CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
MONOGRAFIE DI MATEMATICA APPLICATA

GIOVANNI SANSONE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI NEL CAMPO REALE

PARTE SECONDA

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1941-XX

Tipografia Compositori - Bologna 1941-XX

CAPITOLO VII.

Comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali.

§ 1. - Soluzioni stabili e instabili di un sistema differenziale.

1. Stabilità incondizionata o alla DIRICHLET e stabilità ridotta o alla ROUTH. - 2. Equazioni alle variazioni. Integrazione con procedimento di derivazione. - 3. Criteri di stabilità di LIAPOUNOFF. Applicazioni.

1. - Sia dato il sistema differenziale

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx}=f_i(x\,;\ y_1,\ y_2,\dots,\ y_n), \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ n),$$

e supponiamo che fissato per $x=x^0$ un sistema $y_1^0,\ y_2^0,\dots,\ y_n^0$ di valori iniziali che soddisfino la limitazione

$$|\,y_i^0-\overline{y}_i^0\,|<\varrho$$

ove $\overline{y}_1^0,\ \overline{y}_2^0,\dots,\ \overline{y}_n^0$ è una n^{pla} di numeri assegnati e $\varrho>0$, esista corrispondentemente uno e un solo sistema di integrali $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,\ y_n(x)$ definito in $(-\infty,\ +\infty)$ che soddisfi le condizioni iniziali

$$(2) \qquad y_i(x^0)=y_i^0, \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ n).$$

Sia in particolare $\overline{y}_1(x),\ \overline{y}_2(x),\dots,\ \overline{y}_n(x)$ la soluzione corrispondente alle condizioni iniziali

$$(3) \qquad \overline{y}_i(x^0)=\overline{y}_i^0 \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ n)\,;$$

diremo che essa è una soluzione *incondizionatamente stabile del sistema* (1), o *stabile alla* DIRICHLET, se fissato comunque un $\varepsilon>0$ è possibile determinare corrispondentemente un numero ϱ', $0<\varrho'\leqslant\varrho$, tale che se $y_1^0,\ y_2^0,\dots,\ y_n^0$ è un qualsiasi sistema di valori iniziali soddisfacenti le limitazioni

$$(4) \qquad |\,y_i^0-\overline{y}_i^0\,|<\varrho', \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ n),$$

risulti per i corrispondenti integrali $y_1(x),\ y_2(x),\dots,\ y_n(x)$

$$(5) \qquad \max_{-\infty<x<+\infty}|\,y_i(x)-\overline{y}_i(x)\,|<\varepsilon, \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ n) \quad (^1).$$

Se questa proprietà non si verifica la soluzione si dirà *instabile*.

Nelle applicazioni potrà riuscire sufficiente verificare le limitazioni (5) per i valori di $x\geqslant x^0$; si dirà allora che si tratta di *stabilità futura*. Potrà inoltre interessare di verificare che le limitazioni (5) sussistano per un gruppo delle $y_1(x),\ y_2(x),\dots,\ y_n(x)$ atte a caratterizzare alcuni aspetti del fenomeno che si studia, si dirà allora che si tratta di *stabilità ridotta* o alla ROUTH [2]. Ad esempio l'equazione del moto di un punto sia rappresentata dall'equazione del secondo ordine

$$(6) \qquad y''=f(x\,.\ y,\ y')$$

dove $y(x)$ e $y'(x)$ indicano rispettivamente la posizione e la velocità del punto al tempo x; la (6) equivale al sistema normale

$$\frac{dy}{dx}=y', \qquad \frac{dy'}{dx}=f(x\,;\ y,\ y')$$

e per alcuni problemi potrà interessare la valutazione del

$$\max_{-\infty<x<+\infty}|\,y'(x)-\overline{y}'(x)\,|$$

della differenza delle velocità corrispondenti ad un medesimo valore del tempo x quando esso varia tra $-\infty$ e $+\infty$ ed ha importanza trascurabile la differenza delle posizioni del mobile, e il contrario potrà interessare in altri problemi; nell'uno e nell'altro caso si tratterà quindi di studiare problemi di stabilità alla ROUTH [3].

---

(1) Per gli argomenti di questo paragrafo cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI: *Lezioni di Meccanica Razionale* (Bologna, 1926), T. II, parte 1ª, pp. 464-473. Per l'equazione $x''+p(t)x=0$, con $p(t)$ periodica, abbiamo già enunciato un criterio di stabilità nel Cap. VI, § 2, n. 2, *c*).

(2) E. J. ROUTH: *Essay on the stability of steady motion*, (Cambridge, 1877).

(3) Cfr. es. del § 4; n. 8, *e*).

2. - *a*) Il sistema (1) abbia una soluzione stabile

$$\bar{y}_1(x),\quad \bar{y}_2(x),\dots,\quad \bar{y}_n(x)$$

soddisfacente le condizioni iniziali $\bar{y}_i(x^0)=\bar{y}_i^0$, e poniamo

$$y_i \equiv \bar{y}_i(x)+\xi_i(x), \qquad (i=1,2,\dots,n), \tag{7}$$

ove le $\xi_i(x)$ indicano n nuove funzioni incognite. Fissato $\varepsilon>0$ si può determinare un $\varrho'>0$ tale che se

$$|\xi_i(x^0)|<\varrho', \qquad (i=1,2,\dots,n).$$

risulti

$$|\xi_i(x)|<\varepsilon \qquad \text{per } x>x^0. \tag{8}$$

Supponiamo che le f_i ammettano derivate parziali seconde continue negli argomenti $y_1, y_2,\dots, y_n$, complessivamente limitate per $x>x^0$, $|y_i-\bar{y}_i^0|<\varrho$; si avrà

$$\frac{d\bar{y}_i(x)}{dx}+\frac{d\xi_i(x)}{dx}=f_i(x;\ \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x),\dots, \bar{y}_n(x)) \tag{9}$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial \bar{y}_l}\xi_l(x)+\frac{1}{2}R_i, \qquad (i=1,2,\dots,n),$$

con

$$R_i=\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_l}\xi_l\right)^{(2)}_{(\bar{y}_1+\theta\xi_1,\ \bar{y}_2+\theta\xi_2,\dots,\ \bar{y}_n+\theta\xi_n)}, \qquad 0<\theta<1,$$

e in quest'ultima tutte le derivate seconde che si ottengono effettuando il quadrato simbolico sono prese nel punto

$$(\bar{y}_1+\theta\xi_1,\ \bar{y}_2+\theta\xi_2,\dots, \bar{y}_n+\theta\xi_n).$$

Se teniamo conto che le $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x),\dots, \bar{y}_n(x)$ soddisfano il sistema (1) e delle (8), così pure che le derivate seconde delle f_i sono complessivamente limitate, ne viene che trascurando termini dell'ordine di ε^2 le $\xi_1(x), \xi_2(x),\dots, \xi_n(x)$ soddisfano il sistema lineare

$$\frac{d\xi_i}{dx}=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial \bar{y}_l}\xi_l(x), \qquad (i=1,2,\dots,n), \tag{10}$$

dove $\partial f_i/\partial \bar{y}_l$ indica la derivata parziale di f_i rispetto a y_l calcolata nel punto $(\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x),\dots, \bar{y}_n(x))$.

Le equazioni (10) si chiamano con POINCARÉ (¹) *le equazioni alle variazioni del sistema* (1) *rispetto alla soluzione stabile* $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x),\dots, \bar{y}_n(x)$.

b) Giova notare che se del sistema (1) si conosce l'integrale generale $y_i(x;\ x^0;\ y_1^0, y_2^0,\dots, y_n^0)$ dipendente dalle costanti iniziali $y_1^0, y_2^0,\dots, y_n^0$, con sole operazioni di derivazione può determinarsi l'integrale generale del sistema alle variazioni (10).

Infatti per le cose dette al Cap. I, § 5, n. 2, posto

$$V_{i,k}=\frac{\partial y_i}{\partial y_k^0}, \qquad (i,k=1,2,\dots,n)$$

le $V_{i,k}$ soddisfano il sistema (10), e dalle (10_2) stabilite in quel Cap. si ha

$$V_{i,k}(x^0)=\varepsilon_{i,k}; \qquad \det.\|V_{i,k}\|=1; \qquad (i,k=1,2,\dots,n),$$

talchè le $V_{i,k}$ dànno un sistema di integrali fondamentali di (10).

c) Può ritenersi che le (7), quando $\xi_1(x), \xi_2(x),\dots, \xi_n(x)$ sono una soluzione del sistema (10) corrispondente a valori iniziali abbastanza piccoli, *forniscono una soluzione approssimata del sistema* (1), *valida in* $(x^0, +\infty)$, *di tutte le soluzioni prossime alla soluzione stabile* $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x),\dots, \bar{y}_n(x)$ e per questa ragione tali soluzioni si diranno *piccole oscillazioni intorno alla soluzione stabile* $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x),\dots, \bar{y}_n(x)$.

Si potrebbe pensare che dall'esame delle soluzioni del sistema (10) possa dedursi la stabilità delle soluzioni del sistema (1), ma un tale procedimento, come osservò A. LIAPOUNOFF in una celebre memoria (²), non può essere in ogni caso discriminativo; si debbono a questo Autore criteri coi quali effettivamente la prima approssimazione è sufficiente per dedurre la stabilità, e metodi che permettono in vari casi di risolvere la questione anche quando sia insufficiente l'esame del sistema (10).

(¹) H. POINCARÉ: *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, (Paris, 1892) T. I, Cap. IV, p. 162 e segg.

(²) A. LIAPOUNOFF: *Problème général de la stabilité du mouvement*, (Trad. dal russo di E. DAVAUX), Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse, (2), 9, (1907), pp. 203-474.

3. - *a*) Sia dato il sistema

(11) $$\frac{dy_i}{dx} = \sum P^{(i)}_{m_1, m_2, \ldots, m_n} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n},$$

$(m_1 \geqslant 0,\ m_2 \geqslant 0, \ldots, m_n \geqslant 0;\ m_1 + m_2 + \ldots + m_n \geqslant 1;\quad i = 1, 2, \ldots n)$,

ove i secondi membri sono serie di potenze in $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i cui coefficienti $P^{(i)}_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ sono funzioni reali continue di x complessivamente limitate per $x \geqslant x^0$, e convergenti per tutti i valori reali o complessi delle variabili $y_1, y_2, \ldots, y_n$ di modulo inferiore a un numero positivo H e per tutti i valori $x \geqslant x^0$. Supponiamo anche per ogni sistema di valori iniziali $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ che soddisfa la limitazione $|y_i^0| < \varrho$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, il sistema (11) sia atto a definire uno e un solo sistema di integrali aventi per campo di esistenza l'intervallo $(x^0, +\infty)$ e soddisfacente le condizioni iniziali $y_i(x^0) = y_i^0$, e proponiamoci di vedere se la soluzione

(12) $$y_1 = 0,\quad y_2 = 0, \ldots,\quad y_n = 0$$

è una soluzione stabile del sistema (11).

Se nella (11) i coefficienti dei termini di primo grado sono indipendenti da x, il corrispondente sistema alle variazioni è a coefficienti costanti, e dall'esame di esso LIAPOUNOFF consegue in molti casi alcuni dei criteri di stabilità; noi ci limitiamo però ad enunciare qualcuno dei risultati più generali, mentre per le dimostrazioni rimandiamo il lettore alla lettura dei trattati ([1]).

Sia $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ una forma quadratica a coefficienti costanti, reali; sostituendo a $y_1, y_2, \ldots, y_n$ una soluzione del sistema (11) e derivando rispetto ad x si avrà

$$\frac{dV}{dx} = V_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

dove V_1 è una nuova forma quadratica a coefficienti costanti, e Φ una serie di potenze in $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nella quale tutti i termini sono di grado non inferiore al terzo. *Se si possono scegliere i coefficienti di $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ in guisa che $V_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sia una forma definita positiva, sussiste il teorema*:

([1]) Cfr. ad es. É. GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathématique*, T. III, (4^{me} éd., Paris, 1927), pp. 31-43.

***i*) La soluzione $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ è stabile se la forma quadratica $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ è definita negativa;**

***ii*) La soluzione $y_1 = 0$, $y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$, è instabile se la forma quadratica $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ è una forma definita positiva, oppure una forma indefinita.**

b) - *i*) Consideriamo ad esempio il sistema lineare

$$\frac{dy_1}{dx} = \varrho_1 y_1,\quad \frac{dy_2}{dx} = \varrho_2 y_2, \ldots,\quad \frac{dy_n}{dx} = \varrho_n y_n,$$

dove le costanti $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sono reali, diverse da zero, e due a due distinte.

Se facciamo

$$V = \frac{1}{2}(\varrho_1 y_1^2 + \varrho_2 y_2^2 + \ldots + \varrho_n y_n^2),$$

si ha

$$V_1 = \varrho_1^2 y_1^2 + \varrho_2^2 y_2^2 + \ldots + \varrho_n^2 y_n^2,$$

e perciò se le costanti $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sono tutte negative, la soluzione $y_1 = 0$, $y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ è stabile; se una almeno di esse è positiva si ha l'instabilità.

Di questo risultato ci si persuade facilmente osservando che il sistema proposto ha l'integrale generale

$$y_1 = y_1^0\, e^{\varrho_1(x-x^0)},\quad y_2 = y_2^0\, e^{\varrho_2(x-x^0)}, \ldots,\quad y_n = y_n^0\, e^{\varrho_n(x-x^0)}.$$

ii) Si abbia più in generale il sistema lineare a coefficienti costanti e reali

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i,1} y_1 + a_{i,2} y_2 + \ldots + a_{i,n} y_n,\qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

e si consideri la sua equazione caratteristica [Cap. II, § 1, n. 6]

$$D(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{2,2} - \varrho \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n,2} \ldots & a_{n,n} - \varrho \end{vmatrix} = 0;$$

si dimostra che se *essa ammette radici soltanto reali, e non nulle, la soluzione $y_1 = 0$, $y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ è stabile se tutte le radici dell'equazione caratteristica sono negative, è instabile se una almeno di esse è positiva.*

Si dimostra più in generale che *se l'equazione caratteristica ammette anche radici complesse, ma nessuna radice* [reale o complessa] *ha nulla la parte reale, allora, se tutte queste parti reali sono negative la soluzione* $y_1=0, y_2=0, \ldots, y_n=0$ *è stabile, e se una almeno di queste parti reali è positiva la soluzione è instabile* ([1]).

§ 2. - Sviluppi asintotici delle soluzioni di un'equazione differenziale del secondo ordine con una particolare singolarità irregolare all'infinito.

a) Si voglia studiare il comportamento per $x \to +\infty$ degli integrali dell'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0, \tag{1}$$

nella quale supponiamo che per $|x|>R$ valgano gli sviluppi

$$p(x)=p_0+\frac{p_1}{x}+\frac{p_2}{x^2}+\ldots, \qquad q(x)=q_0+\frac{q_1}{x}+\frac{q_2}{x^2}+\ldots \tag{2}$$

ove $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ sono due successioni a termini reali ([2]).

Si potrà decidere del comportamento di tali integrali all'∞ esaminando direttamente i loro sviluppi in serie nell'intorno di $x=+\infty$. Abbiamo già visto nel Cap. III, § 3, nn. 2, 5, che possiamo costruire per gli integrali i loro sviluppi in serie procedenti per le potenze di $1/x$ i quali risultano convergenti nel caso che il punto $x=\infty$ sia *regolare* per l'equazione, cioè $2x-x^2p(x)$, $x^4q(x)$ siano regolari nell'intorno di $x=\infty$, e quindi

$$p_0=0, \quad p_1=2; \qquad q_0=q_1=q_2=q_3=0;$$

([1]) Cfr. ad es. É. GOURSAT, Op. cit. p. 38.

([2]) Per lo studio di queste equazioni nel campo analitico cfr. ad es. L. SCHLESINGER: *Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, (3ª ed., Lipsia, 1922), Cap. VIII, p. 248 e segg.. Cfr. pure, anche per indicazioni bibliografiche, J. HORN: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, (Berlin, 1927), pp. 188-194.

oppure nel caso che il punto all'∞ sia *singolare regolare*, cioè quando $xp(x)$, $x^2q(x)$ siano regolari nell'intorno di $x=\infty$ e quindi

$$p_0=0, \quad q_0=q_1=0. \tag{3}$$

Se non valgono quest'ultime, il punto $x=\infty$ è *singolare irregolare*. POINCARÉ osserva che se si costruiscono le serie che nell'intorno di un punto singolare irregolare soddisfano formalmente l'equazione esse possono risultare dappertutto divergenti. Però in casi molto generali le serie ottenute presentano il carattere della serie di STIRLING

$$\log \Gamma(x+1) \sim \frac{1}{2}\log(2\pi)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\frac{1}{x^2}+\ldots$$
$$+(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p-1)2p}\frac{1}{x^{2p-1}}+\ldots,$$

la quale pur essendo divergente per qualsiasi valore di x ha la proprietà che posto

$$S_p=\frac{1}{2}\log(2\pi)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\frac{1}{x^3}+\ldots$$
$$+(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p-1)2p}\frac{1}{x^{2p-1}},$$

per $x>0$ si ha

$$|\log \Gamma(x+1)-S_p|<\frac{B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)}\frac{1}{x^{2p+1}} \quad ([1]).$$

Serie di questo tipo prendono il nome di *serie asintotiche* (*sviluppi asintotici*), e vogliamo appunto costruirle per l'equazione (1) ([2]).

([1]) Cfr. ad es. U. DINI: *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, Vol. II, *Calcolo Integrale*, (1909), p. 411. I numeri $B_1, B_2, \ldots, B_p, \ldots$ indicano i numeri di BERNOULLI.

([2]) Il primo studio di queste serie e la loro applicazione alla ricerca delle soluzioni delle equazioni differenziali, nel campo analitico, nell'intorno di un punto singolare irregolare, trovasi nella memoria di H. POINCARÉ: *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires*, Acta Math., 8 (1886), pp. 295-344.

b) Se effettuiamo sulla (1) la trasformazione

$$(4) \qquad y = e^{\lambda x} v, \quad (\lambda \text{ costante})$$

l'equazione diventa

$$v'' + [2\lambda + p]\, v' + [\lambda^2 + p\lambda + q]\, v = 0,$$

e se λ è una radice dell'equazione

$$(5) \qquad \lambda^2 + p_0\lambda + q_0 = 0,$$

la (1) assume la forma

$$(6) \qquad v'' + (\pi_0 + \pi_1 x^{-1} + \ldots)\, v' + (\varrho_1 x^{-1} + \varrho_2 x^{-2} + \ldots)\, v = 0,$$

con

$$\pi_0 = 2\lambda + p_0; \qquad \pi_n = p_n,\ n \geqslant 1; \qquad \varrho_n = \lambda p_n + q_n,$$

e così nella (6) il coefficiente di v è privo del termine costante.

Noi supporremo che la (5) abbia radici reali.

Se sulla equazione (6) effettuiamo la trasformazione

$$(7) \qquad v = x^{\sigma} u$$

essa diventa

$$(8) \qquad u'' + [\pi_0 + (\pi_1 + 2\sigma)x^{-1} + \pi_2 x^{-2} + \ldots]\, u'$$
$$+ [(\pi_0\sigma + \varrho_1)x^{-1} + (\sigma(\sigma-1) + \pi_1\sigma + \varrho_2)x^{-2} + (\pi_2\sigma + \varrho_3)x^{-3} + \ldots]u = 0,$$

e ove sia possibile scegliere σ in modo che sia

$$(9) \qquad \pi_0\sigma + \varrho_1 = 0,$$

la (8) assumerà la forma

$$(10) \qquad u'' + [\pi_0 + (\pi_1 + 2\sigma)x^{-1} + \pi_2 x^{-2} + \ldots]u'$$
$$+ [\,(\sigma(\sigma-1) + \pi_1\sigma + \varrho_2)x^{-2} + (\pi_2\sigma + \varrho_3)x^{-3} + \ldots]u = 0.$$

Ora la (9) è identica se $\varrho_1 = 0$, $\pi_0 = 0$, se cioè per l'equazione (6) il punto $x = \infty$ è singolare regolare, e in tal caso i procedimenti del Cap. III, § 3 permettono di determinare gli sviluppi in serie di potenze di $1/x$ degli integrali della (6).

Qui ci limiteremo al caso $\pi_0 < 0$ (1);

Se nella (7) facciamo $\sigma = -\varrho_1/\pi_0$ la (1) assumerà la forma (10), e infine con il cangiamento di variabile indipendente $x = -X/\pi_0$ l'equazione assume la forma

$$(11) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \left[-1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right]\frac{du}{dx} + \left[\frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots\right]u = 0,$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ sono costanti reali che si esprimono per $p_0, p_1, p_2, \ldots, q_0, q_1, q_2, \ldots$ e le due serie che figurano come coefficienti di du/dx e di u, convergono per $|x| > R_1$.

c) Noi dobbiamo studiare il comportamento degli integrali della (11) per $x \to +\infty$, proveremo per questo che *fissata comunque una costante reale a, esiste sempre un integrale u(x) della (11) che gode la proprietà*

$$(12) \qquad \lim_{x \to +\infty} u(x) = a,$$

determineremo anzi col *metodo delle approssimazioni successive* un'espressione asintotica di tale integrale, utilissima dal punto di vista del calcolo numerico.

Osserviamo preliminarmente che supposto $\int_x^\infty (e^{x-t} - 1)\, f(t)\, dt$

(1) Per il comportamento degli integrali dell'equazione (2) nel campo reale, anche nei casi non esaminati nel testo, cfr. A. Kneser: *Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werten des Arguments*, Journ. für die reine und ang. Math. *a*) Bd. 116 (1896), pp. 178-212, *b*) Bd. 117 (1897), pp. 72-103, *c*) Bd. 120 (1899), pp. 267-275 e particolarmente pp. 274-275.

In epoca di poco posteriore, U. Dini considerò la determinazione dei valori asintotici delle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque, [Cfr. U. Dini: *Studi sulle equazioni differenziali lineari*, Ann. di Mat. pura ed appl. (3), 2 (1899), pp. 297-324, 3 (1899), pp. 125-183] e i risultati furono pubblicati, con lievi modificazioni, nelle sue *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, Vol. II, *Calcolo Integrale* (2a p., 1915), pp. 745-808.

Per altri studi sull'integrazione asintotica delle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali, cfr. W. Sternberg: *Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen*, Math. Ann., 81 (1920), pp. 119-186 e pei sistemi lineari cfr. il teorema di Hukuhara del § 3, n. 2.

Per le cose esposte in questo paragrafo, cfr. E. L. Ince: *Ordinary Differential Equations*, (London, 1927), pp. 169-171.

convergente, e lecite le operazioni di derivazione sotto il segno integrale, la funzione

$$u(x)=a+\int_x^\infty (e^{x-t}-1)\,f(t)\,dt$$

soddisfa l'equazione differenziale $\dfrac{d^2u}{dx^2}-\dfrac{du}{dx}=-f(x)$ e la condizione (12), talchè il procedimento delle approssimazioni successive applicato alla (11) fornisce formalmente la successione di funzioni $\{u_n(x)\}$ definite dalle formule ricorrenti:

$$(13_1)\qquad u_1=a,$$

$$(13_2)\qquad u_n=a+\int_x^{+\infty}(e^{x-t}-1)\left[\frac{a_1}{t}+\frac{a_2}{t^2}+\dots\right]\frac{du_{n-1}}{dt}\,dt$$
$$+\int_x^{+\infty}(e^{x-t}-1)\left[\frac{b_2}{t^2}+\frac{b_3}{t^3}+\dots\right]u_{n-1}(t)\,dt,$$

$$(13_3)\qquad \frac{du_n}{dx}=\int_x^{+\infty}e^{x-t}\left[\frac{a_1}{t}+\frac{a_2}{t^2}+\dots\right]\frac{du_{n-1}}{dt}\,dt+\int_x^{+\infty}e^{x-t}\left[\frac{b_2}{t^2}+\frac{b_3}{t^3}+\dots\right]u_{n-1}(t)\,dt,$$
$$(n=2,\,3,\dots).$$

Sia $R_2>R_1$; dalle (13) si ha che per $|x|\geqslant R_2$ è

$$|u_2(x)-u_1(x)|<k/x,\qquad |u_2'(x)|<k_1/x$$

con k e k_1 costanti [cfr. (16) e (18)] e per induzione si avrà che gli integrali che figurano nelle (13_2) e (13_3) sono convergenti. Inoltre nei primi integrali dei secondi membri, quando sia $n>2$, è lecita l'integrazione per parti, talchè si avrà

$$(14_1)\qquad u_n(x)=a+\int_x^{+\infty}e^{x-t}\left[\frac{a_1}{t}+\frac{a_2}{t^2}+\dots\right]u_{n-1}(t)\,dt+$$
$$+\int_x^{+\infty}\left[\frac{\beta_2}{t^2}+\frac{\beta_3}{t^3}+\dots\right]u_{n-1}(t)\,dt,$$

$$(14_2)\qquad \frac{du_n}{dx}=\int_x^{+\infty}e^{x-t}\left[\frac{a_1}{t}+\frac{a_2}{t^2}+\dots\right]u_{n-1}(t)\,dt+\left[\frac{\gamma_1}{x}+\frac{\gamma_2}{x^2}+\dots\right]u_{n-1}(x),$$

dove le costanti $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\ \beta_2,\ \beta_3,\dots,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\dots$ si esprimono razionalmente per le $a_1,\ a_2,\dots,\ b_2,\ b_3,\dots,$ e le tre serie

$$\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\dots,\qquad \frac{\beta_2}{x^2}+\frac{\beta_3}{x^3}+\dots,\qquad \frac{\gamma_1}{x}+\frac{\gamma_2}{x^2}+\dots$$

sono convergenti per $x\geqslant R_2$; si ha poi

$$(15)\qquad \frac{d^2u_n}{dx^2}-\frac{du_n}{dx}=-\left\{\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\dots\right\}\frac{du_{n-1}}{dx}-\left\{\frac{b_2}{x^2}+\frac{b_3}{x^3}+\dots\right\}u_{n-1}.$$

Abbiamo

$$(16_1)\qquad |u_2(x)-u_1(x)|=a\left|\int_x^\infty(e^{x-t}-1)\left(\frac{b_2}{t^2}+\frac{b_3}{t^3}+\dots\right)dt\right|<\frac{k}{x}$$

dove k è una costante assoluta; crescendo k si potrà supporre anche

$$\int_x^{+\infty}e^{x-t}\left[\frac{|\alpha_1|}{t}+\frac{|\alpha_2|}{t^2}+\dots\right]dt+\int_x^{+\infty}\left[\frac{|\beta_2|}{t^2}+\frac{|\beta_3|}{t^3}+\dots\right]dt<\frac{k}{x},$$

e siccome dalle (14_1) si ha

$$(16_2)\qquad u_n(x)-u_{n-1}(x)=\int_x^{+\infty}e^{x-t}\left[\frac{\alpha_1}{t}+\frac{\alpha_2}{t^2}+\dots\right][u_{n-1}(t)-u_{n-2}(t)]\,dt$$
$$+\int_x^{+\infty}\left[\frac{\beta_2}{t^2}+\frac{\beta_3}{t^3}+\dots\right][u_{n-1}(t)-u_{n-2}(t)]\,dt,$$

con procedimento di induzione si ricava

$$(17)\qquad |u_n(x)-u_{n-1}(x)|<\left(\frac{k}{x}\right)^{n-1},\qquad (n=2,\,3,\dots).$$

Analogamente con procedimento di induzione si ottiene

$$(18)\qquad \left|\frac{d(u_n-u_{n-1})}{dx}\right|<\left(\frac{k_1}{x}\right)^{n-1}$$

dove k_1 è una costante assoluta; le serie

$$u_1+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\dots,\qquad \frac{d(u_2-u_1)}{dx}+\frac{d(u_3-u_2)}{dx}+\dots$$

per $x\geqslant R_3\geqslant R_2$ sono allora uniformemente convergenti, talchè posto

$$(19)\qquad u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x)=u_1(x)+[u_2(x)-u_1(x)]+[u_3(x)-u_2(x)]+\dots,$$

e osservando che nella (15) è lecito il passaggio al limite per $n \to \infty$, otteniamo che la $u(x)$ definita dalla (19) è la soluzione cercata dell'equazione (11).

Per determinare l'espressione asintotica di $u(x)$ notiamo ora che

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-p}\, dt \,/\, e^{-x} x^{-p} = 1, \qquad (p > 0),$$

perciò

$$\int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-p}\, dt = \frac{e^{-x}}{x^p}(1+\tau)$$

dove $\tau \to 0$ per $x \to \infty$; si ha inoltre per $p > 0$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-p}\, dt = \Big[-e^{-t} t^{-p}\Big]_{t=x}^{t=+\infty} - p\int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-(p+1)}\, dt = \frac{e^{-x}}{x^p} - p\int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-(p+1)}\, dt$$

$$= e^{-x}\left[\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \dots + (-1)^n \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{x^{p+n}}(1+\tau)\right]$$

dove $\tau \to 0$ per $x \to \infty$, e da

$$u_2(x) - u_1(x) = a\int_x^{+\infty} (e^{x-t} - 1)\left[\frac{b_2}{t^2} + \frac{b_3}{t^3} + \dots\right] dt$$

otteniamo

$$u_2(x) - u_1(x) = \frac{A_1^{(1)}}{x} + \frac{A_2^{(1)}}{x^2} + \dots + \frac{A_{m-1}^{(1)}}{x^{m-1}} + \frac{A_m^{(1)} + \varepsilon_1}{x^m}$$

dove $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_m^{(1)}$ sono costanti e $\varepsilon_1 \to 0$ per $x \to \infty$.

Si deduce dalla (16_2) con procedimento ricorrente per m intero, $m > n$,

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{A_n^{(n)}}{x^n} + \frac{A_{n+1}^{(n)}}{x^{n+1}} + \dots + \frac{A_{m-1}^{(n)}}{x^{m-1}} + \frac{A_m^{(n)} + \varepsilon_n}{x^m}$$

dove $\varepsilon_n \to 0$ quando $x \to \infty$, perciò

$$u_{n+1}(x) = a + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \dots + \frac{C_n}{x^n} + \dots + \frac{C_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{C_m + \varepsilon}{x^m}$$

dove $\varepsilon \to 0$ per $x \to \infty$.

Si ha d'altra parte per la (17), e per $x \geqslant R_3$,

$$|[u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)] + [u_{n+3}(x) - u_{n+2}(x)] + \dots| <$$
$$< \left(\frac{k}{x}\right)^{n+1}\left[1 + \left(\frac{k}{x}\right) + \left(\frac{k}{x}\right)^2 + \dots\right] < \frac{H}{x^{n+1}}$$

con H costante, e ne segue per $x \geqslant R_3$

$$u(x) = a + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \dots + \frac{C_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{C_n + \tau_n}{x^n}$$

dove $\tau_n \to 0$ se $x \to \infty$, e l'equazione differenziale (1) ammette quindi nelle nostre ipotesi una soluzione del tipo

$$y(x) = e^{\lambda x} x^\sigma \left[a + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_n + \tau_n}{x^n}\right]$$

dove $\tau_n \to 0$ per $x \to \infty$.

L'importanza fondamentale di questa formula sta nel fatto che essa per x positivo, molto grande, permette il calcolo di $y(x)$ con notevole approssimazione, mentre in generale la serie [*normale di Thomé* (¹)]

$$y(x) \sim e^{\lambda x} x^\sigma \left[a + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \dots\right]$$

diverge; questa serie fornisce quindi una rappresentazione asintotica dell'integrale $y(x)$ della (1).

§ 3. - Teoremi di Perron e di Hukuhara sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni e dei sistemi differenziali lineari.

1. Teoremi di O. Perron. - 2. Teorema di M. Hukuhara.

1. - In questo numero esporremo alcuni risultati di O. Perron (²) sul comportamento degli integrali delle equazioni differenziali lineari.

a) Lemma. - *Siano $p(x)$, $\varphi(x)$ continue in $(x^0, +\infty)$,*

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \varrho > 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = b\,;$$

(¹) L. W. Thomé: *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Journ. für die reine und ang. Math., 95 (1883), (pp. 44-104), p. 75.

(²) O. Perron: *a) Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reelle ist.* Journ. für die reine und ang. Math., 142 (1913), pp. 254-270; *b) Über nichthomogene lineare Differentialgleichungen*, Math. Zeitschr., 6 (1920), pp. 161-166; *c) Über einen Grenzwertsatz*, Math. Zeitschr., 17 (1923), pp. 149-152.

vogliamo dimostrare che se $\omega(x)$ è un qualsiasi integrale dell'equazione differenziale lineare

$$\omega'(x)+p(x)\,\omega(x)=\varphi(x), \tag{1}$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\omega(x)=b/\varrho\,; \tag{2}$$

se consideriamo invece l'equazione differenziale

$$\omega'(x)-p(x)\,\omega(x)=\varphi(x), \tag{3}$$

essa ha l'integrale particolare

$$\omega_1(x)=e^{\int_{x^0}^{x}p(t)\,dt}\int_{+\infty}^{x}e^{-\int_{x^0}^{\xi}p(t)\,dt}\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

il quale gode la proprietà

$$\lim_{x\to+\infty}\omega_1(x)=-b/\varrho,$$

mentre qualsiasi altro suo integrale diverge a $\pm\infty$ se $x\to+\infty$.

Integrando la (1) otteniamo

$$\omega(x)=c\,e^{-\int_{x^0}^{x}p(t)\,dt}+\omega_2(x) \tag{5}$$

con

$$\omega_2(x)=e^{-\int_{x^0}^{x}p(t)\,dt}\int_{x^0}^{x}\varphi(\xi)\,e^{\int_{x^0}^{\xi}p(t)\,dt}\,d\xi.$$

Poichè $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=\varrho>0$, si ha $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\int_{x^0}^{x}p(t)\,dt}=0$.

Fissato $\varepsilon>0$ si può determinare un $\bar{x}^0\geqslant x^0$ tale che per $x\geqslant\bar{x}^0$ sia $\varphi(x)=b+\theta\varepsilon$ con $0<\theta<1$, perciò

$$\omega_2(x)=e^{-\int_{x^0}^{x}p(t)\,dt}\int_{x^0}^{\bar{x}^0}\varphi(\xi)\,e^{\int_{x^0}^{\xi}p(t)\,dt}+(b+\theta_1\varepsilon)\int_{\bar{x}^0}^{x}e^{\int_{x^0}^{\xi}p(t)\,dt}\,d\xi\Big/e^{\int_{x^0}^{x}p(t)\,dt}$$

con $|\theta_1|<1$; il primo termine del secondo membro, quando $x\to+\infty$ ha per limite zero, si ha pure

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\bar{x}^0}^{x}e^{\int_{x^0}^{\xi}p(t)\,dt}\,d\xi\Big/e^{\int_{x^0}^{x}p(t)\,dt}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{p(x)}=\frac{1}{\varrho},$$

quindi $\lim\limits_{x\to+\infty}\omega_2(x)=b/\varrho$, e dalla (5) segue la prima parte del teorema.

Consideriamo ora l'equazione (3); osserviamo preliminarmente che l'integrale $\int_{+\infty}^{x}e^{-\int_{x^0}^{\xi}p(t)\,dt}\,\varphi(\xi)\,d\xi$ è convergente, e che l'integrale generale della (3) è

$$\omega(x)=\omega_1(x)+c\,e^{\int_{x^0}^{x}p(t)\,dt}. \tag{6}$$

Esprimendo $\omega_1(x)$ come rapporto di due infinitesimi si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\omega_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_{\infty}^{x}e^{-\int_{x^0}^{\xi}p(t)\,dt}\,\varphi(\xi)\,d\xi\Big/e^{-\int_{x^0}^{x}p(t)\,dt}=-\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)/p(x)=-b/\varrho,$$

e dalla (6) segue che per $c\neq0$ è $\lim\omega(x)=\pm\infty$ secondo che c è positivo o negativo.

b) TEOREMA. - *Sia data l'equazione differenziale lineare non omogenea*

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=\varphi(x) \tag{7}$$

con a_1, a_2,...., a_n costanti (reali), $a_n\neq0$, $\varphi(x)$ continua in $(x^0,+\infty)$, e $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=b$, con b finito.

Vogliamo dimostrare che se l'equazione caratteristica

$$\varrho^n+a_1\varrho^{n-1}+a_2\varrho^{n-2}+\dots+a_{n-1}\varrho+a_n=0 \tag{8}$$

ha tutte le sue radici reali, vi è allora almeno un integrale della (7) che per $x\to\infty$ ha per limite b/a_n, mentre tutte le sue derivate y', y'',...., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$ convergono a zero. Se inoltre *tutte le radici dell'equazione* (8) *sono negative, allora ogni integrale della* (7) *ha questa proprietà.*

Se indichiamo con $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n$ le n radici della (8) (tutte reali e diverse da zero) all'equazione (7) possiamo sostituire il sistema [1]

$$(9_1) \qquad y_1' - \varrho_1 y_1 = y_2 \qquad [y = y_1],$$

$$(9_2) \qquad y_2' - \varrho_2 y_2 = y_3$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$(9_{n-1}) \qquad y'_{n-1} - \varrho_{n-1} y_{n-1} = y_n$$

$$(9_n) \qquad y_n' - \varrho_n y_n = \varphi(x).$$

La (9_n) per il lemma dimostrato in *a*) [sia ϱ_n positivo che negativo] ha almeno un integrale y_n tale che

$$\lim_{x\to+\infty} y_n = -b/\varrho_n, \qquad \lim_{x\to+\infty} y_n' = 0,$$

e se $\varrho_n < 0$, la proprietà sussiste per qualsiasi suo integrale particolare. A tale integrale y_n corrisponde nella (9_{n-1}) un integrale particolare y_{n-1} tale che

$$\lim_{x\to+\infty} y_{n-1} = b/\varrho_n\varrho_{n-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} y'_{n-1} = 0,$$

e poichè $y''_{n-1} - \varrho_{n-1} y'_{n-1} = y_n'$, si ha anche

$$\lim_{x\to+\infty} y''_{n-1} = 0,$$

e continuando il ragionamento ne segue che esiste un integrale y_1 dell'equazione data tale che

$$\lim_{x\to+\infty} y_1 = b/(-1)^n \varrho_n \varrho_{n-1} \cdots \varrho_1 = b/a_n, \quad \lim_{x\to+\infty} y_1' = 0, ..., \quad \lim_{x\to+\infty} y_1^{(n)} = 0.$$

Quando le $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n$ sono tutte negative qualunque integrale della (7) gode questa proprietà, cosa che del resto può verificarsi direttamente osservando che l'integrale della (7) si ottiene da un suo integrale particolare aggiungendo un polinomio della forma $\sum c_{k,l}\, e^{\varrho_k x} x^l$, [$c_{k,l}$ costanti].

---

[1] Cfr. Cap. X; § 1, n. 2.

c) TEOREMA. - *Nell'equazione differenziale lineare omogenea*

$$(10) \qquad y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$$

tutti i coefficienti siano continui in $(x_0, +\infty)$ *e soddisfino le relazioni*

$$\lim_{x\to+\infty} p_\nu(x) = a_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, ..., n).$$

Se l'equazione caratteristica

$$F(\varrho) = \varrho^n + a_1\varrho^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\varrho + a_n = 0$$

ha tutte le sue radici reali, e a due a due distinte, la (10) *ammette* n *integrali linearmente indipendenti, per i quali valgono le relazioni*

$$\lim_{x\to+\infty} y_\nu'/y_\nu = \varrho_\nu, \quad \lim_{x\to+\infty} y_\nu''/y_\nu = \varrho_\nu^2, ..., \quad \lim_{x\to+\infty} y_\nu^{(n)}/y_\nu = \varrho_\nu^n$$

$$(\nu = 1, 2, ..., n).$$

Di questo teorema la dimostrazione nel caso $n = 1$ è immediata, dall'equazione $y' + p_1(x) y = 0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x)/y(x) = -\lim_{x\to+\infty} p_1(x) = -a_1 = \varrho_1;$$

per la dimostrazione nel caso generale rimandiamo il lettore al teor. 5 della memoria citata di O. PERRON del Vol. 142 (1913) del Journ. für die reine und ang. Math. (pp. 254-270), p. 267.

d) TEOREMA. *I coefficienti* $p_1(x), p_2(x), ..., p_n(x)$ *dell'equazione differenziale lineare non omogenea*

$$(11) \qquad y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x) y'(x) + p_n(x) y = \varphi(x)$$

siano continui in $(x^0, +\infty)$ *e soddisfino le relazioni*

$$(12) \qquad \lim_{x\to+\infty} p_\nu(x) = a_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, ..., n); \qquad a_n \neq 0;$$

sia inoltre $\varphi(x)$ *continua in* $(x^0, +\infty)$ *e soddisfi la relazione*

$$(13) \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = b, \qquad (b \text{ finito}).$$

Vogliamo allora dimostrare che se l'equazione caratteristica

$$\varrho^n + a_1\varrho^{n-1} + \dots + a_{n-1}\varrho + a_n = 0 \tag{14}$$

ha le sue radici reali e due a due distinte, l'equazione (11) *ha almeno un integrale* y_0 *per il quale valgono le relazioni*

$$\lim_{x\to+\infty} y_0 = b/a_n, \quad \lim_{x\to+\infty} y_0' = 0, \dots, \quad \lim_{x\to+\infty} y_0^{(n)} = 0. \tag{15}$$

Inoltre se le radici dell'equazione (14) *sono tutte negative, qualunque integrale dell'equazione* (11) *gode la stessa proprietà.*

Sia infatti $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ un sistema fondamentale di integrali della equazione omogenea

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)\,y'(x) + p_n(x)y = 0$$

il quale soddisfi le condizioni [cfr. c)]

$$\lim_{x\to+\infty} y_\nu'/y_\nu = \varrho_\nu, \quad \lim_{x\to+\infty} y_\nu''/y_\nu = \varrho_\nu^2, \dots, \quad \lim_{x\to+\infty} y_\nu^{(n)}/y_n = \varrho_\nu^n, \tag{16}$$
$$(\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Il metodo di LAGRANGIA della variazione delle costanti arbitrarie [Cap. II, § 1, n. 5, c)] fornisce per un integrale della (11) l'espressione

$$y_0(x) = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu(x) y_\nu(x)$$

essendo le $u_\nu(x)$ scelte in guisa che

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu' y_\nu(x) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu' y_\nu'(x) = 0, \dots, \quad \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu' y_\nu^{(n-1)}(x) = \varphi(x). \tag{17}$$

Da queste si ricava: $y_\nu(x)\,u_\nu'(x) =$

$$(-1)^{n+\nu} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{y_1'}{y_1} & \dots & \frac{y_{\nu-1}'}{y_{\nu-1}} & \frac{y_{\nu+1}'}{y_{\nu+1}} & \dots & \frac{y_n'}{y_n} \\ & \dots & & \dots & \dots & \\ \frac{y_1^{(n-2)}}{y_1} & \dots & \frac{y_{\nu-1}^{(n-2)}}{y_{\nu-1}} & \frac{y_{\nu+1}^{(n-2)}}{y_{\nu+1}} & \dots & \frac{y_n^{(n-2)}}{y_n} \end{vmatrix} \varphi(x) \Big/ \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \frac{y_1'}{y_1} & \dots & \frac{y_\nu'}{y_\nu} & \dots & \frac{y_n'}{y_n} \\ & \dots & & \dots & \\ \frac{y_1^{(n-1)}}{y_1} & \dots & \frac{y_\nu^{(n-1)}}{y_\nu} & \dots & \frac{y_n^{(n-1)}}{y_n} \end{vmatrix}$$

talchè posto

$$\gamma_\nu = \lim_{x\to+\infty} y_\nu u_\nu', \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n), \tag{18}$$

si ha in virtù delle (16)

$$\gamma_\nu = (-1)^{n+\nu} b H(\varrho_1, \dots, \varrho_{\nu-1}, \varrho_{\nu+1} \dots \varrho_n)/H(\varrho_1, \dots, \varrho_{\nu-1}, \varrho_\nu, \varrho_{\nu+1}, \dots \varrho_n) \text{ (1)}$$
$$= (-1)^{n+\nu} b/(\varrho_\nu - \varrho_1) \dots (\varrho_\nu - \varrho_{\nu-1})(\varrho_\nu - \varrho_{\nu+1}) \dots (\varrho_\nu - \varrho_n)$$
$$\gamma_\nu = b/F'(\varrho_\nu).$$

Si ha

$$(y_\nu u_\nu)' - \frac{y_\nu'}{y_\nu}(y_\nu u_\nu) = (y_\nu u_\nu')$$

e poichè $\lim\limits_{x\to+\infty} y_\nu'/y_\nu = \varrho_\nu$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y_\nu u_\nu' = \gamma_\nu$, in virtù del lemma dimostrato in a) ad ogni y_ν si può associare una u_ν tale che

$$\lim_{x\to+\infty} y_\nu u_\nu = -\gamma_\nu/\varrho_\nu = -b/\varrho_\nu F'(\varrho_\nu),$$

e avremo allora

$$\lim_{x\to+\infty} y_0 = \lim_{x\to+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu(x) y_\nu(x) = -b \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^{-1}}{F'(\varrho_\nu)}. \tag{19$_1$}$$

Poichè le (17) dànno

$$y_0^{(\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(\lambda)} u_\nu, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$y_0^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(n)} u_\nu + \varphi(x),$$

avremo

$$\lim_{x\to+\infty} y_0^{(\lambda)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{y_\nu^{(\lambda)}}{y_\nu}(y_\nu u_\nu) = -b \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^{\lambda-1}}{F'(\varrho_\nu)}, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-1), \tag{19$_2$}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y_0^{(n)}(x) = -b \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^{n-1}}{F'(\varrho_\nu)} + b. \tag{19$_3$}$$

---

(1) $H(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ indica il determinante di CAUCHY-VANDERMONDE

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \varrho_1 & \dots & \varrho_n \\ \dots & & \dots \\ \varrho_1^{n-1} & \dots & \varrho_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ora se c è una circonferenza con centro nell'origine e raggio R così grande che abbia nel suo interno le n radici $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n$ dell'equazione $F(\varrho)=0$, si ha per $\lambda > -1$, λ intero,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{x^\lambda dx}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^\lambda}{F'(\varrho_\nu)} \quad (^1),$$

ma per $n-1>\lambda>-1$ è $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{x^\lambda dx}{F(x)}=0$ (2), perciò

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^\lambda}{F'(\varrho_\nu)}=0 \quad \text{per} \quad \lambda=0, 1, ..., n-2,$$

e per la (19_2)

$$(20_1) \qquad \lim_{x\to+\infty} y_0^{(\lambda)}(x)=0 \quad \text{per} \quad \lambda=1, 2, ..., n-1.$$

Se c_1 indica una circonferenza di raggio r con centro nell'origine che lasci all'esterno le radici $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n$ dell'equazione $F(\varrho)=0$, abbiamo

$$(21) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dx}{xF(x)} - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{dx}{xF(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^{-1}}{F'(\varrho_\nu)}.$$

Ma

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{dx}{xF(x)} = \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{F(re^{i\theta})} = \frac{1}{F(0)} = \frac{1}{a_n},$$

e il primo integrale della (21) per $R\to\infty$ ha per limite lo zero, e ne segue quindi

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varrho_\nu^{-1}}{F'(\varrho_\nu)} = -\frac{1}{a_n}$$

e dalla (19_1)

$$(20_2) \qquad \lim_{x\to+\infty} y_0 = b/a_n.$$

Dalle (11), (20_1), (20_2) si ha infine

$$(20_3) \qquad \lim_{x\to+\infty} y_0^{(n)}=0,$$

(1) Cfr. ad es. S. PINCHERLE: *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, (Bologna, 1922), p. 125.

(2) Cfr. S. PINCHERLE, op. cit., p. 127.

e perciò l'integrale y_0 soddisfa tutte le condizioni enunciate nel teorema.

Se poi le ϱ_ν sono tutte negative, basterà osservare che l'integrale generale della (11) ha l'espressione

$$y=y_0+\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{\varrho_\nu x} \qquad (c_\nu=\text{costante})$$

per dedurre che qualsiasi integrale della (11) ha le proprietà enunciate.

2. - Per i sistemi della forma

$$(22) \qquad \frac{dy_i}{dx} = x^\alpha \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x) y_k, \qquad (i=1, 2, ..., n),$$

dove α è un intero positivo o nullo e le $a_{i,k}(x)$ sono funzioni reali continue di x aventi per limite le costanti $a_{i,k}$ quando $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} a_{i,k}(x)=a_{i,k}, \qquad (i, k=1, 2, ..., n),$$

ci limitiamo a ricordare un notevole teorema di M. HUKUHARA (1).

Supponiamo che *nel sistema* (22) *le* $a_{i,k}(x)$ *abbiano gli sviluppi asintotici*

$$(23) \qquad a_{i,k}(x) \sim a_{i,k} + \frac{a_{i,k}^{(1)}}{x} + \frac{a_{i,k}^{(2)}}{x^2} + ... + \frac{a_{i,k}^{(l)}}{x^l} + ..., \qquad (i, k=1, 2, ..., n)$$

si abbia cioè

$$(24) \qquad a_{i,k}(x) = a_{i,k} + \frac{a_{i,k}^{(1)}}{x} + \frac{a_{i,k}^{(2)}}{x^2} + ... + \frac{a_{i,k}^{(l)}}{x^l} + O\left(\frac{1}{x^{l+1}}\right) \quad (^2)$$

e che le n *radici dell'equazione caratteristica*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} .... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda .... & a_{2,n} \\ .... & & .... \\ a_{n,1} & a_{n,2} .... & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

(1) M. HUKUHARA: *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires; domaine réel*; Journ. of the Fac. of Science Hokkaido Imp. Un. (1), II (1934), (pp. 13-88); cfr. teor. 20 di pp. 71-72.

(2) Ricordiamo che la notazione di BACHMAN [Zahlentheorie (1894), p. 401] e LANDAU [Primzahlen I, (1909), p. 61] $f(x)=O(g(x))$, che si legge $f(x)$ *dell'ordine* di $g(x)$, indica che esiste una costante L tale che per $x>x^0$ si ha $|f(x)/g(x)|<L$.

siano due a due diverse tra loro; allora ogni soluzione del sistema (22) *è sviluppabile asintoticamente sotto la forma*

$$y \sim x^{\sigma} e^{\lambda(x)} \left\{ \beta + \frac{a^{(1)}}{x} + \frac{a^{(2)}}{x^2} + \dots + \frac{a^{(l)}}{x^l} + \dots \right\} \tag{25}$$

ove σ è una costante e $\lambda(x)$ un polinomio di grado $\alpha+1$. Se inoltre nel sistema (23) *si sostituiscono gli sviluppi formali* (24) *e* (25), *esso risulta formalmente soddisfatto* (¹).

§ 4. - Studio asintotico degli integrali dell'equazione $y'' + A(x)\,y = 0$.

1. Generalità. - 2. Il caso $0 < a^2 \leqslant A(x) \leqslant b^2$. Studi di KNESER-ASCOLI. - 3. L'equazione $y'' + [1 - Q(x)]\,y = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = 0$; procedimento di FUBINI per la rappresentazione asintotica degli integrali. - 4. Formule asintotiche per le funzioni di BESSEL. - 5. Il caso $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 0$. - 6. Il caso $A(x) < 0$, $\int_q^{+\infty} |A(x)|\, dx < +\infty$. - 7. L'equazione $y'' - [1 + Q(x)]\,y = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = 0$; rappresentazione asintotica degli integrali. - 8. I casi $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 0$; valutazione asintotica dei massimi di $|y(x)|$ e $|y'(x)|$. - 9. Il caso $A(x)$ positiva, non decrescente, con derivata continua; $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$; teoremi di ARMELLINI-TONELLI-SANSONE.

1. - Consideriamo l'equazione

$$y'' + A(x)y = 0, \tag{1}$$

dove $A(x)$ è una funzione continua, definita in $(q, +\infty)$, $q > 0$.

Se effettuiamo il cangiamento $x = 1/t$ la (1) diventa

$$t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} + A\left(\frac{1}{t}\right) y = 0 ;$$

questa ha in $t = 0$ un punto *singolare*, e tale sarà il punto $x = +\infty$ per l'equazione (1) (²).

Vogliamo studiare in questo paragrafo il comportamento asintotico degli integrali della (1) quando $x \to +\infty$; converrà perciò

(¹) I risultati del § 2 sono un caso particolarissimo di questo teorema.

(²) Se $A(x)$ è olomorfa nell'intorno del punto $x = +\infty$, come abbiamo detto nel § 2, il punto $x = \infty$ è singolare *regolare* se $A(x) = a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3} + \dots$

studiare separatamente i casi: $A(x) > 0$ e limitata e più particolarmente $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = a^2$ con $a \neq 0$; $A(x) < 0$ e più particolarmente $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = -a^2$ con $a \neq 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$.

2. - *a*) Nell'equazione (1) sia $A(x)$ *continua in* (q, K) (¹), $q < K$, *e soddisfi la condizione*

$$A(x) > 0, \qquad x \geqslant q \quad (^2).$$

Sia $y(x)$ un integrale della (1) nullo in x_0 che abbia un primo massimo o minimo in x_1, e successivamente un punto di zero in x_2, si abbia cioè

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_1) = 0, \quad y(x_2) = 0, \quad x_0 < x_1 < x_2 .$$

Dalla (1) moltiplicando per $2y'$ e integrando tra x_0 e x_1 si ha

$$-y'^2(x_0) + 2\int_{x_0}^{x_1} A(x) y(x)\, y'(x)\, dx = 0,$$

ma tra x_0 e x_1 il prodolto yy' ha segno costante, perciò

$$y'^2(x_0) = m_1^2 \int_{x_0}^{x_1} 2yy'\, dx = m_1^2\, y^2(x_1)$$

dove m_1 *è un numero compreso tra il minimo e il massimo di* $A(x)^{1/2}$ *in* (x_0, x_1), e poichè $y(x)$, $y'(x)$ hanno lo stesso segno in (x_0, x_1) si ha

$$y'(x_0) = m_1\, y(x_1). \tag{2}$$

Si avrà analogamente

$$y'(x_2) = -m_2\, y(x_1), \tag{3}$$

dove m_2 *è un numero compreso tra il massimo e il minimo di* $A(x)^{1/2}$ *in* (x_1, x_2).

(¹) Non escludiamo $K = +\infty$.

(²) Cfr. A. KNESER, lavori citati nel § 2, e G. ASCOLI: *Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari di 2° ordine*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 22 (1935), pp. 234-243. Nella redazione del n. 2 ci siamo serviti di quest'ultima nota.

Supponiamo che $y(x)$ si annulli successivamente in $x_0, x_2, x_4, \ldots$ e i suoi estremi siano nei punti $x_1, x_3, \ldots$

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots;$$

ripetendo il ragionamento precedente si ha

$$y'(x_{2r}) = m_{2r+1}\, y(x_{2r+1}) = -m_{2r}\, y(x_{2r-1}), \qquad (r=1, 2, \ldots), \tag{4}$$

perciò

$$\left\{\begin{array}{ll} y'(x_{2r+2})/y'(x_{2r}) = -m_{2r+2}/m_{2r+1}, & (r=0, 1, 2, \ldots), \\ y(x_{2r+1})/y(x_{2r-1}) = -m_{2r}/m_{2r+1}, & (r=1, 2, \ldots), \end{array}\right. \tag{5}$$

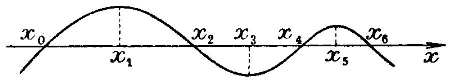

Fig. 9.

e da queste si ottiene

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{y'(x_{2n})}{y'(x_0)} = (-1)^n \dfrac{m_2 m_4 \ldots m_{2n}}{m_1 m_3 \ldots m_{2n-1}}, & (n=1, 2, \ldots), \\ \dfrac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)} = (-1)^n \dfrac{m_2 m_4 \ldots m_{2n}}{m_3 m_5 \ldots m_{2n+1}}, & (n=1, 2, \ldots), \end{array}\right. \tag{6}$$

dove m_i *è un valore assunto da* $A(x)^{1/2}$ *in* (x_{i-1}, x_i).

È quasi superfluo notare che *i punti* $x_2, x_4, \ldots$, *sono estremanti per* $y'(x)$; si ha ad es. $y'(x_1) = y'(x_3) = 0$ e la $y''(x) = -A(x)y(x)$ si annulla soltanto in x_2.

b) Facciamo ora l'ipotesi che *gli estremi inferiore e superiore di* $\sqrt{A(x)}$ *in* $(x_0, +\infty)$ $[K = +\infty]$ *siano ambedue finiti e positivi*, e siano essi a e b

$$0 < a \leqslant \sqrt{A(x)} \leqslant b.$$

La $y(x)$ *avrà in* $(x_0, +\infty)$ *infiniti zeri;* infatti confrontando col teorema di STURM [Cap. IV, § 2, n. 6, *a*)] le due equazioni

$$y'' + A(x)\, y = 0, \quad z'' + a^2 z = 0$$

si ha che in ogni intervallo di ampiezza non superiore a π/a cade uno zero di $y(x)$.

Gli zeri $x_0, x_2, x_4, \ldots$ *di* $y(x)$ *hanno come unico punto limite* $+\infty$.

Dalle (6) si ricavano poi le seguenti *limitazioni dei successivi massimi di* $|y(x)|$, $|y'(x)|$

$$\frac{a^n}{b^n} \leqslant \left|\frac{y'(x_{2n})}{y'(x_0)}\right| \leqslant \frac{b^n}{a^n}, \quad \frac{a^n}{b^n} \leqslant \left|\frac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)}\right| \leqslant \frac{b^n}{a^n}, \qquad (n=1, 2, \ldots) \quad (^1).$$

c) *Supponiamo* $A(x)$ *continua, positiva, non decrescente, in* $(x_0, +\infty)$; se ripetiamo le considerazioni di *b*) si ha che $y(x)$ ha infiniti zeri in $(x_0, +\infty)$, e poichè $m_{2r} \leqslant m_{2r+1}$ dalla seconda delle (5) segue

$$|y(x_{2r+1})| \leqslant |y(x_{2r-1})|$$

cioè *i massimi di* $|y(x)|$ *non crescono mai, ed hanno un limite finito*. Analogamente avendosi $m_{2r+1} \leqslant m_{2r+2}$ è $|y'(x_{2r+2})| \geqslant |y'(x_{2r})|$ e perciò *i massimi di* $|y'(x)|$ *non decrescono mai* ed hanno un limite determinato, eventualmente infinito.

Se invece supponiamo $A(x)$ *continua in* $(x_0, +\infty)$, *positiva non crescente*, e se $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = a^2 > 0$, esistono infiniti zeri di $y(x)$; ma se $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 0$ non è lecito concludere l'esistenza di una successione di zeri e conseguentemente l'esistenza di massimi di $|y|$ e $|y'|$ [cfr. n. 5]; tuttavia nell'ipotesi dell'esistenza di massimi di $|y|$ e $|y'|$ dalle (5) abbiamo che *i massimi di* $|y(x)|$ *non diminuiscono, quelli di* $|y'(x)|$ *non crescono. Se inoltre* $y(x)$ *ammette un ultimo zero in* a, *a partire da* a, $|y'|$ *è decrescente;* infatti se per $x > a$ è $y(x) > 0$, ne viene per gli stessi valori di x, $y''(x) < 0$, perciò $y'(x)$ per $x > a$ è decrescente, ma è $y'(a) > 0$ e $y'(x)$ non

(1) Per la limitazione degli integrali delle equazioni del secondo ordine cfr. B. GAMBIER: *L'équation differentielle linéaire du second ordre* $x'' + xA(t) = 0$, Nouv. Ann. de Mathém., (6), 2 (1927), pp. 2-23), p. 5. Notevole è la forma degli integrali $x = c\varrho \cos(\varphi + h)$, dove c e h sono costanti di integrazione, ϱ soddisfa l'equazione $\varrho'' - c^2 \varrho^{-3} + \varrho A(t) = 0$, $\varphi = \int c \varrho^{-2}\, dt$;

Per le equazioni del secondo ordine complete cfr. *a*) T. SATO: *Über Stabilität einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung*, Jap. Journ. of Math., X (1933), pp. 195-197; *b*) K. YOSIDA: *On the asymptotic property of the differential equation* $y'' + H(x)y = f(x, y, y')$, Jap. Journ. of Math., IX (1932), pp. 145-152.

può annullarsi (1), quindi $y'(x)>0$ e decrescente. Ugualmente si ragiona se per $x>\alpha$ è $y(x)<0$.

d) Vogliamo dimostrare che *se $A(x)$ è continua, positiva, monotona in $(q,+\infty)$, e $\lim_{x\to+\infty} A(x)=\alpha^2$, $\alpha>0$, allora i due limiti*

$$\lim_{n\to\infty} |y(x_{2n+1})|=l, \qquad \lim_{n\to\infty} |y'(x_{2n})=l'$$

sono entrambi finiti e diversi da zero, e legati dalla relazione

$$l'=\alpha l. \tag{7}$$

Siccome $\sqrt{A(x)}$ è limitata in $(x_0,+\infty)$ per *b*) le due successioni $\{|y(x_{2n+1})|\}$, $\{|y'(x_{2n})|\}$ sono limitate superiormente e inferiormente da numeri positivi, per *c*) esse sono anche monotone, quindi l e l' sono entrambi positivi. Infine, essendo $\lim_{r\to\infty} m_r=\alpha$, dalle (4) segue subito la (7).

È facile assegnare una *limitazione per l.*

Se $A(x)$ non è decrescente si ha dalle (6)

$$1\geqslant\left|\frac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)}\right|=\frac{m_2}{m_{2n+1}}\frac{m_4}{m_3}\cdots\frac{m_{2n}}{m_{2n-1}}\geqslant\frac{m_2}{m_{2n+1}}\geqslant\sqrt{\frac{A(x_1)}{A(x_{2n+1})}}\geqslant\frac{\sqrt{A(x_1)}}{\alpha},$$

$$|y(x_1)|\geqslant|y(x_{2n+1})|\geqslant\frac{\sqrt{A(x_1)}}{\alpha}|y(x_1)|,$$

$$|y(x_1)|\geqslant\lim_{n\to\infty}|y(x_{2n+1})|=l\geqslant\frac{\sqrt{A(x_1)}}{\alpha}|y(x_1)|,$$

$$|y(x_1)|\geqslant l\geqslant\frac{\sqrt{A(x_1)}}{\alpha}|y(x_1)|, \tag{8$_1$}$$

mentre se $A(x)$ non è crescente, si ha con lo stesso ragionamento

$$|y(x_1)|\leqslant l\leqslant\frac{\sqrt{A(x_1)}}{\alpha}|y(x_1)|.$$

e) Il teorema dimostrato in *d*) rientra come caso particolare in quest'altro:

Se $A(x)$ è continua, positiva, a variazione limitata in $(q,+\infty)$ *e* $\lim_{x\to+\infty} A(x)=\alpha^2$, $\alpha>0$, *allora i due limiti* $\lim_{n\to\infty}|y(x_{2n+1})|$,

(1) Se $y'(x)$ si annullasse in un punto di ascissa $\beta>\alpha$, $y'(x)$ per $x>\beta$ diventerebbe negativa e crescente in valore assoluto, quindi $\lim_{x\to+\infty} y(x)=-\infty$ e $y(x)$ avrebbe almeno uno zero di ascissa maggiore di α.

$\lim_{n\to\infty}|y'(x_{2n})|$ *sono entrambi finiti, diversi da zero, e legati dalla relazione*

$$\lim_{n\to\infty}|y'(x_{2n})|=a\lim_{n\to\infty}|y(x_{2n-1})| \quad (1). \tag{9}$$

La funzione $A(x)$ in $(q,+\infty)$ è limitata tra due numeri positivi a e b $(0<a<b)$, perciò per *b*) la successione $\{x_n\}$ è infinita ed ha come unico punto limite $+\infty$.

La funzione $\lg A(x)$ è anch'essa a variazione limitata in $(q,+\infty)$; infatti se x' e x'' sono due punti qualunque di $(q,+\infty)$ si ha

$$\lg A(x'')-\lg A(x')=[A(x'')-A(x')]/A(\xi)$$

dove ξ è compreso tra x' e x''; ne viene

$$|\lg A(x'')-\lg A(x')|\leqslant|A(x'')-A(x')|/a$$

dalla quale segue immediatamente la nostra affermazione.

Se consideriamo ora i due prodotti infiniti

$$\frac{m_2}{m_1}\frac{m_4}{m_3}\frac{m_6}{m_5}\cdots, \qquad \frac{m_2}{m_3}\frac{m_4}{m_5}\frac{m_6}{m_7}\cdots \tag{10}$$

si vede facilmente che essi sono convergenti; infatti i termini delle serie

$$\sum|\lg m_{2n}-\lg m_{2n-1}|, \qquad \sum|\lg m_{2n}-\lg m_{2n+1}|,$$

sono maggiorati dall'oscillazione di $2^{-1}\lg A(x)$ rispettivamente in (x_{2n-2}, x_{2n}), (x_{2n-1}, x_{2n+1}) e la somma di tali oscillazioni è limitata; i prodotti infiniti (10) convergono quindi verso numeri positivi.

Dalle (6) segue allora che i due limiti $\lim_{n\to\infty}|y'(x_{2n})|$, $\lim_{n\to\infty}|y(x_{2n+1})|$ esistono, sono entrambi diversi da zero, e per le (4) legati dalla (9).

Notiamo che il teorema dimostrato può così enunciarsi: *se $A(x)$ è continua, positiva, in $(q,+\infty)$, se $\log A(x)$ è a variazione limitata in $(q,+\infty)$, allora i due limiti* $\lim_{n\to\infty}|y(x_{2n+1})|$, $\lim_{n\to\infty}|y'(x_{2n})|$ *sono entrambi finiti, diversi da zero, e legati dalla* (9).

(1) Per altri studi con $A(x)$ a variazione limitata cfr. ad es. *a*) R. CACCIOPPOLI: *Una questione di stabilità*. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 11, (1930), pp. 251-254; V. M. CHEPELEFF: *Zur frage der Stabilität der Bewegung*. Appl. Math. a. Mech., 3, pp. 144-148 (1936), (in russo).

Dall'ipotesi segue infatti che è finito $\lim\limits_{x\to+\infty} \lg A(x)$, (1) perciò $A(x)$ è limitata in $(q, +\infty)$, e per $x\to+\infty$ ha un limite positivo a^2. Con le notazioni precedenti è

$$|A(x'')-A(x')| \leqslant b\,|\lg A(x'')-\lg A(x')|$$

e perciò $A(x)$ è a variazione limitata in $(q, +\infty)$.

Notiamo che il teorema dimostrato dà questa proprietà: *nelle ipotesi ora dichiarate per $A(x)$, se $y(x)$ è un integrale qualsiasi della* (1), *esso e $y'(x)$ sono limitati in $(q, +\infty)$, si annullano infinite volte, e se $\{|y(x_{2n+1})|\}$ è la successione dei massimi di $y(x)$ e $\{|y'(x_{2n})|\}$ quella di $|y'(x)|$, vale la* (9).

f) Dal teorema dimostrato in *e*) segue il corollario: *Se $A(x)$ è continua, positiva, derivabile in $(q, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=a^2>0$, e $\int_q^{+\infty}|A'(x)|\,dx$ è convergente, allora i due limiti $\lim\limits_{n\to\infty}|y(x_{2n+1})|$, $\lim\limits_{n\to\infty}|y'(x_{2n})|$ sono entrambi finiti, diversi da zero, e legati dalla* (9).

Sia infatti $q=q_0<q_1<q_2<....<q_n$, si ha

$$\sum_{r=1}^{n}\left|A(q_r)-A(q_{r-1})\right| = \sum_{r=1}^{n}\left|\int_{q_{r-1}}^{q_r} A'(x)\,dx\right| \leqslant \int_q^{+\infty}|A'(x)|\,dx<+\infty,$$

perciò $A(x)$ è a variazione limitata in $(q, +\infty)$ e sussistono le conclusioni di *e*).

Il teorema dimostrato vale ad esempio se $|A'(x)|<hx^{-s}$, h ed s costanti, $s>1$; vale in particolare per la funzione $A(x)=a^2+a/x$, con a costante, $a>0$,

g) La portata dei risultati precedenti è estesa dal teorema: *Se l'equazione*

$$y''+A(x)y=0,$$

ove $A(x)$ è continua positiva in $(q, +\infty)$, ha i suoi integrali limitati in $(q, +\infty)$, e se $\eta(x)$ è una funzione continua in $(q, +\infty)$ tale che l'integrale $\int_q^{+\infty}|\eta(\xi)|\,d\xi$ risulti convergente,

(1) Cfr. G. Sansone: *Sviluppi in serie di Funzioni Ortogonali.* (Bologna 1935), p. 99.

allora qualunque integrale di

$$y''+[A(x)+\eta(x)]y=0 \tag{11}$$

è anch'esso limitato in $(q, +\infty)$.

Siano infatti $y_1(x)$, $y_2(x)$ due integrali particolari della (1) definiti dalle condizioni iniziali

$$y_1(c)=0, \quad y_1'(c)=1; \qquad y_2(c)=1, \quad y_2'(c)=0;$$

se scriviamo la (11) nella forma

$$y''+A(x)y=-\eta(x)y$$

e applichiamo il procedimento di Lagrangia per l'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee [Cap. II, § 1, n. 5, *c*)] si ha

$$y(x)=y'(c)y_1(x)+y(c)y_2(x)-y_1(x)\int_c^x \eta(\xi)y(\xi)y_2(\xi)\,d\xi$$
$$+y_2(x)\int_c^x \eta(\xi)y(\xi)y_1(\xi)\,d\xi.$$

Per $x>\bar{x}$ sia $|y_1(x)|<g$, $|y_2(x)|<g$, e si scelga c così grande che

$$\int_c^{+\infty}|\eta(\xi)|\,d\xi<\frac{1}{4g^2}; \qquad c>\bar{x}.$$

se $\mu(x)$ è il massimo di $|y(x)|$ tra c ed x risulta per $x>c$

$$|y(x)|<g\,|y'(c)|+g\,|y(c)|+2g^2\mu(x)\int_c^x|\mu(\xi)|\,d\xi,$$

$$|y(x)|\leqslant g\,[\,|y'(c)|+|y(c)|\,]+\tfrac{1}{2}\mu(x),$$

dalla quale

$$\mu(x)\leqslant 2g\,[\,|y'(c)|+|y(c)|\,], \qquad \text{c. v. d.}$$

Ad esempio se facciamo

$$A(x)=a^2+ax^{-1}, \quad a \text{ ed } a \text{ costanti}, \ a>0,$$

e $\eta(x)=\omega(x)x^{-2}$, *con $\omega(x)$ continua e limitata in $(q, +\infty)$*, abbiamo che *tutti gli integrali dell'equazione*

$$y''+\left[a^2+\frac{a}{x}+\frac{\omega(x)}{x^2}\right]y=0$$

sono limitati in $(q, +\infty)$.

3. - *a*) Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'' + A(x)\,y = 0$$

e supponiamo che si abbia $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = \pm a^2,\ a > 0$; con il cangiamento di variabile indipendente $x = t/a$ si potrà supporre $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = \pm 1$, talchè l'equazione proposta può assumersi sotto le forme

$$y'' + [1 - Q(x)]y = 0, \quad y'' - [1 + Q(x)]y = 0,$$

con $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = 0$.

Noi ci occuperemo ora della prima equazione e nel n. 7 dell'altra [1].

b) Consideriamo allora l'equazione differenziale

$$y'' + [1 - Q(x)]y + 0, \tag{12}$$

dove $Q(x)$ *è una funzione continua di* x, *definita in* $(q, +\infty)$. *e sia*

$$(13_1) \quad \lim_{x \to +\infty} Q(x) = 0, \qquad (13_2) \quad \int_q^{+\infty} |\, Q(x) \,|\, dx < +\infty.$$

Poichè $y'' + y = 0$ ha l'integrale generale $y = a \cos(x + b)$, limitato in $(q, +\infty)$, dalla (13_2) e dalle cose dette al n. 2, *g*) risulta che gli integrali della (12) sono limitati in $(q, +\infty)$; e noi ci proponiamo di dare una loro rappresentazione asintotica assai utile nello applicazioni [2].

È facile verificare che se z_1 e z_2 soddisfano il sistema

$$z_1' = \frac{1}{2i}(z_1 + e^{-2ix} z_2)\,Q, \quad z'_2 = -\frac{1}{2i}(z_1\, e^{2ix} + z_2)\,Q, \tag{14}$$

[1] I risultati di questo numero e quelli del n. 7 possono dedursi dai teoremi generali del DINI, [op. cit. nel § 2], ma trattandosi di equazioni del secondo ordine preferiamo seguire una nota di G. FUBINI che ha il pregio di fissare la natura della questione e di risolverla rapidamente, [cfr. G. FUBINI: *Studi asintotici per alcune equazioni differenziali*. Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 26 (1937), pp. 253-259].

[2] Cfr. per la condizione (13_2) del testo M. FUKUHARA and M. NAGUMO: *On a condition of stability for a differential equation*. Proc. of the Imp. Acad. of Japon, 6, (1930), pp. 131-132.

la funzione

$$y = e^{ix} z_1(x) + e^{-ix} z_2(x) \tag{15}$$

soddisfa la (12), [1].

Si osservi anche che con le nostre posizioni si ha

$$z_1' = -\frac{i}{2} e^{-ix} y\, Q, \quad z'_2 = \frac{i}{2} e^{ix} y\, Q. \tag{16}$$

Per rimanere nel campo reale, supporremo che le funzioni $z_1(x)$, $z_2(x)$ siano complesse e coniugate e noi dimostreremo che *fissate due costanti* a_1' *e* a_2 *complesse e coniugate, esistono due funzioni* $z_1(x)$, $z_2(x)$ (complesse e coniugate) *che soddisfano il sistema* (14) *e le condizioni*

$$\lim_{x \to +\infty} z_1(x) = a_1, \qquad \lim_{x \to +\infty} z_2(x) = a_2. \tag{17}$$

Dalle (14) e (17) si ottiene il sistema di equazioni integrali singolari (di VOLTERRA)

$$\left\{ \begin{aligned} z_1(x) &= a_1 + \frac{1}{2i} \int_{+\infty}^{x} [z_1(\xi) + e^{-2i\xi} z_2(\xi)]\, Q(\xi)\, d\xi \\ z_2(x) &= a_2 - \frac{1}{2i} \int_{+\infty}^{x} [e^{2i\xi} z_1(\xi) + z_2(\xi)]\, Q(\xi)]\, d\xi, \end{aligned} \right. \tag{18}$$

che integreremo col metodo delle *successive sostituzioni* di LIOUVILLE - NEUMANN.

Posto

$$u_0(x) = a_1, \qquad v_0(x) = a_2, \tag{19_1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} u_n(x) &= \frac{1}{2i} \int_{+\infty}^{x} [u_{n-1}(\xi) + e^{-2i\xi} v_{n-1}(\xi)]\, Q(\xi)\, d\xi, \\ v_n(x) &= -\frac{1}{2i} \int_{+\infty}^{x} [e^{2i\xi} u_{n-1}(\xi) + v_{n-1}(\xi)]\, Q(\xi)\, d\xi, \end{aligned} \right. \quad (n = 1, 2....), \tag{19_2}$$

[1] Si derivi successivamente la (15), tenendo conto delle (16).

proveremo l'assoluta e uniforme convergenza in un intervallo $(q_1, +\infty)$ contenuto in $(q, +\infty)$ delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x), \tag{20}$$

e ne conseguiremo facilmente che per $z_1(x)$ e $z_2(x)$ valgono gli sviluppi in serie

$$z_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \qquad z_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x). \tag{21}$$

Sia $a=|a_1|=|a_2|$, avremo

$$|u_0(x)|=a, \qquad |v_0(x)|=a,$$

$$|u_0(\xi)+e^{-2i\xi}v_0(\xi)|\leqslant 2a, \qquad |u_0(\xi)\,e^{2i\xi}+v_0(\xi)|\leqslant 2a,$$

$$|u_1(x)|\leqslant a\int_x^{+\infty}|Q(\xi)|\,d\xi, \qquad |v_1(x)|\leqslant a\int_x^{+\infty}|Q(\xi)|\,d\xi,$$

e analogamente

$$|u_2(x)|, \quad |v_2(x)|\leqslant a\int_x^{+\infty}|Q(\xi_2)|\,d\xi_2\int_{\xi_2}^{+\infty}|Q(\xi_1)|\,d\xi_1,$$

e per induzione

$$|u_n(x)|,\ |v_n(x)|\leqslant a\int_x^{+\infty}|Q(\xi_n)|\,d\xi_n\int_{\xi_n}^{+\infty}|Q(\xi_{n-1})|\,d\xi_{n-1}\ldots\int_{\xi_2}^{+\infty}|Q(\xi_1)|\,d\xi_1. \tag{22}$$

Sia ora ε un numero positivo, minore di 1, e del resto arbitrario; si può determinare un $q_1>q$ tale che per $x\geqslant q_1$ sia

$$\int_x^{+\infty}|Q(\xi)|\,d\xi<\varepsilon,$$

e dalle (22) otteniamo che per $x\geqslant q_1$ è

$$|u_n(x)|\leqslant a\varepsilon^n, \quad |v_n(x)|\leqslant a\varepsilon^n, \qquad (n=0,1,2,\ldots);$$

le serie (20) ammettono entrambe come maggioranti la serie della progressione geometrica $a\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n$ ed esse sono quindi in $(q_1, +\infty)$

assolutamente e uniformemente convergenti. Questa proprietà implica che nelle uguaglianze

$$u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)=$$
$$=a_1+\frac{1}{2i}\int_{+\infty}^{x}\sum_{k=1}^{n}\{u_{k-1}(\xi)+e^{-2i\xi}v_{k-1}(\xi)\}\,Q(\xi)\,d\xi,$$

$$v_0(x)+v_1(x)+\ldots+v_n(x)=$$
$$=a_2-\frac{1}{2i}\int_{+\infty}^{x}\sum_{k=1}^{n}\{v_{k-1}(\xi)+e^{2i\xi}u_{k-1}(\xi)\}\,Q(\xi)\,d\xi,$$

è lecito il passaggio al limite sotto il segno integrale quando $n\to\infty$, e perciò $z_1(x)$, $z_2(x)$ soddisfano in $(q_1, +\infty)$ il sistema (18) e *per $y(x)$ in $(q_1, +\infty)$ vale lo sviluppo*

$$y(x)=a_1e^{ix}+a_2e^{-ix}+e^{ix}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)+e^{-ix}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x), \tag{23$_1$}$$

e poichè a_1 dipende da due costanti arbitrarie (parte reale e coefficiente dell'immaginario) segue che *la* (23_1) *fornisce lo sviluppo asintotico dell'integrale generale della* (12) *in* $(q_1, +\infty)$.

È utile osservare lo sviluppo asintotico di $y'(x)$; si ha

$$y'(x)=i\,[e^{ix}z_1(x)-e^{-ix}z_2(x)]$$

$$y'(x)=i\,[a_1e^{ix}-a_2e^{-ix}]+i\,e^{ix}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-i\,e^{-ix}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x). \tag{23$_2$}$$

c) Se alla (13_2) *sostituiamo l'ipotesi più restrittiva*

$$|Q(x)|\leqslant\frac{k}{x^{1+\varrho}}; \quad k \text{ e } \varrho \text{ costanti}; \quad k>0,\ \varrho>0; \tag{24}$$

dalle (22) si ha allora

$$|u_n(x)|, \quad |v_n(x)|<a\left|\frac{k}{\varrho}\frac{1}{x^\varrho}\right|^n\frac{1}{n!}$$

e le due serie (20) ammettono come maggiorante la serie esponenziale

$$a\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{k}{\varrho}\frac{1}{x^\varrho}\right|^n\frac{1}{n!};$$

se poniamo allora

$$(25_1)\quad y(x)=a_1\,e^{ix}+a_2\,e^{-ix}+e^{ix}\sum_{l=1}^{n}u_l(x)+e^{-ix}\sum_{l=1}^{n}v_l(x)+\eta_n(x)$$

si avrà in $(q, +\infty)$

$$|\,\eta_n(x)\,|<2a\left[e^{\left|\frac{k}{\varrho}\frac{1}{x^\varrho}\right|}-1-\frac{1}{1!}\left|\frac{k}{\varrho}\frac{1}{x^\varrho}\right|-\dots-\frac{1}{n!}\left|\frac{k}{\varrho}\frac{1}{x^\varrho}\right|^n\right],$$

ed anche per i valori di x tali che

$$\left|\frac{k}{\varrho}\frac{1}{x^\varrho}\right|\leqslant 1,$$

$$|\,\eta_n(x)\,|<2a\left|\frac{k}{\varrho}\frac{1}{x^\varrho}\right|^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots\right],$$

e infine

$$(26)\qquad |\,\eta_n(x)\,|<2a\left|\frac{k}{\varrho}\frac{1}{x^\varrho}\right|^{n+1}\frac{1}{n!\,n},$$

dove, quando $n=0$, al fattore $1/n!\,n$ va sostituito il fattore 2.

Si avrà analogamente

$$(25_2)\quad y'(x)=i\,[a_1\,e^{ix}-a_2\,e^{-ix}]+i\,e^{ix}\sum_{l=1}^{n}u_l(x)-i\,e^{-ix}\sum_{l=1}^{n}v_l(x)+\bar{\eta}_n(x),$$

dove $|\,\bar{\eta}_n(x)\,|$ soddisfa la stessa limitazione (26).

4. - *a*) Vogliamo applicare i risultati del numero precedente per determinare l'espressione asintotica delle funzioni di BESSEL di *ordine intero*, quando $x\to+\infty$,

La funzione di BESSEL

$$u=J_n(x)$$

è soluzione dell'equazione [Cap. III, § 6, n. 1]

$$u''+\frac{1}{x}u'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)u=0,$$

e se facciamo

$$J_n(x)=y\,x^{-1/2},\qquad (x>0),$$

y soddisfa l'equazione [Cap. IV, § 3, n. 2, *b*)]

$$y''+[1-Q(x)]y=0,$$

dove

$$Q(x)=(4n^2-1)/4x^2.$$

Con le notazioni del n. 3 *c*) si ha

$$k=|\,(4n^2-1)/4\,|,\quad \varrho=1,$$

e se poniamo

$$a_1=2^{-1}\,ae^{ib},\quad a_2=2^{-1}\,ae^{-ib},\quad (a>0),$$

si ha dalle (25_1) e (26)

$$(27_1)\qquad J_n(x)=\frac{y(x)}{\sqrt{x}}=\frac{a\cos(x+b)}{\sqrt{x}}+\frac{\eta(x)}{\sqrt{x}},$$

dove, quando sia $(4n^2-1)/4x\leqslant 1$, si ha

$$(28_1)\qquad |\,\eta(x)\,|<a\left|\frac{4n^2-1}{2}\right|\frac{1}{x},$$

e perciò

$$(29)\qquad \lim_{x\to+\infty}J_n(x)=0.$$

Si ha pure dalla (25_2)

$$[x^{1/2}J_n(x)]'=\frac{1}{2}\,ia\,e^{i(b+x)}-\frac{1}{2}\,ia\,e^{-i(b+x)}+\bar{\eta}(x)$$

dove $\bar{\eta}(x)$ soddisfa la limitazione (28_1); ne viene

$$x^{1/2}J'_n(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\,J_n(x)=-\frac{1}{2i}\,a[e^{i(b+x)}-e^{-i(b+x)}]+\bar{\eta}(x),$$

e tenuto conto della (27_1) e (28_1)

$$(27_2)\qquad x^{1/2}J'_n(x)=-a\ \mathrm{sen}\ (x+b)+\eta_1(x),$$

con

$$(28_2)\qquad |\eta_1(x)|<a\left[\left|\frac{4n^2-1}{2}\right|+\frac{3}{2}\right]\frac{1}{x}.$$

Ci resta da determinare i valori delle costanti a e b che figurano nelle (27_1) e (27_2). Si ha da quest'ultime

$$(a\cos b)\cos x-(a\ \mathrm{sen}\ b)\ \mathrm{sen}\ x=\sqrt{x}\,J_n(x)-\eta(x),$$
$$(a\cos b)\ \mathrm{sen}\ x+(a\ \mathrm{sen}\ b)\cos x=-\sqrt{x}\,J_n'(x)+\eta_1(x),$$

dalle quali

$$(30)\quad \begin{cases} a \cos b = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/2}\, [J_n(x) \cos x - J'_n(x) \operatorname{sen} x], \\ a \operatorname{sen} b = -\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/2}\, [J_n(x) \operatorname{sen} x + J'_n(x) \cos x], \end{cases}$$

e di queste ci varremo per il calcolo di a e di b.

Si ha [Cap. III, § 6, n. 6, b]

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x),$$

e per la (29)

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1/2} \frac{n \operatorname{sen} x}{x} J_n(x) = \lim_{x \to +\infty} x^{1/2} \frac{n \cos x}{x} J_n(x) = 0,$$

perciò le (30) diventano

$$a \cos b = \lim_{x \to +\infty} x^{1/2}\, [J_n(x) \cos x - J_{n-1}(x) \operatorname{sen} x],$$

$$a \operatorname{sen} b = -\lim_{x \to +\infty} x^{1/2}\, [J_n(x) \operatorname{sen} x + J_{n-1}(x) \cos x];$$

ma si ha [Cap. III, § 6, n. 6, (22_1)]

$$J_n = \frac{2(n-1)}{x} J_{n-1} - J_{n-2}, \qquad J_{n-1} = \frac{2(n-2)}{x} J_{n-2} - J_{n-3},$$

e tenuto conto della (29) segue

$$a \cos b = -\lim_{x \to +\infty} x^{1/2}\, [J_{n-2}(x) \cos x - J_{n-3}(x) \operatorname{sen} x],$$

$$a \operatorname{sen} b = \lim_{x \to +\infty} x^{1/2}\, [J_{n-2}(x) \operatorname{sen} x + J_{n-3}(x) \cos x],$$

e per induzione, se $n = 2m+1$

$$(31_1)\quad \begin{cases} a \cos b = (-1)^m \lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/2}\, [J_1(x) \cos x - J_0(x) \operatorname{sen} x] \\ a \operatorname{sen} b = (-1)^{m-1} \lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/2}\, [J_1(x) \operatorname{sen} x + J_0(x) \cos x]; \end{cases}$$

mentre se $n = 2m$

$$(31_2)\quad \begin{cases} a \cos b = (-1)^m \lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/2}\, [J_1(x) \operatorname{sen} x + J_0(x) \cos x], \\ a \operatorname{sen} b = (-1)^m \lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/2}\, [J_1(x) \cos x - J_0(x) \operatorname{sen} x]. \end{cases}$$

Dalle (18_2) del Cap. III, § 6, n. 4 si ha ,

$$x^{1/2}[J_1(x) \cos x - J_0(x) \operatorname{sen} x] =$$

$$= \frac{2x^{1/2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\operatorname{sen}(x \cos t) \cos t \cos x - \cos(x \cos t) \operatorname{sen} x]\, dt$$

$$= -\frac{2}{\pi} x^{1/2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \operatorname{sen}\left[2x \cos^2 \frac{t}{2}\right] \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} + \operatorname{sen}\left[2x \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}\right] \cos^2 \frac{t}{2} \right\} dt;$$

e operando sugli integrali del primo e secondo termine rispettivamente le sostituzioni $2x \cos^2 \frac{\,}{2} = u^2$, $2x \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} = u^2$ si ottiene

$$(32)\quad \begin{cases} x^{1/2}[J_1(x) \cos x - J_0(x) \operatorname{sen} x] = -\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \displaystyle\int_0^{\sqrt{2x}} \left(1 - \frac{u^2}{2x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} u^2\, du = \\ = -\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \displaystyle\int_0^{\sqrt{2x}} \operatorname{sen} u^2\, du + \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \displaystyle\int_0^{\sqrt[4]{x}} \left[1 - \left(1 - \frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\right] \operatorname{sen} u^2\, du + \\ + \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi} \displaystyle\int_{\sqrt[4]{x}}^{\sqrt{2x}} \left[1 - \left(1 - \frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\right] \operatorname{sen} u^2 du. \end{cases}$$

Ora è ben noto che

$$-\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\sqrt{2x}} \operatorname{sen} u^2 du = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}; \quad (^1)$$

supposto, come è lecito, $x > 1/4$ si ha per $0 \leqslant u \leqslant x^{1/4}$

$$0 \leqslant 1 - \left(1 - \frac{u^2}{2x}\right)^{1/2} \leqslant 1 - \left(1 - \frac{u^2}{4x}\right) = \frac{u^2}{4x} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{4x} = \frac{1}{4\sqrt{x}},$$

e perciò

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left| \int_0^{\sqrt[4]{x}} \left[1 - \left(1 - \frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\right] \operatorname{sen} u^2 du \right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2\pi \sqrt[4]{x}} \to 0 \quad \text{per} \quad x \to +\infty;$$

---

(1) Cfr. ad es. G. Sansone: *Sviluppi in serie di Funzioni Ortogonali.* (Bologna, 1935), p. 116.

si ha pure, quando x varia da $\sqrt[4]{x}$ a $\sqrt{2x}$ che la differenza $1-\left(1-\frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}$ varia crescendo da $1-\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{1/2}$ a 1, e perciò per il secondo teorema della media si avrà [1]

$$\left|\int_{\sqrt[4]{x}}^{\sqrt{2x}}\left[1-\left(1-\frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\right]\text{sen } u^2 du\right| = \left|\int_{\xi}^{\sqrt{2x}}\text{sen } u^2 du\right|$$

con $\sqrt[4]{x}<\xi<\sqrt{2x}$, e dalla convergenza dell' integrale $\int_0^{+\infty}\text{sen } u^2\,du$ otteniamo anche

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\sqrt[4]{x}}^{\sqrt{2x}}\left[1-\left(1-\frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\right]\text{sen } u^2 du=0\,;$$

e allora dalla (32) segue

$$(33_1)\qquad \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\,[J_1(x)\cos x-J_0(x)\text{ sen } x]=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Si troverà analogamente

$$(33_2)\qquad \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\,[J_1(x)\text{ sen } x+J_0(x)\cos x]=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

e dalle (31_1), (31_2) otteniamo

$$a\cos b=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\quad a\text{ sen } b=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{ sen}\left(-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

perciò

$$a=\sqrt{2/\pi},\qquad b=-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

e le (27_1), (27_2), (28_1), (28_2) dànno ora per $J_n(x)$ e $J_n'(x)$ le *formule asintotiche*

$$(34_1)\qquad \boxed{\begin{aligned} J_n(x)&=\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(x-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\gamma(x)\\ J_n'(x)&=-\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\text{ sen}\left(x-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\delta(x)\end{aligned}}$$

[1] Cfr. ad es. G. VITALI: *Moderna Teoria delle Funzioni di Variabile Reale*, (Bologna, 1935), p. 108.

dove per $x\geqslant|(4n^2-1)/4|$ si ha

$$(34_2)\qquad \boxed{|\gamma(x)|<\left|\frac{4n^2-1}{2}\right|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x\sqrt{x}},\quad |\delta(x)|<\left[\left|\frac{4n^2-1}{2}\right|+\frac{3}{2}\right]\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x\sqrt{x}}}.$$

b) Giova per le applicazioni trovare un *secondo termine dello sviluppo asintotico di* $J_n(x)$.

Se per $x^{1/2}J_n(x)$ prendiamo l'espressione ricavata dalla formula (25_1), facendovi $n=1$, otteniamo

$$\begin{aligned} x^{1/2}J_n(x)&=a_1e^{ix}+a_2e^{-ix}+\\ &+\frac{4n^2-1}{4}\int_{+\infty}^{x}(a_1e^{i\xi}+a_2e^{-i\xi})\frac{e^{i(x-\xi)}-e^{-i(x-\xi)}}{2i}\frac{1}{\xi^2}d\xi+\eta_1(x)\\ &=a\cos(x+b)+\frac{4n^2-1}{4}a\int_{+\infty}^{x}\frac{\text{sen }(x-\xi)\cos(\xi+b)}{\xi^2}d\xi+\eta_1(x)\\ &=a\cos(x+b)-\frac{4n^2-1}{8}\frac{a\text{ sen }(x+b)}{x}+\\ &+\frac{4n^2-1}{8}a\int_{+\infty}^{x}\frac{\text{sen }(x-2\xi-b)}{\xi^2}d\xi+\eta_1(x)\,;\end{aligned}$$

se osserviamo ora che per il secondo teorema della media si ha $(k>x;\ k>k_1)$

$$\left|\int_x^k\frac{\text{sen }(x-2\xi-b)}{\xi^2}d\xi\right|=\frac{1}{x^2}\left|\int_x^{k_1}\text{sen }(x-2\xi-b)\,d\xi\right|\leqslant\frac{1}{x^2},$$

e che per la (26) si ha

$$|\eta_1(x)|<2a\left|\frac{4n^2-1}{4}\right|^2\frac{1}{x^2},$$

otteniamo per $J_n(x)$ l'altra *formula asintotica*.

$$(35_1)\qquad \boxed{\begin{aligned} J_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Big[&\cos\left(x-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\\ &-\frac{4n^2-1}{8}\frac{1}{x}\text{ sen}\left(x-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big]+\gamma_1(x)\end{aligned}}\qquad [1]$$

[1] Se poniamo con HANKEL

$$(n,0)=1$$

$$(n,m)=(-1)^m\frac{[4n^2-1^2][4n^2-3^2]\ldots.[4n^2-(2m-1)^2]}{2^{2m}m!},\qquad (m=1,2,\ldots.)$$

dove

$$(35_2) \qquad \boxed{|\gamma_1(x)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(4n^2-1)n^2}{2x^2\sqrt{x}}}.$$

5. - *a*) In questo numero *studieremo gli integrali dell'equazione*

$$(1) \qquad y'' + A(x)y = 0$$

nell'ipotesi che sia $\lim_{x\to+\infty} A(x) = 0$. In un primo esame si è indotti a ritenere che gli integrali della (1) si comportino asintoticamente come quelli dell'equazione $y''=0$, ma che ciò non sia in generale si verifica immediatamente con un esempio; l'equazione

$$y'' + \left(\frac{1}{4x} + \frac{3}{16x^2}\right) y = 0$$

ha l'integrale generale $y = c_1 x^{1/4}$ sen $(x^{1/2} + c_2)$, (c_1 e c_2 costanti), il quale, salvo il caso $c_1 = 0$, è oscillante.

b) Esamineremo un caso che assicura l'andamento asintotico lineare degli integrali della (1), *faremo per questo l'ipotesi che si abbia*

$$(36) \qquad |A(x)| < \frac{k}{x^{3+\varrho}}, \qquad k \text{ e } \varrho \text{ costanti}, \qquad \varrho > 0. \quad [1].$$

Se poniamo

$$(37_1) \qquad y(x) = xz_1(x) + z_2(x), \qquad (37_2) \quad y'(x) = z_1(x),$$

---

per $J_n(x)$ quando x è positivo, abbastanza grande, vale lo sviluppo asintotico di JACOBI [Gesammelte Werke, VII (1891), p. 174]

$$J_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[\cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n, 2m)}{(2x)^{2m}} - \right.$$
$$\left. - \operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(n, 2m+1)}{(2x)^{2m+1}}\right].$$

[Cfr. G. N. WATSON: *A Treatise of the Theory of Bessel Functions.* (Cambridge, 1922), Cap. VII, pp. 194-224].

[1] Questa ipotesi implica che se $A(x)$ è olomorfa nell'intorno di $x = \infty$. l'equazione ha in $x = \infty$ un punto singolare regolare [Cap. III, § 3, nn. 1, 5].

derivando la prima, e tenuto conto della seconda, si ha

$$xz_1'(x) + z_2'(x) = 0,$$

mentre l'equazione proposta dà

$$z_1'(x) + A(x)\,[xz_1(x) + z_2(x)] = 0,$$

e perciò la (37_1) fornirà un integrale dell'equazione (1) se $z_1(x)$, $z_2(x)$ soddisfano il sistema

$$z_1'(x) = -A(x)\;[xz_1(x) + z_2(x)], \quad z_2'(x) = xA(x)\,[xz_1(x) + z_2(x)].$$

Noi vogliamo dimostrare che *se a_1 e a_2 sono due costanti prefissate, esiste un integrale $y(x)$ della (1) per il quale le corrispondenti funzioni $z_1(x)$ e $z_2(x)$ soddisfano le condizioni*

$$\lim_{x\to+\infty} z_1(x) = a_1, \qquad \lim_{x\to+\infty} z_2(x) = a_2,$$

e basterà per questo dimostrare l'esistenza di una soluzione del sistema di equazioni integrali singolari di VOLTERRA

$$(38) \qquad \begin{cases} z_1(x) = a_1 - \displaystyle\int_{+\infty}^{x} [\xi z_1(\xi) + z_2(\xi)]\,A(\xi)\,d\xi, \\ z_2(x) = a_2 + \displaystyle\int_{+\infty}^{x} [\xi^2 z_1(\xi) + \xi z_2(\xi)]\,A(\xi)\,d\xi. \end{cases}$$

Procediamo ancora col metodo delle sostituzioni successive di LIOUVILLE-NEUMANN; posto

$$u_0 = a_1, \qquad v_0 = a_2$$

$$u_n = -\int_{+\infty}^{x} [\xi u_{n-1}(\xi) + v_{n-1}(\xi)]\,A(\xi)\,d\xi,$$

$$v_n = \int_{+\infty}^{x} [\xi^2 u_{n-1}(\xi) + \xi v_{n-1}(\xi)]\,A(\xi)\,d\xi, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

proviamo che si ha

$$(39) \qquad z_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \qquad z_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x).$$

Infatti se a indica il maggiore dei due numeri $|a_1|$, $|a_2|$, abbiamo

$$|u_0| \leqslant a, \quad |v_0| \leqslant a;$$

per la (36) abbiamo anche, per $x>1$,

$$|u_1(x)|<ka\int_x^{+\infty}\left[\frac{1}{\xi^{2+\varrho}}+\frac{1}{\xi^{3+\varrho}}\right]d\xi=$$

$$=ka\left[\frac{1}{(1+\varrho)x^{1+\varrho}}+\frac{1}{(2+\varrho)x^{2+\varrho}}\right]<a\,\frac{2k}{\varrho x^{1+\varrho}}$$

e analogamente

$$|v_1(x)|<a\,\frac{2k}{\varrho x^{\varrho}},$$

e in generale

$$|u_n(x)|<a\,\frac{(2k)^n}{\varrho(1+2\varrho)(2+3\varrho)\dots[(n-1)+n\varrho]}\,\frac{1}{x^{n(1+\varrho)}},$$

$$|v_n(x)|<a\,\frac{(2k)^n}{\varrho(1+2\varrho)(2+3\varrho)\dots[(n-1)+n\varrho]}\,\frac{1}{x^{n(1+\varrho)-1}},$$

dalle quali segue, per $x>1$, l'uniforme convergenza delle serie (39).

Ripetendo i ragionamenti del n. 3 risulta che $z_1(x)$ e $z_2(x)$ soddisfano il sistema (38), e dalle (37_1) e (38) segue

$$y=a_1x+a_2+\eta(x) \tag{40_1}$$

con

$$\eta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[xu_n(x)+v_n(x)] \tag{40_2}$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\eta(x)=0. \tag{40_3}$$

La (40) *mettono bene in evidenza il comportamento degli integrali dell'equazione* (1), *quando sia verificata la* (36).

6. - In questo numero vogliamo studiare il comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y''+A(x)y=0$, con $A(x)<0$; per comodità scriveremo l'equazione nella forma

$$y''=A(x)y \tag{41}$$

e supporremo $A(x)$ *continua, positiva, in* $(q,+\infty)$, $\int_q^{+\infty}A(x)dx=+\infty$.

Si ha dalla (41)

$$d(yy')/dx=yy''+y'^2=Ay^2+y'^2>0$$

quindi il prodotto yy' è crescente.

Si ha anche

$$y(\xi)y'(\xi)=\int_a^{\zeta}[A(\xi_1)y^2(\xi_1)+y'^2(\xi_1)]\,d\xi_1+y(a)y'(a), \tag{42}$$

$$y^2(x)=2\int_a^x d\xi\int_a^{\xi}[A(\xi_1)y^2(\xi_1)+y'^2(\xi_1)]\,d\xi_1+ \tag{43}$$
$$+2y(a)y'(a)(x-a)+y^2(a),$$

e perciò se in un punto a è $y(a)y'(a)>0$, dalla (42) segue che il prodotto $y(x)y'(x)$ per $x>a$ non si annulla e $y(x)$, $y'(x)$ hanno segni concordi; ma per la (43) è

$$y^2(x)>2y(a)y'(a)\,(x-a)$$

e ne viene che se $y(a)>0$, quando $x\to+\infty$, $y(x)$ varia crescendo ed ha per limite $+\infty$, mentre se $y(a)<0$, $y(x)$ varia decrescendo ed ha per limite $-\infty$.

Se in un punto a è $y(a)y'(a)=0$ per $a_1>a$ è $y(a_1)y'(a_1)>0$ e restano quindi le stesse conclusioni.

Si osservi ancora che dalla (41), moltiplicando per $2y'$ e integrando tra a ed x. si ha [cfr, 2, a)]

$$y'^2(x)-y'^2(a)=2\int_a^x A(\xi)y(\xi)y'(\xi)\,d\xi, \tag{44}$$

quindi se per $x\geqslant a$ è $y(x)y'(x)>0$ è $y'^2(x)\geqslant y'^2(a)>0$, e dalla (44) stessa si deduce $\lim_{x\to+\infty}y'^2(x)=+\infty$.

Abbiamo così dimostrato che *se in un punto* a *di* $(q,+\infty)$ *è* $y(a)y'(x)\geqslant0$ *l'integrale* $y(x)$ *della* (41), *e la sua derivata* $y'(x)$, *per* $x\geqslant a$ *sono entrambi positivi e crescenti, o entrambi negativi e decrescenti, e si ha rispettivamente nei due casi*

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=+\infty,\qquad\lim_{x\to+\infty}y'(x)=+\infty, \tag{45_1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=-\infty,\qquad\lim_{x\to+\infty}y'(x)=-\infty. \tag{45_2}$$

Si possono trovare quanti si vogliono integrali della (41) che soddisfano le (45_1) o le (45_2); basterà per questo prefissare in un punto a due costanti (non entrambe nulle) $y(a)$ e $y'(a)$ tali che $y(a)y'(a)\geqslant0$ e considerare il corrispondente integrale.

Esaminiamo ora il caso che esista un integrale $y(x)$ della (41) tale che per ogni $x \geqslant a$ sia

$$y(x)y'(x) < 0, \quad (x \geqslant a).$$

È $y(x) \neq 0$, $y'(x) \neq 0$, e siccome $y(x)$, $y'(x)$ sono continue, potremo supporre

$$y(x) > 0, \qquad y'(x) < 0 \qquad \text{per } x \geqslant a$$

Da queste segue che $y(x)$ è positiva e decrescente, e dalla (44) $y'^2(x) < y'^2(a)$ perciò $y'(x)$ è negativa crescente, quindi $|y(x)|$, $|y'(x)|$ sono limitati in $(q, +\infty)$.

Si ha dalla (42) per $\xi > a$

$$|y(a)\,y'(a)| > -y(a)y'(a) + y(\xi)y'(\xi) = \int_a^\xi [A(\xi_1)y^2(\xi_1) + y'^2(\xi_1)]\, d\xi_1$$

$$> y^2(\xi) \int_a^\xi A(\xi_1)d\xi_1 + y'^2(\xi)(\xi - a),$$

da cui

$$y^2(\xi) < |y(a)y'(a)| \Big/ \int_a^\xi A(\xi_1)d\xi_1, \quad y'^2(\xi) < |y(a)y'(a)|/(\xi - a),$$

quindi

$$(46) \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0.$$

Vogliamo dimostrare che *da ogni punto* (a, β), $\beta \neq 0$, $[q \leqslant a]$ *parte uno e un solo integrale della* (41) *che verifica le* (46), *e per ogni altro integrale valgono le* (45_1) *o le* (45_2). (1)

Senza alterare le generalità supponiamo $\beta > 0$ e consideriamo un integrale $y_1(x)$ della (41) che soddisfi le condizioni iniziali

$$y_1(a) = \beta, \quad y_1'(a) = 1\,;$$

per le cose dette è per ogni $x > a$, $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = +\infty$.

(1) L'esistenza di un integrale della (41) che verifichi le condizioni $y(a) = \beta$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$ può ottenersi come caso particolare di un teorema generale dovuto ad A. Mambriani: *Su un teorema relativo alle equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 9 (1929), pp. 620-622, [Cfr. Cap. XII, § 5].

L'integrale generale della (41) è

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) \int_a^x \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi,$$

gli integrali passanti per il punto (a, β) hanno perciò l'espressione

$$(47) \qquad y(x) = y_1(x) \left[1 + c_2 \int_a^x \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi\right];$$

e fissato $b > a$, l'integrale $y(x)$ che si annulla in b ha l'espressione

$$(48) \qquad y(x) = y_1(x) \left[1 - \int_a^x \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi \Big/ \int_a^b \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi\right].$$

È facile persuadersi che l'integrale $y(x)$ dato dalla (48) è decrescente, e quando $x \to +\infty$ ha per limite $-\infty$ [vedi fig. 10].

Siccome è $y(b) = 0$ e per $x > b$ è $y(x) < 0$, abbiamo che per $x \geqslant b$, $y(x)$ è decrescente ed ha per limite $-\infty$, resta quindi da provare che $y(x)$ è decrescente in (a, b).

Si ha dalla (48)

$$(49) \qquad y'(x) = \left[y_1'(x)y_1(x) \int_x^b \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi - 1\right] \Big/ \, y_1(x) \int_a^b \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi\,;$$

d'altra parte siccome è $y_1''(x) = A(x)y_1(x) > 0$ la curva $y = y_1(x)$ volge la sua concavità all'asse delle y positive, quindi

$$y_1(\xi) > y_1'(x)(\xi - x) + y_1(x) > 0 \quad (\xi > x)$$

e perciò

$$\int_x^b \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)} < \int_x^{+\infty} \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)} < \int_x^{+\infty} \frac{d\xi}{[y_1'(x)(\xi - x) + y_1(x)]^2} = \frac{1}{y_1(x)y_1'(x)},$$

e dalla (49) segue $y'(x) < 0$.

Dalle cose dette segue [vedi fig. 10] che *nella* (47) *ad ogni valore di* $c_2 < -1 \Big/ \int_a^{+\infty} y_1^{-2}(\xi)\, d\xi$ *corrisponde un integrale* $y(x)$ *della* (41) *il quale varia decrescendo da* β *a* $-\infty$, *mentre per*

$c_2 > -1 \Big/ \int_a^{+\infty} y_1^{-2}(\xi)\, d\xi$ *tale integrale diverge a* $+\infty$; *quando si faccia infine*

$$c_2 = -1 \Big/ \int_a^{+\infty} y_1^{-2}(\xi)\, d\xi$$

l'integrale $y(x)$ *corrispondente è positivo in* $(\alpha, +\infty)$, *decrecente, e per esso valgono le* (46), $[\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = 0]$.

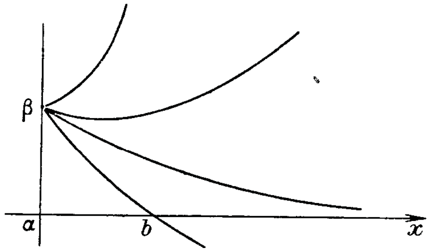

Fig. 10.

7. - *a*) Questo numero è dedicato alla *rappresentazione asintotica degli integrali dell'equazione*

$$(50) \qquad y'' - [1 + Q(x)]y = 0$$

nelle ipotesi, $Q(x)$ *continua in* $(q, +\infty)$ *e*

$$(51_1) \quad \lim_{x\to+\infty} Q(x) = 0, \qquad (51_2) \quad \int_q^{+\infty} |\, Q(x) \,|\, e^{2x}\, dx < +\infty.$$

Si ponga

$$(52_1) \quad y = z_1 e^x + z_2 e^{-x}, \qquad (52_2) \quad y' = z_1 e^x - z_2 e^{-x};$$

derivando la prima si ha $z_1' e^x + z_2' e^{-x} = 0$, e derivando la seconda e sostituendo nella prima

$$z_1' e^x - z_2' e^{-x} = Q(x)\, [z_1 e^x + z_2 e^{-x}],$$

talchè per integrare l'equazione (50) basterà sostituire nella (52_1), due funzioni z_1 e z_2 soddisfacenti il sistema

$$(53) \quad z_1' = \frac{1}{2} Q(x)\, [z_1 + z_2 e^{-2x}], \quad z_2' = -\frac{1}{2} Q(x)\, [z_1 e^{2x} + z_2].$$

Dimostreremo che *fissate due costanti arbitrarie* a_1 *e* a_2, *esiste una soluzione del sistema* (53) *la quale verifica le condizioni*

$$(54) \qquad \lim_{x\to+\infty} z_1(x) = a_1, \quad \lim_{x\to+\infty} z_2(x) = a_2.$$

Al sistema (53), (54) possiamo sostituire il sistema di equazioni integrali equivalente

$$z_1(x) = a_1 + \frac{1}{2} \int_{+\infty}^{x} Q(\xi)\, [z_1(\xi) + z_2(\xi)\, e^{-2\xi}]\, d\xi$$

$$z_1(x) = a_2 - \frac{1}{2} \int_{+\infty}^{x} Q(\xi)\, [z_1(\xi)\, e^{2\xi} + z_2(\xi)]\, d\xi.$$

Ripetendo i ragionamenti del n. 3, *b*) si avranno per $z_1(x)$, $z_2(x)$ le due serie uniformemente e assolutamente convergenti in un intervallo $(q_1, +\infty)$

$$z_1(x) = \sum_0^\infty u_n(x), \quad z_2(x) = \sum_0^\infty v_n(x),$$

con

$$u_0(x) = a_1, \quad v_0(x) = a_2,$$

$$u_n = \frac{1}{2} \int_{+\infty}^{x} Q(\xi)\, [u_{n-1}(\xi) + e^{-2\xi} v_{n-1}(\xi)]\, d\xi,$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

$$v_n = -\frac{1}{2} \int_{+\infty}^{x} Q(\xi)\, [u_{n-1}(\xi)\, e^{2\xi} + v_{n-1}(\xi)]\, d\xi,$$

e perciò l'integrale generale dell'equazione data ha l'espressione

$$y(x) = e^x \Big[a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big] + e^{-x} \Big[a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\Big].$$

b) Ove per $Q(x)$ si faccia soltanto l'ipotesi espressa dalla (51_1), basterà osservare che l'equazione caratteristica limite della (50), $\varrho^2 - 1 = 0$, ha le due radici ± 1, per concludere in virtù di un teorema di PERRON [§ 3, n. 1, *d*)] che essa ammette un integrale che soddisfa le condizioni

$$\lim_{x\to+\infty} y = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} y' = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} y'' = 0.$$

Nel caso esaminato in a) tale integrale si ottiene facendo $a_1=0$; risulta infatti in virtù della (51_2), quando sia $a_1=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x}z_1(x)=0$.

8. - In questo numero studieremo l'equazione

$$y''+A(x)y=0 \tag{1}$$

con $A(x)>0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=+\infty$, oppure $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=0$; e con altra ipotesi supplementare che tra poco dichiareremo, *valuteremo asintoticamente i massimi di* $|y(x)|$ *e* $|y'(x)|$ *quando* $x\to+\infty$ ([1]).

a) Nell'equazione (1) *la funzione* $A(x)$ *sia continua in* $(q,+\infty)$ *e soddisfi la condizione*

$$A(x)>0 \qquad (x\geqslant q); \tag{55}$$

fissate inoltre comunque due costanti positive k *e* τ, *esista corrispondentemente un* x^0 *tale che per* $x\geqslant x^0$, $0\leqslant h\leqslant k/\sqrt{A(x)}$, *risulti*

$$\left|\frac{A(x\pm h)}{A(x)}-1\right|<\tau \quad ([2]). \tag{56}$$

([1]) Cfr. M. Biernacki: *Sur l'équation différentielle* $x''+A(t)x=0$, Prace Mat. Fizy., 40 (1933), pp. 163-171; H. Milloux: *Sur l'equation différentielle* $x''+A(t)x=0$. Prace Mat. Fizy., 41 (1934), pp. 39-54; A. Wiman: *a*) *Über die reellen Lösungen der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnungs*, Arkiv för Matem., Astr. och Fysik, Bd. 12, n 14, (Stockholm, 1917); *b*) *Über eine Stabilitätsfrage in der Theorie der linearen Differentialgleichungen*. Acta Math., 66, (1936), pp. 121-145; E. Butlewski: *Sur les intégrales d'une équation différentielle du second ordre*, Mathematica, [Cluj], XII (1936), pp. 36-48. Per una generalizzazione dei risultati di A. Wiman, cfr. M. Matell: *Asymptotische Eigenschaften gewisser linearer Differentialgleichungen*, Dissertation Uppsala, pp. 67, (Uppsala, 1924).

