CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
MONOGRAFIE DI MATEMATICA APPLICATA

GIOVANNI SANSONE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI NEL CAMPO REALE

PARTE PRIMA

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1941-XIX

N° 246

Tipografia Compositori - Bologna 1941 - XIX

PREFAZIONE

La teoria delle equazioni differenziali costituisce uno dei capitoli più importanti e più belli dell'Analisi Matematica. Essa ha dato e darà sempre lo spunto a ricerche nuove, sia per risolvere questioni puramente teoriche, sia per rispondere alle esigenze delle Matematiche applicate. In questa teoria vi sono sviluppi da molto tempo già classici, ed altri che risentono largamente delle indagini moderne; sviluppi che si rivolgono alla risoluzione di vecchi problemi fondamentali, ed altri che si spingono fin verso le più recenti applicazioni alla Fisica Teorica. Un quadro completo di questi studi si presenta in forma vasta, imponente; occorre perciò suddividerlo in varie parti, ed una di esse, quella che deve logicamente precedere le altre, è la trattazione delle equazioni differenziali ordinarie nel campo reale.

Fuori d'Italia, si sono pubblicate, in questi ultimi tempi, opere pregevoli sulle equazioni differenziali nell'indirizzo reale; presso di noi, invece, manca un trattato moderno su tale argomento. Per questa ragione, il Comitato per la Fisica e la Matematica applicata del nostro Consiglio Nazionale delle Ricerche ha voluto che, nella sua Collezione di Monografie Matematiche, figuri un volume destinato alle equazioni differenziali ordinarie nel campo reale e ne ha proposta la compilazione al prof. Giovanni Sansone, profondo conoscitore di questo ramo dell'Analisi Matematica, nel quale ha portato, specialmente negli ultimi anni, notevolissimi contributi personali. Ed Egli — già benemerito per aver curato la pubblicazione della Monografia del compianto G. Vitali su « La *moderna teoria delle funzioni di variabile reale» e per aver scritto l'ottimo volume su gli «Sviluppi in serie di funzioni ortogonali» — ha accettato di buon grado l'incarico offertogli; ed ora presenta al pubblico questo nuovo libro. Il quale, pensato e scritto italianamente, risponde molto bene agli scopi della Collezione in cui entra a far parte, vale a dire contempera in giusta misura le necessità degli sviluppi teorici e quelle delle applicazioni pratiche della Matematica; e riuscirà così sommamente utile sia a coloro che si occupano di Matematica per far soltanto della Matematica, sia a coloro che della Matematica si servono per studiare i problemi della Natura.*

In quest'opera, che è divisa in due volumi, il lettore è posto a contatto con le più note questioni classiche e con quelle più moderne della teoria delle equazioni differenziali nel campo reale; ed i fisici, gli astrofisici, i tecnici vi troveranno gli strumenti per l'analisi qualitativa delle soluzioni delle equazioni differenziali e i metodi per il calcolo numerico effettivo delle soluzioni stesse. Ampiamente ed opportunamente lumeggiati vi sono i legami tra le equazioni differenziali e le equazioni integrali, tra i problemi ai limiti ed il Calcolo delle Variazioni; e precise notizie bibliografiche danno un'idea esatta dell'origine e dello sviluppo delle proposizioni e dei metodi più importanti.

La materia, scelta e distribuita con sano equilibrio, è esposta in forma piana, attraente e spesso nuova; e comprende molte ricerche recenti, non ancora entrate a far parte dei trattati, alcune delle quali son dovute a giovani della Scuola italiana.

Con l'amico Sansone, che mi ha fatto l'onore di chiedermi alcune righe di presentazione, io debbo congratularmi vivamente per questa sua nuova fatica, la quale contribuisce a mantenere alto il buon nome della Matematica italiana.

LEONIDA TONELLI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

NEL

CAMPO REALE

Capitolo I.

I sistemi normali di equazioni differenziali ordinarie e il teorema di esistenza.

§ 1. - Sistemi normali.

1. - *a*) Chiamasi *equazione differenziale ordinaria* una qualunque relazione tra una variabile indipendente x, una funzione $y(x)$ di questa variabile e le sue derivate fino a quelle di un certo ordine. Un'equazione differenziale ordinaria è quindi della forma

$$F\left(x;\ y,\ \frac{dy}{dx},\dots,\ \frac{d^m y}{dx^m}\right)=0. \tag{1}$$

Il numero m, cioè l'ordine della più alta derivata che figura nella (1) chiamasi *ordine* dell'equazione.

Ad esempio le due equazioni

$$y'+xy-e^{x^2/2}=0\,, \tag{2}$$

$$y+y''-x=0 \tag{3}$$

sono rispettivamente del primo e del secondo ordine.

b) Più in generale siano $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,$ $y_m(x)$, m funzioni della variabile indipendente x, e si abbiano m relazioni tra la x, le y_1, $y_2,\dots,$ y_m e le loro derivate fino a quelle di un certo ordine

$$F_i(x;\ y_1, y_1',\dots, y_1^{(r_1)};\ y_2, y_2',\dots, y_2^{(r_2)};\dots;\ y_m, y'_m,\dots, y_m^{(r_m)})=0, \tag{4}$$
$$(i=1, 2,\dots, m).$$

Si dirà che queste equazioni formano un *sistema di equazioni differenziali ordinarie*, o semplicemente un *sistema di equazioni differenziali.*

c) Qualunque sistema di funzioni $y_1(x)$, $y_2(x),\dots,$ $y_m(x)$ che verifichi le (4) prende il nome di *integrale particolare* o *solu-*

zione del sistema; *integrare* un sistema equivale a determinare tutte le sue soluzioni.

È facile verificare che $y=e^{-x^2/2}(c_1+x)$, qualunque sia il valore attribuito alla costante c_1, è un integrale dell'equazione (2); $y=c_1\cos x+c_2\,\mathrm{sen}\,x+x$, qualunque siano i valori attribuiti alle costanti c_1, c_2 è un integrale dell'equazione (3); così pure le tre funzioni

$$(5)\qquad \begin{cases} y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x, \\ z=[(c_1+c_2)+(c_2+2c_3)x+c_3x^2]e^x, \\ u=[(c_1+2c_2+2c_3)+(c_2+4c_3)x+c_3x^2]\,e^x, \end{cases}$$

qualunque siano i valori attribuiti alle costanti c_1, c_2, c_3 soddisfano il sistema

$$6)\qquad y'-z=0,\quad z'-u=0,\quad u'-3u+3z-y=0 \quad (^1).$$

2. - *a*) Due sistemi di equazioni differenziali si dicono *equivalenti* se ammettono le stesse soluzioni.

b) *Ogni sistema di equazioni differenziali è equivalente ad un sistema nel quale figurano soltanto le derivate prime delle funzioni incognite.*

Il sistema (4) è infatti equivalente al sistema

$$F_i\Big(x;\ y_1, y_1',\dots, y_1^{(r_1-1)}, \frac{dy_1^{(r_1-1)}}{dx};\ y_2, y_2',\dots, y_2^{(r_2-1)}, \frac{dy_2^{(r_2-1)}}{dx};\dots;$$
$$y_m, y'_m,\dots, y_m^{(r_m-1)}, \frac{dy_m^{(r_m-1)}}{dx}\Big)=0,$$

$$\frac{dy_k}{dx}=y_k',\quad \frac{dy_k'}{dx}=y_k'',\dots,\quad \frac{dy_k^{(r_i-2)}}{dx}=y_k^{(r_i-1)},$$

$$(i=1, 2,\dots, m;\ k=1, 2,\dots, m)$$

---

(1) Lo studio delle prime equazioni differenziali è dovuto a G. W. LEIBNIZ e a I. NEWTON; i due fondatori del Calcolo Infinitesimale mettendo in evidenza la mutua relazione fra le operazioni di derivazione e integrazione, integrarono la più semplice delle equazioni differenziali: $y'=f(x)$.

G. W. LEIBNIZ nel 1675 integrò l'equazione $yy'=b/y$, riducendola alla forma $bdx=y^2dy$. [*Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern.* Berlin, 1899, p. 161].

L'integrale dell'equazione $y^{(n)}=f(x)$, determinato a meno di un polinomio di grado $n-1$ fu insegnato da I. NEWTON nel suo *Tractatus de quadratura curvarum*, redatto verso il 1676 e pubblicato in appendice alla sua *Ottica* nel 1704.

che si compone di $m+(r_1-1)+(r_2-1)+....+(r_m-1)=r_1+r_2+$ $+....+r_m$ equazioni nelle funzioni incognite $y_k, y_k', y_k'',...., y_k^{(r_k-1)}$ [che sono appunto in numero di $r_1+r_2+....+r_m$] e nelle loro derivate prime.

Senza alterare le generalità possiamo allora supporre che un sistema di equazioni differenziali abbia la forma

$$F_i\left(x;\ y_1, y_2,...., y_m;\ \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx},...., \frac{dy_m}{dx}\right)=0, \quad (i=1, 2,...., m). \tag{7}$$

L'intero m si dirà l'*ordine* del sistema differenziale (7).

3. - *a*) Supponiamo che le funzioni F_i, considerate come funzioni dei loro argomenti siano funzioni continue insieme alle loro derivate parziali del primo ordine in un rettangolo R_{2m+1} (¹) di centro $(x^0;\ y_1^0, y_2^0,...., y_m^0;\ y'^0_1, y'^0_2,...., y'^0_m)$ le cui coordinate soddisfano il sistema

$$F_i(x^0;\ y_1^0, y_2^0,...., y_m^0;\ y'^0_1, y'^0_2,...., y'^0_m)=0, \quad (i=1, 2,...., m) \tag{8}$$

e che in R_{2m+1} il *determinante Jacobiano* $d(F_1, F_2,...., F_m)/$ $/d(y_1', y_2',...., y'_m)$ sia diverso da zero; in tali ipotesi il teorema del DINI (²) sui sistemi di funzioni implicite assicura che in un opportuno rettangolo R_{m+1} di centro $(x^0;\ y_1^0, y_2^0,...., y_m^0)$ il sistema (8) può risolversi rispetto alle m derivate $y_1', y_2',...., y'_m$ e scriversi sotto la forma che diremo *normale*

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x;\ y_1, y_2,...., y_m), \qquad (i=1, 2,...., m) \tag{9}$$

con le f_i funzioni continue e derivabili nei loro argomenti in ogni punto di R_{m+1} (³).

b) Si osservi che un'equazione differenziale di ordine m del tipo

$$\frac{d^m y}{dx^m}=f(x;\ y, y',...., y^{(m-1)}) \tag{10}$$

(¹) Ora e in seguito, salvo che non si dichiari espressamente il contrario col simbolo R_m intendiamo un dominio rettangolare dello spazio euclideo a m dimensioni luogo dei punti $(x_1, x_2,...., x_m)$ le cui coordinate soddisfano le limitazioni $|x_i-a_i|\leq b_i$, $i=1, 2,...., m$, $(b_i>0)$. Il punto $(a_1, a_2,...., a_m)$ chiamasi *centro* di R_m e le costanti $2b_1, 2b_2,...., 2b_m$ diconsi le *dimensioni* di R_m.

(²) U. DINI: *Lezioni di Analisi Infinitesimale*. I (Pisa, 1907), p. 232.

(³) Cfr. Cap. VIII, § 8, n.° 2.

equivale al sistema normale ($y = y_1$)

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \dots, \frac{dy_{m-1}}{dx} = y_m; \quad \frac{dy_m}{dx} = f(x; y_1, y_2, \dots, y_m);$$

diremo per questa ragione che la (10) è la forma *normale* di un'equazione differenziale di ordine m.

§ 2. - Generazione dei sistemi di equazioni differenziali ordinari per l'eliminazione di costanti arbitrarie.

1. Sistemi di equazioni differenziali ottenuti per eliminazione di costanti arbitrarie. - 2. Problema inverso.

1. - Siano date m funzioni $\varphi_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_m)$, $i = 1, 2, \dots, m$ di $2m+1$ variabili indipendenti, continue insieme alle loro derivate parziali del primo ordine in un rettangolo R_{2m+1} di centro $(x^0; y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0; c_1^0, c_2^0, \dots, c_m^0)$ e in R_{2m+1} si abbia

$$d(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) / d(y_1, y_2, \dots, y_m) \neq 0.$$

Supposto

$$(1) \qquad \varphi_i(x^0; y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0; c_1^0, c_2^0, \dots, c_m^0) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

il ricordato teorema del Dini assicura per il sistema

$$(2) \qquad \varphi_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m; c_1, c_2, \dots, c_m) = 0$$

l'esistenza di un sistema di m funzioni

$$(3) \qquad y_k(x; c_1, c_2, \dots, c_m), \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

continue e derivabili che lo soddisfano identicamente quando x varia in un intervallo I di centro x_0 e $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ in un rettangolo R_m di centro $(c_1^0, c_2^0, \dots, c_m^0)$.

Derivando, col teorema delle funzioni composte, le (2) rispetto a x otteniamo il sistema

$$(4) \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_2} y_2' + \dots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_m} y'_m = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

che insieme alle (2) è soddisfatto dalle funzioni (3) quando x varia in I e $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ in R_m.

Osserviamo che i primi membri delle $2m$ equazioni del sistema (2), (4) sono definiti per $(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m;\ c_1, c_2, \dots, c_m)$ variabili in R_{2m+1} e $y_1', y_2', \dots, y'_m$ tra $-\infty$ e $+\infty$, talchè posto

$$y'^0_k = \left[\frac{dy_k(x;\ c_1^0, c_2^0, \dots, c_m^0)}{dx}\right]_{x=x^0}$$

potrà avvenire che m tra le equazioni (2), (4) siano atte ad esprimere in modo univoco $c_1, c_2, \dots, c_m$ in funzione di $x;\ y_1, y_2, \dots, y_m;\ y_1', y_2', \dots, y'_m$ in un rettangolo $\overline{R}_{2m+1}$ di centro $(x^0;\ y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0;\ y'^0_1, y'^0_2, \dots, y'^0_m)$, sotto la condizione

$$c_k(x^0;\ y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0;\ y'^0_1, y'^0_2, \dots, y'^0_m) = c_k^0, \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

e sostituendo allora le espressioni così ottenute di $c_1, c_2, \dots, c_m$ nelle altre m equazioni perveniamo ad un sistema di equazioni differenziali della forma

$$F_i\left(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m;\ \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_m}{dx}\right) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, m). \tag{5}$$

Facendo variare se è necessario x in un intervallo $\overline{I}$ di centro x^0 e interno a I, e il punto $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ in un rettangolo $\overline{R}_m$ interno a R_m e con lo stesso centro $(c_1^0, c_2^0, \dots, c_m^0)$ è lecito supporre che il punto di coordinate

$$\left(x;\ y_1(c_1, c_2, \dots, c_m), \dots, y_m(c_1, c_2, \dots, c_m);\right.$$
$$\left.\frac{dy_1(x;\ c_1, c_2, \dots, c_m)}{dx}, \dots, \frac{dy_m(x;\ c_1, c_2, \dots, c_m)}{dx}\right)$$

appartenga al rettangolo $\overline{R}_{2m+1}$ e ne viene allora che per x variabile in $\overline{I}$ e $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ in $\overline{R}_m$ le m funzioni (3) soddisfano il sistema (5).

Nel passare mediante l'operazione di derivazione dal sistema (2) al sistema (4) abbiamo riguardato le $c_1, c_2, \dots, c_m$ come *costanti*; per questa ragione si dirà che *il sistema di equazioni differenziali* (5), ottenuto per l'eliminazione delle $c_1, c_2, \dots, c_m$ dal sistema (2), (4), *proviene dalla eliminazione di m costanti arbitrarie.*

2. - Il sistema di equazioni differenziali (5) è soddisfatto dalle m funzioni (3) dipendenti ciascuna dalle m costanti $c_1, c_2, \dots, c_m$ che possono scegliersi ad arbitrio, salvo la condizione che il punto

$(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ appartenga ad $\bar{R}_m$; è naturale allora il problema: *dato un sistema differenziale della forma* (5) *si può costruire un suo sistema di m integrali $y_k(x; c_1, c_2, \ldots, c_m)$ $(k=1, 2, \ldots, m)$, dipendente da m costanti arbitrarie?*

Ad esempio il sistema di equazioni differenziali (5) considerato nel § 1, 1, *c*) ammette un sistema di integrali dipendente da 3 costanti arbitrarie; proveremo nel § 5, n.° 7, che sotto condizioni molto generali, gli integrali di un sistema di equazioni differenziali di ordine m dipendono appunto da m costanti arbitrarie.

§ 3. - Il teorema fondamentale di esistenza e di unicità col metodo delle approssimazioni successive di Picard-Peano.

1. Enunciato del teorema di esistenza. - 2. Il teorema di esistenza col metodo delle approssimazioni successive di PICARD-PEANO. - 3. Dimostrazione di GOURSAT del teorema di unicità. - 4. Complementi all'enunciato del teorema di esistenza.

1. - Sia dato il sistema di equazioni differenziali sotto forma normale

$$(1) \qquad \boxed{y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)}, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

e supponiamo che *in un rettangolo R di centro* $[\alpha; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m]$ *definito dalle limitazioni*

$$(2) \qquad -a \leqslant x-\alpha \leqslant a; \qquad -b \leqslant y_i-\beta_i \leqslant b, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

dove a e b sono costanti positive, le funzioni $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ siano funzioni ad un sol valore, continue. Si ha da qui che le funzioni f_i sono limitate in R ed esiste quindi un numero M tale che qualunque sia il punto $(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ di R si ha [1]

$$(3) \qquad \boxed{|f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)| \leqslant M}, \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Supponiamo inoltre che le funzioni $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ siano lipschitziane del primo ordine rispetto alle variabili y_i, esistano cioè

[1] Per il numero M per quanto diremo in seguito converrà scegliere il maggiore dei massimi delle $|f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)|$ in R.

m costanti $L_1, L_2, \ldots, L_m$ per le quali si abbia (1) $(r, i=1, 2, \ldots, m)$

$$(4) \qquad \begin{aligned} |f_i(x;\ y_1, \ldots, y_{r-1}, y_r+h, y_{r+1}, \ldots, y_m) - \\ - f_i(x;\ y_1, \ldots, y_{r-1}, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_m)| \leqq hL_i. \end{aligned}$$

Ne segue che qualunque siano i punti $(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$; $(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ di R si ha per $i=1, 2, \ldots, m$

$$(5) \qquad \boxed{\begin{aligned} |f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m) - f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)| \leqq \\ \leqq L\{|\bar{y}_1 - y_1| + |\bar{y}_2 - y_2| + \ldots + |\bar{y}_m - y_m|\} \end{aligned}},$$

dove L indica la maggiore delle costanti $L_1, L_2, \ldots, L_m$. È infatti

$$\begin{aligned} |f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m) - f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)| \leqq \\ \leqq |f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m) - f_i(x;\ y_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)| + \\ + |f_i(x;\ y_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \ldots, \bar{y}_m) - f_i(x;\ y_1, y_2, \bar{y}_3, \ldots, \bar{y}_m)| + \ldots + \\ + |f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, \bar{y}_m) - f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m)| \leqq \\ \leqq L \sum_{k=1}^{m} |\bar{y}_k - y_k|. \end{aligned}$$

Premesse sulle f_i le ipotesi dichiarate, vogliamo dimostrare il seguente teorema: *Sia δ il più piccolo dei numeri a, $b/4M$; x^0 un punto dell'intervallo $(a-\delta, a+\delta)$, $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ un sistema di m valori iniziali che differiscano in valore assoluto dalle corrispondenti costanti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ meno di $b/2$ si*

(1) Le (4) portano che le funzioni $f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$ hanno i loro numeri derivati rispetto alle variabili $y_1, y_2, \ldots, y_m$ complessivamente limitati in R e in valore assoluto non superiori rispettivamente a $L_1, L_2, \ldots, L_m$. Le costanti $L_1, L_2, \ldots, L_m$ chiamansi *le costanti di Lipschitz di $f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$ relative rispettivamente a $y_1, y_2, \ldots, y_m$*.

Si osservi pure che le (5) sono certamente soddisfatte ove si supponga che le f_i siano funzioni derivabili parzialmente in R rispetto alle variabili $y_1, y_2, \ldots, y_m$, con derivate parziali continue in R.

La condizione (4), essenziale nelle classiche dimostrazioni del teorema di esistenza e di unicità, fu data da R. LIPSCHITZ nella memoria: *Disamina della possibilità di integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie.* Ann. di Mat. pura e appl. (2), 2, (1868-69), pp. 288-302. La nota fu ripubblicata nel Bull. des Sciences Mathém. et Astronomiques, X, (1876), pp. 149-159. [Cfr. § 6].

abbia cioè

(6) $$|x^0-a|<\delta, \qquad |y_i^0-\beta_i|<\frac{b}{2}, \qquad (i=1, 2,\dots, m);$$

esiste allora uno e un sol sistema di funzioni

$$y_1=y_1(x), \quad y_2=y_2(x),\dots, \quad y_m=y_m(x)$$

avente per campo di esistenza l'intervallo $(a-\delta, a+\delta)$

(7) $$|x-a|<\delta$$

che soddisfa il sistema di equazioni differenziali (1) *e le condizioni iniziali*

(8) $$y_i(x^0)=y_i^0, \qquad (i=1, 2,\dots, m),$$

o come si dice il *problema di Cauchy* per il sistema (1) [e le condizioni iniziali (8)] ammette una e una sola soluzione chiamata *soluzione di Cauchy.*

2. - Proveremo il teorema di esistenza col metodo delle approssimazioni successive di PICARD-PEANO [1].

Il sistema (1) è equivalente al sistema di *equazioni integrali* [2]

(9) $$y_i(x)=y_i^0+\int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m)dx, \qquad (i=1, 2,\dots, m).$$

Questo sistema, se le f_i *non contengono gli argomenti* y_1, $y_2,\dots, y_m$ risolve il problema con quadrature; le (9) diventano allora

(9′) $$y_i(x)=y_i^0+\int_{x^0}^{x} f_i(x)dx, \qquad (i=1, 2,\dots, m).$$

---

[1] Il metodo delle approssimazioni (sostituzioni) successive nel campo reale e per i sistemi lineari fu dato da G. PEANO nella sua nota: *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*. Atti della R. Acc. Sc., Torino, 22 (1887), pp. 293-302. La nota, con poche modificazioni, fu ripubblicata nei Math. Ann. (1888), 32, pp. 450-456. [Cfr. Cap. II, § 2, n.° 3].

Il metodo in tutta la sua generalità fu data da É. PICARD in *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives.* Journ. de Math. pur. et appl. (4), 6, (1890), pp. 145-210; dal metodo di PICARD è derivato un procedimento di indagine di importanza fondamentale per le più svariate questioni di analisi.

[2] La denominazione « *equazione integrale* » fu proposta la prima volta da P. du BOIS-REYMOND nella memoria: *Bemerkungen über* $\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, Journ. v. Crelle, 103 (1888), (pp. 204-229), p. 228.

Nel caso generale cominciamo col porre nel secondo membro delle (9), in luogo di $y_1, y_2, \ldots, y_m$ i valori iniziali $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ che prenderemo come *primo sistema di approssimazione* e costruiremo così con operazioni di quadratura un *secondo sistema* di funzioni ausiliarie $y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \ldots, y_m^{(1)}(x)$ definito dalle relazioni

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x\,;\; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)\,dx, \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Risulterà dal nostro ragionamento che in luogo dei valori iniziali delle funzioni incognite possiamo partire da *un qualunque sistema di funzioni* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ *continue in* $(a-a, a+a)$, *soddisfacenti le limitazioni*

$$|u_i(x) - \beta_i| \leq b$$

per x *variabile in* $(a-\delta, a+\delta)$ e prendere come *seconda approssimazione* delle funzioni incognite il sistema di funzioni ausiliarie $y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \ldots, y_m^{(1)}(x)$ definito dalle relazioni

$$(9_1) \quad y_i^{(1)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x\,;\; u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x))\,dx, \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Proviamo subito che questo sistema di funzioni ausiliarie $y_i^{(1)}(x)$ per x variabile in $(a-\delta, a+\delta)$ si scosta dalle β_i meno di b. Si ha infatti dalle (9_1), (3), (6), (7) $[\delta \leq b/4M]$

$$\begin{aligned} |y_i^{(1)}(x) - \beta_i| &= \left|y_i^0 - \beta_i + \int_{x^0}^{x} f_i(x\,;\; u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x))\,dx\right| \\ &\leq |y_i^0 - \beta_i| + M|x - x^0| \leq |y_i^0 - \beta_i| + M\{|x-a| + |x^0 - a|\} \\ &\leq b/2 + 2\delta M \leq b/2 + b/2 = b. \end{aligned}$$

Dopo ciò determiniamo un *terzo sistema di funzioni ausiliarie* $y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_m^{(2)}$ ponendo nelle (9), nei secondi membri, in luogo delle funzioni incognite $y_1, y_2, \ldots, y_m$ le funzioni trovate $y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \ldots, y_m^{(1)}(x)$, avremo così;

$$(9_2) \quad y_i^{(2)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x\,;\; y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \ldots, y_m^{(1)}(x))\,dx, \quad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Ripetendo il ragionamento precedente si ha che le funzioni $y_i^{(2)}(x)$ [ottenute con operazioni di quadratura] sono funzioni continue della x in $(a-\delta, a+\delta)$ e si scostano dai valori β_i, meno di b.

In generale supposto *determinato* l' $(r+1)$-esimo *sistema ausiliario, determineremo* l' $(r+2)$-esimo *con le formule* [di quadratura]

$$(9_{r+1}) \qquad y_i^{(r+1)}(x)=y_i^0+\int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1^{(r)}(x), y_2^{(r)}(x),\dots, y_m^{(r)}(x))dx,$$
$$(i=1, 2,\dots, m).$$

Le funzioni $y_i^{(r)}(x)$, qualunque sia r, sono finite e continue in $(a-\delta, a+\delta)$ e si scostano dai valori β_i meno di b.

Dimostreremo ora che *le funzioni* $y_i^{(r)}(x)$, *quando* $r\to\infty$, *per* x *variabile in* $(a-\delta, a+\delta)$, *convergono uniformemente verso rispettive funzioni limiti* $y_i(x)$, *le quali soddisfano il sistema* (1) *e le condizioni iniziali* (8); *le* $y_i(x)$ *sono quindi gli integrali cercati.*

Sarà provata la nostra affermazione se riusciremo a dimostrare che la serie

$$(\mathrm{I}) \qquad u_i(x)+[y_i^{(1)}(x)-u_i(x)]+[y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)]+\dots+$$
$$+[y_i^{(r)}(x)-y_i^{(r-1)}(x)]+\dots$$

converge uniformemente [e assolutamente] in $(a-\delta, a+\delta)$.

Le funzioni $y_i^{(1)}(x)-u_i(x)$ sono continue in $(a-\delta, a+\delta)$, esiste perciò una costante C tale che

$$(10_1) \qquad \sum_{i=1}^{m} |\, y_i^{(1)}(x)-u_i(x)\,| < C,$$

qualunque sia x in $(a-\delta, a+\delta)$.

Dalle (9_2), (9_1), tenuto conto delle (5) e (10_1) si ha

$$|\, y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)\,| < \left| \int_{x^0}^{x} |\, f_i(x;\ y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x),\dots, y_m^{(1)}(x)) - \right.$$
$$\left. - f_i(x;\ u_1(x), u_2(x),\dots, u_m(x))\,|\, dx \right|$$
$$< L \left| \int_{x^0}^{x} \sum_{i=1}^{m} |\, y_i^{(1)}(x)-u_i(x)\,|\, dx \right| < CL\,|\,x-x^0\,|$$

cioè

$$(10_2)\qquad |y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)| \leqslant \frac{C}{m}[m L |x-x^0|], \qquad (i=1, 2,\dots, m).$$

Dalle (9_3), (9_2), tenuto conto delle (5), (10_2) si ha

$$|y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)| \leqslant \left|\int_{x^0}^{x} |f_i(x;\ y_1^{(2)}(x), y_2^{(2)}(x),\dots, y_m^{(2)}(x)) -\right.$$

$$\left. -f_i(x;\ y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x),\dots, y_m^{(1)}(x))|\, dx\right|$$

$$\leqslant L \left|\int_{x^0}^{x} \sum_{i=1}^{m} |y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)|\, dx\right| \leqslant mCL^2 \left|\int_{x^0}^{x} |x-x^0|\, dx\right|$$

quindi

$$|y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)| \leqslant mCL^2 \frac{|x-x^0|^2}{2\,!}$$

ed anche

$$(10_3)\qquad |y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)| \leqslant \frac{C}{m}\ \frac{[mL|x-x^0|]^2}{2\,!}$$

e per induzione

$$(10)\qquad |y_i^{(r+1)}(x)-y_i^{(r)}(x)| \leqslant \frac{C}{m}\ \frac{[mL|x-x^0|]^r}{r!}.$$

Avendosi $|x-x^0| \leqslant |x-a|+|x^0-a| \leqslant 2\delta$, abbiamo anche

$$|y_i^{(r+1)}(x)-y_i^{(r)}(x)| < \frac{C}{m}\ \frac{(2mL\delta)^r}{r!},$$

e la serie dei valori assoluti dei termini della (I), esclusi i primi due termini, è minorante della serie

$$\frac{C}{m}\left[\frac{(2mL\delta)}{1\,!}+\frac{(2mL\delta)^2}{2!}+\dots+\frac{(2mL\delta)^{r-1}}{(r-1)!}\right]+\dots=\frac{C}{m}[e^{2mL\delta}-1],$$

la (I) è quindi uniformemente e assolutamente convergente in $(a-\delta, a+\delta)$.

Posto allora

$$\boxed{y_i(x)=\lim_{r\to\infty} y_i^{(r)}(x)}, \qquad (i=1, 2,\dots, m)$$

le $y_i(x)$ sono *continue* in $(a-\delta, a+\delta)$.

Dimostriamo ora che anche la successione

$$(11)\qquad \begin{array}{l} f_i(x;\ u_1(x), u_2(x),\dots, u_m(x))\ ;\quad f_i(x;\ y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x),\dots, y_m^{(1)}(x));\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_i(x;\ y_1^{(r)}(x), y_2^{(r)}(x),\dots, y_m^{(r)}(x))\ ;\dots \end{array}$$

converge uniformemente nell'intervallo $(a-\delta, a+\delta)$ verso

$$f_i(x;\ y_1(x), y_2(x),\dots, y_m(x)),$$

cioè scelto un numero σ positivo e arbitrario si può trovare un indice r_0 tale che per qualunque indice $r>r_0$ e ovunque sia x in $(a-\delta, a+\delta)$ è

$$(12)\quad |f_i(x;\,y_1(x), y_2(x),\dots, y_m(x))-f_i(x;\,y_1^{(r)}(x), y_2^{(r)}(x),\dots, y_m^{(r)}(x))|<\sigma.$$

Difatti per la (5) abbiamo

$$|f_i(x;\ y_1(x), y_2(x),\dots, y_m(x))-f_i(x;\ y_1^{(r)}(x), y_2^{(r)}(x),\dots, y_m^{(r)}(x))| \leq$$
$$\leq L\sum_{k=1}^{m}|y_k(x)-y_k^{(r)}(x)|$$

e se scegliamo r_0 in modo che per $r>r_0$ sia

$$|y_k(x)-y_k^{(r)}(x)|<\frac{\sigma}{mL}\qquad [r>r_0;\ k=1, 2,\dots, m;\ a-\delta\leq x\leq a+\delta]$$

ne segue la (12).

Possiamo infine dimostrare che le funzioni $y_i(x)$ *costruite* nel modo dichiarato soddisfano il sistema (9). Poniamo infatti

$$F_i(x)=y_i(x)-y_i^0-\int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1(x), y_2(x),\dots, y_m(x))dx$$

e proviamo che $F_i(x)\equiv 0$ in $(a-\delta, a+\delta)$. Tenuto conto della (9_{r+1}) si ha

$$F_i(x)=y_i(x)-y_i^{(r+1)}(x)+\int_{x^0}^{x}[f_i(x;\ y_1^{(r)}(x), y_2^{(r)}(x),\dots, y_m^{(r)}(x))-$$
$$-f_i(x;\ y_1(x), y_2(x),\dots, y_m(x))]dx$$

e se scegliamo l'indice r_0 in modo che per $r>r_0$ valga la (12) abbiamo

$$|F_i(x)|<|y_i(x)-y_i^{(r+1)}(x)|+2\sigma\delta,$$

e allora per la convergenza [uniforme] di $y^{r+1}(x)$ verso $y_i(x)$ in $(a-\delta, a+\delta)$ il secondo membro dell'ultima limitazione finisce col diventare e restare minore di qualsiasi numero positivo prefissato, quindi $F_i(x) \equiv 0$ qualunque sia x in $(a-\delta, a+\delta)$ (¹).

Abbiamo quindi *costruito* un sistema di funzioni che soddisfa il sistema di equazioni differenziali (1) e le condizioni iniziali prescritte con le (8).

3\. - Daremo ora la dimostrazione di GOURSAT del teorema di unicità (²).

Sia $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_m(x)$, $|z_k(x)-\beta_k| \leq b$, $(k=1, 2, \ldots, m)$, un sistema di funzioni che soddisfi anch'esso il sistema (1) e le condizioni iniziali prescritte, si abbia cioè

$$(1') \qquad z_i(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ z_1(x), z_2(x), \ldots, z_m(x))\,dx, \quad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Sottraendo da questa le funzioni $y_1^{(r)}(x), y_2^{(r)}(x), \ldots, y_m^{(r)}(x)$ determinate dall'$(r+1)$-esimo sistema di approssimazioni successive

$$y_i^{(r)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1^{(r-1)}(x), y_2^{(r-1)}(x), \ldots, y_m^{(r-1)}(x))\,dx$$

abbiamo

$$z_i(x) - y_i^{(r)}(x) = \int_{x^0}^{x} \{ f_i(x;\ z_1, z_2, \ldots, z_m) - f_i(x;\ y_1^{(r-1)}, y_2^{(r-1)}, \ldots, y_m^{(r-1)}) \}\,dx$$

e per la (5)

$$(13) \qquad |z_i(x) - y_i^{(r)}(x)| \leq L \left| \int_{x^0}^{x} \sum_{k=1}^{m} |z_k(x) - y_k^{(r-1)}(x)|\,dx \right| .$$

Da quest'ultima è facile dedurre una limitazione per le differenze $|z_i - y_i^{(r)}|$.

(¹) Quest'ultimo punto può anche omettersi; basterà osservare che per l'uniforme convergenza della successione (11), nella (9_{r+1}) è lecito nel secondo membro il passaggio al limite sotto il segno integrale quando $r \to \infty$

(²) É. GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathématique*. T. II (Paris, 1905), p. 372.

Si ha infatti, poichè le $z_k(x)$ sono comprese tra $\beta_k - b$ e $\beta_k + b$

$$|z_k(x) - u_k(x)| \leqslant 2b, \qquad (k=1, 2,\dots, m)$$

e facendo nella (13) $r=1$

$$|z_i(x) - y_i^{(1)}(x)| \leqslant 2bmL|x-x^0|$$

e facendo ora nella (13) $r=2$, e tenuto conto di quest'ultima

$$|z_i(x) - y_i^{(2)}(x)| \leqslant 2b\frac{[mL|x-x^0|]^2}{2!}$$

e in generale

(14) $$|z_i(x) - y_i^{(r)}(x)| \leqslant 2b\frac{[mL|x-x^0|]^r}{r!}, \qquad (r=1, 2,\dots, m) \quad [1]$$

e siccome quando x varia in $(a-\delta,\ a+\delta)$ il limite del secondo membro per $r \to \infty$ è lo zero, si ha che le $y_i^{(r)}(x)$ convergono e uniformemente in $(a-\delta,\ a+\delta)$ verso le funzioni $z_i(x)$ le quali coincidono quindi con le $y_i(x)$ dianzi trovate.

4. - a) Nella dimostrazione precedente abbiamo supposto x variabile nell'intervallo $(a-\delta,\ a+\delta)$, dove δ è minore od uguale non soltanto di a ma *anche* di $b/4M$, perchè le approssimazioni successive $y_i^{(r)}(x)$ non uscissero dal campo ove sono soddisfatte le condizioni di LIPSCHITZ. Ma se le (5) sussistono per x variabile in $(a-a,\ a+a)$ e *illimitatamente rispetto alle* y, allora questo secondo limite si può sopprimere, e si può fare nel teorema di esistenza $\delta=a$, cioè l'esistenza e l'unicità degli integrali viene assicurata in tutto il tratto permesso per la x. *Questa circostanza si presenta se le f_i ammettono derivate parziali rispetto alle $y_1, y_2, \dots, y_m$ che restino limitate, pur variando le y_k illimitatamente.*

Un caso notevolissimo è quello in cui le f_i siano funzioni lineari intere rispetto alle y_k, cioè il sistema (1) abbia la forma

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l}(x) y_l + u_i(x), \qquad (i=1, 2,\dots, m)$$

---

[1] Il lettore noti l'importanza di questa formula la quale *maggiora l'errore dell'$r+1$-esima approssimazione.*

con $a_{i,l}(x)$, $u_i(x)$ funzioni continue della x in $(a-\alpha, a+\alpha)$, perchè allora le derivate parziali dipendono soltanto dalla x.

E conviene qui osservare che se il sistema ha la forma

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}(x, \lambda)y_l+u_i(x, \lambda), \qquad (i=1, 2,\dots, m)$$

e le $a_{i,l}(x, \lambda)$, $u_i(x, \lambda)$ sono funzioni continue di x e λ per x variabile in $(a-\alpha, a+\alpha)$, e λ in un dominio D, e olomorfe rispetto al parametro λ in D, i termini della serie delle approssimazioni successive sono funzioni olomorfe in D, e la loro uniforme convergenza in D, porta per il teorema di WEIERSTRASS [1] che gli integrali y_i risultano funzioni olomorfe del parametro λ in D.

b) Si possono formare altri casi in cui si presenta la medesima circostanza osservata in *a*); tale è ad esempio il sistema

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}(x) \operatorname{sen} y_l+u_i(x), \qquad (i=1, 2,\dots, m)$$

dove le $a_{i,l}(x)$ e le $u_i(x)$ sono funzioni continue della x in $(a-\alpha, a+\alpha)$.

c) Vogliamo ancora notare che *quando ci si limiti a trovare una soluzione del sistema* (1) *che soddisfi le condizioni iniziali*

$$y_i(a)=\beta_i, \qquad (i=1, 2,\dots, m)$$

per δ si può prendere il più piccolo dei numeri α, b/M [2]. Restano infatti validi tutti i ragionamenti fatti per il teorema di esistenza e di unicità quando prendiamo δ nel modo ora dichiarato.

§ 4. - Continuazione analitica degli integrali. - Esempi.

1. Continuazione analitica degli integrali. - 2. Sistema differenziale caratteristico delle funzioni circolari. - 3. Sistema differenziale caratteristico delle funzioni ellittiche di JACOBI.

1. - Ferme restando le ipotesi dichiarate al § 3, n. 1, si cerchi un sistema di integrali del sistema

$$(1) \qquad y_i'=f_i(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m), \qquad (i=1, 2,\dots, m)$$

---

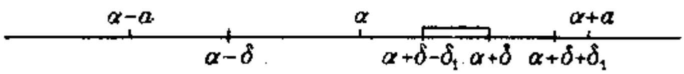
[1] Cfr. ad es. L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa.* (Pisa, 1901), p. 135.

[2] È quasi superfluo osservare che se $M=0$, si dovrà prendere $\delta=\alpha$.

che soddisfi le condizioni iniziali

$$y_i(a)=\beta_i. \tag{2}$$

Il teorema di esistenza e di unicità, per l'osservazione del § 3, n. 4, *c*), assicura l'esistenza e l'unicità degli integrali nell'intervallo $(a-\delta,\ a+\delta)$, dove δ è il più piccolo dei numeri α, b/M che *generalmente* riuscirà interno all'intervallo primitivo di variabilità della x, $(a-\alpha,\ a+\alpha)$. Da questo fatto non può concludersi l'esistenza degli integrali soltanto in $(a-\delta,\ a+\delta)$; essi possono esistere oltre detto intervallo, salvo ad ottenerli con una nuova serie di approssimazioni successive. Infatti sia $\delta<\alpha$ e gli integrali costruiti nel § 3, n. 2, abbiamo per $x=a+\delta$ i valori $y_i(a+\delta)=b_i$; se esiste un rettangolo $\overline{R}$ di centro $(a+\delta;\ b_1,\ b_2,\dots,\ b_m)$ contenuto in R, valgono in $\overline{R}$ le ipotesi dichiarate al § 3, n. 1, e potremo perciò costruire una nuova serie di approssimazioni successive



che ci fornirà un sistema di integrali del sistema (1) definito per tutti i valori di x appartenenti ad un intervallo $(a+\delta-\delta_1,\ a+\delta+\delta_1)$ di ampiezza $2\delta_1$, e questi integrali assumono nel punto $a+\delta$ i valori $b_1,\ b_2,\dots,\ b_m$. Per il teorema di unicità questo nuovo sistema di integrali coincide in un intorno a sinistra di $a+\delta$ con il vecchio sistema di integrali e d'altra parte esiste in $(a+\delta,\ a+\delta+\delta_1)$ dove prima non erano definiti gli integrali del vecchio sistema; il nuovo sistema di integrali chiamasi un *prolungamento analitico* del vecchio sistema.

Continuando per successivi prolungamenti analitici potrà avvenire che il campo di esistenza del sistema di integrali che soddisfa le condizioni iniziali (2) è l'intero intervallo $(a-\alpha,\ a+\alpha)$ e potrà invece essere una sua parte. Quello che importa notare è che *gli integrali del sistema di equazioni differenziali* (1) *sono univocamente determinati dalle equazioni differenziali del sistema e dai valori iniziali.*

2. - *a*) Sia dato il sistema

$$\frac{du}{dx}=v,\quad \frac{dv}{dx}=-u \tag{3}$$

con le condizioni iniziali

$$u(0)=0, \quad v(0)=1. \tag{4}$$

Sappiamo già che le funzioni che soddisfano il sistema (3) e le condizioni iniziali (4) sono

$$u=\text{sen}\, x, \quad v=\cos x,$$

qui vogliamo ritrovare questo resultato, seguendo il procedimento delle approssimazioni successive.

Con le notazioni precedenti si ha

$$f_1(x;\ u, v)=v, \quad f_2(x;\ u, v)=-u,$$

x varia in $(-\infty, +\infty)$ e le condizioni di LIPSCHITZ sono verificate.

Tenuto conto delle condizioni iniziali (4) abbiamo:

$$u^{(1)}=0+\int_0^x f_1[x;\ 0, 1]dx=x; \quad u^{(2)}=0+\int_0^x f_1[x;\ x, 1]dx=x;$$

$$u^{(3)}=0+\int_0^x f_1\left[x;\ x, 1-\frac{x^2}{2}\right]dx=x-\frac{x^3}{3!}$$

$$v^{(1)}=1+\int_0^x f_2[x;\ 0, 1]dx=1; \quad v^{(2)}=1+\int_0^x f_2[x;\ x, 1]dx=1-\frac{x^2}{2!};$$

$$v^{(3)}=1+\int_0^x f_2\left[x;\ x, 1-\frac{x^2}{2}\right]dx=1-\frac{x^2}{2!}$$

e così continuando troviamo le serie delle approssimazioni successive

$$u(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots; \quad v(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$$

convergenti per ogni valore di x.

b) Proviamo ora, indipendentemente dalle cose note, che le funzioni $u(x)$, $v(x)$ sono periodiche, e ritroviamo il relativo teorema di addizione.

Dal sistema (3) si ha $2uu'+2vv'=0$, $(u^2+v^2)'=0$, $u^2+v^2=\text{cost.}$ e per le (4)

$$u^2(x)+v^2(x)=1, \tag{5}$$

perciò le $u(x)$, $v(x)$ sono funzioni continue e limitate in $(-1, 1)$.

Si ha poi $u'(0)=v(0)=1$, la $u(x)$ è quindi crescente e perciò positiva in un intorno a destra di $x=0$, essa resterà crescente (e quindi positiva) fino a quando non si annulla la sua derivata prima $v(x)$, ed avendosi $v^2(x)=1-u^2(x)$ ne viene che $u(x)$ è *crescente* fino a quando non raggiunge il valore 1; se indichiamo con K il primo valore di x per il quale $u(K)=1$, da $u'(x)=\sqrt{1-u^2}$ [per x variabile tra 0 e K il radicale deve essere preso col segno $+$] si ha

$$dx=(1-u^2)^{-1/2}du \text{ e integrando tra 0 e } K$$

$$K=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (=\pi/2).$$

Poniamo

$$u_1(x)=-v(x+K), \quad v_1(x)=u(x+K),$$

mutando nelle (3) x in $x+K$ troviamo

$$u_1'(x)=v_1, \quad v_1'(x)=-u_1$$

e per $x=0$

$$u_1(0)=-v(K)=0, \quad v_1(0)=u(K)=1,$$

perciò $u_1(x)=u(x)$, $v_1(x)=v(x)$ cioè

$$(5_1) \qquad u(x+K)=v(x), \quad v(x+K)=-u(x),$$

dalle quali cangiando ancora x in $x+K$

$$(5_2) \qquad u(x+2K)=-u(x), \quad v(x+2K)=-v(x),$$

e infine

$$(5_3) \qquad u(x+4K)=u(x), \quad v(x+4K)=v(x).$$

Le funzioni $u(x)$, $v(x)$ sono quindi periodiche col periodo $4K$ $[=2\pi]$.

c) Per dimostrare il teorema di addizione poniamo:

$$U(x)=u(x)v(a)+v(x)u(a), \quad V(x)=v(x)v(a)-u(x)u(a)$$

dove a è una costante. Le $U(x)$, $V(x)$ soddisfano il sistema

$$U'(x)=V(x), \quad V'(x)=-U(x)$$

e alle condizioni iniziali

$$U(0)=u(a), \quad V(0)=v(a)$$

cioè alle stesse equazioni e alle medesime condizioni iniziali per le funzioni $u(x+a)$, $v(x+a)$; si ha dunque

$$u(x+a)=u(x)v(a)+v(x)u(a); \quad v(x+a)=v(x)v(a)-u(x)u(a)$$

che esprimono i noti teoremi elementari

$$\operatorname{sen}(x+a)=\operatorname{sen} x \cos a+\cos x \operatorname{sen} a;$$
$$\cos(x+a)=\cos x \cos a-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} a.$$

3. - *a*) Sia k una costante positiva minore di 1, x variabile tra $-\infty$ e $+\infty$, e consideriamo il sistema di equazioni differenziali nelle tre funzioni incognite u, v, w

$$\frac{du}{dx}=vw, \quad \frac{dv}{dx}=-uw, \quad \frac{dw}{dx}=-k^2uv, \tag{6}$$

con le condizioni iniziali

$$u(0)=0, \quad v(0)=w(0)=1. \tag{7}$$

Supponiamo di far variare x tra -1 e $+1$ e di non fare scostare i valori di u, v, w dai loro valori iniziali più di b $(b>0)$, sia cioè

$$-b\leq u\leq b, \quad 1-b\leq v\leq 1+b, \quad 1-b\leq w\leq 1+b.$$

Il massimo valore assoluto di vw, $-uw$, $-k^2uv$ è $b(1+b)<$ $<(1+b)^2$, perciò l'esistenza di un sistema di integrali del sistema (6) che soddisfa le condizioni (7) è assicurata nell'intervallo $[-b(1+b)^{-2}, b(1+b)^{-2}]$.

Ma è facile vedere che le funzioni u, v, w esistono qualunque sia il valore di x; infatti negli intervalli ove è provata la loro esistenza essi risultano in valore assoluto minori di 1 [cfr. (8)] e si può effettuare il loro prolungamento a sinistra e a destra di qualunque intervallo per un tratto di ampiezza $b(1+b)^{-2}$.

b) Dalle (6) abbiamo

$$(u^2+v^2)'=0, \quad (k^2u^2+w^2)'=0$$

quindi

$$u^2+v^2=\text{cost.}, \quad k^2u^2+w^2=\text{cost.}$$

e per le (7) le $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ sono legate dalle equazioni

$$(8) \qquad \boxed{u^2+v^2=1, \quad k^2u^2+w^2=1}.$$

Le funzioni u, v variano quindi in $(-1, 1)$ e w^2 in $(1-k^2, 1)$, cioè le tre funzioni $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ esistono e sono finite e continue [per le (6) insieme alle loro derivate] in tutto l'asse reale e tutte e tre in valore assoluto minori di 1.

c) Poniamo

$$(9) \qquad u_1(x)=-u(-x), \quad v_1(x)=v(-x), \quad w_1(x)=w(-x),$$

si ha

$$(6') \qquad \frac{du_1(x)}{dx}=v_1w_1, \quad \frac{dv_1(x)}{dx}=-u_1w_1, \quad \frac{dw_1(x)}{dx}=-k^2u_1v_1$$

$$(7') \qquad u_1(0)=0, \quad v_1(0)=w_1(0)=1$$

quindi le $u_1(x)$, $v_1(x)$, $w_1(x)$ coincidono con le $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, perciò per le (9)

$$(10) \qquad \boxed{u(-x)=-u(x), \quad v(-x)=v(x), \quad w(-x)=w(x)},$$

cioè la funzione $u(x)$ *è dispari e le funzioni* $v(x)$ *e* $w(x)$ *sono pari.*

d) Dalle (6) e (8) abbiamo $u'^2=v^2w^2=(1-u^2)(1-k^2u^2)$, quindi $u'(x)$ si annulla per $u=\pm1$; ma per $x=0$ si ha $u'(0)=1$, perciò $u(x)$ è crescente nel punto $x=0$ ed essa si mantiene positiva e crescente (minore di 1) fino a quando x varia tra 0 e K, essendo K il primo valore positivo di x per il quale $u(K)=1$.

Abbiamo allora per x variabile tra 0 e K,

$$(11) \qquad u'(x)=\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \quad dx=du/\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$$

dove del radicale prendiamo il valore aritmetico, ed integrando rispetto ad u tra 0 e 1 si ha

$$(12) \qquad K=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

e per $x=K$ si ha

$$(13) \qquad u(K)=1, \quad v(K)=0, \quad w(K)=\sqrt{1-k^2}=k',$$

essendo k' legato a k dalla relazione

$$k^2+k'^2=1. \tag{14}$$

Si osservi che nell'ultima delle (13) il radicale va preso col segno positivo; basterà per questo tener conto della continuità di $w(x)$ e della condizione iniziale $w(0)=1$.

Si osservi poi che se poniamo nella (11)

$$u=\operatorname{sen}\varphi$$

si ottiene

$$dx=(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{-1/2}\,d\varphi$$

e perciò

$$x=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,,\qquad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,. \tag{15}$$

L'arco φ si chiama l'*amplitudine* di x e si scrive

$$\varphi=\mathrm{am.}\,x$$

perciò

$$u=\operatorname{sen}\varphi=\operatorname{sen}\mathrm{am.}\,x,\quad v=\cos\varphi=\cos\mathrm{am.}\,x$$
$$w=\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\mathrm{am.}\,x}=\Delta\varphi=\Delta\,\mathrm{am.}\,x.$$

Le tre funzioni $\operatorname{sen}\mathrm{am.}\,x$, $\cos\mathrm{am.}\,x$, $\Delta\,\mathrm{am.}\,x$ sono le tre funzioni ellittiche di Jacobi e si leggono rispettivamente *seno amplitudine x, coseno amplitudine x, Δ amplitudine x*; oggi si indicano in analisi con le notazioni di Gudermann

$$u(x)=\mathrm{sn}\,(x\,;\,k),\quad v(x)=\mathrm{cn}\,(x\,;\,k),\quad w(x)=\mathrm{dn}\,(x\,;\,k)$$

e più semplicemente con

$$\mathrm{sn}\,x,\quad \mathrm{cn}\,x,\quad \mathrm{dn}\,x.$$

La costante k chiamasi *modulo* delle funzioni ellittiche $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$, e k' *modulo complementare* (1). [v. fig. 1, 2, 3 a p. 22].

---

(1) Le tre funzioni ellittiche di Jacobi sono tabulate con 5 cifre decimali nel volumetto di L. M. Milne Thomson: *Die elliptischen Funktionen von Jacobi*. (Berlin, 1931), pp. XIV + 69. Per le figure 1, 2, 3 del testo, cfr. le pp. 1, 23, 45.

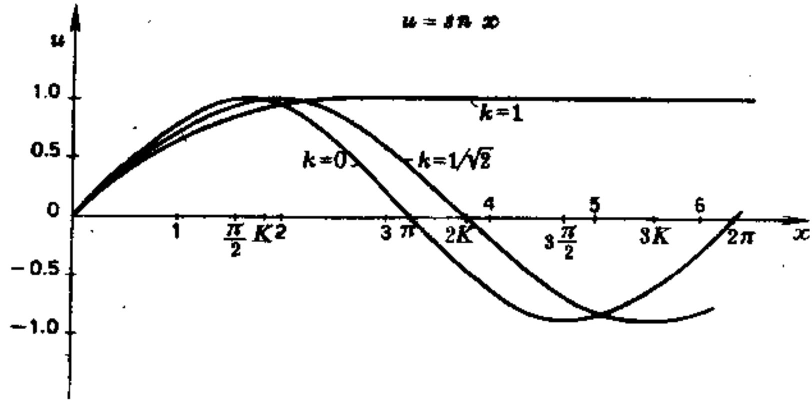


FIG. 1

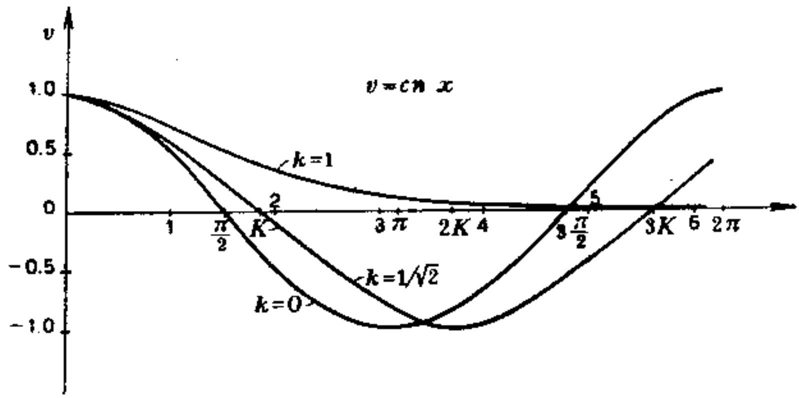


FIG. 2

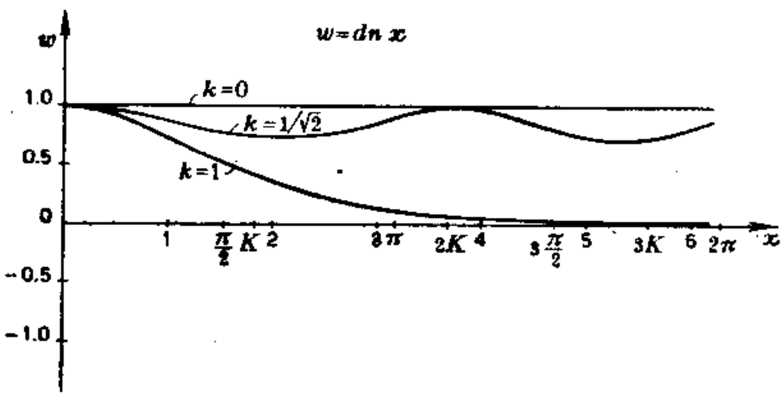


FIG. 3

e) Con procedimento analogo a quello del n.° 2 *b*) vogliamo trovare il periodo (reale) delle funzioni ellittiche di JACOBI.

A motivo della seconda delle (8) la $w(x)$ è diversa da zero, hanno quindi significato le tre funzioni

$$(16) \qquad U(x)=\frac{v}{w}, \quad V(x)=-k'\frac{u}{w}, \quad W(x)=\frac{k'}{w}.$$

Si ha

$$U'=\frac{1}{w}v'-\frac{v}{w^2}w'=-u+k^2\frac{uv^2}{w^2}=\frac{u}{w^2}(k^2v^2-w^2)=$$
$$=\frac{u}{w^2}(k^2v^2+k^2u^2-1)=-\frac{u}{w^2}k'^2=VW,$$

e con procedimento analogo otteniamo per U, V, W il sistema

$$(16_1) \qquad U'=VW, \quad V'=-UW, \quad W'=-k^2UW$$

con le condizioni iniziali

$$(16_2) \qquad U(0)=1, \quad V(0)=0, \quad W(0)=k'.$$

In virtù delle (6) e (13) alle stesse condizioni (16_1), (16_2) soddisfano le funzioni

$$u(x+K), \quad v(x+K), \quad w(x+K)$$

quindi

$$U=u(x+K), \quad V=v(x+K), \quad W=w(x+K)$$

e per le (16)

$$(17_1) \qquad \boxed{\operatorname{sn}(x+K)=\frac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}, \quad \operatorname{cn}(x+K)=-k'\frac{\operatorname{sn}x}{\operatorname{dn}x}, \quad \operatorname{dn}(x+K)=\frac{k'}{\operatorname{dn}x}}$$

da cui

$$(17_2) \qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(x+2K)=-\operatorname{sn}x, \\ \operatorname{cn}(x+2K)=-\operatorname{cn}x, \\ \operatorname{dn}(x+2K)=\operatorname{dn}x, \end{cases}$$

$$(17_3) \qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(x+4K)=\operatorname{sn}x, \\ \operatorname{cn}(x+4K)=\operatorname{cn}x, \\ \operatorname{dn}(x+4K)=\operatorname{dn}x. \end{cases}$$

La funzione $\operatorname{dn} x$ *ha quindi il periodo* (reale) $2K$, *e le due funzioni* $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ *il periodo* (reale) $4K$.

f) Quando le funzioni $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ si considerano oltre che per valori dell'argomento reali anche per valori complessi, viene in luce un secondo periodo delle funzioni stesse. Posto:

$$K' = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \tag{18}$$

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \quad x = \frac{2K}{\pi} v \tag{19}$$

si ha

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta(v)}, \quad \operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta(v)}, \quad \operatorname{dn} x = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta(v)}$$

dove $\vartheta(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ sono le così dette *funzioni « theta » di* JACOBI

$$\vartheta(v) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos 2mv,$$

$$\vartheta_1(v) = 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2} \operatorname{sen}\,(2m-1)v,$$

$$\vartheta_2(v) = 2\sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2} \cos\,(2m-1)v,$$

$$\vartheta_3(v) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2mv \quad (^1).$$

Si dimostra pure che

$$\boxed{\operatorname{sn}(x+2iK') = \operatorname{sn} x, \ \operatorname{cn}(x+2K+2iK') = \operatorname{cn} x, \ \operatorname{dn}(x+4iK') = \operatorname{dn} x}, \tag{20}$$

e che tali funzioni hanno *infiniti del primo ordine nei punti*

$$x = 2mK + (2n+1)iK',$$

---

(1) Cfr. C. G. J. JACOBI: *Theorie der elliptischen Functionen aus den eigenschaften der Thetareihen abgeleitet*. [Gesammelte Werke; (Erster Bd., 1881), p. 497].

e infinitesimi del primo ordine rispettivamente in $2mK + 2niK'$ *per* $\operatorname{sn} x$; *in* $(2m+1)K+2niK'$ *per* $\operatorname{cn} x$, *in* $(2m+1)K+(2n+1)iK'$ *per* $\operatorname{dn} x$ *con* m *ed* n *interi* (1).

§ 5. - Gli integrali delle equazioni differenziali come funzioni dei loro valori iniziali.

1. Continuità. - 2. Derivabilità. - 3. Lemma di GRONWALL. - 4. Derivabilità rispetto ai parametri. - 5. Derivabilità rispetto ai valori iniziali degli integrali. - 6. Derivabilità rispetto al valore iniziale della variabile indipendente. - 7. Integrale generale di un sistema di equazioni differenziali.

1. - a) Sia dato il sistema

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x;\, y_1, y_2, \ldots, y_m;\, \lambda) \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

con le f_i *continue nei loro argomenti nel rettangolo* R_{m+2} *determinato dalle limitazioni*

$$(2_1) \qquad |x-\alpha| \leq a, \qquad |y_i - \beta_i| \leq b, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

$$(2_2) \qquad |\lambda - \gamma| \leq c,$$

essendo x *la variabile indipendente,* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *le funzioni incognite,* λ *un parametro, e in* R_{m+2} *si abbia*

$$|f_i(x;\, y_1, y_2, \ldots, y_m;\, \lambda)| \leq M \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Supposto che siano soddisfatte le condizioni di LIPSCHITZ

$$(3) \quad |f_i(x;\, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m;\, \lambda) - f_i(x;\, y_1, y_2, \ldots, y_m;\, \lambda)| \leq L \sum_{k=1}^{m} |\bar{y}_k - y_k|,$$

allora se δ è il più piccolo dei numeri a, $b/4M$, per i resultati del § 3, *fissato in un punto* x^0 *di* $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$, *un sistema di valori iniziali* $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ *soddisfacente le limitazioni*

$$|y_i^0 - \beta_i| \leq b/2$$

---

(1) Per uno studio approfondito delle funzioni ellittiche di JACOBI e più in generale della teoria delle funzioni ellittiche il lettore può consultare L. BIANCHI: *Lezioni sulla Teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche.* (Pisa, 1901). Cfr. anche E. PASCAL: *Le funzioni ellittiche.* 2a ed., (Milano, 1924); F. TRICOMI: *Funzioni ellittiche.* [Monogr. di Mat. Appl. per cura del Cons. Naz. delle Ricerche], (Bologna, 1937).

e un valore del parametro λ di $(\gamma-c, \gamma+c)$, resta individuato uno e un sol sistema di integrali del sistema (1) soddisfacente le condizioni iniziali

$$(4) \qquad y_i(x^0)=y_i^0 \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Possiamo dire che gli integrali del sistema (1) sono funzioni degli $m+3$ argomenti x, x^0; $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$; λ nel rettangolo R_{m+3} definito dalle limitazioni

$$(5) \quad |x-\alpha| \leqslant \delta, \quad |x^0-\alpha| \leqslant \delta; \quad |y_i^0-\beta_i| \leqslant b/2; \quad |\lambda-\gamma| \leqslant c.$$

Indicando gli integrali con il simbolo $y_i(x, x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0; \lambda)$ le (4) diventano

$$(6) \qquad y_i(x, x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0; \lambda)=y_i^0, \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Gli integrali $y_i(x, x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0; \lambda)$ *sono funzioni continue in* R_{m+3} [1].

Infatti pel modo come figurano questi argomenti nei termini della serie (I) delle approssimazioni successive definita nel § 3, n.° 2, poichè i successivi sistemi ausiliari sono continui in R_{m+3}, e la serie (I) ricordata è uniformemente convergente, se ne deduce la continuità degli integrali $y_i(x, x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0; \lambda)$ in R_{m+3}.

---

[1] La dipendenza degli integrali dai valori iniziali e dai parametri è stata considerata da: *a*) O. Nicoletti: *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie considerati come funzioni dei loro valori iniziali*. Rend. R. Acc. Naz. Lincei, (5), IV_2, (1895), pp. 316-324; *b*) E. Lindelöf: *Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles*. Journ. de Math. pur. et appl., (5), 6, (1900), pp. 423-441; *c*) L. Lichtenstein: *Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Lösungen als Funktionen der Randwerte und der Parameter*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 28, (1909), pp. 267-306; *d*) Ch. J. de la Vallée Poussin: *Cours d'Analyse Infinitésimale*. II, (2ª éd. 1912), pp. 181-193; *e*) G. A. Bliss: *Solutions of differential equations as functions of the constants of integrations*. Bull. of the Am. Math. Soc., XXV, (1918-19), pp. 15-26; *f*) J. F. Ritt: *On the differentiability of the solution of a differential equation with respect to a parameter*. Ann. of Math. (2), 20, (1919), pp. 289-291; *g*) T. H. Gronwall: *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations*. Ann. of Math., (2), 20 (1919), pp. 292-296.

b) In alcune questioni [Cfr. ad es. Cap. IV, § 6, n.° 3] anche i valori iniziali $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ debbono pensarsi funzioni continue di un parametro λ; l'osservazione testè fatta ci assicura che gli integrali del sistema (1) sono funzioni continue del parametro λ.

