioè la densità di una particella si mantiene costante durante il moto.

27. Sulla determinazione sperimentale dei coefficienti di un ds^2 einsteiniano. — Chiuderemo questo capitolo con una osservazione di indole generale concernente la determinazione sperimentale dei coefficienti g_{ik}.

Poniamoci in condizioni fisiche ben determinate, con che (come già si è accennato ai §§ **10** e **12**) va risguardato pure ben determinato il ds^2 einsteiniano

$$(72) \qquad ds^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

del campo che si tratta di esplorare con acconce esperienze. Ammetteremo, ben s' intende, la validità dei postulati fondamentali della relatività generale, e più precisamente:

a) (cfr. § **16**) la propagazione luminosa avviene sempre in modo che lungo ogni sua linea oraria si abbia

$$(73) \qquad ds^2 = 0;$$

b) (cfr. § **12**) le linee orarie del moto di un punto materiale in un campo di forza cui convenga l' espressione (72) del ds^2 sono geodetiche temporali di questo ds^2.

Ci proponiamo di mostrare come basti la proposizione *a*) per individuare i rapporti dei coefficienti g_{ik} o, ciò che è lo stesso, il ds^2 a meno di un fattore, la cui determinazione può invece ricavarsi dalla b). Dei quattro parametri, x_0 avrà al solito il significato di tempo: si intende di *tempo convenzionale*, misurato (in ogni singolo posto), da un orologio qualsiasi (anche difettoso). Comunque si scelga il parametro temporale x_0 il fatto solo che esso sia tale, implica, secondo lo schema einsteiniano (§ **12**), che, se si fa variare solo x_0 (tenendo costanti x_1, x_2, x_3), deve risultare $ds^2 > 0$. Ma, quando $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$, ds^2 si riduce a $g_{00}\, dx_0{}^2$ sicchè il coefficiente g_{00} risulta necessariamente > 0, e si può quindi porre

$$g_{00} = c^2 e^{2\nu} \tag{74}$$

essendo per es. c una costante positiva (di omogeneità) e ν al pari di g_{00} una incognita funzione di x_0, x_1, x_2, x_3 (*puro numero*, cioè di dimensioni nulle).

Ciò premesso, fissiamo a piacimento un istante x_0 e tre valori x_1, x_2, x_3 delle coordinate di spazio cioè un punto P, e proponiamoci in primo luogo di determinare i rapporti delle g (in P, all'istante x_0).

Ci serviremo all'uopo di segnali luminosi fra P e punti molto vicini dello spazio fisico ambiente, che è per ipotesi (istante per istante) in corrispondenza biunivoca colle terne di coordinate x_1, x_2, x_3. Sono per conseguenza ben determinate nel detto spazio fisico (all'istante x_0) e superficie e linee rappresentate da equazioni fra x_1, x_2, x_3: in particolare le linee x_1 ($x_2 = \text{cost}$, $x_3 = \text{cost}$) su cui varia la sola x_1, le linee x_2, ecc.

Scegliamo due punti Q e Q' molto vicini a P, sulla stessa linea x_1 che contiene il punto P. Supponiamo anzi che Q e Q' corrispondano agli incrementi (da trattarsi come infinitesimi) dx_1 e $-dx_1$ della coordinata x_1; dx_2, dx_3 riescono nulli in entrambi i casi perchè ci si sposta lungo una linea x_1.

Immaginiamo di far partire da P nell'istante x_0 due raggi luminosi, uno verso Q, l'altro verso Q'. Sia $x_0 + dx_0$ l'istante in cui il primo raggio arriva in Q; $x_0 + d'x_0$ l'istante (in generale distinto) in cui il secondo raggio arriva in Q'. Attesa l'espressione (72) del ds^2 e la condizione $ds^2 = 0$ per le propagazioni luminose, avremo, nel passaggio da P a Q,

$$g_{00}\, dx_0^2 + 2 g_{01}\, dx_0\, dx_1 + g_{11}\, dx_1^2 = 0, \tag{75}$$

e, nel passaggio da P a Q',

$$g_{00}\, d'x_0^2 - 2 g_{01}\, d'x_0\, dx_1 + g_{11}\, dx_1^2 = 0\,. \tag{76}$$

Queste due equazioni, in cui dx_1, dx_0, $d'x_0$ sono noti (il primo scelto a piacimento, gli altri due dati dall'esperienza) forniscono ovviamente i rapporti $\frac{g_{01}}{g_{00}}, \frac{g_{11}}{g_{00}}$. Si noti che, qualora i due tempi elementari di propagazione dx_0, $d'x_0$ (desunti dall'osservazione) risultino eguali, le (75) e (76) danno per sottrazione $g_{01} = 0$. Reciprocamente, se $g_{01} = 0$, i due tempi devono coincidere. Perciò la propagazione elementare della luce nella direzione d'una linea x_1 si presenta come fenomeno reversibile allora e allora soltanto che $g_{01} = 0$.

In modo analogo si determinano, considerando le altre due linee coordinate x_2 e x_3, i quattro rapporti

$$\frac{g_{02}}{g_{00}}, \quad \frac{g_{22}}{g_{00}}; \qquad \frac{g_{03}}{g_{00}}, \quad \frac{g_{33}}{g_{00}}.$$

Per procurarsi anche gli altri tre rapporti

$$\frac{g_{23}}{g_{00}}, \quad \frac{g_{31}}{g_{00}}, \quad \frac{g_{12}}{g_{00}}$$

basterà fare ulteriori esperienze dello stesso tipo, prendendo però i punti Q in direzione diversa da quelle delle linee coordinate.

Così, per determinare $\frac{g_{23}}{g_{00}}$, si può servirsi di una linea della superficie $x_1 = \text{cost}$ (passante per P), che non sia nè la x_2, nè la x_3; per es. della

$$x_3 - x_2 = \text{cost}\,.$$

Si hanno allora, nel passare da P ad un punto vicinissimo Q su questa linea, gli incrementi

$$0, \quad dx_2, \quad dx_2$$

con dx_2 arbitrario.

Se si fa partire da P nell'istante x_0 un raggio luminoso verso questo punto Q, e si indica con dx_0 il tempuscolo di propagazione, si ha dalla (73) divisa per g_{00}

$$\text{(77)} \qquad \begin{aligned} & dx_0^2 + 2\,\frac{g_{02}}{g_{00}}\,dx_0\,dx_2 + 2\,\frac{g_{03}}{g_{00}}\,dx_0\,dx_2 + \\ & + \frac{g_{22}}{g_{00}}\,dx_2^2 + \frac{g_{33}}{g_{00}}\,dx_2^2 + 2\,\frac{g_{23}}{g_{00}}\,dx_2^2 = 0 \end{aligned}$$

che permette di ricavare il rapporto $\frac{g_{23}}{g_{00}}$, essendo note o già determinate tutte le altre quantità che vi compariscono. Analogamente per $\frac{g_{31}}{g_{00}}$, $\frac{g_{12}}{g_{00}}$.

Non è fuor di luogo aggiungere che da altre esperienze dello stesso tipo si traggono quante si vogliono (anzi infinite) ulteriori equazioni fra i rapporti delle g. La loro compatibilità, in quanto venga effettivamente suffragata da queste ulteriori esperienze, costituisce un controllo molto significante dello schema einsteiniano fino al postulato a).

Assegnati così i rapporti

$$\text{(78)} \qquad g'_{ik} = \frac{g_{ik}}{g_{00}} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

giova porre, badando alla (74),

$$\text{(79)} \qquad ds^2 = g_{00}\,ds'^2 = c^2\,e^{2\nu}\,ds'^2$$

con che la forma differenziale

$$ds'^2 = \frac{ds^2}{g_{00}}$$

è interamente conosciuta (essendolo i singoli coefficienti).

In base alle (72) e (78), scrivendo a parte i termini che contengono l'indice 0, il ds^2 si esplicita come segue:

$$\text{(80)} \qquad ds'^2 = dx_0^2 + \sum_{1}^{3}{}_i\, g'_{0i}\,dx_0\,dx_i + \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, g'_{ik}\,dx_i\,dx_k.$$

Comunque ci troviamo ricondotti a determinare la funzione ν con esperienze gravitazionali, più precisamente di movimento di corpi (punti materiali) nel campo in cui vale la espressione (79) del ds^2.

Le equazioni del moto sono compendiate nel principio variazionale

$$\text{(81)} \qquad \delta \int ds = 0.$$

Ora se, lungo la traiettoria, si immagina assunto per variabile indipendente il tempo x_0 e si indicano con $\dot{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ le derivate $\frac{dx_i}{dx_0}$, ove, badando alla (80), si ponga

$$\text{(82)} \qquad \begin{aligned} \frac{dx'}{dx_0} &= \sqrt{1 + \sum_{1}^{3}{}_i\, g'_{0i}\,\dot{x}_i + \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, g'_{ik}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_k} = \\ &= L\,(x_0 \mid x_1, x_2, x_3 \mid \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \end{aligned}$$

e si tenga conto della (79), la equazione variazionale (81) può essere scritta

$$\text{(81')} \qquad \delta \int (e^{\nu}\,L)\,dx_0 = 0.$$

Essa equivale alle tre equazioni lagrangiane

$$\frac{d}{dx_0}\,\frac{\partial\,(e^{\nu}\,L)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial\,(e^{\nu}\,L)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Notando che ν non dipende dalle $\dot{x}$, e ponendo per brevità di scrittura

$$\text{(83)} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \alpha_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \beta_i, \qquad \frac{d\,\alpha_i}{d\,x_0} + \beta_i = \gamma_i,$$

risulta

$$\text{(84)} \qquad \alpha_i\,\frac{d\,\nu}{d\,x_0} + \beta_i\,\frac{\partial\,\nu}{\partial x_i} + \gamma_i = 0.$$

Ritenuto tutto ciò, va tenuto presente che l'osservazione diretta del moto ci pone in grado di rilevare come varino le coordinate x_i, in funzione del tempo x_0, sicchè dobbiamo considerare conosciute (per ogni punto materiale che abbandoniamo o lanciamo nel campo di forza di cui si tratta) le $x_i(x_0)$ e quindi anche le derivate $\dot{x}_i$ nonchè $\ddot{x}_i$. Ne consegue che sono egualmente conosciute le quantità α_i, β_i, γ_i definite dalle (83). Dacchè

$$\frac{dv}{dx_0} = \frac{\partial v}{\partial x_0} + \sum_1^3 {}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \dot{x}_i,$$

le (84) ci si presentano in definitiva come tre equazioni lineari nelle 4 derivate parziali dell'incognita funzione v. Fissato un punto generico P e un istante x_0 ogni arbitraria scelta della velocità del corpo di prova (cioè dei tre valori numerici da attribuirsi alle $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$) dà luogo a tre equazioni nelle 4 derivate

$$\frac{\partial v}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3}$$

riferite al posto e all'istante. Queste equazioni consentono dunque esuberantemente la determinazione dei valori numerici di dette derivate: esuberantemente, nel senso che se ne possono trarre, moltiplicando le esperienze, non solo le 4 incognite, ma anche quanti si vogliono controlli.

Note le derivate della v (in ogni punto di un certo campo e in ogni istante di un certo intervallo), la v stessa rimane determinata a meno di una costante additiva; quindi, a norma della (74), la g_{00} a meno di una costante moltiplicativa, che si congloba nel fattore di omogeneità c^2, talchè questo resta arbitrario. La sua presenza nella espressione di g_{00} e quindi, a norma della (79), nel ds^2, appare nella natura delle cose, corrispondendo in sostanza alla scelta, che rimane arbitraria, dell'unità con cui si conviene di misurare il ds^2, cioè gli intervalli cronotopici.

CAPITOLO II.

Le equazioni gravitazionali e la relatività generale.

1. APPREZZAMENTI QUALITATIVI SUI COEFFICIENTI DEL ds^2. — Per quanto si è visto nel capitolo precedente (§ **12**) i coefficienti g_{ik} del ds^2 einsteiniano dello spazio-tempo, nelle condizioni corrispondenti al moto dei corpi celesti (in particolare, dei corpi costituenti il sistema planetario), qualora ci si riferisca a variabili y_0, y_1, y_2, y_3 che (almeno sensibilmente) siano interpretabili come tempo assoluto la prima, e coordinate cartesiane le altre, sono poco diversi da $\delta'^{\,k}_{i}$, il divario essendo almeno di 2° ordine (nel senso allora precisato). Anzi possiamo dire più precisamente che:

a) g_{00} differisce da $1 - \frac{2\,U}{c^2}$ per termini d'ordine superiore al 2° (cfr. Cap. prec., § **10**): U rappresentando l'ordinario potenziale newtoniano del campo che si considera;

b) le g_{0i} $(i > 0)$ sono di ordine superiore al 2°: infatti qualora fossero soltanto di 2° ordine di tale ordine dovrebbe essere altresì (come risulta dal Cap. prec., § **17**) il divario tra le velocità di propagazione della luce nelle varie direzioni attorno ad un punto, il che non è fisicamente ammissibile, poichè un divario di tale entità sarebbe rivelato da esperienze ottiche;

c) le altre g_{ik} $(i, k > 0)$ differiscono da $\delta'^{\,k}_{i}$, per termini del 2° ordine, o di ordine superiore.

Ciò posto, fissiamo l'attenzione sopra il moto (assoluto) di un generico punto materiale P (per es. un piccolo pianeta), e sia $u(P, P')$ il potenziale newtoniano dell'attrazione esercitata sopra di esso da uno qualsiasi P' degli altri corpi potenzianti, che supporremo di massa assai grande rispetto a P (come è effettivamente negli esempi tipici offerti dall'astronomia). Supposte pertanto trascurabili le perturbazioni di P sul moto di P'; la dipendenza di u dalle coordinate spaziali y_1, y_2, y_3 avviene pel tramite di P, mentre la sua dipendenza dal tempo (römeniano) y_0 ha luogo pel tramite del corpo potenziante P'. Detto δP uno spostamento generico del punto P (di componenti δy_i) e

$$\delta u = \sum_0^3{}_i \frac{\partial u}{\partial y_i} \delta y_i$$

il corrispondente incremento della u, si ha

$$\delta u = \mathbf{F} \times \delta P$$

essendo $\mathbf{F}$ la forza che P' esercita su P. D'altra parte, se si considera un tempuscolo dy_0 e si indica con dP' lo spostamento di P in quel tempuscolo, e con du l'incremento subordinato nella u si ha in modo analogo, tenuto presente il principio di reazione,

$$du = -\mathbf{F} \times dP'.$$

È agevole dopo ciò rendersi conto dell'ordine di grandezza della derivata temporale di u in rapporto a quelle spaziali. Infatti, dalla prima formula, ponendo $\delta P = \mathbf{n}\,\delta l$ (dove $\mathbf{n}$ è il versore di una direzione generica) si trae che la derivata di u in questa direzione vale (come del resto è ben noto) $\mathbf{F} \times \mathbf{n}$, ed ha quindi l'ordine di grandezza della intensità F della forza; mentre dalla seconda formula, dividendo per dy_0, segue

$$\frac{du}{dy_0} = -\mathbf{F} \times \frac{dP'}{dy_0} = -\mathbf{F} \times \frac{1}{c}\frac{dP'}{dt},$$

da cui si vede che l'ordine di grandezza di questa derivata è βF (β designando, come in tutto il Capitolo precedente, rapporto fra velocità di un punto materiale e velocità c della luce). Dunque, nelle condizioni supposte, la derivata temporale di u è del 1° ordine rispetto a quelle spaziali. La stessa conclusione si applica senz'altro a g_{00}, che è, come si è detto, $1 - \frac{2U}{c^2}$ (a meno di termini di ordine superiore al 2°), in quanto U è somma di termini del tipo testè considerato.

Prendendo norma da quanto accade per g_{00}, ammetteremo che, nelle ordinarie circostanze astronomiche:

d) le derivate delle g_{ik} rapporto alla y_0 siano di ordine superiore di una unità almeno alle analoghe derivate rapporto alle altre y.

Da tutto ciò si raccoglie che, in quanto ci si accontenti di risultati approssimativi (con che intendiamo limitarci ai termini del 2° ordine), tutto va come se le g_{i0} fossero nulle, e le altre g_{ik} indipendenti da y_0. Ciò val quanto dire che, nel suddetto ordine di approssimazione e nelle ordinarie circostanze astronomiche, *ogni ds^2 ha comportamento statico.*

2. Il tensore G_{ik} e la sua divergenza – Tensore gravitazionale. — Come si sa (*C. D. A.*, Cap. VII, § 12) per una V_n qualsiasi, dal tensore riemanniano, si ricava il tensore doppio simmetrico

(1) $$G_{ik} = \sum_1^n{}_{jh} a^{jh} (ij, hk)$$

e il suo invariante lineare

(2) $$G = \sum_1^n{}_{ik} a^{ik} G_{ik}.$$

Tale definizione vale, naturalmente, anche per una metrica indefinita: in particolare quindi per il ds^2 della relatività ($n = 4$), nel qual caso il tensore in parola prende il nome di tensore di Einstein. Le sue componenti sono

(1′) $$G_{ik} = \sum_0^3{}_{jh} g^{jh} (ij, hk)$$

e il suo invariante lineare si scrive in conformità

(2′) $$G = \sum_0^3{}_{ik} g^{ik} G_{ik} = \sum_0^3{}_{ijhk} g^{ik} g^{jh} (ij, hk).$$

Notiamo incidentalmente che per una V_2 il tensore G_{ik} si riconduce alla curvatura gaussiana K, valendo la relazione [1])

$$G_{ik} = K\, g_{ik} \qquad (i, k = 1, 2) \tag{3}$$

mentre per una V_3 le G_{ik} si riducono ai simboli del RICCI

$$a^{ik} = \frac{(i+1\; i+2,\; k+1\; k+2)}{a}$$

(cfr. il § 1 dell'*Appendice*, alla fine di questo volume), avendosi precisamente

$$G_{ik} = a_{ik} - \mathrm{M}\, a_{ik} \tag{4}$$

dove M designa la curvatura media della V_3, ossia

$$\mathrm{M} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{ik}\, a_{ik}. \tag{5}$$

Per $n = 4$, in base alla formula generale del *C. D. A.*, Cap. VII, § 4,

$$N = \frac{n^2 (n^2 - 1)}{12},$$

il tensore di RIEMANN consta (in generale) di 20 elementi, algebricamente indipendenti, mentre gli elementi G_{ik} del tensore di EINSTEIN ne forniscono soltanto 10 combinazioni lineari. Questa semplice osservazione aritmetica mostra che il tensore einsteiniano non può esaurire tutte le proprietà di curvatura del ds^2; ma basta a rispecchiare, come vedremo, quelle che hanno essenziale importanza fisica.

[1]) Infatti, per $n = 2$, dalla definizione di K (vedi *C. D. A.*, Cap. VII, § 9) e da quella del sistema ε_{ik} (vedi *C. D. A.*, Cap. VI, § 8), si ha $(i\,j,\, h\,k) = K\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{hk}$ come si verifica immediatamente, rammentando che il simbolo $(i\,j,\, h\,k)$ o si riduce allo schema $(12,\, 12) = Ka$, o si annulla. D'altra parte, sempre per la definizione dei simboli ε, si hanno pure le identità

$$\sum_{0}^{2}{}_{jh}\, g^{jh}\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{hk} = g_{ik}.$$

Scrivendo nella (1') $K\, \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{hk}$ al posto di $(ij,\, hk)$ e tenendo presente quest' ultima identità, si ricava la (3).

Prima di iniziare una tale indagine, procuriamoci l'espressione della divergenza del tensore G_{ik}. Dalle (1') si ha per derivazione covariante

$$G_{ik|l} = \sum_{0}^{3}{}_{jh}\, g^{jh}\, (i\,j,\, h\,k)_l$$

con che le componenti della divergenza

$$Y_i = \sum_{0}^{3}{}_{k}\, G_{ik}^{|k} = \sum_{0}^{3}{}_{kl}\, g^{kl}\, G_{ik|l} \tag{6}$$

divengono

$$Y_i = \sum_{0}^{3}{}_{jhkl}\, g^{jh}\, g^{kl}\, (i\,j,\, h\,k)_l\,.$$

In virtù delle relazioni

$$(i\,j,\, hk) = (h\,k,\, i\,j)$$

le identità del BIANCHI (*C. D. A.*, Cap. VII, § 5) consentono di sostituire ad $(i\,j,\, h\,k)_l$

$$-\,(j\,l,\, h\,k)_i - (l\,i,\, h\,k)_j$$

con che si ha

$$Y_i = -\sum_{0}{}_{jhkl}\, g^{jh}\, g^{kl}\, (j\,l,\, h\,k)_i - \sum_{0}^{3}{}_{jhkl}\, g^{jh}\, g^{kl}\, (l\,i,\, k\,h)_j\,.$$

Il primo termine non è altro che $G_{,i}$, come risulta dalla derivazione covariante della (2'), scritta, mediante scambio materiale di indici, sotto la forma

$$G = -\sum_{0}^{3}{}_{jlhk}\, g^{jh}\, g^{kl}\, (j\,l,\, h\,k).$$

Quanto al secondo termine, scambiandovi ad un tempo j con l ed h con k, esso si scrive

$$-\sum_{0}^{3}{}_{jhkl}\, g^{kl}\, g^{jh}\, (j\,i,\, k\,h)_l$$

e, attesa l'identità

$$(j\,i,\ k\,h) = (i\,j,\ h\,k)\,,$$

si riduce manifestamente a $-Y_i$. Si ha dunque

$$Y_i = \frac{1}{2} G_i \tag{7}$$

che in virtù della (6) può anche essere scritta

$$\sum_{0}^{3}{}_k\, G_{ik}^{|k} - \frac{1}{2} G_i = 0\,. \tag{7'}$$

Ove si noti che il tensore Gg_{ik} (proporzionale al tensore fondamentale g_{ik}) ha per divergenza

$$\sum_{0}^{3}{}_{kl}\, (Gg_{ik})_l\, g^{kl} = \sum_{0}^{3}{}_l\, G_l \sum_{0}^{3}{}_k\, g_{ik}\, g^{kl} = G_i\,,$$

si riconosce che la (7) o la equivalente (7') sta ad esprimere *che è nulla la divergenza del tensore*

$$G_{ik} - \frac{1}{2} G\, g^{ik}\,,$$

che prende il nome di *tensore gravitazionale*, nome che sarà giustificato nel seguito.