([2]) Ad es. la funzione $A(x)=cx^n$, per $x>0$, $c>0$, $n>-2$ soddisfa le condizioni dichiarate. Si ha infatti

$$\left|\frac{c(x\pm h)^n}{cx^n}-1\right|=\left|\left(1\pm\frac{h}{x}\right)^n-1\right|=\frac{h}{x}n\left(1\pm\theta\frac{h}{x}\right)^{n-1}, \qquad 0<\theta<1;$$

per $0\leqslant h\leqslant k/\sqrt{c}\,x^{\frac{n}{2}}$ risulta $h/x<k/\sqrt{c}\,x^{n/2+1}$; $h/x\to0$ per $x\to+\infty$ e il fattore $n\left(1+\theta\frac{h}{x}\right)^{n-1}$ è limitato.

In questa ipotesi qualsiasi integrale $y(x)$ *della* (1) *ammette infiniti zeri*

$$x_0,\ x_2,\dots,\ x_{2n},\dots, \tag{57}$$

e fissato $\tau>0$, *esiste corrispondentemente un indice* n_0 *tale per* $n>n_0$ *risulta*

$$\frac{\pi}{\sqrt{A(x_{2n})}(1+\tau)}<x_{2n+2}-x_{2n}<\frac{\pi}{\sqrt{A(x_{2n})}(1-\tau)}, \quad (n=n_0+1,\ n_0+2,\dots). \tag{58}$$

Sia infatti k una costante positiva maggiore di π, ed M ed m siano il massimo e il minimo di $A(x)$ in $(x-k/\sqrt{A(x)},\ x+k/\sqrt{A(x)})$; scelta la costante positiva τ in modo che sia

$$\pi/k<1-\tau,$$

per la (56) si può determinase un x^0 così grande che per $x\geqslant x^0$ risulti

$$(1-\tau)^2\leqslant\frac{m}{A(x)}\leqslant\frac{M}{A(x)}\leqslant(1+\tau)^2. \tag{59}$$

I due intervalli $(x,x+\pi/\sqrt{M})$, $(x;\ x+\pi/\sqrt{m})$, qualunque sia $x>x^0$, sono contenuti in $(x,\ x+k/\sqrt{A(x)})$, e se riferendoci a questi due intervalli confrontiamo la (1) con le due equazioni

$$z''+Mz=0, \quad z''+mz=0.$$

le quali ammettono ciascuna un integrale che si annulla nei punti $x,\ x+\pi/\sqrt{M}$; $x,\ x+\pi/\sqrt{m}$, per il teorema di Sturm si ha [cfr. Cap. IV, § 2, n. 6, a)] che quasiasi integrale $y(x)$ della (1) in qualunque intervallo $(x,\ x+\pi/\sqrt{m})$ ha almeno uno zero; gli zeri di $y(x)$ sono perciò infiniti e formano una successione [avente $+\infty$ come unico punto limite [cfr. Cap. IV, § 2, n. 2, a))] che supporremo ordinata in ordine crescente nella successione (57); si avrà inoltre a partire da un indice n_0 abbastanza grande

$$x_{2n}+\pi/\sqrt{M}<x_{2n+2}<x_{2n}+\pi/\sqrt{m},$$

e tenuto conto che per la (59) si ha

$$\frac{1}{(1+\tau)\sqrt{A(x_{2n})}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{M}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{m}}\leqslant\frac{1}{(1-\tau)\sqrt{A(x_{2n})}}, \tag{59'}$$

si ottiene appunto la limitazione (58).

b) Facciamo ora delle ipotesi più restrittive: $In(q,+\infty)$, $A(x)$ *sia continua e crescente e* $\lim_{x\to+\infty} A(x)+\infty$, *oppure continua e decrescente e* $\lim_{x\to+\infty} A(x)=0$, *esista inoltre* $A'(x)$, *e sia* $A'(x)\neq 0$, *e fissate comunque due costanti positive* k *e* τ *si possa trovare corrispondentemente un* x^0 *tale che per* $x>x^0$, $|h|\leqslant k/\sqrt{A(x)}$ *si abbia simultaneamente*

$$\left|\frac{A(x\pm h)}{A(x)}-1\right|<\tau, \left|\frac{A'(x\pm h)}{A'(x)}-1\right|<\tau. \quad (60)$$ [1]

Vogliamo allora dimostrare ehe se $y(x)$ *è un integrale qualsiasi della* (1), *e se*

$$x_0,\, x_2,\, x_4, \ldots;\quad x_1,\, x_3,\, x_5, \ldots$$

sono le ascisse dei punti di zero di $y(x)$ [punti di massimo di $|y'(x)|$] e *dei punti di zero di* $y'(x)$ [punti di massimo di $|y(x)|$], *disposte in ordine crescente,* (vedi fig. 9, p. 25), *si ha*

$$|y'(x_{2n})|=|A(x_{2n})|^{\frac{1}{4}+\alpha_n}, \quad (61_1)$$

$$|y(x_{2n+1})|=|A(x_{2n+1})|^{-\frac{1}{4}+\beta_n}, \quad (61_2)$$

dove le due successioni di costanti $\{\alpha_n\}$ *e* $\{\beta_n\}$ *sono tali che*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n=0,\quad \lim_{n\to+\infty} \beta_n=0 \quad (^2).$$

Dalla (1) moltiplicando per $2y'$ e integrando tra x_{2n} e x_{2n+2} si ha $[y(x_{2n})=y(x_{2n+2})=0]$

$$0=y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})+2\int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} A(x)yy'dx=$$
$$=y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})+[A(x)y^2(x)]_{x_{2n}}^{x_{2n+2}}-\int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} A'(x)y^2(x)dx,$$

$$y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})=\int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} A'(x)y^2(x)dx. \quad (62)$$

---

[1] Se $A(x)=cx^n$, $c>0$, $n>-1$, le (60) risultano soddisfatte.

[2] Cfr. A. WIMAN, lav. cit., p. 127.

Se m' e M' indicano l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $|A'(x)|$ in $(x-k/\sqrt{A(x)},\, x+k/\sqrt{A(x)})$, fissato τ, si può trovare un x^0 tale che per $x\geqslant x^0$ valga con la (59) l'altra limitazione

$$(1-\tau)^2\leqslant\frac{m'}{|A'(x)|}\leqslant\frac{M'}{|A'(x)|}\leqslant(1+\tau)^2. \quad (63)$$

Dalla (62) si ha

$$y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})=A'\int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} y^2(x)\,dx, \quad (64)$$

con A' compreso tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $A'(x)$ in (x_{2n}, x_{2n+2}); ma quando sia $n>n^0$, con n_0 abbastanza grande, valgono le (59) e (63), (x_{2n}, x_{2n+2}) è contenuto in $(x_{2n}, k/\sqrt{A(x_{2n})})$, e dalla (63) otteniamo

$$(1-\tau)^2|A'(x_{2n})|\leqslant|A'|\leqslant(1+\tau)^2|A'(x_{2n})|. \quad (65)$$

Applicando il metodo della variazione delle costanti di LAGRANGIA [Cap. II, § 1, n. 5, *c*)] si ha che se $y(x)$ è l'integrale della (1) che si annulla in x_n, $y(x)$ soddisfa l'equazione integrale

$$y(x)=\frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{C}}\,\mathrm{sen}\sqrt{C}(x-x_{2n})+ \quad (66)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{C}}\int_{x_{2n}}^{x}[C-A(\xi)]\,y(\xi)\,\mathrm{sen}\sqrt{C}(x-\xi)\,d\xi,$$

dove C è una costante positiva abitraria.

Supponiamo per fissare le ipotesi $y'(x_{2n})>0$; se nella (66) facciame una volta $C=M$, e una volta $C=m$, dove M e m sono rispettivamente il massimo e il minimo di $A(x)$ in $(x_{2n}, x_{2n}+k/\sqrt{A(x_{2n})})$, si avrà in $(x_{2n}, x_{2n}+\pi/\sqrt{M})$ [v. fig. 11]

$$0\leqslant\frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{M}}\,\mathrm{sen}\sqrt{M}(x-x_{2n})\leqslant y(x), \quad (66_1)$$

in (x_{2n}, x_{2n+2})

$$0\leqslant y(x)\leqslant\frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{m}}\,\mathrm{sen}\sqrt{m}(x-x_{2n}), \quad (66_2)$$

perciò

$$(67)\qquad \frac{\pi y'^2(x_{2n})}{2M\sqrt{M}} < \int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} y^2(x)\,dx < \frac{\pi y'^2(x_{2n})}{2m\sqrt{m}},$$

e dalle (64), (65), (67), poichè $A'(x_{2n+2})$ e $y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})$ hanno lo stesso segno, abbiamo

$$\frac{\pi}{2}(1-\tau)^2\frac{1}{M\sqrt{M}} \leqslant \frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})\,A'(x_{2n})} \leqslant \frac{\pi}{2}(1+\tau)^2\frac{1}{m\sqrt{m}}.$$

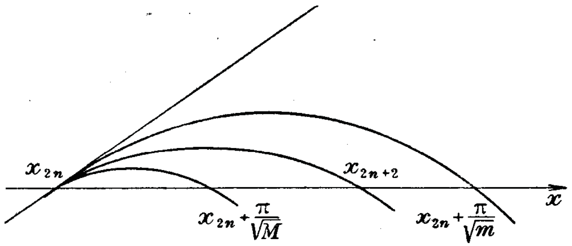

Fig. 11.

Tenuto conto delle (58) e (59′) si ha

$$\frac{1}{m\sqrt{m}} \leqslant \frac{1}{A(x_{2n})^{3/2}(1-\tau)^3} < \frac{1}{A(x_{2n})}\frac{1}{(1-\tau)^3}\frac{1+\tau}{\pi}(x_{2n+2}-x_{2n}),$$

si ha pure

$$\frac{1}{M\sqrt{M}} \geqslant \frac{1}{A(x_{2n})^{3/2}(1+\tau)^3} \geqslant \frac{1}{(1+\tau)^3}\frac{1}{A(x_{2n})}\frac{1-\tau}{\pi}(x_{2n+2}-x_{2n}),$$

perciò

$$(68)\qquad \frac{(1-\tau)^3}{(1+\tau)^3} \leqslant \frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{\frac{1}{2}y'^2(x_{2n})\,\frac{A'(x_{2n})}{A(x_{2n})}\,(x_{2n+2}-x_{2n})} \leqslant \frac{(1+\tau)^3}{(1-\tau)^3}.$$

Abbiamo

$$\log A(x_{2n+2}) - \log A(x_{2n}) = (x_{2n+2}-x_{2n})\,\frac{A'}{A}$$

dove indicando con M' ed m' il massimo e il minimo di $A'(x)$ in $(x_{2n},\ x_{2n}+k/\sqrt{A(x_{2n})})$ si ha

$$m'/M < |A'|/A < M'/m.$$

Per le (59) e (63) avremo

$$\frac{(1-\tau)^2}{(1+\tau)^2}\frac{|A'(x_{2n})|}{A(x_{2n})} \leqslant \frac{m'}{M} \leqslant \frac{|A'|}{A} \leqslant \frac{M'}{m} \leqslant \frac{(1+\tau)^2|A'(x_{2n})|}{(1-\tau)^2A(x_{2n})},$$

$$\left|\log\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})}\right|\frac{(1-\tau)^2}{(1+\tau)^2} = (x_{2n+2}-x_{2n})\frac{(1-\tau)^2}{(1+\tau)^2}\frac{|A'|}{A} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|A'(x_{2n})|}{A(x_{2n})}(x_{2n+2}-x_{2n}) \leqslant \frac{(1+\tau)^2}{(1-\tau)^2}\left|\log\left|\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})}\right|\right|,$$

$$\frac{(1+\tau)^2}{(1-\tau)^2}\frac{1}{\left|\log\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})}\right|} \geqslant \frac{1}{\frac{|A'(x_{2n})|}{A(x_{2n})}(x_{2n+2}-x_{2n})} \geqslant \frac{(1-\tau)^2}{(1+\tau)^2}\frac{1}{\left|\log\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})}\right|};$$

dalla (68) si ha allora, tenuto conto che $y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})$ ha il segno di $A'(x)$,

$$(69)\qquad \frac{(1-\tau)^5}{(1+\tau)^5} \leqslant \frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{\frac{1}{2}\log\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})}\,y'^2(x_{2n})} \leqslant \frac{(1+\tau)^5}{(1-\tau)^5},$$

dalla quale

$$(70)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})}\Big/\frac{1}{2}\log\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})} = 1.$$

Si ha dalla (59), $(1-\tau)^2 < A(x_{2n+2})/A(x_{2n}) \leqslant (1+\tau)^2$, perciò $\lim_{n\to\infty}\log A(x_{2n+2})/A(x_{2n}) = 0$, e dalle (70)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})} = 0;$$

ma

$$\lim_{n\to\infty}\left[\log y'^2(x_{2n+2})-\log y'^2(x_{2n})\right]\Big/\frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\log\left[1+\frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})}\right]\Big/\frac{y'^2(x_{2n+2})-y'^2(x_{2n})}{y'^2(x_{2n})} = 1,$$

e dalla (70) stessa si ha

$$\lim_{n\to\infty}\log\frac{y'^2(x_{2n+2})}{y'^2(x_{2n})}\Big/\frac{1}{2}\log\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})} = 1.$$

Si ponga ora

$$(71)\qquad y'^2(x_{2n}) = A(x_{2n})^{1/2+2\alpha_n}$$

e proviamo che $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0.$

Infatti scelto $\varepsilon>0$ si può trovare un n_0 tale che per $n \geqslant n_0$ risulti

$$1-\varepsilon < \log\frac{y'^2(x_{2n+2})}{y'^2(x_{2n})}\Big/\frac{1}{2}\log\frac{A(x_{2n+2})}{A(x_{2n})} < 1+\varepsilon,$$

da cui

$$1-\varepsilon < \log \frac{y'^2(x_{2n_0+2p})}{y'^2(x_{2n_0})} \Big/ \frac{1}{2} \log \frac{A(x_{2n_0+2p})}{A(x_{2n_0})} < 1+\varepsilon, \quad (p=1, 2, \ldots)$$

$$-\varepsilon < \frac{2\,\alpha_{2n_0+2p} + \dfrac{\frac{1}{2}\log A(x_{2n_0}) - \log y'^2(x_{2n_0})}{\log A(x_{2n_0+2p})}}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\log A(x_{2n_0})}{\log A(x_{2n_0+2p})}} < \varepsilon,$$

e siccome $\lim\limits_{n\to\infty} \log |A(x_{2n_0+2p})| = +\infty$, ed ε è arbitrario, segue appunto $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Poniamo ora

$$y(x_{2n+1}) = [A(x_{2n+1})]^{-1/4+\beta_n}, \tag{72}$$

e proviamo che $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Si ha dalle (66_1) e (66_2)

$$\frac{|y'(x_{2n})|}{\sqrt{M}} \leqslant |y(x_{2n+1})| \leqslant \frac{|y'(x_{2n})|}{\sqrt{m}},$$

e tenuto conto delle (59′) e (71), per $n > n_0$,

$$\frac{1}{1+\tau}\left|A(x_{2n})\right|^{-\frac{1}{4}+\alpha_n} \leqslant A(x_{2n+1})^{-\frac{1}{4}+\beta_n} \leqslant \frac{1}{1-\tau}\left|A(x_{2n})\right|^{-\frac{1}{4}+\alpha_n},$$

dalla quale risulta che β_n è compreso tra i numeri

$$\frac{1}{4} - \frac{\log(1+\tau)}{\log A(x_{2n+1})} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha_n\right)\frac{\log A(x_{2n})}{\log A(x_{2n+1})},$$

$$-\frac{\log(1-\tau)}{\log A(x_{2n+1})} + \left(-\frac{1}{4} + \alpha_n\right)\frac{\log A(x_{2n})}{\log A(x_{2n+1})} + \frac{1}{4}.$$

Ma si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log A(x_{2n})}{\log A(x_{2n+1})} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} \log A(x_{2n+1}) = \infty, \text{ e perciò } \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0. \text{ (1)}$$

(1) Per trovare il primo limite, basterà osservare che fissato $\tau > 0$, piccolo a piacere, si può per la (59) trovare un n_0 tale che per $n \geqslant n_0$ risulti $(1+\tau)^2 A(x_n) > A(x_{2n+1}) > (1-\tau)^2 A(x_n)$, e perciò $\log A(x_{2n+1}) / \log A(x_{2n})$ è compreso tra $\dfrac{2\log(1-\tau)}{\log A(x_{2n})} + 1$ e $\dfrac{2\log(1+\tau)}{\log A(x_{2n})} + 1$.

c) Il lettore noti che se nell'equazione $y'' + A(x)y = 0$, $A(x)$ soddisfa le condizioni dichiarate in *b*), quando sia $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$ si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} |y'(x)| = +\infty$, il contrario anche se $\lim A(x) = 0$; dunque *nelle nostre ipotesi per gli integrali dell'equazione* (1) *si potrà considerare soltanto la stabilità alla* ROUTH [§ 1, n. 1].

9. - *a*) Questo numero è dedicato allo studio degli integrali dell'equazione

$$y'' + A(x)y = 0 \tag{1}$$

con $A(x)$ *positiva, non decrescente in* $(q, +\infty)$, *con derivata continua*, e $\lim\limits_{x\to\infty} A(x) = +\infty$, con lo scopo di conseguire due criteri di stabilità della soluzione $y = 0$.

Per enunciare brevemente uno di tali criteri introduciamo le definizioni di *funzioni che tendono all'infinito regolarmente, oppure quasi saltuariamente*. Sia $\{\theta_n\}$ una successione di intervalli di $(q, +\infty)$, esterni l'uno all'altro, $\theta_n \equiv (a_n, b_n)$, $a_n < b_n$. Si dirà che $\{\theta_n\}$ ha su $(q, +\infty)$ una *densità minore di* ε se esiste un n_0 tale che per $n > n_0$ risulti $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)/b_n < \varepsilon$. Sia $F(x)$ una funzione la quale per $x \geqslant q$ sia positiva, continua, non decrescente, e sia $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Se per ogni $\varepsilon > 0$ si può corrispondentemente determinare una successione $\{\theta_n\}$ di segmenti di $(q, +\infty)$ tali che la loro densità sia minore di ε, e che l'accrescimento di $F(x)$ sopra l'insieme complementare di $\{\theta_n\}$ in $(q, +\infty)$ risulti finito, si dirà che la funzione $F(x)$ tende all'∞ *quasi saltuariamente;* se ciò non accade si dirà che $F(x)$ *tende all'infinito regolarmente.*

Sussiste il seguente teorema enunciato e in parte dimostrato da G. ARMELLINI e completato simultaneamente e indipendentemente da L. TONELLI e G. SANSONE: (1)

(1) G. ARMELLINI: *Sopra un'equazione differenziale della Dinamica*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 21 (1935), pp. 111-116; L. TONELLI: *Scritti Matematici offerti a* LUIGI BERZOLARI, (Pavia, 1936), pp. 404-405; G. SANSONE: *Scritti Matematici offerti a* LUIGI BERZOLARI, (Pavia, 1936), pp. 385-403. Nel testo riportiamo la dimostrazione di ARMELLINI e TONELLI.

Se nell'equazione

$$(1) \qquad y'' + A(x)y = 0$$

$A(x)$ in $(q, +\infty)$ è positiva, non decrescente, con derivata continua, e $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$, *e se la funzione* $\log A(x)$ *tende all'infinito regolarmente, allora per qualsiasi integrale $y(x)$ della* (1) *si ha*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

Poniamo

$$(73) \qquad y'^2 + A(x)y^2 = A(x)\lambda^2,$$

con $\lambda(x) \geqslant 0$ [$\lambda(x)$ *semiampiezza osculatrice* dell'oscillazione in un istante x]; si ha

$$(74) \qquad |y(x)| \leqslant \lambda(x)$$

e il segno $=$ vale allora e allora soltanto che sia $y'(x) = 0$, cioè nei punti di massimo o di minimo di $y(x)$.

Derivando la (73) si ha

$$(75) \qquad A'(y^2 - \lambda^2)/A = d\lambda^2/dx,$$

ma si ha $A > 0$, $A' \geqslant 0$, $y^2 - \lambda^2 \leqslant 0$, perciò $d\lambda^2/dx \leqslant 0$, quindi $\lambda^2(x)$ è monotona, non crescente; anche la *successione dei massimi di $|y(x)|$ è monotona non crescente,* [cfr. anche n. 2, *c*)] e potremo porre

$$\lim_{n\to\infty} |y(x_{2n+1})| = a. \quad (^1)$$

Vogliamo dimostrare che nelle ipotesi dichiarate è $a = 0$.

Supponiamo che sia $a \neq 0$; scelto ε positivo arbitrario si può determinare un x^0 tale che per $x > x^0$ sia

$$a \leqslant \lambda(x) < a + \varepsilon;$$

(1) Con le notazioni del n. 2 *a*), $x_0, x_2, \ldots, x_{2n}, \ldots$; $x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n+1} \ldots$ indicano le ascisse in ordine crescente dei punti di massimo di $|y'(x)|$ e di $|y(x)|$; senza alterare le generalità supporremo pure $x_0 > 0$.

dalla (75) integrando tra x^0 ed x, e posto $\mu = \log A(x)$ si ha

$$\lambda^2(x) = \lambda^2(x^0) - \int_{x^0}^{x} [\lambda^2(\xi) - y^2(\xi)] \frac{A'(\xi)}{A(\xi)}\, d\xi$$

$$(76) \qquad 0 \leqslant \int_{x^0}^{x} [\lambda^2(\xi) - y^2(\xi)]\,\mu'(\xi)\,d\xi < (a+\varepsilon)^2 - a^2 = 2a\varepsilon + \varepsilon^2.$$

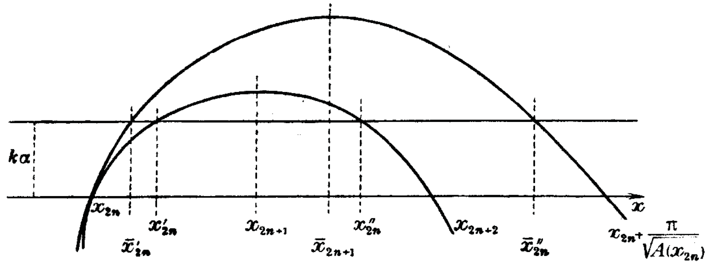

Fig. 12.

Indichiamo ora con k un numero positivo qualsiasi minore dell'unità; vi saranno dei tratti di $(q, +\infty)$, la cui somma indicheremo con A dove $|y(x)| \leqslant ka$, mentre in ciascuno dei tratti complementari di $(q, +\infty)$, la cui somma indicheremo con B, risulta (estremi dei tratti esclusi)

$$a + \varepsilon > y(x) > ka.$$

Vogliamo provare con Tonelli che *fissato $\sigma > 0$, si può determinare un k prossimo a 1 tale che la densità media di B su $(q, +\infty)$ risulti minore di σ.*

Supponiamo che in (x_{2n}, x_{2n+2}) sia $y(x) \geqslant 0$ e indichiamo con x'_{2n}, x''_{2n} i due valori di x tali che

$$x_{2n} < x'_{2n} < x''_{2n} < x_{2n+2}; \quad y(x'_{2n}) = y(x''_{2n}) = ka, \text{ (v. fig. 12).}$$

Poniamo

$$\bar{y}(x) = \frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{A(x_{2n})}} \operatorname{sen} \sqrt{A(x_{2n})}(x - x_{2n});$$

si ha in tutto (x_{2n}, x_{2n+2}), [cfr. n. 8, *b*)], $y(x) \leqslant \bar{y}(x)$.

Proveremo che fissato σ si può trovare un n_0 così grande e un k prossimo a 1 tale che per $n>n_0$ risulti

$$(x''_{2n}-x'_{2n})/(x'_{2n}-x_{2n})<\sigma,$$

Sia $\bar{x}_{2n+1}$ il punto medio di $(x_{2n},\ x_{2n}+\pi/\sqrt{A(x_{2n})})$; si ha

$$\bar{y}(x)=\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})\cos\sqrt{A(x_{2n})}\ (x-\bar{x}_{2n+1}).$$

Esiste un $\bar{x}'_{2n}<x'_{2n}$ tale che $\bar{y}(\bar{x}'_{2n})=y(x'_{2n})$,

$$ka=\bar{y}(\bar{x}'_{2n})=\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})\cos\sqrt{A(x_{2n})}(\bar{x}'_{2n}-\bar{x}_{2n+1}),$$

$$ka=\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})\left[1+\frac{A(x_{2n})(\bar{x}'_{2n}-\bar{x}_{2n+1})^2}{2}D\right] \tag{77}$$

dove D è uguale alla derivata seconda di $\cos z$ calcolata per un $\bar{z}$ compreso tra $z=0$ e $z=\sqrt{A(x_{2n})}(\bar{x}'_{2n}-\bar{x}_{2n+1})$.

È perciò $D=-\cos\bar{z}$, e $\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})D$ è compreso tra $-\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})$ e $-\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})\cos\{\sqrt{A(x_{2n})}\,(\bar{x}'_{2n}-\bar{x}_{2n+1})\}=-ka$, dunque

$$\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})D<-\bar{y}\ (\bar{x}_{2n+1})\cos\{\sqrt{A(x_{2n})}\ (\bar{x}'_{2n}-\bar{x}_{2n+1})\}.$$

Si ha così dalla (77)

$$ka<\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})-\frac{A(x_{2n})\,(\bar{x}'_{2n}-\bar{x}_{2n+1})^2}{2}\,ka,$$

$$|\bar{x}'_{2n}-\bar{x}_{2n+1}|<\frac{1}{\sqrt{A(x_{2n})}}\sqrt{2\,\frac{\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})-ka}{ka}}=\sqrt{\frac{H_n}{A(x_{2n})}}$$

con

$$H_n=2\ [\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})-ka]/ka.$$

Siccome è

$$\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})=\frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{A(x_{2n})}}\operatorname{sen}\sqrt{A(x_{2n})}(\bar{x}_{2n+1}-x_n)=\frac{y'(x_{2n})}{\sqrt{A(x_{2n})}}=\lambda^2(x_{2n})$$

e perciò $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{y}(\bar{x}_{2n+1})=a$, preso $\sigma>0$ e $<\pi$, si può fissare un k e trovare un n_0 in modo che per ogni $n>n_0$ risulti,

$$|H_n|<(\sigma/4)^2$$

si ha perciò per $n>n_0$

$$\frac{\bar{x}_{2n+1}-\bar{x}'_{2n}}{\bar{x}'_{2n}-x_{2n}}=\frac{\bar{x}_{2n+1}-\bar{x}'_{2n}}{(\bar{x}_{2n+1}-x_{2n})-(\bar{x}_{2n+1}-\bar{x}'_{2n})}<\frac{\sqrt{H_n/A(x_{2n})}}{\dfrac{\pi}{2\sqrt{A(x_n)}}-\sqrt{\dfrac{H_n}{A(x_{2n})}}}<\frac{\sigma}{\pi},$$

da cui

$$\frac{x''_{2n}-x'_{2n}}{x_2'{}_n-x_{2n}}<\frac{\bar{x}''_{2n}-\bar{x}'_{2n}}{\bar{x}'_{2n}-x_{2n}}=2\,\frac{\bar{x}_{2n+1}-\bar{x}'_{2n}}{\bar{x}'_{2n}-x_{2n}}<\sigma,$$

$$\frac{\sum\limits_{l=n_0+1}^{n}(x''_l-x'_{2l})}{x_{2n}}<\sigma\,\frac{\sum\limits_{l=n_0+1}^{n}(x'_{2l}-x_{2l})}{x_{2n}}<\sigma.$$

Si ha $\lambda^2(x)-y^2(x)\geqslant 0$, $d\mu/dx>0$, $\lambda(x)\geqslant a^2$, e in A, $|y(x)|<ka$, perciò

$$\int_{x_0}^{+\infty}[\lambda^2(x)-y^2(x)]\frac{d\mu}{dx}\,dx>\int_A[\lambda^2(x)-y^2(x)]\frac{d\mu}{dx}\,dx>a^2(1-k^2)\int_A\frac{d\mu}{dx}\,dx=$$
$$=a^2(1-k^2)\Delta_A\,\mu$$

dove $\Delta_A\,\mu$ indica l'incremento complessivo di μ nei tratti di A, e dalla (76) otteniamo

$$a^2(1-k^2)\ \Delta_A\,\mu<2a\varepsilon+\varepsilon^2;$$

segue che ad ogni σ si può associare un insieme di tratti B di $(q,+\infty)$, di densità minore di σ, tale che nei tratti dell'insieme complementare A l'incremento complessivo di μ, $\Delta_A\,\mu$, risulta finito, e ciò è assurdo, perchè $\mu=\log A(x)$ tende all'infinito regolarmente.

b) Vogliamo indicare una classe di funzioni $A(x)$, la quale include anche sottoclassi di funzioni che tendono all'infinito quasi saltuariamente, per la quale ogni integrale dell'equazione

$$y''+A(x)y=0, \tag{1}$$

soddisfa la condizione

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=0.$$

Sussiste il teorema che per brevità ci limitiamo ad enunciare [1]. *Nell'equazione* (1), *per* $x\geqslant q$ *sia* $A(x)$ *positiva, continua, non decrescente,* $A'(x)$ *continua,* $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=+\infty$. *Si considerino le*

---

[1] Cfr. G. SANSONE, lav. cit., pp. 398-399.

particolari successioni $\{t_n\}$ *di numeri positivi i quali soddisfino le condizioni*

$$t_n < t_{n+1}, \quad t_{n+1} - t_n \leqslant t_n - t_{n-1}, \quad (n=1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \, (t_{n+1} - t_n)/(t_n - t_{n-1}) = 1,$$

e si indichi con $A'(\xi_n)/A(\xi_n)$ *il minimo di* $A'(x)/A(x)$ *in* (t_n, t_{n+1}), $t_n \leqslant \xi_n \leqslant t_{n+1}$. *Se per ogni* $\{t_n\}$ *che soddisfa le condizioni dichiarate risulta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \frac{A'(\xi_n)}{A(\xi_n)} = +\infty,$$

allora per qualunque integrale $y(x)$ della (1) si avrà

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

c) Dal teorema ora ammesso vogliamo dedurre due semplicissimi criteri sufficienti. *Nell'equazione*

$$(1) \qquad y''(x) + A(x)\, y(x) = 0$$

per $x \geqslant q$ *sia* $A(x)$ *positiva, continua, non decrescente,* $A'(x)$ *continua,* $\lim_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$, *ed esistano infiniti tratti* (a_n, b_n) *di* $(q, +\infty)$

$$a_n < b_n, \quad b_n < a_{n+1}, \quad \delta_n = b_n - a_n \geqslant \delta_0 > 0, \quad (n=1, 2, \ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

tali che indicando con m_n *il minimo di* $A'(x)/A(x)$ *in* (a_n, b_n) *risulti divergente la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n m_n$ (1); *allora qualunque sia l'integrale* $y(x)$ *della* (1) *si ha*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

(1) Si possono costruire funzioni $A(x)$ le quali *tendono all'*∞ *quasi saltuariamente* e soddisfano le condizioni ora dichiarate [Cfr. G. Sansone, lav. cit., p. 401].

Presa infatti una qualunque divisione $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ che soddisfi le condizioni dichiarate in *b*), esiste un indice r_0 tale che per $r \geqslant r_0$ risulta $t_{r+1} - t_r < \delta_0/3$, e se n_0 è il primo indice n per il quale si ha $a_{n_0} > t_{r_0}$, in ogni tratto $\delta_n = (a_n, b_n)$, con $n > n_0$, cadono internamente dei tratti (t_r, t_{r+1}) la cui somma supera $\delta_n - 2\delta_0/3 \geqslant \delta_n - 2\delta_n/3 = \delta_n/3$, e la somma dei prodotti di questi tratti (t_r, t_{r+1}) per i corrispondenti fattori $A'(\xi_r)/A(\xi_r)$ supera in ogni caso $\delta_n m_n/3$; abbiamo allora che la somma della serie $\sum_{r=1}^{\infty} (t_{r+1} - t_r) \frac{A'(\xi_r)}{A(\xi_r)}$ supera la somma $\sum_{n > n_0} \delta_n m_n/3 = +\infty$, e ne viene

$$\sum_{r=1}^{\infty} (t_{r+1} - t_r) \frac{A'(\xi_r)}{A(\xi_r)} = +\infty,$$

e vale quindi il teorema enunciato in *b*).

Vale ancora il teorema: *se per* $x \geqslant q$ *è* $A(x)$ *positiva, continua, non decrescente,* $A'(x)$ *continua,* $A'(x) \geqslant l > 0$, *e* $\int_q^{+\infty} dx/A(x) = +\infty$, *allora qualunque sia l'integrale* $y(x)$ *della* (1) *si ha*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

Infatti per una divisione $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ di $(q, +\infty)$ in intervalli (t_n, t_{n+1}) non crescenti si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \frac{A'(\xi_n)}{A(\xi_n)} \geqslant l \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \frac{1}{A(t_{n+1})} =$$

$$= l \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \frac{1}{A(t_n)} - l \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \left[\frac{1}{A(t_n)} - \frac{1}{A(t_{n+1})}\right] \geqslant$$

$$\geqslant l \int_{t_1}^{+\infty} dx/A(x) - l \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \left[\frac{1}{A(t_n)} - \frac{1}{A(t_{n+1})}\right];$$

ma è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \left[\frac{1}{A(t_n)} - \frac{1}{A(t_{n+1})}\right] \leqslant (t_2 - t_1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{A(t_n)} - \frac{1}{A(t_{n+1})}\right] = \frac{t_2 - t_1}{A(t_1)},$$

e ne viene che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n) \; A'(\xi_n)/A(\xi_n)$ è divergente e vale quindi il teorema enunciato in *b*).

§ 5. - Rappresentazione asintotica degli integrali delle equazioni del secondo ordine per valori molto grandi del parametro.

1. L'equazione $y'' - (\lambda^2\chi_0 + \lambda\chi_1 + \chi_2)\, y = 0$. - 2. Formula asintotica di CARLINI per le funzioni di BESSEL di grande ordine.

1. - *a*) Nelle applicazioni avviene dover valutare asintoticamente particolari soluzioni di equazioni differenziali dipendenti da un parametro che può assumere valori grandissimi; tale è il problema del Cap. IV, § 7, allorchè abbiamo effettuato la valutazione asintotica delle funzioni di STURM-LIOUVILLE. Il punto iniziale di simili ricerche è quasi sempre la rappresentazione delle soluzioni mediante integrali; appunto con tale metodo si perviene alla rappresentazione asintotica dei polinomi di LEGENDRE, [1] di JACOBI [2], e delle funzioni di BESSEL [3] per grandi valori del parametro (ordine).

Qui ci limitiamo a riportare alcune considerazioni di H. JEFFREYS [4] le quali, nel caso in cui sia nota l'espressione formale di una soluzione di una equazione differenziale mediante una serie asintotica del parametro, consentono determinare facilmente il primo termine, mentre rimandiamo il lettore alle memorie originali per uno studio approfondito della questione [5].

---

[1] Cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di Funzioni Ortogonali*, (Bologna, 1935), pp. 149-155.

[2] Cfr. G. SZEGÖ: *Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome*. Schr. d. Königsberger Gel. Ges., 10 (1933), pp. 35-112.

[3] G. N. WATSON: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. (Cambridge, 1922), Cap. VIII; pp. 225-270.

[4] H. JEFFREYS: *a*) *On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order*. Proc. of the London Math. Soc. (2), 23 (1924), pp. 428-436; *b*) *Asymptotic solutions of linear differential equations*. Philos. Mag. (7), 21 (1936), pp. 544-546.

[5] G. D. BIRKHOFF: *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter*, Trans. of the Am. Math. Soc., 9 (1908), pp. 219-231; J. TAMARKIN: *Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions*, Math. Zeitschr., 27

b) Si abbia l'equazione differenziale

$$y'' - (\lambda^2\chi_0 + \lambda\chi_1 + \chi_2)y = 0 \tag{1}$$

dove χ_0, χ_1, χ_2 sono funzioni continue di x definite in un certo intervallo, finito o infinito, I; $\chi_0 \neq 0$; χ_1/χ_0, χ_2/χ_0 limitati in I, e λ è un parametro suscettibile di assumere valori positivi infinitamente grandi.

Supponiamo che l'equazione ammetta una soluzione della forma

$$y = \Phi e^{\lambda\omega}\left(1 + \frac{f_1}{\lambda} + \frac{f_2}{\lambda^2} + \ldots\right) \tag{2}$$

dove Φ, ω, $f_1, f_2, \ldots$ sono funzioni della sola x, complessivamente limitate in I, con derivate seconde continue, e la serie converga per $\lambda > \lambda_0$, qualunque sia x in I,

Scrivendo che la (2) soddisfa la (1), ordinando rispetto alle potenze di λ, ed uguagliando a zero i coefficienti di λ^2, λ, λ^0 troviamo:

$$\omega'^2 = \chi_0, \tag{3}$$

$$\Phi'/\Phi = (\chi_1 - \omega'')/2\omega', \tag{4}$$

$$2\omega' f'_1 = \chi_2 - \Phi''/\Phi. \tag{5}$$

La (3) dà

$$\omega = \pm \int^x \chi_0^{1/2} dx,$$

la (4)

$$\Phi = \omega'^{-1/2} e^{\int^x \chi_1/2\omega' dx}, \tag{6}$$

(1927), pp. 1-54; S. GOLDSTEIN: *a*) *A note on certain approximate solutions of linear differential equations of the second order, with an application to the Mathieu equation*, (2), Proc. of the London Math. Soc., 28 (1928), pp. 81-90: *b*) *A note on certain approximate solutions of linear differential equations of the second order*; ibid., 33 (1932), pp. 246-252: R. E. LANGER: *a*) *On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with an application to the Bessel functions of large order*, Trans. of the Am. Math. Soc., 33 (1931), pp. 23-64; *b*) ibid. 34 (1932), pp. 447-480; *c*) *The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order*; ibid., 36 (1934), pp. 90-106; W. J. TRJITZINSKY: *Theory of linear differential equations containing a parameter*, Acta Math., 67 (1936), pp. 1-50.

perciò

$$\Phi e^{\lambda\omega} = \chi_0^{-1/4} e^{\pm \int^x (\lambda \chi_0^{1/2} + \chi_1 / 2\chi_0^{1/2}) dx}, \tag{7}$$

dove per l'estremo inferiore dell'integrale si può porre un numero arbitrario.

Supponiamo $\chi_0 > 0$ in I; per $\lambda \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_0$ si avrà

$$\chi = \lambda^2 \chi_0 + \lambda \chi_1 + \chi_2 > 0, \tag{8}$$

$$\chi^{1/2} = \lambda\, \chi_0^{1/2} \left[1 + \frac{1}{\lambda}\frac{\chi_1}{\chi_0} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\chi_2}{\chi_0}\right]^{1/2} = \lambda \chi_0^{1/2} + \frac{\chi_1}{2\chi_0^{1/2}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$y = \Phi\, e^{\lambda\omega}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] = \chi_0^{-1/4} e^{\pm \int^x \chi^{1/2} dx}\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]. \tag{9$_1$}$$

Se invece è $\chi_0 < 0$ in I, si avrà per $\lambda \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_0$,

$$-\psi = \lambda^2 \chi_0 + \lambda \chi_1 + \chi_2 < 0,$$

e dalla (9$_1$), separando il reale dall'immaginario, si hanno gli gli integrali dell'equazione (2) espressi sotto forma reale

$$y(x) = |\chi_0|^{-1/4}\, [A \cos L(x) + B \operatorname{sen} L(x)] \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right], \tag{9$_2$}$$

con

$$L(x) = \int^x \psi^{1/2} dx,$$

ed A e B costanti arbitrarie.

c) I casi in cui χ_0, χ_1, χ_2 non soddisfano le condizioni dichiarate richiedono un esame più approfondito.

2. - Per applicare le cose dette passiamo a considerare l'equazione di BESSEL [Cap. III, § 6]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

arriveremo così alla formula asintotica di F. CARLINI [1], la prima stabilita in questo ordine di ricerche.

---

[1] F. CARLINI: *Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di* KEPLERO. (Milano, 1817). Questo lavoro fu tradotto in tedesco da JACOBI. Astr. Nach., XXX (1850), pp. 197-254, [Gesammelte Werke, VII, 1891, pp. 189-245].

Posto $x = n\, e^{\xi}$ otteniamo

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + n^2(e^{2\xi} - 1)\, y = 0,$$

e *se* n è *molto grande rispetto a* x, si avrà $\xi < 0, \chi = n^2(1 - e^{2\xi})$, $[\lambda = n]$, $\chi_0 = 1 - e^{2\xi}$, perciò per la (9$_1$)

$$y \sim (1 - e^{2\xi})^{-1/4}\, e^{\pm n \int^{\xi} (1 - e^{2\xi})^{1/2} d\xi};$$

ma si ha

$$n \int^x (1 - e^{2\xi})^{1/2} d\xi = n \int^x \left[1 - \frac{x^2}{n^2}\right]^{1/2} \frac{dx}{x} = \int^x \frac{\sqrt{n^2 - x^2}}{x}\, dx$$

$$= n \log \frac{x}{n + \sqrt{n^2 - x^2}} + \sqrt{n^2 - x^2},$$

quindi

$$y \sim (n^2 - x^2)^{-1/4} x^n (n + \sqrt{n^2 - x^2})^{-n} e^{\sqrt{n^2 - x^2}},$$

$$y \sim (n^2 - x^2)^{-1/4}\, x^{-n} (n + \sqrt{n^2 - x^2})^n e^{-\sqrt{n^2 - x^2}}.$$

La prima di queste differisce per il fattore $1/\sqrt{2\pi}$ dall'espressione asintotica di $J_n(x)$ di F. CARLINI [1], si ha appunto

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x^n e^{\sqrt{n^2 - x^2}}}{(n^2 - x^2)^{1/4} (n + \sqrt{n^2 - x^2})^n}.$$

---

[1] Cfr. G. N. WATSON, op. cit., p. 227.

CAPITOLO VIII.

Teoremi di esistenza e di unicità in grande per le equazioni e i sistemi differenziali.

§ 1. - Teoremi di esistenza per l'equazione $y' = f(x, y)$.

1. I punti di PEANO pes l'equazione $y' = f(x, y)$. Il fenomeno LAVRENTIEFF. - 2. Integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ definiti in intervalli finiti e aperti. - 3. Campo di esistenza delle curve integrali. - 4. Sulle curve Integrali uscenti da un punto. - 5. Integrale superiore (massimo) e integrale inferiore (minimo). Punti e fasci (pennelli) di PEANO. - 6. Regioni di continuità dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore rispetto alle coordinate del punto iniziale.

1. - *a*) Nei capitoli IV e V abbiamo approfondito i problemi di esistenza e di unicità per le equazioni e i sistemi differenziali lineari; qui vogliamo considerare problemi analoghi per le equazioni e i sistemi non lineari di forma normale.

Nel Cap. I, nello stabilire i teoremi di esistenza e di unicità ci siamo giovati della così detta condizione di LIPSCHITZ, ma nelle equazioni delle applicazioni non sempre risulta verificata questa ipotesi restrittiva, e converrà quindi elaborare teoremi più generali di esistenza e di unicità.

Gli studi in tale indirizzo traggono origine da due fondamentali memorie di PEANO [1] da noi ricordate nel n. 2 del § 6 del Cap. I a proposito della dimostrazione dell'esistenza di almeno un sistema di integrali del sistema $y'_i = f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$,

(1) G. PEANO: *a*) *Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine*, Atti R. Acc. Sc., Torino, 21 (1885-1886), pp. 437-445; *b*) *Démonstration de l'integrabilité des équations différentielles ordinaires*, Math. Ann., 37 (1890), pp. 182-228. La materia di questo capitolo, è stata oggetto di studi recenti, perciò per comodità del lettore riportiamo alla fine del capitolo un elenco bibliografico per materia.

nella sola ipotesi della continuità delle $f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$. Vedremo ora con un esempio, che la continuità delle $f_i(x; y_2, y_2, \dots, y_m)$ non è da sola atta ad assicurare l'esistenza di un solo integrale.

b) Si consideri l'equazione $y' = f(x, y)$ con $f(x, y) = |y|^{1/2}$ e si cerchino i suoi integrali soddisfacenti la condizione $y(0) = 0$ [1].

La $f(x, y)$ è continua nel piano x, y e perciò per ogni punto (x^0, y^0) passa almeno una curva integrale [Cap. I, § 6, n. 2]. Se (x^0, y^0) non appartiene all'asse x, la derivata $f_y(x, y)$ risulta limitata in un intorno di (x^0, y^0), e perciò l'equazione ammette un solo integrale passante per (x^0, y^0). Se consideriamo invece il punto $(x^0, 0)$, se a e b sono due costanti reali tali che $a \leqslant x^0 \leqslant b$, la funzione $y = y(x)$ definita dalle relazioni $y(x) = 0$ per $a \leqslant x \leqslant b$, $y(x) = \frac{1}{4}(x - b)^2$ per $x > b$, $y(x) = -\frac{1}{4}(a - x)^2$ per $x \leqslant a$, qualunque siano le costanti a e b, $[a \leqslant x^0 \leqslant b]$ soddisfa l' equazione differenziale proposta e la condizione $y(x^0) = 0$.

L'esempio considerato fa quindi manifesto che *la continuità di $f(x, y)$ nell'intorno di un punto (x^0, y^0) non basta da sola a garantire l'unicità della curva integrale dell'equazione $y' = f(x, y)$, uscente da questo punto.*

Quando data l'equazione $y' = f(x, y)$, da un punto (x^0, y^0) passano due o più integrali dell'equazione, diremo che (x^0, y^0) è un *punto di Peano*, e che in (x^0, y^0) ha luogo il *fenomeno di Peano.*

In modo analogo si definirà un punto di PEANO per un sistema differenziale.

c) si osservi che per l'equazione $y' = |y|^{1/2}$ tutti i punti dell'asse x sono punti di PEANO. Recentemente LAVRENTIEFF [2] ha trovato che si può costruire una funzione $f(x, y)$ continua nel quadrato Q: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, tale che da ogni punto (x^0, y^0) interno a Q partono almeno due curve integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$, tra loro distinte in un intorno comunque piccolo di (x^0, y^0). Si dice che nel quadrato Q ha luogo il fenomeno di *Lavrentieff.*

(1) Cfr, M. MÜLLER: *Neure Untersuchungen über den Fundamentalsatz in in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Jahr. der Deutsch. Math. Ver. 37 (1928), [pp. 33-48], p. 46.

(2) M. LAVRENTIEFF: *Sur une équation différentielle du premier ordre*, Math. Zeitschr., 23 (1925), pp. 197-209.

2. - *a*) Per studiare il comportamento delle curve integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ premetteremo alcune semplici osservazioni [1].

Sia I un insieme di punti (x, y) del piano x, y, e $f(x, y)$ sia definita in I; i punti della curva $y = \varphi(x)$, quando x varia nell'intervallo *aperto* (a, b), $-\infty < a < x < b < +\infty$, appartengano ad I; la funzione $\varphi(x)$ soddisfi l'equazione differenziale

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

e per $a < x < b$ sia $|f(x, y)| \leqslant M$. Vogliamo dimostrare che *in queste ipotesi esistono e sono finiti i due limiti*

$$A = \lim_{x \to a+0} \varphi(x), \quad B = \lim_{x \to b-0} \varphi(x). \tag{1}$$

Infatti presi comunque due punti x', x'' interni ad (a, b), esiste corrispondentemente un punto ξ interno a (x', x'') tale che

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = (x'' - x')\varphi'(\xi) = (x'' - x')f[\xi, \varphi(\xi)],$$

perciò $|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leqslant M(x'' - x')$, e dal teorema di CAUCHY seguono le (1).

b) *Sia I un dominio aperto e connesso* [ogni punto dell'insieme I è interno ad I, e presi comunque due punti P', P'' di I esiste una spezzata a lati rettilinei con gli estremi in P', P'' tutta contenuta in I], *sia FI la sua frontiera, e la funzione $f(x, y)$ risulti definita e limitata in $I + FI$, e continua in ogni punto di $I + FI$ a distanza finita.*

Se $y = \varphi(x)$, per x variabile nell'intervallo *aperto* e *finito* (a, b), $a < x < b$, soddisfa l'equazione

$$y' = f(x, y)$$

per *a*) esistono e sono finiti i due limiti $\lim_{x \to a+0} \varphi(x)$, $\lim_{x \to b-0} \varphi(x)$, e posto

$$\varphi(a) = \lim_{x \to a+0} \varphi(x), \qquad \varphi(b) = \lim_{x \to b-0} \varphi(x)$$

la $\varphi(x)$ risulta definita nell'intervallo chiuso (a, b), e ivi continua.

[1] Per la materia dei nn. 1 a 5 cfr. E. KAMKE: *Differentialgleichungen Reeller Funktionen*, (Leipzig, 1930), pp. 73-81.

Vogliamo dimostrare che esistono i due limiti

$$\lim_{h \to +0} [\varphi(a+h) - \varphi(a)]/h, \qquad \lim_{h \to +0} [\varphi(b-h) - \varphi(b)]/-h,$$

cioè le due derivate $\varphi'(a+0)$, $\varphi'(b-0)$.

I punti $[a, \varphi(a)]$, $[b, \varphi(b)]$ appartengono ad $I + FI$, e la funzione $f(x, \varphi(x))$ risulta quindi una funzione continua di x nell'intervallo chiuso (a, b). Se c è un punto interno ad (a, b) si ha per $a < x < b$,

$$\varphi(x) = \varphi(c) + \int_c^x f[x, \varphi(x)]dx;$$

a motivo della continuità di $\varphi(x)$ essa vale per $x = a$, $x = b$, e da ciò segue l'esistenza di $\varphi'(a+0)$, $\varphi'(b-0)$.

3. - *a*) Sia R un rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati, limitato dalle rette

$$x = \alpha, \quad x = \beta; \quad y - \gamma, \quad y = \delta, \quad [0 < \beta - \alpha, \ 0 < \delta - \gamma]$$

ed $f(x,y)$ *sia continua in R, il contorno incluso*; esisterà quindi un numero M tale che in ogni punto (x, y) di R si abbia $|f(x, y)| \leqslant M$.

Sia (x^0, y^0) un punto interno a R, e $y = \varphi(x)$ una curva integrale dell'equazione

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

passante per (x^0, y^0) e definita nell'intervallo *aperto* (a, b). Vogliamo dimostrare che *può determinarsi un integrale $y = \psi(x)$ della* (2), *definito in un intervallo chiuso contenente l'intervallo aperto* (a, b), *coincidente con $\varphi(x)$ in questo intervallo, e con gli estremi sul perimetro di R.*

Si consideri il rettangolo

$$R': \quad \alpha - \varrho \leqslant x \leqslant \beta + \varrho, \qquad \gamma - \varrho \leqslant y \leqslant \delta + \varrho, \qquad \varrho > 0,$$

e si definisca $f(x, y)$ nei punti (x, y) di $R' - R$ ponendo $f(x, y) = f(x', y')$, essendo in questa (x', y') il punto del perimetro di R che ha la minima distanza da (x, y). La $f(x, y)$ risulta continua in R', e si ha ancora $|f(x, y)| \leqslant M$ in R'.

Sia $\delta' = \min.\,(\varrho, \varrho/M)$, (1) e osserviamo che per il teorema dimostrato nel Cap. I, § 6, n. 2, l'esistenza di una curva integrale $y=y(x)$ della (2) passante per un punto (x^0, y^0) di R è garantita nel tratto $(x^0-\delta', x^0+\delta')$.

Ciò premesso, se la curva integrale Γ: $y=\varphi(x)$ è definita nell'intervallo *aperto* (a, b) di (α, β), per il n. 2, *b*) essa può definirsi nell'intervallo chiuso (a, b). Se l'estremo $(b, \varphi(b))$ di Γ non appartiene al perimetro di R, ove esso risulti *esterno* ad R, prenderemo di Γ quel tratto del quale l'ascissa dell'estremo destro è il massimo delle ascisse x per le quali la Γ, se x varia in (x^0, x) è tutta contenuta in R; se invece l'estremo $[b, \varphi(b)]$ è *interno* ad R, da $[b, \varphi(b)]$ parte a destra una curva integrale $\Gamma_1 : y=\varphi_1(x)$ definita nell'intervallo chiuso $[b, b+\delta']$ che in $[b, \varphi(b)]$ si raccorda con Γ (2); se l'estremo destro $[b+\delta', \varphi_1(b-\delta')]$ di Γ_1 è sul perimetro di R ci arresteremo; se esso è esterno a R considereremo di Γ_1 quel tratto uscente da $[b, \varphi(b)]$ col secondo estremo sul perimetro di R e tutto contenuto in R; se invece $[b+\delta', \varphi(b+\delta')]$ è interno a R si può costruire una curva integrale Γ_2 definita in $(b+\delta', b+2\,\delta')$ che nel punto $[b+\delta', \varphi_1(b+\delta')]$ si raccorda con Γ_1, e così continuando dopo un numero finito di passi si otterrà una curva Γ_p coll'estremo destro esterno a R o sul perimetro di R; operando analogamente a sinistra a partire dall'estremo sinistro di Γ si avrà una curva integrale della (2), $\Gamma_{-q}+\Gamma_{-q+1}+\dots+\Gamma_{-1}+\Gamma+\Gamma_1+\dots+\Gamma_p$, di cui fa parte la Γ_1, con gli estremi esterni a R o sul perimetro di R, e in ogni caso si avrà una curva integrale che ha le proprietà richieste.

b) *Sia* $f(x, y)$ *continua nel quadrato* Q

$$Q:\quad \alpha-a \leqslant x \leqslant \alpha+a, \qquad \beta-b \leqslant y \leqslant \beta+a,$$

ed $|f(x, y)|<L$ *in* Q, *e sia* $\delta=\min.\,(a/2, a/2L)$. *Si consideri il quadrato* Q'

$$Q':\quad \alpha-a/2 \leqslant x \leqslant \alpha+a/2, \qquad \beta-a/2 \leqslant y \leqslant \beta+a/2,$$

e dimostriamo che se $y=\varphi(x)$ *è una qualsiasi curva integrale dell'equazione* $y'=f(x, y)$ *passante per il punto* $(\bar{x}, \bar{y})$ *di* Q',

(1) Abbiamo già avvertito nel Cap. I, § 3, n. 4, *c*) che se $M=0$ si farà $\delta'=\varrho$.

(2) In $[b, \varphi(b)]$ le rette tangenti a Γ e Γ_1 coincidono.

o essa possiede punti di ascissa $\geqslant \bar{x}+\delta$, $[\leqslant \bar{x}-\delta]$, *o può prolungarsi in modo da rimanere curva integrale dell'equazione* (1) *possedendo punti di ascissa uguale a* $\bar{x}+\delta$, $[\bar{x}-\delta]$.

Infatti la curva integrale $y=\varphi(x)$ può supporsi per *a*) che incontri a destra il perimetro del quadrato Q'' di centro $(\bar{x}, \bar{y})$, di lato 2δ, con i lati paralleli agli assi coordinati, in un punto di coordinate $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$. Si ha

$$\bar{y}_1=\bar{y}+\int_{\bar{x}}^{\bar{x}_1} f[x, \varphi(x)]dx,$$

$$|\bar{y}_1-\bar{y}|<L\,|\bar{x}_1-\bar{x}| \leqslant La/2L=a/2 \leqslant \delta, \qquad |\bar{y}_1-\bar{y}|<\delta$$

e ciò porta che $\bar{x}_1=\bar{x}+\delta$.

c) Sia Q l'insieme dei punti appartenenti ad un numero finito di quadrati uguali, con i lati paralleli agli assi coordinati, non ricoprentisi, e tali che ognuno di essi sia adiacente ad un altro quadrato di Q almeno per un lato. Vogliamo dimostrare che sussiste la proprietà dimostrata in *a*), cioè *se* $f(x, y)$ *è continua in* Q, *fissato un punto* (x^0, y^0) *interno a* Q, *se* $y=\varphi(x)$ *è l'equazione di una curva integrale* Γ *dell'equazione* $y'=f(x, y)$, *passante per* (x^0, y^0), *essa fa parte di una curva integrale* $y=\psi(x)$ *con gli estremi sulla frontiera di* Q.

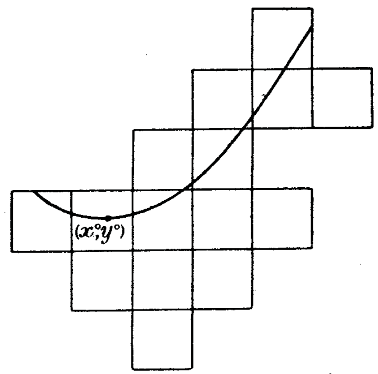

Fig. 13.

La curva integrale Γ possiamo pensarla definita in un intervallo chiuso (a, b) [n. 2, *a*)] tale che $a<x^0<b$. L'estremo $[b, \varphi(b)]$ non faccia parte della frontiera di Q; ove esso sia interno a uno dei quadrati q_1 di Q di cui due lati abbiano le ascisse $x=a$, $x=a+\varrho$,

(1) Con la locuzione *prolungamento di una curva integrale*, intendiamo che le curve ottenute rappresentino in tutto il loro corso una curva integrale dell'equazione.

se consideriamo il rettangolo R formato dai quadrati di Q adiacenti l'uno all'altro, comprendenti q, con i lati paralleli all'asse y di ascissa $x=a$, $x=a+\varrho$, possiamo prolungare la curva integrale Γ fino ad incontrare il perimetro di R. Se l'estremo destro appartiene a uno dei due lati di R paralleli all'asse x, o è un nodo della rete dei quadrati di Q, non interno a Q, il teorema è dimostrato; se esso risulta sulla retta $x=a+\varrho$, esso o è interno al lato comuue a due quadrati, q_2, q_3, uno dei quall q_2 appartenente alla striscia che ha per lati le rette $x=a$, $x=a+\varrho$, l'altro q_3 alla striscia $x=a+\varrho$, $x=a+2\varrho$, oppure è un nodo della rete dei quadrati di Q, e interno a Q.

Nel primo caso considerando il rettangolo q_2+q_3, per a), Γ può prolungarsi (internamente) nel quadrato q_3, e la stessa conclusione può aversi nel secondo caso prendendo i quattro quadrati di Q con un vertice nel nodo cousiderato. Il ragionamento avrà certo termine, essendo Q costituito da un numero finito di strisce con i lati paralleli all'asse y.

d) Sia I un insieme aperto, e Q un insieme di un numero finito di quadrati uguali, con i lati paralleli agli assi coordinati, non ricoprentisi, tali che ognuno sia adiacente ad un altro almeno per un lato, ed appartenenti ad I. Sia $f(x, y)$ continua in I, e la curva Γ: $y=\varphi(x)$ una curva integrale dell'equazione $y'=f(x, y)$ passante per il punto (x^0, y^0) interno a Q. Per c) la curva Γ può prolungarsi a destra e a sinistra in modo che i suoi estremi appartengano alla frontiera di Q; ma tali estremi risultano interni ad I e potrà quindi effettuarsi il prolungamento della curva integrale considerata a destra, e a sinistra, in guisa che essa contenga punti esterni a Q; segue che *nelle ipotesi dichiarate una qualunque curva integrale passante per un punto (x^0, y^0), interno a Q, può prolungarsi in guisa che essa contenga a destra, e a sinistra, punti esterni a Q.*

e) Un insieme di punti I formi un dominio aperto e internamente connesso del piano x, y, ed $f(x, y)$ sia continua in I.

Fissato un punto (x^0, y^0) di I, esiste almeno una curva Γ di equazione $y=\varphi(x)$, passante per (x^0, y^0), definita in un certo intervallo $(x^0-\delta, x^0+\delta)$, e soddisfacente l'equazione

$$y'=f(x, y).$$

Vogliamo dimostrare che la Γ fa parte di una curva integrale Γ_1: $y=\Phi(x)$, definita in un intervallo aperto (a, b) contenente $(x^0-\delta, x^0+\delta)$, dove

i) $b=+\infty$ $[a=-\infty]$;

ii) oppure b finito [a finito] e

$$\overline{\lim_{x\to b-0}} |\Phi(x)|=+\infty, \ [\overline{\lim_{x\to a+0}} |\Phi(x)|=+\infty];$$

iii) oppure ove sia b finito e

$$\overline{\lim_{x\to b-0}} |\Phi(x)|=\beta, \ [a \textit{ finito e } \overline{\lim_{x\to a+0}} |\Phi(x)|=\alpha]$$

per ogni $\varepsilon>0$, e comunque fissato un numero positivo τ, esistono punti di Γ, di ascissa $>b-\tau$, $[<a+\tau]$ che dalla frontiera di I hanno distanza $<\varepsilon$.

Si consideri per ogni intero positivo m l'insieme Q_m dei quadrati di lato $1/2^m$, con i lati paralleli agli assi coordinati, i cui punti soddisfino le limitazioni

$$k2^{-m} \leqslant x \leqslant (k+1)2^{-m}, \quad l2^{-m} \leqslant y \leqslant (l+1)2^{-m}; \qquad (k, l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

i quali siano contenuti in I e nel cerchio con centro nell'origine e raggio m, $(x^2+y^2 \leqslant m^2)$. La successione Q_1, Q_2,..., Q_m,.... gode la proprietà che se $m_1<m_2$, Q_{m_1}, è contenuto in Q_{m_2}.

Sia l'intero N così grande che (x^0, y^0) appartenga a Q_N; se la curva Γ è contenuta totalmente in Q_N, potremo per b) supporre che essa abbia i suoi estremi sulla frontiera di Q_N. Per d) la curva integrale Γ può prolungarsi sia a destra che a sinistra in guisa che la curva Γ_1 così ottenuta contenga dei punti esterni a Q_{n+p}, qualunque sia p. Questa circostanza porta che se la Γ_1 non è definita in $(x^0+\delta, +\infty)$, esiste un numero finito b tale che per ogni $\tau>0$ vi è una parte di Γ_1, o un prolungamento di Γ_1, definito nell'intervallo $(x^0-\delta, b-\tau)$. Se $y=\Phi(x)$ è l'equazione di Γ_1 sono ora possibili due casi: o si ha $\overline{\lim_{x\to b-0}} |\Phi(x)|=+\infty$, oppure $\overline{\lim_{x\to b-0}} |\Phi(x)|=B<\infty$, e per dimostrare il teorema ci resta da considerare quest'ultimo caso.

Sia allora

$$\underline{\lim}_{x\to b-0}\ \Phi(x)=B_1, \qquad \overline{\lim}_{x\to b-0}\ \Phi(x)=B_2\,;$$

i due punti $P_1\equiv(b, B_1)$, $P_2\equiv(b_2, B_2)$, eventualmente coincidenti, sono punti di accumulazione di I; infatti, qualunque sia $\tau>0$, il punto $[b-\tau,\ \Phi(b-\tau)]$ appartiene ad I.

Evidentemente P_1 e P_2 non sono esterni ad I; ed è facile persuadersi che non possono essere neppure interni ad I. Infatti se P_1 ad esempio fosse interno ad I, si potrebbe costruire un quadrato Q di centro in P_1, con i lati paralleli agli assi, contenuto in I. Si può come in b) determinare un quadrato Q' concentrico a Q, con i lati paralleli agli assi, e un numero $\delta>0$ tale, che se una curva integrale passa per un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di Q', essa potrà definirsi in $(\bar{x}, \bar{x}+\delta)$, e questa circostanza porta appunto che la curva integrale deve contenere punti di ascissa $>b$.

I punti P_1 e P_2 sono dunque punti frontiera di I e il teorema è dimostrato.

f) Dal teorema dimostrato in *e*) segue che *se $f(x, y)$ è una funzione continua in un dominio chiuso, connesso e limitato I, ogni curva integrale dell'equazione $y'=f(x, y)$ che non ha gli estremi sulla frontiera di I, può prolungarsi fino alla frontiera di I.*

4. - Dedicheremo questo numero e il seguente n. 5 all'analisi delle curve integrali uscenti da un punto.

Sia $f(x, y)$ continua nel campo aperto e connesso I, e da un punto (ξ^0, η^0) partano almeno due curve integrali Γ_1 e Γ_2 della equazione $y'=f(x, y)$;

$$\Gamma_1:\ y=\varphi(y)\,; \qquad \Gamma_2:\ y=\psi(x),$$

definite nel tratto (ξ^0, b), $\xi^0\leqslant x\leqslant b$.

Poichè $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ soddisfano entrambe l'equazione proposta, le Γ_1 e Γ_2 nei punti in comune *si toccano.* Consideriamo il campo S formato dei punti (x, y) le cui coordinate x, y soddisfano rispettivamente le limitazioni

$$\xi^0\leqslant x\leqslant b\,; \qquad \text{Min.}\ \{\varphi(x),\ \psi(x)\}\leqslant y\leqslant\ \text{Max.}\ \{\varphi(x),\ \psi(x)\}\,;$$

vogliamo dimostrare che *se (x^0, y^0) appartiene ad S, ed è distinto da (ξ^0, η^0), vi è almeno una curva integrale dell'equazione, congiungente i due punti (ξ^0, η^0), (x^0, y^0).*

Se $\varphi(x^0)=\psi(x^0)$ il teorema è evidente; supponiamo ad es. $\varphi(x^0)<\psi(x^0)$. Sia ξ^* l'estremo superiore delle ascisse ξ dei punti comuni a Γ_1 Γ_2, tali che $\xi^0<\xi<x^0$; si avrà $\varphi(\xi^*)=\psi(\xi^*)$, e

$$\varphi'(\xi^*)=f[\xi^*,\ \varphi(\xi^*)]=f[\xi^*,\ \psi(\xi^*)]=\psi'(\xi^*).$$

È anche $\xi^*<x^0$ e per $\xi^*<x\leqslant x^0$ si ha $\varphi(x)\neq\psi(x)$ e perciò $\varphi(x)<\psi(x)$. Se C è il campo limitato dalle due curve

$$y=\varphi(x), \qquad y=\psi(x), \qquad (\xi^*\leqslant x\leqslant x^0),$$

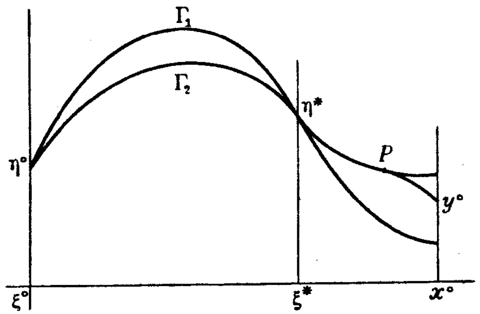

Fig. 14.

e dalla retta $x=x^0$, la $f(x, y)$ è ivi continua e limitata.

Una curva integrale Γ_3 uscente a sinistra da (x^0, y^0) o tocca la Γ_1 in un punto P con l'ascissa compresa tra ξ^* e x^0, e l'integrale cercato si compone allora del tratto di Γ_1 congiungente $(\xi^0\,\eta^0)$ con P e del tratto di Γ_3 con gli estremi in P e (x^0, y^0); e la stessa conclusione vale se Γ_3 tocca Γ_2 in un punto di ascissa compresa tra ξ^* e x^0, o se Γ_3 tocca Γ_1 e Γ_2 nel punto $[\xi^*,\ \varphi(\xi^*)]$.

5. - *a*) Sia $f(x, y)$ continua nel dominio aperto e connesso I, e sia

$$\Gamma_1:\ y=G(x) \qquad [\Gamma_2:\ y=g(x)]$$

una curva integrale dell'equazione

$$y'=f(x, y), \tag{2}$$

uscente se (x^0, y^0) e con gli estremi sulla frontiera FI di I. Se confrontando i suoi punti $[x, G(x)]$ $[[x, g(x)]]$ con i punti $[x, \varphi(x)]$

di uguale ascissa di ogni altra curva integrale $y=\varphi(x)$ della (2) uscente da (x^0, y^0) si ha

$$\varphi(x) \leqslant G(x), \qquad [g(x) \leqslant \varphi(x)],$$

si dirà che $G(x)$ $[g(x)]$ è l'*integrale superiore* o *massimo* [*inferiore o minimo*] dell'equazione (2) relativo al punto (x^0, y^0). (1).

b) Sussiste il teorema: *Se $f(x, y)$ è continua nel dominio aperto e connesso I, per ogni punto (x^0, y^0) di I passano due integrali, uno superiore, e uno inferiore, e tali integrali si avvicinano alla frontiera di I nel senso dichiarato nel* n. 3, *e*).

Sia Q un quadrato, con centro in (x^0, y^0), contenuto in I, con i lati paralleli agli assi coordinati e di lunghezza $2a$. Poichè $f(x, y)$ è continua in Q esiste un numero positivo L tale che $|f(x, y)|<L$, e porremo al solito $\delta=\min.\,(a, a/L)$. Sia $y=\varphi(x)$ una curva integrale della (2) passante per il punto (x^0, y^0); potrà supporsi che essa abbia i suoi estremi sul perimetro di Q, e poichè ragionando come nel n. 3 *b*) per $|x-x^0|\leqslant\delta$ si ha

$$|y(x)-y^0|=\left|\int_{x_0}^{x} f[x, \varphi(x)]\,dx\right| < L\,|x-x^0| < a,$$

segue che qualunque curva integrale della (2) passante per (x^0, y^0) ha almeno per campo di esistenza l'intervallo $(x^0-\delta, x^0+\delta)$, e taglia perciò qualsiasi retta parallela dell'asse y, la cui ascissa sia compresa tra $x^0-\delta$ e $x^0+\delta$.

Si consideri l'insieme numerico formato dai valori che assumono tutti gli integrali della (2) uscenti da (x^0, y^0) nei punti di ascissa x, con $x^0-\delta\leqslant x\leqslant x^0+\delta$, e siano $G(x)$, $g(x)$ l'estremo superiore e l'estremo inferiore di tale insieme, proveremo che per x variabile in $(x^0-\delta, x^0+\delta)$ si ha

$$G'(x)=f(x, G(x)], \qquad y'(x)=f(x, g(x)).$$

Poniamo per ogni intero positivo m

$$x_{m,k}=x^0+\delta 2^{-m}k, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2^m);$$

(1) L'integrale superiore e l'integrale inferiore sono stati considerati la prima volta da G. Peano [Cfr. le memorie citate ai n. 1, *a*)].

per ogni m e per ogni k, esiste corrispondentemente una curva integrale $y=\varphi_{m,k}(x)$, [uscente da (x^0, y^0)], tale che

$$0\leqslant G(x_{m,k})-\varphi_{m,k}(x_{m,k})<1/m;$$

e definita la funzione $\varphi_m(x)$ in $(x^0-\delta, x^0+\delta)$, ponendo

$$\varphi_m(x)=\max_{|k|\leqslant 2^m}.\ \varphi_{m,k}(x),$$

si avrà

$$(3)\quad 0\leqslant G(x_{m,k})-\varphi_m(x_{m,k})<1/m, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2^m).$$

Le funzioni $\varphi_m(x)$ sono definite in $(x^0-\delta, x^0+\delta)$, e soddisfano ivi l'equazione differenziale

$$(4)\qquad \varphi'_m(x)=f[x, \varphi_m(x)], \quad (m=1, 2, \ldots).$$

Infatti fissato x, sia

$$\varphi_m(x)=\varphi_{m,k_1}(x)=\ldots=\varphi_{m,k_s}(x)>\varphi_{m,l}(x) \text{ per } l\neq k_1, k_2, \ldots, k_s;$$

e perciò

$$(5)\qquad \varphi'_{m,k_1}(x)=\varphi'_{m,k_2}(x)=\ldots=\varphi'_{m,k_s}(x).$$

Può determinarsi un intervallo $(x-\varrho, x+\varrho)$ tale che per ogni $x+h$ di questo intervallo si abbia

$$\varphi_{m,k_i}(x+h)>\varphi_{m,l}(x+h), \quad (i=1, 2, \ldots, s; \quad l\neq k_1, k_2, \ldots, k_s),$$

e per tali valori $x+h$ si avrà

$$\varphi_m(x+h)=\max.\,[\varphi_{m,k_1}(x+h), \varphi_{m,k_2}(x+h), \ldots, \varphi_{m,k_s}(x+h)].$$

Per ogni h, il rapporto incrementale $[\varphi_m(x+h)-\varphi_m(x)]/h$ è uguale ad uno almeno dei rapporti incrementali

$$[\varphi_{m,k_i}(x+h)-\varphi_{m,k_i}(x)]/h, \quad (i=1, 2, \ldots, s),$$

e a motivo delle (5) si ha allora $\varphi'_m(x)=\varphi'_{m,k_i}(x)$, $(i=1, 2, \ldots, s)$, e vale quindi la (4).

Si ha $y^0-a\leqslant\varphi_m(x)\leqslant y^0+a$, perciò *le $\varphi_m(x)$ sono ugualmente limitate in* $(x^0-\delta, x^0+\delta)$, e a motivo delle (4) *ugualmente continue.*

Si osservi che

$$x_{m+r,2^r k}=x^0+\delta 2^{-(m+r)}\,2^r k=x_{m,k},$$

e perciò dalla (3)

$$0 \leqslant G(x_{m,k}) - \varphi_{m+r}(x_{m,k}) < 1/(m+r),$$

e facendo tendere $r \to +\infty$ segue che $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_{m,k})$ esiste, cioè la successione $\{\varphi_n(x)\}$ converge in un insieme di punti ovunque denso in $(x^0-\delta, x^0+\delta)$, essa converge quindi uniformemente verso una funzione continua $\overline{G}(x)$ (¹), e nei punti $x_{m,k}$ si ha

$$\overline{G}(x_{m,k}) = G(x_{m,k}) \tag{6}$$

e in ogni altro punto ξ di $(x^0-\delta, x^0+\delta)$, $\overline{G}(\xi) \leqslant G(\xi)$.

Per provare che qualunque sia ξ di $(x^0-\delta, x^0+\delta)$ si ha $\overline{G}(\xi) = G(\xi)$ ragioniamo per assurdo. In un punto ξ si abbia $\overline{G}(\xi) < G(\xi)$, e sia $y = \varphi(x)$ un integrale della (2) passante per (x^0, y^0) tale che

$$\overline{G}(\xi) < \varphi(\xi) < G(\xi)\,; \quad (^2)$$

a motivo della continuità di $\overline{G}(x)$ e $\varphi(x)$, esiste un $x_{m,k}$ tale che

$$\overline{G}(x_{m,k}) < \varphi(x_{m,k}), \quad \text{ma} \quad \varphi(x_{m,k}) \leqslant G(x_{m,k}),$$

perciò $\overline{G}(x_{m,k}) < G(x_{m,k})$ e ciò è contro la (6).

Si ha allora che la successione $\{\varphi_m(x)\}$ converge uniformemente in $(x^0-\delta, x^0+\delta)$ verso $G(x)$, ma dalla (4) si ha

$$\varphi_m(x) = \varphi_m(x^0) + \int_{x^0}^{x} f[x, \varphi_m(x)]dx,$$

e passando al limite per $m \to \infty$

$$G(x) = G(x^0) + \int_{x^0}^{x} f[x, G(x)]dx$$

ossia $G'(x) = f[x, G(x)]$, e *l'esistenza dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore, tra gli integrali dell'equazione* (2), *uscenti da* (x^0, y^0), *e aventi per campo di esistenza l'intervallo* $(x^0, x^0+\delta)$ *è quindi dimostrata* (³).

(¹) Cfr. Cap. I, § 6, n. 2; nota, *d*).
(²) Cfr. n. 4.
(³) Ugualmente si ragionerà nel tratto $(x^0-\delta, x^0)$.

Resta da provare che l'integrale superiore può prolungarsi, conservando la sua caratteristica di integrale superiore, fino alla frontiera di I (nel senso dichiarato al n. 3, *e*).

Noi abbiamo costruito l'integrale superiore nel tratto $(x^0, x^0+\delta)$; ove avvenga che il punto $[x^0+\delta, G(x^0+\delta)]$ sia interno ad I, si consideri l'integrale superiore Γ_1: $y = G_1(x)$ dell'equazione (2) uscente a destra di $[x^0+\delta, G(x^0+\delta)]$. Se $y = \gamma(x)$ è un integrale della (2), uscente da (x^0, y^0), definito anche per $x > x^0+\delta$ si vede che per un valore $\bar{x}$ per il quale risultano definiti simultaneamente $G_1(x)$, $\gamma(x)$ risulta $\gamma(\bar{x}) \leqslant G_1(\bar{x})$. Ciò è immediato se $\gamma(x^0+\delta) = G_1(x^0+\delta)$; quando sia $\gamma(x^0+\delta) < G_1(x^0+\delta)$, supposto per assurdo $\gamma(\bar{x}) > G_1(\bar{x})$, esisterà un punto ξ compreso tra $x^0+\delta$ e $\bar{x}$ ove le due curve Γ_1 e $y = \gamma(x)$ si toccano; sostituendo al tratto di curva Γ_1 che parte da $(\xi, G_1(\xi))$ il corrispondente tratto di $y = \gamma(x)$, si ottiene ancora una curva integrale della (2) uscente dal punto $(x^0+\delta, G_1(x^0+\delta))$ e di questa il punto $(\bar{x}, \gamma(\bar{x}))$ ha ordinata maggiore dell'ordinata del punto $(\bar{x}, G_1(\bar{x}))$, e allora $y = G_1(x)$ non è l'integrale superiore degli integrali uscenti a destra da $(x^0+\delta, G(x^0+\delta))$.

Abbiamo dunque che se l'integrale $y = G(x)$ ha l'estremo destro interno ad I, esso può prolungarsi, conservando la proprietà di rimanere l'integrale superiore di tutte le curve integrali uscenti da (x^0, y^0); segue allora che esso avrà o per campo di esistenza $(x^0, +\infty)$ e il teorema è dimostrato, oppure detto con b l'estremo superiore dei numeri $x^0+\delta'$ per i quali $G(x)$ ha in $(x^0, x^0+\delta')$ la proprietà dichiarata, è $\lim\limits_{x\to b-0} |G(x)| = +\infty$ e il teorema è ancora dimostrato, e rimane infine da considerare il caso che $\varlimsup\limits_{x\to b-0} |G(x)| < +\infty$.

Se poniamo in tal caso

$$\varliminf_{x\to b-0} G(x) = B_1, \qquad \varlimsup_{x\to b-0} G(x) = B_2,$$

e teniamo conto del risultato del n. 3 *b*), (¹) concludiamo che i due punti (b, B_1), (b, B_2), eventualmente coincidenti, non sono

(¹) Con le denominazioni del n. 3 *b*) si dirà che se l'integrale superiore passa per un punto di Q', di ascissa $\bar{x}$, esso esiste o può prolungarsi a destra, rimanendo integrate superiore, in un intervallo $(\bar{x}, \bar{x}+\delta)$, dove δ è un numero fisso.

interni ad I, e perciò non potendo risultare esterni ad I appartengono alla sua frontiera.

c) In un punto (x^0, y^0) convien consiederare i due *integrali superiore e inferiore a destra,* e i due *integrali superiore* e *inferiore a sinistra.*

Quando i due integrali superiore e inferiore, a destra e a sinistra, coincidono, l'equazione (2) ammette uno e un solo integrale passante per $(x^0\, y^0)$, ma giova osservare che possono coincidere i due integrali superiore e inferiore a destra [a sinistra] senza che coincidano quelli a sinistra [a destra] o come si dice l'integrale si *biforca* a sinistra [a destra].

In generale quando da una certa parte di un punto (x^0, y^0), gli integrali non coincidono si dirà che essi formano un *fascio* (pennello) di PEANO.

Le curve integrali del fascio di PEANO *sono limitate dall'integrale superiore e dall'integrale inferiore.*

d) Notiamo che se nell'equazione $y'=f(x, y)$, la $f(x, y)$ è continua nel rettangolo R: $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha+a$, $|y-\beta| \leqslant b$, e in R si ha max. $|f(x, y)|=M$, l'integrale superiore e l'integrale inferiore dell'equazione $y'=f(x, y)$ uscenti da (α, β) *hanno almeno per campo di esistenza l'intervallo* $(\alpha, \alpha+\delta)$, *con* $\delta=\min (a, b/M)$. Infatti se $\delta_1=\min. (a, b/M+\tau)$ con $\tau \geqslant 0$, per le cose dette inizialmente in *a*) tali integrali esistono in $(\alpha, \alpha+\delta_1)$, e siccome $\lim\limits_{\tau\to 0} \delta_1=\delta$, per i ragionamenti del n. 2 segue che essi esistono in $(\alpha, \alpha+\delta)$.

6. - *a*) In questo numero studieremo la dipendenza dell'integrale superiore e dell'integrale inferiore dai valori iniziali [1]. Sia $f(x, y)$ continua nell'insieme aperto e connesso I, e siano $y=G(x)$, $y=g(x)$ rispettivamente l'integrale superiore e l'integrale dell'equazione $y'=f(x, y)$ passanti per il punto (x^0, y^0).

Fissato un punto $[x, G(x)]$, $[[x, g(x)]]$, tutti i punti (x, y) di I, colla medesima ascissa $\bar{x}$, tali che $y>G(x)$, $[y<g(x)]$, si dice che

(1) Cfr. P. MONTEL: *Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle,* Bull. des Sciences Mathém. 50 (1926), pp. 205-217.

appartengono alla *regione superiore* [inferiore] dell'integrale $y=G(x)$, $[y=g(x)]$.

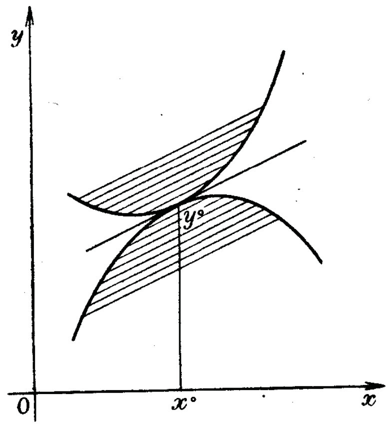

Fig. 15.

b) Sia $f(x, y)$ continua nel rettangolo R

$$R: \quad |x-\alpha| \leqslant a, \qquad |y-\beta| \leqslant b,$$

$y=G(x)$, $[y=g(x)]$ l'integrale superiore dell'equazione

$$(2) \qquad y'=f(x, y)$$

uscente da (α, β) e

$$(x_1, y_1), \qquad (x_2, y_2), \ldots, \qquad (x_n, y_n), \ldots$$

una successione di punti di R, *appartenenti alla regione superiore di* $y=G(x)$ [inferiore di $y=g(x)$], *tale che*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n)=(\alpha, \beta), \qquad [\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha, \lim_{n\to\infty} y_n=\beta].$$

Si abbia in R, $|f(x, y)| \leqslant M$, sia $\delta=\min. (a, b/4M)$, e si consideri il rettangolo R_1 definito dalle limitazioni

$$R_1: \quad |x-\alpha| \leqslant \delta, \qquad |y-\beta| \leqslant b/2.$$

Senza alterare le generalità possiamo supporre che i punti (x_n, y_n), $(n=1, 2, \ldots)$, appartengano ad R_1.

Se $y=G_n(x)$ $[y=g_n(x)]$ è l'integrale superiore [inferiore] della (2) uscente da (x_n, y_n)

$$G_n(x_n)=y_n \qquad [y(x_2)=y_n]$$

esso è definito *almeno* in $(a-\delta,\ a+\delta)$, e noi *vogliamo dimostrare che la successione* $\{G_n(x)\}$ $[\{g_n(x)\}]$ *converge in* $(a-\delta, a+\delta)$, *uniformemente verso* $G(x)$ $[g(x)]$ (1).

Sia x in $(a-\delta,\ \beta+\delta)$; se ripetiamo il ragionamento del n. 5 *b*) a proposito del prolungamento dell'integrale superiore avremo:

$$(7) \qquad G_n(x) \geqslant G(x), \qquad [a-\delta \leqslant x \leqslant a+\delta].$$

Si ha d'altra parte $|\beta-G_n(x)| \leqslant b$, $|G'_n(x)|=|f(x,\ G_n(x)| \leqslant M$, perciò le $G_n(x)$ sono ugualmente continue, ed ugualmente limitate in $(a-\delta,\ a+\delta)$, e per il teorema di ASCOLI [Cap. I, § 6, n. 2, nota *c*)] si può estrarre una successione

$$G_{\lambda_1}(x),\ G_{\lambda_2}(x),\dots,\ G_{\lambda_n}(x),\dots \qquad (\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n<\dots)$$

la quale converge *uniformemente* verso una funzione $\overline{G}(x)$ tale che [cfr. n. 5, *b*)]

$$\overline{G}'(x)=f(x,\ \overline{G}(x));$$

e per le (7)

$$(8) \qquad \overline{G}(x) \geqslant G(x).$$

Si ha

$$|\overline{G}(a)-\beta| \leqslant |\overline{G}(a)-\overline{G}(x_{\lambda_n})|+|\overline{G}(x_{\lambda_n})-G_{\lambda_n}(x_{\lambda_n})|+|y_{\lambda_n}-\beta|$$

e poichè

$$\lim_{\lambda_n\to\infty}|\overline{G}(a)-\overline{G}(x_{\lambda_n})|=0,\ \lim_{\lambda_n\to\infty}|\overline{G}(x_{\lambda_n})-G_{\lambda_n}(x_{\lambda_n})|=0,\ \lim_{\lambda_n\to\infty}|y_{\lambda_n}-\beta|=0$$

si ha $\overline{G}(a)=\beta$, quindi $y=\overline{G}(x)$ è un integrale della (2) passante per il punto (a, β), e siccome $G(x)$ è l'integrale superiore per (a, β), dalla (8) segue $\overline{G}(x)=G(x)$.

(1) Cfr. P. MONTEL, lav. cit. in *a*), p. 207. Ove si tolga la restrizione che i punti (x_n, y_n) appartengano alla regione superiore a $G(x)$, il teorema può non essere vero. Cfr. L. TONELLI: *Sulla unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), I (1925), pp. 272-277.

Dimostriamo ora che qualunque sia il punto ξ di $(a-\delta,\ a+\delta)$ è

$$\lim_{n\to\infty} G_n(\xi)=G(\xi).$$

Infatti, ove quest'ultima non sia verificata, l'insieme numerico $\{G_n(\xi)\}$, a motivo della (7), deve ammettere almeno un valore limite $>G(\xi)$, e può estrarsi quindi una successione $G_{\mu_1}(\xi),\dots,\ G_{\mu_p}(\xi),\dots$ tale che $|G_{\mu_p}(\xi)-G(\xi)|>\varepsilon>0$.

Ma ciò è assurdo, perchè dalla successione $G_{\mu_1}(x),\dots,\ G_{\mu_p}(x),\dots$, per le cose dette, possiamo estrarne una, convergente in tutto $(a-\delta,\ a+\delta)$ verso $G(x)$, e ciò accadrà in particolare nel punto ξ.

Osserviamo infine che essendo le $G_n(x)$ ugualmente continue e ugualmente limitate in $(a-\delta,\ a+\delta)$, per un noto teorema [Cap. I, § 6, n. 2, nota *d*)] la successione $\{G_n(x)\}$ converge uniformemente verso $G(x)$ in $(a-\delta,\ a+\delta)$.

c) Dal teorema dimostrato si trae un importante conseguenza.

Sia $f(x, y)$ continua nel rettangolo R

$$R: \quad |x-a| \leqslant a, \qquad |y-\beta| \leqslant b,$$

e da ogni punto (x^0, y^0) interno ad R passi *un solo* integrale dell'equazione $y'=f(x, y)$. Indicando tale integrale con $y=\varphi(x;\ x^0,\ y^0)$, *vogliamo dimostrare che* $\varphi(x;\ x^0,\ y^0)$ *è una funzione continua di* (x^0, y^0).

Possiamo considerare un rettangolo R' con centro in (x^0, y^0), con i lati paralleli agli assi coordinati, tale che da ogni punto (ξ, η) di R' passi una curva integrale dell'equazione $y'=f(x, y)$ definita in $(x^0-\delta,\ x^0+\delta)$.

Sia $\sigma>0$ e arbitrario, e osserviamo che in conseguenza del teorema dimostrato, e per il fatto che due integrali passanti per due punti distinti di R' non possono avere punti a comune in R, si ha che si possono trovare due numeri y_n, $\overline{y}_n$ tali che sia $y^0+\delta>y_n>y^0>\overline{y}_n>y^0-\delta$ e per qualsiasi x di $(x^0-\delta,\ x^0+\delta)$ risulti

$$0<\varphi(x;\ x^0, y_n)-\varphi(x;\ x^0, y^0)<\sigma;\quad 0<\varphi(x;\ x^0, y^0)-\varphi(x;\ x^0, \overline{y}_n)<\sigma,$$

Se (ξ, η) è un punto qualsiasi del cerchio C con centro in (x^0, y^0), interno tanto ad R' che al dominio limitato dalle due curve

$$y=\varphi(x;\ x^0,\ y_n); \qquad y=\varphi(x;\ x^0,\ \overline{y}_n)$$

si ha

$$\varphi(x;\ x^0,\ y_n)>\varphi(x;\ \xi,\ \eta)>\varphi(x;\ x^0,\ \overline{y}_n)$$

e *perciò per i considerati punti* (ξ, η), *e per* x *in* $(x^0-\delta, x^0+\delta)$, *risulta*

$$\varphi(x;\ x^0, y^0)+\sigma>\varphi(x;\ \xi, \eta)>\varphi(x;\ x^0, y^0)-\sigma$$

$$|\varphi(x;\ \xi, \eta)-\varphi(x;\ x^0, y^0)|<\sigma. \qquad \text{c. v. d.} \quad (^1)$$

La proposizione ora provata estende il teorema di continuità degli integrali rispetto ai valori iniziali da noi dimostrato nel Cap. I, § 5, n. 1, con l' ipotesi restrittiva che la $f(x, y)$ fosse lipschitziana rispetto a y.

§ 2. - Teoremi di confronto e teoremi di unicità per l'equazione $y'=f(x, y)$.

1. Un teorema di passaggio al limite per gli integrali delle equazioni differenziali $y_n'=f_n(x, y)$. - 2. Un primo teorema di confronto per le equazioni differenziali del primo ordine. - 3. Un secondo teorema di confronto. - 4. Valutazione del divario tra due integrali uscenti da un medesimo punto. Teorema di Bompiani - Tonelli - Montel. - 5. Teoremi di unicità di Peano, Tonelli, Osgood e Tamarkine. - 6. Teorema di esistenza e di unicità di Rosenblatt, Nagumo e Perron. - 7. Teoremi di esistenza e di unicità di Rosenblatt e Scorza-Dragoni. - 8. Sulla limitazione del fascio delle curve integrali per un punto. Teorema di Peano-Perron.

1. - Sia $\{f_n(x, y)\}$ una successione di funzioni definite in un *insieme chiuso e limitato* I, e ciascuna delle equazioni

$$y'_n=f_n(x, y), \qquad (n=1, 2,....)$$

ammetta almeno una curva integrale $y=\varphi_n(x)$, definita in $(a-\delta, a+\delta)$, passante per il punto (a, β), sia cioè

$$\varphi_n'(x)=f_n[x, \varphi_n(x)] \qquad [a-\delta\leqslant x\leqslant a+\delta,\ \varphi_n(a)=\beta].$$

Vogliamo dimostrare che *se la successione* $\{f_n(x, y)\}$, *converge uniformemente in* I *verso una funzione continua* $f(x, y)$, *dalla*

(1) Per una dimostrazione diretta, dell'ipotesi della univocità dell'integrale, cfr. E. Pini: *Sulla continuità degli integrali dell'equazione* $y'=f(x,y,\gamma)$ *rispetto ai valori iniziali*, Rend. R. Istit. Lombardo Sc. e Lett., (2), 63 (1930), pp. 531-534.

successione $\{\varphi_n(x)\}$ *può estrarsi una successione parziale la quale converge uniformemente in* $(a-\delta, a+\delta)$ *verso una funzione* $\varphi(x)$ *che soddisfa l'equazione*

$$\varphi'(x)=f[x, \varphi(x)].$$

Sia in I, max. $|f(x, y)|=M<L$; esiste un n_0 tale che per $n>n_0$ risulta in I, $|f_n(x,y)-f(x,y)|<L-M$, perciò per $n>n_0$, $|f_n(x,y)|<L$, e senza alterare le generalità supporremo

$$|f_n(x, y)|<L \qquad (n=1, 2,....).$$

Poichè $|\varphi'_n(x)|=|f_n(x, \varphi_n(x))|<L$, le funzioni della successione $\{\varphi_n(x)\}$ sono ugualmente continue e ugualmente limitate, e per il teorema di Ascoli [Cap. I, § 6, n. 2, nota *c*)] si può estrarre una successione

$$\varphi_{\lambda_1}(x),\quad \varphi_{\lambda_2}(x),....,\quad \varphi_{\lambda_p}(x),.... \qquad (\lambda_1<\lambda_2<....<\lambda_p<....)$$

convergente uniformemente in $(a-\delta, a+\delta)$ verso una funzione $\varphi(x)$.

Fissato $\varepsilon>0$, si può determinare un N_0 in modo che per $n>N_0$ sia in I

$$|f(x, y)-f_n(x, y)|<\varepsilon, \quad (n>N_0)$$

e per la continuità di $f(x, y)$ in I si può determinare un numero positivo ϱ tale che per $|y''-y'|<\varrho$ risulti, qualunque sia x,

$$|f(x, y')-f(x, y'')|<\varepsilon.$$

Si può fissare un N_1 tale che per $\lambda_p>N_1$ sia in $(a-\delta, a+\delta)$

$$|\varphi_{\lambda_p}(x)-\varphi(x)|<\varrho \qquad (\lambda_p>N_1),$$

e perciò per $\lambda_p>N_0$, N_1 si ha

$$|f(x, \varphi_{\lambda_p}(x))-f_{\lambda_p}(x, \varphi_{\lambda_p}(x))|<\varepsilon, \quad |f(x, \varphi(x))-f(x, \varphi_{\lambda_p}(x))|<\varepsilon,$$

quindi

$$|f(x, \varphi(x))-f_{\lambda_p}(x, \varphi_{\lambda_p}(x))|<2\varepsilon, \quad |f(x, \varphi(x))-\varphi'_{\lambda_p}(x)|<2\varepsilon,$$

e perciò la successione $\{\varphi'_{\lambda_p}(x)\}$ converge in $(a-\delta, a+\delta)$ uniformemente verso $f(x, \varphi(x))$; ma per il noto teorema di derivazione per serie, la convergenza uniforme di $\{\varphi'_{\lambda_p}(x)\}$ implica che $\varphi(x)$ è derivabile e

$$\lim_{p\to\infty} \varphi'_{\lambda_p}(x) = \varphi'(x),$$

perciò $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Avendosi d'altra parte $\varphi_{\lambda_p}(a) = \beta$, risulta $\varphi(a) = \beta$, e il teorema è dimostrato.

2. - *a*) Possiamo ora stabilire un primo teorema di confronto per le equazioni differenziali del primo ordine.

Le funzioni $f(x, y)$, $F(x, y)$ *siano definite nel rettangolo* R

(1) $$R: \quad a \leqslant x \leqslant a + \alpha, \quad |\beta - y| \leqslant b,$$

e ivi soddisfino la disuguaglianza

(2) $$f(x, y) < F(x, y).$$

Se due funzioni $y(x)$ *e* $Y(x)$, *continue e derivabili in* $(a, a+\delta)$, $[\delta > 0,\ \delta \leqslant \alpha]$, *soddisfano in* $(a, a+\delta)$ *le equazioni*

$$y'(x) = f[x, y(x)], \quad Y'(x) = F[x, Y(x)],$$

e le condizioni iniziali

$$y(a) = \beta, \quad Y(a) = \beta,$$

si ha allora

$$y(x) < Y(x) \quad \text{per} \quad a < x \leqslant a + \delta. \quad (^1)$$

Consideriamo infatti la funzione $z(x) = Y(x) - y(x)$; si ha

$$z(a) = 0, \quad z'(a) = Y'(a) - y'(a) = F(a, \beta) - f(a, \beta) > 0,$$

e perciò $z(x)$ in un intorno a destra di $x = a$ è positiva e crescente. Poichè $z(x)$ è continua in $(a, a+\delta)$, ove non sia sempre per $x > a$,

---

(1) Si ha pure: *se le funzioni* $f(x, y)$, $F(x, y)$ *sono definite nel rettangolo* R

$$R: \quad a - \alpha \leqq x \leqq a, \qquad |\beta - y| \leqq b,$$

e ivi soddisfano la limitazione $f(x, y) < F(x, y)$, *se* $y(x)$ ed $Y(x)$ *sono definite in* $(a - \delta, a)$, $[\delta > 0,\ \delta \leqq \alpha]$ *e ivi soddisfano le equazioni* $y'(x) = f[x, y(x)]$, $Y'(x) = F[x, Y(x)]$, *e le condizioni iniziali* $y(a) = Y(a) = \beta$, *si ha allora* $y(x) > Y(x)$. La dimostrazione è analoga a quella del testo.

$z(x) > 0$, vi sarà un punto a_1, $a < a_1 < a + \delta$, ove $z(a_1) = 0$, mentre sarà $z(x) > 0$ per $a < x < a_1$. Risulterà in a_1,

$$z'(a_1) = Y'(a_1) - y'(a_1) = F[a_1, Y(a_1)] - f[a_1, y(a_1)] \leqslant 0$$

e ciò è assurdo, perchè avendosi $Y(a_1) = y(a_1)$, è per ipotesi

$$F[a_1, Y(a_1)] - f[a_1, y(a_1)] > 0.$$

b) Da teorema dimostrato abbiamo il corollario:

Le funzioni $f(x, y)$, $F(x, y)$ *siano continue nel rettangolo* R *definito dalle* (1), *sia verificata la* (2), *e si abbia in* R

$$|f(x, y)| \leqslant M, \quad |F(x, y)| \leqslant M.$$

Sia $\delta = \text{min.}\ (\alpha, b/M)$, *e siano* G_F, g_F $[G_f, g_f]$, *rispettivamente l'integrale superiore e l'integrale inferiore in* $(a, a+\delta)$ *dell'equazione*

$$Y' = F(x, Y), \quad [y' = f(x, y)]$$

passanti per il punto (a, β); *si ha allora*

$$g_f(x) \leqslant G_f(x) < g_F(x) \leqslant G_F(x).$$

c) Dal teorema dimostrato segue anche la seguente proposizione.

Sia $\{f_n(x, y)\}$ *una successione di funzioni continue definite nel rettangolo* R

$$R: \quad a \leqslant x \leqslant a + \alpha, \qquad |\beta - y| \leqslant b,$$

e sia

$$f_n(x, y) > f(x, y), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

con $f(x, y)$ *continua in* R, *e si abbia*

$$|f(x, y)| \leqslant M; \qquad |f_n(x, y)| \leqslant M, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = f(x, y).$$

Se è $\delta = \min(\alpha, b/M)$, l'equazione $y'_n = f(x, y)$ ammette in $(a, a+\delta)$ un integrale superiore $G_n(x)$ passante per (a, β), e se indichiamo con $G(x)$ l'integrale superiore dell'equazione $y' = f(x, y)$ passante per (a, β) *vogliamo dimostrare che si ha uniformemente in* $(a, a+\delta)$ $\lim_{n\to\infty} G_n(x) = G(x)$.

Si ha infatti

$$G_n(x) \geqslant G(x) \qquad [a \leqslant x \leqslant a+\delta] \tag{3}$$

e siccome le funzioni della successione $\{G_n(x)\}$ sono ugualmente continue ed ugualmente limitate in $(a, a+\delta)$, si può formare una successione $\{G_{\lambda_p}(x)\}$, $(\lambda_1<\lambda_2<....<\lambda_p<....)$ la quale converge uniformemente verso una funzione $\overline{G}(x)$, e si avrà per essa $\overline{G}(a)=\beta$.

E motivo della (3) si ha pure

$$\lim_{\to\infty} G_{\lambda_p}(x)=\overline{G}(x) \geqslant G(x),$$

ma $\overline{G}'(x)=f[x, \overline{G}(x)]$, e $G(x)$ è l'integrale superiore di $y'=f(x, y)$, quindi $\overline{G}(x)=G(x)$.

Ripetendo a questo punto un ragionamento del n. 6 *b*) del § 1 si deduce la nostra proposizione.

3. - *a*) Vogliamo ora stabilire un secondo teorema di confronto.

Nel rettangolo R

$$R:\quad a \leqslant x \leqslant a+a, \qquad |y-\beta| \leqslant b$$

la funzione $f(x, y)$ abbia un valore finito in ogni punto, la funzione $F(x, y)$ sia continua, e si abbia in ogni punto di R

$$f(x, y) \leqslant F(x, y), \qquad |F(x, y)|<L.$$

Sia $\delta<0$, $\delta \leqslant a$, $\delta \leqslant b/L$, e l'equazione $y'=f(x, y)$ ammetta un integrale $y=\varphi(x)$ uscente dal punto (a, β), definito in $(a, a+\delta)$. Vogliamo dimostrare che se $y=G_F(x)$, è l'integrale superiore dell'equazione $y'=F(x, y)$, si ha allora per $a \leqslant x \leqslant a+\delta$

$$\varphi(x) \leqslant G_F(x). \quad (^1)$$

Si ponga

$$F_n(x, y)=F(x, y)+1/n\,;$$

(1) Se consideriamo integrali a sinistra di a, vale il teorema: *Se $f(x, y)$ e $F(x, y)$ sono definite nel rettangolo R: $a-a \leqslant x \leqslant a$, $|y-\beta| \leqslant b$; se $F(x, y)$ é continua in R, $f(x, y) \geqslant F(x, y)$, $|F(x, y)|<L$; se $\delta>0$, $\delta<a$, $\delta \leqslant b/L$; se $y=\varphi(x)$ è un integrale dell'equazione $y'=f(x, y)$ uscente da (a, β) definito in $(a-\delta, a)$; se G_F è l'integrale superiore di $y'=F(x, y)$ uscente a sinistra di (a, β), si ha allora $\varphi(x) \leqslant G_F(x)$.*

esiste un n_0 tale che per $n>n_0$ è $|F_n(x, y)|<L$, e l'equazione

$$y'=F_n(x, y)$$

ammette quindi un integrale superiore $y=G_{F_n}(x)$ definito in $(a, a+\delta)$ che per il teorema di confronto del n. 2 soddisfa la disuguaglianza

$$\varphi(x)<G_{F_n}(x), \qquad (a<x<a+\delta). \tag{4}$$

Le funzioni della successione $\{G_{F_n}(x)\}$ sono ugualmente continue e ugualmente limitate in $(a, a+\delta)$, e per il teorema del n. 1 può formarsi una successione

$$G_{\lambda_1}(x),\ G_{\lambda_2}(x), ...,\ G_{\lambda_p}(x), ... \qquad (\lambda_1<\lambda_2<....<\lambda_p<....)$$

la quale converge uniformemente verso un integrale $\overline{G}(x)$ dell'equazione

$$\overline{G}'(x)=F[x, \overline{G}(x)]$$

ma per la (4) $\varphi(x) \leqslant \overline{G}(x)$ e perciò $\varphi(x) \leqslant G_F(x)$.

Ripetendo un ragionamento fatto nel n. 5, *d*) del § 1, ove si supponga $|F(x, y)| \leqslant M$, può supporsi $\delta>0$, $\delta \leqslant a$, $\delta \leqslant b/M$.

b) Dal teorema dimostrato segue il corollario: *Siano $f(x, y)$, $F(x, y)$ continue in R*

$$R:\quad a \leqslant x \leqslant a+a, \quad |\beta-y| \leqslant b, \quad [a-a \leqslant x \leqslant a, \quad |\beta-y| \leqslant b]$$

e sia in R

$$|f(x, y)| \leqslant M;\ |F(x, y)| \leqslant M;\ f(x, y) \leqslant F(x, y)\ [f(x, y) \geqslant F(x, y)].$$

Se $\delta=\min(a, b/M)$, si ha allora in $(a, a+\delta)$, $[(a-\delta, a)]$

$$G_f(x) \leqslant G_F(x).$$

4. - È evidente che si possano ottenere criteri di unicità quando si sappia maggiorare la differenza di due integrali dell'equazione $y'=f(x, y)$ uscenti da un medesimo punto (1). Una

(1) Cfr. E. Bompiani: *Un teorema di confronto ed un teorema di unicità per l'equazione differenziale $y'=f(x, y)$*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), I (1925), pp. 298-302; L. Tonelli: *Sulla unicità della soluzione di*

tale valutazione si ottiene col seguente teorema: *Nel rettangolo* R

$$R:\quad 0 \leqslant x-a \leqslant a, \qquad |y-\beta| \leqslant b,$$

sia definita una funzione $f(x, y)$, *e l'equazione*

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

ammetta due integrali $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, *definiti in* $(a, a+a)$, *verificanti entrambi la condizione iniziale* $y_1(a)=y_2(a)=\beta$, *e la disuguaglianza*

$$y_1(x) \leqslant y_2(x) \qquad \text{per } a<x \leqslant a+\delta. \quad (^1) \tag{6}$$

Esista inoltre una funzione continua $d(x, y, z)$ *definita nel parallelepipedo* R'

$$R':\quad a \leqslant x \leqslant a+a, \qquad |y-\beta| \leqslant b, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 2b,$$

e ivi continua, e per

$$a \leqslant x \leqslant a+a, \quad |y_1-\beta| \leqslant b, \quad |y_2-\beta| \leqslant b, \quad y_1 \leqslant y_2$$

sia verificata la disuguaglianza

$$f(x, y_2)-f(x, y_1) \leqslant d(x, y_1, y_2-y_1). \quad (^2)$$

---

un'equazione differenziale ordinaria, idem, pp. 272-277. Una nuova dimostrazione di J. TAMARKINE [*Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires*, Math. Zeitschr., 16 (1923), pp. 207-213] di un teorema di W. F. OSGOOD [*Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung* $y'=f(x, y)$, *ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'-schen Bedingung*, Monatsh. für Math. und Phys., 9 (1898), pp. 331-345] condusse E. BOMPIANI a valutare «*il divario tra due integrali relativi ad una stessa ascissa*».

[1] La condizione $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ non è restrittiva; infatti se $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ sono due integrali della (5) passanti per (a, β) e definiti in $(a, a+a)$, posto per ogni x

$$z_1(x) = \min. [y_1(x), y_2(x)], \qquad z_2(x) = \max. [y_1(x), y_2(x)],$$

se notiamo che due integrali della (5) in ogni punto comune hanno la medesima tangente, risulta che $z_1(x)$ e $z_2(x)$ soddisfano la (5) e la disuguaglianza $z_1(x) \leqslant z_2(x)$.

[2] Quando si vogliano confrontare integrali della (5) a sinistra di a, alla disuguaglianza del testo dovrà sostituirsi l'altra disuguaglianza

$$f(x, y_2)-f(x, y_1) \geqslant d(x, y_1, y_2-y_1), \qquad (y_1 \leqslant y_2).$$

Sia in R', $|d(x, y, z)| \leqslant M'$, δ *un numero positivo tale che*

$$0<\delta \leqslant a, \qquad \delta \leqslant b/M',$$

e si consideri in $(a, a+\delta)$ *l'integrale superiore* $G(x)$ *dell'equazione*

$$\frac{dz}{dx} = d(x, y_1(x), z),$$

uscente dal punto $(a, 0)$, $[G(a)=0]$; *vogliamo dimostrare che si ha in tutto* $(a, a+\delta)$

$$0 \leqslant y_2(x)-y_1(x) \leqslant G(x). \tag{7}$$

Infatti posto $z(x)=y_2(x)-y_1(x)$ abbiamo

$$dz/dx = f(x, y_1(x)+z) - f(x, y_1(x))$$

ma $f(x, y_1(x)+z)-f(x, y_1(x)) \leqslant d(x, y_1(x), z)$, e dal teorema di confronto del n. 3 a) segue appunto la (7).

Il teorema dimostrato, se $d(x, y, z)$ è indipendente da y, cioè se $f(x, y_2)-f(x, y_1) \leqslant d(x, |y_2-y_1|)$, e verifica le due condizioni $d(x, z) \geqslant 0$ $d(x, z)$ non decrescente rispetto a z, è di E. BOMPIANI, [1]; contemporaneamente L. TONELLI, in una sua nota [2], ha eliminato queste due condizioni; il teorema, nella forma del testo, è di P. MONTEL [3].

5. - Dal teorema dimostrato trarremo alcuni semplici criteri di unicità di PEANO, TONELLI, OSGOOD e TAMARKINE.

a) Sia $d=0$, si abbia cioè per $y_1<y_2$

$$f(x, y_2)-f(x, y_1) \leqslant 0,$$

ossia $f(x, y)$ *non sia crescente rispetto a* y; poichè l'equazione $dz/dx=0$ ammette soltanto la soluzione nulla soddisfacente la condizione $z(a)=0$, segue il criterio di PEANO [4]: *l'equazione* $y'=f(x, y)$, *se* $f(x, y)$ *è una funzione definita in un intorno del punto* (a, β),

---

[1] Cfr. E. BOMPIANI, lav. già cit. in questo numero.

[2] Cfr. L. TONELLI, lav. già cit. in questo numero.

[3] Cfr. P. MONTEL, lav. cit. nel § 1, n. 6, a).

[4] G. PEANO: *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*, Math. Ann., 37 (1890), [pp. 182-228], p. 227.

e non crescente rispetto a y, può ammettere al più un solo integrale che soddisfa la condizione $y(a)=\beta$.

La dimostrazione diretta può peraltro conseguirsi nel seguente modo. Siano $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ due integrali dell'equazione $y'=f(x,y)$ definiti in $(a, a+\delta)$ e verificanti la condizione iniziale $y_1(a)=y_2(a)$, e supponiamo per assurdo che non sia $y_1(x)=y_2(x)$ in tutto $(a, a+\delta)$. Sia allora ξ un punto dove $y_1(\xi)<y_2(\xi)$ e $(a_1, a_1+\delta_1)$ il massimo intervallo contenente il punto ξ tale che $y_1(x)<y_2(x)$, $a_1<x<a_1+\delta_1$. Si ha $y_1(a_1)=y_2(a_1)$, $y_1(a_1+\delta_1)\leqslant y_2(a_1+\delta_1)$, e per $a_1<x<a_1+\delta_1$, $f(x, y_1(x))\geqslant f(x, y_2(x))$, $y'_1(x)\geqslant y'_2(x)$, $[y_1(x)-y_2(x)]'\geqslant 0$, e allora se non è sempre $[y_1(x)-y_2(x)]'=0$ risulta $y_1(a_1+\delta_1)-y_2(a_1+\delta_1)>0$, e ciò è assurdo; se è poi $[y_1(x)-y_2(x)]'=0$ si ha in $(a_1, a_1+\delta_1)$, $y_1(x)=y_2(x)$ mentre nel punto ξ è $y_1(\xi)<y_2(\xi)$.

b) Nel teorema del n. 4 si faccia $d=\varphi(x)\omega(z)$, *dove* $\varphi(x)$ *è una funzione continua in* $(a, a+\alpha)$, *e la* $\omega(z)$ *definita per ogni* $z\geqslant 0$, *soddisfi le condizioni* $\omega(0)=0$, $\omega(z)>0$ *per* $z>0$, *e*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{2b}\frac{dz}{\omega(z)}=+\infty.$$

È facile dimostrare che *in queste ipotesi l'equazione*

$$dz/dx=\varphi(x)\omega(z)$$

ammette soltanto la soluzione $z=0$ *che si annulla per* $x=a$.

Sia infatti $z=z(x)$ una soluzione di questa equazione definita in $(a, a+\delta)$, e supponiamo per assurdo che vi sia un punto a_2 di $(a, a+\delta)$ dove $z(a_2)\neq 0$. Se $a<a_1<a_2$, si ha per il teorema di integrazione per sostituzione

$$\int_{z(a_1)}^{z(a_2)} dz/\omega(z)=\int_{a_1}^{a_2}\varphi(x)dx,$$

ma per $a_1\to a+0$ si ha $\lim\limits_{a_1\to a+0} z(a_1)=0$, perciò $\lim\limits_{a_1\to a+0}\int_{z(a_1)}^{z(a_2)} dz/\omega(z)=+\infty$, quindi $\lim\limits_{a_1\to a+0}\int_{a_1}^{a_2}\varphi(x)dx=+\infty$, assurda perchè $\varphi(x)$ è continua in $(a, a+\alpha)$.

In virtù di quanto abbiamo ora dimostrato segue il criterio di unicità di TONELLI (1): *Sia* $\varphi(x)$ *una funzione continua in* $(a, a+\alpha)$; $\omega(z)$ *sia continua*, $\omega(0)=0$, $\omega(z)>0$ *per ogni* $z>0$, *e soddisfi la condizione*

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{2b}\frac{dz}{\omega(z)}=+\infty.$$

Inoltre la funzione $f(x, y)$ *sia definita nel rettangolo* R

$$R:\quad a\leqslant x\leqslant a+\alpha,\qquad |y-\beta|\leqslant b,$$

e soddisfi la disuguaglianza

$$f(x, y_2)-f(x, y_1)\leqslant\varphi(x)\omega(y_2-y_1)\quad (2)\tag{8}$$

per $a\leqslant x\leqslant a+\alpha$, $\beta-b\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\beta+b$. *In queste ipotesi l'equazione* $y'=f(x, y)$ *può ammettere in* R *al più una sola soluzione uscente dal punto* (a, β) (3).

c) In particolare se $\varphi(x)=1$, abbiamo il teorema di OSGOOD e TAMARKINE (4); *Se* $\omega(z)$ *è una funzione continua per* $z\geqslant 0$, $\omega(0)=0$, $\omega(z)>0$ *per ogni* $z>0$,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{2b}\frac{dz}{\omega(z)}=+\infty,$$

e nel rettangolo R: $|x-a|\leqslant\alpha$, $|y-\beta|\leqslant b$, *la funzione* $f(x, y)$ *è continua e soddisfa la limitazione*

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)|\leqslant\omega(|y_2-y_1|)$$

---

(1) Cfr. L. TONELLI, mem. cit. al n. 4.