2. - Ferme restando le ipotesi dichiarate per le funzioni f_i nel n.° precedente, alla condizione (3) di LIPSCHITZ sostituiremo l'altra più restrittiva che *le* $f_i\,(x\,;\, y_1, y_2, \ldots, y_m\,;\, \lambda)$ ***ammettano in*** R_{m+2} ***derivate parziali del primo ordine rispetto alle variabili*** $y_1, y_2, \ldots, y_m, \lambda$, ***continue; vogliamo allora dimostrare che gli integrali*** y_i ***risultano funzioni derivabili parzialmente rispetto agli argomenti*** $x^0\,;\, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0\,;\, \lambda$, ***con derivate continue.***

Supponiamo per un momento di aver dimostrato il teorema e poniamo per brevità:

$$(7_1)\quad \frac{\partial y_i}{\partial x^0} = Z_i(x,\ x^0\,;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0\,;\ \lambda), \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

$$(7_2)\quad \frac{\partial y_i}{\partial y_k^0} = V_{i,k}(x,\ x^0\,;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0\,;\ \lambda), \qquad (i, k=1, 2, \ldots, m),$$

$$(7_3)\quad \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} = U_i(x,\ x^0\,;\ y_1^0\ y_2^0, \ldots, y_m^0\,;\ \lambda), \qquad (i=1, 2, \ldots, m)\,;$$

$$(8_1)\quad \varphi_{i,k}(x\,;\ y_1, y_2, \ldots, y_m\,;\ \lambda) = \frac{\partial f_i}{\partial y_k}, \qquad (i, k=1, 2, \ldots, m),$$

$$(8_2)\quad \psi_i(x\,;\ y_1, y_2, \ldots, y_m\,;\ \lambda) = \frac{\partial f_i}{\partial \lambda}, \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Derivando le (1) successivamente rispetto agli argomenti x^0, y_k^0, λ e supposte nei primi membri lecite le inversioni delle derivazioni otteniamo per le Z_i, $V_{i,k}$, U_i rispettivamente i sistemi lineari

$$(9_1)\qquad \frac{dZ_i}{dx} = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,l}(x\,; y_1, y_2, \ldots, y_m\,;\ \lambda) Z_l, \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

$$(10_1)\ \frac{dV_{i,k}}{dx} = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,l}(x\,;\ y_1, y_2, \ldots, y_m\,;\ \lambda) V_{l,k}, \quad (i, k=1, 2, \ldots, m),$$

$$(11_1)\quad \frac{dU_i}{dx} = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,l}(x; y_1, y_2, \ldots, y_m\,;\ \lambda) U_l + \psi_i(x\,;\ y_1, y_2, \ldots, y_m\,;\ \lambda),$$
$$(i=1, 2, \ldots, m)$$

e dalla (6) derivando e tenuto anche conto delle (1), otteniamo per le Z_i, $V_{i,k}$, U_i le condizioni iniziali

$$(9_2)\qquad Z_i(x^0) = -f_i(x^0\,;\; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0\,;\; \lambda), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(10_2)\quad V_{i,k}(x^0) = \varepsilon_{i,k}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m\,;\;\; \varepsilon_{i,k} = 0 \text{ per } i \neq k,\ \varepsilon_{i,i} = 1),$$

$$(11_2)\qquad U_i(x^0) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Per dimostrare il teorema e le (9), (10), (11) premetteremo nel n.° 3 un lemma di GRONWALL, e nei n.i 4, 5, 6 proveremo successivamente la derivabilità rispetto al parametro λ, ai valori iniziali $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$, e al valore iniziale x^0 della variabile indipendente e rispettivamente le (11), le (10), le (9).

3. - LEMMA DI GRONWALL [1]. — *Se per $x^0 \leq x \leq x^0 + h$ la funzione continua $z(x)$ soddisfa la limitazione*

$$(12)\qquad 0 \leq z(x) \leq \int_{x^0}^{x} (Mz + A)\,dx$$

dove M ed A sono costanti, positive o nulle, allora si ha

$$0 \leq z(x) \leq Ahe^{Mh}, \qquad (x^0 \leq x \leq x^0 + h).$$

Poniamo infatti $z = e^{M(x-x^0)}\,\xi(x)$ e sia x_1 il punto (o uno dei punti) di $(x^0, x^0 + h)$ ove $\xi(x)$ assume il suo valore massimo; avremo

$$0 \leq e^{M(x_1 - x^0)}\xi(x_1) \leq \int_{x^0}^{x_1} [Me^{M(x-x^0)}\xi(x) + A]\,dx$$

e perciò anche

$$0 \leq e^{M(x_1-x^0)}\xi(x_1) \leq \xi(x_1) \int_{x^0}^{x_1} Me^{M(x-x^0)}dx + A(x_1 - x^0)$$
$$\leq \xi(x_1)[e^{M(x_1-x^0)} - 1] + A(x_1 - x^0)$$

da cui $0 \leq \xi(x_1) \leq A(x_1 - x^0) \leq Ah$, e perciò la (12).

---

[1] Cfr. nota [1] n.° 1 di questo §. Per un perfezionamento di questo lemma cfr. F. KAMKE: *Differentialgleichungen Reeller Funktionen*. (Leipzig, 1930), p. 93.

4. - Dimostriamo ora la derivabilità degli integrali rispetto al parametro λ e *contemporaneamente* le (11_1), (11_2).

Siano $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ due sistemi di integrali del sistema differenziale (1) corrispondenti ai valori λ e $\bar{\lambda}$ del parametro λ, $\lambda \neq \bar{\lambda}$, e alle stesse condizioni iniziali (4); avendosi

$$y_i = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda)dx,$$

$$\bar{y}_i = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m;\ \bar{\lambda})dx$$

ne viene

$$\bar{y}_i - y_i = \int_{x^0}^{x} [f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m;\ \bar{\lambda}) - f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda)]dx$$

e per il teorema della media

$$\frac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{\lambda} - \lambda} = \int_{x^0}^{x} \left[\sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,l}(x;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y^*_m;\ \lambda^*) \frac{\bar{y}_l - y_l}{\bar{\lambda} - \lambda} + \right.$$
$$\left. + \psi_i(x;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y^*_m;\ \lambda^*) \right] dx$$

dove $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y^*_m;\ \lambda^*)$ indica un punto interno al segmento che ha per estremi i punti $(y_1, y_2, y_m;\ \lambda)$, $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m;\ \bar{\lambda})$.

Siano rispettivamente M_1 ed A il massimo di $m|\varphi_{i,k}|$, $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ e $|\psi_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ in R_{m+2}, e fissati λ e $\bar{\lambda}$, $\lambda \neq \bar{\lambda}$, per ogni x tale che $x^0 \leqslant x \leqslant x^0 + h$ [1] si indichi con $z(x;\ \lambda, \bar{\lambda})$ il massimo delle m espressioni $|(\bar{y}_l - y_l)/(\bar{\lambda} - \lambda)|$, $(l = 1, 2, \ldots, m)$. La funzione $z(x;\ \lambda, \bar{\lambda})$ è una funzione continua di x in $(x^0, x^0 + h)$ e allora per il lemma di GRONWALL otteniamo in $(x^0, x^0 + h)$ la limitazione

$$\left| \frac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{\lambda} - \lambda} \right| \leqslant A h e^{M_1 h}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

e da queste segue, come del resto abbiamo già notato nel n.° 1 di questo paragrafo che gli integrali y_i sono funzioni (uniformemente) continue di λ.

---

[1] Supponiamo così implicitamente $x \geqslant x^0$; ma ciò non altera la generalità, perchè in caso opposto basterà cangiare x in $-x$.

Poichè il teorema di esistenza e di unicità è applicabile al sistema (11_1) con le condizioni iniziali (11_2) [§ 3, n.° 4], sarà dimostrata le derivabilità degli integrali rispetto al parametro λ e le (11_1) e le (11_2), se proveremo che $\frac{\partial y_i}{\partial \lambda}$ esiste e vale U_i.

Dalle (11_1), (11_2) si ha

$$U_i = \sum_{l=1}^{m} \int_{x^0}^{x} \varphi_{i,l}(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda) U_l dx + \\ + \int_{x^0}^{x} \psi_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda) dx$$

e perciò

$$\frac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{\lambda} - \lambda} - U_i = \int_{x^0}^{x} \Big[\sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,l}(x;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y^*_m;\ \lambda^*) \left(\frac{\bar{y}_l - y_l}{\bar{\lambda} - \lambda} - U_l \right) + \\ + \sum_{l=1}^{m} (\varphi_{i,l}(x;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y^*_m;\ \lambda^*) - \varphi_{i,l}(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda)) U_l + \\ + \psi_i(x;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y^*_m;\ \lambda^*) - \psi_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda) \Big] dx.$$

Ora le y_i sono funzioni continue di λ, le $\varphi_{i,l}$ e ψ_i sono funzioni continue dei loro argomenti, e fissato perciò $\varepsilon > 0$ si può determinare un ϱ tale che per $|\bar{\lambda} - \lambda| < \varrho$ risulti (¹)

$$\Big| \sum_{l=1}^{m} (\varphi_{i,l}(x;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*;\ \lambda^*) - \varphi_{i,l}(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda)) U_l \\ + \psi_i(x;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*;\ \lambda^*) - \psi_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda) \Big| < \varepsilon$$

per $i = 1, 2, \ldots, m$. Se, fissati λ e $\bar{\lambda}$, per ogni x di $(x^0, x^0 + h)$ indichiamo con $\bar{z}(x;\ \lambda, \bar{\lambda})$ il massimo delle m espressioni $|(\bar{y}_i - y_i)/(\bar{\lambda} - \lambda) - U_i|$, ancora in virtù del lemma di GRONWALL otteniamo

$$\left| \frac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{\lambda} - \lambda} - U_i \right| < \varepsilon h e^{M_1 h}$$

uniformemente per $|\bar{\lambda} - \lambda| < \varrho$, quindi $U_i = \lim_{\bar{\lambda} \to \lambda} \frac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{\lambda} - \lambda} = \frac{\partial y_i}{\partial \lambda}$ c. v. d.

(¹) Si noti che in $(x^0, x^0 + h)$, le U_l sono complessivamente limitate.

5. - È facile ora provare le derivabilità rispetto ai valori iniziali degli integrali e le (10_1), (10_2). Nel sistema (1) sostituiamo alle funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_m$ le funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ legate alle precedenti dalla relazione

$$(13) \qquad y_i = z_i + y_i^0, \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

le z_i soddisfano il sistema

$$(1') \qquad \frac{dz_i}{dx} = f_i(x;\ z_1 + y_1^0, \ldots, z_m + y_m^0;\ \lambda), \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

con le condizioni iniziali $z_i = 0$ per $x = x^0$. Riguardando y_k^0 come un parametro, per i resultati del numero precedente ([1]) abbiamo

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z_i}{\partial y_k^0}\right) = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,l}(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda)\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_l^0} + \varepsilon_{l,k}\right)$$

con le condizioni iniziali $\frac{\partial z_i}{\partial y_l^0} = 0$ per $x = x^0$, e tenuto conto delle (13) si ottengono appunto le (10_1), (10_2).

6. - Per dimostrare infine la derivabilità degli integrali rispetto a x^0 e insieme le (9_1), (9_2) indichiamo con $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m$ la soluzione del sistema (1) quando x^0 si muta in $\bar{x}^0$ e le $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ restano tutte invariate. Con notazioni evidenti si ha

$$y_i = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda)dx$$

$$\bar{y}_i = y_i^0 + \int_{\bar{x}^0}^{x} f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m;\ \lambda)dx$$

$$\frac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{x}^0 - x^0} = \int_{x^0}^{x} \frac{f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m;\ \lambda) - f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda)}{\bar{x}^0 - x^0}\, dx$$

$$- \frac{1}{\bar{x}^0 - x^0}\int_{x^0}^{\bar{x}^0} f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m;\ \lambda)dx,$$

$$\frac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{x}^0 - x^0} = \int_{\bar{x}^0}^{x}\left[\sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,l}(x;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y^*_m;\ \lambda)\frac{\bar{y}_l - y_l}{\bar{x}^0 - x^0}\right] dx -$$

$$- f_i(x^{**};\ y_1^{**}, y_2^{**}, \ldots, y^{**}_m;\ \lambda).$$

([1]) Basterà pensare nel sistema (1') z_k variabile in un intervallo con centro nell'origine e *interno* a $(\beta_k - y_k^0 - b,\ \beta_k - y_k^0 + b)$.

Dal sistema (9_1) e dalle condizioni iniziali (9_2) otteniamo

$$Z_i = \int_{x^0}^{x} \left[\sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,l}(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda) Z_l \right] dx - f_i(x^0;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0;\ \lambda)$$

e ragionando ora come al n.° 4 di questo § risulta

$$\lim_{\bar{x}^0 \to x^0} [(\bar{y}_i - y_i)/(\bar{x}^0 - x^0)] = Z_i .$$

7. - *a*) Dato il sistema

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m), \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

supposto che le f_i soddisfino le condizioni dichiarate al n.° 2 di questo §, fissati in un punto x^0 di $(a-\delta, a+\delta)$ i valori $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ resta individuato uno e un sol sistema di integrali del sistema dato che soddisfa le condizioni iniziali $y_i(x^0) = y_i^0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Lo stesso sistema di integrali potrà ottenersi se si fissa in un altro punto di $(a-\delta, a+\delta)$ per sistema di valori iniziali quello che ivi assume il sistema di integrali considerato, possiamo perciò dire che gli integrali del sistema (1) sono funzioni degli $m+1$ argomenti $x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ nel rettangolo definito dalle limitazioni

$$|x - a| < \delta, \qquad |y_i^0 - \beta_i| \leq b/2,$$

e se indichiamo con $\varphi_i(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ l'integrale y_i, si dirà che *le funzioni*

$$y_1 = \varphi_1(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$$
$$y_2 = \varphi_2(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0), \ldots, \quad y_m = \varphi_m(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$$

formano la **soluzione generale** oppure l'**integrale generale** *del sistema.*

b) L'integrale generale di un sistema dipende quindi da m costanti arbitrarie, e ne dipende in *modo essenziale.*

Quest'ultima locuzione significa che è impossibile di determinare un minor numero di costanti $c_1, c_2, \ldots, c_s$, $(s < m)$ tali che si abbia identicamente

$$(14) \qquad \varphi_i(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0) \equiv \Phi_i(x;\ c_1, c_2, \ldots, c_s), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

dove le Φ_i hanno derivate continue nei loro argomenti.

Infatti il determinante della matrice Jacobiana

$$d(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)/d(y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$$

in virtù delle posizioni (7_2) si riduce a

$$\begin{vmatrix} V_{1,1}, & V_{1,2}, & V_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{m,1}, & V_{m,2}, & V_{m,m} \end{vmatrix},$$

esso per $x=x^0$, in virtù delle (10_2), ha il valore 1, e le (14) sono perciò impossibili per $s<m$ (¹).

§ 6. - Il teorema di esistenza col metodo di Cauchy-Lipschitz.

1. Considerazioni geometriche. - 2. Il teorema di esistenza nella forma di PEANO. Dimostrazione di ARZELÀ. - 3. Dimostrazione di TONELLI del teorema di esistenza nella forma di PEANO.

1\. - *a*) Consideriamo dapprima il caso particolare dell'equazione

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

ove $f(x,y)$ è una funzione continua nel rettangolo R_2 definito dalle limitazioni

$$|x-\alpha|\leqslant a, \qquad |y-\beta|\leqslant b$$

e supponiamo che fissato un punto (x_0, y_0) di R_2 esista uno e un solo integrale della (1) $y=y(x)$ soddisfacente la condizione iniziale $y(x_0)=y_0$.

Riguardando x e y come coordinate cartesiane ortogonali in un piano diremo che la $y=y(x)$ rappresenta la *curva integrale* dell'equazione (1) passante per il punto $P_0\equiv(x_0, y_0)$. La nostra ipotesi afferma dunque che per ogni punto P_0 di R_2 passa una e una sola curva integrale di (1).

In generale la (1) *fissa* per ogni punto $P\equiv(x,y)$ di R_2 una corrispondente direzione di coefficiente angolare $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. Se

(¹) Cfr. L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui di trasformazioni.* (Pisa, 1918), p. 30.

diciamo con S. Lie [1] *elemento lineare* l'insieme di un punto e di una direzione per esso, la totalità degli elementi lineari appartenenti a R_2 è ∞^3, l'equazione (1) stacca da questa infinità, un'infinità ∞^2 di elementi lineari, i quali possono ordinarsi in ∞^1 curve

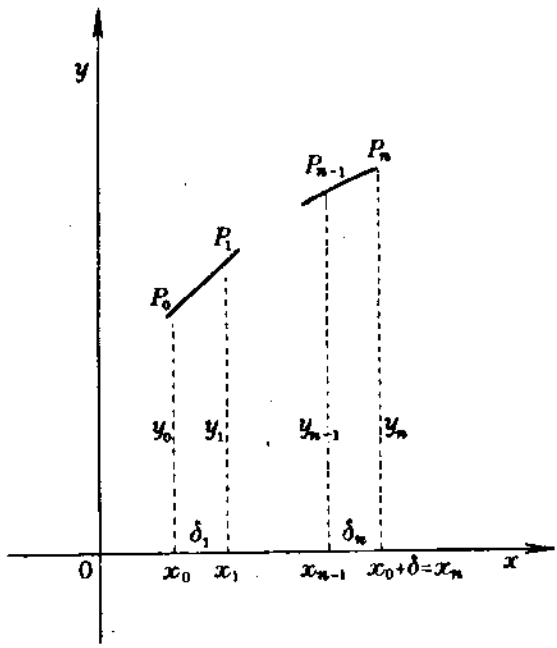


Fig. 4

integrali. Si ha da qui un procedimento intuitivo per stabilire l'esistenza di un integrale dell'equazione (1), reso poi rigoroso con la prima dimostrazione del teorema di esistenza data da Cauchy [2].

---

(1) S. Lie: *Geometrie der Berührungstransformationen.* (Leipzig, 1896), I, p. 11.

(2) Questa dimostrazione, data da A. L. Cauchy nelle sue lezioni alla Scuola Politecnica di Parigi tra gli anni 1820 e 1830, si trova esposta nelle *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral* di F. N. M. Moigno, (Paris, 1844). Nella dimostrazione di Cauchy per il caso delle (1) si impone la continuità di $f_y(x, y)$ in R_2.

R. Lipschitz ha ritrovato il teorema con la condizione più generale che si abbia in $R_2: |f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leq L|\bar{y} - y|$ con L costante assoluta

Si divida l'intervallo $(x_0, x_0+\delta)$ in cui si vuol costruire l'integrale dell'equazione (1) in n intervalli parziali successivi δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n$ e si costruisca la poligonale $P_0 P_1 P_2 \ldots P_{n-1} P_n$ i cui lati abbiano per proiezione sull'asse x rispettivamente i segmenti δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n$ e inoltre se indichiamo con (x_i, y_i) le coordinate di P_i il coefficiente angolare del segmento $P_i P_{i+1}$ sia uguale a $f(x_i, y_i)$, [v. fig. 4].

Si faccia tendere $n \to \infty$ e l'ampiezza degli intervalli uniformemente allo zero; allora, come vedremo al n.° 2, tra le poligonali $P_0 P_1 P_2 \ldots P_{n-1} P_n$ si può estrarre una successione la quale converge uniformemente verso la curva integrale cercata.

b) Analogamente nel caso di due funzioni incognite y, z da determinare col sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \tag{2}$$

si osserverà che esso per ogni punto $P \equiv (x, y, z)$ dello spazio assegna una direzione avente i coseni direttori

$$[1+f^2+g^2]^{-1/2}, \quad f[1+f^2+g^2]^{-1/2}, \quad g[1+f^2+g^2]^{-1/2} \tag{3}$$

e un corrispondente elemento lineare; le *curve integrali* sono quelle che in ogni loro punto ammettono come retta tangente la corrispondente direzione fissata con le (3). Da ogni punto P parte, nelle ipotesi che f e g soddisfino le condizioni dichiarate nel § 3, n.° 1, una di queste curve integrali, le quali formano una doppia infinità o come si dice una *congruenza di curve.*

c) Analoghe considerazioni possono ripetersi per i sistemi di ordine m.

2. - *a*) Vogliamo dimostrare il teorema di esistenza col metodo di CAUCHY-LIPSCHITZ per il sistema

$$y_i' = f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m), \qquad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{4}$$

[Cfr. § 3, n.° 1]; ne è derivato in questo modo il metodo di CAUCHY-LIPSCHITZ di grande importanza per l'integrazione numerica delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali. [Cfr. Cap. XI, § 4].

Supponiamo le $f_i(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m)$ *continue nel rettangolo* R_{m+1} *di centro* $[x^0;\ y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0]$ *definito dalle limitazioni*

$$x^0 \leqslant x \leqslant x^0 + a; \quad -b \leqslant y_i - y_i^0 \leqslant b, \qquad (i = 1, 2, \dots, m);$$

sia in R_{m+1}

$$|f_i(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m)| \leqslant M \tag{5}$$

e indichi δ *il minore dei numeri* a, b/M.

Se ci limitiamo al teorema di esistenza, la continuità delle $f_i(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m)$ *è*, come ora vedremo, *sufficiente a garantire l'esistenza di almeno un sistema di integrali* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ *del sistema* (4), *definito nell'intervallo* $(x^0, x^0 + \delta)$, *soddisfacente le condizioni iniziali*

$$y_i(x^0) = y_i^0, \qquad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{6}$$

Si deve a PEANO [1] questo importante risultato della teoria delle equazioni e qui ne esporremo una dimostrazione del tutto simile a quella data da ARZELÀ [2] per il caso dell'equazione $y' = f(x, y)$.

Si divida l'intervallo $(x^0, x^0 + \delta)$ in 2^n parti uguali e si ponga

$$x_{n,k} = x^0 + k\delta 2^{-n}, \qquad [k = 0, 1, \dots, 2^n;\ n = 1, 2, \dots], \tag{7}$$

e si definiscano le funzioni

$$\Phi_{1,n}(x), \quad \Phi_{2,n}(x), \dots, \quad \Phi_{m,n}(x)$$

---

[1] G. PEANO: *a) Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine.* Atti della R. Acc. Sc., Torino, XXI, (1885-1886), pp. 437-445; *b) Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.* Math. Ann. 37, (1890), pp, 182-228.

[2] C. ARZELÀ: *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie.* Mem. R. Acc. Sc. dell'Ist. di Bologna, (5), V, (1895), pp. 257-270; *b) Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie,* idem, VI, (1896), pp. 131-140.

Sempre per l'equazione $y' = f(x, y)$ e per un *nuovo metodo* di dimostrazione basato sull'uso dei *polinomi di approssimazione* cfr. C. SEVERINI: *a) Sull'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.* Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett., 31 (1898), pp. 657-667; *b) Sull'integrazione approssimata delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine,* idem, pp. 950-959, [Cfr. cap. VIII, § 7, n.° 1].

Per la dimostrazione del testo cfr. ad es. E. KAMKE: *Differentialgleichungen Reeller Funktionen.* (Leipzig, 1930), pp. 126-130.

in $(x^0, x^0+\delta)$ con la seguente legge

$$(8_0) \qquad \Phi_{1,n}(x_{n,0})=y_1^0,\dots, \quad \Phi_{m,n}(x_{n,0})=y_m^0,$$

e per $l=1, 2,\dots, m$, quando $x_{n,0}<x\leqq x_{n,0}+\delta 2^{-n}$,

$$(8_1) \quad \Phi_{l,n}(x)=\Phi_{l,n}(x_{n,0})+(x-x_{n,0})f_l[x_{n,0};\ \Phi_{1,n}(x_{n,0}),\dots, \Phi_{m,n}(x_{n,0})],$$

quando $x_{n,1}<x\leqq x_{n,1}+\delta 2^{-n}$

$$(8_2) \quad \Phi_{l,n}(x)=\Phi_{l,n}(x_{n,1})+(x-x_{n,1})f_l[x_{n,1};\ \Phi_{1,n}(x_{n,1}),\dots, \Phi_{m,n}(x_{n,1})],$$

e in generale quando $x_{n,k}<x\leqq x_{n,k}+\delta 2^{-n}$, $(k=0, 1,\dots, 2^n-1)$,

$$(8_{k+1}) \quad \Phi_{l,n}(x)=\Phi_{l,n}(x_{n,k})+(x-x_{n,k})f_l[x_{n,k};\ \Phi_{1,n}(x_{n,k}),\dots, \Phi_{m,n}(x_{n,k})].$$

Posto

$$(9) \qquad \psi_{l,n}(x)=f_l[x_{n,k};\ \Phi_{1,n}(x_{n,k}),\dots, \Phi_{m,n}(x_{n,k})]$$

quando $x_{n,k}\leqq x\leqq x_{n,k}+\delta 2^{-n}$, $(k=0, 1,\dots, 2^{n-1})$, si ha per x in $(x_{n,k},\ x_{n,k}+\delta 2^{-n})$

$$\Phi_{l,n}(x)=\Phi_{l,n}(x_{n,k})+\int_{x_{n,k}}^{x}\psi_{l,n}(x)dx,$$

ma

$$\Phi_{l,n}(x_{n,k})=\Phi_{l,n}(x_{n,k-1})+\int_{x_{n,k-1}}^{x_{n,k}}\psi_{l,n}(x)dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Phi_{l,n}(x_{n,1})=y_l^0+\int_{x_{n,0}}^{x_{n,1}}\psi_{l,n}(x)dx,$$

e sommando si ha per $x^0\leqq x\leqq x^0+\delta$,

$$(10) \qquad \Phi_{l,n}(x)=y_l^0+\int_{x^0}^{x}\psi_{l,n}(x)dx.$$

Si verifica di volta in volta che le formule scritte non sono illusorie, nel senso che si ha in $(x^0, x^0+\delta)$

$$(11) \qquad |\psi_{l,n}(x)|\leqq M, \quad |\Phi_{l,n}(x)-y_l^0|\leqq b.$$

Si osservi infatti che per le (8_0) è $|\Phi_{l,n}(x^0)-y_l^0|=0$, e per la (9), $|\psi_{l,n}(x)|\leqslant M$ in $(x_{n,0}, x_{n,1})$. Si ha allora dalla (10)

$$|\Phi_{l,n}(x)-y_l^0|\leqslant|x-x^0|M\leqslant bM^{-1}M=b,$$

e sono perciò legittime le (8_2) e quindi la (10) vale in $(x_{n,1}, x_{n,2})$, e così potrà procedersi avanti.

Se ξ_1, ξ_2 sono due punti qualsiasi di $(x^0, x^0+\delta)$ si ha dalla (10)

$$(12) \qquad |\Phi_{l,n}(\xi_2)-\Phi_{l,n}(\xi_1)|=\left|\int_{\xi_2}^{\xi_1}\psi_{l,n}(x)dx\right|\leqslant M|\xi_2-\xi_1|,$$

perciò le funzioni

$$(13) \qquad \Phi_{1,1}(x), \quad \Phi_{1,2}(x),\ldots, \quad \Phi_{1,n}(x),\ldots$$

sono ugualmente continue ed ugualmente limitate in $(x^0, x^0+\delta)$, e per il teorema di ASCOLI [1] dalla successione (13) può estrarsi una successione

$$\Phi_{1,\lambda_1}(x), \quad \Phi_{1,\lambda_2}(x),\ldots, \quad \Phi_{1,\lambda_p}(x),\ldots \qquad [\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_p<\ldots]$$

convergente uniformemente verso una funzione continua $\Phi_1(x)$.

Ma anche le funzioni della successione

$$\Phi_{2,\lambda_1}(x), \quad \Phi_{2,\lambda_2}(x),\ldots, \quad \Phi_{2,\lambda_p}(x),\ldots$$

---

(1) Cfr. ad es. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, (Bologna, 1922), I, p. 78, 83.

Per comodità del lettore richiamiamo la proposizione che ci interessa.

a) Una successione $\{f_n(x)\}$ di funzioni continue in un intervallo chiuso (a, b) si dice che è ivi *ugualmente continua*, se scelto $\sigma>0$ e arbitrario, si può determinare un $\delta>0$ tale che qualunque funzione $f_n(x)$ in ogni intervallo di lunghezza $<\delta$ abbia oscillazione $<\sigma$.

b) Vale il criterio di ARZELÀ: *Se i rapporti incrementali delle $f_n(x)$ sono in (a, b) complessivamente limitati, le $f(x)$ sono ugualmente continue in (a, b)*. Esiste infatti in questa ipotesi una costante M tale che qualunque siano i punti x_1 e x_2 di (a, b) è $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<M|x_1-x_2|$ e basterà prendere $\delta=\sigma/M$.

c) Dimostriamo ora il teorema di ASCOLI: *Se $\{f_n(x)\}$ è una successione di funzioni ugualmente continue, e ugualmente limitate in un intervallo chiuso (a, b), da essa può estrarsi almeno una successione la quale converge uniformente verso una funzione continua $\varphi(x)$.*

Si consideri in (a, b) un insieme numerabile $x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots$, ovunque denso in (a, b) ad esempio l'insieme dei numeri razionali compresi tra a e b. Supposto che si abbia $|f_n(x)|\leqslant M$, $(n=1, 2,\ldots, a\leqslant x\leqslant b)$ si consideri la sucsono per la (12) ugualmente continue ed ugualmente limitate in $(x^0, x^0+\delta)$ e da esse può estrarsi una successione

$$\Phi_{2,\mu_1}(x), \quad \Phi_{2,\mu_2}(x),\dots, \quad \Phi_{2,\mu_p}(x),\dots \qquad [\mu_1<\mu_2<\dots<\mu_p<\dots]$$

---

cessione $\{f_n(x_1)\}$, si ha $-M \leqslant f_n(x_1) \leqslant M$ e se $\varphi(x_1)$ è l'estremo superiore della successione $\{f_n(x_1)\}$ possiamo estrarre da $\{f_n(x)\}$ una successione

(1) $$f_{1,1}(x), \quad f_{1,2}(x),\dots, \quad f_{1,n}(x),\dots$$

tale che

$$\lim_{n\to\infty} f_{1,n}(x_1)=\varphi(x_1), \qquad [\,|\varphi(x_1)|\leqslant M\,].$$

Ripetiamo il ragionamento sul punto x_2 partendo dalla successione (1); possiamo estrarre da essa una successione

(2) $$f_{2,1}(x), \quad f_{2,2}(x),\dots, \quad f_{2,n}(x),\dots$$

tale che

$$\lim_{n\to\infty} f_{2,n}(x_1)=\varphi(x_1), \qquad \lim_{n\to\infty} f_{2,n}(x_2)=\varphi(x_2), \qquad [\,|\varphi(x_2)|\leqslant M\,].$$

Continuiamo il nostro procedimento e si consideri la successione

(3) $$f_{1,1}(x), \quad f_{2,2}(x),\dots, \quad f_{n,n}(x),\dots$$

la quale converge in $x_1, x_2,\dots, x_m,\dots$ rispettivamente verso $\varphi(x_1), \varphi(x_2),\dots, \varphi(x_m),\dots$; vogliamo ora dimostrare che *essa converge in* (a, b) *ed uniformemente.*

Infatti fissato $\sigma>0$ si determini δ in modo che l'oscillazione di ogni $f_n(x)$ in un intervallo di lunghezza $\leqslant\delta$ sia $<\sigma$. Dividiamo (a, b) in p parti uguali in guisa che $(b-a)/p<\delta$; essendo $\{x_n\}$ ovunque densa in (a, b), chiamiamo con ξ_1 il primo punto di essa interno al primo intervallo che indicheremo con δ_1, con ξ_2 il primo interno al secondo intervallo δ_2, e così di seguito. La successione (3) converge in $\xi_1, \xi_2,\dots, \xi_p$, e al numero σ corrisponde un intero m^0 tale che per $m'>m^0$, $m''>m^0$ risulti

$$|f_{m',m'}(\xi_r)-f_{m'',m''}(\xi_r)|<\sigma, \qquad (r=1, 2,\dots, p).$$

Sia ora x un punto (a, b) appartenente a δ_r; si ha

$$\begin{aligned}|f_{m',m'}(x)-f_{m'',m''}(x)| &= |[f_{m',m'}(x)-f_{m',m'}(\xi_r)]-\\ &-[f_{m'',m''}(x)-f_{m'',m''}(\xi_r)]+[f_{m',m'}(\xi_r)-f_{m'',m''}(\xi_r)]|<3\sigma,\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di σ, segue che la successione (3) converge *uniformemente* verso una funzione $\varphi(x)$, e per la continuità delle $f_n(x)$, la $\varphi(x)$, è anch'essa continua.

d) Dalla dimostrazione fatta segue anche: *se le funzioni* $f_n(x)$ *della successione* $\{f_n(x)\}$ *sono ugualmente continue e ugualmente limitate, in un intervallo chiuso* (a, b), *ed esse convergono nei punti* $x_1, x_2,\dots, x_m,\dots$ *di una successione ovunque densa in* (a, b), *la successione* $\{f_n(x)\}$ *converge uniformemente in* (a, b) *verso una funzione continua.*

convergente uniformemente in $(x^0, x^0+\delta)$ verso una funzione $\Phi_2(x)$, si ha quindi uniformemente in $(x^0, x^0+\delta)$,

$$\lim_{p\to\infty} \Phi_{1,\mu_p}(x) = \Phi_1(x), \qquad \lim_{p\to\infty} \Phi_{2,\mu_p}(x) = \Phi_2(x),$$

e continuando il ragionamento potremo considerare le m successioni

$$\Phi_{l,\nu_1}(x), \quad \Phi_{l,\nu_2}(x), \dots, \quad \Phi_{l,\nu_p}(x), \dots$$
$$(l=1, 2, \dots, m;\ \nu_1<\nu_2<\dots<\nu_p<\dots),$$

tali che si ha uniformemente in $(x^0, x^0+\delta)$

$$(14) \qquad \lim_{p\to\infty} \Phi_{l,\nu_p}(x) = \Phi_l(x), \qquad (l=1, 2, \dots, m),$$

e per le (8_0) e la seconda delle (11) si ha

$$(15) \quad \Phi_l(x^0)=y_l^0, \quad |\Phi_l(x)-y_l^0| \leqslant b, \quad (x^0\leqslant x\leqslant x^0+\delta;\ l=1, 2, \dots, m).$$

Vogliamo ora dimostrare che le m funzioni

$$y_1=\Phi_1(x), \quad y_2=\Phi_2(x), \dots, \quad y_m=\Phi_m(x)$$

dànno una soluzione del sistema (4) e per questo *basterà provare che si ha uniformemente in* $(x^0, x^0+\delta)$

$$(16) \qquad \lim_{p\to\infty} \psi_{l,\nu_p}(x) = f_l[x;\ \Phi_1(x),\ \Phi_2(x), \dots, \Phi_m(x)],$$

perchè allora dalle (10) fattovi $n=\nu_p$ e passando al limite per $p\to\infty$ si ha

$$\Phi_l(x)=y_l^0+\int_{x^0}^{x} f[x;\ \Phi_1(x),\ \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)]dx,$$

e queste equazioni integrali equivalgono appunto al sistema proposto.

Sia $x^0<x\leqslant x^0+\delta$; fissato x ad ogni ν_p si può associare un k tale che

$$(17) \qquad x_{\nu_p,k}<x\leqslant x_{\nu_p,k}+\delta 2^{-\nu_p}, \quad |x-x_{\nu_p,k}|\leqslant \delta 2^{-\nu_p}$$

e perciò per la (8_{k+1})

$$(18) \qquad |\Phi_{l,\nu_p}(x)-\Phi_{l,\nu_p}(x_{\nu_p,k})| \leqslant \delta 2^{-\nu_p} M.$$

Si ha anche

$$|\Phi_l(x)-\Phi_{l,\nu_p}(x_{\nu_p,k})| \leqslant |\Phi_l(x)-\Phi_{l,\nu_p}(x)| + |\Phi_{l,\nu_p}(x)-\Phi_{l,\nu_p}(x_{\nu_p,k})|$$

e per la (18) e per l'uniforme convergenza delle (16) in $(x^0, x^0+\delta)$ segue che si ha uniformemente in $(x^0, x^0+\delta)$

$$\lim_{p\to\infty} |\Phi_l(x) - \Phi_{l,\nu_p}(x_{\nu_p,k})| = 0,$$

e dalla (9), per la continuità delle $f_l(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$ in R_{m+1} si ha uniformemente in $(x^0, x^0+\delta)$ la (16).

b) Ove si suppongano le $f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$ date nel rettangolo R_{m+1} definito dalle limitazioni

$$x^0 - a \leq x \leq x^0; \quad |y_i - y_i^0| \leq b, \qquad (i=1, 2, \dots, m),$$

con le medesime notazioni l'esistenza di almeno un sistema di integrali $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \dots, y_m = y_m(x)$ del sistema (4), (6) è assicurata nell'intervallo $(x^0 - \delta, x^0)$.

c) I nostri ragionamenti non assicurano l'unicità degli integrali del sistema (4), (6) e dichiariamo subito che nel Cap. VIII vedremo che la continuità delle $f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$ *non è sufficiente* a garantire tale unicità.

d) Notiamo infine che dai ragionamenti esposti in *a*) segue: *se le funzioni $f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m)$ sono definite nello strato S*

$$S: \quad x^0 \leq x \leq x^0 + a, \quad -\infty < y_1, y_2, \dots, y_m < +\infty,$$

e sono ivi continue e limitate, l'esistenza di almeno un sistema di integrali del sistema

$$y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \dots, y_m), \qquad (i=1, 2, \dots, m),$$

soddisfacenti le condizioni iniziali

$$y_i'(x^0) = y_i^0 \qquad (i=1, 2, \dots, m),$$

essendo $y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0$ una m^pla arbitraria, è assicurata in tutto l'intervallo (x^0, x^0+a).

E più in particolare *data l'equazione differenziale*

$$y^{(n)} = f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

con $f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)})$ continua e limitata nello strato S

$$S: \quad x^0 \leq x \leq x^0 + a, \quad -\infty < y, y', y'', \dots, y^{(n-1)} < +\infty,$$

esiste almeno un integrale $y = y(x)$ dell'equazione, definito in

(x^0, x^0+a), *verificante le condizioni iniziali*

$$y(x^0)=y^0,\quad y'(x^0)=y_1^0,\quad y^{(n-1)}(x^0)=y_{n-1}^0,$$

ove $y^0, y_1^0,\dots, y_{n-1}^0$ *è una* n^{pla} *di costanti arbitrarie.*

3. - *a*) Del teorema di PEANO vogliamo dare una semplice dimostrazione ottenuta particolarizzando un procedimento esistenziale elaborato da L. TONELLI [1] per le equazioni funzionali del tipo di VOLTERRA. È da notare che il procedimento di TONELLI, fondato anch'esso sostanzialmente sul metodo di CAUCHY-LIPSCHITZ, oltre a fornire un utile metodo per il calcolo effettivo degli integrali, si presta altresì a provare il teorema di esistenza sotto ipotesi molto meno restrittive sulla natura delle funzioni $f_i(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m)$, [Cfr. Cap. VIII, § 8, n.° 1].

b) Sia il sistema

$$y_i'=f_i(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m),\qquad (i=1, 2,\dots, m), \tag{4}$$

e supposte verificate le ipotesi dichiarate al n.° 2, *a*), dimostriamo l'esistenza di *almeno un sistema* di integrali $y_1(x), y_2(x),\dots, y_m(x)$, definito in $(x^0, x^0+\delta)$, verificante le condizioni iniziali

$$y_i(x^0)=y_i^0,\qquad (i=1, 2,\dots, m). \tag{6}$$

Come nel § 3, n.° 2, sostituiamo al sistema (4), (6) il sistema equivalente di equazioni integrali

$$y_i(x)=y_i^0+\int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1(x), y_2(x),\dots, y_m(x))dx, \tag{19}$$

e proviamo l'esistenza di almeno un sistema di funzioni continue $y_1(x),\ y_2(x),\dots,\ y_m(x)$, definite in $(x^0, x^0+\delta)$ che lo soddisfano.

---

(1) L. TONELLI: *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*. Bull. of. the Calcutta Math. Soc. 20 (1928), pp. 31-48.

La memoria contiene il teorema di esistenza, e sotto opportune condizioni anche il teorema di unicità; per la dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali cfr. S. CINQUINI: *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*. Rend. R. Acc. Naz. Lincei, (6), XVII, (1933), pp. 616-621.

Per ogni intero positivo n definiamo in $(x^0, x^0+\delta)$ le funzioni $y_1^{(n)}(x), y_2^{(n)}(x), \ldots, y_m^{(n)}(x)$ con la seguente legge:

$$(20_1) \qquad y_i^{(n)}(x) = y_i^0 \quad \text{per} \quad x^0 \leqslant x \leqslant x^0 + \frac{\delta}{n},$$

$$(20_2) \qquad y_i^{(n)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x-\frac{\delta}{n}} f_i(x;\ y_1^{(n)}(x), y_2^{(n)}(x), \ldots, y_m^{(n)}(x))dx,$$

$$\text{per} \quad x^0 + \frac{\delta}{n} \leqslant x < x^0 + \delta \quad (1).$$

Le (20_1), (20_2) assicurano che le $y_i^{(n)}(x)$ non escono dal campo di esistenza delle $f_i(y;\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$; si ha infatti

$$|y_i^{(n)}(x) - y_i^0| \leqslant M\delta \leqslant b.$$

A motivo delle (20_1), (20_2) le $\{y_1^{(n)}(x)\}, \{y_2^{(n)}(x)\}, \ldots, \{y_m^{(n)}(x)\}$ sono ugualmente limitate e ugualmente continue, e possiamo, come nel precedente n.° 2, α), estrarre da esse m successioni

$$\{y_1^{(\lambda_n)}(x)\}, \quad \{y_2^{(\lambda_n)}(x)\}, \ldots, \quad \{y_m^{(\lambda_n)}(x)\}, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

convergenti uniformemente per $n \to \infty$ verso le m funzioni continue

$$y_1(x), \quad y_2(x), \ldots, \quad y_m(x).$$

Per il modo come sono costruite esse soddisfano le condizioni iniziali (6), e proveremo facilmente che soddisfano il sistema (19). Si ha infatti

$$(21) \qquad y_i^{(\lambda_n)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1^{(\lambda_n)}(x), y_2^{(\lambda_n)}(x), \ldots, y_m^{(\lambda_n)}(x))dx$$

$$- \int_{x-\delta/n}^{x} f_i(x;\ y_1^{(\lambda_n)}(x), y_2^{(\lambda_n)}(x), \ldots, y_m^{(\lambda_n)}(x))x;$$

nel primo integrale del secondo membro è lecito il passaggio al limite sotto il segno integrale quando $n \to \infty$; il secondo integrale

(1) Per applicare le (20_2) si calcoleranno, tenuto conto delle (20_1), prima le funzioni $y_i^{(n)}(x)$ in $(x^0 + \delta/n, x^0 + 2\delta/n)$, successivamente con la (20_2) le medesime funzioni $y_i^{(n)}(x)$ in $(x^0 + 2\delta/n, x^0 + 3\delta/n)$, e così di seguito.

del secondo membro non supera in valore $M\delta/n$ e tende a zero per $n\to\infty$, e dalle (21), passando col limite per $n\to\infty$, si ottengono le (19).

d) Nel sistema

$$y_i'=f_i(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m), \qquad (i=1, 2,\dots, m) \tag{4}$$

le $f_i(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m)$ *siano definite nello strato* S:

$$x^0<x\leqslant x^0+a; \qquad -\infty<y_i<+\infty, \quad (i=1, 2,\dots, m),$$ (1)

siano ivi continue e soddisfino la limitazione

$$|f_i(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m)|\leqslant M(x), \qquad (i=1, 2,\dots, m),$$

con $M(x)$ *sommabile nel senso di Lebesgue in* $(x^0, x^0+\delta)$.

Con le (20_1), (20_2) costruiamo le successioni $\{y_1^{(n)}(x)\}, \{y_2^{(n)}(x)\},\dots, \{y_m^{(n)}(x)\}$; dalle (20_2) si ha

$$|y_i^{(n)}(x')-y_i^{(n)}(x'')|=\left|\int_{x'-\frac{\delta}{n}}^{x''-\frac{\delta}{n}} f_i(x;\ y_1^{(n)}(x), y_2^{(n)}(x),\dots, y_m^{(n)}(x))dx\right|\leqslant\left|\int_{x'-\frac{\delta}{n}}^{x''-\frac{\delta}{n}} M(x)dx\right|,$$

e a motivo dell'assoluta continuità di $\int_{x^0}^{x} M(x)dx$ si ha anche che le funzioni della successione $\{y_1^{(n)}(x)\},\dots, \{y_m^{(n)}(x)\}$ restano ugualmente limitate e ugualmente continue e ripetendo allora il ragionamento di TONELLI segue che *nelle ipotesi ora dichiarate esiste almeno un sistema di funzioni* $y_1(x), y_2(x),\dots, y_m(x)$, *definite in* (x^0, x^0+a), *ivi assolutamente continue*, e *soluzioni del sistema*

$$y_i(x)=y_i^0+\int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1(x), y_2(x),\dots, y_m(x))dx. \tag{19}$$

Tali funzioni soddisfano allora per $x^0<x\leqslant x^0+a$, *il sistema* (4), *e le condizioni iniziali* $y_i(x^0)=y_i^0$, $(i=1, 2,\dots, m)$.

Se inoltre il sistema (4) ammette, qualunque siano i valori

---

(1) Le $f_i(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m)$ potrebbero essere infinite, o non essere definite per $x=x^0$.

iniziali $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ un teorema di unicità, il procedimento descritto in c) determina allora la corrispondente soluzione

$$y_1(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0), \quad y_2(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0), \ldots, \quad y_m(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$$

e poichè nelle nostre ipotesi le funzioni $y_i^{(n)}(x)$, $(n=1, 2, \ldots)$, definite dalle (20_1), (20_2) sono funzioni continue di $(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$, tali risulteranno gli integrali $y_i(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$, $(i=1, 2, \ldots, m)$. [Cfr. § 5, n.° 1, a)].

CAPITOLO II.

Sui sistemi normali di equazioni differenziali lineari, e su alcune trasformazioni delle equazioni differenziali lineari.

§ 1. - Sistemi normali di equazioni differenziali lineari.

1. - a) Chiamansi *sistemi normali* di equazioni differenziali lineari, omogenei, i sistemi [1]

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1' = a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 + \dots + a_{1,m}\, y_m, \\ y_2' = a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 + \dots + a_{2,m}\, y_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_m = a_{m,1}\, y_1 + a_{m,2}\, y_2 + \dots + a_{m,m}\, y_m, \end{cases}$$

dove le $a_{i,k}$ sono funzioni continue della x in $(a-a, a+a)$ ed $y_1, y_2, \dots, y_m$ sono le funzioni incognite.

b) Ad un sistema del tipo (1) si perviene quando si voglia integrare l'*equazione differenziale lineare omogenea di ordine m*

$$(2)\qquad y^{(m)} = p_1\, y^{(m-1)} + p_2\, y^{(m-2)} + \dots + p_{m-1}\, y' + p_m\, y$$

con $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m$ funzioni continue della x in $(a-a, a+a)$.

---

[1] Tutto questo paragrafo è destinato ai sistemi lineari *normali*; la teoria generale dei sistemi di m equazioni differenziali lineari nelle m funzioni incognite e nelle loro derivate sarà considerata nel Cap. X.

La (2) è infatti equivalente al sistema lineare [1]

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_{m-1} &= y_m \\ y'_m &= p_m y_1 + p_{m-1} y_2 + \dots + p_1 y_m . \end{aligned}$$

Inversamente dato il sistema (1), sotto ipotesi abbastanza generali si possono eliminare $m-1$ delle funzioni incognite e ne risulta un'unica equazione differenziale lineare omogenea in una sola funzione incognita, generalmente di ordine m [2]. Supponiamo ad esempio che i coefficienti $a_{i,k}$ delle equazioni del sistema (1) ammettano derivate fino a quelle di ordine $m-1$ in $(a-\alpha, a+\alpha)$ e deriviamo successivamente la prima equazione del sistema (1) e teniamo conto delle altre equazioni del sistema; otteniamo

$$y_1' = a_{1,1} y_1 + a_{1,2} y_2 + \dots + a_{1,m} y_m ;$$

$$y_1'' = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m ; \dots ; \quad y_1^{(m)} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

e se risolviamo questo sistema lineare rispetto alle $y_1, y_2, \dots, y_m$ [supposto il determinante dei coefficienti diverso da zero nell'intervallo $(a-\alpha, a+\alpha)$] otteniamo per y_1 l'equazione richiesta.

c) In virtù dell'osservazione del Cap. I, § 3, n. 4, a) *comunque si scelga un punto x^0 di $(a-\alpha, a+\alpha)$ e comunque si prenda un sistema di valori iniziali $c_1, c_2, \dots, c_m$ esiste uno e un solo sistema di integrali del sistema* (1) *i quali per $x=x^0$ assumono rispettivamente i valori $c_1, c_2, \dots, c_m$; tali integrali sono inoltre funzioni continue di x^0 in* $(a-\alpha, a+\alpha)$ [3].

Osserviamo inoltre che se poniamo nel procedimento descritto nel Cap. I, § 3, n. 2 come prima approssimazione delle funzioni incognite in luogo di $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ le $c_1, c_2, \dots, c_m$ stesse, la serie (I) delle approssimazioni successive avrà la forma

(3) $$y_i(x) = c_1 y_{i,1}(x) + c_2 y_{i,2}(x) + \dots + c_m y_{i,m}(x), \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

---

[1] Cfr. Cap. I, § 1, n. 2, a).

[2] Studieremo il problema per i sistemi lineari, normali o no nel § 4 del Cap. X.

[3] Cfr. Cap. I, § 5, 1.

Si noti che se $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ si ha corrispondentemente $y_1(x) \equiv 0$, $y_2(x) \equiv 0, \dots, y_m(x) \equiv 0$, o come dicesi si ottiene la *soluzione nulla*.

cioè *le costanti arbitrarie contenute nella soluzione del sistema* (1) *entrano linearmente.*

Le funzioni

$$y_{1,k}(x),\quad y_{2,k}(x),\dots,\quad y_{m,k}(x),\qquad (k=1,2,\dots,m)$$

costituiscono un particolare sistema di integrali di (1); esso si ottiene infatti da (3) ponendo

$$c_1=c_2=\dots=c_{k-1}=c_k-1=c_{k+1}=\dots=c_m=0.$$

Le (3) dànno la forma degli integrali del sistema (1); in *d*) e nei nn. 2 e 3 approfondiremo questo notevole risultato.

Ove ci si riferisca all'equazione differenziale (2) potremo dire che *fissato un punto x^0 di $(a-a, a+a)$, comunque si assegnino m costanti $c_1, c_2,\dots, c_m$ esiste uno e un solo integrale della* (2) *che soddisfa le condizioni iniziali*

$$y(x^0)=c_1,\quad y'(x^0)=c_2,\dots,\quad y^{(m-1)}(x^0)=c_m,$$

cioè il *problema di Cauchy* per l'equazione (2) ha una e una sola soluzione [1].

d) Siano in generale

$$(4)\qquad y_{1,k}(x),\quad y_{2,k}(x),\dots,\quad y_{m,k}(x),\qquad (k=1,2,\dots,p)$$

p sistemi di integrali del sistema (1), si abbia cioè

$$(5)\qquad y'_{i,k}=\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}\,y_{l,k},\qquad (i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,p).$$

Moltiplicando i due membri per la costante c_k e sommando rispetto all'indice k da 1 a p si ha

$$\Big(\sum_{k=1}^{p} c_k y_{i,k}\Big)'=\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}\Big(\sum_{k=1}^{p} c_k y_{l,k}\Big)$$

e perciò il sistema di m funzioni

$$(6)\qquad y_i(x)=c_1 y_{i,1}(x)+c_2 y_{i,2}(x)+\dots+c_p y_{i,p}(x),\quad (i=1,2,\dots,m)$$

qualunque siano le costanti $c_1, c_2,\dots, c_p$ verifica ancora il sistema dato.

Il *sistema* (6) si dice *composto con p costanti arbitrarie dai p sistemi integrali* (4).

---

[1] Si noti che se $c_1=c_2=\dots=c_m=0$, la corrispondente soluzione della (2) è la *soluzione nulla* $y(x)\equiv 0$.

2\. - *a*) Dati p sistemi di integrali del sistema (1)

$$(7) \qquad y_{1,k}, \quad y_{2,k}, \ldots, \quad y_{m,k} \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

la matrice

$$(7') \qquad \left\| \begin{matrix} y_{1,1}, & y_{2,1}, \ldots, & y_{m,1} \\ y_{1,2}, & y_{2,2}, \ldots, & y_{m,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,p}, & y_{2,p}, \ldots, & y_{m,p} \end{matrix} \right\|$$

chiamasi *matrice dei p sistemi di integrali* (7).

b) Dati m sistemi di integrali del sistema (1)

$$y_{1,k}, \quad y_{2,k}, \ldots, \quad y_{m,k} \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

si consideri il determinante

$$(8) \qquad \Delta(x) = \begin{vmatrix} y_{1,1}, & y_{2,1}, \ldots, & y_{m,1} \\ y_{1,2}, & y_{2,2}, \ldots, & y_{m,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,m}, & y_{2,m}, \ldots, & y_{m,m} \end{vmatrix}$$

della loro matrice. Vogliamo dimostrare che se in un punto x^0 di $(a-\alpha, a+\alpha)$ è $\Delta(x^0) \neq 0$, allora è $\Delta(x) \neq 0$ in tutto $(a-\alpha, a+\alpha)$.

Derivando infatti $\Delta(x)$ per colonne abbiamo

$$\Delta'(x) = \sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} y_{1,1}, \ldots, & y_{i-1,1}, & y'_{i,1}, & y_{i+1,1}, \ldots, & y_{m,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,m}, \ldots, & y_{i-1,m}, & y'_{i,m}, & y_{i+1,m}, \ldots, & y_{m,m} \end{vmatrix}$$

e per le (5)

$$\Delta'(x) = \Delta(x) \sum_{i=1}^{m} a_{i,i}$$

e integrando tra x^0 e x si ha la formula di JACOBI (¹)

$$(9) \qquad \Delta(x) = \Delta(x^0) e^{\int_{x^0}^{x} \sum_{i=1}^{m} a_{i,i} dx}$$

e perciò $\Delta(x) \neq 0$ in $(a-\alpha, a+\alpha)$.

(¹) C. G. J. JACOBI, Journ. für die reine und ang. Math. (1845), 29, p. 222.

c) Ove ci si riferisca all'equazione differenziale (2), se $y_1, y_2, \ldots, y_m$ è un sistema di m integrali dell'equazione, tenuto conto dell'osservazione del n. 1, *b*), il determinante $\Delta(x)$ si muta nel determinante

$$(8') \qquad W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & y_1'' \ldots & y_1^{(m-1)} \\ y_2 & y_2' & y_2'' \ldots & y_2^{(m-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_m & y'_m & y''_m \ldots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

e la (9) diventa ora

$$(9') \qquad W(x) = W(x^0) e^{\int_{x^0}^{x} p_1 dx} \quad , \quad \text{[formula di Liouville [1]].}$$

Il determinante W chiamasi il *wronskiano* delle m funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_m$; abbiamo allora che *se il wronskiano di m integrali dell'equazione* (2) *è diverso da zero in un punto di* $(a-\alpha, a+\alpha)$ *esso è diverso da zero in tutto l'intervallo stesso.*

d) Possiamo estendere il resultato ottenuto in *b*) come appresso: *se la matrice* (7') *dei p sistemi di integrali* (7) *ha in un punto x^0 di $(a-\alpha, a+\alpha)$ la caratteristica p, essa ha tale caratteristica in qualsiasi altro punto di $(a-\alpha, a+\alpha)$.*

Il teorema è vero se $p=m$, supponiamo perciò $p<m$ e senza alterare le generalità supponiamo anche

$$\begin{vmatrix} y_{1,1}(x^0), & y_{2,1}(x^0), \ldots, & y_{p,1}(x^0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1,p}(x^0), & y_{2,p}(x^0), \ldots, & y_{p,p}(x^0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Consideriamo allora coi p sistemi di integrali (7) gli altri $m-p$ sistemi di integrali

$$(10) \qquad y_{1,k}(x), \quad y_{2,k}(x), \ldots, \quad y_{m,k}(x), \qquad (k=p+1, \ldots, m)$$

definiti dalle condizioni iniziali

$$y_{1,p+r}(x^0) = \ldots = y_{p+r-1,p+r}(x^0) = y_{p+r,p+r}(x^0) - 1 = \\ = y_{p+r+1,p+r}(x^0) = \ldots = y_{m,p+r}(x^0) = 0, \\ (r=1, 2, \ldots, m-p)$$

---

[1] J. Liouville, Journ. de math. pur. et appl. (1), 3, (1838), p. 349.

il determinante degli integrali (7) e (10) è diverso da zero in x^0 e perciò in tutto $(a-a, a+a)$, ciò importa che la matrice (7′) delle sue prime p righe ha la caratteristica p in ogni punto dell'intervallo $(a-a, a+a)$.

Dal teorema dimostrato segue che *la caratteristica della matrice di un qualsiasi gruppo di sistemi di integrali del sistema* (1) *è la medesima in qualsiasi punto di* $(a-a, a+a)$.

3. - *a*) Dati p *sistemi di integrali di* (1)

$$(7) \qquad y_{1,k}, \quad y_{2,k}, \ldots, \quad y_{m,k}, \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

essi si dicono linearmente dipendenti quando esistono p costanti $c_1, c_2, \ldots, c_p$ non tutte nulle, per le quali si ha identicamente in $(a-a, a+a)$

$$(11) \qquad c_1 y_{i,1} + c_2 y_{i,2} + \ldots + c_p y_{i,p} = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Quando questa circostanza non si verifica i p sistemi di integrali di (1) si dicono *linearmente indipendenti.*

Dalla definizione segue che *se p sistemi di integrali sono linearmente dipendenti, uno almeno di questi sistemi si compone linearmente con gli altri sistemi dati.*

b) *Condizione necessaria e sufficiente perchè i p sistemi di integrali del sistema* (7) *siano linearmente indipendenti è che la matrice* (7′) *abbia la caratteristica p in* $(a-a, a+a)$.

La condizione è sufficiente; infatti se la matrice (7′) ha la caratteristica p, l'unica soluzione del sistema (11) è la soluzione nulla.

La condizione è anche necessaria, cioè se i p sistemi di integrali (7) sono indipendenti la caratteristica della matrice (7′) è p. Supponiamo per assurdo che la caratteristica della matrice (7′) in un punto x^0 di $(a-a, a+a)$ sia $p'<p$; possiamo allora estrarre dalla matrice (7′) una matrice di p' righe, ad esempio quella delle prime p' righe, che in tutto $(a-a, a+a)$ ha la caratteristica p'.

Fissato ora un s da 1 a $p-p'$ si ha

$$y_{i,p'+s} = c_1 y_{i,1} + c_2 y_{i,2} + \ldots + c_{p'} y_{i,p'}, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

dove $c_1, c_2, \ldots, c_{p'}$ sono funzioni univoche della x in $(a-a, a+a)$ che esprimendosi razionalmente per le $y_{i,k}$ sono anche derivabili.

Poichè il sistema $y_{i,p'+s}$ $(i=1, 2,\ldots, m)$ soddisfa il sistema (1) abbiamo

$$\Big(\sum_{k=1}^{p'} c_k y_{i,k}\Big)' = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} \Big(\sum_{k=1}^{p'} c_k y_{l,k}\Big),$$

$$\sum_{k=1}^{p'} c_k' y_{i,k} + \sum_{k=1}^{p'} c_k y'_{i,k} = \sum_{k=1}^{p'} c_k \Big(\sum_{l=1}^{m} a_{i,l} y_{l,k}\Big),$$

perciò

$$\sum_{k=1}^{p'} c_k' y_{i,k} = 0, \qquad (i=1, 2,\ldots, m);$$

ma la matrice di questo sistema lineare omogeneo nelle c_k' ha la caratteristica p', ne viene $c_1' = c_2' = \ldots = c'_{p'} = 0$, ossia le $c_1, c_2, \ldots, c_m$ sono costanti, ma allora il sistema $y_{i,p'+s}$ è composto linearmente con i primi p' sistemi di integrali, contro l'ipotesi.

Dal teorema dimostrato segue anche: *se la caratteristica della matrice di p sistemi di integrali del sistema* (1) *è r, r tra questi sistemi sono linearmente indipendenti e gli altri sistemi si compongono linearmente con questi r.*

c) Il massimo numero di sistemi di integrali di (1) linearmente indipendenti è m, ed è subito visto che *si possono costruire, e in infiniti modi, m sistemi di integrali di* (1) *linearmente indipendenti.*

Sia infatti $\Delta^0 = \|b_{i,k}\|$ $(i, k=1, 2,\ldots, m)$ una matrice di ordine m di determinante diverso da zero, e costruiamo m sistemi di integrali del sistema (1) che nel punto x^0 di $(a-a, a+a)$ assumano rispettivamente i valori della prima, seconda,..., m^{esima} riga di Δ^0; in virtù del risultato del n. 2, *b*) il determinante di questi m sistemi è diverso da zero in $(a-a, a+a)$ e perciò gli m sistemi considerati sono linearmente indipendenti.

Un sistema di m sistemi di integrali di (1)

$$y_{1,k}, \quad y_{2,k}, \ldots, \quad y_{m,k} \qquad (k=1, 2,\ldots, m) \tag{12}$$

linearmente indipendenti chiamasi secondo FUCHS [1] un *sistema fondamentale*. Per il risultato ottenuto in *b*) abbiamo che con-

---

[1] L. FUCHS: *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten*, Journ. für die reine und ang. Math. (1866), 66, (pp. 121-160), p. 126.

dizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (12) *sia un sistema fondamentale è che il determinante* (8) *sia diverso da zero in* $(a-\alpha, a+\alpha)$.

Abbiamo poi che *se il sistema* (12) *è un sistema fondamentale di integrali del sistema* (1), *l'integrale generale del sistema stesso ha l'espressione*

$$y_i(x)=\sum_{k=1}^{m} c_k y_{i,k}(x), \qquad (i=1, 2,\dots, m)$$

con le c_k *costanti* (¹).

d) Ove ci si riferisca all'equazione differenziale (2) abbiamo che *se* $y_1, y_2,\dots, y_m$ *sono* m *integrali del sistema* (2) *e il loro wronskiano* $W(y_1, y_2,\dots, y_m)$ *è diverso da zero in* $(a-\alpha, a+\alpha)$, o come si dice essi formano un *sistema fondamentale* di integrali dell'equazione (2), *allora qualsiasi altro suo integrale ha la forma*

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)+ \dots +c_m y_m(x)$$

con le $c_1, c_2,\dots, c_m$ costanti (²).

(¹) È da notarsi che date m^2 funzioni

$$(12) \qquad y_{1,k}(x),\quad y_{2,k}(x),\dots,\quad y_{m,k}(x), \qquad (k=1, 2,\dots, m)$$

continue insieme alle loro derivate prime in $(a-\alpha, a+\alpha)$, se il corrispondente determinante (8) è diverso da zero in $(a-\alpha, a+\alpha)$, si può determinare in uno e in un sol modo il sistema (1) che ammette il sistema (12) come sistema di integrali fondamentali; infatti il sistema

$$y'_{i,k}=a_{i,1}y_{1,k}+a_{i,2}y_{2,k}+ \dots +a_{i,m}y_{m,k} \qquad (k, i=1, 2,\dots, m)$$

determina i coefficienti $a_{i,1}, a_{i,2},\dots, a_{i,m}$ in uno e un sol modo.