3. Solidarietà dei fenomeni fisici – Criterio costruttivo delle equazioni gravitazionali e riduzione della loro giustificazione induttiva al caso statico. — Nell'immediata prossimità di un posto e di un istante prefissati, un fenomeno meccanico è (almeno concettualmente) caratterizzato in modo completo, ove si conoscano, in quel posto e in quell'istante, densità e velocità della materia (o, ciò che è lo

stesso, dell'energia) nonchè la distribuzione degli sforzi specifici, che include, come conseguenza differenziale, la determinazione della forza di massa: del resto, ponendosi rigorosamente dal punto di vista delle azioni mediate, si può prescindere da quest'ultima, come già fu accennato al § **22** del precedente Capitolo.

In sostanza, a caratterizzare localmente un fenomeno meccanico, occorre e basta la conoscenza del tensore energetico T_{ik}.

Questa osservazione ha una portata più generale, valendo anche per altri ordini di fenomeni (p. es., i fenomeni elettromagnetici).

La veduta fondamentale di Einstein è che l'insieme dei fenomeni fisici abbia influenza sopra la metrica della V_4 e più precisamente che in ogni punto P della V_4 debba sussistere una relazione locale fra la determinazione del tensore energetico, che può ritenersi caratteristica delle circostanze fisiche, e il comportamento delle curvature della V_4 nello stesso punto. Come ipotesi astratta, la possibilità di una tale influenza, limitata tuttavia alla metrica spaziale, era già stata affacciata indipendentemente da Riemann e da Clifford. L'Einstein la completò, facendo intervenire non soltanto la metrica spaziale, ma quella del cronotopo, che congloba spazio e tempo e (come si è già visto nel prec. Capitolo, § **4**, studiando il moto materiale di un punto) anche la forza del campo, attraverso il coefficiente g_{00}.

Importa rilevare che, come abbiamo osservato nel precedente Capitolo, § **22**, le forze di massa si possono in linea matematica risguardare provenienti da una opportuna distribuzione di sforzi. Dal punto di vista della meccanica classica ciò si potrebbe applicare in particolare anche alle forze di origine gravitazionale; tuttavia l'Einstein attribuisce a queste un posto privilegiato, immaginando che tutte le azioni di origine gravitazionale (e queste soltanto) siano così intimamente fuse con le determinazioni geometriche e temporali da risultare senz'altro individuate dal ds^2 quadridimensionale. Una tale possibilità risulta largamente da tutte le considerazioni svolte nei §§ **4** a **12** del Capitolo precedente. Tutte le altre forze non gravitazionali (in particolare le azioni di provenienza elettromagnetica) vanno invece ricondotte al tensore energetico. Per attribuire forma matematica a tale veduta, l'EINSTEIN doveva collegare il ds^2 (cioè i suoi dieci coefficienti) al tensore energetico (cioè alle dieci T_{ik}): doveva quindi stabilire dieci equazioni. Una di queste era, almeno approssimativamente, imposta dallo schema newtoniano, ed ecco in qual modo. Nella meccanica classica lo spazio si considera rigorosamente euclideo e, in base alla legge di NEWTON, la densità μ della materia determina il campo di forze attraverso il potenziale newtoniano

$$U = f \int_C \frac{\mu \, dC}{r}$$

dove f è la costante di gravitazione, e gli altri simboli hanno il significato ben noto. Da questa espressione della U segue classicamente l'equazione di POISSON

$$\Delta_2 U = -4 \pi f \mu$$

in ogni punto del campo. Ove si pensi (Cap. I, § **24**) che, a meno di una costante moltiplicativa, la densità μ si identifica con l'elemento T_{00} del tensore energetico, mentre, in prima approssimazione (Cap. I, § **4**), si ha

$$g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2},$$

si riconosce che l'equazione di POISSON collega un elemento del tensore energetico a una somma di derivate seconde di g_{00}.

Le equazioni differenziali che legano i coefficienti g_{ik} del ds^2 alle T_{ik} devono perciò essere tali da includere, almeno in prima approssimazione, la relazione suddetta. Si è così, per ragionevole induzione, tratti a pensare che per costruire le dieci equazioni richieste si debbono eguagliare le dieci componenti T_{ik} del tensore energetico ad altrettante espressioni differenziali di secondo ordine nelle g_{ik}, che, per il carattere invariantivo del sistema, devono pure costituire un tensore. Ora, un tensore doppio di secondo ordine nelle g_{ik} è dato da quelle combinazioni del tensore di RIEMANN che abbiamo considerato nel paragrafo precedente: in conformità, il tipo di relazioni che primo si presenta alla mente sarebbe di assumere le G_{ik} eguali o proporzionali alle T_{ik}, ed effettivamente è questa la prima via saggiata dall'EINSTEIN. Ma subito dopo egli pensò che le equazioni fondamentali non devono imporre alla natura metrica del cronotopo alcuna limitazione *a priori*, nel senso che qualsiasi determinazione del ds^2 deve potersi risguardare come astrattamente possibile purchè intervenga un opportuno tensore energetico. Un tale comportamento non sarebbe conciliabile con la proporzionalità fra le G_{ik} e le T_{ik}, perchè quest'ultimo tensore per la sua origine fisica, soddisfa, come vedemmo, (Cap. I, § **25**) a quattro condizioni differenziali esprimenti l'annullarsi della sua divergenza: dovrebbero perciò anche le G_{ik} essere vincolate dalle corrispondenti equazioni. Si può tuttavia conservare l'idea di una relazione lineare fra i due tensori senza che ne venga alcun legame differenziale fra le g_{ik}, ricordando che, per quanto si è visto al paragrafo precedente, il tensore

$$G_{ik} - \frac{1}{2} G \, g_{ik}$$

ha divergenza identicamente nulla. Basta quindi porre

$$G_{ik} - \frac{1}{2} G \, g_{ik} = -\varkappa \, T_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3) \tag{8}$$

dove $\varkappa$ designa una costante (che ci riserviamo di collegare alla f dell'equazione di POISSON), perchè non ne risulti alcuna conseguenza differenziale fra le sole g_{ik}. Sono queste le celebri equazioni gravitazionali. Le considerazioni che precedono servono solo a renderne plausibile l'aspetto formale; la giustificazione fisica risulta *a posteriori* da un doppio ordine di constatazioni.

All'uopo, poniamoci intanto in prima approssimazione, supponiamo cioè che sia piccolo il divario dalla sua determinazione pseudoeuclidea. Come si è visto al Cap. I, § **10**, conviene porre

$$g_{00} = 1 - 2\gamma,$$
$$g_{0i} = -\gamma_i,$$
$$g_{ik} = -\delta_i^k - \gamma_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

trattando le γ come quantità del primo ordine. Ricordiamo d'altra parte che in tale ipotesi le equazioni del moto di un punto materiale, in prima approssimazione, non dipendono nè dalle γ_i nè dalle γ_{ik}, ma soltanto dal coefficiente g_{00}, o, ciò che è lo stesso, dalla funzione γ, e precisamente si riducono alle classiche equazioni newtoniane

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

essendo

$$\gamma = \frac{U}{c^2}. \tag{9}$$

In vista di ciò, per giustificare le equazioni gravitazionali in prima approssimazione, tutto si riduce a verificare:

a) che una di esse (quella corrispondente ad $i = k = 0$) involge unicamente la γ (cioè la U) e si identifica con la equazione di Poisson;

b) che le altre nove, si accordano con valori delle funzioni γ del supposto ordine di grandezza: le loro precise determinazioni in questa prima approssimazione sono del tutto indifferenti, perchè qualunque esse siano, si ritrova comunque lo schema newtoniano. Potremo poi limitare le constatazioni *a*) e *b*) al caso statico, per le ragioni indicate alla fine del precedente paragrafo.

Il passaggio ad una approssimazione ulteriore nelle equazioni del moto di un punto materiale fa intervenire (vedi Cap. I, § **10**) sia le determinazioni di prima approssimazione di γ_i e γ_{ik}, sia il termine correttivo di secondo ordine nell'espressione di g_{00}: è questo divario dallo schema newtoniano che, in quanto accessibile alla osservazione (astronomica), consente di saggiare l'eventuale superiorità dello schema einsteiniano su quello classico.

Per così dire, ci si trova a questo punto in condizioni analoghe a quelle in cui si è trovato Newton sostituendo alle leggi cinematiche di Keplero il principio dinamico dell'attrazione

universale, che ha consentito non solo di includerle come risultati di prima approssimazione, ma di prevedere, in proporzioni grandiose, nuovi fatti che hanno trovato mirabile conferma. Nella sostituzione allo schema classico dell'impostazione relativistica, le previsioni riguardano fenomeni più minuti, ma, almeno qualcuno di essi è, anche con gli attuali mezzi sperimentali, accessibile all'esperienza. In questo controllo risiede la seconda parte della giustificazione delle equazioni gravitazionali a cui sopra si è alluso.

4. Equazioni generali della statica einsteiniana – Spazi vuoti.

— Quando si tratta di fenomeni statici (Capitolo prec., § **12**) il ds^2 del cronotopo si presenta sotto la forma

$$ds^2 = V^2\, dx_0^2 - dl^2 \tag{10}$$

con

$$dl^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{1}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,. \tag{10'}$$

I coefficienti a_{ik} vanno ritenuti, al pari di V, funzioni soltanto di x_1, x_2, x_3; la V si interpreta (Cap. I, § **17**) come velocità della luce e si considera quindi essenzialmente positiva.

Con manifesto significato dei simboli si ha

$$\left\{\begin{aligned} &g_{ik} = -a_{ik}, \qquad g_{0i} = 0, \qquad g_{00} = V^2, \\ &\qquad\qquad g = -a\,V^2; \\ &g^{ik} = -a^{ik}, \qquad g^{0i} = 0, \qquad g^{00} = \frac{1}{V^2} \\ &\qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Converrà contrassegnare con un apice i simboli di Christoffel e le componenti, sia del tensore di Riemann che di quello di Einstein, relativi alla forma quaternaria (10), riservando la ordinaria notazione senza apice agli analoghi simboli relativi alla (10').

Dalle formole di definizione si ricava subito, in base alle (11),

$$\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\},$$

$$(12)\quad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ 0 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 0\,i \\ k \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 0\,0 \\ 0 \end{matrix} \right\}' = 0, \\ \left\{ \begin{matrix} i\,0 \\ 0 \end{matrix} \right\}' = \dfrac{V_i}{V}, \\ \left\{ \begin{matrix} 0\,0 \\ i \end{matrix} \right\}' = V\,V^i, \end{cases}$$

dove i, k, l, possono assumere i valori 1, 2, 3,

$$V_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad V^i = \sum_1^3{}_j\, a^{ij}\, V_j$$

ne è il sistema reciproco rispetto al dl^2.

Esplicitiamo ora anche le espressioni dei simboli di RIEMANN di seconda specie del ds^2 quaternario in funzione degli analoghi ternari e della V. Si ha per definizione (*C. D. A.*, Cap. VII, § 2)

$$\{ i\,r,\ h\,k \}' = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix} \right\}' -$$

$$-\sum_0^3{}_l \left[\left\{ \begin{matrix} l\,h \\ r \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} l\,k \\ r \end{matrix} \right\}' \left\{ \begin{matrix} i\,h \\ l \end{matrix} \right\}' \right].$$

Conviene esaminare separatamente i vari casi che possono presentarsi, secondo il numero degli indici i, r, h, k che sono eguali a zero:

1) nessun indice eguale a zero. Il primo gruppo delle (12) dà immediatamente

$$(13)\qquad \{ i\,r,\ h\,k \}' = \{ i\,r,\ h\,k \};$$

2) un solo indice eguale a zero. Attesa l'emisimmetria dei simboli di RIEMANN rispetto ai due ultimi indici, basterà esaminare le tre eventualità in cui l'indice nullo sia i, r, o h: in ogni caso, dal secondo gruppo delle formule (12) segue immediatamente che i simboli di RIEMANN di questo tipo sono tutti nulli

$$(14)\qquad \{ 0\,r,\ h\,k \}' = \{ i\,0,\ h\,k \}' = \{ i\,r,\ 0\,k \}' = 0;$$

3) due indici eguali a zero. Per le proprietà generali del tensore di RIEMANN i simboli del tipo $\{ ir, 00 \}'$ si annullano identicamente (per qualsiasi ds^2), e quelli del tipo

$$\{ 0\,0,\ h\,k \}' = \sum_0^3{}_j\, g^{j0}\,(0\,j,\ h\,k)$$

si annullano ogniqualvolta sia $g^{j0} = 0$ (per $j > 0$), come è nel caso nostro. Restano dunque da considerare i due tipi

$$\{ 0\,r,\ 0\,k \}' \quad \text{e} \quad \{ i\,0,\ 0\,k \}'.$$

In virtù delle (12) e della formula fondamentale di derivazione covariante rispetto al dl^2 spaziale, si trova materialmente

$$(14')\quad \begin{cases} \{ 0\,r,\ 0\,h \}' = V\,(V^r)_k, \\ \{ i\,0,\ 0\,k \}' = \dfrac{V_{ik}}{V}; \end{cases}$$

4) tre o quattro indici uguali a zero. Si riconosce immediatamente dalle (12) che tali simboli sono tutti nulli. Con ciò siamo in grado di esplicitare anche il tensore doppio simmetrico G'_{ik}, i cui elementi sono, come sappiamo (§ 2)

$$G'_{ik} = \sum_0^3{}_h \{ i\,h,\ h\,k \}' = \sum_1^3{}_h \{ i\,h,\ h\,k \}' + \{ i\,0,\ 0\,k \}'.$$

Introducendo l'analogo sistema

$$G_{ik} = \sum_1^3{}_h \{ i\,h,\ h\,k \}$$

relativo alla forma ternaria dl^2, si perviene subito, tenendo conto delle espressioni trovate per le $\{ i\, r, h\, k \}'$ alle relazioni:

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} G'_{ik} &= G_{ik} + \frac{V_{ik}}{V}, \\ G'_{0k} &= 0 \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3), \\ G'_{00} &= -V \sum_{h}^{3}{}_{1} V_h^h = -V \Delta_2 V. \end{aligned} \right.$$

In base a queste formule e alle (11) si ha, per l'invariante lineare del sistema G_{ik},

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} G' &= \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g^{ik}\, G'_{ik} = g^{00}\, G'_{00} - \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{ik}\, G'_{ik} = \\ &= -\frac{\Delta_2 V}{V} - \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{ik}\, G_{ik} - \frac{\Delta_2 V}{V}. \end{aligned} \right.$$

A questo punto giova ricordare (cfr. il § 1 dell'*Appendice*) che, per le varietà a tre dimensioni, si sostituisce con vantaggio al tensore G_{ik} il tensore α_{ik} di Ricci, il cui invariante lineare

$$\mathrm{M} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{ik}\, \alpha_{ik}$$

rappresenta la curvatura media (§ 2 dell'*Appendice*, or ora citata), ossia la somma delle tre curvature principali.

Fra le G_{ik} e le α_{ik} passano le relazioni lineari

$$G_{ik} = \alpha_{ik} - \mathrm{M}\, a_{ik}$$

da cui segue in particolare, moltiplicando per a_{ik} e sommando rispetto agli indici i, k

$$G = \mathrm{M} - 3\mathrm{M} = -2\mathrm{M}.$$

Con ciò le (15) e (16) divengono

$$(15') \qquad \left\{ \begin{aligned} G'_{ik} &= \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \mathrm{M}\, a_{ik}, \\ G'_{i0} &= 0, \\ G'_{00} &= -V \Delta_2 V. \end{aligned} \right.$$

$$(16') \qquad \frac{1}{2} G' = \mathrm{M} - \frac{\Delta_2 V}{V}$$

le quali forniscono espressioni appropriate per le componenti del tensore einsteiniano e del suo invariante lineare in condizioni statiche.

Ciò premesso, riprendiamo le equazioni gravitazionali (8) del paragrafo precedente e notiamo in primo luogo che, mancando, in condizioni statiche, ogni flusso di energia, le componenti T_{0i} si annullano. Perciò, avuto riguardo alle (11) e (15'), tre delle richiamate equazioni si riducono a pure identità, e ne rimangono sette: le sei (corrispondenti ai valori non nulli degli indici) che in virtù delle (15'), (16') e (11) assumono la forma

$$(17) \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V}\, a_{ik} = -\varkappa\, T_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

nonchè (per $i = k = 0$)

$$-V \Delta_2 V - \frac{1}{2} G'\, g_{00} = -\varkappa\, T_{00}.$$

ossia badando alla (8')

$$(18) \qquad \mathrm{M} = \varkappa \frac{T_{00}}{V^2}.$$

Queste sette equazioni [1]) (17) e (18) riducono, come è nella natura delle cose, la statica einsteiniana alle tre dimensioni

[1]) Cfr. Levi-Civita, « Rend. Acc. Lincei », serie V, vol. XXVI (1° sem. 1917), pag. 458.

dello spazio ambiente. Esse hanno forma invariantiva rispetto alla metrica di questo spazio, fungendo da forma fondamentale il relativo dl^2. Vi figurano inoltre, come elementi associati alla forma fondamentale, le due funzioni (invarianti) V e T_{00}, e il sistema covariante doppio T_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$. Quest' ultimo caratterizza la distribuzione degli sforzi; mentre $\frac{T_{00}}{V^2}$ si interpreta quale densità d'energia (cfr. il § **24** del capitolo precedente), rappresentando V, come è stato detto in principio, la velocità della luce.

Nei riguardi della densità di energia giova rilevare che, almeno nell'ambito dei fenomeni oggidì meglio conosciuti (sia materiali che elettromagnetici in senso lato), non c' è esempio di densità negativa [1]), sicchè si può ritenere il secondo membro della (18) ≥ 0. Ne viene questo corollario geometrico: *La curvatura media* M *che si determina nello spazio fisico per effetto di fenomeni puramente statici, è in ogni caso positiva o nulla.*

Una notevole conseguenza delle (17) si ha moltiplicandole per a^{ik} e sommando rispetto ai due indici. Avuto riguardo alla definizione di M e alla (18) si ottiene

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{1}{2}\varkappa\left(\mathrm{T} + \frac{T_{00}}{V}\right) \tag{19}$$

dove

$$\mathrm{T} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{ik}\, T_{ik} \tag{20}$$

rappresenta evidentemente l' invariante lineare del sistema degli sforzi rispetto al nostro dl^2 (dello spazio ambiente). Tale

[1]) Infatti, se in un dato posto, c' è materia in riposo distribuita con densità μ, ciò importa una energia di origine materiale $c^2\mu$, che (in condizioni normali) prepondera di gran lunga su tutti gli altri eventuali contributi. D' altra parte il contributo alla densità d' energia di origine elettromagnetica è esso pure ≥ 0. Perciò, anche in assenza di materia, la densità di energia non sembra suscettibile di valori negativi.

invariante — sia detto per incidenza — non deve confondersi collo scalare del tensore quadridimensionale

$$T = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g^{ik}\, T_{ik}$$

cui, a norma delle (3), spetta invece l'espressione

$$T = \frac{T_{00}}{V^2} - \mathrm{T}.$$

Consideriamo in particolare una regione di spazio in cui si annullino tutte le componenti del tensore energetico (spazio vuoto). Dal punto di vista fisico, tale circostanza si può ritenere realizzata quando la detta regione non sia sede nè di materia ordinaria, nè di energia elettromagnetica, poichè in tal caso segue dalla meccanica dei mezzi materiali che si annullano gli sforzi di origine materiale, e, dalla teoria di MAXWELL, che si annulla il campo e quindi gli sforzi maxwelliani [1]).

In tale ipotesi le equazioni (17) e (18) si riducono manifestamente alla forma

$$\Delta_2 V = 0, \tag{21}$$

$$a_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{22}$$

la prima delle quali mostra che non proprio il coefficiente temporale $g_{00} = V^2$, ma la sua radice quadrata è una funzione armonica. Per l'armonicità di V, le (22) danno

$$\mathrm{M} = 0\,. \tag{21'}$$

Qualora il tensore energetico fosse nullo in *tutto* lo spazio, è intuitivo, sotto l'aspetto fisico, che il ds^2 einsteiniano sarebbe rigorosamente pseudoeuclideo, e quindi lo spazio ambiente ri-

[1]) Cfr. per es. JEANS, *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, 5ª edizione (Cambridge University Press), 1925, Cap. VI.

gorosamente euclideo: ciò rispecchia infatti il punto di partenza della costruzione speculativa di EINSTEIN che fa derivare ogni deviazione dalla pseudo-euclideità dalla influenza di quelle azioni fisiche che sono riassunte nel tensore energetico. Del resto, il SERINI [1]) lo ha rigorosamente dimostrato, in base alle equazioni (21) e (22).

5. PRIMA APPROSSIMAZIONE - RICOLLEGAMENTO ALL'EQUAZIONE DI POISSON [2]). — Se si suppone che l'espressione del ds^2 sia molto prossima al tipo euclideo riferito a coordinate cartesiane di spazio e al tempo römeriano

$$ds^2 = dy_0^2 - \sum_1^3{}_i\, dy_i^2$$

giova porre (Capitoto prec., § **10**)

$$V = 1 - \gamma, \tag{23}$$

$$a_{ik} = \delta_i^k + \gamma_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{24}$$

Si ha così

$$dl^2 = \sum_1^3{}_{ik}\, a_{ik}\, dy_i\, dy_k = dl_0^2 + \sum_1^3{}_{ik}\, \gamma_{ik}\, dy_i\, dy_k \tag{24'}$$

dove dl_0^2 è l'elemento lineare dell'ordinario spazio euclideo in coordinate cartesiane.

Le γ_{ik} sono puri numeri al pari della γ, e il supposto comportamento qualitativo del ds^2 equivale, in prima approssimazione, a trattare come infinitesime tutte queste sette quantità.

Ne consegue che sono pure infinitesimi i simboli di CHRISTOFFEL

$$\begin{bmatrix} i\,h \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_h} + \frac{\partial a_{jh}}{\partial y_i} - \frac{\partial a_{ih}}{\partial y_j}\right).$$

[1]) « Rend. Acc. Lincei », ser. V, vol. XXVII (1° sem. 1918), p. 285.
[2]) Pag. 464 della Nota già citata a pag. 105.