(2) Ove si considerino integrali a sinistra del punto (a, β), alla (8) dovrà sostituirsi l'altra disuguaglianza $f(x, y_2)-f(x, y_1)\geqslant\varphi(x)\omega(y_2-y_1)$.

(3) Nel teorema di TONELLI, se $f(x, y)$ è limitata in R, la $\varphi(x)$ si può supporre definita per $a<x\leqslant a+\alpha$, integrabile nel senso di LEBESGUE in $(a+\varepsilon, a+\alpha)$ qualunque sia $\varepsilon>0$ e $<\alpha$, e

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{a+\alpha}\varphi(x)dx<+\infty.$$

(4) Cfr. W. F. OSGOOD e J. TAMARKINE, memorie citate al n. 4.

allora esiste in R una e una sola curva integrale passante per il punto (a, β). (¹)

6. - Vogliamo dimostrare il seguente teorema di esistenza e unicità: *Se $f(x, y)$ è continua nel rettangolo R*

$$R: \quad a \leqslant x \leqslant a + a, \qquad |y-\beta| \leqslant b,$$

e soddisfa per $a \leqslant x \leqslant a+a$ la limitazione

$$(9) \quad |f(x, y_2)-f(x, y_1)|(x-a) \leqslant k|y_2-y_1|, \qquad (0<k \leqslant 1)$$

allora esiste uno e uno solo integrale dell'equazione $y'=f(x, y)$, passante per il punto (a, β).

Questo teorema è dovuto ad A. ROSENBLATT (²) per $0<k<1$, e a M. NAGUMO (³) per $k=1$, e nell'ipotesi che la (9) valga in senso forte; O. PERRON (⁴) ha dato la dimostrazione che andiamo ad esporre supponendo semplicemente

$$(10) \quad |f(x, y_2)-f(x, y_1)|(x-a) \leqslant |y_2-y_1|, \quad (a \leqslant x \leqslant a+a).$$

Siano $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ due curve integrali dell'equazione passanti per il punto (a, β), definiti in $(a, a+\delta)$ e si ponga per $x \neq a$

$$F(x)=[\varphi(x)-\psi(x)]/(x-a).$$

Per il teorema di DE L'HOSPITAL si ha

$$\lim_{x\to a} F(x)= \lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\psi(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)-\psi'(x)}{1}= f(a, \beta)-f(a, \beta)=0,$$

(¹) Il teorema fu dimostrato la prima volta da W. F. OSGOOD e ritrovato da T. TAMARKINE con la condizione restrittiva $\omega(z)$ crescente. La nota di J. TAMARKINE si fouda sostanzialmente sul teorema di unicità dell'equazione $dz/dx=\omega(z)$, e il procedimento, opportunamente modificato, porta al teorema di E. BOMPIANI citato nel n. 4.

(²) A. ROSENBLATT: *Ueber die Existenz von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Archiv för Matem. Astr. och Fysik, 5 (1909), n. 2, pp. 4.

(³) M. NAGUMO: *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung*, Jap. Journ. of Math., 3 (1926), pp. 107-112.

(⁴) O. PERRON: *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Zeitschr., 28 (1928), pp. 216-219.

talchè posto $F(a)=0$, la funzione $F(x)$ risulta continua in $(a, a+\delta)$ e nulla in a. Noi vogliamo dimostrare che essa è identicamente nulla, e per questo ragioniamo per assurdo. Non sia dunque $F(x)$ identicamente nulla e sia x_0 il punto di $(a, a+\delta)$ ove $|F(x)|$ assume il suo valore massimo che indicheremo con G; si ha

$$G=\left|\frac{\varphi(x_0)-\psi(x_0)}{x_0-a}\right|=\frac{1}{x_0-a}\left|\int_a^{x_0}\{f(t, \varphi(t))-f(t, \psi(t))\}dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{x_0-a}\left|\int_a^{x_0}\left|\frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t-a}\right|dt\right|=\frac{1}{x_0-a}\left|\int_a^{x_0}|F(t)|dt\right|,$$

e siccome $F(t)$ non è costante in (a, x_0) si ha

$$\frac{1}{x_0-a}\left|\int_a^{x_0}|F(t)|dt\right|<G$$

e quindi l'assurdo $G<G$.

7. - *a*) Il teorema del numero precedente rientra nel seguente criterio di A. ROSENBLATT e G. SCORZA-DRAGONI che ci limitiamo ad enunciare (¹).

La funzione $f(x, y)$ sia continua nel rettangolo R

$$R: \quad |x-a| \leqslant a, \qquad |y-\beta| \leqslant b,$$

e sia $\delta=\min.(a, b/M)$, essendo M il massimo di $|f(x,y)|$ in R.

Supponiamo inoltre che per

$$a-a \leqslant x \leqslant a+a, \qquad \beta-b \leqslant y_1<y_2 \leqslant \beta+b,$$

si abbia

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqslant \frac{\theta(x)k(x)}{|x-a|}|y_2-y_1|,$$

dove:

i) *$\theta(x)$ è una funzione non negativa, sommabile, tale che*

$$\left|\int_a^x \theta(t)\,dt\right| \leqslant |x-a|, \qquad \text{per } |x-a| \leqslant a;$$

(¹) A. ROSENBLATT: *Sull'unicità della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 8 (1928), pp. 41-45; G. SCORZA-DRAGONI: *A proposito di un teorema di Rosenblatt*, idem, (6), 14 (1931), pp. 7-11.

ii) $k(x)\geqslant 1$, $k(x)$ *assolutamente continua in ogni intervallo del tipo* $|x-\alpha|\leqslant d_1<d$, *con* $d=\text{cost.}\leqslant a$;

iii) $[k(x)-1]/|x|$ *sommabile in* $(\alpha-d_1,\ \alpha+d_1)$ [1].

Allora se $\delta_1=\min\,(\delta,\ d)$, *l'equazione*

$$y'=f(x,y)$$

ammette nell'intervallo $(\alpha-\delta_1,\ \alpha+\delta_1)$ *uno e un solo integrale passante per il punto* (α,β).

b) Il teorema dimostrato nel numero precedente può dedursi anche dal seguente teorema generale di G. SCORZA-DRAGONI che qui, per brevità, ci limitiamo pure ad enunciare [2].

Sia $f(x,y)$ *continua nel rettangolo* R

$$R:\quad |x-\alpha|\leqslant a,\qquad |y-\beta|\leqslant b;$$

l'equazione $y'=f(x,y)$ *ammette uno e un solo integrale passante per il punto* (x^0,y^0) *interno ad* R, $[y(x^0)=y^0]$, *se per*

$$|x-\alpha|\leqslant a,\qquad \beta-b\leqslant y_1<y_2\leqslant\beta+b,$$

è valida la disuguaglianza

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|<\varphi(x)\omega(y_2-y_1),$$

dove $\varphi(x)$ *è una funzione non negativa, e sommabile* [nel senso di LEBESGUE] *in ogni intervallo del tipo* $(\alpha-a,\ x^0-\varepsilon)$, $(x^0+\varepsilon,\ \alpha+a)$, $[\varepsilon>0,\ \alpha-a<x^0-\varepsilon<x^0+\varepsilon<\alpha+a]$, *e* $\omega(z)$ *è una funzione continua e positiva per ogni* $z>0$, *e se ad ogni* $z^0>0$ *si possono far corrispondere due numeri positivi* $\bar\varepsilon$ *e* $\bar z$ *in modo da aversi*

$$\alpha-a<x^0-\varepsilon,\qquad x^0+\varepsilon<\alpha+a,\qquad \varepsilon\bar z<z^0,$$

e

$$\int_{\alpha-a}^{x^0-\varepsilon}\varphi(x)dx\leqslant\int_{\varepsilon\bar z}^{z^0}\frac{dz}{\omega(z)};\quad \int_{x^0+\varepsilon}^{\alpha+a}\varphi(x)dx\leqslant\int_{\varepsilon\bar z}^{z_0}\frac{dz}{\omega(z)}$$

per tutti i numeri ε, *positivi e non superiori a* $\bar\varepsilon$.

---

(1) L'enunciato di A. ROSENBLATT si limita al caso particolare

$$k(x)=1+\left|\log\frac{1}{|x-\alpha|}\right|^{-p},\ \text{con } p>1,$$

e in questo caso bisogna fare nell'enunciato $d=1$.

(2) G. SCORZA-DRAGONI: *a)* lav. cit. al n. 7, *a)*; *b) Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un'equazione differenziale*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 54 (1930), [pp. 430-448], p. 444.

8. - *a)* Chiuderemo questo paragrafo esponendo un teorema che generalizza il teorema di confronto del n. 2, teorema che per la sua natura si collega ai principi informatori della dimostrazione di G. PEANO [1] dell'esistenza di un integrale dell'equazione $y'=f(x,y)$ e ad un'importante memoria di O. PERRON [2] sullo stesso argomento.

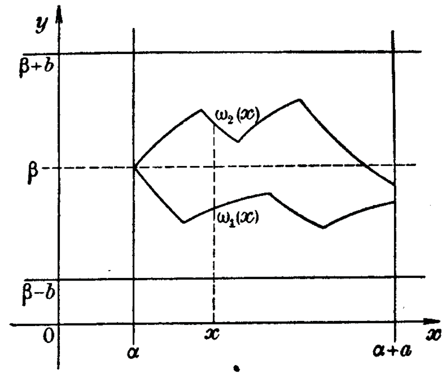

Fig. 16.

b) Siano $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ *due funzioni continue in* $(\alpha,\ \alpha+a)$, *sia* $\omega_1(\alpha)=\omega_2(\alpha)$, *e* $\omega_1(x)<\omega_2(x)$ *per* $\alpha<x\leqslant\alpha+a$ [vedi fig. 16].

Sia $f(x,y)$ *una funzione continua nel dominio* D *dei punti* (x,y) *del piano* x,y *definito dalle limitazioni*

$$D:\quad \alpha\leqslant x\leqslant\alpha+a,\qquad \omega_1(x)\leqslant y\leqslant\omega_2(x),$$

e la derivata massima a destra [*o a sinistra*] *di* $\omega_2(x)$, *e la minima derivata a destra* [*o a sinistra*] *di* $\omega_1(x)$, *che indicheremo rispettivamente con i simboli* $D_+\omega_2(x)$, $D_-\omega_1(x)$, *soddisfino in* $(\alpha,\ \alpha+a)$, *salvo al più un insieme numerabile di punti, le limitazioni*

$$D_-\omega_1(x)\leqslant f(x,\omega_1(x));\qquad f(x,\omega_2(x))\leqslant D_+\omega_2(x).$$

---

(1) G. PEANO: *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine*, Atti della R. Acc. Sc. Torino, 21 (1885-1886), pp. 437-445.

(2) O. PERRON: *Ein neurer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung* $y'=f(x,y)$, Math. Ann., 76 (1915), pp. 471-484.

Sia M il massimo di $|f(x, y)|$ in D, e si scelga b così grande che il rettangolo

$$R: \quad a \leqslant x \leqslant a+\alpha, \qquad |y-\beta| \leqslant b$$

contenga il dominio D, e risulti $b/M > \alpha$.

Si definisca la $f(x, y)$ in R con la seguente legge:

$$f(x, y) = f(x, \omega_2(x)) \quad \text{se} \quad y \geqslant \omega_2(x)$$
$$f(x, y) = f(x, \omega_1(x)) \quad \text{se} \quad y \leqslant \omega_1(x).$$

Se consideriamo nel rettangolo R l'equazione

$$y' = f(x, y),$$

il fascio delle sue curve integrali $y = y(x)$ uscenti dal punto (a, β), $[y(a) = \beta]$ può definirsi in $(a, a+\alpha)$, e noi vogliamo dimostrare che in $(a, a+\alpha)$ si ha

$$\omega_1(x) \leqslant y(x) \leqslant \omega_2(x).$$

Supponiamo per assurdo che in un punto x_1, $a < x_1 < a+\alpha$, sia

$$(11) \qquad y(x_1) < \omega_1(x_1), \qquad [y(x_1) > \omega_2(x_1)]$$

la funzione $y(x) - \omega_1(x)$, $[y(x) - \omega_2(x)]$, è nulla in a e negativa [positiva] in x_1, e può determinarsi un x_1' tale da aversi

$$a \leqslant x_1' < x_1, \quad y(x_1') - \omega_1(x_1') = 0, \quad [y(x_1') - \omega_2(x_1') = 0]$$

e

$$y(x) - \omega_1(x) < 0 \quad \text{per} \quad x_1' < x \leqslant x_1,$$
$$[y(x) - \omega_2(x) > 0 \quad \text{per} \quad x_1' < x \leqslant x_1].$$

Avendosi

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \text{ed essendo} \quad y(x) \leqslant \omega_1(x), [y(x) \geqslant \omega_2(x)],$$

nell'intervallo (x_1', x_1), segue che in questo intervallo, salvo un insieme *numerabile* di punti, è

$$y'(x) = f(x, y(x)) = f(x, \omega_1(x)) \geqslant D_-\omega_1(x),$$
$$[y'(x) = f(x, y(x)) = f(x, \omega_2(x)) \leqslant D_+\omega_2(x)],$$

quindi la minima [massima] derivata a destra della differenza $\omega_1(x) - y(x)$, $[\omega_2(x) - y(x)]$ non è mai positiva [mai negativa] in

(x_1', x_1), salvo un insieme numerabile di punti, e $\omega_1(x) - y(x)$ $[\omega_2(x) - y(x)]$ sarebbe ivi non crescente [non decrescente] (1), e allora $\omega_1(x_1) - y(x_1) \leqslant 0$, $[\omega_2(x_1) - y(x_1) \geqslant 0]$ contro la (11).

c) Se $\omega_1(x)$ e $\omega_2(x)$ sono definite in un intervallo $(a-\alpha, a)$ e supponiamo $\omega_1(a) = \omega_2(a)$, $\omega_1(x) < \omega_2(x)$ per $a - \alpha \leqslant x < a$, ed è

$$D_+\omega_1(x) \geqslant f(x, \omega_1(x)), \qquad D_-\omega_2(x) \leqslant f(x, \omega_2(x))$$

varrà un teorema analogo a quello dimostrato in *b*) per gli integrali dell'equazione $y' = f(x, y)$ uscenti a sinistra del punto (a, β).

§ 3. - Campo di esistenza e teoremi di unicità per gli integrali dei sistemi differenziali con i dati di Cauchy.

1. Campo di esistenza delle curve integrali. - 2. Estensione di M. Müller e O. Perron del teorema di M. Nagumo ai sistemi differenziali. - 3. Estensione di G. Zwirner del teorema di G. Scorza Dragoni ai sistemi differenziali.

1. - *a*) Con gli stessi ragionamenti del n. 2 del § 1 si prova: *Dato il sistema*

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m), \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

dove $(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$ varia in un insieme I, ad $m+1$ dimensioni, se le funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ soddisfano il sistema (1), *quando x varia nell'intervallo aperto (a, b), $-\infty < a < x < b < +\infty$, e se per $a < x < b$ si ha*

$$|f_i(x; \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))| \leqslant M, \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

esistono allora e sono finiti i limiti

$$\lim_{x \to a+0} \varphi_k(x) = A_k, \quad \lim_{x \to b-0} \varphi_k(x) = B_k, \qquad (k = 1, 2, \dots, m).$$

b) *Sia I un dominio aperto e connesso, FI la sua frontiera, e le funzioni $f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ risultino definite e limitate in $I + FI$, e continue in ogni punto di $I + FI$*

(1) Cfr. ad es. S. Saks: *Théorie de l'intégrale*, (Warszawa, 1933), Teor. 17, p. 137.

a distanza finita; allora se $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x),\dots, y_m=\varphi_m(x)$, *per* x *variabile nell'intervallo aperto* (a, b), *soddisfano il sistema* (2), *esistono le derivate* $\varphi_k'(a+0)$, $\varphi_k'(b-0)$, $(k=1,2,\dots, m)$.

c) Sussiste il teorema analogo a quello del n. 3 *e*) del § 1: *Un insieme di punti* $P\equiv(x;\, y_1, y_2,\dots, y_m)$ *formi un dominio aperto e connesso* I, *e le funzioni* $f_i(x; y_1, y_2,\dots, y_m)$, $(i=1,2,\dots, m)$, *siano continue in* I.

Fissato un punto $(x^0;\, y_1^0, y_2^0,\dots, y_m^0)$ di I, esiste per il teorema, di PEANO [Cap. I, § 6, n. 2] almeno una curva integrale Γ del sistema (1) di equazioni $y_1=\varphi_1(x)$, $y_2=\varphi_2(x),\dots, y_m=\varphi_m(x)$, passante per il punto $(x^0;\, y_1^0, y_2^0,\dots, y_m^0)$ e definita in un intervallo $(x^0-\delta, x^0+\delta)$.

La curva Γ può prolungarsi avvicinandosi meno di un numero positivo prefissato alla frontiera di I, e ciò significa che *la curva integrale* Γ *fa parte di una curva integrale* Γ': $y_1=\Phi_1(x)$, $y_2=\Phi_2(x),\dots, y_m=\Phi_m(x)$, *definita in un intervallo aperto* (a, b) *contenente* $(x^0-\delta, x^0+\delta)$, *dove*

i) $b=+\infty$, $[a=-\infty]$;

ii) *oppure essendo* b *finito*, $[a$ *finito*$]$ *vale una almeno delle relazioni*

$$\overline{\lim_{x\to b-0}}\,|\Phi_k(x)|=+\infty \quad [\overline{\lim_{x\to a+0}}\,|\Phi_k(x)|=+\infty], \quad (k=1, 2,\dots, m),$$

iii) *oppure, ove sia* b *finito* $[a$ *finito*$]$, *e siano tutti finiti*

$$\overline{\lim_{x\to b-0}}\,|\Phi_k(x)|, \quad [\overline{\lim_{x\to a+0}}\,|\Phi_k(x)|], \quad (k=1, 2,\dots, m),$$

fissati comunque $\varepsilon>0$, $\tau>0$, *esistono punti di* Γ', *corrispondenti a valori di* $x>b-\tau$, $[x<a+\tau]$, *che hanno dalla frontiera di* I *distanza* $<$ *di* ε.

Basterà ripetere i ragionamenti del citato n. 3 del § 1, e notare che quando ci si riduce al caso

$$\underline{\lim_{x\to b-0}}\,\Phi_k(x)=\beta_k, \quad \overline{\lim_{x\to b-0}}\,\Phi_k(x)=\gamma_k, \quad (k=1, 2,\dots, m),$$

i due punti $(b;\, \beta_1, \beta_2,\dots, \beta_m)$, $(b;\, \gamma_1, \gamma_2,\dots, \gamma_m)$, eventualmente coincidenti, sono punti frontiera di I.

Se poi nel sistema (1) le f_i sono definite in un insieme chiuso, connesso e limitato I, ad $m+1$ dimensioni, ogni curva integrale del sistema (1), che non ha gli estremi sulla frontiera di I, appartiene ad una curva integrale che ha gli estremi sulla frontiera di I.

d) Ove si consideri l'equazione

$$y^{(m)}=f(x;\; y, y',\dots, y^{(m-1)}),$$

dal teorema *c*) si deduce: *se* $f(x;\, y, y',\dots, y^{(m-1)})$ *è continua in un dominio* I *ad* $m+1$ *dimensioni, aperto e internamente connesso, fissato un punto* $(x^0;\, y^0, y_1^0,\dots, y_{m-1}^0)$ *di* I, *ad un qualunque integrale* $y=y(x)$ *dell'equazione che verifica le condizioni iniziali*

$$y(x^0)=y^0; \quad y^{(i)}(x^0)=y_i^0 \quad (i=1, 2,\dots, m-1),$$

corrisponde una curva dello spazio ad $m+1$ *dimensioni, di equazioni*

$$y=y(x), \quad y'=y'(x),\dots, y^{(m-1)}=y^{(m-1)}(x),$$

la quale si avvicina alla frontiera di I [*o fa parte di una curva integrale che si avvicina alla frontiera di* I] *meno di un numero positivo prefissato.*

Il teorema dimostrato resta valido se il campo I dove è definita la f è lo strato S

$$S:\; a\leqslant x\leqslant b; \qquad -\infty<y<+\infty;$$
$$-\infty<y^{(i)}<+\infty, \quad (i=1, 2,\dots, m-1);$$

basterà infatti prolungare la f in tutto lo spazio con la seguente legge

$$f(x;\, y, y',\dots, y^{(m-1)})=f(a;\, y, y',\dots, y^{(m-1)}) \quad \text{se} \quad x<a,$$
$$f(x;\, y, y',\dots, y^{(m-1)})=f(b;\, y, y',\dots, y^{(m-1)}) \quad \text{se} \quad x>b.$$

2. - Vogliamo dimostrare un teorema di esistenza e di unicità di M. MÜLLER e O. PERRON che estende ai sistemi differenziali il teorema di M. NAGUMO del n. 6 del § 2, sulle equazioni differenziali. Sussiste il teorema: *Se nel sistema*

$$(1) \qquad y_i'=f_i(x;\, y_1, y_2,\dots, y_m), \qquad (i=1, 2,\dots, m),$$

le funzioni f_i, *quando* $x; y_1, y_2, ..., y_m$ *variano nel rettangolo* R:

$$R: \quad a \leqslant x \leqslant a+a; \quad |y_i-\beta_i| \leqslant b, \ (i=1, 2, ..., m), \quad (a>0, b>0),$$

sono continue e soddisfano la limitazione

$$|f_i(x; y_1, y_2, ..., y_m) - f_i(x; z_1, z_2, ..., z_m)|\,(x-a) \leqslant \mathrm{Max.}\,(|y_1-z_1|, |y_2-z_2|, ..., |y_m-z_m|),$$

esiste allora uno e un solo sistema di integrali

$$y_1=\varphi_1(x), \quad y_2=\varphi_2(x), ..., \quad y_m=\varphi_m(x)$$

di (1) *passante per il punto* $(a; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$, *tale cioè che*

$$\varphi_i(a)=\beta_i, \quad (i=1, 2, ..., m) \quad (^1).$$

Siano infatti $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)$; $\psi_1(x), \psi_2(x), ..., \psi_m(x)$ due tali sistemi di integrali, definiti in $(a, a+\delta)$; posto

$$F_i(x)=[\varphi_i(x)-\psi_i(x)]/(x-a), \quad (i=1, 2, ..., m),$$

per il teorema di DE L'HOSPITAL si ha $\lim_{x\to a+0} F_i(x)=0$, talchè posto $F_i(a)=0$ per $i=1, 2, ..., m$ le funzioni $F_i(x)$ risultano definite in $(a, a+\delta)$ e nulle in a. Noi vogliamo dimostrare che esse sono identicamente nulle. Sia infatti

$$G=F_k(x_0)=\max_{a\leqslant x\leqslant a+\delta}[F_1(x), F_2(x), ..., F_m(x)],$$

e sia $G\neq 0$; ragionando come al n. 6 del § 2 si trova l'assurdo

$$G=|[\varphi_k(x_0)-\psi_k(x_0)]/(x_0-a)|<G.$$

3. - G. ZWIRNER ha trasportato ai sistemi differenziali le ricerche di G. SCORZA-DRAGONI ed ha dedotto dai suoi teoremi una proposizione di A. ROSENBLATT e una di M. NAGUMO - E.

(1) M. MÜLLER: *Über die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Konvergenz einer Gattung von Verfahren zur Approximation dieser Integrale*, Sitz. der Heidelberger Ak. Wiss. Math. nat. klasse, 1927, 9, pp. 38; O. PERRON: *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Losüng von Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Zeitschr., 28 (1928), pp. 216-219.

KAMKE (1) riunendole in un unico enunciato che le generalizza entrambe.

Siano le funzioni $f(x; y, z)$, $g(x; y, z)$ *definite nel parallelepipedo* P

$$P: \quad x^0-d \leqslant x \leqslant x^0+d, \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_2, \quad z_1 \leqslant z \leqslant z_2 \quad (d>0)$$

e si abbia in P

$$|x-x^0|\{|\bar{y}_2-\bar{y}_1|^n|f(x; \bar{y}_2, \bar{z}_2)-f(x; \bar{y}_1, \bar{z}_1)| + |\bar{z}_2-\bar{z}_1|^n|g(x; \bar{y}_2, \bar{z}_2)-g(x; \bar{y}_1, \bar{z}_1)|\} \leqslant \theta(x)k(x)[|\bar{y}_2-\bar{y}_1|^{n+1}+|\bar{z}_2-\bar{z}_1|^{n+1}],$$

dove n *è un numero reale* >-1, $\theta(x)$ *una funzione continua, mai negativa, in* (x^0-d, x^0+d), *tale che*

$$0 \leqslant \int_{x_0}^{x} \theta(t)dt/(x-x^0) \leqslant 1,$$

$k(x)$ *una funzione continua, insieme alla sua derivata prima, in ogni intervallo del tipo* $|x-x^0| \leqslant d_1 (<d)$, *e sempre* $\geqslant 1$; *e inoltre sia integrabile negli stessi intervalli la funzione* $[k(x)-1]/|x-x^0|$.

In queste ipotesi il sistema

$$y'=f(x; y, z), \quad z'=g(x; y, z)$$

ammette una, e una sola curva integrale, passante per il punto (x^0, y^0, z^0), $[y_1<y^0<y_2, \ z_1<z^0<z_2]$ (2).

(1) G. SCORZA-DRAGONI: *a*) *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un'equazione differenziale*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, 54 (1930), pp. 430-448; *b*) *A proposito di un teorema di Rosenblatt*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 14 (1931); pp. 7-11; A. ROSENBLATT, lav. cit. al n. 7, *a*) del § 2; G. ZWIRNER: *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un sistema di equazioni differenziali*, Rend. Sem. Mat. di Roma, (4), 1 (1937), [pp. 235-252], pp. 249-250; E. KAMKE: *Differentialgleichungen Reeller Funktionen*, (Leipzig, 1930), p. 139.

(2) Per altri teoremi di confronto e di unicità relativi ai sistemi differenziali cfr. L. GIULIANO: *a*) *Sull'unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie*, Boll. Un. Mat. It., (2), 2 (1940), pp. 221-227; *Su un notevole teorema di confronto e su un teorema di unicità per i sistemi*, Rend. R. Acc. d'Italia, (7), 1 (1940), pp. 330-336.

§ 4. - L'equazione $y'=\lambda f(x, y)$.

a) Se consideriamo l'equazione $y'=\lambda f(x,y)$, dove λ è un parametro, si hanno per essa tre tipi di problema: *i*) studio dell'integrale massimo e dell'integrale minimo passanti per un punto assegnato; *ii*) studio delle soluzioni passanti per due punti distinti assegnati; *iii*) studio degli integrali che passano per un punto assegnato e ammettono in altro punto una derivata assegnata. Tali problemi sono dovuti rispettivamente a HIKOSAKA-NOBORU K. ZAWISCHA, S. TAKAHASCHI [1], e noi qui ci occuperemo del secondo di essi.

b) *Sia data l'equazione*

$$y'=\lambda f(x, y), \tag{1}$$

dove $f(x, y)$ *è una funzione continua nel rettangolo* R

$$R:\quad |x-x_0|\leqslant a, \qquad |y-y_0|<b$$

e ivi mai nulla. La $f(x, y)$ avrà sempre il medesimo segno, e salvo a cangiare λ in $-\lambda$ *possiamo supporre che esistano due costanti positive* m *e* M *tali che*

$$0<m\leqslant f(x, y)\leqslant M.$$

Supporremo inoltre che la $f(x,y)$ *sia lipschitziana rispetto a* y*, esista cioè una costante* N *tale che*

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant N|y_1-y_2|.$$

In queste ipotesi, *fissato in* R *un punto* (x_1, y_1), *con* $x_1\neq x_0$, *vogliamo determinare i valori del parametro* λ *ai quali corrispondono soluzioni della* (1) *soddisfacenti le condizioni ai limiti*

$$y(x_0)=y_0, \qquad y(x_1)=y_1 \quad [1]. \tag{2}$$

(1) HIKOSAKA-NOBORU: *Untersuchung über die Unität der Lösung der Differentialgleichung* $y'=\xi f(x, y)$, *in Bezug auf den Parameter* ξ, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, (3), 2 (1929), pp. 73-83; K. ZAWISCHA: *Über die Differentialgleichung* $y'=kf(x,y)$ *deren Lösungkurve durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen soll*, Monatsh. für Math. und Phys., 37 (1930), pp. 103-124; S. TAKAHASCHI: *Die Differentialgleichung* $y'=kf(x, y)$, Tôhoku Math. Journ., 34 (1931), pp. 249-256.

Per determinare i valori del parametro λ e le corrispondenti soluzioni useremo il metodo delle approssimazioni successive.

Sia $y=y_0(x)$ una funzione continua insieme alla sua derivata prima, appartenente al rettangolo R e ivi soddisfacente le condizioni ai limiti

$$y_0(x_0)=y_0, \qquad y_0(x_1)=y_1, \tag{3}$$

ad esempio sia $y=y_0(x)$ il segmento congiungente i due punti (x_0, y_0), (x_1, y_1).

Determineremo una seconda approssimazione della funzione incognita con l'equazione

$$y_1(x)=y_0+\lambda_1\int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))dx, \tag{4_1}$$

dove il parametro λ_1 sarà scelto in guisa che risulti verificata la seconda equazione (2), e per questo basterà prendere

$$\lambda_1=(y_1-y_0)\Big/\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_0(x))\,dx\,; \tag{5_1}$$

con procedimento ricorrente porremo

$$y_n(x)=y_0+\lambda_n\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))dx, \qquad (n=2, 3,....), \tag{4_n}$$

con

$$\lambda_n=(y_1-y_0)\Big/\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_{n-1}(x))dx, \qquad (n=2, 3,....). \tag{5_n}$$

Proveremo che *se* p *è un numero* $\geqslant 1$, *tale che*

$$M/mp\leqslant 1,$$

(1) Ove si tolga la condizione che $f(x, y)$ non cangi di segno in R il problema può non essere possibile; ad es. l'equazione $y'=\lambda y$ ammette soltanto la soluzione $y=0$ passante per l'origine.

e se y_1 *soddisfa le limitazioni*

$$|y_1-y_0|\leqslant b/p, \qquad |y_1-y_0|N(1+Mm^{-1})(2m)^{-1}<1,$$

allora la successione $\{\lambda_n\}$ *converge verso un numero* λ, *e la successione* $\{y_n(x)\}$ *converge uniformemente in* (x_0, x_1) *verso una funzione* $\varphi(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda, \qquad \lim_{n\to\infty}y_n(x)=\varphi(x)$$

tali che

$$\varphi'(x)=\lambda f[x, \varphi(x)].$$

La funzione $\varphi(x)$ *soddisfa quindi l'equazione* (1) *e le condizioni ai limiti* $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi(x_1)=y_1$, *e ogni altra soluzione della* (1), *che soddisfi le medesime condizioni ai limiti coincide con essa.*

c) Dimostriamo preliminarmente per induzione che le $y_n(x)$ soddisfano la limitazione

$$|y_n(x)-y_0|\leqslant b,$$

cioè che il procedimento delle approssimazioni successive conduce sempre a valori leciti per y.

Si ha infatti dalla (5_n)

$$|\lambda_n|\leqslant|y_1-y_0|m^{-1}|x_1-x_0|^{-1}, \tag{6}$$

e dalla (4_n)

$$|y_n(x)-y_0|\leqslant\frac{|y_1-y_0|}{m|x_1-x_0|}|x-x_0|M\leqslant\frac{|y_1-y_0|M}{m}\leqslant\frac{bM}{mp}\leqslant b.$$

d) Proviamo ora che per $n\to\infty$ la successione $\{y_n(x)\}$ è uniformemente convergente in (x_0, x_1), così pure che $\lim\limits_{x\to\infty}\lambda_n$ è un numero finito.

Posto

$$y_{n-1}(x)-y_0=\varphi_{n-1}(x), \qquad (n=2, 3,....),$$

$$F_n(x)=\lambda_n f(x, y_{n-1}(x))-\varphi'_{n-1}(x), \qquad (n=2, 3,....),$$

per ogni n, la $F_n(x)$ è limitata in (x_0, x_1), ed esiste una costante R_n tale che

$$|F_n(x)|\leqslant R_n.$$

Si ha dalla (4_n)

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[F_n(x)+\varphi'_{n-1}(x)]dx=y_{n-1}(x)+\int_{x_0}^{x}F_n(x)dx,$$

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant|x-x_0|R_n=u_n; \tag{7}$$

abbiamo pure dalla (5_n), supponendo per semplicità $x_0<x_1$,

$$|\lambda_{n+1}-\lambda_n|=$$

$$=|y_1-y_0|\left|\int_{x_0}^{x_1}\{f(x, y_n)-f(x, y_{n-1})\}dx\right|\Big/\int_{x_0}^{x_1}f(x, y_n)dx\int_{x_0}^{x_1}f(x, y_{n-1})dx$$

$$|\lambda_{n+1}-\lambda_n|\leqslant N|y_1-y_0|\int_{x_0}^{x_1}|y_n-y_{n-1}|dx\times m^{-2}|x_1-x_0|^{-2} \tag{8}$$

e per la (7)

$$|\lambda_{n+1}-\lambda_n|\leqslant 2^{-1}N|y_1-y_0|R_n\,m^{-2}=k_n. \tag{9}$$

Dalle (6) e (9) è facile ricavare due limitazioni per

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|, \qquad |\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1}|.$$

Si ha

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|=\left|\lambda_{n+1}\int_{x_0}^{x}f(x, y_n)dx-\lambda_n\int_{x_0}^{x}f(x, y_{n-1})dx\right|$$

$$\leqslant|\lambda_{n+1}-\lambda_n|\left|\int_{x_0}^{x}f(x, y_n)dx\right|+|\lambda_n|\left|\int_{x_0}^{x}\{f(x, y_n)-f(x, y_{n-1})\}dx\right|,$$

e perciò

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant 2^{-1}N|y_1-y_0|R_n m^{-2}M|x-x_0|+$$
$$+|y_1-y_0|m^{-1}|x_1-x_0|^{-1}N\int_{x_0}^{x}|y_n-y_{n-1}|dx,$$

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant 2^{-1}N|y_1-y_0|R_n m^{-2}M|x-x_0|+$$
$$+2^{-1}N|y_1-y_0|R_n m^{-1}|x_1-x_0|^{-1}|x-x_0|^2,$$

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant \tag{10}$$
$$\leqslant 2^{-1}NR_n m^{-1}|y_1-y_0||x-x_0|(1+Mm^{-1})=u_{n+1}.$$

Dalle (7) e (10) si ha allora

$$u_{n+1}/u_n \leqslant 2^{-1}N|y_1-y_0|m^{-1}(1+Mm^{-1})<1,$$

e questo importa la convergenza (assoluta e) uniforme in (x_0, x_1) della serie

$$y_0(x)+[y_1(x)-y_0(x)]+....+[y_n(x)-y_{n-1}(x)]+.....$$

Abbiamo poi dalle (8) e (10)

$$|\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1}| \leqslant N|y_1-y_0|m^{-2}|x_1-x_0|^{-2}\int_{x_0}^{x_1}|y_{n+1}-y_n|\,dx,$$

$$|\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1}| \leqslant 2^{-2}N^2 R_n m^{-3}|y_1-y_0|^2(1+Mm^{-1})=k_{n+1},$$

e per la (9)

$$k_{n+1}/k_n=2^{-1}Nm^{-1}|y_1-y_0|\ (1+Mm^{-1})<1,$$

e questo importa la convergenza assoluta della serie $\lambda_0+(\lambda_1-\lambda_0)+$ $+....+(\lambda_{n+1}-\lambda_n)+....$, cioè l'esistenza del limite $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$.

e) Posto ora

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x)=\varphi(x), \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$$

dalle (4_n) e (5_n) passando al limite per $n\to\infty$, e tenuto conto della convergenza uniforme della successione $\{y_n(x)\}$ in (x_0, x_1) si ha

$$\varphi(x)=y_0+\lambda\int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))dx; \qquad \lambda=(y_1-y_0)/\int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x))dx,$$

perciò la funzione $\varphi(x)$ soddisfa le condizioni volute.

f) Resta da provare l'unicità di $\varphi(x)$. Osserviamo per questo che se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono tali che

$$\varphi'(x)=\lambda f(x, \varphi(x)), \qquad \psi'(x)=\mu\, f(x, \psi(x))$$
$$\varphi(x_0)=\psi(x_0)=y_0; \qquad \varphi(x_1)=\psi(x_1)=y_1,$$

se è $\lambda<\mu$, poichè è anche $\lambda f(x, y)<\mu f(x, y)$ il primo teorema di confronto del § 2, n. 2, *a*) porta $\varphi(x_1)\neq\psi(x_1)$; sarà dunque $\lambda=\mu$, e poichè $\lambda f(x, y)$ è per ipotesi lipschitziana rispetto a y, la condizione $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$ importa $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ in (x_0, x_1).

§ 5. - Le curve integrali dell'equazione $y''=f(x, y)$, passanti per due punti prefissati, come curve estremali.

a) Sia data l'equazione

$$Y''=F(x, Y)$$

ove $F(x, Y)$ è definita nella striscia

$$0\leqslant x\leqslant a_0, \qquad -\infty<Y<+\infty, \qquad (a_0>0)$$

e ivi continua, e si vogliano determinare le sue curve integrali che soddisfano le condizioni ai limiti

$$Y(0)=A, \qquad Y(a)=B, \qquad 0<a\leqslant a_0,$$

essendo A e B due costanti prefissate.

Con il cangiamento di funzione incognita

$$Y(x)=y(x)+(B-A)a^{-1}x+A$$

il problema è ridotto alla *determinazione delle curve integrali dell'equazione*

(1) $$y''=f(x, y)$$

con $f(x, y)$ continua nella striscia S

$$S:\ 0\leqslant x\leqslant a_0, \quad -\infty<y<+\infty, \qquad (a_0>0),$$

soddisfacenti le condizioni ai limiti

(2) $$y(0)=0, \quad y(a)=0, \qquad (0<a\leqslant a_0).$$

La funzione di Green $G(x, \xi)$ relativa all'equazione $y''=0$, e alle condizioni ai limiti $y(0)=y(a)=0$ ha l'espressione [Cap. V, § 3, n. 1]

$$G(x, \xi)=-(a-\xi)x/a, \quad \text{per} \quad x\leqslant\xi,$$
$$G(x, \xi)=-(a-x)\xi/a, \quad \text{per} \quad x\geqslant\xi,$$

e le soluzioni cercate [Cap. V, § 3, n. 3, $r(x)=f(x, y)$] *sono le eventuali soluzioni dell'equazione integrale non lineare*

(3) $$y(x)=\int_0^a G(x, \xi)f(\xi, y(\xi))\,d\xi.$$

L'esistenza di una soluzione di quest'ultima, nell'ipotesi di $f_y(x,y)$ positiva e limitata, fu dimostrata da E. PICARD (¹) col metodo delle approssimazioni successive. Recentemente H. HAMMERSTEIN (²) ha assegnato delle condizioni molto generali per l'esistenza di una soluzione della (3), successivamente determinata da H. O. HIRSCHFELD (³) col metodo delle approssimazioni successive.

Nei ragionamenti di H. O. HIRSCHFELD la soluzione della (3) viene considerata come la curva estremale relativa all'integrale

$$\int_0^a F(x;\, y,\, y')dx\,; \qquad F(x;\, y,\, y') = \frac{1}{2}y'^2 + \int_0^y f(x,\, t)dt,$$

e alle condizioni ai limiti (2), e S. CINQUINI (⁴) studiando tale integrale con i *metodi diretti* del Calcolo delle Variazioni di TONELLI è arrivato al teorema di esistenza nella forma generale che qui ci limitiamo a ricordare.

Sia $f(x, y)$ una funzione continua nella striscia S

$$S:\quad 0 \leqslant x \leqslant a_0, \quad -\infty < y < +\infty, \qquad (a_0 > 0)$$

ed esistano due numeri h_1, h_2, non negativi, tali che per ogni (x, y) di S si abbia

$$\int^y f(x,\, t)dt > -h_1\, y^2 - h_2\,;$$

allora l'equazione differenziale

$$y'' = f(x,\, y)$$

ammette nell'intervallo $(0, a)$, con $0 < a \leqslant a_0$, e $0 < a < \pi/\sqrt{2h_1}$, almeno una soluzione soddisfacente le condizioni $y(0) = y(a) = 0$.

(¹) É. PICARD: *a) Sur l'application des méthodes d'approximation successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*, Journ. de Math. pur. et appl., (4), 9 (1893), pp. 217-271; *b) Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, (Paris, 1930), pp. 1-14.

(²) H. HAMMERSTEIN: *Nichtlinearen Integralgleichungen nebst Anwendungen*, Acta Math., 54 (1930), [pp. 117-176], pp. 118-122.

(³) H. O. HIRSCHFELD: *A generalization of Picard's method of successive approximation*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 32 (1936), pp. 86-95.

(⁴) S. CINQUINI: *Sopra i problemi di valori al contorno per equazioni differenziali non lineari*, Boll. Un. Mat. It., 17 (1938), pp. 99-105.

b) Mostriamo con un esempio (¹) che l'enunciato del teorema non può migliorarsi, cioè che non esiste una costante $\delta > 0$, tale che il problema sia possibile quando a soddisfi la limitazione $0 < a < \pi(1+\delta)/\sqrt{2h_1}$, comunque piccolo si fissi il numero positivo δ.

Per l'equazione $y'' = -y + 1$ si ha

$$\int_0^y f(x,\, t)dt = -\frac{1}{2}y^2 + y \geqslant -\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)y^2 - \frac{1}{4\varepsilon}, \qquad (\varepsilon > 0),$$

e potrà porsi $h_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $h_2 = \frac{1}{4\varepsilon}$. L'equazione considerata per $0 < a < \pi/\sqrt{1+2\varepsilon}$, $(\varepsilon > 0)$ ammette quindi un integrale che soddisfa le condizioni $y(0) = y(a) = 0$, mentre l'integrale generale dell'equazione è $y = c_1$ sen $x + c_2 \cos x + 1$, e con esso, qualunque siano le costanti c_1, c_2, è impossibile soddisfare simultaneamente le due condizioni $y(0) = y(\pi) = 0$.

§ 6. - Teoremi di separazione, di confronto e di unicità per le equazioni del secondo ordine.

1. Teorema di separazione di TONELLI degli zeri delle soluzioni delle equazioni omogenee del secondo ordine. - 2. Teoremi di confronto degli integrali delle equazioni differenziali del secondo ordine. Teoremi di unicità.

1. - Vogliamo dare una generalizzazione di L. TONELLI (²) del teorema di separazione dimostrato nel Cap. IV, § 2, n. 7 per le equazioni lineari omogenee del secondo ordine.

Sia

$$f(x;\, y,\, y',\, y'') = 0 \tag{1}$$

un'equazione differenziale del secondo ordine, omogenea rispetto a y, y', y''

$$f(x;\, cy,\, cy',\, cy'') = c^m f(x;\, y,\, y',\, y''), \qquad (m \text{ intero})$$

e tale che per essa sussista il teorema di unicità della soluzione passante per un punto qualunque della striscia $a \leqslant x \leqslant b$,

---

(¹) S. CINQUINI, lav. cit., p. 103.

(²) L. TONELLI: *Un'osservazione su un teorema di Sturm*, Boll. Un. Mat. It., 6 (1927), pp. 126-128.

con una data direzione, ad eccezione al più dei punti posti sull'asse x.

Allora se $y_1(x)$, $y_2(x)$ *sono due integrali della* (1) *non identicamente nulli, ed* x_1 *e* x_1' *sono due zeri consecutivi di* $y_1(x)$ *contenuti in* (a, b), *e tali che* $y_2(x_1) \neq 0$, $y_2(x_1') \neq 0$, *fra* x_1 *e* x_1' *vi è uno zero e uno soltanto di* $y_2(x)$.

Supponiamo per assurdo che $y_2(x)$ sia diverso da zero in (x_1, x_1'), e perciò dello stesso segno, e sia $\min\limits_{x_1 \leqslant x \leqslant x'_1} |y_2(x)| = m > 0$.

Senza alterare le generalità possiamo anche supporre $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ per $x_1 < x < x_1'$, e se consideriamo il fascio di integrali della (1), $y = cy_1(x)$, $c > 0$, abbiamo che per c sufficientemente piccolo [grande] la curva $y = cy_1(x)$ non incontra [ha punti comuni con] la curva $y = y_2(x)$, e se c_0 è l'estremo superiore dei valori di c per i quali $y = cy_1(x)$ non ha punti in comune con $y = y_2(x)$, è subito visto che le due curve $y = c_0y_1(x)$, $y = y_2(x)$ avranno un sol punto a comune la cui ascissa $\bar{x}$ è tale che $x_1 < \bar{x} < x_2$, con $c_0y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$. Infatti se per $x_1 \leqslant x \leqslant x_1'$ si avesse $c_0y_1(x) < y_2(x)$, a motivo della continuità esisterebbero dei valori di $c > c_0$ per i quali, sempre per $x_1 \leqslant x \leqslant x_1'$, si avrebbe $cy_1(x) < y_2(x)$ e ciò non può essere; e se la curva $y = c_0y_1(x)$ avesse due o più punti comuni con $y = y_2(x)$, esisterebbero dei valori di $c < c_0$ per i quali le corrispondenti curve $y = cy_1(x)$ avrebbero almeno due punti a comune con $y = y_2(x)$ e ciò non può essere.

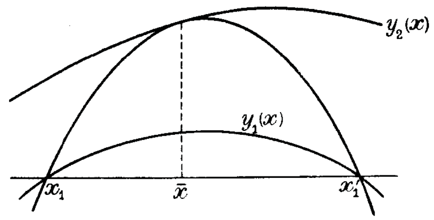

Fig. 17.

Si ha poi per $h > 0$

$$[c_0y_1(\bar{x}+h) - c_0y_1(\bar{x})]/h < [y_2(\bar{x}+h) - y_2(\bar{x})]/h$$
$$[c_0\,y_1(\bar{x}-h) - c_0y_1(\bar{x})]/(-h) > [y_2(\bar{x}-h) - y_2(\bar{x})]/(-h)$$

perciò $c_0y_1'(\bar{x}) = y_2'(\bar{x})$ e le due curve $y = c_0y_1(x)$, $y = y_2(x)$ si toccano in $(\bar{x}, y_2(\bar{x}))$ e ciò è assurdo, perchè essere dovrebbero coincidere, per l'ipotesi fatta, in tutto (x_1, x_1').

Abbiamo dunque che $y_2(x)$ ha almeno uno zero *interno* a (x_1, x_1'), e per il solito ragionamento [Cap. IV, § 2, n. 7, *a*)] uno soltanto.

2. - *a*) Data l'equazione $y'' = f(x; y, y')$ [le due equazioni $y'' = f(x; y, y')$, $y'' = g(x; y, y')$] E. PICARD, G. SCORZA - DRAGONI, R. CACCIOPPOLI, A. ROSENBLATT, M. PICONE, C. MIRANDA, I. GROPPI, S. CINQUINI [1], hanno assegnato notevoli criteri di unicità [di confronto] che per la loro natura ricordano il criterio di PEANO da noi esposto al n. 5, *a*) del § 2. I ragionamenti di G. SCORZA-DRAGONI, usati da I. GROPPI per il confronto di due equazioni del secondo ordine, permettono di esporre tali criteri in forma semplicissima.

b) *Siano* $f(x; y, y')$, $g(x; y, y')$ *definite nello strato* S

$$S:\quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad -\infty < y' < +\infty, \qquad (a < b),$$

e

$$f(x; y, y') < g(x; y, y'). \tag{2}$$

Se $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ *sono rispettivamente due integrali delle equazioni*

$$y'' = f(x; y, y'), \quad y'' = g(x; y, y'),$$

---

[1] Cfr.: É. PICARD, op. cit. nel § precedente, p. 9; G. SCORZA - DRAGONI: *a*) *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale del secondo ordine*, Giorn. di Mat. di Battaglini, 69 (1931), [pp. 77-112], n. 14; *b*) *A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per una equazione differenziale del secondo ordine*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 22 (1935), [pp. 44-48], p. 45; R. CACCIOPPOLI: *Problemi non lineari in analisi funzionale*, Rend. Sem. Mat. di Roma, (3), 1 (1933), (pp. 13-22), p. 20; A. ROSENBLATT: *Sur les théorèmes de M. Picard dans la théorie des problèmes aux limites des équations différentielles du second ordre non linéaires*, Bull. des Sciences Mathém., 57 (1933), [pp. 100-106], p. 105; M. PICONE, teorema riportato nella memoria di C. MIRANDA: *Teoremi e metodi per l'integrazione numerica dell'equazione differenziale di Fermi*, Mem. della R. Acc. d'Italia, 5 (1934), [pp. 285-322], p. 291; I. GROPPI: *A proposito di alcuni criteri di confronto per le equazioni differenziali del secondo ordine*, Boll. Un. Mat. It., 17 (1938), pp. 179-182; S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del secondo ordine.* Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (2), 8 (1939), [pp. 1-22], p. 6.

verificanti le condizioni

$$y_1(a) \geqslant y_2(a), \quad y_1(b) \geqslant y_2(b), \tag{3}$$

e se una almeno delle due funzioni f, g, *è non decrescente rispetto ad* y, *allora è in tutto* (a, b)

$$y_1(x) \geqslant y_2(x). \tag{4}$$

Supponiamo la f non decrescente rispetto a y [ugualmente si ragiona se questa ipotesi vale per la g] e supponiamo per assurdo che la (4) non sia verificata in tutto (a, b), e sia $\bar{x}$ un punto per il quale $y_1(\bar{x}) - y_2(\bar{x}) < 0$. Consideriamo il massimo intervallo (a_1, b_1), contenente $\bar{x}$, nel cui interno sia sempre

$$y_1(x) < y_2(x), \quad (a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b); \tag{5}$$

si avrà anche

$$\begin{cases} y_1(a_1) = y_2(a_1), & y_1(b_1) = y_2(b_1); \\ y_1'(a_1) \leqslant y_2'(a_1), & y_1'(b_1) \geqslant y_2'(b_1). \end{cases} \tag{6}$$

In (a_1, b_1) vi è almeno un punto ξ nel quale la differenza $y_2(x) - y_1(x)$ assume il suo valore massimo, e sarà ivi $y_1'(\xi) = y_2'(\xi)$; avremo allora, tenuto conto che la f è non decrescente rispetto a y,

$$\begin{aligned} y_2''(\xi) - y_1''(\xi) &= g[\xi;\ y_2(\xi), y_2'(\xi)] - f[\xi;\ y_1(\xi), y_1'(\xi)] \\ &\geqslant g[\xi, y_2(\xi), y_2'(\xi)] - f[\xi;\ y_2(\xi), y_2'(\xi)] > 0, \end{aligned}$$

mentre trattandosi di un massimo deve aversi $y_2''(\xi) - y_1''(\xi) \leqslant 0$ [1].

c) La dimostrazione esposta in b) vale se $f(x; y, y') \leqslant g(x; y, y')$, *ed* f [oppure g] *è* crescente *rispetto a* y.

Segue allora il seguente teorema di unicità: *data l'equazione*

$$y'' = f(x;\ y, y') \tag{7}$$

ove f *è definita nello strato* S

$$S:\ a \leqslant x \leqslant b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty, \qquad (a < b),$$

se f *è crescente rispetto a* y, *e se* $y_1(x)$, *e* $y_2(x)$ *sono due eventuali integrali della* (7), *soddisfacenti le condizioni ai limiti*

$$y_1(a) = y_2(a), \quad y_1(b) = y_2(b),$$

allora essi coincidono in tutto (a, b).

---

[1] Cfr. S. Cinquini, lav. cit. p. 6.

d) Il teorema di confronto dimostrato in b) sussiste pure se

$$f(x;\ y, y') \leqslant g(x;\ y, y')$$

e la f [*oppure la* g] *è non decrescente rispetto ad* y *e monotona rispetto a* y'.

Supponiamo la $f(x;\ y, y')$ non decrescente rispetto a y ed y' [non decrescente rispetto a y e non crescente rispetto a y'] e ragionando come in b) valgano le (5) e (6).

Non può aversi in tutto (a_1, b_1)

$$y_1'(x) - y_2'(x) \geqslant 0, \qquad [y_1'(x) - y_2'(x) \leqslant 0]$$

perchè seguirebbe $y_1(x) \equiv y_2(x)$ contro la (5), e sia allora x_1 un punto di (a_1, b_1) dove

$$y_1'(x_1) < y_2'(x_1), \qquad [y_1'(x_1) > y_2'(x_1)];$$

si avrà per la quarta [terza] delle (6)

$$x_1 < b_1, \qquad [a_1 < x_1].$$

Se ξ è l'estremo superiore [inferiore] dei valori di x tali che $y_1'(t) < y_2'(t)$, $[y_1'(t) > y_2'(t)]$ per tutti gli t tali che $x_1 \leqslant t < x$, $[x < t \leqslant x_1]$, sarà $\xi \leqslant b_1$ $[\xi \geqslant a_1]$, e anche $y_1'(x) < y_2'(x)$ per $x_1 \leqslant x < \xi$, $[y_1'(x) > y_2'(x)$ per $\xi < x \leqslant x_1]$, e $y_1'(\xi) = y_2'(\xi)$; abbiamo dunque

$$\begin{aligned} & y_1(x) < y_2(x), \quad y_1'(x) < y_2'(x) \quad \text{per} \quad x_1 \leqslant x < \xi, \\ & [y_1(x) < y_2(x), \quad y_1'(x) > y_2'(x) \quad \text{per} \quad \xi < x \leqslant x_1], \end{aligned} \tag{8}$$

e

$$y_1'(\xi) = y_2'(\xi). \tag{9}$$

Segue che per $x_1 \leqslant x \leqslant \xi$, $[\xi \leqslant x \leqslant x_1]$

$$\begin{aligned} y_1''(x) &= f(x;\ y_1(x), y_1'(x)) \leqslant \\ &\leqslant f(x;\ y_2(x), y_2'(x)) \leqslant g(x;\ y_2(x), y_2'(x)) = y_2''(x), \end{aligned}$$

quindi $y_1''(x) \leqslant y_2''(x)$, e perciò dalla (9), per $x_1 \leqslant x \leqslant \xi$, $[\xi \leqslant x \leqslant x_1]$,

$$y_1'(x) - y_2'(x) \geqslant 0, \qquad [y_1'(x) - y_2'(x) \leqslant 0],$$

e ciò è contro la seconda delle (8).

e) Dal teorema di confronto ora dimostrato in d) segue il *criterio di unicità di* G. SCORZA-DRAGONI [1]: *Se* $f(x; y, y')$ *è definita nello strato* S

$$S:\quad a \leqslant x \leqslant b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty, \qquad (a<b)$$

e se $f(x; y, y')$ *è non decrescente rispetto a* y, *e monotona rispetto a* y', *allora due eventuali integrali* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *dell'equazione*

$$(7) \qquad y'' = f(x; y, y')$$

soddisfacenti le condizioni

$$y_1(a) = y_2(a), \quad y_1(b) = y_2(b)$$

coincidono in tutto (a, b) [2].

§ 7. - Problemi ai limiti per l'equazione $y'' = f(x, y, y')$ Teoremi di esistenza.

1. Soluzioni appartenenti ad un campo limitato da due curve integrali. Teorema di esistenza di G. SCORZA-DRAGONI. Dimostrazione di S. CINQUINI. - 2. Esistenza di curve integrali passanti per due punti assegnati nel caso di $f(x; y, y')$ limitata. - 3. Il caso di $f(x; y, y')$ non limitata. Teoremi di esistenza di TONELLI. Teorema di esistenza di S. CINQUINI.

1\. - *a*) Dedicheremo questo paragrafo a trovare alcuni teoremi generali di esistenza per le equazioni $y'' = f(x; y, y')$, e il lettore noterà che nei teoremi dei nn. 1 e 3 l'uso dei polinomi di approssimazione di SEVERINI [3] rende particolarmente semplici le dimostrazioni delle proposizioni che vogliamo stabilire.

---

[1] G. SCORZA-DRAGONI: *A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per una equazione differenziale del secondo ordine*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 22 (1935), pp. 44-48.

[2] G. SCORZA-DRAGONI ha costruito degli esempi ove la sola non decrescenza della $f(x; y, y')$ rispetto a y non è sufficiente a garantire l'unicità degli integrali dell'equazione (7); cfr. lav. cit. in [1], p. 45.

[3] C. SEVERINI: *Sopra gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie d'ordine superiore al primo con valori prestabiliti in punti dati*, Atti della R. Acc. Sc., Torino, 40 (1905), pp. 858-869.

b) Sull'uso dei polinomi di approssimazione di SEVERINI è basata appunto la dimostrazione di S. CINQUINI [1] del seguente teorema di G. SCORZA-DRAGONI: *Sia* $f(x; y, y')$ *una funzione finita e continua nel campo*

$$C:\quad a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \quad -\infty < y' < +\infty, \qquad (a<b),$$

ove $y_1(x) \leqslant y_2(x)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$; *siano* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *in tutto* (a, b) *due integrali dell'equazione differenziale*

$$(1) \qquad y'' = f(x; y, y'),$$

e inoltre esista un numero finito M, *tale che, in tutto* C, *sia*

$$(2) \qquad |f(x; y, y')| \leqslant M,$$

allora se (x_i, y_i), $(i=0, 1)$ *sono due punti qualunque soddisfacenti le disuguaglianze*

$$a \leqslant x_0 < x_1 \leqslant b; \quad y_1(x_i) \leqslant y_i \leqslant y_2(x_i), \qquad (i=0, 1),$$

l'equazione (1) *ammette in* (x_0, x_1) *almeno una soluzione* $y = y_0(x)$, *con*

$$(3) \qquad y_1(x) \leqslant y_0(x) \leqslant y_2(x),$$

la quale soddisfa le condizioni ai limiti

$$y_0(x_0) = y_0; \qquad y_0(x_1) = y_1.$$

Definiamo nel campo

$$C_\infty:\quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty,$$

una funzione ausiliaria $f_0(x; y, y')$ ponendo:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &f_0(x; y, y') = f(x; y, y') \quad \text{per ogni } (x; y, y') \text{ di } C; \\ &f_0(x; y, y') = [y - y_2(x)]^2/[1 + \{y - y_2(x)\}^2] + \\ &\qquad\qquad + f(x; y_2(x), y') \quad \text{per } y > y_2(x), \\ &f_0(x; y, y') = -[y - y_1(x)]^2/[1 + \{y - y_1(x)\}^2] + \\ &\qquad\qquad + f(x; y_1(x), y') \quad \text{per } y < y_1(x); \end{aligned}$$

---

[1] S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali (non lineari) del secondo ordine*, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (2), 8 (1939), pp. 1-22.

risulta dalla (2) in tutto C_∞

(5) $$|f_0(x;\,y,\,y')|<M+1.$$

Poniamo

$$R=|(y_1-y_0)/(x_1-x_0)|,\quad L_1=R+(M+1)(x_1-x_0),$$
$$\Gamma=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}\{|y_1(x)|,\ |y_2(x)|\},\quad L_0=\Gamma+2L_1(x_1-x_0).$$

Consideriamo conformemente al teorema di WEIERSTRASS [1] una successione di polinomi razionali interi nelle variabili x, y, y', $P_n(x;\,y,\,y')\}$, la quale in tutto il campo C_L

$$C_L:\quad x_0\leqslant x\leqslant x_1,\qquad -L_0\leqslant y\leqslant L_0,\qquad -2L_1\leqslant y'\leqslant 2L_1$$

converga *uniformemente* verso $f_0(x;\,y,\,y')$, e si definisca in tutto C_∞ una successione di funzioni $\{Q_n(x;\,y,\,y')\}$ ponendo

$$Q_n(x;\,y,\,y')\equiv P_n(x;\,y,\,y')\quad \text{se}\quad (x;\,y,\,y')\ \text{appartiene a}\ C_L,$$
$$Q_n(x;\,y,\,y')\equiv P_n(x;\,y,\,2L_1)\quad \text{se}\quad -L_0\leqslant y\leqslant L_0\ \text{e}\ y'>2L_1,$$
$$Q_n(x;\,y,\,y')\equiv P_n(x;\,y,-2L_1)\quad \text{se}\quad -L_0\leqslant y\leqslant L_0\ \text{e}\ y'<-2L_1,$$

e infine

$$Q_n(x;\,y,\,y')\equiv Q_n(x;\,L_0,\,y')\quad \text{per}\quad y>L_0,\ |y'|<+\infty,$$
$$Q_n(x;\,y,\,y')\equiv Q_n(x,-L_0,\,y')\quad \text{per}\quad y<-L_0,|y'|<+\infty,$$

talchè se ad esempio $y>L_0$, $y'>2L_1$ si ha

$$Q_n(x;\,y,\,y')\equiv Q_n(x,\,L_0,\,2L_1)=P_n(x,\,L_0,\,2L_1).$$

Ciascuna $Q_n(x;\,y,\,y')$, $(n=1, 2,\ldots)$ risulta continua e limitata in tutto C_∞ e ivi a rapporto incrementale limitato rispetto a tutte le sue variabili, e per la (5) è possibile determinare un intero $\bar{n}$, in modo che per ogni $n>\bar{n}$, risulti in tutto C_∞

(6) $$|Q_n(x;\,y,\,y')|<M+1.$$

Si consideri, per $n>\bar{n}$ l'equazione differenziale

(7) $$y''=Q_n(x;\,y,\,y'),$$

[1] Cfr. ad esempio L. TONELLI: *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali,* Rend. Circ. Mat. Palermo, 29 (1910), (pp. 1-36), p. 9.

e si osservi che, fissato comunque un valore $\bar{y}'$ dell'intervallo $(-L_1,\,L_1)$, esiste un integrale $y=\bar{y}_n(x)$ della (7), soddisfacente le condizioni di CAUCHY

(8) $$\bar{y}_n(x_0)=y_0,\qquad \bar{y}_n'(x_0)=\bar{y}',$$

e avente per campo di esistenza l'intervallo (x_0, x_1), [Cap. I, § 3, n. 4].

Si ha

$$\bar{y}_n'(x)=\bar{y}_n'(x_0)+(x-x_0)\bar{y}''(\xi),\quad x_0<\xi<x_1,$$

perciò

$$|\bar{y}_n'(x)|\leqslant(M+1)(x-x_0)+L_1$$

(9) $$|\bar{y}_n'(x)|\leqslant 2L_1.$$

Si osservi pure che con le condizioni iniziali (8), e $\bar{y}'\geqslant L_1$, si ha

$$\bar{y}_n'(x)\geqslant y'-|x-x_0|\,|y''(\xi)|\geqslant L_1-|x_1-x_0|(M+1)=R,\ \bar{y}_n'(x)\geqslant R,$$

perciò

$$\bar{y}_n(x_1)-\bar{y}_n(x_0)\geqslant R\,|x_1-x_0|\geqslant|y_1-y_0|,$$

e quindi

$$\bar{y}_n(x_1)\geqslant y_1,$$

e analogamente con le condizioni iniziali (8), e $\bar{y}'\leqslant -L_1$ risulterà qualunque sia x di $(x_0,\,x_1)$ $\bar{y}_n'(x)\leqslant -R$, e quindi

$$\bar{y}_n(x_1)\leqslant y_1.$$

L'integrale $y=\bar{y}_n(x)$ della (7) è una funzione continua di $\bar{y}'$, [Cap. I, § 5, n. 1, *a*)], quindi per ogni $n>\bar{n}$, esiste almeno un valore di $\bar{y}'$, dell'intervallo $(-L_1,\,L_1)$, in corrispondenza del quale l'integrale $y=\bar{y}_n(x)$ della (7) che indicheremo con $y=y_n(x)$ soddisfa le due condizioni

(10) $$y_n(x_0)=y_0,\qquad y_n(x_1)=y_1.$$

Abbiamo ora in tutto $(x_0,\,x_1)$, e per $n>\bar{n}$

(11₁) $$|y_n'(x)|\leqslant 2L_1,$$
$$|y_n(x)|\leqslant 2L_1(x-x_0)+|y_n(x_0)|\leqslant L_0,$$

(11₂) $$|y_n(x)|\leqslant L_0,$$

ossia ogni punto $(x, y_n(x), y_n'(x))$, $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$, appartiene al campo C_L; e perciò $y=y_n(x)$ è un'integrale dell'equazione

$$(11_3) \qquad y_n''=P_n(x;\, y_n,\, y_n'),$$

soddisfacente le condizioni iniziali (10) e salvo a crescere $\bar{n}$ si potrà supporre per $n>\bar{n}$,

$$(11_4) \qquad |y_n''(x)|<M+1.$$

Essendo verificate le (11_1), (11_2), (11_4), per il teorema di ASCOLI [Cap. I, § 6, n. 2, nota *c*)] dalla successione $\{y_n(x)\}$ possiamo estrarre una successione

$$y_{\lambda_1}(x),\ y_{\lambda_2}(x), \ldots,\ y_{\lambda_n}(x), \ldots \qquad (\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots)$$

in modo che essa, e

$$y'_{\lambda_1}(x),\ y'_{\lambda_2}(x), \ldots,\ y'_{\lambda_n}(x), \ldots$$

convergano entrambe uniformemente in tutto (x_0, x_1) rispettivamente verso una funzione $y_0(x)$ e la sua derivata $y_0'(x)$, e per le cose dette, ogni punto $(x;\, y_0(x),\, y_0'(x))$ appartiene al campo C_L.

Se teniamo ora conto che anche la successione

$$\{P_{\lambda_n}(x;\, y_{\lambda_n}(x),\, y'_{\lambda_n}(x))\},$$

quando $n\to\infty$, converge uniformemente in (x_0, x_1) verso

$$f_0(x;\, y_0(x),\, y_0'(x)),$$

dalla equazione

$$y''_{\lambda_n}=P_{\lambda_n}(x;\, y_{\lambda_n},\, y'_{\lambda_n})$$

risulta, quando $n\to\infty$

$$y_0''(x)=f_0(x;\, y_0(x),\, y_0'(x))$$

talchè per dimostrare il teorema basterà verificare che $y_0(x)$ soddisfa la limitazione (3).

Si osserverà per questo che per $y<y_1(x)$ $[y>y_2(x)]$, la funzione $f_0(x;\, y,\, y')$ è una funzione *crescente* di y, e basterà ripetere il ragionamento del n. 2, *b*) del § 6 per concludere che non può aversi $y_0(x)<y_1(x)$ $[y_2(x)<y_0(x)]$.

2. - Sempre nell'ipotesi di $f(x;\, y,\, y')$ limitata stabiliremo un secondo teorema di esistenza.

Sia $f(x;\, y,\, y')$ finita e continua nello strato S

$$S:\quad a\leqslant x\leqslant b, \quad -\infty<y<+\infty, \quad -\infty<y'<+\infty, \quad (a<b),$$

e in tutto S sia

$$|f(x;\, y,\, y')|\leqslant M;$$

allora se x_1 e x_2 sono tali che

$$a\leqslant x_1<x_2\leqslant b,$$

e y_1 ed y_2 sono due costanti qualsiasi, esiste almeno in (x_1, x_2) un'integrale dell'equazione

$$(12) \qquad y''=f(x;\, y,\, y')$$

il quale soddisfa le condizioni ai limiti

$$(13) \qquad y(x_1)=y_1, \qquad y(x_2)=y_2.$$

Di questo teorema che è un caso particolare di un altro più generale di G. D. BIRKHOFF e O. D. KELLOG [1] [ritrovato successivamente da R. CACCIOPPOLI [2]] una dimostrazione elementare è stata elaborata da G. SCORZA-DRAGONI [3], noi daremo qui il teorema come conseguenza quasi immediata di quello del n. 1.

Sia y_1' un numero arbitrario, e $y=y(x)$ l'equazione di una curva integrale Γ della (12), soddisfacente le condizioni di CAUCHY

$$y(x_1)=y_1, \qquad y'(x_1)=y_1'.$$

Si ha

$$(14) \qquad y(x)=\int_{x_1}^{x}(x-t)\, f[t;\, y(t),\, y'(t)]dt+(x-x_1)y_1'+y_1$$

$$y'(x)=\int_{x_1}^{x} f[t;\, y(t),\, y'(t)]dt+y_1'$$

perciò

$$|y(x)|\leqslant M\frac{(x-x_1)^2}{2}+|y_1'||x-x_1|+|y_1|, \quad |y'(x)|\leqslant M|x-x_1|+|y_1'|,$$

e da queste limitazioni segue che il campo di esistenza delle curve integrali considerate è l'intervallo (x_1, x_2). Infatti se ξ è tale

---

[1] G. D. BIRKHOFF, O. D. KELLOG: *Invariant points in function space*, Trans. of the Am. Math. Soc., 23 (1922), [pp. 96-115], p. 109.

[2] R. CACCIOPPOLI: *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 11 (1930), pp. 794-799.

[3] G. SCORZA-DRAGONI: *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine*, Math. Ann., 105 (1931), pp. 133-143.

che $x_1 < \xi \leqslant x_2$, è $\overline{\lim}_{x \to \xi - 0} |y(x)| < +\infty$, $\overline{\lim}_{x \to \xi - 0} |y'(x)| < +\infty$, quindi [§ 3, n. 1, *c*), *d*)] la curva Γ deve avere il suo estremo destro a distanza finita e sulla frontiera di S, e perciò $y(x)$ è definita in (x_1, x_2).

Sian ora $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ due integrali della (12) corrispondenti alle condizioni iniziali

$$y_1(x_1) = y_1, \qquad y_1'(x_1) = -L,$$
$$y_2(x_1) = y_1, \qquad y_1'(x_1) = L;$$

si ha dalla (14)

$$y_1(x) \leqslant M \frac{(x-x_1)^2}{2} + y_1 - L(x-x_1),$$

$$y_2(x) \geqslant -M \frac{(x-x_1)^2}{2} + y_1 + L(x-x_1),$$

e se scegliamo L in modo che sia $M(x_2 - x_1) \leqslant 2L$, risulterà in (x_1, x_2), $y_1(x) \leqslant y_2(x)$, e basterà prendere ancora L in modo che sia

$$L > \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| + \frac{M(x_2 - x_1}{2},$$

perchè risulti $y_1(x_2) < y_2 < y_1(x_2)$, e allora l'applicazione del teorema dimostrato nel n. 1 consente di concludere che esiste almeno un integrale dell'equazione (12) che verifica le condizioni ai limiti (13).

3. - *a*) Interessa nelle applicazioni considerare equazioni del tipo $y'' = f(x; y, y')$ nel caso che $f(x; y, y')$ diventi infinità con gli elementi y e y'.

Ricerche in proposito sono dovute a R. Caccioppoli, M. Nagumo, T. Satô, G. Scorza-Dragoni, S. Cinquini, L. Tonelli [1];

[1] R. Caccioppoli: *Problemi non lineari in analisi funzionale*, Rend. Sem. Mat. di Roma, (3), 1 (1931), (pp. 13-22), p. 20; M. Nagumo: *Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, (3), 19 (1937), pp. 861-866; T. Satô: *Sur l'équation différentielles $y'' = f(x, y, y')$*, Proc. of the Imp. Ac. of Japan, 13 (1937), pp. 348-351; G. Scorza-Dragoni: *a*) *Su un problema dei valori ai limiti per le equazioni differenziali del secondo ordine*, Rend. Sem. Mat. di Roma, (4), 2 (1938), pp. 177-215; *b*) *Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti*, id., pp. 255-275; S. Cinquini, lav. cit. al n. 1; L. Tonelli: *Sull'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$*, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (2), 8 (1939), pp. 75-88.

noi qui daremo la dimostrazione di due teoremi di esistenza di L. Tonelli, di portata assai generale, e da lui provati in modo semplice e rapido.

b) *Sia $f(x; y, y')$ una funzione finita e continua nello strato*

$$S: \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty, \quad (x_1 < x_2)$$

e tale che, presi ad arbitrio un $\sigma > 0$ ed un $Y \geqslant 0$, si possa corrispondentemente trovare una funzione $\psi(x)$, positiva ed integrabile (nel senso di Lebesgue*) in (x_1, x_2), in modo da aversi, in tutti i punti di S*

(15) $\quad |f(x; y, y')| < \sigma |y'| + \psi(x), \qquad$ *per* $|y| \leqslant Y$,

(16) $\quad f(x; y, y') > -\sigma\{|y| + |y'|\} - \psi(x) \qquad$ *per* $y \geqslant Y$,

(17) $\quad f(x; y, y') < \sigma\{|y| + |y'|\} + \psi(x) \qquad$ *per* $y \leqslant -Y$.

Allora fissati comunque due numeri y_1 e y_2, esiste in (x_1, x_2) almeno una soluzione dell'equazione

(18) $$y'' = f(x; y, y')$$

tale che si abbia

$$y(x_1) = y_1, \qquad y(x_2) = y_2.$$

Effettuando come al n. 1, *a*) del § 5 la trasformazione

$$Y = y - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x - \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1},$$

poichè le ipotesi (15), (16), (17) importano che per l'equazione trasformata $Y'' = F(x; Y, Y')$ sono ancora verificate le (15), (16), (17), supporremo senz'altro di voler determinare gli integrali dell'equazione (18) che soddisfano le condizioni ai limiti

(19) $$y(x_1) = 0, \qquad y(x_2) = 0,$$

nella sola ipotesi che ad ogni $\sigma > 0$ e arbitrario si possa far corrispondere una funzione $\psi(x)$, positiva e integrabile in (x_1, x_2), in modo da aversi per tutti i punti di S

(16′) $\quad f(x; y, y') > -\sigma\{|y| + |y'|\} - \psi(x) \qquad$ per $y \geqslant 0$,

(17′) $\quad f(x; y, y') < \sigma\{|y| + |y'|\} + \psi(x) \qquad$ per $y \leqslant 0$.

c) La funzione $y=y(x)$ *sia un integrale dell'equazione* (18) *in un intervallo* (ξ_1, ξ_2) *contenuto in* (x_1, x_2) *e supponiamo per essa verificate le condizioni*

$$(20_1) \qquad \begin{cases} y'(\xi_2)=0 \\ y(x)\geqslant 0, \quad y'(x)\geqslant 0 \quad \text{per} \quad \xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_2, \\ [0\leqslant y(\xi_1)\leqslant y(x)\leqslant y(\xi_2) \quad \text{in} \quad (\xi_1, \xi_2)]. \end{cases}$$

Sia $\sigma>0$ e tale che

$$(21) \qquad \sigma(x_2-x_1)(x_2-x_1+1)<1/2;$$

poichè per tutti i punti dello strato S ove è $y\geqslant 0$ vale la (16'), abbiamo in (ξ_1, ξ_2)

$$(22) \qquad -y''=-f(x;\, y,\, y')<\sigma\{y(x)+y'(x)\}+\psi(x),$$

e posto

$$H=\int_{x_1}^{x_2}\psi(x)dx, \qquad \Lambda=\max_{\xi_1\leqslant x\leqslant \xi_2}|y'(x)|,$$

dalla (22), integrando in (x, ξ_2) otteniamo

$$y'(x)<\sigma\int_x^{\xi_2}[y(x)+y'(x)]dx+H,$$

$$y'(x)<\sigma[y(\xi_2)+\Lambda](\xi_2-\xi_1)+H,$$

$$\Lambda<\sigma[y(\xi_2)+\Lambda](\xi_2-\xi_1)+H,$$

ma si ha $y(\xi_2)\leqslant y(\xi_1)+(\xi_2-\xi_1)\Lambda$, perciò

$$\Lambda[1-\sigma(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_1+1)]<\sigma y(\xi_1)(\xi_2-\xi_1)+H,$$

e per la (21), $\Lambda<2\sigma y(\xi_1)(\xi_2-\xi_1)+2H$, e infine $\Lambda<y(\xi_1)+2H$, Abbiamo così dimostrato che verificate le (20_1) si ha

$$0\leqslant y'(x)<y(\xi_1)+2H$$

e a più forte ragione

$$(23_1) \qquad 0\leqslant y'(x)<y(x)+2H, \qquad (\xi_1\leqslant x\leqslant \xi_2).$$

Analogamente se $y=y(x)$ è in (ξ_1, ξ_2) una soluzione della (18) e verifica le condizioni

$$(20_2) \qquad y'(\xi_1)=0; \quad y(x)\geqslant 0, \quad y'(x)\leqslant 0 \quad \text{per} \quad \xi_1\leqslant x\leqslant \xi_2,$$

$$(20_3) \qquad y'(\xi_2)=0; \quad y(x)\leqslant 0, \quad y'(x)\leqslant 0 \quad \text{per} \quad \xi_1\leqslant x\leqslant \xi_2,$$

$$(20_4) \qquad y'(\xi_1)=0; \quad y(x)\leqslant 0, \quad y'(x)\geqslant 0 \quad \text{per} \quad \xi_1\leqslant x\leqslant \xi_2,$$

si ha rispettivamente

$$(23_2) \qquad 0\leqslant -y'(x)\leqslant y(x)+2\mathrm{H},$$

$$(23_3) \qquad 0\leqslant -y'(x)\leqslant -y(x)+2\mathrm{H},$$

$$(23_4) \qquad 0\leqslant y'(x)\leqslant -y(x)+2\mathrm{H},$$

e sarà facile dimostrare che *se* $y=y(x)$ *è una soluzione della* (18) *che verifica le condizioni ai limiti* (19), si ha per ogni x di (x_1, x_2)

$$(23) \qquad |y'(x)|<|y(x)|+2\mathrm{H}.$$

Nei punti in cui $y'(x)=0$ la (23) è evidente; in un punto $\bar{x}$ di (x_1, x_2) sia allora $y'(\bar{x})\neq 0$ e sia (ξ_1, ξ_2) il massimo intervallo contenente $\bar{x}$ in cui $y'(x)\neq 0$. Non potrà aversi simultaneamente $\xi_1=x_1$, $\xi_2=x_2$ perchè internamente ad (x_1, x_2), $y'(x)$ deve annullarsi almeno una volta; sono così possibili tre casi

i) $y'(\xi_1)=0, \quad y'(\xi_2)=0 \quad$ e $\quad y'(x)\neq 0 \quad$ per $\quad \xi_1<x<\xi_2$,

ii) $y(\xi_1)=0, \quad y'(\xi_2)=0 \quad$ e $\quad y'(x)\neq 0 \quad$ per $\quad \xi_1<x<\xi_2$,

iii) $y'(\xi_1)=0, \quad y(\xi_2)=0 \quad$ e $\quad y'(x)\neq 0 \quad$ per $\quad \xi_1<x<\xi_2$;

nel caso *i)* o $y(x)$ internamente a (ξ_1, ξ_2) ha lo stesso segno, oppure (ξ_1, ξ_2) si spezza in due intervalli e nell'interno di ciascuno di essi $y(x)$ ha lo stesso segno, nei due casi *ii)* e *iii)* $y(x)$ ha internamente a (ξ_1, ξ_2) lo stesso segno, talchè applicando le (23_1), (23_2), (23_3), (23_4) segue la (23).

Posto $|y(x)|=z(x)$ si ha dalla (23), $z'(x)<z+2\mathrm{H}$, quindi

$$0\leqslant z(x)\leqslant\int_{x_1}^{x}[z+2H]dx$$

e per il lemma di GRONWALL [Cap. I, § 5, n. 3]

$$0\leqslant|y(x)|\leqslant 2H(x_2-x_1)\,e^{x_2-x_1},$$

e allora

$$|y'(x)| \leqslant 2H\ [1+(x_2-x_1)\, e^{x_2-x_1}],$$

abbiamo dunque che *se $y=y(x)$ è in (x_1, x_2) un integrale dell'equazione* (18), *e verifica le condizioni ai limiti* (19), *si ha*

(24) $|y(x)| \leqslant 2H(x_2-x_1)\, e^{x_2-x_1},\ |y'(x)| \leqslant 2H\,[1+(x_2-x_1)\, e^{x_2-x_1}].$

d) Per completare la dimostrazione del teorema procederemo come nel n. 1.

Si ponga

$$H_0 = 2H\,[1+(x_2-x_1)\, e^{x_2-x_1}]+1$$

e sia S_0 il parallelepipedo definito dalle limitazioni

$$S_0:\quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\quad |y| \leqslant H_0,\quad |y'| \leqslant H_0\,.$$

Consideriamo una successione $\{P_n(x;\, y,\, x')\}$ di polinomi definita in S_0, tale che in tutto S_0 sia

$$|f(x;\, y,\, y') - P_n(x;\, y,\, y')| < \frac{1}{n},\quad (n=1,\, 2,\ldots)$$

e corrispondentemente ad ogni P_n definiamo in S una funzione $f_n(x;\, y,\, y')$ ponendola uguale

a	$P_n(x;\, y,\, y')$	in	S_0,		
a	$P_n(x;\, y,\, H_0)$	per	$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$,	$\lvert y\rvert \leqslant H_0$,	$y' > H_0$,
a	$P_n(x;\, y, -H_0)$	per	$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$,	$\lvert y\rvert \leqslant H_0$,	$y' < -H_0$,
a	$f_n(x;\, H_0,\, y')$	per	$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$,	$y > H_0$,	$\lvert y'\rvert < +\infty$,
a	$f_n(x; -H_0,\, y')$	per	$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$,	$y < -H_0$,	$\lvert y'\rvert < +\infty$.

Se in S_0 è $|f(x;\, y,\, y')| \leqslant M$, è ivi $|P_n(x;\, y,\, y')| < M+1$, quindi $|f_n(x;\, x,\, y')| < M+1$ in S e perciò $f_n(x,\, y,\, y')$ risulta *continua* e *limitata* in S e soddisfa ivi le condizioni

$$f_n(x;\, y,\, y') > -\sigma\{|y|+|y'|\} - \left\{\psi(x)+\frac{1}{n}\right\} \quad \text{per} \quad y \geqslant 0,$$

$$f_n(x;\, y,\, y') < \sigma\{|y|+|y'|\} + \left\{\psi(x)+\frac{1}{n}\right\} \quad \text{per} \quad y \leqslant 0.$$

L'equazione

$$y'' = f_n(x;\, y,\, y')$$

per il teorema del n. 2 ammette almeno un integrale $y=y_n(x)$ che soddisfa le condizioni iniziali

$$y_n(x_1) = y_n(x_2) = 0, \qquad [y_n''(x) = f(x;\, y_n(y),\, y_n'(x)],$$

e ciascuno di questi integrali, per le cose dette in *c*), soddisfa le limitazioni ottenute dalle (24) cangiando H in $H+(x_2-x_1)/n$ [1], si ha quindi

$$|y_n(x)| \leqslant 2\left[H + \frac{x_2-x_1}{n}\right](x_2-x_1)\, e^{x_2-x_1},$$

$$|y_n'(x)| \leqslant 2\left[H + \frac{x_2-x_1}{n}\right]\left[1+(x_2-x_1)\, e^{x_2-x_1}\right],$$

e per ogni n maggiore di un certo n_0 si avrà $|y_n(x)| < H_0$, $|y_n'(x)| < H_0$, ossia per $n > n_0$, $y_n(x)$ in tutto (x_0, x_1) soddisfa anche l'equazione $y_n'' = P_n(x;\, y,\, y')$ con $|y_n''(x)| < M+1$.

Le successioni $\{y_n(x)\}$, $\{y_n'(x)\}$ sono ugualmente continue e ugualmente limitate e ragionando come al n. 1 si completa senz'altro la dimostrazione del teorema.

e) In particolare ove ci si limiti soltanto alla ricerca degli *integrali dell'equazione*

(18) $$y'' = f(x,\, y,\, y')$$

che soddisfano le condizioni ai limiti

(19) $$y(x_1) = y(x_2) = 0,$$

[il che non richiede la trasformazione sull'equazione indicata in *b*] abbiamo il seguente teorema di TONELLI [2]: *Se $f(x;\, y,\, y')$ è finita e continua nello strato S*

$$S:\quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\quad -\infty < y < +\infty,\quad -\infty < y' < +\infty;\quad (x_1 < x_2),$$

e preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, si può corrispondentemente trovare una funzione $\psi(x)$ positiva, e integrabile in (x_1, x_2), in modo da aversi per tutti i punti di S

$$f(x;\, y,\, y') > -\sigma\{|y|+|y'|\} - \psi(x) \quad \text{per} \quad y \geqslant 0,$$

$$f(x;\, y;\, y') < \sigma\{|y|+|y'|\} + \psi(x) \quad \text{per} \quad y \leqslant 0,$$

---

(1) A $\psi(x)$ si deve ora sostituire $\psi(x)+\frac{1}{n}$.

(2) Cfr. L. TONELLI, lav. cit. in *a*).

allora esiste in (x_1, x_2) *almeno una soluzione dell'equazione* (18) *che si annulla in* x_1 *e in* x_2.

f) Altri teoremi sono stati assegnati dagli Autori citati in *a*) quando $f(x; y, y')$ soddisfi una limitazione del tipo

$$|f(x, y, y')| \leqslant \psi_0(y)y'^2 + \psi_1(x),$$

con $\psi_0(y)$, $\psi_1(x)$ non negative e integrabili rispettivamente in $(-\infty, +\infty)$, (x_1, x_2), ma per essi rimandiamo il lettore alle memorie originali.

§ 8. - I teoremi di esistenza e di unicità di CARATHÉODORY.

1. Teoremi di esistenza e di unicità di CARATHÉODORY per i sistemi normali. - 2. Teoremi di esistenza e di unicità per i sistemi di equazioni differenziali in forma implicita.

1. - *a*) Nello studio dei teoremi di esistenza dei sistemi differenziali

$$dy_i/dx = f_i(x; y_1, y_2, ..., y_m), \qquad (i=1, 2, ..., m),$$

abbiamo sempre supposto la continuità delle funzioni

$$f_i(x; y_1, y_2, ..., y_m),$$

il che implica per le funzioni incognite $y_1(x)$, $y_2(x)$...., $y_m(x)$, la continuità delle loro derivate, ma H. HAHN e C. CARATHÉODORY [1], trasformando le equazioni differenziali in equazioni integrali hanno eliminato questa restrizione.

Vale il seguente teorema di esistenza di CARATHÉODORY:

Siano date m funzioni

$$f_i(x; y_1, y_2, ..., y_m), \qquad (i=1, 2, ..., m),$$

definite nello strato S

$$S: \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad -\infty < y_i < +\infty, \quad (i=1, 2, ..., m), \qquad (a<b),$$

[1] H. HAHN: *Über die Lagrangesche Multiplikatorenmethode in der Variationsrechnung*, Monathsh. für Math. und Phys., 14 (1903), (pp. 325-342), p. 326; C. CARATHÉODORY: *Vorlesungen über Reelle Funktionen*, (zweite aufl., Berlin, 1927), pp. 665-674.

che per valori costanti di $y_1, y_2, ..., y_m$ *siano rispetto ad* x *misurabili in* (a, b), *(nel senso di* LEBESGUE), *e per valori costanti di* x, *scelti in* (a, b), *siano continue rispetto ad* $(y_1, y_2, ..., y_m)$.

Esista una funzione non negativa $M(x)$, *sommabile (nel senso di* LEBESGUE) *in* (a, b), *per la quale sia sempre in* S:

$$(A) \qquad |f_i(x; y_1, y_2, ..., y_m)| \leqslant M(x), \qquad (i=1, 2, ..., m).$$

Si ha allora che se $(x^0; y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$ *è un punto di* S, *esistono* m *funzioni assolutamente continue* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_m(x)$ *che in tutto* (a, b) *verificano il sistema di equazioni integrali*

$$(1) \qquad y_i(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(t; y_1(t), y_2(t), ..., y_m(t))dt, \qquad (i=1, 2, ..., m),$$

le quali quindi in tutto (a, b), *salvo i punti di un insieme di misura nulla, verificano il sistema*

$$(2) \qquad dy_i/dx = f_i(x; y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x)), \qquad (i=1, 2, ..., m).$$

La dimostrazione si consegue agevolmente seguendo il procedimento esistenziale di L. TONELLI da noi esposto nel Cap. I, § 6, n. 3, e osservando che la condizione (*A*) consente di applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno integrale nel primo integrale del secondo membro della (21) del paragrafo ora richiamato

b) Il teorema di unicità di CARATHÉODORY ha il seguente enunciato: *Nelle ipotesi del teorema precedente, se* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_m(x)$ *è la soluzione del sistema* (2) *che soddisfa le condizioni*

$$(3) \qquad y_i(x^0) = y_i^0, \qquad (i=1, 2, ..., m),$$

se esiste una funzione $N(x)$, *sommabile (nel senso di* LEBESGUE) *in* (a, b), *tale che presa ad arbitrio una* m^{upla} *di numeri* $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m$ *risulti in tutto* $(a. b)$

$$(4) \qquad |f_i(x; \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_m) - f_i(x; y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x))| \\ \leqslant N(x) [|\bar{y}_1 - y_1(x)| + |\bar{y}_2 - y_2(x)| + ... + |\bar{y}_m - y_m(x)|] \\ [i=1, 2, ..., m; \quad \text{condizione di LIPSCHITZ}],$$

allora la soluzione del sistema (2), *che verifica le condizioni iniziali* (3), *è unica.*

Sia infatti $\bar y_1(x), \bar y_2(x),\ldots, \bar y_m(x)$ un qualsiasi sistema di funzioni continue che soddisfi il sistema di equazioni integrali

$$(1') \qquad \bar y_i(x)=y_i^0+\int_{x^0}^{x} f_i(t;\, \bar y_1(t), \bar y_2(t),\ldots, \bar y_m(t))dt, \qquad (i=1, 2,\ldots, m)$$

e dimostriamo che

$$(5) \qquad \bar y_i(x)=y_i(x), \qquad (i=1, 2,\ldots, m),$$

per $x^0\leqslant x<b$ (1).

Poniamo

$$(6) \qquad \nu(x)=|\bar y_1(x)-y_1(x)|+\ldots+|\bar y_m(x)-y_m(x)|$$

e indichiamo con $\mu(\xi)$ il massimo di $\nu(x)$ nell'intervallo chiuso (x_0, ξ). Supposto per assurdo che la (5) non sia soddisfatta per $x^0\leqslant x<b$, esiste un punto ξ di questo intervallo in cui $\mu(\xi)>0$, e se ξ^0 è l'estremo inferiore dei valori di ξ per i quali $\mu(\xi)>0$, poichè $\mu(\xi)$ è una funzione continua, non decrescente di ξ, si ha

$$\mu(\xi^0)=0, \quad \text{con} \quad x^0\leqslant\xi^0<b,$$

e

$$(7) \qquad \mu(\xi)>0 \quad \text{per} \quad \xi^0<\xi<b.$$

Sia ξ un qualsiasi numero $>\xi^0$ e minore di b, e ζ un punto dell'intervallo chiuso (x^0, ξ) dove $\nu(x)$ prende il suo valore massimo; si ha

$$(8) \qquad \nu(\zeta)=\mu(\xi)$$

e poichè $\nu(x)$ è nulla per $x^0\leqslant x\leqslant\xi^0$, si ha

$$(9) \qquad \xi^0<\zeta\leqslant\xi.$$

Essendo $\bar y_i(\xi^0)=y_i(\xi^0)$ per $i=1, 2,\ldots, m$, si ha per le (1) e (1')

$$\bar y_i(\zeta)-y_i(\zeta)=[\bar y_i(\zeta)-\bar y_i(\xi^0)]-[y_i(\zeta)-y_i(\xi^0)]$$

$$=\int_{\xi_0}^{\zeta}[f_i(t;\, \bar y_1, \bar y_2,\ldots, \bar y_m)-f_i(t;\, y_1(t), y_2(t),\ldots, y_m(t))]dt,$$

(1) Ugualmente si ragionerà per $a<x\leqslant x^0$.

e dalle (4) e (6) segue

$$|\bar y_i(\zeta)-y_i(\zeta)|\leqslant\int_{\xi_0}^{\zeta}N(t)\nu(t)dt\leqslant\nu(\zeta)\int_{\xi_0}^{\zeta}N(t)dt,$$

e dalle (8) e (9)

$$|\bar y_i(\zeta)-y_i(\zeta)|\leqslant\mu(\xi)\int_{\xi_0}^{\xi}N(t)dt,$$

e sommando rispetto all'indice i da 1 ad m, e tenuto conto della (8)

$$\mu(\xi)\leqslant m\mu(\xi)\int_{\xi_0}^{\xi}N(t)dt,$$

quindi

$$\int_{\xi_0}^{\xi}N(t)dt\geqslant 1/m,$$

per qualunque ξ tra ξ^0 e b, e ciò è assurdo, essendo il limite del primo membro per $\xi\to\xi^0$ uguale allo zero.

Abbiamo dunque che la (5) è soddisfatta per $x^0\leqslant x<b$, c. v. d.

2. - *a*) M. GRAVES e T. H. HILDEBRANDT (1), e successivamente B. MANIÀ (2) ai fini delle loro ricerche di Calcolo delle Variazioni, hanno studiato i sistemi di equazioni differenziali in forma implicita nell'indirizzo di CARATHÉODORY; noi qui riporteremo gli enunciati di un teorema di esistenza e di un teorema di unicità di B. MANIÀ, da lui conseguiti estendendo opportunamente il teorema fondamentale del DINI sulle funzioni implicite.

b) *Teorema di esistenza.*

i) *Siano* $f_i(x;\, u_1, u_2,\ldots, u_m;\, v_1, v_2,\ldots, v_m)$, $(i=1, 2,\ldots, m)$, *m funzioni definite per*

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad |u_k-u_k^0(x)|<\sigma, \quad |v_k-v_k^0(x)|<\sigma, \qquad (k=1, 2,\ldots, m),$$

(1) T. H. HILDEBRANDT, L. M. GRAVES: *Implicit functions and their differentials in general analysis*, Trans. of the Am. Math. Soc., 39 (1936), pp. 1-17.

(2) B. MANIÀ: *Sopra i sistemi di equazioni differenziali in forma implicita*, Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett., (2), 69 (1936), pp. 461-476.

essendo a e b finiti, $a<b$, $\sigma>0$, $u_k^0(x)$, $(k=1, 2,...., m)$, funzioni continue, e $v_k^0(x)$, $(k=1, 2,...., m)$, funzioni misurabili limitate in (a, b);

ii) le $f_i(x\,;\, u_1, u_2,...., u_m\,;\, v_1, v_2,...., v_m)$ e le loro derivate parziali del primo ordine rispetto alle $v_1, v_2,...., v_m$ siano continue in $(u_1, u_2,...., u_m\,;\, v_1, v_2,...., v_m)$ uniformemente rispetto ad x, e limitate in tutto l'insieme di definizione;

iii) prese comunque $2m$ funzioni $u_1(x), u_2(x),...., u_m(x)\,;$ $v_1(x), v_2(x),.... v_m(x)$ misurabili in (a, b), con

$$|u_k(x)-u_k^0(x)|<\sigma, \quad |v_k(x)-v_k^0(x)|<\sigma, \qquad (k=1, 2,...., m),$$

le m funzioni $f_i(x\,;\, u_1(x), u_2(x),...., u_m(x)\,;\, v_1(x), v_2(x),...., v_m(x))$ siano misurabili in (a, b);

iiii) sia $f_i(x\,;\, u_1^0(x), u_2^0(x),...., u_m^0(x)\,;\, v_1^0(x), v_2^0(x),...., v_m^0(x))=0$,

$$(i=1, 2,...., m),$$

iiiii) posto

$$D(x)=\frac{d[f_1, f_2,...., f_m]}{d[v_1, v_2,...., v_m]}\Bigg|_{[u_1=u_1^0(x),...., u_m=u_m^0(x)\,;\; v_1=v_1^0(x),...., v_m=v_m^0(x)]}$$

esista un numero positivo μ tale che $|D(x)|>\mu$.

In queste ipotesi si possono determinare due numeri positivi δ e ε, con $0<\delta<\varepsilon<\sigma$, *tali che se $\bar{x}$ è un punto qualunque fissato in (a, b), e se $(\bar{u}_1, \bar{u}_2,...., \bar{u}_m)$ sono m numeri assegnati per i quali*

$$|\bar{u}_k-u_k^0(\bar{x})|<\delta, \qquad (k=1, 2,...., m),$$

il sistema di equazioni differenziali

$$(10) \qquad f_i(x\,;\, u_1(x), u_2(x),...., u_m(x)\,;\, u_1'(x), u_2'(x),...., u_m'(x))=0,$$
$$(i=1, 2,...., m)$$

abbia in un intorno di $\bar{x}$, salvo al più i punti di un insieme di misura nulla, almeno una soluzione $u_1(x), u_2(x),...., u_m(x)$, con le $u_1(x), u_2(x),...., u_m(x)$ assolutamente continue, tali che

$$u_k(\bar{x})=\bar{u}_k\,, \; |u_k(x)-u_k^0(x)|<\delta, |u_k'(x)-v_k^0(x)|<\varepsilon, \; (k=1,2,....,m) \;\; (^1).$$

---

(1) Pel caso particolare $f(x\,;\, u, u')=0$, supposto $f_{u'}=0$, cfr. Cap. IX, § 2.

c) Teorema di unicità. - Nelle ipotesi del teorema precedente, se esiste una funzione $N(x)$ integrabile nel senso di LEBESGUE *in (a, b), tale che prese ad arbitrio due m^{uple} di funzioni continue $\bar{u}_k(x)$, $\tilde{u}_k(x)$, $(k=1, 2,...., m)$, con*

$$|\bar{u}_k(x)-u_k^0(x)|<\sigma, \quad |\tilde{u}_k(x)-v_k^0(x)|<\sigma, \qquad (k=1, 2,...., m),$$

e una m^{upla} di funzioni misurabili $v_k(x)$, con

$$|v_k(x)-v_k^0(x)|<\sigma, \qquad (k=1, 2,...., m),$$

si abbia

$$|f_i(x\,;\, \bar{u}_1(x),...., \bar{u}_m(x)\,;\, v_1(x),...., v_m(x))-$$
$$-f_i(x\,;\, \tilde{u}_1(x),...., \tilde{u}_m(x)\,;\, v_1(x),...., v_m(x))| \leqslant$$
$$\leqslant N(x)\,\{|\bar{u}_1(x)-\tilde{u}_1(x)|+....+|\bar{u}_m(x)-\tilde{u}_m(x)|\}, \quad (i=1, 2,...., m),$$

in tutto (a, b), allora la soluzione del sistema (10), di cui il teorema precedente assicura l'esistenza, è unica.

§ 9. - Bibliografia per argomento.

Riteniamo far cosa gradita al lettore trascrivendo una sommaria bibliografia degli argomenti esposti in questo Capitolo

[§§ 1-2] Teoremi di esistenza, di confronto e di unicità per l'equazione $y'=f(x, y)$.

E. BOMPIANI, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), I (1925), 298-302. – L. BRUWIER, Mémoires Liège, 14 (1928), n. 15. – M. CHARPENTIER, Bull. des Sciences Math., (2), 54 (1930), 203-209; Mathematica (Cluj) 5 (1931), 65-99; Bull. of the Am. Math. Soc., 38 (1932), 849-854. – E. K. HAVILAND, Am. Journ. of Math., 54 (1932), 632-634. – G. HOEISEL, Jahr. der Deutsch. Math. Ver. 42 (1933), 33-42. – M. HUKUHARA, Jap. Journ. of Math., 5 (1928), 239-251; Journ. of the Fac. of Science Hokkaido Imp. Un. (1), 5 (1937), 107-122. – E. KAMKE, Acta Math., 52 (1928), 327-339; Tôhoku Math. Journ., 31 (1929), 72-76. – T. KITAGAWA, Jap. Journ. of Math., 9 (1932), 153-160. – M. INABA, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, (3), 11 (1929), 69-72; Jap. Journ. of Math., 10 (1934), 169-176. – S. IYANAGA, Jap. Journ. of Math., 5 (1928), 253-257. – M. LAVRENTIEFF, Math. Zeitschr. 23 (1925), 197-209. – P. MONTEL, Ann. Sc. de l'Ec. Norm. Sup. 24 (1907), 233-334; Bull. des Sciences Math., 50 (1926), 205-217. – M. MÜLLER, Jahr. der Deutsch. Math. Ver., 37 (1928), 33-48. – M. NAGUMO, Jap. Journ. of Math., 3 (1926), 107-112; 7 (1930), 140-160. – H. NAKANO, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 14 (1932), 41-43. – W. NIKLIBORC, Studia Math., 1 (1929), 201-209. – O. NIKODYM, Rend. Sem. Padova, 6 (1935), 21-43. – H. OKAMURA, Memoirs of the Coll. of Sc. Kyôto Imp. Un., 14 (1931), 85-96; 17 (1934), 319-328. – W. ORLICZ, Bull. Int. Acad. Polonaise, (1932), 221-228. – W. F. OSGOOD, Monatsh. für Math. und

Phys., 9 (1898), 331-345. – G. PEANO, Atti della R. Acc. Sc., Torino, 21 (1885-1886), 437-445; Math. Ann. 37 (1890), 182-228. – O. PERRON, Math. Ann. 76 (1915), 471-484. – E. PINI, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 9 (1929), 625-630; Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett. (2), 63 (1930), 531-534. – A. ROSENBLATT, C. Rend. Ac. Sc., 186 (1928), 1797-1799. – T. SATÔ, Jap. Journ. of Math., 13 (1936), 1-6; Proc. of the Imp. Acad. of Japan, 4 (1928), 326-329. – G. SCORZA-DRAGONI, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 9 (1929), 378-382; 14 (1931), 7-11; Rend. Circ. Mat. Palermo 54 (1930), 430-448. – J. TAMARKINE, Math. Zeitsch., 16 (1923), 207-213. – L. TONELLI, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 1 (1925), 272-277. – G. VAN DER LYN, Ann. of Math. 2(), 37 (1936), 642-644. – Y. WATANABE, Jap. Journ. of Math., 7 (1930), 209-214. – T. WAŻEWSCKI, Ann. Soc. Pol. Math., 12 (1934), 72-80. – T. YOSIE, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, (3), 8 (1926), 16-20; Jap. Journ of Math., 2 (1926), 161-173.

[§ 3] Campo di esistenza e teoremi di unicità per gli integrali dei sistemi differenziali con i dati di CAUCHY.

E. DIGEL, Math. Zeitschr., 39 (1934), 157-160. – L. GIULIANO, Boll. Un. Mat. It. (2), 2 (1940), 221-227. Rend. R. Acc. d'Italia, (7), 1 (1940), 330-336. – S. HOKARI, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, (3), 14 (1932), 299-333. – M. HUKUHARA, Jap. Journ. of Math. 5 (1929), 345-350, 6 (1930), 269-299; 7 (1930), 173-186; Proc. of the Imp. Acad. of Japan, 6 (1930), 360-362; Proc. Phys. Math. Soc. Japan, (3), 12 (1930), 233-239. – E. KAMKE, Math. Zeitschr. 32 (1930), 101-107; Sitz. der Heidelberger Ak. der Wiss. Math.-nat. Klasse (1931), 17; Jahr. der Deutsch. Math. Ver., 41 (1932), 158-164; Acta Math., 58 (1932), 57-85. – E. R. VON KAMPEN, Am. Journ. of Math., 59 (1937), 144-152. – H. KNESER, Sitzber. der kgl. Preuss. Ak. der Wiss. zu Berlin (1923), 171-174. – M. MARCHAUD, Bull. Soc. Math. de France, 62 (1934), 1-38; Mathematica (Cluj) 10 (1935), 5-31. – K. MAYRHOFER, Monatsh. für Math. und Phys. 41 (1934), 201-215. – G. MIE, Math. Ann. 43 (1893), 553-568. – A. MINZONI, Rend. Sem. Padova, 9 (1938), 142-149. – M. MÜLLER, Sitz. der Heidelberger Ak. der Wiss. Math.-nat. Klasse, (1927) 9, pp. 38; Math. Zeitschr. 26 (1927), 619-645; 28 (1928(, 349-355; 41 (1936), 163-175. – M. NAGUMO, Jap. Journ. of Math., 4 (1928), 215-230; 5 (1928), 97-125; 6 (1929) 89-118; Proc. of the Imp. Acad. of Japan, 12 (1930), 233-239. – O. PERRON, Math. Ann. 78 (1918), 378-384; 95 (1926), 98-101; Math. Zeitschr. 28 (1928), 216-219. – A. ROSENBLATT, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6) 8 (1928), 41-45. – G. SCORZA-DRAGONI, Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett. 64 (1931), 659-682. – G. ZWIRNER, Rend. Sem. Mat. di Roma, (4), 1 (1937), 235-252.

[§ 4] L'equazione $y' = \lambda f(x, y)$.

H. HIKOSAKA-NOBORU, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, (3), 2 (1929), 73-83; S. TAKAHASCHI, Tôhoku Math. Journ. 34 (1931), 249-256. – K. ZAWISCHA, Monatsh. für Math. und Phys. 37 (1930), 103-124.

[§ 5] Le curve integrali dell'equazione $y'' = f(x, y)$ passanti per due punti prefissati, come curve estremali.

S. CINQUINI, Boll. Un. Mat. It., 17 (1938), 99-105. – H. HAMMERSTEIN, Acta Math., 54 (1830), (117-176), 118.122. – H. O. HIRSCHFELD, Proc. of the Cambr. Phil. Soc., 32 (1936), 86-95. – É. PICARD, Journ. de Math. pur. et appl. (4), 9 (1893), 217-271; Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, (Paris, 1930), 1-14.

[§§ 6-7] Equazioni del secondo ordine. Teoremi di confronto, di unicità, di esistenza.

G. D. BIRKHOFF, Trans. of the Am. Math. Soc., 23 (1922), 96-115, 109. – R. CACCIOPPOLI, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei. (6), 11 (1930), 794-799; Rend. Sem. Mat. Padova 3 (1932), 1-15; Rend. Sem. Mat. di Roma, (3), 1 (1933), 13-22, 20. – S. CINQUINI, Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (2), 8 (1939) 1-22. – A. HAMMERSTEIN, Journ. für die reine und ang. Math., 168 (1932), 37-43; Sitzber. Berlin Math. Ges. 30 (1932), 3-10. – M. HUKUHARA, Jap. Journ. of Math., 5 (1929), 351-367. – T. H. GRONWALL, Ann. of Math., 28 (1927), 355-364. – I. GROPPI, Boll. Un. Mat. It., 17 (1938), 179-182. – O. D. KELLOG, Trans. of the Am. Math. Soc., 23 (1932, 96-115, 109. – A. MAMBRIANI, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 9 (1929), 620-622. – C. MIRANDA, Mem. R. Acc. d'Italia, 5 (1934), 285-322, 291. – M. NAGUMO, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, (3), 19 (1937), 861-866. – W. NIKLIBORC, Ak. der Wiss. zu Leipzig, 82 (1930), 227-242. – A. ROSENBLATT, Bull. des Sciences Mathém. 57 (1933), 100-106; C. Rend. Ac. Sc., 196 (1933), 593-594; Bull. Soc. Math. Grèce, 14 (1933), 7-15. – T. SATÔ, Proc. of the Imp. Acad. of Japan, 13 (1937), 348-351. – G. SCORZA-DRAGONI, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 9 (1929), 623-625; (6), 22 (1935) 44-48; Giorn. di Mat. di Battaglini, 69 (1931), 77-112; Math. Ann. 105 [1931], 133-143; Boll. Un. Mat. It., 14 [1935], 225-230; Rend. Sem. Mat. di Roma, [4], 2 [1938], 177-215; 253-254; 255-275. – C. SEVERINI, Atti R. Acc. Sc., Torino, 40 [1905] 858-869. – L. TONELLI, Boll. Un. Mat. It., 6 [1927], 126-128; Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, [2], 8 [1939], 75-88.

[§ 8] I teoremi di esistenza e di unicità di CARATHÉODORY.

C. CARATHÉODORY, Vorlesungen über Reelle Funktionen, [zweite aufl., 1927], 665-674. – H. HAHN, Monatsh. für Math. und Phys., 14 [1903], 325-342, 326. – T. H. HILDEBRANDT, L. M. GRAVES, Trans. of the Am. Math. Soc., 29 [1927], 127-153. – B. MANIÀ, Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett., [2], 69 [1936], 461-476.

Capitolo IX.

Punti singolari. - Integrali singolari.

§ 1. - Punti singolari delle equazioni di primo ordine e di primo grado.

1. Generalità. - 2. Punti di indeterminazione. - Forme canoniche. - 3. L'equazione $dy/dx=(\gamma x+\delta y)/(\alpha x+\beta y)$ nel caso reale. - 4. Classificazione di POINCARÉ dei punti singolari nel caso reale. - 5. Le curve integrali dell'equazione $dy/dx=Q(x,y)/P(x,y)$. Cicli e spirali.

1. - Consideriamo l'equazione

$$dy/dx=Q(x,y)/P(x,y) \tag{1}$$

dove $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *sono funzioni olomorfe delle due variabili complesse* x, y in un intorno del punto (x_0, y_0) del piano x, y. Se $P(x_0, y_0)\neq 0$, il teorema di CAUCHY [Cap. III, § 1, n. 3] assicura l'esistenza di un solo integrale $y(x)$ della (1), soddisfacente la condizione iniziale $y(x_0)=y_0$ e olomorfo in un intorno di x_0, ma non potrà applicarsi il ricordato teorema se $P(x_0, y_0)=0$, cioè se $Q(x,y)/P(x,y)$ possiede una singolarità in (x_0, y_0) o come si dirà se *il punto* (x_0, y_0) *è singolare per l'equazione* (1).

Supponiamo dapprima

$$P(x_0, y_0)=0, \qquad Q(x_0, y_0)\neq 0, \tag{2}$$

nel numero seguente studieremo invece l'altro caso $P(x_0, y_0)=$ $=Q(x_0, y_0)=0$.

In luogo della (1) consideriamo l'equazione

$$dx/dy=P(x,y)/Q(x,y)\,; \tag{3}$$

poichè la funzione $P(x,y)/Q(x,y)$ è olomorfa in un intorno di (x_0, y_0), la (3) ammetterà un integrale $x(y)$ e uno soltanto che soddisfa la condizione $x(y_0)=x_0$; esso risulta olomorfo in un intorno di y_0, e perciò della forma

$$x-x_0=a_1(y-y_0)+a_2(y-y_0)^2+\ldots. \tag{4}$$

Dalla (3) e dalla prima delle (2) segue $0=(dx/dy)_{y=y_0}=a_1$, e se non si ha identicamente $x-x_0=0$, ed a_m è il primo coefficiente nelle (4) diverso da zero, si avrà

$$x-x_0=a_m(y-y_0)^m+a_{m+1}(y-y_0)^{m+1}+\ldots, \qquad (a_m\neq 0)$$

quindi [1]

$$y-y_0=\varepsilon^r\left[b_1(x-x_0)^{\frac{1}{m}}+b_2(x-x_0)^{\frac{2}{m}}+\ldots\right],$$

con

$$\varepsilon=\cos(2\pi/m)+i\ \mathrm{sen}\ (2\pi/m), \qquad r=0,1,2,\ldots, m-1.$$

Ne viene che *il punto* (x_0, y_0) *è un punto critico algebrico dell'integrale*, girando attorno ad x_0 le m espressioni di $y-y_0$ si permutano tra loro e costituiscono m *rami* di una medesima funzione analitica di $(x-x_0)$.

Si può dimostrare che oltre questi m rami non esistono soluzioni che tendono verso y_0 quando $x\to x_0$ sopra un certo cammino [2].

Ove nella (4) risulti $x-x_0\equiv 0$ e perciò qualunque sia y, $P(x_0, y)=0$ l'equazione (3) ammette l'integrale $x=x_0$, e la (1) non ammette alcun integrale $y(x)$ che soddisfi in un intorno di x_0 l'equazione.

Qualche esempio chiarisce la natura del problema in quest'ultima ipotesi.

L'equazione $dy/dx=1/x$ ammette l'integrale $y(x)=c+\log x$ e in un intorno di $x=0$, $y(x)$ possiede un'infinità di determinazioni che si deducono l'una dall'altra per l'aggiunta di $2\pi i$; *l'origine è per* $y(x)$ *un punto critico di ordine infinito.*

L'equazione $dy/dx=(y-1)/x^2$ ammette l'integrale $y=1+ce^{-1/x}$ il quale, quando sia $c\neq 0$, presenta nell'origine una *singolarità essenziale.*

2. - Supponiamo sia

$$P(x_0, y_0)=0, \qquad Q(x_0, y_0)=0 \tag{5}$$

e in un intorno di (x_0, y_0) sia $P(x,y)\neq 0$, $Q(x,y)\neq 0$, o come

---

[1] Cfr. ad es. L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, (Pisa, 1901), p. 162.