(²) Ancora qui è da notarsi che se $y_1(x), y_2(x),\dots, y_m(x)$ sono m funzioni continue insieme alle loro derivate di ordine m in $(a-\alpha, a+\alpha)$, e $W(y_1, y_2,\dots, y_m)\neq 0$ in $(a-\alpha, a+\alpha)$, si può determinare in uno e in un sol modo la corrispondente equazione (2) che ammette tali funzioni come un sistema fondamentale di integrali; essa ha la forma semplicissima

$$W(y, y_1, y_2,\dots, y_m)=\begin{vmatrix} y, & y', & y'',\dots, & y^{(m)} \\ y_1, & y_1', & y_1'',\dots, & y_1^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_m, & y'_m, & y''_m,\dots, & y_m^{(m)} \end{vmatrix}=0.$$

e) A conclusione delle cose dette vogliamo dimostrare il seguente teorema:

Noti p sistemi di integrali indipendenti del sistema (1), *se la loro matrice contiene un minore di ordine p diverso da zero in ogni punto di* $(\alpha-a, \alpha+a)$, *allora mercè una trasformazione lineare nelle funzioni incognite, a modulo non nullo, si può far dipendere la risoluzione del sistema da un altro sistema lineare normale con $n-p$ funzioni incognite e da p quadrature.*

Siano infatti noti p sistemi di integrali del sistema (1)

$$y_{1,k}, \quad y_{2,k}, \dots, \quad y_{m,k}, \qquad (k=1, 2, \dots, p)$$

e sia

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} y_{1,1}, & y_{2,1}, \dots, & y_{p,1} \\ y_{1,2}, & y_{2,2}, \dots, & y_{p,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,p}, & y_{2,p}, \dots, & y_{p,p} \end{vmatrix} \neq 0$$

in ogni punto di $(\alpha-a, \alpha+a)$.

Poniamo

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = y_{1,1} Y_1 + y_{1,2} Y_2 + \dots + y_{1,p} Y_p \\ y_2 = y_{2,1} Y_1 + y_{2,2} Y_2 + \dots + y_{2,p} Y_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_p = y_{p,1} Y_1 + y_{p,2} Y_2 + \dots + y_{p,p} Y_p \\ y_{p+r} = y_{p+r,1} Y_1 + y_{p+r,2} Y_2 + \dots + y_{p+r,p} Y_p + Y_{p+r} \\ \qquad\qquad (r=1, 2, \dots, m-p). \end{array} \right.$$

Con questa trasformazione delle $y_1, y_2, \dots, y_m$ nelle $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, *invertibile a motivo della* (13), il sistema (1) si trasforma in

$$(15) \qquad Y_i' = \sum_{l=1}^{m} A_{i,l} Y_l, \qquad (i=1, 2, \dots, m)$$

con le $A_{i,l}$ esprimibili razionalmente per le $a_{i,l}$, $y_{i,k}$.

In virtù delle (14), p sistemi di integrali di (15) sono

$$\begin{array}{llll} Y_1=1, & Y_2=0, \dots, & Y_p=0, \dots, & Y_m=0 \\ Y_1=0, & Y_2=1, \dots, & Y_p=0, \dots, & Y_m=0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_1=0, & Y_2=0, \dots, & Y_p=1, \dots, & Y_m=0 \end{array}$$

e di conseguenza dovranno essere identicamente nulle le prime p colonne della matrice $\| A_{i,k} \|$, $(i, k=1, 2,\dots, m)$. Ne segue che il sistema (15) avrà la forma

$$(16_1) \qquad Y_i' = A_{i,p+1} Y_{p+1} + \dots + A_{i,m} Y_m, \qquad (i=1, 2,\dots, p)$$

$$(16_2) \qquad Y'_{p+r} = A_{p+r,p+1} Y_{p+1} + \dots + A_{p+r,m} Y_m \,. \qquad (r=1, 2,\dots, m-p).$$

Ora le equazioni del sistema (16_2) formano un sistema lineare normale di $m-p$ equazioni con $m-p$ funzioni incognite e conseguito un sistema di integrali di esso con *quadrature*, dalle (16_1) si otterranno $Y_1, Y_2,\dots, Y_p$, e dalle (14) si avranno infine $y_1, y_2,\dots, y_m$.

Occorre notare che l'integrazione del sistema (16_2) introduce $m-p$ costanti arbitrarie, altre p si otterranno dalle quadrature necessarie per integrare il sistema (16_1) e quindi le (14) esprimono gli integrali $y_1, y_2,\dots, y_m$ del sistema (1) linearmente e omogeneamente per m costanti arbitrarie, e siccome le (14) sono invertibili il procedimento ci fornirà necessariamente l'integrale generale del sistema (1).

4. - *a*) Siano $\mu_1, \mu_2,\dots, \mu_m$ m funzioni della x derivabili in $(a-\alpha, a+\alpha)$ e si moltiplichino le espressioni $y_i' - \sum_{l=1}^m a_{i,l} y_l$ ordinatamente per $\mu_1, \mu_2,\dots, \mu_m$ e si sommi rispetto all'indice i; avremo identicamente

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \Big(y_i' - \sum_{l=1}^m a_{i,l} y_l\Big) = \sum_{i=1}^m (\mu_i y_i)' - \sum_{i=1}^m y_i \mu_i' - \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m a_{i,l} \mu_i y_l$$

ovvero l'identità

$$(17) \qquad \boxed{\sum_{i=1}^m \mu_i \Big(y_i' - \sum_{l=1}^m a_{i,l} y_l\Big) + \sum_{i=1}^m y_i \Big(\mu_i' + \sum_{l=1}^m a_{l,i} \mu_l\Big) = \sum_{i=1}^m (\mu_i y_i)'} \,.$$

Si ha da qui che se $y_1, y_2,\dots, y_m$ indica un sistema di integrali del sistema (1) e $\mu_1, \mu_2,\dots, \mu_m$ un sistema di integrali del sistema

$$(18) \qquad \mu_i' = -\sum_{l=1}^m a_{l,i} \mu_l, \qquad (i=1, 2,\dots, m)$$

tra le y_i e le μ_i sussiste la relazione

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m = \text{cost.} \tag{19}$$

Il sistema (18) chiamasi il *sistema di equazioni differenziali aggiunto del sistema* (1) (1).

Evidentemente *il sistema di equazioni differenziali aggiunto dell'aggiunto è il sistema dato.*

Se nel sistema (1) è

$$a_{i,l} = -a_{l,i} \quad \text{per} \quad i \neq l, \qquad a_{i,i} = 0, \tag{20}$$

cioè se la matrice $\| a_{i,l} \|$ è *simmetrica gobba*, allora il sistema (1) coincide col suo aggiunto, o come dicesi è un *sistema di equazioni differenziali, autoaggiunto.*

In un sistema di equazioni differenziali autoaggiunto tra due sistemi di integrali $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ vale la (19), e in particolare, prendendo due sistemi coincidenti si ha

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2 = \text{cost.}$$

b) Vogliamo dimostrare che *noto un sistema fondamentale di integrali del sistema di equazioni differenziali aggiunto, con operazioni razionali può determinarsi un sistema fondamentale di integrali del sistema dato.*

Infatti se

$$\mu_{1,k}, \quad \mu_{2,k}, \dots, \quad \mu_{m,k}, \qquad (k = 1, 2, \dots m)$$

è un sistema fondamentale di integrali del sistema (18) il determinante $\Delta' = |\mu_{i,k}|$ è diverso da zero in $(\alpha - a, \alpha + a)$. Si ha poi risolvendo il sistema lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{1,1} y_1 + \mu_{2,1} y_2 + \dots + \mu_{m,1} y_m = c_1 \\ \mu_{1,2} y_1 + \mu_{2,2} y_2 + \dots + \mu_{m,2} y_m = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_{1,m} y_1 + \mu_{2,m} y_2 + \dots + \mu_{m,m} y_m = c_m \end{array} \right. \tag{21}$$

rispetto alle $y_1, y_2, \dots, y_m$

$$y_k = \frac{1}{\Delta'} \sum_{i=1}^{m} c_i A_{k,i}, \qquad (k = 1, 2, \dots, m) \tag{22}$$

(1) C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke, 4 (Berlin, 1886), p. 404.

dove $A_{k,i}$ è il complemento algebrico dell'elemento posto nella colonna k^{esima} e nella riga i^{esima} di Δ'.

Le (22) qualunque siano le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_m$ forniscono una soluzione del sistema (1). Infatti dalla identità (17) tenuto conto delle (18) e (21) si ha

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}(y_i' - \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} y_l) = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

ma $|\mu_{i,k}| \neq 0$, perciò

$$y_i' = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} y_l.$$

Essendo poi il determinante $\left|\frac{A_{k,i}}{\Delta'}\right|$ (reciproco di Δ') diverso da zero, il sistema

$$\frac{A_{1,i}}{\Delta'}, \quad \frac{A_{2,i}}{\Delta'}, \ldots, \quad \frac{A_{m,i}}{\Delta'} \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

è un sistema fondamentale di integrali di (1).

Le cose dette ci avvertono che i due problemi, risolvere un sistema lineare omogeneo e risolvere il sistema omogeneo aggiunto sono da considerarsi *equivalenti*.

5. - Sia dato il *sistema lineare non omogeneo di forma normale*

$$y_i' = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} y_l + u_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{23}$$

ove le $a_{i,l}$, u_i sono funzioni continue della x in $(\alpha - a, \alpha + a)$.

Mostreremo, e in due modi diversi, che con sole operazioni di quadratura la sua integrazione può ridursi a quella di un sistema lineare omogeneo.

a) Insieme al sistema omogeneo dedotto dal sistema dato (23) ponendovi $u_i = 0$

$$z_i' = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} z_l$$

si consideri il sistema aggiunto

$$\mu_i' = -\sum_{l=1}^{m} a_{l,i} \mu_l,$$

e sia di quest'ultimo

$$\mu_{1,k}, \quad \mu_{2,k}, \ldots, \quad \mu_{m,k}, \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

un sistema fondamentale.

Dall'identità (17) abbiamo

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}(y_i' - \sum_{l=1}^{m} a_{i,l}y_l) = \sum_{i=1}^{m} (\mu_{i,k}y_i)', \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

e poichè $|\mu_{i,k}| \neq 0$ ne viene che il sistema (23) è equivalente a

$$\sum_{i=1}^{m} (\mu_{i,k}y_i)' - \sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}u_i = 0$$

e integrando

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}y_i - \int_a^x dx \sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}u_i = c_k, \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

e risolvendo questo sistema si ottengono le y_i.

b) Vogliamo ora esporre il *metodo della variazione delle costanti* di LAGRANGIA [1] per la risoluzione del sistema (23). Sia

$$y_{1,k}, \quad y_{2,k}, \ldots, \quad y_{m,k}, \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

un sistema fondamentale di integrali del sistema lineare omogeneo

$$y_i' = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l}y_l; \tag{24}$$

per le cose dette al n. 3, *c*) il suo più generale sistema di integrali ha l'espressione

$$y_i = \sum_{k=1}^{m} c_k y_{i,k} \qquad (i=1, 2, \ldots, m) \tag{25}$$

con le c_k costanti. Se invece supponiamo le c_k come funzioni della x le (25) soddisferanno il sistema dato (23) ove si abbia

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} c_k y'_{i,k} + \sum_{k=1}^{m} c_k' y_{i,k} &= \sum_{l=1}^{m} a_{i,l}\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k y_{l,k}\Big) + u_i \\ &= \sum_{k=1}^{m} c_k\Big(\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}y_{l,k}\Big) + u_i\end{aligned}$$

[1] G. L. LAGRANGIA, Oeuvres, IV (Paris, 1869), p. 159 e segg.

e a motivo delle (24) è necessario e basta che sia

$$\sum_{k=1}^{m} c_k' y_{i,k} = u_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Questo sistema lineare nelle c_k' ha il determinante $|y_{i,k}|$ diverso da zero in $(a-\alpha, a+\alpha)$; con operazioni razionali possono determinarsi quindi le c_k' in funzione della x in $(a-\alpha, a+\alpha)$ e con m quadrature si ottengono infine le c_k.

Più esplicitamente, se indichiamo con $Y_{i,k}(x)$ il *reciproco* di $y_{i,k}$ nella matrice $\|y_{i,k}\|$, cioè il rapporto tra il complemento algebrico di $y_{i,k}$ in $|y_{i,k}|$ e il determinante stesso, si ha

$$c_k' = \sum_{l=1}^{m} Y_{l,k}(x) u_l(x)$$

e perciò dalla (25)

$$(25_1) \qquad y_i(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k^0 y_{i,k}(x) + \sum_{l=1}^{m} \int_a^x H_{i,l}(x, \xi) u_l(\xi) d\xi,$$

ove si è posto

$$(25_2) \qquad H_{i,l}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{m} y_{i,k}(x) Y_{l,k}(\xi),$$

e le $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_m^0$ sono *costanti arbitrarie* [1].

Per note proprietà dei determinanti per le $H_{i,l}(x, \xi)$ valgono le relazioni

$$H_{i,i}(x, x) = 1; \qquad H_{i,l}(x, x) = 0 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad i \neq l \quad (^1).$$

È quasi superfluo notare che la prima somma del secondo membro della (25_1) rappresenta il più generale sistema di integrali del sistema omogeneo (24).

c) In particolare si consideri ora l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$(2') \qquad y^{(m)} + p_1(x) y^{(m-1)} + \ldots + p_{m-1}(x) y' + p_m(x) y = X(x), \qquad (m > 1)$$

ove $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_m(x)$, $X(x)$ sono funzioni continue della x in $(a-\alpha, a+\alpha)$.

---

(1) Per le (25_1), (25_2) cfr. M. Picone, Corso di Analisi Superiore, Equazioni Differenziali (Catania, 1923), p. 26.

Supposto che $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_m(x)$ formino un *sistema fondamentale* di integrali dell'equazione omogenea

$$(2'') \qquad y_i^{(m)}+p_1(x)y_i^{(m-1)}+\ldots+p_{m-1}(x)y_i'+p_m(x)y_i=0, \quad (i=1, 2,\ldots, m),$$

e $y_0(x)$ *sia un integrale particolare dell'equazione data,* l'integrale generale della (2') ha l'espressione

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)+\ldots+c_m y_m(x)+y_0(x)$$

con $c_1, c_2,\ldots, c_m$ *costanti arbitrarie.*

Il metodo della variazione delle costanti di LAGRANGIA fornisce ora per $y_0(x)$ l'espressione

$$y_0(x)=\sum_{k=1}^{m} y_k(x)\int_a^x \frac{W_{n,k}}{W} X dx,$$

dove $W=W(y_1, y_2,\ldots, y_m)$ indica il wronskiano del sistema fondamentale $y_1, y_2,\ldots, y_m$ dell'equazione omogenea (2″), e $W_{n,k}$ il complemento algebrico di $y_k^{(n-1)}$ in W.

La funzione $c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)+\ldots+c_m y_m(x)$, la quale rappresenta l'integrale generale dell'equazione omogenea (2″), da alcuni autori viene chiamata *funzione complementare.*

6. - *a*) Nel sistema lineare omogeneo

$$(26) \qquad y_i'=\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}\, y_l, \qquad (i=1, 2,\ldots, m)$$

supponiamo che i *coefficienti* $a_{i,l}$ siano *costanti.*

Proponiamoci di vedere se è possibile soddisfare il sistema (26) ponendo

$$(27) \qquad y_1=\alpha_1 e^{\varrho x}, \quad y_2=\alpha_2 e^{\varrho x},\ldots, \quad y_m=\alpha_m e^{\varrho x}$$

con le $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m$ e ϱ costanti e le $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_m$ *non tutte nulle.*

Sostituendo nelle (26) ne risulta che dovrà aversi

$$\alpha_i\,\varrho e^{\varrho x}=e^{\varrho x}\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}\,\alpha_l$$

cioè

$$(28)\qquad \begin{cases} (a_{1,1}-\varrho)\alpha_1+a_{1,2}\alpha_2+ \dots +a_{1,m}\alpha_m=0 \\ a_{2,1}\alpha_1+(a_{2,2}-\varrho)\alpha_2+ \dots +a_{2,m}\alpha_m=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}\alpha_1+a_{m,2}\alpha_2+ \dots +(a_{m,m}-\varrho)\alpha_m=0 \end{cases}$$

equazioni a cui si dovrà soddisfare con le α_l non tutte nulle. È necessario allora scegliere per ϱ una radice dell'equazione algebrica di grado m

$$(29)\qquad D(\varrho)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\varrho & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\varrho & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m}-\varrho \end{vmatrix}=0.$$

Inversamente se ϱ è una radice della (29), le (28) possono soddisfarsi con valori non tutti nulli delle α_l e le (27) determinano allora una soluzione del sistema proposto.

L'equazione (29) prende il nome di *equazione caratteristica* (o *fondamentale*) *del sistema* (26).

b) Supponiamo che *l'equazione* (29) *abbia m radici distinte* $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ e indichiamo con

$$\alpha_1^{(k)}, \quad \alpha_2^{(k)}, \dots, \quad \alpha_m^{(k)} \qquad (k=1, 2, \dots, m)$$

una soluzione *non nulla* del sistema (28) corrispondente al valore $\varrho=\varrho_k$; vogliamo dimostrare che *gli m sistemi di integrali*

$$y_{1,k}=\alpha_1^{(k)}e^{\varrho_k x}, \quad y_{2,k}=\alpha_2^{(k)}e^{\varrho_k x}, \dots, \quad y_{m,k}=\alpha_m^{(k)}e^{\varrho_k x}$$
$$(k=1, 2, \dots, m)$$

formano un sistema fondamentale del sistema (26) (¹). Infatti se ciò non fosse ne seguirebbe almeno una relazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli tra $e^{\varrho_1 x}, e^{\varrho_2 x}, \dots, e^{\varrho_m x}$ e ciò non

(¹) I ragionamenti da noi fatti sussistono siano le costanti $a_{i,k}$ reali o complesse. Ove ci si limiti soltanto al caso reale le radici ϱ_k potranno risultare (a coppie) complesse (e coniugate), in tal caso esprimendo le esponenziali con la formula di Eulero ci si ridurrà al caso reale.

può essere. Proveremo questo fatto direttamente in c); in questo caso semplicissimo basterà osservare che

$$W(e^{\varrho_1 x}, e^{\varrho_2 x}, \ldots, e^{\varrho_m x}) = e^{x(\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_m)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \ldots & \varrho_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varrho_1^{m-1} & \varrho_2^{m-1} & \ldots & \varrho_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dalle cose dette segue che nella nostra ipotesi gli integrali del sistema (26) si esprimono con le formule

$$y_i = c_1 a_i^{(1)} e^{\varrho_1 x} + c_2 a_i^{(2)} e^{\varrho_2 x} + \ldots + c_m a_i^{(m)} e^{\varrho_m x}, \qquad (i=1, 2, \ldots, m)$$

dove le $c_1, c_2, \ldots, c_m$ sono costanti arbitrarie.

c) Ci resta da studiare il caso in cui l'equazione (29) ammetta radici multiple. Vogliamo dimostrare allora il teorema: *se ϱ_1 è una radice multipla di ordine p dell'equazione caratteristica, il sistema* (26) *ammette corrispondentemente p sistemi di integrali linearmente indipendenti e ogni sistema composto con essi avrà la forma*

$$y_1 = e^{\varrho_1 x} P_1(x), \quad y_2 = e^{\varrho_1 x} P_2(x), \ldots, \quad y_m = e^{\varrho_1 x} P_m(x)$$

con $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ polinomi in x di grado $p-1$ al più (dipendenti linearmente da p costanti arbitrarie).

Siccome il teorema è vero per $p=1$, procediamo per induzione, dimostriamo cioè che ammesso il teorema vero per le radici dell'equazione caratteristica multiple di ordine $p-1$ esso sussiste ancora per le radici multiple di ordine p.

Senza alterare le generalità possiamo supporre $\varrho_1 = 0$ perchè in caso opposto effettuando la trasformazione

$$y_l = e^{\varrho_1 x} Y_l, \qquad (l=1, 2, \ldots, m)$$

il sistema (26) diventa

$$Y_i' = a_{i,1} Y_1 + \ldots + (a_{i,i} - \varrho_1) Y_i + \ldots + a_{i,m} Y_m$$

che ha l'equazione caratteristica

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - (\varrho_1 + \varrho) & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - (\varrho_1 + \varrho) \ldots & & a_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,m} - (\varrho_1 + \varrho) \end{vmatrix} = 0$$

che per le nostre ipotesi ha appunto la radice $\varrho=0$ multipla di ordine p. Supposto dunque $\varrho_1=0$ il sistema (26) ammette un sistema particolare di integrali

$$y_1=a_1, \quad y_2=a_2, \ldots, \quad y_m=a_m$$

con le $a_1, a_2, \ldots, a_m$ non tutte nulle. Supposto ad esempio $a_1 \neq 0$, possiamo senza alterare le generalità supporre $a_1=1$ (è lecito infatti variare le a_i per un fattore di proporzionalità).

Effettuiamo ora sul sistema (26) la trasformazione indicata in questo § 1, n. 3, e) che nel nostro caso diventa

$$y_1=Y_1, \quad y_2=a_2 Y_1+Y_2, \ldots, \quad y_m=a_m Y_1+Y_m; \tag{30}$$

otterremo così il nuovo sistema (che ammette la soluzione $Y_1=1$, $Y_2=\ldots=Y_m=0$)

$$Y_1'=A_{1,2}Y_2+\ldots+A_{1,m}Y_m \tag{31$_1$}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Y_2'=A_{2,2}Y_2+\ldots+A_{2,m}Y_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y'_m=A_{m,2}Y_2+\ldots+A_{m,m}Y_m \end{array}\right. \tag{31$_2$}$$

dove

$$A_{1,l}=a_{1,l}, \qquad (l=2, 3, \ldots, m) \tag{32}$$

$$A_{i,l}=a_{i,l}-a_i a_{1,l}, \qquad (i, l=2, 3, \ldots, m). \tag{32'}$$

Vogliamo dimostrare che indicando con $D_1(\varrho)$ il primo membro dell'equazione caratteristica del sistema (31_1), (31_2)

$$D_1(\varrho)=\begin{vmatrix} -\varrho & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2}-a_2a_{1,2}-\varrho & a_{2,3}-a_2a_{1,3} & \ldots & a_{2,m}-a_2a_{1,m} \\ 0 & a_{3,2}-a_3a_{1,2} & a_{3,3}-a_3a_{1,3}-\varrho & \ldots & a_{3,m}-a_3a_{1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m,2}-a_ma_{1,2} & a_{m,3}-a_ma_{1,3} & \ldots & a_{m,m}-a_ma_{1,m}-\varrho \end{vmatrix} = \tag{33}$$

si ha identicamente $D(\varrho)\equiv D_1(\varrho)$. Infatti aggiungendo agli elementi della riga i^{esima} $(i=2, 3, \ldots, m)$ la prima riga moltiplicata per a_i si ha

$$D_1(\varrho)=\begin{vmatrix} -\varrho & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,m} \\ -a_2\varrho & a_{2,2}-\varrho & a_{2,3} & \ldots & a_{2,m} \\ -a_3\varrho & a_{3,2} & a_{3,3}-\varrho & \ldots & a_{3,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_m\varrho & a_{m,2} & a_{m,3} & \ldots & a_{m,m}-\varrho \end{vmatrix}$$

e sottraendo dalla prima colonna la seconda moltiplicata per a_2, la terza per $a_3, \ldots$, la m^{esima} per a_m e tenuto conto che

$$a_{i,1}+a_{i,2}\,a_2+\ldots+a_{i,m}\,a_m=0, \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

si ottiene proprio il determinante $D(\varrho)$; è quindi $D_1(\varrho)\equiv D(\varrho)$.

Dalle (32), (32′), (33) segue che l'equazione

$$(34) \qquad \begin{vmatrix} A_{2,2}-\varrho & A_{2,3} & \ldots & A_{2,m} \\ A_{3,2} & A_{3,3}-\varrho & \ldots & A_{3,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m,2} & A_{m,3} & \ldots & A_{m,m}-\varrho \end{vmatrix}=0$$

ammette la radice $\varrho=0$ multipla di ordine $p-1$, ma allora il sistema (31_2) ammette un sistema di $p-1$ integrali linearmente indipendenti, e ogni altro sistema composto con essi avrà la forma

$$(35) \qquad Y_2=Q_2(x), \quad Y_3=Q_3(x), \ldots, \quad Y_m=Q_m(x)$$

dove $Q_2(x)$, $Q_3(x), \ldots, Q_m(x)$ sono polinomi in x di grado $p-2$ al più (dipendenti linearmente da $p-1$ costanti arbitrarie). Sostituendo nella (31_1) si ha

$$(36) \qquad Y_1=C_1+\sum_{l=2}^{m} A_{1,l}\int_0^x Q_l(x)\,dx$$

dove C_1 è una nuova costante arbitraria, e sostituendo ora le (35) e (36) nelle (30) avremo che le y_1, $y_2, \ldots, y_m$ hanno appunto la forma dichiarata.

Ci resta da vedere che col procedimento ora descritto si ottengono appunto p sistemi di integrali linearmente indipendenti di (1). Si osserverà per questo che noi possediamo $p-1$ sistemi di integrali linearmente indipendenti di (31_2)

$$Y_{2,k}, \quad Y_{3,k}, \ldots, \quad Y_{m,k}, \qquad (k=2,\ldots,p-1)$$

e che la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sum\limits_{l=2}^{m} A_{1,l}\int Y_{l,2}\,dx & Y_{2,2} & Y_{3,2} & \ldots & Y_{m,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{l=2}^{m} A_{1,l}\int Y_{l,p-1}\,dx & Y_{2,p-1} & Y_{3,p-1} & \ldots & Y_{m,p-1} \end{vmatrix},$$

formata da p sistemi di integrali del sistema (31_1), (31_2), ha quindi la caratteristica p. La stessa caratteristica p compete alla matrice formata coi corrispondenti p sistemi di integrali del sistema (1) costruiti mediante le (30).

Abbiamo dimostrato dunque che ad ogni radice ϱ_1 dell'equazione caratteristica multipla di un certo ordine p corrispondono p sistemi di integrali indipendenti.

Noti ϱ_1 e p, per costruire effettivamente i polinomi $P_1(x)$, $P_2(x),\ldots, P_m(x)$, basterà sostituire nel sistema dato in luogo di $y_1, y_2,\ldots, y_m$ rispettivamente $e^{\varrho_1 x}P_1(x)$, $e^{\varrho_1 x}P_2(x),\ldots, e^{\varrho_1 x}P_m(x)$, e ne risulterà per i coefficienti dei polinomi $P_1(x)$, $P_2(x),\ldots, P_m(x)$, un sistema di equazioni lineari la cui soluzione comporta p costanti arbitrarie.

Notiamo poi che corrispondendo ad ogni radice dell'equazione caratteristica tanti sistemi di integrali indipendenti quanto è il suo ordine di molteplicità, i sistemi corrispondenti a tutte le radici distinte dell'equazione caratteristica formano un sistema fondamentale. È ben noto infatti che non può sussistere identicamente una relazione del tipo

$$A_1(x)e^{\varrho_1 x} + A_2(x)e^{\varrho_2 x} + \ldots + A_s(x)e^{\varrho_s x} \equiv 0 \tag{37}$$

con $\varrho_1, \varrho_2,\ldots, \varrho_s$ costanti diverse tra loro due a due e $A_1(x)$, $A_2(x),\ldots, A_s(x)$ polinomi, senza che $A_1(x)$, $A_2(x),\ldots, A_s(x)$ siano identicamente nulli [1].

Questo fatto è evidente se $s=1$; procediamo allora per induzione. Dalla (37) si ha

$$A_1(x)e^{(\varrho_1-\varrho_s)x} + A_2(x)e^{(\varrho_2-\varrho_s)x} + \ldots + A_{s-1}(x)e^{(\varrho_{s-1}-\varrho_s)x} + A_s(x) \equiv 0$$

e se deriviamo tante volte quanto è il grado di $A_m(x)$ aumentato di una unità, ne risulta l'identità

$$B_1(x)e^{(\varrho_1-\varrho_s)x} + B_2(x)e^{(\varrho_2-\varrho_s)x} + \ldots + B_{s-1}(x)\,e^{(\varrho_{s-1}-\varrho_s)x} \equiv 0$$

con $B_1(x)$, $B_2(x),\ldots, B_{s-1}(x)$ polinomi rispettivamente dello stesso grado di $A_1(x)$, $A_2(x),\ldots, A_{s-1}(x)$ e ciò è impossibile.

---

[1] Della risoluzione del problema di CAUCHY, anche nel caso di sistemi lineari a coefficienti costanti non normali, parleremo nel Cap. X, § 7, n. 3, *d*).

d) Quando ci si limiti al caso particolare dell'*equazione lineare, omogenea, a coefficienti costanti*

$$a_0 y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \dots + a_{m-1} y' + a_m y = 0 \tag{38}$$

con $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$ costanti, $a_0 \neq 0$, se l'equazione caratteristica

$$a_0 \varrho^m + a_1 \varrho^{m-1} + \dots + a_{m-1} \varrho + a_m = 0$$

ammette le radici $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_s$ dei rispettivi ordini di molteplicità $p_1, p_2, \dots, p_s$, $(p_1 + p_2 + \dots + p_s = m)$, l'integrale generale dell'equazione (38) ha l'espressione

$$y(x) = \sum_{k=1}^{s} e^{\varrho_k x} (c_0^{(k)} + c_1^{(k)} x + \dots + c_{p_k-1}^{(k)} x^{p_k-1}),$$

con le $c_0^{(k)}, c_1^{(k)}, \dots, c_{p_k-1}^{(k)}$, $(k = 1, 2, \dots, s)$, costanti arbitrarie.

§ 2. - Il calcolo delle matrici per la determinazione delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti variabili.

1. Cenni sul calcolo delle matrici. - 2. Serie matrizante di una matrice quadrata. - 3. Metodo di PEANO-BAKER.

1. - Vogliamo dare alcuni cenni sul « *calcolo delle matrici* » (1) per potere esporre nel n. 3 la dimostrazione di PEANO del teorema di esistenza della soluzione di CAUCHY dei sistemi di equazioni differenziali lineari, fondata sul metodo delle sostituzioni successive (2). Il lettore noterà come l'algoritmo delle matrici permetta di conseguire la costruzione della soluzione di CAUCHY in modo rapido ed elegante; la costruzione ha pure interesse dal punto di

(1) Cfr. G. SCORZA: *Corpi numerici e algebre* (Messina, 1921), pp. 139-168; L. SCHLESINGER: *Einführung in die Theorie der gewöhnlicher Differentialgleichungen* (Berlin, 1922), pp. 132-143; G. JULIA: *Introduction mathématique aux théories quantiques*, I, (Paris, 1936), pp. 109-110; R. A. FRAZER, W. J. DUNCAN, A. R. COLLAR: *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations* (Cambridge, 1938).

(2) Cfr. Cap. I, § 3, n. 2, nota (1) di p. 8.

vista numerico, in quanto ogni passo del procedimento consente di trovare simultaneamente tutti i termini delle funzioni incognite corrispondenti ad un medesimo ordine di approssimazione.

a) Una matrice di m righe ed n colonne

$$A = \begin{Vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2},\dots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2},\dots, & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}, & a_{m,2},\dots, & a_{m,n} \end{Vmatrix}$$

si indica col simbolo $A = \|a_{i,k}\|$, e si dice del *tipo* (m, n).

I numeri $a_{i,k}$, reali o complessi, si dicono *elementi*, o *termini* della matrice.

Due matrici dello stesso tipo si dicono *simili*.

Due matrici simili $A = \|a_{i,k}\|$, $B = \|b_{i,k}\|$ si dicono *uguali* se

$$a_{i,k} = b_{i,k}, \qquad (i = 1, 2,\dots, m\,;\ k = 1, 2,\dots, n).$$

Una matrice di tipo (m, m) si dice *quadrata* di ordine m.

Se $A = \|a_{i,k}\|$, $(i, k = 1, 2,\dots, m)$, è una matrice quadrata, come è noto dall'algebra, chiamasi *determinante della matrice quadrata* la somma $\sum (-1)^s a_{1,J_1}\, a_{2,J_2} \dots a_{m,J_m}$ estesa a tutte le permutazioni $J_1, J_2,\dots, J_m$ degli m numeri $1, 2,\dots, m$, indicando s le inversioni della permutazione $J_1, J_2,\dots, J_m$ rispetto alla permutazione fondamentale $1, 2,\dots, m$. Scriveremo

$$\text{det. } A = \sum (-1)^s a_{1,J_1}\, a_{2,J_2} \dots a_{m,J_m} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2},\dots, & a_{1,m} \\ a_{2,1}, & a_{2,2},\dots, & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}, & a_{m,2},\dots, & a_{m,m} \end{vmatrix} = |a_{i,k}| \quad (^1).$$

Una matrice quadrata, il cui determinante sia diverso da zero si dice *regolare*; si dice invece *irregolare* (*singolare, degenere*) se il suo determinante è nullo.

---

(1) D'ora in avanti per indicare le matrici useremo il segno $\| \ \|$, e per i determinanti delle matrici quadrate il segno $| \ |$.

Le matrici quadrate

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & a_{n,n} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

si dicono rispettivamente *matrice diagonale, matrice unità, matrice nulla*. La matrice unità si indica col simbolo 1, la nulla col simbolo 0.

b) Chiamasi *somma* [*differenza*] di due matrici simili $A=\|a_{i,k}\|$, $B=\|b_{i,k}\|$, e si indica col simbolo $A+B$ [$A-B$], la matrice che ha per elementi $a_{i,k}+b_{i,k}$ [$a_{i,k}-b_{i,k}$]; quindi

$$A+B=\|a_{i,k}+b_{i,k}\|, \qquad A-B=\|a_{i,k}-b_{i,k}\|.$$

Se α è un numero reale o complesso, chiamasi *prodotto scalare della matrice* $A=\|a_{i,k}\|$ *per lo scalare* α, e si indica con uno dei simboli αA, $A\alpha$, la matrice $\|\alpha a_{i,k}\|$, cioè

$$\alpha A = A\alpha = \begin{Vmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} \ldots & \alpha a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} \ldots & \alpha a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{n,1} & \alpha a_{n,2} \ldots & \alpha a_{n,n} \end{Vmatrix}.$$

c) Siano date due matrici

$$A=\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \ldots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \ldots & a_{m,n} \end{Vmatrix}, \qquad B=\begin{Vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \ldots & b_{1,r} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \ldots & b_{2,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} \ldots & b_{n,r} \end{Vmatrix},$$

dei tipi (m, n), (n, r), cioè il numero delle colonne di A sia uguale al numero delle righe di B. Chiamasi *prodotto della matrice A per la matrice B*, e si indica col simbolo AB, la matrice $AB=C=\|c_{i,k}\|$ di tipo (m, r) nella quale l'elemento $c_{i,k}$ è il prodotto della riga i^{esima} di A per la colonna k^{esima} di B; in simboli

$$c_{i,k}=a_{i,1}\,b_{1,k}+a_{i,2}\,b_{2,k}+\ldots+a_{i,n}\,b_{n,k}=\sum_{\nu=1}^{n} a_{i,\nu}\,b_{\nu,k}.$$

Se

$$A=\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \dots & a_{m,n} \end{Vmatrix}, \quad X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix},$$

il prodotto $AX=Y$ è quindi una matrice di tipo $(m, 1)$, e se

$$Y=\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{Vmatrix},$$

si avrà

$$y_i=a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\dots+a_{i,n}x_n, \qquad (i=1, 2, \dots, m).$$

Se A e B sono due matrici dei tipi (m, n), (n, m) possono effettuarsi i due prodotti AB, BA. In generale è $AB \neq BA$, cioè ***il prodotto di due matrici non gode la proprietà commutativa.***

Questo fatto è evidente se $m \neq n$, in quanto AB e BA sono matrici quadrate rispettivamente degli ordini m, n. Lo stesso fatto, vale in generale, se $m=n$; così ad esempio se

$$A=\begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ 2, & 3 \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} 3, & 1 \\ 2, & 0 \end{Vmatrix},$$

si ha

$$AB=\begin{Vmatrix} 2, & 0 \\ 12, & 2 \end{Vmatrix}, \quad BA=\begin{Vmatrix} 2, & 6 \\ 0, & 2 \end{Vmatrix}.$$

Se A e B sono due matrici quadrate simili, dal teorema di Binet si ha

$$\text{det. } A \times \text{det. } B = \text{det. } AB.$$

Si osservi che è

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \dots & a_{m,n} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \alpha & 0 \dots & 0 \\ 0 & \alpha \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \alpha \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1,1}\alpha & a_{1,2}\alpha \dots & a_{1,n}\alpha \\ a_{2,1}\alpha & a_{2,2}\alpha \dots & a_{2,n}\alpha \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1}\alpha & a_{m,2}\alpha \dots & a_{m,n}\alpha \end{Vmatrix} = A\alpha,$$

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \dots & 0 \\ 0 & \alpha \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \alpha \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \dots & a_{m,n} \end{Vmatrix} = \alpha A,$$

e ne viene che il prodotto scalare della matrice A per lo scalare α vale il prodotto della matrice A per la matrice diagonale

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \dots & 0 \\ 0 & \alpha \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \alpha \end{Vmatrix}.$$

D'ora in avanti se $A = \|a_{i,k}\|$, $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ è una matrice quadrata, e α uno scalare, il simbolo $\alpha + A$ indica la somma della matrice diagonale

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \dots & 0 \\ 0 & \alpha \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \alpha \end{Vmatrix}$$

di tipo (n, n) con A, talchè $\alpha + A = \|\alpha\varepsilon_{i,k} + a_{i,k}\|$ dove $\varepsilon_{i,k} = 0$ per $i \neq k$, $\varepsilon_{i,i} = 1$.

Se A, B, C, D,.... sono delle matrici rispettivamente dei tipi (m, n), (n, p), (p, q), (q, r),.... porremo per definizione

$$ABC = (AB)C, \qquad ABCD = (ABC)D, \dots$$

Si verifica facilmente che $(AB)C = A(BC)$, cioè il *prodotto di matrici gode la proprietà associativa.*

Sussiste pure la *legge distributiva del prodotto rispetto alla somma*

$$(A + B)C = AC + BC, \qquad C(A + B) = CA + CB.$$

Un prodotto AB può essere nullo, senza che siano nulle le matrici A e B; così ad esempio se

$$A = \begin{Vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}, \quad \text{è} \quad AB = \begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Si osservi però che *se A e B sono due matrici quadrate simili, se $AB = 0$, e se il determinante di uno dei fattori* ad es. det. A *è diverso da zero, allora è nulla la matrice B.* Infatti se det. $A \neq 0$, il sistema lineare omogeneo

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{1,k} + a_{i,2}\, b_{2,k} + \dots + a_{i,n}\, b_{n,k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

non ha nelle $b_{1,k}$, $b_{2,k}$,...., $b_{n,k}$ altra soluzione che la nulla.

d) Se A è una matrice quadrata porremo per definizione

$$A^0=1, \qquad A^1=A,$$
$$A^n=A^{n-1}A, \qquad (n=2, 3,\dots),$$

e diremo A^n la *potenza con l'esponente n della matrice A.*

A motivo della legge associativa del prodotto si ha

$$A^m A^n = A^{m+n}.$$

Se A è una matrice quadrata e $p_0, p_1,\dots, p_n$ sono scalari, la somma $\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu A^\nu$ rappresenta una matrice che indicheremo brevemente col simbolo $P(A)$; e si dirà anche che $P(A)$ è un *polinomio in A.*

e) La matrice quadrata $A=\|a_{i,k}\|$, $(i, k=1, 2,\dots, n)$ sia regolare, sia cioè det. $A=D\neq 0$; esiste allora una e una sola matrice B tale che $AB=1$.

Infatti il sistema lineare $[\varepsilon_{i,k}=0$ per $i\neq k$; $\varepsilon_{i,i}=1]$

$$a_{i,1}b_{1,k}+a_{i,2}b_{2,k}+\dots+a_{i,n}b_{n,k}=\varepsilon_{i,k}, \qquad (i=1, 2,\dots, n),$$

ammette una e una soluzione data da

$$b_{1,k}=\frac{A_{k,1}}{D}, \quad b_{2,k}=\frac{A_{k,2}}{D},\dots, \quad b_{n,k}=\frac{A_{k,n}}{D}, \qquad (k=1, 2,\dots, n)$$

dove con $A_{k,l}$ abbiamo indicato il complemento algebrico di $a_{k,l}$ nel determinante A.

Se $AB=1$, diremo B la *matrice reciproca* (*inversa*) di A, o la matrice con l'esponente -1 di A; abbiamo quindi per definizione $AA^{-1}=1$.

Si verifica immediatamente che $A^{-1}A=1$.

Se A è una matrice regolare, e se m è intero positivo, porremo ancora per definizione $A^{-m}=(A^{-1})^m$, ed è facile allora verificare che $A^mA^n=A^{m+n}$ con gli esponenti m ed n interi qualsiasi.

f) Se $A=\|a_{i,k}\|$ è una matrice quadrata di ordine n, ognuno degli n valori di λ soddisfacente l'equazione

$$\text{det.}\,|\lambda-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{1,1}, & -a_{1,2},\dots, & -a_{1,n} \\ -a_{2,1}, & \lambda-a_{2,2},\dots, & -a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1}, & -a_{n,2},\dots, & \lambda-a_{n,n} \end{vmatrix}=0,$$

cioè ognuno degli n valori di λ per i quali la matrice $\lambda - A$ è degenere, prende il nome di *valore caratteristico* della matrice A; il loro insieme chiamasi *spettro della matrice.*

g) Chiamasi *valore assoluto di una matrice* $A = \| a_{i,k} \|$, $(i=1, 2,\dots, m;\ k=1, 2,\dots, n)$, il numero non negativo, che indicheremo col simbolo $|A|$ tale che

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,k} a_{i,k}^2} \quad [1].$$

Ne viene che per ogni elemento $a_{i,k}$ della matrice A è $|a_{i,k}| \leqslant |A|$.

Chiamasi *distanza di due matrici simili* A e B, e si indica con $\Delta(A, B)$, il numero $|B-A|$.

Si ha evidentemente $\Delta(B, A)=0$, allora e allora soltanto che sia $A=B$.

Sussistono le disuguaglianze

(1) $\qquad |A+B| \leqslant |A| + |B|, \qquad$ [*disuguaglianza triangolare*].

e se A è del tipo (m, n) e B del tipo (n, p)

(2) $\qquad |AB| \leqslant |A| \cdot |B|, \qquad$ [*disuguaglianza del prodotto*].

La (1) si prova nel seguente modo. È

$$|A+B|^2 = \sum_i^{1\dots m} \sum_k^{1\dots n} |a_{i,k} + b_{i,k}|^2 \leqslant \sum_i^{1\dots m} \sum_k^{1\dots n} (|a_{i,k}| + |b_{i,k}|)^2$$

$$\leqslant A^2 + B^2 + 2 \sum_i^{1\dots m} \sum_k^{1\dots n} |a_{i,k}|\,|b_{i,k}|,$$

ma per la limitazione di LAGRANGIA si ha

$$\Big(\sum_i^{1\dots m} \sum_k^{1\dots n} |a_{i,k}|\,|b_{i,k}|\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_i^{1\dots m} \sum_k^{1\dots n} |a_{i,k}|^2\Big)\Big(\sum_i^{1\dots m} \sum_k^{1\dots n} |b_{i,k}|^2\Big) = A^2 B^2,$$

perciò $|A+B|^2 \leqslant A^2 + B^2 + 2|A|\,|B|$, da cui la (1).

---

[1] G. FROBENIUS: *Über der Rang einer Matrix.* « Sitzber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss. zu Berlin » (1911), pp. 20-29, 128-129.

Per provare la (2) occorre far vedere che

$$\sum_i^{1\dots m}\sum_k^{1\dots p}\Big(\sum_\nu^{1\dots n} a_{i,\nu}\, b_{\nu,k}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_i^{1\dots m}\sum_k^{1\dots n}|a_{i,k}|^2\Big)\Big(\sum_i^{1\dots n}\sum_k^{1\dots p}|b_{i,k}|^2\Big).$$

Si ha per la disuguaglianza di LAGRANGIA

$$\Big(\sum_\nu^{1\dots n}|a_{i,\nu}\, b_{\nu,k}|\Big)^2 \leqslant \sum_\nu^{1\dots n}|a_{i,\nu}|^2 \sum_\nu^{1\dots n}|b_{\nu,k}|^2,$$

e sommando rispetto all'indice i da 1 a m, e rispetto all'indice k da 1 a p

$$\sum_i^{1\dots m}\sum_k^{1\dots p}\Big(\sum_\nu^{1\dots n}|a_{i,\nu}\, b_{\nu,k}|\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_i^{1\dots m}\sum_\nu^{1\dots n}|a_{i,\nu}|^2\Big)\Big(\sum_\nu^{1\dots n}\sum_k^{1\dots p}|b_{\nu,k}|^2\Big) = A^2\cdot B^2,$$

perciò

$$\sum_i^{1\dots m}\sum_k^{1\dots p}\Big(\sum_\nu^{1\dots n} a_{i,\nu}\, b_{\nu,k}\Big)^2 \leqslant \sum_i^{1\dots m}\sum_k^{1\dots p}\Big(\sum_\nu^{1\dots n}|a_{i,\nu}\, b_{\nu,k}|\Big)^2 \leqslant A^2\cdot B^2, \qquad \text{c. v. d.}$$

h) Data una successione di matrici $A^{(0)}, A^{(1)},\dots, A^{(\nu)},\dots$ simili, di tipo (m, n),

$$A^{(\nu)} = \| a^{(\nu)}_{i,k} \|, \qquad (i=1, 2,\dots, m;\ k=1, 2,\dots, n),$$

se le mn successioni $\{ a^{(\nu)}_{i,k} \}$ sono convergenti quando $\nu \to \infty$, posto

$$\lim_{\nu\to\infty} a^{(\nu)}_{i,k} = a_{i,k}, \qquad (i=1, 2,\dots, m;\ k=1, 2,\dots, n),$$

diremo che *la matrice $A = \| a_{i,k} \|$ è il limite della successione* $\{ \| a^{(\nu)}_{i,k} \| \}$, e scriveremo

$$\lim_{\nu\to\infty} A^{(\nu)} = A.$$

Così pure data la successione di matrici $\{ A^{(\nu)} \}$, di tipo (m, n), se le mn serie

$$a^{(0)}_{i,k} + a^{(1)}_{i,k} + \dots + a^{(\nu)}_{i,k} + \dots, \qquad (i=1, 2,\dots, m;\ k=1, 2,\dots, n),$$

sono convergenti, posto

$$a_{i,k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{(\nu)}_{i,k},$$

diremo che la matrice $A=\|a_{i,k}\|=\|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{i,k}^{(\nu)}\|$ è la *somma della serie convergente di matrici* $A^{(0)}+A^{(1)}+....+A^{(\nu)}+....$, e scriveremo

$$A=A^{(0)}+A^{(1)}+....+A^{(\nu)}+.... .$$

Diremo poi che questa serie è *assolutamente convergente*, se risultano convergenti le mn serie $\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{i,k}^{(\nu)}|$.

Vogliamo dimostrare che *se A è una matrice quadrata, e $|A|$ è il suo valore assoluto, la serie*

(3) $$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{A^{\nu}}{\lambda^{\nu+1}},$$

converge assolutamente per tutti i valori di λ tali che $|\lambda|>|A|$.

Posto $A^{\nu}=\|a_{i,k}^{(\nu)}\|$ si ha $|a_{i,k}^{(\nu)}|\leqslant|A^{\nu}|\leqslant|A|^{\nu}$, quindi la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{i,k}^{(\nu)}\lambda^{-(\nu+1)}|$ è minorante della serie della progressione geometrica $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|A|^{\nu}}{|\lambda|^{\nu+1}}$, la quale per $|\lambda|>|A|$ risulta convergente.

Il risultato può essere approfondito; si può dimostrare che se λ_1, λ_2,...., λ_n formano lo spettro della matrice A, posto $\varrho=\max(|\lambda_1|,|\lambda_2|,....,|\lambda_n|)$, le serie $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{i,k}^{(\nu)}/\lambda^{\nu+1}$ sono assolutamente convergenti per $|\lambda|>\varrho$; assolutamente convergente risulta quindi la serie (3) [1].

Sia

(4) $$G(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}g_{\nu}z^{\nu}$$

una serie di potenze avente il suo raggio di convergenza $R>\varrho$, cioè *il cerchio di convergenza della serie* (4) *contenga nel suo*

---

[1] Cfr. G. Julia: op. cit., p. 101.

interno lo spettro della matrice quadrata A; vogliamo allora dimostrare che la serie di matrici

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu A^\nu \tag{5}$$

è assolutamente convergente.

Sia infatti ε un numero positivo tale che $\varrho+\varepsilon<R$; a motivo della convergenza delle serie $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_{i,k}^{(\nu)}||\lambda|^{-(\nu+1)}$ per $|\lambda|>\varrho$, esiste una costante a tale che $|a_{i,k}^{(\nu)}|<a(\varrho+\varepsilon)^{\nu+1}$, e perciò

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |g_\nu a_{i,k}^{(\nu)}| \leq a(\varrho+\varepsilon) \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_\nu|(\varrho+\varepsilon)^\nu < +\infty, \qquad \text{c. v. d.}$$

In particolare se $G(z)$ è una trascendente intera, qualunque sia la matrice quadrata A, la serie (5) è assolutamente convergente. Tale è ad esempio la serie di matrici

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!}$$

che si indica col simbolo e^A; abbiamo posto cioè per definizione

$$e^A = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!}.$$

Se A e B sono due matrici quadrate simili, e permutabili, si ha

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

Infatti se A e B sono permutabili, qualunque siano gli interi positivi r, s si ha $A^r B^s = B^s A^r$, e allora effettuando il prodotto secondo Cauchy delle due serie di matrici $\sum\limits_{r=0}^{\infty} A^r/r!$, $\sum\limits_{s=0}^{\infty} B^s/s!$, si otterrà appunto $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (A+B)^\nu/\nu! = e^{A+B}$.

i) Si abbia una matrice $A(x) = \|a_{i,k}(x)\|$ di tipo (m, n), i cui elementi siano funzione della variabile indipendente x; si ha

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \left\| \frac{a_{i,k}(x+h)-a_{i,k}(x)}{h} \right\|,$$

e perciò perchè esista il $\lim_{h\to 0}[A(x+h)-A(x)]/h$ è necessario e basta che gli mn elementi $a_{i,k}(x)$ siano derivabili nel punto x. Diremo che la matrice $\| da_{i,k}/dx \|$ è la *matrice derivata* di A rispetto ad x, e scriveremo

$$\frac{dA}{dx}=\left\|\frac{da_{i,k}}{dx}\right\|.$$

Si verifica facilmente che

$$\frac{d}{dx}(A+B)=\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}(AB)=A\frac{dB}{dx}+B\frac{dA}{dx}.$$

Sia $A(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} A^{(\nu)}(x)$, le matrici $A^{(\nu)}(x)$ siano derivabili in un intorno I di x_0, e la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} dA^{(\nu)}(x)/dx$ sia *uniformemente convergente in* I, [scelto cioè un numero $\varepsilon>0$, e arbitrario, si possa corrispondentemente trovare un ν_0 tale che risulti

$$\left|\frac{da_{i,k}^{(\nu_0+p)}}{dx}+\frac{da_{i,k}^{(\nu_0+p+1)}}{dx}+\dots\right|<\varepsilon, \qquad [p=0,1,\dots],$$

ovunque sia x in I]. Applicando allora il noto teorema di derivazione per serie, risulta in queste ipotesi

$$\frac{dA}{dx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{dA^{(\nu)}}{dx}.$$

E ancora se $A=\|a_{i,k}(x)\|$, e i suoi elementi sono funzioni olomorfe di x in un intorno I di a, in ogni punto x interno ad I vale lo sviluppo in serie di TAYLOR

$$A(x)=A(a)+A'(a)\frac{x-a}{1!}+A''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\dots.$$

l) Sia $A(x)=\|a_{i,k}(x)\|$, e le $a_{i,k}(x)$ siano funzioni reali della variabile reale x, integrabili in $(a-a,\,a+a)$, $a>0$; diremo la matrice $\left\|\int_a^x a_{i,k}(\tau)d\tau\right\|$, $a-a\leq x\leq a+a$, *l'integrale della matrice* $A(x)$ *tra* a *e* x, e indicheremo questa matrice con uno dei simboli

$\int_a^x A(\tau)d\tau$, $\overset{x}{\underset{a}{Q}}A(\tau)$.

Dalla definizione posta segue $\frac{d}{dx} \overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = A(x)$.

Se le $a_{i,k}(x)$ sono funzioni olomorfe di x in un dominio aperto e connesso C, ed a ed x sono due punti di C, si porrà ancora

$$\int_a^x A(\tau)d\tau = \overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = \left\| \int_a^x a_{i,k}(\tau)d\tau \right\|,$$

dove ognuno degli integrali può essere esteso a qualsiasi cammino di C congiungente a con x.

Se le $a_{i,k}(x)$ sono reali in $(a-\alpha, a+\alpha)$ [olomorfe in C] e ivi soddisfacenti le limitazioni

$$|a_{i,k}(x)| < L, \qquad (i=1, 2,\ldots, m;\ k=1, 2,\ldots, n)$$

si ha

$$\left| \int_a^x a_{i,k}(\tau)d\tau \right| < L|x-a|$$

e perciò per il valore assoluto di $\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau)$

$$|\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau)| < \sqrt{mn}\, L\, |x-a|.$$

2. - a) Se $A = \|a_{i,k}(x)\|$, $(i, k=1, 2,\ldots, m)$ è una matrice quadrata di ordine m, i cui elementi siano funzioni continue di x in un intervallo $(a-\alpha, a+\alpha)$, si ha per definizione

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = \left\| \int_a^x a_{i,k}(\tau)d\tau \right\|, \qquad a-\alpha < x < a+\alpha;$$

più in generale poniamo

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_1) \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = \int_a^x A(\tau_1)[\overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau)]d\tau,$$

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_2) \overset{\tau_2}{\underset{a}{Q}} A(\tau_1) \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = \int_a^x A(\tau_2)[\overset{\tau_2}{\underset{a}{Q}} A(\tau_1) \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau)]d\tau_2,$$

. . . .

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_n) \overset{\tau_n}{\underset{a}{Q}} A(\tau_{n-1}) \ldots \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = \int_a^x A(\tau_n)[\overset{\tau_n}{\underset{a}{Q}} A(\tau_{n-1}) \ldots \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau)]d\tau_n.$$

Diremo *serie matrizzante della matrice* A, e la indicheremo col simbolo $\overset{x}{\underset{a}{\Omega}} A(\tau)$, [1] la serie di matrici

$$(6)\quad \overset{x}{\underset{a}{\Omega}} A(\tau) = 1 + \overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau) + \overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_1) \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau) + \overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_2) \overset{\tau_2}{\underset{a}{Q}} A(\tau_1) \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau) + \ldots$$

dove nel secondo membro 1 indica la matrice unità di ordine m. [n. 1, a)].

I termini della matrice A soddisfino in tutto $(a-\alpha, a+\alpha)$ la limitazione

$$|a_{i,k}(x)| < L, \qquad (a-\alpha \leq x \leq a+\alpha),$$

i termini della matrice $\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau)$ sono allora in valore assoluto minori di $L|x-a|$, i termini della matrice $A(\tau_1)\overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau)$ sono minori di $mL|\tau_1-a|$ e perciò quelli della matrice

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_1) \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau)$$

sono in valore assoluto minori di $mL^2|x-a|^2/2!$, quelli di

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_2) \overset{\tau_2}{\underset{a}{Q}} A(\tau_1) \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau)$$

sono in valore assoluto minori di $m^2L^3|x-a|^3/3!$, e per induzione si ottiene che i termini della matrice

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_{n-1}) \overset{\tau_{n-1}}{\underset{a}{Q}} A(\tau_{n-2}) \ldots \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau)$$

sono tutti in valore assoluto minori di $m^{n-1}L^n|x-a|^n/n!$, talchè

$$\left| \overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_{n-1}) \overset{\tau_{n-1}}{\underset{a}{Q}} A(\tau_{n-2}) \ldots \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau) \right| < m^n L^n |x-a|^n/n!,$$

la serie dei valori assoluti dei termini della serie (6) è minorante della serie

$$m^{1/2} + mL\frac{|x-a|}{1!} + m^2L^2\frac{|x-a|^2}{2!} + \ldots + m^nL^n\frac{|x-a|^n}{n!} + \ldots,$$

---

[1] Cfr. H. G. Baker: *On the integration of linear differential equations.* « Proc. of the London Math. Soc. » (1), 35 (1903), (pp. 333-378), 335.

e la serie (6) è perciò assolutamente e uniformemente convergente $(a-a, a+a)$.

b) Vogliamo ora osservare una proprietà di $\overset{x}{\underset{a}{\Omega}} A(\tau)$ di cui ci gioveremo tra poco.

Derivando la (6) termine a termine si ottiene la serie

$$A(x)+A(x)\overset{x}{\underset{a}{Q}}A(\tau)+A(x)\overset{x}{\underset{a}{Q}}A(\tau_1)\overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}}A(\tau)+A(x)\overset{x}{\underset{a}{Q}}A(\tau_2)\overset{\tau_2}{\underset{a}{Q}}A(\tau_1)\overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}}A(\tau)+\cdots$$

la quale a motivo della (2) del n. 1 *g*) è anch'essa uniformemente (e assolutamente) convergente in $(a-a, a+a)$, perciò

$$\frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{\Omega}}A(\tau)=A(x)\overset{x}{\underset{a}{\Omega}}A(\tau). \tag{7}$$

3. - *a*) Siamo in grado di esporre il così detto metodo di integrazione di PEANO-BAKER di sistemi di equazioni differenziali lineari mediante sostituzioni successive.

Il metodo fu ideato da G. PEANO nel 1887 [1] e per la dimostrazione egli si valse del calcolo dei numeri complessi ad m unità, o ciò che è lo stesso egli si costruì un calcolo delle matrici. Nel 1903, H. F. BAKER [2], indipendentemente da G. PEANO, ritrovò e sviluppò il procedimento di PEANO, e ne è derivato il così detto metodo di integrazione di PEANO-BAKER che qui andiamo ad esporre.

---

(1) G. PEANO: *a*) *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari.* « Atti della R. Acc. Sc. Torino », 22 (20 febbraio 1887), pp. 293-302. La nota, con poche modificazioni, fu pubblicata nei « Math. Ann. », 32 (1888), pp. 450-456. [Cfr. nota (1) di p. 8 del n. 2 del § 3, Cap. I].

Poco dopo V. VOLTERRA nelle « Memorie della Società Ital. delle Scienze », (3), VI, (22 giugno 1887), pp. 1-107, pubblicava le sue ricerche: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*, e notava [Cfr. p. 14]: *Il calcolo differenziale e integrale relativo alle sostituzioni ci fornisce la teoria generale delle equazioni differenziali lineari.* Cfr. anche V. VOLTERRA: *Sui fondamenti....*, « Memorie della Società Ital. delle Scienze », (3), XII (1902), pp. 1-68.

(2) Cfr. il lavoro citato nel n. 2, *a*); cfr. anche H. F. BAKER: *Note on the integration of linear differential equations.* « Proc. of the London Math. Soc. », (2), (1905), pp. 293-296.

Per ulteriori applicazioni della teoria delle matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari cfr. *a*) J. A. LAPPO-DANILEWSKY: *Mémoires sur la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires.* « Trav. Inst. phys.-

b) Sia dato il sistema lineare omogeneo

$$(8_1)\qquad \frac{dy_i}{dx}=\sum_{k=1}^{m} a_{i,k}(x)y_k, \qquad (i=1\ 2,\dots, m),$$

dove la $a_{i,k}(x)$ sono funzioni continue di x in $(a-\alpha, a+\alpha)$, e si voglia determinare un sistema di integrali che soddisfi le condizioni iniziali

$$(8_2)\qquad y_i(a)=y_i^0, \qquad [i=1, 2\dots, m].$$

Posto

$$(9)\qquad A=\| a_{i,k}(x)\|, \qquad Y(x)=\begin{Vmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots\dots \\ y_m(x) \end{Vmatrix}, \qquad Y^0=\begin{Vmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \dots \\ y_m^0 \end{Vmatrix},$$

il sistema (8) si scrive

$$(10)\qquad \frac{dY}{dx}=AY, \qquad Y(a)=Y^0,$$

e a motivo della (7) si ha senz'altro che il sistema (10) ammette la soluzione

$$(11)\qquad Y=[\overset{x}{\underset{a}{\Omega}} A(\tau)]Y^0.$$

Abbiamo così dato la dimostrazione dell'esistenza della soluzione di CAUCHY del sistema (10); l'unicità segue dalle cose dette nel Cap. I, § 3, n. 3.

c) Notiamo che se la matrice A è a termini costanti, se cioè il sistema (8_1) è a coefficienti costanti, si ha

$$\overset{x}{\underset{a}{\Omega}} A(\tau)=1+A\,\frac{x-a}{1!}+A^2\,\frac{(x-a)^2}{2!}+\dots+A^n\,\frac{(x-a)^n}{n!}+\dots$$

e la soluzione del sistema (8_1), (8_2) assume la forma semplicissima

$$Y=e^{A(x-a)}Y^0,$$

---

math. Stekloff », 6 (1934), pp. 1-256; *b*) G. ZWIRNER: *La teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali lineari*. « Rend. Sem. Padova », 7 (1936), pp. 55-109; *c*) S. CHERUBINO: *Applicazioni delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari*. « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », (6), 25 (1937), pp. 541-547, 686-690.

la quale rappresenta appunto la soluzione del sistema (10), quando supposto A costante, si faccia la risoluzione formale dell'equazione stessa ([1]).

§ 3. - Particolari trasformazioni delle equazioni differenziali lineari omogenee.

1. Trasformazione delle equazioni lineari omogenee di ordine n in equazioni di ordine $n-1$. - 2. Le equazioni differenziali lineari del secondo ordine e l'equazione di RICCATI. - 3. Le equazioni differenziali lineari col coefficiente del termine di ordine $n-1$ uguale alla derivata di quello di ordine n.

1. - Sia data l'equazione differenziale lineare omogenea

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

dove $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sono funzioni continue di x in un intervallo (a, b), $a_0 \neq 0$ in (a, b); vogliamo verificare che *assumendo come nuova funzione incognita la funzione z legata alla y della relazione*

$$y = e^{\int z dx} \tag{2}$$

la (1) *si cangia in un'equazione di ordine $n-1$* (non lineare).

Si ha infatti

$$y' = e^{\int z dx} z, \quad y'' = e^{\int z dx}(z^2 + z'), \quad y^{(3)} = e^{\int z dx}(z^3 + 3zz' + z''), \dots$$

e sostituendo nella (1) e dividendo per $e^{\int z dx}$ si otterrà per z un'equazione di ordine $n-1$.

2. - In particolare l'equazione del secondo ordine

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

con la trasformazione (2) si cangia nell'equazione di RICCATI ([2])

$$a_0 z' + a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0.$$

([1]) È anche da notare che la serie matrizzante del n. 2 si ottiene applicando il metodo delle sostituzioni successive all'equazione (10), quando nei termini via via ottenuti si ponga, a destra, a fattor comune, Y^0.