Dacchè poi, con la stessa approssimazione, le a_{jr} conservano i valori euclidei δ_j^r, si riconosce che i simboli di seconda specie

$$\begin{Bmatrix} i\,h \\ r \end{Bmatrix} = \sum_1^3{}_j\, a^{jr} \begin{bmatrix} i\,h \\ j \end{bmatrix}$$

non differiscono sensibilmente dagli omologhi $\begin{bmatrix} i\,h \\ r \end{bmatrix}$ di prima specie. Ne consegue che, dalla definizione dei simboli di RIEMANN si ha, a meno di termini d'ordine superiore,

$$\{ i\,r,\ h\,k \} = \frac{\partial}{\partial y_k}\begin{Bmatrix} i\,h \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial y_h}\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_k}\begin{bmatrix} i\,h \\ r \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial y_h}\begin{bmatrix} i\,k \\ r \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial y_r\, \partial y_h} + \frac{\partial^2 a_{rh}}{\partial y_i\, \partial y_k} - \frac{\partial^2 a_{ih}}{\partial y_r\, \partial y_k} - \frac{\partial^2 a_{rk}}{\partial y_i\, \partial y_h} \right\}.$$

Di qui segue, in base alla definizione delle G_{ik} (vedi § **2**), e avendo riguardo alle (24),

$$G_{ik} = \sum_1^3{}_h \{ i\,h,\ h\,k \} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1^3{}_h \left\{ \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial y_h^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{hh}}{\partial y_i\, \partial y_k} - \frac{\partial^2 \gamma_{ih}}{\partial y_h\, \partial y_k} - \frac{\partial^2 \gamma_{hk}}{\partial y_i\, \partial y_k} \right\}.$$

Veniamo oramai alle equazioni statiche (17) e (18). Vi abbiamo fatto apparire, in luogo delle G_{ik}, le α_{ik} di RICCI ad esse legate dalle relazioni

$$\alpha_{ik} = G_{ik} + \mathrm{M}\, a_{ik}.$$

Si noti ora che M va ritenuta infinitesima al pari delle G_{ik} e del loro invariante lineare, con che, per la (18), lo stesso accade di T_{00}. Dopo ciò, ponendo per M il suo valore (18), le espressioni esplicite che in prima approssimazione competono alle a_{ik} assumono la forma

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} a_{ik} &= \frac{1}{2}\sum_1^3{}_h \left\{ \frac{\partial^2\gamma_{ik}}{\partial y_h^2} + \frac{\partial^2\gamma_{hh}}{\partial y_i\,\partial y_k} - \frac{\partial^2\gamma_{ih}}{\partial y_h\,\partial y_k} - \frac{\partial^2\gamma_{hk}}{\partial y_i\,\partial y_h} \right\} + \\ &+ \varkappa\, T_{00}\,\delta_i^k \qquad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned} \right.$$

Con tale intesa, ove si noti altresì che le derivate covarianti di $V = 1 - \gamma$, sempre a meno di infinitesimi d'ordine superiore, non differiscono dalle derivate ordinarie, con che in particolare

$$\varDelta_2 \mathrm{V} = -\varDelta_0^2\,\gamma = -\sum_1^3{}_i \frac{\partial^2\gamma}{\partial y_i^2},$$

le (17) e la (19) si scrivono

$$(26)\qquad a_{ik} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial y_i\,\partial y_k} + \varDelta_2^0\gamma\,\delta_i^k = \varkappa\, T_{ik},$$

$$(27)\qquad \varDelta_2^0\gamma = -\frac{1}{2}\,\varkappa\,(\mathrm{T} + T_{00}).$$

In particolare, negli spazi vuoti, annullandosi i secondi membri, esse si riducono a:

$$(26')\qquad a_{ik} = \frac{\partial^2\gamma}{\partial y_i\,\partial y_k},$$

$$(27')\qquad \varDelta_2^0\gamma = 0.$$

Giunti a questo punto importa fissare l'attenzione sul significato meccanico della funzione γ, o meglio del prodotto $c^2\gamma$. Nel § **4** del Cap. I trattando della modificazione einsteiniana del principio di HAMILTON si è visto che, per i ds^2 prossimi alla forma pseudoeuclidea, il divario di g_{00} dall'unità rappresenta, in prima approssimazione, $-\frac{U}{c^2}$ essendo U il potenziale del campo di forza entro cui avviene il moto. Tale divario essendo nel caso presente $-\gamma$, si ha

$$(9)\qquad \gamma = \frac{U}{c^2}:$$

Naturalmente questa stessa conclusione si sarebbe anche potuta desumere dalla proposizione del Capitolo precedente, § **13**, che $-\frac{1}{2}c^2V^2$ costituisce (a meno di una inessenziale costante additiva) la funzione potenziale della forza che si esercita nel campo in condizioni statiche. Il nostro V^2 vale $1 - 2\gamma$, e quindi

$$-\frac{1}{2}c^2V^2 = -\frac{1}{2}c^2(1 - 2\gamma) = -\frac{c^2}{2} + c^2\gamma,$$

c. d. d.

Ciò premesso, poniamoci per un momento ancora dal punto di vista della meccanica classica, e consideriamo il campo di forza dovuto ad una generica distribuzione di materia di densità $\mu = \frac{\varepsilon}{c^2}$, essendo ε la corrispondente densità di energia; detto U il potenziale newtoniano di tale campo, sussiste notoriamente l'equazione di POISSON

$$\varDelta_2\, U = -4\pi f\mu = -\frac{4\pi f}{c^2}\,\varepsilon$$

(f essendo il coefficiente di attrazione universale). D'altra parte, se ci si pone invece dal punto di vista della Relatività generale, la stessa distribuzione materiale dà luogo ad un ds^2 per cui $\gamma = \frac{U}{c^2}$, e ad un tensore energetico la cui componente T_{00} coincide con ε, mentre annullandosi le T_{0i} in condizioni statiche, le altre componenti T_{ik} rappresentano sforzi (§ **24** del Capitolo prec.). Se si tratta di materia disgregata le T_{ik}, e quindi anche il loro invariante T, sono zero, e la (27) diviene

$$\varDelta_2^0\, U = -\frac{1}{2}c^2\varkappa\,\varepsilon.$$

Affinchè questa coincida con l'equazione di POISSON è necessario e basta che la costante $\varkappa$ delle equazioni gravitazionali sia legata alle classiche costanti universali

$$f = 6,7 \cdot 10^{-8} \quad \text{e} \quad c = 3 \cdot 10^{10}$$

(in unità G. G. S.) dalla relazione

$$\varkappa = \frac{8\,\pi\,f}{c^4} \tag{28}$$

di cui si ricava (in unità G. G. S.), in cifra tonda,

$$\varkappa = 2 \,.\, 10^{-48}.$$

D'ora innanzi intenderemo adottato senz'altro per $\varkappa$ questo valore e ci collocheremo definitivamente sul terreno relativistico. In relazione a quanto fu detto al § **3** si può ritenere a questo punto esaurita la giustificazione preliminare delle equazioni gravitazionali. Infatti la loro prima approssimazione è rappresentata, in condizioni statiche, dalle (26) e (27). La (27) si identifica, come si è ora verificato, con l'equazione di POISSON; le (26) servono a determinare (come effettivamente riconosceremo al paragrafo seguente), le γ_{ik}, le quali d'altronde, come già si è detto, non hanno in prima approssimazione influenza sul moto, ma diventeranno essenziali quando si tratterà invece di discriminare, in una scala più raffinata, fra la meccanica newtoniana e l'impostazione relativistica. Ci siamo qui riferiti specificamente al caso statico, ma la giustificazione delle equazioni gravitazionali ottenuta in questo caso sussiste, come si è già detto al § **3**, anche nel caso generale, purchè si ritengano d'ordine superiore al primo i coefficienti γ_i dei termini rettangoli in $dy_0\,dy_i$ $(i=1,2,3)$. Questa circostanza abbiamo allora desunta da fatti sperimentali e ce ne siamo serviti per ridurre le dieci equazioni gravitazionali alle sette (17) e (18). Ora che siamo, per così dire, in fase deduttiva, e dobbiamo mostrare anzitutto che le equazioni gravitazionali contengono in sintesi tutti i fatti di prima approssimazione, è d'uopo rilevare la circostanza che, pur in condizioni ordinarie di moto materiale (velocità piccola rispetto a quella della luce), le tre equazioni gravitazionali

$$G_{0i} - \frac{1}{2}\,G\,g_{i0} = K\,T_{0i} \qquad (i=1,\,2,\,3) \tag{29}$$

che sono rigorosamente soddisfatte in condizioni statiche, rimangono verificate in prima approssimazione, supponendo le γ_i d'ordine superiore al secondo (che è quello di γ e delle γ_{ik}). Infatti i primi membri come si è visto (cfr. § **4**) vanno identicamente a zero quando vi si ponga $g_{0i}=0$: ciò significa che se le tre g_{0i} si trattano come quantità γ_i piccole di un certo ordine, i primi membri delle (29) risultano dello stesso ordine almeno [1]). Perciò basta supporre le γ_i d'ordine superiore al secondo perchè i primi membri risultino anch'essi tali, ossia nulli in prima approssimazione. Con questo le (29) rimangono appunto soddisfatte poichè anche i loro secondi membri sono d'ordine superiore a $-\varkappa\,T_{00}$ e quindi nulli in prima approssimazione. Per eseguire questo confronto basta rammentare che in una metrica pseudoeuclidea, e quindi (a meno di termini d'ordine superiore) anche nel caso nostro, si ha (vedi Cap. I, § **24**)

$$T_{0i} = -\,\varepsilon\,\beta_i = -\,T_{00}\,\beta_i\,.$$

La presenza del fattore β_i ci rende ragione dell'affermata piccolezza delle T_{0i} in confronto della T_{00}.

6. ds^2 EINSTEINIANO CORRISPONDENTE, IN PRIMA APPROSSIMAZIONE, AD UN CAMPO NEWTONIANO ASSEGNATO. — Supposto assegnato un campo newtoniano, e per esso il suo potenziale U, possiamo anzitutto, per l'osservazione fatta al § **1**, prescindere dall'eventuale esplicita dipendenza di U dal tempo (conseguente al moto delle masse materiali) e trattare U quale funzione soltanto delle coordinate di spazio, come se le masse fossero immobili nella posizione che occupano all'istante considerato. Fissando l'attenzione sopra una regione non occupata da masse potenzianti, in quella regione sarà $\Delta_2 U = 0$. Per caratterizzare il corrispondente ds^2 einsteiniano in prima ap-

[1]) Si può rendersene conto nel modo più sbrigativo immaginando che le g_{0i} siano della forma $h\gamma_i{}^*$ dove h è un coefficiente numerico che caratterizza l'ordine di grandezza e le $\gamma_i{}^*$ sono funzioni del posto e del tempo, da trattarsi come quantità finite assieme alle loro derivate. È chiaro in tal caso che i primi membri delle (29) contengono h come fattore.

prossimazione dovremo determinare (vedi § 5) le funzioni γ e γ_{ik}, essendo la γ data da $\gamma = \frac{U}{c^2}$, e le g_{ik} determinate dalle

$$(26') \qquad a_{ik} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y_i \, \partial y_k},$$

in cui, come già si osservò nel precedente paragrafo, le derivate covarianti che figurerebbero ai secondi membri si possono identificare colle ordinarie, in quanto ne differirebbero per termini d'ordine superiore.

Per l'integrazione di tali equazioni si nota in primo luogo che una soluzione particolare si ha prendendo

$$(30) \qquad \gamma_{ik} = 2\, \delta_i^k \gamma .$$

La verificazione è immediata, attesa l'espressione (25) delle a_{ik} in cui, naturalmente, va posto $T_{00} = 0$: basta sostituirvi materialmente

$$(25') \quad a_{ik} = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_h \left\{ \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial y_h^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{hh}}{\partial y_i \, \partial y_k} - \frac{\partial^2 \gamma_{ih}}{\partial y_h \, \partial y_k} - \frac{\partial^2 \gamma_{hk}}{\partial y_i \, \partial y_h} \right\}$$

e tener conto dell'armonicità di γ.

Siccome poi le (26') costituiscono un sistema lineare, non omogeneo, nelle γ_{ik}, l'integrale generale si ha senz'altro componendo per via di somma la soluzione (30) con la soluzione più generale delle equazioni prive di secondo membro

$$a_{ik} = 0 .$$

L'integrale generale di tale sistema si potrebbe costruire facilmente ricordando (*C. D. A.*, Cap. VII, § 11) che per le varietà a tre dimensioni, l'annullarsi delle a_{ik} di RICCI implica che siano nulli del pari tutti i simboli di RIEMANN, ossia che le

$$a_{ik} = \delta_i^k + \gamma_{ik}$$

siano i coefficienti di un dl^2 euclideo (riferito a coordinate curvilinee qualsivogliono). Del resto l'aggiunta alla soluzione particolare (30) dell'integrale generale del sistema omogeneo non ha interesse perchè, come vedremo tra un momento, corrisponde soltanto a un cambiamento delle coordinate di riferimento.

Invero, l'annullarsi delle a_{ik} esprime, come abbiamo or ora osservato, la condizione necessaria e sufficiente perchè il dl^2 sia euclideo, ossia riducibile con acconcia scelta di parametri alla forma $\sum_1^3 dy_i^2$. Perciò, dette genericamente x_1, x_2, x_3 le coordinate di riferimento, la maniera più generale di definire un dl^2 euclideo, rispetto a tali coordinate x, si ha manifestamente introducendo una qualunque trasformazione fra le y e le x,

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

e prendendo per coefficienti a_{ik} quelli che risultano dall'esprimere $\sum_1^3{}_i dy_i^2$ mediante i differenziali delle x. Assumendo, come è sempre lecito, le funzioni $y_i(x_1, x_2, x_3)$ sotto la forma

$$x_i + \xi_i(x_1, x_2, x_3)$$

si ha (per materiale introduzione dei corrispondenti differenziali nel trinomio $\sum_1^3{}_i dy_i^2$)

$$dl^2 = \sum_1^3{}_{ik} a_{ik} dx_i dx_k$$

con

$$a_{ik} = \delta_i^k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) + \sum_1^3{}_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} .$$

Per rispecchiare la limitazione al primo ordine delle differenze $a_{ik} - \delta_i^k = \gamma_{ik}$ colla specificazione ulteriore che sia dello stesso ordine il divario fra il reticolato cartesiano delle y e quello (curvilineo) delle x [1]), basta (e occorre) poter trattare

[1]) In difetto di tale specificazione, si esige soltanto che risultino infinitesime le sei quantità (numeriche)

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) + \sum_1^3{}_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}$$

e ciò può ottenersi, come ha mostrato il prof. ALMANSI (*L'ordinaria teoria dell'elasticità e la teoria delle deformazioni finite*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XXVI (2° sem. 1917), pp. 3-8), anche senza che sieno infinitesime le stesse ξ.

come infinitesime le funzioni ξ (assieme alle loro derivate). Ne risulta

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) \tag{31}$$

che costituisce l'espressione formale dell'integrale generale del sistema omogeneo $a_{ik} = 0$ (le a_{ik} dipendono linearmente dalle γ, a norma delle (25')).

Ma non è questa espressione formale che importa ritenere, sibbene la circostanza che il termine (31) (da aggiungere a (30) per avere l'integrale generale del sistema (26') a secondi membri non nulli) si può sempre rendere eguale a zero mediante opportuno cambiamento di coordinate: sostituendo cioè alle x le combinazioni

$$y_i = x_i + \xi_i (x_1, x_2, x_3) \tag{32}$$

con che l'espressione del dl^2 si riduce, per costruzione, a $\sum_1^3 i\, dy_i^2$, annullandosi tutte le differenze $a_{ik} - \delta_i^k$.

Scelte per variabili le y, si deve naturalmente far subire la trasformazione (32) anche alla soluzione particolare (30). Ma la (32) — dovendosi risguardare le ξ infinitesime al pari di γ — si riduce, nei riguardi della (30), alla materiale sostituzione delle y alle x. Rimane perciò inalterata, anche riferendosi alle y, la espressione (31) della soluzione particolare che sola ci interessa.

Si noti inoltre che rimane egualmente inalterata la forma elementare (somma delle derivate seconde) del parametro $\Delta_2^0 \gamma$.

Si raccoglie da quanto precede che, *entro un campo vuoto, al potenziale statico* (in prima approssimazione newtoniano) U *si collega una alterazione metrica dello spazio ambiente. Scelte opportunamente le coordinate di riferimento* (le y testè caratterizzate), si ha

$$\gamma = \frac{U}{c^2}$$

la γ risultando armonica (anche nelle variabili y); ai coefficienti a_{ik} del quadrato dell'elemento lineare competono (colla stessa approssimazione) le espressioni

$$\delta_i^k (1 + 2\gamma)$$

con che

$$dl^2 = (1 + 2\gamma)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Come si vede, lo spazio non resta in generale euclideo, nemmeno in prima approssimazione, ma è soltanto (in tale approssimazione) rappresentabile conformemente entro uno spazio euclideo.

In definitiva, ricordando che $g_{00} = 1 - 2\gamma$ *e che* $g_{0i} = 0$, *il* ds^2 *globale di* EINSTEIN *che conviene ad un assegnato campo di forza newtoniano di potenziale* $U = c^2 \gamma$ *è dato da*

$$ds^2 = (1 - 2\gamma)\, dx_0^2 - (1 + 2\gamma)\, dl_0^2 \tag{33}$$

(dl_0^2 elemento lineare di uno spazio euclideo).

Naturalmente, nel caso di un'unica massa puntiforme m_0 basta prendere

$$\gamma = \frac{f m_0}{c^2} \frac{1}{r}$$

dove r rappresenta la distanza fra la massa e il punto potenziante.

7. Ulteriore approssimazione per il coefficiente g_{00} in condizioni statiche. — Fin dal capitolo precedente (§ **10**) abbiamo rilevato che, se il ds^2 del cronotopo si discosta poco dal comportamento pseudo-euclideo, sul moto di un punto materiale influisce in prima approssimazione soltanto il divario di secondo ordine $2\gamma = \dfrac{2U}{c^2}$ di g_{00} dall'unità, ricadendosi così nello schema newtoniano, mentre per passare ad una approssimazione ulteriore, ossia per calcolare la parte principale delle correzioni einsteiniane alle leggi della meccanica classica, bisogna procurarsi non soltanto le γ_{ik}, divari di second'ordine delle a_{ik} dai valori euclidei (le γ_i essendo d'ordine superiore), ma occorre una valutazione di $g_{00} = V^2$ spinta sino al quarto ordine.

Vi si perviene assai facilmente, limitandosi al caso statico e a una porzione di spazio vuota (tensore energetico nullo). Si ha allora rigorosamente l'equazione indefinita (21) del § **4**, cioè

$$\Delta_2 V = 0 \tag{21}$$

il Δ_2 riferendosi, ben s' intende, al dl^2 spaziale.

In prima approssimazione si ha, come si è visto,

$$V^2 = 1 - 2\gamma$$

dove γ è proporzionale al potenziale dal campo a norma della (9). Dovremo porre in conformità

$$V = 1 - \gamma - \psi \tag{34}$$

ritenendo ψ di ordine superiore al secondo. L'espressione esplicita (*C. D. A.*, Cap. VI, § 7) del Δ_2 in coordinate generiche

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3{}_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\sqrt{a}\, V^l)$$

dà, prima di tutto, in base alla (21) e alla (34),

$$\sum_1^3{}_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\sqrt{a}\, \psi^l) = - \sum_1^3{}_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\sqrt{a}\, \gamma^l) . \tag{21'}$$

Noi dobbiamo trarne ψ con approssimazione spinta fino al 4° ordine: essendo già la γ del 2°, nel calcolo delle γ^l e di $\sqrt{a}$ basterà limitarsi ai termini del 2° ordine, ossia [cfr. formula (33)] riferirsi alla forma

$$dl^2 = (1 + 2\gamma)\, dl_0^2 .$$

Con ciò

$$\sqrt{a} = (1 + 2\gamma)^{3/2} ,$$

$$\gamma^l = \frac{\gamma_l}{1 + 2\gamma} ,$$

donde, a meno di termini d'ordine superiore al 4°,

$$\sqrt{a}\, \gamma^l = \gamma_l (1 + \gamma) = \gamma_l + \frac{1}{2} (\gamma^2)_l .$$

A priori non sappiamo ancora di che ordine ν (per ipotesi certo superiore al 2°) sia il termine addizionale ψ che noi dobbiamo calcolare, non solo nella sua parte preponderante d'ordine ν, ma con gli eventuali termini addizionali fino al 4° ordine incluso. Occupiamoci intanto della parte d'ordine ν: potremo nel primo membro della (21') sostituire 1 a $\sqrt{a}$, il divario essendo di 2° ordine con che si vengono a trascurare termini d'ordine $\nu + 2$. Risulta così, attesa l'armonicità di γ,

$$\Delta_2^0 \left(\psi + \frac{1}{2} \gamma^2 \right) = 0$$

$\left(\text{dove } \Delta_2^0 \text{ rappresenta, al solito, l'operatore di } \textsc{Laplace} \sum_1^3{}_l \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}\right)$, da cui

$$\psi = - \frac{1}{2} \gamma^2 + \text{funz. arm.}$$

Se si aggiungono convenienti ipotesi di comportamento qualitativo, si riconosce che la funzione armonica addizionale deve annullarsi, e rimane

$$\psi = - \frac{1}{2} \gamma^2 \tag{21''}$$

come termine preponderante della funzione ψ. Siccome questo è già di 4° ordine, possiamo ritenere la (21'') come espressione di ψ esatta fino al 4° ordine incluso.