[2] L. KOENIGSBERGER: *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln*, (Leipzig, 1889), p. 350.

si dice il punto (x_0, y_0) sia un *punto di indeterminazione isolato* della funzione $Q(x, y)/P(x, y)$.

Portiamo con una traslazione (x_0, y_0) nell'origine; ponendo in evidenza i termini di primo grado di $P(x, y)$, $Q(x, y)$ si avrà

$$(6_1) \qquad \begin{cases} P(x, y) = \alpha x + \beta y + \dots \\ Q(x, y) = \gamma x + \delta y + \dots, \end{cases}$$

e noi supporremo

$$(6_2) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Vogliamo provare che effettuando un opportuno cangiamento lineare della variabile indipendente e della funzione possiamo far assumere alla (1) due particolari forme canoniche.

Posto

$$(7) \qquad x_1 = ax + by, \qquad y_1 = cx + dy$$

si ha

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{cP + dQ}{aP + bQ} = \frac{(c\alpha + d\gamma)x + (c\beta + d\delta)y + \dots}{(a\alpha + b\gamma)x + (a\beta + b\delta)y + \dots}$$

e se le costanti a, b, c, d possono essere scelte in guisa che

$$(8_1) \qquad a\alpha + b\gamma = \lambda a, \qquad a\beta + b\delta = \lambda b;$$

$$(8_2) \qquad c\alpha + d\gamma = \mu c, \qquad c\beta + d\delta = \mu d;$$

l'equazione (1) assumerà la forma canonica

$$(9) \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\mu y_1 + \dots}{\lambda x_1 + \dots}.$$

I sistemi (8_1), (8_2) lineari omogenei nelle coppie a, b; c, d possono scriversi

$$(10_1) \qquad (\alpha - \lambda)\,a + \gamma b = 0, \qquad \beta a + (\delta - \lambda)\,b = 0;$$

$$(10_2) \qquad (\alpha - \mu)\,c + \gamma d = 0, \qquad \beta c + (\delta - \mu)\,d = 0;$$

essi avranno soluzioni non nulle se λ e μ sono radici dell'equazione (*caratteristica*)

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} \alpha - \varrho, & \gamma \\ \beta, & \delta - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Se nelle (6_1) è $\beta = \gamma = 0$ la (1) ha già la forma canonica (9), non sia quindi $\beta = \gamma = 0$ e supponiamo dapprima che la (11) abbia due radici distinte λ e μ, sia cioè

$$(12) \qquad \varDelta = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma \neq 0.$$

Le (10_1), (10_2) determinano le coppie (a, b), (c, d) (ciascuna a meno di un fattore di proporzionalità) ed è subito visto che risulta $ad - bc \neq 0$, cioè la (7) è invertibile. Infatti supposto ad es. $\beta \neq 0$, poichè b ed a (c e d) non sono simultaneamente nulli risulta $b \neq 0$, $d \neq 0$, quindi $a/b = (\lambda - \delta)/\beta$, $c/d = (\mu - \delta)/\beta$ e $a/b \neq c/d$.

Abbiamo dunque che *se vale la* (12), *operando sull'equazione* (1) *con la trasformazione lineare* (7), *essa assume la forma canonica* (9).

Dimostriamo ora che *se*

$$(13) \qquad \varDelta = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma = 0,$$

cioè se l'equazione caratteristica (11) *ha una radice doppia* $[\lambda = (\alpha + \delta)/2]$, *l'equazione* (1) *si può ridurre alla forma canonica*

$$(14) \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\lambda(x_1 + y_1) + \dots}{\lambda x_1 + \dots}.$$

Con le notazioni precedenti bisognerà scegliere le costanti a, b, c, d, in guisa che

$$(15) \qquad (\alpha - \lambda)\,a + \gamma b = 0, \quad \beta a + (\delta - \lambda)\,b = 0, \qquad [\lambda = (\alpha + \delta)/2]$$

e

$$(16) \qquad \lambda(ax + by) + \lambda(cx + dy) \equiv (c\alpha + d\gamma)\,x + (c\beta + d\delta)\,y.$$

Le (15) dànno le costanti a e b non entrambe nulle e a meno di un fattore di proporzionalità, la (16) si scinde nelle due equazioni

$$(17) \qquad (\alpha - \lambda)\,c + \gamma d = a\lambda, \qquad \beta c + (\delta - \lambda)\,d = b\lambda,$$

delle quali, come facilmente si verifica, una è conseguenza dell'altra.

Essendo $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ dalla (11) segue $\lambda \neq 0$; supposto poi ad es. $\beta \neq 0$ risulta $b \neq 0$, quindi c e d debbono soddisfare l'unica equazione $\beta c + (\delta - \lambda)d = b\lambda$ e da questa e dalla seconda delle (15), essendo $b\lambda \neq 0$, segue $ad - bc \neq 0$. Abbiamo così dimostrato che *in ogni punto di indeterminazione di* $P(x, y)/Q(x, y)$ *ove sia* $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, *con una trasformazione lineare* [un'affinità] *l'equazione assume l'una o l'altra delle forme canoniche* (9), (14).

3. - Supponiamo che nell'equazione (1), $P(x, y)$, $Q(x, y)$ si riducano soltanto ai termini di primo grado, l'equazione abbia quindi la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma x + \delta y}{\alpha x + \beta y}, \tag{18}$$

con α, β, γ, δ *costanti reali*, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Siccome nel prossimo numero 4 studieremo il comportamento dei suoi integrali reali sarà per questo opportuno fissare le forme canoniche che essa può assumere operando con una trasformazione affine sulle x e y a coefficienti reali.

Per le cose dette al numero 2 se $(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma \neq 0$ e λ e μ sono le radici (distinte) dell'equazione (11) alla (18) possiamo sostituire l'equazione

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\mu y_1}{\lambda x_1}, \qquad (\mu \neq \lambda) \tag{18_1}$$

mentre se $(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma = 0$ alla (18) possiamo sostituire (con una trasformazione lineare a coefficienti reali) l'equazione

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1}. \tag{18_3}$$

Osserviamo che nella (18_1), se $\Delta = (\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma > 0$, λ e μ risultano reali e distinti, a, b, c, d reali, mentre se $\Delta < 0$ λ e μ, a e c, b e d, x_1 e y_1 sono complessi e coniugati, e in quest'ultimo caso ($\Delta < 0$) posto

$$x_1 = X + iY, \quad y_1 = X - iY, \quad \lambda = \varrho_1 + i\varrho_2, \quad \mu = \varrho_1 - i\varrho_2 \qquad (\varrho_2 \neq 0)$$

dalla (18) con una sostituzione lineare invertibile a coefficienti reali si ottiene

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\varrho_2 X + \varrho_1 Y}{\varrho_1 X - \varrho_2 Y}. \tag{18_2}$$

Concludiamo: data l'equazione (18), i suoi integrali si deducono rispettivamente mediante una trasformazione affine a coefficienti reali dagli integrali delle equazioni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu y}{\lambda x}, \qquad [\Delta > 0 \text{ se } \mu \neq \lambda, \quad \Delta = 0 \text{ se } \mu = \lambda]; \tag{19_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varrho_2 x + \varrho_1 y}{\varrho_1 x - \varrho_2 y}, \qquad [\varrho_2 \neq 0, \quad \Delta < 0]; \tag{19_2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}, \qquad [\Delta = 0]. \tag{19_3}$$

4. - Vogliamo ora esporre la classificazione di Poincaré [1] **degli integrali (reali) dell'equazione (18).**

a) Nella (19_1) λ e μ abbiano lo stesso segno [e perciò o $\Delta = 0$, oppure $\Delta > 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$], e salvo a cangiare x con y supponiamo $\mu \geqslant \lambda$. La (19_1) possiede l'integrale $x = 0$, gli altri integrali hanno l'espressione

$$y = c\,|\,x\,|^{\mu/\lambda}, \qquad (c = \text{cost.})$$

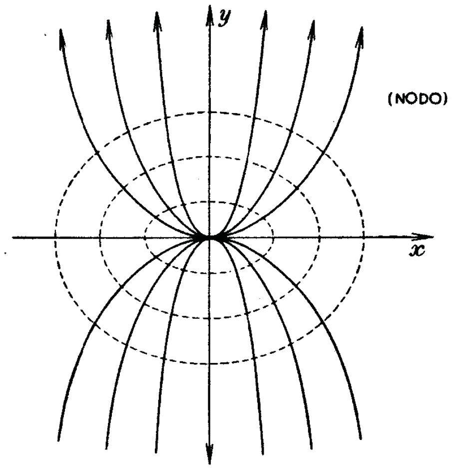

Fig. 18.

e se $\mu > \lambda$ tali curve risultano tangenti nell'origine all'asse x [v. fig. 18], mentre se $\mu = \lambda$ è $y = cx$, (c = cost.) e le curve integrali formano un fascio di rette con centro nell'origine [v. fig. 19 a p. 143]. Nell'uno e nell'altro caso si dirà che l'origine è un *nodo* [*noeud* in francese, *knotenpunkt* in tedesco].

Dell'equazione (19_1) e dei risultati ora trovati può darsi un'elegante interpretazione geometrico - meccanica.

Si consideri il paraboloide ellittico

$$z = \frac{x^2}{2\mu} + \frac{y^2}{2\lambda}, \qquad [\mu \geqslant \lambda > 0], \tag{20}$$

ove supponiamo l'asse z orientato in senso inverso alla gravità.

Le sue *linee di livello* (intersezione con i piani z = cost.) hanno per proiezione sul piano (x, y) le ellissi di equazione

$$\frac{x^2}{2\mu} + \frac{y^2}{2\lambda} = c$$

---

[1] H. Poincaré: *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, Journ. de Math. pur. et appl., (3), 7 (1881), (pp. 375-422), p. 385.

che si scrive in forma differenziale

$$(21) \qquad \frac{xdx}{\mu}+\frac{ydy}{\lambda}=0.$$

Le *linee di massima pendenza* del paraboloide [traiettorie ortogonali alle linee di livello] si proiettano nel piano (x, y) nel sistema di linee ortogonali alle (21), esse hanno quindi l'equazione

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\mu y}{\lambda x},$$

e dalle cose dette segue che se il paraboloide non è di rotazione le linee di massima pendenza passano per il vertice del paraboloide e risultano tangenti alla parabola sezione del paraboloide col piano (xz); le gocce d'acqua che per effetto del loro peso scorrono di moto lento sul paraboloide arrivano tutte nel vertice in una medesima direzione ed eccezionalmente in una direzione perpendicolare.

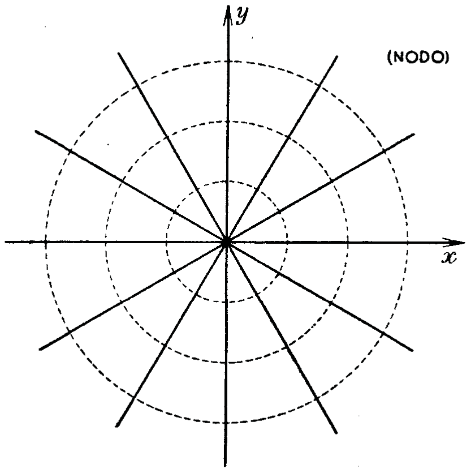

Fig. 19.

Se il paraboloide è invece di rotazione ($\mu=\lambda$) le sue linee di massima pendenza sono le parabole sezioni del paraboloide con i piani passanti per l'asse z.

b) Nella (19_1) λ e μ abbiano segno contrario e perciò $\Delta>0$, $\alpha\delta-\beta\gamma<0$.

L'equazione (19_1) *ammette due soli integrali passanti per l'origine*; $x=0$, $y=0$; *ogni altra curva integrale ha l'equazione*

$$|x|^{|\mu|}\,|y|^{|\lambda|}=c, \qquad (c=\text{cost.})$$

e resta perciò a distanza maggiore di un numero positivo dall'origine.

Supponiamo $\lambda=-\mu$ e riprendiamo l'esempio precedente; il paraboloide (20) è iperbolico, le proiezioni delle sue linee di livello hanno l'equazione

$$x^2-y^2=c, \qquad (c=\text{cost.})$$

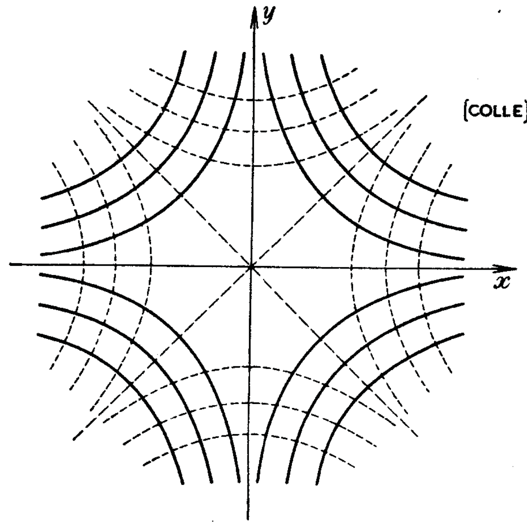

Fig. 20.

e formano una famiglia di iperbole equilatere, mentre le linee di massima pendenza si proiettano nella famiglia di iperbole equilatere

$$xy=c, \qquad (c=\text{cost.})$$

che hanno per asintoti gli assi x ed y [v. fig. 20].

Questa considerazione giustifica la denominazione di *colle* (*col, sattelpunkt*) per l'origine; *un colle è quindi caratterizzato dalle due condizioni* $\Delta>0$, $\alpha\delta-\beta\gamma<0$.

c) Studiamo ora gli integrali della (19_2) $[\Delta<0]$. Se $\alpha+\delta=0$ risulta $\varrho_1=0$, $dy/dx=-x/y$, $d(x^2+y^2)=0$,

$$(22) \qquad x^2+y^2=c, \qquad [c=\text{cost.}]$$

le curve integrali sono quindi delle circonferenze e nell'equazione differenziale di partenza delle ellissi [poichè le curve integrali di quest'ultima sono legate alle (22) da una trasformazione affine].

Si dirà che l'origine è un *centro* [*centre, wirbelpunkt*]; *il centro è quindi caratterizzato dalle due condizioni* $\Delta<0$, $\alpha+\delta=0$ [v. fig. 21].

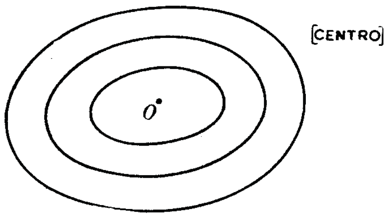

Fig. 21.

d) Supposto ora $\Delta<0$ e $\alpha+\delta\neq0$, nella (19_2) ϱ_1 e ϱ_2 non sono nulli e se effettuiamo la trasformazione

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

otteniamo

$$dr/r=(\varrho_1/\varrho_2)\,d\varphi$$

$$r=c\,e^{(\varrho_1/\varrho_2)\varphi}, \qquad (c=\mathrm{cost.})$$

le curve integrali sono *spirali logaritmiche* e nell'equazione di partenza avranno l'andamento a spirale. L'origine è un punto asintotico delle curve integrali le quali girano attorno all'origine e finiscono col diventare e restare interne a qualunque cerchio di raggio arbitrario [v. fig. 22]. Si dice che l'origine è un *fuoco* (*foyer, strudelpunkt*) *per l'equazione*: *il fuoco è caratterizzato dall'essere* $\Delta<0$ *e* $\alpha+\delta\neq0$.

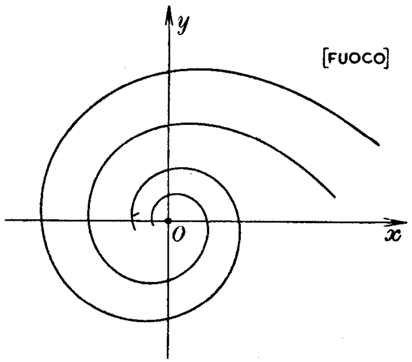

Fig. 22.

e) Studiamo infine gli integrali dell'equazione (19_3) $[\Delta=0]$

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{x};$$

essa ammette l'integrale

$$y=cx+x\log|x|, \qquad [c=\mathrm{cost.}]$$

e si ha $\lim_{x\to0} y=0$, $\lim_{x\to0} y'=-\infty$ e le curve integrali risultano tutte tangenti nell'origine all'asse y [v. fig. 23]; l'origine è un *nodo*.

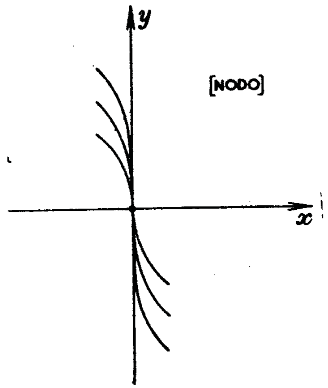

Fig. 23.

f) Abbiamo così dimostrato il teorema: *Data l'equazione differenziale*

$$y'=\frac{\gamma x+\delta y}{\alpha x+\beta y}, \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma\neq0)$$

con α, β, γ, δ *costanti reali*, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$, *l'origine* $(x=0, y=0)$ *è un punto singolare dell'equazione, ed è*

un nodo se $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma=0$, *oppure* $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma>0$, *e* $\alpha\delta-\beta\gamma>0$;

un colle se $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma>0$ *e* $\alpha\delta-\beta\gamma<0$;

un fuoco se $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma<0$ *e* $\alpha+\delta\neq0$;

un centro se $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma<0$ *e* $\alpha+\delta=0$.

5. - Gli studi relativi all'andamento delle curve integrali dell'equazione

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

con $P(x,y)$, $Q(x,y)$ polinomi a coefficienti reali nelle variabili reali x e y, nell'intorno dei *punti singolari*, $[P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0]$, sono dovuti a H. POINCARÉ (¹); successivamente I. BENDIXSON (²) considerò il caso più generale in cui $P(x,y)$, $Q(x,y)$ risultano

(¹) H. POINCARÉ: *Mémoire sur les courbes definies par une équation différentielle*, Journ. de Math. pur. et appl. (3), 7 (1881), pp. 375-422; 8 (1882), pp. 251-296; (4), 1 (1885), pp. 167-244; 2 (1886), pp. 151-217.

(²) I. BENDIXSON: *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Math., 24 (1901), pp. 1-88.

funzioni continue insieme alle loro derivate parziali del primo ordine rispetto ad x e y e l'altro ove $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ risultano funzioni olomorfe a coefficienti reali di x e y. Per questi studi rimandiamo il lettore oltre che ai noti trattati di É. PICARD, É. GOURSAT, ai volumi di P. BOUTROUX e H. DULAC [1], limitandoci qui a richiamare qualche proprietà.

È immediato:

i) Due curve integrali distinte della (1) non possono avere altri punti di intersezione che i punti singolari dell'equazione stessa.

ii) Una curva integrale della (1) ha i suoi punti multipli soltanto nei punti singolari dell'equazione. Si osservi infatti che se (x_0, y_0) è un punto regolare per la (1) la curva integrale passante per (x_0, y_0) è univocamente determinata e regolare in questo punto.

Considerando poi in grande le curve (reali) integrali della (1), e convenendo che una curva integrale che arrivi a un nodo oppure a un fuoco termini in questo punto, e quando arrivi invece ad un colle essa debba intendersi prolungata con un'opportuna convenzione [2], si dimostra che *se una curva integrale appartiene a una regione finita contenente un numero finito di punti singolari della* (1), *sono possibili tre casi*: *la curva integrale è chiusa* (è un ciclo), *oppure una curva spirale* (asintotica a un ciclo) *o si arresta ad un punto singolare* [3].

---

(1) É. PICARD: *Traité d'Analyse*, T. 3, (3ª éd. Paris, 1928), pp. 1-61; É. GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathématique* (4ª éd., Paris, 1924), T. 2, pp. 522-553 con bibliografia a p. 553; P. BOUTROUX: *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, (Paris, 1908), pp. 1-190; H. DULAC: *a*) *Curvas definidas por una ecuación diferencial de primer orden y de primer grado*, (Madrid, 1933) pp. 1-180 (con bibliografia a p. 178); *b*) *Points singuliers des équations différentielles*, Mémorial des Scienc. Math., fasc. 61 (Paris, 1934), pp. 1-67.

(2) Cfr. I. BENDIXON, mem. cit. p. 21.

(3) Cfr. I. BENDIXON, mem. cit. p. 29, teor. VII.

Per altri studi sui punti singolari cfr. oltre le opere e i lavori citati: O. PERRON: *Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes*, Math. Zeitschr., 15 (1922), pp. 121-146; 16 (1923), pp. 273-295; I. PETROWSKY: *Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes*, Rec. Math. Moscou, 41 (1934), pp. 107-155; E. LONN: *Knoteninvarianz bei Differentialgleichungen*, Jahr. der Deutsch. Math. Ver., 43 (1934), pp. 232-237; M. FROMMER: *Über*

Per illustrare il teorema enunciato consideriamo ad es. l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{-y + x(x^2 + y^2 - 1)}. \tag{23}$$

Con la sostituzione $x = r\cos\varphi$, $y = r \operatorname{sen}\varphi$, otteniamo

$$\frac{dr}{d\varphi} = r(r^2 - 1)$$

la quale ammette l'integrale generale

$$r = (1 + c\, e^{2\varphi})^{-1/2}, \qquad (c = \text{cost.}). \tag{24}$$

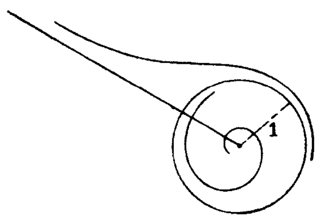

Fig. 24.

Se $c = 0$, la corrispondente curva integrale è la circonferenza Γ con centro nell'origine e raggio 1, se $c > 0$, le corrispondenti curve integrali sono interne a Γ, e avendosi $\lim_{\varphi\to+\infty} r = 0$, $\lim_{\varphi\to-\infty} r = 1$ esse hanno un fuoco nell'origine e sono asintotiche alla circonferenza Γ; se $c < 0$, $c = -c_1$ la curva (24) è reale se φ varia tra $-\infty$ e $-(\log c_1)/2$ ed esterna a Γ. Si ha $\lim_{\varphi\to-\infty} r = 1$, $\lim_{\varphi\to-(\log c_1)/2} r = +\infty$, quindi se φ varia tra $-\infty$ e $-(\log c_1)/2$, r varia

---

das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (*geschlossener und spiraliger Integralkurven*) *in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen*, Math. Ann. 109 (1934), pp. 395-424; J. HAAG: *Sur les propriétés des intégrales de certaines équations différentielles*, Bull. de Sc. Math., (II), 60 (1936), pp. 131-138; E. DIGEL: *Über den Verlauf der Integralkurven des Systems* $dx/dt = f(x, y)$, $dy/dt = g(x, y)$ *in der Umgebung eines singulären Punktes*, (Tübingen, Diss. 1934, pp. 1-18); H. FORSTER: *Über das Verhalten der Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes*, Math. Zeitschr. 43 (1938) pp. 271-320; C. I. LUBIN: *Transformation of differential equations in the neighborhood of singular points*, Duke Math. Journ. 3 (1937), pp. 394-417; R. v. MISES: *Über den Verlauf der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung*, Compositio Math., 6 (1938), pp. 203-220. Cfr. pure l'interessante studio di G. ASCOLI: *Sul comportamento asintotico e sulla valutazione approssimata degli integrali delle equazioni differenziali del primo ordine* in Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari (Pavia, 1936), pp. 617-635.

crescendo da 1 a $+\infty$; le curve integrali hanno il cerchio di raggio 1 come cerchio asintotico, come asintoto la retta $\varphi=-(\log c_1)/2$, e i loro punti di inflessione sul cerchio di raggio $\varrho=\sqrt[4]{2}$ (1). [v. fig. 24].

§ 2. - Integrali singolari.

1. Integrale generale. Integrali singolari. - 2. L'equazione $F(x, y; p)=0$ con F polinomio razionale intero in p. - 3. Il p-discriminante. Teorema di DARBOUX-CAYLEY. - 4. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per l'esistenza di una curva integrale singolare. - 5. Curve di contatto. - 6. Il c-discriminante. - 7. Ricerca degli integrali singolari quando sia noto parametricamente l'integrale generale in funzione della derivata e della costante arbitraria. - 8. Luogo dei punti di inflessione delle curve integrali.

1. - *a*) Data l'equazione

$$y'=f(x, y) \tag{1}$$

con $f(x, y)$ continua in un dominio C, a due dimensioni e lipschitziana rispetto ad y, fissato un punto (x_0, y_0) interno a C il teorema di esistenza [Cap. I, § 3, n. 1] assicura che essa possiede uno e un solo integrale

$$y=y(x; x_0, y_0)$$

definito in un intervallo $(x_0-\delta, y_0+\delta)$ che soddisfa la condizione iniziale $y(x_0; x_0, y_0)=y_0$, in altre parole se consideriamo su un tratto della retta di ascissa x_0 un punto variabile P di ordinata y_0, per P passa una e una sola curva integrale della (1). Noi abbiamo chiamato $y(x; x_0, y_0)$ l'integrale generale della (1) [Cap. I, § 5, n. 7].

In generale sia data l'equazione differenziale

$$F(x, y; p)=0, \qquad (p=dy/dx) \tag{2}$$

(1) Per i flessi e gli asintoti delle curve in coordinate polari cfr. ad es. G. SANSONE: *Lezioni di Analisi Matematica*, II (3ª ed., Padova, 1939), p. 103 e p. 396.

ove $F(x, y, p)$ è definita in tutti i punti (x, y) di un dominio C e per p variabile in un certo intervallo; se l'equazione

$$\Phi(x, y; c)=0 \tag{3}$$

ad ogni valore della costante c di un certo intervallo fa corrispondere una curva integrale della (2) appartenente a C, o come si dice un *integrale particolare della* (1) e se fissato (x_0, y_0) in C vi è almeno un valore c_0 di c tale che $\Phi(x_0, x_0; c_0)=0$, si dirà che la (3) rappresenta in C l'*integrale generale* della (1).

Ad esempio data l'equazione lineare

$$y'(x)+P(x)y-Q(x)=0 \tag{4}$$

con $P(x)$, $Q(x)$ funzioni continue della x in (α, β) il suo integrale generale ha l'espressione

$$y(x)=e^{-\int_a^x P(x)\,dx}\left[\int_a^x Q(x)\,e^{\int_a^x P(x)\,dx}\,dx+c\right], \qquad [c=\text{cost.}] \tag{5}$$

e qualsiasi integrale della (4) si ottiene dalla (5) assegnando alla costante c un opportuno valore [Cap. II, § 1, n. 5].

A. C. CLAIRAUT in una sua memoria del 1734 (1) osservò che vi sono equazioni differenziali che si possono integrare col procedimento della derivazione e tali che gli integrali trovati non sono compresi nelle soluzioni ottenute per via ordinaria. Quasi contemporaneamente L. EULERO (2) notò che vi sono soluzioni delle equazioni differenziali non comprese nell'integrale generale: così l'equazione $dx-A(x)\,dy=0$, ove sia $A(x)$ continua, $A(x)\neq 0$ per $x\neq 0$, $A(0)=0$, ammette la soluzione $x=0$ non contenuta nel suo integrale generale

$$y+c=\int dx/A(x) \quad (3).$$

(1) Mémoires Ac. Sc. Paris, 1734, p. 209 e segg.

(2) L. EULERO: *Mechanica sive motus scientia analytice*, 2, St. Pétersbourg, 1736, pp. 155-156.

(3) Quando consideriamo l'equazione differenziale $F(x, y; dy/dx)=0$ intendiamo riferirci tanto agli integrali della forma $y=y(x)$ che a quelli della forma $x=x(y)$.

Altri studi sulla natura degli integrali non compresi nell'integrale generale sono di J. DE CONDORCET, L. EULERO, J. D'ALEMBERT, ma a G. L. LAGRANGIA sono dovute le due prime memorie di carattere generale dedicate agli integrali delle equazioni differenziali non appartenenti all'integrale generale [1].

Nella sua prima memoria LAGRANGIA osserva inizialmente che l'equazione

$$xdx+ydy=\sqrt{x^2+y^2-b^2}\,dy$$

oltre l'integrale generale

$$x^2-(b^2+c^2)=2cy, \qquad (c=\text{cost.}), \tag{6}$$

costituito da una famiglia di parabole e dalle rette $x=\pm b$, ammette l'integrale $x^2+y^2=b^2$ non contenuto nella (6), da lui chiamato integrale particolare e con la terminologia moderna, *integrale singolare*.

È facile vedere che le parabole (6) inviluppano il cerchio $x^2+y^2=b^2$, e LAGRANGIA parte appunto dalla teoria degli inviluppi per concludere l'esistenza degli integrali singolari delle equazioni differenziali.

In generale se l'equazione (2) ammette un integrale che possa pensarsi inviluppo di una famiglia di curve integrali dell'equazione stessa, diremo tale integrale *singolare.*

Un integrale singolare potrà anche coincidere con un integrale particolare dell'equazione, ma l'attributo « *singolare* » vuol mettere in evidenza che esso potrà anche pensarsi come inviluppo di una famiglia di integrali particolari.

b) Osserviamo che se le curve (3) rappresentano l'integrale generale della (2), la teoria degli inviluppi permetterà la ricerca degli integrali singolari, e questa ricerca faremo appunto nei numeri 6 e 7; ma evidentemente gioverà effettuarla anche *senza presupporre l'effettiva integrazione dell'equazione*, possibilità che risulta dalle seguenti considerazioni.

Nella (2), F sia continua insieme alle sue derivate parziali del primo ordine, rispetto ad (x, y, p), quando (x, y) varia in C e p

[1] G. L. LAGRANGIA, Oeuvres, T. IV (Paris, 1869); *a) Sur les intégrales particulières des équations différentielles*, pp. 5-108; *b) Sur différentes questions d'Analyse relative à la théorie des intégrales particulières*, pp. 585-634.

nell'intervallo (r, s) e supponiamo che una terna di valori x_0, y_0, p_0, ove (x_0, y_0), è un punto *interno* a C e p_0 *interno* ad (r, s) soddisfi l'equazione

$$F(x_0, y_0; p_0)=0,$$

e sia anche

$$F_p(x_0, y_0; p_0)\neq 0. \quad [1]$$

Il teorema delle funzioni implicite assicura che quando (x, y) varia in un opportuno intorno C_1 di (x_0, y_0) esiste una e una sola funzione

$$p=f(x, y) \tag{7}$$

continua insieme alle sue derivate prime in C_1 che soddisfa identicamente l'equazione $F(x, y; f(x, y))=0$, e tale che $f(x_0, y_0)=p_0$. La (7) in C_1 equivale alla (2) e il teorema di esistenza e di unicità assicura che per il punto (x_0, y_0) passa uno e un solo integrale della (2), e perciò per (x_0, y_0) non passa alcun integrale singolare. Abbiamo dunque che *se nelle ipotesi dichiarate, per* (x_0, y_0) *passa un integrale singolare dell'equazione, di coefficiente angolare* p_0, *la terna* $(x_0, y_0; p_0)$ *soddisfa simultaneamente le due equazioni*

$$F(x_0, y_0; p_0)=0, \qquad F_p(x_0, y_0; p_0)=0.$$

Diremo che *un elemento lineare* $(x_0, y_0; p_0)$ [Cap. I, § 6, n. 1] *è puntualmente singolare per l'equazione* (2) *quando la terna* $(x_0, y_0; p_0)$ *soddisfa simultaneamente le due equazioni*

$$F(x, y; p)=0, \qquad F_p(x, y; p)=0; \quad [2] \tag{8}$$

segue che se $(x_0, y_0; p_0)$ è un elemento puntualmente singolare, esso è caratterizzato dal fatto che in un'intorno di (x_0, y_0) non possiamo dedurre dalla (2) l'equazione normale (1).

Una totalità di infiniti elementi puntualmente singolari *può inviluppare* una curva Γ di equazione $y=y(x)$ tale che la terna

[1] Il simbolo $F_p(x_0, y_0; p_0)$ indica $\left(\dfrac{\partial F}{\partial p}\right)_{(x_0, y_0; p_0)} = \dfrac{\partial F}{\partial p_0}$.

[2] Questa opportuna denominazione è dovuta a S. K. ZAREMBA: Cfr.: *Sur l'allure des intégrales d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans le voisinage de l'intégrale singulière*, Bull. Int. de l'Ac. Polonaise de Sc. et de Lettres (Math.) 1931, pp. 288-321.

$x, y=y(x), p=y'(x)$, qualunque sia x soddisfi identicamente le (8), e *generalizzando* il concetto di integrale singolare diremo *integrale singolare della* (2) *un qualsiasi inviluppo di una semplice infinità di elementi puntualmente singolari.*

S. K. ZAREMBA [1] dimostra che, sotto ipotesi poco restrittive sulla F e le sue derivate dei primi due ordini, la curva Γ può considerarsi ancora come inviluppo di una famiglia di integrali particolari della (2).

2. - I numeri 2 a 5 di questo paragrafo sono destinati all'esame degli integrali inviluppo di elementi puntualmente singolari, ossia all'esame del sistema (8) [2].

Per un migliore orientamento consideriamo dapprima l'equazione

$$(9) \qquad F(x, y; p) = A_0(x, y)p^n + A_1(x, y)p^{n-1} + \dots + A_{n-1}(x, y)p + A_n(x, y) = 0, \qquad (p = dy/dx)$$

e i coefficienti $A_r(x, y)$, $[r=0, 1, \dots, n]$, siano funzioni olomorfe delle variabili x e y nell'intorno C di un punto di coordinate (x_0, y_0), e la terna $(x_0, y_0; p_0)$ verifichi il sistema

$$(10) \qquad F(x_0, y_0; p_0) = 0, \qquad F_p(x_0, y_0; p_0) = 0.$$

Il valore p_0 è una radice multipla dell'equazione (9) e per fissare le ipotesi sia

$$(11) \qquad \frac{\partial F}{\partial p_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_0^2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial^{\mu-1} F}{\partial p_0^{\mu-1}} = 0, \quad \frac{\partial^\mu F}{\partial p_0^\mu} \neq 0, \qquad (\mu \geq 2).$$

Poniamo

$$(12) \qquad x = x_0 + X, \quad y = y_0 + p_0 X + Y, \quad P = dY/dX,$$

(1) Cfr. mem. cit.

(2) Noi ci limitiamo a studiare gli integrali singolari delle equazioni del primo ordine, per le equazioni di ordine superiore rimandiamo il lettore alle memorie di *a*) P. BURGATTI : *Sugli integrali singolari delle equazioni a derivate ordinarie del second'ordine*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 20 (1905), pp. 256-264 ; *b*) E. M. COON, R. L. GORDON : *Singular solutions of differential equations of the second order*, Ann. of Math. (2), 21 (1919), pp. 98-103 ; *c*) G. CERF : *Sur les solutions singulières des équations différentielles d'ordre quelconque*, Journ. de Math. pur. et appl. (9), 8 (1929), pp. 161-172.

si ha $p = dy/dx = p_0 + dY/dX = p_0 + P$, e la (9) può scriversi

$$(13) \qquad F(x_0 + X,\ y_0 + p_0 X + Y,\ p_0 + P) = 0.$$

La ricerca di integrali della (9) continui insieme alla loro derivata prima in $x = x_0$ implica $\lim_{X \to 0} Y = 0$, $\lim_{X \to 0} P = 0$, e dall'ultima delle (12) segue che Y è infinitesimo di ordine superiore a X, talchè la (13), trascurando infinitesimi di ordine superiore a X, può scriversi

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} p_0\right) X + \frac{\partial^\mu F}{\partial p_0^\mu} \frac{P^\mu}{\mu!} + \dots = 0.$$

Facciamo l'ipotesi supplementare

$$(14) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial y_0} p_0 \neq 0,$$

otteniamo allora [1]

$$P = \frac{dY}{dX} = b_1 X^{\frac{1}{\mu}} + b_2 X^{\frac{2}{\mu}} + \dots, \qquad (b_1 \neq 0)$$

quindi

$$Y = c_1 X^{1+\frac{1}{\mu}} + c_2 X^{1+\frac{2}{\mu}} + \dots, \qquad [c_1 = \mu b_1/(\mu+1) \neq 0]$$

e dalle (12) segue che l'integrale $y(x)$ della (9) che soddisfa la condizione $y(x_0) = y_0$ ha lo sviluppo

$$y = y_0 + p_0(x - x_0) + c_1(x - x_0)^{1+\frac{1}{\mu}} + \dots,$$

l'integrale $y(x)$ è quindi una funzione che in x_0 ha un *punto critico algebrico.*

Dalle cose dette segue il teorema: *Se nel punto* $(x_0, y_0; p_0)$ *hanno luogo le relazioni*

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \dots, \quad \frac{\partial^{\mu-1} F}{\partial p^{\mu-1}} = 0, \quad \frac{\partial^\mu F}{\partial p^\mu} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0, \qquad (\mu \geq 2)$$

la (9) *ammette una curva integrale passante per il punto* (x_0, y_0) *di equazione*

$$y = y_0 + p_0(x - x_0) + c_1(x - x_0)^{1+\frac{1}{\mu}} + \dots, \qquad [c_1 \neq 0]$$

(1) Cfr. ad es. L. BIANCHI : *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, (Pisa, 1901), p. 162.

avente in (x_0, y_0) *un punto multiplo con tangenti coincidenti.*

In particolare se $\mu=2$, cioè p_0 è una radice doppia della (9), questa ammette l'integrale passante per (x_0, y_0)

$$[y-y_0-p_0(x-x_0)]^2=c(x-x_0)^3+\dots, \qquad (c\neq 0)$$

e perciò *la curva integrale passante per* (x_0, y_0) *presenta ivi una cuspide.*

3. *a*) - Consideriamo i due polinomi in p, $F(x, y; p)$, $F_p(x, y; p)$ e sia $\Delta_p(x, y; p)$ il loro massimo comune divisore; se consideriamo la (9) come un'equazione algebrica in p, dall'algebra è ben noto che Δ_p si esprime col determinante di SYLVESTER di ordine $2n-1$ (1).

$$\Delta_p F(x,y;\,p)=\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_0 & \dots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & A_n & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_n \\ nA_0, & (n-1)A_1 & \dots & 2A_{n-2} & A_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & nA_0 & \dots & 3A_{n-3} & 2A_{n-2} & A_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & & & \dots & \\ 0 & 0 & & 0 & nA_0, & (n-1)A_1, & (n-2)A_2 & \dots & A_{n-1} \end{vmatrix}.$$

La funzione $\Delta_p F(x, y; p)$ chiamasi il *p-discriminante dell'equazione* (9) e la curva g di equazione

$$(15) \qquad \Delta_p F(x, y; p)=0$$

la *curva luogo del p-discriminante.*

Se osserviamo che fissato un punto (x_0, y_0) di g, il coefficiente angolare della sua retta tangente [ottenuto differenziando la (15)] è in generale differente dalla corrispondente radice multipla p_0 dell'equazione (9), abbiamo che ad ogni punto della curva g è associato un elemento puntualmente singolare, ma la totalità di questi elementi singolari non inviluppa in generale g, cioè g non è un integrale singolare. Per le cose dette, se lungo un

(1) Cfr. ad es. G. SANSONE: *Lezioni di Analisi Matematica*, I (4ª Ed., Padova, 1940), p. 322, p. 464.

tratto di g è $\frac{\partial F}{\partial x}+p\,\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$, [$p$ calcolato dalla (9)], la curva g è un luogo di punti multipli a tangenti coincidenti appartenenti alle curve integrali della (9).

Consideriamo ad esempio l'equazione $p^2-x=0$; si ha $F_p=2p$ e perciò $\Delta_p F=0$ dà $x=0$; è poi $\frac{\partial F}{\partial x}+p\,\frac{\partial F}{\partial y}=-1$, quindi la retta $x=0$ è luogo di cuspidi di curve integrali. Si osservi del resto che l'integrale generale della nostra equazione è $(y+c)^2=\frac{4}{9}\,x^3$ e il punto cuspidale $(0, -c)$ di questa famiglia di cubiche appartiene all'asse y.

b) il teorema dimostrato in *a*) rientra come caso particolare nel seguente teorema di DARBOUX-CAYLEY. *Sia data un'equazione differenziale del primo ordine*

$$(2) \qquad F(x, y; p)=0, \qquad (p=dy/dx)$$

e si elimini p *tra l'equazione stessa e*

$$F_p(x, y; p)=0;$$

se $\Delta_p F(x, y; p)$ *rappresenta il risultato dell'eliminazione, la curva* g *di equazione* $\Delta_p F(x, y; p)=0$ [*curva luogo del p-discriminante*] *in generale non è un integrale singolare dell'equazione* (2), *ma rappresenta il luogo delle cuspidi delle sue curve integrali* (1).

Del teorema di DARBOUX-CAYLEY nel caso analitico è nota una dimostrazione di É. PICARD (2). Una dimostrazione del teorema nel campo reale e nel caso molto generale che la F abbia derivate parziali continue dei primi tre ordini è dovuta a S. ZAREMBA (3), e nel caso che la F abbia derivate continue dei due primi ordini

(1) G. DARBOUX: *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre*, Bull. des Sc. Math, 4 (1873), pp. 158-176; A. CAYLEY: *On the theory of the singular solutions of differential equations of the first order*, Messenger of Math. II (1873), pp. 6-12.

(2) É. PICARD: *Traité d'Analyse*, III (3ª Ed., Paris, 1928), pp. 45-52.

(3) S. ZAREMBA: *Les fonctions réelles non analytiques et les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre*, Ann. Soc. Polon. Math., I (1922), pp. 1-28.

ad É. CARTAN (1). Il teorema nella forma di CARTAN ha il seguente enunciato: *In un dominio D a tre dimensioni la funzione reale $F(x, y; p)$ delle variabili reali x, y, p ammetta derivate parziali dei due primi ordini continue, e in un punto $(x_0, y_0; p_0)$ interno a D si abbia*

$$F(x_0, y_0; p_0)=0, \quad F_p(x_0, y_0; p_0)=0,$$
$$F_x(x_0, y_0; p_0)+p_0F_y(x_0, y_0; p_0)\neq 0, \quad F_{p^2}(x_0, y_0; p_0)\neq 0.$$

Senza alterare le generalità si può supporre anche

$$F_x(x_0, y_0; p_0)+p_0F_y(x_0, y_0; p_0)>0, \quad F_{p^2}(x_0, y_0; p_0)<0;$$

allora l'equazione differenziale (2) *non ammette in un intervallo* (x_0-h, x_0), *con h positivo, alcuna soluzione* $y(x)$ *continua insieme alla sua derivata prima soddisfacente le condizioni iniziali*

$$x=x_0, \quad y=y_0, \quad dy/dx=p_0.$$

Invece in un intervallo (x_0, x_0+h), *ove h è un numero positivo sufficientemente piccolo, ammette due soluzioni e due soltanto, e le due curve integrali che le rappresentano formano nel punto* (x_0, y_0) *una cuspide di prima specie.*

Rimandiamo il lettore al lavoro citato di CARTAN, qui ci limitiamo ad esporre l'idea centrale del ragionamento dovuta ad É. GOURSAT (2) e precisata in ogni suo punto dalle considerazioni di É. CARTAN.

Differenziando la (2) si ha

$$(F_x+pF_y)\,dx+F_p dp=0$$

e perciò x, y, p soddisfano il sistema

$$\frac{dx}{-F_p}=\frac{dy}{-pF_p}=\frac{dp}{F_x+pF_y}.$$

Se per i valori iniziali $(x_0, y_0; p_0)$ è $F_p=0$ ed $F_x+pF_y\neq 0$, non si può applicare il teorema di esistenza degli integrali all'equa-

(1) É. CARTAN: *Les fonctions réelles non analytiques et les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre*, Ann. Soc. Pol. Math., II (1923), pp. 1-8.

(2) É. GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathématique*, T. II (4a éd., Paris, 1924), pp. 563-565.

zione (2), ma si può invece applicarlo al sistema di equazioni equivalente

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{F_p}{F_x+pF_y}, \qquad \frac{dy}{dp}=-\frac{pF_p}{F_x+pF_y}.$$

Una curva integrale di questo sistema soddisfa nel punto (x_0, y_0) le condizioni iniziali

$$dx/dp=0, \qquad dy/dp=0$$

ed avrà quindi in (x_0, y_0) una cuspide.

4. - Vogliamo ora dare delle condizioni necessarie o delle condizioni sufficienti per l'esistenza di una curva integrale singolare.

a) Sia data l'equazione

$$F(x, y; p)=0 \tag{2}$$

ove F è una funzione reale dei tre argomenti x, y, p in un dominio D a tre dimensioni, continua insieme alle sue derivate del primo ordine e una curva *Γ della classe* 2 (1) rappresenti un suo integrale singolare.

Per definizione lungo Γ si ha

$$F_p(x, y; p)=0, \qquad [p=dy/dx];$$

derivando la (2) rispetto ad x abbiamo pure

$$F_x+F_y\,p+F_p(dp/dx)=0,$$

quindi

$$F_x+pF_y=0,$$

abbiamo allora che *condizione necessaria per l'esistenza di un integrale singolare dell'equazione* (2), *di classe* 2, *è che esista una curva continua con tangente continua tale che lungo essa siano simultaneamente verificate le tre equazioni*

$$F(x, y; p)=0, \quad F_p(x, y; p)=0, \tag{16}$$
$$F_x(x, y; p)+pF_y(x, y; p)=0, \qquad [p=dy/dx].$$

(1) Per questa denominazione cfr. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, (Bologna, 1921), I, pag. 347. Una curva della classe 2 ammette nell'intervallo in cui è definita derivate finite e continue del primo e del secondo ordine.

Nei nostri ragionamenti ci riferiamo a curve Γ tali che se (x, y) *è un punto variabile su di esse,* $(x, y; dy/dx)$ *risulti interno a D.*

b) Inversamente le equazioni parametriche

$$x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda),$$

di una curva Γ della classe 2 soddisfino le equazioni

$$(17) \quad F(x, y; \lambda) = 0, \quad F_p(x, y; \lambda) = 0, \quad F_x(x, y; \lambda) + \lambda F_y(x, y; \lambda) = 0$$

e sia lungo Γ

$$(18) \qquad F_y(x, y; \lambda) \neq 0.$$

Derivando lungo Γ, e rispetto ad x, la prima delle (17), si ha

$$F_x(x, y; \lambda) + p\, F_y(x, y; \lambda) = 0, \qquad [p = dy/dx]$$

e confrontando con la terza delle (17) segue che la curva Γ rappresenta un integrale singolare.

Abbiamo così dimostrato che *se le equazioni parametriche*

$$x = x(p), \qquad y = y(p)$$

di una curva Γ, *della classe* 2, *soddisfano le condizioni*

$$F(x, y; p) = 0, \quad F_p(x, y; p) = 0, \quad F_x(x, y; p) + pF_y(x, y; p) = 0,$$
$$F_y(x, y; p) \neq 0,$$

la curva Γ *è un integrale singolare dell'equazione*

$$F(x, y; dp/dx) = 0.$$

Si consideri ad esempio l'equazione $p^2 - y = 0$; si ha $F_p = 2p$, quindi $p = 0$, $y = 0$; la curva luogo del p-discriminante è la retta $y = 0$; si ha $F_x + pF_y = 0$, $F_y = -1$ e l'asse x è un integrale singolare. Per altro l'integrale generale dell'equazione proposta è composto dalle parabole $y = \frac{1}{4}(x + c)^2$ che inviluppano l'asse x.

5. - *a*) Alla curva luogo del p-discriminante possono appartenere le così dette *curve luoghi di contatti* che andiamo a definire.

Una curva g goda la proprietà che da ogni suo punto (x, y) partano due integrali particolari distinti della (2) ivi tangenti e il coefficiente angolare λ di g in (x, y) sia diverso dal coefficiente angolare p delle due curve integrali uscenti da (x, y); si dirà

allora che *la* g *è una curva luogo di contatti delle curve integrali della* (2) (1).

La curva g fa parte della curva luogo del p-discriminante e sarà facile trovare delle condizioni necessarie alle quali deve soddisfare la $F(x, y, p)$ perchè la curva luogo del p-discriminante contenga una curva luogo di contatti, della classe 2.

Le coordinate (x, y) di un punto mobile su g possiamo pensarle come due funzioni $x(p)$, $y(p)$ del coefficiente angolare p delle curve integrali uscenti da (x, y); si avrà quindi

$$F[x(p), y(p); p] = 0, \qquad F_p[x(p), y(p); p] = 0,$$

e differenziando la prima

$$F_x[x(p), y(p); p] + \lambda F_y[x(p), y(p); p] = 0.$$

Poichè per (x, y) passano due curve integrali di coefficiente angolare p, ed è $F_p(x, y; p) = 0$, dovrà aversi anche

$$F_x[x(p), y(p); p] + pF_y[x(p), y(p); p] = 0,$$

ma avendosi $\lambda \neq p$ le due ultime equazioni esigono che

$$F_x[x(p), y(p); p] = 0, \qquad F_y[x(p), y(p); p] = 0,$$

e perciò *condizione necessaria perchè la curva luogo del p-discriminante contenga una curva luogo di contatti è che esistano due funzioni continue* $x(p)$, $y(p)$ *le quali soddisfino identicamente le quattro equazioni*

$$F(x, y; p) = 0, \quad F_x(x, y; p) = 0, \quad F_y(x, y; p) = 0, \quad F_p(x, y; p) = 0.$$

b) Consideriamo ad esempio l'equazione

$$(x - y)^2 (1 + p^2)^3 = a^2 (1 + p^3)^2, \qquad (a > 0) \quad (2).$$

Si ha

$$x - y = a(1 + p^3)(1 + p^2)^{-3/2}$$

(1) Nei nostri ragionamenti supponiamo che $(x, y; \lambda)$ risulti interno al dominio D a tre dimensioni dove è definita $F(x, y; p)$ che supponiamo al solito continua insieme alle sue derivate parziali del primo ordine.

(2) N. Miller: *A first course in differential equations*, (Oxford Univ. Press, 1936), pp. 1-148]; pag. 32.

e derivando

$$1-p=-3a\,\frac{p(1-p)}{(1+p^2)^{5/2}}\,\frac{dp}{dx},$$

da cui

$$1-p=0,$$

oppure

$$1=-3a\,p(1+p^2)^{-5/2}\,\frac{dp}{dx}.$$

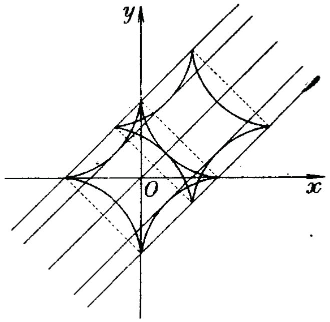

Fig. 25.

Per $p=1$ l'equazione dà

$$x-y=\pm a/\sqrt{2},$$

la seconda equazione dà invece

$$x-c=a(1+p^2)^{-3/2}$$

quindi $\quad 1+p^2=a^{2/3}(x-c)^{-2/3},$

$$1+p^3=\{[a^{2/3}-(x-c)^{2/3}]^{3/2}+(x-c)\}(x-c)^{-1}$$

e sostituendo nell'equazione data

$$(x-c)^{\frac{2}{3}}+(y-c)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

cioè l'integrale generale dell'equazione è costituito da una famiglia di asteroidi uguali con i centri sulla retta $x=y$, [v. fig. 25].

Si ha

$$F=(x-y)^2\,(1+p^2)^3-a^2(1+p^3)^2,\qquad F_x=2(x-y)\,(1+p^2)^3$$
$$F_y=-2(x-y)\,(1+p^2)^3,\qquad F_p=6p[(1+p^2)^2(x-y)^2-a^2p(1+p^3)]$$

e le soluzioni del sistema $F=0$, $F_p=0$ sono $p=0, x-y=\pm a$; $p=1$, $x-y=\pm a/\sqrt{2}$; $p=-1$, $x=y$.

Le due rette $x-y=\pm a$ sono luogo di cuspidi

$$[F_x+pF_y=2(x-y)=\pm 2a\neq 0],$$

le due rette $x-y=\pm a/\sqrt{2}$ rappresentano due integrali singolari $[F_x+p\,F_y=16\,(x-y)-16\,(x-y)=0,\ F_y=-16[\pm a/\sqrt{2}]\neq 0]$, e la retta $x=y$ è una curva luogo di contatti $[F_x=0,\ F_y=0]$.

6. - Vogliamo ora considerare la ricerca degli integrali singolari partendo dall'espressione dell'integrale generale.

a) Sia $F(x, y; p)$ una funzione delle variabili reali $x, y; p$ continua quando (x, y) varia in un campo C a due dimensioni e p in un certo intervallo, e dell'equazione

$$F(x, y;\ p)=0 \tag{2}$$

sia

$$\Phi(x, y;\ c)=0 \tag{3}$$

l'integrale generale, cioè ad ogni valore di c la (3) faccia corrispondere una curva integrale della (2) appartenente a C, e fissato (x_0, y_0) in C vi sia almeno un valore c_0 di c tale che $\Phi(x_0, y_0;\ c_0)=0$.

Consideriamo il sistema formato dalle due equazioni

$$\Phi(x, y;\ c)=0,\qquad \Phi_c(x, y;\ c)=0;\quad [1] \tag{19}$$

dalla teoria degli inviluppi è noto che se esiste una curva Γ inviluppo delle (3) la sua equazione si ottiene eliminando il parametro c tra le due equazioni (19).

Se

$$\Delta_c\,\Phi(x, y;\ c)=0 \tag{20}$$

è l'equazione ottenuta eliminando il parametro c nelle (19), diremo che essa è l'equazione della *curva luogo del c-discriminante.*

È ben noto che la curva luogo del c-discriminante può essere formata oltre che dall'eventuale inviluppo delle curve (3) da luoghi

[1] $\Phi_c(x, y; c)$ sta per $\dfrac{\partial\Phi(x, y;\ c}{\partial c}$.

aventi altre proprietà geometriche, e sarà perciò opportuno richiamare alcuni risultati della teoria degli inviluppi.

b) Supponiamo che per una terna $(x_0, y_0; c_0)$ interna al campo di esistenza di $\Phi(x, y; c)$ risulti

$$\Phi(x_0, y_0; c_0)=0, \qquad \Phi_c(x_0, y_0; c_0)=0;$$

allora se in un intorno di $(x_0, y_0; c_0)$ risulta anche

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial c\partial x}, & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial c\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

quando c varia in un intorno di c_0, esistono due funzioni $x(c)$, $y(c)$ che rappresentano un ramo Γ della curva del c-discriminante, uscente da (x_0, y_0).

Si ha identicamente lungo la curva Γ

$$\Phi[x(c), y(c); c]=0, \qquad \Phi_c[x(c), y(c); c]=0$$

e differenziando la prima e tenuto conto della seconda

$$\Phi_x[x(c), y(c), c]\,x'(c)+\Phi_y[x(c), y(c); c]\,y'(c)=0.$$

A meno che non si abbia $x'(c)=y'(c)=0$, cioè il punto $[x(c), y(c)]$ sia singolare per Γ, il coefficiente angolare della retta tangente a Γ in $[x(c), y(c)]$ vale $y'(c)/x'(c)= -\Phi_x[x(c), y(c); c]\,/\,\Phi_y[x(c),y(c); c]$ cioè è uguale al coefficiente angolare della curva $\Phi(x, y; c)=0$ nel medesimo punto.

Il ramo Γ della curva luogo del c-discriminante ora considerato è perciò un inviluppo di integrali particolari e quindi un integrale singolare, e in casi particolari non è escluso che il ramo Γ coincida in tutto o in parte con una curva della famiglia (3).

c) Osserviamo che se le curve (3) possiedono un punto multiplo, variabile su una curva g di equazione $x=x_1(c)$, $y=y_1(c)$, si ha lungo g

$$\Phi[x_1(c), y_1(c); c]=0, \quad \Phi_x[x_1(c), y_1(c); c]=0, \quad \Phi_y[x_1(c), y_1(c); c]=0$$

e differenziando la prima e tenuto conto delle altre due abbiamo

$$\Phi_c[x_1(c), y_1(c); c]=0$$

e perciò alla curva luogo dei c-discriminante può anche appartenere il luogo dei punti multipli variabili degli integrali particolari.

d) Consideriamo ad esempio l'equazione differenziale

$$y'^2=2\sqrt{y}\,(xy'-2y) \quad (^1)$$

che ha l'integrale generale

$$\Phi(x, y; c)=y-c^2(x-c)^2=0. \tag{21}$$

Si ha $\Phi_c=-2c(x-c)\,(x-2c)$ e perciò $c=0, y=0$; $x=c, y=0$; $x=2c$, $y=c^4$, $\left(y=\frac{1}{16}x^4\right)$.

La retta $y=0$ è l'inviluppo delle parabole $y=c^2(x-c)^2$, essa è perciò un integrale singolare (ed anche particolare); la curva $y=\frac{1}{16}x^4$ è un inviluppo delle (21) e perciò un integrale singolare.

e) È istruttivo il seguente esempio, dal quale deriva che possono esistere integrali singolari delle equazioni differenziali non appartenenti nè alla curva luogo del p-discriminante nè a quella del c-discriminante.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$F(x, y; p)=p-(1+\log x)=0$$

e per restare nel campo reale sia $x\geqslant 0$.

Il suo integrale generale è $\Phi=y+c-x\log x=0$; si ha

$$F_p=1, \qquad \Phi_c=1,$$

mentre le curve integrali hanno un punto di arresto sull'asse y e risultano tangenti a quest'asse. L'asse y, $[x=0]$, è perciò un integrale singolare dell'equazione $[dx/dy=1/(1+\log x)]$.

Il lettore osservi che l'asse y limita il dominio in cui ha significato l'equazione.

7. *a*) - Vogliamo ora esporre un procedimento di T. W. Chaundy (²) il quale in opportune condizioni elimina nella curva luogo del c-discriminante la possibilità di rami estranei agli integrali singolari.

(¹) G. Boole: *A treatise on differential equations*, (London, 1877), pp. 168-169.

(²) T. W. Chaundy: *Singular solutions of first-order differential equations*, Quarterly Journ. of Math. (Oxford series), 3 (1932), pp. 238-240.

L'integrale generale dell'equazione

$$(2) \qquad F(x, y; p) = 0$$

abbia l'espressione

$$(22) \qquad x = x(p, c), \quad y = y(p, c), \qquad [p = dy/dx].$$

Indichi Γ_c la curva di equazione (22) corrispondente al valore c della costante, e le Γ_c inviluppino una curva Γ. Il valore di p nel punto in cui la Γ_c tocca la Γ sarà una certa funzione $p(c)$ del parametro

$$(23) \qquad p = p(c)$$

e l'inviluppo Γ è definito quindi parametricamente dalle equazioni

$$(24) \qquad x = x[p(c), c], \qquad y = y[p(c), c].$$

Da noti risultati della teoria degli inviluppi si ha che la funzione $p(c)$ può determinarsi dall'equazione

$$\frac{d(x, y)}{d(p, c)} = 0,$$

e poichè seguendo questo procedimento non si esclude che le (24) rappresentino il luogo dei punti singolari delle (22), conviene esporre le considerazioni di CHAUNDY atte ad eliminare questa possibilità.

Sopra una Γ_c il coefficiente angolare p della retta tangente è dato da

$$(25) \qquad \frac{\partial y}{\partial p} = p \frac{\partial x}{\partial p} \quad ,$$

mentre per i differenziali dx, dy presi lungo l'inviluppo Γ abbiamo

$$(26) \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial p} dp + \frac{\partial x}{\partial c} dc, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial p} dp + \frac{\partial y}{\partial c} dc,$$

dove dp/dc è determinato dalla (23).

Poichè per ipotesi l'inviluppo Γ tocca ogni Γ_c si avrà nelle (26) $dy = p dx$ e per la (25)

$$(27) \qquad \frac{\partial y(p, c)}{\partial c} = p \frac{\partial x(p, c)}{\partial c}.$$

Inversamente supponiamo che $p(c)$ *sia una funzione di c che soddisfi questa equazione,* e la curva Γ definita dalle (24) sia priva di cuspidi; vogliamo allora dimostrare che in ogni punto comune a una Γ_c e a Γ [sia esso regolare o cuspidale per Γ_c] Γ e Γ_c hanno la stessa retta tangente. Infatti per il coefficiente angolare p della retta tangente alla Γ_c nel punto considerato [sia o no cuspidale] vale la (25), vale anche la (27) e perciò dalle (26) $dy = p dx$ dove dx e dy sono presi lungo Γ, e questo porta il contatto di Γ_c e Γ.

Dal ragionamento fatto segue: *se l'integrale generale della* (2) *è dato dalle* (22), *e si determina la* $p(c)$ *dalla* (27), *le* (24) *definiscono una curva che in ogni suo tratto privo di cuspidi rappresenta un integrale singolare dell'equazione proposta* [anche se esso dovesse risultare un luogo di punti cuspidali delle Γ_c]; il procedimento descritto ha dunque il vantaggio su quello del n. 6 di eliminare la possibilità che nella curva luogo del c-discriminante compaiano rami estranei all'integrale singolare.

b) Per chiarezza prendiamo in esame il seguente esempio di CHAUNDY. L'integrale dell'equazione differenziale

$$(x - 3p^2)^3 = (y - 2p^3)^2$$

si esprime sotto forma parametrica con

$$x = 3p^2 + c^2, \qquad y = 2p^3 + c^3;$$

l'equazione (27) dà, $\left[\frac{\partial y}{\partial c} = 3c^2, \quad \frac{\partial x}{\partial c} = 2c\right]$,

$$3c^2 = 2pc$$

perciò $c = 0$ oppure $p = 3c/2$.

A $c = 0$ corrisponde l'integrale particolare $x = 3p^2$, $y = 2p^3$; alla soluzione $p = 3c/2$ corrisponde la parabola semicubica $x = 31c^2/4$, $y = 31c^3/4$ che è l'integrale singolare dell'equazione.

Si ha invece

$$\frac{d(x, y)}{d(p, c)} = \begin{vmatrix} 6p, & 2c \\ 6p^2, & 3c^2 \end{vmatrix} = 6pc(3c - 2p),$$

perciò $c = 0$; $p = 0$; $3c = 2p$; a $c = 0$ corrisponde un integrale particolare dell'equazione; a $p = 0$ il luogo di cuspidi $x = c^2$, $y = c^3$;

a $3c=2p$ l'integrale singolare già trovato; il primo procedimento ha eliminato quindi il luogo delle cuspidi degli integrali particolari, estraneo all'integrale singolare.

8. - Nel numero 3 abbiamo parlato della curva luogo di cuspidi delle curve integrali; vogliamo ora notare un risultato relativo al luogo dei punti di inflessione delle curve integrali, che pur non essendo pertinente alla teoria degli integrali singolari, trova qui il posto più adatto.

L'equazione

$$F(x, y;\, p)=0, \qquad (p=dy/dx)$$

dove F ammette derivate prime e seconde continue nei suoi argomenti in un certo campo a tre dimensioni, sia atta a definire una famiglia di curve integrali, e si cerchi il luogo dei punti di inflessione di tali curve. In un punto di inflessione di una curva integrale dovrà aversi $d^2y/dx^2=dp/dx=0$, ma

$$F_x+F_y\frac{dy}{dx}+F_p\frac{dp}{dx}=0$$

e ne viene che *in generale, il luogo γ dei punti di inflessione delle curve integrali si ottiene eliminando p tra le due equazioni*

$$F=0, \qquad F_x+pF_y=0.$$

Si ha poi

$$F_{x^2}+2F_{x,y}\,p+F_{y^2}\,p^2+F_p\frac{d^2p}{dx^2}=0$$

e perciò *è sufficiente che si abbia lungo γ*

$$F_p=0, \quad F_{x^2}+2F_{x,y}\,p+F_{y^2}\,p^2\neq 0, \qquad [y'''=d^2p/dx^2\neq 0]$$

perchè tale curva risulti luogo dei punti di inflessione delle curve integrali.

CAPITOLO X.

Metodi operazionali - Trasformazione di Laplace.

§ 1. - Operatori differenziali lineari di ordine n.

1. Generalità. - 2. Operatori differenziali lineari ed equazioni differenziali linear omogenee a coefficienti costanti. - 3. Gli operatori $(D-\varrho)^{-\nu}F(t)$, $p^{-1}(D)F(t)$ con $p(D)$ polinomio in D. Scomposizione di $p^{-1}(D)$ in operatori semplici nel caso di $p(D)$ a coefficienti costanti. - 4. Valutazione di $p^{-1}(D)e^{kt}$, $p^{-1}(D)$ sen kt, $p^{-1}(D)$ cos kt, con $p(D)$ polinomio a coefficienti costanti. - 5. Valutazione di $p^{-1}(D)F(t)$ con $F(t)$ funzione olomorfa. - 6. Equazioni di EULERO e di LAGRANGIA.

1. - *a*) Nel § 1 del Cap. II ci siamo occupati dell'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali lineari di *forma normale*, e abbiamo allora avvertito che avremmo ripreso la trattazione per far noti al lettore i procedimenti che sono stati elaborati sia per la determinazione dell'integrale generale di qualunque sistema di equazioni differenziali lineari, sia per la costruzione delle soluzioni corrispondenti al problema di CAUCHY. Tratteremo in questo § e nei §§ 3, 4 il primo problema, basandoci sull'uso degli operatori differenziali, e nel § 7 il secondo problema, basandoci sull'uso della trasformazione di LAPLACE.

Quanto al primo problema, a proposito dell'integrazione dei sistemi normali di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti abbiamo visto [Cap. II, § 1, n. 6] che in ultima analisi la determinazione dell'integrale generale dipende dal problema algebrico di trovare le radici della così detta *equazione caratteristica* (o fondamentale), e allo scopo di mettere in luce questo legame, e di rendere prevalenti i procedimenti algebrici nella risoluzione dei sistemi, faremo dapprima lo studio dei simboli di operazione contenenti il segno di derivata $d/dt=D$.

b) L'espressione differenziale

$$(1)\qquad a_0(t)Y^{(n)}+a_1(t)Y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(t)Y'+a_n(t)Y$$

ove $a_0(t)$, $a_1(t)$,...., $a_{n-1}(t)$, $a_n(t)$ sono funzioni continue assegnate di t in (α, β), ivi dotate di tutte le derivate che ci occorrerà considerare (¹), come abbiamo già detto nel Cap. IV, § 5, n. 2, *a*), si conviene di scriverla col simbolo

$$\left[a_0\frac{d^n}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\dots+a_{n-1}\frac{d}{dt}+a_n\right]Y$$

e ordinariamente con l'altro

$$[a_0D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_{n-1}D+a_n]\,Y.$$

Il simbolo

$$(1')\qquad p(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\dots+a_{n-1}D+a_n=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu D^{n-\nu}$$

prende il nome di operatore differenziale lineare di ordine n, e l'espressione (1) si scrive brevemente $p(D)Y$ (²).

(¹) Nel seguito, scrivendo un'espressione differenziale come la (1) intenderemo tacitamente che $a_0(t)$, $a_1(t)$,...., $a_{n-1}(t)$, $a_n(t)$, soddisfino questa condizione.

(²) Il primo studio sugli operatori simbolici è dovuto a B. BRISSON: *Sur l'intégration des équations différentielles partielles*, Journ. de l'Éc. Polytech., VII (14^me cahier, 1808), (pp. 191-261), pag. 197.

Per un'esposizione esauriente dell'argomento cfr.: *a*) S. PINCHERLE, U. AMALDI: *Operazioni distributive*, [Bologna, 1901], Cap. XI; *b*) G. BOOLE: *A treatise on differential equations*, (4ª ed., London, 1877), Cap. XVI, pp. 381-409; CH. J. DE LA VALLÉE-POUSSIN: *Cours d'Analyse Infinitésimale*, II (5^me éd., Louvain, 1925), pp. 201-209, 251-256; *d*) E. L. INCE: *Ordinary differential equations*, (London, 1927), Cap. V e VI; *e*) E. G. C. POOLE: *Introduction to the theory of linear differential equations*, (Oxford, 1936), pp. 18-44.

Avvertiamo il lettore che analogamente al caso del secondo ordine [Cap. IV, § 5], la decomposizione degli operatori differenziali lineari omogenei $\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu(t)D^{n-\nu}$, con $a_0(t)$,...., $a_n(t)$ funzioni reali della variabile t, $a_0(t)\neq 0$, [operatori *regolari*] in prodotto $a_0(t)\prod_{i=1}^{n}(D-\varrho_i(t))$, di fattori lineari, $\varrho_i(t)$ funzioni reali o complesse della t, è stata studiata e applicata da G. MAMMANA all'analisi qualitativa degli integrali delle equazioni differenziali nei suoi lavori: *a*) *La decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in fattori simbolici di primo ordine*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Se $p(D)$ ha l'espressione (1'), e b è una funzione nota di t, porremo per definizione

$$bp(D) = ba_0 D^n + ba_1 D^{n-1} + \dots + ba_{n-1} D + ba_n .$$

c) Se c è una costante si ha

$$p(D)\,(cY) = cp(D)\,Y;$$

si ha pure

$$p(D)\,(Y_1 + Y_2) = p(D)\,Y_1 + p(D)\,Y_2 ,$$

cioè l'*operatore* $p(D)$ *è distributivo*.

d) Dati

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} p_1(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n , \\ p_2(D) = b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-1} D + b_n , \end{cases}$$

chiamasi *somma* [*differenza*] dei due operatori $p_1(D)$, $p_2(D)$, e si indica col simbolo $p_1(D) + p_2(D)$ $[p_1(D) - p_2(D)]$ l'operatore

$$p_1(D) \pm p_2(D) = (a_0 \pm b_0) D^n + (a_1 \pm b_1) D^{n-1} + \dots \\ + (a_{n-1} \pm b_{n-1}) D + (a_n \pm b_n).$$

e) Se $p_1(D)$, $p_2(D)$ sono due operatori differenziali, l'espressione $p_1(D)[p_2(D)\,Y]$ rappresenta un operatore differenziale su Y, e posto $p_1(D)[p_2(D)\,Y] = p(D)\,Y$, si dirà $p(D)$ il *prodotto dei due operatori* $p_1(D)$, $p_2(D)$, e si scriverà

$$p_1(D) p_2(D) = p(D).$$

---

(6), 9 (1929), pp. 538-544; *b*) *Alcune applicazioni della decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee allo studio delle equazioni differenziali lineari omogenee*, ibid. pp. 608-615; *c*) *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori, e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari*, Math. Zeitschr., 33 (1931), pp. 186-331. Cfr. anche R. BRACCIO: *Espressione generale dell'integrale di una equazione differenziale lineare omogenea e di tipo normale di ordine pari*, Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett., (2) 62 (1929), pp. 760-773.

Per una recente trattazione della decomposizione in fattori di un operatore differenziale a coefficienti variabili, nel campo complesso [o reale], lumeggiata da considerazioni geometriche cfr. GUIDO ASCOLI: *Sulla decomposizione degli operatori differenziali lineari in fattori lineari e sopra alcune questioni geometriche che vi si riconnettono*, Revista Mat. y Fis. Teorica, (Tucuman), I (1940), pp. 180-215.

f) Si ha in generale $p_1(D) p_2(D) \neq p_2(D) p_1(D)$, o come si dice *i due operatori* $p_1(D)$, $p_2(D)$ *non sono permutabili* (1).

Ad esempio abbiamo visto nel citato n. 2, *a*) del § 5 del Cap. IV, che si ha $(D - \varrho_1)\,(D - \varrho_2) = (D - \varrho_2)\,(D - \varrho_1)$ allora e allora soltanto che sia $\varrho_1' = \varrho_2'$, circostanza che in particolare si verifica se ϱ_1 e ϱ_2 sono costanti.

Dimostriamo in generale che *se gli operatori* $p_1(D)$, $p_2(D)$ *sono a coefficienti costanti*, cioè se nelle (2) i coefficienti

$$a_0,\ a_1, \dots,\ a_n; \qquad b_0,\ b_1, \dots,\ b_n$$

sono costanti, *essi sono permutabili*.

Si ha infatti

$$p_1(D) p_2(D)\,Y = \left[\sum_{h=0}^{n} a_h D^{n-h}\right] \left[\sum_{k=0}^{n} b_k D^{n-k}\right] Y =$$

$$= \left[\sum_{h,\,k}^{0\dots n} a_h b_k D^{2n-h-k}\right] Y = \left[\sum_{k=0}^{n} b_k D^{n-k}\right] \left[\sum_{h=0}^{n} a_h D^{n-h}\right] Y = p_2(D) p_1(D)\,Y.$$

g) Porremo per definizione

$$p_1(D) p_2(D) p_3(D) = p_1(D)[p_2(D) p_3(D)],$$
$$p_1(D) p_2(D) p_3(D) p_4(D) = p_1(D)[p_2(D) p_3(D) p_4(D)], \dots \quad (2).$$

È facile verificare che

$$p_1(D)\,[p_2(D) p_3(D)] = [p_1(D) p_2(D)]\,p_3(D),$$

sussiste cioè la *proprietà associativa del prodotto*, e per questo basterà provare che

$$\text{(3)} \qquad D^r\,[(bD^s)\,(cD^t)] = [D^r(bD^s)]\,(cD^t).$$

---

(1) Per lo studio della permutabilità di due operatori lineari, cfr. J. L. BURCHNALL, T. W. CHAUNDY: *Commutative ordinary differential operators*, Proc. of the London Math. Soc., (2), 21 (1922), pp. 420-440.

(2) D'ora in avanti se $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ indicano operazioni di natura qualsiasi che possono eseguirsi su una funzione Y, il simbolo $A_1 \dots A_{n-1} A_n Y$ indica $A_1 \{ \dots [A_{n-1}(A_n Y)] \}$.

Si ha infatti

$$D[(bD^s)(cD^t)] = D\left[b\sum_{h=0}^{s}\binom{s}{h}c^{(h)}D^{s+t-h}\right] =$$

$$= b'D^s(cD^t) + b\sum_{k=1}^{s+1}\binom{s}{k-1}c^{(k)}D^{s+t-k+1} + b\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}c^{(k)}D^{s+t-k+1} =$$

$$= b'D^s(cD^t) + b\sum_{k=0}^{s+1}\binom{s+1}{k}c^{(k)}D^{s+t-k+1} = b'D^s(cD^t) + bD^{s+1}(cD^t) =$$

$$= [D(bD^s)](cD^t),$$

e perciò la (3) sussiste per $r=1$.

Ma supposta la (3) vera per r, moltiplicandone i due membri a sinistra per D si ha che essa sussiste per $r+1$; la (3) è perciò vera in generale.

h) Si ha in particolare: *se* $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n$ *sono costanti,*

$$(4)\qquad (D-\varrho_1)(D-\varrho_2)....(D-\varrho_n) = D^n - s_1D^{n-1} + s_2D^{n-2} - .... + \\ + (-1)^{n-1}s_{n-1}D + (-1)^n s_n,$$

dove

$$\sum \varrho_{i_1}\varrho_{i_2}....\varrho_{i_k} = s_k, \quad (k=1, 2, ..., n),$$

con la somma estesa a tutte le combinazioni semplici $i_1, i_2, ... i_k$ della classe k dei numeri $1, 2, ..., n$.

Inversamente *se*

$$p(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n$$

con $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ *costanti, e se* $\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n$ *sono le* n *radici dell'equazione caratteristica* (fondamentale)

$$(5)\qquad a_0\varrho^n + a_1\varrho^{n-1} + ... + a_{n-1}\varrho + a_n = 0,$$

si ha allora

$$p(D) = a_0(D-\varrho_1)(D-\varrho_2)....(D-\varrho_n).$$

In particolare posto

$$(D-\varrho)^n = (D-\varrho)(D-\varrho)....(D-\varrho).$$

per ϱ costante si ha

$$(D-\varrho)^n = D^n - \binom{n}{1}\varrho D^{n-1} + ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\varrho^{n-1}D + (-1)^n\varrho^n.$$

Tenuto conto della proprietà associativa del prodotto si verifica immediatamente che per ϱ costante e ν_1, ν_2 interi positivi abbiamo pure

$$(D-\varrho)^{\nu_1+\nu_2} = (D-\varrho)^{\nu_1}(D-\varrho)^{\nu_2}.$$

i) Si ha evidentemente che *se l'espressione*

$$p(D)Y = [a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n]\,Y, \quad [a_r = a_r(t)]$$

è identicamente nulla in (α, β) *qualunque sia la funzione* Y, *o più generalmente se è identicamente nulla in* (α, β) *per un sistema di* $n+1$ *funzioni linearmente indipendenti, si ha allora in* (α, β)

$$a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 0, ..., \quad a_{n-1} \equiv 0, \quad a_n \equiv 0.$$

Sia infatti $a_r(t)$ il primo dei coefficienti $a_0, a_1, ..., a_n$ non identicamente nullo in (α, β), e risulti in (α_1, β_1) contenuto in (α, β), $a_r(t) \neq 0$; ma con questa condizione l'equazione

$$p(D)Y = [a_rD^{n-r} + ... + a_n]\;Y = 0,$$

può essere soddisfatta identicamente da $n-r$ $[\leqslant n]$ funzioni linearmente indipendenti.

Ne segue che se per qualunque funzione Y [per $n+1$ funzioni linearmente indipendenti] si ha identicamente in (α, β)

$$[a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n]\,Y \equiv \\ \equiv [b_0D^n + b_1D^{n-1} + ... + b_{n-1}D + b_n]\,Y$$

è $a_0 \equiv b_0, \; a_1 \equiv b_1, ..., \; a_n \equiv b_n$.

2. *a*) - Servendoci degli operatori differenziali lineari vogliamo subito ritrovare i noti risultati sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti. [Cap. II, § 1, n. 6, *d*)].

Si voglia risolvere l'equazione

$$(6)\qquad a_0Y^{(n)} + a_1Y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}Y' + a_nY = 0,$$

dove $a_0, a_1, ..., a_n$ sono *costanti*, $a_0 \neq 0$.

Se $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sono le radici dell'equazione caratteristica (5), la (6) può scriversi

$$a_0(D-\varrho_1)(D-\varrho_2)\ldots(D-\varrho_n)Y=0,$$

e ne viene, per la permutabilità dei fattori del primo membro, che la (6) è soddisfatta da ogni funzione Y che verifica una qualunque delle equazioni

$$(D-\varrho_1)\,Y=0, \quad (D-\varrho_2)\,Y=0, \ldots, \quad (D-\varrho_n)\,Y=0.$$

L'equazione $(D-\varrho_k)\,Y=Y'-\varrho_k Y=0$ ha l'integrale

$$Y_k=c_k\, e^{\varrho_k t}, \qquad [k=1, 2, \ldots, n;\ c_k=\text{cost.}]$$

perciò se $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sono due a due distinte, cioè *se l'equazione caratteristica* (5) *non ha radici multiple, l'integrale generale della* (6) *è dato da*

$$Y=\sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\varrho_k t},$$

con le c_k *costanti arbitrarie.*

b) Se l'equazione caratteristica (5) ammette le radici $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$ multiple rispettivamente degli ordini $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$, $[\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=n]$ l'equazione (6) si scrive

$$(D-\varrho_1)^{\nu_1}(D-\varrho_2)^{\nu_2}\ldots(D-\varrho_r)^{\nu_r}\,Y=0,$$

e se Y_k soddisfa l'equazione

$$(D-\varrho_k)^{\nu_k}\,Y_k=0, \tag{7}$$

Y_k soddisfa anche l'equazione proposta.

Posto $Y_k=e^{\varrho_k t}Z$ abbiamo

$$(D-\varrho_k)^{\nu_k}e^{\varrho_k t}Z=(D-\varrho_k)^{\nu_k-1}e^{\varrho_k t}Z'=e^{\varrho_k t}Z^{(\nu_k)}=0,$$

quindi $Z^{(\nu_k)}=0$, e $Z=c_0^{(k)}+c_1^{(k)}t+\ldots+c_{\nu_k-1}^{(k)}\ t^{\nu_k-1}$; l'integrale generale della (6) ha quindi l'espressione

$$y=\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=0}^{\nu_k-1} c_l^{(k)}\, t^l\, e^{\varrho_k t},$$

con le $c_l^{(k)}$ *costanti arbitrarie.*

c) Se nella (6) i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sono costanti ***reali***, e $\varrho_k=\beta_k+i\gamma_k$ è una radice ***complessa*** dell'equazione caratteristica (5), multipla di ordine ν_k, la (5) ammette anche la radice coniugata $\beta_k-i\gamma_k$ con lo stesso ordine di moltiplicità, ma si ha $e^{(\beta_k+i\gamma_k)t}+e^{(\beta_k-i\gamma_k)t}=2e^{\beta_k t}\cos\gamma_k t$, $e^{(\beta_k-i\gamma_k)t}-e^{(\beta_k-i\gamma_k)t}=2ie^{\beta_k t}\,\text{sen}\,\gamma_k t$, e l'espressione $c_1\, e^{\beta_k t}\,\text{sen}\,\gamma_k t+c_2\, e^{\beta_k t}\cos\gamma_k t$ può porsi sempre sotto la forma $d\, e^{\beta_k t}\,\text{sen}\,(\gamma_k t+f)$, e ne viene che ***se l'equazione caratteristica*** (5) ***ammette le radici reali*** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r_1}$ ***multiple rispettivamente degli ordini*** $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{r_1}$, ***e le radici*** $\beta_1 \pm i\gamma_1$, $\beta_2 \pm i\gamma_2, \ldots, \beta_{r_2} \pm i\gamma_{r_2}$ ***multiple rispettivamente degli ordini*** $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r_2}$, ***l'integrale generale della*** (6) ***ha la forma***

$$Y=\sum_{k=1}^{r_1}\sum_{l=0}^{\nu_k-1} c_l^{(k)}\, t^l\, e^{\varrho_k t}+\sum_{k=1}^{r_2}\sum_{l=0}^{\mu_k-1} d_l^{(k)}\, t^l\, e^{\beta_k t}\,\text{sen}\,(\gamma_k t+f_l^{(k)})$$

con le $c_l^{(k)}$, $d_l^{(k)}$, $f_l^{(k)}$ ***costanti arbitrarie.***

3. - *a*) Nel numero precedente ci siamo giovati delle più semplici proprietà degli operatori differenziali per costruire l'integrale generale delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti; per passare ora alla risoluzione delle equazioni non omogenee sarà opportuno definire l'operazione $p^{-1}(D)$.

b) Col simbolo $D^{-1}F$ intenderemo l'***operazione inversa della derivazione,*** cioè l'integrale indefinito di F, perciò

$$D^{-1}F(t)=\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt+c, \qquad [c=\text{cost.}].$$

Più in generale col simbolo $D^{-\nu}F(t)$, intenderemo una ***qualsiasi funzione che derivata*** ν ***volte dà*** $F(t)$; si ha quindi

$$D^{-\nu}F(t)=\int_{t_0}^{t} F(u)\,\frac{(t-u)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,du+c_0+c_1\,t+\ldots+c_{\nu-1}\,t^{\nu-1}, \tag{8_1}$$

con $c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1}$ ***costanti arbitrarie***; ossia ***data*** $F(t)$, ***la funzione*** $D^{-\nu}F(t)$ ***è nota a meno un polinomio arbitrario di grado*** $\nu-1$.

Così pure se ϱ ***è una costante non nulla,*** l'uguaglianza

$$(D-\varrho)^{-\nu}F(t)=f(t) \tag{9_1}$$

indica che

$$(D-\varrho)^{\nu}f(t)=F(t),$$

o ciò che è lo stesso

$$(9_2) \qquad (D-\varrho)^{\nu}(D-\varrho)^{-\nu}F(t)=F(t).$$

Si ha evidentemente

$$(D-\varrho)^{-\nu}\, cF(t)=c(D-\varrho)^{-\nu}F(t), \quad [c=\text{cost.}]$$
$$(D-\varrho)^{-\nu}[F(t)+G(t)]=(D-\varrho)^{-\nu}F(t)+(D-\varrho)^{-\nu}G(t).$$

Gioverà ancora notare che nella (9_1) la funzione $f(t)$ è determinata a meno dell'espressione $e^{\varrho t}(c_0+c_1t+....+c_{\nu-1}t^{\nu-1})$ con $c_0, c_1,...., c_{\nu-1}$ *costanti arbitrarie;* si ha infatti

$$(D-\varrho)^{\nu}[e^{\varrho t}(c_0+c_1t+....+c_{\nu-1}t^{\nu-1})]=0,$$

e perciò insieme alla (9_1) sussiste l'altra

$$(9_3) \qquad (D-\varrho)^{-\nu}F(t)=f(t)+e^{\varrho t}(c_0+c_1t+....+c_{\nu-1}t^{\nu-1}).$$

c) Assegnata la $F(t)$, la $f(t)$ nella (9_3), come è noto, si può determinare con quadrature [Cap. II, § 1, n. 5, *c*)], ed è facile provare che sussiste la formula di HEAVISIDE [cfr. questo Cap., § 7, n. 4, *c*)]

$$(8_2) \qquad (D-\varrho)^{-\nu}F(t)=e^{\varrho t}\int_{t_0}^{t} e^{-\varrho u}\frac{(t-u)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}F(u)du+$$
$$+e^{\varrho t}(c_0+c_1t+....+c_{\nu-1}t^{\nu-1}).$$

Questa formula è immediata se $\nu=1$; infatti l'equazione lineare

$$(D-\varrho)f(t)=F(t)$$

ha l'integrale generale

$$f=e^{\varrho t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\varrho u}F(u)du+c_0\right].$$

In generale per provare la (8_2) basterà osservare che

$$(D-\varrho)^{\nu}[e^{\varrho t}(c_0+c_1t+....+c_{\nu-1}t^{\nu-1})]=0$$

e che

$$(D-\varrho)^{\nu}\left[e^{\varrho t}\int_{t_0}^{t} e^{-\varrho u}\frac{(t-u)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}F(u)du\right]=$$
$$=(D-\varrho)^{\nu-1}\left[(D-\varrho)e^{\varrho t}\int_{t_0}^{t} e^{-\varrho u}\frac{(t-u)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}F(u)du\right]=$$
$$=(D-\varrho)^{\nu-1}\left[e^{\varrho t}\int_{t_0}^{t} e^{-\varrho u}\frac{(t-u)^{\nu-2}}{(\nu-2)!}F(u)du\right]=....=F(t).$$

d) In generale se

$$(10) \qquad p(D)F(t)=[a_0(t)D^n+a_1(t)D^{n-1}+....+$$
$$+a_{n-1}(t)D+a_n(t)]F(t)=f(t), \quad [a_0(t)\neq 0],$$

porremo per definizione

$$(11_1) \qquad p^{-1}(D)f(t)=F(t)$$

e diremo $p^{-1}(D)$ *l'operatore inverso di* $p(D)$.

Osserviamo subito che insieme alla (11_1) sussiste la relazione

$$(11_2) \qquad p^{-1}(D)f(t)=F(t)+c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+....+c_n\varphi_n(t)$$

ove $\varphi_1(t), \varphi_2(t),...., \varphi_n(t)$ è un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea

$$p(D)\varphi(t)=0,$$

in altre parole $c_1\,\varphi_1(t)+c_2\,\varphi_2(t)+....+c_n\varphi_n(t)$, $[c_1, c_2,...., c_n$ costanti$]$, rappresenta la funzione complementare dell'equazione (10), (Cap. II, § 1, n. 6, 5 *c*)], e il secondo membro della (11_2) rappresenta l'integrale generale della stessa equazione (10).

Giova notare che se $p_1(D)$, $p_2(D)$ sono due operatori differenziali lineari, si ha

$$(12_1) \qquad (p_1\,p_2)^{-1}=p_2^{-1}\,p_1^{-1}.$$

Posto infatti $(p_1p_2)^{-1}\,Y=y$, si ha $p_1(p_2y)=Y$, e operando sui due membri a sinistra successivamente con p_1^{-1}, p_2^{-1}, $y=p_2^{-1}p_1^{-1}Y$; il ragionamento è poi invertibile.

Dalla (12_1) si ha

$$(12_2)\qquad p_1^{-1}=p_2(p_1p_2)^{-1}$$

formula di cui ci gioveremo tra poco.

Se p_1 e p_2 *sono due operatori permutabili si ha anche*

$$(13)\qquad p_1^{-1}p_2^{-1}=p_2^{-1}p_1^{-1},$$

è infatti $p_2^{-1}p_1^{-1}=(p_1p_2)^{-1}=(p_2p_1)^{-1}=p_1^{-1}p_2^{-1}$.

Notiamo ancora che se ϱ è costante è

$$(14)\qquad (D-\varrho)^{-n}=(D-\varrho)^{-1}(D-\varrho)^{-1}....(D-\varrho)^{-1};$$

si ha infatti

$$(D-\varrho)^{-n}=[(D-\varrho)^n]^{-1}=[(D-\varrho)^{n-1}(D-\varrho)]^{-1}= \\ =(D-\varrho)^{-1}(D-\varrho)^{-(n-1)}=.....$$

e) Supponiamo che sia

$$p(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+....+a_{n-1}D+a_n,$$

con $a_0, a_1,...., a_{n-1}, a_n$ *costanti*, $a_0\neq 0$. Sappiamo dall'algebra che *se l'equazione caratteristica*

$$a_0\varrho^n+a_1\varrho^{n-1}+....+a_{n-1}\varrho+a_n=0$$

ha le radici $\varrho_1, \varrho_2,...., \varrho_r$, *a due a due distinte, multiple rispettivamente degli ordini* $\nu_1, \nu_2,...., \nu_r$, $[\nu_1+\nu_2+....+\nu_r=n]$, *si ha identicamente*

$$(15)\qquad \frac{1}{a_0s^n+a_1s^{n-1}+....+a_{n-1}s+a_n}= \\ =d_1^{(1)}(s-\varrho_1)^{-1}+d_2^{(1)}(s-\varrho_1)^{-2}+....+d_{\nu_1}^{(1)}(s-\varrho_1)^{-\nu_1}+ \\ +d_1^{(2)}(s-\varrho_2)^{-1}+d_2^{(2)}(s-\varrho_2)^{-2}+....+d_{\nu_2}^{(2)}(s-\varrho_2)^{-\nu_2}+ \\ +.... \\ +d_1^{(r)}(s-\varrho_r)^{-1}+d_2^{(r)}(s-\varrho_r)^{-2}+....+d_{\nu_r}^{(r)}(s-\varrho_r)^{-\nu_r},$$

con le $d_l^{(k)}$ *costanti.*

Ora il procedimento algebrico che dovrebbe tenersi per dimostrare l'identità algebrica tra il primo e il secondo membro della (15) è fondato essenzialmente sul fatto che se $p_1(s)$, $p_2(s)$ sono due polinomi in s è $p_1^{-1}=p_2(p_1p_2)^{-1}$, e siccome tale formula per la (12_2)

è valida per gli operatori $p_1(D)$, $p_2(D)$, abbiamo che nelle nostre ipotesi *l'operatore* $p^{-1}(D)$ *si scompone in una somma di operatori semplici*

$$(16)\qquad p^{-1}(D)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=1}^{\nu_k}d_s^{(k)}(D-\varrho_k)^{-s},\quad [1]$$

e questa formula riduce perciò il calcolo di $p^{-1}(D)F(t)$ al calcolo di $(D-\varrho_k)^{-s}F(t)$.

Le formule (8_1), (8_2), (16) *permettono quindi, con quadrature, di determinare l'integrale generale dell'equazione non omogenea a coefficienti costanti*

$$p(D)\,Y(t)=(a_0D^n+a_1D^{n-1}+....+a_{n-1}D+a_n)\,Y=F(t),$$

[cfr. Cap. II, § 1 ; n. 5, *c*) e n. 6, *d*)], e ora nei successivi numeri 4 e 5 indicheremo dei casi nei quali le quadrature possono omettersi.

4. - *a*) Valuteremo in questo numero i simboli $p^{-1}(D)e^{kt}$, $p^{-1}(D)$ sen kt, $p_1(D)$ cos kt, supposto $p(D)$ polinomio in D a coefficienti costanti.

Se $F(t)=e^{kt}$, si ha $(D-\varrho)\,e^{kt}=(k-\varrho)\,e^{kt}$, perciò se $k\neq\varrho$, (k, ϱ costanti)

$$(D-\varrho)^{-1}e^{kt}=(k-\varrho)^{-1}e^{kt},$$

e in generale se $\varrho_1, \varrho_2,...., \varrho_\nu$ sono costanti tutte diverse da k

$$(D-\varrho_1)^{-1}(D-\varrho_2)^{-1}....(D-\varrho_\nu)^{-1}e^{kt}= \\ =(k-\varrho_1)^{-1}(k-\varrho_2)^{-1}....(k-\varrho_\nu)^{-1}e^{kt},$$

e in particolare

$$(17)\qquad (D-\varrho)^{-\nu}e^{kt}=(k-\varrho)^{-\nu}e^{kt},\qquad (\varrho\neq k)\quad [2].$$

Se allora

$$(18)\qquad p(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+....+a_{n-1}D+a_n,$$

---

(1) G. Boole: The Cambridge Math. Journ., 2 (1841), pag. 114.

(2) Nel secondo membro delle (17) e (19) supponiamo tacitamente che al secondo membro dovrà aggiungersi la funzione complementare. La stessa avvertenza vale per le successive formule (22), (23_1), (23_2).

è un polinomio differenziale a coefficienti costanti, $a_0 \neq 0$, e se $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r$ sono le radici distinte della sua equazione caratteristica, multiple rispettivamente degli ordini $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$, poichè si ha

$$p(D) = a_0 (D-\varrho_1)^{\nu_1} (D-\varrho_2)^{\nu_2} \dots (D-\varrho_r)^{\nu_r},$$

basterà tener conto della (12_1) per concludere che se la costante k è tale che $p(k) \neq 0$, vale la formula

$$(19) \qquad p^{-1}(D)\, e^{kt} = \frac{e^{kt}}{p(k)}.$$

b) Si ha con k e ϱ costanti, $(D-\varrho)e^{kt}G(t) = e^{kt}(D+k-\varrho)G(t)$, perciò $e^{kt}\, G(t) = (D-\varrho)^{-1}\, e^{kt}(D+k-\varrho)\, G(t)$, e posto

$$(D+k-\varrho)\, G(t) = F(t)$$

$$(20) \qquad (D-\varrho)^{-1}\, e^{kt}\, F(t) = e^{kt}\, (D+k-\varrho)^{-1}\, F(t),$$

e in generale con $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ costanti si ha

$$(D-\varrho_1)^{-1}(D-\varrho_2)^{-1} \dots (D-\varrho_n)^{-1}\, e^{kt}F(t) =$$
$$= e^{kt}(D+k-\varrho_1)^{-1}(D+k-\varrho_2)^{-1} \dots (D+k-\varrho_n)^{-1}F(t),$$

quindi *se $p(D)$ è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti*, ove si tenga conto della (14), si ottiene la formula

$$(21) \qquad p^{-1}(D)\, e^{kt}\, F(t) = e^{kt}\, p^{-1}(D+k)\, F(t), \qquad (k = \text{cost.})$$ [1].

In particolare se $\varrho = \text{cost.}$

$$(D-\varrho)^{-n}\, e^{\varrho t} = e^{\varrho t}\, D^{-n}1 = \frac{1}{n!}\, e^{\varrho t}\, t^n,$$

quindi [cfr. (8_2)]

$$(22) \qquad (D-\varrho)^{-n}\, e^{\varrho t} = \frac{1}{n!}\, e^{\varrho t}\, t^n.$$

c) Si ha $(\text{sen}\, kt)'' = -k^2\, \text{sen}\, kt$, perciò se $p(D)$ è un polinomio pari in D, $[p(-D) = p(D)]$, a coefficienti costanti, e $p(ik) \neq 0$ (k costante), si ha

$$p^{-1}(D)\, \text{sen}\, kt = \text{sen}\, kt / p(ik), \qquad (i = \text{unità immaginaria}).$$

[1] Evidentemente $p^{-1}(D+k)$ indica l'operatore inverso di

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (D+k)^{n-\nu}.$$

In generale se $p(D)$ è un operatore differenziale di ordine n a coefficienti costanti, e se $p(ik) \neq 0$, $p(-ik) \neq 0$, si ha

$$p^{-1}(D)\, \text{sen}\, kt = p(-D)\, p^{-1}(-D)\, p^{-1}(D)\, \text{sen}\, kt,$$

quindi

$$(23_1) \qquad p^{-1}(D)\, \text{sen}\, kt = p(-D)\, \frac{\text{sen}\, kt}{p(ik)\, p(-ik)},$$

e analogamente

$$(23_2) \qquad p^{-1}(D)\, \cos kt = p(-D)\, \frac{\cos kt}{p(ik)p(-ik)}, \quad [p(ik) \neq 0, p(-ik) \neq 0].$$

Ad esempio si voglia trovare l'integrale generale dell'equazione

$$(D^2 - 3D + 2)\, Y = 2\, \text{sen}\, t.$$

Si ha

$$Y(t) = 2(D^2 + 3D + 2)\, \frac{\text{sen}\, t}{(-1-3i+2)(-1+3i+2)} =$$
$$= \frac{1}{5}\, (D^2 + 3D + 2)\, \text{sen}\, t,$$

$$Y(t) = \frac{1}{5}\, (\text{sen}\, t + 3 \cos t),$$

e poichè la funzione complementare soddisfa l'equazione

$$(D^2 - 3D + 2)\, Y = (D-1)\,(D-2)\, Y = 0, \qquad Y = c_1\, e^{\varrho t} + c_2\, e^{2\varrho t},$$

l'integrale generale dell'equazione proposta vale

$$Y(t) = c_1\, e^{\varrho t} + c_2\, e^{2\varrho t} + \frac{1}{5}\, (\text{sen}\, t + 3 \cos t), \quad (c_1, c_2 \text{ costanti}).$$

5. - *a*) In questo numero stabiliremo uno sviluppo in serie dell'operazione $p^{-1}(D)\, Y(t)$, supposto $Y(t)$ funzione olomorfa della variabile complessa t in un dominio C.

Si verifica facilmente che supposto $\varrho = \text{cost.}$, $\varrho \neq 0$, si ha

$$(D-\varrho)\left(t^n + \frac{n}{\varrho}\, t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\varrho^2}\, t^{n-2} + \dots + \frac{n!}{\varrho^n}\right) = -\varrho t^n$$

e perciò

$$(24) \qquad (D-\varrho)^{-1}\, t^n = -\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!\, \varrho^{n-l+1}}\, t^l.$$

Notiamo che se pensiamo $(D-\varrho)^{-1}$ come un simbolo algebrico, e consideriamo lo sviluppo di $(D-\varrho)^{-1}$ in serie di potenze di D si ha

$$(25) \qquad (D-\varrho)^{-1}=\frac{1}{D-\varrho}=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D^l}{\varrho^{l+1}},$$

e la (24) si ottiene appunto operando su t^n con i due membri della (25).

Noi vogliamo dimostrare in generale che se $F(t)$ è una funzione olomorfa della variabile complessa t in un dominio C, e se per un assegnato valore della costante $\varrho \neq 0$, la serie $\sum_{l=0}^{\infty} D^l F(t)/\varrho^{l+1}$ risulta uniformemente convergente in C, si ha allora [1]

$$(26) \qquad (D-\varrho)^{-1}F(t)=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D^lF(t)}{\varrho^{l+1}}+c_0\,e^{\varrho t},$$

($\varrho=$cost., c_0 costante arbitraria).

Basterà provare che

$$F(t)=-(D-\varrho)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D^lF(t)}{\varrho^{l+1}};$$

ma quest'ultima è immediata, perchè per le nostre ipotesi, essendo lecita nel secondo membro la derivazione termine a termine, risulta

$$-(D-\varrho)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D^lF(t)}{\varrho^{l+1}}=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D^{l+1}F(t)}{\varrho^{l+1}}+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D^lF(t)}{\varrho^{l}}=F(t).$$

b) Le considerazioni svolte in *a*), ci conducono a generalizzare la (26).

Supposto ν intero positivo, se costruiamo lo sviluppo in serie di potenze di D di $(D-\varrho)^{-\nu}$, si ha

$$(D-\varrho)^{-\nu}=\frac{(-1)^\nu}{\varrho^\nu}\left(1-\frac{D}{\varrho}\right)^{-\nu}=$$
$$=(-1)^\nu\left[\frac{1}{\varrho^\nu}+\binom{\nu}{\nu-1}\frac{D}{\varrho^{\nu+1}}+\binom{\nu+1}{\nu-1}\frac{D^2}{\varrho^{\nu+2}}+\ldots\right]$$

[1] Conveniamo che $D^0F(t)=F(t)$.

e questa formula ci induce a verificare che *se $F(t)$ è olomorfa in un dominio C, e se per un assegnato valore della costante $\varrho \neq 0$, la serie*

$$\sum_{l=\nu-1}^{\infty}\binom{l}{\nu-1}\frac{1}{\varrho^{l+1}}D^{l-(\nu-1)}F(t) \text{ è uniformemente convergente in } C,$$

vale allora la formula

$$(27) \qquad (D-\varrho)^{-\nu}F(t)=(-1)^\nu\sum_{l=\nu-1}^{\infty}\binom{l}{\nu-1}\frac{1}{\varrho^{l+1}}D^{l-(\nu-1)}F(t)+$$
$$+e^{\varrho t}(c_0+c_1t+\ldots+c_{\nu-1}t^{\nu-1}),$$

con $c_0, c_1, \ldots c_{\nu-1}$ costanti arbitrarie.

Poichè abbiamo verificato la (27) per $\nu=1$, basterà dimostrare che se essa è vera per $\nu-1$ è vera anche per ν.

Si ha

$$\binom{l}{\nu-2}\frac{1}{\varrho^{l+1}}D^{l-(\nu-2)}F=\frac{\nu-1}{l+1}\varrho\left[\binom{l+1}{\nu-1}\frac{1}{\varrho^{l+2}}D^{(l+1)-(\nu-1)}F\right],$$

e poichè la successione di numeri positivi $\{1/(l+1)\}$ è decrescente (convergente a zero per $l\to\infty$) si ha che la serie $(-1)^{\nu-1}\sum_{l=\nu-2}^{\infty}\binom{l}{\nu-2}\frac{1}{\varrho^{l+1}}D^{l-(\nu-2)}F$ è anch'essa uniformemente convergente in C, e perciò

$$(D-\varrho)^{-(\nu-1)}F(t)=$$
$$=(-1)^{\nu-1}\sum_{l=\nu-2}^{\infty}\binom{l}{\nu-2}\frac{1}{\varrho^{l+1}}D^{l-(\nu-2)}F(t)+e^{\varrho t}(\bar{c}_0+\bar{c}_1t+\ldots+\bar{c}_{\nu-2}t^{\nu-2}),$$

con $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{\nu-2}$ costanti, sicchè per provare la (27) basterà dimostrare che

$$(-1)^\nu(D-\varrho)\left[\sum_{l=\nu-1}^{\infty}\binom{l}{\nu-1}\frac{1}{\varrho^{l+1}}D^{l-(\nu-1)}F(t)\right]=$$
$$=(-1)^{\nu-1}\sum_{l=\nu-2}^{\infty}\binom{l}{\nu-2}\frac{1}{\varrho^{l+1}}D^{l-(\nu-2)}F(t).$$

Eseguendo come è lecito l'operazione $D-\varrho$ termine a termine nel primo membro, e tenuto conto della nota identità

$$\binom{l+1}{\nu-1}-\binom{l}{\nu-1}=\binom{l}{\nu-2}$$

si ottiene appunto il secondo membro.

c) Combinando la (16) e la (27) si ha che se l'operatore

$$p(D)=a_0\,D^n+a_1\,D^{n-1}+....+a_n; \qquad (a_0\neq 0,\ a_n\neq 0)$$

è a coefficienti costanti, costruito per $p^{-1}(D)$ lo sviluppo in operatori semplici (16), se $F(t)$ è olomorfa in un dominio C, e se le serie

$$(-1)^\nu\sum_{l=s-1}^{\infty}\binom{l}{s-1}\frac{1}{\varrho_k^{l+1}}D^{l-(s-1)}F(t), \qquad [s=1,2,....,\nu_k;\ k=1,2,....,r]$$

risultano uniformemente convergenti in C, si ha allora

$$(28)\qquad p^{-1}(D)F(t)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{s=1}^{\nu_k}d_s^{(k)}(-1)^s\sum_{l=s-1}^{\infty}\binom{l}{s-1}\frac{1}{\varrho_k^{l+1}}D^{l-(s-1)}F(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{r}e^{\varrho_k t}\,(c_0^{(k)}+c_1^{(k)}\,t+....+c_{\nu_k-1}^{(k)}\,t^{\nu_k-1}),$$

con le $c_0^{(k)}$, $c_1^{(k)}$.... costanti arbitrarie [1].

Si noti che il primo termine del secondo membro di quest'ultima rappresenta lo sviluppo in serie di potenze di D di $F(t)/(a_0\,D^n+a_1\,D^{n-1}+....+a_n)$; abbiamo allora che *se*

$$p(D)=a_0\,D^n+a_1\,D^{n-1}+....+a_{n-1}\,D+a_n,$$

è a coefficienti costanti, $a_0\neq 0$, $a_n\neq 0$, *e se* $F(t)$ *è un polinomio di grado* m *in* t

$$F(t)=b_0\,t^m+b_1\,t^{m-1}+....+b_{m-1}\,t+b_m,$$

se sviluppando $1/p(D)$ *in serie di potenze di* D, *si ha*

$$1/p(D)=\sum_{r=0}^{\infty}\beta_r\,D^r,$$

[1] Abbiamo supposto $a_n\neq 0$ per avere $\varrho_k\neq 0$ e applicare la (27). Se $a_n=0$, i termini della decomposizione (16), $D^{-\nu}F(t)$, corrispondenti alla radice nulla dell'equazione caratteristica, si calcoleranno con la (8_1).

allora l'equazione

$$p(D)\,Y(t)=F(t)$$

ha l'integrale particolare

$$Y(t)=\sum_{r=0}^{m}\beta_r\,D^r\,F(t).$$

Così ad esempio, data l'equazione

$$(D^3-D^2-D+2)\,Y=6t^4,$$

poichè si ha

$$\frac{6}{D^3-2D^2-D+2}=\frac{3}{1-D}+\frac{1}{1+D}-\frac{1}{1-D/2}=$$
$$=3+\frac{3}{2}D+\frac{15}{4}D^2+\frac{15}{8}D^3+\frac{63}{16}D^4+....,$$

abbiamo che un integrale particolare $Y_0(t)$ dell'equazione proposta ha l'espressione

$$Y_0(t)=(3+\frac{3}{2}D+\frac{15}{4}D^2+\frac{15}{8}D^3+\frac{63}{16}D^4)\,t^4,$$
$$Y_0(t)=3t^4+6t^3+45t^2+45t+\frac{189}{2},$$

e l'integrale generale ha l'espressione

$$Y(t)=Y_0(t)+c_1\,e^t+c_2\,e^{-t}+c_3\,e^{2t}, \qquad (c_1,\ c_2,\ c_3 \text{ costanti}).$$

6. - a) Vogliamo accennare brevemente a due tipi di equazioni differenziali che con un semplice cangiamento della variabile indipendente si trasformano in altre equazioni con la parte omogenea a coefficienti costanti, e per le quali possono quindi applicarsi i procedimenti indicati in questo paragrafo.

L'equazione del tipo

$$(29)\qquad A_0t^n\,y^{(n)}+A_1\,t^{n-1}\,y^{(n-1)}+....+A_{n-1}\,ty'+A_n\,y=F(t)$$

dove A_0, A_1,...., A_{n-1}, A_n sono costanti, prende il nome di equazione di EULERO [1]. Col cangiamento di variabile indipendente

$$(30)\qquad t=e^z$$

[1] L. EULERO: *Inst. Calc. Int.* (1769), 2, pp. 483-526, [Opera Omnia, (1), XII, pp. 381-413. Cfr. anche C. J. MALMSTÈN: *De l'équation differentielle...*, Journ für die reine und ang. Math., 39 (1850), pp. 99-107.

si ha $t\, dy/dt = dy/dz = Dy$, con $D = d/dz$; si ha pure $t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dz}$, e moltiplicando per t

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} = D(D-1)y,$$

e in generale con procedimento di induzione si prova

$$t^n \frac{d^ny}{dt^n} = D(D-1)\dots\ (D-n+1)y,$$

talchè sostituendo nella (29) si ottiene l'equazione differenziale a coefficienti costanti

$$p(D)y = (A_0 D^n + \bar{A}_1 D^{n-1} + \dots + \bar{A}_{n-1} D + \bar{A}_n)y = F(e^z).$$

Conviene notare che se l'equazione

$$A_0\varrho^n + \bar{A}_1\varrho^{n-1} + \dots + \bar{A}_{n-1}\varrho + \bar{A}_n = 0$$

ha la radice ϱ multipla di ordine ν, nell'integrale generale dell'equazione figura un termine della forma

$$y = e^{\varrho z}(c_0 + c_1 z + \dots + c_{\nu-1} z^{\nu-1}) = t^{\varrho}(c_0 + c_1 \log t + \dots + c_{\nu-1} (\log t)^{\nu-1}),$$

con $c_0, c_1, \dots, c_{\nu-1}$ costanti.

b) Con lo stesso procedimento si risolve l'equazione di LAGRANGIA (¹)

$$\sum_{r=0}^{n} A_r (at+b)^{n-r} \frac{d^{n-r}y}{dt^{n-r}} = F(t),$$

dove A_r, a, b sono costanti; basterà per questo effettuare la sostituzione $at + b = e^z$.

(¹) G. L. LAGRANGIA: *Oeuvres* I, (Paris, 1847) pp. 481-490.

§ 2. - Massimo comune divisore di due operatori differenziali lineari. e soluzioni comuni a due equazioni differenziali lineari.

1. - *a*) È facile vedere come agli operatori differenziali lineari (siano o no a coefficienti costanti) possa estendersi la comune teoria del massimo comune divisore di due polinomi (¹). Ciò conseguirà dal fatto che sussiste il teorema corrispondente alla proposizione fondamentale del metodo euclideo delle divisioni successive: *se $p_1(D)$, $p_2(D)$ sono due operatori differenziali degli ordini n ed m, $n \geqslant m$,*

$$(1)\qquad \begin{cases} p_1(D) = a_0(t)\, D^n + a_1(t)\, D^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)\, D + a_n, \\ p_2(D) = b_0(t)\, D^m + b_1(t)\, D^{m-1} + \dots + b_{m-1}(t)\, D + b_m, \end{cases}$$

$[b_0(t) \neq 0]$, *possono determinarsi, con procedimenti razionali e di derivazione, in uno e in un sol modo, due operatori lineari $q(D)$, $p_3(D)$*

$$q(D) = q_0(t) D^{n-m} + q_1(t)\, D^{n-m-1} + \dots + q_{n-m-1}(t)\, D + q_{n-m}(t),$$
$$p_3(D) = c_0(t)\, D^{m-1} + c_1(t)\, D^{m-2} + \dots + c_{m-2}(t)\, D + c_{m-1}(t),$$

tali che

$$(2)\qquad p_1(D) = q(D)\, p_2(D) + p_3(D).$$

(¹) G. LIBRI: *a*) *Mémoire sur la résolution...*, Journ. für die reine und ang. Math., 10 (1833), (pp. 167-194), pag. 185; *b*) *Sur les rapports qui existent entre la théorie des équations algébriques et la théorie des équations lineaires aux différentielles et aux différences*, Journ. de Math. pur. et appl., 1 (1836), pp. 10-13; E. BRASSINNE: *Analogie des équations différentielles linéaires à coefficients variables, avec les équations algébriques,* Cours d'Analyse par CH. STURM, (12ième éd., 1901), 2 (note III), pag. 345.

Quest'ultima può scriversi

$$\sum_{l=0}^{n} a_l D^{n-l} = \left(\sum_{r=0}^{n-m} q_r D^{n-m-r}\right)\left(\sum_{s=0}^{m} b_s D^{m-s}\right) + \sum_{l=0}^{m-1} c_l D^{m-1-l} =$$

$$= q_0\Big[\binom{n-m}{0} b_0 D^n + \binom{n-m}{1} b_0' D^{n-1} + \binom{n-m}{2} b_0^{(2)} D^{n-2} + \dots +$$

$$+\binom{n-m}{0} b_1 D^{n-1} + \binom{n-m}{1} b_1' D^{n-2} + \dots + \binom{n-m}{0} b_2 D^{n-2} + \dots\Big] +$$

$$+ q_1\Big[\binom{n-m-1}{0} b_0 D^{n-1} + \binom{n-m-1}{1} b_0' D^{n-2} + \dots +$$

$$+\binom{n-m-1}{0} b_1 D^{n-2} + \dots\Big] + q_2\Big[\binom{n-m-2}{0} b_0 D^{n-2} + \dots\Big] + \dots$$

e identificando i due membri si hanno le formule ricorrenti

$$b_0 q_0 = a_0,$$

$$b_0 q_1 + q_0\left[\binom{n-m}{0} b_1 + \binom{n-m}{1} b_0'\right] = a_1,$$

$$b_0 q_2 + q_1\left[\binom{n-m-1}{0} b_1 + \binom{n-m-1}{1} b'_0\right] +$$

$$+ q_0\left[\binom{n-m}{0} b_2 + \binom{n-m}{1} b_1' + \binom{n-m}{2} b_0^{(2)}\right] = a_2,$$

$$\dots$$

atte a determinare univocamente i coefficienti

$$q_0, \dots, q_{n-m}; \quad c_0, c_1, \dots, c_{m-1}.$$

Se $n=m$, Q è indipendente da D; diremo in questo caso che Q è un *operatore di grado zero*, e il simbolo QY in questo caso rappresenterà l'ordinario prodotto di Q per Y.