([2]) J. F. RICCATI: T. 8 dei supplementi agli « Acta Eruditorum » 2° fasc., (1723). L'equazione proposta da RICCATI ha la forma $nx^{m+n-1} = u' + u^2 x^{-n}$.

Inversamente l'equazione RICCATI

$$z' + Lz^2 + Mz + N = 0,$$

$L \neq 0$ in (a, b) e ivi derivabile, con la trasformazione [1]

$$y = e^{\int Lz dx}$$

si muta nell'equazione lineare del secondo ordine

$$y'' + \left(M - \frac{L'}{L}\right)y' + LNy = 0.$$

3. - *a*) Osserviamo ancora una trasformazione delle equazioni lineari utile talvolta nelle applicazioni.

Sia $\lambda(x)$ una funzione non nulla in (a, b); moltiplicando la (1) per $\lambda(x)$ si ha l'equazione equivalente

$$(\lambda a_0)y^{(n)} + (\lambda a_1)y^{(n-1)} + \dots + (\lambda a_{n-1})y' + (\lambda a_n)y = 0$$

e *se vogliamo che nella nuova equazione il coefficiente del termine di ordine* $n-1$ *sia la derivata di quello di ordine* n basterà scegliere il moltiplicatore $\lambda(x)$ in guisa che $\lambda a_1 = (\lambda a_0)'$, $a_1/a_0 = (\lambda a_0)'/(\lambda a_0)$

(3) $$\lambda = \frac{c}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \qquad (c = \text{cost.}).$$

b) Ad es. l'equazione

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

moltiplicando per $e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}/a_0$ acquista la forma [*autoaggiunta*, § 5, n. 3, *b*)]

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \frac{dy}{dx}\right] + \frac{a_2}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} y = 0.$$

[1] Per questa trasformazione cfr. ad es. G. DARBOUX: *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*, I (2ª ed., Paris, 1914) p. 34.

§ 4. - Normalizzazione relativa e normalizzazione canonica delle equazioni differenziali lineari omogenee.

1. Normalizzazione relativa e semiinvarianti differenziali. - 2. Cangiamento della variabile indipendente. - 3. Normalizzazione canonica di LAGUERRE-FORSYTH. - 4. Trasformazioni delle equazioni del secondo e terzo ordine.

1. - a) Se nell'equazione (1) del § 3 dividiamo per a_0, l'equazione assume la forma

$$(1)\qquad L(y)=y^{(n)}+\binom{n}{1}p_1y^{(n-1)}+\binom{n}{2}p_2y^{(n-2)}+\dots+ \\ +\binom{n}{n-1}p_{n-1}y'+\binom{n}{n}p_ny=0 \quad (^1)$$

e noi supporremo in questi numeri e nei seguenti che *i coefficienti $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ siano funzioni della x aventi in (a, b) tutte le derivate che ci occorrerà considerare.*

Consideriamo la classe delle trasformazioni definite dalla relazione

$$y=tu$$

ove t è una funzione *nota* della x avente in (a, b) derivate fino all'ordine n e studiamo la corrispondente trasformata della (1).

Si ha

$$L(tu)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(tu)^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k\sum_{r=k}^{n}\binom{n-k}{n-r}t^{(r-k)}u^{(n-r)} \\ =\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}\binom{r}{k}p_kt^{(r-k)}u^{(n-r)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left[\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}p_kt^{(r-k)}\right]u^{(n-r)},$$

perciò

$$(2)\qquad \frac{1}{t}L(tu)=u^{(n)}+\binom{n}{1}\pi_1u^{(n-1)}+\binom{n}{2}\pi_2u^{(n-2)}+\dots+ \\ +\binom{n}{n-1}\pi_{n-1}u'+\binom{n}{n}\pi_nu$$

(1) $\binom{n}{0}=1$; $\binom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$, $(k=1, 2, \dots)$.

dove

$$(3)\qquad \pi_r = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}p_k t^{(r-k)} = \frac{1}{t}\left[\binom{r}{0}t^{(r)}+\binom{r}{1}p_1 t^{(r-1)}+\dots+\binom{r}{r}p_r t\right],$$

e in particolare

$$(4)\qquad \pi_1=[t'+p_1 t]/t.$$

Se scegliamo il fattore t in guisa che si abbia $t'+p_1t=0$, ovvero

$$(5)\qquad t=ce^{-\int p_1 dx}\qquad (c=\text{cost.})$$

nella (2) risulterà $\pi_1=0$. Facendo in particolare $c=1$ abbiamo che *la trasformazione* T

$$(5')\qquad T\sim y=e^{-\int p_1 dx}u$$

cangia la (1) *nell'equazione*

$$(6)\qquad \boxed{u^{(n)}+\binom{n}{2}P_2u^{(n-2)}+\dots+\binom{n}{n}P_nu=0}$$

dove

$$(7)\qquad P_r=e^{\int p_1dx}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}p_k\,\frac{d^{r-k}\left(e^{-\int p_1dx}\right)}{dx^{r-k}},\qquad (r=2,\dots,n).$$

Si ha in particolare

$$(8)\qquad \boxed{P_2=p_2-p_1^2-p_1',\qquad P_3=p_3-3p_1p_2+2p_1^3-p_1''}.$$

Col linguaggio della geometria proiettiva differenziale diremo che la trasformazione (5') effettua la *normalizzazione relativa* della (1) e che la (6) è la *forma semicanonica* della (3).

b) Osserviamo che qualunque sia la costante c, la (1) operando con la trasformazione $y=ce^{-\int p_1dx}u$ si muta nella (6) ed anche che *due forme semicanoniche trasformabili l'una nell'altra mediante una trasformazione del tipo $y=tu$ coincidono.*

Se ora trasformiamo $L(y)=0$ con la $T_1\sim y=h\bar{u}$ e riduciamo l'equazione trasformata alla forma semicanonica mediante la trasformazione $T_2\sim\bar{u}=lv$ otterremo l'equazione

$$(9)\qquad v^{(n)}+\binom{n}{2}\Pi_2v^{(n-2)}+\dots+\binom{n}{v}\Pi_nv=0$$

che dovrà coincidere con la (6); si passa infatti dalla forma semicanonica (6) alla semicanonica (9) con la trasformazione

$$T^{-1}T_1T_2 \sim u = \left(e^{\int p_1 dx} hl\right)v.$$

Abbiamo allora

$$P_k = \Pi_k \qquad k = 2, 3, \ldots, n$$

cioè *le* $n-2$ *quantiche* $P_2, P_3, \ldots, P_k$ *definite dalle* (7) *si comportano come invarianti rispetto alla classe di trasformazioni* $y = tu$; esse prendono il nome di *semiinvarianti differenziali.*

2. - a) Studiamo l'effetto sulle equazioni differenziali del cangiamento della variabile indipendente x nella variabite ξ legata alla x dalla relazione

$$\xi = \xi(x) \quad [1]. \tag{10}$$

Se *con i simboli* $y', y'', \ldots, y^{(n)}, \ldots; \xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n)}, \ldots$ *indichiamo le derivate di* y *e* ξ *rispetto ad* x si ha

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\,\frac{d\xi}{dx} = \xi'\,\frac{dy}{d\xi}$$

---

[1] L'importanza delle trasformazioni indicate nei nn. 1 e 2 deriva dal seguente teorema di STÄCKEL-LIE: La più generale trasformazione puntuale che muta un'equazione differenziale lineare di ordine $n > 3$ in un'equazione dello stesso tipo ha la forma

$$\xi = \xi(x), \qquad y = t(x)u. \tag{a}$$

[Cfr. E. J. WILCZYNSKI: *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces.* (Leipzig, B. G. Teubner, 1906), p. 14].

Avvertiamo il lettore che la locuzione « *semiinvarianti differenziali* » del n. 1 dipende dal fatto che gli « *invarianti differenziali assoluti* » dell'equazione (3) sono quelle funzioni dei coefficienti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e delle loro derivate che rimangono invariate di forma e di valore quando si effettui un cangiamento della variabile indipendente e della funzione incognita definito dalle (a).

Per la teoria dei semiinvarianti e degli invarianti differenziali il lettore potrà consultare il cap. II della citata opera di WILCZYNSKI; alle pp. 39-40 egli troverà citati i contributi alla questione di J. COCKLE, E. LAGUERRE, F. BRIOSCHI, A. R. FORSYTH, G. H. HALPHEN, C. L. BOUTON, G. FANO.

e con successive derivazioni troviamo

$$(11)\qquad \begin{cases} y' \;=\xi' \dfrac{dy}{d\xi} \\ y'' \;=(\xi')^2 \dfrac{d^2y}{d\xi^2} + \xi'' \dfrac{dy}{d\xi} \\ y^{(3)} = (\xi')^3 \dfrac{d^3y}{d\xi^3} + 3\xi'\xi'' \dfrac{d^2y}{d\xi^2} + \xi^{(3)} \dfrac{dy}{d\xi} \end{cases}$$

e in generale

$$(12)\qquad y^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_{m,k}}{k!} \frac{d^ky}{d\xi^k}, \qquad (m=1,\ 2,\ldots.)$$

dove le $A_{m,k}$ sono funzioni razionali intere delle derivate di $\xi(x)$.

Si ha

$$(13)\qquad \begin{cases} A_{1,1} = \xi'; \qquad \dfrac{A_{2,2}}{2!} = (\xi')^2, \quad \dfrac{A_{2,1}}{1!} = \xi''; \\ \dfrac{A_{3,3}}{3!} = (\xi')^3, \quad \dfrac{A_{3,2}}{2!} = 3\xi'\xi'', \quad \dfrac{A_{3,1}}{1!} = \xi^{(3)} \end{cases}$$

e vogliamo provare che in generale si ha

$$(14)\qquad A_{m,m} = (m!)(\xi')^m, \quad A_{m,1} = \xi^{(m)}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{A_{m,m-1}}{(m-1)!} = \dbinom{m}{2} \xi''(\xi')^{m-2}, \qquad (m=2,\ 3,\ldots.); \\ \dfrac{A_{m,m-2}}{(m-2)!} = \dbinom{m}{3} \xi^{(3)}(\xi')^{m-3} + 3\dbinom{m}{4}(\xi'')^2(\xi')^{m-4}, \quad (m=4,\ 5,\ldots.). \end{cases}$$

Derivando la (12) e *indicando con $A'_{m,k}$ la derivata di $A_{m,k}$ rispetto ad x*, abbiamo

$$\begin{aligned} y^{(m+1)} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{A_{m,k}}{k!} \frac{d^{k+1}y}{d\xi^{k+1}} \xi' + \sum_{k=1}^{m} \frac{A'_{m,k}}{k!} \frac{d^ky}{d\xi^k} \\ &= \frac{A_{m,m}}{m!} \xi' \frac{d^{m+1}y}{d\xi^{m+1}} + \sum_{k=2}^{m} \frac{A'_{m,k} + kA_{m,k-1}\xi'}{k!} \frac{d^ky}{d\xi^k} + A'_{m,1} \frac{dy}{d\xi} \end{aligned}$$

e perciò

$$(16)\qquad A_{m+1,m+1} = (m+1)A_{m,m}\xi', \quad A_{m+1,1} = A'_{m,1}$$

$$(17)\qquad A_{m+1,k} = A'_{m,k} + k\xi' A_{m,k-1}, \qquad (k=2,\ldots,\ m).$$

Dalle (13) si ha $A_{1,1} = \xi'$ quindi dalle (16) seguono le (14).

Abbiamo ora

$$\begin{aligned}
A_{m,k-1} &= A'_{m-1,k-1} + (k-1)\xi' A_{m-1,k-2} \\
A_{m-1,k-2} &= A'_{m-2,k-2} + (k-2)\xi' A_{m-2,k-3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{m-k+3,2} &= A'_{m-k+2,2} + 2\xi' A_{m-k+2,1} \\
A_{m-k+2,1} &= \qquad\qquad \xi^{(m-k+2)}
\end{aligned}$$

dalle quali moltiplicando la seconda per $(k-1)\xi'$, la terza per $(k-1)(k-2)(\xi')^2$,...., la penultima per $(k-1)(k-2)....\,3(\xi')^{(k-3)}$, l'ultima per $(k-1)(k-2)....\,3\cdot 2(\xi')^{k-2}$ e sommando

$$(18) \qquad \begin{aligned}
A_{m,k-1} = A'_{m-1,k-1} &+ (k-1)\xi' A'_{m-2,k-2} + \\
&+ (k-1)(k-2)(\xi')^2 A'_{m-3,k-3} + ... \\
&+ (k-1)(k-2)....\,3(\xi')^{k-3} A'_{m-k+2,2} + \\
&+ (k-1)!\ (\xi')^{k-2}\xi^{(m-k+2)}.
\end{aligned}$$

Da questa facendo $k=m$ e tenuto conto che $A'_{l,l}=(l!)l(\xi')^{l-1}\xi''$ otteniamo

$$\begin{aligned}
A_{m,m-1} = (m-1)!\ [(m-1)+(m-2)+.... \\
+2+1]\xi''(\xi')^{m-2} = (m-1)!\binom{m}{2}\xi''(\xi')^{m-2}
\end{aligned}$$

e perciò la prima delle (15).

Dalla (18) facendo $k=m-1$, tenuto conto della prima delle (15) e delle note proprietà dei coefficienti binomiali abbiamo

$$\begin{aligned}
A_{m,m-1} = A'_{m-1,m-2} &+ (m-2)\xi' A'_{m-2,m-3} + \\
&+ (m-2)(m-3)(\xi')^2 A'_{m-3,m-4} + ... \\
&+ (m-2)(m-3)....\,3(\xi')^{m-4} A'_{3,2} + (m-2)!\ (\xi')^{m-3}\xi^{(3)} = \\
&= (m-2)!\left[\binom{m-1}{2}+\binom{m-2}{2}+....+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}\right]\xi^{(3)}(\xi')^{m-3} \\
&+ 3(m-2)!\left[\binom{m-1}{3}+\binom{m-2}{3}+....+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}\right](\xi'')^2(\xi')^{m-4} \\
&= (m-2)!\left[\binom{m}{3}\xi^{(3)}(\xi')^{m-3}+3\binom{m}{4}(\xi'')^2(\xi')^{m-4}\right]
\end{aligned}$$

e quindi la seconda delle (15).

b) Sostituendo le (12) nella (1) otteniamo

$$L(y)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p_i y^{(n-i)}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}p_i\sum_{r=i}^{n-1}\frac{A_{n-i,\,n-r}}{(n-r)!}\,\frac{d^{n-r}y}{d\xi^{n-r}}+\binom{n}{n}p_n y$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}p_i\frac{A_{n-i,\,n-r}}{(n-r)!}\right]\frac{d^{n-r}y}{d\xi^{n-r}}+\binom{n}{n}p_n y\,;$$

nel secondo membro il coefficiente di $\frac{d^n y}{d\xi^n}$ è $p_0(\xi')^n[=(\xi')^n]$, la trasformata di $L(y)$ è quindi

$$\text{(19)}\qquad \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\bar p_r\,\frac{d^{n-r}y}{d\xi^{n-r}}=0,\qquad (\bar p_0=1,\ \bar p_n=p_n/(\xi')^n)$$

con

$$\text{(20)}\qquad \binom{n}{r}(\xi')^n\bar p_r=\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}p_i\,\frac{A_{n-i,\,n-r}}{(n-r)!},\qquad (r=0,1,2,\dots,n).$$

Abbiamo in particolare

$$\binom{n}{1}(\xi')^n\,\bar p_1=\binom{n}{0}\frac{A_{n,\,n-1}}{(n-1)!}+\binom{n}{1}p_1\,\frac{A_{n-1,\,n-1}}{(n-1)!}=\binom{n}{2}\xi''(\xi')^{n-2}+np_1(\xi')^{n-1}$$

ovvero posto

$$\text{(21)}\qquad \boxed{\xi''/\xi'=\eta}$$

$$\text{(22)}\qquad \boxed{\bar p_1=\frac{1}{\xi'}\left[\frac{n-1}{2}\,\eta+p_1\right]}.$$

Abbiamo anche

$$\binom{n}{2}(\xi')^n\bar p_2=\frac{A_{n,\,n-2}}{(n-2)!}+n\,\frac{A_{n-1,\,n-2}}{(n-2)!}\,p_1+\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{A_{n-2,\,n-2}}{(n-2)!}\,p_2$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,\xi^{(3)}(\xi')^{n-3}+\frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\,(\xi'')^2(\xi')^{n-4}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\,\xi''(\xi')^{n-3}p_1+\frac{n(n-1)}{2}\,(\xi')^{n-2}p_2,$$

e perciò

$$\bar p_2=\frac{1}{(\xi')^2}\left[p_2+(n-2)p_1\,\frac{\xi''}{\xi'}+\frac{n-2}{3}\,\frac{\xi^{(3)}}{\xi'}+\frac{(n-2)(n-3)}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right]$$

ma la (21) derivando *rispetto ad* x dà

$$\eta'+\eta^2=\xi^{(3)}/\xi'$$

quindi

$$(23)\qquad \boxed{\bar{p}_2 = \frac{1}{(\xi')^2}\left[p_2 + (n-2)p_1\eta + \frac{(n-2)(3n-5)}{-12}\eta^2 + \frac{n-2}{3}\eta'\right]}.$$

Con facili calcoli si troverà ancora per il semiinvariante $\bar{P}_2$ della (19)

$$\bar{P}_2 = \bar{p}_2 - \bar{p}_1^2 - \frac{d\bar{p}_1}{d\xi}$$

l'espressione di cui faremo uso nel n. 3

$$(24)\qquad \boxed{\bar{P}_2 = \frac{1}{(\xi')^2}\left[P_2 + \frac{n+1}{12}\eta^2 - \frac{n+1}{6}\eta'\right]},$$

dove η' ***indica la derivata di*** η ***rispetto ad*** x.

3. - Vogliamo provare che data l'equazione

$$(1)\qquad y^{(n)} + \binom{n}{1}p_1 y^{(n-1)} + \binom{n}{2}p_2 y^{(n-2)} + \binom{n}{3}p_3 y^{(n-3)} + \dots + \binom{n}{n-1}p_{n-1}y' + \binom{n}{n}p_n y = 0$$

operando su di essa *successivamente con le trasformazioni indicate nei* nn. 1, 2 *può ottenersi un'altra equazione priva dei termini in* $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$.

Con la trasformazione

$$y = e^{-\int p_1 dx}\,\bar{y}$$

otteniamo la forma semicanonica

$$\bar{y}^{(n)} + \binom{n}{2}P_2\bar{y}^{(n-2)} + \binom{n}{3}P_3\bar{y}^{(n-3)} + \dots + \binom{n}{n-1}P_{n-1}\bar{y}' + P_n\bar{y} = 0$$

con

$$P_2 = p_2 - p_1^2 - p_1', \qquad P_3 = p_3 - 3p_1p_2 + 2p_1^3 - p_1''.$$

Operiamo su questa con la trasformazione $\bar{y} = \lambda u$ ove λ è una funzione che determineremo tra poco opportunamente, abbiamo

$$u^{(n)} + \binom{n}{1}\pi_1 u^{(n-1)} + \binom{n}{2}\pi_2 u^{(n-2)} + \dots + \binom{n}{n-1}\pi_{n-1}u' + \binom{n}{n}\pi_n u = 0$$

e per le (8)

$$(25)\qquad \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\lambda'}{\lambda} \\ \pi_2 = \dfrac{1}{\lambda}[\lambda'' + P_2\lambda] \\ \pi_3 = \dfrac{1}{\lambda}[\lambda^{(3)} + 3P_2\lambda' + P_3\lambda] \end{cases}$$

mentre il suo semiinvariante Π_2 per le cose dette al n. 1 vale P_2.

L'ultima equazione con il cangiamento di variabile $\xi = \xi(x)$ diventa

$$(26)\qquad \frac{d^n u}{d\xi^n} + \binom{n}{1}\bar{p}_1 \frac{d^{n-1}u}{d\xi^{n-1}} + \binom{n}{2}\bar{p}_2 \frac{d^{n-2}u}{d\xi^{n-2}} + \binom{n}{3}\bar{p}_3 \frac{d^{n-3}u}{d\xi^{n-3}} + \dots$$
$$+ \binom{n}{n-1}\bar{p}_{n-1}u' + \binom{n}{n}\bar{p}_n u = 0, \qquad [\bar{p}_n = \pi_n/(\xi')^n]$$

e per le (22), (24), (21) abbiamo

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{\xi'}\left[\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{n-1}{2}\eta\right] \qquad [\eta = \xi''/\xi']$$

$$\bar{P}_2 = \frac{1}{(\xi')^2}\left[P_2 + \frac{n+1}{12}\eta^2 - \frac{n+1}{6}\eta'\right] \qquad [\bar{P}_2 = \bar{p}_2 - \bar{p}_1^2 - \bar{p}_1'].$$

Supponiamo che l'equazione di RICCATI

$$(27)\qquad \boxed{\eta' - \frac{1}{2}\eta^2 = \frac{6}{n+1}P_2}$$

ammetta una soluzione in (a, b) e determiniamo [con quadrature] λ in modo che

$$(28)\qquad \frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{n-1}{2}\eta = 0,$$

risulterà $\bar{P}_2 = 0$, $\bar{p}_1 = 0$, quindi $\bar{p}_2 = 0$ e la (26) ha la forma richiesta.

Dalle (28) e (21) si ha

$$\lambda = e^{-\frac{n-1}{2}\int \eta dx} \qquad \xi = \int e^{\int \eta dx}\, dx + c$$

perciò operando sull'equazione (1) successivamente con le trasformazioni

$$(29)\qquad \boxed{y = e^{-\int\left(p_1 + \frac{n-1}{2}\eta\right)dx} u, \qquad \xi = \int e^{\int \eta dx} dx + c}$$

dove η è una soluzione dell'equazione di RICCATI (27) [che abbiamo supposto esistente in (a, b)] otteniamo l'equazione

$$(26') \qquad \frac{d^n u}{d\xi^n} + \binom{n}{3}\bar{p}_3 \frac{d^{n-3}u}{d\xi^{n-3}} + \dots + \binom{n}{n-1}\bar{p}_{n-1}u' + \binom{n}{n}\bar{p}_n u = 0.$$

Si dirà che si è effettuata la *normalizzazione canonica di* LAGUERRE-FORSYTH *della* (1), e che *la* (26') *è la forma canonica della* (3).

Con la trasformazione

$$z = e^{-\frac{1}{2}\int \eta dx} \quad (^1)$$

la (27) diventa l'equazione lineare del secondo ordine

$$(27') \qquad \boxed{z'' + \frac{3}{n+1} P_2 z = 0}$$

e potremo così dire: *se esiste in* (a, b) *una soluzione positiva* z *dell'equazione* (27') [2] *operando sull'equazione* (1) *successivamente con le due trasformazioni*

$$(30) \qquad \boxed{y = e^{-\int p_1 dx} z^{n-1} u, \qquad \xi = \int \frac{1}{z^2}\, dx + c}$$

essa assume la forma canonica (26') [3].

4. - *a*) L'equazione del secondo ordine $[a_0 \neq 0]$

$$\frac{d}{dx}\left[a_0 \frac{dy}{dx}\right] + a_2 y = f \quad (^4)$$

---

[1] Cfr. § 3, n. 2.

[2] Vedremo nel cap. IV, § 2, n. 6, che data un'equazione differenziale lineare $y'' + py' + qy = 0$ con p e q funzioni continue in (a, b) non sempre esiste un integrale (reale) di essa mai nullo in (a, b).

[3] Per il significato geometrico delle forme semicanoniche e canoniche delle equazioni differenziali lineari cfr. E. BOMPIANI: *Forme normali delle equazioni differenziali lineari e loro significato geometrico*. « Annales Scientifiques de l'Université de Jassy », XXIII (1937), pp. 75-105.

[4] Per quanto riguarda questo n. confronta ad es. U. DINI: *Lezioni di Analisi Infinitesimale*. II, (2ª parte), (Pisa, 1915), pp. 696-713.

Negli esempi che seguono, per comodità del lettore, supporremo le equazioni non omogenee.

con il cangiamento di variabile $\xi=\xi(x)$ diventa

$$\xi' \frac{d}{d\xi}\left[a_0\xi' \frac{dy}{d\xi}\right]+a_2y=f$$

perciò se facciamo $a_0\xi'=1$, ossia effettuiamo il cangiamento di variabile

$$\xi=\int \frac{1}{a_0}\,dx+c$$

otteniamo l'equazione

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+a_0a_2y=a_0f.$$

b) Più in generale si abbia l'equazione del secondo ordine $[a_0\neq 0]$

$$\boxed{a_0y''+a_1y'+a_2y=f},$$

essa può scriversi [§ 3, n. 3]

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx}\frac{dy}{dx}\right]+\frac{a_2}{a_0}e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx}y=\frac{f}{a_0}e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx}$$

e col cangiamento di variabile

$$\xi=\int e^{-\int \frac{a_1}{a_0}dx}dx+c$$

essa diventa

$$\boxed{\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{a_2}{a_0}e^{2\int \frac{a_1}{a_0}dx}y=\frac{f}{a_0}e^{2\int \frac{a_1}{a}dx}}.$$

c) Consideriamo l'equazione lineare del terzo ordine $[a_0\neq 0]$

(31) $$\boxed{a_0y^{(3)}+a_1y''+a_2y'+a_3y=f}$$

od anche

$$y^{(3)}+\frac{a_1}{a_0}y''+\frac{a_2}{a_0}y'+\frac{a_3}{a_0}y=\frac{f}{a_0}.$$

Con le notazioni dei nn. precedenti abbiamo

$$n=3,\qquad p_1=a_1/3a_0,\qquad p_2=a_2/3a_0,\qquad p_3=a_3/a_0$$

$$P_2=\frac{a_2}{3a_0}-\frac{1}{9}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)';\qquad P_3=\frac{a_3}{a_0}-\frac{a_1a_2}{3a_0^2}+\frac{2}{27}\frac{a_1^3}{a_0^3}-\frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)''$$

mentre le equazioni (27), (27') diventano rispettivamente

$$\eta' - \frac{1}{2}\eta^2 = \frac{3}{2}P_2$$

$$z'' + \frac{1}{4}\left[\frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)'\right]z = 0. \tag{32}$$

Dai risultati del n. 3 segue che se esiste in (a, b) una soluzione positiva z della (32), la (31) con la trasformazione

$$y = e^{-\frac{1}{3}\int\frac{a_1}{a_0}dx} z^2 u, \qquad \xi = \int\frac{1}{z^2}dx + c$$

diventa

$$\boxed{u^{(3)} + \bar{p}_3 u = \frac{f}{a_0} e^{\frac{1}{3}\int\frac{a_1}{a_0}dx} z^4} \tag{33}$$

dove la forma del secondo membro deriva dal fatto che la trasformazione moltiplicativa porta per $u^{(3)}$ il fattore $e^{-\frac{1}{3}\int\frac{a_1}{a_0}dx} z^2$ e il cangiamento di variabile il fattore z^{-6}.

Vogliamo calcolare la forma esplicita di $\bar{p}_3$.

Si ha dalla (28) $\lambda' = -\eta\lambda$, perciò

$$\lambda'' = -\eta\lambda' - \eta'\lambda = \lambda(\eta^2 - \eta') = \lambda\left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{2}P_2\right),$$

$$\lambda^{(3)} = \lambda'\left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{2}P_2\right) + \lambda\left(\eta\eta' - \frac{3}{2}P_2'\right) = \lambda\left(3\eta P_2 - \frac{3}{2}P_2'\right),$$

e quindi per le (25) e (26)

$$\bar{p}_3 = \frac{\pi_3}{(\xi')^3} = z^6\left[\frac{\lambda'''}{\lambda} + 3P_2\frac{\lambda'}{\lambda} + P_3\right] = z^6\left(P_3 - \frac{3}{2}P_2'\right)$$

ed infine

$$\boxed{\bar{p}_3 = \left[\frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'' + \frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)' + \frac{2}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{a_1 a_2}{a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}\right]z^6}$$

dove tutte le derivate sono calcolate rispetto alla variabile x.

§ 5. - L'equazione aggiunta di Lagrangia.

1. Polinomi ed equazioni differenziali aggiunte. - 2. Relazioni tra i sistemi fondamentali di un'equazione differenziale e della sua aggiunta. - 3. Polinomi ed equazioni differenziali autoaggiunte. - 4. Un integrale primo delle equazioni autoaggiunte di ordine dispari. - 5. Le equazioni autoaggiunte del terzo ordine.

1. - *a*) Si consideri il polinomio differenziale di ordine n

$$L(y)=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny \tag{1}$$

con $a_0, a_1,\dots, a_n$ funzioni continue di x aventi tutte le derivate che ci occorrerà considerare, $a_0\neq 0$ in (a, b), e $y', y'',\dots, y^{(n)}$ rappresentino le successive derivate di y. Poniamoci il seguente problema: *esiste una funzione $z(x)$ tale che si abbia identicamente*

$$zL(y)\equiv\frac{d}{dx}[\psi(y, z)] \tag{2}$$

dove $\psi(y, z)$ è una funzione lineare di y e delle sue derivate fino a quelle di ordine $n-1$ o come si dice *esiste un moltiplicatore del polinomio differenziale $L(y)$?*

La risposta è affermativa. Si ha infatti con successive integrazioni per parti

$$\int(a_kz)y^{(n-k)}dx=y^{(n-k-1)}(a_kz)-y^{(n-k-2)}(a_kz)'+y^{(n-k-3)}(a_kz)''+\dots$$
$$+(-1)^{n-k-1}y(a_kz)^{(n-k-1)}+(-1)^{n-k}\int y(a_kz)^{(n-k)}dx$$

e derivando rispetto ad x

$$(a_kz)y^{(n-k)}=\frac{d}{dx}[y^{(n-k-1)}(a_kz)-y^{(n-k-2)}(a_kz)'+\dots+$$
$$+(-1)^{n-k-1}y(a_kz)^{(n-k-1)}]+(-1)^{n-k}y(a_kz)^{(n-k)},$$

quindi identicamente

$$\begin{aligned}zL(y)=&\frac{d}{dx}[y^{(n-1)}(a_0z)-y^{(n-2)}(a_0z)'+\dots+(-1)^{n-1}y(a_0z)^{(n-1)}]\\&+\frac{d}{dx}[y^{(n-2)}(a_1z)-y^{(n-2)}(a_1z)'+\dots+(-1)^{n-2}y(a_1z)^{(n-2)}]\\&+\dots+\frac{d}{dx}[y(a_{n-1}z)]+yM(z)\end{aligned} \tag{3}$$

ove si è posto

$$(4)\quad M(z)=(-1)^n\frac{d^n(a_0z)}{dx^n}+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}(a_1z)}{dx^{n-1}}+\ldots-\frac{d(a_{n-1}z)}{dx}+a_nz.$$

Dalla (3) risulta quindi identicamente

$$(5)\qquad zL(y)-yM(z)\equiv\frac{d}{dx}[\psi(y,z)]$$

dove

$$(6)\quad \psi(y,z)=$$
$$=y\left[(a_{n-1}z)-\frac{d(a_{n-2}z)}{dx}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}(a_1z)}{dx^{n-2}}+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}(a_0z)}{dx^{n-1}}\right]$$
$$+y'\left[(a_{n-2}z)-\frac{d(a_{n-3}z)}{dx}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}(a_0z)}{dx^{n-2}}\right]$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+y^{(n-2)}\left[a_1z-\frac{d(a_0z)}{dx}\right]$$
$$+y^{(n-1)}[a_0z],$$

e la $\psi(y,z)$ risulta un'espressione bilineare nelle y, z e nelle loro derivate fino a quelle di ordine $n-1$.

Dalle (5) e (6) abbiamo che se per z si prende un integrale dell'equazione $M(z)=0$, il prodotto $zL(y)$ è la derivata rispetto ad x di $\psi(y,z)$ e perciò z è un moltiplicatore di $L(y)$; abbiamo anche che scelto z nel modo dichiarato l'equazione lineare in y di ordine $n-1$

$$(7)\qquad \psi(y,z)=\text{cost.}$$

fornisce *un integrale primo dell'equazione*

$$(1')\qquad L(y)=0$$ [1].

b) L'equazione $M(z)=0$, prende il nome di *equazione aggiunta* di LAGRANGIA dell'equazione $L(y)=0$, e il polinomio differenziale $M(z)$ *polinomio aggiunto* di $L(y)$ [2].

---

[1] Se $f(x, y, y',\ldots, y^{(n)})=0$ è un'equazione differenziale, ogni relazione della forma $F(x, y, y',\ldots, y^{(n-1)})=\text{cost.}$ soddisfatta da *qualsiasi* integrale dell'equazione prende il nome di *integrale primo* dell'equazione stessa.

[2] Cfr. G. L. LAGRANGIA: *Ouvres.* I, (Paris, 1867), p. 471. Per un'ampia trattazione dell'equazione aggiunta di Lagrangia cfr. G. DARBOUX: *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces.* (2ª éd., Paris, 1915), II, pp. 112-149. Per

c) Vogliamo dimostrare che *il polinomio aggiunto di* $M(z)$ *è* $L(y)$, cioè la relazione di aggiunzione tra due polinomi differenziali è simmetrica.

Infatti se $L_1(y)$ è il polinomio aggiunto di $M(z)$, avremo identicamente

$$(5') \qquad yM(z)-zL_1(y)=\frac{d}{dx}[\psi_1(y,z)]$$

e sommando le (5) e (5') l'identità

$$(8) \qquad z[L(y)-L_1(y)]=\frac{d}{dx}[\psi(y,z)+\psi_1(y,z)].$$

Se il polinomio differenziale in z, $\psi(y,z)+\psi_1(y,z)$ non è identicamente nullo in z, il secondo membro della (8) contiene almeno una derivata di z e la (8) sarebbe allora un'equazione differenziale (non identica) ossia l'identità (8) non potrebbe sussistere. Abbiamo allora $z[L(y)-L_1(y)]\equiv 0$ e per l'arbitrarietà di z, $L(y)\equiv L_1(y)$.

2. - Sia $y_1, y_2,\dots, y_n$ un sistema fondamentale di integrali della (1'), avremo allora che posto [Cap. II, § 1, n. 3]

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1, & y_2,\dots, & y_n \\ y_1', & y_2',\dots, & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)},\dots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

risulterà $\Delta\neq 0$ in (a,b). Poichè $\dfrac{\partial\Delta}{\partial y_i^{(k)}}$ esprime il complemento algebrico di $y_i^{(k)}$ in Δ, posto

$$\Theta_i(y)=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\Delta}{\partial y_i}y+\frac{\partial\Delta}{\partial y_i'}y'+\dots+\frac{\partial\Delta}{\partial y_i^{(n-1)}}y^{(n-1)}\right], \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

si ha

$$\Theta_i(y_i)=1, \qquad \Theta_i(y_J)=0 \qquad \text{per } i\neq J,$$

---

il significato geometrico dell'equazione aggiunta e delle sue principali proprietà cfr. É. Borel: *Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles.* «Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup.», (3), IX (1892); pp. 63-90. La denominazione di equazione aggiunta è di Fuchs. [Cfr. L. Fuchs: *Ueber Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden.* «Jour. für die reine und ang. Math.», 76, (1873), (pp. 177-213), p. 183.

quindi se $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono n costanti arbitrarie

$$\Theta_i(c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n)=c_i,$$

e perciò l'equazione differenziale lineare di ordine n

$$\frac{d}{dx}\,\Theta_i(y)=0 \tag{9}$$

ha le stesse soluzioni della (1); risulta che quest'ultima equazione e la (1') hanno i coefficienti proporzionali e perciò

$$\frac{d\Theta_i(y)}{dx}=z_iL(y), \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \quad [1]$$

ed uguagliando i coefficienti di $y^{(n)}$ nei due membri ne viene

$$z_i=\frac{1}{a_0}\,\frac{\partial \lg|\Delta|}{\partial y_i^{(n-1)}}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Si ha poi

$$z_iL(y)-yM(z_i)\equiv\frac{d}{dx}\,[\psi(y, z_i)]$$

quindi

$$yM(z_i)\equiv\frac{d}{dx}\,[\Theta_i(y)-\psi(y, z_i)]$$

e ripetendo per questa identità il ragionamento del n. 1, c) otteniamo

$$M(z_i)=0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \quad [2]$$

---

[1] Notiamo che se due equazioni differenziali

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0,$$
$$b_0y^{(n)}+b_1y^{(n-1)}+\ldots+b_{n-1}y'+b_ny=0$$

$a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$ in (a, b); $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $b_0, b_1, \ldots, b_n$ continui in (a, b), ammettono gli stessi integrali, hanno i coefficienti proporzionali.

Infatti se le funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono un sistema fondamentale delle due equazioni esse soddisfano l'equazione di ordine $n-1$

$$\left(\frac{a_1}{a_0}-\frac{b_1}{b_0}\right)y^{(n-1)}+\left(\frac{a_2}{a_0}-\frac{b_2}{b_0}\right)y^{(n-2)}+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_0}-\frac{b_n}{b_0}\right)y=0,$$

ma quest'ultima se non è identica ammette soltanto $n-1$ integrali linearmente indipendenti, si avrà quindi

$$\frac{a_1}{a_0}-\frac{b_1}{b_0}=\frac{a_2}{a_0}-\frac{b_2}{b_0}=\ldots=\frac{a_n}{a_0}-\frac{b_n}{b_0}=0.$$

[2] Si ha pure $\theta_i(y)\equiv\psi(y, z_i)$, perciò $\psi(y_i, z_i)=1$, $\psi(y_i, z_j)=0$ per $i\neq j$.

ossia le funzioni $z_1, z_2, \dots, z_n$ ottenute con le (10) sono soluzioni dell'equazione aggiunta, e ne formano, come subito proveremo, un sistema fondamentale.

Si ha infatti per note proprietà dei determinanti

$$\begin{aligned} z_1y_1 + z_2y_2 + \dots + z_ny_n &= 0\\ z_1y_1' + z_2y_2' + \dots + z_ny_n' &= 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\\ z_1y_1^{(n-1)} + z_2y_2^{(n-1)} + \dots + z_ny_n^{(n-1)} &= \frac{1}{a_0}. \end{aligned}$$

Derivando queste identità abbiamo

$$(11)\qquad \begin{cases} z_1^{(i)}y_1^{(k)} + z_2^{(i)}y_2^{(k)} + \dots + z_n^{(i)}y_n^{(k)} = 0, & (i+k<n-1),\\ z_1^{(i)}y_1^{(k)} + z_2^{(i)}y_2^{(k)} + \dots + z_n^{(i)}y_n^{(k)} = \dfrac{(-1)^i}{a_0}, & (i+k=n-1), \end{cases}$$

talchè posto

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} z_1, & z_2, & \dots, & z_n\\ z_1', & z_2', & \dots, & z_n'\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ z_1^{(n-1)}, & z_2^{(n-1)}, & \dots, & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

moltiplicando i determinanti Δ e Δ_1 per righe, e tenuto conto delle (11) otteniamo

$$(12)\qquad \Delta\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dfrac{1}{a_0}\\ 0 & 0 & \dots & -\dfrac{1}{a_0} & \\ 0 & \dfrac{(-1)^{n-2}}{a_0} & & & \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{a_0} & & & & \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{a_0}\right)^n$$

quindi $\Delta_1 \neq 0$ in (a, b) e perciò le $z_1, z_2, \dots, z_n$ formano un sistema fondamentale di integrali dell'equazione aggiunta $M(z) = 0$.

8. - Un'equazione differenziale si dice *autoaggiunta* se essa e la sua aggiunta ammetteno i medesimi integrali.

Perchè l'equazione $L(y) = 0$ sia autoaggiunta è necessario e basta che i coefficienti di $L(y)$ e $M(z)$ siano proporzionali [1] e poichè i coefficienti di $y^{(n)}$ e $z^{(n)}$ nella (1) e (4) differiscono per

---

[1] Cfr. la prima nota del n. 2.

il fattore $(-1)^n$ segue che se l'equazione $L(y)=0$ è autoaggiunta deve aversi identicamente

$$L(y) \equiv (-1)^n M(y). \tag{13}$$

Diremo un *polinomio differenziale $L(y)$ autoaggiunto* se per esso e il suo aggiunto si verifica l'identità (13).

A motivo della (13) si ha che la *somma* (la differenza) *di due polinomi differenziali autoaggiunti, entrambi di ordine pari, o entrambi di ordine dispari, è un polinomio autoaggiunto.*

b) Dalla definizione posta segue che se il polinomio $a_0y'+a_1y$ è autoaggiunto dovrà risultare $a_0y'+a_1y \equiv (a_0y)'-a_1y$, $2a_1=a_0'$, perciò un polinomio autoaggiunto del primo ordine ha la forma

$$\frac{d}{dx}[Ay]+Ay', \qquad [A=a_0/2]. \tag{14_1}$$

Così pure se il polinomio del secondo ordine $a_0y''+a_1y'+a_2y$ è autoaggiunto dovrà aversi identicamente $(a_0y)''-(a_1y)'+a_2y \equiv \equiv a_0y''+a_1y'+a_2y$ ed anche $2(a_0'-a_1)y'+(a_0''-a_1')y\equiv 0$ da cui $a_0'=a_1$ e il polinomio autoaggiunto del secondo ordine ha quindi la forma

$$\frac{d}{dx}[A_0y']+A_1y, \qquad [A_0=a_0,\ A_1=a_2]. \tag{14_2}$$

In particolare per il risultato del § 3, n. 3, *b*) si ha che il polinomio $a_0y''+a_1y'+a_2y$ assume la forma autoaggiunta

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int\frac{a_1}{a_0}dx}\,\frac{dy}{dx}\right]+\frac{a_2}{a_0}e^{\int\frac{a_1}{a_0}dx}\,y$$

moltiplicando per il fattore

$$a_0^{-1}e^{\int\frac{a_1}{a_0}dx}.$$

c) Vogliamo provare che *i polinomi differenziali*

$$(15_1)\quad \frac{d^p}{dx^p}[Ay^{(p)}], \qquad (15_2)\quad \frac{d^p}{dx^p}[Ay^{(p-1)}]+\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}[Ay^{(p)}]$$

sono autoaggiunti.

Si ha infatti

$$\frac{d^p[Ay^{(p)}]}{dx^p}=\binom{p}{0}Ay^{(2p)}+\binom{p}{1}A'y^{(2p-1)}+\dots+$$
$$+\binom{p}{p-1}A^{(p-1)}y^{(p+1)}+\binom{p}{p}A^{(p)}y^{(p)}$$

perciò il polinomio differenziale aggiunto di (15_1) ha l'espressione

$$\frac{d^{2p}(Ay)}{dx^{2p}}-\binom{p}{1}\frac{d^{2p-1}(A'y)}{dx^{2p-1}}+\binom{p}{2}\frac{d^{2p-2}(A''y)}{dx^{2p-2}}-\dots+(-1)^p\frac{d^p(A^{(p)}y)}{dx^p}\equiv$$

$$\equiv\frac{d^p}{dx^p}\left[\frac{d^p}{dx^p}(Ay)-\binom{p}{1}\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}(A'y)+\binom{p}{2}\frac{d^{p-2}}{dx^{p-2}}(A''y)-\dots+(-1)^pA^{(p)}y\right]$$

e l'espressione ottenuta vale $\frac{d^p[Ay^{(p)}]}{dx^p}$ avendosi identicamente

$$(16)\qquad Ay^{(p)}\equiv\frac{d^p}{dx^p}(Ay)-\binom{p}{1}\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}(A'y)+$$
$$+\binom{p}{2}\frac{d^{p-2}}{dx^{p-2}}(A''y)-\dots+(-1)^pA^{(p)}y \quad (^1).$$

In modo analogo si procede per la (15_2), basterà tener conto oltre che della (16) dell'analoga espressione per $Ay^{(p-1)}$.

d) Vogliamo provare in generale che *un polinomio autoaggiunto di ordine pari* $2m$ *ha la forma*

$$\frac{d^m}{dx^m}[A_0y^{(m)}]+\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[A_1y^{(m-1)}]+\dots+\frac{d}{dx}[A_{m-1}y']+A_my$$

e se di ordine dispari $2m-1$ *la forma*

$$\left[\frac{d^m}{dx^m}[A_0y^{(m-1)}]+\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[A_0y^{(m)}]\right]+$$
$$+\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[A_1y^{(m-2)}]+\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}[A_1y^{(m-1)}]\right]+$$
$$+\dots+\left[\frac{d}{dx}[A_{m-1}y]+A_my'\right].$$

---

(1) La (16) si verifica come appresso. Formiamo della successione

$$A^{(p)}y,\ \frac{d}{dx}(A^{(p-1)}y),\dots,\ \frac{d^p}{dx^p}(Ay)$$

il quadro delle successive differenze

$$\begin{array}{llllll}
A^{(p)}y, & \frac{d}{dx}(A^{(p-1)}y) & \frac{d^2}{dx^2}(A^{(p-2)}y),\dots, & \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}(A'y), & \frac{d^p}{dx^p}(Ay), \\
A^{(p-1)}y', & \frac{d}{dx}(A^{(p-1)}y'), & \frac{d^2}{dx^2}(A^{(p-2)}y'),\dots, & \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}(Ay'), & \\
\dots\dots & & & & \\
A'y^{(p-1)}, & \frac{d}{dx}(Ay^{(p-1)}), & & & \\
Ay^{(p)}; & & & &
\end{array}$$

applicando la nota formula che esprime la differenza p^{esima} in funzione dei termini della successione si ottiene appunto la (16). [Cfr. ad es. G. SANSONE: *Lez. di An. Matem.* (4ª ed., Padova, Cedam, 1938), I, p. 401)].

Il teorema è stato verificato in *b*) per $m=1$ e basterà procedere per induzione.

Se $L(y)$ è autoaggiunto dalla (13), identificando i coefficienti di $y^{(n-1)}$ si ha $na_0'-a_1=a_1$, $2a_1=na_0'$ e allora se per $n=2m$ consideriamo la differenza $L(y)-\frac{d^m}{dx^m}[a_0y^{(m)}]$, mentre per $n=2m-1$ consideriamo l'espressione

$$L(y)-\left[\frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{2}a_0y^{(m-1)}\right]+\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[\frac{1}{2}a_0y^{(m)}\right]\right]$$

otteniamo un polinomio autoaggiunto di ordine $n-2$ e resta pertanto provata la nostra affermazione.

e) È facile mostrare che *se $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ formano un sistema di integrali indipendenti di un'equazione autoaggiunta di ordine n, il prodotto $a_0^{n/2-1}W(y_1, y_2, y_{n-1})$ è un integrale dell'equazione stessa.*

Facciamo infatti nella (10) del n. 2, $i=n$, e osserviamo che l'autoaggiunzione porta che

$$z_n=\frac{1}{a_0}\frac{1}{\Delta}W(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

è ancora un'integrale dell'equazione stessa; ma dalla formula di LIOUVILLE [Cfr. § 1, n. 2, *c*)] si ha

$$\Delta=W(y_1, y_2, \dots, y_n)=W(x_0)e^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}\equiv W(x_0)e^{-\frac{n}{2}\int\frac{a_0'}{a_0}dx}=W(x_0)a_0^{-\frac{n}{2}}$$

perciò

$$z_n=\frac{1}{W(x_0)}a_0^{\frac{n}{2}-1}W(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \qquad [1/W(x_0)\text{ fattore costante}].$$

4\. - Un polinomio differenziale $L(y)$ di ordine dispari $2m-1$ sia autoaggiunto; ponendo allora nell'identità (5) il polinomio $-L(y)$ in luogo di $M(z)$, otteniamo

$$zL(y)+yL(z)\equiv\frac{d}{dx}[\psi(y, z)]$$

e per $z=y$

$$yL(y)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\psi(y, y)]$$

ossia *un polinomio differenziale $L(y)$ di ordine dispari, auto-*

aggiunto, ammette il moltiplicatore y, e l'equazione differenziale corrispondente $L(y)=0$ *ammette l'integrale primo* (di secondo grado)

$$\psi(y, y)=\text{cost.}$$

5. - In particolare l'equazione autoaggiunta del terzo ordine

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2}[A_0y']+\frac{d}{dx}[A_0y'']\right\}+\left\{\frac{d}{dx}[A_1y]+A_1y'\right\}=0 \tag{17}$$

ammette l'integrale primo

$$2A_0yy''-A_0y'^2+A_0'yy'+A_1y^2=\text{cost.}$$

Prendendo in quest'ultima la costante uguale a zero e facendo $y=z^2$ otteniamo l'equazione lineare del secondo ordine

$$4A_0z''+2A_0'z'+A_1z=0$$

e se z_1, z_2 sono due suoi integrali linearmente indipendenti la (17) ammette i due integrali indipendenti z_1^2, z_2^2.

Per i risultati del n. 3, *e*) la (17) ammette anche l'altro integrale

$$A_0^{1/2}\begin{vmatrix} z_1^2 & z_2^2 \\ 2z_1z_1' & 2z_2z_2' \end{vmatrix}=A_0^{1/2}z_1z_2\begin{vmatrix} z_1, & z_2 \\ z_1', & z_2' \end{vmatrix}=cz_1z_2, \quad (c=\text{cost.}\neq 0) \quad (^1)$$

e perciò la (17) ammette il sistema fondamentale z_1^2, z_1z_2, z_2^2 (²).

(¹) Dalla formula di Liouville [§ 1, n. 2] si ha

$$\begin{vmatrix} z_1, & z_2 \\ z_1', & z_2' \end{vmatrix}=W(x_0)\,e^{-\frac{1}{2}\int\frac{A_0'}{A_0}dx}=W(x_0)A_0^{-1/2}.$$

(²) Per le equazioni del terzo ordine autoaggiunte cfr. G. Darboux, loc. cit. a § 3, n. 1, pp. 129-130; cfr. pure G. Mammana: *L'equazione del terzo ordine lineare omogenea.* « Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett. », (2), 63, (1930), pp. 272-282; G. Gallina: *Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari omogenee autoaggiunte.* Ibid., 66 (1933), pp. 724-730.

§ 6. - Trasformazione di un'equazione differenziale lineare con i dati di Cauchy in un'equazione integrale di seconda specie di Volterra.

Sia data l'equazione differenziale

$$L(y)=f(x) \tag{1}$$

con

$$L(y)=\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+p_n(x)y, \tag{2}$$

$p_1(x)$, $p_2(x)$,...., $p_n(x)$, $f(x)$ funzioni continue della x in (a, b) e si voglia risolvere il problema di CAUCHY relativo a questa equazione, si voglia cioè costruire un integrale della (1) che in a soddisfi le condizioni iniziali [*dati di Cauchy*]

$$y(a)=c_0,\quad y'(a)=c_1,\dots,\quad y^{(n-1)}(a)=c_{n-1} \tag{3}$$ (1).

Assumiamo come funzione incognita la $y^{(n)}(x)$ e poniamo

$$y^{(n)}(x)=\varphi(x) \tag{4}$$

[$\varphi(x)$ funzione incognita]. Si ha da quest'ultima tenuto conto delle (3)

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-1}\varphi(t)dt+c_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+ \\ +c_{n-2}\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}+\dots+c_1\frac{x-a}{1!}+c_0 \tag{5}$$

dalla quale derivando, rispetto ad x, r volte

$$y^{(r)}(x)=\frac{1}{(n-r-1)!}\int_a^x(x-t)^{n-r-1}\varphi(t)dt+c_{n-1}\frac{(x-a)^{n-r-1}}{(n-r-1)!}+ \\ +c_{n-2}\frac{(x-a)^{n-r-2}}{(n-r-2)!}+\dots+c_r \tag{6}$$

e sostituendo nella (1) troviamo per $\varphi(x)$ l'equazione integrale di seconda specie di VOLTERRA

$$\boxed{\varphi(x)-\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt=F(x)} \tag{7}$$

(1) Cfr. § 1; 1, c), 5, c).

dove il *nucleo* $K(x, t)$ ed $F(x)$ hanno rispettivamente l'espressione

$$(8_1) \qquad K(x, t) = -p_1(x) - \frac{p_2(x)}{1!}(x-t) - \frac{p_3(x)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{p_n(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$$(9_1) \qquad a \leq x \leq b, \qquad a \leq t \leq b,$$

$$(8_2) \qquad F(x) = f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} p_{n-r}(x)\left[c_{n-1}\frac{(x-a)^{n-r-1}}{(n-r-1)!} + c_{n-2}\frac{(x-a)^{n-r-2}}{(n-r-2)!} + \dots + c_{r+1}\frac{x-a}{1!} + c_r\right]$$

$$(9_2) \qquad a \leq x \leq b.$$

È ben noto che l'equazione integrale (7) ammette una e una sola soluzione [1].

Posto

$$K_1(x, t) = K(x, t)$$

$$K_n(x, t) = \int_t^x K(x, z) K^{(n-1)}(z, t)\,dz, \qquad (n = 2, 3, \dots)$$

[$K_n(x, t)$, n^{esimo} nucleo iterato], se M indica il massimo di $|K(x, t)|$ nel quadrato Q definito dalle (9_1) si ha

$$|K_n(x, t)| \leq M \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!};$$

la serie

$$\Gamma(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \quad [\Gamma(x, t) \text{ *nucleo risolvente* della } (7)]$$

---

[1] In questo volume studieremo direttamente tutti i vari argomenti, ma quando lo riterremo opportuno, ci varremo della teoria delle *equazioni integrali lineari* che supporremo perciò nota al lettore.

Sulla teoria delle equazioni integrali lineari il lettore potrà consultare: *a*) G. VIVANTI: *Elementi della Teoria delle Equazioni Integrali lineari* (Milano, Hoepli, 1916); *b*) É. GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathématique.* (4ª éd., Paris, 1927), T. III, pp. 322-486.

risulta uniformemente convergente in Q, e la (7) ha l'unica soluzione

$$\varphi(x) = \int_a^x \Gamma(x, t) F(t) dt + F(x).$$

Sostituendo l'espressione così ottenuta di $\varphi(x)$ nella (5) si ha per $y(x)$ l'integrale cercato.

In conclusione il problema di CAUCHY relativo all'equazione differenziale (1) conduce all'equazione integrale (7) sempre univocamente risolubile; ne segue che ove si supponga nota la teoria delle equazioni integrali lineari, ***dalla trasformazione indicata deriva una nuova dimostrazione del teorema di esistenza e di univocità degli integrali dell'equazione differenziale*** **(1)** ***con i dati di*** **CAUCHY**.

Vogliamo qui ricordare al lettore che il primo studio sistematico delle equazioni differenziali lineari mediante la loro trasformazione in equazioni integrali è di U. DINI; il DINI non usò mai nelle sue memorie le parole « *equazioni integrali* » ma egli costruì per suo conto, per queste equazioni, quanto gli occorreva per la trattazione dei suoi problemi [1].

---

[1] U. DINI: *a*) *Studi sulle equazioni differenziali lineari*. « Ann. di Mat. pura e appl. », (3), II, (1898), pp. 297-324; *b*) Ibidem, (3), III, (1899), pp. 125-183; É. COTTON: *Approximations successives et équations différentielles*. « Mémorial des Sciences Math. », 28, (1928, Paris), p. 16.

CAPITOLO III.

Le equazioni differenziali nel campo analitico e su alcune equazioni lineari del secondo ordine.

§ 1. - Metodo delle funzioni maggioranti. (Calcolo dei limiti di Cauchy).

1. Il procedimento di EULERO di integrazione per serie delle equazioni differenziali. - 2. Principio generale del metodo delle funzioni maggioranti di CAUCHY. - 3. Dimostrazione del teorema di esistenza col metodo delle funzioni maggioranti. - 4. Il teorema di esistenza nel caso generale. - 5. La sommazione di BOREL e le equazioni differenziali.

1. - Negli studi precedenti abbiamo limitato le nostre considerazioni al campo reale, ci sarà utile esporre in questo capitolo qualche punto della teoria delle equazioni differenziali nel campo analitico col duplice scopo di mostrare al lettore il procedimento esistenziale di CAUCHY fondato sull'impiego delle funzioni maggioranti e di prendere in esame alcune equazioni differenziali del secondo ordine della fisica matematica alle quali ci riferiremo talvolta nelle applicazioni [1].

Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

ove $f(x, y)$ è una funzione olomorfa delle due variabili complesse x, y in un dominio contenente nel suo interno (x^0, y^0) e si voglia determinare un suo integrale soddisfacente la condizione iniziale $y(x^0) = y^0$.

Senza alterare le generalità supporremo $x^0 = 0$, $y^0 = 0$, (ciò che equivale a cangiare $x - x^0$, $y - y^0$ rispettivamente in x e y) ed

[1] Per uno studio approfondito della teoria delle equazioni differenziali nel campo analitico il lettore consulti L. BIANCHI: *Lezioni sulla Teoria delle Equazioni differenziali lineari.* (Teoria di FUCHS-RIEMANN). [Circ. Mat. di Catania, 1924].

$f(x, y)$ olomorfa nel dominio aperto D definito dalle limitazioni $|x|<R$, $|y|<R'$.

Supponiamo di avere preventivamente dimostrato che esista un integrale della (1) *che soddisfi la condizione iniziale*

$$y(0)=0 \tag{2}$$

e che esso sia sviluppabile in serie di MAC-LAURIN *in un intorno del punto* 0, *sia cioè*

$$y(x)=c_1x+c_2x^2+\dots+c_nx^n+\dots. \tag{3}$$

È facile assegnare un *procedimento ricorrente* che permette la determinazione, e in modo univoco, dei coefficienti $c_1, c_2, \dots, c_n \dots$.

Dalla (1) con successive derivazioni abbiamo

$$y''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'$$

$$y^{(3)}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e ponendo nella (1) e nelle precedenti $x=0$, $y=0$ calcoleremo successivamente $y'(0)$, $y''(0)$, $y^{(3)}(0), \dots$ e perciò le costanti $c_1, c_2, c_3, \dots$ $[c_n=y^{(n)}(0)/n!]$.

Questo procedimento introdotto nell'analisi da EULERO [1], e da lui largamente impiegato la dove non si riusciva ad integrare le equazioni differenziali mediante funzioni note, fu dagli analisti del secolo XVIII ritenuto sufficiente a garantire oltre che l'unicità di una soluzione olomorfa anche il teorema di esistenza, mentre una tale conclusione presuppone manifestamente

a) che la serie (3) ottenuta col procedimento ricorrente ora descritto abbia raggio di convergenza non nullo,

b) che la funzione $y(x)$ rappresentata dalla (3) soddisfi la (1).

Il secondo punto è conseguenza del primo; infatti la funzione $y'-f(x, y)$ in un intorno sufficientemente piccolo di 0 è una funzione olomorfa di x che in $x=0$ si annulla insieme a tutte le sue derivate di qualunque ordine, essa è perciò identicamente nulla.

---

[1] L'integrazione per serie, già usata da EULERO nello studio del moto lunare e nell'integrazione dell'equazione di RICCATI, trovasi esposta nelle sue *Istitutiones Calculi Integralis*, II, (Petropoli, 1769), Cap. VII, VIII.

Resta allora da stabilire la convergenza della serie (3); e per questo scopo CAUCHY ideò un metodo da lui detto *calcolo dei limiti* e più propriamente, con la terminologia dell'analisi moderna, « *metodo delle funzioni maggioranti* »; noi lo esporremo nei n.i 2-3-4 (1).

2. - Sia $f(x, y)$ una funzione olomorfa nel dominio D definito dalle limitazioni $|x| < R$, $|y| < R'$ ed esista una funzione $F(x, y)$ pure olomorfa in D la quale abbia le seguenti proprietà:

1) *Essa e tutte le sue derivate siano positive nel punto* $(0, 0)$, si abbia cioè

$$(4) \qquad \begin{cases} F(0,0) > 0 \\ F_{x^h, y^k}(0,0) > 0, \qquad (h, k = 0, 1, 2, \dots); \end{cases}$$

2) *La* $f(x, y)$ *e le sue derivate soddisfino inoltre nel punto* $(0, 0)$ *le limitazioni*

$$(5) \qquad \begin{cases} |f(0,0)| \leq F(0,0) \\ |f_{x^h, y^k}(0,0)| \leq |F_{x^h, y^k}(0,0)|, \qquad (h, k = 0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Diremo che la funzione $F(x, y)$ è una *funzione maggiorante* di $f(x, y)$ e scriveremo con la notazione di POINCARÉ (2)

$$(6) \qquad f(x, y) << F(x, y).$$

Insieme alla (1) consideriamo l'altra equazione

$$dY/dx = F(x, Y)$$

con la condizione iniziale $Y(0) = 0$, e supponiamo che la serie costruita per questa equazione

$$(7) \qquad Y(x) = \frac{Y'(0)}{1!} x + \frac{Y''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{Y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

---

(1) A. L. CAUCHY: *Oeuvres Complètes*, (T. 4-7; 10). K. WEIERSTRASS pubblicò nel 1842, e indipendentemente da CAUCHY, una dimostrazione rigorosa del teorema di esistenza fondata sugli stessi principi del metodo di CAUCHY. Per i contributi alla questione di CH. A. A. BRIOT e J. C. BOUQUET, CH. MÉRAY, L. KÖNIGSBERGER, É. PICARD, P. STÄCKEL, E. LINDELÖF, P. PAINLEVÉ, É. GOURSAT, L. FEJÉR, il lettore potrà consultare le note bibliografiche dell'Enc. des Sc. Math., vol. 3, (1910), fasc. 1, pp. 16-21.

(2) H. POINCARÉ: *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste.* (Paris, 1892), I, p. 48.

abbia un raggio di convergenza ϱ non nullo; essa fornisce quindi per $|x|<\varrho$ un suo integrale. Avendosi

$$Y'' = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y} Y'$$

$$Y^{(3)} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} Y' + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} Y'^2 + \frac{\partial F}{\partial Y} Y''$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

a motivo delle (5) risulterà $|y^{(n)}(0)|<Y^{(n)}(0)$, talchè la serie (3) ha i suoi coefficienti in modulo minori dei corrispondenti coefficienti della (7), essa avrà quindi un raggio di convergenza non minore di ϱ e fornisce in un intorno del punto $x=0$ una soluzione olomorfa della (1) soddisfacente la condizione (2).

3. - *a*) Per i ragionamenti prima esposti sarà conseguita la dimostrazione del teorema di esistenza per la (1) se proviamo che assegnata la funzione $f(x, y)$ olomorfa in D si può costruire una funzione maggiorante $F(x, y)$ tale che per l'equazione

$$dY/dx = F(x, Y)$$

sia possibile costruire un integrale olomorfo in un intorno dell'origine.

È facile vedere che assegnata la $f(x, y)$ si possono trovare quante si vogliono funzioni maggioranti $F(x, y)$.

La funzione $f(x, y)$ può infatti svilupparsi nell'interno di D nella serie doppia di MAC-LAURIN, assolutamente convergente,

$$f(x, y) = \sum_{h,k}^{0\ldots\infty} A_{h,k} x^h y^k \tag{8}$$

e se Γ e Γ' indicano due circonferenze dei piani delle variabili complesse x, y con i centri nell'origine, di raggio rispettivo a, b, con

$$0<a<R, \qquad 0<b<R'$$

si avrà [1]

$$A_{h,k} = \frac{f_{x^h, y^k}(0, 0)}{h!\ k!} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma}\int_{\Gamma'} \frac{f(x, y)}{x^{h+1} y^{k+1}}\, dx dy \tag{9}$$

---

[1] Cfr. M. PICONE: *Appunti di Analisi Superiore*, [Napoli, 1940] pp. 38-40; oppure W. F. OSGOOD: *Lehrbuch der Funktionentheorie* (2ª Aufl., Berlin, 1929), II_1, p. 20.

e se M indica il massimo modulo di $f(x, y)$ quando x e y descrivono rispettivamente le circonferenze Γ, Γ' abbiamo dalla (9)

$$|A_{h,k}| \leq M a^{-h} b^{-k}, \tag{9'}$$

ma nel dominio D' definito dalle limitazioni $|x|<a$, $|y|<b$ la serie della doppia progressione geometrica $\sum_{h,k}^{0\dots\infty} M a^{-h} b^{-k} x^h y^k$ ha per somma $M/(1-a^{-1}x)(1-b^{-1}y)$, abbiamo quindi in D'

$$f(x, y) << \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)}.$$

Consideriamo allora l'equazione

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{Y}{b}\right)}, \tag{10}$$

separando le variabili e integrando con la condizione iniziale $Y(0)=0$ abbiamo

$$\frac{Y^2}{b^2} - 2\frac{Y}{b} - 2M\frac{a}{b}\log\left(1-\frac{x}{a}\right) = 0$$

quindi

$$Y = b\left[1-\sqrt{1+2M\frac{a}{b}\log\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right], \tag{11}$$

dove $\log(1-a^{-1}x)$ indica il logaritmo principale di $1-a^{-1}x$, [funzione olomorfa nell'interno del cerchio di raggio a] e del radicale prendiamo quella determinazione che per $x=0$ ha il valore $+1$.