Se ne trae, con la stessa approssimazione,

$$g_{00} = V^2 = \left(1 - \gamma + \frac{1}{2} \gamma^2 \right)^2 = 1 - 2\gamma + 2\gamma^2 . \tag{35}$$

8. Un teorema di equivalenza meccanica. — Dai due precedenti paragrafi risulta che il ds^2 einsteiniano il quale corrisponde ad un prefissato campo newtoniano statico di potenziale U, è, con sufficiente approssimazione, espresso da

$$ds^2 = (1 - 2\varphi)\, dy_0^2 - (1 + 2\gamma)\, dl_0^2 \tag{36}$$

dove

$$\gamma = \frac{V}{c^2}, \tag{37}$$

$$\varphi = \gamma - \gamma^2. \tag{37'}$$

Nella (36) ci si accontenta della prima approssimazione per i coefficienti del dl^2 spaziale, mentre in V^2 è esplicitata anche la parte di 4° ordine. Questa formula ci si presenta come un caso particolare del ds^2 considerato al § **10** del Capitolo prec. [formula (27)]. Per definire il moto di un punto materiale, cioè le geodetiche di un tale cronotopo, seguendo i criteri del suddetto paragrafo, notiamo anzitutto che dalla (36) risulta

$$\frac{ds^2}{dy_0^2} = 1 - 2\varphi - (1 + 2\gamma)\left(\frac{dl_0}{dy_0}\right)^2$$

che, confrontata con le (28) del capitolo precedente, mostra che essa corrisponde al caso particolare in cui $\left(\text{coincidendo } \left(\frac{dl_0}{dy_0}\right)^2 \text{ con } \beta^2 = \frac{v^2}{c^2}\right)$ la forma lineare T_1 si annulla, e la forma quadratica T_2 si riduce a $\gamma\beta^2$. Si è così materialmente ricondotti al caso considerato nel § **11** del citato capitolo: basta porvi

$$\chi = 2\gamma = \frac{2U}{c^2}, \qquad \psi = -\gamma^2 = -\frac{U^2}{c^4}.$$

Con ciò la (31') del Capitolo prec. dà:

$$U_1 = \left(1 + \frac{4E}{c^2}\right) U + \frac{3U^2}{c^2} \tag{38}$$

e conduce all' enunciato seguente: *le traiettorie del moto einsteiniano coincidono, in seconda approssimazione, con quelle di un moto newtoniano (nell'ordinario spazio euclideo) pel quale, l'energia totale essendo ancora E, la forza derivi dal potenziale U_1.*

Detto t_1 il tempo (ordinario) in questo ausiliario problema newtoniano, si ha corrispondentemente l' integrale delle forze vive

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dl_0}{dt_1}\right)^2 - U_1 = E.$$

A questo integrale si può attribuire una forma più comoda per la considerazione che abbiamo in vista, ricordando dal citato paragrafo che $U_1 + E = U^*$ si può scrivere, a meno di termini d'ordine superiore, sotto la forma

$$U^* = (U + c^2\psi + E)\left(1 + \frac{2U}{c^2} + \chi\right)$$

qualunque siano le determinazioni di χ e ψ. Nel caso nostro, essendo

$$\chi = \frac{2U}{c^2}, \qquad \psi = -\frac{U^2}{c^4}.$$

si avrà

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dl_0}{dt_1}\right)^2 = \left(U - \frac{U^2}{c^2} + E\right)\left(1 + \frac{4U}{c^2}\right). \tag{39}$$

D'altra parte, si è visto al citato § **11** che per il moto einsteiniano sussiste, coll'adottata approssimazione, l' integrale

$$\frac{1}{2} v^2 \left(1 + \frac{2U}{c^2} + \chi\right) - (U + c^2\psi) = E.$$

Essendo t la variabile che funge da tempo in questo problema, $v^2 = \frac{dl_0^2}{dt^2}$. Sostituendo poi a χ e ψ i loro valori, si può scrivere

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dl_0}{dt}\right)^2 \left(1 + \frac{4U}{c^2}\right) = U - \frac{U^2}{c^2} + E.$$

Da questa e dalla (39) si ricava la seguente relazione differenziale

$$dt = dt_1 \left(1 + \frac{4\,U}{c^2}\right).$$

che permette di dedurre, dalla risoluzione completa del problema newtoniano, anche la legge del tempo nel moto einsteiniano.

9. MOTO DEI PIANETI SECONDO EINSTEIN IN SECONDA APPROSSIMAZIONE – SPOSTAMENTO DEL PERIELIO. — Il risultato precedente trova la sua più cospicua applicazione nel problema del moto dei pianeti intorno al Sole. Trattando i pianeti (come del resto si fa abitualmente in prima approssimazione) quali punti materiali di massa così piccola rispetto al Sole da non influire sensibilmente sul campo (si suol dire più generalmente sulla metrica quadridimensionale che ad esso compete) ci si trova ricondotti al problema risolto nel paragrafo precedente nel caso particolare in cui la funzione U sia il potenziale di un'unica massa m_0 (Sole) che si può assumere come origine O delle coordinate. Si ha quindi, come al § 6

$$U = \frac{f m_0}{r}$$

essendo r la distanza Sole-pianeta (valutata come se lo spazio interposto fosse rigorosamente euclideo). Sappiamo dal paragrafo precedente che, nei riguardi della traiettoria, tutto va come se, valendo la meccanica ordinaria, il pianeta si trovasse soggetto ad una forza unitaria centrale derivante dal potenziale (38). Esso consta di due termini, dei quali il primo, $\left(1 + \frac{4E}{c^2}\right) U$, corrisponde ad una attrazione inversamente proporzionale ad r^2, di componente radiale

$$\left(1 + \frac{4E}{c^2}\right) \frac{dU}{dr} = - \frac{k}{r^2}$$

dove si è posto per brevità

$$k = \left(1 + \frac{4E}{c^2}\right) f m_0 , \tag{40}$$

e il secondo ad una forza perturbatrice, anch'essa centrale e attrattiva, ma inversamente proporzionale ad r^3, di componente radiale

$$\frac{3}{c^2} \frac{dU^2}{dr} = - \frac{k_1}{r^3} ,$$

essendosi posto

$$k_1 = \frac{6 f^2 m_0^2}{c^2} . \tag{41}$$

Si hanno, come si vede, due modificazioni della legge newtoniana: 1) un'alterazione del coefficiente di proporzionalità che da $f m_0$ diviene $k = f m_0 \left(1 + \frac{4E}{c^2}\right)$, con una correzione del 2° ordine (nel senso costantemente attribuito a questa locuzione); 2) una forza perturbatrice (anch'essa del 2° ordine rispetto alla newtoniana) inversamente proporzionale al cubo della distanza, cioè proprio del tipo già considerato dal NEWTON. Ora, è ben noto dalla teoria delle forze centrali [1]) che, il moto avvenendo in ogni caso in un piano, se la componente radiale della forza ha l'espressione

$$- \frac{k}{r^2} - \frac{k_1}{r^3} ,$$

l'equazione dell'orbita, in coordinate polari r, ϑ, può (orientando convenientemente l'asse polare) essere posta sotto la forma

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \alpha\vartheta} \tag{42}$$

[1]) Cfr. p. es. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. (II)$_1$, pag. 200.

dove, detta C la costante delle aree,

$$a^2 = 1 - \frac{k_1}{C^2}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{k}{C^2 - k_1} \tag{43}$$

ed e è una costante introdotta dall' integrazione, che si può sempre supporre positiva, cambiando eventualmente ϑ in $\vartheta + \pi/a$.

Tutto ciò vale in generale; supponiamo ora, più particolarmente, $e < 1$, il che significa moto ellittico in prima approssimazione (cioè per $k_1 = 0$, con che a si riduce all' unità). Possiamo d'altra parte ritenere $e > 0$ escludendo con ciò il caso dell'orbita circolare. Con tale limitazione, si può, nell'equazione (42), far variare ϑ incondizionatamente, e l'equazione stessa mostra che quando ϑ si incrementa di $\frac{2\pi}{a}$ la r riprende il medesimo valore. Ciò vale in particolare per il valore minimo di r (ossia per la distanza perielia); e quindi in due successivi passaggi al perielio le anomalie differiscono di $\frac{2\pi}{a}$. Nel caso particolare $a = 1$ (orbita ellittica a perielio fisso) tale divario vale precisamente 2π, cosicchè la differenza

$$\sigma = \frac{2\pi}{a} - 2\pi = 2\pi \left(\frac{1}{a} - 1 \right)$$

rappresenta, in valore e segno, lo spostamento angolare del perielio in una rivoluzione. Col precedente valore di a, tenendo conto della piccolezza di $\frac{k_1}{C^2}$, si ha

$$\sigma = \pi \frac{k_1}{C^2}.$$

Occorrendo soltanto per σ (che è già un termine correttivo) una prima approssimazione, possiamo, al posto di C^2, porre il suo valore newtoniano [1])

$$C^2 = f m_0 p = f m_0 a (1 - e^2)$$

[1]) Levi-Civita e Amaldi, loc. cit., pag. 212.

dove p, a ed e designano rispettivamente il parametro, il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita. Con ciò, badando al valore (41) di k_1, risulta per lo spostamento del perielio l'espressione, calcolata per la prima volta dall' Einstein,

$$\sigma = \frac{6\pi}{1 - e^2} \frac{f m_0}{a c^2}. \tag{43}$$

Per fare un apprezzamento numerico relativo ad un pianeta generico facciamo apparire il raggio medio dell'orbita terrestre a_0 scrivendo la (43) sotto la forma

$$\sigma = \frac{6\pi}{1 - e^2} \frac{f m_0}{a_0 c^2} \frac{a_0}{a}.$$

Tenendo poi conto della piccola eccentricità delle orbite planetarie, poniamo addirittura $e^2 = 0$ e notiamo che, rappresentando a il raggio dell'orbita, la velocità orbitale v è notoriamente determinata dalla condizione

$$\frac{v^2}{a} = \frac{f m_0}{a^2}$$

che esprime l'eguaglianza fra l' accelerazione centripeta e l' attrazione. Per la Terra si avrà in particolare

$$v_0^2 = \frac{f m_0}{a_0}.$$

La (43) assume in tal caso la forma

$$\sigma = 6\pi \frac{v_0^2}{c^2} \frac{a_0}{a}. \tag{43'}$$

Essendo sensibilmente la velocità orbitale v_0 della Terra di 30 km. al secondo e $c = 300000$ km. al secondo, si ha all' incirca $\frac{v_0}{c} = 10^{-4}$, donde

$$\sigma = 6\pi\, 10^{-8} \frac{a_0}{a}.$$

Per Mercurio (che darà evidentemente l'effetto più sensibile, essendo il pianeta più vicino al Sole) $\frac{a}{a_0} = 0,39$ il che dà per σ poco più di un decimo di secondo. Poichè in un secolo Mercurio compie all'incirca 420 rivoluzioni, si trova così per il perielio di codesto pianeta quello spostamento secolare di 42″, che corrisponde quasi esattamente alla differenza fra il totale spostamento osservato e quello previsto dalla meccanica celeste in base alla teoria newtoniana delle perturbazioni dovute agli altri pianeti. Era appunto questo residuo di circa 42″ per secolo che, prima del sorgere della teoria della relatività, non era stato spiegato se non introducendo ipotetiche azioni perturbatrici con costanti *ad hoc*.

Per gli altri pianeti, l'analogo calcolo dà naturalmente uno spostamento secolare molto minore, appena 8″,6 per Venere, 3″,8 per la Terra, 1″,35 per Marte, e ancor meno per i più esterni, e d'altra parte mancano finora risultati d'osservazione abbastanza sicuri.

10. Spostamento delle righe spettrali - Deflessione della luce. — Nel presente paragrafo ci proponiamo di esaminare l'influenza che esercita un campo di forza sulla frequenza e sull'andamento dei raggi luminosi. Supponiamo, come al paragrafo precedente, che si tratti di un campo statico cui spetta un potenziale newtoniano U, e prendiamo in considerazione regioni del campo esterne alle masse potenzianti. Ci basteranno gli effetti di prima approssimazione, e conseguentemente riterremo che valga per il ds^2 quadridimensionale la espressione (33) del § **6**:

$$ds^2 = (1 - 2\gamma)\, dx_0^2 - (1 + 2\gamma)\, dl_0^2 \tag{33}$$

dove γ sta per $\frac{U}{c^2}$.

Ciò posto, supponiamo che un fenomeno preponderantemente temporale (per es. vibrazioni di un atomo) si compia in un posto determinato T: se dt è un intervallo elementare di tempo nel quale si considera questo fenomeno, e si ritengono nello stesso

intervallo trascurabili le variazioni dy_i delle coordinate di spazio, avremo dalla (33) (essendo $x_0 = ct$)

$$ds_T^2 = (1 - 2\gamma_T)\, c^2\, dt_T^2$$

dove con l'indice T mettiamo in evidenza la determinazione locale del fenomeno considerato. Naturalmente, se lo stesso fenomeno si svolge invece in un altro punto S si ha analogamente

$$ds_S^2 = (1 - 2\gamma_S)\, c^2\, dt_S\,.$$

Se si ammette che l'identità dei due fenomeni in posti diversi (per es., emissione di luce da parte di due atomi della stessa specie chimica e nelle medesime condizioni fisiche), sia caratterizzata dall'eguaglianza dei rispettivi ds (intervalli cronotopici), si ha dalle formole precedenti

$$\frac{dt_S}{dt_T} = \frac{1 - \gamma_T}{1 - \gamma_S} = 1 - (\gamma_T - \gamma_S)\,.$$

Questa relazione differenziale fra tempi omologhi, dei due fenomeni di cui si tratta, esprimendo la costanza del rapporto $\frac{dt_S}{dt_T}$ implica naturalmente che lo stesso rapporto interceda fra due qualsivogliono intervalli finiti, pure omologhi, Δt_S e Δt_T: in particolare, se si tratta di fenomeni periodici, fra i rispettivi periodi, od anche (salvo ad invertire numeratore e denominatore) fra le rispettive frequenze ν_S e ν_T. Si ha così, a meno di termini del 2° ordine,

$$\frac{\nu_S - \nu_T}{\nu_T} = \gamma_T - \gamma_S = \frac{1}{c^2}(U_T - U_S)$$

la quale mostra che in un campo gravitazionale si ha una variazione di frequenza di segno opposto a quella del potenziale; quindi, in particolare, una diminuzione della frequenza di una data riga spettrale (e quindi uno spostamento della riga verso il rosso) quando si passa a regioni di più elevato potenziale.

Confrontiamo, a titolo di esempio, una luce monocromatica emessa nelle stesse condizioni sulla Terra T e sul Sole S: potremo trascurare U_T di fronte ad U_S e assumere per U_S il valore (vedi § **9**)

$$U_S = \frac{f m_0}{r_0} = \frac{f m_0}{a_0} \frac{a_0}{r_0}$$

designando con r_0 il raggio del Sole. Ora si ha

$$\frac{f m_0}{a_0} = v_0^2 .$$

Lo spostamento (relativo) di frequenza è dunque dato da

$$\frac{U_S}{c^2} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v_0^2}{c^2} \frac{a_0}{r_0} \tag{44}$$

e poichè in cifra tonda,

$$\frac{v_0}{c} = 10^{-4} \quad , \frac{a_0}{r_0} = 200 ,$$

si ha

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2 . 10^{-6} .$$

L'esistenza effettiva di un tale spostamento verso il rosso di righe solari (rispetto alle corrispondenti emesse da sorgenti terrestri) rimase incerta per qualche anno. Le misure più recenti di Perot, Fabry e St. John tendono a confermarla.

Un controllo più cospicuo è stato fornito recentemente dal St. John osservando, secondo il suggerimento dell' Eddington, analoghi spostamenti nello spettro del compagno di Sirio.

Passiamo ora all'andamento dei raggi luminosi entro un campo di forza. Lungo un generico raggio si avrà anzitutto (Capitolo precedente, § **16**) $ds^2 = 0$, e inoltre trattandosi di campo statico (vedi § **18** del citato Capitolo) varrà altresì il principio di Fermat

$$\delta \int dx_0 = 0 .$$

Attesa la forma (33) del ds^2 si ha, da $ds^2 = 0$,

$$dx_0^2 = \frac{1+2\gamma}{1-2\gamma} dl_0^2$$

e quindi, trascurando i quadrati di γ,

$$dx_0 = (1 + 2\gamma)\, dl_0 .$$

I raggi sono dunque definiti (moltiplicando per la costante c^2) dal principio variazionale

$$\delta \int (1 + 2\gamma)\, dl_0 = 0 . \tag{45}$$

A questo punto giova ricordare che in un ordinario mezzo (euclideo), isotropo, ma non omogeneo, in cui sia $n(y_1, y_2, y_3)$ l'indice di rifrazione, l'andamento geometrico dei raggi rimane caratterizzato (in base al principio di Fermat) dalla formula variazionale

$$\delta \int n\, dl_0 = 0$$

che, confrontata con la (45), ci dice che nel nostro campo di forza [il cui ds^2 è dato dalla (33)] la luce si propaga come se lo spazio fosse euclideo e riempito di un mezzo d' indice di rifrazione

$$n = 1 + 2\gamma .$$

Questa osservazione diventa anche più espressiva riportandosi ancora una volta alle traiettorie di un problema dinamico. Si sa infatti (come già abbiamo avuto occasione di rilevare al § **11** del Cap. prec.) che, per il teorema della minima azione, le curve (45), o, ciò che è lo stesso (moltiplicando per c^2 e rammentando il significato di γ), le estremali di

$$\delta \int c^2 (1 + 2\gamma)\, dl_0 = \delta \int (c^2 + 2U)\, dl_0 = 0 \tag{45'}$$

si possono risguardare come le traiettorie del moto di un punto materiale (nello spazio ordinario) sottoposto al potenziale

$$\frac{1}{2} c^2 (1 + 4\gamma) = \frac{c^2}{2} + 2U$$

con energia totale nulla, o, se si vuole, *al potenziale* $2U$, *con energia totale* $\frac{c^2}{2}$.

È interessante osservare che anche la semplice ipotesi della materializzazione dell'energia porta a prevedere un andamento curvo dei raggi entro un campo gravitazionale: infatti se si ammette che i raggi luminosi (in quanto linee di flusso dell'energia) sono effettivamente traiettorie di particelle materiali, ciascuna di queste (supponendone trascurabili le mutue influenze) dovrebbe comportarsi come un punto materiale libero, sottoposto alla forza del campo (di potenziale U), e la cui velocità tenda a c a distanza infinita dalle masse potenzianti (cioè per $U = 0$), o ciò che è lo stesso, la cui energia totale unitaria valga $\frac{c^2}{2}$. Come si vede, la relatività generale implica, in prima approssimazione, unicamente la sostituzione di $2U$ ad U.

Applichiamo ora queste considerazioni all'andamento dei raggi nel campo gravitazionale del Sole. Questi vanno risguardati, per quanto si è detto, come le traiettorie del problema del moto di un punto attratto da un centro fisso, il potenziale essendo, con le notazioni già usate,

$$2U = \frac{2fm_0}{r_0}$$

e l'energia totale

$$E = \frac{1}{2} c^2$$

Tali traiettorie sono classicamente coniche col fuoco nel centro di forza, la cui specie dipende dal segno della costante E: essendo nel caso nostro $E > 0$, si tratta di iperboli. È intuitivo che, dovendo essere assai piccolo il divario dall'andamento ret-

tilineo, tali iperboli saranno pochissimo incurvate: si può tuttavia verificarlo analiticamente in base alle equazioni differenziali. Infatti ove si indichino, in un punto generico di un raggio, con n e $\frac{1}{\varrho}$ la direzione della normale principale e la curvatura, si ha (eguagliando l'accelerazione centripeta alla forza centripeta unitaria)

$$\frac{v^2}{\varrho} = 2\frac{\partial U}{\partial n}.$$

La derivata $\frac{\partial U}{\partial n}$ rappresenta la forza del campo nella direzione n, e perciò non può superare l'intensità $\frac{fm_0}{r^2} = U\frac{1}{r}$ di tale forza; d'altra parte dall'integrale delle forze vive

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} c^2 + 2U = \frac{1}{2} c^2 \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)$$

si vede che, a meno di termini del 2° ordine, si può assimilare v a c: per conseguenza

$$\frac{1}{\varrho} \leq \frac{1}{c^2} \frac{2fm_0}{r^2}.$$

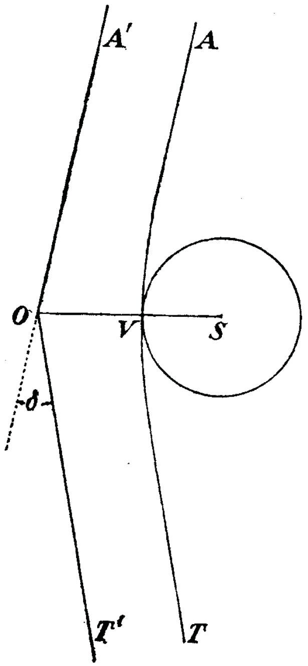
Se r_0 è il raggio del Sole, il massimo valore che può avere la forza $\frac{2fm_0}{r^2}$ nello spazio solcato dai raggi luminosi si ha manifestamente per $r = r_0$: la disuguaglianza precedente può con ciò essere scritta:

$$\frac{1}{\varrho} \leq \frac{2fm_0}{c^2 r_0^2}.$$

Siccome $\frac{fm_0}{r_0}$ non è che il valore U_S del potenziale alla superficie del Sole, e il rapporto $\frac{U_S}{c^2}$ vale $2 \cdot 10^{-6}$ [come fu rilevato a proposito della (44)] ricaviamo in definitiva

$$\frac{1}{\varrho} \leq 4 \cdot 10^{-6} \frac{1}{r_0}.$$

In altri termini, il raggio di curvatura ϱ, se non è proprio ∞ come per le rette, è almeno dell'ordine di un milione di volte il raggio del Sole.



È dunque ben legittimo il ritenere che i raggi rimangono in ogni caso pochissimo incurvati, anche se passano vicinissimo al Sole: dovrà perciò in ogni caso trattarsi di iperboli a asintoti OA', OT' quasi per diritto.

Consideriamo in modo preciso un raggio iperbolico il quale lambisca la sfera solare in V. Sia O il centro dell'iperbole, S quello del Sole e quindi il fuoco della stessa iperbole. Sarà V il suo vertice e, ove si designi con a il semiasse trasverso, con e l'eccentricità, avremo per definizione

$$\overline{OV} = a\,, \qquad \overline{OS} = a\,e\,,$$

$$\overline{SV} = r_0 = a\,(e - 1)\,.$$

Si sa d'altra parte dalla geometria analitica che, se si rappresenta con δ l'angolo (esterno) compreso fra i due asintoti,

$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{e}\,.$$

Nel caso che ci occupa, δ deve essere piccolissimo; quindi e grandissimo, in base alla formula ora scritta. Potremo tranquillamente ritenere il seno confondibile coll'arco, e $\frac{1}{e}$ trascurabile di fronte all'unità. Con ciò si può scrivere

$$\delta = \frac{2}{e} = \frac{2}{e}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{2}{e-1}\,.$$

Badando alla relazione $r_0 = a\,(e - 1)$, risulta in definitiva come misura di δ in funzione delle due lunghezze r_0 ed a,

$$\delta = \frac{2a}{r_0}\,. \tag{46}$$

Il semiasse trasverso a, nel moto iperbolico dovuto all'attrazione newtoniana di una massa M, è classicamente legato alla costante E delle forze vive dalla relazione

$$E = \frac{fM}{2a}\,.$$

Ricavandone a, ponendo per E il suo valore $\frac{1}{2}\,c^2$ e notando che nel caso nostro $M = 2m_0$, la (46) diviene

$$\delta = 4\,\frac{1}{c^2}\,\frac{f\,m_0}{r_0} \tag{46'}$$

e quindi, badando alla (6),

$$\delta = 8\,.\,10^{-6}.$$

Il secondo membro è un puro numero che esprime l'angolo δ in radianti. Per averlo in $''$, dovremo moltiplicare per

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 57^0\,17'\,45'' = 206265''$$

con che risulta

$$\delta = 1'',7\,. \tag{47}$$

Si riconosce immediatamente che quest'angolo δ porge appunto la misura della *deflessione*, ossia della massima deviazione angolare di cui è suscettibile un raggio stellare per effetto gravitazionale del Sole. Supponiamo infatti di considerare un raggio di luce che parte da un astro A e arriva ad un osservatore terrestre seguendo un arco di iperbole che rasenta la sfera solare in V, come nella figura. La direzione dell'iperbole in T, secondo cui l'osservatore riceve il raggio di luce, si confonde con quella dell'asintoto OT''; la direzione secondo cui la luce è partita dall'astro è quella della tangente in A, che si confonde a sua volta coll'altro asintoto $A'O$, *c. d. d.*

Naturalmente $A'O$ si può identificare colla direzione secondo cui T percepisce la stella in condizioni normali, cioè quando, allontanandosi il Sole dalla direzione Terra-Astro e divenendo insensibile la perturbazione gravitazionale corrispondente, il raggio visuale torna ad essere rettilineo (ossia si scosta dall'andamento rettilineo in modo addirittura inapprezzabile).