Si osservi ancora che se $n>m$, in casi particolari $p_3(D)$ può ridursi ad un operatore di grado zero.

Conviene poi notare che se $p_1(D), p_2(D)$ sono a coefficienti costanti, anche $q(D)$ e $p_3(D)$ sono a coefficienti costanti.

b) Vale anche l'altro teorema: dati i due operatori (1), possono determinarsi in uno e in un solo modo, con operazioni razionali e di derivazione, due operatori $\bar{q}(D), \bar{p}_3(D)$ tali che

$$(2') \qquad p_1(D) = p_2(D)\,\bar{q}(D) + \bar{p}_3(D);$$

basterà per questo ripetere un procedimento analogo al precedente.

c) Si dirà che un operatore $\Gamma(D)$ è un *divisore a destra* [divisore a sinistra] di $p_1(D)$ e $p_2(D)$ se

$$p_1(D) = q_1(D)\,\Gamma(D), \quad p_2(D) = q_2(D)\,\Gamma(D),$$
$$[p_1(D) = \Gamma(D)\,q_1(D), \quad p_2(D) = \Gamma(D)\,q_2(D)].$$

d) Se $p_1(D), p_2(D)$ sono due operatori differenziali degli ordini n e m, $n \geqslant m$, determinati gli operatori $q(D), p_3(D)$, $[\bar{q}(D), \bar{p}_3(D)]$ che soddisfano le (2) [le (2')], si ha che ogni divisore a destra [sinistra] di $p_1(D)$ e $p_2(D)$ è divisore a destra [sinistra] di $p_2(D)$ e $p_3(D)$ $[\bar{p}_3(D)]$, e inversamente.

Ne viene il seguente procedimento per la determinazione del *massimo comune divisore a destra* [sinistra] di due operatori $p_1(D), p_2(D)$, cioè dell'operatore lineare di ordine massimo, divisore a destra (sinistra) di $p_1(D), p_2(D)$, procedimento che può rappresentarsi col quadro [delle divisioni successive]

		$q_1(D)$	$q_2(D)$		$q_{k-2}(D)$	$q_{k-1}(D)$
(3)	$p_1(D)$	$p_2(D)$	$p_3(D)$	....	$p_{k-1}(D)$	$p_k(D)$,
	$p_3(D)$	$p_4(D)$	$p_5(D)$		0	

il quale traduce le relazioni

(4) $p_1(D) = q_1(D)\,p_2(D) + p_3(D)$, $[p_1(D) = p_2(D)\,q_1(D) + p_3(D)]$

$p_2(D) = q_2(D)\,p_3(D) + p_4(D)$, $[p_2(D) = p_3(D)\,q_2(D) + p_4(D)]$,

. . . .

$p_{k-2}(D) = q_{k-2}(D)\,p_{k-1}(D) + p_k(D)$, $[p_{k-2}(D) = p_{k-1}(D)\,q_{k-2}(D) + p_k(D)]$,

$p_{k-1}(D) = q_{k-1}(D)\,p_k(D)$, $[p_{k-1}(D) = p_k(D)\,q_{k-1}(D)]$. [1]

Essendo gli operatori a coefficienti costanti permutabili [§ 1, n. 1, *f*)] si ha subito che *se $p_1(D)$ e $p_2(D)$ sono a coefficienti costanti, il loro masssimo comune divisore a destra, e a sinistra, coincidono.*

[1] Nello scrivere il quadro (3) ammettiamo tacitamente che i coefficienti di ordine massimo di $p_2(D), p_3(D), \dots, p_{k-1}(D)$ non siano nulli nel campo di variabilità di t.

d) Dalle (4) si ha

$$p_3(D) = p_1(D) - q_1(D)\,p_2(D)$$

$$p_4(D) = p_2(D) - q_2(D)\,[p_1(D) - q_1(D)\,p_2(D)] =$$
$$= -q_2(D)\,p_1(D) + [1 + q_2(D)\,q_1(D)]\,p_2(D)$$

e così continuando otteniamo che *se $p_k(D)$ è il massimo comun divisore a destra* [sinistra] *di $p_1(D)$, $p_2(D)$, esistono due operatori $A_k(D)$, $B_k(D)$ tali che*

$$p_k(D) = A_k(D)\,p_1(D) + B_k(D)\,p_2(D),$$
$$[p_k(D) = p_1(D)\,A_k(D) + p_2(D)\,B_k(D)].$$

Quest'ultima mette bene in evidenza il fatto che *ogni divisore a destra* [sinistra] *comune a $p_1(D)$ e $p_2(D)$, è divisore a destra* [sinistra] *del loro massimo comun divisore (e inversamente).*

e) Due operatori $p_1(D)$, $p_2(D)$ si dicono *primi tra loro a destra* [sinistra] se non hanno alcun operatore di primo grado, o di grado superiore, come divisore comune a destra [sinistra].

Supponiamo che i due operatori $p_1(D)$, $p_2(D)$ abbiano per massimo comun divisore a destra $p_k(D)$, e rappresentino le (4) lo schema del corrispondente metodo delle divisioni successive. Posto

$$p_1(D) = l_1(D)\,p_k(D),\ p_2(D) = l_2(D)\,p_k(D),$$

si potrà porre successivamente $p_3(D) = l_3(D)\ p_k(D), \ldots, p_k(D) = 1p_k(D)$, e per $l_1(D)$, $l_2(D)$ è facile vedere che vale il quadro delle divisioni successive

$$l_1(D) = q_1(D)\,l_2(D) + l_3(D),\quad l_2(D) = q_2(D)\,l_3(D) + l_4(D), \ldots,$$
$$l_{k-1}(D) = q_k(D)1,$$

talchè $l_1(D)$, $l_2(D)$ *non hanno alcun divisore comune a destra* di *primo grado o di grado superiore,* e *sono perciò primi tra loro.*

Valgono le stesse conclusioni se $l_k(D)$ è il massimo comun divisore a sinistra di $p_1(D)$ e $p_2(D)$.

2. - *a*) Vogliamo applicare le cose dette per la ricerca delle soluzioni comuni a due equazioni differenziali lineari.

Siano

$$p_1(D)\,Y = 0, \qquad p_2(D)\,Y = 0 \tag{5}$$

due equazioni differenziali lineari omogenee, rispettivamente degli ordini n, m, con $n \geqslant m$.

Se le (4) dànno il procedimento delle divisioni successive per la ricerca del massimo comun divisore a destra degli operatori $p_1(D)$, $p_2(D)$, avendosi identicamente

$$\begin{aligned} p_1(D)\,Y &= q_1(D)\,[p_2(D)\,Y] + p_3(D)\,Y,\\ p_2(D)\,Y &= q_2(D)\,[p_3(D)\,Y] + p_4(D)\,Y, \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

ne viene che *tutte le eventuali soluzioni comuni alle due equazioni $p_1(D)\,Y = 0$, $p_2(D)\,Y = 0$, sono tutte e soltanto le soluzioni dell'equazione $p_k(D)\,Y = 0$.*

Si ha allora che *se $p_k(D)$ ha l'ordine $\nu \geqslant 1$, le* (5) *hanno a comune ν soluzioni linearmente indipendenti, e ν soltanto.*

b) Più in generale si cerchino le soluzioni comuni alle due equazioni

$$p_1(D)\,Y = F_1(t), \qquad p_2(D)\,Y = F_2(t). \tag{7}$$

Una tale soluzione, per la prima delle (6), soddisfa all'equazione

$$F_1(t) = q_1(D)\,F_2(t) + p_3(D)\,Y,$$

ovvero, posto

$$F_3(t) = F_1(t) - q_1(D)\,F_2(t), \tag{8$_1$}$$

le soluzioni comuni alle (7) sono tutte e soltanto le soluzioni comuni a

$$p_2(D)\,Y = F_2(t), \qquad p_3(D)\,Y = F_3(t).$$

Posto

$$F_4(t) = F_2(t) - q_2(D)\,F_3(t), \tag{8$_2$}$$
$$\ldots\qquad\ldots$$
$$F_{k+1}(t) = F_{k-1}(t) - q_{k-1}(D)\,F_k(t), \tag{8$_{k-1}$}$$

si ha che condizione necessaria e sufficiente perchè le (7) abbiano una soluzione comune è che $F_{k+1}(t) \equiv 0$, e le soluzioni comuni sono tutte e soltanto quelle dell'equazione

$$p_k(D)\,Y = F_k(t).$$

e) Si ha in particolare che date le due equazioni (7) degli ordini n, m, $n>m$, perchè tutte le soluzioni della seconda siano soluzioni della prima, è necessario e basta che sia $p_k(D)=p_2(D)$, cioè $p_1(D)=q_1(D)p_2(D)$ e inoltre $F_1(t)-q_1(D)F_2(t)\equiv 0$, e perciò *condizione necessaria e sufficiente perchè tutte le soluzioni della seconda delle* (7), *siano soluzioni della prima, è che esista un operatore* $q(D)$ *tale che*

$$p_1(D)\equiv q(D)p_2(D), \qquad F_1(t)\equiv q(D)F_2(t).$$

3. - Siano date due equazioni differenziali lineari

$$p_1(D)Y=F_1(t), \qquad q_2(D)Y=F_2(t),$$

rispettivamente degli ordini n, m, $n>m$, e sia noto che qualsiasi integrale dell'equazione $p_2(D)Y=F_2(t)$ appartiene anche all'equazione $p_1(D)Y=F_1(t)$; vogliamo allora dimostrare il teorema di G. LIBRI [1]: l'integrazione dell'equazione $p_1(D)Y=F_1(t)$ può ridursi, *con procedimenti razionali e di derivazione,* all'integrazione di due equazioni, una di ordine $n-m$ e l'altra di ordine m.

Infatti per i risultati del n. 2 *c*) il massimo comun divisore a destra di $p_1(D)$ e $p_2(D)$ coincide con $p_2(D)$, talchè si avrà identicamente

$$p_1(D)Y\equiv q(D)[p_2(D)Y], \qquad F_1(t)\equiv q(D)F_2(t),$$

e posto $p_2(D)Y-F_2(t)=Z$, l'equazione $p_1(D)Y=F_1(t)$ si scinde nel sistema

$$q(D)Z=0, \qquad p_2(D)Y=Z+F_2(t),$$

e la prima di queste equazioni ha l'ordine $n-m$ e la seconda l'ordine m.

È da osservare che per il teorema nel Cap. II, § 1, n. 3, *e*), noti separatamente m integrali indipendenti dell'equazione $p_1(D)Y=F_1(t)$ la risoluzione dell'equazione può ridursi a quella di un'equazione lineare di ordine $n-m$; il teorema di LIBRI assicura in più che per conseguire una riduzione dell'ordine dell'equazione non occorre conoscere *separatamente* gli m integrali, ma l'equazione $p_2(D)Y=F_2(t)$ della quale essi formano un sistema fondamentale.

[1] G. LIBRI, lav. cit. nel n. 1, *a*).

4. - Siano $p_1(D)$, $p_2(D)$ due operatori differenziali degli ordini n ed m, e il loro massimo comun divisore a destra $p_k(D)$ abbia l'ordine ν; si avrà

$$p_1(D)Y=q_1(D)[p_k(D)Y], \qquad p_2(D)Y=q_2(D)[p_k(D)Y],$$

con $q_1(D)$, $q_2(D)$ rispettivamente degli ordini $n-\nu$, $m-\nu$.

Consideriamo gli operatori lineari

$$D^i[q_1(D)Z], \qquad (i=0,\ 1,\dots,\ m-\nu),$$
$$D^i[q_2(D)Z], \qquad (i=0,\ 1,\dots,\ n-\nu);$$

essi formano $n+m-2\nu+2$ forme lineari omogenee in Z, $DZ,\dots$, $D^{n+m-2\nu}Z$, ed esisteranno quindi dei moltiplicatori

$$\alpha_0(t),\ \alpha_1(t),\dots,\ \alpha_{m-\nu}(t); \qquad \beta_0(t),\ \beta_1(t),\dots,\ \beta_{n-\nu}(t)$$

che si esprimono razionalmente per i coefficienti di $p_1(D)$, $p_2(D)$ e le loro derivate, per i quali si ha identicamente

$$\sum_{i=0}^{m-\nu}\alpha_i(t)D^i[q_1(D)Z]\equiv\sum_{j=0}^{n-\nu}\beta_j(t)D^j[q_2(D)Z],$$

ovvero posto

$$\varphi_1(D)=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)D+\dots+\alpha_{m-\nu}D^{m-\nu},$$
$$\varphi_2(D=\beta_0(t)+\beta_1(t)D+\dots+\beta_{n-\nu}D^{n-\nu},$$

si avrà

$$\varphi_1(D)[q_1(D)Z]\equiv\varphi_2(D)[q_2(D)Z],$$

e se $Z=p_k(D)Y$, risulta identicamente

$$M(D)Y\equiv\varphi_1(D)[p_1(D)Y]\equiv\varphi_2(D)[p_2(D)Y].$$

L'operatore $M(D)$ ha l'ordine $n+m-\nu$, e tanto le soluzioni dell'equazione $p_1(D)Y=0$, quanto quelle di $p_2(D)Y=0$ soddisfano l'equazione $M(D)Y=0$.

Dimostriamo ora che $M(D)$ è l'operatore differenziale di *ordine minimo* che ammette come divisori a destra tanto $p_1(D)$, quanto $p_2(D)$, o ciò che è lo stesso $M(D)Y=0$ *è l'equazione differen-*

ziale di ordine minimo cui appartengono le soluzioni delle due equazioni

$$p_1(D)Y=0, \qquad p_2(D)Y=0.$$

Si abbia per assurdo

$$\overline{M}(D)=\overline{\varphi}_1(D)p_1(D) \qquad \overline{M}(D)=\overline{\varphi}_2(D)p_2(D)$$

con $\overline{\varphi}_1(D)$, $\overline{\varphi}_2(D)$ degli ordini $m-\overline{\nu}$, $n-\overline{\nu}$, e $\overline{\nu}>\nu$.

Se $Y_1(t)$, $Y_2(t)$,...., $Y_n(t)$ è un sistema fondamentale di integrali dell'equazione $p_1(D)Y=0$, si avrà

$$\overline{\varphi}_2(D)\,[p_2(D)Y_i]=0, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

perciò le n funzioni $p_2(D)Y_i=Z_i$ soddisfano l'equazione $\overline{\varphi}_2(D)Z=0$ di ordine $n-\overline{\nu}$, ed esisteranno quindi almeno $\overline{\nu}$ relazioni a coefficienti costanti del tipo

$$p_2(D)Y_i=\sum_{j=\overline{\nu}+1}^{n} c_{i,j}\,p_2(D)Y_j\,, \qquad (i=1,2,\ldots,\overline{\nu}).$$

Si ha allora che le equazioni $p_1(D)Y=0$, $p_2(D)Y=0$ posseggono le $\overline{\nu}$ soluzioni comuni

$$\overline{Y}_i=Y_i(t)-\sum_{j=\overline{\nu}+1}^{n} c_{i,j}\,Y_j(t), \qquad (i=1,2,\ldots,\overline{\nu}),$$

ma esse sono linearmente indipendenti, dovrebbe essere dunque $\overline{\nu}\leqslant\nu$, e ciò è contro l'ipotesi.

L'operatore $M(D)$, ottenuto col procedimento descritto, chiamasi il *minimo comune multiplo dei due operatori* $p_1(D), p_2(D)$.

§ 3. - Sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

1. Generalità. Sistemi differenziali lineari omogenei di n equazioni in n incognite col determinante del sistema uguale a una costante non nulla. - 2. Sistemi diagonali. - 3. Riduzione di un sistema, col determinante diverso da zero, a un sistema diagonale equivalente.

1. - *a*) Nella risoluzione di alcuni problemi della Dinamica [1] occorre talvolta dover integrare sistemi della forma

$$(1)\quad \begin{cases} U_1=p_{1,1}(D)Y_1+p_{1,2}(D)Y_2+\ldots+p_{1,n}(D)\,Y_n-F_1(t)=0,\\ U_2=p_{2,1}(D)Y_1+p_{2,2}(D)Y_2+\ldots+p_{2,n}(D)\,Y_n-F_2(t)=0,\\ \quad\ldots\qquad\ldots\\ U_n=p_{n,1}(D)Y_1+p_{n,2}(D)Y_2+\ldots+p_{n,n}(D)\,Y_n-F_n(t)=0,\end{cases}$$

dove Y_1, Y_2,...., Y_n rappresentano le funzioni incognite, le $p_{i,k}(D)$ sono *operatori differenziali lineari a coefficienti costanti,* e le $F_1(t)$, $F_i(t)$,...., $F_n(t)$ sono funzioni note che ammettono tutte le derivate che ci occorre considerare.

Il sistema (1), che contiene linearmente tanto le funzioni incognite, che le loro derivate, lo diremo un *sistema lineare.* Come abbiamo già avvertito nel Cap. I, § 1, n. 2, *b*) un tale sistema, salvo ad introdurre come funzioni incognite ausiliari le derivate fino ad un certo ordine delle stesse funzioni incognite, può ridursi ad un sistema lineare contenente le funzioni incognite e le loro derivate prime, ma per quanto andremo a dire questa riduzione non è necessaria, nè sempre opportuna.

Supporremo che *se qualcuno degli operatori* $p_{i,k}(D)$ *si riduce a una costante* [è di ordine zero], *questa è nulla*; in caso opposto, se $p_{i,k}(D)=a_{i,k}\neq 0$, dalla i^{esima} equazione del sistema si può ricavare Y_k espressa linearmente per le altre funzioni inco-

[1] Cfr. ad esempio T. Levi-Civita e U. Amaldi: *Lezioni di Meccanica Razionale,* (Bologna, 1926), T. II, p. 1ª, pp. 480-485. [Forma tipica delle equazioni delle piccole oscillazioni di un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo e a sollecitazioni posizionali di natura conservativa].

gnite e le loro derivate, e il sistema si può ridurre ad un altro lineare, composto di $n-1$ equazioni con $n-1$ funzioni incognite.

b) Consideriamo il determinante

$$(2)\qquad \Delta(D)=\begin{vmatrix} p_{1,1}(D), & p_{1,2}(D),...., & p_{1,n}(D) \\ p_{2,1}(D), & p_{2,2}(D),...., & p_{2,n}(D) \\ .... & .... & \\ p_{n,1}(D), & p_{n,2}(D),...., & p_{n,n}(D) \end{vmatrix}$$

nel quale gli elementi $p_{i,k}(D)$ li pensiamo come polinomi nell'indeterminata D; supponiamo che *risulti* $\Delta(D)$ *non identicamente nullo,* e indichiamo con $\Delta_{i,k}(D)$ il complemento algebrico di $p_{i,k}(D)$ in $\Delta(D)$. Considerando le $\Delta_{i,k}(D)$ come operatori differenziali, e operando sulle equazioni del sistema (1) rispettivamente con $\Delta_{1,i}(D)$, $\Delta_{2,i}(D)$,...., $\Delta_{n,i}(D)$ e sommando si ricava che se esso è possibile dovrà aversi

$$(3)\qquad \Delta(D)\,Y_i=\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k,i}(D)\,F_k(t),\qquad (i=1,\,2,....,\,n).$$ [1]

b) Se $\Delta(D)=$ cost. non nulla, il sistema (1) può ammettere al più una sola soluzione data da

$$Y_i=\frac{1}{\Delta(D)}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k,i}(D)\,F_k(t),\qquad (i=1,\,2,....,\,n),$$

e non occorre altro che una verifica per provare se essa soddisfa o no il sistema proposto.

c) Risulti $\Delta(D)$ un operatore di ordine m, con $m\geqslant 1$, e l'*equazione caratteristica*

$$\Delta(\varrho)=0,$$

ottenuta sostituendo in ogni elemento del determinante $\Delta(D)$ *a* D *la variabile* ϱ, *abbia le radici* $\varrho_1,\,\varrho_2,....,\varrho_m$, *distinte a due a due.*

[1] Notiamo che le (3) ci avvertono che se nel sistema (1) supponiamo $\Delta(D)$ identicamente nullo, e il sistema (1) ha soluzioni, debbono verificarsi le relazioni $\sum_{k=1}^{n}\Delta_{k,i}(D)F_k(t)\equiv 0$, $(i=1,\,2,....,\,n)$.

Avremo dalla (3) che le soluzioni del sistema (1), supposte esistenti, avranno la forma

$$(4)\qquad Y_i=c_{i,1}\,e^{\varrho_1 t}+c_{i,2}\,e^{\varrho_2 t}+....+c_{i,m}\,c^{\varrho_m t}+Y_i^0,\qquad (i=1,\,2,....,\,n)$$

con le $c_{i,k}$ costanti, e dove Y_i^0, $(i=1,2,....,n)$, rappresenta un integrale particolare della (3).

Inversamente perchè le (4) soddisfino il sistema (1) occorre

$$p_{r,1}(D)\sum_{k=1}^{m}c_{1,k}\,e^{\varrho_k t}+p_{r,2}(D)\sum_{k=1}^{m}c_{2,k}\,e^{\varrho_k t}+....+p_{r,n}(D)\sum_{k=1}^{m}c_{n,k}\,e^{\varrho_k t}=$$

$$=F_r(t)-\sum_{i=1}^{n}p_{r,i}(D)\,Y_i^0,\qquad (r=1,\,2,....,\,n),$$

ma

$$p_{r,i}(D)\,e^{\varrho_k t}=p_{r,i}(\varrho_k)\,e^{\varrho_k t},$$

e perciò le costanti $c_{i,k}$ dovranno soddisfare le equazioni

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}c_{i,k}\,p_{r,i}(\varrho_k)\right]e^{\varrho_k t}=F_r(t)-\sum_{i=1}^{n}p_{r,i}(D)\,Y_i^0.$$

d) Supponiamo per semplicità che il *sistema* (1) *sia omogeneo,* $F_1(t)\equiv 0$,...., $F_n(t)\equiv 0$, $[Y_1^0=Y_2^0=....=Y_n^0=0]$; le (5), a motivo dell'indipendenza lineare di $e^{\varrho_1 t}$, $e^{\varrho_2 t}$,...., $e^{\varrho_n t}$ in qualunque intervallo [Cap. II, § 1, n. 6, *b*)], esigono che le costanti

$$c_{1,k},\;c_{2,k},....,\;c_{n,k},\qquad (k=1,\,2,....,\,m)$$

soddisfino il sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite

$$\sum_{i=1}^{n}c_{i,k}\,p_{r,i}(\varrho_k)=0,\qquad (r=1,\,2,....,\,n).$$

Il determinante del sistema è $\Delta(\varrho_k)=\det.\|p_{i,k}(\varrho_k)\|=0$; inoltre i minori di ordine $n-1$ di questo determinante numerico non possono essere simultaneamente nulli perchè in caso opposto, se $\Delta'(\varrho)$ indica il determinante aggiunto di $\Delta(\varrho)$, ogni suo elemento sarebbe divisibile per $\varrho-\varrho_k$, $\Delta'(\varrho)$ sarebbe divisibile per $(\varrho-\varrho_k)^n$, ma $\Delta'(\varrho)=\Delta^{n-1}(\varrho)$, e allora ϱ_k dovrebbe essere almeno una radice doppia dell'equazione $\Delta(\varrho)=0$, contro l'ipotesi.

Dalla teoria dei sistemi lineari risulta allora che le incognite

$$c_{1,k},\ c_{2,k},\dots,\ c_{n,k} \qquad (k=1,\ 2,\dots,\ m)$$

sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità, e perciò gli integrali del sistema dipendono da m costanti arbitrarie.

e) Si dovrebbe ora esaminare il caso che l'equazione $\Delta(D)=0$ abbia radici multiple, e il caso dei sistemi non omogenei, ma giova affrontare la questione col procedimento della così detta *riduzione ad un sistema diagonale* che pone bene in luce la natura della questione, e fornisce nello stesso tempo un metodo effettivo di risoluzione.

2. - Chiamasi *sistema diagonale* un sistema della forma

$$(6)\qquad \begin{aligned} h_{1,1}(D)Y_1+h_{1,2}(D)\,Y_2+\dots+h_{1,n-1}(D)\,Y_{n-1}+h_{1,n}(D)Y_n&=G_1(t),\\ h_{2,2}(D)\,Y_2+\dots+h_{2,n-1}(D)\,Y_{n-1}+h_{2,n}(D)Y_n&=G_2(t),\\ \dots\qquad\qquad\qquad \dots&\\ h_{n-1,n-1}(D)\,Y_{n-1}+h_{n-1,n}(D)\,Y_n&=G_{n-1}(t),\\ h_{n,n}(D)Y_n&=G_n(t), \end{aligned}$$

dove le $h_{i,k}(D)$ *sono operatori differenziali a coefficienti costanti*, e $G_1(t)$, $G_2(t)$,...., $G_n(t)$ *funzioni note della* t, *dotate di tutte le derivate che ci occorre considerare.*

Chiameremo $h_{1,1}(D)$, $h_{2,2}(D)$,...., $h_{n,n}(D)$ *coefficienti diagonali del sistema;* indicheremo con ω_k l'ordine di $h_{k,k}(D)$, e supporremo che se $h_{k,k}(D)$ si riduce ad una costante, essa è diversa da zero. Diremo pure che *il sistema è ordinato rispetto alle funzioni incognite* Y_1, Y_2,...., Y_n.

Notiamo che se effettuiamo sul sistema la trasformazione indicata nel Cap. I, § 1, n. 2, *b*) il sistema si riduce ad un sistema equivalente di $\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_n$ equazioni, lineare, e perciò i suoi integrali dipenderanno linearmente da $\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_n$ costanti arbitrarie.

Per precisare come entrano le costanti arbitrarie in ciascuna funzione incognita procederemo in questo modo. Si consideri l'ultima equazione del sistema (6); un suo integrale $Y_0^{(n)}$ potrà ottenersi con i procedimenti del § 1, e se $Y_1^{(n)}(t)$, $Y_2^{(n)}(t)$,...., $Y_{\omega_n}^{(n)}(t)$ forma un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omo-

genea $h_{n,n}(D)Y=0$, l'integrale generale dell'ultima equazione del sistema è dato da

$$Y_n=\sum_{k=1}^{\omega_n} c_k^{(n)}Y_k^{(n)}(t)+Y_0^{(n)}(t), \qquad [c_k^{(n)}=\text{cost.}]$$

e ognuna delle $Y_k^{(n)}(t)$, $[k=1,\ 2,\dots,\ \omega_n]$, non è identicamente nulla.

La penultima equazione del sistema può scriversi

$$(7)\qquad \begin{aligned} &h_{n-1,n-1}(D)\,Y_{n-1}=\\ &\qquad =G_{n-1}(t)-\sum_{k=1}^{\omega_n} c_k^{(n)}h_{n-1,n}(D)\,Y_k^{(n)}(t)-h_{n-1,n}(D)\,Y_0^{(n)}(t), \end{aligned}$$

e per costruire un suo integrale particolare U_0 basterà determinare ω_n funzioni Z_0, Z_1,...., Z_{ω_n} in guisa che

$$\begin{aligned} h_{n-1,n-1}(D)\,Z_0&=G_{n-1}(t)-h_{n-1,n}(D)\,Y_0^{(n)}(t),\\ h_{n-1,n-1}(D)Z_k&=-h_{n-1,n}(D)\,Y_k^{(n)}(t), \qquad (k=1,\ 2,\dots,\ \omega_n) \end{aligned}$$

e porre $U_0=Z_0+c_1^{(n)}Z_1+c_2^{(n)}Z_2+\dots+c_{\omega_n}^{(n)}Z_n$.

Se indichiamo con $Y_1^{(n-1)}(t)$, $Y_2^{(n-1)}(t)$,...., $Y_{\omega_{n-1}}^{(n-1)}$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea $h_{n-1,n-1}(D)\,Y=0$, l'integrale generale della (7) avrà allora la forma

$$Y_{n-1}(t)=\sum_{k=1}^{\omega_{n-1}} c_k^{(n-1)}\,Y_k^{(n-1)}(t)+\sum_{k=1}^{\omega_n} c_k^{(n)}Z_k(t)+Z_0, \quad [c_k^{(n)},\ c_k^{(n-1)}\ \text{costanti}]$$

e ognuna delle $Y_1^{(n-1)}(t)$, $Y_2^{(n-1)}(t)$,...., $Y_{n-1}^{(n-1)}(t)$ non è identicamente nulla. Sostituendo le espressioni di $Y_{n-1}(t)$, $Y_n(t)$ nella terzultima equazione del sistema (6) e continuando il procedimento indicato abbiamo, come è stato del resto osservato, che *gli integrali* $Y_1(t)$, $Y_2(t)$,...., $Y_n(t)$ *del sistema* (6) *dipendono linearmente da* $\omega_1+\omega_2+\dots+\omega_n$ *costanti arbitrarie.*

3. - *a*) Vogliamo dimostrare che *dato il sistema differenziale lineare* (1), *a coefficienti costanti, di* n *equazioni con* n *funzioni incognite,* Y_1, Y_2,...., Y_n, *col determinante* $\Delta(D)$ *non identicamente nullo, esso può ridursi ad un sistema diagonale*

equivalente, [Cap. I, § 1, n. 2, *a*)] *in cui le funzioni incognite hanno un ordine prescritto,* ad esempio quello $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ [1].

Tra le equazioni del sistema (1) consideriamo il gruppo che contiene la funzione incognita Y_1, e sia esso formato dalle equazioni

$$U_1=0, \quad U_2=0, \ldots, \quad U_r=0, \qquad (r \leqslant n).$$

Sia $\Gamma(D)$ il massimo comun divisore di $p_{r-1,1}(D)$, $p_{r,1}(D)$, e si abbia

$$p_{r-1,1}(D)=\Gamma(D)\,\varphi(D), \qquad p_{r,1}(D)=\Gamma(D)\,\psi(D)\,;$$

se consideriamo l'equazione

$$\overline{U}_r=-\psi(D)\,U_{r-1}+\varphi(D)\,U_r=0,$$

in essa il coefficiente di Y_1 diventa

$$-\psi(D)\,p_{r-1,1}(D)+\varphi(D)\,p_{r,1}(D)=0$$

e l'equazione $\overline{U}_r=0$ non contiene la funzione incognita Y_1.

Essendo d'altra parte $\varphi(D)$ e $\psi(D)$ primi tra loro, possono determinarsi due operatori $\psi_1(D)$, $\varphi_1(D)$, a coefficienti costanti, tali che [§ 2, n. 1, *d*)] tali che $c=\psi_1(D)\,\varphi(D)+\varphi_1(D)\,\psi(D)$, $c \neq 0$ [$c=$cost.], e noi vogliamo dimostrare che il sistema (1) e il sistema

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} U_1=0, \ U_2=0, \ldots, \ U_{r-2}=0, \\ \overline{U}_{r-1}=\psi_1(D)\,U_{r-1}+\varphi_1(D)\,U_r=0, \\ \overline{U}_r=-\psi(D)\,U_{r-1}+\varphi(D)\,U_r=0, \\ U_{r+1}=0, \ldots, \ U_n=0, \end{array}\right.$$

sono equivalenti. Infatti le soluzioni del sistema (1) sono evidentemente soluzioni del sistema (8); d'altra parte se nel sistema

$$\psi_1(D)\,U_{r-1}+\varphi_1(D)\,U_r=0, \quad -\psi(D)\,U_{r-1}+\varphi(D)\,U_r=0,$$

pensiamo U_{r-1} e U_r come incognite, e osserviamo che il determinante del sistema è una costante non nulla, risulta [n. 1, *b*)] $U_{r-1}=0$, $U_r=0$, e segue allora che tutte le soluzioni del sistema (8) sono soluzioni del sistema (1).

[1] Manteniamo l'ipotesi del n. 1, *a*), che se nel sistema (1) $p_{i,k}(D)$ si riduce a una costante, questa è nulla.

È da notare che nell'equazione $\overline{U}_{r-1}=0$ il coefficiente di Y_1 è

$$\psi_1(D)p_{r-1,1}(D)+\varphi_1(D)p_{r,1}(D)=$$
$$=\Gamma(D)\,[\varphi(D)\psi_1(D)+\psi(D)\varphi_1(D)]=c\Gamma(D)$$

quindi l'equazione $\overline{U}_{r-1}=0$ contiene Y_1.

Operando analogamente su $\overline{U}_{r-2}=0$, $\overline{U}_{r-1}=0$, e così di seguito, si arriverà ad un sistema

$$(9)\qquad V_1=0, \quad V_2=0, \ldots, \quad V_n=0$$

nel quale soltanto la prima equazione $V_1=0$ contiene la Y_1, e poichè per ognuno dei passaggi indicati, come si verifica facilmente, il determinante $\Delta(D)$ viene moltiplicato per una costante non nulla, si conclude che il determinante del sistema (9) vale $c_1\Delta(D)$, con c_1 costante non nulla.

Delle equazioni $V_2=0, \ldots, V_n=0$, poichè è $c_1\Delta(D)\neq 0$, una almeno contiene Y_2, e operando sul gruppo di equazioni che contiene Y_2 come abbiamo operato sulle $U_1=0$, $U_2=0, \ldots$, $U_r=0$ per eliminare tra $r-1$ di esse Y_1, e così successivamente, si arriverà ad un sistema diagonale equivalente al dato

$$\begin{array}{r} h_{1,1}(D)\,Y_1+h_{1,2}(D)\,Y_2+\ldots+h_{1,n}(D)\,Y_n=G_1(t), \\ h_{2,2}(D)\,Y_2+\ldots+h_{2,n}(D)\,Y_n=G_2(t), \\ \ldots \qquad \ldots \\ h_{n,n}(D)\,Y_n=G_n(t), \end{array}$$

con le $h_{i,s}(D)$, $(s=i, i+1, \ldots, n)$, operatori noti, $G_1(t)$, $G_2(t), \ldots$, $G_n(t)$ funzioni note, e $h_{1,1}(D)\,h_{2,2}(D)\ldots h_{n,n}(D)=$cost. $\Delta(D)$, c. v. d.

b) Dal teorema dimostrato segue che se $\Delta(D)$ ha l'ordine ω, le soluzioni del sistema dipendono complessivamente da ω costanti arbitrarie.

c) Dalle cose dette segue anche che se vogliamo determinare il numero delle costanti da cui dipende la Y_r nell'integrale generale del sistema (1), basterà ridurre il sistema in uno diagonale in cui Y_r occupi l'ultimo posto, e se l'equazione corrispondente è $l_{n,n}(D)\,Y_r=0$, e ν_r è l'ordine dell'operatore $l_{n,n}(D)$, Y_r dipende linearmente da ν_r costanti arbitrarie.

Si ha pure: se Y_r dipende da ν_r costanti arbitrarie, ed Y_r ha in un certo ordinamento diagonale il primo posto, il coefficiente diagonale di Y_r ha in tale ordinamento l'ordine $\mu_r \leqslant \nu_r$, e μ_r rappresenta il numero delle costanti arbitrarie che entrano linearmente in Y_r, e in nessun altro integrale (¹).

d) Diamo un esempio. Si voglia risolvere il sistema

$$U_1=(D^2-4D)X-(D-1)Y=0, \qquad U_2=(D+6)X+(D^2-D)Y=0,$$
$$D=d/dt;$$

il sistema diagonale equivalente è

$$-(D+6)U_1+(D^2-4D)U_2=(D-1)(D+1)(D-2)(D-3)Y=0,$$
$$U_1-(D-10)U_2=60X-(D^3-11D^2+11D-1)Y=0,$$

che ha la soluzione

$$X=2c_1\,e^{-t}+c_3\,e^{2t}+2c_4\,e^{3t}, \qquad Y=-5c_1\,e^{-t}+c_2\,e^{t}-4\,c_3\,e^{2t}-3\,c_4\,e^{3t},$$

con c_1, c_2, c_3, c_4 costanti arbitrarie.

§ 4. - Sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti variabili.

1. Trasformazione del sistema in un particolare sistema diagonale.

1. - *a*) Il procedimento descritto nel n. 3 del paragrafo precedente non può applicarsi nella riduzione di un sistema di equazioni differenziali a coefficienti variabili ad un sistema diagonale equivalente, avendo fatto ivi uso della proprietà commutativa del prodotto di due o più operatori a coefficienti costanti. Daremo ora, per il caso generale di sistemi lineari a coefficienti variabili, un procedimento di riduzione alla forma diagonale fondato sulla riduzione alla forma canonica di una matrice con elementi polinomiali (¹).

(¹) Per un recente studio sull'argomento, cfr. T. W. Chaundy, H. R. Launchbury: *Systems of ordinary differential equations with constant coefficients*, The Quarterly Journ. of Math., (Oxford Series), 8 (1937), pp. 214-219.

b) Consideriamo il sistema

$$(1) \qquad U_i=\sum_{k=1}^{n} p_{i,k}(D)\,Y_k-F_i(t)=0,$$

con le $p_{i,k}(D)$ operatori differenziali lineari in D, a coefficienti variabili.

Così come abbiamo già detto al n. 1 del paragrafo precedente, noi supponiamo che se un operatore $p_{i,k}(D)$ è di ordine zero, rispetto a D, esso è identicamente nullo: nel caso infatti che si abbia $p_{i,k}(D)=a_{i,k}(t)$, e sia $a_{i,k}(t)\neq 0$ in un intervallo, possiamo ricavare, limitandoci a tale intervallo, $Y_h(t)$ dalla i^{esima} equazione del sistema, e con una semplice sostituzione il sistema può ridursi in un altro lineare composto di $n-1$ equazioni.

Noi conveniamo che nelle trasformazioni che andremo a considerare faremo la riduzione ora indicata tutte le volte che si sia in presenza di un operatore $p_{i,k}(D)=a_{i,k}(t)\neq 0$.

Ciò premesso tra gli operatori $p_{i,k}(D)$ consideriamone uno di minimo ordine, esso sia ad esempio $p_{1,1}(D)$. Vogliamo provare che si può supporre che ogni $p_{i,1}(D)$, $(i=1, 2,\ldots, n)$ abbia per divisore a destra $p_{1,1}(D)$. Se infatti $p_{i,1}(D)$ non è divisibile a destra per $p_{1,1}(D)$, avremo $p_{i,1}(D)=q_i(D)\,p_{1,1}(D)+p^*_{i,1}(D)$, con $p^*_{i,1}(D)$ di ordine inferiore a $p_{1,1}(D)$, ma allora se all'equazione $U_i=0$ sostituiamo

$$U_i-q_i(D)\,U_1=0,$$

avremo un sistema equivalente al sistema (1), che possiamo pensare come un sistema ridotto di (1), essendo appunto l'ordine dell'operatore di minimo ordine in esso contenuto, minore di quello di $p_{1,1}(D)$.

Possiamo quindi supporre che nel sistema (1) sia

$$(2) \qquad p_{i,1}(D)=q_i(D)\,p_{1,1}(D), \qquad (i=2,\ldots, n).$$

(¹) Cfr ad es. M. Bocher: *Introduction to higher algebra*, (New-York, 1907), pp. 262-278; E. G. C. Poole: *Introduction to the theory of linear differential equations* (Oxford, 1936), pp. 39-41.

Si può anche supporre che nella prima equazione ognuno degli operatori $p_{1,2}(D)$, $p_{1,3}(D)$,...., $p_{1,n}(D)$ abbia come divisore a sinistra $p_{1,1}(D)$.

Supponiamo ad esempio che sia

$$p_{1,2}(D)=p_{1,1}(D)\,l_2(D)+p^*_{1,2}(D),$$

con $p^*_{1,2}(D)$ di ordine inferiore a $p_{1,1}(D)$, e non identicamente nullo; se prendiamo come nuova funzione incognita

$$Y_1+l_2(D)\,Y_2=\overline{Z}_1$$

il sistema (1) diventa

$$p_{1,1}(D)\,\overline{Z}_1+p^*_{1,2}(D)\,Y_2+p_{1,3}(D)\,Y_3+....+p_{1,n}(D)\,Y_n=F_1(t)$$

$$q_2(D)\,p_{1,1}(D)\overline{Z}_1+[-q_2(D)p_{1,1}(D)\,l_2(D)+p_{2,2}(D)]\,Y_2+p_{2,3}(D)\,Y_3+$$
$$+....+p_{2,n}(D)\,Y_n=F_2(t)$$

....

ed esso può pensarsi come un sistema ridotto del sistema (1).

In conclusione possiamo supporre che il sistema (1) abbia la forma

$$(3)\qquad \begin{cases} U_1\equiv p_{1,1}(D)\,[Y_1+\sum\limits_{k=2}^{n} l_k(D)\,Y_k]-F_1(t)=0 \\ U_i=q_i(D)\,p_{1,1}(D)\,Y_1+\sum\limits_{k=2}^{n} p_{i,k}(D)\,Y_k-F_i(t)=0, \\ \qquad (i=2,\,3,....,\,n). \end{cases}$$

Posto

$$(4)\qquad Y_1+\sum_{k=2}^{n} l_k(D)\,Y_k=Z_1$$

la prima equazione del sistema (3) può scriversi

$$(5)\qquad p_{1,1}(D)\,Z_1-F_1(t)=0$$

e sostituendo alle altre le equazioni

$$(6)\qquad V_i=U_i-q_i(D)\,U_1=0,\qquad (i=2,....,\,n),$$

risulta in quest'ultime eliminata Y_1.

Inversamente se ricaviamo Z_1 dalla (5), e Y_2, Y_3,...., Y_n dalle (6),

e conseguentemente Y_1 dalla (4), le funzioni $Y_1(t)$, $Y_2(t)$,...., $Y_n(t)$ così ottenute soddisfano il sistema (3).

Potrà avvenire che qualcuna delle equazioni (6) risulti identica, e allora essa potrà sopprimersi, o che in qualcuna di esse una delle Y_2,...., Y_n abbia un coefficiente indipendente da D e ciò permetterà di ridurre la difficoltà del problema, oppure che qualcuna delle (6) sia impossibile e allora il sistema stesso, e perciò il sistema dato, sarà impossibile.

Nel caso generale si potrà operare sul sistema (6) come sul sistema (1), e continuando il procedimento si otterrà un sistema della forma

$$h_1(D)\,Z_1=\varphi_1(t),\qquad h_2(D)\,Z_2=\varphi_2(t),....,\qquad h_n(D)\,Z_n=\varphi_n(t)$$

e le Y_1, Y_2,...., Y_n si esprimono linearmente per le Z_1, Z_2,...., Z_n e inversamente.

§ 5. - Rappresentazione degli integrali delle equazioni differenziali per mezzo di integrali definiti.

1. Principio del metodo. - 2. L'equazione di LAPLACE.

1. - Sia data l'equazione differenziale

$$(1)\qquad L[Y]=a_0(t)\,Y^{(n)}+a_1(t)\,Y^{(n-1)}+$$
$$+....+a_{n-1}(t)\,Y'+a_n(t)\,Y-F(t)=0$$

ove $a_0(t)$, $a_1(t)$,...., $a_{n-1}(t)$, $a_n(t)$, $F(t)$ sono funzioni assegnate di t in $(\alpha,\,\beta)$, continue, $a_0(t)\neq 0$, e proponiamoci di vedere se è possibile rappresentare le sue soluzioni con un integrale della forma

$$(2)\qquad Y(t)=\int_C k(t,\,s)\;y(s)\,ds,$$

dove C è un cammino di integrazione, prestabilito, fisso; $k(x,\,t)$ [*nucleo*] è una funzione nota di t e di s: ed $y(s)$ è la nuova funzione incognita.

La (2) può pensarsi come una trasformazione funzionale la quale ad ogni elemento $y(s)$ [*funzione oggetto*] appartenente ad una certa classe A fa corrispondere una funzione $Y(t)$ [*funzione risultato*] di una certa classe B.

Noi supponiamo che la (2) possieda una *formula di inversione*

$$y(s)=\int_C K(s,t)Y(t)dt, \tag{3}$$

[$K(x,t)$ nota] la quale ad ogni funzione della classe B faccia corrispondere una funzione della classe A, e ancora che le trasformate $\int_C K(s,t)Y^{(r)}(t)\,dt$ delle derivate di Y si esprimano linearmente per $y(s)$ e le sue derivate. Allora dalla (1), operando con la trasformazione (3) ricaveremo un'equazione della forma

$$M(y)=b_0(s)y^{(m)}+b_1(s)y^{(m-1)}+\dots+b_{m-1}(s)y'+b_m(s)y-f(s)=0,$$

e per ogni $y(s)$ che soddisfa questa equazione, la (2) fornirà un integrale dell'equazione proposta.

2. - *a*) Illustriamo subito le cose ora dette con un esempio. Si consideri l'equazione di LAPLACE [1]

$$L(Y)=(a_0+b_0t)Y^{(n)}+(a_1+b_1t)Y^{(n-1)}+\dots+(a_n+b_nt)Y=0, \tag{4}$$

con $a_0, a_1,\dots, a_n$; $b_0, b_1,\dots, b_n$ costanti, e poniamo il suo integrale sotto la forma

$$Y(t)=\int_C e^{ts}y(s)\,ds. \tag{5}$$

Si ha

$$Y^{(r)}(t)=\int_C s^r e^{ts}y(s)\,ds,$$

e la (4) si scrive

$$L(Y)=\int_C e^{ts}y(s)\,[P+tQ]\,ds,$$

[1] É. GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathématique*, II (4me éd., Paris, 1925), pp. 464-466; L. SCHLESINGER: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* (Leipzig, 1895), I, pp. 409-414.

dove

$$\begin{aligned} P&=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\dots+a_{n-1}s+a_n,\\ Q&=b_0s^n+b_1s^{n-1}+\dots+b_{n-1}s+b_n.\end{aligned} \tag{6}$$

Integrando per parti abbiamo

$$\int_C Qy(s)\,[te^{ts}ds]=\Big[Qy(s)e^{ts}\Big]_C-\int_C e^{ts}\frac{d}{ds}[Qy(s)]\,ds,$$

e perciò

$$L[Y]=\Big[Qy(s)e^{ts}\Big]_C+\int_C\Big\{Py(s)-\frac{d}{ds}[Qy(s)]\Big\}e^{ts}ds,$$

e l'equazione (4) sarà soddisfattta se $y(s)$ è scelta in modo che

$$Py(s)-\frac{d}{ds}[Qy(s)]=0,\qquad \Big[Qy(s)e^{ts}\Big]_C=0.$$

La prima di queste integrata dà:

$$y(s)=\frac{1}{Q(s)}e^{\int_{s_0}^{s}\frac{P(u)}{Q(u)}du}, \tag{7}$$

e la seconda diventa

$$\left[e^{ts+\int_{s_0}^{s}\frac{P(u)}{Q(u)}du}\right]_C=0. \tag{8}$$

Abbiamo dunque che se il cammino C è scelto in guisa che nella (8) l'espressione racchiusa in parentesi riprenda lo stesso valore quando s percorre il cammino C, e se sostituendo la (7) nella (5), $Y(t)$ non risulta identicamente nulla, si è ottenuto un integrale della (4).

b) Rimandando alle opere citate nel numero precedente per l'esame degli integrali della (4), illustriamo le cose dette in un caso particolare.

Si voglia integrare l'equazione

$$t\,\frac{d^2Y}{dt^2}+(p+q+t)\,\frac{dY}{dt}+pY=0, \tag{9}$$

dove supponiamo $p>0$, $q>0$, $t>0$.

Si ha con le nostre notazioni

$$a_0=0,\ a_1=p+q,\ a_2=p,\ P=(p+q)s+p,$$
$$b_0=1,\ b_1=1,\quad b_2=0,\ Q=s^2+s,$$

$$\frac{P}{Q}=\frac{q}{s+1}+\frac{p}{s},\qquad y(s)=c\,s^{p-1}(s+1)^{q-1},\qquad (c=\text{cost.})$$

$$e^{ts+\int_{s_0}^{s} P(u)/Q(u)\,du}=c\,e^{ts}(s+1)^q s^p,$$

e l'equazione (9) è soddisfatta se prendiamo per cammino C o l'intervallo $(-1, 0)$, oppure l'altro $(-\infty, -1)$; l'integrale generale della (9) è quindi

$$Y(t)=\bar{c}_1\int_{-1}^{0} e^{ts}s^{p-1}(s+1)^{q-1}\,ds+\bar{c}_2\int_{-\infty}^{-1} e^{ts}s^{p-1}(s+1)^{q-1}\,ds,$$

oppure, cangiando s in $-s$,

$$Y(t)=c_1\int_0^1 e^{-st}s^{p-1}(1-s)^{q-1}\,ds+c_2\int^{\infty} e^{-st}s^{p-1}(1-s)^{q-1}\,ds,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

c) Nel seguito di questo Capitolo applicheremo la trasformazione (2) per la risoluzione del problema di CAUCHY relativo alle equazioni e ai sistemi di equazioni differenziali, quando il nucleo $k(t, s)$, nella (2), ha la forma $k(t, s)=e^{-st}$, e il cammino C è l'intervallo $(0, \infty)$ [§ 7], oppure un circuito chiuso [§ 8], useremo cioè la trasformazione di LAPLACE della quale, per comodità del lettore, nel prossimo paragrafo, riporteremo le proprietà essenziali.

§ 6. - La trasformazione di Laplace [1].

1. - *a*) Diremo che una funzione $F(t)$, reale o complessa della variabile reale t, definita per $t>0$, è una funzione della classe I, se in ogni intervallo (T_1, T_2), $0<T_1\leqslant t\leqslant T$ essa è limitata e misurabile nel senso di LEBESGUE, e se esiste il limite

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^T |F(t)|\,dt=\int_0^T |F(t)|\,dt.$$

Si dirà poi che la funzione $F(t)$ della classe I appartiene alla classe L, se esiste un numero *reale* o *complesso* s_0 tale che per un assegnato $T>0$ esiste (finito) il limite

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_T^\omega e^{-s_0t}F(t)\,dt.$$

È subito visto che se $F(t)$ è della classe L, *l'integrale di* LAPLACE

$$\int_0^{+\infty} e^{-s_0t}F(t)\,dt=\lim_{\varepsilon\to+0,\,\omega\to+\infty}\int_\varepsilon^\omega e^{-s_0t}F(t)\,dt,$$

esiste, quando ε ed ω tendono rispettivamente a 0 e a $+\infty$, uno indipendentemente dall'altro.

---

[1] Per un'ampia e aggiornata trattazione della trasformazione di LAPLACE, cfr. G. DOETSCH: *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, (Berlin, 1937).

b) Sussiste il teorema di PINCHERLE [1]: *Sia $F(t)$ della classe L; se l'integrale di* LAPLACE *converge per $s=s_0$,*

$$\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} F(t)\, dt = f_0 ,$$

allora esso converge per ogni valore di s del semipiano $Rs > Rs_0$. Posto inoltre per $t>0$

$$\int_0^{t} e^{-s_0 \tau} F(\tau)\, d\tau = \Phi(t),$$

si ha per $Rs > Rs_0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt = (s-s_0) \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} \Phi(t)\, dt. \tag{1}$$

Se poniamo $\Phi(0)=0$, $\Phi(t)$ per $t \geqslant 0$ è continua, e $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(t)=f_0$.

Si ha

$$\int_\varepsilon^{\omega} e^{-st} F(t)\, dt = \int_\varepsilon^{\omega} e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} F(t)\, dt =$$

$$= e^{-(s-s_0)\omega} \Phi(\omega) - e^{-(s-s_0)\varepsilon} \Phi(\varepsilon) + (s-s_0) \int_\varepsilon^{\omega} e^{-(s-s_0)t} \Phi(t)\, dt,$$

e passando al limite per $\varepsilon \to 0$ e $\omega \to +\infty$ segue la (1) del testo.

Dai soliti ragionamenti segue che se $F(t)$ è una funzione della classe L, esiste un numero reale β, $(-\infty \leqslant \beta \leqslant +\infty)$ tale che l'integrale di LAPLACE

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt \tag{2}$$

è convergente per $Rs > \beta$, e non convergente per $Rs < \beta$. Tale numero β (eventualmente uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$) prende il nome di *ascissa di convergenza semplice* dell'integrale (2).

---

[1] S. PINCHERLE: *Sur les fonctions déterminantes,* Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup., (3), 22 (1905), (pp. 9-68), p. 13.

c) Per la determinazione dell'ascissa di convergenza semplice sussiste il teorema di LANDAU: *Se è $\beta \geqslant 0$ si ha allora*

$$\beta = \lim_{\omega\to+\infty} \frac{\log \left| \int_0^{\omega} F(t)\, dt \right|}{\omega}. \tag{3}$$ [1]

Sia $s_0 > \beta$, $(s_0 > 0)$, si ha $\left| \int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} F(t)\, dt \right| < +\infty$.

Posto

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\omega} e^{-s_0 t} F(t)\, dt, \qquad \psi(\omega) = \int_0^{\omega} F(t)\, dt,$$

si ha pure

$$\psi(\omega) = \int_0^{\omega} e^{s_0 t} [e^{-s_0 t} F(t)\, dt] = e^{s_0 \omega} \Phi(\omega) - s_0 \int_0^{\omega} e^{s_0 t}\, \Phi(t)\, dt. \tag{4}$$

Poichè $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \Phi(\omega)$ è finito, esiste una costante k tale che $|\Phi(\omega)| < k$ per $\omega > 0$, e dalla (4) segue

$$|\psi(\omega)| \leqslant k e^{s_0 \omega} + k s_0 \int_0^{\omega} e^{s_0 t}\, dt < 2k e^{s_0 \omega},$$

perciò qualunque sia $\delta > 0$ si può determinare un ω_1 tale che per $\omega > \omega_1$ sia

$$|\psi(\omega)| < e^{(s_0+\delta)\omega}, \qquad \omega^{-1} \log |\psi(\omega)| < s_0 + \delta,$$

e perciò posto

$$\overline{\lim_{\omega\to+\infty}} \frac{\log |\psi(\omega)|}{\omega} = \lambda,$$

risulta, qualunque sia $\delta > 0$, $\lambda \leqslant s_0 + \delta$, da cui $\lambda \leqslant s_0$, ossia *qualunque numero $s_0 > \beta$ è anche $\geqslant \lambda$.*

---

[1] Cfr. E. LANDAU: *Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen,* Sitz. Münchn. Akad. 36 (1906), pp. 151-218), p. 215.

Per il caso $\beta < 0$ vedi S. PINCHERLE: *Quelques remarques sur les fonctions déterminantes,* Acta Math. 36 (1913), pp. 269-280), p. 270.

Si ha poi per $\delta>0$, e del resto qualsiasi,

$$(5)\quad \int_0^{\omega} e^{-(\lambda+\delta)t} F(t)\,dt = e^{-(\lambda+\delta)\omega}\,\psi(\omega) + (\lambda+\delta)\int_0^{\omega} e^{-(\lambda+\delta)t}\,\psi(t)\,dt;$$

ma esiste un ω_1 tale che per $\omega>\omega_1$ risulta $\omega^{-1}\log|\psi(\omega)|<\lambda+\delta/2$ quindi $|\psi(\omega)|<e^{(\lambda+\delta/2)\omega}$, $|e^{-(\lambda+\delta)\omega}\psi(\omega)|<e^{-\delta\omega/2}$, e da quest'ultima limitazione segue che per $\omega\to+\infty$ il secondo membro della (5) è convergente, e tale risulta anche il primo membro. Si ha allora per qualunque $\delta>0$, $\lambda+\delta\geqslant\beta$, e perciò $\lambda\geqslant\beta$, e poichè ogni numero $>\beta$ è anche $\geqslant\lambda$, si ha appunto $\lambda=\beta$, c. v. d.

d) Se $F(t)$ appartiene alla classe I, e se esiste un numero reale o complesso s_0 tale che

$$\int_0^{+\infty} |e^{-s_0 t}F(t)|\,dt<+\infty,$$

si dirà che $F(t)$ è della classe L_a, e che *l'integrale di* LAPLACE $\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t}F(t)\,dt$ *è assolutamente convergente.*

È subito visto che condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $F(t)$ della classe I appartenga alla classe L_a è che ad ogni $\sigma>0$ si possa associare un ω tale che per $\omega_2>\omega_1\geqslant\omega$ sia

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-tRs_0}\,|F(t)|\,dt<\sigma.$$

Vale il teorema: *se per $s=s_0$, l'integrale di* LAPLACE *è assolutamente convergente, allora esso è assolutamente convergente per ogni s tale che $Rs\geqslant Rs_0$.*

È infatti

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} |e^{-st}F(t)|\,dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |e^{-(s-s_0)t}\,e^{-s_0t}F(t)|\,dt =$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-tR(s-s_0)}\,|e^{-s_0t}F(t)|\,dt \leqslant \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-tRs_0}\,|F(t)|\,dt.$$

Si dice che a è l'***ascissa di convergenza assoluta*** dell'integrale (2), se esso converge assolutamente per ogni s tale che $Rs>a$, e non converge assolutamente per $Rs<a$.

Sussiste evidentemente la limitazione $-\infty\leqslant\beta\leqslant a\leqslant+\infty$.

e) Sia $F(t)$ una funzione L, e β l'ascissa di convergenza dell'integrale (2); posto per $Rs>\beta$

$$(6)\qquad f(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt,$$

la funzione $F(t)$ si dirà *funzione oggetto*, e $f(s)$ *funzione risultato* della trasformazione di LAPLACE (6), e si scriverà

$$f(s)=\mathfrak{L}\{F\},\qquad f(s)=\mathfrak{L}_s\{F\},\qquad f(s)=\mathfrak{L}\{F;\,s\}.$$

Una funzione $f(s)$ che può ottenersi come trasformata di LAPLACE di una $F(t)$ della classe L, si dirà una *funzione l*.

f) *Sia $F(t)$ una funzione della classe L, ed s_0 un punto del piano complesso in cui l'integrale di* LAPLACE *converge; vogliamo dimostrare che se per s_0 si conducono due semirette formanti con la direzione positiva dell'asse reale x un angolo acuto φ, queste semirette limitano una regione D nella quale l'integrale $\mathfrak{L}_s(F)$ converge uniformemente rispetto al suo estremo superiore,* cioè fissato un numero $\sigma>0$ e arbitrario, esiste corrispondentemente un numero T tale che per $T\leqslant\omega_1<\omega_2$ si ha

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-st}F(t)\,dt\right|<\sigma,$$

ovunque si scelga s in D.

Infatti, fissato $\sigma>0$, si prenda ε in modo che $(2+1/\cos\varphi)\,\varepsilon<\sigma$ e posto

$$\int_t^{+\infty} e^{-s_0\tau}F(\tau)\,d\tau=\psi(t)$$

si determini un $T(\varepsilon)$ tale che $|\psi(t)|<\varepsilon$ per $t\geqslant T$.

Integrando per parti si ha

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-st}F(t)\,dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-(s-s_0)t}\, e^{-s_0 t}F(t)dt =$$

$$= -e^{-(s-s_0)t}\,\psi(t)\,\Big|_{t=\omega_1}^{t=\omega_2} - (s-s_0)\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-(s-s_0)t}\,\psi(t)\,dt,$$

e per $T \leqslant \omega_1 < \omega_2$

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-st}F(t)\,dt\right| \leqslant e^{-\omega_2 R(s-s_0)}\,|\psi(\omega_2)| + e^{-\omega_1 R(s-s_0)}\,|\psi(\omega_1)| +$$

$$+ |s-s_0| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-R(s-s_0)t}\,|\psi(t)|\,dt$$

$$< \varepsilon\left[\, e^{-\omega_2 R(s-s_0)} + e^{-\omega_1 R(s-s_0)} + |s-s_0| \int_{\omega_1}^{+\infty} e^{-R(s-s_0)t}\,dt = \right.$$

$$\left. = \varepsilon\,\right[\, e^{-\omega_2 R(s-s_0)} + e^{-\omega_1 R(s-s_0)} + \frac{|s-s_0|}{R(s-s_0)}\, e^{-R(s-s_0)\omega_1} \Big].$$

Si ha in D, $R(s-s_0) \geqslant 0$, $e^{-\omega_1 R(s-s_0)} \leqslant 1$, $e^{-\omega_2 R(s-s_0)} \leqslant 1$, $|s-s_0|\,/\,R(s-s_0) \leqslant 1/\cos\varphi$, perciò per s in D

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-st}F(t)\,dt\right| \leqslant \left(2 + \frac{1}{\cos\varphi}\right)\varepsilon < \sigma, \quad \text{c. v. d.}$$

Si noti ancora che

$$|f(s)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_0^{\omega_1} e^{-st}F(t)\,dt\right| + \sigma,$$

ma

$$\left|\int_0^{\omega_1} e^{-st}F(t)\,dt\right| = \left|\int_0^{\omega_1} e^{-(s-s_0)t}\, e^{-s_0 t}F(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^{\omega_1} e^{-R(s-s_0)t}\,|e^{-s_0 t}F(t)|\,dt$$

$$\leqslant \int_0^{\omega_1} e^{-tRs_0}\,|F(t)|\,dt,$$

e perciò $|f(s)|$ *è limitato in* D.

g) Nella (6) è lecito derivare sotto il segno integrale rispetto ad s

nel semipiano $Rs > \beta$, sussiste infatti il teorema di PINCHERLE [1]: *se* $f(s) = \mathfrak{L}_s\{F\}$, *in ogni punto* s *tale che* $Rs > \beta$, *si ha*

$$f^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-st}\, t^n F(t)\,dt, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

od anche

$$f^{(n)}(s) = \mathfrak{L}\{(-t)^n F\}, \qquad [Rs > \beta],$$

cioè $f(s)$ *è una funzione olomorfa nell'interno del semipiano* $Rs > \beta$, e la sua derivata si ottiene con la regola di derivazione sotto il segno integrale.

h) Vogliamo infine dare notizia della *trasformazione di* LAPLACE *infinita in due sensi.*

Se nell'integrale di LAPLACE (2) si cangia t in $-t$ si ha l'integrale

$$\int_{-\infty}^{0} e^{st}F(t)\,dt,$$

e il cangiamento implica che se quest'ultimo integrale converge per $s = s_0$, esso converge anche per tutti i valori di s tali che $Rs < Rs_0$.

Chiamasi trasformazione di LAPLACE infinita in due sensi, e si indica con i simboli $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\{F\}$, $\mathfrak{L}_{s,\mathrm{II}}\{F\}$, $\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\{F; s\}$, l'integrale

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{II}}\{F(t);\, s\} = f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt,$$

e l'ultimo integrale sta per

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0,\ \varepsilon_2 \to +0 \\ \omega_1 \to +\infty,\ \omega_2 \to +\infty}} \left[\int_{-\omega_1}^{-\varepsilon_1} e^{-st}F(t)\,dt + \int_{\varepsilon_2}^{\omega_2} e^{-st}F(t)\,dt\right],$$

dove ε_1, ε_2, ω_1, ω_2 tendono ai rispettivi limiti ognuno indipendentemente dagli altri.

Nella trasformazione di LAPLACE infinita in due sensi si parlerà in generale di *striscia di convergenza semplice,* cioè di quella parte del piano $-\beta_1 < Rs < \beta_2$ ove l'integrale converge.

---

[1] Cfr. prr la dimostrazione G. DOETSCH, op. cit. nel n. 1, p. 43.

2. - *a*) Vogliamo costruire la trasformata di LAPLACE di alcune tra le più note funzioni (¹).

Sia $F(t)=1$; $\mathfrak{L}_s(1)=\int_0^{+\infty} 1e^{-st}\,dt$ converge per $Rs>0$, non converge per $Rs\leqslant 0$; si ha inoltre

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{L}_s\{1\}=\frac{1}{s}.$$

b) Sia $F(t)=0$ per $0\leqslant t\leqslant a$; $F(t)=1$ per $t\geqslant a$; per $Rs>0$ si ha

$$\mathfrak{L}_s\{F\}=\int_a^{+\infty} e^{-st}\,dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^{+\infty}=\frac{e^{-as}}{s},$$

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{L}_s\{F\}=\frac{e^{-as}}{s}.$$

c) Sia $F(t)=t^\alpha$, dove t^α indica il *valore principale* della potenza, e sia $R\alpha>-1$. L'integrale di LAPLACE converge per $Rs>0$, e con la sostituzione $st=\tau$ risulta

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\,t^\alpha\,dt=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} e^{-\tau}\,\tau^\alpha\,d\alpha=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad (^2)$$

perciò

$$\text{(III)} \qquad \mathfrak{L}_s\{t^\alpha\}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \qquad \text{per } R\alpha>-1 \text{ e } Rs>0.$$

d) Sia $F(t)=e^{at}$ con a reale o complesso; per $Rs>Ra$ si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\,e^{at}\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}\,dt=\frac{1}{s-a},$$

perciò

$$\text{(IV)} \qquad \mathfrak{L}_s\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}.$$

(¹) Per un quadro di trasformate di LAPLACE vedi G. DOETSCH, op. cit. nel n. 1, pp. 401-403.

(²) Cfr. Cap. III, § 6, n. 2, nota di p. 157-158.

e) Sia $F(t)=\cosh ct=[e^{ct}+e^{-ct}]/2$, con c costante complessa.

Si ha per $Rs>|Rc|$,

$$\mathfrak{L}_s\{\cosh ct\}=\frac{1}{2}\,\mathfrak{L}_s\{e^{ct}+e^{-ct}\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-c}+\frac{1}{s+c}\right]=\frac{s}{s^2-c^2},$$

perciò

$$(\text{V}_1) \qquad \mathfrak{L}_s\{\cosh ct\}=\frac{s}{s^2-c^2}.$$

Analogamente per $Rs>|Rc|$ risulta

$$(\text{V}_2) \qquad \mathfrak{L}_s\{\operatorname{senh} ct\}=\frac{c}{s^2-c^2}.$$

f) Sia $F(t)=\cos bt$, con b costante complessa. Si ha

$$\mathfrak{L}_s\{\cos bt\}=\frac{1}{2}\,\mathfrak{L}\{e^{ibt}+e^{-ibt}\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ib}+\frac{1}{s+ib}\right)=\frac{s}{s^2+b^2}$$

per $Rs>\text{Max.}\,[Rib,\ R(-ib)]=\text{Max.}\,[-Ib,\ Ib]=|Ib|$, cioè

$$(\text{VI}_1) \qquad \mathfrak{L}_s\{\cos bt\}=\frac{s}{s^2+b^2} \quad \text{per } Rs>|Ib|.$$

Analogamente

$$(\text{VI}_2) \qquad \mathfrak{L}_s\{\operatorname{sen} bt\}=\frac{b}{s^2+b^2} \quad \text{per } Rs>|Ib| \quad (^1).$$

g) Per la definizione della funzione gamma euleriana di seconda specie, per $\beta>0$ si ha

$$\Gamma(\beta)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{\beta-1}\,dt,$$

e derivando rispetto a β

$$\Gamma'(\beta)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{\beta-1}\log t\,dt,$$

(¹) Ricordiamo che dato un numero complesso a, i simboli Ra, Ia indicano rispettivamente la parte reale e il coefficiente dell'immaginario del numero a.

e in particolare

$$\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\log t\,dt = \text{costante di EULERO-MASCHERONI.}$$

Da quest'ultima, posto $t=s\tau$, con $s>0$, si ha

$$\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty} e^{-s\tau}(\log s+\log\tau)\,s\,d\tau = s\log s\int_0^{+\infty} e^{-s\tau}\,d\tau + s\int_0^{+\infty} e^{-s\tau}\log\tau\,d\tau =$$
$$=\log s + s\,\mathfrak{L}_s\{\log t\},$$

quindi

(VII) $$\mathfrak{L}_s\{\log t\}=\frac{\Gamma'(1)}{s}-\frac{\log s}{s},$$

e questa uguaglianza, essendo i due membri olomorfi nel semipiano $Rs>0$, sussiste anche per $Rs>0$.

3. - *a*) Allo scopo di valutare $\mathfrak{L}\{F^{(\nu)};s\}$ premettiamo il seguente teorema: *Se* $\mathfrak{L}\{\Phi\}$ *per* $s_0>0$ *converge semplicemente, converge anche per* s_0, $\mathfrak{L}\left\{\int_0^t \Phi(\tau)\,d\tau;\,s_0\right\}$, *e si ha*

$$s_0\mathfrak{L}\left\{\int_0^t\Phi(\tau)\,d\tau;\,s_0\right\}=s_0\int_0 e^{-s_0t}\left[\int_0^t\Phi(\tau)\,d\tau\right]dt=\int_0^{+\infty} e^{-s_0t}\Phi(t)\,dt=\mathfrak{L}\{\Phi;\,s_0\},$$

ed anche, per qualunque s (reale o complesso) tale che $Rs>s_0$,

$$s\mathfrak{L}\left\{\int_0^t\Phi(\tau)\,d\tau, s\right\}=s\int_0^{+\infty} e^{-st}\left[\int_0^t\Phi(\tau)\,d\tau\right]dt=\int_0^{+\infty} e^{-st}\Phi(t)\,dt=\mathfrak{L}\{\Phi;\,s\}.$$

Posto

$$\psi(x)=\int_0^x e^{-s_0t}\,dt\int_0^t\Phi(\tau)\,d\tau,\qquad G(x)=e^{s_0x}\psi(x),\qquad H(x)=e^{s_0x}$$

si ha $\lim\limits_{x\to\infty} H(x)=\infty$, $H'(x)=s_0e^{s_0x}\neq 0$, e per la regola dell'HOSPITAL generalizzata [1]

$$\lim_{x\to\infty}\psi(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{G(x)}{H(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{G'(x)}{H'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{s_0x}(s_0\psi+\psi')}{s_0e^{s_0x}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{s_0}(s_0\psi+\psi').$$

Si ha pure

$$s_0\psi+\psi'=s_0\int_0^x e^{-s_0t}\,dt\int_0^t\Phi(\tau)\,d\tau+e^{-s_0x}\int_0^x\Phi(\tau)\,d\tau=$$
$$=\left[-e^{-s_0t}\int_0^t\Phi(\tau)\,d\tau\right]_{t=0}^{t=x}+\int_0^x e^{-s_0t}\Phi(t)\,dt+e^{-s_0x}\int_0^x\Phi(\tau)\,d\tau=$$
$$=\int_0^x e^{-s_0t}\Phi(t)\,dt,$$

e perciò

$$\lim_{x\to\infty}\psi(x)=\frac{1}{s_0}\int_0^{+\infty} e^{-s_0t}\Phi(t)\,dt,$$

ossia

$$s_0\int_0^{+\infty} e^{-s_0t}\,dt\int_0^t\Phi(\tau)\,d\tau=\mathfrak{L}\{\Phi;\,s_0\}.$$

Questa formula vale per ogni $s>s_0$, e per l'olomorfia dei due membri nel semipiano $Rs>s_0$, vale anche per $Rs>s_0$, c. v. d.

b) Sia $F(t)$ definita per $t\geqslant 0$, assolutamente continua in ogni intervallo finito, e la sua derivata prima $F'(t)$ sia una funzione L. Si ha

$$F(t)=F(0)+\int_0^t F'(\tau)\,d\tau \qquad [2]$$

---

[1] Cfr. F. LETTENMEYER: *Über die sogenannte Hospitalscheregel*, Journ. für die reine und ang. Math., 174 (1936), pp. 246-247.

[2] Cfr. G. VITALI: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* (Bologna, 1935), p. 146.

e posto nel teorema dimostrato in *a*), $\Phi(t)=F'(t)$, abbiamo

$$\int_0 \Phi(\tau)\, d\tau = F(t)-F(0), \quad \mathfrak{L}\{F(0)\,;\,s\} = F(0)\int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = \frac{F(0)}{s},$$

$$s\mathfrak{L}\{F(t)\,;\,s\} - F(0) = \mathfrak{L}\{F'(t)\,;\,s\}$$

e ne viene il teorema: *se* $F(t)$ *è definita per* $t \geqslant 0$, *è assolutamente continua in ogni intervallo finito, e* $\mathfrak{L}\{F'\}$ *per un valore reale* $s_0>0$ *converge* [anche semplicemente], *allora* $\mathfrak{L}\{F\}$ *converge anche per* s_0, *e si ha*

$$\mathfrak{L}\{F'\,;\,s_0\} = s_0\,\mathfrak{L}\{F;\,s_0\} - F(0),$$

ed anche per $Rs > s_0$

$$\mathfrak{L}\{F'\,;\,s\} = s\,\mathfrak{L}\{F;\,s\} - F(0).$$

Dal teorema dimostrato segue: *se* $F(t)$ *per* $t \geqslant 0$ *possiede le derivate* $F', F'', \ldots, F^{(\nu-1)}$, $(\nu \geqslant 1)$, *se* $F^{(\nu-1)}$ *in ogni intervallo finito è assolutamente continua, e se inoltre* $\mathfrak{L}\{F^{(\nu)};\,s\}$ *per un valore reale* $s_0>0$ *converge, allora convergono* $\mathfrak{L}\{F\}$, $\mathfrak{L}\{F'\}, \ldots, \mathfrak{L}\{F^{(\nu-1)}\}$ *per* s_0, *e si ha*

$$\mathfrak{L}\{F^{(\nu)};\ s_0\} = s_0^{\nu}\,\mathfrak{L}\{F;\,s_0\} - F(0)s_0^{\nu-1} - F'(0)\, s_0^{\nu-2} - \ldots - F^{(\nu-1)}(0),$$

e per $Rs > s_0$ *si ha anche*

$$\mathfrak{L}\{F^{(\nu)};\,s\} = s^{\nu}\,\mathfrak{L}\{F;\,s\} - F(0)s^{\nu-1} - F'(0)s^{\nu-2} - \ldots - F^{(\nu-1)}(0).$$

4. - La natura della corrispondenza tra la funzione oggetto e la funzione risultato è precisata dal seguente teorema di LERCH [1]: *Se l'integrale di* LAPLACE

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt$$

converge per $s=s_0$, *e se la funzione risultato si annulla nei*

[1] M. LERCH: *Sur un point de la théorie des fonctions génératrice d'Abel*, Acta Math., 27 (1903), pp. 339-351), p. 347.

punti $s=s_0+n\sigma$, $\sigma>0$, $n=1, 2, \ldots$, *allora la funzione* $F(t)$ *è a integrale nullo*, si ha cioè

$$\int_0^t F(t)\, dt = 0 \qquad \text{per } t>0. \tag{7}$$

Ne segue che la $F(t)$ è generalmente nulla, cioè nulla, salvo un insieme di misura nulla [1].

Si ha infatti per $Rs > Rs_0$ [n. 1, *b*)]

$$f(s) = (s-s_0)\int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t}\,\Phi(t)\, dt,$$

con

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} F(\tau)\, d\tau,$$

e per le nostre ipotesi

$$\int_0^{+\infty} e^{-n\sigma t}\,\Phi(t)\, dt = 0.$$

Posto

$$e^{-\sigma t} = x, \quad -\sigma t = \log x, \quad t = -(\log x)/\sigma, \quad \Phi\left(-\frac{\log x}{\sigma}\right) = \psi(x),$$

otteniamo

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^1 x^{n-1}\,\psi(x)\, dx = 0, \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

ma $\psi(x)$ è una funzione continua, ed essendo nulli tutti i suoi momenti essa si annulla identicamente [2]; abbiamo dunque

$$\int_0^t e^{-s_0\tau} F(\tau)\, d\tau = 0, \qquad (t \geqslant 0).$$

[1] Cfr. G. VITALI: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, (Bologna, 1935), p. 113.

[2] Cfr. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (Bologna, 1935), p. 133.

Posto ora

$$\int_0^t F(\tau)\,d\tau = G(t),$$

abbiamo

$$0 = e^{-s_0\tau}\,G(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + s_0\int_0^t e^{-s_0\tau}\,G(\tau)\,d\tau,$$

(8) $$G(t) + s_0 e^{s_0 t}\int_0^t e^{-s_0\tau}\,G(\tau)\,d\tau = 0,$$

e derivando rispetto a t

$$G'(t) + s_0\left[s_0 e^{s_0 t}\int_0^t e^{-s_0\tau}\,G(\tau)\,d\tau + G(t)\right] = 0,$$

e per la (8)

$$G'(t) = 0, \qquad G(t) = \text{cost.},$$

ma $G(0)=0$, perciò è vera la (7) c. v. d.

Dal teorema dimostrato segue il corollario: *Sia* $\mathfrak{L}_s\{F_1\} = \mathfrak{L}_s\{F_2\}$ *per* $Rs > \beta$, *o semplicemente* $\mathfrak{L}_s\{F_1\} = \mathfrak{L}_s\{F_2\}$ *in infiniti punti situati sull'asse reale, o su una parallela all'asse reale, e in progressione aritmetica crescente; si ha allora generalmente* $F_1(t) = F_2(t)$.

In particolare se $F_1(t)$ e $F_2(t)$ sono continue, è $F_1(t) = F_2(t)$.

5. - *a*) Andremo ora a studiare il così detto *prodotto di composizione*, del quale ci serviremo nel prossimo paragrafo in occasione dell'applicazione della trasformazione di LAPLACE alla risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali.

Date due funzioni $F_1(t)$, $F_2(t)$ della classe I, si chiama *prodotto di composizione* (integrale) *di* $F_1(t)$ *e* $F_2(t)$, [francese *composition*, inglese *convolution, resultant*, tedesco *faltung*] e si indica con $F_1 * F_2$, la funzione $F(t)$ così definita

(9) $$F(t) = \int_0^t F_1(\tau)\,F_2(t-\tau)\,d\tau = F_1 * F_2\,.$$

Si ha evidentemente

(10) $$F_1 * F_2 = F_2 * F_1,$$

e proveremo in *d*) che si ha pure

(11) $$(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3).$$

b) Sussiste il teorema: *se* $F_1(t)$, $F'_1(t)$, $F_2(t)$ *sono funzioni della classe* I, *se* $\lim_{t\to+0} F_1(t) = F_1(0)$ *esiste, allora per ogni valore di* t *dove* $F_2(t)$ *è la derivata a destra* [sinistra] *di* $\int_0 F_2(\tau)\,d\tau$, (in particolare in ogni punto di continuità di $F_2(t)$), *la funzione* $\Phi(t) = F_1 * F_2$ *è derivabile a destra* (sinistra), *e si ha*

(12) $$\Phi'(t) = F_1' * F_2 + F_1(0)\,F_2(t).$$

Si ha infatti

$$\Phi(t) = \int_0^t F_2(t-\tau)\left\{\int_0^\tau F_1'(x)\,dx + F_1(0)\right\}d\tau =$$

$$= \int_0^t F_2(t-\tau)\,d\tau\int_0^\tau F_1'(x)\,dx + F_1(0)\int_0^t F_2(t-\tau)\,d\tau,$$

ed effettuando nel primo integrale il cangiamento $y = -\tau + x + t$, $z = x$; e nel secondo il cangiamento $t - \tau = u$, otteniamo

$$\Phi(t) = \int_0^t dy\int_0^y F_1'(z)\,F_2(y-z)\,dz + F_1(0)\int_0^t F_2(u)\,du,$$

e derivando ambo i membri si ha appunto la (12).

c) Sussiste il seguente *teorema di composizione*: *Se* $\mathfrak{L}\{F_1\}$, $\mathfrak{L}\{F_2\}$ *per* $s = s_0$ *convergono assolutamente, allora anche* $\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\}$ *converge assolutamente per* $s = s_0$, *e si ha*

(13) $$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\}\,\mathfrak{L}\{F_2\}.$$

L'ipotesi posta sulla convergenza assoluta di $\mathfrak{L}\{F_1\}$, $\mathfrak{L}\{F_2\}$ porta che

$$\mathfrak{L}\{F_1\}\mathfrak{L}\{F_2\}=\int_0^{+\infty} e^{-s_0 u} F_1(u)\,du \int_0^{+\infty} e^{-s_0 v} F_2(v)\,dv=$$

$$=\iint_{C(u>0,\,v>0)} e^{-s_0(u+v)} F_1(u)\,F_2(v)\,du\,dv,$$

e col cangiamento $u=t-\tau$, $v=\tau$ si ha

$$\mathfrak{L}\{F_1\}\mathfrak{L}\{F_2\}=\iint_{C(0\leqslant\tau\leqslant t)} e^{-s_0 t} F_1(t-\tau)\,F_2(\tau)\,dt\,d\tau=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t}\left[\int_0^t F_1(t-\tau)\,F_2(\tau)\,d\tau\right]dt.$$

d) Ci è ora facile provare la (11).

Siano $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ tre funzioni della classe I per $0\leqslant t\leqslant T$; e poniamo $F_1(t)\equiv 0$, $F_2(t)\equiv 0$, $F_3(t)\equiv 0$ per $t>T$; $\mathfrak{L}\{F_1\}$, $\mathfrak{L}\{F_2\}$, $\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\}$ convergono assolutamente per ogni s, e si ha per la (13)

$$\mathfrak{L}\{(F_1 * F_2) * F_3\}=\mathfrak{L}\{F_1 * F_2\}\,\mathfrak{L}\{F_3\}=\mathfrak{L}\{F_1\}\,\mathfrak{L}\{F_2\}\mathfrak{L}\{F_3\},$$

$$\mathfrak{L}\{F_1 * (F_2 * F_3)\}=\mathfrak{L}\{F_1\}\,\mathfrak{L}\{F_2\}\,\mathfrak{L}\{F_3\},$$

perciò $\mathfrak{L}\{(F_1 * F_2) * F_3 - F_1 * (F_2 * F_3)\}=0$, e a causa della continuità di $(F_1 * F_2) * F_3 - F_1 * (F_2 * F_3)$ [cfr. n. 4] segue appunto la (11).

6. - *a*) I teoremi seguenti servono a stabilire la formula di inversione di PINCHERLE [1] dell'integrale di LAPLACE nel campo complesso.

Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{s^{n+1}}, \tag{14}$$

[1] S. PINCHERLE: *Della trasformazione di* LAPLACE *e di alcune sue applicazioni*, Mem. R. Acc. dell'Ist. di Bologna, (4), 8 (1887), (pp. 125-143), p. 127.

non diverga per tutti i valori di s, ma possegga un raggio di convergenza finito, è che la serie

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\,t^n \tag{15}$$

sia una trascendente intera di tipo esponenziale.

Ricordiamo che secondo una denominazione di PRINGHSHEIM una trascendente intera $F(t)$ si dice di *tipo normale* ϱ, *del primo ordine*, o più brevemente di *tipo esponenziale*, se comunque si fissi $\eta>0$, per $|t|$ sufficientemente grande risulta

$$|F(t)|<e^{(\varrho+\eta)|t|}. \tag{16}$$

Ciò premesso dimostriamo che la condizione enunciata è necessaria.

La serie (14) abbia il suo raggio di convergenza ϱ finito, risulti cioè convergente per $|s|>\varrho$; dal teorema di CAUCHY-HADAMARD si ha

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\varrho,$$

e fissato $\varepsilon>0$, esiste un intero N tale, che per $n>N$ risulti $|a_n|<(\varrho+\varepsilon)^n$, e perciò un $A>0$ tale che

$$|a_n|<A(\varrho+\varepsilon)^n, \qquad (n=0,\,1,\dots).$$

La serie dei moduli della serie (15) è maggiorata dalla serie

$$A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varrho+\varepsilon)^n}{n!}\,t^n=A\,e^{(\varrho+\varepsilon)t}$$

e converge per qualunque t; ne viene $|F(t)|<A e^{(\varrho+\varepsilon)t}$, e perciò la (16).

Si può dimostrare che la condizione è sufficiente [1].

b) *Se la serie* (15) *è una trascendente intera di tipo esponenziale, la serie* (14) *ha un raggio ϱ di convergenza finito, e per $Rs>\varrho$ si ha*

$$f(s)=\mathfrak{L}_s\{F\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)\,dt$$

[1] Cfr. G. DOETSCH, op. cit. nel n. 1, pp. 62-63.

cioè $f(s)$ si lascia rappresentare con un integrale nel semipiano $Rs > \varrho$.

Inversamente la $F(t)$, per ogni valore di t, è data dall'integrale

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{ts} f(s)\, ds,$$

dove C è un circuito qualsiasi, percorso nel verso positivo, che contiene nel suo interno il cerchio con centro nell'origine, di raggio ϱ.

Si ha infatti per le cose dette in a)

$$|F(t)| < A e^{(\varrho+\varepsilon)|t|}$$

e siccome per $Rs > \varrho$ è

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt \right| \leqslant A \int_0^{+\infty} e^{-(Rs)t}\, e^{(\varrho+\varepsilon)t}\, dt \leqslant A \int_0^{+\infty} e^{[(\varrho - Rs)+\varepsilon]\, t}\, dt,$$

l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt$ per $Rs > \varrho$ risulta convergente.

Si ha ora

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \right] dt,$$

e poichè è lecita nel secondo membro l'integrazione termine a termine (1) ne viene [cfr. n. 2, (III)]

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{a_n}{n!} t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}} = f(s).$$

---

(1) Si fa uso del seguente teorema: Siano $\varphi(t)$, $f_n(t)$, $(n = 0, 1, \ldots)$ funzioni della classe I, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ sia uniformemente convergente in ogni intervallo finito (a, b), $0 < a \leqslant t \leqslant b$, si ha allora

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(t) f_n(t)\, dt$$

Se consideriamo invece l'integrale $\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{ts} f(s)\, ds$ esteso al circuito C dell'enunciato, e notiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}}$ è uniformemente convergente quando s varia su C, abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{ts} f(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{ts} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+1}}\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{ts}}{s^{n+1}}\, ds,$$

ma per il teorema di CAUCHY, è

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{ts}}{s^{n+1}}\, ds = \frac{1}{n!} \left| \frac{d^n e^{ts}}{ds^n} \right|_{s=0} = \frac{t^n}{n!},$$

e allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{ts} f(s)\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = F(t), \quad \text{c. v. d.}$$

7. - a) Per arrivare ad altre formule di inversione dell'integrale di LAPLACE, richiamiamo il teorema di inversione dell'integrale di FOURIER (1).

---

quando si verifichi una delle seguenti circostanze: l'integrale

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(t)| \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)| \right\} dt$$

è convergente, oppure la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} |\varphi(t)|\, |f_n(t)|\, dt$ è convergente. [Cfr. T. J. I'A. BROMWICH: *An introduction to the theory of infinite series*, (London, 1931), p. 500]. Nel caso del testo si ha

$$\varphi(t) = e^{-st}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(t)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n!} t^n \right| < A\, e^{(\varrho+\varepsilon)t},$$

e siccome abbiamo supposto $Rs > \varrho$, siamo nella prima delle condizioni enunciate.

(1) Cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (Bologna 1935), pp. 118-119.

Sia $F(x)$ una funzione finita e regolare [1] per ogni valore finito di x, integrabile nel senso di LEBESGUE in ogni intervallo finito, e a integrale assolutamente convergente tra $(-\infty, -a)$, $(a, +\infty)$ con $a > 0$. Esiste allora, per ogni valore finito della variabile *reale* y, il limite $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} e^{-iyx} F(x)\,dx$, o come si dice il *valore principale* secondo CAUCHY dell'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} F(x)\,dx$, e la funzione [complessa] della variabile *reale* y,

$$(17) \qquad f(y) = V\cdot P\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} F(x)\,dx = \mathfrak{F}\{F(x)\,;\,y\} \quad (^2)$$

prende il nome di *trasformata di* FOURIER di $F(x)$.

Il teorema di inversione dell'integrale di FOURIER assicura che nelle ipotesi ora dichiarate, per ogni valore di x, in un intorno del quale $F(x)$ è a *variazione limitata*, sussiste la *formula di inversione di* FOURIER

$$(18) \qquad F(x) = V\cdot P\cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y)\,dy.$$

b) Ciò premesso, sia $F(t)$ *finita e regolare per ogni valore finito di* t, *integrabile nel senso di* LEBESGUE *in ogni intervallo finito, e per* $a_1 < x < a_2$ *risulti convergente l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt}\,|F(t)|\,dt.$$

Nella formula di trasformazione di LAPLACE [infinita in due sensi]

$$(19) \qquad f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t)\,dt,$$

[1] La parola *regolare* significa che nei punti ove $F(x)$ non è continua essa vi ha una discontinuità di prima specie, ed è $2F(x) = F(x+0) + F(x-0)$.

[2] Il simbolo V. P. avanti l'integrale indica il suo valore principale.

l'integrale del secondo membro è convergente assolutamente per $a_1 < Rs < a_2$; se facciamo $s = x + iy$ si avrà

$$f(x+iy) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt}\,[e^{-xt} F(t)]\,dt,$$

e se $F(t)$ è nell'intorno di un punto t a variazione limitata, applicando la formula di inversione di FOURIER (18) abbiamo

$$e^{-xt} F(t) = V\cdot P\cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(x+iy)\,dy$$

e perciò

$$(20) \qquad F(t) = V\cdot P\cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x+iy)} f(x+iy)\,dy, \quad [a_1 < x < a_2].$$

Dunque *nelle ipotesi dichiarate per* $F(t)$, *per ogni punto* t *in un intorno del quale* $F(t)$ *è a variazione limitata, la* (19) *si lascia invertire con la* (20).

Se nella (20) facciamo il cangiamento di variabile $x + iy = s$, avremo anche

$$(20') \qquad F(t) = V\cdot P\cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s)\,ds, \quad (\text{per } a_1 < x < a_2),$$

e questa formula prova che il secondo membro è indipendente dall'ascissa x del cammino rettilineo di integrazione che ha i suoi estremi all'∞ nei punti $x - i\infty$, $x + i\infty$.

c) Dal teorema precedente ricaviamo come conseguenza la *formula di inversione di* LAPLACE *della trasformazione di* LAPLACE *infinita in un senso.*

Se infatti $F(t)$ è definita per $t \geqslant 0$ e poniamo $F(t) = 0$ per $t < 0$, abbiamo il teorema: *La funzione* $F(t)$ *sia definita per* $t \geqslant 0$, *regolare, limitata e misurabile nel senso di* LEBESGUE *in ogni intervallo finito* (t_1, t_2), $0 \leqslant t_1 < t_2$, *e sia finito il limite*

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_0^{\omega} |F(t)|\,dt;$$

inoltre la trasformata di LAPLACE

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt \tag{21}$$

converga assolutamente per $Rs > a$. *Allora se* $F(t)$ *è nell'intorno di un punto* $t > 0$ *a variazione limitata, vale la formula di inversione*

$$F(t) = V \cdot P \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s)\, ds, \quad (\text{per } x > a). \tag{22}$$

Se poi $F(t)$ è a variazione limitata in un intorno a destra di $t = 0$, per applicare la (22) nel punto $t = 0$ dovrà porsi nel primo membro $\lim_{t \to +0} F(t)/2$.

§ 7. - Applicazione della trasformazione di Laplace alle equazioni a coefficienti costanti o polinomiali, e ai sistemi di equazioni differenziali a coefficienti costanti.

1. Equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti costanti. Calcolo di un integrale con i dati di CAUCHY. - 2. Equazioni differenziali con coefficienti polinomiali. - 3. Sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Calcolo di un sistema di integrali con i dati di CAUCHY. - 4. La trasformazione di LAPLACE e il calcolo di HEAVISIDE.

1. - *a*) Questo paragrafo è destinato alla risoluzione del problema di CAUCHY per le equazioni e i sistemi di equazioni differenziali [1].

---

[1] Cfr. 1) G. DOETSCH: *a*) *Überblick über Gegenstand und Methode der Funktionalanalysis*, Jahr. der Deutsch. Math. Ver. 36 (1927), pp. 1-30), p. 24; *b*) *Die Anwendung von Funktionaltrasformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode* (*Operatorenkalkül*); idem 43 (1934), pp. 238-251; *c*) *Theorie und Anwendung der* LAPLACE-*Transformation* (Berlin, 1937), pp. 321-339. 2) T. *von* STACHÓ: *Operationalkül von* HEAVISIDE *und Laplacesche Trasformation*, Acta Szeged 3 (1927), pp. 107-120; 3) B. *van* DER POL: *A simple proof and an extension of* HEAVISIDE'S *operational calculus for invariable systems*, Phil. Mag. 7 (1929), pp. 1153-1162.
In luogo della trasformazione di LAPLACE per la risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali a coefficienti costanti potrebbe impiegarsi la trasformazione di FOURIER ricordata nel n. 7 del § 6. Cfr. G. A. CAMPBELL, R. M. FOSTER: *Fourier integrals for pratical applications*, (Bell. Teleph System, Tecn. pubblications, 1931); N. LEVINSON: *The Fourier transform solution of ordinary and partial differential equations*, Journ. of Math. and Phys. (Massachusetts Inst.), 14 (1935), pp. 195-227.

Come abbiamo notato nel § 5, n. 1, il procedimento consiste nel passare dalle equazioni proposte ad altre relative alle trasformate di LAPLACE delle funzioni incognite; la trasformazione semplifica il grado di difficoltà del problema, e determinate le funzioni trasformate, la formula di inversione dell'integrale di LAPLACE permetterà la determinazione esplicita delle funzioni incognite.

Avvertiamo che il metodo ha particolare valore pratico perchè il calcolatore per effettuare le trasformazioni può valersi di apposite tavole contenenti le trasformate di LAPLACE delle più note funzioni [1].

b) Data l'equazione

$$p(D)Y = F(t), \qquad (D = d/dt), \tag{1}$$

dove

$$p(D)Y = Y^{(n)} + a_{n-1}Y^{(n-1)} + a_{n-2}Y^{(n-2)} + \dots + a_1 Y' + a_0 Y,$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ costanti, $F(t)$ continua per $t \geqslant 0$ e della classe L [2], e assegnati $Y(0), Y'(0), \dots, Y^{(n-1)}(0)$ si voglia costruire il corrispondente integrale della (1).

Supponiamo che $Y^{(n)}(t)$ sia una funzione L, tali sono $Y^{(n-1)}, \dots, Y', Y$, e operando sui due membri della (1) colla trasformazione di LAPLACE, e posto

$$\mathfrak{L}\{Y\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} Y(t)dt = y(s), \qquad \mathfrak{L}\{F\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = f(s)$$

---

[1] Cfr. ad es. G. DOETSCH, op. cit. nel n. 1, *a*), pp. 401-403.

[2] Il metodo può applicarsi supponendo $F(t)$ per $t > 0$ continua e della classe L, e prescrivendo le condizioni iniziali $\lim_{t \to +0} Y(t) = Y(0), \dots, \lim_{t \to +0} Y^{(n-1)}(t) = Y_{n-1}(0)$.

abbiamo [§ 6, n. 3, *b*)]

$$\begin{aligned} & s^n y - [Y(0)s^{n-1} + Y'(0)s^{n-2} + \dots + Y^{(n-1)}(0)] \\ & \quad + a_{n-1}\{s^{n-1}y - [Y(0)s^{n-2} + Y'(0)s^{n-3} + \dots + Y^{(n-2)}(0)]\} \\ & \quad + \dots \\ & \quad + a_1\{sy - Y(0)\} \\ & \quad + a_0 y = f(s), \end{aligned}$$

da cui

$$(2) \qquad \begin{aligned} y(s) = {} & \frac{f(s)}{p(s)} + Y(0)\frac{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1}{p(s)} \\ & + Y'(0)\frac{s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \dots + a_2}{p(s)} \\ & + \dots + Y^{(n-2)}(0)\frac{s + a_{n-1}}{p(s)} + Y^{(n-1)}(0)\frac{1}{p(s)}, \end{aligned}$$

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 .$$

Abbiamo così ottenuta la funzione $y(s)$ e con l'inversione dell'equazione funzionale $\mathfrak{L}\{Y\} = y(s)$, otterremo la funzione incognita $Y(t)$.

Faremo ora questa inversione.

c) Cominciamo col costruire l'integrale particolare dell'equazione (1) che soddisfa le condizioni iniziali [1]

$$(3) \qquad Y(0) = Y'(0) = \dots = Y^{n-1}(0) = 0.$$

Siano $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ le radici dell'equazione caratteristica $p(\varrho) = 0$, e supposto che esse siano distinte due a due [$p'(\varrho_r) \neq 0$] si ha

$$q(s) = \frac{1}{p(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{s - \varrho_k} ;$$

la costante d_k rappresenta il residuo integrale di $q(s)$ nel punto ϱ_k, perciò $d_k = 1/p'(\varrho_k)$, e

$$q(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p'(\varrho_k)(s - \varrho_k)} ,$$

[1] Tale integrale esiste, ed è unico. [Cap. II, § 1, n. 1, *e*)].

quindi [§ 6, n. 2, (IV)]

$$q(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p'(\varrho_k)} \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\varrho_k t} dt,$$

ovvero

$$q(s) = \frac{1}{p(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-st} Q(t) dt = \mathfrak{L}\{Q(t)\},$$

dove

$$(4) \qquad Q(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p'(\varrho_k)} e^{\varrho_k t}.$$

Tenuto conto delle (2) e (3) e applicando il teorema di composizione, [§ 6, n. 5] si ha

$$\mathfrak{L}\{Y(t)\} = y(s) = f(s)\frac{1}{p(s)} = \mathfrak{L}\{F(t)\}\,\mathfrak{L}\{Q(t)\} = \mathfrak{L}\{F(t) * Q(t)\}$$

e perciò

$$Y(t) = F(t) * Q(t) = \sum_{k=1}^{n} F(t) * \frac{e^{\varrho_k t}}{p'(\varrho_k)}$$

e infine la formula cercata

$$(\mathrm{I}) \qquad Y(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\varrho_k t}}{p'(\varrho_k)} \int_0^t e^{-\varrho_k \tau} F(\tau) d\tau.$$

Proviamo direttamente che tale integrale soddisfa l'equazione (1) e le condizioni iniziali (3), e per questo mostriamo preliminarmente che

$$(5) \qquad Q(0) = Q'(0) = \dots = Q^{(n-2)}(0) = 0 ; \qquad Q^{(n-1)}(0) = 1.$$

Infatti $Q(t)$ è una trascendente intera di tipo esponenziale e si ha:

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} t^k,$$

e per il teorema di PINCHERLE [§ 6, n. 6, *b*)]

$$(6)\qquad q(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q^{(k)}(0)}{s^{k+1}};$$

ma $p(s)$ è un polinomio di grado n in s, col coefficiente di s^n uguale ad 1, perciò

$$(7)\qquad q(s)=\frac{1}{p(s)}=\frac{1}{s^n}+\frac{C_{n+1}}{s^{n+1}}+\frac{C_{n+2}}{s^{n+2}}+\dots$$

e identificando le (6) e (7) risultano le (5).

Le (5), tenuto conto dell'espressione (4) di $Q(t)$, si scrivono

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\varrho_k^{\,l}}{p'(\varrho_k)}=\begin{cases}0 & \text{per}\quad 0\leqslant l\leqslant n-2,\\ 1 & \text{per}\quad l=n-1,\end{cases}$$

e si ritrovano così le formule già date nel Cap. VII, § 3, n. 1, *d*), nel caso $l=0, 1,\dots, n-2$.

Ora dalla formula

$$Y(t)=F(t)*Q(t),$$

tenuto conto delle (5), si ha successivamente [§ 6, n. 5, *b*)]

$$Y'(t)=F(t)*Q'(t),\dots,\qquad Y^{(n-1)}(t)=F(t)*Q^{(n-1)}(t),$$
$$Y^{(n)}(t)=F(t)*Q^{(n)}(t)+F(t),$$

e perciò, $Y(t)$ soddisfa le prescritte condizioni ai limiti (3).

Si ha inoltre

$$\begin{aligned}Y^{(n)}&+a_{n-1}Y^{(n-1)}+\dots+a_0Y=\\ &=F(t)*[Q^{(n)}(t)+a_{n-1}Q^{(n-1)}(t)+\dots+a_0Q(t)]+F(t)=\\ &=F(t)*\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\varrho_k t}}{p'(\varrho_k)}[\varrho_k^n+a_{n-1}\varrho_k^{n-1}+\dots+a_0]+F(t)=F(t),\ \text{c. v. d}\end{aligned}$$

d) Vogliamo ora costruire l'integrale dell'equazione (1) che soddisfa le condizioni iniziali (3) nell'ipotesi che le radici distinte dell'equazione caratteristica siano $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r$ dei rispettivi ordini di molteplicità $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$. $[\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r=n]$.

Per un teorema noto dell'algebra può porsi

$$(8)\qquad q(s)=\frac{1}{p(s)}=\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{d_{k,1}}{s-\varrho_k}+\frac{d_{k,2}}{(s-\varrho_k)^2}+\dots+\frac{d_{k,\nu_k}}{(s-\varrho_k)^{\nu_k}}\right]$$

dove, per noti risultati della teoria dei residui, le costanti $d_{k,\mu}$ hanno l'espressione

$$d_{k,\mu}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(s-\varrho_k)^{\mu-1}}{p(s)}\,ds,\qquad (\mu=1,2,\dots,\nu_k),$$

essendo C un circuito semplice attorno al punto $s=\varrho_k$ che lascia all'esterno le altre radici dell'equazione caratteristica, e percorso nel verso positivo (¹).

Si ha ora (²)

$$(9_1)\qquad q(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}Q(t)\,dt=\mathfrak{L}\{Q(t)\},$$

dove

$$(9_2)\qquad Q(t)=\sum_{k=1}^{r}\left[d_{k,1}+d_{k,2}\frac{t}{1!}+\dots+d_{k,\nu_k}\frac{t^{\nu_k-1}}{(\nu_k-1)!}\right]e^{\varrho_k t},$$

e avremo allora

$$\mathfrak{L}\{Y(t)\}=y(s)=f(s)\frac{1}{p(s)}=f(s)q(s)=\mathfrak{L}\{F(t)\}\mathfrak{L}\{Q(t)\}=\mathfrak{L}\{F(t)*Q(t)\},$$

quindi

$$Y(t)=F(t)*Q(t),$$

ovvero

$$(\mathrm{I}')\qquad Y(t)=$$
$$=\sum_{k=1}^{r}e^{\varrho_k t}\int_0^t\left[d_{k,1}+d_{k,2}\frac{t-\tau}{1!}+\dots+d_{k,\nu_k}\frac{(t-\tau)^{\nu_k-1}}{(\nu_k-1)!}\right]e^{-\varrho_k\tau}F(\tau)\,d\tau.$$

Si potrebbe ora dimostrare, indipendentemente dal teorema di esistenza e di unicità della soluzione di CAUCHY, che la $Y(t)$ fornita dalla (I)′ soddisfa la (1) e le condizioni iniziali (3) (³).

(¹) Le costanti $d_{k,\mu}$ possono del resto determinarsi riducendo la (8) a forma intera e identificando i due membri.

(²) Si noti che dalla (III) del § 6, n. 2, per $Ra>-1$, $R(s-\varrho)>0$, si ha

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}e^{\varrho t}t^a\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-\varrho)t}t^a\,dt=\frac{\Gamma(a+1)}{(s-\varrho)^{a+1}}.$$

(³) Cfr. G. DOETSCH, op. cit., p. 327.

e) Per risolvere il problema di CAUCHY per l'equazione (1) basterà preliminarmente costruire l'integrale U_l dell'equazione omogenea $p(D)Y=0$ che soddisfa le condizioni iniziali $[l=0, 1, ..., n-1]$

$$(10) \qquad \begin{cases} U_l(0)=0, & U'_l(0)=0, ..., & U_l^{(l-1)}(0)=0, \\ U_l^{(l)}(0)=1, & U_l^{(l+1)}(0)=0, ..., & U_l^{(n-1)}(0)=0, \end{cases}$$

perchè allora l'integrale della (1) tale che esso e le sue derivate fino all'ordine $n-1$ assumano nel punto 0 i valori prescritti $Y(0)$, $Y'(0)$, ..., $Y^{(n-1)}(0)$ ha l'espressione

$$(11) \qquad \begin{aligned} Y(t)=\sum_{k=1}^{r} e^{\varrho_k t}\int_0^t \left[d_{k,1}+d_{k,2}\frac{t-\tau}{1!}+ .... +d_{k,\nu_k}\frac{(t-\tau)^{\nu_k-1}}{(\nu_k-1)!}\right] e^{-\varrho_k\tau}F(\tau)d\tau \\ +\sum_{l=0}^{n-1} Y^{(l)}(0)U_l(t). \end{aligned}$$

Per determinare $U_l(t)$ consideriamo la sua trasformata di LAPLACE $y_l(s)$; abbiamo

$$y_l(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}U_l(t)dt,$$

e dalla (2)

$$y_l(s)=\frac{s^{n-l-1}+a_{n-1}s^{n-l-2}+ .... +a_{l+1}}{p(s)}, \qquad (l=0, 1, 2, ..., n-1).$$

Avendosi dalle (8), (9_1)

$$1/p(s)=q(s)=\mathfrak{L}\{Q(t)\},$$

dalle (5) (1), per i risultati del § 6, n. 3, *b*), si ha

$$\mathfrak{L}\{Q^{(\nu)}\}=s^\nu\mathfrak{L}\{Q\}, \qquad [\nu=1, 2, ..., n-1],$$
$$\mathfrak{L}\{Q^{(n)}\}=s^n\mathfrak{L}\{Q\}-1,$$

(1) Il ragionamento fatto per stabilire le (5) resta valido anche se l'equazione $p(s)=0$ ha radici multiple.

e ne viene

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}U_l(t)dt=y_l(s)=$$
$$=\int_0^{+\infty} e^{-st}[Q^{(n-l-1)}(t)+a_{n-1}Q^{(n-l-2)}(t)+ ....a_{l+1}Q(t)]dt,$$

perciò

$$(12) \qquad U_l(t)=Q^{(n-l-1)}(t)+a_{n-1}Q^{(n-l-2)}(t)+ .... +a_{l+1}Q(t),$$
$$(l=0, 1, ..., n-1 \,;\; a_n=1),$$

e *le* (11) *e* (12), *dove* $Q(t)$ *ha l'espressione* (9_2), *risolvono il problema proposto.*

2. - Già nel n. 2 del § 5, considerando l'equazione differenziale di ordine n, con coefficienti polinomi di primo grado nella variabile indipendente [equazione di LAPLACE] abbiamo mostrato la possibilità di determinare i suoi integrali con una particolare trasformazione di LAPLACE, ora vogliamo brevemente mostrare la ragione del successo.

Si abbia l'equazione

$$(13) \qquad \begin{aligned} Y^{(n)}+a_{n-1}(t)Y^{(n-1)}+a_{n-2}(t)Y^{(n-2)}+ .... + \\ +a_1(t)Y'+a_0(t)Y=F(t) \end{aligned}$$

ove $a_0(t)$, $a_1(t)$, ..., $a_{n-1}(t)$ sono polinomi di grado m in t, ed $F(t)$ una funzione continua per $t \geqslant 0$, della classe L.

Posto

$$y(s)=\mathfrak{L}\{Y(t)\}$$

si ha [§ 6, n. 1, *g*); n. 3, *b*)]

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}t^kY^{(l)}(t)dt=(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}\int_0^{+\infty} e^{-st}Y^{(l)}(t)dt=$$
$$=(-1)^k\frac{d^k}{ds^k}\left[s^ly(s)-Y(0)s^{l-1}-Y'(0)s^{l-2}- .... -Y^{(l-1)}(0)\right],$$
$$(k=0, 1, ..., m),$$

talchè l'equazione proposta, applicando ai due membri la trasformazione di LAPLACE, si muta in un'equazione differenziale di ordine m nella funzione trasformata $y(s)$, e ne viene che *se* $m<n$ [in particolare se $m=1$] *il problema risulta semplificato.*

3. - *a*) Si consideri il sistema

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
&p_{1,1}(D)Y_1+p_{1,2}(D)Y_2+....+p_{1,n}(D)Y_n=F_1(t),\\
&p_{2,1}(D)Y_1+p_{2,2}(D)Y_2+....+p_{2,n}(D)Y_n=F_2(t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_{n,1}(D)Y_1+p_{n,2}(D)Y_2+....+p_{n,n}(D)Y_n=F_n(t),
\end{aligned}
$$

dove $F_1(t),F_2(t),...., F_n(t)$ sono funzioni assegnate di t, continue per $t\geqslant 0$, della classe L; Y_1, Y_2,...., Y_n sono le funzioni incognite; e $p_{i,k}(D)$ sono operatori differenziali lineari a coefficienti costanti, che per semplicità supporremo del secondo ordine

$$
(15)\qquad p_{i,k}(D)=a_{i,k}D^2+b_{ik}D+c_{i,k},
$$
$$
(i,\ k=1,\ 2,....,\ n;\ a_{i,k},\ b_{i,k},\ c_{i,k}\ \text{costanti})
$$

Il problema che ci proponiamo [problema di CAUCHY] e di *determinare le soluzioni* $Y_1(t)$, $Y_2(t)$,...., $Y_n(t)$, *supposto che siano assegnati i loro valori iniziali* $Y_k(0)$, $Y'_k(0)$, $(k=1, 2,...., n)$.

Operando con la trasformazione di LAPLACE sulle singole equazioni (14), e posto

$$
(16)\qquad \mathfrak{L}\{Y_k\}=y_k(s)\qquad \mathfrak{L}\{F_k\}=f_k,\qquad (k=1,\ 2,....,\ n),
$$

per le y_1, y_2,...., y_n si ottiene il sistema lineare [§ 6, n. 3, *b*)]

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
&p_{1,1}(s)y_1+p_{1,2}(s)y_2+....+p_{1,n}(s)y_n=\\
&\qquad=f_1(s)+\sum_{k=1}^{n}(a_{1,k}s+b_{1,k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{1,k}Y'_k(0),\\
&p_{2,1}(s)y_1+p_{2,2}(s)y_2+....+p_{2,n}(s)y_n=\\
&\qquad=f_2(s)+\sum_{k=1}^{n}(a_{2,k}s+b_{2,k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{2,k}Y'_k(0),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_{n,1}(s)y_1+p_{n,2}(s)y_2+....+p_{n,n}(s)y_n=\\
&\qquad=f_n(s)+\sum_{k=1}^{n}(a_{n,k}s+b_{n,k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}Y'_k(0).
\end{aligned}
$$

b) Per risolvere il problema procederemo come nel n. 1

Supponiamo che si voglia determinare una soluzione del sistema (14) che soddisfi le condizioni iniziali

$$
(18)\qquad Y_k(0)=Y'_k(0)=0,\qquad (k=1,\ 2,....,\ n);
$$

il sistema (17) diventa ora

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
&p_{11}(s)y_1+....+p_{1,n}(s)y_n=f_1(s),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p_{n,1}(s)y_1+....+p_{n,n}(s)y_n=f_n(s),
\end{aligned}
$$

e posto

$$
(20)\qquad \Delta(s)=\begin{vmatrix} p_{1,1}(s),...., & p_{1,n}(s)\\ \cdots & \cdots\\ p_{1,n}(s),...., & p_{n,n}(s)\end{vmatrix},
$$

e indicato con $\Delta_{i,k}(s)$ il complemento algebrico di $p_{i,k}(s)$ in $\Delta(s)$, dal sistema (19) si ha

$$
(21)\qquad \Delta(s)y_k(s)=\sum_{l=1}^{n}\Delta_{l,k}(s)f_l(s),\qquad (k=1,\ 2,....,\ n),
$$

e $\Delta(s)$, $\Delta_{l,k}(s)$ sono nelle nostre ipotesi rispettivamente di grado non superiore a $2n$ e $2(n-1)$ in s.

c) Esamineremo ora i casi estremi che $\Delta(s)$ abbia il grado $2n$, oppure che $\Delta(s)$ sia identicamente nullo.

Supponiamo dapprima che $\Delta(s)$ *abbia il grado* $2n$, ipotesi che conserviamo in *d*) e in *e*) [1].

Si ha dal sistema (21)

$$
y_k(s)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{l,k}(s)}{\Delta(s)}f_l(s).
$$

e per trovare le corrispondenti $Y_k(t)$ operiamo come nel n. precedente.

---

[1] Quando sia $\Delta(s)$ di grado inferiore a $2n$, e $\Delta(s)$ non è identicamente nullo, per la scelta di condizioni iniziali atte a definire una soluzione, converrà riferirsi ad un sistema diagonale equivalente al sistema dato [§ 3; nn. 2, 3].