Il radicale si annulla per $x=\varrho$ dove

$$\varrho = a(1-e^{-b/2Ma}),$$

ne viene che se $|x|<\varrho$ la (11) rappresenta una funzione olomorfa. Abbiamo anche per $|x| \leq \varrho' < \varrho$

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq Y'(0)\varrho' + \frac{Y''(0)}{2!}\varrho'^2 + \dots = Y(\varrho') = \\ &= b\left[1-\sqrt{1+2M\frac{a}{b}\log\left(1-\frac{\varrho'}{a}\right)}\right] < b \end{aligned}$$

e perciò nelle ipotesi dichiarate *per* $|x|<a(1-e^{-b/2Ma})$ *è assicurata l'esistenza di una soluzione olomorfa della* (1); *la cor-*

rispondente serie di potenze ha almeno il raggio di convergenza uguale a ϱ.

b) Un'altra maggiorante di $f(x, y)$ possiamo ottenerla col seguente procedimento di P. STÄCKEL [1].

La convergenza (assoluta) della serie $\sum_{h,k}^{0...\infty} A_{h,k} a^h b^k$ porta che l'insieme numerico $|A_{h,k}| a^h b^k$, $(h, k=0, 1, 2,....)$ è limitato superiormente e se G indica l'estremo superiore dell'insieme avremo

$$|A_{h,k}| a^h b^k \leqslant G, \qquad (h, k=0, 1, 2,....)$$

e il segno $=$ sussiste per almeno una coppia h, k [2]. In virtù delle (9') avremo $G \leqslant M$ e il cerchio in cui è garantita la convergenza della serie (3) ha almeno il raggio

$$\varrho' = a(1-e^{-b/2Ga}) \geqslant \varrho.$$

4. - *a*) I ragionamenti precedenti possono ripetersi per il sistema normale

$$(12) \qquad y_i' = f_i(x;\ y_1, y_2, ..., y_m), \qquad (i=1, 2,...., m)$$

dove le $x, y_1, y_2, ..., y_m$ sono variabili complesse nel dominio D

$$|x-a| < R, \quad |y_i - \beta_i| < R', \qquad (i=1, 2,...., m).$$

Noi supporremo che le f_i siano olomorfe in D e dimostreremo (col metodo delle funzioni maggioranti) che in un dominio circolare di centro a esiste un sistema di funzioni olomorfe $y_1(x)$, $y_2(x), ..., y_m(x)$, e uno solo, che soddisfa il sistema dato e le condizioni iniziali

$$y_i(a) = \beta_i, \qquad (i=1, 2,...., m).$$

Supporremo per semplicità $a=0$; $\beta_i=0$, $(i=1, 2,...., m)$.

---

(1) P. STÄCKEL: *Sur la la convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles*. C. Rend. Ac. Sc., 126, (1898), pp. 203-205.

(2) Infatti se σ è un numero positivo minore di G, per $h \geqslant h_0$ e $k \geqslant k_0$ si avrà $|A_{h,k}| a^h b^k < \sigma$ e G è uguale al maggiore dei $(h_0+1)(k_0+1)$ numeri $|A_{h,k}| a^h b^k$, $(h=0, 1,..., h_0;\ k=0, 1,...., k_0)$.

Con lo stesso procedimento del n. 1 si vede che ammesso che gli integrali cercati siano olomorfi in un intorno di 0

$$(13)\qquad y_i(x)=c_{i,1}x+c_{i,2}x^2+\dots+c_{i,n}x^n+\dots,\qquad (i=1,2,\dots,m)$$

i coefficienti di queste serie sono univocamente determinati dalle (12) e dalle equazioni da esse ottenute per derivazione; resta quindi da provare che le (13) hanno un raggio di convergenza non nullo.

Sia $0<a<R$, $0<b<R'$, indichi M_i il massimo modulo di $f_i(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m)$ quando x descrive la circonferenza del piano x con centro nell'origine e raggio a e $y_1, y_2,\dots, y_m$ le circonferenze dei piani $y_1, y_2,\dots, y_m$ con centro nell'origine e raggio b, sia M il massimo dei numeri $M_1, M_2,\dots, M_m$; si avrà allora

$$\left|\frac{\partial^{h+k_1+k_2+\dots+k_m} f_i}{\partial x^h \partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2}\dots \partial y_m^{k_m}}\right|_{(0;\,0,0,\dots,0)} \leq M\,\frac{h!\,k_1!\,k_2!\dots k_m!}{a^h b^{k_1+k_2+\dots+k_m}}.$$

Se consideriamo la funzione

$$F(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y_1}{b}\right)\left(1-\frac{y_2}{b}\right)\dots\left(1-\frac{y_m}{b}\right)}$$

si ha

$$\left|\frac{\partial^{h+k_1+k_2+\dots+k_m} F}{\partial x^h \partial y_1^{k_1} \partial y_2^{k_2}\dots \partial y_m^{k_m}}\right|_{(0;\,0,0,\dots,0)} = M\,\frac{h!\,k_1!\,k_2!\dots k_m!}{a^h b^{k_1+k_2+\dots+k_m}}$$

perciò

$$f(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m) \ll F(x;\ y_1, y_2,\dots, y_m).$$

Se insieme al sistema (12) consideriamo il sistema

$$\frac{dY_1}{dx}=\frac{dY_2}{dx}=\dots=\frac{dY_m}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{Y_1}{b}\right)\left(1-\frac{Y_2}{b}\right)\dots\left(1-\frac{Y_m}{b}\right)}$$

con le medesime condizioni iniziali

$$Y_1(0)=Y_2(0)=\dots=Y_m(0)=0,$$

la simmetria di queste condizioni porta la coincidenza dei loro sviluppi in serie, talchè posto

$$Y(x)=Y_1(x)=Y_2(x)=\dots=Y_m(x)$$

avremo

$$\frac{dY}{dx}=M\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-1}\left(1-\frac{Y}{b}\right)^{-m},\quad Y(0)=0$$

dalla quale separando le variabili e integrando con la condizione iniziale $Y(0)=0$ si ottiene

$$(14)\qquad Y=b\left[1-\sqrt[m+1]{1+\frac{(m+1)Ma}{b}\log\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right]$$

dove nel secondo membro del logaritmo prendiamo il valore principale e del radicale prendiamo quella determinazione che per $x=0$ ha il valore $+1$. [L'espressione (11) trovata per Y nel n. 3 è un caso particolare della (14) quando si faccia $m=1$].

Il radicale che figura nel secondo membro della (14) si annulla per $x=a(1-e^{-b/(m+1)Ma})$ e come prima troveremo che entro il cerchio di raggio

$$(15)\qquad \varrho=a(1-e^{-b/(m+1)Ma})$$

le serie (13) sono convergenti e rappresentano il cercato sistema di integrali.

b) Vogliamo notare che noi abbiamo dimostrato che nelle ipotesi dichiarate esiste un sistema olomorfo di integrali, e che supposta l'olomorfia degli integrali, tale sistema è unico, ma non possiamo ancora affermare che nelle nostre ipotesi il più generale sistema di integrali del sistema (12) è *necessariamente* olomorfo.

Quest'ultima proprietà potrebbe dedursi dallo stesso metodo delle funzioni maggioranti, noi la ritroveremo nel prossimo § servendoci del procedimento delle approssimazioni successive.

5. - Il procedimento di integrazione per serie delle equazioni differenziali può applicarsi ad equazioni del tipo $f(x;\, y, y', y'', \dots, y^{(m)})=0$, ove f è il simbolo di un polinomio in $y, y', y'', \dots, y^{(m)}$ con coefficienti funzioni olomorfe di x in un intorno di x^0, le quali fissati in x^0 i valori $y(x^0)$, $y'(x^0)$, $y''(x^0), \dots, y^{(m-1)}(x^0)$ siano atte a fornire uni-

vocamente con procedimenti di derivazione $y^{(m)}(x^0)$, $y^{(m+1)}(x^0)$,.... ; se si arriva ad una serie di raggio di convergenza non nullo essa rappresenta un effettivo integrale dell'equazione, ma ove la serie ottenuta abbia nullo il suo raggio di convergenza l'esistenza di eventuali integrali (non olomorfi) dovrà provarsi per altra via.

Se ad esempio consideriamo l'equazione

$$x^2y' + y - x^2 = 0 \tag{16}$$

e vogliamo un integrale olomorfo nell'intorno di $x=0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

avremo

$$c_0 = c_1 = 0 ; \quad c_2 = 1 \quad c_{n+1} = -nc_n, \quad (n=2, 3, ...)$$

e otteniamo così la serie

$$x^2 - 2!\ x^3 + 3!\ x^4 - 4!\ x^5 + ... \tag{17}$$

la quale *soddisfa formalmente* l'equazione proposta ma ha nullo il suo raggio di convergenza; la (16) non ammette quindi soluzioni olomorfe in un intorno dell'origine.

Si sommi ora la (17) col procedimento esponenziale di Borel; la funzione associata della (17) è

$$\Phi(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + ... = x - \log(1+x)$$

e la somma B (di Borel) della (17) è

$$y(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\Phi(xt)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}[tx - \log(1+tx)]dt$$

la quale definisce una funzione analitica che soddisfa l'equazione (16); il lettore desideroso di approfondire la questione consulti, anche per la bibliografia, É. Borel: *Leçons sur les séries divergentes* (2.ª Ed., Paris, 1928), pp. 148-151.

§ 2. - Il teorema di esistenza e di unicità col metodo delle approssimazioni successive.

1. Il teorema di esistenza e di unicità. - 2. Osservazione di WINTNER sul campo di esistenza di una soluzione olomorfa. - 3. Il calcolo delle matrici per la determinazione di un sistema fondamentale nel caso dei sistemi di equazioni differenziali lineari.

1. - *a) Sia dato il sistema di forma normale*

$$(1) \qquad y_i' = f_i(x;\ y_1, y_2, \dots, y_m), \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

e supponiamo che le funzioni f_i nel dominio D definito dalle limitazioni

$$(2) \qquad |x - a| \leq a; \quad |y_i - \beta_i| \leq b, \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

siano continue, e olomorfe nell'interno di D. Sia M il massimo modulo delle funzioni f_i in D, δ il più piccolo dei numeri a, b/M, e Γ il dominio circolare aperto del piano x con centro in a e raggio δ.

Vogliamo dimostrare che esiste uno e un solo sistema di integrali $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ del sistema (1), *soddisfacente le condizioni iniziali*

$$(3) \qquad y_i(a) = \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, m);$$

tali integrali risultano inoltre olomorfi in Γ.

Come nel Cap. I, (§ 3; n. 2) consideriamo la successione delle approssimazioni successive

$$(4) \qquad \begin{cases} y_i^{(1)}(x) = \beta_i + \int_a^x f_i(x;\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)\,dx \\ y_i^{(r+1)}(x) = \beta_i + \int_a^x f_i(x;\ y_1^{(r)}(x), y_2^{(r)}(x), \dots, y_m^{(r)}(x))\,dx \\ \qquad\qquad (r = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

con gli integrali estesi al cammino rettilineo che unisce a e x, e le serie

$$(5) \qquad y_i^{(1)} + (y_i^{(2)} - y_i^{(1)}) + \dots + (y_i^{(r+1)} - y_i^{(r)}) + \dots, \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Sia δ_1 un numero positivo minore di δ e del resto qualunque e dimostriamo che le serie (5) risultano uniformemente convergenti nel dominio Γ_1 definito dalla limitazione $|x-a|\leq\delta_1$ e che la loro somma fornisce una soluzione del sistema (1) che soddisfa le condizioni iniziali (3).

Osserviamo preliminarmente che se x; $y_1, y_2,\ldots, y_m$ variano in un dominio chiuso D' interno a D le f_i verificano ivi la condizione di LIPSCHITZ.

Infatti ricordiamo che se $F(x)$ è una funzione olomorfa in un dominio chiuso e convesso Ω, se L è il massimo modulo di $F'(x)$ in Ω si ha

$$F(\bar{x})-F(x)=\int_x^{\bar{x}} F'(t)\,dt$$

con l'integrale esteso al cammino rettilineo che unisce i due punti x e $\bar{x}$, e per il teorema di DARBOUX (¹) $|F(\bar{x})-F(x)|\leq L|\bar{x}-x|$. Ne viene che se in D' è

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right|\leq L, \qquad (i, k=1, 2,\ldots, m)$$

è anche (²)

$$(6)\qquad |f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2,\ldots, \bar{y}_m)-f_i(x;\ y_1, y_2,\ldots, y_m)|\leq L\sum_{k=1}^{m}|\bar{y}_k-y_k|.$$

Dalle (4) si ha poi $|y_i^{(r+1)}(x)-\beta_i|\leq M|x-a|\leq M\delta_1<b$ e perciò ai moduli delle differenze

$$f_i(x;\ y_1^{(r+1)}, y_2^{(r+1)},\ldots, y_m^{(r+1)})-f_i(x;\ y_1^{(r)}, y_2^{(r)},\ldots, y_m^{(r)})$$

potrà applicarsi la (6).

Se si tiene poi conto che se γ è una curva regolare di arco elementare ds e lunghezza S e $\varphi(x)$ una funzione continua della variabile complessa x dei punti x di γ, sussiste la limitazione

$$\left|\int_\gamma \varphi(x)\,dx\right|\leq\int_0^S|\varphi(x(s))|\,ds \quad (^3)$$

(¹) Cfr. M. PICONE: *Appunti di Analisi Superiore*, [Napoli, 1940] p. 3, (III).

(²) Cfr. Cap. I, § 3, n.° 1.

(³) Cfr. M. PICONE: op. cit., p. 3, (III').

basterà ripetere i ragionamenti dei n.[i] 2 e 3 del § 3 del Cap. I, per dimostrare appunto che le serie (5) convergono uniformemente verso delle funzioni $y_i(x)$ le quali rappresentano una soluzione del sistema (1), verificano le condizioni iniziali (3), e ne rappresentano anzi l'unica soluzione.

Se si osserva infine che per le (4) i termini delle serie (5) sono funzioni olomorfe di x in Γ_1 in virtù del teorema di WEIERSTRASS [1] si avrà che gli integrali $y_i(x)$ riescono olomorfi in Γ.

b) Supponiamo che nei secondi membri delle (1) figuri un parametro λ e le f_i siano continue nel dominio D definito dalle limitazioni

$$|x-a| \leqslant a; \qquad |y_i-\beta_i| \leqslant b, \quad (i=1, 2,\ldots, m); \qquad |\lambda-\gamma| \leqslant c,$$

olomorfe nell'interno di D, e rappresenti ancora M il massimo modulo delle f_i in D.

Ove si prenda come punto iniziale un punto x^0 tale che

$$|x^0-a| \leqslant \delta, \qquad \delta = \min\,[a,\ b/4M]$$

e per valori degli integrali y_i in x^0 si prescrivono dei valori y_i^0 tali che

$$|y_i^0-\beta_i| \leqslant b/2$$

e nelle (4) cangiamo a in x^0, β_i in y_i^0, ne viene che i termini delle serie (5) sono funzioni olomorfe di x; x^0; $y_1^0, y_2^0,\ldots, y_m^0$; λ internamente al dominio definito dalle limitazioni

$$|x-a| \leqslant \delta, \qquad |x^0-a| \leqslant \delta, \qquad |y_i^0-\beta_i| \leqslant b/2, \qquad |\lambda-\gamma| \leqslant c,$$

e che per il ricordato teorema di WEIERSTRASS le derivate di qualunque ordine degli integrali $y_i(x;\ x^0;\ y_1^0, y_2^0,\ldots, y_m^0;\ \lambda)$ rispetto ai loro argomenti si ottengono derivando termine a termine le serie (5).

Noti il lettore come l'ipotesi dell'olomorfia delle f_i abbia resa immediata la proprietà della derivabilità degli integrali rispetto ai valori iniziali e ai parametri, mentre nel Cap. I, nel caso reale, la dimostrazione di tali proprietà ha richiesto particolari accorgimenti.

c) Osserviamo che il calcolo dei limiti di CAUCHY ha fornito come campo di esistenza degli integrali il cerchio di raggio $\varrho = a(1-e^{-b/(m+1)Ma})$, mentre in *a*) il metodo delle approssimazioni

---

[1] Cfr. M. PICONE: op. cit., p. 17.

successive il cerchio di raggio $\delta = \min.(a, b/M)$ ed è subito visto che è $\varrho \leqslant \delta$. Tale disuguaglianza è infatti evidente se $a \leqslant b/M$, se è poi $b/M < a$ e poniamo $b/Ma = \xi (<1)$ occorre provare che

$$1 - e^{-\xi/(m+1)} < \xi, \quad \frac{\xi}{m+1} - \frac{1}{2!}\left(\frac{\xi}{m+1}\right)^2 + \dots < \xi,$$

soddisfatta essendo $0 < \xi < 1$.

2. - Sia $f(x, y)$ una funzione continua nel dominio D definito dalle limitazioni

$$|x| \leqslant a, \qquad |y| \leqslant b,$$

olomorfa nell'interno di D, e sia $y = y(x)$ la soluzione dell'equazione

$$dy/dx = f(x, y) \tag{7}$$

che si annulla per $x = 0$. Se M indica il massimo di $|f(x, y)|$ in D, il metodo delle approssimazioni successive assicura che $y(x)$ è olomorfa internamente al cerchio con centro nell'origine e raggio $\varrho(a, b, M) = \min(a, b/M)$.

Si presenta la questione: fissati a, b, M è possibile assegnare un numero $r(a, b, M) > \min(a, b/M)$, tale che indipendentemente dalla scelta di $f(x, y)$, l'integrale dell'equazione (7), nullo nell'origine, risulti olomorfo nel cerchio di centro nell'origine e raggio r?

Vogliamo dimostrare con WINTNER [1] che $\min(a, b/M)$ è il miglior limite di $\varrho(a, b, M)$.

Se $a \leqslant b/M$ il fatto è evidente, basterà scegliere $f(x, y)$ indipendente da y.

Supponiamo allora $a > b/M$; sarà sufficiente provare che per una assegnata coppia b e M e per qualunque numero $r > b/M$ esiste una funzione $f(y)$ indipendente da x che possiede le seguenti proprietà:

(*i*) $f(y)$ è continua nel cerchio $|y| \leqslant b$, olomorfa nell'interno;
(*ii*) il massimo di $|f(y)|$ nel cerchio $|y| \leqslant b$ è M;
(*iii*) la funzione $y(x)$ soluzione dell'equazione $dy/dx = f(y)$, nulla nell'origine, ha nel cerchio $|x| < r$ una singolarità.

---

[1] A. WINTNER: *On the exact value of the bound for the regularity of solutions of ordinary differential equations*. Am. Journ. of Math., 57, (1935), pp. 539-540.

Consideriamo la funzione

$$f(y)=M\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{b}\right)\right]^{1/n}$$

dove nel secondo membro della potenza consideriamo il valore principale.

La soluzione dell'equazione

$$dy/dx=f(y)$$

nulla nell'origine ha l'espressione

$$y(x)=b\left[\left(1+\frac{x}{c_n}\right)^{\frac{n}{n-1}}-1\right]$$

con

$$c_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1}2^{\frac{1}{n}}\frac{b}{M};$$

il punto $x=-c_n$ è un punto singolare di $y(x)$ ed è $c_n>b/M$, e $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=b/M$.

3. - *a*) Allo scopo di illustrare le applicazioni del calcolo delle matrici, del quale abbiamo dato un cenno nel Cap. II, § 2, vogliamo mostrare come esso renda possibile il calcolo simultaneo degli sviluppi in serie di un sistema fondamentale di integrali di un sistema di equazioni differenziali lineari con coefficienti funzioni olomorfe della x.

Sia da risolvere il sistema lineare

$$B(x)\frac{dY}{dx}=A(x)Y, \qquad Y(a)=Y_0, \tag{8}$$

dove

$$A(x)=\|a_{i,k}(x)\|, \qquad B(x)=\|b_{i,k}(x)\|, \qquad (i, k=1, 2,\ldots, m), \tag{9}$$

con le $a_{i,k}(x)$, $b_{i,k}(x)$ olomorfe in un dominio circolare C con centro nel punto a, det. $B(x)\neq 0$ in C, e

$$Y=\left\|\begin{matrix} y_1(x)\\ y_2(x)\\ \cdots\\ y_m(x)\end{matrix}\right\|, \qquad Y_0=\left\|\begin{matrix} y_1^0\\ y_2^0\\ \cdots\\ y_m^0\end{matrix}\right\|. \tag{10}$$

Poniamo $x-a=\tau$ e sia [Cap. II, § 2, n. 1, i)]

$$(11)\qquad \begin{cases} A(x)=A(a)+\frac{\tau}{1!}A'(a)+\frac{\tau^2}{2!}A''(a)+....+\frac{\tau^n}{n!}A^{(n)}(a)+.... \\ B(x)=B(a)+\frac{\tau}{1!}B'(a)+\frac{\tau^2}{2!}B''(a)+....+\frac{\tau^n}{n!}B^{(n)}(a).... . \end{cases}$$

Moltiplicando quest'ultime a sinistra per $B^{-1}(a)$, otteniamo

$$(12)\qquad \begin{cases} B^{-1}(a)A(x)=U_0+U_1\tau+U_2\tau^2+....+U_n\tau^n+.... \\ B^{-1}(a)B(x)=1+V_1\tau+V_2\tau^2+....+V_n\tau^n+.... \end{cases}$$

dove U_0, U_1,...., U_n,...., V_1, V_2,...., V_n,.... sono matrici di ordine m a termini costanti.

Sia $y_{1,k}(x)$, $y_{2,k}(x)$,...., $y_{m,k}(x)$, $(k=1, 2,...., m)$ *un sistema fondamentale di integrali del sistema dato, che soddisfi le condizioni iniziali*

$$(13)\qquad \begin{cases} y_{1,k}(a)=0, \quad y_{2,k}(a)=0,...., \quad y_{k-1,k}(a)=0, \\ y_{k,k}(a)=1, \quad y_{k+1,k}(a)=0,...., \quad y_{m,k}(a)=0, \end{cases}$$

posto allora

$$(14)\qquad S(x)=\left\| \begin{matrix} y_{1,1}(x), & y_{1,2}(x),...., & y_{1,m}(x) \\ y_{2,1}(x), & y_{2,2}(x),...., & y_{2,m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{m,1}(x), & y_{m,2}(x),...., & y_{m,m}(x) \end{matrix} \right\|,$$

si avrà $S(a)=1$ mentre la soluzione cercata avrà la forma

$$(15)\qquad Y(x)=S(x)Y_0=[1+S_1\tau+S_2\tau^2+....+S_n\tau^n+....]Y_0,$$

dove S_1, S_2, S_n,.... *sono matrici a coefficienti costanti, di ordine* m *che vogliamo determinare.*

Nella (8), moltiplicando a sinistra per $B^{-1}(a)$, e tenuto conto delle (12) e (15) otteniamo

$$(1+V_1\tau+V_2\tau^2+....)(S_1+2S_2\tau+3S_3\tau^2+4S_4\tau^3+....)Y_0=$$
$$=(U_0+U_1\tau+U_2\tau^2+....)(1+S_1\tau+S_2\tau^2+S_3\tau^3+....)Y_0,$$

e identificando i due membri si ottengono infine le *formule ricorrenti*

$$(16)\quad \begin{cases} S_1 = U_0 \\ 2S_2 = (U_0 - V_1)S_1 + U_1, \\ 3S_3 = (U_0 - 2V_1)S_2 + (U_1 - U_2)S_1 + U_2, \\ 4S_4 = (U_0 - 3V_1)S_3 + (U_1 - 2V_2)S_2 + (U_2 - V_3)S_1 + U_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

atte a determinare S_1, S_2, S_3,.... e perciò un sistema fondamentale di integrali che soddisfa le condizioni iniziali (13).

In particolare se $B(x) \equiv 1$, nel caso cioè dell'equazione

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y,$$

si ha dalla seconda delle (12) $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$,...., e le formule ricorrenti (16) dànno

$$(17)\quad \begin{cases} 1!\, S_1 = U_0 \\ 2!\, S_2 = U_0^2 + U_1 \\ 3!\, S_3 = U_0(U_0^2 + U_1) + 2U_1U_0 + 2U_2 \\ 4!\, S_4 = U_0(U_0^3 + U_0U_1 + 2U_1U_0 + 2U_2) + \\ \qquad\qquad + 3U_1(U_0^2 + U_1) + 6U_2U_0 + 6U_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

b) Illustriamo le cose dette con un esempio. Consideriamo l'equazione

$$(18)\qquad z'' = x^2 z$$

e si voglia determinare un sistema fondamentale di integrali z_1, z_2 soddisfacenti rispettivamente le condizioni iniziali

$$z_1(0) = 1, \qquad z_1'(0) = 0; \qquad z_2(0) = 0, \qquad z_2'(0) = 1.$$

Posto

$$y_1 = z, \qquad y_2 = z', \qquad Y = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right\|,$$

l'equazione (18) equivale al sistema lineare

$$\frac{dY}{dx} = \left\| \begin{matrix} 0, & 1 \\ x^2, & 0 \end{matrix} \right\| Y,$$

talchè con le nostre notazioni si ha

$$B=1, \qquad A=\begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ \tau^2, & 0 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}\tau+\begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{Vmatrix}\tau^2,$$

$$U_0=\begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}, \quad U_1=\begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}, \quad U_2=\begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{Vmatrix}, \quad U_3=U_4=\ldots=0,$$

e dalle (17) si ricava

$$S_1=\begin{Vmatrix} 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}, \quad S_2=\begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{Vmatrix}, \quad S_3=\frac{1}{3!}\begin{Vmatrix} 0, & 0 \\ 2, & 0 \end{Vmatrix}, \quad S_4=\frac{1}{4!}\begin{Vmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 6 \end{Vmatrix},$$

e proseguendo i calcoli si troverà che la (18) ammette il sistema fondamentale di integrali

$$z_1=1+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}x^8+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}x^{12}+\ldots$$

$$z_2=x+\frac{1}{4\cdot 5}x^5+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}x^9+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}x^{13}+\ldots.$$

§ 3. - Equazioni differenziali lineari del secondo ordine nel campo analitico.

1. Punti singolari regolari e irregolari per un'equazione differenziale del secondo ordine. - 2. Punti regolari. Equazione determinante. - 3. La convergenza delle serie quando la differenza degli esponenti caratteristici non è uguale nè a zero nè ad un numero intero. - 4. Costruzione di una seconda soluzione quando la differenza degli esponenti caratteristici è zero oppure un intero. - 5. Punti singolari regolari all' infinito.

1. - Sia data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0, \tag{1}$$

e i coefficienti $p(x)$, $q(x)$ siano funzioni olomorfe della x nel dominio circolare aperto C definito dalla limitazione $|x-c|<R$. Tenuto conto delle cose dette nel § 1 del Cap. II e nel § precedente abbiamo che l'equazione ammette due integrali linearmente indipendenti, olomorfi in C. Vogliamo ora considerare il caso in cui $p(x)$, $q(x)$ siano olomorfi in C, salvo il punto c, ove uno almeno di essi

ammette una *singolarità polare*. Secondo la teoria generale ([1]) il punto c è un *punto regolare* e l'equazione è di *tipo fuchsiano* nell'intorno di $x=c$ quando $p(x)$ e $q(x)$ ammettono in c un polo rispettivamente non superiore al primo e al secondo, cioè *se* $(x-c)p(x)$, $(x-c)^2q(x)$ *sono olomorfi in* C.

Se c è invece un polo per $p(x)$ o $q(x)$ o per entrambi e le condizioni dichiarate non sono soddisfatte diremo che c è un *punto irregolare*.

Noi ci limiteremo a studiare il comportamento degli integrali nell'intorno di un punto regolare.

2. - Sia dunque c un punto singolare regolare della (1); moltiplicando per $(x-c)^2$ si ha

$$(x-c)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x-c)P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \tag{2}$$

con $P(x)$, $Q(x)$ funzioni olomorfe in c, e perciò

$$\left\{\begin{aligned} P(x)&=p_0+p_1(x-c)+p_2(x-c)^2+\ldots &&=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-c)^n\\ Q(x)&=q_0+q_1(x-c)+q_2(x-c)^2+\ldots &&=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-c)^n, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

dove p_0, p_1, p_2,...., q_0, q_1, q_2,.... sono costanti, e queste serie riescono convergenti nel cerchio C' di centro c e raggio r, con $0<r<R$, il contorno incluso.

Proponiamoci di vedere se la (2) può ammettere una soluzione della forma

$$\boxed{y=(x-c)^\alpha[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-c)^n]} \tag{4}$$

con a_1, a_2,.... costanti.

([1]) Cfr. ad es. *a*) L. Bianchi: *Lezioni sulla Teoria delle Equazioni differenziali lineari. Teoria di Fuchs-Riemann*, op. cit. (Catania, 1924), p. 119; *b*) E. T. Whittaker-G. N. Watson: *A course of modern analysis*, (3ª ed., Cambridge, 1920), pp. 194-210; *c*) E. L. Ince: *Ordinary differential equations*, (London, 1927), part. II.

Supposto che la serie in parentesi quadra abbia raggio di convergenza non nullo abbiamo

$$dy/dx = (x-c)^{\alpha-1}[\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha+n)(x-c)^n],$$

$$d^2y/dx^2 = (x-c)^{\alpha-2}[\alpha(\alpha-1) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)(x-c)^n]$$

e sostituendo nella (2) otteniamo

$$\begin{aligned}(x-c)^{\alpha}[\alpha(\alpha-1) &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)(x-c)^n]\\ +(x-c)^{\alpha}[\quad \alpha \quad &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha+n)(x-c)^n] \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-c)^n\\ +(x-c)^{\alpha}[\quad 1 \quad &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n] \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-c)^n = 0,\end{aligned}$$

e moltiplicando le serie al modo di CAUCHY e osservando che il primo membro deve essere identicamente nullo si hanno per α e i cofficienti a_1, a_2,.... le seguenti equazioni

$$\boxed{\alpha^2 + (p_0-1)\alpha + q_0 = 0} \tag{5}$$

$$a_1[(\alpha+1)^2 + (p_0-1)(\alpha+1) + q_0] + \alpha p_1 + q_1 = 0 \tag{6_1}$$

$$\begin{aligned}a_2[(\alpha+2)^2 + (p_0-1)(\alpha+2) + q_0] &+\\ + a_1[(\alpha+1)p_1 + q_1] + \alpha p_2 + q_2 &= 0,\end{aligned} \tag{6_2}$$

e in generale

$$\begin{aligned}a_n[(\alpha+n)^2 + (p_0-1)(\alpha+n) + q_0] &+\\ + \sum_{m=1}^{n-1} a_{n-m}[(\alpha+n-m)p_m + q_m] + \alpha p_n + q_n &= 0.\end{aligned} \tag{6_n}$$

Poniamo

$$F(\alpha) \equiv \alpha^2 + (p_0-1)\alpha + q_0, \tag{7}$$

l'equazione (5), la quale prende il nome di *equazione determinante della* (2) *relativa al punto* c, può allora scriversi

$$F(\alpha) = 0, \tag{5'}$$

e se ϱ_1 e ϱ_2 sono le radici di questa equazione, diremo ϱ_1 e ϱ_2 gli *esponenti caratteristici* dell'equazione relativi al punto c.

Osserviamo che nelle equazioni (6_1), (6_2).... (6_n).... i coefficienti di a_1, a_2,...., a_n,.... sono rispettivamente $F(\alpha+1)$, $F(\alpha+2)$,...., $F(\alpha+n)$,.... e la condizione $F(\alpha+n)\neq 0$ per $n=1, 2,....$ può esprimersi dicendo che se $\alpha=\varrho_1$ è $\varrho_2\neq\varrho_1+1$, ϱ_1+2,...., e che se $\alpha=\varrho_2$ è $\varrho_1\neq\varrho_2+1$, ϱ_2+2,....; abbiamo allora che se la differenza degli esponenti caratteristici non è zero nè un intero, le (6_1), (6_2),...., (6_n).... forniscono con *procedimento ricorrente* due successioni di coefficienti a_n atte ad individuare *due soluzioni formali* dell'equazione (2).

8. - Vogliamo dimostrare che *se $\varrho_1-\varrho_2$ non è zero, nè intero, il procedimento ricorrente indicato nel n. precedente fornisce due integrali linearmente indipendenti dell'equazione* (2).

Sia

$$R\varrho_1 \geqslant R\varrho_2 \quad (^1)$$

talchè posto

$$\varrho_1-\varrho_2=s \tag{8}$$

è $Rs\geqslant 0$. Si avrà anche $F(\varrho_1+n)=F(\varrho_1)+nF'(\varrho_1)+n^2F''(\varrho_1)/2=$ $=n[2\varrho_1+p_0-1]+n^2$, ma è $p_0-1=-\varrho_1-\varrho_2=-2\varrho_1+s$, $2\varrho_1+$ $+p_0-1=s$, e perciò

$$F(\varrho_1+n)=n(s+n), \qquad [F(\varrho_2+n)=n(n-s)]. \tag{9}$$

Sia N il massimo modulo di $P(x-c)$ e $Q(x-c)$ sulla circonferenza del cerchio C', per cose note si ha

$$|p_n|\leqslant N/r^n, \qquad |q_n|\leqslant N/r^n, \qquad (n=0, 1, 2,....)$$

e possiamo se occorre crescere N in guisa che si abbia

$$(10_1)\quad |p_n|<Mr^{-n}, \qquad |q_n|<Mr^{-n}, \qquad |\varrho_1 p_n+q_n|<Mr^{-n},$$
$$(n=0, 1, 2,....),$$

$$(10_2)\qquad M\geqslant 1.$$

(1) Il simbolo Rx indica la *parte reale* di x.

Dalla (6_1) per $\alpha=\varrho_1$ si ha $[|s+1|\geqslant 1]$

$$a_1 F(\varrho_1+1)+\varrho_1 p_1+q_1=0,$$
$$|a_1|=|(\varrho_1 p_1+q_1)/F(\varrho_1+1)|<M/r|s+1|\leqslant M/r,$$

$$|a_1|<M/r; \tag{11}$$

procediamo allora per induzione, supponiamo

$$|a_n|<(M/r)^n, \qquad (n=1, 2,\dots, m-1)$$

e dimostriamo che la stessa limitazione sussiste per $n=m$.

Si ha infatti

$$|a_m|=\frac{\left|\sum_{k=1}^{m-1} a_{m-k}[(\varrho_1+m-k)p_k+q_k]+\varrho_1 p_m+q_m\right|}{|F(\varrho_1+m)|}$$

$$\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{m-1}|a_{m-k}|\,|\varrho_1 p_k+q_k|+|\varrho_1 p_m+q_m|+\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)|a_{m-k}|\,|p_k|}{m\,|s+m|}$$

$$<\frac{\sum_{k=1}^{m-1}(M/r)^{m-k}Mr^{-k}+Mr^{-m}+\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)(M/r)^{m-k}Mr^{-k}}{m\,|s+m|}$$

$$<\frac{m(M/r)^m+\left[\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)\right](M/r)^m}{m^2|1+s/m|}$$

$$<\frac{(M/r)^m(m+1)}{2m|1+s/m|}.$$

Avendosi $R(s)\geqslant 0$ è $|1+s/m|\geqslant 1$, quindi

$$|a_m|<\frac{m+1}{2m}(M/r)^m\leqslant(M/r)^m \tag{12}$$

e perciò la serie

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-c)^n$$

ha il suo raggio di convergenza almeno uguale a r/M.

Se indichiamo con $a_1', a_2',\dots, a_n',\dots$ i coefficienti corrispondenti alla radice ϱ_2 vogliamo dimostrare che si ha

$$|a'_m|<(M\tau/r)^m, \qquad (m=1, 2,\dots) \tag{12'}$$

dove τ indica l'estremo superiore dell'insieme numerico

$$|1-s|^{-1}, \qquad |1-s/2|^{-1},\dots, \qquad |1-s/m|^{-1},\dots$$

[insieme numerico limitato perchè s non è intero].

È infatti $F(\varrho_2+n)=n(n-s)=n^2(1-s/n)$ e $|1-s/n|^{-1}<\tau$, e basterà ripetere il ragionamento precedente.

Se osserviamo infine che essendo $\varrho_1-\varrho_2$ nè zero, nè intero le due funzioni analitiche

$$(x-c)^{\varrho_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-c)^n\right], \qquad (x-c)^{\varrho_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x-c)^n\right]$$

sono linearmente indipendenti abbiamo che *le due funzioni analitiche*

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} w_1(x)&=(x-c)^{\varrho_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-c)^n\right],\\ w_2(x)&=(x-c)^{\varrho_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x-c)^n\right]\end{aligned}\right.$$

rappresentano un sistema fondamentale di integrali dell'equazione (2). Si dirà anche che *gli integrali $w_1(x)$, $w_2(x)$ appartengono rispettivamente agli esponenti ϱ_1, ϱ_2.*

4. - Nel caso ora esaminato la singolarità (regolare) del punto c si riflette nella presenza negli integrali dei fattori $(x-c)^{\varrho_1}$, $(x-c)^{\varrho_2}$; è istruttivo trovare anche nel caso che la differenza $\varrho_1-\varrho_2$ sia zero o un intero la forma degli integrali, per mettere in evidenza una seconda singolarità (logaritmica).

Osserviamo che se $\varrho_1-\varrho_2=0$ la soluzione $w_2(x)$ coincide con $w_1(x)$, se poi s è intero positivo è $F(\varrho_2+s)=0$ e ci è perciò impossibile determinare il coefficiente a_s' col procedimento del n. 2.

Per determinare un secondo integrale facciamo sull'equazione (2) la trasformazione [1]

$$y(x)=w_1(x)\,Y,$$

[1] Cfr. Cap. II, § 4, n. 1.

avremo

$$(x-c)^2 \frac{d^2Y}{dx^2} + \left[2(x-c)^2 \frac{w_1'}{w_1} + (x-c)P(x)\right] \frac{dY}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2} \Big/ \frac{dY}{dx} = -2\frac{w_1'}{w_1} - \frac{P(x)}{x-c},$$

$$\frac{dY}{dx} = B \frac{1}{[w_1(x)]^2} e^{-\int \frac{P(x)}{x-c} dx} = B \frac{(x-c)^{-2\varrho_1 - p_0}}{\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n\right]^2} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n n^{-1} (x-c)^n} \tag{14}$$

Posto

$$\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n\right]^{-2} e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n n^{-1}(x-c)^n} = g(x)$$

è $g(c)=1$; inoltre $g(x)$ risulta olomorfa in un cerchio con centro in c che non contiene singolarità di $P(x)$ o singolarità o zeri di $(x-c)^{-\varrho_1} w_1(x)$, e internamente a tale cerchio avremo

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n (x-c)^n,$$

e dalla (14) si ha allora per $s \neq 0$, $[-2\varrho_1 - p_0 = -s-1]$,

$$Y(x) = A + B\left[-\frac{1}{s}(x-c)^{-s} - \sum_{n=1}^{s-1} \frac{g_n}{s-n}(x-c)^{n-s} + g_s \log(x-c) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{g_n}{n-s}(x-c)^{n-s}\right],$$

perciò la più generale soluzione dell'equazione (2), per x variabile in un cerchio di centro c e raggio sufficientemente piccolo, ha la forma

$$\boxed{A w_1(x) + B[g_s w_1(x) \log(x-c) + \overline{w}(x)]} \tag{15}$$

con A e B *costanti arbitrarie* e

$$\overline{w}(x) = (x-c)^{\varrho_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-c)^n\right](x-c)^{-s}\left[-\frac{1}{s} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq s}}^{\infty} \frac{g_n}{n-s}(x-c)^n\right].$$

Essendo $\varrho_1 - s = \varrho_2$ abbiamo anche

$$(16) \qquad \boxed{\overline{w}(x) = (x-c)^{\varrho_2}\left[-1/s + \sum_{n=1}^{\infty} h_n (x-c)^n\right]}.$$

Le (15) *e* (16) *ci porgono l'espressione dell'integrale generale della* (2) *nell'ipotesi s intero*, $s>0$, e il fattore in parentesi quadra della (15) mette in evidenza una seconda *singolarità logaritmica* dell'integrale.

Quando sia $s=0$ si avrà

$$Y(x) = A + B\int\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n (x-c)^n\right]\frac{1}{x-c}\,dx =$$

$$= A + B\left[\log\,(x-c) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n}(x-c)^n\right]$$

e l'integrale generale dell'equazione proposta ha la forma

$$(15') \qquad A w_1(x) + B[w_1(x)\log\,(x-c) + \overline{w}(x)]$$

con

$$(16') \qquad \overline{w}(x) = (x-c)^{\varrho_1}\sum_{n=1}^{\infty} h_n (x-c)^n.$$

5. - Ove sia da studiare il comportamento degli integrali di un'equazione differenziale all'∞ opereremo su di essa la trasformazione

$$x = 1/x_1$$

e considereremo il comportamento della sua trasformata nell'intorno del punto $x_1 = 0$. Limitiamoci al caso in cui i coefficienti siano regolari o presentino singolarità polari; secondochè il punto $x_1 = 0$ è un punto ordinario (coefficienti olomorfi nell'intorno del punto $x_1 = 0$), singolare (polare) regolare, singolare (polare) irregolare, diremo corrispondentemente che ∞ è un punto ordinario, un punto singolare regolare, un punto singolare non regolare.

Avendosi

$$\frac{dy}{dx} = -x_1^2\frac{dy}{dx_1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = x_1^4\frac{d^2y}{dx_1^2} + 2x_1^3\frac{dy}{dx_1}$$

si ottiene

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y\equiv x_1^4\frac{d^2y}{dx_1^2}+\left[2x_1^3-x_1^2p\left(\frac{1}{x_1}\right)\right]\frac{dy}{dx_1}+\dot{q}\left(\frac{1}{x_1}\right)y$$

e perciò l'equazione trasformata della (1) diventa

$$\frac{d^2y}{dx_1^2}+\left[\frac{2}{x_1}-\frac{1}{x_1^2}p\left(\frac{1}{x_1}\right)\right]\frac{dy}{dx_1}+\frac{1}{x_1^4}q\left(\frac{1}{x_1}\right)=0.$$

Ne viene che il punto $x=\infty$ è ordinario se nell'intorno di $x=\infty$ valgono gli sviluppi

$$2x-x^2p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^{-n},\qquad x^4q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^{-n}$$

ed è singolare regolare se

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^{-n},\qquad x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^{-n}.$$

§ 4. - Equazioni differenziali lineari con tre punti singolari regolari. L'equazione ipergeometrica.

1. L'equazione di Papperitz e la funzione P di Riemann. - 2. Trasformazione di Riemann della P. - 3. L'equazione ipergeometrica di Gauss. - 4. La serie ipergeometrica. - 5. L'integrale ipergeometrico di Eulero.

1. - La determinazione della forma di un'equazione differenziale quando siano fissati i punti singolari dei coefficienti e i corrispondenti esponenti trovasi abbozzata in una memoria postuma di Riemann (¹).

Limitandoci alle equazioni del secondo ordine aventi soltanto tre punti singolari regolari è facile verificare che l'equazione

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{x-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{x-c}\right\}\frac{dy}{dx}+$$
$$+\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{x-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{x-c}\right\}\frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0$$

(¹) B. Riemann: *Zwei allgemeine Sätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten* (1857); Mem. postuma; Ges. Math. Werke, (Leipzig, 1876), p. 357.

con

$$a+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1 \tag{2}$$

ha soltanto i tre punti singolari regolari a, b, c e i corrispondenti esponenti sono α, α'; β, β'; γ, γ'.

Con le notazioni nel n. 2 del § precedente si ha infatti nel punto $x=a$, $p_0=1-\alpha-\alpha'$, $q_0=\alpha\alpha'$ e l'equazione determinante ha appunto le radici α e α'.

Si ha poi con le notazioni del paragrafo precedente e tenuto conto della (2),

$$\begin{aligned}
&2x-x^2p(x)=\\
&=2x-(1-\alpha-\alpha')x/(1-a/x)-(1-\beta-\beta')x/(1-b/x)-(1-\gamma-\gamma')x/(1-c/x)\\
&=2x-(1-\alpha-\alpha')x\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\dots\right)-\dots\\
&=-[a(1-\alpha-\alpha')+b(1-\beta-\beta')+c(1-\gamma-\gamma')]+\dots
\end{aligned}$$

perciò $2x-x^2p(x)$ è regolare in $x=\infty$, anche $x^4q(x)$ è regolare in $x=\infty$, e per le cose dette nel n. 5 del § 3 il punto $x=\infty$ è un punto ordinario per la (1).

L'equazione (1) è stata trovata da PAPPERITZ [1].

Sussiste la proprietà inversa che la più generale equazione differenziale lineare del secondo ordine con tre singolarità ordinarie ha la forma (1) con le costanti α, α', β, β', γ, γ' legate dalla (2).

Per indicare che una funzione y soddisfa la (1), RIEMANN scrive [2]

$$y=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} \tag{3}$$

dove nella prima riga del quadro sono posti i punti a, b, c e corrispondentemente in colonna gli esponenti caratteristici.

Chiameremo la y la funzione P di RIEMANN.

---

[1] E. PAPPERITZ: *Ueber verwandte s-Functionen*. Math. Ann., 25 (1885), pp. 212-221.

[2] B. RIEMANN: *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen*. (1857), Abh. d. Kön. Ges. der Wiss. zu Göttingen, (1857), oppure Ges. Math. Werke, (Leipzig, 1876), p. 63.

Ad es. l'equazione [*ipergeometrica* (cfr. n. 3)]

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}-aby=0$$

può scriversi

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\frac{c}{x}+\frac{1+a+b-c}{x-1}+\frac{1-a-b}{x-\infty}\right]\frac{dy}{dx}+\frac{ab}{x(x-1)}y=0$$

e perciò

$$y=P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & x \\ 1-c & b & c-a-b & \end{matrix}\right\}.$$

2. - *a*) Vogliamo dimostrare il seguente teorema fondamentale: *Se sulla variabile complessa x si effettua la sostituzione lineare a coefficienti costanti*

$$x=(Ax_1+B)/(Cx_1+D), \qquad (AD-BC\neq 0)$$

e supponiamo che i punti a, b, c abbiano per corrispondenti i punti a_1, b_1, c_1, si ha allora

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}. \tag{4}$$

Basterà verificare che la (4) sussiste per le sostituzioni lineari elementari

$$a)\ x=x_1+k\,; \qquad b)\ x=kx_1\,; \qquad c)\ x=1/x_1\,.$$

Per la sostituzione *a*) il risultato è immediato; per la *b*) si ha

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{k}\frac{dy}{dx_1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{k^2}\frac{d^2y}{dx_1^2}$$

e la (1) diventa $[a=ka_1,\ b=kb_1,\ c=kc_1]$

$$\frac{1}{k^2}\frac{d^2y}{dx_1^2}+\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{kx_1-ka_1}+\dots\right\}\frac{1}{k}\frac{dy}{dx_1}+$$
$$+\left\{k\,\frac{\alpha\alpha'(a_1-b_1)(a_1-c_1)}{x_1-a_1}+\dots\right\}\frac{y}{k^3(x_1-a_1)(x_1-b_1)(x_1-c_1)}=0$$

e moltiplicando per k^2 si ottiene appunto la (4).

Si effettui infine la sostituzione c), posto $a=1/a_1$, $b=1/b_1$, $c=1/c_1$ si ottiene [cfr. § 3; 5]

$$x_1^4 \frac{d^2y}{dx_1^2}+2x_1^3\frac{dy}{dx_1}-\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{1/x_1-1/a_1}+\dots\right\}x_1^2\frac{dy}{dx_1}+$$
$$+\left\{\frac{\alpha\alpha'(1/a_1-1/b_1)(1/a_1-1/c_1)}{1/x_1-1/a_1}+\dots\right\}\frac{y}{(1/x_1-1/a_1)(1/x_1-1/b_1)(1/x_1-1/c_1)}=0$$

e sommando il secondo e terzo termine e dividendo per x_1^4 troviamo la (4).

b) *Se y è una funzione P espressa dalla* (3), *anche la funzione*

$$y_1=\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^k\left(\frac{x-c}{x-b}\right)^l y \tag{5}$$

è una funzione P, e si ha

$$y_1=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta-k-l & \gamma+l & x \\ \alpha'+k & \beta'-k-l & \gamma'+l & \end{matrix}\right\}$$

cioè gli esponenti α, α'; γ, γ' aumentano rispettivamente di k e l, e gli esponenti β e β' diminuiscono di $k+l$.

In simboli

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^k\left(\frac{x-c}{x-b}\right)^l P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta-k-l & \gamma+l & x \\ \alpha'+k & \beta'-k-l & \gamma'+l & \end{matrix}\right\}. \tag{6}$$

Il lettore potrà fare la verifica diretta; ammesso del resto che la (1) sia univocamente determinata fissati i punti a, b, c e i corrispondenti esponenti caratteristici, basterà allora osservare che per effetto della (5) y_1 ha le sue singolarità in a, b, c e gli esponenti caratteristici in a aumentano di k, in c di l e in b diminuiscono di $k+l$.

8. - Chiamasi *equazione ipergeometrica* l'equazione

$$\boxed{x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}-aby=0}\;; \tag{7}$$

e la funzione analitica che la soddisfa *funzione ipergeometrica* [1].

---

[1] Questa equazione fu considerata da EULERO in *Institutiones Calculi Integralis*, II (Petropoli, 1769), nn. 1035, 1039.

Per le cose dette al n. 1, y è la funzione P di RIEMANN di simbolo

$$(8)\qquad y=P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & x \\ 1-c & b & c-a-b & \end{Bmatrix}.$$

In virtù della (6) abbiamo

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{x-c}{x-b}\right)^{\gamma}P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & x \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix},$$

ma la sostituzione lineare $x_1=(x-a)(c-b)/(x-b)(c-a)$ muta rispettivamente i punti a, b, c in 0, ∞, 1, e ne consegue, per il risultato del n. 2 a), la formula notevolissima

$$(8')\qquad \boxed{P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{x-c}{x-b}\right)^{\gamma}P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & x_1 \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix}}.$$

4. - a) La teoria generale permette studiare il comportamento degli integrali dell'equazione ipergeometrica nell'intorno dei tre punti singolari 0, 1, ∞ e il loro prolungamento analitico nel piano complesso tagliato lungo l'asse reale nei tratti $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$, nel quale campo (semplicemente connesso) ogni integrale è olomorfo; noi qui per brevità ci limiteremo a studiare il comportamento degli integrali nell'intorno del punto $x=0$.

Se c non è intero, (conformemente ai risultati del § 3, n. 3) un sistema di integrali fondamentali ha la forma

$$y_1(x), \qquad y_2(x)=x^{1-c}u(x)$$

con $y_1(x)$, $u(x)$ funzioni olomorfe in un intorno di $x=0$ e senza alterare le generalità supporremo

$$y_1(0)=1, \qquad u(0)=1.$$

Posto

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad (c_0=1),$$

sostituendo nella (7) abbiamo

$$x(1-x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} +$$
$$+[c-(a+b+1)x]\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - ab\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

da cui

$$-n(n-1)c_n + n(n+1)c_{n+1} + (n+1)cc_{n+1} - (a+b+1)nc_n - abc_n = 0,$$

(9) $$c_{n+1} = (n+a)(n+b)c_n/(n+1)(n+c),$$

e siccome $c_0 = 1$, abbiamo

$$c_1 = \frac{ab}{1 \cdot c}, \qquad c_2 = \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2c(c+1)}, \dots,$$
$$c_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!\, c(c+1)\dots(c+n-1)}.$$

La serie corrispondente

(10) $$\boxed{1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\, c(c+1)}x^2 + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)}x^n + \dots}$$

prende il nome di *serie ipergeometrica* ed è indicata da GAUSS col simbolo

$$F(a, b, c;\ x) \quad [1]$$

---

[1] C. F. GAUSS: *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots,$$

Comm. Soc. R. Sc. Gottingensis, II, (1812); Cfr. Werke, (Göttingen, 1866), 3, p. 125.

La serie (10) è stata considerata da EULERO nella memoria: *Specimen Transformationis Singularis Serierum*. Nova Acta Ac. Sc. Petr. 12, (1794), pubbl. nel 1801; vedi anche Opere, Ser. I, XVI, pp. 41-55.

La denominazione *serie ipergeometrica* è di KUMMER. [E. KUMMER: *Über die hypergeometrische Reihe*. Journ. für die reine und ang. Math., 15 (1836), pp. 39-83, 127-172].

Per la letteratura sulla funzione ipergeometrica cfr. J. KAMPÉ DE FÉRIET: *La fonction hypergéométrique*, Mémorial des Sciences Mathémat., 85 (1937, Paris).

ponendo in tal modo in evidenza la variabile x e i parametri a, b, c da cui dipende.

Abbiamo così trovato per l'integrale y_1 l'espressione in serie

$$(11_1)\quad \boxed{y_1 = F(a, b, c;\, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\, c(c+1)\ldots(c+n-1)} x^n};$$

e il suo raggio di convergenza per i risultati del § 1 è uguale a 1. Quest'ultima circostanza si verifica peraltro immediatamente per il fatto che dalla (9) segue $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}| = 1$.

Per determinare l'integrale y_2 basterà osservare che si ha

$$x^{c-1} y_2(x) = P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & a-c+1 & 0 \\ c-1 & b-c+1 & c-a-b \end{Bmatrix} = F(a+1-c, b+1-c, 2-c;\, x)$$

da cui

$$(11_2)\qquad \boxed{y_2(x) = x^{1-c} F(a+1-c,\, b+1-c,\, 2-c;\, x)}.$$

Dalle (11_1) e (11_2) segue che nel cerchio con centro nell'origine e di raggio 1 un qualunque integrale dell'equazione ipergeometrica ha la forma

$$y = c_1 F(a, b, c;\, x) + c_2 x^{1-c} F(a+1-c,\, b+1-c,\, 2-c;\, x)$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

b) Sarà facile al lettore verificare che

$$F(-n, b, b;\, -x) = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \ldots = (1+x)^n;$$

$$F(1, 1, 2;\, -x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \ldots$$

e perciò per il logaritmo principale di $1+x$,

$$\log(1+x) = xF(1, 1, 2;\, -x);$$

$$F\left(1, b, 1;\, \frac{x}{b}\right) = 1 + \frac{b}{1!}\frac{x}{b} + \frac{b(b-1)}{2!}\frac{x^2}{b^2} + \ldots = \left(1 + \frac{x}{-b}\right)^{-b}$$

quindi

$$e^x = \lim_{b\to\infty}\left(1 + \frac{x}{-b}\right)^{-b} = \lim_{b\to\infty} F(1, b, 1;\, x/b).$$

c) Vogliamo infine stabilire una relazione differenziale di cui faremo uso nel paragrafo seguente.

Dalla (7) derivando rispetto ad x otteniamo

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{dy}{dx}\right]+[(c+1)-(a+b+3)]\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]-$$
$$-(a+1)(b+1)\left[\frac{dy}{dx}\right]=0$$

cioè *la derivata prima di una funzione ipergeometrica è una funzione ipergeometrica relativa ai tre parametri* $a+1,\ b+1,\ c+1$ e in particolare

$$\frac{dF(a,b,c;x)}{dx}=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1;\ x). \tag{12}$$

Si avrà in generale

$$x(1-x)\frac{d^2y^{(n-1)}}{dx^2}+[(c+n-1)-(a+b+2n-1)x]\frac{dy^{(n-1)}}{dx}-$$
$$-(a+n-1)(b+n-1)y^{(n-1)}=0$$

dalla quale moltiplicando per $x^{c+n-2}(1-x)^{a+b-c+n-1}$ otteniamo

$$\frac{d}{dx}[x^{n+c-1}(1-x)^{a+b-c+n}y^{(n)}]=$$
$$=(a+n-1)(b+n-1)x^{n+c-2}(1-x)^{a+b-c+n-1}y^{(n-1)}$$

e derivando $(n-1)$ volte abbiamo la formula ricorrente

$$\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+c-1}(1-x)^{a+b-c+n}y^{(n)}]=$$
$$=(a+n-1)(b+n-1)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[x^{n+c-2}(1-x)^{a+b-c+n-1}y^{(n-1)}]$$

dalla quale cangiando n in $n-1,\ n-2,\dots,\ 2,\ 1$ e moltiplicando si ha

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+c-1}(1-x)^{a+b-c+n}y^{(n)}]=\\&=a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)x^{c-1}(1-x)^{a+b-c}y\end{aligned}}. \tag{13}$$

d) Il lettore tenuto conto della (11_1) verificherà facilmente le seguenti relazioni di Gauss ([1]) [tra le *F contigue*] di cui ci var-

([1]) Cfr. C. F. Gauss: *Werke*, (Göttingen, 1866), 3, p. 130.

remo nel paragrafo seguente

(14) $aF(a+1, b, c;\ x) - bF(a, b+1, c;\ x) = (a-b)F(a, b, c;\ x)$

(15) $$F(a+1, b-1, c;\ x) - F(a, b, c;\ x) = \\ = \frac{b-a-1}{c}\, xF(a+1, b, c+1;\ x).$$

5. - Si consideri l'integrale [di EULERO]

$$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}du,$$

dove supponiamo che u si muova sul tratto $(0, 1)$ dell'asse reale, $c>b>0$, $|x|<1$, e $(1-ux)^{-a}$ rappresenti quella determinazione che per $u\to+0$ (sull'asse reale) assume il valore 1.

Si ha

$$(1-ux)^{-a} = 1 + \frac{a}{1!}ux + \frac{a(a+1)}{2!}u^2x^2 + \dots$$

e siccome l'ipotesi $|x|<1$ porta che la serie del secondo membro è uniformemente convergente quando u varia tra 0 e 1 abbiamo

(16) $$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}du = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!}\, x^n \int_0^1 u^{n+b-1}(1-u)^{c-b-1}du.$$

Si ha ora per note proprietà delle funzioni *Euleriane* [1]

$$\int_0^1 u^{n+b-1}(1-u)^{c-b-1}du = B(n+b,\ c-b) = \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+c)} \\ = \frac{(b+n-1)(b+n-2)\dots b\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{(c+n-1)(c+n-2)\dots c\Gamma(c)}$$

---

[1] Supponiamo note al lettore le proprietà della funzione *Gamma euleriana di seconda specie* $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$, $(Ra>0)$ e della *Beta euleriana di prima specie*

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

V. nota del § 6, n. 2, p. 157.

e sostituendo nella (13) abbiamo allora per $|x|<1$, $c>b>0$ la formula di EULERO

$$(17)\quad \boxed{\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}du = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c;\, x)}.$$

Si può dimostrare che la (17) sussiste se $R(c)>R(b)>0$.

§ 5. - I polinomi ipergeometrici di Jacobi.

1. I polinomi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ di JACOBI. - 2. Formula di RODRIGUES. Funzione generatrice dei polinomi $P_n^{(\alpha,\beta)}$. - 3. I valori $P_n(\pm 1)$. - 4. Formule ricorrenti. - 5. Ortogonalità dei polinomi P_n in $(-1, 1)$. - 6. Il teorema di POINCARÉ e il $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n+1}(x)/P_n(x)$. - 7. Serie di polinomi di JACOBI nel campo complesso. - 8. Polinomi iperesferici e funzione generatrice.

1. - a) La serie ipergeometrica si muta in un polinomio di grado n se uno dei parametri a o b è uguale ad un intero negativo $-n$, e diremo n^{esimo} polinomio ipergeometrico di JACOBI [1] e lo indicheremo con uno dei simboli $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $P_n(x)$ il polinomio

$$(1)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!} F\left(\alpha+\beta+n+1, -n, \alpha+1, \frac{1-x}{2}\right),$$

$$(n=1, 2, \dots).$$

Per definizione

$$(2)\qquad P_0^{(\alpha,\beta)} = 1.$$

Il coefficiente di grado n di P_n ha l'espressione

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}\;\frac{(\alpha+\beta+n+1)\dots(\alpha+\beta+2n)(-1)^n n!}{n!\;(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}\,(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$$

perciò

$$(3)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n}x^n + \dots.$$

b) Per ottenere l'equazione differenziale dei polinomi P_n basterà mutare nell'equazione ipergeometrica x in $(1-\xi)/2$ e can-

---

[1] C. G. J. JACOBI'S: *Gesammelte Werke*. (Berlin, 1891), Bd. 6, p. 191.

giare rispettivamente a, b, c, in $\alpha+\beta+n+1$, $-n$, $\alpha+1$; avremo

$$(4)\qquad (1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}-[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta+2)x]\frac{dP_n}{dx}+n(n+\alpha+\beta+1)P_n=0.$$

c) Dalla (1) derivando rispetto ad x e tenuto conto della (12) del § 4 abbiamo

$$\frac{dP_n}{dx}=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}\frac{(\alpha+\beta+n+1)(-n)}{\alpha+1}\cdot\frac{-1}{2}F\left(\alpha+\beta+n+2,\ -n+1,\ \alpha+2,\frac{1-x}{2}\right)$$

cioè

$$(5)\qquad P'^{(\alpha,\beta)}_n=\frac{\alpha+\beta+n+1}{2}P^{(\alpha+1,\beta+1)}_{n-1}.$$

2. - *a*) Dalla (13) del § 4 posto $b=-n$ e cangiando poi a e c in $\alpha+\beta+n+1$, $\alpha+1$ e x in $(1-\xi)/2$ otteniamo la così detta formula di RODRIGUES

$$(6)\quad P^{(\alpha,\beta)}_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}],$$

dalla quale cangiando i parametri α e β in β ed α, ed x in $-x$

$$(7)\qquad P^{(\beta,\alpha)}_n(x)=(-1)^nP^{(\alpha,\beta)}_n(-x).$$

b) La formula (6) ci permette di determinare la cosidetta ***funzione generatrice*** dei polinomi di JACOBI.

L'equazione

$$(8)\qquad y=x-\frac{r}{2}(1-y^2)$$

dove supponiamo x (reale o complesso) fisso, ed r un parametro, ha la radice

$$(9)\qquad y(r)=\frac{1-\sqrt{1-2rx+r^2}}{r}\left[=\frac{2x-r}{1+\sqrt{1-2rx+r^2}}\right],$$

e se ***scegliamo del radicale quella determinazione che per*** $r=0$ ***assume il valore*** $+1$, si ha $y(0)=x$. Il radicale si annulla per

$$r=\xi,\ \xi^{-1},\quad \xi=x+\sqrt{x^2-1},\quad |\xi|\geq 1,$$

ed è subito visto che $|\xi|$ ***rappresenta*** [1] ***la somma dei semi-***

---

[1] G. DARBOUX: *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série.* Journ. de Math. pur. et appl., (3), 4 (1878), (pp. 5-56, 377-416), p. 21.

assi dell'ellisse con i fuochi nei punti $+1$ *e* -1, *passante per* x. Posto infatti $x=X+iY$, $\xi=\varrho e^{i\theta}$, $(\varrho>1)$, si ha

$$X+iY=(\xi+\xi^{-1})/2=\frac{1}{2}\left[\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)\cos\theta+i\left(\varrho-\frac{1}{\varrho}\right)\operatorname{sen}\varrho\right],$$
$$\left[\frac{1}{2}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)\right]^{-2}X^2+\left[\frac{1}{2}\left(\varrho-\frac{1}{\varrho}\right)\right]^{-2}Y^2=1,$$

e la somma dei semiassi dell'ellisse corrispondente è appunto $\varrho[=|\xi|]$.