Non sarà male rilevare che, se il raggio visuale di una stella, anzichè rasentare la sfera solare, passa a una distanza $r > r_0$ dal centro del Sole, la deflessione diminuisce, precisamente in ragione inversa della detta distanza perielia.

Per rendersene conto basta osservare che l'espressione (46) di δ seguita naturalmente a sussistere, per una qualsiasi stella visibile dalla Terra, purchè soltanto vi si sostituisca al posto di r_0 la distanza perielia r. Avremo in conformità

$$\delta = \frac{2a}{r} = \frac{2a}{r_0}\,\frac{r_0}{r}\,.$$

Il fattore $\dfrac{2a}{r_0}$ è stato calcolato or ora, sicchè risulta in definitiva

$$\delta = 1'',7\,\frac{r_0}{r}\,.$$

Dacchè il diametro apparente del Sole, per un osservatore terrestre, è di $32'$, r_0 corrisponde a $16'$; perciò basta evidentemente che la distanza angolare dal centro del Sole sia di pochissimi gradi, perchè δ non superi qualche centesimo di secondo e riesca quindi del tutto inavvertibile, come se il raggio rimanesse rigorosamente rettilineo.

Gli eventuali spostamenti angolari dovuti al Sole divengono effettivamente osservabili durante una sua eclissi totale.

Un primo tentativo in questo senso fu promosso dall'Osservatorio di Lick nel 1918; ma la precisione delle osservazioni riuscì insufficiente allo scopo.

Per l'eclisse totale del 29 maggio 1919, due spedizioni simultanee furono organizzate dalla Società Reale di Londra: l'una operò a Sobral nel Brasile settentrionale, l'altra all'isola di Principe nel Golfo di Guinea, località entrambe comprese nella zona di totalità dell'eclisse. I risultati delle osservazioni raccolte in queste due spedizioni si possono riassumere come segue: La media degli spostamenti osservati a Sobral dà per la deflessione $1'',98$ (con errore probabile di $\pm 0'',12$); l'analoga media delle osservazioni di Principe dà $1'',61$ (con errore probabile di $\pm 0'',30$). Fra i due valori sperimentali sta la deflessione $1'',76$ prevista dalla relatività generale di EINSTEIN. Questa ne ha così ricevuto nuova e clamorosa conferma, rimanendo nettamente esclusa sia la deviazione nulla dell'ottica geometrica, sia la mezza deviazione ($0'',88$), cui si sarebbe condotti dalla teoria ordinaria, associandole il semplice postulato di proporzionalità fra massa ed energia.

In occasione del successivo eclisse totale del 2 settembre 1922, visibile nell'Australia occidentale, altre tre spedizioni si portarono nella zona di totalità: soltanto quella americana, organizzata dall'Osservatorio di Lick e diretta dal CAMPBELL, potè effettivamente osservare. Ma si trattava di stelle relativamente lontane dal lembo del Sole, e quindi di deflessioni assai piccole: i risultati, pubblicati nel n. 346 del *Lick Observatory Bulletin* (1923), presentano una dispersione notevole, cosicchè molti astronomi non risguardano quale ulteriore conferma il valore medio di tali osservazioni, per quanto sia anch'esso in accordo quasi perfetto con la previsione einsteiniana.

11. METRICHE TRIDIMENSIONALI A SIMMETRIA SFERICA. — Cominciamo col definire che cosa si deve intendere per varietà metrica V_3 dotata di simmetria sferica attorno ad un suo punto O: seguiremo il metodo geometrico indicato dal PALATINI [1]), conseguiremo

[1]) Cfr. *Lo spostamento del perielio di Mercurio ecc.*, «Nuovo Cimento», Vol. XIV (1917), pp. 12-54.

siderando, accanto a V_3, un ordinario spazio euclideo V'_3 in corrispondenza biunivoca con esso. Stabilita una siffatta corrispondenza, ogni trasformazione puntuale T di V'_3 in sè stesso (in particolare, un suo movimento rigido) dà luogo ad analoga trasformazione puntuale della V_3 in sè stessa, ma *a priori* non c'è ragione che ad un movimento rigido per V'_3 corrisponda pure un movimento rigido di V_3 (intendendosi per movimento rigido di una varietà generica ogni trasformazione che ne conserva il dl^2 e che quindi, in particolare, muta geodetiche in geodetiche).

Ciò posto, diremo che una varietà metrica V_3 è dotata di simmetria sferica attorno ad un suo punto O, quando tutte le ∞^3 rotazioni rigide di V'_3 attorno al punto corrispondente O' subordinano in V_3 altrettanti movimenti rigidi.

Intesa così la simmetria sferica attorno ad un determinato punto O, di una V_3, ne scendono facilmente alcune notevoli proprietà della metrica rispettiva purchè soltanto si richieda (come è nella natura delle cose) che la detta metrica (cioè i coefficienti del dl^2) si comporti in modo regolare nell'intorno di ogni punto, fatta solo eventuale eccezione per il punto O. Possiamo anzitutto riconoscere che ad ogni raggio r' uscente da O' corrisponde in V_3 una geodetica r uscente da O. Ed ecco come. Sia P' un punto qualunque di r' diverso da O'; P il punto corrispondente (che quindi non sarà O) di r. Sia d'altra parte g la geodetica di V_3 tangente ad r in P: per le ammesse ipotesi qualitative essa esiste ed è unica. Si tratta di dimostrare che g coincide con r. Consideriamo all'uopo in V'_3 le ∞^1 rotazioni che hanno r' per asse: ad esse fanno riscontro ∞^1 movimenti rigidi dello spazio V_3 i quali lasciano fermi tutti i punti di r (e questi soltanto). Proviamoci ora a supporre che la g sia distinta da r: per effetto delle ∞^3 rotazioni attorno ad r la g verrebbe ad occupare una semplice infinità di posizioni conservandosi, in ciascuna di esse, geodetica, e tangente ad r in P: si avrebbero perciò infinite geodetiche uscenti da P in una stessa direzione, il che è da escludere; *c. d. d.*

Dopo ciò è manifesto che alle superficie sferiche Σ' di centro O' vengono a corrispondere in V_3 altrettante sfere geodetiche Σ di centro O.

Consideriamo ora una generica coppia Σ, Σ' di tali superficie, e la corrispondenza fra i punti Q dell'una e Q' dell'altra subordinata dalla corrispondenza spaziale. Vogliamo mostrare che tale corrispondenza è conforme. Sia infatti $d\sigma'$ un generico elemento lineare di Σ' spiccato da Q'; $d\sigma$ l'omologo spiccato da Q.

Immaginando lo spazio euclideo riferito, per es. a coordinate polari r, ϑ, φ, avremo

$$d\sigma'^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$$

essendo $r = O'Q'$.

D'altra parte, fissato r, ϑ e φ individuano Q', e quindi, per la corrispondenza biunivoca, anche Q: dunque ϑ e φ si possono anche risguardare come coordinate curvilinee di Q sopra Σ, e l'elemento lineare $d\sigma$, corrispondente a $d\sigma'$ (cioè ad arbitrarî differenziali $d\vartheta$ e $d\varphi$) sarà in ogni caso rappresentato da una forma quadratica di cui vogliamo esplicitare l'espressione.

Consideriamo per ciò due archetti elementari di eguale lunghezza spiccati da Q' in due direzioni diverse: ad essi faranno riscontro due archetti omologhi $d\sigma$ *uguali tra loro*: questo perchè, potendosi i due $d\sigma'$, per l'eguaglianza delle loro lunghezze, desumere l'uno dall'altro con una rotazione attorno ad $O'Q'$, se ne inferisce che i $d\sigma$ sono del pari ottenibili l'uno dall'altro con un moto rigido (rispetto alla metrica di V_3), e quindi hanno eguale lunghezza rispetto a questa metrica.

Ne segue che il rapporto $\dfrac{d\sigma}{d\sigma'}$ è lo stesso per le due generiche direzioni prese in considerazione, o, in altri termini, che tale rapporto è lo stesso qualunque siano i differenziali $d\vartheta$ e $d\varphi$. Esso è dunque una funzione H soltanto del posto, cioè (*a priori*) di r, ϑ, φ, ma si vede subito che una tale funzione deve essere la stessa qualunque sia il punto Q' di Σ' preso in considerazione, perchè si può sempre passare da un Q' ad un altro con una rotazione. Si può così ritenere

$$d\sigma^2 = H^2\, d\sigma'^2$$

designando H una funzione della sola r.

Per le considerazioni che seguono è forse vantaggioso sostituire alla coordinata r (raggio vettore di V'_3) una sua funzione $R(r)$ definita dalla posizione

$$R(r) = H(r) \cdot r. \tag{48}$$

Il quadrato dell'elemento lineare delle sfere geodetiche Σ viene così ad assumere la forma

$$d\sigma^2 = R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) \tag{49}$$

che ci fornisce il significato geometrico di R non più nella ausiliaria metrica euclidea, ma addirittura in V_3. Infatti, la espressione (49) del $d\sigma^2$ è quella che compete ad una sfera di raggio R nello spazio ordinario, e come tale (*C. D. A.*, Cap. VIII, § 7) ha la curvatura gaussiana $K = \frac{1}{R^2}$. Per il carattere intrinseco di tale curvatura, essa compete a qualsiasi superficie di elemento lineare (49), e quindi, in particolare, alla nostra Σ.

Possiamo dunque ritenere il seguente significato della coordinata R: $\frac{1}{R^2}$ rappresenta (in un punto generico) la curvatura gaussiana della sfera geodetica, col centro nel centro di simmetria O, passante per quel punto. La proprietà di simmetria permette immediatamente di constatare che le varie geodetiche uscenti da O tagliano ortogonalmente le sfere Σ; perciò, se indichiamo con dg l'arco elementare di una tale geodetica, il dl^2 di V_3 si potrà rappresentare sotto la forma

$$dl^2 = dg^2 + d\sigma^2$$

e poichè dg dipende esclusivamente da R (sempre per la simmetria) possiamo porre

$$dg = A(R)\, dR$$

(con A funzione di R *a priori* indeterminata), e avremo di conseguenza, rammentando la (49),

$$dl^2 = A^2 \, d R^2 + R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) \tag{49'}$$

Ecco la più generale espressione del dl^2 di una V_3 simmetrica attorno ad un punto [1]).

Non è privo d'interesse il rilevare, che ogni siffatta V_3 è rappresentabile conformemente nello spazio euclideo. A tal uopo basta dimostrare che si possono determinare due funzioni $H(r)$ ed $r(R)$ tali che risulti identicamente

$$A^2 dR^2 + R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) = H^2 \{ dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) \},$$

per la qual cosa è necessario e basta che sia

$$Hr = R, \qquad H\,dr = A dR$$

e quindi, eliminando H,

$$\frac{dr}{r} = A \frac{dR}{R}. \tag{50}$$

Quando A sia una funzione nota di R, la (50) determina la r, a meno di una costante moltiplicativa, che dal punto di vista strettamente geometrico rimane arbitraria. Il modulo H della trasformazione conforme rimane poi definito dalla

$$H = \frac{R}{r}. \tag{51}$$

Vogliamo ora calcolare i simboli α_{ik} del Ricci (*C. D. A.*, Cap. VII, § 11) relativi ad una tale metrica. Conviene ancora una volta trar partito dalla simmetria, notando che, dalle considerazioni che troveranno posto nel § 2 dell'*Appendice* alla fine del presente volume, risulta ovviamente che, se la quadrica che fissa la distribuzione locale delle curvature ha un asse di simmetria, quest'asse fornisce una delle tre direzioni principali, mentre le altre due rimangono indeterminate (cioè sono costituite da

[1]) Essa era stata da me assegnata, fin dal 1896, in base a considerazioni analitiche di carattere gruppale (cfr. « Rend. Acc. Lincei », serie V, vol. V, 2° sem. 1896, pp. 164-171).

una coppia qualunque di direzioni ortogonali fra loro ed all'asse suddetto). Nel caso nostro, fissato a piacimento un punto P (distinto da O), essendo simmetrico intorno alla geodetica g (che congiunge P con O) il comportamento di ogni proprietà metrica, la quadrica delle curvature è necessariamente simmetrica intorno alla direzione di g. Ne consegue che le nostre coordinate r, ϑ, φ danno in ogni punto le direzioni principali di curvatura, dal che segue intanto che nella quadrica delle curvature, e quindi nel tensore a_{ik}, mancano i termini rettangoli, cioè che

$$a_{ik} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq k .$$

Inoltre detta ω_1 la curvatura principale corrispondente alla g, le altre due curvature ω_2, ω_3 risultano eguali fra loro: ne indicheremo con ω il valore comune.

Ciò posto ricordiamo la formula [(15) dell'*Appendice* suddetta]

$$a_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{h}\, \omega_h \lambda_{h|i} \lambda_{h|k}$$

che fornisce esplicitamente tutte le a in funzione delle curvature e dei momenti delle linee principali. Dacchè queste coincidono con le linee coordinate, lungo cui rispettivamente variano la sola r, la sola ϑ o la sola φ, esse avranno per parametri

$$\lambda_1^1 = \frac{dr}{dl} = \frac{1}{A}, \qquad \lambda_1^2 = 0, \qquad \lambda_1^3 = 0;$$

$$\lambda_2^1 = 0, \qquad \lambda_2^2 = \frac{d\vartheta}{dl} = \frac{1}{R}, \qquad \lambda_2^3 = 0;$$

$$\lambda_3^1 = 0, \quad \lambda_3^2 = 0, \qquad \lambda_3^3 = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{1}{R\sin\vartheta};$$

donde i momenti

$$\lambda_{1|1} = A, \qquad \lambda_{1|2} = 0, \qquad \lambda_{1|3} = 0,$$

$$\lambda_{2|1} = 0, \qquad \lambda_{2|2} = R, \qquad \lambda_{2|3} = 0,$$

$$\lambda_{3|1} = 0, \qquad \lambda_{3|2} = 0, \qquad \lambda_{3|3} = R\sin\vartheta.$$

Sostituendo nella formula testè richiamata, in cui si ponga ulteriormente $\omega_2 = \omega_3 = \omega$, si ottiene

$$(52) \qquad a_{11} = A^2 \omega_1, \qquad a_{22} = R^2 \omega, \qquad a_{33} = a_{22} \sin^2\vartheta,$$

$$(53) \qquad a_{ik} = 0 \qquad (i \neq k).$$

Queste ultime erano già state ricavate poc'anzi dall'osservazione che le linee principali di curvatura coincidono nel caso nostro con le linee coordinate.

Calcoliamo ora esplicitamente la ω in un punto generico P in base alla sua stessa definizione di curvatura riemanniana. Attesa la simmetria, essa si può considerare pertinente ad una qualsiasi superficie geodetica di polo P e contenente la direzione R. Mostreremo ora che è tale, in particolare, la superficie $\varphi = \text{cost}$ passante per il punto generico di cui si tratta. Per constatarlo, ricorriamo alle equazioni differenziali delle geodetiche della nostra V_3 (di elemento lineare dl). Anzichè sotto la forma risoluta rispetto alle derivate seconde delle coordinate, che esigerebbe il calcolo preventivo dei simboli di CHRISTOFFEL, giova prenderle sotto la forma parametrica di LAGRANGE, a partire dalla funzione lagrangiana (forza viva)

$$T = \frac{1}{2} \frac{dl^2}{dt^2}.$$

Nel nostro caso

$$T = \frac{1}{2} \left\{ A^2 \dot{R}^2 + R^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2) \right\}$$

(il punto sovrapposto indicando derivazione rispetto a t) e quindi

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = R^2 \sin^2\vartheta \dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 .$$

Dall'equazione di LAGRANGE per l'angolo φ, cioè

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

risulta, integrando, che una delle equazioni delle geodetiche ha la forma

$$R^2 \sin^2 \vartheta\, \dot\varphi = \text{cost}\,.$$

Da essa segue che, se una geodetica uscente da P tocca inizialmente la superficie $\varphi = \text{cost}$ (con che si ha, in P, $\dot\varphi = 0$), $\dot\varphi$ si annulla lungo tutta la geodetica, la quale appartiene perciò alla superficie $\varphi = \text{cost}$ passante per P, *c. d. d.*

Per ricavare ω siamo quindi ricondotti a determinare la curvatura della forma differenziale binaria

$$A^2\, dR^2 + R^2\, d\vartheta^2 \tag{54}$$

che esprime il quadrato dell'elemento lineare della detta superficie.

L'espressione generale di tale curvatura è (*C. D. A.*, formula (28) del Cap. VII)

$$\omega = \frac{(12,\ 12)}{a},$$

sicchè, il nostro a essendo A^2R^2, non vi sarebbe che da calcolare il simbolo di RIEMANN di 1ª specie (12, 12) in base alle formule (3) e (5) del ricordato capitolo, la cui espressione esplicita, già assegnata dal GAUSS, si trova riportata in tutti i trattati. Risulta così, come verificheremo tra un momento,

$$\omega = -\frac{1}{AR}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{1}{2R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{A}\right)^2. \tag{55}$$

Per la curvatura ω_1 si trova

$$\omega_1 = \frac{1}{R^2}\left\{1 - \frac{1}{A^2}\right\} \tag{56}$$

come pure mostreremo nel paragrafo seguente.

12. DIGRESSIONE SUL CALCOLO DELLE CURVATURE. — Pur mirando specificamente al calcolo di ω ed ω_1, sarà opportuno, per comodità del lettore, di mostrare qui come si possa pervenire all'espressione esplicita della curvatura di una forma binaria in funzione dei suoi coefficienti, senza premettere il calcolo materiale dei simboli di CHRISTOFFEL. Conviene far capo alla proprietà geometrica della curvatura, che ne è, se si vuole, la definizione, espressa dalla formula (*C. D. A.*, Cap. VII, § 9) [1]),

$$K = \frac{\varepsilon}{D\Gamma}$$

dove $D\Gamma$ designa l'area di un ciclo infinitesimo Γ contenente P, ed ε rappresenta l'angolo di parallelismo. Valutiamo ε riferendoci, per ridurre il calcolo al minimo, ad un dl^2 di forma ortogonale, del tipo

$$E\, dx_1^2 + G\, dx_2^2\,. \tag{57}$$

Se in partenza da P la direzione λ che si trasporta forma un angolo α con la linea coordinata x_1, i suoi parametri λ^1, λ^2 sono dati manifestamente da (*C. D. A.*, Cap. V, §§ 4 e 7)

$$\lambda^1 = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{E}}, \qquad \lambda^2 = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{G}}\,. \tag{58}$$

Ciò posto, consideriamo uno spostamento infinitesimo δP, di componenti contravarianti δx_1, δx_2, e ricordiamo che gli incrementi $\delta\lambda^i$ dei parametri di λ quando questa direzione si trasporta per parallelismo lungo δP, sono dati da [*C. D. A.*, Cap. V, formula (23)]

$$\delta\lambda^i = -\sum_{jl}^{2}{}_{1} \left\{ {jl \atop i} \right\} \lambda^j\, \delta x_l \qquad (i = 1,\ 2). \tag{59}$$

[1]) Cfr. F. SBRANA, « Rend. Acc. Lincei », serie V, vol. XXXIII, 2º semestre 1924, pp. 236-238.

Per evitare la valutazione preventiva dei coefficienti dei secondi membri (simboli di CHRISTOFFEL) basta pensare che le equazioni delle geodetiche

$$\ddot{x}_i = -\sum_{1}^{2}{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} \dot{x}_j \, \dot{x}_l$$

hanno per secondi membri delle forme quadratiche, i cui coefficienti sono precisamente quelli che dobbiamo procurarci. D'altra parte, la prima delle equazioni lagrangiane delle geodetiche corrispondenti alle forme (57) (quella relativa ad x_1) è

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$$

dove

$$T = \frac{1}{2}\left[E\dot{x}_1^2 + G\dot{x}_2^2\right],$$

ossia, eseguendo le derivazioni e isolando $\ddot{x}_1$,

$$\ddot{x}_1 = -\left\{ \frac{E_1}{2E}\dot{x}_1^2 - \frac{G_1}{2E}\dot{x}_2^2 + \frac{E_2}{E}\dot{x}_1\,\dot{x}_2 \right\}$$

dove E_1, E_2, G_1, G_2 rappresentano, naturalmente, le derivate di E e G. Confrontando questa con la prima delle (59) si vede che quella si può scrivere

$$\delta\lambda^1 = -\left\{ \frac{E_1}{2E}\lambda^1\delta x_1 - \frac{G_1}{2E}\lambda^2\delta x_2 + \frac{E_2}{2E}\lambda^1\delta x_2 + \frac{E_2}{2E}\lambda^2\delta x_1 \right\} =$$
$$= -\lambda^1\,\delta\, lg\sqrt{E} + \lambda^2\left\{ -\frac{E_2}{2E}\delta x_1 + \frac{G_1}{2E}\delta x_2 \right\}.$$

Ma dalle (58) risulta

$$\delta\lambda^1 = -\sqrt{\frac{G}{E}}\,\lambda^2\,\delta\,\alpha - \lambda^1\,\delta\, lg\sqrt{E}$$

che, portato nella precedente, dà

$$\delta\alpha = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(E_2\,\delta x_1 - G_1\,\delta x_2\right).$$

L'angolo di parallelismo si ottiene integrando $\delta\alpha$ lungo il ciclo T. Sostituendo all'integrale di contorno un integrale di campo con le note formole (cfr., per i segni, *C. D. A.*, nota al § 7, cap. VII) si ottiene

$$\varepsilon = -\int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{G_1}{2\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{E_2}{2\sqrt{EG}}\right)\right] dx_1\, dx_2 .$$

Notando che il campo si riduce all'elemento infinitesimo

$$d\Gamma = \sqrt{EG}\, dx_1 dx_2$$

potremo scrivere (a meno di infinitesimi d'ordine superiore)

$$\varepsilon = -\, d\Gamma \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{G_1}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{E_2}{\sqrt{EG}}\right)\right\}.$$

Se ne deduce per la curvatura la cercata espressione

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{G_1}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{E_2}{\sqrt{EG}}\right)\right\}.$$

Per $E = 1$ (con che le linee x_1 sono geodetiche) si ricava in particolare la formula di uso frequente nella teoria delle superficie

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial x_1^{\,2}} .$$

Per l'elemento lineare (54), assumendo $x_1 = R$, $x_2 = \vartheta$, con che $E = A^2(R)$, $G = R^2$ la curvatura K diviene

$$\omega = -\frac{1}{AR}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{A}\right) \tag{55}$$

come era stato annunziato.