Supposto che l'*equazione caratteristica* $\Delta(s)=0$ abbia le radici $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$, dei rispettivi ordini di molteplicità $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ $[\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=2n]$, essendo le $\Delta_{l,k}(s)$ di grado inferiore a $\Delta(s)$, si possono determinare in uno e un sol modo costanti $d_{i,j}^{(l,k)}$ tali che sussista l'identità

$$\frac{\Delta_{l,k}(s)}{\Delta(s)}=\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{d_{i,1}^{(l,k)}}{s-\varrho_i}+\ldots+\frac{d_{i,\nu_i}^{(l,k)}}{(s-\varrho_i)^{\nu_i}}\right],$$

e se indichiamo con $Q_{l,k}(t)$ la corrispondente funzione tale che

$$\mathfrak{L}\{Q_{l,k}(t)\}=\frac{\Delta_{l,k}(s)}{\Delta(s)}, \tag{22$_1$}$$

si avrà [cfr. (9_2)]

$$Q_{l,k}(t)=\sum_{i=1}^{r}\left[d_{i,1}^{(l,k)}+d_{i,2}^{(l,k)}\frac{t}{1!}+\ldots+d_{i,\nu_i}^{(l,k)}\frac{t^{\nu_i-1}}{(\nu_i-1)!}\right]e^{\varrho_i t}, \tag{22$_2$}$$

e avremo allora col solito ragionamento

$$Y_k(t)=\sum_{l=1}^{n} Q_{l,k}(t) * F_l(t), \qquad [Q_{l,k}(0)=0]. \tag{23}$$

Si verifica che *se le $F_l(t)$ sono funzioni di t definite per $t\geqslant 0$, continue, e della classe L, le* (23) *dànno effettivamente la soluzione del sistema* (14) *che soddisfa le condizioni iniziali* (18) (¹).

d) Vogliamo ora calcolare un sistema di integrali del sistema (14), supposti assegnati i valori

$$Y_k(0), \qquad Y_k'(0), \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

e supposto anche $F_1(t)\equiv 0$, $F_2(t)\equiv 0, \ldots, F_n(t)\equiv 0$, ossia il sistema omogeneo.

(¹) Cfr. G. Doetsch, op. cit. p. 331.

In tal caso il sistema (17) diventa

$$\begin{aligned}
&p_{1,1}(s)y_1+p_{1,2}(s)y_2+\ldots+p_{1,n}(s)y_n=\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{n}(a_{1,k}s+b_{1,k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{1,k}Y_k'(0),\\
&p_{2,1}(s)y_1+p_{2,2}(s)y_2+\ldots+p_{2,n}(s)y_n=\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{n}(a_{2,k}s+b_{2,k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{2,k}Y_k'(0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_{n,1}(s)y_1+p_{n,2}(s)y_2+\ldots+p_{n,n}(s)y_n=\\
&\qquad=\sum_{k=1}^{n}(a_{n,k}s+b_{n,k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}Y_k'(0).
\end{aligned} \tag{24}$$

Con le notazioni precedenti si ha

$$y_k(s)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{l,k}(s)}{\Delta(s)}\left[\sum_{\nu=1}^{n}(a_{l,\nu}s+b_{l,\nu})Y_\nu(0)+\sum_{\nu=1}^{n}a_{l,\nu}Y_\nu'(0)\right], \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

e tenuto conto della (22_1) e della relazione [§ 6, n. 3, *b*]

$$\mathfrak{L}\{Q'_{l,k}(t)\}=s\mathfrak{L}\{Q_{l,n}(t)\}-Q_{l,k}(0)=s\mathfrak{L}\{Q_{l,k}(t)\},$$

dalla (25) otteniamo

$$\begin{aligned}
Y_k(t)=&\sum_{\nu=1}^{n}Y_\nu(0)\sum_{l=1}^{n}[a_{l,\nu}Q'_{l,k}(t)+b_{l,\nu}Q_{l,k}(t)]+\\
&+\sum_{\nu=1}^{n}Y_\nu'(0)\sum_{l=1}^{n}a_{l,\nu}Q_{l,k}(t),\\
&(k=1, 2, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{26}$$

Si può verificare che supposto il sistema (14) omogeneo, le (26) verificano il sistema e le prescritte condizioni ai limiti.

e) Dalle cose dette in *c*) e *d*) segue che nell'ipotesi che $\Delta(s)$ abbia in s il grado $2n$, gli integrali del sistema (14) che verificano le prescritte condizioni iniziali hanno l'espressione

$$(27)\qquad Y_k(t)=\sum_{l=1}^{n} Q_{l,k}(t) * F_l(t)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu(0)\sum_{l=1}^{n}[a_{l,\nu}Q'_{l,k}(t)+b_{l,\nu}Q_{l,k}(t)]+\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu'(0)\sum_{l=1}^{n} a_{l,\nu}Q_{l,k}(t),$$

$$(k=1,\ 2,\dots,\ n).$$

f) Vogliamo infine esaminare il caso che il *determinante* $\Delta(s)$ *sia identicamente nullo* e ricercare se esistono soluzioni $Y_1(t)$, $Y_2(t),\dots,\ Y_n(t)$ del sistema (14) tali che in $t=0$ esse, e le loro derivate prime, assumano valori prescritti [1].

Sia r la caratteristica della matrice $\Delta(s)$, posseduta dal minore

$$\left\| \begin{array}{c} p_{1,1}(s),\dots,\ p_{1,r}(s) \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{r,1}(s),\dots,\ p_{r,r}(s) \end{array} \right\| ;$$

dall'algebra è ben noto che esistono dei moltiplicatori $\lambda_\nu^{(i)}(s)$, $(i=r+1,\dots,\ n;\ \nu=1,\ 2,\dots,\ r)$, tali che

$$p_{i,k}(s)=\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu^{(i)}(s)p_{\nu,k}(s),\qquad (i=r+1,\dots,\ n\,;\ k=1,\ 2,\dots,\ n),$$

e per la risolubilità del sistema (17) è necessario e basta che sussistano tra i secondi membri le corrispondenti relazioni

$$f_i(s)+\sum_{k=1}^{n}(a_{i,k}s+b_{i,k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}Y'_k(0)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{r}\lambda_\nu^{(i)}(s)\left[f_\nu(s)+\sum_{k=1}^{n}(a_{\nu,k}s+b_{\nu,k})Y_k(0)+\sum_{k=1}^{n}a_{\nu,k}Y'_k(0)\right],$$

$$(i=r+1,\dots,\ n).$$

Per risolvere il sistema (14) basterà allora limitarci alle prime r equazioni, scegliendo per $Y_{r+1}(t),\dots,\ Y_n(t)$ delle funzioni che per $t=0$ assumano insieme alle loro derivate prime i valori prescritti, le cui derivate seconde siano della classe L, e del resto arbitrarie.

---

[1] Cfr. § 3, n. 1, *b*), nota.

4. - *a*) Nei §§ 1, 3, 4 di questo Capitolo abbiamo mostrato alcune proprietà algebriche degli operatori differenziali lineari delle quali ci siamo giovati per la costruzione dell'integrale generale delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali, mentre, nei numeri 1, 2, 3 di questo paragrafo, con l'impiego della trasformazione di LAPLACE, abbiamo determinato le soluzioni delle equazioni e dei sistemi, corrispondenti al problema di CAUCHY. Quest'ultima determinazione, in alcuni problemi di elettrotecnica si consegue ordinariamente con l'uso del così detto metodo operazionale di HEAVISIDE [1] ideato appunto da HEAVISIDE allo scopo di eliminare l'uso dei differenziali e degli integrali nella risoluzione di talune equazioni differenziali connesse con la teoria dei circuiti elettrici, e di ridurre i problemi, mercè l'impiego del suo calcolo operazionale, a questioni di natura algebrica.

Daremo conto rapidamente del metodo operazionale di HEAVISIDE e ne metteremo in evidenza il legame con la trasformazione di LAPLACE.

b) Cominciamo con un esempio.

Si consideri l'equazione

$$(28)\qquad V=ri+L\frac{di}{dt}\qquad (E,\ r,\ L,\ \text{costanti positive})$$

relativa all'intensità i di una corrente in un circuito elettrico, nel quale V è il potenziale, r la resistenza, L l'induttanza (coefficiente di autoinduzione), e si cerchi la soluzione che soddisfa la condizione $i(0)=0$.

Se poniamo

$$\frac{d}{dt}=p \quad [2]$$

la (28) si scrive

$$(28')\qquad V=(r+Lp)i$$

Per risolvere questa equazione seguiamo il procedimento algebrico di HEAVISIDE che giustificheremo a posteriori.

---

[1] Cfr. anche per la bibliografia, E. J. BERG: *Heaviside's operational calculus*, (New-York, 1929).

[2] Scriviamo, come nel calcolo di HEAVISIDE il simbolo p in luogo di D.

Si ha dalla (28′)

$$(28'') \qquad i=\frac{V}{r+Lp},$$

e sviluppando il secondo membro in serie di potenze di $1/p$, si ha

$$i=\frac{V}{Lp}\frac{1}{1+\frac{r}{Lp}}=\frac{V}{Lp}\left(1-\frac{r}{Lp}+\frac{r^2}{L^2p^2}-....\right),$$

$$(29) \qquad i=V\left(\frac{1}{L}\frac{1}{p}-\frac{r}{L^2}\frac{1}{p^2}+\frac{r^2}{L^3}\frac{1}{p^3}-....\right).$$

Il simbolo $\frac{1}{p}$ rappresenti la funzione che ha per derivata 1 e si annulla nell'origine, e in generale $\frac{1}{p^n}$ rappresenti la funzione la cui derivata n^{esima} è 1, e che si annulla nell'origine insieme a tutte le sue derivate fino all'ordine $n-1$; poniamo cioè

$$(30) \qquad \frac{1}{p}1=\frac{t}{1!}, \qquad \frac{1}{p^2}1=\frac{t^2}{2!},...., \qquad \frac{1}{p^n}1=\frac{t^n}{n!},....;$$

la (29) diventa

$$i=V\left(\frac{1}{L}t-\frac{r}{L^2}\frac{t^2}{2!}+\frac{r^2}{L^3}\frac{t^3}{3!}-....\right),$$

$$(31) \qquad i=\frac{V}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right),$$

e l'espressione così ottenuta per i rappresenta appunto l'integrale dell'equazione (28) che si annulla per $t=0$.

Notiamo del resto che alla (31) si arriva applicando il procedimento del § 1, n. 5, *a*); sviluppando infatti il secondo membro della (28″) in *serie di potenze di p*, si ha per l'integrale generale della (28):

$$i=\frac{V}{r}\frac{1}{1+p\frac{L}{r}}+ce^{-\frac{r}{L}t}=\frac{V}{r}\left(1-p\frac{L}{r}+p^2\frac{L^2}{r^2}....\right)+ce^{-\frac{r}{L}t},$$

$$i=\frac{V}{r}+ce^{-\frac{r}{L}t},$$

e da questa, tenuto conto che $i(0)=0$, si ha appunto la (31).

c) Prima di giustificare il calcolo di HEAVISIDE, diamo

ancora un altro esempio dove lo *sviluppo in serie di potenze di* $1/p$ ci farà ritrovare la così detta formula di HEAVISIDE.

Generalizzando le (30) conveniamo che il simbolo $\frac{1}{(p-\varrho)^\nu}F(t)$ ($\varrho=$cost.) rappresenti la funzione $Y(t)$ che soddisfa l'equazione $(D-\varrho)^\nu Y=F(t)$, e che si annulla nell'origine insieme a tutte le sue derivate fino all'ordine $\nu-1$.

Si avrà [§ 1, n. 3, *b*)]

$$(32) \qquad \frac{1}{p^\nu}F(t)=\int_0^t\frac{(t-u)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}F(u)\,du,$$

e mostriamo, come partendo da questa formula, col procedimento di HEAVISIDE sia possibile calcolare $\frac{1}{(p-\varrho)^\nu}F(t)$.

Sviluppando $1/(p-\varrho)^\nu$ in *serie di potenze di* $1/p$ si ha

$$\frac{1}{(p-\varrho)^\nu}F(t)=\frac{1}{p^\nu}\left(1-\frac{\varrho}{p}\right)^{-\nu}F(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-\nu}{k}\frac{\varrho^k}{p^{\nu+k}}F(t),$$

$$(33) \qquad \frac{1}{(p-\varrho)^\nu}F(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu+k-1)!}{k!(\nu-1)!}\frac{\varrho^k}{p^{\nu+k}}F(t),$$

e per la (32)

$$\frac{1}{(p-\varrho)^\nu}F(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\frac{\varrho^k(t-u)^{\nu+k-1}}{k!(\nu-1)!}F(u)\,du=\int_0^t\frac{(t-u)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{\varrho(t-u)}F(u)\,du,$$

e perciò la formula di HEAVISIDE, da noi dimostrata nel § 1, n. 3, *c*),

$$(34) \qquad \frac{1}{(p-\varrho)^\nu}F(t)=e^{\varrho t}\int_0^t\frac{(t-u)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{-\varrho u}F(u)\,du,$$

od anche

$$(34') \qquad \frac{1}{(p-\varrho)^\nu}F(t)=e^{\varrho t}\frac{1}{p^\nu}[e^{-\varrho t}F(t)].$$

d) Nei procedimenti ora descritti, e in generale nei procedimenti di HEAVISIDE si hanno due fatti essenziali: si opera lo sviluppo in *serie di potenze* di $1/p$ [il così detto sviluppo di HEAVISIDE; sviluppi (29), (33)] dell'espressione che rappresenta la fuuzione incognita [senza preoccupazione alcuna sulla convervenza della serie ottenuta] e si sostituisce poi a $1/p^n$, $t^n/n!$.

Vogliamo dare ragione del successo del metodo e per questo riprendiamo in esame l'equazione (28). Se poniamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} i(t)\, dt = I(p),$$

e operiamo la trasformazione di LAPLACE dei due membri della (28) otteniamo [cfr. (2) del n. 1]

$$\frac{V}{p(r+Lp)} = I(p)$$

$$I(p) = V\left[\frac{1}{L}\frac{1}{p^2} - \frac{r}{L^2}\frac{1}{p^3} + \frac{r^2}{L^3}\frac{1}{p^4} - \dots\right].$$

Ora $\frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}, \dots, \frac{1}{p^{n+1}}, \dots$ sono appunto le trasformate di LAPLACE di $\frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \dots, \frac{t^n}{n!} \dots$; [ciò corrisponde alla sostituzione (30) di HEAVISIDE], si ha quindi

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} i(t)\, dt = V\left[\frac{1}{L}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{t}{1!}\, dt - \frac{r}{L^2}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{t^2}{2!}\, dt + \frac{r^2}{L^3}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{t^3}{3!}\, dt - \dots\right]$$

e poichè nel secondo membro è legittimo sostituire alla somma degli integrali l'integrale della somma degli integrandi, si arriva senz'altro alla (31).

Risulta così che nel passaggio dalla (28) alla (31) il procedimento di HEAVISIDE sopprime tutte queste giustificazioni; il procedimento ha perciò in generale valore euristico, e le soluzioni che per tale via si ottengono, richiedono in ogni caso le opportune verifiche.

Vedremo al § 9 che il così detto calcolo operatorio funzionale di GIORGI elimina queste riserve.

§ 8. - Metodo degli integrali complessi di Bromwich.

Il metodo di BROMWICH (¹) per la risoluzione del problema di CAUCHY per i sistemi omogenei a coefficienti costanti si fonda sulla formula di inversione di PINCHERLE dell'integrale di LAPLACE del § 6, n. 6; noi lo illustreremo con un esempio, ma il procedimento ha carattere generale.

Sia da integrare il sistema

$$(1)\quad (D^2-4D)X-(D-1)Y=0, \quad (D+6)X+(D^2-D)Y=0, \quad (D=d/dt),$$

da noi considerato nel § 3, n. 3, *d*).

Col procedimento allora indicato abbiamo ottenuto

$$(2)\quad X=2c_1e^{-t}+c_3e^{2t}+2c_4e^{3t}, \quad Y=-5c_1e^{-t}+c_2e^{t}-4c_3e^{2t}-3c_4e^{3t},$$

con c_1, c_2, c_3, c_4 costanti arbitrarie, e se vogliamo costruire un sistema di integrali che soddisfi le condizioni iniziali

$$(3)\quad X(0)=X_0, \quad X'(0)=X_1, \quad Y(0)=Y_0, \quad Y'(0)=Y_1$$

si troveranno per le costanti c_1, c_2, c_3, c_4 le espressioni

$$(4)\quad \begin{aligned} c_1 &= \tfrac{1}{24}[6X_0-X_1-Y_0+Y_1], & c_2 &= \tfrac{1}{4}[18X_0-7X_1+7Y_0-3Y_1], \\ c_3 &= \tfrac{1}{3}[3X_0-2X_1+Y_0-Y_1], & c_4 &= \tfrac{1}{8}[-2X_0+3X_1-Y_0+Y_1]. \end{aligned}$$

Possiamo arrivare direttamente alle espressioni di X e Y con i seguenti ragionamenti.

Le funzioni $X(t)$, $Y(t)$ sono trascendenti intere di tipo esponenziale, potremo perciò porre [§ 6, n. 6]

$$(5)\quad X(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{ts}\xi(s)\,ds, \quad Y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{ts}\eta(s)\,ds,$$

(¹) T. J. I'A. BROMWICH: *Normal coordinates in dynamical systems*, Proc. of the London Mat. Soc. (2), 15 (1915), [pp. 401-448] pp. 401-410. Cfr. anche H. JEFFREYS: *Operational methods in Math. Phys*, (Cambridge, 1931), pp. 22-23; E. C. TITCHMARSH: *Introdution to the theory of* FOURIER *integrals*, (Oxford, 1937), pp. 275-280.

dove per cammino C di integrazione può prendersi una circonferenza con entro nell'origine di raggio R sufficientemente grande, percorsa nel verso positivo, e $\xi(s)$, $\eta(s)$ sono funzioni olomorfe nel dominio $|s|>R$ infinitesime all'infinito [cfr. § 6, n. 6, form. (14)].

Sostituendo le (5) nel sistema (1) abbiamo

$$\int_C \{\xi(s)(s^2-4s)-\eta(s)(s-1)\}\, e^{ts}ds=0,$$

$$\int_C \{\xi(s)(s+6)+\eta(s)(s^2-s)\}\, e^{ts}ds=0,$$

e posto

$$(6)\quad \xi(s)(s^2-4s)-\eta(s)(s-1)=p(s),\quad \xi(s)(s+6)+\eta(s)(s^2-s)=q(s)$$

le funzioni $p(s)$, $q(s)$ sono olomorfe nel dominio $|s|>R$, salvo all'infinito dove possono presentare un polo del primo ordine.

Da un teorema noto [1] ne viene che

$$(7)\qquad p(s)=a+bs,\qquad q(s)=\alpha+\beta s,$$

con a, b, α, β costanti.

Si ha dalle (5)

$$X_0=\frac{1}{2\pi i}\int_C \xi(s)\,ds,\qquad X_1=\frac{1}{2\pi i}\int_C s\xi(s)\,ds,$$

e per lo sviluppo di Laurent, per $|s|$ sufficientemente grande,

$$(8_1)\qquad \xi(s)=\frac{X_0}{s}+\frac{X_1}{s^2}+O\left(\frac{1}{|s^3|}\right),$$

e analogamente

$$(8_2)\qquad \eta(s)=\frac{Y_0}{s}+\frac{Y_1}{s^2}+O\left(\frac{1}{|s^3|}\right).$$

[1] Il teorema che qui si invoca ha il seguente enunciato: Se $\Phi(s)$ è una funzione olomorfa per $|s|\geqslant R>0$, salvo un polo di ordine n all'∞ e se per qualunque t, reale o complesso, $\int_C \Phi(s)\, e^{ts}\, ds=0$, dove C è un circuito chiuso, racchiudente nel suo interno la circonferenza con centro nell'origine e raggio R, allora $\Phi(s)=a_0+a_1 s+\dots+a_n s^n$, cioè $\Phi(s)$ coincide con la sua parte principale. [Cfr. ad es. E. C. Titchmarsh, op. cit. p. 49].

Sostituendo le (8_1), (8_2) nella prima delle (6) e tenuto conto delle (7) abbiamo

$$(s^2-4s)\left[\frac{X_0}{s}+\frac{X_1}{s^2}+O\left(\frac{1}{|s^3|}\right)\right]-(s-1)\left[\frac{Y_0}{s}+\frac{Y_1}{s^2}+O\left(\frac{1}{|s^3|}\right)\right]=p(s),$$

e l'uguaglianza dei termini noti e di primo grado porta

$$(9_1)\qquad (s-4)\ X_0+X_1-Y_0=p(s),$$

e operando analogamente sulla seconda delle (6)

$$(9_2)\qquad X_0+(s-1)\ Y_0+Y_1=q(s).$$

Risolvendo il sistema (6) rispetto a $\xi(s)$, $\eta(s)$ troviamo

$$(10)\qquad \begin{cases} \xi(s)=\dfrac{sp+q}{(s+1)(s-2)(s-3)}, \\ \eta(s)=\dfrac{-(s+6)p+(s^2-4s)q}{(s^2-1)(s-2)(s-3)}, \end{cases}$$

dove p e q hanno le espressioni (9_1), (9_2).

Se sostituiamo ora le (10) nelle (5) e calcoliamo gli integrali con la teoria dei residui, si troveranno gli integrali del sistema (1) che soddisfano le condizioni iniziali (3).

Ad esempio, per $X(t)$, i termini corrispondenti ai poli $s=-1$, $s=2$, $s=3$ sono dati rispettivamente da

$$\frac{-p(-1)+q(-1)}{[(s+1)(s-2)(s-3)]'_{s=-1}}\, e^{-t}=\frac{6X_0-X_1-Y_0+Y_1}{12}\, e^{-t},$$

$$\frac{2p(2)+q(2)}{-3}\, e^{2t}=\frac{3X_0-2X_1+Y_0-Y_1}{3}\, e^{2t},$$

$$\frac{3p(3)+q(3)}{4}\, e^{3t}=\frac{-2X_0+3X_1-Y_0+Y_1}{4}\, e^{3t},$$

e per $X(t)$ si ottiene allora la prima delle (2), quando alle c_1, c_2, c_3, c_4 si sostituiscano le espressioni (4).

§ 9. - Il calcolo operatorio funzionale di Giorgi e le equazioni differenziali.

1. Il calcolo funzionale di GIORGI. - 2. Applicazioni al calcolo dei circuiti elettrici.

1. - *a*) Come abbiamo notato nel § 7, n. 4, *d*) il metodo di HEAVISIDE è da ritenersi un procedimento euristico per la determinazione delle soluzioni delle equazioni differenziali. Risale a G. GIORGI (1) un primo assetto rigoroso del metodo. Egli partendo da considerazioni indipendenti da quelle di HEAVISIDE, allo scopo di utilizzare i metodi simbolici nello studio dei circuiti elettrici percossi da corrente variabile, non periodica, elaborò fin dal 1904 un suo *calcolo funzionale* il quale non soltanto rappresenta un metodo atto a risolvere certe equazioni, ma quando ci si riferisca a problemi fisici permette molte volte di dedurre i risultati dai dati degli stessi problemi, anche in casi in cui le equazioni corrispondenti siano sconosciute o siano difficili a ottenersi.

Del metodo GIORGI vogliamo dare alcune notizie in questo paragrafo.

b) Sia $f(\omega)$ una funzione analitica avente per campo di esistenza tutto il piano complesso, con un numero finito di singolarità in ogni campo limitato, olomorfa nel semipiano $R\omega \geqslant 0$, e proponiamoci con G. GIORGI di associare alla funzione $f(\omega)$ un operatore $f(\Delta)$ che abbia le seguenti proprietà essenziali:

(1) G. GIORGI: *a*) *Il metedo simbolico nello studio delle correnti variabili,* Atti Ass. Elettr. It. VII (1904), pp. 65-143; *b*) *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate da problemi di elettrodinamica;* idem, IX, (1905), pp. 651-699; *c*) *The functional dependence of physical variables,* Proc. of the Math. Congress of Toronto II (1924), pp. 355-361; *d*) *Lezioni di Fisica Matematica tenute nella R. Università di Cagliari,* I (Roma 1927), Capp. XI, XII, XIV.

Cfr. anche N. WIENER: *The operational calculus,* Math. Ann. 95 (1926), pp. 557-584; D. GRAFFI: *a*) *Considerazioni sul metodo degli operatori funzionali,* Mem. Pont. Acad. Scient. Novi Lyncaei (3), 2 (1936), pp. 211-262; *b*) *Sull'applicazione del calcolo operatorio fuzionale ai circuiti elettrici,* Comment. Pont. Acad. Sci. 3 (1939), pp. 369-402.

1.) Sia distributivo, si abbia cioè con c_1 e c_2 costanti

$$f(\Delta)\ [c_1\ V_1(t)+c_2\ V_2(t)]=c_1 f(\Delta)\ V_1(t)+c_2 f(\Delta)\ V_2(t);$$

2.) Sia con h costante

$$e^{h\Delta}\ V(t)=V(t+h);$$

3.) Sia

$$\Delta\ V(t)=dV/dt,$$

cioè se $f(\Delta)\equiv\Delta$, l'operatore Δ si identifichi con l'operazione di derivazione;

4.) Sia lecito operare sui simboli $f(\Delta)$ con le ordinarie regole del calcolo algebrico, e sia

$$f(\Delta)\,[g(\Delta)\ V(t)]=[f(\Delta)g(\Delta)]\ V(t);$$

5.) Ove sia da risolvere un problema relativo a correnti variabili di forma qualunque, in un circuito comunque composto di resistenze, induttanze, capacità costanti, sia sufficiente risolvere il problema come per le correnti continue trattando ogni induttanza L come se fosse una resistenza $L\Delta$ e ogni capacità k come una conduttanza $k\Delta$ [cfr. n. 2, *b*), *c*)].

Partendo dalla trasformazione di LAPLACE, G. GIORGI per la così detta *valutazione fondamentale dell'operatore* $f(\Delta)V(t)$ arriva alla seguente definizione.

Sia $f(\omega)$ una funzione analitica in tutto il piano complesso, con un numero finito di singolarità in ogni campo limitato, olomorfa nel semipiano $R\omega\geqslant 0$, $V(t)$ una qualsiasi funzione, reale o complessa, della variabile reale t, definita in $(-\infty, +\infty)$, a variazione limitata, regolare (1), assolutamente integrabile in $(-\infty, +\infty)$, [$V(t)$ funzione *fisica* secondo GIORGI]. Il simbolo $f(\Delta)$ indica l'operatore tale che la valutazione fondamentale dell'operazione $f(\Delta)V(t)$ è espressa dalla formula

$$f(\Delta)\,V(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\substack{a\to 0\\ T\to+\infty}}\int_C Q(a,\omega)\,f(\omega)\,e^{\omega t}\int_{-T}^{T}V(\tau)\,e^{-\omega\tau}\,d\tau,$$

(1) Anzichè ammettere che $V(t)$ sia a variazione limitata in $(-\infty, +\infty)$ si potrà supporre che l'intervallo $(-\infty, +\infty)$ si possa scomporre nella somma di un'infinità numerabile di intervalli non ricoprentisi, e nell'*interno* di ciascuno di essi $V(t)$ risulti a variazione limitata e regolare.

dove C è il cammino rettilineo congiungente i punti $-i\infty$, $i\infty$, e il fattore $Q(a, \omega)$ è una trascendente intera rispetto alle variabili complesse a ed ω, $Q(0, \omega)=1$, atta ad assicurare la convergenza del secondo membro per ogni valore della variabile reale t.

Variando il cammino C, $f(\Delta)\, V(t)$ può variare di un'espressione che G. GIORGI chiama *termine complementare*, il quale corrisponde manifestamente a tutte le possibili valutazioni di $f(\Delta)\,(0)$, di guisa che in generale si ha:

$$f(\Delta)\, V(t)=\frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{a\to 0\\ T\to+\infty}} \int_C Q(a, \omega)\, f(\omega) e^{\omega t} \int_{-T}^{T} V(\tau)\, e^{-\omega\tau}\, d\tau + f(\Delta)\,(0).$$

Si trova che adottando queste definizioni l'operatore $f(\Delta)$ ha le proprietà essenziali prima dichiarate. Si trova pure che:

$$(1) \qquad f(\Delta)\, e^{\varrho t}=f(\varrho)\, e^{\varrho t};$$

$$(2) \qquad \Delta^{\nu}\, V(t)=d^{\nu}\, V(t)/dt^{\nu}, \qquad (\nu=1, 2,....);$$

$$(3) \quad \Delta^{-\nu} V(t)=\frac{1}{(\nu-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{\nu-1}\, V(u)\, du+c_0+c_1 t+....+c_{\nu-1}t^{\nu-1},$$

$$(\nu=1, 2,....),$$

con $c_0, c_1,...., c_{\nu-1}$ costanti arbitrarie [§1, n. 3, form. (8_1)],

$$(4) \qquad f(\Delta-\varrho)\, V(t)=e^{\varrho t} f(\Delta)\; [e^{-\varrho t}\, V(t)];$$

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\,[f(x, \Delta)\, V(t)]=\left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, \Delta)\right] V(t).$$

Si ha in particolare dalle (4) e (3), con $\varrho=$cost., [§ 1, n. 3, form. (8_2)]

$$(6) \qquad \frac{1}{\Delta-\varrho}\, V(t)=e^{\varrho t}\, \frac{1}{\Delta}\, e^{-\varrho t}\, V(t)=e^{\varrho t}\int_{t_0}^{t} e^{-\varrho\tau}\, V(\tau)\, d\tau+c\, e^{\varrho t},$$

$$(c=\text{cost.}).$$

Omettiamo per ragioni di brevità le dimostrazioni, e ci limitiamo a dare nel seguente n. 2 qualche applicazione delle proprietà ora ricordate.

2. - *a*) Si abbia un circuito AB di resistenza r e con induttanza L agenti come se fossero in serie tra loro. Se $V(t)$, $i(t)$ sono rispettivamente il potenziale e l'intensità della corrente espresse in funzione del tempo, si ha

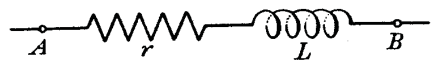

Fig. 26.

$$V=ir+L\,\frac{di}{dt},$$

$$V=(r+L\Delta)\, i,$$

$$i=\frac{1}{r+L\Delta}\, V=\frac{1}{L}\,\frac{1}{\Delta+\frac{r}{L}}\, V,$$

e dalla (6), $[\varrho=-r/L]$,

$$i(t)=\frac{1}{L}\, e^{-\frac{r}{L}t}\int_{t_0}^{t} e^{\frac{r}{L}\tau}\, V(\tau)d\tau+i_0\, e^{-\frac{r}{L}(t-t_0)}$$

dove i_0 rappresenta l'intensità della corrente al tempo $t=t_0$.

b) Si abbia un circuito AB di resistenza r, induttanza L e di capacità k agenti come se fossero in serie tra loro.

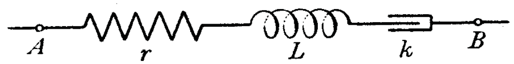

Fig. 27.

Se $V(t)$ ed $i(t)$ indicano il potenziale e l'intensità della corrente al tempo t si ha [cfr. n. 1, proprietà 5)]

$$V(t)=ir+L\,\frac{di}{dt}+\frac{1}{k}\int_{t_0}^{t} i(t)\, dt,$$

$$V=\left(r+L\Delta+\frac{1}{k\Delta}\right) i,$$

$$i=\frac{k\Delta}{kL\Delta^2+kr\Delta+1}\, V(t),$$

e se $-\varrho_1$, $-\varrho_2$ sono le radici dell'equazione $kl\varrho^2+kr\varrho+1=0$, supposto $\varrho_1 \neq \varrho_2$, si ha

$$\frac{k\varrho}{kL\varrho^2+k\varrho+1}=\frac{a_1}{\Delta+\varrho_1}+\frac{a_2}{\Delta+\varrho_2}, \quad [a_1,\ a_2 \text{ costanti}],$$

e per la (6) otteniamo

$$i(t)=a_1 e^{-\varrho_1 t}\int_{t_0}^{t} e^{\varrho_1 \tau}\, V(\tau)\, d\tau + a_2 e^{-\varrho_2 t}\int_{t_0}^{t} e^{\varrho_2 \tau}\, V(\tau)\, d\tau + c_1 e^{-\varrho_1 t}+c_2 e^{-\varrho_2 t},$$

con c_1 e c_2 costanti da determinarsi in funzione delle condizioni iniziali del problema.

c) Vogliamo studiare la propagazione delle perturbazioni di tipo non periodico nei sistemi a una dimensione.

La semiretta $0 \leq x < +\infty$ rappresenti un conduttore infinito in un senso, e sia r la resistenza dell'unità di lunghezza. Una corrente sia inviata dall'origine lungo il conduttore, il conduttore di ritorno sia la terra che supponiamo a potenziale zero, e fra il conduttore e la terra sia distribuita una derivazione uniforme con conduttanza g per unità di lunghezza.

Supponiamo ancora che l'unica sorgente sia situata nell'origine.

Siano V_0 ed i_0 il potenziale e l'intensità della corrente all'origine e $V(x)$ ed $i(x)$ il potenziale e l'intensità nel punto di ascissa x del conduttore; si avrà

$$(7) \qquad V(0)=V_0, \qquad V(+\infty)=0.$$

Lungo un elemento dx di linea vi è una caduta di potenziale $irdx$, mentre lungo lo stesso elemento la corrente sottratta al conduttore di linea e derivata alla terra è $Vgdx$; avremo allora

$$-dV=ir\,dx, \qquad -di=Vg\,dx,$$

$$(8) \qquad dV/dx=-ir, \qquad di/dx=-Vg,$$

dalle quali

$$(9_1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2}-grV=0,$$

$$(9_2) \qquad \frac{d^2i}{dx^2}-gr\,i=0.$$

Integrando la prima di queste equazioni si ha

$$V(x)=c_1 e^{x\sqrt{gr}}+c_2 e^{-x\sqrt{gr}}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie, e per le (7)

$$(10) \qquad V(x)=V_0 e^{-x\sqrt{gr}},$$

e quindi dalla prima delle (8)

$$i(x)=-\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}=\sqrt{\frac{g}{r}}\,V_0 e^{-x\sqrt{gr}}=i_0 e^{-x\sqrt{gr}},$$

si ha perciò in ogni punto della linea

$$(11) \qquad i(x)=\sqrt{\frac{g}{r}}\,V(x), \quad (=i_0 e^{-x\sqrt{gr}}),$$

e in particolare

$$(12) \qquad i_0=\sqrt{\frac{g}{r}}\,V_0,$$

cioè la linea considerata equivale ad un circuito con la conduttanza $\sqrt{g/r}$ [resistenza $\sqrt{r/g}$].

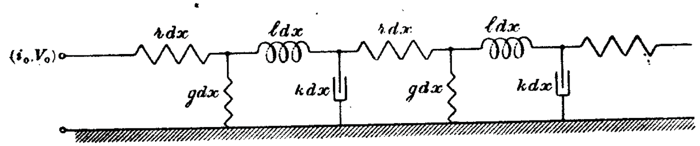

Fig. 28.

Se la linea è invece percorsa da correnti variabili, e si indica con l l'induttanza per unità di lunghezza, e se la derivazione che esiste tra il conduttore e la terra è costituita da una conduttanza g e da una capacità k che agiscono in parallelo tra loro, [v. fig. 28] volendo l'equazione cui soddisfano V ed i non vi è che da sostituire nella (9_1) alla resistenza ordinaria r la resistenza funzionale $r+l\Delta$, e alla conduttanza ordinaria g la conduttanza funzionale $g+k\Delta$ [$\Delta=d/dt$; cfr. n. 1, 5)] si avrà dunque l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=(g+k\Delta)(r+l\Delta)V$$

ossia

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=kl\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+(gl+kr)\frac{\partial V}{\partial t}+grV,$$

ossia la così detta *equazione di propagazione di perturbazione in una direzione.*

Operando con lo stesso principio sulle (10), (11), (12) si avranno per espressioni delle $V(x, t)$ $i(x, t)$, $i_0(t)$

$$(14) \qquad \begin{cases} V(x, t) = e^{-x\sqrt{(g+k\Delta)(r+l\Delta)}}\, V_0(t), \\ i(x, t) = e^{-x\sqrt{(g+k\Delta)(r+l\Delta)}}\, i_0(t), \\ i_0(t) = \sqrt{(g+k\Delta)/(r+l\Delta)}\, V_0(t). \end{cases}$$

Queste espressioni risolutive avremmo potuto scriverle senza l'equazione (13), e in esse, secondo il procedimento GIORGI, i due operatori $e^{-x\sqrt{(g+k\Delta)(r+l\Delta)}}$, $\sqrt{(g+k\Delta)/(r+l\Delta)}$ possono trasformarsi in guisa da rendere le espressioni stesse effettivamente utilizzabili anche dal punto di vista dei calcoli numerici [1].

---

[1] Cfr. G. GIORGI: *Lezioni di Fisica-Matematica,* Op. cit. al n. 1, Cap. XIV, p. 274. Per l'applicazione degli operatori funzionali all'integrazione delle equazioni a derivate parziali cfr. L. FANTAPPIÈ: *a) La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione delle equazioni a derivate parziali,* Mem. della R. Acc. d'Italia, I (1930), mem. n. 2, pp. 1-35; *b) Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti in due variabili, mediante il calcolo degli operatori lineari,* Rend. Circ. Mat. Palermo, 57 (1933), pp. 137-195; *c) Integrazione in termini finiti di ogni sistema od equazione a derivate parziali, lineare e a coefficienti costanti, d'ordine qualunque,* Mem. della R. Acc. d'Italia, 8 (1937), pp. 611-653.

Cfr. inoltre per l'applicazione delle trasformazioni funzionali, la citata opera di G. DOETSCH: *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation,* (Berlin, 1937), Cap. 19 e segg.

CAPITOLO XI.

Integrazione numerica, grafica, e meccanica delle equazioni e dei sistemi differenziali ordinari.

§ 1. - Integrazione numerica dei sistemi col metodo delle approssimazioni successive.

1. Generalità. - 2. Maggiorazione dell'errore d'approssimazione col metodo delle approssimazioni successive.

1. - Nella pratica si presenta il problema: data un'equazione, o un sistema di equazioni differenziali, calcolare numericamente, con un errore non superiore ad un certo limite, una soluzione con i dati di CAUCHY. L'esistenza della soluzione, assicurata dai teoremi generali, o semplicemente da considerazioni empiriche, ha quasi valore secondario rispetto alla necessità di calcolarla in un certo numero di punti, o come si dice *tabularla*, o di determinare un'espressione approssimata che in *tutto* l'intervallo di esistenza differisca dalla soluzione esatta, meno di un numero prefissato.

Se ci troviamo nel caso analitico, l'integrazione per serie di EULERO [Cap. III, § 1, n. 1] dà la possibilità di approssimare la soluzione in tutto il campo di esistenza allorchè nelle serie ottenute pochi termini siano atti a dare l'approssimazione voluta, e ove si tratti di sistemi lineari, il calcolo delle matrici può conferire notevole eleganza ai necessari calcoli numerici [Cap. III, § 2, n. 3].

Sempre nel caso di equazioni o sistemi lineari con la parte omogenea a coefficienti costanti, nei §§ 7, 8 e 9 del Cap. X, abbiamo pure osservata l'importanza delle trasformazioni di LAPLACE e di BROMWICH e del calcolo operatorio funzionale di GIORGI per la determinazione numerica delle soluzioni; ma senza supporre il caso analitico, nè la linearità, ponendoci come ora faremo nel caso più generale, è da notare che ai metodi esistenziali del Cap. I si col-

legano procedimenti di calcolo numerico delle soluzioni, valevoli per tutto il loro campo di esistenza. Osservazioni esplicite in proposito abbiamo fatto nel Cap. I, § 3, n. 3 a proposito del metodo delle approssimazioni successive, e nello stesso Cap. I, nei n.i 1, a), 3 del § 6 per il metodo di CAUCHY-LIPSCHITZ. In questo paragrafo riprendiamo ora in esame il primo metodo, e nel § 4 il secondo, mentre nei §§ 2 e 3 esporremo i procedimenti più noti per la tabulazione delle soluzioni.

La questione della valutazione delle soluzioni per grandi valori delle variabili o dei parametri è stata considerata nel Cap. VII, e di essa non ci occuperemo.

2. - Il procedimento delle approssimazioni successive di PICARD-PEANO si presta ottimamente, dal punto di vista teorico alla determinazione approssimata delle soluzioni delle equazioni differenziali in tutto il loro campo di esistenza; il procedimento è invero rapidamente convergente, e la formula (14) del § 3 del Cap. I maggiora l'errore per ogni successiva approssimazione.

Abbiamo visto infatti che se nel rettangolo R di centro $(\alpha;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ definito dalle limitazioni

$$-a \leqslant x-\alpha \leqslant a, \qquad -b \leqslant y_i-\beta_i \leqslant b, \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

le $f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sono continue

$$|f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)| \leqslant M,$$

e lipschitziane del primo ordine rispetto ad $y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$|f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)-f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)| \leqslant L \sum_{k=1}^{m} |\bar{y}_k-y_k|, \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

il sistema

$$dy_i/dx=f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m), \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

ammette uno e un solo sistema di integrali $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ definiti in $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$, dove δ è il più piccolo dei numeri a, b/M, soddisfacente le condizioni iniziali [Cap. I, § 3, n. 4, c)]

$$y_i(\alpha)=\beta_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Se poniamo poi

$$y_i^{(1)}=\beta_i+\int_\alpha^x f_i(x;\ u_1(x),\ u_2(x),\dots,\ u_m(x))dx, \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ m),$$

dove le $u_1(x)$, $u_2(x)$,...., $u_m(x)$ formano un sistema di funzioni continue in $(\alpha-a,\ \alpha+a)$, soddisfacenti unicamente le limitazioni

$$|u_i(x)-\beta_i|\leqslant b, \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ m),$$

e la successione $\{y_i^{(r)}(x)\}$ è definita dal procedimento iterativo

$$y_i^{(r+1)}(x)=\beta_i+\int_\alpha^x f_i(x;\ y_1^{(r)},\ y_2^{(r)},\dots,\ y_m^{(r)})\,dx,$$

$$(i=1,\ 2,\dots,\ m;\ r=1,\ 2,\dots),$$

la differenza tra $y_i(x)$ e la r^{esima} approssimazione $y_i^{(r)}(x)$ è maggiorata da

$$|y_i(x)-y_i^{(r)}(x)|\leqslant 2b\,\frac{[mL\,|x-\alpha|]^r}{r!}, \qquad (r=1,\ 2,\dots).$$

Ma è facile persuadersi con un esempio che l'applicazione effettiva del metodo a certi problemi concreti conduce talvolta a notevoli difficoltà per il calcolo delle successive iterate. Così se dell'equazione

$$y'=(y-x)/(y+x)$$

si vuol costruire un integrale che soddisfi la condizione iniziale $y(0)=1$ [1] abbiamo

$$y^{(1)}=1+\int_0^x\frac{1-x}{1+x}\,dx=1+\int_0^x\left(\frac{2}{1+x}-1\right)dx=1-x+2\log(1+x),$$

$$y^{(2)}=1+\int_0^x\frac{1-2x+2\log(1+x)}{1+2\log(1+x)}\,dx=1+\int_0^x\left(1-\frac{2x}{1+2\log(1+x)}\right)dx$$

e la quadratura indicata nel secondo membro non può ottenersi con le ordinarie funzioni dell'Analisi.

Esporremo nei §§ 2 e 3 metodi di calcolo che non richiedono quadrature, e avvertiamo subito il lettore che tali metodi sono da applicarsi anche quando nota l'espressione della soluzione in forma finita siano necessari procedimenti laboriosi per il passaggio ai valori numerici delle soluzioni stesse.

[1] Per il calcolo numerico di $y(1)$ cfr. § 2, n. 3 c).

§ 2. - Procedimenti di integrazione numerica di Eulero e di Runge e Kutta.

1. - *a*) Il metodo di Eulero è quello descritto nel § 6 del Cap. I a proposito del teorema di esistenza col metodo di Cauchy-Lipschitz e si fonda essenzialmente sul seguente principio: se per il punto $(x,\ y)$ passa una curva integrale e una soltanto dell'equazione

$$(1) \qquad dy/dx=f(x,\ y),$$

dato ad x un incremento h, l'incremento corrispondente di y, che indicheremo con k, può essere *approssimativamente* valutato con la formula

$$k=f(x,\ y)h.$$

Se allora $(x_0,\ y_0)$ è un punto appartenente alla curva integrale Γ della (1) di equazione

$$y=y(x), \qquad [y(x_0)=y_0],$$

l'incremento k_1 corrispondente all'incremento h_1 della variabile indipendente x è dato approssimativamente da

$$k_1=f(x_0,\ y_0)h_1,$$

un secondo incremento k_2, relativo al punto $(x_0+h_1,\ y_0+k_1)$ e all'incremento h_2 della variabile indipendente, è espresso da

$$k_2=f(x_0+h_1,\ y_0+k_1)h_2,$$

e posto in generale

$$(2_1) \qquad y_m=y_{m-1}+k_m, \qquad (m=1,\ 2,\dots),$$

$$(2_2) \qquad k_m=f(x_0+h_1+\dots+h_{m-1},\ y_0+k_1+\dots+k_{m-1})h_m,$$

abbiamo

$$y_1 = y_0 + k_1,$$
$$y_2 = y_1 + k_2 = y_0 + k_1 + k_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_m = y_0 + k_1 + k_2 + \dots + k_m, \quad \text{[Cfr. Cap. I, § 6, n. 2]}, \tag{3}$$

ed y_m *esprime approssimativamente il valore* $y(x)$ *nel punto di ascissa* $x_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_m$.

Dal punto di vista numerico il procedimento è assai lento, si applica a piccoli intervalli, e a funzioni $f(x, y)$ che variano debolmente col variare di x e y.

Proveremo nel n. 2 *a*) che *nell'ipotesi che* $f(x, y)$ *abbia derivate parziali continue del secondo ordine, l'errore che si commette nel prendere per* $y_1 = y(x_0 + h_1)$ *il valore* $y_0 + f(x_0, y_0)h_1$ *è dell'ordine di* h_1^2.

b) Nelle applicazioni il procedimento di EULERO, viene così modificato.

Si voglia calcolare il valore di $y(x)$ nel punto $x_1 = x_0 + h_1$,

$$y_1 = y(x_0 + h_1);$$

il metodo indicato in *a*) fornisce come *prima approssimazione di* y_1

$$y_1^{(1)} = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 h_1, \tag{4}$$

essendo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = f(x_0, y_0). \tag{5}$$

Un valore approssimato di dy/dx in (x_1, y_1), che indicheremo con $(dy/dx)_1^{(1)}$ è

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(1)} = f(x_0 + h_1, y_1^{(1)}), \tag{6}$$

dy/dx assume allora agli estremi dell'intervallo $(x_0, x_0 + h_1)$ i due valori $(dy/dx)_0$, $(dy/dx)_1^{(1)}$ e *per seconda approssimazione di* y_1 si potrà prendere

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(1)}\right] h_1. \tag{7}$$

Posto poi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(2)} = f(x_0 + h_1, y_1^{(2)}), \tag{8}$$

si potrà prendere come *terza approssimazione di* y_1

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(2)}\right] h_1 \tag{9}$$

e noi proveremo nel n. 2, *b*) che *nella ipotesi che* $f(x, y)$ *abbia derivate parziali continue del terzo ordine, l'errore che si commette nel prendere per* $y_1 = y(x_0 + h_1)$ *il valore* $y_1^{(3)}$ *è dell'ordine di* h_1^3.

2. - *a*) Vogliamo valutare l'errore relativo alla formula di EULERO e per questo faremo l'ipotesi supplementare che la $f(x, y)$ ammetta derivate parziali del secondo ordine continue. Poniamo

$$\begin{aligned} &f = f(x_0, y_0), \\ &f_1 = f_x(x_0, y_0), \quad f_2 = f_y(x_0, y_0), \\ &f_{1,1} = f_{x^2}(x_0, y_0), \quad f_{1,2} = f_{x,y}(x_0, y_0), \quad f_{2,2} = f_{y^2}(x_0, y_0); \end{aligned} \tag{10}$$

si ha

$$\begin{aligned} &y'(x_0) = f, \\ &y''(x_0) = f_1 + f_2 f, \\ &y^{(3)}(x_0) = f_{1,1} + 2f_{1,2}f + f_{2,2}f^2 + f_2(f_1 + f_2 f), \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned} k_1 = y(x_0 + h_1) - y(x_0) = y'(x_0)h_1 + \\ + \frac{1}{2!}y''(x_0)h_1^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(x_0)h_1^3 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 = fh_1 + \frac{1}{2}(f_1 + f_2 f)h_1^2 + \\ + \frac{1}{6}[f_{1,1} + 2f_{1,2}f + f_{2,2}f^2 + f_2(f_1 + f_2 f)]h_1^3 + \dots \end{aligned} \tag{11}$$

la quale ci avverte intanto che *nel metodo di Eulero* descritto nel n. 1, *a*), *quando per* k_1 *si prenda il valore approssimato* fh_1, *si commette un errore dell'ordine di* h_1^2, *e la parte principale dell'errore vale*

$$\frac{1}{2}(f_1 + f_2 f)h_1^2.$$

b) Per valutare l'errore relativo alla formula (9) si osservi che si ha

$$y_1^{(1)}=y_0+fh_1,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(1)}=f(x_0+h_1,\, y_0+fh_1)=f+(f_1+f_2f)\,h_1+\dots,$$

$$y_1^{(2)}=y_0+fh_1+\frac{1}{2}(f_1+f_2f)\,h_1^2+\dots,$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)_1^{(2)}&=f\left[x_0+h_1,\, y_0+fh_1+\frac{1}{2}(f_1+f_2f)\,h_1^2+\dots\right]\\ &=f+(f_1+f_2f)\,h_1+\\ &+\frac{1}{2}f_2(f_1+f_2f)\,h_1^2+\frac{1}{2}[f_{1,1}+2f_{1,2}f+f_{2,2}f^2]\,h_1^2+\dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1^{(3)}-y_0&=fh_1+\frac{1}{2}(f_1+f_2f)h_1^2+\\ &+\frac{1}{4}[f_2(f_1+f_2f)+(f_{1,1}+2f_{1,2}f+f_{2,2}f^2)]\,h_1^3+\dots,\end{aligned}$$

e confrontando con la (11) abbiamo che *l'errore che si commette nel prendere per* $y_1=y(x_0+h_1)$ *il valore* $y_1^{(3)}$ *è dell'ordine* h_1^3, *e la parte principale dell'errore vale*

$$\frac{1}{12}[f_2(f_1+f_2f)+(f_{1,1}+2f_{1,2}f+f_{2,2}f^2)]\,h_1^3.$$

3. - In questo numero ci occuperemo della risoluzione delle equazioni differenziali con il così detto metodo di RUNGE e KUTTA e nel n. 5 dello stesso metodo per i sistemi. Il metodo deriva dalla così detta formula di CAVALIERI - TORRICELLI (SIMPSON) e può applicarsi con successo tutte le volte che le equazioni da integrarsi siano formalmente semplici [1].

a) Si voglia integrare l'equazione

$$dy/dx=f(x,y); \tag{1}$$

posto

$$k_1=f(x_0,\, y_0)\,h, \qquad k_2=f\left(x_0+\frac{h}{2},\, y_0+\frac{k_1}{2}\right)h,$$

$$k_3=f\left(x_0+\frac{h}{2},\, y_0+\frac{k_2}{2}\right)h, \qquad k_4=f(x_0+h,\, y_0+k_3)\,h,$$

[1] Cfr. *a*) C. RUNGE: *Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen*, Math. Ann., 46 (1895), pp. 167-178; *b*) W. KUTTA: *Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen*, Zeitschr. für Math. und Phys., 46 (1901), pp. 435-452; *c*) C. RUNGE, H. KÖNIG: *Vorlesungen über numerisches Rechnen*, (Berlin, 1924), pp. 286-300.

si assume per valore dell'integrale della (1) nel punto x_0+h l'espressione y_0+k dove

$$k=\frac{1}{3}\left[\frac{k_1+k_4}{2}+(k_2+k_3)\right]. \tag{12}$$

Vogliamo dimostrare che *nell'ipotesi che f ammetta derivate parziali del quarto ordine continue, la differenza*

$$y(x_0+h)-y(x_0)-\frac{1}{3}\left[\frac{k_1+k_4}{2}+(k_2+k_3)\right]$$

è dell'ordine h^5.

Si ha infatti con le notazioni del n. 2, *a*)

$$\begin{aligned}y(x_0+h)-y(x_0)&=fh+\frac{1}{2}(f_1+f_2f)h^2+\\ &+\frac{1}{6}[f_{1,1}+2f_{1,2}f+f_{2,2}f^2+f_2(f_1+f_2f)]\,h^3+\\ &+\frac{1}{24}[f_{x^3}+3f_{x^2y}f+3f_{xy^2}f^2+f_{y^3}f^3+3(f_{1,2}+f_{2,2}f)(f_1+f_2f)+\\ &+f_2(f_{1,1}+2f_{1,2}f+f_{2,2}f^2)+f_2^2(f_1+f_2f)]\,h^4+\dots,\end{aligned}$$

e si verifica che i termini fino all'ordine h^4 di k coincidono con quella della differenza $y(x_0+h)-y(x_0)$, e perciò nelle ipotesi dichiarate l'errore è dell'ordine h^5.

b) Assegnati i valori iniziali $(x_0,\, y_0)$, e determinato col procedimento ora indicato il valore approssimato $y(x_0+h)\backsim y_0+k$, si procederà nello stesso modo sui dati iniziali $(x_0+h,\, y_0+k)$ per calcolare $y(x_0+h+h_1)$, e così successivamente.

c) Il calcolo si dispone praticamente come nel seguente quadro.

x	y	$f(x,y)$	$hf=k$	(k)
x	y	$f(x,y)$	k_1	$\frac{1}{2}(k_1+k_4)$
$x+h/2$	$y+k_1/2$	$f(x+h/2,\, y+k_1/2)$	k_2	k_2+k_3 somma
$x+h/2$	$y+k_2/2$	$f(x+h/2,\, y+k_2/2)$	k_3	
$x+h$	$y+k_3$	$f(x+h,\, y+k_3)$	k_4	$k=\frac{1}{3}$ somma
$x+h$	$y+k$			

Sia ad es. data l'equazione differenziale

$$y' = (y-x)/(y+x) \quad (^1) \tag{13}$$

e del suo integrale particolare $y(x)$ che soddisfa la condizione iniziale $y(0)=1$ si voglia calcolare il valore $y(1)$.

Si verifica facilmente che l'integrale generale della (13) è

$$\frac{1}{2}\log\,(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\text{cost.}$$

e perciò l'integrale particolare considerato verifica l'equazione

$$\frac{1}{2}\log\,(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Per valutare $y(1)$ applicheremo il metodo di RUNGE e KUTTA calcolando successivamente

$$y(0,2), \qquad y(0,5), \qquad y(1);$$

i calcoli risultano dal seguente quadro (²).

x	y	$f(x,y)=(y-x)/(y+x)$	$hf=k$		(k)
0	1	1	0·2	k_1	0·1707
0·1	1·1	0·8333	0·1666	k_2	0·3327
0·1	1·0833	0·8309	0·1661	k_3	0·5034
0·2	1·1661	0·7071	0·1414	k_4	0·1678
0·2	1·1678	0·7075	0·2122		0·1744
0·35	1·2739	0·5689	0·1706		0·3395
0·35	1·2531	0·5633	0·1689		0·5139
0·5	1·3367	0·4555	0·1366		0·1713
0·5	1·3391	0·4562	0.2281		0·1635
0·75	1·4531	0·3191	0·1595		0·3136
0·75	1·4188	0·3083	0·1541		0·4771
1	1·4932	0·1978	0·0989		0·1590
1	1·4981				

(¹) Cfr. C. RUNGE, lav. cit. in principio di questo n. 3, p. 171.

(²) I calcoli sono stati effettuati arrestandoci alla quarta cifra decimale.

Se nella (14) si fa $x=1$ si trova che y è compreso tra 1·4982 e 1·4983 (¹).

4. - *a*) Il procedimento di RUNGE e KUTTA si estende ai sistemi (²). Così dato il sistema

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x\,;\;y_1,\,y_2,\ldots,\,y_m), \qquad (i=1,\,2,\ldots,\,m),$$

e supposto che in $(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$ esso ammetta uno e un solo sistema di integrali soddisfacente le condizioni iniziali

$$y_i(x_0)=y_i^{(0)}, \qquad (i=1,\,2,\ldots,\,m),$$

per la valutazione dei valori

$$y_1(x_0+h), \quad y_2(x_0+h),\ldots, \quad y_m(x_0+h)$$

si calcoleranno le espressioni

$$k_1^{(i)}=f_i\,(x_0\,;\;y_1^{(0)},\;y_2^{(0)},\ldots,\;y_m^{(0)})\,h,$$

$$k_2^{(i)}=f_i\left(x_0+\frac{h}{2};\;y_1^{(0)}+\frac{k_1^{(1)}}{2},\;y_2^{(0)}+\frac{k_1^{(2)}}{2},\ldots,\;y_m^{(0)}+\frac{k_1^{(m)}}{2}\right)h,$$

$$k_3^{(i)}=f_i\left(x_0+\frac{h}{2};\;y_1^{(0)}+\frac{k_2^{(1)}}{2},\;y_2^{(0)}+\frac{k_2^{(2)}}{2},\ldots,\;y_m^{(0)}+\frac{k_2^{(m)}}{2}\right)h,$$

$$k_4^{(i)}=f_i\left(x_0+h\,;\;y_1^{(0)}+k_3^{(1)},\;y_2^{(0)}+k_3^{(2)},\ldots,\;y_m^{(0)}+k_3^{(m)}\right)h,$$

e si porrà

$$y_i(x_0+h)\backsim y_i(x_0)+\frac{1}{3}\left[\frac{k_1^{(i)}+k_4^{(i)}}{2}+(k_2^{(i)}+k_3^{(i)})\right], \qquad (i=1,\,2,\ldots,\,m).$$

Supposto che le $f_i(x\,;\,y_1,\,y_2,\ldots,\,y_m)$ ammettano derivate parziali del quarto ordine continue si può verificare, con lo stesso procedimento indicato nel n. 3, *a*), che l'errore

$$y_i(x_0+h)-y_i(x_0)-\frac{1}{3}\left[\frac{k_1^{(i)}+k_4^{(i)}}{2}+(k_2^{(i)}+k_3^{(i)})\right]$$

è dell'ordine h^5.

b) È quasi superfluo notare che ove sia da risolvere l'equazione

$$y^{(m)}=f(x\,;\;y,\,y',\,y'',\ldots,\,y^{(m-1)}),$$

(¹) Per agevolare il calcolo si ponga nella (14), $x=r\cos\varphi$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\varphi$; si avrà allora $\pi/2-\varphi=\log r$.

(²) Cfr. C. RUNGE, H. KÖNIG: *Vorlesungen über numerisches Rechnen*, (Berlin, 1924), (op. cit.), pp. 311-316.

se le condizioni iniziali

$$y(x_0)=y_0^{(0)},\quad y'(x_0)=y_1^{(0)},\quad y''(x_0)=y_2^{(0)},\ldots,\quad y^{(m-1)}(x_0)=y_{m-1}^{(0)}$$

determinano uno e un solo integrale in $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, per calcolare simultaneamente

$$y(x_0+h),\quad y'(x_0+h),\quad y''(x_0+h),\ldots,\quad y^{(m-1)}(x_0+h)$$

basterà integrare il sistema [Cap. I, § 1, n. 2]

$$y_1'=y_2,\ y_2'=y_3,\ldots,\ y'_{m-1}=y_m,\ y'_m=f(x;\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_m),\quad [y=y_1],$$

con le condizioni iniziali

$$y_1(x_0)=y_0^{(0)},\quad y_2(x_0)=y_1^{(0)},\quad y_3(x_0)=y_2^{(0)},\ldots,\quad y_m(x_0)=y_{m-1}^{(0)}.$$

§ 3. - Calcolo numerico delle soluzioni delle equazioni differenziali con l'uso dei polinomi di approssimazione.

1. Principio del metodo. Maggiorazione dell'errore. - 2. La formula di ADAMS. - 3. La formula di NYSTRÖM. - 4. Formula di STÖRMER per la risoluzione numerica dell'equazione $y''=f(x,y)$. - 5. Formule di STÖRMER per la risoluzione dei sistemi $y_i''=f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_m)$, $(i=1,\ 2,\ldots,\ m)$.

1. - *a*) Descriveremo in questo paragrafo i metodi di calcolo numerico delle soluzioni basati sulla rappresentazione approssimata delle funzioni continue mediante polinomi; l'applicazione concreta non richiede che l'ordinario calcolo delle differenze finite, ed elimina quindi, così come i metodi descritti nel § 2, le operazioni di quadratura [1].

b) Supponiamo che l'equazione

$$dy/dx=f(x,\ y) \tag{1}$$

[1] Nella redazione di questo paragrafo ci siamo serviti della memoria di E. LINDELÖF: *Remarques sur l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires*, Acta Soc. Sc. Fennicae, (N. Series), II, n.° 13 (1938), pp. 1-21.

ammetta un integrale $y(x)$ noto in $n+1$ punti *equidistanti*

$$x_0,\quad x_1,\ldots,\quad x_{n-1},\quad x_n;\qquad x_r-x_{r-1}=h,\qquad (r=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{2}$$

Posto

$$f(x,\ y(x))=F(x),$$

sono noti gli $n+1$ valori

$$f(x_i,\ y_i)=F(x_i)=y_i',\qquad (i=0,\ 1,\ldots,\ n),$$

di dy/dx negli $n+1$ punti (2), e se indichiamo con

$$\mathfrak{L}_n(x;\ x_0,\ x_1,\ldots,\ x_n)$$

il polinomio di grado $\leq n$ che soddisfa le $n+1$ relazioni

$$\mathfrak{L}_n(x_i;\ x_0,\ x_1,\ldots,\ x_n)=y_i',\qquad (i=0,\ 1,\ldots,\ n),$$

si può assumere come espressione approssimata di dy/dx appunto il polinomio $\mathfrak{L}_n(x;\ x_0,\ x_1,\ldots,\ x_n)$.

Per costruire il polinomio $\mathfrak{L}_n$ si osservi che formato il quadro delle così dette *differenze orizzontali*

$$\begin{array}{llllll}
y_0' & & & & & \\
y_1' & \Delta_1 y_1' & & & & \\
y_2' & \Delta_1 y_2' & \Delta_2 y_2' & & & \\
y_3' & \Delta_1 y_3' & \Delta_2 y_3' & \Delta_3 y_3' & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
y_n' & \Delta_1 y_n' & \Delta_2 y_n' & \Delta_3 y_n' & \cdots & \Delta_n y_n'
\end{array}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 y_s'=y_s'-y'_{s-1}, & (s=1,\ 2,\ldots,\ n), \\ \Delta_k y_s'=\Delta_{k-1} y_s'-\Delta_{k-1} y'_{s-1}, & (k=2,\ldots,\ n;\ s=k,\ldots,\ n), \end{cases} \tag{3}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_n(x;\ x_0,\ x_1,\ldots,\ x_n)&=y_n'+\\
&+\frac{1}{1!}\frac{\Delta_1 y_n'}{h}(x-x_n)+\frac{1}{2!}\frac{\Delta_2 y_n'}{h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+\\
&+\frac{1}{3!}\frac{\Delta_3 y_n'}{h^3}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})+\ldots+\\
&+\frac{1}{n!}\frac{\Delta_n y_n'}{h^n}(x-x_n)\ldots(x-x_1);
\end{aligned}$$

basterà invero verificare che

$$y_i'=\mathcal{L}_n(x_i\,;\ x_0\,,\ x_1\,,\dots\ x_n)=y_n'+$$
$$+\frac{1}{1!}\,\frac{\Delta_1 y_n'}{h}\,(x_i-x_n)+\frac{1}{2!}\,\frac{\Delta_2 y_n'}{h^2}\,(x_i-x_n)(x_i-x_{n-1})+\dots+$$
$$+\frac{1}{(n-i)!}\,\frac{\Delta_{n-i} y_n'}{h^{n-i}}\,(x_i-x_n)\dots\,(x_i-x_{i+1})\,;$$

$$y_i'=y_n'-\binom{n-i}{1}\Delta_1 y_n'+\binom{n-i}{2}\Delta_2 y_n'+\dots+(-1)^i\binom{n-i}{n-i}\Delta_{n-i} y_n',$$

ovvero, con le consuete notazioni simboliche,

$$y_i'=(1-\Delta)^{(n-i)}\,y_n'$$

che è una conseguenza immediata delle (3).

Con un noto procedimento è facile trovare l'espressione della differenza

$$f(x,\,y(x))-\mathcal{L}_n(x\,;\ x_0\,,\ x_1\,,\dots,\ x_n)=F(x)-\mathcal{L}_n(x\,;\ x_0\,,\ x_1\,,\dots,\ x_n)$$

nell'ipotesi che $f(x, y(x))$ ammetta derivate parziali continue fino all'ordine $n+1$ [ipotesi che implica l'esistenza e la continuità di $y(x)$, $y'(x)$,...., $y^{(n+2)}(x)$]. Fissato un punto $\bar{x}$ distinto da x_0, x_1,...., x_n, si determini la costante c in modo che la differenza

$$f(x,\,y(x))-\mathcal{L}_n(x\,;\ x_0\,,\ x_1\,,\dots,\ x_n)-c\,\frac{(x-x_n)\dots\,(x-x_0)}{(n+1)!}$$

si annulli per $x=\bar{x}$; tale differenza si annulla dunque negli $n+2$ punti distinti x_0, x_1,...., x_n, $\bar{x}$ ed esisterà perciò *un punto* ξ *interno al massimo intervallo determinato dagli* $n+2$ *punti* x_0, x_1,...., x_n, $\bar{x}$ dove si annulla la $(n+1)^{\text{esima}}$ derivata di questa espressione. Ne segue $[y'=f(x, y(x))]$

$$y^{(n+2)}(\xi)=c,$$

e allora per ogni x

$$F(x)=\mathcal{L}_n(x\,;\ x_0\,,\ x_1\,,\dots,\ x_n)+\frac{y^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots\,(x-x_0),$$

dove ξ *è un punto dipendente da* x_0, x_1,...., x_n, x, *e appartenente al massimo intervallo determinato dagli* $n+2$ *punti* x_0, x_1,...., x_n, x.

Posto

$$x=x_n+hu,$$

otteniamo

$$\text{(4)}\qquad \mathcal{L}_n(x_n+hu\,;\ x_0\,,\ x_1\,,\dots,\ x_n)=y_n'+\frac{u}{1!}\,\Delta_1 y_n'+\frac{u(u+1)}{2!}\,\Delta_2 y_n'+$$
$$+\frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\,\Delta_3 y_n'+\dots+\frac{u(u+1)\dots\,(u+n-1)}{n!}\,\Delta_n y_n',$$

$$\text{(5)}\qquad F(x_n+hu)=\mathcal{L}_n(x_n+hu\,;\ x_0\,,\ x_1\,,\dots,\ x_n)+R_n\,,$$

$$\text{(6)}\qquad R_n=\frac{y^{(n+2)}(\xi)}{(n+1)!}\,h^{n+1}u(u+1)\dots\,(u+n).$$

Se vogliamo ora determinare il valore di y nel punto x_n+h, con $h>0$, all'uguaglianza esatta

$$\text{(7)}\qquad y(x_n+h)=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_n+h}F(x)dx=y(x_n)+h\int_0^1 F(x_n+hu)du,$$

sostituiremo l'uguaglianza approssimata

$$\text{(8)}\qquad y(x_n+h)\sim y(x_n)+h\int_0^1 \mathcal{L}_n(x_n+hu\,;\ x_0\,,\ x_1\,,\dots,\ x_n)du.$$

Per valutare l'errore notiamo che *se* M *indica il massimo modulo di* $y^{(n+2)}(x)$ *in* $(x_0\,,\,x_n+h)$, *l'errore non supera*

$$M\,\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^1 u(u+1)(u+2)\dots\,(u+n)du \quad (^1).$$

2. - Supponiamo noti, con un procedimento qualsiasi, i valori

$$F(x_0),\quad F(x_1),\dots,\quad F(x_5),\qquad [F(x_i)=f(x_i,\,y(x_i));\ (i=0,\,1,\dots,\,5)],$$

in *sei* punti equidistanti

$$x_0\,,\quad x_1=x_0+h,\dots,\quad x_5=x_0+5h,$$

(1) Per la convergenza del metodo cfr. J. TAMARKINE: *Sur la méthode de C. Störmer pour l'intégration approchée des équations différentielles ordinaires*, Math. Zeitschr, 16 (1923), pp. 214-219.

e poniamo

$$y_i' = F(x_i), \qquad (i=0, 1, \dots, 5).$$

Si avrà

$$(9) \quad \mathfrak{L}_5(x_5+hu;\ x_0, x_1, \dots, x_5) = y_5' + \frac{u}{1!}\Delta_1 y_5' + \frac{u(u+1)}{2!}\Delta_2 y_5' + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\Delta_3 y_5' + \dots + \frac{u(u+1)\dots(u+4)}{5!}\Delta_5 y_5',$$

e la formula (8) dà la *formula di Adams* (¹)

$$(10) \quad y(x_5+h) \sim y(x_5) + h\left[y_5' + \frac{1}{2}\Delta_1 y_5' + \frac{5}{12}\Delta_2 y_5' + \frac{3}{8}\Delta_3 y_5' + \frac{251}{720}\Delta_4 y_5' + \frac{95}{288}\Delta_5 y_5'\right]$$

e la differenza tra il valore di $y(x_5+h)$ così calcolato, e il valore esatto, è dell'ordine di h^7 (²).

3. - Una formula assai semplice, e utilissima nei calcoli è la seguente di NYSTRÖM (³).

Si ha evidentemente

$$y(x_5+h) - y(x_5-h) = \int_{x_5-h}^{x_5+h} y'(x)dx,$$

perciò

$$y(x_5+h) - y(x_5-h) \sim \int_{x_5-h}^{x_5+h} \mathfrak{L}_5(x;\ x_0, x_1, \dots, x_5)dx =$$

$$= h\int_{-1}^{1} \mathfrak{L}_5(x_5+hu;\ x_0, x_1, \dots, x_5)du,$$

(¹) F. BASHFORTH, J. C. ADAMS: *Theories of capillary action*, (Cambridge, 1883); E. T. WHITTAKER, G. ROBINSON: *The calculus of observations*, (London, 1924), Cap. XIV, p. 363.

(²) W. TOLLMIEN: *Ueber die Fehlerabschätzung beim Adamsschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Zeitschr. für Ang. Math. und Mech., 18 (1938), pp. 83-90.

(³) E. J. NYSTRÖM: *Ueber die numerische Integration von Differentialgleichungen*, Acta Soc. Sc. Fennicae, L (1925), n. 13, pp. 1-55.

e tenuto conto della (9) otteniamo la formula di NYSTRÖM

$$(11) \quad y(x_5+h) \sim y(x_4) + h\left\{2y_5' + \frac{1}{3}[\Delta_2 y_5' + \Delta_3 y_5' + \Delta_4 y_5' + \Delta_5 y_5']\right\} - \frac{h}{90}\{\Delta_4 y_5' + 2\Delta_5 y_5'\},$$

e in essa *la differenza tra il primo e il secondo membro è dell'ordine h^7.*

4. - *a*) Nello studio delle traiettorie dei corpuscoli elettrici in un campo magnetico, STÖRMER (¹) ha fatto uso sistematico di una semplicissima formula da lui costruita per la risoluzione numerica dell'equazione

$$(12) \qquad d^2y/dx^2 = f(x, y),$$

ma il procedimento, come vedremo nel n. 5, vale per i sistemi

$$y_i'' = f_i(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m), \qquad (i=1, 2, \dots, m).$$

Supponiamo di voler valutare numericamente una soluzione $y(x)$ della (12); supponiamo ancora noti i valori [di $y(x)$ e perciò] di $y''(x)$ in *sei* punti equidistanti

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \dots, \quad x_5 = x_0 + 5h,$$

valori che indicheremo rispettivamente con

$$y_0'', \quad y_1'', \dots, \quad y_5'',$$

e proponiamoci di valutare $y(x_5+h)$.

Posto

$$f(t, y(t)) = F(t), \qquad [F(x_i) = y_i'', \ (i=0, 1, \dots, 5)],$$

la (12) dà

$$y'(x) - y'(x_5) = \int_{x_5}^{x} F(t)dt,$$

(¹) C. STÖRMER: *Méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires*, Congrès Intern. des Mathématiciens, Strasbourg, 1920, pp. 243-257.

e moltiplicando per dx e integrando tra x_5 e x_5+h

$$y(x_5+h)-y(x_5)-hy'(x_5)=\int_{x_5}^{x_5+h} dx \int_{x_5}^{x} F(t)dt,$$

e cangiando h in $-h$ e sommando

$$y(x_5+h)=2y(x_5)-y(x_5-h)+\int_{x_5}^{x_5+h} dx \int_{x_5}^{x} F(t)dt+\int_{x_5}^{x_5-h} dx \int_{x_5}^{x} F(t)dt. \tag{13}$$

Formato il quadro delle *differenze orizzontali*

$$\begin{array}{llllll}
y_0'' \\
y_1'' & \Delta_1 y_1'' \\
y_2'' & \Delta_1 y_2'' & \Delta_2 y_2'' \\
y_3'' & \Delta_1 y_3'' & \Delta_2 y_3'' & \Delta_3 y_3'' \\
y_4'' & \Delta_1 y_4'' & \Delta_2 y_4'' & \Delta_3 y_4'' & \Delta_4 y_4'' \\
y_5'' & \Delta_1 y_5'' & \Delta_2 y_5'' & \Delta_3 y_5'' & \Delta_4 y_5'' & \Delta_5 y_5''
\end{array}$$

si costruisca con le notazioni del n. 1, *b*) il polinomio di *quinto grado*

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_5(t;\ x_0,\, x_1,\dots,\, x_5) &= y_5''+\\ &+\frac{1}{1!}\,\frac{\Delta_1 y_5''}{h}\,(t-x_5)+\frac{1}{2!}\,\frac{\Delta_2 y_5''}{h^2}\,(t-x_5)(t-x_4)+\dots+\\ &+\frac{1}{5!}\,\frac{\Delta_5 y_5''}{h^5}\,(t-x_5)(t-x_4)\dots(t-x_1),\end{aligned}$$

e sostituiamo nella (13) a $F(t)$ il polinomio $\mathfrak{L}_5$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{x_5}^{x_5+h} dx \int_{x_5}^{x} F(t)dt &\sim h^2 \int_0^1 dv \int_0^v \mathfrak{L}_5(x_5+hu;\ x_0,\, x_1,\dots,\, x_5)du=\\
&= h^2 \int_0^1 dv \left[v y_5''+\frac{v^2}{2}\,\Delta_1 y_5''+\frac{1}{2!}\left(\frac{v^3}{3}+\frac{v^2}{2}\right)\Delta_2 y_5''+\right.\\
&+\frac{1}{3!}\left(\frac{v^4}{4}+v^3+v^2\right)\Delta_3 y_5''+\frac{1}{4!}\left(\frac{v^5}{5}+\frac{3}{2}\,v^4+\frac{11}{3}\,v^3+3v^2\right)\Delta_4 y_5''+\\
&\left.+\frac{1}{5!}\left(\frac{v^6}{6}+2v^5+\frac{35}{4}\,v^4+\frac{50}{3}\,v^3+12v^2\right)\Delta_5 y_5''\right] dv,\end{aligned}$$

e operando analogamente sul secondo integrale che figura nel secondo membro della (13) [gli integrali delle potenze di v, con

esponente pari, si elidono] otteniamo

$$\begin{aligned}y(x_5+h) &\sim 2y(x_5)-y(x_5-h)+\\
&+h^2\int_0^1 dv \left[2v y_5''+\frac{1}{2!}\,\frac{2}{3}\,v^3\Delta_2 y_5''+\frac{1}{3!}\,2v^3\Delta_3 y_5''+\right.\\
&\left.+\frac{1}{4!}\left(\frac{2}{5}\,v^5+\frac{22}{3}\,v^3\right)\Delta_4 y_5''+\frac{1}{5!}\left(4v^5+\frac{100}{3}\,v^3\right)\Delta_5 y_5''\right] dv,\end{aligned}$$

da cui la *formula di Störmer*

$$\begin{aligned}y(x_5+h) &\sim 2y(x_5)-y(x_5-h)+\\
&+h^2\left\{y_5''+\frac{1}{12}\left[\Delta_2 y_5''+\Delta_3 y_5''+\Delta_4 y_5''+\Delta_5 y_5''-\frac{1}{20}\Delta_4 y_5''-\frac{1}{10}\Delta_5 y_5''\right]\right\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Supposto che $f(x, y)$ ammetta derivate parziali continue fino al *sesto* ordine [il che implica che $y(x)$ ammette derivate parziali fino all'*ottavo* ordine], nella (14) la differenza tra il primo e il secondo membro è dell'ordine h^8: infatti nei due integrali della (13) gli integrandi sono approssimati con l'ordine h^6, e i due campi di integrazione hanno ciascuno l'area uguale a $h^2/2$.

b) Si consideri ad esempio l'integrale $y(x)$ dell'equazione

$$y''=x^2y$$

che soddisfa le condizioni iniziali

$$y(0)=1, \qquad y'(0)=0;$$

abbiamo visto [Cap. III, § 2, n. 3, *b*)] che un tale integrale ammette lo sviluppo in serie

$$y=1+\frac{1}{3\cdot 4}\,x^4+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}\,x^8+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}\,x^{12}+\dots,$$

e perciò per $|x|<1$ arrestandoci al termine $x^{4n}/3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot\dots\cdot(4n-1)4n$ l'errore non supera $x^{4n+4}/3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot\dots\cdot(4n+3)(4n+4)(1-x^4)$.

Si troverà

$$\begin{aligned}y(\pm 0{\cdot}1) &= 1{\cdot}000\,008\,333,\\ y(\pm 0{\cdot}2) &= 1{\cdot}000\,133\,337,\\ y(\pm 0{\cdot}3) &= 1{\cdot}000\,675\,097,\end{aligned}$$

e se nella formula (14) di Störmer si pone $x_0=-0{\cdot}2$, $x_1=-0{\cdot}1,\dots$, $x_5=0{\cdot}3$, $h=0{\cdot}1$, si ricaverà

$$y(\pm 0{\cdot}4)=1{\cdot}002\,134\,264,$$

mentre il valore abbreviato di $y(\pm 0{\cdot}4)$ con 9 cifre decimali è $1{\cdot}002\,134\,309$; l'errore è quindi 45×10^{-9}.

5. - *a*) Passando ai sistemi osserviamo preliminarmente che dato il sistema di equazioni differenziali

$$dy_i/dx = G_i(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m), \qquad (i=1, 2, \dots, m),$$

e supposte lecite le operazioni di derivazione, si ha:

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dx} + \frac{\partial G_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial y_k} G_k + \frac{\partial G_i}{\partial x},$$

di guisa che possiamo limitarci a considerare l'integrazione numerica dei sistemi di equazioni differenziali nella forma di STÖRMER

$$(15) \qquad \frac{d^2y_i}{dx^2} = f_i(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m), \qquad (i=1, 2, \dots, m).$$

b) Supponiamo che $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ rappresenti un sistema di integrali di (15), e si ponga

$$f_i(x;\ y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)) = F_i(x), \qquad (i=1, 2, \dots, m).$$

Supposto noti i valori di questi integrali in *sei* punti equidistanti $x_0, x_1, \dots, x_5$ si ponga

$$F_i(x_k) = y''_{i,k}, \qquad (i=1, 2, \dots, m;\ k=0, 1, \dots, 5),$$

e si formi con $y''_{i,0}, y''_{i,1}, \dots, y''_{i,5}$ il corrispondente quadro delle *differenze orizzontali*.

Ripetendo i ragionamenti del n. 4 si avranno le formule di STÖRMER

$$(16) \qquad y_i(x_5+h) \sim 2y_i(x_5) - y_i(x_5-h) + $$
$$+ h^2 \left\{ y''_{i,5} + \frac{1}{12}\left[\Delta_2 y''_{i,5} + \Delta_3 y''_{i,5} + \Delta_4 y''_{i,5} + \Delta_5 y''_{i,5} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{20}\Delta_4 y''_{i,5} - \frac{1}{10}\Delta_5 y''_{i,5}\right]\right\}, \qquad (i=1, 2, \dots, m)$$

e supposto che le $f_i(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m)$ ammettano derivate parziali continue rispetto ai loro argomenti fino al *sesto* ordine [e perciò le $y_i(x)$ hanno derivate continue fino all'*ottavo* ordine], nelle (16) le differenze tra il primo e il secondo membro sono dell'ordine h^8.

§ 4. - Metodo di Cauchy-Lipschitz.

1. Il metodo di CAUCHY-LIPSCHITZ per i sistemi. - 2. Modificazione di PICONE e maggiorazione dell'errore di approssimazione.

1. - Sul metodo di CAUCHY-LIPSCHITZ [Cap. I, § 6], come abbiamo avvertito al § 2, n. 1, *a*), è fondato il procedimento di EULERO di integrazione numerica dell'equazione $y' = f(x, y)$; ora vogliamo riprendere lo stesso metodo ai fini della risoluzione numerica dei sistemi differenziali del primo ordine di forma normale.

Sia dato il sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} dy_i/dx = f_i(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m), \\ y_i(\alpha) = \beta_i, \qquad (i=1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

dove le f_i sono funzioni note nel rettangolo R definito dalle limitazioni

$$\alpha - a < x < \alpha + a, \qquad b_i' \leqslant y_i \leqslant b_i'', \qquad (i=1, 2, \dots, m),$$

e sia I l'intervallo $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ ove riesce definito il sistema di funzioni

$$y_i = y_i(x)$$

soluzioni delle (1); sia x un punto di I, per fissare le ipotesi $x > \alpha$, e si vogliano ivi calcolare le $y_i(x)$.

Dividiamo l'intervallo (α, x) in n parti mediante gli $n-1$ punti

$$x_s = \alpha + s\,\frac{x-\alpha}{n}, \qquad (s=1, 2, \dots, n-1),$$

e poniamo

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi_i^{(1)} = \beta_i + f_i(\alpha;\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)\,(x_1-\alpha), \\ \xi_i^{(2)} = \xi_i^{(1)} + f_i(x_1;\ \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_m^{(1)})\,(x_2-x_1), \\ \xi_i^{(3)} = \xi_i^{(2)} + f_i(x_2;\ \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_m^{(2)})\,(x_3-x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_i^{(n)} = \xi_i^{(n-1)} + f_i(x_{n-1};\ \xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}, \dots, \xi_m^{(n-1)})\,(x-x_{n-1}), \\ \qquad (i=1, 2, \dots, m). \end{cases}$$

Il metodo di CAUCHY-LIPSCHITZ assicura che, sotto certe condizioni, si ha

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = y_i(x),$$

e per questa ragione nella pratica si assumono appunto i valori $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}$ rispettivamente come valori approssimati di $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_m(x)$ [1].

2. - Per valutare l'errore, seguendo M. PICONE [2], faremo opportune ipotesi sulla derivabilità delle f_i rispetto ai loro argomenti, e modificheremo convenientemente il procedimento per la determinazione delle $\xi_i^{(n)}$.

Supponiamo che *le f_i siano dotate di derivate parziali rispetto ai loro argomenti fino a quelle di ordine $\nu+1$*, $(\nu \geqslant 0)$, *continue,* se poniamo

$$f_i^{(1)} = f_i, \qquad f_i^{(2)} = \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial x} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial y_r} f_r, \ldots,$$

$$f_i^{(\nu+1)} = \frac{\partial f_i^{(\nu)}}{\partial x} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f_i^{(\nu)}}{\partial y_r} f_r, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

avremo allora oltre le (1)

$$\frac{d^k y_i}{dx^k} = f_i^{(k)}(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, \nu+1). \tag{5}$$

Facendo uso della formula di TAYLOR arrestata ai termini di ordine ν, e spostando successivamente il punto iniziale da α in $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, in analogia alle (2), poniamo:

$$\left\{\begin{aligned}
\xi_i^{(1)} &= \beta_i + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(a;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \frac{(x_1 - a)^k}{k!}, \\
\xi_i^{(2)} &= \xi_i^{(1)} + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(x_1;\ \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_m^{(1)}) \frac{(x_2 - x_1)^k}{k!}, \\
\xi_i^{(3)} &= \xi_i^{(2)} + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(x_2;\ \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \ldots, \xi_m^{(2)}) \frac{(x_3 - x_2)^k}{k!}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_i^{(n)} &= \xi_i^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{\nu} f_i^{(k)}(x_{n-1};\ \xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}, \ldots, \xi_m^{(n-1)}) \frac{(x - x_{n-1})^k}{k!}, \\
&(i = 1, 2, \ldots, m).
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

[1] Un altro procedimento per il calcolo numerico della soluzione del sistema (1) può ottenersi sfruttando le formule di TONELLI (20_1), (20_2) del Cap. I, § 6, n. 3.

[2] M. PICONE: *Maggiorazione dell'errore d'approssimazione nel metodo di integrazione di Cauchy-Lipschitz dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie,* Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 15 (1932), pp. 859-864

Se in $(a-\delta, a+\delta)$ *si ha*

$$b_i' < y_i(x) < b_i'', \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

se A e B sono due numeri positivi per i quali risulti in R

$$|f_i^{(\nu+1)}| \leqslant A; \qquad \left|\frac{\partial f_i^{(k)}}{\partial y_r}\right| \leqslant B, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu;\ i, r = 1, 2, \ldots, m);$$

e se $(x_s;\ \xi_1^{(s)}, \xi_2^{(s)}, \ldots, \xi_m^{(s)})$, $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$ *appartengono al campo di esistenza delle f_i,* [condizione quest'ultima soddisfatta per s abbastanza grande];

allora le $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}$ definite dalle (2) *soddisfano la limitazione*

$$|\xi_i^{(n)} - y_i(x)| < \frac{\delta^\nu}{n^\nu} \frac{A e^{-\delta/n}}{mB(\nu+1)!} \left[\left(1 + mB\frac{\delta}{n} e^{\delta/n}\right)^n - 1\right],$$

e l'errore è quindi dell'ordine $1/n^\nu$.

Per la dimostrazione rimandiamo il lettore alla nota di M. PICONE, citata nel n. 1 [1].

§ 5. - Calcolo di autovalori e approssimazione delle soluzioni dei sistemi differenziali con prescritte condizioni ai limiti.

1. Generalità. Limitazione dell'autovalore di minimo valore assoluto. - 2. Sistemi di secondo ordine. Maggiorazione del minimo autovalore e maggiorazione della soluzione nel caso non omogeneo. - 3. Metodo di RITZ per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali del secondo ordine. - 4. Procedimento di PICONE - KRYLOFF - MCEVEN delle minime potenze ponderate per l'approssimazione delle soluzioni dei sistemi differenziali lineari di ordine qualunque.

1. - *a*) Nei §§ 1 e 4 ci siamo proposti la risoluzione numerica dei sistemi differenziali con i dati di CAUCHY, considereremo ora la risoluzione numerica dei sistemi differenziali le cui soluzioni debbano soddisfare prescritte condizioni ai limiti.

[1] Dal procedimento di M. PICONE, per il caso dei sistemi lineari omogenei, deriva un metodo pel calcolo degli autovalori. Cfr. T. VIOLA: *Dimostrazione della convergenza di un procedimento di M. Picone per il calcolo degli autovalori,* Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 29 (1939), pp. 180-185.

Si tratta di una questione studiata nel Cap. IV, § 7, per il caso particolare dei sistemi di STURM-LIOUVILLE, dove, trasformando il sistema in un'equazione integrale di VOLTERRA, abbiamo determinato le espressioni asintotiche degli autovalori e delle corrispondenti autofunzioni.

Nel Cap. V, § 3, in casi più generali, abbiamo trasformato i sistemi differenziali in equazioni integrali di FREDHOLM, ma le serie che esprimono le soluzioni, pur essendo rapidamente convergenti, presentano notevoli difficoltà per il calcolo numerico.

Anche il calcolo degli autovalori, che in molti problemi ha importanza preminente, attraverso la teoria delle equazioni integrali si presenta irto di gravi difficoltà: si tratta invero di valutare gli zeri della trascendente intera $D(\lambda)$ di cui abbiamo parlato nel n. 5 a) del § 3 del citato Cap. V (1).

In questo paragrafo ci limiteremo a ricordare subito in b) alcuni risultati per la limitazione dell'autovalore di minimo valore assoluto, nel n. 2 proveremo qualche risultato di PICONE per i sistemi del secondo ordine, mentre nel n. 3 daremo conto del così detto metodo (algoritmo variazionale) di RITZ, e nel n. 4 del metodo delle minime potenze ponderate (PICONE, KRYLOFF, MCEVEN), metodi dai quali derivano i moderni procedimenti di integrazione numerica dei sistemi differenziali e di calcolo degli autovalori e delle autofunzioni (2).

b) Per il calcolo dell'autovalore di minimo valore assoluto si ricorre ai seguenti risultati di SCHMIDT e di KNESER che qui, come abbiamo prima detto, ci limitiamo a richiamare.

(1) Per la determinazione degli autovalori e delle autofunzioni relativi ai sistemi differenziali autoaggiunti di ordine pari, partendo dalla teoria delle equazioni integrali a nucleo simmetrico cfr. G. TEMPLE: *The computation of characteristic numbers and characteristic functions*, Proc. of the Lond. Math. Soc., (2), 29 (1929), pp. 257-280.

(2) Per l'applicazione del *calcolo delle matrici*, al calcolo numerico degli autovalori e delle autofunzioni cfr. R. A. FRAZER, W. J. DUNCAN, A. R. COLLAR: *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations*, (Cambridge, 1938), Cap. VI e Cap. VII (GALERKIN'S method).

Cfr. poi L. COLLATZ: *Genäherte Berechnung von Eigenwerten*, Zeitschr. für Ang. Math. und Mech., 19 (1939), pp. 224-249, pp. 297-318.

Se il sistema differenziale si traduce nell'equazione integrale [Cap. V, § 3, n. 5, a)]

$$y(x)+\lambda\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi=0,$$

e se λ indica l'autovalore di minimo valore assoluto, vale allora la limitazione di SCHMIDT

$$\left[\int_a^b\int_a^b[G(x,\xi)]^2dxd\xi\right]^{-1/2}\leqslant|\lambda| \quad (1).$$

Quando ci si riferisca poi ai sistemi autoaggiunti di ordine pari [Cap. V, § 3, n. 6, $G(x,\xi)=G(\xi,x)$], posto

$$G^{(1)}(x,y)=G(x,y),$$

$$G^{(n)}(x,y)=\int_a^b G^{(n-1)}(x,\xi)G(\xi,y)d\xi, \qquad (n=2,3,....),$$

$$A_n=\int_a^b G^{(n)}(x,x)dx, \qquad (n=1,2,....)$$

vale per l'autovalore di minimo valore assoluto l'altra limitazione di KNESER (2)

$$|\lambda|\leqslant(A_2/A_4)^{1/2}.$$

2. - a) In continuazione delle cose dette nel numero precedente, quando si tratti del sistema differenziale

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{dy}{dx}\right]+\lambda Ay=0, \qquad y(a)=y(b)=0, \tag{1}$$

con $\theta(x)$, $A'(x)$ continue in (a,b), $\theta(x)>0$, $A(x)>0$, come abbiamo già dimostrato nel Cap. V, § 4, n. 3, b) per limitare il primo autovalore λ_0 possiamo valerci della formula

$$0<\lambda_0\leqslant\int_a^b\theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx\bigg/\int_a^b Au^2dx, \tag{2}$$

(1) Cfr. ad es. É. GOURSAT: *Cours d'Analyse*, T. III (4me Éd., Paris, 1927). pp. 348-349.

(2) A. KNESER: *Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 22 (1906), (pp. 233-240), p. 237.

dove $u(x)$ è una qualsiasi funzione assolutamente continua, nulla in a e b, con derivata prima di quadrato integrabile in (a, b).

b) Notevoli formule di maggiorazione degli integrali delle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte sono state date da M. PICONE [1] ma qui ci limiteremo a dimostrare uno dei risultati più semplici.

Si consideri il sistema differenziale

$$\frac{d}{dx}\left[\theta \frac{dy}{dx}\right]+Ay=f(x), \qquad y(a)=y(b)=0, \tag{3}$$

dove per $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $A(x)$ facciamo le ipotesi dichiarate in *a*), e sia $f(x)$ continua in (a, b). Supposto ancora che il più piccolo autovalore λ_0 del sistema (1) sia maggiore di uno, il sistema (3) ammette una e una sola soluzione $y(x)$ [Cap. IV, § 6, n. 6, *b*); Cap. V, § 3, n. 3, *a*)] che vogliamo maggiorare.

Moltiplicando l'equazione differenziale (3) per $y\,dx$ e integrando tra a e b si ha

$$-\int_a^b y\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{dy}{dx}\right]dx-\int_a^b Ay^2dx=-\int_a^b fy\,dx,$$

ovvero integrando per parti nel primo termine del primo membro

$$\int_a^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx=\int_a^b Ay^2dx-\int_a^b fy\,dx,$$

e per la (2)

$$\int_a^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx\leqslant\frac{1}{\lambda_0}\int_a^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx-\int_a^b fy\,dx,$$

da cui

$$\int_a^b \theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx\leqslant-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\int_a^b fy\,dx. \tag{4}$$

D'altra parte, se indichiamo con c in punto di (a, b), $(a<c<b)$,

[1] M. PICONE: *Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte*, Math. Zeitschr., 28 (1928), (pp. 519-555), p. 534.

ove $|y(x)|$ assume il valore massimo, e applichiamo la limitazione di BUNIKOWSKI-SCHWARZ si ha:

$$y^2(c)=\left(\int_a^c\frac{dy}{dx}dx\right)^2=\left[\int_a^c\frac{1}{\sqrt{\theta}}\left(\sqrt{\theta}\,\frac{dy}{dx}\right)dx\right]^2\leqslant\int_a^c\frac{dx}{\theta(x)}\int_a^c\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx,$$

$$y^2(c)\leqslant\int_c^b\frac{dx}{\theta(x)}\int_a^b\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx,$$

quindi

$$\int_a^b\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx=\int_a^c\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx+\int_c^b\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx\geqslant y^2(c)\left\{\left[\int_a^c\frac{dx}{\theta(x)}\right]^{-1}+\left[\int_c^b\frac{dx}{\theta(x)}\right]^{-1}\right\},$$

$$\int_a^b\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx\geqslant 4y^2(c)\Big/\int_a^b\frac{dx}{\theta(x)},$$

e la (4) dà allora

$$4\,[\max.|y(x)|]^2\leqslant-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\int_a^b\frac{dx}{\theta(x)}\int_a^b fy\,dx\leqslant$$

$$\leqslant(b-a)\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\,[\max.|f|\,\max.|y(x)|]\int_a^b\frac{dx}{\theta(x)}$$

e infine

$$\boxed{\max.|y(x)|\leqslant\frac{b-a}{4}\,\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\,[\max.|f|]\int_a^b\frac{dx}{\theta(x)}}\,. \tag{5}$$

Abbiamo così dimostrato il teorema: *dato il sistema differenziale* (3), *supposto* $\theta'(x)$, $A(x)$, $f(x)$ *continue in* (a, b), $\theta(x)>0$, $A(x)>0$, *supposto inoltre che il più piccolo autovalore del corrispondente sistema omogeneo* (1) *sia maggiore di* 1, *allora la soluzione* $y(x)$ *del sistema* (3) *è maggiorata dalla* (5).

3. - Esporremo in questo numero il procedimento di integrazione approssimata di W. RITZ [1] detto anche *il metodo dell'algoritmo variazionale di Ritz*.

[1] Cfr. W. RITZ: *a*) *Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik*, Journ. für die reine und

Si consideri il sistema differenziale del secondo ordine

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\,\frac{dy}{dx}\right]-A(x)y=f(x), \qquad y(a)=y(b)=0, \tag{6}$$

e supponiamo che in tutto (a, b) siano $\theta'(x)$, $A(x)$, $f(x)$ continue,

$$\theta(x)>0, \qquad A(x)>0; \tag{7}$$

in queste ipotesi il sistema ammette una e una sola soluzione [Cap. IV, § 2, n. 4, b); Cap. V, § 3, n. 3, a)].

Per $a \leqslant x \leqslant b$, y e y' qualunque, si ponga

$$F(x, y, y')=\theta y'^2+Ay^2+2fy, \tag{8}$$

e sia

$$P\equiv(a, 0), \qquad Q\equiv(b, 0).$$

La soluzione $y(x)$ *del sistema differenziale* (1) *dà anche l'equazione della curva minimante l'integrale*

$$I[y]=\int_a^b F(x, y, y')\,dx \tag{9}$$

nella classe di tutte le curve ordinarie $[a \leqslant x \leqslant b,\ y(x)$ assolutamente continua, $|y'|^2$ integrabile in (a, b), $y(a)=y(b)=0]$ *che hanno i punti terminali in* P *e* Q.

Infatti $I[y]$ è un integrale regolare positivo (¹), si ha inoltre

$$F_{y'^2}F_{y^2}-F_{yy'}^2=4\theta A>0,$$

e perciò la $y(x)$ gode la proprietà dichiarata (²).

ang. Math. 135 (1908), pp. 1-61; b) *Oeuvres complètes de W. Ritz, avec une préface de* P. Weiss (Paris, 1911), pp. 192-250. Cfr. anche M. Picone: *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della fisica-matematica*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 52 (1928), pp. 225-253; N. Kryloff: a) *Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique*, Mémorial des Sciences Math., fasc. 49 (Paris, 1931); b) *Les problèmes fondamentaux de la physique mathématique et de la science d'ingénieur*, (Kiew, 1932), pp. 1-251 (in ucraino). Per la dimostrazione del testo cfr. N. Kryloff, a), p. 12.

(¹) $F_{y'^2}=2\theta>0$; cfr. L. Tonelli: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, I (Bologna, 1921), p. 360.

(²) Cfr. L. Tonelli, op. cit., II (Bologna, 1923), pp. 319, 389 e 392.

Valendoci ora del così detto *metodo diretto* di Tonelli del Calcolo delle Variazioni possiamo rapidamente dar conto del metodo di Ritz.

Sia $\{\psi_m(x)\}$ un sistema di funzioni, chiuso in (a, b), con le $\psi_m(x)$ linearmente indipendenti, continue insieme alle loro derivate prime in (a, b), nulle in a e in b,

$$\psi_m(a)=\psi_m(b)=0, \qquad (m=1, 2, \ldots),$$

e supponiamo inoltre che assegnata in (a, b) una funzione $y(x)$ continua insieme alla sua derivata prima, con $y(a)=y(b)=0$, sia possibile per ogni intero positivo m scegliere corrispondentemente delle costanti $\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \ldots, \alpha_m^{(m)}$ in maniera tale che, posto

$$Y_m=\alpha_1^{(m)}\psi_1+\alpha_2^{(m)}\psi_2+\ldots+\alpha_m^{(m)}\psi_m,$$

risulti

$$\lim_{m\to\infty} I[Y_m]=I[y] \quad (^1). \tag{10}$$

Per ogni intero positivo m, *scegliamo tra tutte le combinazioni lineari*

$$y_m(x)=a_1^{(m)}\psi_1(x)+a_2^{(m)}\psi_2(x)+\ldots+a_m^{(m)}\psi_m(x)$$

(¹) Se ricordiamo i risultati sulle serie trigonometriche di Fourier, si può prendere ad es. $\psi_m(x)=\mathrm{sen}\,[m\pi(x-a)/(b-a)]$, e per ogni intero positivo m porre y_m uguale alla m^{esima} somma parziale σ_m di Fejér della serie di Fourier di $y(x)$ rispetto al sistema $\{\psi_m(x)\}$. Infatti $y(x)$ ammette derivata continua in (a, b), ed è $y(a)=y(b)=0$, e perciò σ_m e σ'_m convergono quando $m\to\infty$, rispettivamente verso $y(x)$ e $y'(x)$; inoltre esse sono uniformemente limitate in (a, b), [Cfr. ad es. L. Tonelli: *Serie Trigonometriche*, (Bologna, 1928), p. 349, (n. 132), p. 170 (n. 59), p. 173 (n. 60)].

Si potrebbe scegliere ugualmente il sistema di polinomi $\psi_m(x)=(x-a)(x-b)x^m$, $(m=0, 1, \ldots)$. Infatti si consideri una successione di polinomi $\{P_m(x)\}$ tale che $\{P_m(x)\}$ e $\{P'_m(x)\}$ convergano uniformemente in (a, b) verso $y(x)$ e $y'(x)$ [cfr. ad es. n. 4, b), i)]. Essendo $y(a)=y(b)=0$ è $\lim\limits_{m\to\infty} P_m(a)=\lim\limits_{m\to\infty} P_m(b)=0$, perciò anche le successioni

$$\left\{P_m(x)-\frac{P_m(b)-P_m(a)}{b-a}(x-a)-P_m(a)\right\}, \qquad \left\{P'_m(x)-\frac{P_m(b)-P_m(a)}{b-a}\right\}$$

convergono uniformemente in (a, b) verso $y(x)$ e $y'(x)$, e si ha evidentemente

$$P_m(x)-\frac{P_m(b)-P_m(a)}{b-a}(x-a)-P_m(a)=(x-a)(x-b)\,Q_{m-2}(x),$$

dove $Q_{m-2}(x)$ è un polinomio di grado $m-2$.

di $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$,...., $\psi_m(x)$ quella che minimizza l'integrale $I[y_m]$, e proviamo con Ritz che si ha uniformemente in (a, b)

$$\lim_{m\to\infty} y_m(x) = y(x). \tag{11}$$

Poniamo

$$I[y_m] = I_m ,$$

e notiamo che i coefficienti $a_n^{(m)}$, $(n=1, 2,...., m)$, si determinano univocamente dal sistema

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I_m}{\partial a_n^{(m)}} = \int_a^b [\theta y'_m \psi'_n + A y_m \psi_n + f\psi_n]\, dx = 0, \tag{12}$$

$$(n = 1, 2,...., m);$$

infatti il determinante di questo sistema lineare nelle $a_1^{(m)}$, $a_2^{(m)}$,...., $a_m^{(m)}$ è il discriminante della forma quadratica, definita positiva, nelle variabili $a_1^{(m)}$, $a_2^{(m)}$,...., $a_m^{(m)}$

$$\int_a^b [\theta y_m'^2 + A y_m^2]\, dx.$$

Proviamo ora che *la successione $\{I_m\}$ è decrescente*, e che *la successione $\{y_m(x)\}$ è uniformemente convergente in (a, b), e perciò limitata.*

Siano infatti $A_1^{(m)}$, $A_2^{(m)}$,...., $A_m^{(m)}$ delle costanti; dalle (12) moltiplicando per $A_n^{(m)}$, sommando rispetto all'indice n, e posto

$$\eta_m = \sum_{n=1}^{m} A_n^{(m)} \psi_n(x),$$

si ottiene

$$\int_a^b [\theta y'_m \eta'_m + A y_m \eta_m + f\eta_m]\, dx = 0. \tag{13}$$

Se facciamo

$$\eta_{m+n} = y_{m+n} - y_m , \qquad [y_{m+n} = y_m + \eta_{m+n}]$$

la (13), scritta per l'indice $m+n$, diventa

$$\int_a^b [\theta y'_{m+n}(y'_{m+n} - y'_m) + A y_{m+n}(y_{m+n} - y_m) + f\eta_{m+n}]\, dx = 0,$$

da cui

$$-\int_a^b [\theta y'_{m+n}(y'_{m+n} - y'_m) + A y_{m+n}(y_{m+n} - y_m)]\, dx = \int_a^b f\eta_{m+n}\, dx,$$

e perciò

$$I_{m+n} - I_m = \int_a^b [\theta(y'^2_{m+n} - y'^2_m) + A(y^2_{m+n} - y^2_m) + 2f\eta_{m+n}]\, dx =$$

$$= \int_a^b [\theta(y'^2_{m+n} - y'^2_m) + A(y^2_{m+n} - y^2_m)\, dx -$$

$$-2\int_a^b [\theta y'_{m+n}(y'_{m+n} - y'_m) + A y_{m+n}(y_{m+n} - y_m)]\, dx;$$

$$I_{m+n} - I_m = -\int_a^b [\theta(y'_{m+n} - y'_m)^2 + A(y_{m+n} - y_m)^2]\, dx, \tag{14}$$

quindi

$$I_{m+n} \leqslant I_m .$$

Siccome la successione $\{I_m\}$ è non crescente, e inferiormente limitata, esiste $\lim_{m\to\infty} I_m$, e fissato $\varepsilon > 0$ si può trovare un intero positivo M tale che per $m \geqslant M$ e qualunque sia l'intero positivo n si abbia $|I_{m+n} - I_m| < \varepsilon$; la (14) dà allora

$$\int_a^b \theta(y'_{m+n} - y'_m)^2 dx < \varepsilon, \qquad (m \geqslant M;\ n = 0, 1, 2,....).$$

Si ha ora per la limitazione di BUNIKOWSKI - SCHWARZ

$$|y_{m+n}(x) - y_m(x)| = \left|\int_a^x (y'_{m+n} - y'_m)dx\right| \leqslant \int_a^b |y'_{m+n} - y'_m|\, dx;$$

$$|y_{m+n}(x) - y_m(x)| \leqslant (b-a)^{1/2}\sqrt{\int_a^b |y'_{m+n} - y'_m|^2 dx} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(b-a)^{1/2}}{\sqrt{\min.\theta}}\sqrt{\int_a^b \theta(y'_{m+n} - y'_m)^2 dx};$$

$$|y_{m+n}(x) - y_m(x)| < \frac{(b-a)^{1/2}}{\sqrt{\min.\theta}}\, \varepsilon^{1/2}, \qquad (m \geqslant M,\ n = 0, 1, 2,....),$$

e ciò prova la convergenza uniforme di $\{y_m(x)\}$ in (a, b).

Resta infine da provare che si ha effettivamente $\lim_{m\to\infty} y_m(x) = y(x)$.
Si ha

$$I[y] \leqslant I[y_m] \leqslant I[Y_m],$$

perciò

$$0 \leqslant I[y_m] - I[y] \leqslant I[Y_m] - I[y],$$

e per la (10)

$$\lim_{m\to\infty} I[y_m] = I[y]. \tag{15}$$

Poichè per la funzione $F(x, y, y')$ sono soddisfatte le condizioni di un noto teorema di TONELLI (¹), in virtù del teorema di OSGOOD generalizzato (²) risulta che fissato comunque un numero positivo ϱ_1 è possibile determinare un altro numero μ, pure positivo, in modo che si abbia

$$I[\bar{y}(x)] - I[y] > \mu$$

per tutte le curve ordinarie $\bar{y}(x)$, $[\bar{y}(a) = \bar{y}(b) = 0]$, aventi un punto almeno esterno all'intorno (ϱ_1) della $y = y(x)$; ma per la (15) possiamo scegliere un intero positivo m_0 tale che per $m \geqslant m_0$ sia

$$I[y_m] - I[y] \leqslant \mu,$$

inoltre le $\{y_m(x)\}$ sono complessivamente limitate, dovrà aversi allora per $m \geqslant m_0$

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |y_m(x) - y(x)| \leqslant \varrho_1,$$

e perciò la (11) risulta dimostrata.

4. - Concludiamo questo paragrafo esponendo il così detto *metodo delle minime potenze ponderate* elaborato da PICONE e KRYLOFF per i sistemi differenziali del secondo ordine e da MCEVEN per i sistemi differenziali di ordine qualunque, metodo assai vantaggioso dal punto di vista del calcolo effettivo delle soluzioni (³).

(¹) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, II, p. 282, teor. I. Sia $\min.\ \theta = \theta_0$, e salvo a moltiplicare la (6) per una costante positiva, supponiamo $\theta_0 > 1$. Se nel campo A' è $|2fy| \geqslant M^2$ si ha $F(x, y, y') \geqslant \theta_0 y'^2 - M^2 > y'^2$ per $|y'| > M(\theta_0 - 1)^{-1/2}$.

(²) L. TONELLI, op. sopra cit. II, pp. 383-384.

(³) Cfr. M. PICONE, N. KRYLOFF, lav. cit. nel n. 3; cfr. pure W. H. MCEVEN: *a) Problems of closest approximation connected with the solution of linear differential equations*, Trans. of the Am. Math. Soc., 33 (1911), pp. 979-997; *b) On the approximate solution of linear differential equations with boundary conditions*, Bull. of the Am. Math. Soc., 38 (1932), pp. 887-894.

A proposito del metodo delle minime potenze ponderate è da notare che la prima maggiorazione dell'errore trovasi in M. PICOME, lav. cit. nel n. 3, p. 242.

Consideriamo il sistema differenziale formato dall'equazione differenziale di ordine m

$$L(y) \equiv \frac{d^m y}{dx^m} + Q_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \dots + Q_m(x)y = R(x), \tag{16}$$

con $Q_1(x)$, $Q_2(x)$,...., $Q_m(x)$, $R(x)$ continue in (a, b), e da m condizioni ai limiti (α_i, β_i costanti)

$$U_i(y) \equiv \sum_{j=1}^{m} \{\alpha_i^{(j-1)} y^{(j-1)}(a) + \beta_i^{(j-1)} y^{(j-1)}(b)\} = h_i, \tag{17}$$
$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

dove le U_i, pensate come forme lineari nelle $y(a)$, $y'(a)$,...., $y^{(m-1)}(a)$; $y(b)$, $y'(b)$,...., $y^{(m-1)}(b)$, sono linearmente indipendenti.

Supponiamo anche che non esista alcun polinomio $P_n(x)$, non identicamente nullo, tale che $L(P_n) \equiv 0$, e che il sistema ridotto del sistema (16), (17) [Cap. V, § 3, n. 3, *a*)] sia incompatibile.

Nelle nostre ipotesi il sistema (16), (17) ammette una e una sola soluzione [Cap. V, § 3, n. 3, *a*)] che ci proponiamo approssimare.

Sussiste (nelle ipotesi dichiarate) il teorema: *Fissate comunque le costanti*

$$r;\quad r_1, r_2, \dots, r_m;\quad C_1, C_2, \dots, C_m$$

con

$$r > 1;\quad r_i \geqslant 1,\quad C_i > 0,\qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

e indicato con $P_n(x)$ il polinomio di grado n che minimizza l'espressione

$$I(P_n) = \int_a^b |L(P_n) - R(x)|^r dx + \sum_{i=1}^{m} C_i |U_i(P_n) - h_i|^{r_i}, \tag{18}$$

supposto cioè che $P_n(x)$ sia il polinomio **approssimante** *di* *ordine n dell'espressione* (18), *allora se $y(x)$ è l'integrale del sistema differenziale* (16), (17), *si ha uniformemente in* (a, b)

$$\lim_{n\to\infty} |y^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| = 0$$

per $k=0, 1, \ldots, m-1$ (¹).

a) Proviamo che *per ogni intero $n \geqslant 0$, esiste corrispondentemente uno e un solo polinomio di grado n,* (polinomio approssimante) *che minimizza $I(P_n)$.* Seguiremo per la dimostrazione un ragionamento di JACKSON (²).

i) Osserviamo che se $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sono n funzioni di quadrato sommabile in (a, b), e ivi linearmente indipendenti, e se in (a, b) si ha

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) = \varphi(x), \tag{19}$$

e in quasi tutto (a, b), $|\varphi(x)| \leqslant M$, esiste allora una costante K dipendente soltanto dalle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, e dall'intervallo (a, b), tale che

$$|c_r| \leqslant KM, \qquad (r=1, 2, \ldots, m). \tag{20}$$

Dalla (19) si ha infatti

$$c_1\int_a^b \varphi_1\varphi_r dx + \ldots + c_r\int_a^b \varphi_r^2 dx + \ldots + c_n\int_a^b \varphi_n\varphi_r dx = \int_a^b \varphi\varphi_r dx, \tag{21}$$
$$(r=1, 2, \ldots, n),$$

è inoltre

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\varphi_r(x)dx\right| \leqslant M\int_a^b |\varphi_r(x)|\, dx,$$

e poichè il sistema (21), lineare nelle $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ha per determinante il determinante di GRAM $G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) > 0$ (³), ne viene

(¹) Nella seconda delle memorie di MCEVEN, prima citate, si dimostra il teorema anche nell'ipotesi meno restrittiva $r>0$, $r_i>0$ ma in questo caso si può perdere l'unicità di P_n.

(²) D. JACKSON: *A generalized problem in weighted approximation*, Trans. of the Am. Math. Soc., 26 (1924), pp. 133-154.

(³) Cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (Bologna, 1935), p. 9.

che se risolviamo detto sistema con la regola di CRAMER, si ottengono appunto le limitazioni (20).

ii) È facile provare che se consideriamo la classe dei polinomi di grado n

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$$

per i quali risulta

$$\int_a^b |L(P_n) - R(x)|^r dx \leqslant M, \qquad (r>1),$$

esiste una costante l tale che $-l \leqslant c_i \leqslant l$, $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$.