Abbiamo allora che per $|r|<|\xi|^{-1}$ la $y(r)$ è una funzione olomorfa di r e se $f(y)$ è una funzione olomorfa di y, per $|r|<|\xi|^{-1}$ vale lo sviluppo in serie di LAGRANGIA (¹)

$$(10)\qquad f(y)\frac{dy}{dx}=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{r^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n f(x)].$$

Posto $f(y)=(1-y)^\alpha(1+y)^\beta$ e *scelte delle potenze* $(1-y)^\alpha$, $(1+y)^\beta$ *i valori principali*, la $f(y)$ è una funzione olomorfa di y salvo i punti $y=\pm1$; si ha dalla (8)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-ry}=\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}};$$

e moltiplicando la (10) per $(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}$ e tenuto conto della (6) otteniamo infine che *per* $|r|<|\xi|^{-1}$ *vale lo sviluppo in serie di Jacobi* (²)

$$(11)\quad \frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2rx+r^2}}[1-r+\sqrt{1-2rx+r^2}]^{-\alpha}[1+r+\sqrt{1-2rx+r^2}]^{-\beta}=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)r^n.$$

3. - Dalla formula (6) derivando il secondo membro con la regola di LEIBNIZ e riducendo si ha

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{d^\nu}{dx^\nu}(1-x)^{\alpha+n}\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}(1+x)^{\beta+n}$$

(¹) G. L. LAGRANGIA: *Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries*, Mém. de l'Ac. de Berlin, XXIV, (1770); oppure Oeuvres, III, (Paris, 1869) p. 25. Cfr. anche E. PICARD: *Traité d'Analyse*, II, (3ª Ed., Paris, 1926), p. 312.

(²) C. G. J. JACOBI's: *Gesammelte Werke*. (Berlin, 1891), Bd. 6, p. 194.

perciò

(12) $$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+n}{\nu}\binom{\beta+n}{n-\nu}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-\nu}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\nu},$$

da cui

(13) $$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{\alpha+n}{n},$$

e per la (7)

(14) $$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^n\binom{\beta+n}{n}.$$

Operando infine sulla (12) la sostituzione $x=(t+1)/(t-1)$ si ha l'altra formula utile a notarsi

(15) $$(t-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\alpha+n}{\nu}\binom{\beta+n}{n-\nu}t^{\nu}.$$

4. - *a*) Tra i polinomi P_n sussistono le relazioni

(16) $$(2n+\alpha+\beta+2)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)=$$
$$=(n+\alpha+\beta+2)P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)+(n+\alpha+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

(17) $$(1-x)(2n+\alpha+\beta+2)P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)=$$
$$=2(n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

che si riducono rispettivamente alle (14) e (15) del § 4 ove si tenga conto della (1).

Invertendo α con β e tenuto conto della (7) otteniamo le formule

(18) $$(2n+\alpha+\beta+2)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)=$$
$$=(n+\alpha+\beta+2)P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)-(n+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

(19) $$(1+x)(2n+\alpha+\beta+2)P_n^{(\alpha,\beta+1)}(x)=$$
$$=2(n+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

b) È facile ora verificare che tra i polinomi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ sussistono le seguenti formule ricorrenti [di DARBOUX ([1])]

(20$_1$) $$P_n^{(\alpha,\beta)}=\xi_n P'^{(\alpha,\beta)}_{n+1}+\eta_n P'^{(\alpha,\beta)}_{n}+\zeta_n P'^{(\alpha,\beta)}_{n-1},\qquad (n=1,\ 2,\dots)$$

([1]) Cfr. G. DARBOUX, loc. cit. al n. 2, p. 378.

con

$$(20_2)\qquad \begin{cases} \xi_n = \dfrac{2(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}, \\ \eta_n = \dfrac{2(\alpha-\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}, \\ \zeta_n = \dfrac{-2(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}; \end{cases}$$

$$(21_1)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)} = [A_n x + B_n]P_{n-1}^{(\alpha,\beta)} - C_n P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}, \qquad (n=2,3,\dots)$$

con

$$(21_2)\qquad \begin{cases} A_n = \dfrac{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)}{2n(n+\alpha+\beta)}, \\ B_n = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2n}\,\dfrac{2n+\alpha+\beta-1}{(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)}, \\ C_n = \dfrac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)}. \end{cases}$$

In virtù della (5) la (20_1) si cangia in

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \xi_n \frac{\alpha+\beta+n+2}{2} P_n^{(\alpha+1,\beta+1)} + \\ + \eta_n \frac{\alpha+\beta+n+1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} + \zeta_n \frac{\alpha+\beta+n}{2} P_{n-2}^{(\alpha+1,\beta+1)}$$

e per verificarla si esprimerà, mediante la (16), $P_n^{(\alpha,\beta)}$ per $P_n^{(\alpha,\beta+1)}$ e $P_{n-1}^{(\alpha,\beta+1)}$, e si sostituirà a $P_n^{(\alpha,\beta+1)}$, $P_{n-1}^{(\alpha,\beta+1)}$ le espressioni ottenute con la (18).

Si verificheranno analogamente le (21) esprimendo, mediante la (17), $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$ per $P_{n-1}^{(\alpha-1,\beta)}$ e $P_n^{(\alpha-1,\beta)}$, e sostituendo a questi ultimi le espressioni ottenute con la (18).

5. - *a*) Vogliamo dimostrare che *supposto* $\alpha > -1$, $\beta > -1$, *la successione* $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ *è ortogonale in* $(-1, 1)$ *rispetto alla funzione* [*peso*] $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

Moltiplicando la (4) per $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ essa acquista la forma autoaggiunta [1]

$$(22)\qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{dP_n}{dx}\right] + \\ + n(n+\alpha+\beta+1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n = 0,$$

---

[1] Cfr. Cap. II, § 4, 3, *b*).

dalla quale moltiplicando per P_m, integrando tra -1 e 1, e posto

$$I_{m,n}=\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_m P_n\,dx \tag{23}$$

si ottiene

$$n(n+\alpha+\beta+1)I_{n,m}=\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\frac{dP_n}{dx}\frac{dP_m}{dx}\,dx, \tag{24}$$

e cangiando n con m e sottraendo

$$(n-m)(\alpha+\beta+n+m+1)I_{n,m}=0,$$

e perciò per $n\neq m$ si ottiene la relazione di ortogonalità cercata

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n P_m dx=0, \qquad (n\neq m). \tag{25}$$

b) Dalla (21_1) moltiplicando per $(1-x)^\alpha(1+)^\beta P_n$, integrando tra -1 e 1, in virtù della (25) si avrà

$$I_{n,n}=A_n\int_{-1}^{1}x(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n P_{n-1}dx; \tag{26}$$

operando analogamente sulla relazione

$$P_{n+1}=(A_{n+1}x+B_{n+1})P_n-C_{n+1}P_{n-1}$$

si avrà [si moltiplichi per P_{n-1}]

$$0=A_{n+1}\int_{-1}^{1}x(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n P_{n-1}dx-C_{n+1}I_{n-1,n-1}$$

e confrontando con la (26)

$$I_{n,n}=A_n A_{n+1}^{-1}C_{n+1}I_{n-1,n-1},$$
$$I_{n,n}=\frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{n(n+\alpha+\beta)}\,\frac{2n+\alpha+\beta-1}{2n+\alpha+\beta+1}\,I_{n-1,n-1},$$

e da questa formula ricorrente, tenuto conto che

$$I_{0,0}=\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx=2^{\alpha+\beta+1}\int_{0}^{1}\xi^\alpha(1-\xi)^\beta d\xi=$$
$$=2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

otteniamo

$$(27) \qquad I_{n,n} = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} P_n^{2}(x)\,dx = k_n(\alpha,\beta)$$

con

$$(27') \; k_n(\alpha,\beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \quad (n=0,\,1,\ldots).$$

Abbiamo dunque che *il sistema di polinomi di* JACOBI

$$\{ k_n^{-1/2}(\alpha,\beta) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \}$$

è ortogonale, normale [*e chiuso* (1)] *in* $(-1,\,1)$, o come dicesi è un sistema cartesiano ortogonale in $(-1,\,1)$.

c) Vogliamo applicare la dimostrata ortogonalità dei polinomi $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}$ per stabilire un risultato che riesce talvolta utile nelle applicazioni.

Sia $\{a_n\}$ *una successione di costanti reali e supponiamo che la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *riesca uniformemente convergente in* $(-1,\,1)$ e ne sia $f(x)$ la somma:

$$(28) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,.$$

L'ipotesi fatta porta che $f(x)$ è continua e se moltiplichiamo i due membri per $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ e integriamo tra -1 e 1, poichè nel secondo membro è legittima l'integrazione termine a termine, otteniamo

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = a_n k_n(\alpha,\beta)$$

$$(29) \qquad a_n = \frac{1}{k_n(\alpha,\beta)} \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx,$$

la quale esprime i coefficienti dello sviluppo (28).

---

(1) Cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali.* (Bologna, 1935), Cap. III, § 7, 2, *b*), p. 134.

Come è ben noto i coefficienti a_n chiamansi *le costanti di Fourier* e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *la serie di Fourier* di $f(x)$ rispetto al sistema ortogonale $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$.

È di grande importanza nell'analisi la seguente questione: supposta $f(x)$ sommabile (nel senso di LEBESGUE) in $(-1, 1)$ e costruita con la (29) la successione delle sue costanti di FOURIER studiare il comportamento della corrispondente serie di *Fourier nell'intervallo* $(-1, 1)$ [1]. Avvertiamo intanto il lettore che la convergenza della serie (28) in un punto x dell'intervallo $(-1, 1)$ è un fatto locale, dipende cioè soltanto dai valori che $f(x)$ assume in un intorno comunque piccolo del punto x. Nel n. 7 proveremo quest'altra proprietà, che la convergenza della serie in un punto x^0 del piano complesso non appartenente al segmento $(-1, 1)$ porta la sua convergenza in tutti i punti del piano x interni all'ellisse con i fuochi nei punti -1 e $+1$ e passante per x^0.

6. - Per dimostrare la proprietà ora enunciata sarà utile premettere il seguente teorema di POINCARÉ. *Se*

$$R_0 = an^p + ..., \qquad R_1 = bn^p + ..., \qquad R_2 = cn^p ...., \tag{30}$$

sono tre polinomi in n *dello stesso grado* p, $R_0(n) \neq 0$ *per qualsiasi intero non negativo* n, *se* $\{P_n(x)\}$ *è una successione di polinomi in* x *definita dalla relazione ricorrente*

$$R_0(n)P_{n+2}(x) + R_1(n)P_{n+1}(x) + R_2(n)P_n(x) = 0 \tag{31}$$

e se l'equazione

$$a\xi^2 + b\xi + c = 0 \tag{32}$$

ha radici di modulo distinto, allora $\lim_{n\to\infty} P_{n+1}(x)/P_n(x)$ *converge in generale verso la radice di modulo maggiore dell'equazione* (32) *ed eccezionalmente verso la radice di modulo minore* [2].

---

[1] Cfr. G. SZEGÖ: *Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome*. Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, (1933), 10, (pp. 35-112), pag. 89. Per un profondo studio dei polinomi di JACOBI e in generale dei polinomi ortogonali consulta il recente volume di G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, Am. Math. Soc. Coll., 23 (New-York, 1939).

[2] H. POINCARÉ: *Sur les Equations Linéaires aux Différentielles ordi-*

i) L'equazione (32) abbia le radici α e β e sia $|\alpha| > |\beta|$. Poniamo

$$(33) \qquad P_{n+1}/P_n = v_n$$

$$(34) \qquad X_n = (v_n - \alpha)/(v_n - \beta);$$

dalla (31) si ha allora

$$R_0 v_{n+1} + R_1 + \frac{R_2}{v_n} = 0, \qquad v_{n+1} = -(R_1 v_n + R_2)/R_0 v_n$$

$$X_{n+1} = \frac{(R_1 v_n + R_2) : R_0 v_n + \alpha}{(R_1 v_n + R_2) : R_0 v_n + \beta}$$

e per la (34)

$$X_{n+1} = \frac{X_n[\alpha\beta R_0 + \beta R_1 + R_2] - [\alpha^2 R_0 + \alpha R_1 + R_2]}{X_n[\beta^2 R_0 + \beta R_1 + R_2] - [\alpha\beta R_0 + \alpha R_1 + R_2]},$$

ma per le (30) e (32) il termine noto del numeratore e il coefficiente di X_n nel denominatore sono dell'ordine n^{p-1}, si ha pure $\alpha(a\alpha\beta + b\beta + c) + \beta(a\alpha\beta + b\alpha + c) = 0$, talchè dividendo numeratore e denominatore per n^p avremo

$$(35) \qquad X_{n+1} = \frac{\beta}{\alpha}\, \frac{X_n[1+\varepsilon] + \varepsilon'}{1 + \eta + \eta' X_n} = \frac{\beta}{\alpha} X_n + \frac{X_n(\varepsilon - \eta) + \varepsilon' - \eta' X_n^2}{1 + \eta + \eta' X_n}\, \frac{\beta}{\alpha}$$

con

$$\varepsilon, \quad \varepsilon', \quad \eta' = O(n^{-1}).$$

ii) Supponiamo che esistano infiniti indici $n_1, n_2, \dots, n_s, \dots$

$$n_1 < n_2 < \dots < n_s < \dots$$

tali che

$$(36) \qquad |X_{n_s}| < M, \qquad (s = 1, 2, \dots)$$

vogliamo allora dimostrare che la successione $\{|X_n|\}$ è limitata e più precisamente che esiste un intero N tale che per $n > N$ si ha

$$|X_n| < M.$$

---

naires et aux Différences finies. Am. Journ. of Math. VII (1885), (pp. 203-258), p. 209. Per questa dimostrazione di carattere didattico cfr. G. Sansone: *Sviluppo in serie e valutazione asintotica del rapporto tra due polinomi consecutivi di Jacobi.* Ann. di Mat. pura ed app. (4), 16, (1937), pp. 39-48.

Infatti per $|z| \leq M$ è

$$0 < \left|\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{z(\varepsilon-\eta)+\varepsilon'-\eta' z^2}{1+\eta+\eta' z}\right| \leq \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \frac{M|\varepsilon-\eta|+|\varepsilon'|+|\eta'|M^2}{1-|\eta|-|\eta'|M},$$

ma l'ultimo termine di questa limitazione tende a zero per $n \to \infty$ e perciò preso il numero $M\left[1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right]$ esiste un n_0 tale che per qualunque $n \geq n_0$ e qualunque sia z, con $|z| \leq M$, risulti

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{z(\varepsilon-\eta)+\varepsilon'-\eta' z^2}{1+\eta+\eta' z}\right| < M\left[1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right].$$

Fissiamo un indice $n_s > n_0$, avremo per la (36), $|X_{n_s}| \leq M$, e per la (35)

$$|X_{n_s+1}| \leq \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| M + M\left[1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\right] = M, \qquad |X_{n_s+1}| \leq M,$$

e iterando il procedimento

$$|X_{n_s+r}| \leq M, \qquad (r=1, 2, \dots;\ N=n_s).$$

iii) Abbiamo allora che se la successione $\{|X_n|\}$ non è limitata, si avrà $\lim\limits_{n\to\infty}|X_n| = \infty$, e per la (34), $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \beta$ (¹).

iiii) La successione $\{|X_n|\}$ sia limitata, $|X_n| \leq M$, vogliamo dimostrare che si ha $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$ e perciò $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \alpha$.

Proviamo preliminarmente che fissato comunque un numero positivo σ, non può esistere un indice n_0 tale che per $n \geq n_0$ sia

(37) $$0 < \sigma \leq |X_n| \leq M, \qquad (n \geq n_0).$$

Questa condizione soddisfatta si avrebbe

(38) $$X_{n+1} = X_n\,\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{1+\varepsilon+\varepsilon' X_n^{-1}}{1+\eta+\eta' X_n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\varepsilon+\varepsilon' X_n^{-1}}{1+\eta+\eta' X_n} = 1,$$

quindi per n sufficientemente grande, $n > N$

$$|(1+\varepsilon+\varepsilon' X_n^{-1})/(1+\eta+\eta' X_n)| < h$$

dove con h indichiamo una quantità >1 tale che

$$h\,|\beta/\alpha| < q' < 1\,;$$

(¹) Si ha $v_n = (\beta - \alpha X_n^{-1})(1 - X_n^{-1})$.

si avrebbe allora dalla (38) per $n > N$

$$|X_{n+1}| < h\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| |X_n| < q'|X_n|, \qquad |X_{n+s}| < q'^s |X_n|$$

$$\lim_{n\to\infty} |X_n| = 0$$

e ciò è contro la (37).

Ne viene che se la successione $\{|X_n|\}$ è limitata, comunque piccolo si fissi un numero σ positivo, esistono infiniti indici $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ tali che $|X_{n_s}| < \sigma$, e per l'osservazione fatta in *ii*) esiste un N_σ tale che per $n > N_\sigma$ è $|X_n| < \sigma$, perciò $\lim\limits_{n\to\infty} |X_n| = 0$, e $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$.

b) Poichè i polinomi di Jacobi sono legati dalla relazione ricorrente (21_1), in virtù del teorema dimostrato dovrà aversi

$$\lim_{n\to\infty} |P_{n+1}(x)/P_n(x)| = |\xi|, \ |\xi^{-1}|$$

dove ξ è la radice di modulo maggiore dell'equazione [$p = 3$, $a = 4$, $b = -8x$, $c = 4$]

$$\xi^2 - 2x\xi + 1 = 0.$$

Ma se osserviamo che la serie di Jacobi (11) ha il suo raggio di convergenza uguale a ξ^{-1}, per una proprietà nota della teoria delle serie di potenze risulta

$$\lim_{n\to\infty} |P_{n+1}(x)/P_n(x)| = |\xi|,$$

non si presenta quindi il caso eccezionale segnalato nel teorema.

7. - Il seguente teorema prova l'affermazione finale del n. 5.

Se $\{a_n\}$ è una successione di costanti reali o complesse, e se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{39}$$

converge in un punto x^0 del piano complesso esterno al segmento $(-1, 1)$, essa converge anche, e uniformemente, in ogni ellisse E' interna e omofocale con l'ellisse E che ha i suoi fuochi nei punti -1 e 1 e passa per il punto x^0 (1).

(1) Per il teorema di Weierstrass, nelle nostre ipotesi, la somma della serie (39) è olomorfa nell'interno di E.

Essendo la (39) convergente in x^0 esiste una costante positiva g tale che

$$|a_n P_n(x^0)| \leqslant g, \qquad (n=0, 1,....),$$

e se x è un punto di E' si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n P_n(x)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n P_n(x^0)| \left|\frac{P_n(x)}{P_n(x^0)}\right| \leqslant g \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{P_n(x)}{P_n(x^0)}\right|.$$

Poniamo con le notazioni precedenti

$$\xi^0 = x^0 + \sqrt{x^{0^2}-1}, \quad |\xi^0|>1; \quad \xi = x+\sqrt{x^2-1}, \quad |\xi| \geqslant 1,$$

e sia $|\xi'|$ la somma dei semiassi dell'ellisse E' $[|\xi| \leqslant |\xi'| < |\xi^0|]$; dalle cose dette nel n.° 6 risulta

$$(40) \qquad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{P_n(x)}{P_n(x^0)} : \frac{P_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x^0)}\right| = \left|\frac{\xi^0}{\xi}\right| \geqslant \left|\frac{\xi^0}{\xi'}\right| > 1,$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |P_n(x) / P_n(x^0)|$ è perciò convergente, tale è quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ che a motivo della (40) risulta uniformente convergente in E'.

8. - *a*) Terminiamo questo paragrafo accennando ad una classe speciale di polinomi di JACOBI. Ponendo nella espressione (1) [o (6)] dei polinomi di JACOBI $\alpha=\beta=0$ si ottengono come caso particolarissimo i *polinomi* (*sferici*) di LEGENDRE [1], aventi come è ben noto la funzione generatrice $(1-2rx+r^2)^{-1/2}$; in generale per $\alpha=\beta$ i polinomi ottenuti prendono il nome di ***polinomi ultrasferici*** e noi troveremo per essi la funzione generatrice $(1-2rx+r^2)^{-\lambda}$ [2].

Sia $\lambda \neq 0$, e poniamo

$$u=(1-x)/2,$$

---

[1] Cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali.* (Bologna, 1935), Cap. III, § 1.

[2] Cfr. C. G. J. JACOBI'S *Ges. Werke*; Bd. 6, p. 194 (Berlin, 1891).

si ha

$$(1-2rx+r^2)^{-\lambda}=\left[(1-r)^2\left(1+\frac{4ru}{(1-r)^2}\right)\right]^{-\lambda}$$

e applicando lo sviluppo in serie binomiale

$$(1-2rx+r^2)^{-\lambda}=(1-r)^{-2\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\lambda+n-1}{n}\frac{4^n u^n r^n}{(1-r)^{2n}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\lambda+n-1}{n}4^n u^n r^n(1-r)^{-2\lambda-2n}.$$

Sviluppando ancora con la serie binomiale i fattori $(1-r)^{-2\lambda-2n}$ e raccogliendo nel secondo membro i termini che contengono r^n abbiamo, che posto

$$\boxed{(1-2rx+r^2)^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\lambda)}(x)r^n}\,, \tag{41}$$

è

$$P_n^{(\lambda)}(x)=\binom{2\lambda+n-1}{n}\left[1-\frac{n\lambda}{1}\,\frac{2\lambda+n}{2\lambda(2\lambda+1)}\,2^2u+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(\lambda+1)\lambda}{2!}\,\frac{(2\lambda+n)(2\lambda+n+1)}{2\lambda(2\lambda+1)(2\lambda+2)(2\lambda+3)}\,2^4u^2-\ldots\right],$$

ovvero

$$P_n^{(\lambda)}(x)=\binom{2\lambda+n-1}{n}F\left(n+2\lambda,\,-n,\,\frac{2\lambda+1}{2},\,\frac{1-x}{2}\right),$$

talchè se

$$A_n^{(\alpha)}=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)}{n!},\quad (n=0,1,\ldots) \tag{42}$$

tenuto conto della (1) troviamo $[P_0^{(\lambda)}(x)=1]$

$$\boxed{P_n^{(\lambda)}(x)=\frac{A_n^{(2\lambda-1)}}{A_n^{(\lambda-\frac{1}{2})}}\,P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\,\lambda-\frac{1}{2})}(x)}\,. \tag{43}$$

Al solito, posto $x+\sqrt{x^2-1}=\xi$, $|\xi|>1$, $(1-2rx+r^2)^{-\lambda}$ è una funzione olomorfa per $|r|<|\xi|^{-1}$, talchè *lo sviluppo* (41) *vale per* $|r|<|\xi|^{-1}$.

Dalle (6) e (43) si deduce la formula utile a notare

$$(44)\qquad \boxed{P_n^{(\lambda)}(x)=\frac{A_n^{(2\lambda-1)}}{A_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}}\,\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}\,(1-x^2)^{-\lambda+\frac{1}{2}}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right]}\,.$$

b) Vogliamo determinare l'espressione semplicissima di $P_n^{(1)}(\cos\varphi)$. Si ha

$$(1-2r\cos\varphi+r^2)^{-1}=(1-re^{i\varphi})^{-1}(1-re^{-i\varphi})^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n e^{in\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}r^n e^{-in\varphi}$$

perciò

$$\begin{aligned}P_n^{(1)}(\cos\varphi)&=e^{in\varphi}+e^{i(n-2)\varphi}+\dots+e^{-i(n-2)\varphi}+e^{-in\varphi}\\&=[e^{(n+1)i\varphi}-e^{-(n+1)i\varphi}]/[e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}]\end{aligned}$$

e infine

$$(45)\qquad P_n^{(1)}(\cos\varphi)=\frac{\operatorname{sen}(n+1)\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\,.$$

Dalle (42) e (43) si ha allora

$$(46_1)\qquad P_n^{\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)}(\cos\varphi)=\frac{(2n+1)!!}{2^n(n+1)!}\,\frac{\operatorname{sen}(n+1)\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}\,,$$

e dalle (16) e (18) posto $\alpha=-1/2$, $\beta=-1/2$ si ottiene rispettivamente

$$(46_2)\qquad P_n^{\left(+\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(\cos\varphi)=\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\,\frac{\operatorname{sen}(n+1/2)\varphi}{\operatorname{sen}(\varphi/2)}\,,$$

$$(46_3)\qquad P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,+\frac{1}{2}\right)}(\cos\varphi)=\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\,\frac{\cos(n+1/2)\varphi}{\cos(\varphi/2)}\,;$$

e ancora dalla (16) per $\alpha=-3/2$, $\beta=-1/2$ otteniamo

$$(46_4)\qquad P_n^{\left(-\frac{1}{2},\,-\frac{1}{2}\right)}(\cos\varphi)=\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\cos n\varphi.$$

§ 6. - L'equazione di Bessel.

1. Il problema di D. BERNOULLI delle piccole oscillazioni di una catena pesante e l'equazione di BESSEL. - 2. Funzioni di BESSEL (funzioni cilindriche) di prima specie. - 3 Le funzioni $J_{\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)$. - 4. Rappresentazioni integrali delle funzioni di BESSEL di prima specie. - 5. Altre rappresentazioni integrali. - 6. Relazioni ricorrenti tra le $J_n(x)$. - 7. L'integrale $\int_0^x xJ_n(ax)J_n(bx)dx$. - 8. Il problema degli sviluppi in serie di funzioni di BESSEL.

1. - Vogliamo considerare la così detta equazione di BESSEL

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \quad (n \text{ costante reale o complessa}) \tag{1}$$

incontrata la prima volta, nel caso di $n=0$, da DANIELE BERNOULLI (¹) nello studio delle piccole oscillazioni di una catena pesante di densità uniforme fissa in un estremo, e nel caso di n intero qualunque, da BESSEL, nello studio delle orbite dei pianeti (²).

Accenniamo al problema di D. BERNOULLI. Sia A il punto di sospensione della catena, l la sua lunghezza, ϱ la massa dell'unità di lunghezza. Assumiamo come asse x positivo la verticale per A volta verso l'alto, l'asse y orizzontale, e detta O l'origine degli assi, risulti $\overline{OA}=l$.

Sia P un punto della catena di quota x, la sua coordinata y al tempo t è una funzione $y(x, t)$ e il problema di D. BERNOULLI è il seguente.

Fissati: l'estremo A della catena, supposto cioè $y(l, t)=0$; la forma della catena al tempo $t=0$, $y(x, 0)=F(x)$; la velocità di P al tempo $t=0$, $y_t(x, 0)=G(x)$; con $F(x)$, $G(x)$ funzioni note della x in $(0, l)$; determinare la $y(x, t)$ per $0 \leqq x \leqq l$, $0 \leqq t$.

(¹) D. BERNOULLI: *Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae*. Comm. Acad. Sc. Imp. Petrop., VI, (1732-3), pubblicata nel 1738.

(²) F. W. BESSEL: *Untersuchung des Theils der planitarischen Störungen welcher aus der Bewegung der Sonne entstehet*. Berl. Abh., (1824).

Intendiamo riferirci a piccole oscillazioni e sarà perciò lecito sostituire nelle nostre considerazioni dx all'elemento d'arco.

Osserviamo che la tensione T della catena in P ha il modulo $\varrho g x$ (g accelerazione della gravità) e la sua componente orizzontale vale

$$T\frac{\partial y}{\partial x}=\varrho g x\frac{\partial y}{\partial x},$$

ma la massa dell'elemento dx vale ϱdx, la sua accelerazione orizzontale $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, avremo quindi

$$\varrho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\varrho d\left(gx\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

e perciò

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(gx\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

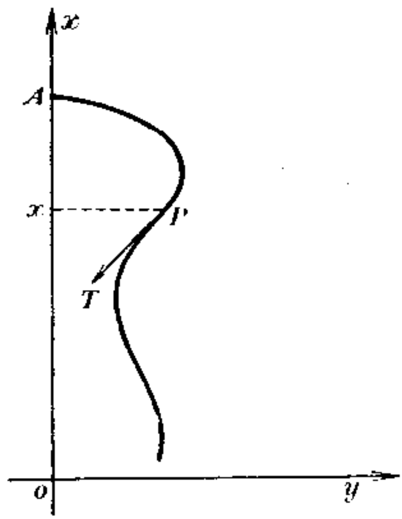


Fig. 5.

Posto $\xi=x/l$, $\tau=t\sqrt{g/l}$ l'equazione diventa

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \tag{2}$$

e il problema in questione si riduce a determinare un integrale $y(\xi,\tau)$ della (2) che soddisfi le condizioni ai limiti e iniziali

$$y(1,\tau)=0, \tag{3$_1$}$$

$$y(\xi,0)=f(\xi), \tag{3$_2$}$$

$$y_\tau(\xi,0)=g(\xi), \tag{3$_3$}$$

con $f(\xi)$ e $g(\xi)$ funzioni note di ξ in $(0,1)$.

Si cerchi una *soluzione elementare* della (2), ossia una soluzione che sia esprimibile come il prodotto di una funzione $\omega(\xi)$ (del posto) per una funzione $U(\tau)$ (del tempo)

$$y(\xi,\tau)=\omega(\xi)U(\tau), \qquad [\omega(1)=0]. \tag{4}$$

Dovrà aversi

$$\omega(\xi)U''(\tau)=[\omega'(\xi)+\xi\omega''(\xi)]U(\tau)$$

e posto

$$(5) \qquad U''(\tau)+\frac{\lambda^2}{4}U(\tau)=0$$

ove λ è un parametro, si avrà per $\omega(\xi)$ l'equazione

$$(6) \qquad \xi\frac{d^2\omega}{d\xi^2}+\frac{d\omega}{d\xi}+\frac{\lambda^2}{4}\omega(\xi)=0.$$

La (5) ha l'integrale generale

$$(7) \qquad U=a\cos\frac{\lambda}{2}\tau+b\,\mathrm{sen}\,\frac{\lambda}{2}\tau$$

con a e b costanti, e per determinare la soluzione elementare (4) occorre quindi esaminare la (6). Operando su di essa la trasformazione

$$(8) \qquad \lambda\sqrt{\xi}=\eta$$

otteniamo

$$(9) \qquad \frac{d^2\omega}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{d\omega}{d\eta}+\omega=0, \qquad [\omega(\lambda)=0]$$

che ha appunto la forma (1) quando si faccia $n=0$.

Riserbandoci di tornare al n.° 8 sulla soluzione formale del problema esaminato prenderemo ora a studiare gli integrali dell'equazione (1).

2. - a) Nell'equazione (1), il punto $x=0$ è un punto singolare (polare) regolare; con le notazioni del § 3, n.° 2 si ha

$$p_0=1, \qquad q_0=-n^2$$

l'equazione determinante diventa $a^2-n^2=0$, $a=n$, $-n$ perciò se $2n$ non è intero essa ammette due integrali appartenenti agli esponenti n, $-n$ cioè delle forme $J_n(x)=x^nP_1(x)$, $x^{-n}P_2(x)$ con $P_1(x)$, $P_2(x)$ serie di potenze della x convergenti in un intorno dell'origine.

Dei due numeri n, $-n$ sia n quello per il quale

$$Rn\geqslant 0;$$

posto allora

$$J_n(x) = x^n \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^\nu$$

sostituendo nella (1) otteniamo

$$(2n+1)g_1 = 0$$

e inoltre la formula ricorrente

(10) $$(\nu+2)(2n+\nu+2)g_{\nu+2} + g_\nu = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

È $2n+1 \neq 0$, perciò $g_1 = g_3 = \ldots = 0$; mentre dalla (10) con procedimento ricorrente abbiamo

$$g_{2\nu} = \frac{(-1)^\nu g_0}{2^{2\nu}\nu!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu)};$$

abbiamo quindi

$$J_n(x) = g_0 x^n \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(x/2)^{2\nu}}{\nu!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu)}\right],$$

e se assegniamo alla costante g_0 il valore

$$g_0 = 1/2^n \Gamma(n+1)$$

si avrà

(11) $$\boxed{J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (x/2)^{n+2\nu}}{\Gamma(n+\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)}} \quad [1].$$

---

[1] Ricordiamo al lettore che la *funzione Γ euleriana* di seconda specie di argomento x *reale* o *complesso* si definisce con la seguente legge.

Se $Rx > 0$ è

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

se poi $Rx < 0$, e $Rx > -n$, n intero positivo, si porrà

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+n-1} dt.$$

La $\Gamma(x)$ riesce olomorfa in tutto il piano complesso, salvo nei punti

La serie ottenuta, a prescindere dal fattore x^n è una trascendente intera, si ha infatti

$$\lim_{\nu\to\infty} |\Gamma(n+\nu+1)\Gamma(\nu+1)/\Gamma(n+\nu)\Gamma(\nu)| = \lim_{\nu\to\infty} |\nu(n+\nu)| = \infty.$$

La funzione $J_n(x)$ definita dalla (11) prende il nome di *funzione di Bessel, o funzione cilindrica* [1] *di prima specie di ordine n, essa rappresenta l'integrale dell'equazione di Bessel univocamente determinato dalle proprietà che moltiplicato per x^{-n} diventa una trascendente intera che per $x=0$ assume il valore* $1/2^n\Gamma(n+1)$.

Se la differenza $2n$ (delle radici dell'equazione caratteristica) non è un numero intero (assoluto) l'equazione (1) ammetterà l'integrale appartenenti all'esponente $-n$

$$J_{-n}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (x/2)^{-n+2\nu}}{\Gamma(-n+\nu+1)\Gamma(\nu+1)} \tag{12}$$

---

dell'asse reale di ascissa nulla o negativa, 0, -1, -2,.... ove presenta poli del primo ordine caratterizzati dalla relazione

$$\lim_{x\to -n} [(x+n)\Gamma(x)] = (-1)^n/n!, \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Dalla definizione segue $1/\Gamma(x)=0$ per $x=0, -1, -2, \ldots$.

La funzione $1/\Gamma(x)$ è una trascendente intera che ha l'espressione

$$1/\Gamma(x) = e^{cx}\, x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-x/n}$$

dove c è la costante di EULERO-MASCHERONI

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\lg n\right) = 0 \cdot 57721\ldots.$$

Valgono per $\Gamma(x)$ le relazioni

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\text{sen}\,(\pi x);$$

inoltre per n intero positivo o nullo è

$$\Gamma(n+1) = n!$$

e per $x=1/2$ si ha

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

[Cfr. ad es. M. PICONE: *Appunti di Analisi superiore.* (Napoli, 1940), pp. 479-484].

[1] Le funzioni cilindriche sono occorse a FOURIER nel problema del raffreddamento di un cilindro circolare omogeneo infinito. [J. B. FOURIER: *Théorie Analytique de la Chaleur.* (Paris, 1822), p. 341].

e perciò l'integrale generale dell'equazione di BESSEL ha la forma

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x) \tag{13}$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Si osservi che se $2n$ è intero (assoluto) dispari, ossia *n è la metà di un numero dispari, la* (13) *fornisce ancora l'integrale generale dell'equazione di Bessel.*

b) Supponiamo infine n intero positivo, la (12) tenuto conto che $1/\Gamma(x)=0$ per $x=0,\ -1,\ -2,\ldots,$ dà

$$J_{-n}(x) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (x/2)^{-n+2\nu}}{\Gamma(-n+\nu+1)\Gamma(\nu+1)} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{n+2m}}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(m+1)}$$

quindi *per n intero positivo*

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \tag{14}$$

e l'integrale $J_{-n}(x)$ non è linearmente indipendente da $J_n(x)$.

Si noti tuttavia che in virtù dei risultati del § 3, n.° 4, nell'ipotesi di n intero positivo, sappiamo già che all'esponente $-n$ appartiene un integrale logaritmico che abbiamo imparato a costruire.

Rimandiamo lo studioso ai trattati [1], noi ci limitiamo nei numeri seguenti ad esporre alcune proprietà elementari delle funzioni di BESSEL.

3. - Per $n=1/2$ si ha dalla (11)

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{2^{2\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\nu+1)},$$

ma è

$$2^{2\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\nu+1) = 2^{2\nu}\nu!\,(\nu+1/2)(\nu-1/2)\ldots(1/2)\Gamma(1/2)$$
$$= (2\nu+1)!\,\sqrt{\pi}/2$$

[1] Il lettore potrà consultare: *a*) N. W. MC. LACHLAN: *Bessel Functions for Engineers.* (Oxford, 1934), pp. VII + 192; *b*) R. WEYRICH: *Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen.* (Teubner, Berlin, 1937), pp. IV + 137; *c*) Oppure il classico trattato G. N. WATSON: *A Treatise of the Theory of Bessel Functions.* (Cambridge, 1922), pp. VI + 804.

perciò

$$(15_1) \qquad J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}},$$

e analogamente

$$(15_2) \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

4. - *a*) Riprendiamo l'espressione (11) di $J_n(x)$ dove **supponiamo** n **intero** (*positivo, nullo, negativo*)

$$J_n(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{n+2\nu}}{2^{n+2\nu}(n+2\nu)!}(-1)^\nu\binom{n+2\nu}{\nu}.$$

Se osserviamo che si ha con p intero non negativo

$$s(p,n)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(p-2k-n)t}dt$$
$$=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(p-2k-n)t+i\operatorname{sen}(p-2k-n)t]\,dt$$

e quindi $s(p,n)=0$ per $p<n$, oppure $p-n$ dispari, e

$$s(p,n)=\binom{n+2\nu}{\nu}(-1)^\nu$$

se $p-n=2\nu$, potremo scrivere

$$J_n(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{2^p p!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(p-2k-n)t}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{2^p p!}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-int}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}e^{i(p-k)t}e^{-ikt}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(ix)^p}{p!}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^p e^{-int}\,dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-int}\frac{(ix\operatorname{sen} t)^p}{p!}\,dt$$

e per l'uniforme convergenza della serie $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(ix \operatorname{sen} t)^p}{p!} = e^{ix \operatorname{sen} t}$ avremo

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \operatorname{sen} t - nt)}\, dt \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (x \operatorname{sen} t - nt) + i \operatorname{sen} (x \operatorname{sen} t - nt)]\, dt,$$

ma $\cos (x \operatorname{sen} t - nt)$, $\operatorname{sen} (x \operatorname{sen} t - nt)$ sono rispettivamente pari e dispari per t variabile in $(-\pi, \pi)$, quindi

$$\boxed{J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (x \operatorname{sen} t - nt)\, dt}, \tag{17}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

b) Si ha dalla (17)

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (x \operatorname{sen} t) \cos nt\, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} (x \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} nt\, dt,$$

ma per n pari è

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} (x \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} nt\, dt = 0,$$

per n dispari

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (x \operatorname{sen} t) \cos nt\, dt = 0,$$

e perciò

$$\boxed{\begin{array}{ll} n \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2), & J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos (x \operatorname{sen} t) \cos nt\, dt \\ n \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2), & J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} (x \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} nt\, dt \end{array}}. \tag{18$_1$}$$

Cangiando nelle (18_1) t in $\pi/2-t$ si ottiene

$$(18_2)\quad \boxed{\begin{array}{ll} n\equiv 0 \quad (\text{mod. } 2), & J_n(x)=\frac{2}{\pi}(-1)^{\frac{n}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos t)\cos nt\,dt \\ n\equiv 1 \quad (\text{mod. } 2), & J_n(x)=\frac{2}{\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}(x\cos t)\cos nt\,dt \end{array}}\,.$$

5. - Vogliamo costruire due sviluppi in serie di cos $(x$ sen $t)$, sen $(x$ sen $t)$ che ci permetteranno di ricavare una nuova espressione integrale di $J_n(x)$.

Consideriamo la funzione cos $(x$ sen $t)$, essa è una funzione olomorfa di t nel piano complesso t, di periodo π, e perciò sviluppabile in serie trigonometrica di Fourier di coseni.

Si ha

$$\cos(x\,\text{sen}\,t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt$$

con

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\,\text{sen}\,t)\cos nt\,dt \quad (^1)$$

quindi $a_n=0$ per n dispari e $a_n=2J_n(x)$ per n pari, e infine, qualunque sia x

$$(19_1)\quad \cos(x\,\text{sen}\,t)=J_0(x)+2J_2(x)\cos 2t+2J_4(x)\cos 4t+\ldots$$

e analogamente

$$(19_2)\quad \text{sen}(x\,\text{sen}\,t)= =2J_1(x)\,\text{sen}\,t+2J_3(x)\,\text{sen}\,3t+2J_5(x)\,\text{sen}\,5t+\ldots$$

e cangiando t in $t+\pi/2$

$$(19_3)\quad \cos(x\cos t)=J_0(x)-2J_2(x)\cos 2t+2J_4(x)\cos 4t-\ldots$$

$$(19_4)\quad \text{sen}(x\cos t)=2J_1(x)\cos t-2J_3(x)\cos 3t+2J_5(x)\cos 5t-\ldots$$

(1) G. Sansone: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali.* (Bologna, 1935), p. 36.

e moltiplicando la seconda per i e sommando

$$e^{ix\cos t} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(x) \cos nt$$

dalla quale moltiplicando i due membri per $\cos nt$ e integrando tra 0 e π si ricava

$$\text{(20)} \qquad \boxed{J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos t} \cos nt\, dt}.$$

Supposto $n \neq 0$, e integrando per parti, otteniamo

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi}\left[e^{ix\cos t}\frac{\operatorname{sen} nt}{n}\right]_{t=0}^{t=\pi} - \frac{(-i)^{n+1}x}{n\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos t} \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} t\, dt$$

perciò

$$\text{(21)} \quad J_n(x) = \frac{(-i)^{n-1}x}{n\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos t} \operatorname{sen} nt \operatorname{sen} t\, dt, \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

6. - *a*) Ci è facile ora stabilire due formule ricorrenti tra le funzioni $J_n(x)$.

Dalla (21) si ha

$$J_n(x) = \frac{(-i)^{n-1}x}{2n\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos t} \cos (n-1)t\, dt - $$
$$- \frac{(-i)^{n-1}x}{2n\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos t} \cos (n+1)t\, dt$$

perciò per la (20)

$$\text{(22}_1\text{)} \qquad \boxed{J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = 2\frac{n}{x} J_n(x)}$$

la quale in virtù della (14) vale anche per $n = 0$.

Dalla (20) derivando rispetto ad x si ha

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{(-i)^{n-1}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos t} \cos nt \cos t\, dt$$
$$= \frac{(-i)^{n-1}}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos t} \cos (n-1)t\, dt + \frac{(-i)^{n-1}}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos t} \cos (n+1)t\, dt$$

perciò dalla (20) stessa

$$(22_2)\qquad \boxed{J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2\,\frac{dJ_n(x)}{dx}}\,.$$

Valendosi dello sviluppo in serie (11) è facile verificare che *le* (22_1), (22_2) *sussistono tanto per valori interi* (assoluti) *di* n *che per valori di* n *reali o complessi qualunque* (1).

b) Dalle (22_1) e (22_2) per somma e differenza si ottiene

$$(22_3)\qquad J_{n-1}(x)=\frac{dJ_n}{dx}+\frac{n}{x}J_n(x),\qquad J_{n+1}(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-\frac{dJ_n}{dx}$$

dalle quali moltiplicando rispettivamente per x^n, x^{-n} abbiamo

$$(22_4)\qquad \boxed{\frac{d}{dx}(x^nJ_n)=x^nJ_{n-1}(x),\qquad \frac{d}{dx}(x^{-n}J_n)=-x^{-n}J_{n+1}(x)}\,.$$

7. - a) Vogliamo valutare l'integrale

$$\int_0^x xJ_n(ax)J_n(bx)dz$$

nelle ipotesi a *e* b *costanti*, $a^2-b^2\neq 0$, n *reale*, $n>-1$.

Supponiamo dapprima a e b costanti non nulle; dall'equazione (1) si ha

$$x\,\frac{d^2J_n(ax)}{dx^2}+\frac{dJ_n(ax)}{dx}-\frac{n^2}{x}J_n(ax)=-a^2xJ_n(ax)$$

$$x\,\frac{d^2J_n(bx)}{dx^2}+\frac{dJ_n(bx)}{dx}-\frac{n^2}{x}J_n(bx)=-b^2xJ_n(bx),$$

e moltiplicando la prima per $J_n(bx)$ e la seconda per $J_n(ax)$ e sottraendo

$$\frac{d}{dx}\left[x\left\{J_n(ax)\,\frac{dJ_n(bx)}{dx}-J_n(bx)\,\frac{dJ_n(ax)}{dx}\right\}\right]=(a^2-b^2)xJ_n(ax)J_n(bx),$$

(1) N. SONINE, nella sua memoria: *Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries*, [Math. Ann., Bd. 16 (1880), pp. 1-80], chiama *funzioni cilindriche*, e le indica col simbolo $C_\nu(x)$ le funzioni analitiche delle due variabili ν ed x soddisfacenti le equazioni ricorrenti

$$C_{\nu-1}(x)+C_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}C_\nu(x);\qquad C_{\nu-1}(x)-C_{\nu+1}(x)=2C_\nu'(x).$$

ma $n > -1$, possiamo perciò integrare tra 0 e x e otteniamo

$$(23)\qquad \int_0^x x J_n(ax) J_n(bx)\,dx = \frac{x}{a^2-b^2}\left[J_n(ax)\frac{dJ_n(bx)}{dx} - J_n(bx)\frac{dJ_n(ax)}{dx}\right],$$

la quale come è subito visto sussiste anche se a oppure b sono nulle.

Dalla (23) passando al limite per $b \to a$ e applicando nel secondo membro il teorema di DE L'HOSPITAL abbiamo

$$\int_0^x x J_n^2(ax)\,dx = \frac{x}{2a}\left[\frac{dJ_n(ax)}{dx}\frac{dJ_n(ax)}{da} - J_n(ax)\frac{d}{da}\frac{dJ_n(ax)}{dx}\right],$$

ma

$$\frac{d}{da}\frac{dJ_n(ax)}{dx} = \frac{d^2J_n(ax)}{d(ax)^2}\,ax + \frac{dJ_n(ax)}{d(ax)},$$

e infine

$$(24)\qquad \int_0^x x J_n^2(ax)\,dx = \frac{x^2}{2}\left\{\left[\frac{dJ_n(ax)}{d(ax)}\right]^2 - J_n(ax)\frac{d^2J_n(ax)}{d(ax)^2} - \frac{J_n(ax)}{ax}\frac{dJ_n(ax)}{d(ax)}\right\}.$$

b) Proveremo nel Cap. IV, § 3, n. 2 che se $n > -1$ la $J_n(x)$ ha infiniti zeri, tutti reali (e salvo $x=0$, semplici); ammesso provvisoriamente questo risultato si indichi con $\{\lambda_r\}$ *la successione degli zeri positivi di* $J_n(x)$ (¹).

Dalla (23) facendo l'estremo superiore dell'integrale uguale ad 1, $a=\lambda_r$, $b=\lambda_s$, con $r \neq s$, si ottiene

$$(25)\qquad \boxed{\int_0^1 x J_n(\lambda_r x) J_n(\lambda_s x)\,dx = 0}, \qquad (r \neq s),$$

cioè *il sistema* $\{x^{\frac{1}{2}} J_n(\lambda_r x)\}$ $(r=1, 2,\ldots;\ n > -1)$ *è ortogonale in* $(0, 1)$.

Dalla (24) facendo $x=1$, $a=\lambda_r$ otteniamo poi

$$(26_1)\qquad \int_0^1 x J_n^2(\lambda_r x)\,dx = \frac{1}{2}\,[J_n'(\lambda_r)]^2$$

(¹) A motivo della (11) λ_r e $-\lambda_r$ sono zeri di $J_n(x)$.

od anche per le (22_3)

$$(26_2)\qquad \boxed{\int_0^1 x\, J_n^2(\lambda_r x)\,dx = \frac{1}{2}\, J_{n+1}^2(\lambda_r) = \frac{1}{2}\, J_{n-1}^2(\lambda_r)}\,.$$

8. - Vogliamo riprendere il problema di D. Bernoulli del n. 1 il quale ci condurrà a considerare gli sviluppi in serie di Bessel.

L'equazione (9) ha la soluzione $\omega = J_0(\eta) = J_0(\lambda\sqrt{\xi})$, e la costante λ dovrà essere tale che $J_0(\lambda) = 0$, perciò

$$\lambda = \lambda_1\,,\ \lambda_2,\dots$$

e la soluzione elementare (4) ha dunque la forma

$$y(\xi,\tau) = J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})\left[a_r \cos\frac{\lambda_r\tau}{2} + b_r \operatorname{sen}\frac{\lambda_r\tau}{2}\right],$$

e a motivo della linearità dell'equazione alle derivate parziali (2) è da proporci se si possono scegliere le due successioni di costanti $\{a_r\}$, $\{b_r\}$ in guisa che

$$(27)\qquad y(\xi,\tau) = \sum_{r=1}^{\infty} J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})\left(a_r \cos\frac{\lambda_r\tau}{2} + b_r \operatorname{sen}\frac{\lambda_r\tau}{2}\right)$$

rappresenti la soluzione dell'equazione (2) soddisfacente le condizioni (3_1), (3_2), (3_3).

La (3_1) è soddisfatta, mentre le (3_2) e (3_3) [supposta per quest'ultima lecita la derivazione termine a termine della (27)] dànno

$$(28)\qquad f(\xi) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r J_0(\lambda_r\sqrt{\xi}), \qquad g(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} b_r\lambda_r J_0(\lambda_r\sqrt{\xi}).$$

Le (25) e (26_2) cangiando x in $\sqrt{\xi}$ dànno rispettivamente

$$\int_0^1 J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})J_0(\lambda_s\sqrt{\xi})\,d\xi = 0, \quad (r \neq s)\,; \qquad \int_0^1 J_0^2(\lambda_r\sqrt{\xi})\,d\xi = J_1^2(\lambda_r)$$

e le (28) moltiplicando per $J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})$, e supposta lecita l'integrazione termine a termine, dànno

$$
(29) \qquad \begin{cases} a_r = \dfrac{1}{J_1^2(\lambda_r)} \displaystyle\int_0^1 f(\xi)\, J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})\, d\xi, \\[2ex] b_r = \dfrac{2}{\lambda_r J_1^2(\lambda_r)} \displaystyle\int_0^1 g(\xi) J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})\, d\xi, \end{cases}
$$

e si presenta ora il problema di trovare condizioni sufficienti affinchè assegnate $f(\xi)$ e $g(\xi)$, le due serie

$$
\sum_{r=1}^{\infty} a_r J_0(\lambda_r\sqrt{\xi}), \qquad \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} b_r \lambda_r J_0(\lambda_r\sqrt{\xi}),
$$

dove i coefficienti a_r e b_r sono calcolati con le (29), abbiano per somma rispettivamente $f(\xi)$, $g(\xi)$, o come si dice è da studiare il problema della sviluppabilità delle $f(\xi)$ e $g(\xi)$ in serie di BESSEL [1].

[1] Per un criterio di convergenza puntuale cfr. G. N. WATSON, op. cit. nella nota [1] di p. 159, p. 591.

CAPITOLO IV.

I problemi ai limiti per le equazioni differenziali del secondo ordine.

§ 1. - Il problema della determinazione di un integrale di un'equazione differenziale di ordine n passante per n punti assegnati.

1. Il problema nel caso delle equazioni lineari. - 2. Il teorema di esistenza e di unicità per le equazioni lineari di CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN. - 3. Teorema di CH. DE LA VALLÉE POUSSIN nel caso delle equazioni differenziali di ordine n di forma normale.

1. - Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0 \tag{1}$$

dove supponiamo i coefficienti $p_1(x),\dots,\ p_{n-1}(x),\ p_n(x)$ funzioni continue di x in (α, β).

Il teorema di esistenza e di unicità del Cap. II, § 1, n. 1, c) assicura che fissati in un punto x^0 di (α, β) i valori $y^0,\ y_1^0,\dots,\ y_{n-1}^0$, o come si dice *fissati i dati di Cauchy, esiste uno e un solo integrale* $y(x)$ *della* (1) *che soddisfa le condizioni iniziali*

$$y(x^0)=y^0,\quad y'(x^0)=y_1^0,\dots,\quad y^{(n-1)}(x^0)=y_{n-1}^0\,.$$

Però nei problemi della fisica matematica e della matematica applicata avviene di dover determinare un integrale della (1) quando le condizioni iniziali non si riferiscano tutte ad un medesimo punto x^0, tale è il problema: *determinare gli integrali* $y(x)$ *della* (1) *passanti per* n *punti prescritti*

$$P_1=(a_1,\,A_1),\quad P_2=(a_2,\,A_2),\dots,\quad P_n=(a_n,\,A_n)$$
$$\alpha\leq a_1<a_2<\dots<a_n\leq\beta,$$

cioè costruire gli integrali della (1) che soddisfano le condizioni

$$y(a_k)=A_k\,,\qquad (k=1,\,2,\dots,\,n). \tag{2}$$

Se $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ è un sistema fondamentale di integrali della (1), il suo più generale integrale ha la forma $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ con $c_1, c_2, \ldots, c_n$ costanti arbitrarie, e il problema equivale a determinare le soluzioni $c_1, c_2, \ldots, c_n$ del sistema lineare

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i(a_k) = A_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Se fissati $a_1, a_2, \ldots, a_n$ il determinante della matrice $\Delta = \| y_i(a_k) \|$ è diverso da zero, allora il sistema (3) ha una e una sola soluzione e il problema è univocamente determinato qualunque siano le costanti A_k. Ne segue che due integrali della (1) che abbiano n punti in comune di ascissa $a_1, a_2, \ldots a_n$ coincidono e in particolare, poichè $y(x) \equiv 0$ è un integrale della (1), l'integrale identicamente nullo è il solo che si annulli negli n punti $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Quando sia invece det. $\Delta = 0$ e simultaneamente $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$, poichè il sistema (3) ammette soluzioni $c_1, c_2, \ldots c_n$ non nulle, vi sono integrali dell'equazione (1), non identicamente nulli, che si annullano negli n punti assegnati $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Supposto ancora $\Delta = 0$ e le $A_1, A_2, \ldots, A_n$ non tutte nulle, il sistema (3) è impossibile o ammette infinite soluzioni secondo che Δ e la matrice Δ' ottenuta da Δ orlando con la colonna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abbiano caratteristica diversa o la medesima caratteristica; in quest'ultimo caso esistono infiniti integrali della (1) passanti per gli n punti $P_1, P_2, \ldots, P_n$, integrali che si ottengono da uno particolare per l'aggiunta del più generale integrale della (1) annullantesi negli n punti $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2. - *a*) È importante nelle applicazioni assegnare un numero positivo h_0 il quale goda la proprietà che comunque si fissino n punti

$$P_1 \equiv (a_1, A_1), \quad P_2 \equiv (a_2, A_2), \ldots, \quad P_n \equiv (a_n, A_n)$$

con le condizioni

$$\alpha \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant \beta, \qquad a_n - a_1 \leqslant h_0,$$

esista uno e un solo integrale della (1) passante per $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Determineremo questo numero in *c*).

b) Semplifica la questione il seguente lemma.

Se la funzione $\varphi(x)$ ha n zeri almeno, non tutti coincidenti, nell'intervallo (a, b) di lunghezza $b-a=h$, e se essa ammette in (a, b) derivata di ordine n continua e in valore assoluto $\leq \mu$, vale allora la limitazione

$$\int_a^b |\varphi(x)|\, dx < \mu \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{4}$$

Sia

$$\varphi(a_k)=0, \qquad (k=1, 2, ..., n),$$

a_{n+1} un punto qualunque di (a, b), e si consideri la funzione

$$\Phi(x)=\varphi(x)-\frac{(x-a_1)(x-a_2)\,....\,(x-a_n)}{n!}A$$

dove

$$A=n!\,\varphi(a_{n+1})/(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\,....\,(a_{n+1}-a_n) \quad (^1).$$

La $\Phi(x)$ si annulla negli $n+1$ punti $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$, esiste quindi un punto ξ interno ad (a, b) tale $\Phi^{(n)}(\xi)=0$, ovvero $\varphi^{(n)}(\xi)-A=0$, e perciò

$$\varphi(a_{n+1})=(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\,....\,(a_{n+1}-a_n)\varphi^{(n)}(\xi)/n! \quad (^2)$$

ma a_{n+1} è un punto qualunque di (a, b), abbiamo dunque

$$|\varphi(x)| \leq \frac{\mu}{n!}|(x-a_1)(x-a_2)\,....\,(x-a_n)|$$

e

$$\int_a^b |\varphi(x)|\, dx \leq \frac{\mu}{n!}\int_a^b |(x-a_1)(x-a_2)\,....\,(x-a_n)|\, dx. \tag{5}$$

Se poniamo

$$\psi(x)=|(x-a_2)\,....\,(x-a_n)|$$

---

(1) Se $a_1=a_2$ prenderemo in luogo di $(x-a_1)(x-a_2)$ e $(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)$ rispettivamente $(x-a_1)^2$, $(a_{n+1}-a_1)^2$, e analogamente se coincidono tre o più punti a_r.

(2) La relazione del testo si deduce immediatamente dalla *formula di interpolazione* di Newton relativa a $\varphi(x)$ quando si faccia $\varphi(a_1)=\varphi(a_2)=$ $=....=\varphi(a_n)=0$. [Cfr. ad es. G. Sansone: *Lez. di An. Mat.*, I, (4ª ediz., Padova, 1940), p. 407].

abbiamo

$$(6)\ \int_a^b |(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)|\,dx = \int_a^{a_1}(a_1-x)\,\psi\,dx + \int_{a_1}^b (x-a_1)\,\psi\,dx.$$

La derivata rispetto ad a_1 del secondo membro è

$$\int_a^{a_1}\psi\,dx - \int_{a_1}^b \psi\,dx$$

ed essa, quando a_1 varia da a a b, varia crescendo da valori negativi a valori positivi, ne viene che il massimo dell'integrale che figura nel primo membro si otterrà quando a_1 è uguale ad a o a b; ripetendo il ragionamento per $a_2, \ldots, a_n$ si ha che il massimo dell'integrale che figura nel primo membro della (6) non supera il maggiore dei numeri

$$I_p = \int_a^b (x-a)^p(b-x)^{n-p}\,dx, \qquad (p=0,\,1,\ldots,\,n).$$

Con la sostituzione $x=a+ht$ abbiamo (¹)

$$I_p = h^{n+1}\int_0^1 t^p(1-t)^{n-p}\,dt = h^{n+1}\,\frac{p!\,(n-p)!}{(n+1)!}$$
$$= \frac{h^{n+1}}{n+1} \Big/ \binom{n}{p} \leq \frac{h^{n+1}}{n+1},$$

e poichè i punti a_1, $a_2, \ldots, a_n$ non sono tutti coincidenti con a e b

$$\int_a^b |(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)|\,dx < h^{n+1}/(n+1),$$

e dalla (5) segue appunto la (4).

c) Vogliamo ora dimostrare il teorema di CH. DE LA VALLÉE POUSSIN (²):

(¹) Cfr. le note di p. 139 e p. 157.

(²) CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n.* Journ. de Math. pur. et appl. (9), 8 (1929), pp. 125-144.

Data l'equazione differenziale

$$(1) \qquad y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0, \qquad (n\geq 2)$$

siano $p_1(x),\dots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ ***funzioni continue di*** x ***in*** (α, β) ***e siano*** $L_1,\dots, L_{n-1}, L_n$ ***i massimi moduli di*** $p_1(x),\dots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ ***in*** (α, β); ***allora se*** h_0 ***indica la radice positiva dell'equazione***

$$(7) \qquad L_n\frac{h^n}{n!}+L_{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+\dots+L_1\frac{h}{1!}-1=0, \quad \text{[1]}$$

fissati n ***punti*** $P_1\equiv(a_1, A_1), P_2\equiv(a_2, A_2),\dots, P_n\equiv(a_n, A_n)$, ***con***

$$\alpha\leqslant a_1<a_2<\dots<a_n\leqslant\beta, \qquad a_n-a_1=h\leqslant h_0,$$

esiste uno e un solo integrale della (1) ***passante per gli*** n ***punti*** $P_1, P_2,\dots, P_n$ [2].

Ragioniamo per assurdo; esistano due integrali distinti della (1) passanti per $P_1, P_2,\dots, P_n$; ciò implica che esiste un integrale $y(x)$ della (1) non identicamente nullo, annullantesi in $a_1, a_2,\dots, a_n$ [3], e indicato con μ il massimo modulo di $y^{(n-1)}(x)$ in (α, β), e osservato che $y'(x),\dots, y^{(n-2)}(x)$ si annullano in (a_1, a_n) rispettivamente almeno $n-1$, $n-2,\dots,$ 2 volte si ha per il lemma precedente

$$(8) \quad \int_{a_1}^{a_n}|y^{(n-2)}(x)|\,dx<\mu\frac{h^2}{2!},\ \int_{a_1}^{a_n}|y^{(n-3)}(x)|\,dx<\mu\frac{h^3}{3!},\dots,\int_{a_1}^{a_n}|y|\,dx<\mu\frac{h^n}{n!}.$$

Ora $y^{(n-1)}(x)$ si annulla in (a_1, a_n) almeno una volta, e se ξ è uno di questi punti e ξ_1 uno dei punti ove $y^{(n-1)}(x)$ assume il valore μ, si ha

$$-\mu=-\int_{\xi}^{\xi_1}y^{(n)}\,dx=\int_{\xi}^{\xi_1}[p_1y^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}y'+p_ny]\,dx$$

---

[1] Il primo membro della (7) è una funzione crescente di h che per $h=0$ è negativa ed h sufficientemente grande positiva.

[2] Escludiamo il caso di $L_1=L_2=\dots=L_n=0$, perchè allora l'integrale generale della (1) è un polinomio di grado $n-1$ in x, ed esiste un solo polinomio $y(x)$ di grado $n-1$ che soddisfa le condizioni $y(a_k)=A_k$, $(k=1, 2,\dots, n)$.

[3] Per le considerazioni del n. 1, tale integrale deve esistere anche se la (1) non possiede integrali passanti per $P_1, P_2,\dots, P_n$.

quindi

$$\mu \leq \int_{a_1}^{a_n} [L_1 |y^{(n-1)}| + \dots + L_{n-1} |y'| + L_n |y|]\, dx,$$

ed essendo $|y^{(n-1)}| \leq \mu$, per le (8) si ha

$$\mu < \mu \left[L_1 \frac{h}{1!} + \dots + L_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + L_n \frac{h^n}{n!} \right],$$

$$1 < L_1 \frac{h}{1!} + \dots + L_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + L_n \frac{h^n}{n!},$$

e ciò è assurdo essendo per $0 < h \leq h_0$

$$L_1 \frac{h}{1!} + \dots + L_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + L_n \frac{h^n}{n!} \leq 1.$$

d) Giova osservare che le conclusioni precedenti restano valide anche quando si voglia determinare degli integrali dell'equazione (1) che in N punti prescritti $a_1, a_2, \dots, a_N$

$$a_1 < a_2 < \dots < a_N, \qquad (1 < N \leq n)$$

soddisfino le condizioni

$$(9) \quad y(a_k) = A_{k,1},\ y'(a_k) = A_{k,2}, \dots, y^{(\alpha_k - 1)}(a_k) = A_{k,\alpha_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = n,$$

ossia l'integrale $y(x)$ della (1) è univocamente determinato dalle condizioni (9) quando sia $a_N - a_1 \leq h_0$.