Veniamo ormai al calcolo di ω_1 cioè della curvatura corrispondente alla giacitura normale alle linee R. Si noti che le sfere $R =$ cost (a differenza delle superficie $\varphi =$ cost) non sono superficie geodetiche sicchè la ω_1 non coincide con la curvatura gaussiana $\frac{1}{R^2}$ (cfr. § **11**) delle sfere suddette. Per valutarla, anzichè ricorrere alla sua definizione diretta, potremo più comodamente trar partito dalla proprietà del nostro dl^2 di essere rappresentabile conformemente sopra uno spazio euclideo, avendosi, come si è visto,

$$dl^2 = H^2\, dl_0^2 .$$

Sono ben note [1]) le relazioni che collegano gli omologhi simboli di RIEMANN di due elementi lineari ds e ds' per i quali sia

$$ds'^2 = e^{2\tau}\, ds^2 .$$

Identifichiamo ds col nostro dl, e ds' col dl_0 euclideo; potremo in conformità applicare le formule generali testè ricordate ponendovi eguali a zero i simboli accentati (che vengono a riferirsi al dl_0 euclideo) e ritenendovi

(60) $$\tau = -\lg H .$$

Le dette formule divengono in conformità

$$\begin{aligned}(ij, hk) = a_{ih}(\tau_{jk} - \tau_j \tau_k) - a_{ik}(\tau_{jh} - \tau_j \tau_h) - \\ - a_{jh}(\tau_{ik} - \tau_i \tau_k) + a_{jk}(\tau_{ih} - \tau_i \tau_h) + \\ + (a_{ih} a_{jk} - a_{ik} a_{jh})\, \Delta \tau .\end{aligned}$$

dove i coefficienti, le derivate covarianti e il parametro si devono intendere riferiti al

$$dl^2 = A^2\, dR^2 + R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) .$$

Da queste formule, moltiplicando per $a^{ih} a^{jk}$ e sommando rispetto ai quattro indici, il primo membro, in base alle formole (1) e (2) del § **2**, ci dà l' invariante lineare G relativo alla nostra V_3, il quale, eseguite ovvie riduzioni, rimane così espresso da

$$G = -4\, \Delta_2 \tau - 2 \Delta \tau .$$

[1]) *C. D. A.*, Cap. VIII, formule (18).

Ma per una V_3 l'invariante lineare G non è altro che $-2\,\mathrm{M}$ (vedi § **4**) sicchè la curvatura media M è data nel caso nostro da

(61) $$\mathrm{M} = 2\, \Delta_2 \tau + \Delta \tau .$$

Siccome M (somma delle tre curvature) vale $\omega_1 + 2\,\omega$, e ω è stato già calcolato, questa formula ci fornirà la cercata espressione di ω_1, tostochè, in base alle (50), (51), (60), si esplicitino $\Delta\tau$ e $\Delta_2\tau$ che compariscono nel secondo membro.

Dall' espressione generale

$$\Delta \tau = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{ik} \tau_i \tau_k$$

si ha, per il nostro dl^2, e per una funzione τ che dipende dalla sola R,

$$\Delta \tau = \frac{1}{A^2}\, \tau'^2 ,$$

l'apice designando anche qui la derivata rispetto ad R. D'altra parte, in base all' espressione generale del parametro differenziale secondo (*C. D. A.*, Cap. VI, § 7)

$$\Delta_2 \tau = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{a}\, \tau^i) ,$$

ed essendo ora $\sqrt{a} = A R^2 \sin\vartheta$, risulta

$$\Delta_2 \tau = \frac{1}{A R^2} \frac{d}{dR} \left(\frac{R^2}{A} \tau' \right) .$$

Siccome nel caso nostro, in base alla (60),

$$\tau = -\lg H = \lg \frac{r}{R}$$

e d'altra parte, per la (50),

$$\frac{d}{dR} \lg r = \frac{A}{R} ,$$

si ha

$$\tau' = \frac{A-1}{R}.$$

Ne consegue

$$\Delta\tau = \frac{(A-1)^2}{A^2R^2} = \frac{1}{R^2}\left(1-\frac{1}{A}\right)^2,$$

$$\Delta_2\tau = \frac{1}{AR^2}\frac{d}{dR}\left[R\left(1-\frac{1}{A}\right)\right] = \frac{1}{AR^2}\left(1-\frac{1}{A}\right) - \frac{1}{AR}\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{A}\right)$$

che, tenuto conto della espressione (55) di ω, può anche essere scritta

$$\Delta_2\tau = \frac{1}{AR^2}\left(1-\frac{1}{A}\right) + \omega.$$

Portando nella (61) le espressioni testè trovate per $\Delta\tau$ e $\Delta_2\tau$, e per M il suo valore $\omega_1 + 2\omega$, si ricava (elidendosi 2ω nei due membri) per ω_1 precisamente il valore (56)

$$\omega_1 = \frac{1}{R^2}\left(1-\frac{1}{A^2}\right).$$

13. Le equazioni gravitazionali nel caso della simmetria sferica – Soluzione rigorosa dello Schwarzschild. — Applichiamo ora le equazioni della statica einsteiniana al caso particolare in cui si abbia un'unica massa potenziante, o, più generalmente, una distribuzione di masse a simmetria sferica attorno ad un punto O. Usufruendo delle locuzioni del § **11**, si tratterà di masse stratificate con legge qualunque (purchè dipendente dalla sola R) fra sfere geodetiche di centro O. Il ds^2 einsteiniano avrà la forma statica

$$ds^2 = V^2\,dx_0^2 - dl^2$$

dove dl^2 sarà necessariamente del tipo (49'), e V, per la simmetria, dipenderà anch'esso dalla sola R. Converremo poi di prendere in considerazione soltanto regioni esterne al campo

occupato dalle masse potenzianti. Varranno in tali regioni le equazioni statiche per i campi vuoti (21'), (22) del § **4**, cioè

$$\text{M} = 0, \tag{21'}$$

$$a_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0. \tag{22}$$

Designando M la curvatura media della V_3 simmetrica, cioè la somma $\omega_1 + 2\omega$ delle tre curvature principali, la (21') ci dà, in base alla (56) del paragrafo precedente,

$$\omega_1 + 2\omega = \frac{1}{R^2}\left\{1-\left(\frac{1}{A}\right)^2\right\} - \frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{A}\right)^2 = 0$$

da cui, integrando e indicando con a una costante di integrazione,

$$A^2 = \frac{1}{1-a/R}. \tag{62}$$

Si noti che, qualunque sia la costante a, l'espressione trovata soddisfa automaticamente alla condizione, necessaria dal punto di vista fisico, che la metrica a distanza infinita delle masse potenzianti tenda a ridursi alla forma euclidea: infatti, per $R \to \infty$, A tende a 1, con che il dl^2 (49') acquista la nota espressione euclidea in coordinate polari.

Le a_{ik} sono poi completamente definite dalle formule (52), (53), dove ω, ω_1 hanno i valori (55), (56).

Per attribuire alle equazioni gravitazionali (22) la forma esplicita, occorre ancora sostituire alle derivate covarianti V_{ik} le derivate ordinarie. Anche questo si può fare senza calcoli materiali col seguente accorgimento. Designando le x_i coordinate generiche in uno spazio di metrica pure generica, si parta da una funzione V delle x, e se ne consideri la variazione lungo una linea geodetica, pensando lungo questa le x come funzioni di un parametro t. Si avrà anzitutto

$$\frac{dV}{dt} = \sum_1^3{}_i V_i \dot{x}_i.$$

Derivando ulteriormente, ove alle $\ddot{x}_i$ si sostituiscano i loro valori forniti dalle equazioni delle geodetiche, risulta, come caso particolare della nozione di derivate covarianti (*C. D. A.*, Cap. VI, §§ 1, 2)

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \sum_{1}^{3}{}_{ik} V_{ik}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_k\,. \tag{63}$$

D'altra parte, assumendo in particolare $x_1 = R$, $x_2 = \vartheta$, $x_3 = \varphi$ e rammentando che la nostra V è funzione della sola R, si ha

$$\frac{dV}{dt} = V'\,\dot{R}$$

(designando per brevità con apici le derivate rispetto all'argomento R), nonchè

$$\frac{d^2V}{dt^2} = V''\,\dot{R}^2 + V'\,\ddot{R}.$$

Ma, dalla equazione delle geodetiche relative alla coordinata R per la nostra metrica, cioè per

$$T = \frac{1}{2}\left\{ A^2\dot{R}^2 + R^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2)\right\},$$

si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial T}{\partial R} = 0,$$

ossia

$$A^2\ddot{R} + \frac{d(A^2)}{dR}\dot{R}^2 - \frac{1}{2}\frac{d(A^2)}{dR}\dot{R}^2 - R(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) = 0$$

che dà

$$\ddot{R} = -\frac{A'}{A}\dot{R}^2 + \frac{R}{A^2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2).$$

Con ciò la precedente espressione di $\frac{d^2V}{dt^2}$ diviene

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \left(V'' - \frac{V'A'}{A}\right)\dot{R}^2 + \frac{RV'}{A^2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2).$$

che al pari della (63) deve sussistere lungo una geodetica generica, cioè per valori arbitrari delle $\dot{x}_1 = \dot{R}$, $\dot{x}_2 = \dot{\vartheta}$, $\dot{x}_3 = \dot{\varphi}$. Il loro confronto ci dà

$$\left\{\begin{aligned} &V_{11} = V'' - \frac{V'A'}{A}, \qquad V_{22} = \frac{RV'}{A^2}, \qquad V_{33} = V_{22}\sin^2\vartheta\,; \\ &V_{ik} = 0 \qquad (i \neq k)\,. \end{aligned}\right. \tag{64}$$

Con ciò, sostituendo nelle equazioni gravitazionali (22) questi valori delle V_{ik} e per le a_{ik} le (52), (53), si vede immediatamente che quelle con due indici distinti si riducono ad identità, quelle corrispondenti alle coppie 11, 12 assumono la forma

$$\left\{\begin{aligned} &A^2\omega_1 + \frac{V''}{V} - \frac{V'A'}{VA} = 0, \\ &R^2\omega + \frac{RV'}{VA^2} = 0, \end{aligned}\right. \tag{65}$$

mentre la rimanente equazione non differisce da quest'ultima. Introducendo nella stessa per ω il suo valore (55), cioè $\frac{A'}{RA^3}$, risulta

$$\frac{A'}{A} + \frac{V'}{V} = 0 \tag{66}$$

ossia

$$AV = \text{cost}\,.$$

Se si tien conto della circostanza che a distanza infinita dalle masse potenzianti il ds^2 einsteiniano deve ridursi alla forma pseudoeuclidea, e quindi il coefficiente V (velocità römeriana della luce) deve tendere a 1 al pari di A, si vede che la costante ha il valore 1, risultando quindi

$$AV = 1\,. \tag{66'}$$

Questa, e la (62), forniscono in termini finiti le espressioni di A e V, individuando così completamente il cercato ds^2. Resterebbe tuttavia da tener conto della prima delle (65), ma è subito visto che coi valori (62) e (66') essa si riduce a una identità. Infatti, postovi per ω_1 il suo valore

$$\frac{1}{R^2}\left(1-\frac{1}{A^2}\right)=\frac{1}{R^2}(1-V^2)$$

per $\frac{A'}{A}$, a norma della (66), $-\frac{V'}{V}$, e moltiplicando per V^2, essa si scrive (rammentando ancora una volta che $AV=1$)

$$\frac{1}{R^2}(1-V^2)+VV''+V'^2=0$$

ossia

$$\frac{1}{R^2}(1-V^2)+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dR^2}(V^2)=0\,.$$

Ponendovi per V^2 il valore $\frac{1}{A^2}=1-\frac{a}{R}$, essa rimane identicamente soddisfatta, *c. d. d.*

La forma rigorosa del ds^2 einsteiniano dotato di simmetria sferica, quale fu assegnata per la prima volta dallo SCHWARZSCHILD[1]) è dunque

$$ds^2=\left(1-\frac{a}{R}\right)dx_0^2-dl^2 \tag{67}$$

con

$$dl^2=\frac{dR^2}{1-a/R}+R^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\,.$$

In questa metrica entra una costante a, *a priori* arbitraria: il suo valore si può desumere prendendo in considerazione l'intensità del campo di forza a grandi distanze dalle masse potenzianti. In tali regioni il dl^2 spaziale tende, come si è notato, a diventare euclideo, confondendosi R con la lunghezza del raggio vettore a partire dal centro di simmetria: d'altra parte

$$-\frac{1}{2}c^2V^2=-\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}\frac{c^2a}{R}$$

[1]) « Sitzungsberichte der Preuss. Akad. der Wiss. », 1916, pp. 189-196.

rappresenta (Cap. prec., § **12**) il potenziale del campo. Il confronto con la classica espressione newtoniana $\frac{fM}{R}$ del potenziale dovuto a una massa M concentrata nell'origine (o comunque distribuita simmetricamente intorno ad essa) mostra che deve porsi

$$a=\frac{2fM}{c^2}, \tag{68}$$

essendo M la somma delle masse potenzianti.

Per quanto si è visto al § **11**, ogni dl^2 a simmetria sferica, e quindi, in particolare, il dl^2 einsteiniano (67), è rappresentabile conformemente su uno spazio euclideo, il modulo di rappresentazione conforme essendo $\frac{R}{r}$, con r definito dalla (50):

$$\frac{dr}{R}=A\,\frac{2dR}{R}\,. \tag{50}$$

Tenendo conto delle relazioni

$$A=\frac{1}{V}\,,\qquad V=\sqrt{1-a/R}\,.$$

giova esprimere il secondo membro per V, il che dà

$$\frac{dr}{r}=\frac{2\,dV}{1-V^2}\,.$$

Per integrazione si ricava

$$r=r_0\frac{1+V}{1-V}=r_0\frac{(1+V)^2}{1-V^2}=\frac{Rr_0}{a}(1+V)^2, \tag{69}$$

essendo r_0 una costante.

Se si richiede, come è nella natura delle cose, che r tenda, al pari di R, a confondersi con l'ordinario raggio vettore quando ci si allontani indefinitamente dalle masse potenzianti, converrà determinare r_0 in modo che risulti

$$\lim_{R\to\infty}\frac{r}{R}=1\,,$$

il che dà, notando che, per $R \to \infty$, V tende all' unità,

$$r_0 = \frac{a}{4}.$$

Ne consegue

$$H = \frac{R}{r} = \frac{4}{(1+V)^2}$$

e quindi

$$dl^2 = \frac{16}{(1+V)^4} dl_0^2 .$$

A titolo di esempio non sarà inopportuno ritrovare, partendo da queste formule rigorose, l'espressione di prima approssimazione (33) del § **6**

$$ds^2 = (1 - 2\gamma)\, dx_0^2 - (1 + 2\gamma)\, dl_0^2$$

(dove γ sta per U/c^2) che compete al ds^2 einsteiniano corrispondente a un assegnato campo newtoniano. Nel caso nostro il confronto dei coefficienti di dx_0^2, V^2 e $1 - 2\gamma$, dà rigorosamente

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{a}{R}$$

con che, in base al valore (68) di a, γ è proprio l'espressione che corrisponde al potenziale newtoniano di una massa M distribuita simmetricamente intorno al centro (nel campo esterno alla massa stessa). Il confronto dei coefficienti del dl_0^2 richiede poi che sia (almeno in prima approssimazione)

$$1 + 2\gamma = H^2 = \frac{16}{(1+V)^4}.$$

Se si tien conto della espressione $1 + 2\gamma$ di V^2, si ha in prima approssimazione $V = 1 + \gamma$, e quindi

$$(1 + V)^{-4} = (2+\gamma)^{-4} = \frac{1}{16}(1 - 2\gamma)$$

il che assicura che l'eguaglianza precedente rimane effettivamente soddisfatta a meno di termini del secondo ordine, *c. d. d.*

14. Metriche spazialmente uniformi: loro interesse cosmologico. — Cerchiamo se esistono soluzioni delle equazioni gravitazionali in condizioni statiche e nell' ipotesi che il dl^2 spaziale abbia una curvatura costante K, essendo uniforme anche il tensore energetico, con che intendiamo precisamente che esso sia del tipo (66) del Capitolo precedente (applicato al caso statico). Ciò che equivale ad assumere per le T_{ik} le espressioni

$$T_{00} = V^2(\varepsilon - p) = V^2\eta, \tag{70}$$

$$T_{ik} = p\,a_{ik} \qquad (i,\ k = 1, 2, 3) \tag{71}$$

le a_{ik} designando manifestamente i coefficienti del dl^2. Le due quantità $\eta\ (\geq 0)$ e p rappresentano rispettivamente (cfr. Capitolo precedente, § 25) la densità d'energia e la pressione (o trazione, per $p < 0$) che si esercita nel mezzo.

Ciò premesso, teniamo conto dell' ipotesi geometrica che la varietà spaziale sia a curvatura costante: le espressioni canoniche delle α_{ik} del Ricci (formule (15) dell'*Appendice*), quando le tre curvature principali ω_1, ω_2, ω_3 si riducono a K, danno immediatamente (attese le formule (14) dell'*Appendice* suddetta)

$$\alpha_{ik} = K a_{ik}, \tag{72}$$

mentre per definizione di curvatura media si ha

$$\mathrm{M} = 3K. \tag{72'}$$

Con ciò la prima delle equazioni gravitazionali statiche, (18) del § **4**, diviene

$$3K = \varkappa\eta. \tag{73}$$

Ne desumiamo $K \geq 0$, il che rientra nell'osservazione generale del § **4** che in condizioni statiche la curvatura media è sempre positiva o nulla. La (73) stessa mostra poi che η è necessariamente costante assieme a K, ossia che il mezzo deve presentare una distribuzione uniforme di energia, o, ciò che è lo stesso, di materia.

Per tale circostanza, questo tipo di soluzioni ha particolare interesse cosmologico. Infatti, pur essendo i corpi celesti separati da distanze assai grandi rispetto alle loro dimensioni, e quindi la materia distribuita nello spazio in modo eminentemente discontinuo, è naturale domandarsi, da un punto di vista statistico, quale siano, per così dire, le condizioni meccaniche medie dell' Universo, quale cioè possa essere la natura della metrica cronotopica nell'ipotesi che tutta la materia cosmica, anzichè concentrata in modo discreto, fosse ovunque uniformemente diffusa (con la densità media η/c^2 della distribuzione reale).

Importa rilevare che, trattandosi di uno spazio a curvatura costante *positiva*, la sua *estensione* S (*C. D. A.*, Cap. VI, § 8) risulta finita, ciò che mostreremo tra un momento. Collegandolo intanto alla precedente considerazione cosmologica, va ritenuta la conclusione che in questo tipo di soluzioni la quantità totale M di materia risulta finita, e precisamente espressa da

(74) $$M = \frac{\eta}{c^2} S.$$

Per trovare l'estensione S, assunto il dl sotto la nota forma canonica di RIEMANN (*C. D. A.*, Cap. VIII, § 7),

(75) $$dl^2 = \frac{dl_0^2}{u^2} = \frac{1}{u^2} (dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2)$$

con

(76) $$u = 1 + \frac{K}{4} r^2, \qquad r^2 = \sum_1^3 {}_i\, y_i^2,$$

si ha in primo luogo, riferendosi a coordinate polari r, ϑ, φ, per l'elemento di volume corrispondente al dl_0 euclideo,

$$dS_0 = r^2 dr \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

e quindi, per il corrispondente elemento dello spazio fisico,

$$dS = \frac{dS_0}{u^3}.$$

Il volume totale è dato per conseguenza da

$$S = \int \frac{dS_0}{u^3}$$

l' integrale essendo esteso all' intero spazio. L' integrazione rispetto a ϑ e φ dà 4π, sicchè si può scrivere

$$S = 4\pi \int_0^\infty \frac{r^2 dr}{u^3}.$$

Giova qui introdurre il raggio a della sfera di curvatura gaussiana K, ponendo $K = \frac{1}{a^2}$, e sostituire ad r come variabile d'integrazione $x = \frac{r}{2a}$. Risulta allora

$$S = 32\,\pi\, a^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3} = 2\pi^2 a^3$$

e quindi, dalla (74),

$$M = 2\pi^2 a^3 \frac{\eta}{c^2}.$$

Nelle condizioni supposte, lo spazio fisico ha così il volume $2\pi^2 a^3$, ed è quindi finito, pur essendo illimitato, circostanza questa che vale, come per le ordinarie superficie sferiche a due dimensioni, per ogni varietà a curvatura costante positiva a un numero qualunque di dimensioni.

Un'altra proprietà generale che pur conviene rilevare è che in siffatta varietà le geodetiche sono tutte linee chiuse, di lunghezza $2\pi a$. Per rendercene conto, riferiamoci specificamente al caso delle tre dimensioni che corrisponde allo spazio fisico del problema di cui ci stiamo occupando. Si riconosce immediatamente, che senza pregiudizio della generalità si può sempre riferire il $dl^2 = \frac{dl_0^2}{u^2}$ a coordinate polari r, ϑ, φ, in modo che per una geodetica comunque assegnata sia in un punto $\dot\varphi = 0$: dall'equazione lagrangiana relativa al parametro φ segue allora, come al § **11**, che $\dot\varphi = 0$ lungo tutta la curva: questa si presenta allora come geodetica di una delle superficie $\varphi =$ cost, o addirittura (con una conveniente scelta dell'origine delle φ) $\varphi = 0$. Attese le formule di trasformazione fra coordinate cartesiane e coordinate polari

$$y_1 = r \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$y_2 = r \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$y_3 = r \cos\vartheta,$$

ciò val quanto dire che una generica geodetica si può sempre pensare appartenente al piano coordinato $y_2 = 0$, ma il dl^2 (per $y_2 = 0$) assume la forma canonica di una varietà a due dimensioni di curvatura costante K, cioè della ordinaria sfera di raggio a. La geodetica si identifica perciò con un cerchio massimo di questa sfera, ed è quindi una curva chiusa di lunghezza $2\pi a$, *c. d. d.*

Passiamo oramai alle altre sei equazioni gravitazionali. Tenuto conto delle (71), (72) e (72′), le (17) divengono

$$\frac{V_{ik}}{V} + \left(K + \varkappa p - \frac{\Delta_2 V}{V}\right) a_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{77}$$

cui si può soddisfare in due modi diversi, secondo che si suppone V costante (cronotopo cilindrico di EINSTEIN) o V funzione del posto (cronotopo ipersferico di DE SITTER [1])).