Si ha infatti

$$L(P_n) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

ove le funzioni $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, che si rappresentano ciascuna come una somma di un numero finito di termini della forma $x^lQ_r(x)$ con coefficienti interi, sono continue in (a, b). Si ha per le limitazioni di SCHWARZ-HÖLDER-RIESZ e di MINKOWSKI (¹)

$$\left|c_0\int_a^x \varphi_0(x)dx + c_1\int_a^x \varphi_1(x)dx + \ldots + c_n\int_a^x \varphi_n(x)dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |L(P_n)|\, dx \leqslant (b-a)^{(r-1)/r}\left[\int_a^b |L(P_n)|^r\right]^{1/r}$$
$$\leqslant (b-a)^{(r-1)/r}\left[\int_a^b [\,|L(P_n) - R(x)| + |R(x)|\,]^r\right]^{1/r}$$
$$\leqslant (b-a)^{(r-1)/r}\left\{\left[\int_a^b |L(P_n) - R(x)|^r\right]^{1/r} + \left[\int_a^b |R(x)|^r\right]^{1/r}\right\} \leqslant M_1,$$

e perciò se le $n+1$ funzioni $\int_a^x \varphi_0(x)dx, \int_a^x \varphi_1(x)dx, \ldots, \int_a^x \varphi_n(x)dx$, sono linearmente indipendenti in (a, b), per *i*) le $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sono tutte comprese in un comune intervallo $(-l, l)$.

(¹) Cfr. ad es. S. KACZMARZ, H. STEINHAUS: *Theorie der Orthogonalreihen*, (Warszawa, 1935), p. 10.

Il ragionamento cade in difetto se esistono delle costanti $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ non tutte nulle tali che qualunque sia x in (a, b) si abbia

$$\bar{c}_0 \int_a^x \varphi_0(x)dx + \bar{c}_1 \int_a^x \varphi_1(x)dx + \dots + \bar{c}_n \int_a^x \varphi_n(x)dx = 0,$$

od anche $\bar{c}_0\varphi_0(x) + \bar{c}_1\varphi_1(x) + \dots + \bar{c}_n\varphi_n(x) = 0$, se esiste cioè un polinomio di grado n, $\bar{P}_n(x)$, non identicamente nullo, tale che $L(\bar{P}_n) = 0$, caso da noi escluso.

iii) Possiamo ora dimostrare l'esistenza di un polinomio approssimante $I(P_n)$. Si consideri la totalità di tutti i polinomi P_n, di grado n, tali che $I[P_n] \leqslant M$; risulterà per essi

$$\int_a^b |L(P_n) - R|^r dx \leqslant M,$$

e per *ii*) i coefficienti $c_0, c_1, \dots, c_n$ di tutti questi polinomi sono compresi in un intervallo $(-l, l)$. Ma se le variabili $c_0, c_1, \dots, c_n$ variano ciascuna in $(-l, l)$, $I(P_n)$ risulta una loro funzione continua, esisterà quindi almeno un sistema di valori di $c_0, c_1, \dots, c_n$, cioè un polinomio P_n, per il quale $I(P_n)$ assume il valore minimo.

iiii) Vogliamo infine dimostrare l'unicità del polinomio approssimante. Sia infatti γ il minimo di $I(P_n)$ e per due polinomi P_n, $\bar{P}_n$ si abbia

$$(22) \quad \begin{cases} \gamma = \int_a^b |L(P_n) - R(x)|^r dx + \sum_{i=1}^m C_i |U_i(P_n) - h_i|^{r_i}, \\ \gamma = \int_a^b |L(\bar{P}_n) - R(x)|^r dx + \sum_{i=1}^m C_i |U_i(\bar{P}_n) - h_i|^{r_i}, \end{cases}$$

e dimostriamo che $P_n(x) \equiv \bar{P}_n(x)$.

Posto

$$P_n^*(x) = (P_n + \bar{P}_n)/2$$

si ha

$$L(P_n^*) - R(x) = [\{L(P_n) - R(x)\} + \{L(\bar{P}_n) - R(x)\}]/2,$$
$$U_i(P_n^*) - h_i = [\{U_i(P_n) - h_i\} + \{U_i(\bar{P}_n) - h_i\}]/2,$$

e poichè per $m > 1$, si ha

$$|(x_1 + x_2)/2|^m \leqslant (|x_1|^m + |x_2|^m)/2,$$

e il segno uguale vale soltanto se $x_1 = x_2$, (1) ne viene che

$$(23) \quad \begin{cases} |L(P_n^*) - R(x)|^r \leqslant \frac{1}{2}[|L(P_n) - R(x)|^r + |L(\bar{P}_n) - R(x)|^r], \\ |U_i(P_n^*) - h_i|^{r_i} \leqslant \frac{1}{2}[|U_i(P_n) - h_i|^{r_i} + |U_i(\bar{P}_n) - h_i|^{r}], \end{cases}$$

e in esse il segno uguale esige rispettivamente $L(P_n) = L(\bar{P}_n)$, $U_i(P_n) = U_i(\bar{P}_n)$.

Dalle (23) e (22) si ha

$$\int_a^b |L(P_n^*) - R(x)|^r dx + \sum_{i=1}^m C_i |U_i(P_n^*) - h_i|^{r_i} \leqslant \gamma,$$

ma γ è il minimo di $I(P_n)$ e perciò in quest'ultima dovrà valere il segno uguale, ciò che esige in particolare in tutto (a, b), $L(P_n) \equiv L(\bar{P}_n)$, $L(P_n - \bar{P}_n) = 0$, e per le ipotesi fatte, $P_n - \bar{P}_n \equiv 0$.

b) Prima di dimostrare il teorema enunciato è opportuno richiamare alcune conseguenze del teorema di WEIERSTRASS sulla rappresentazione delle funzioni continue come limite di successioni di polinomi.

i) È ben noto, ma lo ritroveremo brevemente, che *se $y(x)$ è continua insieme alle sue derivate $y'(x), y''(x), \dots, y^{(m)}(x)$, si può trovare una successione di polinomi $\{q_n(x)\}$ tale, che fissato comunque $\sigma > 0$, esiste corrispondentemente un intero n_0 tale che per $n \geqslant n_0$ risulti in* (a, b)

$$(24) \quad |y^{(k)}(x) - q_n^{(k)}(x)| < \sigma, \quad \text{per} \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (2).$$

Infatti poichè $y^{(m)}(x)$ è continua in (a, b), per il teorema di WEIERSTRASS, si può determinare una successione di polinomi $\{\bar{q}_n(x)\}$ la quale per $n \to \infty$, converge uniformemente in (a, b) verso $y^{(m)}(x)$; fissato perciò un $\eta > 0$ esiste un ν_0 tale che per $\nu \geqslant \nu_0$ risulta

$$|y^{(m)}(x) - \bar{q}_\nu(x)| < \eta, \quad \text{per} \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad \nu \geqslant \nu_0.$$

---

(1) La disuguaglianza segue dal fatto che la funzione $|x|^m$, se $m > 1$, è concava verso l'alto.

(2) Per il teorema di WEIERSTRASS cfr. ad es. CH. J. DE LA VALLÉE-POUSSIN: *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, (Paris, 1919), p. 2.

Si ha

$$y(x)=\frac{1}{(m-1)!}\int_a^x (x-t)^{m-1}y^{(m)}(t)dt+y(a)+$$
$$+\frac{x-a}{1!}y'(a)+\dots+\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}y^{(m-1)}(a)$$

e posto

$$q_n(x)=\frac{1}{(m-1)!}\int_a^x (x-t)^{m-1}\bar{q}_\nu(t)dt+y(a)+$$
$$+\frac{x-a}{1!}y'(a)+\dots+\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}y^{(m-1)}(a),$$

$q_n(x)$ è un polinomio di grado $n=\nu+m\geqslant\nu_0+m$, e si ha

$$|y^{(k)}(x)-q_n^{(k)}(x)|\leqslant\frac{1}{(m-k-1)!}\int_a^x |x-t|^{m-k-1}\,|y^{(m)}(t)-\bar{q}_\nu(t)|\,dt$$
$$\leqslant\eta\,\frac{(b-a)^{m-k}}{(m-k)!},$$

e le (24) saranno soddisfatte ove si prenda η in guisa che

$$\eta(b-a)^{m-k}/(m-k)!<\sigma \quad \text{per} \quad k=0,\ 1,\dots,\ m.$$

ii) Dimostriamo ora che *se $y(x)$ è continua in (a, b) insieme alle sue derivate fino all'ordine m, e se*

$$U_i(y)=h_i, \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ m),$$

si può allora determinare una successione di polinomi $\{p_n(x)\}$, $n=2m-1$, $2m,\dots,$ ciascuno di grado uguale al suo indice, tali che

$$U_i(p_n)=h_i, \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ m),$$

e per i quali sussistono in (a, b) le limitazioni

$$|y^{(k)}(x)-p_n^{(k)}(x)|\leqslant\varepsilon_n, \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\dots,\ m),$$

risultando $\{\varepsilon_n\}$ una successione a termini costanti, convergente allo zero,

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$$

Sia infatti $\{q_n(x)\}$ la successione determinata in *i*); se poniamo

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}.[|y(x)-q_n(x)|,\ |y'(x)-q_n'(x)|,\dots,\ |y^{(m)}(x)-q^{(m)}(x)|]=\sigma_n$$

si ha
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0.$$

Posto

$$g_i=h_i-U_i(q_n), \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ m),$$

si ha

(25) $$|g_i|=|U_i(y)-U_i(q_n)|=|U_i(y-q_n)|\leqslant C_1\sigma_n, \qquad (i=1,\ 2,\dots,\ m)$$

dove C_1 è una costante indipendente da n.

Ad ogni $q_n(x)$ associamo un polinomio $q(x)$ di grado $2m-1$ di cui fisseremo tra poco la scelta.

Le m forme $U_1(q)$, $U_2(q),\dots,$ $U_m(q)$ sono lineari nelle variabili

$$q(a),\ q'(a),\dots,\ q^{(m-1)}(a); \qquad q(b),\ q'(b),\dots,\ q^{(m-1)}(b)$$

e si prendano altre m forme lineari $U_{m+1}(q),\dots,$ $U_{2m}(q)$ nelle stesse variabili in modo che $U_1(q)$, $U_2(q),\dots,$ $U_m(q)$; $U_{m+1}(q),\dots,$ $U_{2m}(q)$ siano linearmente indipendenti. Determiniamo $q(a), q'(a),\dots, q^{(m-1)}(a)$; $q(b)$, $q'(b),\dots,$ $q^{(m-1)}(b)$ dal sistema lineare

$$U_1(q)=g_1, \qquad U_2(q)=g_2,\dots, \qquad U_m(q)=g_m,$$
$$U_{m+1}(q)=0, \qquad U_{m+2}(q)=0,\dots, \qquad U_{2m}(q)=0,$$

e osserviamo che a motivo delle (25) esisterà una costante C_2, indipendente da n, tale che

$$|q^{(k)}(a)|<C_2\sigma_n, \qquad |q^{(k)}(b)|<C_2\sigma_n, \qquad (k=0,\ 1,\dots,\ m-1).$$

Si avrà allora

$$q(x)=q(a)+\frac{(x-a)}{1!}q'(a)+\dots+\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}q^{(m-1)}(a)+$$
$$+(x-a)^m[A_m+A_{m+1}(x-b)+\dots+A_{2m-1}(x-b)^{m-1}],$$

dove A_m, $A_{m+1},\dots,$ A_{2m-1} si esprimono linearmente per $q(a)$, $q'(a),\dots,$ $q^{(m-1)}(a)$, $q(b)$, $q'(b),\dots,$ $q^{(m-1)}(b)$, ed esiste quindi una costante C', indipendente da n, tale che per $a\leqslant x\leqslant b$ si ha

$$|q^{(k)}(x)|<C'\sigma_n, \qquad (k=0,\ 1,\dots,\ m-1).$$

Posto

$$p_n(x)=q^{(x)}+q_n(x),$$

$p_n(x)$ è un polinomio di grado $n \geqslant 2m-1$, che soddisfa le m condizioni ai limiti

$$U_i(p_n)=U_i[q_n+q]=U_i(q_n)+U_i(q)=h_i-g_i+g_i=h_i,$$
$$(i=1, 2,\ldots, m)$$

e si ha inoltre per $a \leqslant x \leqslant b$, $k=0, 1,\ldots, m$,

$$|y^{(k)}(x)-p_n^{(k)}(x)|=|y^{(k)}(x)-q_n^{(k)}(x)-q^{(k)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |y^{(k)}(x)-q_n^{(k)}(x)|+|q^{(k)}(x)|<(1+C')\sigma_n,$$

e perciò se $\varepsilon_n=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|y^{(k)}(x)-p_n^{(k)}(x)|$, $(k=0, 1,\ldots, m$, si ha

$$\varepsilon_n<(1+C')\,\sigma_n, \quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$$

c) Dimostriamo ora il teorema enunciato. Sia dunque $y(x)$ la soluzione del sistema (16), (17), e $\{P_n(x)\}$ la successione dei polinomi approssimanti.

Poniamo

$$F(x)=y(x)-p_n(x),$$

ove $\{p_n(x)\}$ è la successione di polinomi costruita in *b*), *ii*) per la soluzione $y(x)$; la funzione $F(x)$ soddisfa le m condizioni

$$(26) \qquad U_i(F)=0, \qquad (i=1, 2,\ldots, m),$$

e se poniamo

$$(27) \qquad L(F)=Y(x),$$

$F(x)$ rappresenta l'unica soluzione del sistema (26), (27).

Posto ancora

$$P_n(x)=p_n(x)+\pi_n(x),$$

è

$$U_i(P_n)=h_i+U_i(\pi_n),$$
$$L(P_n)=L(p_n)+L(\pi_n)=L(y)-L(F)+L(\pi_n)=R(x)-Y(x)+L(\pi_n),$$
$$|L(P_n)-R(x)|^r=|L(\pi_n)-Y|^r,$$

e perciò π_n *è il polinomio minimante di grado n dell'espressione*

$$\int_a^b |L(\Pi_n)-Y|^r dx+\sum_{i=1}^m C_i|U_i(\Pi_n)|^{r_i},$$

dove Π_n rappresenta un generico polinomio di grado n.

Sia

$$(28) \qquad \gamma=\int_a^b |L(\pi_n)-Y|^r dx+\sum_{i=1}^m C_i|U_i(\pi_n)|^{r_i},$$

ed osservato che 0 è un particolare polinomio di grado n, e che $U_i(0)=0$, si avrà

$$\gamma \leqslant \int_a^b |Y|^r dx=\int_a^b |L(F)|^r dx=$$
$$=\int_a^b |\{y^{(m)}(x)-p_n^{(m)}(x)\}+\sum_{j=1}^m Q_j(x)[y^{(m-j)}(x)-p_n^{(m-j)}(x)]|^r dx,$$

e se M indica il massimo valore assoluto delle $|Q_j(x)|$ in (a, b), $(j=1, 2,\ldots, m)$, e si pone $H=(1+Mm)^r(b-a)$, risulterà

$$(29) \qquad \gamma \leqslant H\varepsilon_n^r.$$

Siccome ogni termine del secondo membro della (28) è non negativo, e perciò non superiore a γ, si avrà

$$\int_a^b |L(\pi_n)-Y|^r dx=\int_a^b |L(\pi_n-F)|^r dx \leqslant \gamma,$$
$$|U_i(\pi_n)| \leqslant (\gamma/C_i)^{1/r_i}, \qquad (i=1, 2,\ldots, m),$$

e per la (29)

$$(30) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b |L(F-\pi_n)|^r dx \leqslant H\varepsilon_n^r, \\ |U_i(\pi_n)| \leqslant (H/C_i)^{1/r_i}\varepsilon_n^{r/r_i}, \qquad (i=1, 2,\ldots, m). \end{cases}$$

Se poniamo

$$u(x)=F(x)-\pi_n(x), \qquad L(u)=Z(x);$$

la funzione $u(x)$ soddisfa il sistema differenziale

$$L(u)=Z(x),$$
$$U_i(u)=-U_i(\pi_n), \qquad (i=1, 2,\ldots, m).$$

Sia $G(x, \xi)$ la funzione di GREEN corrispondente a quest'ultimo sistema [Cap. V, § 3, n. 2], e sia $G_i(x)$ la soluzione del sistema

$$L(y)=0,$$
$$U_1(y)=....=U_{i-1}(y)=0, \quad U_i(y)=1, \quad U_{i+1}(y)=....=U_m(y)=0,$$
$$(i=1, 2,...., m);$$

si avrà [Cap. V, § 3, n. 3, c)]

$$u^{(k)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^k}{\partial x^k} G(x, \xi)Z(\xi)\,d\xi-\sum_{i=1}^m G_i^{(k)}(x)U_i(\pi_n),$$
$$(k=0, 1, 2,...., m-1).$$

Le funzioni $|\partial^k G(x, \xi)/\partial x^k|$, $|G_i^{(k)}(x)|$, $(k=0, 1, 2,...., m-1)$ sono limitate in (a, b), esiste quindi una costante assoluta $\bar{H}$ (indipendente da n) tale che

(31) $$|u^{(k)}(x)|\leqslant \bar{H}\left[\int_a^b |Z(\xi)|\,d\xi+\sum_{i=1}^m |U_i(\pi_n)|\right],$$
$$(k=0, 1, 2,...., m-1),$$

ma dalla limitazione di SCHWARZ-HÖLDER-RIESZ si ha

$$\int_a^b |Z(\xi)|\,d\xi\leqslant(b-a)^{(r-1)/r}\left[\int_a^b |Z(\xi)|^r d\xi\right]^{1/r},$$

e perciò le (31), tenuto conto delle (30), dànno per $a\leqslant x\leqslant b$,

$$|u^{(k)}(x)|\leqslant\bar{H}[(b-a)^{(r-1)/r}H^{1/r}\varepsilon_n+\sum_{i=1}^m (H/C_i)^{1/r_i}\varepsilon_n^{r/r_i}],$$

e supposto, come è lecito, $\varepsilon_n<1$, e indicato con s un numero positivo minore di 1, r/r_1, r/r_2,...., r/r_m, si avrà per $a\leqslant x\leqslant b$,

(32) $$|u^{(k)}(x)|\leqslant H'\varepsilon_n^s, \qquad (k=0, 1, 2,...., m-1),$$

dove

$$H'=\bar{H}\,[(b-a)^{(r-1)r}H^{1/r}+\sum_{i=1}^m (H/C_i)^{1/r_i}].$$

Si ha infine

$$u(x)=F(x)-\pi_n(x)=y(x)-[p_n(x)+\pi_n(x)]=y(x)-P_n(x)$$

e le (32) diventano

$$|y^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x)|<H'\varepsilon_n^s, \qquad (k=0, 1, 2,...., m-1),$$

per tutti i valori di x in (a, b), e il teorema è dimostrato.

§ 6. - Integrazione grafica delle equazioni differenziali.

1. Metodo delle linee isocline. Linee integrali. Linee derivate. Linee indicatrici. - 2. Significato geometrico della curva luogo delle cuspidi delle curve integrali. - 3. Tracciamento della curva luogo dei punti di inflessione delle curve integrali. - 4. Metodo delle curve inviluppo. - 5. Integrazione grafica delle equazioni del secondo ordine col metodo del raggio di curvatura di lord KELVIN. - 6. Metodo di integrazione grafica con l'uso della carta lucida.

1. - *a*) Dai procedimenti geometrici indicati nel Cap. I, § 6, n. 1, *a*), *b*), a proposito dell'equazione $y'=f(x, y)$, e del sistema $y'=f(x; y, z)$, $z'=g(x; y, z)$, derivano i procedimenti di integrazione numerica esposti in questo Capitolo, nei §§ 2 e 4, e un metodo di integrazione grafica delle equazioni del primo ordine di cui vogliamo occuparci [1].

b) Sia data l'equazione [Cfr. Cap. IX, § 2]

(1) $$F(x, y; p)=0, \qquad p=dy/dx$$

[1] A GIOVANNI BERNOULLI [*Modus generalis construendi omnes aequationes differentiales primi gradus*, Acta Erud., (Lipsiae, 1694), pp. 435-437] e a L. EULERO [*De constructione aequationum ope motus tractorii....*, Comm. Ac. Petrop., VIII (1736, pubbl. 1741); Opere, Serie I, XXII; pp. 83-107] risalgono i primi procedimenti geometrici per la risoluzione delle equazioni differenziali, ma i metodi più moderni si collegano alla considerazione generale di S. LIE [S. LIE, G. SCHEFFERS: *Geometrie der Beruhrüngstransformationen*, (Leipzig, 1896), p. 188 e segg.] che l'integrazione dell'equazione $f(x, y, y')=0$ equivale a trovare sulla superficie $f(x, y, p)=0$ le linee definite dall'equazione $dy-pdx=0$ [cfr. n. 1, *c*)].

Per la bibliografia cfr. G. CASSINIS: *Calcoli numerici, grafici e meccanici*, (Pisa, 1928), Cap. X, pp. 350-409; E. ZONDADARI: *Integrazione grafica e studio delle equazioni differenziali ordinarie*, (Milano-Roma, Soc. Ed. Dante Alighieri, 1917); C. RUNGE, FR. A. WILLERS: *Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen*, Encykl. der Math. Wissensch., II, C, 2 (Leipzig, 1915); FR. A. WILLERS: *Methoden der praktischen Analysis*, (Berlin, 1928), p. 295 e segg.

e si consideri la famiglia di linee definite dall'equazione

$$F(x, y;\ c) = 0,$$

dove c è un parametro. Una curva Γ_c della famiglia, corrispondente al valore c del parametro, può essere riguardata come il luogo dei punti dove le curve integrali dell'equazione (1) hanno tutte la stessa inclinazione $dy/dx = c$, in altre parole tutti gli ele-

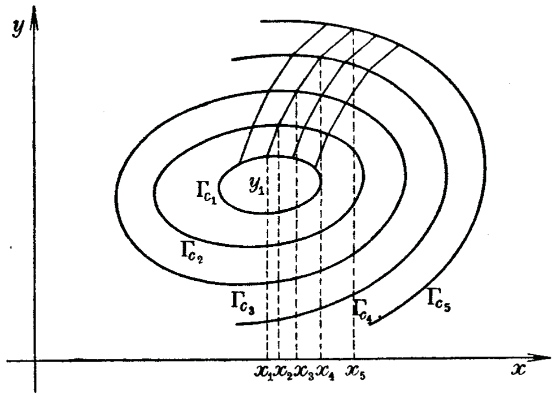

Fig. 29.

menti lineari relativi ai punti della Γ_c e all'equazione (1) hanno la medesima direzione; per questa ragione diremo le linee Γ_c, ***linee isocline***.

Supponiamo di aver tracciato un sistema di linee isocline Γ_{c_1}, Γ_{c_2},...., Γ_{c_n} corrispondente ad una successione crescente c_1, c_2,...., c_n di valori del parametro c. Per costruire graficamente la curva integrale $y = y(x)$ della (1) soddisfacente la condizione iniziale $y(x_1) = y_1$, supponiamo che Γ_{c_1} sia la linea isoclina passante per (x_1, y_1), $[F(x_1, y_1;\ c_1) = 0]$; si consideri allora l'elemento lineare $(x_1, y_1;\ c_1)$ uscente da (x_1, y_1) e sia (x_2, y_2) il suo punto di intersezione con Γ_{c_2}; sia poi (x_3, y_3) il punto di intersezione dell'elemento lineare $(x_2, y_2;\ c_2)$ con Γ_{c_3}; (x_4, y_4) il punto di intersezione dell'elemento lineare $(x_3, y_3;\ c_3)$ con Γ_{c_4};....; [v. fig. 29]; l'inviluppo degli elementi lineari $(x_1, y_1;\ c_1)$, $(x_2, y_2;\ c_2)$, $(x_3, y_3;\ c_3)$.... si assume come il diagramma dell'integrale cercato. Del resto il

teorema di CAUCHY-LIPSCHITZ ci assicura che quando ci si riferisca all'equazione $y' = f(x, y)$, e siano soddisfatte le condizioni dichiarate nel Cap. I, § 6, il diagramma ottenuto approssima ottimamente l'integrale che soddisfa la condizione iniziale $y(x_1) = y_1$.

Si voglia ad esempio integrare l'equazione $y' = xy$; le linee isocline sono le iperboli equilatere di equazione $xy = c$, e le curve integrali hanno l'equazione $y = ce^{x^2/2}$. Un sistema di linee isocline, corrispondenti ad esempio ai valori $c = a/4$, $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, è di facile tracciamento, e col procedimento descritto si costruiranno le curve integrali $y = ce^{x^2/2}$.

c) La costruzione delle curve integrali potrà essere facilitata dalle seguenti considerazioni. Si consideri la superficie Σ di equazione $F(x, y;\ z) = 0$, e se ne faccia la rappresentazione col metodo di MONGE, prendendo come linea di terra l'asse x e come primo piano di proiezione il piano (x, y); l'origine sia il punto O [v. fig. 30].

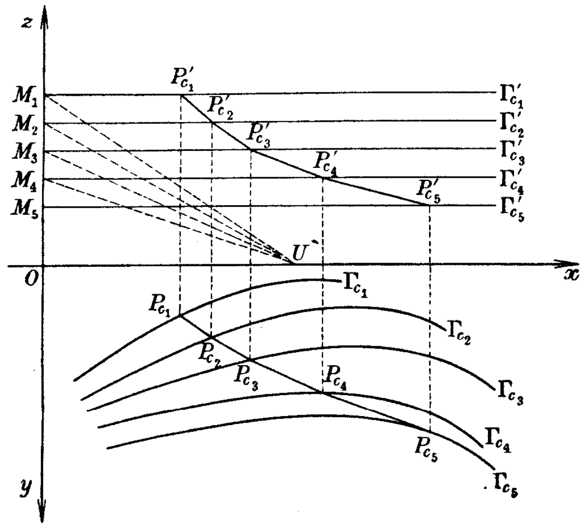

Fig. 30.

Le linee $F(x, y;\ c) = 0$ rappresentano le linee di livello della superficie; nella figura abbiamo indicato le loro prime e seconde proiezioni rispettivamente con i simboli Γ_{c_1}, Γ_{c_2},...., Γ_{c_n},....; Γ'_{c_1}, Γ'_{c_2},...., Γ'_{c_n},....; quest'ultime sono linee rette parallele alla linea di terra e alla distanza successiva c_1, c_2,...., c_n,...., mentre le linee Γ_{c_1}, Γ_{c_2},...., Γ_{c_n},.... sono le linee *isocline* relative alll'equazione data.

Per tracciare la direzione degli elementi lineari uscenti dai punti di Γ_c si procederà in questo modo; si indichi con M il punto in cui Γ_c' taglia l'asse z, e con U il punto della linea di terra tale che $\overline{OU}=1$; la congiungente UM dà la direzione richiesta.

La costruzione della curva integrale della (1) uscente da un punto (x_1, y_1) è ora immediata. Il punto $(x_1, y_1)=P_{c_1}$ appartenga a Γ_{c_1} e sia P'_{c_1} la sua seconda proiezione; P'_{c_1} appartiene a Γ'_{c_1} e la congiungente $P_{c_1}P'_{c_1}$ è perpendicolare alla linea di terra. Detto con M_1 il punto in cui Γ'_{c_1} incontra l'asse z, si costruisca il segmento $\overline{P_{c_1}P_{c_2}}$ avente l'estremo P_{c_2} su Γ_{c_2} e parallelo ad UM_1; detto con M_2 il punto in cui Γ'_{c_2} incontra l'asse z si costruisca il segmento $\overline{P_{c_2}P_{c_3}}$ avente l'estremo P_{c_3} su Γ_{c_3} e parallelo ad UM_2, e così continuando otterremo la poligonale

$$P_{c_1}P_{c_2}P_{c_3}....P_{c_n}....$$

che chiameremo una *poligonale integrale* dell'equazione data.

La poligonale che ha per estremi le seconde proiezioni di questi punti

$$P'_{c_1}P'_{c_2}P'_{c_3}....P'_{c_n}....$$

si chiamerà una *poligonale derivata*, e se $y=y(x)$ è l'integrale della (1) che soddisfa la condizione $y(x_1)=y_1$, quest'ultima poligonale rappresenta graficamente la curva di equazione

$$z=y'(x),$$

o come si dice uua *curva derivata.*

Le due poligonali con i vertici nei punti

$$P_{c_1}\ P_{c_2}....\ P_{c_n}...$$
$$P'_{c_1}P'_{c_2}....P'_{c_n}....$$

rappresentano la prima e la seconda proiezione di una poligonale (in generale sghemba) inscritta in Σ e chiamata *poligonale indicatrice.*

La poligonale indicatrice coincide approssimativamente con la curva tracciata sulla superficie Σ di equazione

$$(2) \qquad F(x, y\,;\, z)=0,$$

lungo la quale è soddisfatta l'equazione

$$(3) \qquad dy-zdx=0\,;$$

tale linea prende il nome di *curva indicatrice.*

Avvertiamo il lettore che il legame tra le curve integrali dell'equazione (1) e le curve appartenenti alla superficie (2), lungo le quali è soddisfatta la (3) (curve indicatrici) è stato considerato da S. Lie [1].

2. - Giova a questo punto dare un significato geometrico alle cose dette nel Cap. IX, § 2, n. 3 sul p discriminante dell'equazione

$$(1) \qquad F(x, y\,;\, z)=0, \qquad [p=z=dy/dx].$$

a curva γ luogo del p discriminante è stata definita come il luogo dei punti (x, y) ottenuto eliminando z tra le due equazioni

$$F(x, y\,;\, z)=0, \qquad F_z(x, y\,;\, z)=0,$$

e se lungo γ si ha $F_x+zF_y\neq 0$, $F_{z^2}\neq 0$, la curva γ è luogo delle cuspidi delle curve integrali della (1). [Cap. IX, § 2, n. 3, *b*)]. Ora la condizione $F_z=0$, si traduce nel fatto che il piano Π tangente alla superficie Σ di equazione $F(x, y\,;\, z)=0$, nel punto $(x, y\,;\, z)$, è parallelo all'asse z; l'altra condizione $F_x+zF_y\neq 0$ equivale al fatto che il piano Π non coincide col piano verticale Π' di equazione

$$Y-y=z(X-x)$$

che ha per traccia sul piano orizzontale la retta tangente alla linea integrale dell'equazione (1) uscente dal punto $(x, y)\equiv P$. I due piani Π e Π' si intersecano secondo una retta r normale al piano (x, y) e tangente alla curva indicatrice, perciò la prima proiezione di r si riduce al punto P, circostanza questa che giusti-

[1] Cfr. S. Lie, G. Scheffers, op. già cit. in *a*); cfr. anche J. Massau, Revue Univ. de Mines, (Liegi), (2), 22 (1887).

fica appunto il comportamento del punto P come punto cuspidale della curva integrale passante per esso. Si ha inoltre che *la curva γ fa parte del contorno apparente di Σ sul piano orizzontale*, e la seconda proiezione dalla corrispondente curva di Σ, sempre nell'ipotesi $F_x + zF_y \neq 0$, è il luogo dei punti in cui le linee derivate hanno la tangente verticale.

3. - Possiamo ancora stabilire facilmente una proprietà geometrica collegata con la *linea luogo dei punti di inflessione delle curve integrali* [Cap. IX, § 2, n. 8].

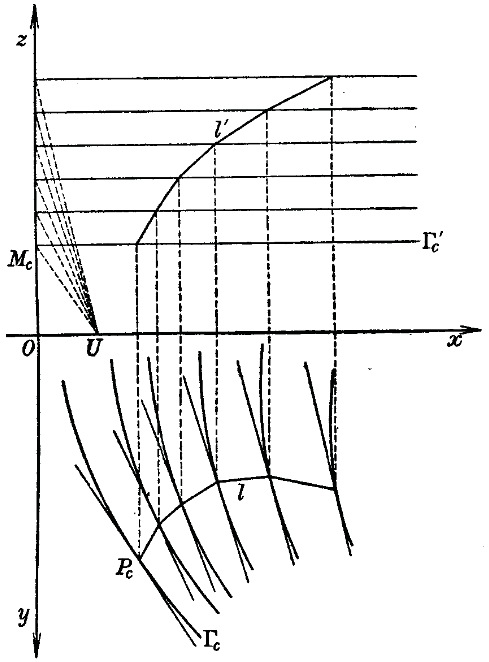

Fig. 31.

Alla superficie Σ appartenga una linea L tale che la retta tangente alla curva indicatrice uscente da ogni suo punto sia orizzontale; chiamate l e l' la prima e la seconda proiezione di L, lungo l'

risulterà $z'=0$, perciò $y''=z'=0$, quindi *la curva l è il luogo dei punti di inflessione delle curve integrali* [e l' il luogo dei punti di massimo o di minimo delle curve derivate].

La costruzione della curva l può essere facilitata con le seguenti considerazioni. Sia $P^{(0)}$ un punto di L; la tangente alla linea indicatrice per $P^{(0)}$ è orizzontale e perciò tangente alla linea di livello Γ di Σ passante per $P^{(0)}$; ne viene che se Γ_c e P_c sono rispettivamente le prime proiezioni di Γ e $P^{(0)}$, la retta tangente a Γ_c in P_c ha il suo coefficiente angolare uguale alla quota z di Γ. Questa osservazione giova per la costruzione per punti della linea l; con le notazioni del n. 1 sia U il punto della linea di terra tale che $\overline{OU}=1$, ed M_c il punto in cui Γ_c' taglia l'asse z; il punto P_c è quel punto di Γ_c in cui la tangente a questa curva è parallela ad UM_c, e il luogo dei punti P_c è la linea l richiesta ([1]) (v. fig. 31).

Avvertiamo il lettore che nella costruzione grafica delle curve integrali indicata al n. 1, per una maggiore esattezza del disegno, bisognerà evitare di assumere come punti iniziali i punti di inflessione delle curve integrali, ossia i punti di l.

4. - Vogliamo descrivere un altro procedimento grafico di integrazione delle equazioni del primo ordine

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

detto *metodo delle curve inviluppo* (in tedesco *strahlkurven*).

Si fissi una retta r_0 parallela all'asse y di ascissa x_0 e si consideri l'inviluppo Γ_0 delle rette passanti per il punto (x_0, y), variabile su r_0, e con la direzione $f(x_0, y)$. Tali rette hanno l'equazione

$$Y - y = (X - x_0) f(x_0, y), \tag{5}$$

e l'equazione della loro curva inviluppo si otterrà eliminando y tra la (5) e l'equazione

$$-1 = (X - x_0) f_y(x_0, y),$$

di guisa che le coordinate (X, Y) di un punto mobile su F_0 hanno l'espressione

$$X = x_0 - 1/f_y(x_0, y), \qquad Y = y - f(x_0, y)/f_y(x_0, y). \tag{6}$$

([1]) Cfr. GIOVANNI BERNOULLI, op. cit. al n. 1, p. 436.

Sia r_0, r_1, r_2, r_3, r_4,.... una successione di rette equidistanti parallele all'asse y, e Γ_0, Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4,.... siano le corrispondenti curve inviluppo; siano inoltre s_0, s_1, s_2, s_3, s_4,.... le bisettrici delle strisce r_0r_1, r_1r_2, r_2r_3, r_3r_4,.....

Per costruire graficamente la curva integrale della (1) uscente da un punto A_0 di r_0 si conduce da A_0 la tangente t_0 a Γ_0 e

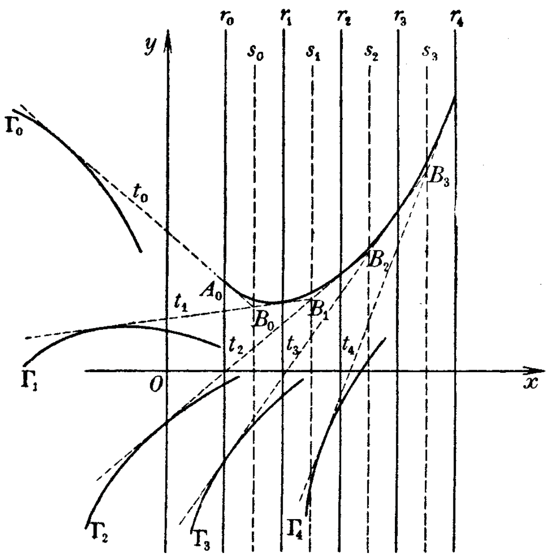

Fig. 32.

sia $\overline{A_0B_0}$ il segmento intercetto su t_0 dalla striscia r_0s_0; si conduca poi da B_0 la tangente t_1 a Γ_1 e sia $\overline{B_0B_1}$ il segmento intercetto dalla striscia s_0s_1 su t_1; analogamente sia $\overline{B_1B_2}$ il segmento intercetto dalla striscia s_1s_2 sulla tangente t_2 condotta da B_1 a Γ_2, e così si continui.

La poligonale con i lati $\overline{A_0B_0}$, $\overline{B_0B_1}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$,.... rappresenta graficamente l'integrale cercato, e se il diagramma vuol limitarsi alla striscia di piano compresa tra r_0 ed r_n, si prenderà come ultimo lato della poligonale il segmento intercetto su t_n dalla striscia $s_{n-1}r_n$ (v. fig. 32).

5. - Passando ora alle equazioni del secondo ordine esporremo il così detto metodo di integrazione grafica del raggio di curvatura di lord KELVIN [1].

Si consideri l'equazione del secondo ordine

$$y''=f(x,\, y,\, y'), \tag{7}$$

e $f(x, y, y')$ verifichi condizioni atte ad assicurare l'esistenza in un intorno del punto x_0 di una curva integrale Γ di equazione $y=y(x)$ soddisfacente le condizioni iniziali

$$y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y_0'. \tag{8}$$

L'espressione della curvatura $1/\varrho$ di Γ nel punto $(x, y(x))$ è dato da

$$1/\varrho=y''/(1+y'^2)^{3/2}, \qquad (\varrho=\textit{raggio di curvatura})$$

e se α è l'angolo tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ che la retta tangente alla curva Γ, nel punto $(x, y(x))$, forma con l'asse delle x positive, si ha

$$1/\varrho=f(x,\, y\,;\ \mathrm{tg}\ \alpha)\,|\cos^3\alpha|, \tag{9}$$

e ϱ risulterà positivo o negativo secondo che la curva Γ nel punto $(x, y(x))$ volge la concavità o la convessità all'asse delle y positive.

Per tracciare graficamente la curva Γ, detto con A_0 il punto del piano (x, y) di coordinate (x_0, y_0), si consideri per A_0 una retta t_0 che formi con la direzione positiva dell'asse x un angolo α_0 tale che

$$\mathrm{tg}\ \alpha_0=y_0'$$

e sia C_0 il punto situato sulla normale a t_0 in A_0 tale che

$$\overline{A_0C_0}=\varrho_0=1/f(x_0,\, y_0,\, \mathrm{tg}\ \alpha_0)\,|\cos^3\alpha_0|,$$

con la convenzione che la direzione $\overrightarrow{A_0C_0}$ formi con l'asse y positivo un angolo acuto od ottuso secondo che $f(x_0, y_0, \mathrm{tg}\ \alpha_0)>0$ oppure $f(x_0, y_0, \mathrm{tg}\ \alpha_0)<0$ (v. fig. 33).

[1] Lord KELVIN: *On graphic solution of dynamical problems*, Philos. Mag., (5), 34 (1892), pp. 443-448.

Centro in C_0, con raggio $\overline{C_0A_0}$ si descriva un arco di cerchio $\widehat{A_0A_1}$ di ampiezza θ abbastanza piccola; la retta tangente in A_1 a quest'arco forma con la direzione positiva dell'asse x l'angolo $a_0+\theta$. Sia

$$A_1=(x_1, y_1), \qquad 1/\varrho_1=f(x_1, y_1, \operatorname{tg}(a_0+\theta))\,|\cos^3(a_0+\theta)|,$$

e si prenda sul raggio $\overrightarrow{A_1C_0}$ un punto C_1 che disti ϱ_1 dal punto

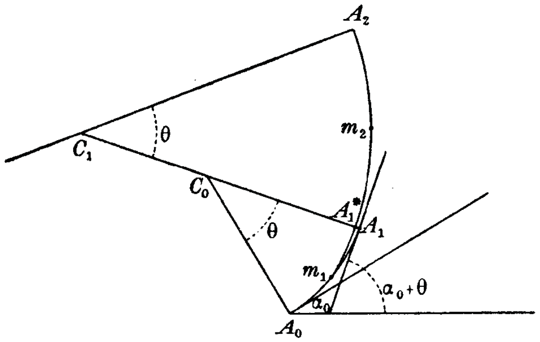

Fig. 33.

medio m_1 di $\widehat{A_0A_1}$, e con centro in C_1, e raggio ϱ_1, si costruisca l'arco $\widehat{m_1A_2}$ tale che $A_1\widehat{C}A_2=\theta$.

Se il punto A_1^* in cui quest'arco taglia $\overline{C_0A_1}$ è abbastanza prossimo ad A_1, e si indica con m_2 il punto medio di $\widehat{A_1^*A_2}$ l'arco $\widehat{m_1m_2}$ approssima la curva integrale, in caso opposto partendo da A_1^* si opererà su di esso, come su A_1, fino a quando si otterrà una sufficiente coincidenza dei punti considerati.

Ottenuto A_2 si opererà su questo come su A_1, è così di seguito; gli archi $\widehat{A_0m_1}$, $\widehat{m_1m_2}$,.... dànno una rappresentazione grafica approssimata della curva integrale Γ.

6. - Recentemente BAYLEY e SOMERVILLE [1] hanno proposto un procedimento di integrazione grafica basato sull'uso della carta

[1] V. A. BAYLEY, J. M. SOMERVILLE: *The graphical solution of ordinary differential equations*, Philos. Mag., 26 (1938), pp. 1-31.

lucida che qui ci limiteremo ad esporre per il caso particolare dell'equazione

$$(10) \qquad \chi(y)\frac{dy}{dx}+y=f(x),$$

ma il procedimento è stato esteso dagli stessi Autori ad equazioni del tipo

$$\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(x)\frac{d^ky}{dx^k}=f(x), \qquad \sum_{k=1}^{n}\psi_k(y)\frac{d^ky}{dx^k}=f(x).$$

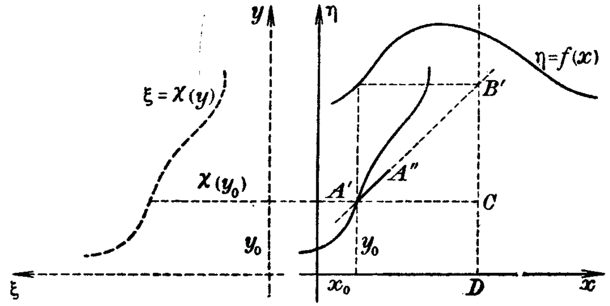

Fig. 34.

Si voglia costruire graficamente un integrale della (10) che soddisfi la condizione iniziale

$$y(x_0)=y_0.$$

Si tracci in un piano a, riferito ad un sistema di assi ortogonali (x, η) la curva $\eta=f(x)$ e si segni il punto iniziale $A'\equiv(x_0, y_0)$. [v. fig. 34].

Su un foglio di carta trasparente β si tracci una coppia di assi ortogonali (ξ, y) orientati in verso opposto di (x, η), e adottando la medesima unità di misura si disegni la curva di equazione $\xi=\chi(y)$.

Si porti β su a in modo che la direzione positiva dell'asse ξ coincida con la direzione negativa dell'asse x, e l'asse y passi per A'. Sul foglio β seguiamo il punto B ove l'asse y taglia la curva $f(x)$ e spostiamo il foglio β in modo che ξ scorra su x fino a quando la curva $\chi(y)$ passa per A'; per effetto di tale traslazione la nuova posizione di B sarà sovrapposta ad un punto B' del piano α, ed è subito visto che la retta $\overline{A'B'}$ è la tangente in A' alla curva integrale cercata.

Infatti con le notazioni della figura si ha

$$\overline{CB'} = \overline{DB'} - \overline{DC} = f(x_0) - y_0,$$

$$\operatorname{tg} \widehat{CA'B'} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{A'C}} = \frac{f(x_0) - y_0}{\chi(y_0)} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0)}.$$

Sulla retta $A'B'$ prenderemo un punto A'' prossimo ad A'; il segmento $\overline{A'A''}$ è allora un elemento della curva integrale: da A'' con lo stesso procedimento potremo far partire un nuovo elemento, e formeremo così una catena di elementi (una poligonale) la quale approssima graficamente l'integrale cercato.

§ 7. - Integrazione meccanica delle equazioni differenziali.

1. Il problema dell'integrazione meccanica. Integratori. Integrometri. Integrafi. - 2. Integrafi cartesiani di E. PASCAL. - 3. Integrafo di VIETORIS.

1. - Il problema della costruzione di strumenti *integratori* [1], di strumenti cioè atti a fornire automaticamente il valore numerico degli integrali delle equazioni differenziali corrispondenti a determinati valori iniziali (*integrometri*) o a tracciare le curve integrali (*integrafi*) è di grande importanza per le applicazioni.

È bene evidente che ai fini di una compiuta conoscenza degli integrali delle equazioni differenziali hanno valore preminente gli *integrafi*. Il più antico di essi, quello di ABDANK-ABAKANOWICZ [2], è costruito per il tracciamento delle curve integrali dell'equazione $y' = f(x)$, e ad E. PASCAL si deve se tale strumento, anzichè rimanere isolato, è diventato il capostipite di tutta una serie di appa-

[1] Per una rassegna dei tipi di integratori cfr. L. JACOB: *Le calcul mécanique, Appareils aritmétiques et algébriques. Intégrateurs.* (Paris, 1911).

[2] Br. ABDANK-ABAKANOWICZ: *Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications. Étude sur un nouveau système d'intégrateurs mécaniques.* (Paris, 1886).

recchi atti ad integrare meccanicamente vaste classi di equazioni differenziali [1].

Noi ci limiteremo nel n. 2 di questo paragrafo ad esporre il principio informatore del cosidetto *integrafo cartesiano di Pascal*, mentre nel n. 3 descriveremo il recente integrafo di VIETORIS basato su un'acuta interpretazione geometrica del metodo della approssimazioni successive.

2. - La figura schematica di un integrafo cartesiano di PASCAL è costituita da un robusto rettangolo $ABCD$ di ottone e acciaio poggiato sul piano di disegno mediante due ruote rugose e uguali R_1, R_2 (vedi fig. 35), e sostenuto poi da un terzo punto di appoggio rappresentato da una piccola ruota di acciaio a margini acuminati (*rotella girante*), che congiunta al rettangolo mediante un carrello mobile (*carrello integrale*) può mutare a piacere l'orientazione del suo piano.

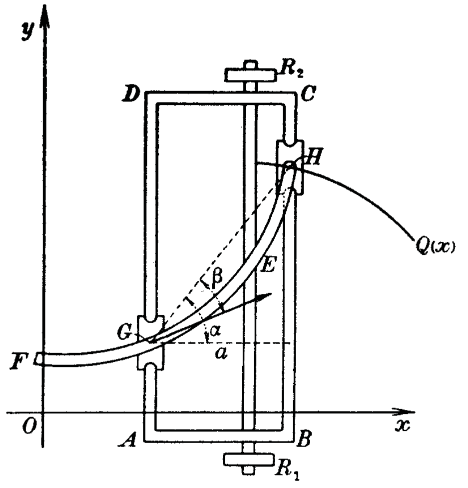

Fig. 35.

I lati $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ hanno la direzione dell'asse positivo delle x, e *il rettangolo può muoversi secondo questa direzione.* Sul lato BC del rettangolo scorre per mezzo di un pernio H munito di una punta rivolta verso il foglio di disegno, un carrello (*carrello differenziale*) provvisto di un manubrio per la guida.

[1] E. PASCAL: *a) I miei integrafi per equazioni differenziali*, Mem. R. Acc. Sc. Napoli, (2), XV, n. 16 (1913), pp. 1-76; *b) La risoluzione meccanica esatta delle equazioni differenziali lineari generali di secondo or-*

Sul lato AD (*guida*), che per semplicità supponiamo rettilineo, scorre il carrello integrale collegato colla rotella girante; quest'ultima è munita di apparecchio scrivente.

Una riga curvilinea $\widehat{EF}$ avente un estremo girevole attorno al pernio H del carrello differenziale, munita di una scanalatura nella quale scorre il pernio G del carrello integrale, collega questi due carrelli; il congegno di collegamento deve esser tale che il piano della rotella girante deve mantenersi durante il movimento costantemente tangente in G alla riga $\widehat{EF}$.

Supponiamo ora che durante il movimento la punta H descriva una curva (differenziale) di equazione

$$y_1 = Q(x), \tag{1}$$

e sia

$$y = y(x) \tag{2}$$

la curva (integrale) descritta dalla punta scrivente del carrello integrale.

Sia $\overline{AB} = a$ (unità di misura dello strumento) e si indichi con α l'angolo che la retta GH forma con la direzione positiva dell'asse x, e con β l'angolo che la tangente alla curva $\widehat{EF}$ in G forma con la corda $\overline{GH}$.

Si ha

$$y' = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{[Q(x) - y] - a \operatorname{tg}\beta}{a + [Q(x) - y] \operatorname{tg}\beta}, \tag{3}$$

ma l'angolo β è funzione soltanto della differenza delle quote dei punti G ed H, e perciò posto

$$\operatorname{tg}\beta = F[Q(x) - y], \tag{4}$$

$$\Phi[Q(x)-y] = \\ = \{[Q(x)-y] - aF[Q(x)-y]\}/\{a + [Q(x)-y]F[Q(x)-y]\} \tag{5}$$

dine, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, (5), 25 (1916), pp. 401-405; *c*) *Sull'integrezione meccanica delle equazioni differenziali, e in particolare di quella lineare di 2° ordine ausiliaria dell'altra non lineare che è fondamentale per la fisica atomica*, Mem. della R. Acc. d'Italia, XI (1940), pp. 209-243.

Cfr. anche P. Scatizzi S. J.: *Nuovo integrafo per equazioni di Abel e di Riccati*, Giorn. di Mat. di Battaglini, 55 (1917), pp. 43-47; G. Cassinis: *Calcoli numerici, grafici e meccanici*, (Pisa, 1928), pp. 388-399.

avremo

$$y' = \Phi[Q(x) - y]. \tag{6}$$

La (6) rappresenta il tipo di equazione differenziale che si integra col particolare integrafo di Pascal ora descritto.

Proveremo inversamente che *assegnata la funzione Φ si può costruire la corrispondente riga curvilinea $\widehat{EF}$.*

Si assuma infatti come riferimento un sistema di coordinate polari ϱ, θ con il polo in H (ϱ raggio vettore, θ anomalia); β rappresenta l'angolo che la corda $\overline{HG}$ forma con la tangente alla riga in H, perciò

$$\operatorname{tg}\beta = \varrho d\theta / d\varrho. \tag{7}$$

Posto

$$Q(x) - y = t, \tag{8}$$

si ha

$$a^2 + t^2 = \varrho^2, \tag{9}$$

e dalla (4)

$$\varrho d\theta / d\varrho = F[\sqrt{\varrho^2 - a^2}]. \tag{10}$$

Dalla (5) si ha

$$\Phi(t) = [t - aF(t)]/[a + tF(t)],$$

$$F(t) = [t - a\Phi(t)]/[a + t\Phi(t)], \tag{11}$$

quindi nota la Φ, quest'ultima dà l'espressione di F, e dalla (10) otteniamo

$$\theta = \int \frac{F[\sqrt{\varrho^2 - a^2}]}{\varrho} d\varrho, \tag{12}$$

perciò con una quadratura si ottiene l'equazione polare della riga corrispondente all'equazione (6).

A Pascal si debbono pure dei dispositivi i quali dànno l'equazione della riga in termini finiti, disegnabile anche con molta facilità per punti [1].

[1] Cfr. E. Pascal, lav. cit. nel n. 1, *a*), p. 7.

3. - a) Chiuderemo questi cenni sugli integrafi, descrivendo quello di VIETORIS, fondato, come abbiamo già avvertito, su una felice interpretazione geometrica del metodo delle approssimazioni successive (¹).

Sia data l'equazione

$$y' = f(x, y), \tag{13}$$

e supponiamo che per $\alpha \leqslant x \leqslant \alpha + a$, $|y - \beta| \leqslant b$, la $f(x, y)$ sia continua e lipschitziana rispetto a y, $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant M|y_2 - y_1|$; allora in un intervallo $(\alpha, \alpha + \delta)$, ove δ è il più piccolo dei numeri a, b/M [Cap. I, § 3, n. 4, c); questo Capitolo, § 1, n. 2], la determinazione di un integrale $y(x)$ che soddisfa la (13) e la condizione iniziale $y(\alpha) = \beta$ può ottenersi col seguente procedimento.

Sia $u(x)$ una funzione continua definita nell'intervallo $(\alpha, \alpha + \delta)$ tale che $|u(x) - \beta| \leqslant b$, e del resto arbitraria, e si costruisca con l'algoritmo delle approssimazioni successive la successione di funzioni $\{y_m(x)\}$ definita con la seguente legge:

$$y_1(x) = \beta + \int_\alpha^x f(x;\ u(x))dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{m+1}(x) = \beta + \int_\alpha^x f(x, y_m(x))dx, \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Per costruire geometricameute la curva Γ_{m+1} di equazione $y = y_{m+1}(x)$, nota la curva Γ_m di equazione $y = y_m(x)$, si può operare in questo modo. Si consideri la totalità degli elementi lineari $[x, y_m(x), f(x, y_m(x))]$ passanti per i punti $(x, y_m(x))$ e con la direzione $f(x, y_m(x))$ [*direzione del campo*] e si dia loro delle traslazioni in guisa che il punto $(x, y_m(x))$ si muova nella *direzione dell'asse* y e che gli elementi inviluppino a traslazione avvenuta,

(¹) L. VIETORIS: a) *Ueber die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Iteration*, Monatsh. für Math., und Phys. 39 (1932), pp. 15-50; 41 (1934), pp. 384-391; 48 (1939), pp. 19-25. b) *Ein einfacher Integraph*, Zeitschr. für Ang. Math. und Mech., 15 (1935), pp. 238-242.

Per altri meccanismi atti all'integrazione di equazioni del secondo ordine cfr. S. ROSSELAND: *Mechanische Integration von Differentialgleichungen*, Naturwissenschaften, 27 (1939), pp. 729-735.

una curva uscente dal punto (α, β); l'inviluppo è appunto la Γ_{m+1} [v. fig. 36].

b) Il VIETORIS osserva che lo spostamento degli elementi lineari nella direzione dell'asse y non è essenziale; uno spostamento in altra direzione, se l'angolo di rotazione non è troppo grande, può interpretarsi come una rotazione del sistema di assi coordinati la quale implica una conseguente modificazione dell'algoritmo iterativo di PICARD, e le curve iterate, ottenute col nuovo procedimento, convergeranno in un intorno di (α, β) verso la stessa curva integrale. Ciò lascia allora supporre che la direzione delle traslazioni degli elementi lineari, anzichè rimanere costante, possa variare da punto a punto, e scegliendo convenientemente tali traslazioni possano ricavarsi nuovi metodi iterativi pel calcolo della soluzione.

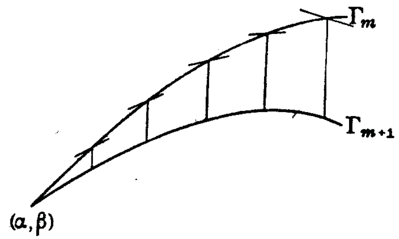

Fig. 36.

Per esempio si può pensare di traslare ciascun elemento lineare $[x, y_m(x), f(x, y_m(x))]$ normalmente alla propria direzione, ossia nella direzione $-1/f(x, y_m(x))$; o come dicesi nella *direzione della normale al campo*. Se le normali al campo lungo la linea Γ_m hanno l'inviluppo L_m [*evoluta del campo relativa a* Γ_m] si può assumere come curva iterata di Γ_m *l'evolvente* Γ_{m+1} di Γ_m [traiettoria ortogonale delle normali al campo lungo Γ_m] uscente da (α, β), [v. fig. 37], e si dirà allora che Γ_{m+1} è la *iterata per evolvente di* Γ_m. Il VIETORIS dimostra che sotto opportune ipotesi (¹) *il proce-*

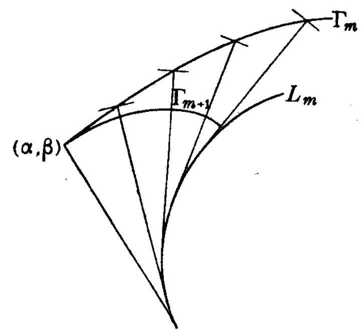

Fig. 37.

(¹) Cfr. mem. cit., § IV, pp. 34-36.

dimento di iterazioni per evolventi conduce alla soluzione dell'equazione.

c) Ma allo stesso Autore si deve un'altra generalizzazione [1]; egli prova, che sotto opportune condizioni, si può costruire una successione di curve iterate convergente verso la curva integrale muovendo i punti $(x, y_m(x))$ anzichè sopra rette sopra un sistema di curve assegnate e modificando nello stesso tempo, da punto a punto, la direzione degli elementi lineari corrispondenti.

Qui, per brevità, ci siamo limitati ad esporre le idee direttive

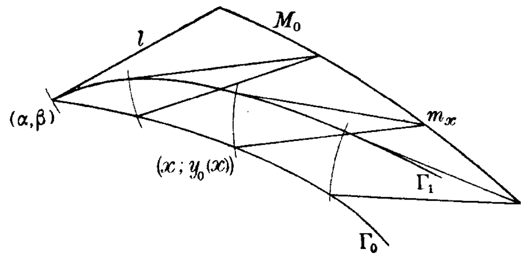

Fig. 38.

del VIETORIS, ma ciò è sufficiente per capire il principio informatore della costruzione del suo integrafo.

Dell'equazione (13), la curva Γ_0 di equazione $y=y_0(x)$, $y(a)=\beta$, sia una soluzione approssimata. Per costruire la curva iterata Γ_1 di Γ_0, supponiamo di far partire da ogni punto $(x, y_0(x))$ di Γ_0, e nella direzione positiva del campo, un segmento di lunghezza costante l; il luogo del suo estremo m_x (v. fig. 38) è una curva che indicheremo con M_0.

Si consideri la famiglia di cerchi con i centri nei punti m_x e di raggio l e la loro traiettoria ortogonale Γ_1 uscente da (a, β), ossia *la trattrice che ha per curva base M_0 e il passo uguale a l.* Diremo Γ_1 la *iterata per trattrici della curva* Γ_0.

Operando su Γ_1, come si è operato su Γ_0, e così di seguito, si ottiene una successione di curve che il VIETORIS dimostra essere convergente verso la curva integrale.

Il procedimento descritto può chiamarsi il *procedimento di*

[1] Cfr. mem. cit., § VI, pp. 40-42.

iterazioni per trattrici; quello per evolventi, considerato in *b*), ne è un caso particolare, esso corrisponde infatti al caso $l=\infty$.

d) Dal procedimento di iterazioni per trattrici deriva la seguente costruzione dell'integrafo di VIETORIS.

Ad un robusto telaio piano siano connessi una ruota R, un'asta piana G rigidamente connessa per un pernio S, una punta scrivente Z normale al telaio ed un crocicchio di fili F (v. fig. 39). Il telaio poggia parallelamente al foglio di disegno per R, Z, G; l'asse della ruota R è normale al piano verticale al foglio per Z ed F e passa per Z.

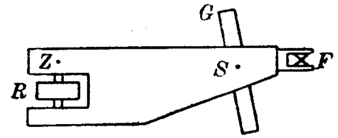

Fig. 39.

Sia l la distanza $\overline{ZF}$, e costruita graficamente una curva Γ_0 approssimante l'integrale dell'equazione (13), passante per il punto (a, β), si tracci la corrispondente curva M_0; posto allora l'integrafo in guisa che Z sia su (a, β) ed F sul corrispondente punto di M_0, si prenda l'apparecchio per G e si trascini sul foglio da disegno in modo che F descriva la curva M_0; la punta scrivente Z traccerà allora Γ_1.

Uno o due passi dell'iterazione sono in genere sufficienti per ottenere una curva integrale la cui precisione rientri nei limiti delle pratiche possibilità.

CAPITOLO XII.

Sopra alcune equazioni differenziali interessanti le applicazioni.

§ 1. - Sul moto di un punto grave pesante in un mezzo resistente.

1. - Il problema che vogliamo considerare è il moto di un proiettile a partire dall'istante in cui esce dalla bocca da fuoco [1]. Il proiettile lo identifichiamo con un punto materiale pesante P, lanciato nell'atmosfera da un punto O con una velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ di modulo v_0. Indichiamo con $\mathbf{g}$ l'accelerazione della gravità che supponiamo costante; sia $\mathbf{v}$ la velocità di P e $\mathbf{t}$ il suo versore; supponiamo poi che l'atmosfera opponga a P una resistenza di modulo F (*funzione resistente, ritardazione*), variabile da punto a punto e diretta in senso contrario a $\mathbf{v}$. Assumiamo come origine del tempo t l'istante in cui P parte da O, e supponiamo che P abbia l'unità di massa. L'equazione del movimento è allora

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{g} - F\mathbf{t} \tag{1}$$

con la condizione iniziale $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.

---

[1] Per una trattazione esauriente del problema cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI: *Nozioni di balistica esterna*, (Bologna, 1935). Cfr. anche K. POPOFF: *Das hauptproblem der äusseren Ballistik*, (Leipzig, 1932); e per un'ampia bibliografia cfr. anche R. d'ADHÉMAR: *La balistique extérieure*, Mémorial des Sciences Math. fasc. 65, (Paris, 1934).

Per evidenti ragioni di simmetria, e come si deduce del resto dall'equazione (1), il proiettile si muove nel piano verticale Π condotto da O parallelo a $\mathbf{v}_0$. Si prenda nel piano Π il punto O come origine di una coppia di assi ortogonali x, y; l'asse y coincida con la verticale volta verso l'alto, e la direzione positiva di x formi con $\mathbf{v}_0$ un angolo a (*angolo di proiezione*) minore di $\pi/2$ [1]. Se

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

esprimono le coordinate di P al tempo t, e v indica il modulo di $\mathbf{v}$, abbiamo

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

dove del radicale prendiamo il valore aritmetico.

Relativamente alla funzione F noi supponiamo che il suo valore in ogni posizione di P sia proporzionale alla densità dell'atmosfera [funzione della posizione occupata dal punto] e dipenda, secondo una legge da determinarsi empiricamente, dalla velocità $\mathbf{v}$; poniamo perciò

$$F = F(t;\ x, y;\ x', y'),$$

e supponiamo che F abbia le seguenti proprietà:

i) F sia definita per qualsiasi sistema di valori reali dei suoi argomenti, continua, e *positiva* quando $v^2 = x'^2 + y'^2 > 0$, lipschitziana rispetto ad x, y, x', y', quando x e y variano in una regione finita qualsiasi, e la somma $x'^2 + y'^2$ si mantiene limitata tra due numeri positivi qualsiasi.

ii) Esista una funzione $\Phi(x, y;\ x', y')$, anch'essa definita per qualsiasi sistema di valori reali dei suoi argomenti, continua e tale che

$$F(t;\ x, y;\ x', y') \leq \Phi(x, y;\ x', y'), \tag{2}$$

$$\Phi(x, y;\ 0, 0) < g, \tag{3}$$

dove g indica il modulo di $\mathbf{g}$.

Se indichiamo con φ l'angolo compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ che la direzione positiva dell'asse x forma col versore $\mathbf{t}$ (*inclinazione della traiettoria*), dalla (1) si ricavano le due equazioni scalari

$$x'' = -F\cos\varphi, \qquad y'' = -g - F\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

---

[1] Tralasciamo di considerare il tiro verticale.

ma si ha $x'=v\cos\varphi$, $y'=v\operatorname{sen}\varphi$, perciò le coordinate x, y del punto P, espresse in funzione di t verificano il sistema

$$(4)\qquad \begin{cases} x''=-Fx'/v, & (x''=0, \text{ se } v=0)\,; \\ y''=-g-Fy'/v, & (y''=-g \text{ se } v=0)\,; \end{cases} \qquad (v=\sqrt{x'^2+y'^2}),$$

con le condizioni iniziali

$$(5)\qquad x(0)=0,\quad y(0)=0,\quad x'(0)=x'_0,\quad y'(0)=y'_0,\quad ^{(1)}$$
$$[x'_0=v_0\cos\alpha>0,\qquad y'_0=v_0\operatorname{sen}\alpha].$$

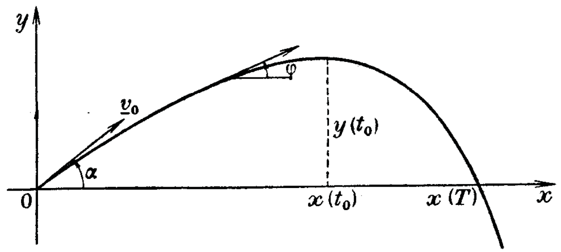

Fig. 40.

2. - In questo numero ci proponiamo di trovare il campo di esistenza della traiettoria e la variazione dell'inclinazione e della componente orizzontale della velocità.

a) Supponiamo dapprima che insieme a $x_0'>0$, sia $y_0'>0$, si abbia cioè

$$x_0'>0,\qquad y_0'>0,$$

e indichiamo con $(0, \Lambda-0)$, $[0<\Lambda\leqslant+\infty]$, il massimo intervallo

(1) Per lo studio degli integrali del sistema (4) nelle ipotesi generali del testo cfr. M. Picone: *a*) *Sul moto dei gravi nell'atmosfera*, Boll. Un. Mat. It. 9 (1930) pp. 96-102; 125-132; *b*) *Sul moto dei gravi in un mezzo resistente*, idem, 10 (1931), pp. 150-167; G. Scorza-Dragoni: *Il moto dei gravi in un mezzo resistente*, Boll. Un. Mat. It. 10 (1931), pp. 141-149. Nella redazione di tutto questo paragrafo ci atteniamo alla seconda delle memorie citate di M. Picone; in tale lavoro, con procedimenti abbastanza semplici, sono ritrovati i risultati di G. Scorza-Dragoni, e sono inoltre considerati i moti verticali.

di tempo, *aperto a destra*, in cui è possibile definire una soluzione del sistema (4), (5) con la condizione

$$(6)\qquad v>0.$$

Dalle (4), per t variabile in $(0, \Lambda-0)$ si ha

$$(7)\qquad \frac{dx'^2}{dt}=-2F\frac{x'^2}{v},$$

$$(8)\qquad \frac{d}{dt}(y'^2+2gy)=-2F\frac{y'^2}{v},$$

$$(9)\qquad y''\,x'-x''\,y'=-g\,x',$$

$$(10)\qquad y''\leqslant-g \quad\text{per}\quad y'(t)\geqslant0,$$

e da queste si traggono subito le seguenti conseguenze.

Se in $(0, \Lambda-0)$ è $x'(t)\neq0$, dalla (7) si ha che $x'(t)$ è positiva e decrescente; se invece $x'(t)$ si annulla in $(0, \Lambda-0)$ e λ è l'estremo superiore dei valori di t per i quali $x'(t)\neq0$ quando sia $0\leqslant t<\lambda$, $[\lambda<\Lambda]$, allora $x'(t)$ è positiva e decrescente nell'intervallo aperto a destra $(0, \lambda-0)$, e a motivo della (7), $x'(t)\equiv0$ per $\lambda\leqslant t<\Lambda$.

Dalla (8) si ha che y'^2+2gy è non crescente in $(0, \Lambda-0)$ [e quindi y limitata superiormente in $(0, \Lambda-0)$]; dalla (9) che in $(0, \lambda-0)$ la traiettoria di P volge la concavità all'asse delle y negative, ed è rettilinea e verticale per $\lambda\leqslant t<\Lambda$.

Dalle (10) si ha che $y'(t)$ è decrescente in ogni intervallo ove essa risulta positiva o nulla, e perciò ove si annulli passa dal positivo al negativo. Ne viene che $y'(t)$ o non si annulla mai ed ha il segno (di y_0') positivo, oppure si annulla in un punto t_0 e si ha

$$y'(t)>0 \quad\text{per}\quad 0\leqslant t<t_0\,;\quad y'(t_0)=0\,;\quad y'(t)<0\quad\text{per}\quad t_0<t<\Lambda.$$

Si ha allora che i limiti

$$\lim_{t\to\Lambda-0} x,\qquad \lim_{t\to\Lambda-0} x',\qquad \lim_{t\to\Lambda-0} y,\qquad \lim_{t\to\Lambda-0}(y'^2+2gy)$$

esistono, e che

$$\lim_{t\to\Lambda-0} x'=\text{numero finito non negativo};\ \lim_{t\to\Lambda-0} x>0,$$
$$\lim_{t\to\Lambda-0}(y'^2+2gy)<+\infty,\ \text{e quindi}\ \lim_{t\to\Lambda-0} y<+\infty.$$

b) Proveremo che *uno almeno dei limiti*

$$\text{(11)} \qquad \lim_{t\to A-0} x(t), \quad \lim_{t\to A-0} y(t), \quad \lim_{t\to A-0} (y'^2+2gy)$$

deve risultare infinito.

Ragioniamo per assurdo. I limiti (11) siano tutti e tre finiti e si ponga

$$\bar{x}=\lim_{t\to A-0} x(t), \qquad \bar{y}=\lim_{t\to A-0} y(t);$$

si ha pure $\lim_{t\to A-0} x'(t)$ finito, [e da $\lim_{t\to A-0} (y'^2+2gy)$ finito segue] $\lim_{t\to A-0} y'^2(t)$ finito, perciò $\lim_{t\to A-0} v=\lim_{t\to A-0} \sqrt{x'^2+y'^2}$ finito, e vogliamo provare che è

$$\text{(12)} \qquad \lim_{t\to A-0} v>0.$$

Se riuscisse invece $\lim_{t\to A-0} v=0$, si avrebbe $\lim_{t\to A-0} x'=\lim_{t\to A-0} y'=0$, e dalla seconda delle (4)

$$\overline{\lim_{t\to A-0}}\, y''(t)\leqslant -g+\overline{\lim_{t\to A-0}}\, F(t;\ x, y;\ x', y')\leqslant -g+\Phi(\bar{x}, \bar{y};\ 0, 0)<0,$$

perciò [essendo $\lim_{t\to A-0} y'(t)=0$] $y'(t)>0$.

Se allora esiste il punto λ [$\lambda<A$, cfr. *a*)] tale che $x'(t)=0$ per $t\geqslant\lambda$ si avrebbe $\lim_{t\to\lambda-0} y'/x'=+\infty$, mentre essendo per la (9) y'/x' decrescente in $(0, \lambda)$ dovrà riuscire $\lim_{t\to\lambda-0} y'/x'<+\infty$.

Se non esiste il punto λ, $x'(t)$ [come $y'(t)$] è positiva [e decrescente] in $(0, A-0)$, perciò [essendo y'/x' decrescente]

$$\text{(13)} \qquad \lim_{t\to A-0} y'/x'\geqslant 0,$$

e vedremo che anche quest'ultima è assurda. Si ha infatti

$$\text{(14)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{y'}{x'}=-\frac{g}{x'}, \qquad \lim_{t\to A-0} \frac{d}{dt}\frac{y'}{x'}=-\infty,$$

e allora se $A=+\infty$, $\lim_{t\to A-0} y'/x'=-\infty$ contro la (13); se poi $A<+\infty$ e poniamo

max. in $[0\leqslant x\leqslant\bar{x},\ 0\leqslant y\leqslant\bar{y},\ 0\leqslant x'\leqslant x_0',\ 0\leqslant y'\leqslant y_0']$ di $\Phi(x, y;\ x', y')=M$,

dalla prima delle (4), integrando tra t e A, si ricava

$$0<x'(t)<M(A-t)$$

e per la prima delle (14), $(y'/x')'<-g/M(A-t)$, contro la (13). Sussiste quindi la (12), ma ciò implica $A=+\infty$, perchè se $A<+\infty$, avendosi $\lim_{t\to A-0} v(t)>0$, l'intervallo $(0, A-0)$ non sarebbe il massimo intervallo aperto a destra in cui può definirsi una soluzione del sistema (4) verificante le condizioni iniziali (5).

Abbiamo dunque che se i limiti (11) sono tutti e tre finiti è $A=+\infty$, $\lim_{t\to+\infty} v>0$, ma allora uno almeno dei due limiti $\lim_{t\to+\infty} x'$, $\lim_{t\to+\infty} y'$ è diverso da zero, e uno almeno dei due limiti $\lim_{t\to+\infty} x$, $\lim_{t\to+\infty} y$ è infinito.

c) Abbiamo dunque che uno almeno dei limiti (11) risulta infinito, e *dimostreremo che si ha*

$$\text{(15)} \qquad \lim_{t\to A-0} y(t)=-\infty.$$

Ove per assurdo si abbia $\lim_{t\to A-0} y(t)$ finito, uno almeno dei due limiti

$$\lim_{t\to A-0} x(t), \qquad \lim_{t\to A-0} (y'^2+2gy)$$

è infinito, e se il primo di questi è finito, essendo y'^2+2gy non crescente, è $\lim_{t\to A-0} (y'^2+2gy)=-\infty$, da cui $\lim_{t\to A-0} y(t)=-\infty$.

Se invece è $\lim_{t\to A-0} x(t)=+\infty$, per l'osservazione fatta in *a*) sull'andamento di x', dovrà risultare $A=+\infty$, $x'(t)>0$, e siccome $x(t)$ risulta positiva, crescente, divergente a $+\infty$, sarà lecito considerare y come funzione della x definita per x variabile in $(0, \infty)$ ivi dotata di derivata continua $y_x'=y'(t)/x'(t)$. A motivo della (9), y_x' è decrescente col crescere di t e perciò di x, quindi $\lim_{t\to A-0} y_x'$ esiste e siccome abbiamo ammesso $\lim_{t\to A-0} y(x)=$finito, dovrà essere $\lim_{t\to A-0} y_x'=0$, da cui $y'(t)>0$ qualunque sia t. Poichè vale la (10) in senso forte, si ha $y''<-g$, $y'(t)-y_0'<-gt$, $y(t)<y_0't-\frac{1}{2}gt^2$, quindi $\lim_{t\to A-0} y(t)=-\infty$.

Dunque è $\lim\limits_{t \to \Lambda - 0} y(t)$ infinito, e poichè y è limitata superiormente in $(0, \Lambda)$ ne viene la (15).

d) In un intorno a destra di zero è $y(t)>0$, esiste quindi un punto t interno a $(0, \Lambda-0)$ in cui $y(T)=0$, e perciò un punto t_0 interno a $(0, T)$ dove $y'(t_0)=0$, [t_0 *punto di massimo per* $y(t)$] mentre [cfr. *a*)] $y'(t)>0$ per $0 \leqslant t < t_0$ [$y(t)$ crescente da 0 a $y(t_0)$] e $y'(t)<0$ per $t>t_0$, [$y(t)$ decrescente da $y(t_0)$ a $-\infty$]. Si ha allora dalla seconda delle (4) per $t \geqslant t_0$, $y''(t) \geqslant -g$, $y'(t) \geqslant -g(t-t_0), y(t)-y(t_0) > -g(t-t_0)^2/2$, e per la (15), $\Lambda = +\infty$, ossia *in tutto l'intervallo* $(0, +\infty)$ *si ha* $v>0$.

La velocità v è dunque >0 in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$, perciò la traiettoria del punto P ammette retta tangente variabile con continuità; per la *tangente trigonometrica dell'angolo di inclinazione* φ *si ha*

$$\operatorname{tg} \varphi = y'/x',$$

e l'angolo φ è una funzione continua di t quando t varia in $(0, +\infty)$.

Se in un punto $\lambda>0$ è $x'(\lambda)=0$ [e perciò per *a*) $x'(t)=0$ se $t \geqslant \lambda$] è ivi $y'(\lambda)<0$ e quindi $\varphi(t)=-\pi/2$ per $t \geqslant \lambda$; infatti da $y'(\lambda)>0$, essendo $v(t)>0$, seguirebbe $y'(t)>0$ per $t \geqslant \lambda$, e allora non potrebbe sussistere la (15).

e) Poiche è $v>0$ in $(0, +\infty)$, dalle (4) si ricava che in $(0, +\infty)$ valgono le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = -F(t;\, x, y;\, v\cos\varphi, v \operatorname{sen}\varphi) - g \operatorname{sen}\varphi \\ &\frac{d\varphi}{dt} = -g\frac{\cos\varphi}{v},\ \frac{dx}{dt} = v\cos\varphi,\ \frac{dy}{dt} = v \operatorname{sen}\varphi; \end{aligned}\right. \tag{16}$$

con le condizioni iniziali $x(0)=y(0)=0$, $\varphi(0)=\alpha$, $v(0)=v_0$, e *possiamo ora dimostrare che è* $x'(t)>0$ in $(0, +\infty)$.

Infatti, in caso opposto, deve esistere un numero positivo λ tale che $x'(t)>0$ per $0 \leqslant t < \lambda$, e per $t \geqslant \lambda$, $x'(t)=0$, $\varphi(t)=-\pi/2$. La funzione $\varphi(t)$, quando t varia da 0 a λ decresce da 0 a $-\pi/2$; se m è il minimo di $v(t)$ in $(0, \lambda)$, [$m>0$], per t interno a $(0, \lambda)$ si ha

$$\lambda > t = \int_\varphi^\alpha \frac{v}{g}\frac{d\omega}{\cos\omega} > \frac{m}{g}\left[\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$\lambda > \frac{m}{g}\lim_{\varphi \to -\pi/2+0}\left[\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

assurda, perchè il limite del secondo membro è $+\infty$. Abbiamo dunque $x'(t)>0$ per $t>0$, quindi *quando* t *varia da* 0 *a* $+\infty$ *è* $\varphi > -\pi/2$ *e decrescente*. Si ha inoltre che essendo $x''(t)<0$ per $t>0$, $x'(t)$ è positiva e decrescente, e poichè per $t>t_0$ si ha $y'(t)<0$, si ha pure $\varphi(t)<0$ per $t>t_0$.

f) Siccome nell'ipotesi $y'(0)=y_0' \leqslant 0$ si possono ripetere tutti i nostri ragionamenti, salvo che risulterà ora $y'(t)<0$ per $t>0$, abbiamo dimostrato il teorema: *Se la funzione resistente* $F(t;\, x, y;\, x', y')$ *soddisfa le ipotesi i), ii) del* n. 1, *impressa al punto pesante* P *una velocità iniziale di componente orizzontale positiva, esso, quando* $t \to +\infty$, *descrive una traiettoria appartenente al semipiano delle* x *positive, dotata di tangente, la cui inclinazione* φ *è decrescente, maggiore* $-\pi/2$, *e definitivamente negativa. L'ordinata di* P, *quando* $t \to +\infty$, *ha per limite* $-\infty$, *e la componente orizzontale della sua velocità è positiva e decrescente.*

3. - *a*) Ci fermeremo ora a considerare il caso che *la funzione resistente* $F(v)$ *dipenda soltanto dalla velocità* v *del mobile, con* $F(v)$ *continua rispetto a* v,

$$F(0)=\gamma, \qquad 0 \leqslant \gamma < g. \tag{17}$$

Impressa al mobile una velocità di componente orizzontale positiva, abbiamo visto che le equazioni del movimento diventano

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = -F(v) - g\operatorname{sen}\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -g\frac{\cos\varphi}{v}, \\ &v(0)=v_0, \qquad \varphi(0)=\alpha, \qquad [v_0>0, \qquad -\pi/2<\alpha<\pi/2], \end{aligned}\right. \tag{18}$$

e si ha

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = -\omega$$

con $\omega \geqslant \pi/2$.

Vogliamo dimostrare che *se la funzione* $F(v)$ *gode le seguenti proprietà*

i) *in ogni intervallo finito* (α, β), *con* $0<\alpha<\beta$, *sia*

$$|F(v_2)-F(v_1)| < L(\alpha,\beta)\,|v_2-v_1|, \quad [\alpha \leqslant v_1 < v_2 \leqslant \beta], \tag{19$_1$}$$

$L(\alpha, \beta)$ *costante dipendente da* α *e* β,

ii) (19$_2$) $$\varliminf_{v \to +\infty} F(v) > g,$$

allora valgono le due relazioni

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi = -\pi/2, \qquad \lim_{t\to+\infty} v = w,$$

dove w soddisfa l'equazione

$$F(w) - g = 0. \tag{20}$$

Osserviamo che dalle ipotesi dichiarate segue che se in un punto t_1, $t_1 \geq 0$, è $v'(t_1) = 0$, ivi $v'(t)$ è crescente. Si ha infatti dalla prima delle (18)

$$\frac{v'(t_1+h) - v'(t_1)}{h} = -\frac{F[v(t_1+h)] - F[v(t_1)]}{v(t_1+h) - v(t_1)} v'(t_1 + \vartheta_1 h) -$$

$$- g \frac{\operatorname{sen} \varphi(t_1+h) - \operatorname{sen} \varphi(t_1)}{\varphi(t_1+h) - \varphi(t_1)} \varphi'(t_1 + \vartheta_2 h), \quad 0 < \vartheta_1, \vartheta_2 < 1,$$

e passando al limite per $h \to 0$, e tenuto conto della seconda delle (18),

$$v''(t_1) = g^2 \frac{\cos^2 \varphi(t_1)}{v(t_1)} > 0.$$

Ne viene che dovrà aversi $v'(t) > 0$ per $t > 0$, oppure $v'(t) < 0$ per $t > 0$, oppure esiste un punto t_1 tale che $v'(t) < 0$ per $0 < t < t_1$, $v'(t) > 0$ per $t > t_1$. Si ha da qui che $\lim_{t\to+\infty} v(t)$ esiste, e posto

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = w,$$

proveremo che

$$0 < w < +\infty. \tag{21}$$

Sia per assurdo $w = 0$; della prima delle (18) otteniamo

$$\lim_{t\to+\infty} v'(t) = -\gamma + g \operatorname{sen} \omega$$

cioè $\lim_{t\to+\infty} v'(t)$ esiste ed è finito. Non può aversi per t sufficientemente grande $v'(t) > 0$, perchè $v(t)$ per t sufficientemente grande risulterebbe crescente, quindi $w \neq 0$; se poi $v'(t) < 0$ qualunque sia t, $v(t)$ è positiva decrescente, e ciò implica $\lim_{t\to+\infty} v'(t) = 0$, perciò $-\gamma + g \operatorname{sen} \omega = 0$, $0 < \omega < \pi/2$, e dalla seconda delle (18) $\lim_{t\to+\infty} \varphi'(t) = -\infty$, assurda, essendo $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$ finito.

Sia ancora per assurdo $w = +\infty$; dalla prima delle (18) e dalla (19_2) si ha

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, v'(t) = g \operatorname{sen} \omega - \underline{\lim_{t\to+\infty}}\, F(v) < g \operatorname{sen} \omega - g \leq 0,$$

$\overline{\lim}_{t\to+\infty} v'(t) < 0$, assurda avendo supposto $\lim_{t\to+\infty} v(t) = +\infty$.

Vale quindi la (21), e dalla seconda delle (18) si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi'(t) = (-g/w) \cos \omega,$$

ed essendo $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$ finito, $\lim_{t\to+\infty} \varphi'(t) = 0$, e $\omega = \pi/2$.

Dalla prima delle (18) si ha infine $\lim_{t\to+\infty} v'(t) = -F(w) + g$, ma deve risultare $\lim_{t\to+\infty} v'(t) = 0$, e ne segue la (20).

b) Il numero w chiamasi la *velocità finale del punto grave.* Conviene osservare che *se l'equazione* (20) *ammette una sola radice* w [1] *la velocità finale è indipendente dai parametri* α *e* v_0.

4. - *a*) Abbiamo dimostrato che *se la funzione resistente* $F(v)$ *gode le seguenti proprietà:*

i) $F(v)$ *è definita in* $(0, +\infty)$, *continua rispetto a* v,

$$F(0) = \gamma, \qquad 0 \leq \gamma < g;$$

ii) *ad ogni intervallo finito* (α, β), $0 < \alpha < \beta$, *corrisponde una costante* $L(\alpha, \beta)$ *tale che*

$$|F(v_2) - F(v_1)| < L(\alpha, \beta)\, |v_2 - v_1|, \qquad [\alpha \leq v_1 < v_2 \leq \beta],$$

iii) $$\underline{\lim_{v\to+\infty}}\, F(v) > g;$$

iiii) *l'equazione*

$$F(w) - g = 0 \tag{20}$$

ammette una sola radice;

---

[1] Tale ipotesi, a motivo della continuità di $F(v)$ e delle due condizioni $F(0) = \gamma < g$, $\underline{\lim}_{v\to+\infty} F(v) > g$ implica $F(v) < g$ se $v < w$, $F(v) > g$ se $v > w$.

allora qualunque sia l'angolo di proiezione a e il modulo $v_0>0$ della velocità iniziale, su tutte le traiettorie il punto P ha una comune velocità finale w, radice dell'equazione (20).

Se cangiamo φ in $-\tau$, si ha che quando P descrive la traiettoria, τ varia crescendo da $-a$ a $\pi/2$

$$-a \leqslant \tau < \pi/2, \tag{22}$$

e assumendo τ come variabile indipendente, le equazioni (18) dànno

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{d\tau} = \dfrac{v}{g \cos \tau}\,[g \operatorname{sen} \tau - F(v)], & [\textit{equazione dell'odografo}], \\ v(-a) = v_0, \quad -a \leqslant \tau < \pi/2, & [v_0>0, \quad -\pi/2 < -a]. \end{cases} \tag{23}$$

Se poniamo $v(\pi/2)=w$, $v(\tau)$ è continua in $(-a, \pi/2)$. Se per un valore τ_1 di $\tau, -a \leqslant \tau_1 < \pi/2$, è $v'(\tau_1)=0$, dalla ipotesi *ii*) segue $(dF/d\tau)_{\tau=\tau_1}=0$, quindi derivando la (23), $d^2v/d\tau^2=v>0$, cioè il punto τ è un *punto di minimo relativo* per $v(\tau)$; si ha allora che $v(\tau)$, variando τ in $(-a+0, \pi/2-0)$ non ha nè massimi nè minimi, oppure ha un solo minimo e $v'(\tau)$ non può annullarsi al più che una volta soltanto in $(-a, \pi/2-0)$.

Si osservi pure che se per un valore τ_2 di $(-a, \pi/2-0)$ è $v(\tau_2)=w$, dalla prima delle (23) si ha

$$v'(\tau_2) = wg(\operatorname{sen} \tau_2 - 1)/g \cos \tau_2 < 0,$$

e perciò $v(\tau)$ assume a destra di τ_2 valori minori di w. Ne viene che *se $v(\tau)$ è dotata di minimo in $(-a, \pi/2-0)$, questo è $<w$*; infatti tale minimo non può essere per l'osservazione testè fatta uguale a w, e se fosse maggiore di w, la $v(\tau)$ dovrebbe ammettere un massimo interno ad $(-a, \pi/2)$ e ciò non può essere. Si ha inoltre che *se il minimo è nell'estremo $-a$ è $v'(-a) \geqslant 0$, e $v'(\tau)>0$ per $-a<\tau<\pi/2$; se il minimo è in un punto τ_1, con $-a<\tau_1<\pi/2$, allora $v'(\tau)<0$ per $a \leqslant \tau < \tau_1$, $v'(\tau)>0$ per $\tau_1<\tau<\pi/2$.*

Se poi $v(\tau)$ non è dotata di minimo in $(-a, \pi/2-0)$, dovrà aversi $v(\tau)>w$ per i valori di τ appartenenti a questo intervallo, e ancora $v'(\tau)<0$ per $-a \leqslant \tau < \pi/2$, [perchè se in un punto τ si avesse $v'(\tau)>0$, ne seguirebbe l'esistenza di almeno un massimo di $v(\tau)$ interno a $(-a, \pi/2-0)$].

Dalle cose dette segue che nelle ipotesi dichiarate, *condizione necessaria e sufficiente perchè il modulo della velocità sia dotato* [non sia dotato] *di minimo in $(-a, \pi/2-0)$ è che al tendere di τ a $\pi/2$, $v'(\tau)$ diventi definitivamente positiva* [negativa]. Si ha pure che *per ogni traiettoria corrispondente ad una velocità iniziale di modulo $v_0 \leqslant w$ esiste il minimo di v; tale minimo è conseguito all'inizio del moto allora e allora soltanto che sia*

$$F(v_0) + g \operatorname{sen} a \leqslant 0 \qquad [v'(-a) \geqslant 0]. \quad (^1)$$

Notiamo che nella ricerca delle traiettorie dotate di minimo per il modulo v della velocità basterà limitarsi a quelle in cui il modulo v_0 della velocità iniziale è maggiore della velocità finale, e per esse il minimo si consegue se esiste un valore di τ tale che

$$g \operatorname{sen} \tau - F[v(\tau)] = 0.$$

b) Col simbolo $\Gamma_F(a, v_0)$ indicheremo la traiettoria di un punto corrispondente all'angolo di proiezione a, alla velocità iniziale $v_0>0$, e alla funzione resistente F. Si dirà che $\Gamma_F(a, v_0)$ è *dotata di minimo*, se il modulo della sua velocità possiede un minimo [in $(-a, \pi/2-0)$].

c) Vogliamo studiare il caso di

$$F(v) = av^n \qquad [a>0, \ n>0].$$

Siccome la funzione $F(v)$ verifica le ipotesi *i*), *ii*), *iii*), *iiii*), la traiettoria sarà dotata di minimo allora e allora soltanto che $v'(\tau)$ al tendere di τ a $\pi/2-0$ diventa definitivamente positiva.

Dall'equazione (23) dell'odografo si ha

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{v^n \cos^n \tau}\right] = \frac{na}{g}\,\frac{1}{\cos^{n+1}\tau},$$

dalla quale integrando tra $-a$ e τ,

$$\frac{1}{v^n \cos^n \tau} = \frac{1}{v_0^n \cos^n a} + \frac{na}{g}\int_{-a}^{\tau} \frac{d\sigma}{\cos^{n+1}\sigma},$$

(1) F. Siacci: *Sulla velocità minima*, Rivista di Artiglieria e Genio, 18(1901), vol. I, pp. 287-297; vol. II, pp. 21-34; A. Signorini: *Sulla velocità minima*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (5) 31 (1921; 2° sem.), pp. 101-104; G. Scorza-Dragoni; lav. cit. al n. 1; M. Picone: lav. cit. al n. 1 [*b*)].

ma

$$\frac{g}{na}\frac{1}{v^{n+1}\cos^{n-1}\tau\operatorname{sen}\tau}\frac{dv}{d\tau}=\frac{g}{na}\frac{1}{v^n\cos^n\tau}-\frac{1}{n\operatorname{sen}\tau\cos^n\tau},$$

perciò per $\tau>0$, $v'(\tau)$ ha il segno di

$$H(\tau)=\frac{g}{nav_0^n\cos^n\alpha}+\int_{-\alpha}^{\tau}\frac{d\sigma}{\cos^{n+1}\sigma}-\frac{1}{n\operatorname{sen}\tau\cos^n\tau}.$$

Si ha pure

$$H'(\tau)=1/n\operatorname{sen}^2\tau\cos^{n-1}\tau,$$

quindi $H(\tau)$ è crescente con τ, e perciò il *teorema di Siacci: la traiettoria è dotata di minimo secondochè*

$$M(\alpha,v_0)=\lim_{\tau\to\pi/2-0}H(\tau)$$

risulta positivo o no.

Se $n\geqslant 2$, $H'(\tau)$ diverge a $+\infty$ di ordine non inferiore a 1, è quindi $M(\alpha,v_0)=+\infty$ e ne viene l'altro *teorema di Siacci: la traiettoria $\Gamma_{av^n}(\alpha,v_0)$, qualunque siano a, α, v_0, $v_0>0$, se $n\geqslant 2$, è dotata di minimo.*

Sia invece $0<n<2$; si ha

$$\int_{-\alpha}^{\tau}\frac{d\sigma}{\cos^{n+1}\sigma}=\left[\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\cos^n\sigma}\right]_{-\alpha}^{\tau}-(n-1)\int_{-\alpha}^{\tau}\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\cos^{n+1}\sigma}d\sigma,$$

$$\int_{-\alpha}^{\tau}\frac{d\sigma}{\cos^{n+1}\sigma}=\frac{1}{n}\frac{\operatorname{sen}\tau}{\cos^n\tau}+\frac{1}{n}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^n\alpha}+\frac{n-1}{n}\int_{-\alpha}^{\tau}\frac{1}{\cos^{n-1}\sigma}d\sigma,$$

$$H(\tau)=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{n\cos^n\alpha}+\frac{n-1}{n}\int_{-\alpha}^{\tau}\frac{1}{\cos^{n-1}\sigma}d\sigma+\frac{g}{nav_0^n\cos^n\alpha}-\frac{1}{n}\frac{\cos^{2-n}\tau}{\operatorname{sen}\tau},$$

perciò

$$M(\alpha,v_0)=\frac{av_0^n\operatorname{sen}\alpha+g}{nav_0^n\cos^n\alpha}+\frac{n-1}{n}\int_{-\alpha}^{\pi/2}\frac{d\sigma}{\cos^{n-1}\sigma}.$$

Si ha pure

$$\frac{\partial M}{\partial\alpha}=\frac{av_0^n+g\operatorname{sen}\alpha}{av_0^n\cos^{n+1}\alpha},$$

e limitandoci a considerare il caso $v_0>w$, cioè $av_0^n>g$, è $\dfrac{\partial M}{\partial\alpha}>0$, quindi $M(\alpha,v_0)$ è crescente con α. Si ha pure

$$\lim_{\alpha\to-\pi/2+0}M(\alpha,v_0)=-\infty,\qquad\lim_{\alpha\to\pi/2-0}M(\alpha,v_0)=+\infty,$$

ed esiste allora un solo valore di α, $\bar\alpha(v_0)$, per il quale $M(\bar\alpha,v_0)=0$; tale cioè che si abbia

$$\operatorname{sen}\bar\alpha+(n-1)(\cos^n\bar\alpha)\int_{-\bar\alpha}^{\pi/2}\frac{d\sigma}{\cos^{n-1}\sigma}+\frac{g}{av_0^n}=0;\tag{24}$$

ne segue che *supposto $0<n<2$, $av_0^n>g$, la traiettoria $\Gamma_{av_0^n}(\alpha,v_0)$ è dotata di minimo, allora e allora soltanto che sia $\alpha>\bar\alpha(v_0)$, dove $\bar\alpha$ è la radice dell'equazione* (24) (1).

d) Per la ricerca delle traiettorie fornite di minimo può giovare il seguente teorema di confronto di SIGNORINI (2).

Le due funzioni resistenti $F(v)$, $E(v)$ soddisfino entrambe le condizioni i), ii), iii), iiii) dichiarate in a), sia $v_0>w$, e si abbia

$$F(v)\geqslant E(v)\quad\text{per}\quad w<v\leqslant v_0,\tag{25}$$

$$F(w)=E(w),[=g];\tag{26}$$

allora se la traiettoria $\Gamma_E(\alpha,v_0)$ ha il minimo, lo ha pure $\Gamma_F(\alpha,v_0)$.

Dimostriamo che se $\Gamma_F(\alpha,v_0)$ non ha minimo, cioè se $v(\tau)>w$, anche $\Gamma_E(\alpha,v_0)$ è sprovvista di minimo, ossia se indichiamo con $u(\tau)$ la velocità del punto mobile su $\Gamma_E(\alpha,v_0)$ è anche $u(\tau)>w$.

Dalle equazioni

$$\frac{dv}{d\tau}=v\operatorname{tg}\tau-\frac{vF(v)}{g\cos\tau},\qquad\frac{du}{d\tau}=u\operatorname{tg}\tau-\frac{uE(u)}{g\cos\tau},$$

si ha

$$\frac{d(u-v)}{d\tau}=(u-v)\operatorname{tg}\tau+\frac{vF(v)-uE(u)}{g\cos\tau},$$

e ammesso che per $w<v\leqslant v_0$ la (25) valga in senso forte, si abbia cioè $F(v)>E(v)$ ne segue che se per un valore di τ è $u=v$ è ivi $d(u-v)/d\tau>0$, cioè $u-v$ è crescente. Abbiamo allora che essendo $u-v$ nulla per $\tau=-\alpha$, essa è poi sempre positiva, quindi $u>v>w$, c. v. d.

(1) Il teorema, nella forma precisata nel testo è di M. PICONE; lav. cit. al n. 1, [*b*)], p. 163.

(2) Cfr. A. SIGNORINI: *Un teorema di confronto in balistica esterna e alcune sue applicazioni*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 43 (1919), pp. 357-393; M. PICONE, lav. cit. al n. 1, [*b*)].

Supponiamo ora che la (25) non valga in senso forte, e consideriamo la funzione $E(v, \lambda)$ che per ogni valore di λ, positivo, minore di 1, è definita con la seguente legge

$$\begin{aligned} E(v, \lambda) &= E(v) \quad \text{se} \quad 0 \leqslant v \leqslant w, \\ E(v, \lambda) &= E(v) - \lambda\,[E(v) - g] \quad \text{se} \quad v > w. \end{aligned}$$

Fissato λ, la funzione $E(v, \lambda)$ soddisfa oltre che le condizioni *i*), *ii*), *iii*), *iiii*) dichiarate in *a*) la (26), e si ha pure

$$F(v) > E(v, \lambda) \quad \text{per} \quad w < v < v_0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Detta $u(v, \lambda)$ la velocità sulla traiettoria $\Gamma_{E(v,\lambda)}(a, v_0)$ abbiamo che se è sempre $v > w$ è anche $u(\tau, \lambda) > v(\tau)$ per $\tau > -a$; ma $u(\tau, \lambda)$ è una funzione continua del parametro λ [Cap. I, § 5, n. 1, *a*)] perciò $\lim\limits_{\lambda \to +0} u(\tau, \lambda) = u(\tau)$, e infine $u(\tau) \geqslant v(\tau) > w$, c. v. d.

§ 2. - Vibrazioni forzate del pendolo. - Equazione di Duffing [1].

1. L'equazione del problema. - 2. Il caso $a^2 < 1$; dimostrazione dell'esistenza di una soluzione periodica col metodo delle approssimazioni successive.

1. - Un punto materiale pesante P, di massa m, sia vincolato a muoversi senza incontrare resistenza lungo una circonferenza di centro O e di raggio l, situata in un piano verticale, e P al tempo $t=0$ si trovi nella posizione più bassa A. Il moto sia perturbato da una forza la cui componente secondo la tangente alla circonferenza abbia al tempo t il valore k sen t (k costante).

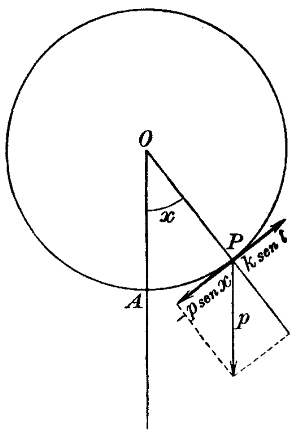

Fig. 41.

Assumendo il punto O come origine e il raggio $\overline{OA}$ come asse polare, se x indica l'angolo che al

[1] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung.* (Berlin, 1918) pp. VI + 134.

tempo t il raggio vettore $\overrightarrow{OP}$ forma con l'asse polare, ed s l'arco $\widehat{AP}$, l'equazione del moto lungo la circonferenza è data da

$$ms'' + p \text{ sen } x = k \text{ sen } t,$$

dove $p = mg$, (g accelerazione della gravità), e avendosi $s'' = lx''$, posto $g/l = a^2$, $k/ml = \beta$ otteniamo

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + a^2 \text{ sen } x = \beta \text{ sen } t, \qquad \text{[equazione di Duffing]}.$$

Qui ci proponiamo di trovare se questa equazione [non lineare] possiede soluzioni continue, dispari, periodiche, col periodo 2π. Tali soluzioni dovranno quindi soddisfare le condizioni $x(-t) = -x(t)$, $x(0) = x(\pi) = 0$, e a motivo della (1) basterà trovare le soluzioni che per t variabile in $(0, \pi)$ soddisfano le condizioni ai limiti

$$x(0) = x(\pi) = 0.$$

2. - *a*) Trasformeremo con Hamel [1] il problema in un'equazione integrale.

Consideriamo l'equazione

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = q(t)$$

dove $q(t)$ è una funzione dispari $[q(-t) = -q(t)]$, continua, periodica col periodo uguale a 2π, e proponiamoci di trovare una sua soluzione continua, dispari, periodica di periodo 2π, soddisfacente quindi le condizioni $x(-t) = -x(t)$, $x(0) = x(\pi) = 0$, e cioè le soluzioni della (2) che per t variabile in $(0, \pi)$ soddisfano le condizioni ai limiti $x(0) = x(\pi) = 0$.

La (2) ammette l'integrale generale

$$(3) \qquad x(t) = \int_0^t (t - \tau)\, q(\tau)\, d\tau + c_1 t + c_2, \qquad [c_1,\ c_2 \text{ costanti}];$$

la condizione $x(0) = 0$ importa $c_2 = 0$; l'altra $x(\pi) = 0$,

$$\int_0^\pi (\pi - \tau)\, q(\tau)\, d\tau + c_1 \pi = 0,$$

[1] G. Hamel: *Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden,* Math. Ann., 86 (1922), pp. 1-13.

e la (3) dà

$$x(t)=\int_0^\pi K(t,\tau)\,q(\tau)\,d\tau,$$

dove

$$K(t,\tau)=\tau(t/\pi-1) \quad \text{per} \quad 0\leqslant\tau\leqslant t,$$
$$K(t,\tau)=t(\tau/\pi-1) \quad \text{per} \quad t<\tau\leqslant\pi;$$

ma è noto che (¹)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos n\omega}{n^2}=\frac{\omega^2}{2}-\pi\omega+\frac{\pi^2}{3}, \qquad (0\leqslant\omega\leqslant 2\pi),$$

perciò $K(t,\tau)$ ha l'espressione

$$K(t,\tau)=-\frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} rt\operatorname{sen} r\tau}{r^2}, \qquad [0\leqslant t,\tau\leqslant\pi]. \tag{4}$$

Si ha allora che *se vogliamo determinare una soluzione continua della* (1), *dispari, periodica, col periodo* 2π, *è necessario e basta che* $x(t)$ *soddisfi l'equazione integrale non lineare*

$$x(t)=-a^2\int_0^\pi K(t,\tau)\operatorname{sen} x(\tau)\,dt+\beta\int_0^\pi K(t,\tau)\operatorname{sen}\tau\,d\tau, \qquad [0\leqslant t\leqslant\pi];$$

ma la soluzione dell'equazione $x''=\operatorname{sen} t$ che soddisfa le condizioni $x(0)=x(\pi)=0$, vale $x=-\operatorname{sen} t$, perciò $x(t)$ dovrà soddisfare l'equazione

$$x(t)=-a^2\int_0^\pi K(t,\tau)\operatorname{sen} x(\tau)\,d\tau-\beta\operatorname{sen} t. \tag{5}$$

Quando $\beta=0$, la (1) è l'equazione del pendolo $d^2x/dt^2+a^2\operatorname{sen} x=0$, della quale per $a^2<1$, le soluzioni periodiche hanno il periodo T (²)

$$T=\frac{4}{a}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-c^2\operatorname{sen}^2\theta}}=\frac{2\pi}{a}\left[1+\left(\frac{1!!}{2!!}\right)^2c^2+\left(\frac{3!!}{4!!}\right)^2c^4+\ldots\right]>2\pi,$$
$$(0<c<1).$$

(¹) Cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (Bologna, 1935), p. 37. Si ha in particolare $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2=\pi^2/6$, formula di cui faremo uso nella (8) di questo paragrafo.

(²) Cfr. ad es. G. A. MAGGI: *Dinamica dei sistemi. Lezioni sul Calcolo del Movimento dei Corpi Naturali*, (Pisa, 1917), p. 261.

Noi *supporremo appunto* $a^2<1$, cioè ci porremo nel caso che non si presenti il così detto fenomeno di risonanza con la forza disturbatrice $k\operatorname{sen} t$, e integreremo la (5) col metodo delle approssimazioni successive (¹).

Prendiamo come prima approssimazione di $x(t)$ la funzione

$$x_1=-\beta\operatorname{sen} t, \tag{6$_1$}$$

come seconda approssimazione

$$x_2=a^2\int_0^\pi K(t,\tau)\operatorname{sen}(\beta\operatorname{sen}\tau)\,d\tau-\beta\operatorname{sen} t, \tag{6$_2$}$$

e in generale

$$x_n=-a^2\int_0^\pi K(t,\tau)\operatorname{sen}(x_{n-1}(\tau))\,d\tau-\beta\operatorname{sen} t, \qquad [n=3,4,\ldots]. \tag{6$_n$}$$

Si ha $-K(t,\tau)\geqslant 0$, quindi

$$x_{n+1}-x_n=-a^2\int_0^\pi K(t,\tau)\,[\operatorname{sen} x_n-\operatorname{sen} x_{n-1}]\,d\tau$$
$$=-a^2\int_0^\pi K(t,\tau)\,2\operatorname{sen}\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\,d\tau,$$

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant -a^2\int_0^\pi K(t,\tau)\,|x_n-x_{n-1}|\,d\tau, \qquad [n=2,3,\ldots],$$

od anche, posto (²)

$$K_n(t,\tau)=\underbrace{\int_0^\pi\ldots\int_0^\pi}_{(n-1)} K(t,\tau_1)K(\tau_1,\tau_2)\ldots K(\tau_{n-1},\tau)\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_{n-1},$$

$$|x_{n+1}(t)-x_n(t)|\leqslant a^{2(n-1)}(-1)^{n-1}\int_0^\pi K_{n-1}(t,\tau)\,|x_2(\tau)-x_1(\tau)|\,d\tau. \tag{7}$$

(¹) Cfr. Cap. VI, § 1, n. 7, *b*).
(²) Cfr. Cap. II, § 6.

Poichè nella (4) la serie del secondo membro è uniformemente convergente in $(0, \pi)$ si ha

$$K_2(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} rt \operatorname{sen} r\tau}{r^4}, \text{ [1]}$$

ed in generale

$$K_n(t, \tau) = (-1)^n \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} rt \operatorname{sen} r\tau}{r^{2n}},$$

$$(8) \qquad |K_n(t, \tau)| \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}} \leqslant \frac{\pi}{3},$$

talchè se in $(0, \pi)$ è $|x_2 - x_1| \leqslant L$, dalla (7) otteniamo

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| < \frac{\pi^2}{3} L a^{2(n-1)},$$

e perciò la successione $\{x_n(t)\}$ converge uniformemente in $(0, \pi)$ verso una funzione $x(t)$, e allora se nella (6_n) passiamo al limite per $n \to \infty$ otteniamo appunto che $x(t)$ soddisfa la (5).

L'*unicità della soluzione* segue dall'osservare che se $x(t)$ è una soluzione della (5), sottraendo la (6_n) otteniamo

$$x(t) - x_n(t) = -a^2 \int_0^{\pi} K(t, \tau) [\operatorname{sen} x(\tau) - \operatorname{sen} x_{n-1}(\tau)] \, d\tau,$$

$$|x(t) - x_n(t)| \leqslant -a^2 \int_0^{\pi} K(t, \tau) \, |x(\tau) - x_{n-1}(\tau)| \, d\tau,$$

$$\leqslant a^{2(n-1)} (-1)^{n-1} \int_0^{\pi} K_{n-1}(t, \tau) \, |x(\tau) - x_1(\tau)| \, d\tau$$

e ancora $\lim_{n \to \infty} |x(t) - x_n(t)| = 0$.

b) A. HAMMERSTEIN [2] ha considerato più in generale l'equazione

$$(9) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + a^2 \operatorname{sen} x = h(t),$$

[1] Si ricordi che $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

[1] A. HAMMERSTEIN: *Eine nichtlineare Randwertaufgabe*, Jahr. der Deutsch. Math. Ver. 39(1930), pp. 59-64. Cfr. anche R. IGLISCH: *a*) *Zur Theorie der Schwingungen*, Monatsh. füs Math. und Phys. 37 (1930), pp. 325-342; 39(1932), pp. 173-220; 42 (1935), pp. 7-36; *b*) *Über die Lösungen des Duffingschen Schwingungsproblems bei grossen Parameterwerten*, Math. Ann. 111 (1935), pp. 568-581; *c*) *Die erste Resonantzkurve beim Duffingschen Schwingungsproblem*, Math. Ann. 112 (1936) pp. 221-246.

con $h(t)$ funzione continua in $(0, \pi)$ e a^2 costante, ed ha dimostrato che fissata $h(t)$ si può determinare corrispondentemente un numero a_0 tale che per $a \geqslant a_0$ *il numero delle soluzioni dell'equazione che soddisfa le condizioni ai limiti* $x(0) = x(\pi) = 0$, *supera* $a/3$ e tra queste soluzioni ne esistono almeno due aventi soltanto due zeri, due aventi soltanto tre zeri, due aventi soltanto quattro zeri,.... in $(0, \pi)$.

Per la dimostrazione di questo teorema rimandiamo alla memoria dell'Autore.

§ 3. - L'equazione differenziale di Emden dei gas politropici [1].

1. Equazione di EMDEN dell'equilibrio delle sfere gassose politropiche. - 2. L'energia potenziale delle sfere gassose e la limitazione $n < 5$ per le sfere di raggio finito. - 3. L'equazione di FOWLER e il sistema normale di equazioni differenziali equivalente. Il caso $n = 5$. - 4. Comportamento delle curve integrali. La curva E e le curve F ed M. - 5. Comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione di FOWLER. Teorema di FOWLER.

1. - *a*) Una massa gassosa, sotto l'azione della propria gravitazione, e di una pressione costante (eventualmente nulla) sulla superficie che la limita, ed in equilibrio, assume necessariamente [2] una configurazione sferica, con densità e pressione distribuite con simmetria sferica, e ci poniamo il problema di determinare la distribuzione della densità della massa ϱ e della pressione P del gas in un punto in funzione della sua distanza r dal centro O di simmetria.

Consideriamo un elemento di superficie sferica di area σ e di raggio r, e il cilindro gassoso di base σ e altezza dr; la forza

[1] R. EMDEN: *Gaskugeln*, (Leipzig, 1907), p. 40, e Capp. X e XIII; A. S. EDDINGTON: *The internal constitution of the stars*, (Cambridge, 1926), Cap. IV, pp. 79 e segg.

[2] Cfr. L. LICHTENSTEIN: *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*, (Berlin, 1933), p. 26.

espansiva del cilindro è data da σdP, l'attrazione gravitazionale da $\varrho g\sigma dr$ [g accelerazione della gravitazione] e perciò per l'equilibrio dovrà aversi $\sigma dP + \varrho g \sigma dr = 0$, ovvero

(1) $$\frac{dP}{dr} + \varrho g = 0.$$

Si ha dalla legge di NEWTON, $g = GM_r r^{-2}$, dove G indica la costante della gravitazione universale e M_r la massa gassosa contenuta nella sfera di centro O e raggio r. La massa dello strato sferico limitato dalle due sfere di raggio r, $r+dr$ vale $4\pi r^2 \varrho dr$ perciò

(2) $$M_r = 4\pi \int_0^r r^2 \varrho dr,$$

e la (1) diventa

(3) $$\frac{dP}{dr} + \frac{4\pi\varrho G}{r^2} \int_0^r r^2 \varrho dr = 0;$$

dalla quale moltiplicando per r^2/ϱ e derivando rispetto a r si ha

(4) $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\varrho}\frac{dP}{dr}\right) + 4\pi G \varrho = 0.$$

Supposto che non vi sia scambio di calore tra la sfera gassosa e l'ambiente, l'equazione di equilibrio dei gas è data da

(5_1) $$P = k\varrho^{1+\frac{1}{n}}$$

($n > 0$), k ed n costanti positive, e posto

(5_2) $$\varrho = \left\{\frac{\Phi}{(n+1)k}\right\}^n, \qquad P = \frac{\varrho\Phi}{n+1},$$

si ha

(5_3) $$\frac{1}{\varrho}\frac{dP}{dr} = \frac{d\Phi}{dr},$$

e la (4) diventa

(6_1) $$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} + a^2\Phi^n = 0,$$

con

(6_2) $$a^2 = 4\pi G/\{(n+1)k\}^n, \qquad (a > 0),$$

e il problema che ci siamo proposti equivale a quello di determinare una soluzione della (6_1) che soddisfa le condizioni

(6_3) $$\Phi(0) = \Phi_0 > 0, \qquad \Phi'(0) = 0 \quad (^1).$$

Inversamente data una soluzione dell'equazione (6_1) che soddisfa le condizioni iniziali (6_3) e valutati P e ϱ con le (5_2) si ha

$$\frac{dP}{dr} + \frac{4\pi\varrho G}{r^2} \int_0^r r^2 \varrho dr = \text{cost.},$$

ma $P'(0) = 0$, e ne viene la (3).

Con il cangiamento

(5_4) $$\Phi = \Phi_0\,\theta, \qquad r = \xi/a\Phi_0^{(n-1)/2}$$

otteniamo infine l'equazione

(I_1) $$\boxed{\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0},$$

della quale dobbiamo cercare le soluzioni che soddisfano le condizioni iniziali

(I_2) $$\boxed{\theta(0) = 1, \qquad \theta'(0) = 0}.$$

Notiamo che se la sfera gassosa ha un raggio finito R, su di essa si avrà $P(R) = 0$, $\varrho(R) = 0$, talchè se $\xi_0 = aR\Phi_0^{(n-1)/2}$ risulterà $\Phi(\xi_0) = 0$; abbiamo quindi che il problema dell'esistenza di una configurazione di equilibrio di una sfera gassosa, di raggio finito, equivale a trovare se esiste una soluzione $\theta(\xi)$ del sistema (I_1), (I_2) che abbia uno zero positivo ξ_0 e risulti limitata e positiva tra 0 e ξ_0.