Infatti l'esistenza di due integrali $y_1(x)$, $y_2(x)$ della (1), distinti, che soddisfino le condizioni (9) porta che le due curve $y_1(x)$, $y_2(x)$ hanno in $(a_1, A_{1,1})$, $(a_2, A_{2,1})$, ..., $(a_N, A_{N,1})$ rispettivamente un contatto di ordine $\alpha_1 - 1$, $\alpha_2 - 1$, ..., $\alpha_N - 1$ e perciò la curva $y_1 - y_2$ ha con l'asse x nei punti $a_1, a_2, \dots, a_N$ un contatto rispettivamente di ordine $\alpha_1 - 1$, $\alpha_2 - 1$, ..., $\alpha_N - 1$ e nei ragionamenti precedenti i punti $a_1, a_2, \dots, a_N$ contano rispettivamente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ volte [1].

---

[1] Un primo studio della questione è in O. NICOLETTI: *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*. Atti della R. Acc. Sc. Torino (1897-98), 33, pp. 746-759; cfr. anche V. GALLICO: *Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*. Giorn. di Mat. di Battaglini, (1917), 55, pp. 165-230. Per uno studio approfondito dell'equazione $y'' = f(x, y, y')$ cfr. E. PICARD: *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la Théorie des équations différentielles*. (Paris, 1930), pp. 1-14.

8. - Vogliamo dimostrare il seguente teorema di CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN che estende parzialmente i resultati del numero precedente alle equazioni differenziali di ordine n di forma normale [1].

Consideriamo l'equazione differenziale di ordine n

$$y^{(n)}=f(x;\ y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{10}$$

e supponiamo che f sia continua nel rettangolo R di centro $[a;\ \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}]$ definito dalle limitazioni

$$-a\leq x-a\leq a\,;\quad -b\leq y^{(i)}-\beta_i\leq b, \qquad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

e lipscitziana rispetto agli argomenti $y, y', \dots, y^{(n-1)}$

$$|f(x;\ y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)})-f(x;\ y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})|\leq \tag{11}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} L_k\,|y_2^{(n-k)}-y_1^{(n-k)}|,$$

dove con $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n$ abbiamo indicato le costanti di LIPSCHITZ della f relative a $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y$.

Sappiamo allora che se M è il massimo modulo di $f(x;\ y, y', \dots, y^{(n-1)})$ in R e δ il minore dei numeri a e b/M esiste uno e un solo integrale $y(x)$ della (1) avente per campo di esistenza $(a-\delta, a+\delta)$ e soddisfacente le condizioni

$$y^{(i)}(a)=\beta_i, \qquad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad [2].$$

Quando ci si voglia invece riferire a condizioni iniziali relative a n punti di $(a-a, a+a)$ noi non potremo più garantire l'effettiva esistenza di un integrale (10) soddisfacente le condizioni prescritte, dimostreremo però l'esistenza di un numero h_0 al quale come nel numero precedente corrisponde un teorema di unicità. Vale infatti il teorema di CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN: *Due integrali distinti dell'equazione* (10) [appartenenti al rettangolo R] *non possono avere più di $n-1$ punti comuni tra due ascisse a', a'', $(a-a\leq a'<a''\leq a+a)$ la cui differenza $h=a''-a'$ non supera la radice positiva h_0 dell'equazione*

$$L_n\frac{h^n}{n!}+L_{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+\dots+L_1\frac{h}{1!}-1=0,$$

[1] Cfr. CH. J. DE LA VALLÉE-POUSSIN, mem. cit. in nota al n. 2, c), pp. 141-143.

[2] Cfr. Cap. I, § 3, n. 4, c).

essendo L_n, $L_{n-1}, \dots, L_1$ *le costanti di* LIPSCHITZ *di* $f(x;\ y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *relative rispettivamente a* $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ (¹).

Infatti se y_1 e y_2 sono due integrali della (1), posto $y_0 = y_2 - y_1$ abbiamo

$$y_0^{(n)} = f(x;\ y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}) - f(x;\ y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})$$

e se ξ, ξ_1 sono due punti qualunque di (a', a''), tenuto conto della (11) si ha:

$$\int_{\xi}^{\xi_1} y_0^{(n)}(x)dx = \int_{\xi}^{\xi_1} [f(x;\ y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}) - f(x;\ y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})]\, dx$$

$$y_0^{(n-1)}(\xi_1) - y_0^{(n-1)}(\xi) \leq \int_{a'}^{a''} [L_1 |y_0^{(n-1)}| + \dots + L_{n-1} |y_0'| + L_n |y_0|]\, dx.$$

Ma se y_1 e y_2 hanno n punti comuni in (a', a'') la loro differenza y_0 si annulla n volte in (a', a'') e basterà ora ripetere il ragionamento del numero precedente per dimostrare il teorema (²).

§ 2. - Le equazioni differenziali del secondo ordine e il teorema di confronto di Sturm.

1. Le ricerche di STURM sulle equazioni del secondo ordine. - 2. Generalità sulle equazioni del secondo ordine. - 3. Punti coniugati. - 4. Una condizione sufficiente per l'inesistenza di punti coniugati. - 5. Identità di PICONE. - 6. Il teorema di confronto di STURM. - 7. Il teorema di separazione. - 8. Il teorema di confronto per intervalli aperti. - 9. La convessità della successione degli zeri degli integrali di una particolare equazione differenziale del secondo ordine.

1. - Nel paragrafo precedente abbiamo dato un cenno su un particolare problema ai limiti per le equazioni differenziali di ordine n; salvo a riprendere in generale la questione nel Cap. V ci fermeremo ora a studiare le equazioni del secondo ordine.

(¹) Nel recente lavoro di S. CINQUINI: *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n.* [Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (2), 9 (1940), pp. 61-77], con opportune ipotesi su $f(x;\ y, y', \dots, y^{(n-1)})$, si dimostra un criterio di esistenza per gli integrali dell'equazione (10) passanti per n punti prefissati.

(²) Per il caso $L_1 = L_2 = \dots = L_n = 0$, basterà ragionare su $y_0(x)$, che è un polinomio di grado $n-1$, come nella nota (²) del n. 2, c).

Tali studi traggono origine da una classica memoria di C. STURM [1]. Egli osservava che la maggior parte dei problemi relativi alla teoria del calore conduceva ad equazioni del secondo ordine delle quali, anche attraverso l'espressione dei loro integrali in termini finiti o mediante sviluppi in serie, era difficile ricavare il valore numerico degli integrali stessi in un punto, o riconoscere l'andamento dei loro zeri, i massimi e i minimi, i punti di infinito.

Dallo studio diretto delle equazioni, STURM scopriva che le soluzioni presentavano grandi analogie con le funzioni circolari o con l'esponenziale, che i loro zeri godevano proprietà singolarmente espressive, e che esse potevano essere calcolate numericamente con sufficiente approssimazione.

Un'ampia relazione sulle ricerche di STURM e sugli sviluppi successivi della teoria delle equazioni del secondo ordine trovasi in una comunicazione di M. BÔCHER alla quale rimandiamo il lettore [2]; noi, per brevità, presenteremo in questo Capitolo i punti più rilevanti della teoria.

2. - *a*) Sia data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{1}$$

ove $p(x)$, $q(x)$ sono funzioni continue della x in (a, b). Come abbiamo ricordato nel paragrafo precedente il teorema di esistenza assicura che se α è un punto di (a, b), fissati comunque due valori y_0, y_0', esiste uno e un solo integrale $y(x)$ della (1), definito in (a, b), che in α soddisfa le condizioni iniziali

$$y(\alpha)=y_0, \qquad y'(\alpha)=y_0'.$$

Si ha da qui che *un integrale della* (1), *nullo insieme alla sua derivata prima in un punto α di* (a, b), *è in* (a, b) *identicamente nullo*; infatti la funzione $y(x)\equiv 0$ soddisfa queste condizioni, ed è unica per il teorema di unicità [3].

D'ora in avanti per *soluzione di un'equazione come la* (1) *intendiamo una soluzione non identicamente nulla.*

---

[1] C. STURM: *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre.* Journ. de Math. pur. et appl., 1 (1836), pp. 106-186.

[2] M. BÔCHER: *Boundary problems in one dimension.* Proceedings of the fifth. Int. Congress of Math. (Cambridge, 1913), I, pp. 163-195.

[3] Cfr. nota [1], p. 49.

Dall'osservazione precedente si ha intanto che *se una soluzione* $y(x)$ *della* (1) *si annulla in un punto* α *interno ad* (a, b), la sua derivata prima è diversa da zero in α e perciò $y(x)$ *cangia di segno nel passare da* α.

Abbiamo anche che *ogni soluzione della* (1) *non può avere infiniti zeri in* (a, b). Infatti se $y(x)$ si annullasse in infiniti punti di (a, b), e ξ è un punto di accumulazione di questo insieme, si avrebbe $y(\xi)=y'(\xi)=0$ e perciò $y(x)\equiv 0$ in (a, b).

Possiamo di più notare che *se* α *è uno zero di* $y(x)$, α *è uno zero del primo ordine*; si ha infatli $\lim\limits_{x\to\alpha} y(x)/(x-\alpha)=y'(\alpha)\neq 0$.

b) Ricordiamo ancora [Cap. II, § 1, n. 2, *c*)] che se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni di (1) e il loro wronskiano $y_1y_2'-y_2y_1'$ si annulla in un punto α di (a, b) esso è nullo in tutto (a, b) e $y_1(x)$, $y_2(x)$ sono linearmente dipendenti in (a, b) [Cap. II, § 1, n. 3, *b*)].

Si ha in particolare *due soluzioni della* (1) *nulle in un medesimo punto di* (a, b), *differiscono per un fattore costante*; *due soluzioni della* (1) *le cui derivate prime sono nulle in un medesimo punto di* (a, b), *differiscono per un fattore costante.*

c) È infine quasi superfluo notare che *fissato un punto* α *di* (a, b), il teorema di esistenza ci assicura che *esiste un integrale* (almeno) *nullo in* α, *e che tutti gli integrali della* (1) *nulli in* α, *differiscono per un fattore costante.*

3. - *a*) Un primo modo di determinare un integrale dell'equazione (1) è quello di assegnare per un valore iniziale α i valori $y(\alpha)$, $y'(\alpha)$, ciò equivale geometricamente a fissare un punto della curva integrale e la direzione della retta tangente in quel punto. Ma nelle applicazioni, come abbiamo detto nel § 1, n. 1, si assegnano altre condizioni in generale atte a determinare tali integrali; tale è ad esempio il problema: fissati due punti (α, A), (β, B), $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$, trovare gli integrali della (1) passanti per questi punti. Per questi problemi hanno particolare importanza quelle coppie di valori distinti α, β ai quali corrispondono integrali della (1) nulli in α e in β, e se fissati due punti α, β di (a, b), $\alpha<\beta$, esiste un integrale della (1) (non identicamente nullo) che si annulli in α e in β diremo che i punti α e β *sono coniugati, che* β *è coniugato a destra di* α *e* α *coniugato a sinistra di* β.

I punti coniugati [a destra o a sinistra] di un dato punto a non dipendono dalla particolare soluzione $y_1(x)$ avente uno zero in a, in quanto ogni altra soluzione che si annulla in a differisce da questa per un fattore costante.

Fra i coniugati di un punto a si distinguono il *primo*, il *secondo*,.... coniugato a destra [sinistra] di a definiti dalle condizioni

$$a < a_1 < a_2 < \dots \qquad [a > a_1 > a_2 > \dots]$$
$$0 = y_1(a) = y_1(a_1) = y_1(a_2) = \dots$$

e dal fatto che $y_1(x)$ è in ogni punto interno agli intervalli (a, a_1), (a_1, a_2),.... diversa da zero.

Osserviamo che se $a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ formano una successione di punti coniugati, l'andamento di un integrale $y_1(x)$ che si

FIG. 6.

annulli in a [e perciò in tutti gli altri punti] è quello della figura; il diagramma è *oscillante* intorno all'asse x e lo traversa nei punti $a, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$.

Sia infatti in a, $y_1'(a) > 0$, la $y_1(x)$ è crescente in a e perciò nei punti interni ad (a, a_1) è positiva e siccome in a_1 deve traversare l'asse x ed è $y_1'(a_1) \neq 0$, essa passa decrescendo $[y_1'(a_1) < 0]$ dal positivo al negativo e si manterrà negativa internamente ad (a_1, a_2) ed in a_2 torna ad attraversare l'asse x.

b) Consideriamo l'equazione

$$(2) \qquad y'' + m^2 y = 0$$

con m costante positiva; il suo integrale generale ha la forma

$$y = c \operatorname{sen} m(x - a)$$

con c ed a costanti arbitrarie, e i suoi zeri si seguono ad intervallo costante π/m.

Si ha intanto che se (a, b) ha lunghezza minore di π/m esso non contiene coppie di punti coniugati. In generale dato un punto a

appartenente ad (a, b), se indichiamo rispettivamente con k_1 e k_2 gli interi tali che

$$a-(k_1+1)\frac{\pi}{m}<\alpha\leqslant\alpha-k_1\frac{\pi}{m}; \qquad \alpha+k_2\frac{\pi}{m}\leqslant b<\alpha+(k_2+1)\frac{\pi}{m},$$

il numero dei punti coniugati di α vale k_1+k_2.

Si ha

$$(k_1+k_2+2)\pi/m>b-a\geqslant(k_1+k_2)\pi/m,$$
$$k_1+k_2+2>(b-a)m/\pi\geqslant k_1+k_2$$

e per il *massimo intero contenuto in* $(b-a)m/\pi$

$$[(b-a)m/\pi]=k_1+k_2, \quad k_1+k_2+1 \quad (^1)$$

e perciò il *numero dei punti coniugati di un punto* α *[appartenenti ad* (a, b)*], vale* $[(b-a)m/\pi]$, *o* $[(b-a)m/\pi]-1$.

4. - *a*) Consideriamo l'equazione

$$y''-m^2y=0 \tag{3}$$

con m costante positiva. Il suo integrale generale ha la forma $y=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}$ con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Se si vuole che l'integrale abbia uno zero in α si avrà

$$y=2c \operatorname{senh} m(x-\alpha)=c[e^{m(x-\alpha)}-e^{-m(x-\alpha)}]$$

ma tale integrale non ha altri punti di zero; *non esistono quindi coppie di punti coniugati rispetto l'equazione* (3).

b) Le proprietà dell'integrale dell'equazione (3) possono ottenersi come conseguenza del teorema: *Se nell'equazione*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{1}$$

con $p(x)$, $q(x)$ *funzioni continue in* (a, b) *si ha*

$$q(x)<0 \quad \text{per} \quad a\leqslant x\leqslant b, \tag{4}$$

allora se y *è un qualsiasi integrale della* (1), *ed* α *un punto di* (a, b), *il prodotto*

$$\nu(x)=e^{\int_\alpha^x p(x)dx}\, y\,\frac{dy}{dx}$$

è crescente in (a, b).

(1) Il simbolo $[x]$ si legge *massimo intero contenuto in* x

Abbiamo infatti

$$\frac{d\nu(x)}{dx} = e^{\int_a^x p(x)dx} [pyy' + y'^2 + yy'']$$

$$= e^{\int_a^x p(x)dx} [y'^2 - qy^2]$$

e poichè y e y' non si annullano simultaneamente, $\nu'(x) > 0$.

Dal teorema dimostrato segue che se per un integrale $y(x)$ della (1) in un punto a vale la relazione $y(a)y'(a) \geqq 0$ per qualunque valore di $x > a$ si avrà $y(x)y'(x) > 0$ e le due funzioni continue $y(x)$, $y'(x)$ non potendo più annullarsi a destra di a conserveranno sempre segni concordanti, quindi se $y(x)$ per $x > a$ è positiva, essa è positiva e crescente; se la $y(x)$ per $x > a$ è negativa, essa è negativa e decrescente. Abbiamo quindi che *se il coefficiente* $q(x)$ *della* (1) *soddisfa la condizione* $q(x) < 0$, *se un suo integrale è in un punto* a, *positivo* (*oppure nullo*) *e crescente, questo integrale per ogni* $x > a$ *è positivo e crescente*; *se invece l'integrale* $y(x)$ *è in un punto* a, *negativo* (*oppure nullo*) *e decrescente, tale integrale è negativo e decrescente per ogni* $x > a$.

L'intervallo (a, b), *nell'ipotesi* (4), *è privo di coppie di punti coniugati.*

Infatti se in un punto x di (a, b) si ha $y(a) = 0$ e perciò $y(a)\,y'(a) = 0$, dopo per qualsiasi $\beta > a$ si ha $y(\beta)\,y'(\beta) > 0$ e perciò $y(\beta) \neq 0$.

Questa osservazione ci dà ragione delle cose dette in a).

c) Una *soluzione* dell'equazione differenziale (1) si dice *non oscillante* in un intervallo (α, β) se essa in (α, β) non ha zeri o ne possiede uno soltanto. Dalle cose dette segue che le soluzioni della (1) nell'ipotesi (4) non sono oscillanti in qualunque intervallo (α, β).

Una *soluzione* della (1) che abbia più di uno zero in (α, β) si dice che è ivi *oscillante*. Ad esempio le soluzioni della (2) del n. 3, *b*) sono oscillanti in qualunque intervallo di ampiezza non inferiore a $2\pi/m$.

5. - *a*) Sia data l'equazione

$$(1) \qquad y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

con $p(x)$, $q(x)$ funzioni continue di x in (a, b). Moltiplicando per $e^{\int_a^x p(x)dx}$ essa acquista la *forma autoaggiunta* [Cap. II, § 5, n. 3, *b*)]

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int_a^x p\,dx}\frac{dy}{dx}\right]+qe^{\int_a^x p\,dx}y=0$$

ovvero, posto

$$(5) \qquad \theta(x)=e^{\int_a^x p\,dx}, \qquad Q(x)=-q(x)e^{\int_a^x p\,dx}$$

la forma

$$(6) \qquad \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right]-Q(x)y(x)=0,$$

con $\theta(x)>0$ in (a, b). D'ora in avanti considereremo le equazioni del secondo ordine nella forma (6).

b) Siano *date le due equazioni*

$$(6) \qquad \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right]-Q(x)y(x)=0,$$

$$(7) \qquad \frac{d}{dx}\left[\theta_1(x)\frac{dz}{dx}\right]-Q_1(x)z(x)=0,$$

nelle quali supponiamo $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $Q(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_1'(x)$, $Q_1(x)$ *funzioni continue di* x *in* (a, b), $\theta(x)>0$, $\theta_1(x)>0$, *e siano* $y(x)$, $z(x)$ *due integrali di tali equazioni; se in punto* x *di* (a, b) *è* $z(x)=0$, *vale la formula*

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{y}{z}(\theta y'z-\theta_1 yz')\right]=(Q-Q_1)y^2+(\theta-\theta_1)y'^2+\theta_1\left[y'-\frac{y}{z}z'\right]^2.$$

Infatti il primo membro può scriversi

$$y\frac{d}{dx}(\theta y')+\theta y'^2-2\theta_1 yy'\frac{z'}{z}+\theta_1\frac{y^2}{z^2}z'^2-\frac{y^2}{z}\frac{d}{dx}(\theta_1 z')=$$
$$=Qy^2+\theta y'^2-2\theta_1 yy'\frac{z'}{z}+\theta_1\frac{y^2}{z^2}z'^2-Q_1y^2$$

e perciò la (I).

c) Le due funzioni $y(x)$, $z(x)$ soddisfino rispettivamente le (6) *e* (7) *nell'intervallo chiuso* (α, β), *e sia* $y(\alpha)=y(\beta)=0$, *e* $z(x)\neq 0$ *per* $\alpha<x<\beta$. Poichè $y^2(x)$ ha in α e β zeri del secondo ordine e $z(x)$ negli stessi punti al più uno zero del primo ordine [n. 2, *a*)] si avrà anche $\lim\limits_{x\to\alpha+0} y^2/z=0$, $\lim\limits_{x\to\beta-0} y^2/z=0$, e dalla (I) integrando in (α, β) segue la notevole *identità di Picone* (1)

$$\text{(II)} \qquad 0=\int_\alpha^\beta (Q-Q_1)y^2 dx+\int_\alpha^\beta (\theta-\theta_1)y'^2 dx+\int_\alpha^\beta \theta_1\left[y'-\frac{y}{z}z'\right]^2 dx.$$

6. - *a*) L'identità (II) permette di provare rapidamente il classico *teorema di confronto di Sturm* (2).

Siano date le due equazioni

$$\text{(6)} \qquad \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right]-Q(x)y(x)=0,$$

$$\text{(7)} \qquad \frac{d}{dx}\left[\theta_1(x)\frac{dz}{dx}\right]-Q_1(x)z(x)=0,$$

con $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $Q(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_1'(x)$, $Q_1(x)$ *funzioni continue di* x *in* (a, b); $\theta(x)>0$, $\theta_1(x)>0$; *non siano* $Q(x)$, $Q_1(x)$ *insieme nulle in nessun tratto di* (a, b), *e sia inoltre*

$$\text{(8)} \qquad \theta(x)\geqq\theta_1(x), \qquad Q(x)\geqq Q_1(x).$$

Vogliamo allora dimostrare che se $y(x)$ è una soluzione della (6) *che ha due zeri nei punti α e β, essendo β il primo coniugato a destra di α, qualunque soluzione della* (7) *ha almeno uno zero nell'interno di (α, β), salvo il caso che le due equazioni* (6) *e* (7) *coincidano in (α, β) ed $y(x)$ e $z(x)$ differiscano per un fattore costante.*

Supponiamo $z(x)\neq 0$ per $\alpha<x<\beta$; vale allora l'identità (II) di Picone, e ciò esige a motivo delle (8) che si abbia

$$(9_1) \qquad Q(x)\equiv Q_1(x),$$

$$(9_2) \qquad (\theta-\theta_1)y'=0,$$

$$(9_3) \qquad y'z-y'z=0.$$

---

(1) M. Picone: *Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare del secondo ordine*. Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (1), XI (1910), (pp. 1-141), p. 20.

(2) C. Sturm, mem. cit. al n. 1, p. 125.

Se in un tratto di (α, β) è $\theta-\theta_1 \neq 0$ è $y' \equiv 0$ perciò $y = \text{cost}$, e per le (6) e (9), si avrà in questo tratto $0 = Q(x) - Q_1(x)$ contro l'ipotesi; si avrà allora in (α, β), $Q(x) \equiv Q_1(x)$, $\theta(x) \equiv \theta_1(x)$ e per la (9_3) $y(x) = cz(x)$ con c costante. Abbiamo dunque che se le due equazioni (6) e (7) non coincidono, o se coincidono $y(x)$ e $z(x)$ non differiscono per un fattore costante, è assurdo supporre $z(x) \neq 0$ per $\alpha < x < \beta$.

b) Dal teorema dimostrato segue che *se un integrale della* (6) *ha* n *zeri consecutivi in* (a, b), $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant b$, $(n > 1)$, *allora l'integrale generale della* (7) *avrà almeno* $n-1$ *zeri nell'interno di* (x_1, x_n).

7. - *a*) Se nell'identità di PICONE facciamo $\theta_1 = \theta$, $Q_1 = Q$ e ragioniamo come nel numero precedente abbiamo che *data l'equazione*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\,\frac{dy}{dx}\right] - Q(x)y(x) = 0 \tag{6}$$

con $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $Q(x)$ *continue in* (a, b), $\theta(x) > 0$, *se esiste un suo integrale* $y(x)$ *nullo nei punti* α *e* β, *essendo* β *il primo coniugato di* α, *allora qualunque altro integrale* $z(x)$ *della* (6), *se è indipendente da* $y(x)$ *avrà almeno uno zero interno ad* (α, β).

È subito visto che $z(x)$ ha in (α, β) uno zero soltanto, infatti se $z(x)$ si annulla nei punti γ e δ di (α, β), $y(x)$ dovrebbe avere

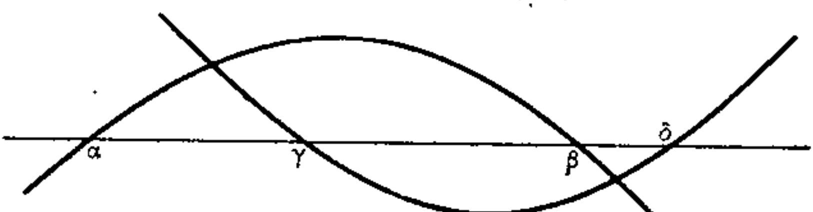


FIG. 7.

uno zero interno a (γ, δ) e perciò ad (α, β) e ciò è contro l'ipotesi. Ne risulta il così detto *teorema di separazione*: *le coppie* (α, β), (γ, δ) *di punti coniugati consecutivi di due integrali della* (6) *o coincidono, o si separano.*

b) Non esista nell'intervallo (α, β), $\alpha < \beta$, il coniugato dell'estremo α; non può esistere in (α, β) il coniugato (a sinistra) di β, perchè se β_1 è coniugato di β e $\alpha<\beta_1<\beta$, in (β_1, β) vi dovrebbe essere almeno un punto coniugato di α e ciò è contro l'ipotesi. Per la stessa ragione non esiste in (α, β) il coniugato di alcun suo punto interno e abbiamo quindi che *se uno degli estremi dell'intervallo* (α, β) *non ammette punti coniugati in* (α, β), *allora nell'intervallo* (α, β) *non esistono coppie di punti coniugati.*

c) Se un intervallo (α, β) *di* (a, b) *è privo di punti coniugati, esiste una soluzione della* (6), *sempre positiva in* (α, β).

Siano infatti $y_1(x)$, $y_2(x)$ due soluzioni della (6) per le quali si abbia $y_1(\alpha)=0$, $y_2(\beta)=0$; per le ipotesi fatte si avrà $y_1(\beta)\neq 0$, $y_2(\alpha)\neq 0$.

Qualunque siano le costanti positive l ed m, l'integrale della (6)

$$y(x)=\frac{m}{y_1(\beta)}\,y_1(x)+\frac{l}{y_2(\alpha)}\,y_2(x)$$

prende agli estremi α e β di (α, β) rispettivamente i valori positivi l ed m ed esso non può annullarsi in (α, β). Infatti negli eventuali punti di zero $y(x)$ attraversa l'asse x, e siccome $y(x)$ ha negli estremi di (α, β) valori dello stesso segno, $y(x)$ dovrebbe annullarsi almeno due volte e ciò non può essere; $y(x)$ che non si annulla in (α, β) mantiene quindi sempre lo stesso segno (quello positivo di l ed m).

8. - Ci accerteremo nel § 3 dell'utilità del *teorema di confronto per intervalli aperti* nella forma di G. Szegö [1]: *Siano date le due equazioni*

$$(10_1)\qquad \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\,\frac{dy}{dx}\right]-Q(x)y(x)=0,$$

$$(10_2)\qquad \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\,\frac{dz}{dx}\right]-Q_1(x)z(x)=0,$$

e siano $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $Q(x)$, $Q_1(x)$ *continue per* $a<x\leq b$, *e* $\theta(x)>0$, $Q(x)\geq Q_1(x)$ *per* $a<x\leq b$. *Non sia in* (a, b), $Q(x)\equiv Q_1(x)$, *ed*

---

[1] G. Szegö: *Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions.* Trans. of the Am. Math. Soc., 39 (1936), pp. 1-17.

esista inoltre un integrale $y(x)$ *della* (10_1), *definito per* $a < x \leqslant b$, *che soddisfi le condizioni*

$$(11) \qquad y(x) > 0 \quad \text{per} \quad a < x < b\,; \qquad y(b) = 0.$$

Vogliamo dimostrare che se $z(x)$ *è un integrale della* (10_2) (non identicamente nullo) *per il quale vale la relazione*

$$(12) \qquad \lim_{x \to a+0} \theta(y'z - yz') = 0,$$

allora $z(x)$ *ha almeno uno zero interno ad* (a, b).

Supponiamo per assurdo che $z(x)$ non si annulli mai internamente ad (a, b) e sia ad esempio $z(x) > 0$ per $a < x < b$.

Moltiplicando la (10_1) per z e la (10_2) per y e sottraendo otteniamo

$$\frac{d}{dx}\,[\theta(zy' - yz')] - (Q - Q_1)yz = 0$$

e integrando tra $a + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ e b

$$(13) \quad \theta(b)z(b)y'(b) - \theta(a+\varepsilon)[z(a+\varepsilon)y'(a+\varepsilon) - y(a+\varepsilon)z'(a+\varepsilon)] = \\ = \int_{a+\varepsilon}^{b} (Q - Q_1)yz\,dx.$$

Si ha $\theta(b) > 0$, $z(b) \geqslant 0$; d'altra parte è $y'(b) = 0$ e poichè $y(x)$ è positiva a sinistra di b è $y'(b) < 0$; ne viene che per $\varepsilon \to 0$ il limite del primo membro della (13) è negativo o nullo, mentre il minimo limite del secondo membro è positivo e si cade in assurdo; dunque $z(x)$ si annulla internamente ad (a, b).

9. - Vogliamo dimostrare per le equazioni $y'' - Q(x)y = 0$, con $Q(x)$ funzione continua crescente, l'elegante proposizione di Sturm [1] della quale si fa talvolta uso nelle applicazioni.

Data l'equazione

$$(14) \qquad y'' - Q(x)y = 0$$

con $Q(x)$ *funzione continua crescente di* x *per* $a < x < b$, *se*

---

[1] Per la dimostrazione cfr. G. Szegö, mem. cit. nel n. 8.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ è la successione degli zeri di un suo integrale $y(x)$, disposti in ordine crescente,

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < b,$$

la successione $\{x_n\}$ è convessa, deve aversi cioè

$$0 < x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \ldots. \tag{15}$$

Poniamo $x_2 - x_1 = d$ (>0); la funzione $z(x) = y(x-d)$ ha i suoi zeri consecutivi nei punti x_2, $x_2 + d$, $x_3 + d, \ldots$ e soddisfa l'equazione

$$z'' - Q(x-d)z = 0. \tag{16}$$

Poichè in (x_2, x_3) si ha $Q(x) > Q(x-d)$ ed è $y(x_2) = y(x_3) = 0$, confrontando le equazioni (14) e (16) col teorema di STURM si ha

$$x_2 + d < x_3$$

ovvero $x_2 - x_1 = d < x_3 - x_2$ e ne segue appunto la (15).

§ 3. - Applicazione del teorema di confronto per la separazione degli zeri dei polinomi ultrasferici e delle funzioni di Bessel nel caso principale.

1. Zeri dei polinomi ultrasferici. - 2. Zeri delle funzioni di BESSEL.

1. - I polinomi ultrasferici $P_n^{(\lambda)}(x)$ [Cap. III, § 5; n. 8, (43) e n. 1, *b*), $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$] hanno il grado n in x e soddisfano l'equazione differenziale

$$(1 - x^2)\frac{d^2 P_n}{dx^2} - (2\lambda + 1)x\frac{dP_n}{dx} + n(n + 2\lambda)P_n = 0$$

od anche, posto

$$z = (\operatorname{sen}\varphi)^\lambda P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi), \qquad x = \cos\varphi,$$

l'equazione

$$z'' + \left[(n+\lambda)^2 + \frac{\lambda(1-\lambda)}{\operatorname{sen}^2\varphi}\right] z = 0. \tag{1}$$

Supponiamo che sia $0 < \lambda < 1$ o come si dice consideriamo il *caso principale*.

Se confrontiamo la (1) con l'equazione

$$y'' + (n+\lambda)^2 y = 0,$$

questa ha la soluzione $y = \operatorname{sen}(n+\lambda)(\varphi - \varphi_0)$, ne viene quindi per il teorema di confronto di STURM [§ 2, n. 6] l'esistenza di almeno uno zero di $P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)$ in ogni intervallo di lunghezza $\pi/(n+\lambda)$, e perciò in ciascuno degli $n-1$ intervalli

$$[(\nu-1)\pi/(n+\lambda),\ \nu\pi/(n+\lambda)], \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

esiste internamente almeno uno zero di z.

Si ha $\lim_{\varphi\to 0}\{y'z - yz'\} = 0$, e dal teorema di G. SZEGÖ del n. 8 del paragrafo precedente si ha anche che $P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)$ ha uno zero internamente all'intervallo $(0, \pi/(n+\lambda))$; ma $P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)$ non può avere che soltanto n zeri in $(0, \pi)$, e abbiamo così dimostrato che $P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)$ ha n zeri distinti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ appartenenti all'intervallo $(0, \pi)$ e per essi valgono le limitazioni

$$\frac{\nu-1}{n+\lambda}\pi < \varphi_\nu < \frac{\nu}{n+\lambda}\pi, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Si ha poi $P_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\lambda)}(x)$ [Cap. III, § 5, (7), (43)] quindi

$$\varphi_\nu = \pi - \varphi_{n+1-\nu} > \pi - \frac{(n+1)-\nu}{n+\lambda}\pi = \frac{\nu-(1-\lambda)}{n+\lambda}\pi$$

ed infine

$$\boxed{\frac{\nu-(1-\lambda)}{n+\lambda}\pi < \varphi_\nu < \frac{\nu}{n+\lambda}\pi} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Queste limitazioni per $\lambda = 1/2$ (caso delle *funzioni sferiche*) sono le così dette *limitazioni di* BRUNS [1].

2. - Vogliamo ora studiare gli zeri delle funzioni di BESSEL, di *ordine reale*.

a) Le $J_n(x)$ soddisfano l'equazione differenziale [Cap. III, § 6, n. 1, (1)]

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) z = 0, \tag{3}$$

---

[1] H. BRUNS: *Zur Theorie der Kugelfunktionen.* Journ. für die reine und ang. Math., 90 (1881), pp. 322-328.

ne viene [§ 2, n. 2, *a*)] che se $J_n(x)=0$ e $x \neq 0$, x è uno zero semplice di $J_n(x)$.

È facile vedere che l'*equazione*

$$J_n(x)=0,$$

se $n>-1$ *ha tutte le sue radici reali.*

Questa abbia infatti la radice $a=\alpha+i\beta$, a motivo della (11) del Cap. III, § 6, n. 2, essa ammette anche la radice coniugata $b=\alpha-i\beta$ e abbiamo allora per x reale $J_n(ax)=P+iQ$, $J_n(bx)=$ $=P-iQ$, e per la (25) del § 6, n. 7 del Cap. III citato

$$\int_0^1 x(P^2+Q^2)dx=0,$$

quindi $P=0$, $Q=0$, e ciò è assurdo perchè la trascendente intera $x^n J_n(ax)$ dovrebbe riuscire nulla sul segmento $(0, a)$.

b) *Le radici di* $J_n(x)=0$ *se* n *reale*, $|n|<1/2$, o come si dice nel *caso principale, sono infinite* ed [hanno come unico punto d'accumulazione l'∞ (¹)].

Poichè se x è una radice non nulla di $J_n(x)$ anche $-x$ è una radice, possiamo limitarci a studiare gli zeri di $J_n(x)$ per $x>0$.

Supposto dunque $x>0$ poniamo

$$u=x^{1/2}J_n(x),$$

la (3) diventa

$$u''+\left[1+\frac{\frac{1}{4}-n^2}{x^2}\right]u=0. \tag{4}$$

Confrontando col teorema di STURM [§ 2; n. 6] quest'ultima con l'equazione $y''+y=0$ che ammette l'integrale $y=\operatorname{sen}(x-x_0)$ ne viene l'esistenza di almeno uno zero di $J_n(x)$ in qualunque intervallo di ampiezza π. Indicando quindi con $j_{n,\nu}$ $(\nu=1, 2, ...)$ gli zeri positivi di $J_n(x)$ disposti in ordine crescente e posto $j_{n,0}=0$

$$0=j_{n,0}<j_{n,1}<j_{n,2}<....$$

(¹) Questa proprietà consegue dal fatto che $x^{-n}J_n(x)$ è una trascendente intera.

si ha

$$j_{n,\nu}-j_{n,\nu-1}<\pi, \quad j_{n,\nu}<\nu\pi, \qquad (\nu=1, 2....).$$

Ne risulta che $j_{n,\nu}-\nu\pi$ decresce con l'indice ν, perciò

$$(5) \qquad j_{n,\nu}\leqslant j_{n,1}+(\nu-1)\pi, \qquad (\nu=1, 2,....).$$

Se nell'equazione (1) del n. 1 mutiamo n in m e λ in $n+1/2$ si ottiene

$$(6) \qquad z''+\left[\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\frac{1}{4}-n^2}{\operatorname{sen}^2\varphi}\right]z=0,$$

che ammette l'integrale $z=(\operatorname{sen}\varphi)^{n+1/2}\ P_m^{(n+1/2)}(\cos\varphi)$; la (4) con il cangiamento di variabile indipendente $x=\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\varphi$ diventa

$$(7) \qquad u''+\left[\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\frac{1}{4}-n^2}{\varphi^2}\right]u=0$$

e possiamo ora confrontare quest'ultima equazione con la (6) anche in un intorno a destra di o poichè la condizione (12)

$$\lim_{x\to+0}\,[z'u-zu']=0$$

del § 2, n. 8 risulta soddisfatta.

Abbiamo allora che in ciascuno degli m intervalli

$$\left[j_{n,\nu-1}/\left(m+n+\frac{1}{2}\right),\ \ j_{n,\nu}/\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\right], \qquad (\nu=1, 2,...., m)$$

è compreso almeno uno zero di $P_m^{(n+1/2)}(\cos\varphi)$, ma si ha $j_{n,m}/(m+n+1/2)<\pi$, perciò *gli* m *zeri* $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ *di* $P_m^{(n+1/2)}(\cos\varphi)$, *compresi in* $(0, \pi)$, *risultano separati dalle limitazioni*

$$(8) \qquad \frac{j_{n,\nu-1}}{m+n+\frac{1}{2}}<\varphi_\nu<\frac{j_{n,\nu}}{m+n+\frac{1}{2}}, \qquad (\nu=1, 2,..., m).$$

Ciò premesso, sia ν un qualsiasi intero positivo e $m=2\nu-1$, si avrà $\varphi_\nu=\pi/2$, $\left[P_{2\nu-1}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}(0)=0\right]$, perciò $\frac{\pi}{2}<j_{n,\nu}/(n+2\nu-1/2)$

e tenuto conto delle (5) abbiamo trovato per i numeri $j_{n,\nu}$ la limitazione

$$(9) \qquad \left(\nu+\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\pi<j_{n,\nu}\leqslant j_{n,1}+(\nu-1)\pi, \qquad [<\nu\pi]$$
$$(\nu=1,\,2,\,3,\dots),$$

e con *questa limitazione si separano gli zeri di $J_n(x)$ nell'ipotesi* $|n|<1/2$, essendo $\nu\pi<(\nu+1+n/2-1/4)\pi$.

Ricordando infine che $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ abbiamo che gli zeri di $J_{-1/2}(x)$ hanno l'espressione $(\nu+1/2)\pi$, e quelli di $J_{1/2}(x)$, $\nu\pi$, con ν intero qualsiasi.

c) Sia n reale, vogliamo ora dimostrare che $J_n(x)$ *ha infiniti zeri reali, e che gli zeri reali di $J_n(x)$ e $J_{n+1}(x)$ si separano a coppie.*

Si ha infatti [Cap. III, § 6, n. 6, *b*)]

$$(10) \quad \frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x), \quad \frac{d}{dx}\left[x^{n+1}J_{n+1}(x)\right]=x^{n+1}J_n(x)$$

e per il teorema di Rolle segue che tra due zeri positivi consecutivi di $J_n(x)$ vi è almeno uno zero di $J_{n+1}(x)$, e tra due zeri consecutivi di $J_{n+1}(x)$ uno zero almeno di $J_n(x)$, e poichè gli zeri di $J_n(x)$ per $|n|\leqslant 1/2$ sono infiniti, ne viene che ogni $J_n(x)$ di ordine n reale, ha infiniti zeri.

Se osserviamo ancora gli zeri positivi di $J_n(x)$ sono semplici ne viene dalle (10) che $J_n(x)$ e $J_{n+1}(x)$ non hanno zeri comuni e perciò gli zeri di $J_n(x)$ e $J_{n+1}(x)$ si separano a coppie.

d) Sia $0<j_{n,1}<j_{n,2}<\dots<j_{n,\nu}<\dots$ la successione degli zeri positivi di $J_n(x)$; vogliamo infine dimostrare che *se $n>-1$ si ha*

$$(11) \qquad 0<j_{n,1}<j_{n+1,1}<j_{n,2}<j_{n+1,2}<\dots \qquad (n>-1).$$

Basterà per le cose dette provare che $j_{n,1}<j_{n+1,1}$, ma ciò consegue dal fatto che $x^{n+1}J_{n+1}(x)$ quando $n>-1$ ha due zeri consecutivi in 0 e $j_{n+1,1}$ e allora per la seconda delle (10), $J_n(x)$ ha il suo primo zero positivo $j_{n,1}$ minore di $j_{n+1,1}$ [1].

---

[1] Il lettore desideroso di approfondire l'argomento consulti il Cap. XV del citato volume di G. N. Watson: *A Treatise of Theory of Bessel Functions.* (Cambridge, 1922), pp. 477-521.

§ 4. - Il teorema di oscillazione.

1. Il teorema di oscillazione. - 2. Il teorema di oscillazione per l'equazione $(\theta y')' + [\lambda A - B]\, y = 0$.

1. - *a*) Consideriamo l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x, \lambda)\, y = 0 \tag{1}$$

i cui coefficienti dipendano dalla variabile x e da un parametro λ, e *supponiamo che per ogni valore di λ appartenente ad un dato intervallo aperto* (A_1, A_2) [eventualmente infinito in una o due direzioni] $\theta(x, \lambda)$, $\frac{\partial}{\partial x}\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ *siano funzioni continue di x in (a, b), e inoltre si abbia $\theta(x, \lambda) > 0$ per $a \leq x \leq b$, e λ in (A_1, A_2). Per ogni λ indichiamo con* $\max \theta$ [$\max Q$] *il massimo di $\theta(x, \lambda)$ $[Q(x, \lambda)]$ in (a, b) e sia*

$$\lim_{\lambda \to A_2} \frac{-\max Q}{\max \theta} = +\infty \qquad [\max \theta > 0]; \quad (^1) \tag{2}$$

vogliamo allora dimostrare che fissato un numero intero positivo ν è possibile determinare un valore λ_ν di λ tale che per esso e per tutti i valori di λ compresi tra λ_ν e A_2, l'integrale generale $y(x, \lambda)$ della (1) ***ha in (a, b) un numero di zeri non inferiori a ν.***

Dalla (2) segue che esiste un λ' tale che per tutti i valori di λ compresi tra λ' e A_2 risulta $\max\limits_{a \leq x \leq b} Q(x, \lambda) < 0$; noi considereremo soltanto tali valori di λ.

Posto $\max\limits_{a \leq x \leq b} \theta(x, \lambda) = M(\lambda)$, $-\max\limits_{a \leq x \leq b} Q(x, \lambda) = m(\lambda)$ confrontiamo l'equazione (1) con

$$\frac{d}{dx}\left[M(\lambda)\frac{du}{dx}\right] + m(\lambda) u = 0$$

che può scriversi

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{m(\lambda)}{M(\lambda)} u = 0.$$

---

(1) Non escludiamo che sia $A_1 > A_2$.

Abbiamo visto nel § 2, n. 3, che un qualsiasi integrale di questa equazione ha in (a, b) non meno di

$$\left[\frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{m(\lambda)}{M(\lambda)}}\right]$$

zeri; ma fissato ν, a motivo della (2), è possibile determinare un λ_ν tale che per tutti i valori di λ compresi tra λ_ν e Λ_2 sia

$$\left[\frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{m(\lambda)}{M(\lambda)}}\right] \geq \nu + 1$$

e allora per il teorema di confronto di STURM [§ 2, n. 6, b)] per i considerati valori di λ l'integrale generale della (1) ha in (a, b) non meno di ν zeri, subirà cioè almeno ν *cangiamenti di segno*.

Segue che quando λ varia in (Λ_1, Λ_2) l'integrale $y(x, \lambda)$ subisce in (a, b) delle oscillazioni il cui numero cresce oltre ogni limite; per questa ragione il teorema dimostrato chiamasi *teorema di oscillazione*.

b) Se poi qualunque sia l'intervallo (a_1, b_1) di (a, b) si ha

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_2} \frac{-\max\limits_{a_1 \leq x \leq b_1} Q(x, \lambda)}{\max\limits_{a_1 \leq x \leq b_1} \theta(x, \lambda)} = +\infty$$

esiste allora un λ_{a_1, b_1} tale che per tutti i valori λ compresi tra λ_{a_1, b_1} e Λ_2 risulta

$$\left[\frac{b_1-a_1}{\pi}\sqrt{\frac{m_1(\lambda)}{M_1(\lambda)}}\right] \geq 2$$

dove

$$m_1(\lambda) = -\max_{a_1 \leq x \leq b_1} Q(x, \lambda), \quad M_1(\lambda) = \max_{a_1 \leq x \leq b_1} \theta(x, \lambda),$$

allora per questi valori di λ l'integrale generale $y(x, \lambda)$ della (1) avrà in (a_1, b_1) almeno un punto di zero, e perciò quando $\lambda \to \Lambda_2$ non solo i punti di zero dell'integrale $y(x, \lambda)$ crescono oltre ogni limite, ma si distribuiscono uniformemente in (a, b).

2. - Supponiamo che $\theta(x, \lambda)$ non dipenda da λ e $Q(x, \lambda)$ ne dipenda linearmente, si abbia cioè l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[\theta \frac{dy}{dx}\right] + \left[\lambda A(x) - B(x)\right] y = 0,$$

dove $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $A(x)$, $B(x)$ sono continue in (a, b), $\theta(x) > 0$ e $A(x)$ non è identicamente nulla.

In un intervallo (α, β) di (a, b), $A(x)$ si mantenga positiva [negativa], e siano r ed s i minimi rispettivi di $A(x)$ e $-B(x)$ in (α, β) [r il massimo di $A(x)$ e s il minimo di $-B(x)$ in (α, β)].

Per valori positivi [negativi] di λ si ha in (α, β)

$$\lambda A(x) - B(x) \geq \lambda r + s\,; \qquad -\max\,[-\lambda A(x) + B(x)] \geq \lambda r + s$$

e dal teorema di oscillazione segue: *se la funzione $A(x)$ prende in (a, b) valori positivi* [negativi] *facendo divergere all'∞ il parametro λ per valori positivi* [negativi] *l'integrale generale $y(x, \lambda)$ della* (5) *acquisterà in (a, b) punti di zero il cui numero cresce all'infinito, mentre l'intervallo tra due successivi punti di zero di $y(x, \lambda)$ contenuti in un tratto in cui $A(x)$ si mantiene positiva* [negativa] *tende allo zero.*

§ 5. - Integrali nulli in due punti assegnati. Autovalori e autofunzioni.

1. Posizione del problema. - 2. Decomposizione di un operatore del secondo ordine nel prodotto di due operatori del primo ordine. - 3. Espressione degli integrali in intervalli contenenti punti coniugati. - 4. Teorema di esistenza di autovalori. Dimostrazione di G. Mammana. - 5. Autovalori per l'equazione $(\theta y')' + (\lambda A - B)y = 0$.

1. - Sia data l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x, \lambda)\, y = 0, \tag{1}$$

dove i coefficienti $\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ soddisfano le condizioni dichiarate nel paragrafo precedente. Dal teorema di oscillazione deriva che l'integrale $y(x, \lambda)$ della (1) che soddisfa la condizione iniziale $y(a, \lambda) = 0$ [determinato a meno di una costante moltiplicativa] al tendere di λ a Λ_2 finisce con l'acquistare in (a, b) un numero di zeri superiore a qualunque numero prefissato, ma abbiamo già detto che si presenta la questione di trovare se esistono dei valori di λ ai quali corrispondono integrali della (1) che si annullano in b, cioè integrali della (1) [non identicamente nulli] tali che

$$y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0. \tag{2}$$

Tali valori di λ, supposti esistenti, prendono il nome di *valori eccezionali del parametro, valori caratteristici del parametro*, e secondo l'uso ormai prevalente *autovalori*, e i corrispondenti integrali funzioni eccezionali, funzioni caratteristiche, *autofunzioni* ([1]).

Quando nel successivo § 6 tratteremo i sistemi di STURM, dimostreremo l'esistenza di autovalori per l'equazione (1) sotto condizioni che comprendono le (2) come caso particolare, ma non è privo di interesse di esaminare il sistema (1), (2) con un procedimento dimostrativo di G. MAMMANA che ha il pregio di mettere in evidenza la forma esplicita degli integrali della (1) ([2]).

2. - *a*) Al simbolo

$$O^{(n)}=p\left(\frac{d}{dx}\right)=\left[\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\dots+p_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+p_n(x)\right]$$

ove supponiamo le $p_i(x)$ continue in (a, b) attribuiremo il significato di un operatore che applicato ad una funzione $f(x)$, n volte derivabile, dà come risultato la funzione

$$L(f)=\frac{d^nf}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}+\dots+p_{n-1}(x)\frac{df}{dx}+p_n(x)f,$$

si porrà cioè per definizione $O^{(n)}f=L(f)$.

L'operatore $O^{(n)}$ si dirà un *operatore differenziale di ordine n*; un operatore del primo ordine ha quindi la forma

$$O^{(1)}=\left(\frac{d}{dx}+p_1\right).$$

Gli operatori del primo ordine e in generale tutti gli operatori sono suscettibili di composizione. Diremo *prodotto di due operatori* $O_1^{(1)}$, $O_2^{(1)}$ e lo indicheremo con il simbolo $O_1^{(1)}O_2^{(1)}$ l'operatore

([1]) Le parole *autovalori, autofunzioni* (in tedesco *eigenwerte, eigenfunktionen*) furono usate la prima volta da F. BOUNITZKY nella memoria: *Sur la fonction de Green des équations différentielles linéaires ordinaires.* Journ. de Math. pur. et appl. (6), 5 (1909), pp. 65-125, p. 84.

([2]) G. MAMMANA: *Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari.* Math. Zeitschr. 25 (1926), pp. 734-748. Cfr. anche G. MAMMANA: *Sistemi Differenziali. Autovalori e Autofunzioni.* (Napoli, 1938, pp. 1-207), pp. 190 e segg.

ottenuto operando prima con $O_2^{(1)}$ e successivamento con $O_1^{(1)}$. Supposto $O_1^{(1)} \equiv \left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)$, $O_2^{(1)} = \left(\frac{d}{dx} + \beta\right)$ si avrà

$$O_1^{(1)} O_2^{(1)} f = O_1^{(1)} [O_2^{(1)} f] = O_1^{(1)} \left[\frac{df}{dx} + \beta f\right] = \frac{d^2 f}{dx^2} + \beta \frac{df}{dx} + \beta' f + \alpha \frac{df}{dx} + \alpha\beta f$$

quindi

$$O_1^{(1)} O_2^{(1)} = \left[\frac{d^2}{dx^2} + \{\alpha + \beta\} \frac{d}{dx} + \{\beta' + \alpha\beta\}\right]. \tag{3}$$

Si ha da qui che due operatori sono permutabili quando sia $\alpha' = \beta'$ (¹).

b) Proponiamoci ora il problema: (²) *dato l'operatore differenziale del secondo*

$$O^{(2)} = \left[\frac{d^2}{dx^2} + p \frac{d}{dx} + q\right], \tag{4}$$

con p e q funzioni continue di x in (a, b), decomporlo nel prodotto di due operatori del primo ordine, determinare cioè due operatori del primo ordine

$$O_1^{(1)} = \left[\frac{d}{dx} + \alpha\right], \qquad O_2^{(1)} = \left[\frac{d}{dx} + \beta\right]$$

tali che

$$O^{(2)}(z) = O_1^{(1)}[O_2^{(1)}(z)]. \tag{5}$$

Confrontando le (3) e (5) il problema è ricondotto a determinare, se è possibile, due funzioni α e β tali che

$$\alpha + \beta = p, \qquad \beta' + \alpha\beta = q. \tag{6}$$

Dimostriamo che *condizione necessaria e sufficiente perchè sia possibile la decomposizione richiesta con fattori simbolici reali è che esista un integrale dell'equazione*

$$z'' + pz' + q = 0 \tag{7}$$

diverso da zero in tutto (a, b), o ciò che è lo stesso l'inter-

(¹) Sulle proprietà degli operatori differenziali torneremo diffusamente nel Cap. X.

(²) Cfr. ad es. A. Cayley: *On linear differential equations (The Theory of Decomposition)*, Quarterly Journ. of Math. 21 (1886), pp. 331-335.

vallo (a, b) *sia privo di coppie di punti coniugati rispetto l'equazione* (7) [§ 2; n. 7, c)].

La condizione *è necessaria.* Esistano invero due funzioni reali α e β che soddisfino le (6); la (7) può allora scriversi

$$\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}+\beta\right)z = \left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)\left(\frac{dz}{dx}+\beta z\right) =$$
$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}+\beta z\right)+\alpha\left(\frac{dz}{dx}+\beta z\right) = 0\,;$$

si ha da questa

$$\frac{dz}{dx}+\beta z = e^{-\int \alpha dx}$$

quindi

$$z = ce^{-\int_a^x \beta dx}\left|\int_a^x e^{\int_a^x (\beta-\alpha) dx} dx + c_1\right|$$

con c e c_1 costanti arbitrarie; un tale integrale in (a, b) può annullarsi al più una volta soltanto, quindi (a, b) è privo di coppie di punti coniugati.

La condizione *è sufficiente.* Osserviamo per questo preliminarmente che il sistema (6) equivale a

$$(8) \qquad \alpha = p - \beta, \qquad \beta' = \beta^2 - p\beta + q,$$

e che una coppia di funzioni che soddisfa quest'ultimo sistema può costruirsi nel seguente modo. Siccome l'intervallo (a, b) è privo di coppie di punti coniugati esiste un integrale z_1 della (7) che in tutto (a, b) si mantiene diverso da zero [§ 2, n. 7, c)]; la funzione $\beta = -z'/z$ [Cap. II, § 3, n. 2] soddisfa la seconda delle (8) e si avrà poi $\alpha = p + z_1'/z_1$.

c) Dimostriamo ancora il seguente teorema generale: *dato l'operatore*

$$O^{(2)}(z) = \left|\frac{d^2}{dx^2}+p\,\frac{d}{dx}+q\right| z,$$

con p *e* q *funzioni continue della* x *in* (a, b), *è sempre possibile, e in infiniti modi, decomporre* $O^{(2)}$ *nel prodotto di due fattori simbolici del primo ordine, in generale complessi.*

Perchè si abbia infatti $O^{(2)} = O_1^{(1)} O_2^{(1)}$ con $O_1^{(1)} \equiv \left[\frac{d}{dx} + \alpha\right]$, $O_2^{(1)} \equiv \left[\frac{d}{dx} + \beta\right]$ è necessario e basta che le funzioni α e β soddisfino il sistema (8).

Per determinare β basterà scegliere due integrali (reali) indipendenti della (7) z_1 e z_2, e fare

$$\beta = -(z_1' + iz_2')/(z_1 + iz_2), \qquad (i \text{ unità immaginaria}) \tag{8'}$$

la β così definita si mantiene finita in tutto (a, b) perchè le due fuzioni z_1 e z_2 non si annullano mai simultaneamente [§ 2, n. 2, b)].

3. - Vogliamo determinare la *forma dell'integrale dell'equazione*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{9}$$

con $p(x)$, $q(x)$ funzioni continue di x in (a, b), nell'ipotesi che (a, b) contenga almeno una coppia di punti coniugati dell'equazione stessa.

La (9) è equivalente all'equazione

$$\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) y = 0,$$

ove, per le cose dette, α e β sono quantità *non reali* [n. 2, b)] legate dalle relazioni

$$\alpha + \beta = p, \qquad \beta' + \alpha\beta = q. \tag{10}$$

Siano z_1 e z_2 due integrali indipendenti della (9) in (a, b); dalla (8') avremo

$$\beta = u + ih, \qquad [u(x),\ h(x) \text{ reali in } (a, b)]$$

quindi

$$\alpha = p - u - ih = \nu - ih, \qquad [\nu = p - u]$$

e la seconda delle (10) diventa

$$\beta' + \alpha\beta = u' + ih' + u\nu + h^2 + i(h\nu - hu) = q$$

perciò $h' + h(\nu - u) = 0$, da cui

$$h = ce^{-\int_a^x (\nu - u)dx}, \qquad (c = \text{cost.}),$$

ovvero posto

$$(11)\qquad \varrho(x)=e^{-\int_a^x (v-u)dx}>0, \qquad [h=c\varrho(x)]$$

si ha

$$(12)\qquad \alpha=v-ic\varrho(x), \qquad \beta=u+ic\varrho(x)$$

e si osserverà che essendo h non identicamente nulla la costante c è diversa da zero.

Un integrale dell'equazione (9) si ottiene risolvendo l'equazione lineare

$$\frac{dy}{dx}+\beta y=0,$$

esso ha l'espressione

$$y=le^{-\int_a^x \beta dx}=le^{\int_a^x u dx}e^{ic\int_a^x \varrho(x)dx}$$

con l costante reale arbitraria, ovvero posto

$$(13)\qquad -\int_a^x u\, dx=\eta(x), \qquad \int_a^x \varrho\, dx=\xi(x)$$

abbiamo

$$y=le^{\eta(x)}[\cos c\xi(x)+i \operatorname{sen} c\xi(x)];$$

ne viene che $e^{\eta(x)}\cos c\xi(x)$, $e^{\eta(x)}\operatorname{sen} c\xi(x)$ sono due integrali indipendenti dell'equazione (9) che ha l'integrale generale

$$(14)\qquad y=e^{\eta(x)}[c_1\cos c\xi(x)+c_2 \operatorname{sen} c\xi(x)]$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

Essendo $c\neq 0$, se indichiamo con γ un angolo per il quale si abbia

$$\cos(-c\gamma)=c_2/\sqrt{c_1^2+c_2^2}, \qquad \operatorname{sen}(-c\gamma)=c_1/\sqrt{c_1^2+c_2^2}$$

e poniamo $k=(c_1^2+c_2^2)^{1/2}$, k *e* γ *risultano costanti arbitrarie* (come c_1 e c_2) e la (14) diventa

$$(15)\qquad \boxed{y=ke^{\eta(x)}\operatorname{sen} c[\xi(x)-\gamma]},$$

nella quale, salvo a mutare il segno di k, possiamo supporre $c>0$.

La (15) dà la forma dell'integrale generale della (9) nell'ipotesi che in (a, b) vi siano coppie di punti coniugati, forma che pone in perfetta analogia l'equazione (9) e l'equazione $y'' + c^2 y = 0$ il cui integrale generale ha la forma

$$y = k \operatorname{sen} c(x - \gamma).$$

Occorre notare che per le (13) e (11) è $\xi'(x) = \varrho(x) > 0$ e perciò *la funzione* $\xi(x)$ *è crescente in* (a, b) [e soddisfa la condizione $\xi(a) = 0$], *l'argomento* $c[\xi(x) - \gamma]$ *nella* (15) *è quindi funzione crescente di* x *in* (a, b) (1).

4. - *a*) La formula (15) permette ora di rispondere alla questione posta nel n. 1.

Sia data dunque l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x, \lambda) y = 0 \tag{16}$$

e per i coefficienti $\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ valgano le ipotesi:

i) *le funzioni* $\theta(x, \lambda)$, $\frac{\partial}{\partial x}\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ *siano funzioni continue di* x *variabile in* (a, b) *e* λ *variabile nell'intervallo aperto* (Λ_1, Λ_2), *e inoltre si abbia* $\theta(x, \lambda) > 0$ *per* $a \leq x \leq b$ *e* λ *in* (Λ_1, Λ_2) (2);

ii)

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_2} \frac{-\max\limits_{a \leq x \leq b} Q(x, \lambda)}{\max\limits_{a \leq x \leq b} \theta(x, \lambda)} = +\infty;$$

in queste ipotesi esistono infiniti valori del parametro λ [autovalori] *ai quali corrispondono integrali* $y(x, \lambda)$ *della* (16) *che soddisfano le condizioni*

$$y(a, \lambda) = 0, \qquad y(b, \lambda) = 0; \tag{17}$$

(1) Per un'espressione dell'integrale dell'equazione (9) nella forma (15) cfr. anche P. Bohl: *Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie.* Journ. für die reine und ang. Math., 131 (1906), (pp. 268-321), p. 302.

(2) Non escludiamo, come abbiamo già dichiarato nel § 4, n. 1 che sia $\Lambda_1 > \Lambda_2$ e che l'intervallo (Λ_1, Λ_2) sia infinito in una o due direzioni.

si ha inoltre che il numero di zeri dell'integrale $y(x, \lambda)$ corrispondente all'autovalore λ tende all'infinito quando $\lambda \to \Lambda_2$.

Dalle nostre ipotesi, in virtù del teorema di oscillazione [§ 4, n. 1] segue che esiste un valore $\bar{\lambda}$ di λ tale che per tutti i valori di λ compresi tra $\bar{\lambda}$ e Λ_2 esistono in (a, b) coppie di punti coniugati rispetto la (16), e il suo integrale ha perciò l'espressione

$$y(x, \lambda) = k e^{\eta(x, \lambda)} \operatorname{sen} c(\lambda) [\xi(x, \lambda) - \gamma] ; \tag{18}$$

e l'integrale della (16) nullo in a ha l'espressione $[\xi(a, \lambda) = 0]$

$$y(x, \lambda) = k e^{\eta(x, \lambda)} \operatorname{sen} c(\lambda) \xi(x, \lambda), \qquad [y(a, \lambda) = 0]$$

ed esso assume in b il valore

$$y(b, \lambda) = k e^{\eta(b, \lambda)} \operatorname{sen} c(\lambda) \xi(b, \lambda).$$

Per i risultati del Cap. I, § 5, n. 1 gli integrali (indipendenti) della (16), $z_1(x, \lambda)$, $z_2(x, \lambda)$ sono funzioni continue di λ, ma è $u + ih = -(z_1' + iz_2') / (z_1 + iz_2)$, quindi u ed h e perciò $v = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - u$ sono funzioni continue di λ, e poichè si ha $c = h e^{\int^x (v - u) dx}$ ne viene che anche c è funzione continua di λ. Se infine osserviamo le (11) e (13), abbiamo che nella (18), $\eta(x, \lambda)$, $\xi(x, \lambda)$, $c(\lambda)$ sono funzioni continue di λ in (Λ_1, Λ_2).

Il numero degli zeri dell'integrale $y(x, \lambda)$ quando $\lambda \to \Lambda_2$ cresce oltre ogni limite, ne segue che essendo la funzione $c(\lambda)\xi(x, \lambda)$ crescente quando x varia in (a, b), è

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_2} c(\lambda) \xi(b, \lambda) = +\infty ; \tag{19}$$

ma $c(\lambda)\xi(b, \lambda)$ è una funzione continua di λ in (Λ_1, Λ_2), e ne viene allora che quando $\lambda \to \Lambda_2$, $c(\lambda)\xi(b, \lambda)$ prende infinite volte valori della forma $l\pi$ con l intero, e per tali valori di λ si avrà

$$y(b, \lambda) = k e^{\eta(b, \lambda)} \operatorname{sen} l\pi = 0,$$

e abbiamo così dimostrato l'esistenza di infiniti autovalori del parametro λ ai quali corrispondono integrali della (16) che soddisfano le (17).

b) Proveremo nel § 6, ampliando leggermente le ipotesi, che gli autovalori formano una successione avente A_2 come unico punto di accumulazione.