15. SOLUZIONE DI EINSTEIN. — Supponiamo dapprima V costante. In tal caso, per verificare le (77), è necessario e basta aggiungere alla (73) la condizione

$$K + \varkappa p = 0. \tag{78}$$

[1]) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi*, «Rend. Acc. Lincei», ser. V, vol. XXVI (1° sem. 1917), pp. 519-531.

Da questa segue anzitutto che lo sforzo normale p è necessariamente lo stesso in ogni punto, e dal confronto con la (73) si ricava

$$p = -\frac{1}{3}\eta, \tag{73′}$$

donde il seguente enunciato:

Entro un mezzo omogeneo uniformemente stirato con una trazione $\frac{1}{3}\eta$ (η densità dell'energia) lo spazio assume la curvatura costante positiva $K = \frac{\varkappa}{3}\eta$, la velocità V della luce conservandosi costante (da ritenersi naturalmente diversa da zero).

Ricordando (Cap. prec., § **12**) che in condizioni statiche la forza del campo ha per potenziale $-\frac{1}{2}V^2$, si riconosce subito che nel caso presente tale forza è nulla.

16. SOLUZIONE DI DE SITTER. — Supponiamo ora V funzione del posto. Dalle (77), moltiplicate per a^{ik} e sommate rispetto agli indici i e k, segue in primo luogo

$$\frac{\Delta_2 V}{V} + 3\left(K + \varkappa p - \frac{\Delta_2 V}{V}\right) = 0,$$

ossia

$$\frac{\Delta_2 V}{V} = \frac{3}{2}(K + \varkappa p).$$

Le (77) stesse equivalgono quindi a

$$\frac{V_{ik}}{V} + K^* a_{ik} = 0, \tag{77′}$$

dove si è posto per brevità

$$K^* = K - \frac{1}{2}(3K + \varkappa p). \tag{79}$$

È facile riconoscere che le (77′) risultano effettivamente compatibili per V *non* costante (anzi costituiscono un sistema completo rispetto alla stessa V considerata come funzione incognita) allora e allora soltanto che $K^* = K$. Per stabilirlo conviene ricordare la formula di commutazione (*C. D. A.*, Cap. VII, § 6), per le derivate seconde covarianti di un sistema semplice V_i, la quale ci dà

$$V_{ihk} - V_{ikh} = -\sum_1^3{}_r \{ir, hk\} V_r.$$

Sostituendo per i simboli di RIEMANN di 2ª specie le espressioni

$$K(a_{ih}\delta^r_k - a_{ik}\delta^r_h)$$

che loro competono per una varietà a curvatura costante K (*C. D. A.*, Cap. VIII, § 5), si ottiene

$$V_{ihk} - V_{ikh} = K(a_{ik}V_h - a_{ih}V_k).$$

D'altra parte, dalle (77′) si ha, moltiplicando per V e derivando covariantemente,

$$V_{ikh} = -K^* a_{ik} V_h,$$

che introdotte nelle precedenti danno luogo alle condizioni di integrabilità

$$(K^* - K)(a_{ik}V_h - a_{ih}V_k) = 0$$

per ogni terna di indici i, h, k. Dacchè per ipotesi V è un'effettiva funzione, una almeno delle sue derivate (diciamo per esempio V_k) sarà diversa da 0. Fissiamo nelle equazioni testè stabilite questo valore di k e un valore di h diverso da k; e moltiplichiamo per a^{ih} sommando rispetto all'indice i. Ricaveremo

$$(K^* - K)V_k = 0$$

donde appunto $K^* - K = 0$, *c. d. d.*
Con ciò, dalla (79) ricaviamo

$$3K + \varkappa p = 0$$

che dà luogo alle stesse considerazioni qualitative, nei riguardi degli sforzi, già indicate per il cronotopo cilindrico.

Per l'integrazione delle (77′) in cui si ponga ormai $K^* = K$, giova riprendere il dl^2 sotto la forma canonica (75).

Le derivate covarianti V_{ik} di V rispetto al nostro dl^2 si possono esplicitare, in funzione delle derivate ordinarie, evitandone il calcolo diretto, in base a note considerazioni (*C. D. A.*, Cap. VIII, §§ 2 e 4). Infatti, considerando il nostro dl^2 e il corrispondente dl_0^2 euclideo riferiti alle stesse coordinate, si ha (dalla (9) del citato capitolo di *C. D. A.*), per le differenze fra omologhe derivate covarianti,

$$V_{ik} - V^0_{ik} = \sum_1^3{}_l \varrho^l_{ik} V_l$$

dove,

$$\varrho^l_{ik} = \delta^l_i \tau_k + \delta^l_k \tau_i - a_{ik}\tau^l,$$

essendo nel caso nostro $e^{-2\tau} = u^2$.

Notando che per il dl_0^2 riferito a coordinate cartesiane le V^0_{ik} non sono altro che le derivate seconde ordinarie e che $\tau^l = \tau_l$, $a_{ik} = \delta^k_i$, si hanno le cercate espressioni esplicite sotto la forma

$$V_{ik} = \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_k} + \frac{1}{u}(u_k V_i + u_i V_k) - \frac{\delta^k_i}{u}\sum_1^3{}_l u_l V_l.$$

Portiamo queste espressioni nelle equazioni (77′), che, per

$$K^* = K \quad \text{e} \quad a_{ik} = \delta^k_i/u^2,$$

si scrivono (moltiplicandole per uV)

$$uV_{ik} + \frac{KV}{u}\delta^k_i = 0.$$

Ove si ponga per brevità

(80) $$W = uV,$$

con che, avuto riguardo all'espressione (76) di u,

$$u \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_k} + u_k V_i + u_i V_k = \frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_k} - \frac{KV}{2} \delta_i^k ,$$

risulta materialmente

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_k} = \delta_i^k \left(\frac{K}{2} \frac{W}{u} - \frac{KW}{u^2} + \sum_1^3{}_l u_l V_l \right) .$$

Ma per la (80)

$$V_l = \frac{W_l}{u} - \frac{W}{u^2} u_l ;$$

sostituendo, e tenendo conto della definizione (76) di u e della conseguente identità

$$K + \sum_1^3{}_l u_l^2 = Ku ,$$

le precedenti equazioni divengono

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y_i \partial y_k} = \delta_i^k \frac{K}{2u} \left(\sum_1^3{}_l y_l W_l - W \right) .$$

Di qui si deduce intanto che per $i \neq k$ si annullano le derivate seconde di W, ossia che W deve essere a variabili separate (somma di tre funzioni, una della sola y_1, una della sola y_2, una della sola y_3). D'altra parte, per $i = k$, le equazioni precedenti mostrano, essendo eguali i secondi membri, che tali risultano altresì

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} , \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y_2^2} , \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y_3^2} ;$$

il loro valore comune non può essere quindi che una costante che potremo designare con $b_0 \frac{K}{2}$. Quindi la più generale espressione di W è del tipo

$$W = \frac{b_0 K}{4} r^2 + w + C ,$$

essendo w una funzione lineare omogenea, *a priori* indeterminata, e C una costante. I coefficienti di questa espressione vanno determinati in modo che risulti

$$\frac{b_0 K}{2} = \frac{K}{2u} \left(\sum_1^3{}_l x_l W_l - W \right),$$

ossia

$$\sum_1^3{}_l x_l W_l - W = b_0 u .$$

Per il teorema di EULERO sulle funzioni omogenee il termine lineare w non porta alcun contributo al primo membro, sicchè i suoi tre coefficienti rimangono arbitrari: rimane così

$$\frac{b_0 K}{4} r^2 - C = b_0 u$$

che, in base alla (76), si riduce a

$$C = - b_0 .$$

Con ciò l'espressione definitiva di W può essere scritta

(81) $$W = b_0 (u - 2) + w,$$

rimanendo completamente arbitrari sia la costante b_0 che i tre coefficienti di w. Naturalmente, questo numero di costanti si poteva senz'altro prevedere dal fatto che il sistema (77') è illimitatamente integrabile: rimanendone definite tutte le derivate seconde della funzione V, esso equivale manifestamente (*C. D. A.*, Cap. II, § 1) ad un sistema ai differenziali totali in quattro funzioni incognite: la stessa V e le sue tre derivate prime.

Va notato del resto che le tre costanti di integrazione che compariscono nell'espressione lineare

$$w = 2 (b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3)$$

si possono ovviamente ridurre a una sola essendo sempre possibile con una trasformazione ortogonale sulle coordinate y (di fronte a cui sono invarianti tanto r^2 che u e dl_0^2) ricondurre il trinomio alla forma $2by_1$, con

$$b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Ma è anche lecito supporre addirittura $b = 0$, come si potrebbe verificare formalmente (in modo però un po' meno elementare) tenendo conto dell'omogeneità degli spazi a curvatura costante, che consente di risguardare come punto $y_i = 0$ (pur conservando la forma canonica $\frac{dl_0{}^2}{u^2}$ del dl^2) un punto *a priori* prefissato [1]). Ciò posto, dalla (80) risulta che l'espressione del ds^2 spazialmente uniforme, nell'ipotesi di V variabile, è

$$ds^2 = \frac{W^2\,dy_0^2 - dl_0^2}{u^2}$$

dove

$$\text{(82)} \qquad \left\{ \begin{aligned} W &= b_0\,(u - 2)\,, \\ u &= 1 + \frac{K}{4}\,r^2. \end{aligned} \right.$$

S' intende che la costante b_0 non è nulla, altrimenti risulterebbe identicamente $V = \frac{W}{u} = 0$, il che abbiamo escluso, perchè qui consideriamo il caso di V variabile.

Atteso il significato fisico di V, si presentano ovviamente come singolarità del campo quelle eventuali posizioni in cui $V = 0$, le quali rimangono, per così dire, otticamente isolate, nel senso che sarà precisato più tardi. Risulta intanto che al crescere indefinito di r e quindi di u, la V tende a b_0: d'altra parte, per valori finiti di r, la u si conserva essenzialmente finita

[1]) Ciò si rende intuitivo per il caso di due dimensioni in cui una varietà a curvatura costante positiva è un'ordinaria sfera, e l'espressione canonica del dl^2 si ottiene mediante proiezione stereografica della sfera stessa su un piano diametrale (*C. D. A.*, Cap. VIII, § 7). L'affermazione del testo si riduce in tal caso all'ovvio fatto geometrico che qualsiasi punto della sfera può essere scelto come centro di proiezione.

e > 1, cosicchè i punti singolari rimangono determinati dall'equazione $W = 0$. Questa equazione, attese le (82) e rammentando la posizione $K = \frac{1}{a^2}$, si scrive

$$r = 2a$$

che definisce (nello spazio euclideo rappresentativo) una sfera D_0. La superficie D che ad essa corrisponde nello spazio fisico, e che, per le considerazioni del § **11**, è anch'essa una sfera (geodetica), si dice *orizzonte*, perchè viene in certo senso a costituire il limite dell' universo sensibile. Ciò risulta dal fatto che sia la luce, sia, *a fortiori*, una particella materiale, dovrebbe impiegare un tempo infinito per arrivarvi. Per rendersene conto basta notare che, se A e B sono due punti generici, il tempo impiegato dalla luce a passare da A a B è (per definizione di V)

$$\int \frac{dl}{V} = \int \frac{dl_0}{uV} = \int \frac{dl_0}{W}$$

l' integrale essendo esteso al raggio che congiunge A con B. Quando B tende all'orizzonte, l'integrando tende a un infinito del 1° ordine in B, e quindi l' integrale non può restare finito, *c. d. d.*

Come già è stato richiamato nel paragrafo precedente, la forza del campo è il gradiente di $-\frac{1}{2}V^2$: essa tende per conseguenza a spostare le masse materiali verso le regioni di minimo V^2, ossia verso l'orizzonte. Questa circostanza fu risguardata come un'incongruenza del cronotopo di De Sitter, ma va rilevato che essa deve intendersi riferita unicamente a masse accidentali (abbastanza piccole da non modificare sensibilmente il campo) e non a quelle uniformemente diffuse che lo costituiscono, il cui equilibrio è automaticamente assicurato dalle equazioni gravitazionali. Termineremo questo paragrafo mostrando che il cronotopo di De Sitter non solo implica (come quello di Einstein) che sia a curvatura costante e positiva K lo spazio fisico (cioè ogni varietà $x_0 = \text{cost}$) ma è esso stesso, come varietà quadrimensionale, a curvatura costante *negativa* $-K$. Per dimostrarlo, prendiamo le mosse dalla ricordata proprietà del dl^2 spaziale di ammettere la curvatura costante K. Questo implica (*C. D. A.*, Cap. VIII, § 5) che i simboli di RIEMANN del dl^2 abbiano la forma

$$\{ ir, hk \} = K (a_{ih} \delta_k^r - a_{ik} \delta_h^r)$$
$$(i, r, h, k = 1, 2, 3).$$

Per tali valori degli indici, attese le (11) e le (13) del § **4**, queste relazioni si scrivono

$$\{ ir, hk \}' = - K (g_{ih} \delta_k^r - g_{ik} \delta_h^r). \tag{83}$$

Ora, è facile riconoscere che queste ultime formule, in virtù delle espressioni (14), (14′) degli altri simboli di RIEMANN del nostro ds^2 e delle equazioni

$$\frac{V_{ik}}{V} = - K a_{ik} = K g_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{77′}$$

seguitano a sussistere anche includendo lo 0 fra i valori da attribuire agli indici. Ciò è immediato, se gli indici eguali a 0 sono uno, tre o quattro, poichè allora (§ **4**) si annullano entrambi i membri. Nel caso di due indici uguali a zero, sono (loc. cit.) da esaminarsi i due tipi $\{ 0r, 0k \}'$, $\{ i0, 0k \}'$, che attribuiscono ai primi membri rispettivamente le espressioni

$$V (V^r)_k = V \sum_1^3 {}_i \, a^{ri} V_{ik} , \qquad \frac{V_{ik}}{V} ,$$

cioè, attese le (77′),

$$- K V^2 \sum_1^3 {}_i \, a^{ri} a_{ik} = - K V^2 \delta_k^r = - K g_{00} \delta_k^r , \qquad K g_{ik} .$$

Tale è manifestamente anche il valore dei secondi membri. Il sussistere delle (83) per tutti i valori degli indici da 0 a 3 esprime appunto che il ds^2 cronotopico ha la curvatura costante negativa $-K$.

Non è forse inutile osservare che, mentre la nozione di varietà a curvatura costante e la sua misura K hanno, per loro natura, carattere invariante, cioè indipendente dalla scelta delle coordinate di riferimento, tale invarianza non sussiste invece di fronte ad una moltiplicazione del ds^2 per un fattore costante m. Infatti, quando tutti i coefficienti g_{ik} si moltiplicano per m, i simboli di RIEMANN di *seconda* specie rimangono inalterati, sicchè (*C. D. A.*, formule (19′) del Cap. VIII) la curvatura K rimane anch'essa moltiplicata per m. In particolare, per $m = -1$, essa cambia di segno. Con ciò si spiega l'apparente contraddizione del nostro enunciato con quello di taluni autori, che, assumendo come forma fondamentale $-ds^2$, attribuiscono al cronotopo di DE SITTER curvatura costante positiva.

17. IL TERMINE ADDIZIONALE DI EINSTEIN - INDICAZIONE DI ALTRE SOLUZIONI RIGOROSE. — Per la soluzione di EINSTEIN si è trovato nel § **15** [formule (73) e (78)]

$$3K = \varkappa \eta , \qquad K + \varkappa p = 0 .$$

Non si potrebbe quindi supporre la materia disgregata ($p = 0$) senza che ne derivi $\eta = 0$, riconducendosi così al caso banale di uno spazio totalmente vuoto. Ora, mettendosi dal punto di vista cosmologico-statistico (nel senso indicato al § **14**), appare ragionevole di supporre che debba esistere una soluzione delle equazioni gravitazionali corrispondente all' ipotesi di una distribuzione di materia uniforme e così diluita, che risultino insensibili le azioni molecolari tra particelle contigue e quindi gli sforzi, per cui cioè $p = 0$, mentre η è una costante diversa da zero.

Poichè le equazioni gravitazionali nella forma originaria (8)

$$G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} = - \varkappa T_{ik}$$

non ammettono alcuna soluzione di questo tipo, l' EINSTEIN fu condotto a modificarle (lievissimamente) aggiungendo un termine che conservi il carattere tensoriale delle (8) e che nei casi ordinari riesca addirittura insensibile pur servendo a rendere possibile la soluzione del tipo indicato. Tale termine fu assunto dall' EINSTEIN sotto la forma particolarmente semplice λg_{ik}, λ designando una costante, trascurabile di fronte a G, nella maggior parte dei casi. Le equazioni gravitazionali, così modificate, si scrivono

$$G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} - \lambda g_{ik} = - \varkappa T_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3). \tag{84}$$

Quelle statiche divengono in conformità

$$\mathrm{M} - \lambda = \varkappa \eta ,$$

$$a_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \left(\frac{\Delta_2 V}{V} + \lambda \right) a_{ik} = - \varkappa T_{ik} .$$

Procedendo come al § 14, nell' ipotesi che il dl^2 spaziale sia a curvatura costante, e che gli sforzi abbiano carattere isotropo [cioè siano dati dalle (70)] si è in definitiva condotti alle due relazioni fra K, η, p e λ:

$$3K = \varkappa \eta + \lambda ,$$

$$K + \varkappa p = \lambda$$

che sostituiscono le (73), (78).

Qui manifestamente diviene possibile porre $p = 0$ senza che necessariamente si annulli anche η, bastando assumere

$$\begin{cases} \eta = \dfrac{2K}{\varkappa} , \\ K = \lambda . \end{cases} \tag{85}$$

Per avere un' idea della piccolezza della costante λ, basta osservare che la densità cosmica media della materia η/c^2 si può risguardare certamente assai inferiore a quella delle nebulose, che è dell'ordine di 10^{-17} gr/cm^3.

È quindi lecito ritenere in ogni caso

$$\lambda = K < \frac{\varkappa c^2}{2} 10^{-17} .$$

Rammentando i valori numerici (in unità G. G. S.)

$$\varkappa = 2 \cdot 10^{-48} , \qquad c = 3 \cdot 10^{10} ,$$

si ha

$$\lambda = K < 9 \cdot 10^{-45} .$$

Ne risulta per il raggio a dell'universo $\left(K = \dfrac{1}{a^2}\right)$ la limitazione

$$a > 10^{22} \text{ cm}.$$

Il detto raggio è dunque senza dubbio assai maggiore di 10^{17} km. ossia di 10.000 anni di luce.

***

Termineremo con qualche indicazione bibliografica concernente le soluzioni rigorose delle equazioni gravitazionali (con o senza termine cosmologico) in alcuni casi speciali.

Si riattaccano alla soluzione dello SCHWARZSCHILD, fornendone notevoli complementi o generalizzazioni, sia i contributi originali di BIRKHOFF, DE DONDER, EDDINGTON, V. LAUE [1]), WEYL, sostanzialmente riportati nei loro trattati, sia quelli della signorina LONGO [2]) e dei signori TREFFTZ [3]), NUYENS [4]) e VANDERLINDEN [5]).

[1]) Cfr. altresì « Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wiss. », 1923, pp. 27-31.
[2]) « Nuovo Cimento », vol. XV, 1918, pp. 191-211.
[3]) « Math. Annalen », B. 86, 1922, pp. 317-326.
[4]) « Comptes Rendus », T. 176, 1923, pp. 1376-1379.
[5]) « Bull. de l'Académie Royale de Belgique », 1921, pp. 260-276.

Diverso tipo di soluzioni contemplano invece le ricerche di WEYL [1]), LEVI-CIVITA [2]), BACH [3]), CHAZY [4]), PALATINI [5]), STRANEO [6]), KASNER [7]). Va infine ricordata la recente esposizione riassuntiva del DARMOIS [8]).

[1]) « Annalen der Physik », LIV (1918), pp. 117-145, LIX (1919), pp. 185-188.

[2]) *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani*, Note I-IX, in « Rend. Acc. Lincei », vol. XXVI, XXVII, XXVIII, 1917-1919.

[3]) « Math. Zeitschrift », B. 13, 1922, pp. 134-145.

[4]) « Bulletin de la Société Math. de France », T. LII, 1924, pp. 17-37.

[5]) « Nuovo Cimento », vol. XXVI, 1923, pp. 5-24.

[6]) « Rend. Acc. Lincei », vol. XXXIII (2^o sem. 1924), pp. 404-410, 468-474, 547-552.

[7]) « Trans. of the American Math. Society », vol. 27, 1925, pp. 101-105, 155-162.

[8]) *Les équations de la gravitation einsteinienne* (fasc. XXV della collezione « Mémorial des sciences mathématiques »), Paris, Gauthier-Villars, 1927.

APPENDICE.

Sulla curvatura degli spazi riemanniani a tre dimensioni.

Svolgeremo qui alcune proprietà di curvatura delle V_3, invocate nel testo. Esse sono dovute quasi interamente al RICCI, di cui seguiremo l'elegante trattazione. Non figurano in *C. D. A.* quale applicazione della teoria generale della curvatura (Cap. VII) ma furono posteriormente inserite nella traduzione inglese (Glasgow, Blackie and Son, 1927). Perciò riteniamo opportuno di cogliere la presente occasione per pubblicarle anche in italiano.

§ **1.** I TENSORI a_{ik} DI RICCI E G_{ik} DI EINSTEIN. — I simboli di RIEMANN di prima specie $(i\,j,\ h\,k)$ verificano notoriamente le relazioni (di simmetria e emisimmetria) [1])

$$(i\,j,\ h\,k) = -(i\,j,\ k\,h) = -(j\,i,\ h\,k) = (h\,k,\ i\,j)\ ,$$

da cui in particolare

$$(i\,j,\ h\,h) = (i\,i,\ h\,k) = 0\ ,\ \text{ecc.}$$

Per le varietà a tre dimensioni quelli tra i simboli in questione, che non si annullano identicamente, si possono ricondurre allo schema

$$(i+1\ \ i+2\ ,\quad k+1\ \ k+2) \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

colla convenzione di risguardare equivalenti due indici che differiscono per multipli di 3.