Essendo il punto $\xi = 0$ un punto singolare dell'equazione (I_1) non è possibile giovarci dei teoremi di esistenza già stabiliti; l'esistenza della soluzione la ricaveremo però dallo studio diretto dell'equazione stessa.

b) La (I_1) col cangiamento di variabile

$$x = 1/\xi$$

(1) In 0 è $g = 0$, $dP/dr = 0$, quindi $\Phi'(0) = 0$.

diventa

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{\theta^n}{x^4}=0;$$

questa se $n=0$ ha l'integrale $\theta=c_1+c_2x-1/6x^2$, e la (I_1) per $n=0$ avrà quindi l'integrale generale

$$\theta=c_1+c_2\xi^{-1}-\xi^2/6, \qquad (c_1,\ c_2 \text{ costanti arbitrarie}).$$

Così pure se poniamo

$$\theta=y/\xi$$

la (I_1) diventa

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{y^n}{\xi^{n-1}}=0;$$

questa se $n=1$ ha l'integrale $y=c_1\cos\xi+c_2\operatorname{sen}\xi$, perciò la (I_1) per $n=1$ ha l'integrale generale $\theta=\xi^{-1}(c_1\cos\xi+c_2\operatorname{sen}\xi)$, con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

2. - Supponiamo che la sfera gassosa abbia il raggio finito R, esista cioè una soluzione del sistema (6_1), (6_3) tale che $\Phi(r)>0$ per $0<r<R$, $\Phi(R)=0$.

Se M è la massa, avremo dalla (2)

$$M=4\pi\int_0^R r^2\varrho\,dr$$

Determiniamo ora con EMDEN l'energia potenziale posseduta dalla sfera gassosa, cioè il lavoro fatto dalla gravitazione per portare la massa della sfera dallo stato di infinita diffusione allo stato attuale.

Consideriamo due strati sferici di centro O, quello interno limitato dalle sfere di raggio s, $s+ds$ di massa dM_s, l'esterno limitato dalle sfere di raggio r, $r+dr$ di massa dM_r. La loro mutua energia potenziale è data da

$$G\,dM_r\,dM_s/r$$

e l'energia mutua tra dM_r e tutta la massa interna sarà quindi

$$G\frac{dM_r}{r}\int_0^r dM_s=\frac{GM_r dM_r}{r},$$

talchè l'energia totale Ω posseduta dalla sfera gassosa è data da

$$\Omega=G\int_0^M\frac{M_r dM_r}{r}=\frac{1}{2}G\int_0^M\frac{dM_r^2}{r}, \tag{7}$$

e integrando per parti

$$\Omega=\frac{1}{2}\frac{GM^2}{R}+\frac{1}{2}G\int_0^R\frac{M_r^2}{r^2}dr>0. \tag{8}$$

Dalla (1) e (5_3) si ha $g=-d\Phi/dr$, perciò

$$\frac{GM_r}{r^2}=-\frac{d\Phi}{dr}, \tag{9}$$

e la (8) dà

$$\Omega=\frac{1}{2}\frac{GM^2}{R}-\frac{1}{2}G\int_{\Phi=\Phi_0}^{\Phi=0}M_r d\Phi. \tag{10}$$

Dalla (2) si ha, $dM_r=4\pi r^2\varrho\,dr$, e dalla (7) e (9)

$$\Omega=-4\pi\int_0^R\varrho r^3\frac{d\Phi}{dr}dr,$$

ma per la prima delle (5_2) è $\varrho=\lambda\Phi^n$ con $\lambda=[(n+1)k]^{-n}$, perciò

$$\Omega=-\frac{4\pi\lambda}{n+1}\int_{\Phi=\Phi_0}^{\Phi=0}r^3d\Phi^{n+1}=\frac{12\pi\lambda}{n+1}\int_0^R r^2\Phi^{n+1}dr=$$

$$=\frac{3}{n+1}\int_0^R\Phi 4\pi\varrho r^2dr=\frac{3}{n+1}\int_{M=0}^M\Phi\,dM_r,$$

e integrando per parti

$$\Omega=-\frac{3}{n+1}\int_{\Phi=\Phi_0}^{\Phi=0}M_r d\Phi;$$

e confrontando quest'ultima con la (10) otteniamo

$$\Omega=\frac{3}{5-n}G\frac{M^2}{R},$$

ed essendo $\Omega>0$ e finito, se ne deduce che *condizione necessaria perchè la sfera gassosa abbia raggio finito è che sia* $n<5$.

La condizione è anche sufficiente, cioè se $0 \leqslant n < 5$ la soluzione $\theta(\xi)$ della (I_1) che soddisfa le condizioni iniziali (I_2) è definita in un intervallo $(0, \xi_0)$, con ξ_0 positivo finito, e $\theta(\xi)$ limitata e positiva per $0 \leqslant \xi < \xi_0$, $\theta(\xi_0) = 0$.

Noi dimostreremo questo teorema nel n. 4 per $1 < n \leqslant 3$, [1] e studieremo direttamente il caso $n = 5$ nel n. 3, *b*); qui intanto riportiamo dalla citata opera di EMDEN i valori numerici di ξ_0 calcolati in funzione di n [2].

n	0	0·5	1	1·5	2	2·5	3	4	4·5	4·9	5	>5
ξ_0	2·4494	2·7528	3·1415	3·6571	4·3518	5·4172	6·9011	14·999	32·140	169·47	∞	∞

3. - *a*) In luogo dell'equazione (I_1) consideriamo con FOWLER l'equazione

$$\boxed{\frac{1}{\xi^\lambda}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) + \theta^n = 0} \tag{11}$$

con $\lambda > 0$, $n > 0$ [3].

Supponendo n reale, non necessariamente intero, ci limiteremo alla ricerca delle soluzioni θ che soddisfano la condizione $\theta(\xi) \geqslant 0$ in tutto il loro campo di definizione, e chiameremo *soluzione di*

(1) Per uno studio generale del caso $n > 0$, cfr. G. SANSONE, lavoro citato in nota al n. 3, *a*).

(2) Cfr. R. EMDEN, op. cit. n. 1, p. 84.

(3) Lo studio dell'equazione (11) e di altre equazioni più generali è stato largamente approfondito da R. H. FOWLER nelle memorie: *a*) *The form near infinity of real continuous solutions of a certain equation of the second order*, The Quarterly Journ. of Math. 45 (1914), (Cambridge Series), pp. 289-350; *b*) *The solutions of Emden's and similar differential equations*, Monthly Not. of the Royal Astr. Soc. 91 (1930), pp. 63-91; *c*) *Further studies of Emden's and similar differential equations*, The Quarterly Journ. Math. 2 (1931), (Oxford Series), pp. 259-288. Cfr. anche N. FAIRCLOUGH: *Numerical integration of Emden's polytropic equation of index three*, Monthly Not. of the Royal Astr. Soc. 91 (1930), pp. 55-63; E. A. MILNE: *Note on steady-state distributions which are given by solutions of Emden's differential equations*, idem, 91 (1931), pp. 751-756; E. HOPF: *On Emden's differential equation*, idem, 91, (1931), pp. 653-663. *I risultati di quest'ultima memoria sono riportati nei nn. 4 e 5.*

EMDEN una soluzione $\theta(\xi)$ che verifichi le condizioni $\theta(\xi) \geqslant 0$, $\lim_{\xi \to +0} \theta(\xi) = \theta_0 > 0$, [$\theta_0$ *finito*] [1].

Con la trasformazione $x = 1/\xi$ abbiamo

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + x^{-\lambda-2}\theta^n = 0, \qquad [x = 1/\xi], \tag{12$_a$}$$

mentre se a ξ e a θ sostituiamo t ed u mediante le relazioni

$$\xi = 1/x = e^{-t}, \qquad \theta = e^{\mu t}u = \xi^{-\mu}u = x^\mu u, \tag{13}$$

dove

$$\mu = \lambda/(n-1) \tag{14}$$

dalla (11) otteniamo

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (2\mu - 1)\frac{du}{dt} + \mu(\mu-1)u + u^n = 0. \tag{12$_b$}$$

Facendo $u' = v$, quest'ultima equivale al sistema (normale) di equazioni

$$\frac{du}{dt} = v; \qquad \frac{dv}{dt} = -(2\mu-1)v - \mu(\mu-1)u - u^n \tag{12$_c$}$$

dalle quali, dividendo membro a membro, otteniamo l'equazione del primo ordine

$$\frac{dv}{du} = -(2\mu-1) - \frac{\mu(\mu-1)u + u^n}{v}. \tag{12$_d$}$$

b) Si osservi che nel caso dell'equazione di EMDEN è $\lambda = 2$, e se $n = 5$, è $\mu = 1/2$, perciò

$$v\frac{dv}{du} - \frac{u}{4} + u^5 = 0,$$

$$v^2 - u^2/4 + u^6/3 = \text{cost.},$$

(1) Per una dimostrazione dell'esistenza della soluzione $\theta(\xi)$ di EMDEN, corrispondente ad un valore prescritto della costante θ_0, cfr. G. SANSONE: *Sulle soluzioni di Emden dell'equazione di Fowler*, Rend. Sem. Mat. di Roma, (5), 1 (1940), pp. 163-176. In questo lavoro è pure dimostrato che la condizione $2\lambda - n + 1 > 0$ è necessaria e sufficiente perchè le soluzioni di EMDEN abbiano uno zero a distanza finita.

ma dalle condizioni $\theta(0)$ finito, $\theta'(0)=0$ si ricava $\lim\limits_{t\to+\infty} u=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} v=0$, quindi

$$v^2-u^2/4+u^6/3=0,$$

$$u'^2=u^2/4-u^6/3,$$

$$dt=2du/u(1-\tfrac{4}{3}u^4)^{1/2},$$

$$t=-\log\left[1+\sqrt{1-\tfrac{4}{3}u^4}\,\right]\Big/\sqrt{\tfrac{4}{3}}\,u^2+\log C,$$

$$\xi=e^{-t}=\frac{1}{C}\left[1+\sqrt{1-\tfrac{4}{3}u^4}\right]\Big/\sqrt{\tfrac{4}{3}}\,u^2,$$

$$\theta=\sqrt[4]{3}\,C^{1/2}(C^2\xi^2+1)^{-1/2},\qquad (C=\text{cost.}).$$

In particolare la soluzione del sistema (I_1) (I_2) quando $n=5$ è data da

$$\theta=\sqrt{3}/\sqrt{3+\xi^2},$$

ed è $\theta(\xi)>0$, qualunque sia ξ [1].

c) Notiamo infine che un integrale del sistema (12_c) è dato da

$$u=[\mu(1-\mu)]^{1/(n-1)},\qquad v=0$$

e la (11) per $\mu\neq1$ ammette quindi l'integrale

$$\theta=[\mu(1-\mu)\xi^{-\lambda}]^{1/(n-1)}. \tag{15}$$

4. - *a*) In questo numero vogliamo studiare il comportamento delle curve integrali dell'equazione (12_d) o del sistema normale equivalente

$$\boxed{\frac{du}{dt}=v,\qquad \frac{dv}{dt}=-(2\mu-1)\,v-\mu(\mu-1)\,u-u^n}\,, \tag{12_c}$$

così ci sarà agevole nel n. 5 risalire dalle loro proprietà a quelle delle curve integrali dell'equazione (11).

Noi supponiamo d'ora in avanti n reale,

$$\boxed{n>1,\qquad \mu\geqslant1}\,,\qquad (1<n\leqslant\lambda+1),$$

includendo in tal modo i due casi interessanti l'astrofisica:

$$\lambda=2,\ \text{e}\ n=3/2,\ 3.$$

---

[1] Nella tabella del n. 2 per $n=5$ si ha $\xi_0=+\infty$.

L'ipotesi n reale implica che se

$$u=u(t),\qquad v=v(t) \tag{16}$$

è una soluzione (reale) del sistema (12_c), è $u(t)\geqslant0$.

Notiamo poi che fissato un valore finito t_0 di t, una tale soluzione è univocamente determinata in un intorno che contiene nel suo interno t_0, quando si prescrivano per essa le condizioni iniziali

$$u(t_0)=u_0,\qquad v(t_0)=v_0, \tag{17}$$

con $u_0>0$. Se invece è $u_0=0$, $v_0>0$, gli integrali (16) sono determinati in un intorno a destra di t_0; se $u_0=0$, $v_0<0$ in un intorno a sinistra di t_0; basterà infatti prolungare la funzione

$$-(2\mu-1)\,v-\mu(\mu-1)\,u-u^n$$

nel semipiano $u<0$ facendola uguale a $-(2\mu-1)v$, applicare il teorema di esistenza e di unicità, e tener conto della prima delle (12_c).

Si osservi infine che se $u(t_0)=u_0=0$, $v(t_0)=v_0=0$, (t_0=finito), la soluzione del sistema (12_c) è $u\equiv0$ $v\equiv0$.

b) Ciò premesso notiamo che le (16) rappresentano le equazioni parametriche di una curva Γ del piano u, v, e un arco di Γ appartenente al quadrante che ha per lati i semiassi $u>0$, $v>0$, o al quadrante dei semiassi $u>0$, $v<0$, potrà anche rappresentarsi sotto la forma $v=v(u)$; infatti in tali quadranti è rispettivamente $u'>0$, $u'<0$, e perciò $u(t)$ crescente o decrescente con t.

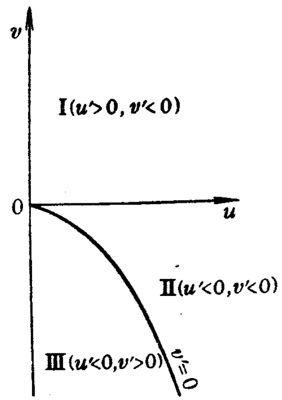

Fig. 42.

Consideriamo la curva γ del semipiano $u\geqslant0$ di equazione

$$\gamma:\quad (2\mu-1)\,v+\mu(\mu-1)\,u+u^n=0;$$

essa passa per l'origine e appartiene tutta al quadrante limitato dal semiasse delle u positive e delle v negative, e quando $u\to+\infty$, $v\to-\infty$ decrescendo continuamente. Il semiasse u positivo e la γ dividono il semipiano $u>0$ in tre regioni indicate nella fig. 42 con I, II, III e in esse u' e v' hanno i segni

$$\text{I}:\ u'>0,\ v'<0;\quad \text{II}:\ u'<0,\ v'<0;$$
$$\text{III}:\ u'<0,\ v'>0.$$

Analizziamo ora il comportamento delle curve Γ uscenti da un punto del semiasse $v>0$, facciamo cioè l'ipotesi

$$u(t_0)=0, \qquad v(t_0)>0.$$

Per la continuità esiste un $\bar{t}_0$ tale che

$$(18_1) \qquad v(t)>0 \quad \text{per} \quad t_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}_0,$$

e perciò per la prima delle (12_c)

$$(18_2) \qquad u(t)>0 \quad \text{per} \quad t_0 < t \leqslant \bar{t}_0,$$

e da queste si ha che per $t_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$, $u(t)$ è positiva crescente, e $v(t)$ positiva decrescente.

L'estremo superiore t_1 dei valori di t per i quali è $v(t)>0$ è un numero finito. Se per assurdo fosse $v(t)>0$, qualunque sia $t>t_0$, si avrebbe $u(t)>0$ e crescente con t, e $v(t)$ decrescente con t, quindi per $t \geqslant t_0$

$$v' < -u^n \leqslant -u^n(\bar{t}_0), \qquad v(t) < v(\bar{t}_0) - u^n(\bar{t}_0)(t-\bar{t}_0)$$

da cui l'assurdo $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=-\infty$. È dunque t_1 finito. Non può aversi $v(t_1)>0$, perchè avendosi anche $u(t_1)>0$, t_1 non sarebbe l'estremo superiore dei valori per i quali $v(t)>0$; si ha dunque

$$v(t_1)=0,$$

e la Γ nel punto $[u(t_1), v(t_1)]$ incontra ortogonalmente il semiasse delle u positive. Per $t>t_1$ e sufficientemente prossimo a t, a motivo della seconda delle (12_c) è $v(t)<0$ e la Γ passerà quindi dalla regione I alla regione II, e vogliamo ora mostrare che essa incontra la curva γ in un punto distinto dall'origine e corrispondente ad un valore finito di t. Supponiamo infatti per assurdo che la Γ resti sempre nella regione II e sia t_2 l'estremo superiore dei valori di t per i quali, quando $t_1<t<t_2$ è $v'(t)<0$; avremo in (t_1, t_2), $v(t)$ negativa decrescente e $u(t)$ pure decrescente. Esiste $\lim\limits_{t\to t_2-0} u(t)$ ed esso è un numero positivo, perchè ove fosse lo zero la Γ dovrebbe incontrare la γ. Esiste pure $\lim\limits_{t\to t_2-0} v(t)$, e siccome tale limite non può essere $-\infty$, perchè la Γ dovrebbe incontrare la γ, si avrà $\lim\limits_{t\to t_2-0} v(t)=\bar{v}<0$, con $\bar{v}$ finito. Se fosse $t_2=+\infty$ dalla prima delle (12_c) si avrebbe l'assurdo $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)=-\infty$; dovrà essere allora t_2 finito, ed essendo $u(t_2)>0$ ne viene $v'(t_2)=0$ perchè se $v'(t_2)<0$, alla Γ appartengono punti della regione II corrispondenti a valori di $t>t_2$. Dunque Γ incontra γ nel punto $[u(t_2), v(t_2)]$ e ivi la tangente alla Γ è parallela all'asse u, e la Γ attraversa la γ passando dalla regione II alla regione III. Infatti in un punto comune a Γ e a γ, $v''(t)$ vale

$$v'' = -[\mu(\mu-1)+nu^{n-1}]u'>0.$$

Per studiare il comportamento della Γ nella regione III, indichiamo con t_3 l'estremo superiore dei valori di t per i quali quando $t_2<t<t_3$ risulta $v(t)<0$ [e $u(t)\geqslant 0$]. Se t_3 è finito, non può aversi $u(t_3)=0$, $v(t_3)=0$, perchè ne verrebbe $u(t)\equiv 0$, $v(t)\equiv 0$; non può aversi $u(t_3)>0$, $v(t_3)<0$ perchè allora t_3 non sarebbe l'estremo superiore dei valori di t per i quali $v(t)<0$; non può aversi $u(t_3)>0$, $v(t_3)=0$, perchè allora la Γ taglierebbe la γ passando con t crescente dalla regione III alla II; resta allora $u(t_3)=0$, $v(t_3)<0$, e la Γ rimane tutta nella III, con un estremo sul semiasse $v<0$.

Si abbia invece $t_3=+\infty$, cioè qualunque sia $t>t_2$, $v(t)<0$; siccome l'arco della curva Γ corrispondente a tali valori di t non ha punti su γ, (salvo l'origine) è $v(t)$ negativa crescente e $u(t)$ positiva decrescente. Non potrà aversi $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=v^*<0$, perchè allora dalla prima delle (12_c) si avrebbe $\lim\limits_{t\to+\infty} u=-\infty$; è dunque $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)=u^*\geqslant 0$. Se fosse $u^*>0$ si avrebbe anche $\lim\limits_{t\to+\infty} v'(t)=-\mu(\mu-1)u^*-u^{*n}<0$, e ciò non può essere, si ha quindi $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)=0$.

Dalle cose dette segue: *se $u=u(t)$, $v=v(t)$ è una curva integrale Γ del sistema (12_c) che soddisfa le condizioni iniziali*

$$u(t_0)=0, \qquad v(t_0)>0,$$

la Γ, quando t cresce, passa dalla regione I *alla* II, *e successivamente alla* III; *e se essa non taglia il semiasse delle v negative in un punto corrispondente ad un valore finito di t, si ha*

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)=0, \qquad \lim_{t\to+\infty} v(t)=0.$$

c) Possiamo invertire la proposizione ora dimostrata in b) in questo modo. *Qualunque curva integrale Γ del sistema* (12_c), *passante per un punto* $(\bar{u}, \bar{v})$, $u(\bar{t})=\bar{u}$, $v(\bar{t})=\bar{v}$, $[\bar{u}\geqslant 0,\ \bar{t}$ finito$]$, $\bar{u}^2+\bar{v}^2>0$, *può supporsi abbia origine in un punto del semiasse v positivo.*

Ci porremo nel caso più sfavorevole che la Γ passi per un punto $(\bar{u}, \bar{v})$ della regione III, si abbia quindi $\bar{u}\geqslant 0$, $\bar{v}<0$, $v'(\bar{t})>0$. Sia t_2 l'estremo inferiore dei valori di $t<t_2$ per i quali $v'(t)>0$. Vogliamo provare che t_2 è finito. Sia per assurdo $t_2=-\infty$; dalla seconda delle (12_c) si ha

$$v<-[\mu(\mu-1)u+u^n]/(2\mu-1), \tag{19}$$

e dalla (12_d), $dv/du>-(2\mu-1)$,

$$v(u)>\bar{v}-(2\mu-1)(u-\bar{u}), \tag{20}$$

e siccome le (19) e (20) non possono coesistere pe u sufficientemente grande, ne viene che $u(t)$ rimane limitata superiormente, e poichè $u(t)$ è crescente con t decrescente si ha

$$\lim_{t\to-\infty} u(t)=\bar{\bar{u}}>0, \qquad \text{con } \bar{\bar{u}} \text{ finito.}$$

Ma qualunque sia $t<\bar{t}$ è $v<\bar{v}<0$, $u'(t)<\bar{v}$, $u(\bar{t})-u(t)<\bar{v}(\bar{t}-t)$, e ne viene l'assurdo $u(t)\to+\infty$ quando $t\to-\infty$.

Sia allora t_2 l'estremo inferiore dei valori di t tali che $v'(t)>0$; poichè ivi $u(t_2)>0$, segue $v'(t_2)=0$, e per $t<t_2$, e sufficientemente prossimo a t_2, il punto $[u(t), v(t)]$ di Γ è nella regione II.

Sia ora t_1 l'estremo inferiore dei valori di t per i quali risulta $v(t)<0$, e proviamo che non può essere $t_1=-\infty$, cioè il punto $[u(t), v(t)]$ non può rimanere sempre nella regione II. Siccome in questa regione $u(t)$, $v(t)$ sono crescenti con t decrescente, esistono i due limiti

$$(20_1)\quad \lim_{t\to-\infty} u(t)=u^*, \qquad (20_2)\quad \lim_{t\to-\infty} v(t)=v^*\leqslant 0.$$

Se fosse $u^*=+\infty$, per u sufficientemente grande, dalla (12_d) si avrebbe

$$\frac{dv}{du}=-(2\mu-1)+\frac{\mu(\mu-1)u+u^n}{|v|}>lu^n, \qquad [l>0]$$

quindi $v>lu^{n+1}/(n+1)-c_1$, e perciò $\lim\limits_{u\to+\infty} v=+\infty$, contro la ($20_2$).

È allora u^* finito e per $t_2>t$ si ha $0<u(t_2)<u(t)<u^*$. Nella (20_2) dovrà aversi $v^*=0$, perchè in caso opposto dalla prima delle (12_c) si avrebbe $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t)=+\infty$; dalla seconda delle ($12_c$) segue

$$\lim_{t\to-\infty} v'(t)=-\mu(\mu-1)u^*-u^{*n}<0,$$

esiste quindi una costante l_1 tale che $v'(t)<l_1<0$, per $t<\bar{t}_2<t_2$, perciò per $t<\bar{t}_2$ si ha $v(\bar{t}_2)-v(t)<l_1(\bar{t}_2-t)$, ma allora $\lim\limits_{t\to-\infty} v(t)=+\infty$ contro la (20_2). Sarà dunque t_1 finito, e siccome non può aversi $v(t_1)<0$, è $v(t_1)=0$, e la Γ taglia il semiasse u positivo, e per $t<t_1$ e sufficientemente prossimo a t_1 il punto $[u(t), v(t)]$ appartiene alla regione I.

Ci resta ora da provare che esiste un valore finito t_0 di t, $t_0<t_1$, tale che $u(t_0)=0$. Sia infatti t_0 l'estremo inferiore dei valori di $t<t_1$ tali che $u(t)>0$ e dimostriamo che non può essere $t_0=-\infty$, cioè il punto $[u(t), v(t)]$ non può rimanere per $t<t_1$ sempre interno alla regione I. In questa regione infatti sono, $u(t)$ decrescente, e $v(t)$ crescente, per t decrescente, e se $t<\bar{t}_1<t_1$ si ha

$$v(t)>v(\bar{t}_1)>0,\quad u'(t)>v(\bar{t}_1),\quad u(\bar{t}_1)-u(t)>v(\bar{t}_1)[\bar{t}_1-t]$$

e allora $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t)=+\infty$, e ciò non può essere. Dunque t_0 è finito, e siccome non può essere $u(t_0)>0$, si avrà $u(t_0)=0$, e abbiamo così invertito la proposizione dimostrata in b).

Gioverà notare che le curve Γ hanno nella regione I la loro concavità rivolta verso il semiasse delle v negative e nella regione II verso il semiasse delle v positive; si ha infatti dalla (12_d)

$$\frac{d^2v}{du^2}=-\frac{\mu(\mu-1)+nu^{n-1}}{v}+\frac{\mu(\mu-1)u+u^n}{v^2}\,\frac{dv}{du}$$

e si ha $d^2v/du^2<0$ in I e $d^2v/du^2>0$ in II.

E gioverà infine notare che due curve integrali distinte del sistema (12_c), a motivo del teorema di unicità, non hanno punti a comune corrispondenti a valori finiti di t.

d) Proveremo che *esiste una e una sola soluzione* $u=u(t)$, $v=v(t)$ *del sistema* (12_c) *tale che*

$$\lim_{t\to+\infty} u(t)=0, \qquad \lim_{t\to+\infty} v(t)=0, \qquad \lim_{t\to+\infty} v(t)/u(t)=-\mu.$$

Sia $v(u, v_0)$ la soluzione dell'equazione (12_d) che soddisfa la condizione iniziale $v(0, v_0)=v_0<0$, e dimostriamo che essa ha per campo di esistenza almeno l'intervallo $(0, 2^{-2/(n-1)})$, e ivi soddisfa la limitazione

$$v(u, v_0)< -\mu u+2u^n, \qquad [0<u<2^{-2/(n-1)},\ v_0<0].$$

Consideriamo l'equazione

$$\frac{dw}{du}=-(2\mu-1)-[\mu(\mu-1)+\delta]\,\frac{u}{w}, \qquad (\delta \text{ costante positiva}), \tag{21}$$

e determiniamone la soluzione soddisfacente la condizione iniziale $w(0)=w_0\neq 0$. Per questo basterà sostituire alla (21) il sistema

$$du/dt=w, \quad dw/dt=-(2\mu-1)\,w-[\mu(\mu-1)+\delta]\,u, \tag{22_1}$$

e determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali

$$u(0)=0, \qquad w(0)=w_0. \tag{22_2}$$

Eliminando w tra le (22_1) si ha per u l'equazione di secondo ordine

$$u''+(2\mu-1)\,u'+[\mu(\mu-1)+\delta]u=0,$$

di cui l'equazione caratteristica

$$\varrho^2+(2\mu-1)\,\varrho+[\mu(\mu-1)+\delta]=0$$

ha le radici $-\varrho_1,\ -\varrho_2$

$$\varrho_1=\mu-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\delta}, \qquad \varrho_2=\mu-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\delta}, \tag{23}$$

e tenuto conto delle (22_1), (22_2) si ha

$$u=w_0[e^{-\varrho_1 t}-e^{-\varrho_2 t}]/(\varrho_2-\varrho_1), \quad w=w_0\,[-\varrho_1\, e^{-\varrho_1 t}+\varrho_2\, e^{-\varrho_2 t}]/(\varrho_2-\varrho_1),$$

dalle quali

$$w+\varrho_2\, u=w_0\, e^{-\varrho_1 t}, \qquad w+\varrho_1\, u=w_0\, e^{-\varrho_2 t}$$

e perciò la richiesta soluzione della (21) è data da

$$[(w+\varrho_1\, u)/w_0]^{\varrho_1}=[(w+\varrho_2\, u)/w_0]^{\varrho_2}. \tag{24}$$

Per $\delta<1/4$ è $[1/4-\delta]^{1/2}>1/2-2\delta$, e perciò dalla prima delle (23), tenuto pure conto che è $\mu\geqslant 1>2\delta$,

$$\varrho_1>\mu-2\delta>0, \qquad [0<\delta<1/4]. \tag{25}$$

L'equazione (21) ammette anche l'integrale particolare

$$w=-\varrho_1\, u$$

il quale può del resto ottenersi dall'integrale (24) facendo tendere w_0 a $+0$.

Dall'equazione (12_d) si ha

$$dv/du<-(2\mu-1)-[\mu(\mu-1)+\delta]\,u/v \ \text{ per } u<\delta^{1/(n-1)}, \quad v<0,$$

e sottraendo dalla (21), $[w=-\varrho_1\, u]$, abbiamo

$$\frac{d\Delta}{du}>\frac{\mu(\mu-1)+\delta}{vw}\,u\Delta, \qquad [u<\delta^{1/(n-1)}, \quad v<0] \tag{26}$$

con

$$\Delta=-\varrho_1\, u-v\,(u, v_0), \qquad v_0<0.$$

Si ha $\Delta(0)=-v_0>0$, e poichè per la (26), quando $v<0$, $u<\delta^{1/(n-1)}$, $\log \Delta$ è crescente con u crescente abbiamo [cfr. (25)]

$$v(u, v_0)<-\varrho_1\, u<-(\mu-2\delta)\, u,$$

per $v<0$, $u<\delta^{1/(n-1)}$, $\delta<1/4$.

Valendo la disuguaglianza $v(u, v_0)<-\varrho_1\, u$ in senso forte ne viene che $v(u, v_0)$ si deve mantenere negativa fino a quando $u<\delta^{1/(n-1)}$ [1], e perciò

$$v(u, v_0)<-\varrho_1\, u<-(\mu-2\delta)\, u, \quad \text{per} \quad u<\delta^{1/(n-1)}, \quad \delta<1/4.$$

Sia ora $0<u<(1/4)^{1/(n-1)}$; posto $\delta=u^{n-1}+\varepsilon<1/4$ e facendo tendere $\varepsilon\to+0$ si ricaverà dall'ultima limitazione

$$v(u, v_0)\leqslant -\mu u+2u^n, \qquad 0<u<(1/4)^{1/(n-1)}, \tag{27}$$

come si è prima affermato.

Notiamo ora che se $v_0<\bar{v}_0<0$, per il teorema di unicità si ha che fino a quando $v(u, v_0)$, $v(u, \bar{v}_0)$ si mantengono negative è

---

(1) Se la $v(u, v_0)$, quando u varia tra 0 e $\delta^{1/(n-1)}$, si annullasse, la curva $v=v(u, v_0)$ dovrebbe avere un punto in comune con la semiretta $v=-\varrho_1 u$ del secondo quadrante, dovrebbe cioè esistere un valore $\bar{u}$ tale $v(\bar{u}, v_0)=-\varrho_1\bar{u}$ e ciò non può essere.

$v(u, v_0) < v(u, \bar{v}_0)$, passando allora al limite nella (27) per $v_0 \to -0$, e posto

$$\lim_{v_0 \to -0} v(u, v_0) = v_E(u)$$

otteniamo

(28) $$\boxed{v_E(u) \leqslant -\mu u + 2u^n}, \qquad 0 < u < 4^{-1/(n-1)}.$$

La funzione $v_E(u)$ *soddisfa nell'intervallo* $0 < u < 4^{-1/(n-1)}$ *l'equazione* (12_d). Infatti in qualunque intervallo ω interno a $[0, 4^{-1/(n-1)}]$ le $v(u, v_0)$, a motivo della (12_d) e della limitazione $v(u, v_0) < -\varrho_1 u$ sono equicontinue ed equilimitate; esse convergono quindi uniformemente in ω verso la funzione continua $v_E(u)$ [Cap. I, § 6, n. 2, nota (¹), *c*), pp. 38-39] e passando al limite per $v_0 \to -0$ segue appunto la nostra affermazione. Si ha inoltre $\lim_{u \to +0} v_E(u) = 0$.

All'integrale $v = v_E(u)$ della (12_d) corrisponde un sistema di integrali $u = u(t)$, $v = v_E(t)$ delle (12_c) che per i risultati di *c*) può supporsi abbia origine da un punto del semiasse delle v positive e proveremo ora che si ha

(29) $$\boxed{v_E(u) \geqslant -\mu u}, \qquad u > 0.$$

Dall'equazione (12_d) otteniamo

$$dv_E/du > -(2\mu - 1) - \mu(\mu - 1)\, u/v_E, \qquad v_E < 0$$

e sottraendo da questa la (21), *quando vi si faccia* $\delta = 0$, $[w(0) = w_0 < 0]$

(30) $$d\Delta/du > \mu(\mu - 1)\, u\Delta/v_E w, \quad \Delta = v_E - w, \quad v_E < 0.$$

Si ha $w(0) = w_0 < 0$, $\lim_{u \to +0} v_E(u) = 0$, perciò $\Delta(0) > 0$, quindi $\Delta > 0$

(31) $$v_E > w$$

in ogni intervallo nel quale $v_E < 0$, $w < 0$. Ma se nella (24) facciamo tendere $w_0 \to -0$ si ha $\lim_{w_0 \to -0} w = -\mu u$, e dalla (31) segue appunto la (29).

Dalle (28) e (29) segue $[\lim_{u \to +0} v_E(u) = 0$ e ancora$]$

(32) $$\lim_{u \to +0} v/u = -\mu.$$

Si ha da qui che la curva $v = v_E(u)$ ha per tangente nel punto $u = 0$, la retta $v = -\mu u$, e rimane tutta da una stessa parte di questa retta (¹).

Dimostriamo infine che la $v_E(u)$ è unica, cioè se $\bar{v}(u)$ è un'altra soluzione della (12_d) avente le stesse proprietà della $v_E(u)$

$$\lim_{u \to +0} \bar{v}(u) = 0, \qquad \lim_{u \to +0} \bar{v}(u)/u = -\mu$$

è $\bar{v}(u) \equiv v_E(u)$.

Senza alterare le generalità possiamo supporre che per $\bar{v} < 0$ sia $v_E < \bar{v} < 0$, talchè abbiamo

(33) $$D = \bar{v} - v_E > 0, \qquad \lim_{u \to +0} D/u = 0.$$

Dall'equazione (12_d) si ha

$$dD/du = [\mu(\mu - 1)u + u^n] D/v_E \bar{v}$$

perciò

$$\lim_{u \to +0} \frac{\log D}{\log u} = \lim_{u \to +0} \frac{u}{D}\frac{dD}{du} = \lim_{u \to +0} [\mu(\mu - 1) + u^{n-1}] \frac{u}{v_E}\frac{u}{\bar{v}} = 1 - \frac{1}{\mu},$$

$$\lim_{u \to +0} \frac{\log (D/u)}{\log u} = -\frac{1}{\mu} < 0,$$

ma quest'ultima è assurda perchè $\lim_{u \to +0} \log u = -\infty$, e per le (33) $\lim_{u \to +0} \log (D/u) = -\infty$.

e) Possiamo ormai descrivere il comportamento delle curve integrali dell'equazione (12_d) nel piano u, v [od anche il comportamento delle curve integrali del sistema (12_c)].

(¹) Si ha effettivamente $v_E > -\mu u$; infatti se in un punto si avesse $v_E = \mu u$, ivi la $v_E(u)$ dovrebbe toccare la retta $v = -\mu u$, perciò $v'_E(u) = -\mu$, ma allora la (12_d) diventa $-\mu = -2\mu + 1 + [\mu(\mu - 1)u + u^n]/\mu u$, dalla quale $u = 0$.

Si chiami con E [EMDEN] la curva del semipiano $u \geqslant 0$ di equazione $v = v_E(u)$; detto con v_E^0 il punto in cui essa taglia il semiasse delle $v > 0$ ogni curva integrale $v = v(u)$ dell'equazione (12_d) partente da un punto v_0 del semiasse $v > 0$, $0 < v_0 < v_E^0$ passa per l'origine e appartiene tutta alla regione limitata dalla E e dal semiasse delle v positive, mentre se $v_0 > v_E^0$ la curva integrale corrispondente ha l'altro estremo sul semiasse delle v negative ed è tutta esterna alla regione considerata. Si chiamerà la prima una soluzione M [MILNE] dell'equazione (12_d), la seconda una soluzione F [FOWLER], e la curva E separa la regione delle curve M da quella delle curve F.

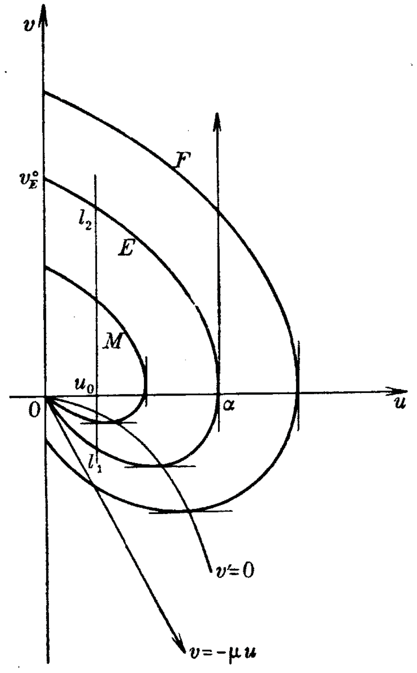

Fig. 43.

5. - *a*) Nota una soluzione $u = u(t)$, $v = v(t)$ del sistema (12_c), la corrispondente soluzione dell'equazione (11) di FOWLER è data da

$$\xi = e^{-t}, \qquad \theta(\xi) = e^{\mu t} u(t) = \xi^{-\mu} u(-\log \xi),$$

$$\boxed{\theta(\xi) = \xi^{-\mu}\, u(-\log \xi)}\,,$$

ma se osserviamo che anche $u = u(t+c)$, $v = v(t+c)$, [$c =$ cost.] è una soluzione dello stesso sistema, abbiamo che insieme alla

soluzione $\theta(\xi)$ l'equazione di FOWLER avrà un gruppo di soluzioni

$$\theta_1(\xi) = A^{\mu}\, \theta(A\xi)$$

con A costante arbitraria.

Vogliamo studiare l'andamento di queste curve secondo che $u = u(t)$, $v = v(t)$ sia la curva E, o una curva M, oppure una curva F

Mostreremo preliminarmente che *partendo dalla soluzione* $u = u_E(t)$, $v = v_E(t)$ *la corrispondente soluzione* $\theta(\xi)$ *soddisfa la condizione* $\lim_{\xi \to +0} \theta(\xi) =$ finito.

Dalle (13) abbiamo

$$u = \xi^{\mu}\theta(\xi), \qquad v + \mu u = \frac{du}{dt} + \mu u = -\xi^{\mu+1}\frac{d\theta}{d\xi};$$

$$(34) \qquad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{d\xi}\,\xi = e^{\mu t}(v + \mu u);$$

dalla (32) abbiamo $\lim_{t \to +\infty} u'_E / u_E = -\mu$, quindi $u_E = e^{-(\mu+\varepsilon)t}$, dove $\lim_{t \to +\infty} \varepsilon = 0$, perciò dalle (28), (29), (34)

$$0 \leqslant \frac{d\theta}{dt} \leqslant 2\, e^{-n(\mu+\varepsilon)t}\, e^{\mu t},$$

ma $-\mu(n-1) = -\lambda$, e allora

$$(35) \qquad 0 \leqslant \frac{d\theta}{dt} \leqslant 2\, e^{-(\lambda+n\varepsilon)t}.$$

Esiste un t_0 tale che per $t > t_0$ è $\lambda + n\varepsilon > \lambda_1 > 0$, quindi se $t > t_0$, $0 < d\theta/dt < 2\, e^{-\lambda_1 t}$,

$$0 < \theta(t) - \theta(t_0) \leqslant \frac{2}{\lambda_1}[e^{-\lambda_1 t_0} - e^{-\lambda_1 t}], \qquad [t_0 < t],$$

e ne viene che $\theta(\xi)$ quando $\xi \to +0$, [$t \to +\infty$], è positiva, crescente, e $\lim_{\xi \to +0} \theta(\xi) = \theta_0 > 0$, [$\theta_0$ finito].

È facile provare che *col procedimento descritto abbiamo ottenuto tutte le soluzioni di Emden dell'equazione* (11).

Sia infatti $\theta = \theta(\xi)$ una soluzione dell'equazione (11) tale che $\lim_{\xi \to +0} \theta(\xi) = \theta_0 > 0$, [$\theta_0$ finito] Si ha

$$\frac{1}{\theta}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right] = -\theta^{n-1}\xi^{\lambda}, \qquad \lim_{\xi \to +0} \frac{1}{\theta}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right] = 0;$$

con le nostre notazioni per la corrispondente soluzione $u=u(t)$, $v=v(t)$ si ha pure [1]

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{v}{u}+\mu\right)=-\lim_{\xi\to+0}\frac{\xi}{\theta}\frac{d\theta}{d\xi}=-\frac{1}{\theta_0}\lim_{\xi\to+0}\left[\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right]/\xi=$$

$$=-\frac{1}{\theta_0}\lim_{\xi\to+0}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right]=0,$$

quindi $\lim_{t\to+\infty} v/u=-\mu$, e la soluzione $\theta=\theta(\xi)$ in virtù dei risultati del n. 4, *d*) appartiene al gruppo delle soluzioni trovate.

Osserviamo poi che dalla (34) e dalla limitazione trovata per u_E si ha

$$\left|\frac{d\theta}{d\xi}\right|=|v+\mu u|\,e^{(\mu+1)t}\leqslant 2u^n e^{(\mu+1)t}\leqslant 2\,e^{[1-\lambda-n\varepsilon]t}$$

perciò *per le soluzioni E dell'equazione di Fowler, quando sia* $\lambda>1$, *si ha*

$$\lim_{\xi\to+0} d\theta/d\xi=0.$$

b) Consideriamo una soluzione $\theta=\theta(\xi)$ corrispondente ad una soluzione F; con le notazioni del n 4 *b*) si ha $u(t_0)=0$, $u(t_3)=0$, e $\theta(\xi)$ quando $e^{-t_0}>\xi>e^{-t_3}$ è positiva, e si annulla per $\xi=e^{-t_0}$, $\xi=e^{-t_3}$.

c) Per analizzare il comportamento degli *integrali corrispondenti alle soluzioni M*, ci occuperemo ora del caso $\mu>1$ e in *d*) studieremo l'altro caso $\mu=1$.

Sia dunque $\mu>1$; ogni soluzione $\theta(\xi)$ è definita per ξ comunque piccolo, e siccome posto $\xi=1/x$ la funzione $\theta=\theta(1/x)$ soddisfa l'equazione (12_a) si ha $d^2\theta/dx^2<0$, perciò $d\theta/dx$ decrescente, sarà anche $d\theta/dx>0$, [se in un punto fosse $d\theta/dx\leqslant 0$, si avrebbe $\lim_{x\to+\infty}\theta=-\infty$] esiste quindi finito $\lim_{x\to+\infty} d\theta/dx=C\geqslant 0$,

---

[1] Si noti che $\lim_{\xi\to+0}\xi^2\theta'(\xi)=0$; infatti θ soddisfa l'equazione $2\theta'(\xi)+$ $+\xi\theta''(\xi)+\theta^n\xi^{\lambda-1}=0$, e integrando tra ξ e ξ_0, $\xi<\xi_0$, $\theta(\xi_0)+\xi_0\theta'(\xi_0)-\theta(\xi)-$ $-\xi\theta'(\xi)+\int_{\xi}^{\xi_0}\theta^n\xi^{\lambda-1}d\xi=0$, da cui $\xi\theta'(\xi)$ limitata in un intorno a destra di 0.

perciò

(36) $$\lim_{\xi\to+0}\xi\theta=\lim_{x\to+\infty}\frac{\theta}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{d\theta}{dx}=C \quad [1]$$

e noi proveremo ora che se $\mu>1$ è $C>0$.

Supporremo per assurdo $C=0$. Notiamo che se esistesse un numero positivo $\tau>1$ tale che $\lim_{x\to+\infty}x^\tau[d\theta/dx]=0$, risulterebbe che θ è limitata, e allora la soluzione $\theta=\theta(\xi)$ coinciderebbe con una soluzione E, mentre essa deve corrispondere ad una soluzione M.

Poichè $\lim_{x\to+\infty}d\theta/dx=0$, ne viene che il maggior numero positivo τ per il quale $\lim_{x\to+\infty}x^{\tau-\delta}[d\theta/dx]=0$, qualunque sia $\delta>0$, soddisfa la limitazione

$$0\leqslant\tau\leqslant 1,$$

ma come ora vedremo questo risultato è assurdo.

Si ha infatti $\theta=o(x^{-\tau+\delta+1})$, e dalla ($12_a$)

$$d^2\theta/dx^2=o[x^{n(1-\tau)-\lambda-2+n\delta}]$$

dalla quale $d\theta/dx=o[x^{n(1-\tau)-\lambda-1+n\delta}]$, e poichè δ è arbitrario dovrà aversi $-n(1-\tau)+\lambda+1\leqslant\tau$, $\tau\leqslant 1-\lambda/(n-1)=1-\mu<0$, mentre è $\tau\geqslant 0$.

Abbiamo dunque $C>0$, e dalla (36)

(37) $$\lim_{\xi\to+0}\theta\xi=C>0$$

o come si scrive

(37′) $$\boxed{\theta\sim\frac{C}{\xi}}, \qquad (C>0).$$

d) *Supponiamo infine* $\mu=1$; il sistema (12_c) si scrive

$$du/dt=v, \qquad dv/dt=-v-u^n$$

perciò

(38) $$\frac{dv}{du}+1+\frac{u^n}{v}=0; \qquad (n>1).$$

---

[1] Si applichi al rapporto θ/x la regola di De l'Hospital generalizzata. [Cfr. nota [1], p. 220].

Noi dobbiamo studiare il comportamento delle curve integrali di quest'ultima per le quali $\lim\limits_{u\to+0} v(u)=0$, e basterà per questo limitarci a considerare quel loro arco appartenente alla regione che nel n. 4 *b*) abbiamo indicata con III. Sia $v=v(u)$, $0<u\leqslant\bar{u}$, $[v'(\bar{u})=0]$ l'equazione di quest'arco; si ha $v>v_E$, ma per la (29) è $v_E\geqslant -u$, quindi $v\geqslant -u$; d'altra parte appartenendo il punto (u,v) alla regione III abbiamo $v<-u^n$, e perciò

$$-u^n>v>-u.$$

È poi $dv/du=v'<0$, e dalla (38), $[v<0]$, $v'>-1$, quindi

$$-1<v'<0.$$

perciò $\underline{\lim}\limits_{u\to+0} v'\geqslant -1$, $\overline{\lim}\limits_{u\to+0} v'\leqslant 0$. Ove sia simultaneamente $\underline{\lim}\limits_{u\to+0} v'>-1$, $\overline{\lim}\limits_{u\to+0} v'<0$, esistono due numeri ω_1, ω_2 tali che

$$-1<-\omega_1<v'<-\omega_2<0;$$

in questo caso si avrebbe $-\omega_1 u<v<-\omega_2 u$, perciò dalla (38) $1=|v'|+u^n|v|^{-1}<\omega_1+\omega_2^{-1}u^{n-1}$, e ciò è impossibile perchè per $u\to+0$, $\lim\limits_{u\to+0}(\omega_1+\omega_2^{-1}u^{n-1})=\omega_1<1$.

Dovrà quindi verificarsi una almeno delle due relazioni

$$\underline{\lim}_{u\to+0} v'(u)=-1,\qquad \overline{\lim}_{u\to+0} v'(u)=0. \tag{39}$$

Ora è facile provare che le funzioni $v'(u)$ relative agli integrali M diventano definitivamente monotone quando $u\to+0$; infatti dalla (38) riducendo a forma intera e derivando due volte abbiamo $vv'''+3v'v''+n(n-1)u^{n-2}=0$, e se per un valore u^* di u, $0<u^*<\bar{u}$ è $v''(u^*)=0$, è anche $[v'''v<0]$ $v'''(u^*)>0$, perciò $v'(u)$ ha in u^* un minimo. Essendo $v'(u)$ continua e limitata quando $0<u<\bar{u}$, essa non può ammettere due minimi consecutivi senza ammettere un massimo intermedio, perciò $v'(u)$ è monotona o diventa definitivamente monotona quando $0<u<\bar{u}$, e dalle (39) segue allora

$$\lim_{u\to+0} v'=-1,\quad \text{oppure}\quad \lim_{u\to+0} v'=0.$$

Ma se $\lim\limits_{u\to+0} v'=-1$, $v=v(u)$ è una soluzione E; si avrà quindi per ogni soluzione M, $\lim\limits_{u\to+0} v'=0$, e per la (38), $\lim\limits_{u\to+0} v/u^n=-1$,

$$\lim_{t\to+\infty} u'/u^n=-1,\qquad \lim_{t\to+\infty} u\Big/\left[\frac{1}{(n-1)(t-c)}\right]^{1/(n-1)}=1,$$

e allora posto $c=-\log C$, e ricordando che $\theta=\xi^{-1}u$, e $t=-\log\xi$

$$\theta=\frac{1}{\xi}\left[\frac{1}{(n-1)\log(C/\xi)}\right]^{1/(n-1)}\alpha(\xi) \tag{40}$$

con $\lim\limits_{\xi\to+0}\alpha(\xi)=1$, o come si scrive

$$\boxed{\theta\sim\frac{1}{\xi}\left[\frac{1}{(n-1)\log(C/\xi)}\right]^{1/(n-1)}}. \tag{40'}$$

e) Le cose dette permettono di concludere col seguente teorema di FOWLER.

Fissato $\xi_0>0$ si abbia $\theta_0=\theta(\xi_0)\geqslant 0$, $\theta_0'=\theta'(\xi_0)$; con le nostre notazioni si ha $u_0=\xi_0^{\mu}\theta_0$, $v_0+\mu u_0=-\xi_0^{\mu+1}\theta'_0$, di guisa che fissato un punto (ξ_0,θ_0) del piano ξ, η, $[\xi_0>0, \theta_0\geqslant 0]$ quando θ_0' varia da $-\infty$ a $+\infty$ il corrispondente punto (u_0,v_0) del piano u, v descrive una retta parallela all'asse v e di ascissa u_0.

La curva E taglia il semiasse u positivo in un punto di ascissa $a>0$, [v. fig. 43], e se $u_0>a$, cioè $\theta_0>a\xi_0^{-\mu}$ la curva integrale del sistema (12_c) passante per (u_0,v_0) è una curva F, e la corrispondente soluzione $\theta=\theta(\xi)$ passante per il punto (ξ_0,θ_0) ha sempre due zeri e due soltanto di ascisse ξ_1, ξ_2, $\xi_1<\xi_2$, $0<\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2$.

Se $u_0=a$, $[\theta_0=a\xi_0^{-\mu}]$ e $v_0\neq 0$, la soluzione $\theta(\xi)$, corrispondente alla curva integrale del sistema (12_c) passante per (u_0,v_0), ha la proprietà prima segnalata; ma se $v_0=0$, $[\theta_0'=-\mu\xi_0^{-(\mu+1)}a]$ la corrispondente soluzione $\theta(\xi)$ passa per il punto (ξ_0,θ_0) della curva $\theta=a\xi^{-\mu}$, ed è ivi ad essa tangente; la soluzione $\theta(\xi)$ così ottenuta è dunque una soluzione di EMDEN.

Se $0<u_0<a$, $[\theta_0<a_0\xi_0^{-\mu}]$, la retta $u=u_0$ taglia la curva

$u = u_E(t)$, $v = v_E(t)$ in due punti (u_0, l_1), (u_0, l_2), con $l_1 < 0 < l_2$. Se $v_0 > l_2$ oppure $v_0 < l_1$ cioè

$$\theta_0' < \vartheta_2 = -\frac{\mu}{\xi_0}\theta_0 - \frac{l_2}{\xi_0^{\mu+1}}, \qquad \theta_0' > \vartheta_1 = -\frac{\mu}{\xi_0}\theta_0 - \frac{l_1}{\xi_0^{\mu+1}}, \ (^1)$$

$[\vartheta_2 < \vartheta_1 < 0]$ le soluzioni $\theta = \theta(\xi)$ dell'equazione di FOWLER, passanti pel punto $[\xi_0, \theta_0]$ con la pendenza $\theta_0' < \vartheta_2$, oppure $\theta_0' > \vartheta_1$ corrispondono a soluzioni F del sistema (12_c), hanno perciò ognuna

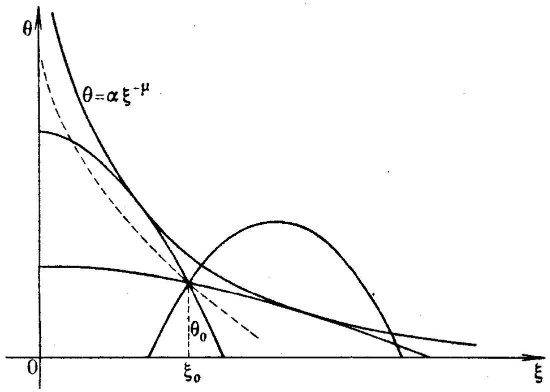

Fig. 44

due zeri e due soltanto di ascisse ξ_1, ξ_2, $\xi_1 < \xi_2$, $0 < \xi_1 \leqslant \xi_0 \leqslant \xi_2$. Invece, sempre nel caso $\theta_0 < a_0 \xi_0^{-\mu}$, le due curve integrali dell'equazione di FOWLER passanti per il punto (ξ_0, θ_0) con le pendenze $\theta_0' = \vartheta_2$, $\theta_0' = \vartheta_1$ sono soluzioni di EMDEN, e infine le soluzioni passanti pel punto $[\xi_0, \theta_0]$ con la pendenza θ_0' tale che $\vartheta_2 < \theta_0' < \vartheta_1$ corrispondono a soluzioni M del sistema (12_c) ed esse incontrano il semiasse $\xi > 0$ in un punto di ascissa $\geqslant \xi_0$, e quando $\xi \to +0$ hanno l'andamento asintotico espresso rispettivamente dalle formule (37'), (40'), secondochè sia $\mu > 1$, $\mu = 1$.

Chiameremo la curva $\theta = a\xi^{-\mu}$ la *curva critica* dell'equazione di FOWLER; *la curva critica è quindi l'inviluppo delle soluzioni di* EMDEN *dell'equazione stessa.* Dalle cose dette si ha

(1) Essendo $l_1 > -\mu u_0 = -\mu \xi_0^{\mu} \theta_0$ risulta $\vartheta_1 < 0$.

poi: *Da ogni punto (ξ_0, θ_0), $\xi_0 > 0$, $\theta_0 \geqslant 0$, appartenente alla curva critica passa una e una sola soluzione di* EMDEN *dell'equazione di* FOWLER; *da ogni punto interno alla regione limitata dai semiassi $\xi \geqslant 0$, $\theta \geqslant 0$ e dalla curva critica, partono due e due sole soluzioni di* EMDEN [con le pendenze ϑ_2, ϑ_1]; *e da ogni punto (ξ_0, θ_0) esterno a questa regione non passano soluzioni di* EMDEN.

I risultati del teorema di FOWLER sono resi evidenti dal precedente diagramma.

§ 4. - L'equazione di G. Polvani del moto elettronico nel magnetron monoanodico di Hull. Teoremi di G. Ascoli sul comportamento asintotico degli integrali.

1. Generalità. - 2. Campo di esistenza degli integrali. - 3. Esistenza di infiniti punti comuni a due curve integrali. - 4. Integrali eccezionali. - 5. Teoremi di G. ASCOLI sul comportamento asintotico degli integrali.

1. - Nello studio teorico del moto degli elettroni in un diodo cilindrico sottoposto ad un campo magnetico longitudinale [*magnetron di* Hull] G. POLVANI nel 1934 (1) è pervenuto ad un'equazione differenziale cui soddisfa il raggio vettore r dell'elettrone espresso in funzione del tempo t, equazione che per il moto di andata degli elettroni, assumendo convenienti unità, può scriversi

$$(1) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\lambda^2 t}{2r} - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r^3}, \qquad (\lambda > 0,\ \lambda \text{ parametro}).$$

Non si posseggono per questa equazione procedimenti effettivi di integrazione, nè metodi di integrazione numerica atti a trovare con procedimenti rapidamente convergenti i valori di r in funzione di λ e di t; G. ASCOLI (2) ha però studiato profondamente il comportamento asintotico degli integrali nell'intorno del punto $t = +\infty$,

(1) G. POLVANI, G. ASCOLI, A. GIACOMINI: *Questioni riguardanti il magnetron;* Rend. Sem. Mat. e fisico di Milano, 10 (1936), [pp.279-338], p. 297.

(2) G. ASCOLI: *Sopra una particolare equazione differenziale del secondo ordine;* Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lettere, 69 (1936), pp. 167-184; 185-197.

e dei metodi da lui usati e dei risultati conseguiti, estendibili anche a classi più generali di equazioni, daremo qui notizia al lettore.

2. - *a*) Riferiamo il piano ad un sistema di assi ortogonali t, r; e determiniamo le regioni del piano (t, r) dove le curve integrali hanno la loro concavità o la loro convessità rivolta all'asse delle r positive.

Il secondo membro della (1) si scrive

$$-\frac{1}{2r^3}\left[r^4-\lambda^2 tr^2-1\right]=-\frac{1}{2r^3}(r-\omega)(r+\omega)\left(r^2+\frac{1}{\omega^2}\right)$$

con

$$\omega(t)=\sqrt{\frac{\lambda^2 t+\sqrt{\lambda^4 t^2+4}}{2}},$$

e ne viene che la retta $r=0$ e la curva C

$$C:\quad r=\pm\,\omega(t)$$

dividono il piano in quattro regioni tali che le linee integrali della (1) nella regione più alta sono concave verso l'asse r negativo, e cambiano senso di concavità nel passare successivamente da una regione alla sua adiacente.

Diremo la curva C, [ramo reale della quartica $r^4-\lambda^2 tr^2-1=0$], *la curva dei flessi.*

Con semplici calcoli si trova

$$2^{3/2}\lambda^{-2}\omega'(t)=\left(\lambda^2 t+\sqrt{\lambda^4 t^2+4}\right)^{1/2}(\lambda^4 t^2+4)^{-1/2},$$

$$2^{5/2}\lambda^{-4}\omega''(t)=\left(\lambda^2 t+\sqrt{\lambda^4 t^2+4}\right)^{1/2}(\lambda^4 t^2+4)^{-3/2}\left[\sqrt{\lambda^4 t^2+4}-2\lambda^2 t\right],$$

e perciò il ramo della curva C appartenente al semipiano delle $r>0$ è crescente con t, e per i valori di t in $(-\infty,\ 2/\lambda^2\sqrt{3})$ volge la sua concavità all'asse delle r positive, mentre per t variabile in $(2/\lambda^2\sqrt{3}, +\infty)$ volge la sua convessità allo stesso asse [vedi fig. 45].

Ponendo nell'espressione di $\omega(t)$ se t positivo a fattore $\lambda\sqrt{t}$, se t negativo a fattore $1/\lambda\sqrt{-t}$, e facendo uso della serie binomiale,

avremo

$$\omega(t)=\lambda\sqrt{t}\left[1+\frac{1}{2\lambda^4 t^2}-\frac{5}{8\lambda^8 t^4}+\dots\right],$$

$$\omega(t)=\frac{1}{\lambda\sqrt{-t}}\left[1-\frac{1}{2\lambda^4 t^2}+\frac{7}{8\lambda^8 t^4}+\dots\right],$$

dalle quali segue che secondo che $t\to+\infty$ o $t\to-\infty$, $\omega(t)$ ha un infinito, o un infinitesimo di ordine $1/2$.

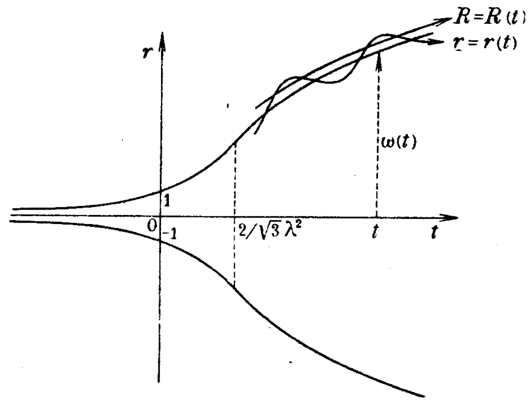

Fig. 45.

b) I punti dell'asse $r=0$ sono singolari rispetto all'equazione (1), e conviene studiare il comportamento degli integrali dell'equazione rispetto a questo asse.

Sia (t_0, r_0) un punto del piano (t, r), $r_0\neq 0$, e consideriamo una curva integrale della (1) uscente a destra [sinistra] di questo punto in una direzione assegnata, e dimostriamo che *essa rimane tutta da una stessa parte dell'asse* t, *e non può tendere a un punto proprio di quest'asse*

Sia $r_0>0$ e supponiamo per assurdo che l'integrale $r=r(t)$ per $t\to t_1-0$, [t_1 finito], abbia per limite lo zero, sia cioè $r(t)>0$ per $t_0\leqslant t<t_1$, $\lim\limits_{t\to t_1-0} r(t)=0$; per t sufficientemente prossimo a t_1 è $r''(t)>0$, quindi $r'(t)$ è crescente ed esiste perciò $\lim\limits_{t\to t_1-0} r'(t)>-\infty$, e posto $r(t_1)=0$, poichè $[r(t_1-h)-r(t_1)]/-h=r(t_1-h)/-h<0$, ne viene

$$r'(t_1-0)=k\leqslant 0, \qquad [k \text{ finito}],$$

quindi $r(t)$ è decrescente a sinistra di t_1.

Se assumiamo in un intorno a sinistra di t_1, $r'=p$ come variabile indipendente, all'equazione (1) si può sostituire il sistema

$$(2) \qquad \frac{dt}{dp}=\frac{2r^3}{\lambda^2r^2t-r^4+1}, \qquad \frac{dr}{dp}=\frac{2r^3p}{\lambda^2r^2t-r^4+1},$$

il quale possiede una soluzione $t=t(p)$, $r=r(p)$, non costante, corrispondente alle condizioni iniziali $t(k)=t_1$, $r(k)=0$.

Ora il sistema (2) ammette la soluzione $t=t_1$, $[t_1=\text{cost.}]$, $r=0$ che soddisfa le medesime condizioni iniziali, e siccome al sistema (2) è lecito applicare il teorema di esistenza e di unicità, cadiamo in assurdo. Abbiamo dunque che per $t\to t_1-0$ la curva integrale $r=r(t)$ non può tendere a un punto proprio dell'asse t.

Se osserviamo poi che in generale se $r=r(t)$ è un integrale dell'equazione (1) anche $r=-r(t)$ è un integrale della stessa equazione, resta la validità delle nostre conclusioni anche se $r_0>0$.

c) D'ora in avanti, per l'osservazione testè fatta ci limiteremo a studiare il comportamento delle curve integrali nel semipiano $r>0$.

Dimostriamo che *se un integrale* $r=r(t)$ *ha un minimo* [massimo] *in* t_0, *per qualunque* $t>t_0$, $[t<t_0]$, *sarà* $r>r_0$, $[r<r_0]$.

Esista per assurdo un primo valore $t_1>t_0$, $[t_1<t_0]$, tale che $r(t_0)=r(t_1)$, e per $t_0<t<t_1$, $[t_0>t>t_1]$, si abbia $r(t)>r(t_0)$, $[r(t)<r(t_0)]$.

Consideriamo la funzione ausiliaria

$$U=r'^2-\lambda^2t(\log r-\log r_0)+\frac{r^2}{2}+\frac{1}{2r^2};$$

si ha

$$U'=2r'\left(r''-\frac{\lambda^2t}{2r}+\frac{r}{2}-\frac{1}{2r^3}\right)-\lambda^2(\log r-\log r_0)=-\lambda^2(\log r-\log r_0),$$

e perciò $U'(t)<0$, $[U'(t)>0]$, per $t_0<t<t_1$, $[t_0>t>t_1]$, cioè $U(t)$ è decrescente in (t_0, t_1), [crescente in (t_1, t_0)], quindi $U(t_0)>U(t_1)$, $0=r'^2(t_0)>r'^2(t_1)$, che è assurda.

Segue che *se un integrale* $r=r(t)$ *ha più minimi e più massimi, gli uni e gli altri vanno sempre aumentando.*

d) Possiamo ora dimostrare che *ogni integrale della* (1) *ha per campo di esistenza l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$.

Supponiamo per assurdo che un integrale della (1) determinato dalle condizioni iniziali $r(t_0)=r_0>0$, $r'(t_0)=r_0'$ possa prolungarsi a destra di t_0 fino al valore t_1 (finito) escluso. Consideriamo $\underline{\lim}_{t\to t_1-0} r(t)$, $\overline{\lim}_{t\to t_1-0} r(t)$ e proviamo che *essi dovranno essere entrambi positivi e finiti.* Infatti se in un intorno a sinistra di t_1, $r(t)$ è decrescente, si ha $\underline{\lim}_{t\to t_1-0} r(t)=\overline{\lim}_{t\to t_1-0} r(t)=\lim_{t\to t_1-0} r(t)$ e per *b*), $\lim_{t\to t_1-0} r(t)>0$; se invece $r(t)$ è in un intorno a sinistra di t_1 crescente, oppure oscilla infinite volte, per *c*), $r(t)$ resta superiore ad un numero positivo k, ed è facile provare che essa resta anche superiormente limitata.

Infatti esiste una costante positiva m tale che per $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ e $r\geqslant k$ si abbia $\lambda^2t/2r-r/2+1/2r^2<m$, ne viene per la (1), $r''<m$, $r'<mt+r_0'$, $r<mt^2/2+r_0't+r_0$, e perciò r superiormente limitata in (t_0, t_1).

Essendo $\underline{\lim}_{t\to t_1-0} r(t)$, $\overline{\lim}_{t\to t_1-0} r(t)$ entrambi positivi e finiti dalla (1) segue che $r''(t)$ rimane limitata per $t_0\leqslant t<t_1$, esiste quindi per il teorema di CAUCHY del valor medio il $\lim_{t\to t_1-0} r'(t)$ che indicheremo con r_1'; esiste per la stessa ragione $\lim_{t\to t_1-0} r(t)=r_1$, ed r_1 per le cose dette in *b*) è diverso da zero; ma allora partendo dai valori iniziali $r(t_1)=r_1$, $r'(t_1)=r_1'$ si può prolungare l'integrale $r(t)$ a destra di t_1.

Abbiamo dunque che $t_1=+\infty$. Ugualmente si ragionerà a sinistra di t_0.

3. - Vogliamo ora dimostrare che *due curve integrali della* (1) [appartenenti allo stesso semipiano $r>0$, oppure $r<0$] *hanno sempre infiniti punti comuni*, di ascissa $t>0$, e *la differenza delle ascisse di due punti comuni consecutivi è minore di* $\pi\sqrt{2}$.

Siano $u(t)$, $v(t)$ due curve integrali della (1) appartenenti al semipiano $r>0$,

$$u''=\frac{\lambda^2t}{2u}-\frac{u}{2}+\frac{1}{2u^3}, \qquad v''=\frac{\lambda^2t}{2v}-\frac{v}{2}+\frac{1}{2v^3};$$

sottraendo, e posto $u-v=w$ si ha

$$w''+A(t)w=0, \tag{3}$$

dove

$$A(t)=\frac{\lambda^2 t}{2vu}+\frac{1}{2}+\frac{u^2+uv+v^2}{2u^3v^3}. \tag{4}$$

Si ha ora per $t>0$, $A(t)>1/2$, e per il teorema di STURM [Cap. IV, § 2, n. 6, a)] confrontando la (3) con l'equazione $z''+(1/\sqrt{2})^2z=0$, otteniamo che $w(t)$ per $t>0$ ha infiniti zeri [i quali essendo isolati (Cap. IV, § 2, n. 2, a)) hanno come unico punto di accumulazione $+\infty$], e la differenza delle ascisse di due zeri consecutivi è minore di $\pi\sqrt{2}$.

4. - a) Per stabilire il concetto di integrale eccezionale dell'equazione (1), secondo ASCOLI, dimostriamo preliminarmente che *non è possibile che per* $t>t_0$, *una curva integrale* $r=r(t)$ *dell'equazione* (1), *rimanga tutta compresa nella regione limitata dall'asse* t *e dalla curva dei flessi* $r=\omega(t)$, si abbia cioè per $t>t_0$, $0<r(t)<\omega(t)$, [oppure $0>r(t)>-\omega(t)$].

Sia per assurdo per $t>t_0$, $0<r(t)<\omega(t)$; per i risultati del n. 2 a) è $r''>0$ e perciò $r'(t)$ crescente, esiste quindi $\lim\limits_{t\to+\infty} r'=k$. Si ha anche dalla regola di G. F. DE L'HOSPITAL generalizzata [1], $\lim\limits_{t\to+\infty} r/t=k$, ma $0<r(t)/t<\omega(t)/t$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\omega(t)/t=0$ e ne viene $k=0$, cioè $\lim\limits_{t\to+\infty} r'(t)=0$, e poichè è $r'(t)$ crescente per $t>t_0$ si ha $r'(t)<0$ per gli stessi valori di t, e perciò per $t>t_0$, $r(t)$ è *positiva decrescente.* Posto allora $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=k_1$, il numero k_1 è positivo o nullo, e dall'equazione (1) segue $\lim\limits_{t\to+\infty} r''(t)=+\infty$, e perciò $r'(t)$ e $r(t)$ tendono entrambi a $+\infty$ quando $t\to+\infty$, mentre abbiamo detto che $r(t)$ è positiva decrescente.

Da quanto abbiamo dimostrato segue che ad una curva integrale $r=r(t)$ della (1) possono competere una o l'altra delle seguenti proprietà

[1] Cfr. nota [1] pag. 220.

i) *o essa appartiene definitivamente alla regione* $r>\omega(t)$, $[r<-\omega(t)]$, *cioè esiste un* t_0 *tale, che per* $t\geqslant t_0$ *è* $r(t)>\omega(t)$, $[r(t)<-\omega(t)]$;

ii) *oppure essa traversa infinite volte la curva dei flessi.*

Un integrale che abbia la proprietà i) si dirà *eccezionale* secondo ASCOLI.

b) Prima di dimostrare che l'equazione (1) nel semipiano $r>0$, $[r<0]$, non può ammettere due integrali eccezionali distinti proviamo che: *se* $r=R(t)$ *è un integrale eccezionale della* (1) *del semipiano* $r>0$, $[r<0]$, *allora la differenza* $R(t)-\lambda\sqrt{t}$, *quando* $t\to+\infty$ *diventa definitivamente positiva ed ha per limite lo zero per* $t\to+\infty$; *inoltre essa è* [assolutamente] *integrabile in qualunque intervallo* $(t_0, +\infty)$, *con* $t_0>0$

Essendo $R''<0$ la $R'(t)$ è *decrescente* e sarà $\lim\limits_{t\to+\infty} R'(t)=k$ con $k<+\infty$ Per il teorema di G. F. DE L'HOSPITAL generalizzato si avrà $k=\lim\limits_{t\to+\infty} R(t)/t$, ma $R(t)/t\geqslant\omega(t)/t$, perciò $k\geqslant 0$ Non può aversi $k>0$ perchè si avrebbe $\lim\limits_{t\to+\infty} R(t)=+\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t/R(t)=1/k$, e dalla (1) $\lim\limits_{t\to+\infty} R''(t)=-\infty$, da cui $\lim\limits_{t\to+\infty} R'(t)=-\infty$, e ciò non può essere. Si ha dunque $\lim\limits_{t\to+\infty} R'(t)=0$, ma $R'(t)$ non può risultare definitivamente nulla [la (1) non ammette l'integrale $R=$cost.] quindi *$R'(t)$ è definitivamente positiva,* $\lim\limits_{t\to+\infty} R'(t)=0$, *e perciò* $R(t)$ *per* $t>t_0$ *è positiva crescente.*

Si ha

$$R''=\frac{\lambda^2 t}{2R}-\frac{R}{2}+\frac{1}{2R^3}, \qquad 0=\frac{\lambda^2 t}{2\omega}-\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2\omega^3},$$

e sottraendo

$$-R''=(R-\omega)\left[\frac{\lambda^2 t}{2R\omega}+\frac{1}{2}+\frac{R^2+R\omega+\omega^2}{2R^3\omega^3}\right];$$

il fattore in parentesi quadra per $t>0$ è positivo e maggiore di $1/2$, $-R''>0$, e supposto $t_0>0$ si ha allora per $t\geqslant t_0$

$$0<R-\omega<-2R'', \qquad 0<\int_t^{+\infty}(R-\omega)\,dt<2R'(t),$$

e l' integrale

$$\int_{t_0}^{+\infty} (R-\omega)\, dt \tag{5}$$

è [assolutamente] convergente.

Proviamo ora che si ha $\lim\limits_{t\to+\infty} (R-\omega)=0$. È infatti

$$[R(t_2)-\omega(t_2)]-[R(t_1)-\omega(t_1)]=(t_2-t_1)\,[R'(t^*)-\omega'(t^*)],$$

con $t_1<t^*<t_2$; ma $\lim\limits_{t\to+\infty} R'(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\omega'(t)=0$, e ne viene che $R(t)-\omega(t)$ è uniformemente continua in $(t_2,\ +\infty)$. Se per assurdo supponiamo si abbia $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, (R-\omega)=h>0$, esistono dei valori $\bar{t}$ di t, grandi quanto si vuole, per i quali $R(\bar{t})-\omega(\bar{t})>3h/4$, e poichè dalla convergenza dell' integrale (5) si ha che non può aversi definitivamente $R(t)-\omega(t)>h/2$, esistono perciò dei valori di p e q grandi quanto si vuole tali che $R(q)-\omega(q)=3h/4$, $R(p)-\omega(p)=h/2$, mentre $h/2<R(t)-\omega(t)<3h/4$ per $p\leqq t\leqq q$, e siccome $[R(q)-\omega(q)]-[R(p)-\omega(p)]$ è costante, a motivo dell' uniforme continuità di $R(t)-\omega(t)$ si avrà $|q-p|>\delta>0$, quindi

$$\left|\int_p^q (R-\omega)\, dt\right| > h\delta/2, \text{ e l'integrale (5) non sarebbe convergente.}$$

È dunque $\lim\limits_{t\to+\infty} (R-\omega)=0$; ma si ha $\omega-\lambda\sqrt{t}>0$ e la differenza $\omega-\lambda\sqrt{t}$ è integrabile tra t_0 e $+\infty$, $(t_0>0)$, tale è quindi $R-\lambda\sqrt{t}$. Si ha inoltre $\lim\limits_{t\to+\infty} (R-\lambda\sqrt{t})=0$, perchè $\lim\limits_{t\to+\infty} (\omega-\lambda\sqrt{t})=0$.

c) Possiamo ormai dimostrare che *non possono esistere due integrali eccezionali distinti.*

Siano u e v due integrali eccezionali della (1); posto $u-v=w$, w soddisfa l' equazione (3). Possiamo anche porre

$$u=\lambda\sqrt{t}+\alpha, \qquad v=\lambda\sqrt{t}+\beta$$

dove $|\alpha|$ e $|\beta|$ sono infinitesimi per $t\to+\infty$ e integrabili in $(t_0,\ +\infty)$; si avrà allora dalla (4), $A(t)=1-Q(t)$ con $Q(t)$ infinitesima per $t\to+\infty$ e assolutamente integrabile in $(t_0,\ +\infty)$.

Dai risultati del Cap. VII, § 4, n. 3 si ha che soddisfacendo $Q(t)$ le condizioni ora dichiarate esiste uno e un solo integrale

dell' equazione (3) che diventa infinitesimo per $t\to+\infty$, l' integrale $w(t)$ identicamente nullo [con le notazioni del Cap. VII, § 4, n. 3, *b*): $a_1=a_2=0$], perciò $u(t)\equiv v(t)$ c. v. d.

5. - Approfondendo l' esame del comportamento asintotico degli integrali della (1), G. ASCOLI ha dimostrato i seguenti teoremi, che per brevità ci limitiamo ad enunciare.

i) *Per l' integrale eccezionale* $R=R(t)$ [positivo] *della* (1), *vale la formula di rappresentazione asintotica*

$$R=\lambda\sqrt{t}+\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{1}{2\lambda^3}\right)\frac{1}{t^{3/2}}+\frac{O(1)}{t^{7/2}}.$$

ii) *Per un qualunque integrale* $r=r(t)$ *non eccezionale della* (1), [positivo] *vale la formula di rappresentazione asintotica*

$$r=\lambda\sqrt{t}+C\,\mathrm{sen}\left(t+\frac{C^2}{12\lambda^2}\log t-\gamma\right)+O(t^{-1/2}),$$

nella quale C *e* γ *sono opportune costanti. Un tale integrale possiede infiniti massimi e minimi, le cui ascisse hanno l' espressione asintotica*

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{C^2}{12\lambda^2}\log\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\gamma+O\,(n^{-1/2}) \quad (^1).$$

§ 5. - L'equazione di Thomas-Fermi. Dimostrazione del teorema di esistenza e di unicità.

a) L'equazione

$$x^{1/2}\, y''=y^{3/2}$$

con le condizioni ai limiti

$$y(0)=1, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x)=0$$

fu proposta da L. H. THOMAS [2] e ritrovata poi da E. FERMI [3]

---

[1] Per il significato del simbolo O cfr. nota [2] di p. 22.

[2] L. H. THOMAS: *The calculation of atomic fields*, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 23 (1927), pp. 542-548.

[3] E. FERMI: *Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprietà dell'atomo*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 6 (1927), (pp. 602-607); p. 605, $y'(0)=-1{\cdot}58$.

nello studio della distribuzione degli elettroni in un atomo pesante. Dimostrazioni effettive del teorema di esistenza, anche in casi più generali, furono date successivamente da G. SCORZA-DRAGONI [1], A. MAMBRIANI [2], G. LAMPARIELLO [3] e alla valutazione di $y'(0)$ data da FERMI col valore $-1\cdot 58$ contribuirono A. SOMMERFELD [4] e C. MIRANDA [5], i quali assegnarono per $y'(0)$ rispettivamente i valori $-1\cdot 589$, $-1\cdot 588$.

Noi qui ci limiteremo ad esporre la dimostrazione del teorema di esistenza nella forma di A. MAMBRIANI, ma avvertiamo che la stessa dimostrazione, come hanno osservato A. MAMBRIANI e L. TONELLI [6] serve a stabilire criteri esistenziali anche per equazioni del tipo $y''=f(x, y, y')$.

b) Se nell'equazione

$$y''=\varphi(x, y)\,\psi(x) \tag{1}$$

$\varphi(x, y)$, $\psi(x)$ soddisfano le seguenti ipotesi:

1. *$\varphi(x, y)$ è continua rispetto ad (x, y) nel campo $x\geqslant 0, y\geqslant 0$,*
2. *$\varphi(x, y)>0$ per $x>0$, $y>0$,*
3. *$\varphi(x, 0)=0$ per $x\geqslant 0$,*
4. *$\varphi(x, y)$ è crescente rispetto a y e a rapporto incrementale limitato rispetto ad y in ogni campo chiuso e limitato,*

[1] G. SCORZA-DRAGONI: *a) A proposito di un'equazione differenziale*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 8 (1928), pp. 361-362; *b) Su un'equazione differenziale particolare*; idem, (6), 9 (1929), pp. 623-625; *c) Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di un'equazione differenziale del secondo ordine*, Giorn. di Mat. di Battaglini, 69 (1931), (pp. 77-112); pp. 104-112.

[2] A. MAMBRIANI: *a) Su una particolare equazione differenziale*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 9 (1929), pp. 142-144; *b) Su un teorema relativo alle equazioni differenziali del secondo ordine*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 9 (1929), pp. 620-622.

[3] G. LAMPARIELLO: *Su una classe notevole di equazioni differenziali del secondo ordine non lineari*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 19 (1934), pp. 284-290, pp. 386-393.

[4] A. SOMMERFELD: *Integrazione asintotica dell'equazione di Thomas-Fermi*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 15 (1932), pp. 788-792.

[5] C. MIRANDA: *Teoremi e metodi per l'integrazione numerica dell'equazione differenziale di Fermi*, Mem. della R. Acc. d'Italia 5 (1934), pp.285-322.

[6] L. TONELLI: *Sull'equazione differenziale $y''=f(x, y, y')$*, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), 8 (1939), (pp. 75-88), nota di p. 76.

5. *Per ogni $c>0$, $\varphi(x, c)$ ha in $(0, +\infty)$ un limite inferiore >0,*

6. *$\psi(x)$ è continua, maggiore di zero per ogni $x>0$, integrabile in ogni intervallo $(0, X)$, con $X>0$, e $\int_0^{+\infty}\psi(x)\,dx=+\infty$;*

allora per ogni $y_0\geqslant 0$, l'equazione differenziale (1) ammette uno e un solo integrale, avente per campo di esistenza l'intervallo $(0, +\infty)$, e soddisfacente le condizioni ai limiti

$$y(0)=y_0\,, \qquad y(+\infty)=0. \tag{2}$$

Unicità.

Se $y_1(x)$, $y_2(x)$ sono due integrali della (1) definiti in $(0, \delta)$, e

$$y_1(0)=y_2(0), \qquad y_1(\delta)=y_2(\delta)$$

$y_1(x)$, $y_2(x)$ coincidono in $(0, \delta)$.

Basterà ragionare come nel Cap. VIII, § 6, n. 2, *b*).

Per assurdo in un punto $\bar{x}$ interno a $(0, \delta)$ sia $y_1(\bar{x})>y_2(\bar{x})$ e sia ξ un punto di $(0, \delta)$ dove $y_1(x)-y_2(x)$ ha il valore massimo. Si ha

$$0<\xi<\delta,\quad y_1(\xi)-y_2(\xi)>0,\quad y_1'(\xi)-y_2'(\xi)=0,\quad y_1''(\xi)-y_2''(\xi)\leqslant 0,$$

ma è

$$y_1''(\xi)-y_2''(\xi)=[\varphi(\xi, y_1(\xi))-\varphi(\xi, y_2(\xi))]\,\psi(\xi)>0 \tag{3}$$

e si cade in assurdo.

Si ha pure che se $y_1(x)$, $y_2(x)$ sono due integrali della (1) definiti in $(0, +\infty)$ ed è

$$(4_1)\quad y_1(0)=y_2(0), \qquad (4_2)\quad \lim_{x\to+\infty} y_1(x)=\lim_{x\to+\infty} y_2(x)=\text{quantità finita},$$

i due integrali $y_1(x)$, $y_2(x)$ coincidono in $(0, +\infty)$. Infatti se $y_1(x)$, $y_2(x)$ non coincidono, qualunque sia $\xi>0$ si avrà $y_1(\xi)\neq y_2(\xi)$ e perciò per $\xi>0$ potremo supporre $y_1(\xi)>y_2(\xi)$, quindi per la (3), $y_1'(\xi)-y_2'(\xi)$ è crescente; ma $y_1'(0)-y_2'(0)\geqslant 0$, e allora $y_1'(\xi)-y_2'(\xi)$ è positiva crescente, perciò $\lim_{x\to+\infty}[y_1(\xi)-y_2(\xi)]=+\infty$.

Esistenza.

Se $y_0=0$, un integrale della (1) che soddisfa le (2) è $y\equiv 0$; supporremo perciò $y_0>0$.

Dai teoremi di esistenza e di unicità [1] si ha che comunque si fissi il numero γ, dal punto $(0, y_0)$ parte uno e un solo integrale $y(x)$ della (1) che soddisfa le condizioni iniziali

$$y_\gamma(0)=y_0, \qquad y_\gamma'(0)=\gamma,$$

definito in un certo intervallo $0 \leqslant x \leqslant \delta$, e $y_\gamma(x)$, $y_\gamma'(x)$ sono funzioni continue del parametro γ.

Osserviamo che se è $\gamma \geqslant 0$, $y_\gamma(x)$ è una funzione crescente di x in $(0, \delta)$; infatti per la (1) è $y_\gamma''(x)>0$ per $0<x\leqslant\delta$, quindi $y_\gamma'(x)$ crescente per $0\leqslant x\leqslant\delta$, e $y_\gamma'(x)>\gamma\geqslant 0$ per $0<x\leqslant\delta$. Si ha allora che gli integrali $y_\gamma(x)$, quando sia $\gamma\geqslant 0$ possono prolungarsi in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ ed è $y_\gamma(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y_\gamma(x)=+\infty$ [perchè per $x\geqslant\delta$ si ha $y_\gamma'(x)\geqslant y_\gamma'(\delta)>0$] [2].

Si indichi ora con M il massimo di $\varphi(x, y)$ nel rettangolo $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant y_0$, e sia x_1 la massima ascissa dell'intervallo $(0, 1)$ tale che

$$\int_0^{x_1}\psi(x)\,dx\leqslant 1/M,$$

e proviamo che gli integrali $y_\gamma(x)$ della (1) corrispondenti a valori di γ tali che $\gamma<-(y_0/x_1+1)$ si annullano per un $x<x_1$. Si ha infatti dalla (1) per i considerati valori di γ, e finchè sia $0<x\leqslant x_1$

$$y_\gamma'(x)=\gamma+\int_0^x\varphi(x, y)\,\psi(y)\,dx\leqslant\gamma+M\int_0^x\psi(x)dx\leqslant\gamma+1<-y_0/x_1$$

quindi $y_\gamma(x)<y_0-xy_0/x_1$, e perciò $y_\gamma(x)$ *dovrà annullarsi* per un $x<x_1$.

Sia ora $\bar\gamma$ l'estremo superiore dei valori di γ per i quali $y_\gamma(x)$ incontra l'asse x; sarà $-y_0/x_1-1\leqslant\bar\gamma\leqslant 0$, e dimostreremo che

[1] Cfr. Cap. VIII, § 8, n. 1, *b*); Cap. I, § 6, n. 3, *d*); Per applicare i teoremi qui richiamati si faccia $\varphi(x, y)\equiv 0$ per $y<0$. Ai fini del nostro teorema interessano quelle parti delle curve integrali appartenenti al quadrante $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

[2] Segue che provata l'esistenza di un integrale $y_\gamma(x)$ che soddisfa le (2), dovrà risultare $\gamma<0$.

se $\bar y(x)$ è l'integrale corrispondente a $\bar\gamma$, esso è definito in $(0, +\infty)$ e si ha

$$\bar y(x)>0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\bar y(x)=0.$$

Si abbia infatti per un $\bar x>0$, ($\bar x$ finito), $\bar y(\bar x)=0$; non può essere ivi $\bar y'(\bar x)>0$, perchè $\bar y(x)$ dovrebbe riuscire allora negativa in un intorno a sinistra di $\bar x$; non può essere $\bar y'(\bar x)=0$, perchè l'equazione (1) ha la sola soluzione $y(x)\equiv 0$ che soddisfa simultaneamente le due condizioni $y(\bar x)=0$, $y'(\bar x)=0$; avremo quindi

$$\bar y(\bar x)=0, \qquad \bar y'(\bar x)<0,$$

ma allora per valori di $\gamma>\bar\gamma$ e sufficientemente prossimi a $\bar\gamma$, l'integrale $y_\gamma(x)$ incontra l'asse x [1], contro la definizione di $\bar\gamma$. *Si ha dunque qualunque sia* x, $\bar y(x)>0$.

Si ha anche, qualunque sia x, $\bar y'(x)\leqslant 0$. Per assurdo in un punto $\xi>0$ si abbia $\bar y'(\xi)>0$; poichè $\bar y'(x)$ è crescente per $x>\xi$, si ha $y'(x)>y'(\xi)$, e la $\bar y(x)$ per $x\geqslant\xi$ è crescente; $\bar y(x)$ ha quindi un minimo positivo. Se diamo a γ valori minori di $\bar\gamma$ e sufficientemente prossimi a γ, $y_\gamma(x)$ resta positiva e crescente per $x\geqslant\xi$, ma d'altra parte si può fare in modo che nel tratto $(0, \xi)$, $y_\gamma(x)$ resti prossima a $\bar y(x)$ meno di una quantità assegnata, essa non incontrerà quindi l'asse x, contro la definizione di $\bar\gamma$. Poichè $\bar y'(x)$ è crescente si avrà per $x>0$ $\bar y'(x)<0$, perciò $\bar y(x)$ decrescente, ed esisterà $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar y(x)=c$, $(c\geqslant 0)$. Proveremo ora che è $c=0$. Infatti se fosse $c>0$, da $\bar y(x)>c>0$, posto $\lambda=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant+\infty}\varphi(x, c)>0$, seguirebbe

$$\bar y'(x)=\bar\gamma+\int_0^x\varphi(x, y)\psi(x)\,dx>\bar\gamma+\int_0^x\varphi(x, c)\,\psi(x)\,dx\geqslant\bar\gamma+\lambda\int_0^x\psi(x)\,dx,$$

quindi $\lim\bar y'(x)=+\infty$, e ciò è assurdo. Il teorema è così dimostrato.

[1] Si osservi che si facciano $\varphi(x, y)\equiv 0$ per $y<0$, e consideriamo l'equazione (1) nel semipiano $x\geqslant 0$, ogni curva integrale $y_\gamma(x)$ uscente da $(0, y_0)$, $(y_0>0)$, nella direzione γ che incontra (senza toccare) l'asse x, si prolunga nel semipiano $y<0$ con una semiretta. Effettuando tale prolungamento la curva integrale $y=\bar y_\gamma(x)$ ha punti di ordinata negativa e per valori di $\gamma>\bar\gamma$ e prossimi a $\bar\gamma$, $\bar y_\gamma(x)$ dovrà conservare punti di ordinata negativa, e incontrerà quindi l'asse x.

§ 6. - Sull'equazione di Schrödinger relativa a due problemi particolari.

1. Oscillatore armonico. Autovalori e autofunzioni. - 2. Sistemi idrogenoidi. Autovalori e autofunzioni.

1. - *a*) L'equazione di SCHRÖDINGER [1]

$$\Delta u+\frac{8\pi^2 m}{h^2}[E-U]u=0, \qquad \left[\Delta u=\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

nel così detto problema unidimensionale della meccanica atomica (per gli stati stazionari) relativo al moto di una particella sull'asse x, ha l'espressione

$$(a) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h}[E-U(x)]u=0,$$

dove h è la costante di M. PLANCK, m la massa della particella, E l'energia, $U(x)$ il potenziale e $|u(x)|^2$ rappresenta la probabilità che la particella abbia l'ascissa x. Il problema fisico richiede che $|u(x)|$ diventi infinitesima per $x\to\mp\infty$ e tale condizione impone di trovare i valori del parametro E in guisa che una almeno delle soluzioni della (a) abbia il voluto comportamento asintotico.

b) In questo numero ci fermeremo a considerare il caso particolarmente interessante del così detto *oscillatore armonico*, nel quale la particella mobile sull'asse x è attirata dall'origine secondo una forza proporzionale alla distanza.

Detta $-kx$ la forza agenle, [k costante positiva], l'energia potenziale U vale $kx^2/2$, e l'equazione di SCHRÖDINGER diventa

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E-\frac{kx^2}{2}\right]=0,$$

od anche, posto

$$\nu_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad [\nu_0 \text{ frequenza}],$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}[E-2\pi^2 m\nu_0^2 x^2]u=0.$$

---

[1] E. SCHRÖDINGER: *Quantisierung als eigenwertproblem*, Annalen der Physik (4) 79 (1926); pp. 489-527. Cfr. E. PERSICO: *Fondamenti della meccanica atomica*, (Bologna, 1936), p. 165, p. 175 e segg.

Effettuando il cangiamento di variabile $\xi=x\sqrt{4\pi^2 m\nu_0/h}$ abbiamo

$$\text{(I)} \qquad \boxed{\frac{d^2u}{dx^2}+(\lambda-x^2)u=0}, \qquad \lambda=2E/h\nu_0,$$

e il problema che ci proponiamo è di determinare i valori di λ ai quali corrispondono delle soluzioni dell'equazione (I) che verificano la condizione

$$\text{(II)} \qquad \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} u(x)=0}.$$

Facendo

$$u=e^{-\frac{1}{2}x^2}v$$

si ha per v l'equazione

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \boxed{v''-2xv'+(\lambda-1)v=0},$$

e si tratta di trovare le sue soluzioni che soddisfano la condizione

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}v=0}.$$

È noto [1] che se si prescrive per la soluzione dell'equazione (I′) che essa verifichi una condizione più generale della (II′), cioè che per $|x|\to+\infty$ sia soddisfatta definitivamente una limitazione del tipo

$$\left|e^{-\frac{1}{2}x^2}v\right|<M|x|^a,$$

con $M>0$, $a>0$, *dovrà risultare* $\lambda-1=2n$, *con* n *intero non negativo* e che v, a meno di un fattore costante, coincide con l'n^{esimo} polinomio di TCHEBYCHEF-HERMITE

$$H_n(x)=e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \quad [2].$$

---

[1] M. PICONE: *I polinomi di Laguerre e di Hermite come autosoluzioni*, Boll. Un. Mat. It., 16 (1937), pp. 205-218.

[2] Cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (Bologna, 1935), p. 191 e segg.

Abbiamo quindi che *gli autovalori relativi all'equazione* (I) *sono i numeri dispari* (positivi) $\lambda=2n+1$, *e le corrispondenti autofunzioni*

$$u_n(x)=\pi^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}x^2}H_n(x),$$

e le funzioni $u_n(x)$ *hanno le espressioni asintotiche*

$$u_{2n}(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{1/4}}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{8n}\right)\cos\left[x\sqrt{4n+1}\right]-\frac{h(2n,x)}{\sqrt{4n+1}},$$

$$u_{2n+1}(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{1/4}}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{8n}\right)\operatorname{sen}\left[x\sqrt{4n+3}\right]-\frac{h(2n+1,x)}{\sqrt{4n+3}},$$

$$0<\varepsilon_1<1,\quad 0<\varepsilon_2<2,\quad |h(n,x)|<|x|^{5/2}\quad \text{per}\quad n=0,1,\ldots.$$

c) Vogliamo provare, e in condizioni più generali, il teorema ricordato; dimostreremo cioè: *Sia μ un parametro reale o complesso, e $v(x)$ una soluzione non identicamente nulla dell'equazione di* TCHEBYCHEF-HERMITE

$$(H)\qquad v''-2xv'+2\mu v=0;$$

se esiste un numero $x_0>0$, tale che sull'asse reale, per $|x|>x_0$, risulti

$$(1)\qquad |v(x)|<Me^{kx^2},$$

con

$$(2)\qquad M>0,\qquad (0\leqslant k<1,\ M\ \text{costante}),$$

allora μ deve essere uguale ad un numero intero assoluto non negativo n, e $v(x)$ deve coincidere, a meno di un fattore costante, con l'n^{esimo} polinomio di TCHEBYCHEF-HERMITE $H_n(x)$

$$(3)\qquad H_n(x)=e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},\qquad [n=1,2,..],$$
$$H_0(x)=1\quad ([1])$$

i) Proviamo che se $v(x)$ soddisfa la (1), fissato comunque un numero positivo k_1, con $k<k_1<1$, esiste una costante positiva M_1 tale che

([1]) Per tutto quanto riguarda il n. 1, *c*), e il seguente n. 2, *b*) cfr. G. SANSONE: *I polinomi di* HERMITE *e di* LAGUERRE *come autosoluzioni*; Boll. Un. Mat. It., (2), 2 (1940), pp. 193-200.

$$(4)\qquad |v'(x)|<M_1e^{k_1x^2},\qquad [|x|>x_0].$$

Supponiamo $x>x_0$; ugualmente si ragiona per $x<-x_0$. Dall'equazione (H) integrando tra x_0 e x si ha

$$v'(x)-v'(x_0)-2\int_{x_0}^{x}tv'(t)dt+2\mu\int_{x_0}^{x}v(t)dt=0,$$

e integrando per parti nel primo integrale

$$v'(x)=v'(x_0)+2xv(x)-2x_0v(x_0)-2(\mu+1)\int_{x_0}^{x}v(t)dt,$$

dalla quale, moltiplicando per $e^{-k_1x^2}$,

$$(5)\qquad |e^{-k_1x^2}v'(x)|\leqslant|v'(x_0)-2x_0v(x_0)|e^{-k_1x^2}+$$
$$+2|x|e^{-(k_1-k)x^2}|e^{-kx^2}v(x)|+2|\mu+1|e^{-k_1x^2}\int_{x_0}^{x}|v(t)|dt;$$

ma

$$e^{-k_1x^2}\int_{x_0}^{x}|v(t)|dt\leqslant e^{-(k_1-k)x^2}\int_{x_0}^{x}e^{-kt^2}|v(t)|dt\leqslant M(x-x_0)e^{-(k_1-k)x^2},$$

perciò il secondo membro della (5) è infinitesimo quando $x\to+\infty$, e ne segue la (4).

ii) Supponiamo ora per assurdo che pur verificandosi la (1) non sia μ uguale ad alcun numero intero assoluto non negativo.

Dall'equazione (H) si ha

$$(6)\qquad \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}v'\right]+2\mu e^{-x^2}v=0,$$

ma l'm^{esimo} polinomio di TCHEBYCHEF-HERMITE soddisfa l'equazione ([1])

$$(6_m)\qquad \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}H'_m\right]+2me^{-x^2}H_m=0,\qquad [m=0,1,2,\ldots],$$

([1]) Cfr. G. SANSONE, op. cit., p. 193.

e perciò moltiplicando la (6) per H_m e la (6_m) per v e sottraendo

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\{v'(x)H_m(x)-v(x)H'_m(x)\}\right]+2(\mu-m)\,e^{-x^2}vH_m=0,$$

e integrando tra $-l_1$ e l_2

$$\left[e^{-x^2}\{v'(x)H_m(x)-v(x)H'_m(x)\}\right]_{x=-l_1}^{x=l_2}+2(\mu-m)\int_{-l_1}^{l_2}e^{-x^2}v(x)H_m(x)dx=0,$$

e siccome $H_m(x)$ è un polinomio in x, dalle (1) e (4) segue che il primo termine di quest'ultima ha per limite lo zero quando $l_1\to+\infty$, $l_2\to+\infty$, perciò

$$(\mu-m)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}v(x)H_m(x)dx=0, \qquad [m=0,\,1,\,2...],$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}v(x)H_m(x)dx=0, \qquad [m=0,\,1,\,2,....],$$

od anche se k_2 è un numero positivo tale che $1-k_2>k$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-k_2x^2}f(x)H_m(x)dx=0, \qquad [m=0,\,1,\,2,....],$$

con

$$f(x)=e^{-(1-k_2)x^2}v(x)=e^{-(1-k_2-k)x^2}[e^{-kx^2}v(x)],$$

e siccome per la (1), $|f(x)|$ è di quadrato sommabile in $(-\infty,+\infty)$, dal teorema di chiusura dei polinomi di TCHEBYCHEF-HERMITE nell'intervallo $(-\infty,+\infty)$ (¹) segue che $f(x)$ è generalmente nulla in $(-\infty,+\infty)$, e per la continuità, $f(x)\equiv 0$, quindi $v(x)\equiv 0$, assurdo.

Abbiamo dunque che verificandosi la (1) deve esistere un intero assoluto non negativo n tale che $\mu=n$, cioè $v(x)$ soddisfa l'equazione

$$v''-2xv'+2nv=0, \qquad (n\geqslant 0,\ n \text{ intero}).$$

(¹) Cfr. G. SANSONE, op. cit., p. 214.

iii) È ora facilissimo provare che $v(x)$ differisce per un fattore costante da $H_n(x)$. Si ha infatti

$$H_n''-2xH'_n+2nH_n=0,$$

e posto per $|x|$ sufficientemente grande, [maggiore dello zero di massimo modulo di $H_n(x)$], $v=H_n(x)z$, si ha

$$H_nz''=(2xH_n-2H'_n)z',$$

da cui

$$z'=c\,e^{x^2}H_n^{-2}, \qquad (c=\text{cost.}),$$

ma è $z'=(v/H_n)'$, perciò $v'H_n-vH'_n=c\,e^{x^2}$, e per le (1) e (4), se $|x|>x_0$

$$|c|\,e^{x^2}\leqslant L\,e^{k_1x^2}x^n, \qquad (0<k_1<1,\ L\ \text{cost.}),$$

e ciò è impossibile, a meno che si abbia $c=0$, $z'=0$, ossia $v(x)$ differisca da $H_n(x)$ per un fattore costante (¹).

2. - *a*) Nello studio del moto di un elettrone attorno a un nucleo (sistemi idrogenoidi) partendo dall'equazione di SCHRÖDINGER si perviene all'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\pm\frac{1}{4}+\frac{A}{x}-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y=0, \qquad (l=0,\,1,\,2,....), \tag{7}$$

e il problema fisico richiede di determinare i valori del parametro A ai quali corrispondono soluzioni verificanti le condizioni $y(0)=0$, e $|y(x)|$ limitata in $(0,+\infty)$ (²).

(¹) Giova notare che la limitazione (1) del testo non può ulteriormente migliorarsi. Infatti si può determinare un N così grande che per $x\geqslant N$ sia

$$e^{x^2}H_n^{-2}>4M\,e^{kx^2}kx,$$

risulta quindi

$$z(x)-z(N)=\int_N^x e^{x^2}H_n^{-2}\,dx>2M(e^{kx^2}-e^{kN^2}),$$

e si può trovare un N_1 in modo che per $x\geqslant N_1$ sia $z>Me^{kx^2}$, e allora la soluzione $v=H_nz$ dell'equazione (H), per i valori di x tali che $|H_n(x)|>1$ non può soddisfare la limitazione (1).

(²) Cfr. E. PERSICO, Op. cit. p. 226.

Il punto $x=0$ è un punto singolare regolare per l'equazione (7) [Cap. III, § 3; n. 2], l'equazione caratteristica corrispondente $\varrho^2-\varrho-l(l+1)=0$ ha le radici $l+1$, $-l$, e il suo integrale generale ha l'espressione

$$y=c_1 x^{-l}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right]+c_2 x^{l+1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a'_n x^n\right],$$

(c_1, c_2 costanti arbitrarie), con le serie in parentesi quadra olomorfe intorno all'origine, e l'annullarsi all'origine di y importa $c_1=0$, ossia le soluzioni della (7) che si annullano all'origine hanno ivi un infinitesimo di ordine $l+1$. Il problema diventa perciò il seguente: tra le soluzioni della (7) che per $x=0$ presentano un infinitesimo di ordine $l+1$, determinare quelle che in $(0, +\infty)$ si mantengono limitate, e qui conviene distinguere due casi.

Se nella (7) vale il segno $+$ avanti ad $1/4$, allora per risultati noti [Cap. VII, § 4, n. 2, *e*)] la $y(x)$, qualunque sia la costante reale A, si mantiene limitata oscillando infinite volte attorno all'asse x e sussiste la relazione

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,|y'(x)|=\frac{1}{2}\,\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,|y(x)|, \qquad [a^2=1/4],$$

abbiamo quindi: *qualunque valore reale di A è un autovalore dell'equazione* (7), o come si dice la (7) ammette uno *spettro continuo di autovalori.*

Resta ora da esaminare la (7) quando avanti al termine $1/4$ vale il segno $-$, cioè l'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{A}{x}-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y=0,$$

la quale con la trasformazione

$$y=e^{-\frac{x}{2}}x^{l+1}v$$

diventa

$$xv''+(2l+2-x)v'+\lambda v=0, \qquad [\lambda=A-(l+1)],$$

e basterà occuparci del problema: trovare le soluzioni di quest'ultima che per $x\geqslant x_0>0$, soddisfano la limitazione

$$|v(x)|<Me^{\frac{x}{2}},$$

e la cui derivata $v'(x)$ in un intorno a destra dell'origine si mantiene limitata.

Vedremo in *b*) che anche imponendo a $v(x)$ condizioni meno restrittive, *λ dovrà risultare uguale ad un numero intero assoluto non negativo n, e $v(x)$ a meno di un fattore costante, coincide con l'n^{esimo} polinomio di* TCHEBYCHEF-LAGUERRE

$$L_n^{(2l+1)}(x)=\frac{x^{-(2l+1)}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+2l+1}e^{-x}\right] \quad (^1).$$

b) Con ragionamenti del tutto analoghi a quelli del n. 1 *b*) proveremo:

Se λ è un parametro reale o complesso, e $v(x)$ una soluzione non identicamente nulla dell'equazione di Tchebychef-Laguerre

$$(L)\qquad xv''+(a-x+1)v'+\lambda v=0, \qquad a>-1,$$

definita nell'intervallo aperto dell'asse reale $(0, +\infty)$; *se esiste un $x_0>0$ tale che per $x\geqslant x_0$ risulti*

$$(8)\qquad |v(x)|<Me^{kx}, \qquad (0\leqslant k<1,\ x\geqslant x_0>0,\ M \text{ costante}),$$

e inoltre per $x\to+0$ si ha

$$(9)\qquad \lim_{x\to+0} x^{a+1}v'(x)=0,$$

allora λ deve essere uguale ad un numero intero assoluto non negativo n, e $v(x)$ deve coincidere, a meno di un fattore costante, con l'n^{esimo} polinomio di Tchebychef-Laguerre

$$(10)\qquad L_n^{(a)}(x)=\frac{x^{-a}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+a}e^{-x}], \qquad (n=1, 2, \ldots),$$
$$L_0^{(a)}=1.$$

i) Dimostriamo che comunque fissato un numero positivo k_1, $k<k_1<1$, esiste una costante positiva M_1 tale che per $x\geqslant x_0$ è

$$(11)\qquad |v'(x)|<M_1e^{k_1x}.$$

---

(1) Cfr. per il caso $2l+1=0$, M. PICONE, lav. cit. al n. 1 *b*), e per la dimostrazione del testo cfr. G. SANSONE, lav. cit. al n. 1, *c*). Per le proprietà dei polinomi di TCHEBYCHEF-LAGUERRE cfr. ad es. G. SANSONE, op. cit., p. 183 e segg.

Dall'equazione (L) integrando tra x_0 e x, $(x_0<x)$ si ha

$$\int_{x_0}^{x} tv''(t)\,dt+(a+1)v(x)-(a+1)v(x_0)-\int_{x_0}^{x} tv'(t)\,dt+\lambda\int_{x_0}^{x} v(t)\,dt=0,$$

dalla quale integrando per parti nel primo e nel secondo integrale

$$xv'(x)=x_0v'(x_0)-(a-x)v(x)+(a-x_0)v(x_0)-(\lambda+1)\int_{x_0}^{x} v(t)\,dt,$$

e moltiplicando per e^{-k_1x}

$$\begin{aligned} e^{-k_1x}xv'(x)&= \\ &=[x_0v'(x_0)+(a-x_0)v(x_0)]\,e^{-k_1x}-(a-x)\,e^{-(k_1-k)x}[e^{-kx}v(x)]- \\ &\quad-(\lambda+1)\,e^{-k_1x}\int_{x_0}^{x} v(t)\,dt; \end{aligned} \tag{12}$$

ma si ha

$$\left|e^{-k_1x}\int_{x_0}^{x} v(t)\,dt\right|\leqslant e^{-(k_1-k)x}\int_{x_0}^{x} e^{-kt}\,|v(t)|\,dt\leqslant M(x-x_0)\,e^{-(k_1-k)x},$$

e tenuto conto che i primi due termini del secondo membro della (12) hanno per limite lo zero se $x\to+\infty$, segue appunto la (11).

Si osservi poi che dalla (9) segue, anche per a negativo,

$$\lim_{x\to+0} x^{a+1}\,v(x)=0 \quad (^1). \tag{13}$$

ii) Supponiamo ora per assurdo che verificandosi le (8) e (9), λ non sia uguale ad alcun numero intero assoluto non negativo.

L'equazione (L) si scrive

$$\frac{d}{dx}\left[x^{a+1}e^{-x}\frac{dv}{dx}\right]+\lambda\,e^{-x}x^{a}\,v=0, \tag{14}$$

(1) Per la (9), fissato $\varepsilon>0$ esiste un $\delta>0$ tale che per $0<x\leqslant\delta$ è $|v'(x)|<\varepsilon x^{-(a+1)}$, $|v(x)-v(\delta)|\leqslant(\delta-x)\varepsilon x^{-(a+1)}$,

$$|x^{a+1}v(x)|\leqslant x^{a+1}\,|v(\delta)|+(\delta-x)\varepsilon,$$

e perciò la (13) del testo.

ma l'm^{esimo} polinomio di Tchebychef-Laguerre soddisfa l'equazione (1)

$$\frac{d}{dx}\left[x^{a+1}e^{-x}\frac{dL_m^{(a)}}{dx}\right]+m\,e^{-x}x^{a}L_m^{(a)}=0, \tag{15}$$

e moltiplicando la (14) per $L_m^{(a)}$ la (15) per v e sottraendo otteniamo

$$\frac{d}{dx}\left[x^{a+1}e^{-x}\left\{L_m^{(a)}\frac{dv}{dx}-v\frac{dL_m^{(a)}}{dx}\right\}\right]+(\lambda-m)e^{-x}x^{a}\,L_m^{(a)}\,v=0,$$

e integrando tra ε ed l, $0<\varepsilon<l$,

$$\left[x^{a+1}e^{-x}\left\{L_m^{(a)}\frac{dv}{dx}-v\frac{dL_m^{(a)}}{dx}\right\}\right]_{x=\varepsilon}^{x=l}+(\lambda-m)\int_{\varepsilon}^{l} e^{-x}x^{a}L_m^{(a)}(x)\,v(x)\,dx=0, \tag{16}$$

e tenuto conto delle (8), (9), (11), (13) e che $\lambda-m\neq0$, si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a}L_m^{(a)}(x)\,v(x)\,dx=0,$$

ed anche

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a+1}\,v(x)\,x^m\,dx=0, \qquad (m=0,\,1,\,2,\ldots.),$$

e se k_2 è un numero positivo tale che $1-k_2>k>\nu$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-k_2x}f(x)x^m\,dx=0, \qquad (m=0,\,1,\,2\ldots.)$$

con

$$f(x)=e^{-(1-k_2)x}[x^{a+1}v(x)]=e^{-(1-k_2-k)x}x^{a+1}[e^{-kx}v(x)],$$

e poichè $f(x)$ è di quadrato sommabile in $(0,+\infty)$ ne segue (2) $f(x)\equiv0$, e perciò $v(x)\equiv0$.

(1) Cfr. G. Sansone, op. cit., p. 188.

(2) Cfr. G. Sansone, op. cit. p. 210; il teorema è dimostrato quando $\int_0^{+\infty} e^{-x/2}f(x)\,x^m\,dx=0$, ma basta fare il cangiamento di variabile $x=2k_2t$.

È dunque λ uguale ad un numero intero assoluto non negativo n, e $v(x)$ soddisfa l'equazione

$$xv'' + (\alpha - x + 1)\, v' + nv = 0.$$

Posto ora $v = L_n^{(\alpha)}(x)\, z$ si ha

$$z' = c\, e^x / x^{\alpha+1}\, L_n^2(x), \qquad (c = \text{cost.}),$$

quindi

$$x^{\alpha+1}(v' L_n - v L'_n) = c\, e^x,$$

e per la (8) e (11) per $x \geqslant x_0$

$$|\, c \,|\, e^x < M_2\, e^{k_1 x}\, x^{n+\alpha+1}, \qquad (0 < k_1 < 1,\ M_2 \text{ costante}),$$

assurda, a meno che non sia $c = 0$, $z' = 0$, ossia v differisca per un fattore costante da $L_n^{(\alpha)}(x)$.

INDICE DEI NOMI (*)

(*) Le cifre romane indicano il volume, le arabiche la pagina.

INDICE PARTE SECONDA

CAPITOLO VII.

Comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali.

CAPITOLO VIII.

Teoremi di esistenza e di unicità in grande per le equazioni e i sistemi differenziali.

CAPITOLO IX.

Punti singolari. Integrali singolari.

CAPITOLO X.

Metodi operazionali - Trasformazione di Laplace.

CAPITOLO XI.

Integrazione numerica, grafica, e meccanica delle equazioni e dei sistemi differenziali ordinari.

§ 5. - **Calcolo di autovalori e approssimazione delle soluzioni dei sistemi differenziali con prescritte condizioni ai limiti.**

§ 6. - **Integrazione grafica delle equazioni differenziali.**

§ 7. - **Integrazione meccanica delle equazioni differenziali.**

Capitolo XII.

Sopra alcune equazioni differenziali interessanti le applicazioni.

§ 1. - **Sul moto di un punto grave pesante in un mezzo resistente.**

§ 2. - **Vibrazioni forzate del pendolo. Equazione di Duffing.**

§ 3. - **L'equazione differenziale di Emden dei gas politropici.**

§ 4. - **L'equazione di G. Polvani del moto elettronico nel magnetron monoanodico di Hull. Teoremi di G. Ascoli sul comportamento asintotico degli integrali.**

§ 6. - **Sull'equazione di Schrödinger relativa a due problemi particolari.**