[1]) *C. D. A.*, Cap. VIII, formule (10), (11) e (15).

Giova in conformità introdurre col RICCI il sistema doppio simmetrico

$$a^{ik} = \frac{(i+1\; i+2,\; k+1\; k+2)}{a} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{1}$$

il quale costituisce, come passiamo a dimostrare, *un tensore contravariante*.

Ricorriamo all' uopo al sistema contravariante ε [1]), notando che la (1) equivale alla

$$a^{ik} = \frac{1}{4}\sum_{1}^{3}{}_{pqrs}\, \varepsilon^{ipq}\, \varepsilon^{krs}\, (pq,\; rs) \qquad (i, k = 1, 2, 3): \tag{1'}$$

e ciò prova l'asserto. La verificazione di quest' ultima formula è immediata, ove si rifletta che delle varie determinazioni *a priori* possibili per la coppia p, q, ve ne ha soltanto due,

$$p = i+1, \quad q = i+2$$

e

$$p = i+2, \quad q = i+1,$$

in corrispondenza alle quali ε^{ipq} risulta diverso da zero: $\frac{1}{\sqrt{a}}$ nel primo caso, $-\frac{1}{\sqrt{a}}$ nel secondo. Analogamente, per l'altra coppia r, s, le sole determinazioni cui corrisponde un ε^{krs} non nullo sono

$$r = k+1, \qquad s = k+2$$

e

$$r = k+2, \qquad s = k+1.$$

Il sommatorio $\sum_1^3{}_{pqrs}$ dà quindi luogo a quattro termini tutti riducibili a

$$\frac{(i+1\; i+2,\; k+1\; k+2)}{a},$$

donde appunto la (1).

[1]) *C. D. A.*, Cap. VI, § 8.

Si chiamano talora *simboli del* RICCI sia le a^{ik} testè definite, sia, più specificamente, *gli elementi*

$$a_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a_{ij}\, a_{hk}\, a^{jh} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2}$$

del tensore covariante reciproco.

Vale la pena di rilevare che le (1), tenendo conto delle simmetrie e emisimmetrie di cui godono i simboli di RIEMANN $(i\,j,\; h\,k)$, possono anche presentarsi risolute rispetto a questi ultimi sotto la forma

$$(i\,j,\; h\,k) = \sum_{1}^{3}{}_{\nu\rho}\, a^{\nu\rho}\, \varepsilon_{\nu ij}\, \varepsilon_{\rho hk}. \tag{1''}$$

Infatti, sviluppando il secondo membro e badando alla definizione del sistema covariante ε, si trova zero, in corrispondenza ad ogni quaderna i, j, h, k per cui il primo membro si annulla; e aa^{ik} in corrispondenza ad una quaderna del tipo $i+1$, $i+2$, $k+1$, $k+2$; il che equivale appunto alle (1).

Saturando il tensore a del RICCI mediante il tensore fondamentale (dei coefficienti del ds^2, o loro reciproci) si ha *l' invariante lineare* del tensore a

$$\mathrm{M} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, a^{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{ik}\, a_{ik}, \tag{3}$$

che, come vedremo nel successivo paragrafo, si interpreta geometricamente quale *curvatura media* della varietà a tre dimensioni di cui si tratta.

Segnaliamo ancora una relazione formale che viene invocata al § 4 del Cap. II. Per una V_n qualsiasi si può dedurre dal tensore riemanniano, mediante saturazione di due indici, il tensore covariante doppio

$$G_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{jh}\, a^{jh}\, (i\,j,\; h\,k), \tag{4}$$

che, in virtù delle relazioni fra i simboli di RIEMANN di prima e di seconda specie, può anche essere presentato sotto la forma

$$G_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{h} \left\{ i\,h,\; h\,k \right\}. \tag{4'}$$

Esso fu considerato e applicato dal RICCI allo studio della distribuzione locale delle curvature in una V_n; fu poi ripreso dall' EINSTEIN che ne fissò la importanza fondamentale nella teoria della relatività (in cui $n = 4$): lo si designa comunemente come *tensore* di EINSTEIN.

Per $n = 3$ le a_{ik} sono legate in modo semplice alle G_{ik}. Onde stabilire questa relazione senza sviluppi ineleganti, ci converrà ricorrere a due proprietà dei sistemi ε ternari: l' una espressa dall'identità (di verificazione immediata)

(5)
$$\sum_{j}^{3} \varepsilon^{pqj}\, \varepsilon_{rsj} = \delta^p_r\, \delta^q_s - \delta^p_s\, \delta^q_r \qquad (p, q, r, s = 1, 2, 3),$$

le δ avendo il solito significato (0 per indici diversi, 1 per indici eguali); e l'altra, che pure si verifica materialmente, la quale traduce, si può dire, la definizione di a^{jh} come elemento reciproco:

$$a^{jh} = \frac{1}{2} \sum_{pqrs}^{3} \varepsilon^{pqj}\, \varepsilon^{rsh}\, a_{pr}\, a_{qs}\,.$$

Sostituiamo nelle (4), al posto delle a^{jh}, questi secondi membri, e, al posto delle $(i\,j, h\,k)$, le loro espressioni (1'') scrivendovi $-\varepsilon_{\rho kh}$ al posto di $\varepsilon_{\rho hk}$. Ove si tenga conto delle (5), risulta

$$G_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{pqrs\nu\rho}^{3} a_{pr}\, a_{qs}\, a^{\nu\rho}\, (\delta^p_\nu\, \delta^q_i - \delta^p_i\, \delta^q_\nu)\, (\delta^r_k\, \delta^s_\rho - \delta^r_\rho\, \delta^s_k)\,.$$

Dei quattro addendi cui dà luogo lo sviluppo delle parentesi, i due positivi si ottengono l' uno dall'altro scambiando materialmente p con q ed r con s, il che non altera il prodotto $a_{pr}\, a_{qs}$, nè per conseguenza il valore del termine; così dicasi per i due negativi. Si può perciò limitarsi a considerarne uno solo di ciascuna specie, sopprimendo il fattore ½.

Se si prende per es.

$$\delta^p_\nu\, \delta^q_i\, (\delta^r_k\, \delta^s_\rho - \delta^r_\rho\, \delta^s_k),$$

e si bada al significato dei simboli δ, il sommatorio si riduce ai soli indici ν e ρ, ottenendo

$$G_{ik} = \sum_{\nu\rho}^{3} (a_{\nu k}\, a_{i\rho}\, a^{\nu\rho} - a_{\nu\rho}\, a_{ik}\, a^{\nu\rho})\,,$$

ossia in definitiva, avuto riguardo alle (2), (3),

(6)
$$G_{ik} = a_{ik} - \mathrm{M}\, a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

§ 2. CURVATURA DELLE VARIETÀ A TRE DIMENSIONI INTORNO UN AD PUNTO. - DIREZIONI E INVARIANTI PRINCIPALI. — Si prenda a considerare in una V_3 una generica giacitura, o *faccetta*, f, individuata da due direzioni (versori) **u**, **v** di parametri u^i, v^i $(i = 1, 2, 3)$, spiccate da un medesimo punto P. Sia α l'angolo dei due versori, **w** il loro prodotto vettoriale (*C. D. A.*, Cap. VI, § 8) cui competono i momenti

(7)
$$w_\nu = \sum_{ij}^{3} \varepsilon_{\nu ij}\, u^i\, v^j = \sum_{ij}^{3} \varepsilon_{ij\nu}\, u^i\, v^j \qquad (\nu = 1, 2, 3)\,.$$

In corrispondenza alla giacitura f, si ha, nella nostra varietà V_3, la curvatura riemanniana K fornita [1]) da

$$K = \frac{1}{\sin^2\alpha} \sum_{ijhk}^{3} (i\,j, h\,k)\, u^i\, v^j\, u^h\, v^k.$$

Nel sommatorio $\sum_{ijhk}^{3}$ conviene introdurre, al posto dei simboli di RIEMANN $(i\,j, h\,k)$, le loro espressioni (1''). Avuto riguardo alle (7), risulta immediatamente

(8)
$$K = \frac{1}{\sin^2\alpha} \sum_{\nu\rho}^{3} a^{\nu\rho}\, w_\nu\, w_\rho\,.$$

Riservandoci di illustrare questa formula tra un momento, rileviamo che, in generale, la lunghezza w del vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è data dal prodotto delle lunghezze u, v per il seno dell'angolo

[1]) *C. D. A.*, Cap. VII, § 10.

compreso: per le V_3 euclidee, ciò risulta, come si è notato in *C. D. A.* (Cap. VI, § 8) dalla coincidenza delle componenti (7), riferite a coordinate cartesiane, colle componenti ordinarie (proiezioni ortogonali) del prodotto vettoriale $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$; per una V_3 generale, basta pensare che si possono in particolare assumere coordinate localmente cartesiane in un prefissato punto P, tali cioè che le a_{ik} abbiano in P i valori δ_i^k (e altresì — questo non importa per lo scopo attuale — le derivate prime i valori zero). Ora, sia nelle misure di lunghezza ed angoli di vettori spiccati da P, sia nella definizione (7) delle w_ν, intervengono soltanto componenti e valori delle a_{ik} in P. Tutto va dunque, localmente, come negli spazi euclidei [1]).

Torniamo al nostro caso, in cui $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori unitari. Risulta allora $w = \sin\alpha$, e quindi $\frac{w_i}{w} = \frac{w_i}{\sin\alpha}$ costituiscono i momenti λ_i della direzione $\boldsymbol{\lambda}$ normale alla giacitura f. Il verso, che a tale normale compete in base alle (7), rimane caratterizzato dal sistema ε, ossia, geometricamente, dal verso del triedro costituito in P dalle direzioni positive delle linee coordinate. Infatti dalle (7) stesse, ove si immaginano per es. le linee 1 e 2 orientate come $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, risulta

$$w_1 = w_2 = 0, \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} > 0,$$

[1]) Naturalmente si può anche fare il calcolo materiale della lunghezza di $\mathbf{w}$. All'uopo si nota che, assieme alla (7), sussiste la formula (equivalente) che definisce componenti contravarianti:

$$w^\nu = \sum_{1}^{3}{}_{hk}\, \varepsilon^{\nu hk} u_h v_k = \sum_{1}^{3}{}_{hk}\, \varepsilon^{hk\nu} u_h v_k .$$

Se ne trae, badando alle (5),

$$w^2 = \sum_{1}^{3}{}_\nu\, w^\nu w_\nu = \sum_{1}^{3}{}_{ijhk}\, u^i v^j u_h v_k (\delta_i^h \delta_j^k - \delta_j^h \delta_i^k) =$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_i\, u^i u_i \sum_{1}^{3}{}_j\, v^j v_j - \sum_{1}^{3}{}_i\, u^i v_i \sum_{1}^{3}{}_j\, v^j u_j = u^2 v^2 - (u\, v \cos\alpha)^2 =$$

$$= u^2 v^2 \sin^2\alpha ,$$

c. d. d.

e quindi (*C. D. A.*, Cap. V, § 22) $\mathbf{w}$ forma angolo acuto colla direzione positiva della linea 3, di parametri

$$s_3^1 = s_3^2 = 0 \qquad s_3^3 = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} > 0 .$$

Insomma $\boldsymbol{\lambda}$ è perpendicolare ad f in P e diretto in guisa che il triedro $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\lambda}$ abbia il medesimo verso del triedro costituito dalle direzioni positive delle linee coordinate nello stesso punto P.

La (8) assume in conformità la espressione attribuitale dal Ricci

(8′) $$K = \sum_{1}^{3}{}_{\nu\rho}\, a^{\nu\rho} \lambda_\nu \lambda_\rho = \sum_{1}^{3}{}_{\nu\rho}\, a_{\nu\rho} \lambda^\nu \lambda^\rho ,$$

la quale definisce la curvatura nelle varie giaciture f intorno a P come una quadrica omogenea nei parametri (ovvero nei momenti) *λ^ν della normale ad f*, in un verso a piacere, poichè K non cambia cambiando segno alle λ.

La dipendenza di K dalle direzioni $\boldsymbol{\lambda}$ della stella di centro P è di natura puramente locale: possiamo quindi studiarla, in base ad una osservazione richiamata poc'anzi, coi criteri elementari della geometria analitica, come se si trattasse di spazio ordinario, bastando riferirsi a coordinate *cartesiane, ortogonali nel punto P*. Le λ^ν divengono allora coseni direttori e si ha per K (salvo un diverso significato dei coefficienti $a_{\nu\rho}$) la stessa espressione la quale caratterizza la distribuzione dei momenti di inerzia (di un assegnato sistema materiale) rispetto alle ∞^2 rette di versore $\boldsymbol{\lambda}$ uscenti da P. Come ognun sa, la legge di variazione di K si rende in tal caso geometricamente espressiva introducendo l'ellissoide d'inerzia E, di centro P: ad ogni retta di versore $\boldsymbol{\lambda}$ spetta, come valore di K, $\frac{1}{\overline{PQ}^2}$, se Q è l'intersezione della retta coll'ellissoide E; i tre assi di E danno luogo a valori di K stazionari (rispetto alle direzioni circostanti); in particolare massimo e minimo per i due assi aventi rispettivamente lunghezza minima e massima.

Ciò posto, varrà per la curvatura K la stessa legge di variazione; soltanto bisogna interpretarla nella V_3 generale. Ciò implica intanto che l'ellissoide E (come ad es. l'indicatrice di DUPIN nel caso delle ordinarie superficie) va pensato all'infuori della V_3, come elemento rappresentativo ausiliario da associare allo spazio euclideo a tre dimensioni, tangente alla V_3 in P, qualora, come è sempre lecito (*C. D. A.*, Cap. V, § 21), si immagini la V_3 immersa in un S_N euclideo ($N \leq 6$).

Comunque, *rimane acquisita l'esistenza in ogni punto P di (almeno) tre direzioni mutuamente ortogonali* λ_1, λ_2, λ_3, *a cui* (*o piuttosto alle cui giaciture normali* f_1, f_2, f_3) *competono curvature stazionarie rispetto alle circostanti*. Queste direzioni si chiamano *direzioni principali di curvatura* e i corrispondenti valori ω_1, ω_2, ω_3 di K *curvature principali*. In generale, quando cioè le tre ω sono distinte, le direzioni principali risultano univocamente determinate (ellissoide a tre assi); quando due curvature principali coincidono, ma differiscono dalla terza (ellissoide rotondo), per es. $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$, è univocamente determinata soltanto la direzione principale λ_3, mentre ogni coppia di direzioni λ_1, λ_2 ortogonali a questa e fra loro può essere considerata principale. Se le tre curvature principali coincidono (sfera), la curvatura K è la stessa per qualsiasi giacitura, e ogni terna di direzioni mutuamente ortogonali è principale.

Tutto ciò può naturalmente stabilirsi anche per via puramente algebrica. Basta ricorrere alla teoria delle forme quadratiche e loro trasformazioni. Siano, in quante si vogliono variabili indipendenti λ^i ($i = 1, 2, \ldots, n$),

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij} \lambda^i \lambda^j, \quad \psi = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \alpha_{ij} \lambda^i \lambda^j \tag{9}$$

due quadriche, *di cui una almeno definita*: sia questa la φ.

È ben noto [1]) quanto segue:

1) Se si considera il rapporto

$$\omega = \frac{\psi}{\varphi}$$

[1]) Per le dimostrazioni, cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di geometria analitica*, Pisa, Spoerri, 1915, Appendice.

come funzione delle λ, e si cercano i valori di queste variabili a partire dai quali $\delta\omega = 0$, si è condotti al sistema di n equazioni lineari ed omogenee

$$\sum_{1}^{n}{}_{j} (\alpha_{ij} - \omega a_{ij}) \lambda^j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

che può essere soddisfatto da valori non tutti nulli delle λ allora e allora soltanto che si annulla il determinante dei coefficienti, ossia che ω è radice dell'equazione di grado n:

$$\| \alpha_{ij} - \omega a_{ij} \| = 0, \tag{11}$$

detta *equazione caratteristica*.

2) Se λ^i, λ'^i sono due soluzioni delle (10) corrispondenti a due radici distinte ω, ω' dell'equazione caratteristica, sussiste la relazione (di ortogonalità)

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij} \lambda^i \lambda'^j = 0 .$$

3) L'equazione caratteristica (11) ha le sue n radici ω_1, ω_2, ..., ω_n *tutte reali* (distinte o coincidenti).

4) Ad ogni radice semplice ω_h della (11) corrisponde, nella varietà V_n il cui ds^2 ha per coefficienti le a_{ij}, una e una sola direzione λ_h i cui parametri λ_h^i verificano le (10), per $\omega = \omega_h$. Ad ogni radice che abbia molteplicità μ (> 1) si possono (in infiniti modi) associare μ direzioni mutuamente ortogonali in V_n, i cui parametri sono soluzioni indipendenti delle (10), dove si attribuisca ad ω il valore della detta radice multipla.

Da tutto ciò risulta che è possibile in ogni caso costituire almeno un'ennupla di direzioni mutuamente ortogonali λ_h ($h = 1, 2, \ldots, n$) (univocamente determinate nel caso generale, in cui la (11) ha tutte le sue radici semplici) i cui parametri λ_h^i verificano il sistema (10), con ω eguale alla corrispondente ω_h.

Mediante queste λ_h si perviene alle così dette espressioni canoniche.

Cominciamo coll'introdurre i momenti

$$\lambda_{h|i} = \sum_{1}^{n}{}_{j} a_{ij} \lambda_h^j \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

e osserviamo in linea generale che, associando alle n identità

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_h^j \lambda_{h|j} = 1 \qquad (h = 1, 2, \dots, n)$$

le $\frac{n(n-1)}{h}$ condizioni di ortogonalità fra due diverse direzioni λ_h, λ_k dell'ennupla,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_h^j \lambda_{k|j} = 0 \qquad (h \neq k),$$

si hanno complessivamente le n^2 relazioni

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_h^j \lambda_{k|j} = \delta_h^k \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

le quali stanno ad esprimere il fatto notevole che *gli n^2 parametri λ_k^j di un'ennupla ortogonale sono gli elementi reciproci (in senso algebrico) degli n^2 momenti nel determinante $\| \lambda_{k|j} \|$ da essi costituito, e viceversa i momenti sono reciproci dei parametri nel relativo determinante $\| \lambda_k^j \|$* (cfr. *C. D. A.*, Cap. IV, § 6).

Perciò, accanto alle relazioni ora scritte che si riferiscono alle colonne, valgono le analoghe relative alle righe che si scrivono

$$\sum_{h=1}^{n} \lambda_h^j \lambda_{h|i} = \delta_i^j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n). \tag{13}$$

Tenendo conto di queste, ove si moltiplichino le (12) per $\lambda_{h|k}$ e si sommi rispetto ad h, risulta immediatamente

$$a_{ik} = \sum_{h=1}^{n} \lambda_{h|i} \lambda_{h|k} \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n) \tag{14}$$

che sono *espressioni del tensore fondamentale a_{ik} in funzione dei momenti di una qualsiasi ennupla ortogonale.*

Consideriamo in particolare l'ennupla (o una delle ennuple) λ_h,

i cui parametri λ_h^j verificano le (10), postovi, per ogni indice h, $\omega = \omega_h$. Tali equazioni, in virtù delle (12), si scrivono

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_h^j = \omega_h \lambda_{h|i} \qquad (h, i = 1, 2, \dots, n).$$

Moltiplicando per $\lambda_{h|k}$ e sommando rispetto all'indice h, ove si abbia riguardo alle (13), si ricava l'espressione canonica delle a_{ih} da associare alla (14)

$$a_{ik} = \sum_{h=1}^{n} \omega_h \lambda_{h|i} \lambda_{h|k} \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n). \tag{15}$$

Di qua risulta subito l'espressione dell'invariante lineare delle a_{ik}

$$\mathrm{M} = \sum_{ik=1}^{n} a^{ik} a_{ik}$$

mediante le ω. Infatti, tenendo conto dell'identità quadratica, cui soddisfanno i momenti di una generica direzione λ_h,

$$\sum_{ik=1}^{n} a^{ik} \lambda_{h|i} \lambda_{h|k} = 1,$$

si ha dalle (15)

$$\mathrm{M} = \sum_{h=1}^{n} \omega_h,$$

la quale, del resto, si sarebbe potuta desumere direttamente dall'equazione (11), tenendo conto che la somma delle sue n radici è espressa dal coefficiente di ω^{n-1}, cambiato di segno, cioè appunto dall'invariante lineare M. Per $n = 3$, tornando alle V_3, si ha l'annunciata interpretazione di M quale *curvatura media, cioè somma delle tre curvature principali.*

Dopo ciò riprendiamo la riduzione simultanea delle due quadriche φ e ψ a forma ortogonale. Essa si raggiunge ovviamente, immaginando di sostituire alle variabili originarie λ^i le n combinazioni lineari

$$z_h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{h|i} \lambda^i \qquad (h = 1, 2, \dots, n). \tag{16}$$

Infatti, ove si sostituiscano nelle (9) i valori (14) e (15) dei coefficienti e si tenga conto delle posizioni (16), risulta

$$\varphi = \sum_1^n {}_h z_h^2, \qquad \psi = \sum_1^n {}_h \omega_h z_h^2. \tag{17}$$

La condizione che le λ^i siano parametri, cioè che l'espressione (9) di φ abbia il valore 1, diviene, nelle nuove variabili z,

$$\sum_1^n {}_h z_h^2 = 1.$$

Il modo di variare di ψ, quando le λ sono parametri di direzione, si identifica con quello del rapporto $\frac{\psi}{\varphi}$, lasciando le variabili indipendenti; o, se si vuole, della quadrica

$$\psi = \sum_1^n {}_h \omega_h z_h^2,$$

quando le z sono vincolate da

$$\sum_1^n {}_h z_h^2 = 1.$$

Comunque, i valori stazionari di ψ in tale accezione sono precisamente le radici dell'equazione caratteristica (11); ecc.

La

$$\psi = \sum_1^n {}_{ij} a_{ij} \lambda^i \lambda^j$$

è ovvia generalizzazione, per n qualunque, della espressione (8′) di K, che definisce la distribuzione locale delle curvature in una V_3. Nelle considerazioni testè riportate, è manifestamente incluso anche il comportamento della K nelle varie direzioni, già in precedenza discusso per via più elementare.

INDICE.

CAPITOLO I.

Evoluzione della meccanica e dell'ottica geometrica.
Loro subordinazione ad uno schema quadridimensionale secondo Einstein.

CAPITOLO II.

Le equazioni gravitazionali e la relatività generale.

APPENDICE.

Sulla curvatura degli spazi riemanniani a tre dimensioni.