5. - *a*) Consideriamo il caso particolare dell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[\theta \frac{dy}{dx}\right]+[\lambda A(x)-B(x)]\,y(x)=0, \tag{20}$$

con $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $A(x)$, $B(x)$ continue in (a, b), $\theta(x)>0$, e $A(x)$ non identicamente nulla. Tenuto conto del teorema dimostrato nel § 4, n. 2 abbiamo che *se $A(x)$ prende in (a, b) valori positivi* [negativi], *facendo divergere all'∞ il parametro λ per valori positivi* [negativi] *esistono infiniti autovalori del parametro λ ai quali corrispondono integrali dell'equazione* (20), *nulli nei punti a e b, per i quali si ha quindi*

$$y(a, \lambda)=y(b, \lambda)=0.$$

b) Le più antiche dimostrazioni di questo teorema ponevano le condizioni restrittive $A(x)$ di segno costante in (a, b) e $B(x)$ qualunque, oppure $A(x)$ funzione continua e $B(x)>0$ in (a, b); il procedimento di G. Mammana ha consentito invece di provare il teorema in tutta la sua generalità. Il lettore troverà alcuni perfezionamenti di questo teorema nel § 6, n. 6.

§ 6. - I sistemi di Sturm. Autovalori. Autofunzioni.

1. Il problema della conduzione del calore in un filo sottile e i sistemi di Sturm. - 2. Complementi al teorema di confronto. - 3. Complementi al teorema di oscillazione. - 4. Sistemi di Sturm. Esistenza di autovalori. Teorema di Bôcher. - 5. Sistemi di Sturm. Esistenza di autofunzioni con un numero di zeri prefissato. Teorema di Bôcher. - 6. Sistemi di Sturm-Liouville. Esistenza di autovalori. - 7. Ortogonalità delle autofunzioni di un sistema di Sturm-Liouville. - 8. Condizioni sufficienti per la realtà di tutti gli autovalori di un sistema di Sturm-Liouville.

1. - *a*) Si abbia un filo rettilineo di sezione normale costante, infinitamente piccola, posto in un mezzo alla temperatura di 0 gradi. Sia $\theta(x)$ la conducibilità interna, $g(x)$ il calore specifico, $l(x)$ il potere emissivo dei punti della sezione del filo di ascissa x, ed indichiamo rispettivamente con σ ed ε l'area della sezione e la lunghezza del contorno della sezione stessa.

La funzione $V(x, t)$ esprima la temperatura del filo nei punti della sezione di ascissa x al tempo t, e proponiamoci di determinare il legame tra $\theta(x)$, $g(x)$, $l(x)$, $V(x, t)$.

Dalla fisica sperimentale è noto che prese due sezioni σ_1, σ_2 del filo alla distanza d e alle temperature rispettive V_1, V_2, $V_2 > V_1$, se d è così piccolo da ritenere la conducibilità del tratto compreso tra σ_1 e σ_2 costante, la quantità di calore che passa per unità d'area e per unità di tempo dalla sezione alla temperatura V_2 a quella alla temperatura V_1 è data da $\theta(x)(V_2 - V_1)/d$; si ha da qui che la quantità di calore che passa dalla sezione del filo di ascissa x, in un'unità di tempo, è data da $-\theta(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma$, di guisa che la quantità di calore che passa nell'unità di tempo attraverso le due sezioni di ascissa $x + dx/2$, $x - dx/2$ è data rispettivamente da

$$(1) \qquad -\theta\left(x+\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial V\left(x+\frac{dx}{2}, t\right)}{\partial x}\sigma =$$
$$= -\theta(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma - \frac{1}{2}\theta'(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma dx - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\theta(x)\sigma dx - \dots$$

$$(2) \qquad -\theta\left(x-\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial V\left(x-\frac{dx}{2}, t\right)}{\partial x}\sigma =$$
$$= -\theta(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma + \frac{1}{2}\theta'(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\theta(x)\sigma dx + \dots$$

e perciò la quantità di calore acquistata dall'elemento dx nell'unità di tempo, ove manchi l'emissione laterale è espressa dalla differenza delle espressioni (2), (1), cioè, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto a dx, da

$$\theta'(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma dx + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\theta(x)\sigma dx = \frac{\partial}{\partial x}\left|\theta\frac{\partial V}{\partial x}\right|\sigma dx.$$

Se teniamo conto che l'elemento considerato irraggia nell'unità di tempo una quantità di calore data da $l(x)V\varepsilon dx$ abbiamo che la quantità di calore acquistata dall'elemento dx nell'unità di tempo è espressa da

$$\frac{\partial}{\partial x}\left|\theta\frac{\partial V}{\partial x}\right|\sigma dx - l(x)V\varepsilon dx.$$

Se $\varrho(x)$ indica la densità dell'elemento dx con centro nel punto di ascissa x, la massa dell'elemento è $\varrho\sigma dx$, a poichè $g(x)$ è il calore specifico dell'elemento la quantità di calore da esso posseduto al tempo t è $\varrho(x)g(x)V(x, t)\sigma dx$, la sua variazione nell'unità di tempo è espressa da $\varrho(x)g(x)\frac{\partial V}{\partial t}\sigma dx$, avremo quindi l'*equazione del movimento del calore nel filo*:

$$(3) \qquad \varrho(x)g(x)\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\theta(x)\frac{\partial V}{\partial x}\right] - \frac{\varepsilon}{\sigma}\, l(x)V \quad (^1).$$

Indichiamo con σ_1 e σ_2 le sezioni estreme del filo di ascissa rispettiva a e b, e consideriamo il fenomeno dal momento in cui può ritenersi nulla la variazione della temperatura in ciascuno dei due estremi. Ciò porta che se indichiamo con l_1 e l_2 il potere emissivo delle sezioni σ_1 e σ_2 dovrà aversi

$$-\theta(a)V_x(a, t)\sigma_1 + \sigma_1 l_1 V(a, t) = 0, \qquad \theta(b)V_x(b, t)\sigma_2 + \sigma_2 l_2 V(b, t) = 0$$

ovvero

$$(4) \quad \theta(a)V_x(a, t) - l_1 V(a, t) = 0, \qquad \theta(b)V_x(b, t) + l_2 V(b, t) = 0.$$

Supponiamo ora di conoscere la *distribuzione iniziale* della temperatura al tempo $t=0$; è nota quindi la funzione $V(x, t)$ per $t=0$, abbiamo cioè

$$(5) \qquad V(x, 0) = f(x)$$

con $f(x)$ *funzione nota* in (a, b), e la determinazione analitica della funzione $V(x, t)$ è ricondotta quindi a *trovare una soluzione della equazione* (3) *la quale nel campo* Δ *definito dalle condizioni*

$$a \leq x \leq b, \qquad t \geq 0$$

soddisfi le (4) *e* (5).

Seguendo il procedimento classico della fisica matematica proponiamoci di costruire una *soluzione elementare della* (3) cioè una soluzione della forma

$$cU(x)e^{-\lambda t},$$

---

(1) S. D. Poisson: *Théorie de la Chaleur.* (Paris, 1835), pp. 233 e segg.

con c e λ costanti, la quale verifichi le condizioni ai limiti (4); dovrà aversi

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dU}{dx}\right]+\left[\lambda\varrho(x)g(x)-\frac{\varepsilon}{n}l(x)\right]U=0, \tag{3'}$$

$$\theta(a)U'(a)-l_1U(a)=0, \qquad \theta(b)U'(b)+l_2U(b)=0. \tag{4'}$$

Supponiamo di aver dimostrato l'esistenza di una successione di valori positivi λ_n di λ cui corrispondono delle funzioni $U_n(x)$ che soddisfano le (3') e (4') (¹); a motivo della linearità della (3) anche $\sum c_n U_n(x)e^{-\lambda_n t}$, qualunque sia la successione $\{c_n\}$, è una soluzione della (3) e viene il problema: *trovare se è possibile una successione $\{c_n\}$ tale che*

$$V(x,\,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nU_n(x)e^{-\lambda_n t}. \tag{6}$$

A motivo della (5) questa rappresentazione esige che per $t=0$ si abbia $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nU_n(x)$, e noi vedremo nel § 8, n. 4, *b*) che supposta l'esistenza di $f''(x)$, le c_n sono univocamente determinate, così che la questione si riduce allora a verificare se la $V(x,t)$ definita dalla (6) soddisfa tutte le condizioni del problema.

b) Lo studio del sistema (3'), (4') rientra come caso particolare nel seguente: *Data l'equazione*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x,\,\lambda)\frac{dy}{dx}\right]-Q(x,\,\lambda)y=0 \tag{7}$$

determinare quei valori del parametro λ ai quali corrispondono soluzioni non identicamente nulle dell'equazione che soddisfino le condizioni ai limiti

$$\alpha_1 y(a)-\alpha y'(a)=0, \qquad \beta_1 y(b)+\beta y'(b)=0 \tag{7'}$$

con α, α_1, β, β_1 indipendenti da x, $\alpha^2+\alpha'^2\neq 0$, $\beta^2+\beta'^2\neq 0$.

Per il caso $\alpha=\beta=0$ noi possediamo i resultati del § 5, studieremo ora in generale il sistema formato dalle (7) e (7') o come si dice i *sistemi differenziali di Sturm*, o semplicemente i *sistemi di Sturm*. Ci sarà utile per questo scopo premettere alcuni complementi al teorema di confronto e al teorema di oscillazione.

(¹) V. § 6, n. 6, *b*).

2. - *a) Si abbiano le due equazioni*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x)y = 0, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\theta_1(x)\frac{dz}{dx}\right] - Q_1(x)z = 0, \tag{9}$$

ove supponiamo $\theta'(x)$, $\theta_1'(x)$, $Q(x)$, $Q_1(x)$ *funzioni continue di* x, $\theta(x) > 0$, $\theta_1(x) > 0$ *per* $a \leq x \leq b$,

$$\theta(x) \geq \theta_1(x), \qquad Q(x) \geq Q_1(x), \tag{10}$$

e in nessun tratto di (a, b) *si abbia simultaneamente*

$$\theta(x) = \theta_1(x), \qquad Q(x) = Q_1(x)$$

nè

$$Q(x) = Q_1(x) = 0.$$

Siano $y(x)$, $z(x)$ *rispettivamente due soluzioni delle* (8) *e* (9) *definite per* $a \leq x \leq b$ *e supponiamo anche che se* $y(a) \neq 0$ *sia*

$$\frac{\theta(a)y'(a)}{y(a)} \geq \frac{\theta_1(a)z'(a)}{z(a)} \tag{11}$$

[e perciò $z(a) \neq 0$], *mentre se* $y(a) = 0$ *non imponiamo alcuna condizione per* $z(a)$.

Vogliamo allora dimostrare che in queste ipotesi se $y(x)$ *ha* m *zeri nell'intervallo* $a < x \leq b$, $z(x)$ *ha almeno* m *zeri nello stesso intervallo* $a < x \leq b$, *di cui uno almeno minore del primo zero di* $y(x)$ (¹).

Siano $x_1, x_2, ..., x_m$ gli m zeri di $y(x)$ disposti in ordine crescente

$$a < x_1 < x_2 < .... < x_m \leq b;$$

dal teorema di STURM [§ 2, n. 6] segue che $z(x)$ ha internamente a ciascuno degli $m-1$ intervalli (x_1, x_2), (x_2, x_3),...., (x_{m-1}, x_m) almeno uno zero e basterà allora provare che $z(x)$ ha ancora uno zero internamente ad (a, x_1). Se è $y(a) = 0$ ciò consegue dal teorema di STURM; non sia allora $y(a) = 0$ e valga perciò la (11).

(¹) Dicendo che uno zero di $z(x)$ è minore di uno zero di $y(x)$ intendiamo che l'ascissa del primo zero è minore dell'ascissa del secondo.

Se noi supponiamo $z(x) \neq 0$ per $a < x < x_1$, integrando l'identità (I) del § 2, n. 5, tra a ed x_1 abbiamo

$$-y^2(a)\left[\theta(a)\frac{y'(a)}{y(a)} - \theta_1(a)\frac{z'(a)}{z(a)}\right] =$$
$$= \int_a^{x_1}(Q - Q_1)y^2 dx + \int_a^{x_1}(\theta - \theta_1)y'^2 dx + \int_a^{x_1}\theta_1\left(y' - \frac{y}{z}z'\right)^2 dx,$$

ma questa non può sussistere essendo il primo membro negativo o nullo e il secondo membro positivo. Dalle cose dette segue quindi che $z(x)$ ha almeno uno zero interno ad (a, x_1).

b) I coefficienti delle equazioni (8) e (9), $y(x)$ e $z(x)$, soddisfino le condizioni dichiarate in *a*), e supponiamo che il punto c sia interno ad (a, b) e sia in esso $y(c) \neq 0$, $z(c) = 0$. Il teorema testè dimostrato assicura che $z(x)$ ha nell'intervallo aperto (a, c) un numero di zeri non inferiore a quello di $y(x)$; vogliamo dimostrare che *se* $y(x)$ *e* $z(x)$ *hanno lo stesso numero di zeri in* $a < x < c$, *allora*

(12) $$\frac{\theta(c)y'(c)}{y(c)} > \frac{\theta_1(c)z'(c)}{z(c)}.$$

Se internamente ad (a, c), $y(x)$ e $z(x)$ non hanno zeri, la ricordata formula (I) del § 2, n. 5 integrata tra a e c dà

$$\left[y^2\left(\theta\frac{y'}{y} - \theta_1\frac{z'}{z}\right)\right]_a^c > 0$$

da cui, tenuto conto delle ipotesi, la (12); se $y(x)$ si annulla internamente ad (a, c) ed x_i è il suo zero più prossimo a c, tra x_i e c, per le cose dette in *a*), non sono compresi zeri di $z(x)$, e la (I) ora richiamata integrata tra x_i e c dà

$$\left[y^2\left(\theta\frac{y'}{y} - \theta_1\frac{z'}{z}\right)\right]_{x_i}^c > 0,$$

e poichè l'espressione in parentesi quadra si annulla in x_i segue ancora la (12).

3. - *a*) *Consideriamo l'equazione*

(13) $$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x, \lambda)y = 0$$

dove $\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ *dipendono da un parametro* λ *variabile* *nell'intervallo aperto* (Λ_1, Λ_2) *e sia* $\Lambda_1 < \Lambda_2$ (¹); *supponiamo pure che per ogni valore di* λ *appartenente a* (Λ_1, Λ_2) *le funzioni*

$$\theta(x, \lambda) > 0, \qquad \frac{\partial\theta(x, \lambda)}{\partial x}, \qquad Q(x, \lambda),$$

siano funzioni continue di x *per* $a \leqslant x \leqslant b$ *e* λ *in* (Λ_1, Λ_2), *e che fissato un qualunque* x *di* (a, b) *le funzioni* $\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ *riescano funzioni continue non crescenti di* λ *quando* λ *varia tra* Λ_1 *e* Λ_2, *e* $Q(x, \lambda)$ *non si annulli in nessun tratto di* (a, b).

Per due valori distinti di λ, λ_1 *e* λ_2, *in nessun tratto di* (a, b) *si abbia simultaneamente*

$$\theta(x, \lambda_1) = \theta(x, \lambda_2), \qquad Q(x, \lambda_1) = Q(x, \lambda_2).$$

Siano infine α *e* α_1 *due costanti o anche due funzioni* $\alpha(\lambda)$, $\alpha_1(\lambda)$ *continue del parametro* λ *in* (Λ_1, Λ_2), *le quali non siano simultaneamente nulle, con la condizione che sia sempre* $\alpha(\lambda) = 0$, *oppure sia sempre* $\alpha(\lambda) \neq 0$ *e contemporaneamente* $\theta(a, \lambda)\alpha_1(\lambda)/\alpha(\lambda)$ *funzione non crescente di* λ.

Consideriamo l'integrale $y(x, \lambda)$ della (13) che soddisfa le condizioni iniziali

$$y(a, \lambda) = \alpha(\lambda), \qquad y'(a, \lambda) = \alpha_1(\lambda) \tag{14}$$

(integrale determinato a meno di una costante moltiplicativa).

Le nostre ipotesi permettono di applicare il teorema del n. 2, a) e perciò se per un valore $\bar{\lambda}$ di (Λ_1, Λ_2) l'integrale $y(x, \lambda)$ ha m zeri maggiori di a e $\leqslant b$, variando λ tra $\bar{\lambda}$ e Λ_2 gli zeri di $y(x, \lambda)$ sono almeno m e fino a quando si mantengono in numero di m si muoveranno tutti concordemente da b ad a e restano perciò tutti interni ad (a, b).

b) Ciò premesso supponiamo che per un valore di λ, $\bar{\lambda}$, $y(x, \bar{\lambda})$ abbia m zeri soltanto $x_1, x_2, \ldots, x_m$ maggiori di a e $\leqslant b$, $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqslant b$; vogliamo dimostrare che *se* $x_m = b$, *se cioè* $y(b, \bar{\lambda}) = 0$, *si può trovare un numero positivo* ϱ *tale che per tutti i valori di* λ, $\bar{\lambda} < \lambda \leqslant \bar{\lambda} + \varrho$, *l'integrale* $y(x, \lambda)$ *della* (13) *soddisfacente le* (14), *ha in* (a, b) m *zeri soltanto tutti maggiori di* a, *e perciò* (per a)) *tutti interni ad* (a, b).

(¹) L'intervallo (Λ_1, Λ_2) può essere infinito in una o due direzioni.

Abbiamo infatti

(15) $$\left.\frac{dy(x,\bar\lambda)}{dx}\right|_{x=x_i} = y_x(x_i, \bar\lambda) = 0, \qquad (i=1, 2,\dots, m)$$

e supponendo $y(a, \bar\lambda) = \alpha(\bar\lambda) = 0$ [e perciò $\alpha(\lambda) = 0$ in (Λ_1, Λ_2)] si avrà anche

(16) $$\left.\frac{dy(x,\bar\lambda)}{dx}\right|_{x=a} = y_x(a, \lambda) = 0.$$

Per la continuità di $y_x(x, \lambda)$ rispetto ad x e λ [Cap. I, § 5, n. 1, b)] si possono determinare due numeri positivi ϱ ed ε tali che per

(17) $$0 \leqslant \lambda - \bar\lambda \leqslant \varrho$$

e per x soddisfacente una delle limitazioni

(18) $$0 \leqslant x - a \leqslant \varepsilon; \quad |x - x_i| \leqslant \varepsilon, \ (i = 1, 2,\dots, m-1); \quad 0 \leqslant x_m - x \leqslant \varepsilon,$$

risulti

(19) $$y_x(x, \lambda) \neq 0.$$

L'integrale $y(x, \bar\lambda)$ negli m intervalli

(20) $$(a+\varepsilon, \ x_1-\varepsilon), \quad (x_1+\varepsilon, \ x_2-\varepsilon),\dots, \quad (x_{m-1}+\varepsilon, \ x_m-\varepsilon)$$

non si annulla, e noi indicheremo con d il minimo di $|y(x, \bar\lambda)|$ in questi intervalli.

Sia σ un numero positivo $<d$, e impiccoliamo se occorre ϱ in modo che per $0<\lambda-\bar\lambda\leqslant\varrho$ risulti in tutto (a, b)

$$|y(x, \lambda) - y(x, \bar\lambda)| \leqslant \sigma.$$

Per fissare le ipotesi la $y(x, \bar\lambda)$ sia positiva in $(a+\varepsilon, x_1-\varepsilon)$, essa risulterà negativa in $(x_1+\varepsilon, x_2-\varepsilon)$, positiva in $(x_2+\varepsilon, x_3-\varepsilon)$,...., ne viene che se x appartiene ad $(a+\varepsilon, x_1-\varepsilon)$ si ha

$$y(x, \lambda) > y(x, \bar\lambda) - \sigma > d - \sigma > 0,$$

se x appartiene ad $(x_2+\varepsilon, x_2-\varepsilon)$ si avrà

$$y(x, \lambda) \leqslant y(x, \bar\lambda) + \sigma \leqslant -d + \sigma < 0,$$

perciò $y(x, \lambda)$ per tutti i valori di λ appartenenti a $(\bar\lambda, \bar\lambda+\varrho)$ non si annulla in alcuno degli m intervalli (20) ove prende alternativamente valori positivi e negativi. Ne segue che $y(x, \lambda)$ dovrà annullarsi almeno una volta in ciascuno degli $m-1$ intervalli $(x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)$, $(x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon)$,..., $(x_{m-1}-\varepsilon, x_m+\varepsilon)$ e a motivo della (19) una volta soltanto. D'altra parte avendo supposto $y(a, \lambda)=a(\lambda)=0$ e per la (19) $y_x(x, \lambda)\neq 0$ per $a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$, $y(x, \lambda)$ ha in $(a, a+\varepsilon)$ soltanto uno zero in a. Abbiamo dunque che $y(x, \lambda)$ ammette soltanto $m-1$ zeri maggiori di a e non superiori a $x_m-\varepsilon$, e dovendo ammettere m zeri $>a$, $y(x, \lambda)$ avrà almeno uno zero in $(x_m-\varepsilon, x_m)$ e a motivo della (19) uno soltanto che risulta per le cose dette in a) interno ad $(x_m-\varepsilon, x_m)$; abbiamo così dimostrato che $y(x, \lambda)$ per tutti i valori di λ, $\bar\lambda<\lambda\leqslant\bar\lambda+\varrho$ ha in (a, b) m zeri soltanto tutti maggiori di a, ed essi risultano anche tutti minori di b.

Quando sia poi $a(\bar\lambda)\neq 0$ cioè $y(a, \bar\lambda)\neq 0$ possiamo determinare due numeri positivi ϱ ed ε tali che per

$$0\leqslant\lambda-\bar\lambda\leqslant\varrho, \qquad a\leqslant x\leqslant a+\varepsilon$$

risulti $y(x, \lambda)\neq 0$, e basterà ripetere il precedente ragionamento.

c) Vogliamo ora dimostrare che *se indichiamo con λ^* l'estremo superiore dei valori di λ per i quali l'integrale $y(x, \lambda)$ della* (13) *che soddisfa le condizioni iniziali* (14) *ha m zeri ed m soltanto maggiori di a e minori od uguali a b, ed è $\Lambda_1<\lambda^*<\Lambda_2$, l'integrale $y(x, \lambda^*)$ ha dopo a soltanto $m+1$ zeri di cui uno in b, e gli altri m, tutti interni ad (a, b).*

Osserviamo preliminarmente che $y(x, \lambda^*)$ (che possiede almeno m zeri dopo a) non può avere $m+p$ zeri interni ad (a, b) essendo $p>0$. In questo caso infatti ragionando come in b) si potrebbe trovare un numero positivo ϱ tale che per tutti i valori di λ interni a $(\lambda^*-\varrho, \lambda^*)$ l'integrale $y(x, \lambda)$ avrebbe almeno $m+p$ zeri interni ad (a, b), mentre dovrebbe ammetterne al massimo m. Ne segue che $y(x, \lambda^*)$ ha internamente ad (a, b), $m-1$, oppure m zeri. Se essi sono in numero di $m-1$, l'altro zero (dopo a) deve essere in b, ma allora per le cose dette in b) si può trovare un numero positivo ϱ tale che per tutti i valori di λ^* compresi tra λ^* e $\lambda^*+\varrho$ l'integrale $y(x, \lambda)$ ha soltanto m zeri in (a, b) tutti dopo a, e λ^* non ha la proprietà di estremo dichiarata; $y(x, \lambda^*)$ ha quindi soltanto m zeri interni ad (a, b). Resta da provare che $y(b, \lambda^*) = 0$. Infatti se $y(b, \lambda^*) \neq 0$ ripetendo le solite considerazioni si potrebbe trovare un numero positivo ϱ tale che $y(b, \lambda)$ per $\lambda^* \leq \lambda \leq \lambda^* + \varrho$, dopo a avrebbe in (a, b) soltanto m zeri.

Dalle cose dette segue che *nelle ipotesi dichiarate, quando il parametro λ varia da Λ_1 a Λ_2 se il numero degli zeri dell'integrale $y(x, \lambda)$ aumenta di una unità, il fenomeno si osserverà con la comparsa di uno zero in b.*

d) Le nostre conclusioni restano invariate se agli integrali della (13) anzichè le condizioni iniziali (14) prescriviamo le condizioni

$$(14') \qquad y(a, \lambda) = c\alpha(\lambda) \qquad y'(a, \lambda) = c\alpha_1(\lambda)$$

dove c è una costante arbitraria non nulla; basterà per questo osservare che $cy(x, \lambda)$ è l'integrale della (13) corrispondente alle condizioni iniziali (14') ed esso ha gli stessi punti di zero di $y(x, \lambda)$; ne viene che *la conclusione testè ottenuta in c) sussiste ove ci si riferisca agli integrali dell'equazione* (13) *che soddisfano la condizione iniziale*

$$(14'') \qquad \alpha_1(\lambda) y(a, \lambda) - \alpha(\lambda) y'(a, \lambda) = 0.$$

4. - *Sia data l'equazione*

$$(13) \qquad \frac{d}{dx}\left|\theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right| - Q(x, \lambda)\, y = 0$$

e i coefficienti $\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ soddisfino le condizioni dichiarate nel n.° 3, a). Siano α, α_1, β, β_1 delle costanti con $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$, od anche funzioni continue del parametro λ in (Λ_1, Λ_2) con la condizione che sia sempre $\alpha(\lambda) = 0$, oppure $\alpha(\lambda) \neq 0$ e simultaneamente in (Λ_1, Λ_2) $\theta(a, \lambda)\alpha_1(\lambda)/\alpha(\lambda)$ funzione non crescente di λ; e analogamente sia sempre $\beta(\lambda) = 0$, oppure sempre $\beta(\lambda) \neq 0$ e simultaneamente $\theta(b, \lambda)\beta_1(\lambda)/\beta(\lambda)$ funzione non crescente di λ. Supponiamo infine che si abbia

$$(21) \qquad \lim_{\lambda \to \Lambda_2} - \max_{a \leq x \leq b} Q(x, \lambda) / \max_{a \leq x \leq b} \theta(x, \lambda) = +\infty,$$

e dimostriamo che esistono infiniti valori del parametro λ

(autovalori) *ai quali corrispondono integrali dell'equazione* (13) *che soddisfano le condizioni ai limiti*

$$\alpha_1(\lambda)\, y(a, \lambda) - \alpha(\lambda)\, y'(a, \lambda) = 0, \tag{22}$$

$$\beta_1(\lambda)\, y(b, \lambda) + \beta(\lambda)\, y'(b, \lambda) = 0 \quad (^1). \tag{23}$$

Dalla (21) segue che esiste un λ' tale che per tutti i valori di λ compresi tra λ' e Λ_2 risulta $\max\limits_{a \leq x \leq b} Q(x, \lambda) < 0$, e noi considereremo soltanto tali valori di λ. Quando λ varia tra λ' e Λ_2 gli integrali della (13) per il teorema del § 4, n. 1 finiscono con l'acquistare in (a, b) un numero di zeri superiore a qualsiasi numero ν prefissato, e per il teorema testè dimostrato al n. 3, *d*), se per un valore del parametro λ, che indicheremo con μ_ν, l'integrale della (13) che soddisfa la condizione (22), possiede ν zeri appartenenti all'intervallo aperto (a, b), detto $\mu_{\nu+1}$ l'estremo superiore dei valori di λ ai quali corrispondono integrali del sistema formato dalla (13) e (21) aventi ν zeri nell'intervallo aperto (a, b) per il valore $\mu_{\nu+1}$ il sistema delle (13) e (22) possiede un integrale che ha ν zeri interni ad (a, b) e uno in b. Ragionando su $\mu_{\nu+1}$ come abbiamo fatto su μ_ν e ripetendo il ragionamento ne viene che esiste una successione monotona

$$\mu_{\nu+1}, \quad \mu_{\nu+2}, \ldots, \quad \mu_{\nu+p}, \ldots \tag{24}$$

avente come unico punto di accumulazione Λ_2 (²) la quale gode le seguenti proprietà:

i) L'integrale $y(x, \mu_{\nu+p})$ della (13) che soddisfa la (22) possiede $\nu+p-1$ zeri interni ad (a, b) e uno in b;

ii) Se λ è tale che $\mu_{\nu+p} < \lambda < \mu_{\nu+p+1}$ l'integrale $y(x, \lambda)$ della (13) che soddisfa la (22) possiede soltanto $\nu+p$ zeri tutti interni ad (a, b).

Si ha da qui che se $\beta(\lambda) \equiv 0$ $[\beta_1(\lambda) \equiv 0]$ il teorema è dimostrato, i valori di λ cercati coincidono con la successione (24); supponiamo allora $\beta(\lambda) \not\equiv 0$ in (Λ_1, Λ_2).

(¹) Cfr. *a*) M. Bôcher: *Leçons sur les méthodes de Sturm.* (Paris, 1917, pp. VI+118), p. 63; *b*) E. L. Ince: *Ordinary differential equations.* (London, 1927, pp. VI+558) p. 231.

(²) Cfr. n. 3, *b*).

Osserviamo che quando λ varia tra $\mu_{\nu+p}$ e $\mu_{\nu+p+1}$ per il teorema del n. 2, *b*), $\theta(b, \lambda)\, y'(b, \lambda)/y(b, \lambda)$ è una funzione ***decrescente*** di λ, ma $y(b, \mu_{\nu+p}) = y(b, \mu_{\nu+p+1}) = 0$, $y'(b, \mu_{\nu+p}) \neq 0$, $y'(b, \mu_{\nu+p+1}) \neq 0$, quindi $\theta(b, \lambda)\, y'(b, \lambda)/y(b, \lambda)$ quando λ varia tra $\mu_{\nu+p}$ e $\mu_{\nu+p+1}$

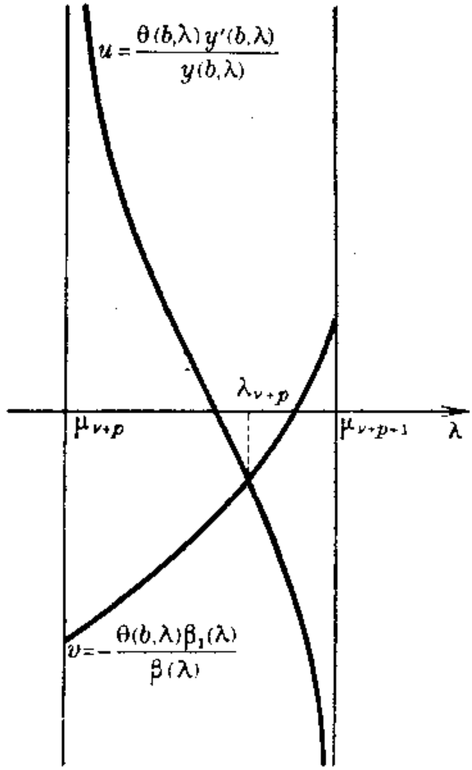


FIG. 8.

decresce da $+\infty$ a $-\infty$; la funzione $-\theta(b, \lambda)\, \beta_1(\lambda)/\beta(\lambda)$ è per ipotesi una funzione non decrescente di λ, vi sarà allora uno e un solo valore $\lambda_{\nu+p}$ di λ interno a $(\mu_{\nu+p}, \mu_{\nu+p+1})$ tale che

$$\frac{\theta(b, \lambda_{\nu+p})\, y'(b, \lambda_{\nu+p})}{y(b, \lambda_{\nu+p})} = -\frac{\theta(b, \lambda_{\nu+p})\, \beta_1(\lambda_{\nu+p})}{\beta(\lambda_{\nu+p})}$$

da cui

$$\beta_1(\lambda_{\nu+p})\, y(b, \lambda_{\nu+p}) + \beta(\lambda_{\nu+p})\, y'(b, \lambda_{\nu+p}) = 0,$$

e per questo valore di λ abbiamo perciò un integrale della (13) che soddisfa alle condizioni ai limiti (22), (23), cioè il *sistema di Sturm* (13), (22), (23).

Abbiamo così dimostrato il teorema di Bôcher; nelle ipotesi dichiarate esistono infiniti autovalori

$$\lambda_{\nu+1}, \quad \lambda_{\nu+2}, \ldots, \quad \lambda_{\nu+p}, \ldots; \qquad \lambda_{\nu+p} < \lambda_{\nu+p+1}, \tag{25}$$

caratterizzati dal fatto che fissato l'intero $\nu+p$ $(p>0)$, ad esso corrisponde uno e un solo valore di λ, $\lambda_{\nu+p}$, per il quale il sistema di Sturm (13), (22), (23) ***ammette un integrale $y(x, \lambda_{\nu+p})$ avente $\nu+p$ zeri e $\nu+p$ soltanto appartenenti all'intervallo aperto (a, b).***

5. - *a*) Dal teorema dimostrato segue l'esistenza degli autovalori $\lambda_{\nu+p}$ con ν abbastanza grande, vogliamo dimostrare che *con le ulteriori ipotesi*

$$\lim_{\lambda \to A_1} \min_{a \leq x \leq b} Q(x, \lambda) = +\infty \tag{26}$$

$$\theta(x, \lambda) \geq \tau > 0 \quad \text{per} \quad a \leq x \leq b, \quad A_1 < \lambda < A_2, \tag{27}$$

per il sistema di STURM (13), (21), (23) *esistono infiniti autovalori*

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \ldots, \quad \lambda_\nu, \ldots; \qquad \lambda_\nu < \lambda_{\nu+1},$$

caratterizzati dal fatto che le corrispondenti autofunzioni $y(x, \lambda_\nu)$ hanno ν zeri, e ν zeri soltanto, interni ad (a, b) [1].

Dalla (26) segue che per λ prossimo a A_1 si ha $\min_{a \leq x \leq b} Q(x, \lambda) > 0$ quindi $Q(x, \lambda) > 0$ in (a, b), e per i risultati del § 2, n. 4, *b*) per tali valori di λ un qualunque integrale della (13) non potrà avere in (a, b) che al più uno zero; nella successione (25) è quindi $\nu = 0$, oppure $\nu = 1$.

Proveremo intanto che è $\nu = 0$.

Consideriamo infatti l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[\left\{\min_{a \leq x \leq b} \theta(x, \lambda)\right\}\frac{du}{dx}\right] - \left[\min_{a \leq x \leq b} Q(x, \lambda)\right] u = 0, \tag{28}$$

---

[1] Cfr. M. BÔCHER: op. cit., pp. 65-66.

o anche posto

$$\min_{a \leq x \leq b} Q(x, \lambda) \,/ \min_{a \leq x \leq b} \theta(x, \lambda) = m^2, \qquad m>0,$$

l'equazione

$$\frac{d^2u}{dx^2} - m^2 u = 0.$$

Abbia μ_ν il significato del n. 4 e sia $\bar{\lambda}$ un valore di λ compreso tra μ_ν e Λ_2, è facile verificare che la funzione (¹)

$$(29) \qquad u(x) = \frac{[\min \theta(x, \lambda)]\, a(\lambda) m + [\min \theta(x, \bar{\lambda})]\, a_1(\bar{\lambda})}{2\, m} e^{m(x-a)}$$

$$+ \frac{[\min \theta(x, \lambda)]\, a(\lambda) m - [\min \theta(x, \bar{\lambda})]\, a_1(\bar{\lambda})}{2\, m} e^{-m(x-a)}$$

soddisfa oltre che la (28) la condizione ai limiti

$$(29') \qquad [\min \theta(x, \bar{\lambda})]\, a_1(\bar{\lambda}) u(a) - [\min \theta(x, \lambda)]\, a(\lambda) u'(a) = 0.$$

La $u(x)$ per $a(\lambda) = 0$ vale, $\min \theta(x, \bar{\lambda}) a_1(\bar{\lambda}) \left[e^{m(x-a)} - e^{-m(x-a)}\right]/2m$, e non si annulla per $a < x \leq b$; così pure se $a(\lambda) \neq 0$ in (a, b) si ha

$$u(x) = \frac{a(\lambda)\, e^{m(x-a)} [\min \theta(x, \lambda)]}{2} \left\{ 1 + e^{-2m(x-a)} + \right.$$

$$\left. + \frac{[\min \theta(x, \bar{\lambda})]\, a_1(\bar{\lambda})}{m\, [\min \theta(x, \lambda)]\, a(\lambda)} \left\{ 1 - e^{-2m(x-a)} \right\} \right\}$$

e siccome per $\lambda \to \Lambda_1$, $m \to +\infty$, ne viene ancora $u(x) \neq 0$ per $a < x \leq b$; noi ci riferiremo ai valori di λ minori di μ_ν per i quali $u(x)$ non ha zeri per $a < x \leq b$.

Essendo

$$\theta(x, \lambda) \geq \min \theta(x, \lambda), \quad Q(x, \lambda) \geq \min Q(x, \lambda)$$

e per $a(\lambda) \neq 0$

$$\frac{\theta(a, \lambda)\, y'(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} = \frac{\theta(a, \lambda)\, a_1(\lambda)}{a(\lambda)} \geq \frac{\theta(a, \bar{\lambda})\, a_1(\bar{\lambda})}{a(\bar{\lambda})} \geq [\min \theta(x, \lambda)] \frac{[\min \theta(x, \bar{\lambda})]\, a_1(\bar{\lambda})}{[\min \theta(x, \lambda)]\, a(\lambda)},$$

$$\frac{\theta(a, \lambda)\, y'(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} \geq \min \theta(x, \lambda) \frac{u'(a)}{u(a)},$$

(¹) Per comodità tipografica, qui e nel seguito, ometteremo talvolta sotto « min »: $a \leq x \leq b$.

ne viene che possiamo confrontare col teorema del n. 2 *a*) l'integrale $y(x, \lambda)$ della (13) che soddisfa la condizione ai limiti (22) con $u(x)$, e dedurre che per i considerati valori di λ, $y(x, \lambda)$ non ha zeri appartenenti ad $a < x \leqslant b$, è quindi $\nu = 0$, e il sistema di STURM formato dalle (13), (22), (23) ammette un autovalore λ_1 cui corrisponde un'autofunzione che ha uno zero, e uno soltanto, interno ad (a, b).

Resta da provare l'esistenza di λ_0.

Siccome $y(x, \lambda)$ e $u(x)$ per λ sufficientemente vicino a Λ_1 non hanno zeri in $a < x \leqslant b$ si ha per il teorema del n. 2, *b*)

$$\frac{\theta(b, \lambda)\, y'(b, \lambda)}{y(b, \lambda)} > \frac{[\min \theta(x, \lambda)]\, u'(b)}{u(b)}, \tag{30}$$

ma dalla (29) abbiamo che

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_1} \frac{\min \theta(x, \lambda)\, u'(b)}{u(b)} = +\infty,$$

e perciò a maggior ragione $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda_1} \theta(b, \lambda)\, y'(b, \lambda)/y(b, \lambda) = +\infty$.

Sia μ_0 l'estremo superiore dei valori di λ cui corrispondono integrali $y(x, \lambda)$ della (13) soddisfacenti la (22) e non aventi alcun zero internamente ad (a, b); ripetendo i ragionamenti del numero precedente si ha che quando λ varia da Λ_1 a μ_0, $\theta(b, \lambda) y'(b, \lambda)/y(b, \lambda)$ decresce da $+\infty$ a $-\infty$ e può subito dedursi l'esistenza dell'autovalore λ_0.

b) È interessante provare un altro teorema di esistenza di autofunzioni con un numero di zeri prefissato interno ad (a, b) facendo uso di ipotesi supplementari di tipo diverso delle (26) e (27).

Nell'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x, \lambda) y = 0 \tag{13}$$

le funzioni $\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ *soddisfino le condizioni dichiarate nel* n. 3, *a*); *valgano inoltre le condizioni del* n. 4, *cioè*

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_2} - \max\, Q(x, \lambda)/\max\, \theta(x, \lambda) = +\infty,$$

$\theta(a, \lambda)\alpha_1(\lambda)/\alpha(\lambda)$, $\theta(b, \lambda)\beta_1(\lambda)/\beta(\lambda)$ *funzioni non crescenti di* λ

in (A_1, A_2). *Supponiamo ancora che all'intervallo* (A_1, A_2) *appartenga l'estremo* A_1, *e infine*

$$(31) \quad \min_{a \leq x \leq b} Q(x, A_1) \geq 0, \quad \alpha(A_1)\alpha_1(A_1) \geq 0, \quad \beta(A_1)\beta_1(A_1) \geq 0,$$

$$|\alpha(A_1)| + |\alpha_1(A_1)| \neq 0, \quad |\beta(A_1)| + |\beta_1(A_1)| \neq 0.$$

Vogliamo dimostrare che esistono infiniti autovalori

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \ldots, \quad \lambda_\nu, \ldots; \qquad \lambda_\nu < \lambda_{\nu+1},$$

relativi al sistema di STURM (13), (22), (23), *caratterizzati dal fatto che le corrispondenti autofunzioni* $y(x, \lambda_\nu)$ *hanno* ν *zeri soltanto interni ad* (a, b) [1].

Si consideri una soluzione $u(x)$ del sistema differenziale

$$(32) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\{\min\limits_{a \leq x \leq b} \theta(x, A_1)\}\dfrac{du}{dx}\right] - [\min\limits_{a \leq x \leq b} Q(x, A_1)]\, u = 0, \\ \alpha_1(A_1)u(a) - \alpha(A_1)\, u'(a) = 0. \end{cases}$$

Supponiamo dapprima $\min\limits_{a \leq x \leq b} Q(x, A_1) > 0$; posto

$$\min_{a \leq x \leq b} Q(x, A_1) / \min_{a \leq x \leq b} \theta(x, A_1) = m^2, \qquad m > 0,$$

si avrà

$$u(x) = \alpha(A_1) \cosh m(x-a) + \frac{\alpha_1(A_1)}{m} \operatorname{senh} m(x-a),$$

e poichè senza alterare le generalità si può supporre $\alpha(A_1) \geq 0$, $\alpha_1(A_1) \geq 0$ si ha $u(x) \geq 0$ in (a, b); ma $\alpha(A_1)$ e $\alpha_1(A_1)$ non sono simultaneamente nulli, perciò $u(x) > 0$ per $a < x \leq b$.

Sia $y(x, A_1)$ una soluzione del sistema

$$(33) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\theta(x, A_1)\dfrac{dy}{dx}\right] - Q(x, A_1)\, y = 0, \\ \alpha_1(A_1)y(a) - \alpha(A_1)\, y'(a) = 0. \end{cases}$$

Poichè $u(x)$ non ha in (a, b) zeri maggiori di a, a maggior ragione per il teorema del n. 2, a) $y(x, A_1)$ non ha zeri $> a$ e $\leq b$;

[1] Cfr. M. BÔCHER: op. cit., p. 69.

si ha d'altra parte $[\min_{a \leq x \leq b} \theta(x, \Lambda_1)]\, u'(b)/u(b) > 0$ e dal teorema del n. 2, *b*) segue

$$\theta(b, \Lambda_1)\, y'(b, \Lambda_1)/y(b, \Lambda_1) > 0.$$

Ragionando come nel n. 4 si ha che esiste una successione di valori $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_\nu, \dots, \Lambda_1 < \mu_0$, tali che l'integrale $y(x, \mu_\nu)$ della (13) che soddisfa la (22) si annulla in b, ed ha ν zeri e ν soltanto interni ad (a, b). Se allora $\beta(\lambda) \equiv 0$ in (Λ_1, Λ_2) il teorema è dimostrato, se $\beta(\lambda) \neq 0$ facendo crescere λ da Λ_1 a μ_0, $-\theta(b, \lambda)\beta_1(\lambda)/\beta(\lambda)$ cresce a partire da un valore *negativo o nullo*, mentre $\theta(b, \lambda)\, y'(b, \lambda)/y(b, \lambda)$ decresce da un valore *positivo* a $-\infty$, esisterà quindi un valore λ_0 interno a (Λ_1, μ_0) tale che

$$\frac{\theta(b, \lambda_0)\, y'(b, \lambda_0)}{y(b, \lambda_0)} = -\frac{\theta(b, \lambda_0)\, \beta_1(\lambda_0)}{\beta(\lambda_0)}$$

e l'integrale corrispondente $y(x, \lambda_0)$ soddisfa il sistema di STURM (13), (22), (23) e non possiede alcun zero interno ad (a, b).

Supponiamo infine $\min_{a \leq x \leq b} Q(x, \Lambda_1) = 0$; il sistema (32) ha la soluzione

$$u(x) = \alpha_1(\Lambda_1)(x - a) + \alpha(\Lambda_1)$$

e supposto come avanti $\alpha(\Lambda_1) \geq 0$, $\alpha_1(\Lambda_1) \geq 0$, risulterà $u(x) > 0$ per $a < x \leq b$, e

$$[\min \theta(x, \Lambda_1)]\, u'(b)/u(b) = [\min \theta(x, \Lambda_1)]\, \alpha_1(\Lambda_1)/u(b) \geq 0.$$

Ragionando sui sistemi (33) e (32) come nel n. 2 *b*) si ha

$$\theta(b, \Lambda_1)\, y'(b, \Lambda_1)/y(b, \Lambda_1) \geq [\min \theta(x, \Lambda_1)]\, u'(b)/u(b)$$

e risulterà $\theta(b, \Lambda_1)\, y'(b, \Lambda_1)/y(b, \Lambda_1) = 0$ soltanto se $Q(x, \Lambda_1) \equiv 0$. $\alpha_1(\Lambda_1) = 0$, $\beta_1(\Lambda_1) = 0$. Ne segue che esiste ancora l'autovalore λ_0 che risulta maggiore di Λ_1, e potrà coincidere con Λ_1 soltanto se $Q(x, \Lambda_1) \equiv 0$, $\alpha_1(\Lambda_1) = 0$, $\beta_1(\Lambda_1) = 0$.

6. - *a*) Abbiamo visto nel n. 1 di questo paragrafo che i primi sistemi differenziali considerati nella fisica matematica avevano la forma

$$(34) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\theta(x)\dfrac{dy}{dx}\right] + [\lambda A(x) - B(x)]\, y = 0, \\ \alpha_1 y(a) - \alpha y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta y'(b) = 0, \end{cases}$$

dove $\theta'(x)$, $A(x)$, $B(x)$ *sono funzioni continue in* (a, b), $\theta(x) > 0$, $A(x) > 0$, e $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ *sono costanti*, $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$. Tali sistemi chiamansi in analisi sistemi di STURM - LIOUVILLE.

Con le notazioni precedenti è $Q(x, \lambda) = B(x) - \lambda A(x)$, $A_1 = -\infty$, $A_2 = +\infty$, sono soddisfatte le (21), (26), (27) e in virtù del teorema del n. 5, *a*) si ha: *dato il sistema di* STURM - LIOUVILLE (34) *esistono infiniti autovalori reali*

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \quad \lambda_\nu, \ldots; \qquad \lambda_\nu < \lambda_{\nu+1},$$

aventi come unico punto di accumulazione $+\infty$ *i quali godono la proprietà che le corrispondenti autofunzioni* $y(x, \lambda_\nu)$ *si annullano* ν *volte nell'intervallo aperto* (a, b) (¹).

b) Supponiamo che *nel sistema* (34) *siano* $\theta'(x)$, $A(x)$, $B(x)$ *continue in* (a, b); $\theta(x) > 0$, $A(x) > 0$, $B(x) \geq 0$; $\alpha\alpha_1 \geq 0$, $\beta\beta_1 \geq 0$, $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$.

Possiamo ora fare $A_1 = 0$, $A_2 = +\infty$ e se applichiamo il teorema del n. 5, *b*) deduciamo che *gli autovalori del sistema* (34) *sono tutti positivi*; *salvo il caso di* $B(x) = 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, *per il quale si ha corrispondentemente* $\lambda_0 = 0$.

c) Supposto $\theta(x) > 0$, $B(x) \geq 0$, $\alpha\alpha_1 \geq 0$, $\beta\beta_1 \geq 0$, $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$ e che $A(x)$ cangi di segno in (a, b) si dimostra che esistono due successioni di autovalori reali

$$\lambda_0^+, \quad \lambda_1^+, \ldots, \quad \lambda_\nu^+, \ldots; \qquad \lambda_\nu^+ < \lambda_{\nu+1}^+,$$

$$\lambda_0^-, \quad \lambda_1^-, \ldots, \quad \lambda_\nu^-, \ldots; \qquad \lambda_\nu^- > \lambda_{\nu+1}^-,$$

rispettivamente positivi e negativi, aventi come unico punto di accumulazione $+\infty$ e $-\infty$ tali che le corrispondenti autofunzioni

$$y_0^+, \quad y_1^+, \ldots, \quad y_\nu^+, \ldots$$

$$y_0^-, \quad y_1^-, \ldots, \quad y_\nu^-, \ldots$$

godono la proprietà che y_ν^+, y_ν^{-1} hanno ciascuna ν zeri e ν zeri soltanto interni ad (a, b).

(¹) Notiamo che se $A(x) < 0$ in (a, b) basterà cangiare λ in $-\lambda$ per ritrovare il caso esaminato.

Per la dimostrazione di questo teorema rimandiamo il lettore alla memoria citata di M. PICONE o ai volumi di M. BÔCHER, E. L. INCE (1).

7. - *a*) Salvo a ritornare nel Cap. V, § 2, n. 6; § 3, n. 6, più in generale sulla questione, vogliamo provare l'ortogonalità delle autofunzioni del sistema di STURM - LIOUVILLE (34).

Siano λ_r, λ_s, due autovalori distinti del sistema (34) e $y_r(x)$, $y_s(x)$ le corrispondenti autofunzioni; si ha

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{dy_r}{dx}\right]+\left[\lambda_r A-B\right]y_r=0,\quad \frac{d}{dx}\left[\theta\frac{dy_s}{dx}\right]+\left[\lambda_s A-B\right]y_s=0$$

e moltiplicando la prima equazione per y_s la seconda per y_r e sottraendo otteniamo

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\left(y_s\frac{dy_r}{dx}-y_r\frac{dy_s}{dx}\right)\right]+(\lambda_r-\lambda_s)Ay_ry_s=0,$$

e integrando tra a e b

$$\left[\theta\left(y_s\frac{dy_r}{dx}-y_r\frac{dy_s}{dx}\right)\right]_{x=a}^{x=b}+(\lambda_r-\lambda_s)\int_a^b Ay_ry_s\,dx=0. \tag{35}$$

Essendo $a_1y_r(a)-ay_r'(a)=0$, $a_1y_s(a)-ay_s'(a)=0$ e $|a|+|a_1|\neq 0$ si ha $y_s(a)y_r'(a)-y_r(a)y_s'(a)=0$, analogamente $y_s(b)y_r'(b)-$ $-y_r(b)y_s'(b)=0$ e la (35) dà

$$(\lambda_r-\lambda_s)\int_a^b Ay_ry_s dx=0, \tag{36}$$

e se $\lambda_r \neq \lambda_s$

$$\int_a^b Ay_ry_s dx=0,$$

cioè le autofunzioni $\{y_r(x)\}$ relative al sistema di STURM - LIOUVILLE (34) *formano un sistema ortogonale rispetto alla funzione peso* $A(x)$ (2).

---

(1) M. PICONE: mem. cit. § 2, n. 6; M. BÔCHER: op. cit. § 6, n. 4; E. L. INCE: op. cit. § 6, n. 4.

(2) Cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*. (Bologna, 1935), p. 7 e p. 197.

b) Supponiamo più in particolare che in (a, b) *sia* $A(x) \geq 0$ senza che $A(x)$ si annulli identicamente in (a, b). Se $y_r(x)$ è un'autofunzione si avrà

$$\int_a^b A y_r^2(x) dx > 0$$

e perciò, salvo a moltiplicare le autofunzioni per la costante $\left(\int_a^b A y_r^2 dx\right)^{-1/2}$, *si potrà supporre* $\int_a^b [A^{1/2} y_r(x)]^2 dx = 1$, *e il sistema* $\{A^{1/2}(x) y_r(x)\}$ *ortogonale e normale in* (a, b).

8. - *a)* Ci interessa segnalare due casi in cui gli autovalori del sistema (34) sono tutti reali. *Supponiamo* $A(x) \geq 0$ *senza che sia* $A(x) \equiv 0$ *in nessun tratto di* (a, b), vogliamo provare che *gli autovalori del sistema* (34) *sono tutti reali.*

Infatti se $\lambda = \sigma + i\tau$ è un autovalore cui corrisponde l'autofunzione $s + it$ anche $\sigma - i\tau$ è un autovalore al quale corrisponde l'autofunzione $s - it$, e dalla (36) si ha

$$2i\tau \int_a^b A(s^2 + t^2)\, dx = 0,$$

e poichè non può aversi in tutto (a, b) $s \equiv t \equiv 0$, ne viene $\tau = 0$.

b) Supponiamo ora che $A(x)$ *cangi di segno in* (a, b) *e sia*

$$\theta(x) > 0, \quad B \geq 0, \quad \alpha\alpha_1 \geq 0, \quad \beta\beta_1 \geq 0 \tag{37}$$

e dimostriamo che anche in questo caso gli autovalori del sistema (34) *sono tutti reali.*

Infatti se $\lambda = \sigma + i\tau$ è un autovalore, $\tau \neq 0$, e $s + it$ la corrispondente autofunzione, dall'equazione differenziale del sistema (34) si ricava che deve essere identicamente

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\left(\frac{ds}{dx} + i\frac{dt}{dx}\right)\right] + [(\sigma + i\tau)A - B](s + it) = 0,$$

perciò

$$S = \frac{d}{dx}\left[\theta \frac{ds}{dx}\right] + (\sigma A - B)s - \tau A t = 0$$

$$T = \frac{d}{dx}\left[\theta \frac{dt}{dx}\right] + \tau A s + (\sigma A - B)t = 0,$$

si avrà quindi $\int_a^b (sS+tT)\,dx=0$ e integrando per parti

$$(38)\qquad \Big|\theta(ss'+tt')\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \theta(s'^2+t'^2)dx + \sigma\int_a^b A(s^2+t^2)dx -$$
$$-\int_a^b B(s^2+t^2)\,dx=0.$$

Avendosi $\alpha\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta\beta_1 \geqslant 0$ segue dalle condizioni ai limiti del sistema (34)

$$s(a)s'(a)\geqslant 0,\quad t(a)t'(a)\geqslant 0,\quad s(b)s'(b)\leqslant 0,\quad t(b)t'(b)\leqslant 0,$$

perciò

$$\Big|\theta(ss'+tt')\Big|_{x=a}^{x=b} \leqslant 0.$$

Si ha ancora $-\int_a^b \theta(s'^2+t'^2)\,dx \leqslant 0$, ma il segno $=$ implica $s'\equiv 0$, $t'\equiv 0$, $(\sigma+i\tau)A-B\equiv 0$, $\tau A\equiv 0$, e poichè A cangia di segno, $\tau=0$ contro l'ipotesi, ne viene

$$-\int_a^b \theta(s'^2+t'^2)dx < 0.$$

Poichè $s+it$ e $s-it$ sono due autofunzioni corrispondenti ad autovalori distinti è

$$\int_a^b A(s^2+t^2)dx=0$$

si ha pure $-\int_a^b B(s^2+t^2)dx \leqslant 0$ e la (38) non può sussistere. È quindi $\tau=0$ e ciò è contro l'ipotesi.

Vogliamo infine provare che *se insieme alle* (37) *supponiamo che $B(x)$ non si annulli identicamente in (a, b) allora se λ_r è un autovalore e y_r la corrispondente autofunzione si ha*

$$(39)\qquad \lambda_r \int_a^b A\,y_r^2\,dx > 0.$$

È infatti

$$\lambda_r A y_r = B y_r - \frac{d}{dx}\left[\theta \frac{dy_r}{dx}\right]$$

quindi

$$(40) \qquad \lambda_r \int_a^b A y_r^2 dx = \int_a^b B y_r^2 dx - \Big[\theta y_r y_r'\Big]_a^b + \int_a^b \theta y_r'^2 dx.$$

Si ha

$$\int_a^b B y_r^2 dx \geqq 0, \qquad -\Big[\theta y_r y_r'\Big]_a^b \geqq 0,$$

e se osserviamo che l'ipotesi $y_r' \equiv 0$ porta $\lambda_r A = B$ la quale non può sussistere cangiando A di segno in (a, b), abbiamo

$$\int_a^b \theta y_r'^2 dx > 0,$$

e dalla (40) segue la (39).

§ 7. - Valutazione asintotica delle funzioni di Sturm - Liouville.

1. Forma tipica dei sistemi di STURM - LIOUVILLE. - 2. Equazione per gli autovalori. - 3. Valutazione asintotica degli autovalori e delle autofunzioni. - 4. Autofunzioni con zeri in due punti prefissati. Valutazione asintotica.

1. - Sia dato il sistema di STURM - LIOUVILLE

$$(1) \qquad \frac{d}{dz}\left[\theta \frac{dV}{dz}\right] + \Big[\mu A(z) - B_1(z)\Big] V = 0$$

$$(2) \qquad V'(a) - h_1 V(a) = 0, \quad V'(b) + H_1 V(b) = 0,$$

con $\theta'(z)$, $A(z)$, $B_1(z)$ funzioni continue di z in (a, b), $\theta(z) > 0$, $A(z) > 0$, h_1, H_1 costanti. Il teorema del § 6, n. 6, a) ci assicura l'esistenza di una successione crescente di infiniti autovalori μ_n reali, aventi come unico punto di accumulazione $+\infty$, ai quali corrispondono delle soluzioni V_n del sistema (1), (2) non identicamente nulle [autofunzioni] che si annullano n volte nell'intervallo aperto (a, b). Il problema di cui vogliamo occuparci è la valutazione asintotica di μ_n e di V_n.

Supponiamo l'esistenza e la continuità di θ'', A'' in (a, b), se effettuiamo i cangiamenti della variabile indipendente, della funzione incognita e del parametro definiti dalle relazioni [1]

$$x = \frac{\pi}{c}\int_a^z \left(\frac{A}{\theta}\right)^{1/2} dz, \quad \theta_1 = (A\theta)^{-1/4}, \quad V = \theta_1 U, \quad \mu = \frac{\pi^2}{c^2}\lambda^2$$

dove

$$c = \int_a^b \left(\frac{A}{\theta}\right)^{1/2} dz,$$

con facili calcoli si trova che l'equazione (1) assume la forma

$$\frac{d^2U}{dx^2} + (\lambda^2 - B)\, U = 0$$

con

$$B = \frac{c^2}{\pi^2}\frac{B_1}{A} + 2\,\theta_1^{-2}\left(\frac{d\,\theta_1}{dx}\right)^2 - \frac{1}{\theta_1}\frac{d^2\theta_1}{dx^2},$$

e le nuove condizioni ai limiti corrispondenti alle (2) si avranno nei punti 0 e π. Questa trasformazione ci permette, almeno nei casi più generali, di limitarci a considerare il problema: *dato il sistema* di STURM - LIOUVILLE

$$\frac{d^2U}{dx^2} + (\lambda^2 - B)\, U = 0, \tag{3}$$

$$U'(0) - h\,U(0) = 0, \qquad U'(\pi) + H\,U(\pi) = 0, \tag{4}$$

con $B(x)$ funzione continua in $(0, \pi)$, h, H costanti reali, non necessariamente positive, determinare l'espressione asintotica degli autovalori λ_n e delle corrispondenti autofunzioni $U_n(x)$.

2\. - La (1) può scriversi

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \lambda^2 U = B(x)\, U$$

---

[1] Cfr. *a*) A. KNESER: *Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik.* (Braunschweig, 1911, VI + 243), p. 95; *b*) E. W. HOBSON: *On a general convergence theorem and the theory of the representation of a function by series of normal functions.* Proc. of the London Math. Soc., (2), 6 (1908), (pp. 349-395), p. 375. Ci varremo dei risultati di questa memoria nei nn. 1, 2, 3 di questo paragrafo.

e se supponiamo il secondo membro noto, poichè l'equazione omogenea corrispondente ha la soluzione $c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x$, con c_1, c_2 costanti, il metodo della variazione delle costanti di LAGRANGIA [Cap. II, § 1, n. 5, *b*)] dà per U (l'equazione integrale)

$$(5) \qquad U = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x + \frac{1}{\lambda} \int_0^x B(t)\, U(t) \operatorname{sen} \lambda(x-t)\, dt,$$

e perciò

$$(6) \qquad \frac{dU}{dx} = -\lambda c_1 \operatorname{sen} \lambda x + \lambda c_2 \cos \lambda x + \int_0^x B(t)\, U(t) \cos \lambda(x-t)\, dt.$$

Dalla prima delle (4) si ha $U(0) = 0$, in caso opposto si avrebbe $U'(0) = U(0) = 0$ e la U sarebbe identicamente nulla [§ 2, n. 2, *a*)]. Disponendo della costante moltiplicativa relativa alla soluzione $U(x)$ supporremo

$$(7_1) \qquad U(0) = 1,$$

per cui nella (5) dovrà farsi $c_1 = 1$; tenuto conto della prima delle (4) e della (7_1) avremo $c_2 = h/\lambda$, talchè

$$(7_2) \qquad U(x) = \cos \lambda x + \frac{h}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda x + \frac{1}{\lambda} \int_0^x B(t)\, U(t) \operatorname{sen} \lambda(x-t)\, dt,$$

e il problema è ricondotto a determinare il parametro λ in guisa che la corrispondente soluzione $U(x, \lambda)$ della (7_2) soddisfi anche la seconda delle (4).

Fissato λ sia $\overline{U}$ il massimo di $|U(x, \lambda)|$ in $(0, \pi)$; dalla (7_2) si ha

$$\overline{U} \leqslant \left(1 + \frac{h^2}{\lambda^2}\right)^{1/2} + \frac{\overline{U}}{\lambda} \int_0^\pi |B(t)|\, dt$$

e se consideriamo i valori di $\lambda > \int_0^\pi |B(t)|\, dt$ ne viene

$$\overline{U} < \left(1 + \frac{h^2}{\lambda^2}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi |B(t)|\, dt\right]^{-1};$$

si ha allora che fissato $\lambda_0 > 0$ esiste una costante C tale che

$$(8) \qquad |U(x, \lambda)| \leqslant C \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad \lambda \geqslant \lambda_0 > 0).$$

Se vogliamo che la (7_2) soddisfi la seconda delle (4) troviamo

$$\operatorname{tg} \lambda\pi = P_1(\lambda)/[\lambda - P_2(\lambda)] \tag{9}$$

con

$$\left\{ \begin{aligned} P_1(\lambda) &= h + H + \int_0^\pi B(t)U(t)\left[\cos \lambda t - \frac{H}{\lambda}\operatorname{sen} \lambda t\right] dt \\ P_2(\lambda) &= \frac{hH}{\lambda} + \int_0^\pi B(t)U(t)\left[\operatorname{sen} \lambda t + \frac{H}{\lambda}\cos \lambda t\right] dt. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Dalla (8) deduciamo che, salvo a crescere la costante C, possiamo supporre

$$|P_1(\lambda)| \leqslant C, \quad |P_2(\lambda)| \leqslant C, \qquad (\lambda > \lambda_0) \tag{11}$$

e possiamo concludere che *gli autovalori λ e le corrispondenti autofunzioni $U(\lambda)$, relativi al sistema di* STURM - LIOUVILLE (3), (4), *soddisfano l'equazione* (integrale) (7_2) *e la* (9).

Lo studio dell'equazione (9) è di J. LIOUVILLE [1]; noi qui seguiremo invece un procedimento di E. W. HOBSON [2] da egli premesso al teorema di equiconvergenza tra le serie di STURM - LIOUVILLE e le serie trigonometriche di FOURIER di cui ci occuperemo nel § 8.

3. - *a*) D'ora in avanti in questo paragrafo col simbolo $\alpha(x, \lambda)$ intenderemo una funzione di x e λ che per $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\lambda \geqslant \lambda_0$ sia limitata

$$|\alpha(x, \lambda)| \leqslant L, \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad \lambda \geqslant \lambda_0, \quad L \text{ costante assoluta})$$

e col simbolo $\alpha(\lambda)$ $[\alpha(x)]$ una funzione di λ $[x]$ che per $\lambda \geqslant \lambda_0$ $[0 \leqslant x \leqslant \pi]$ si mantiene limitata.

Con queste convenzioni a motivo della (8) si ha

$$h \operatorname{sen} \lambda x + \int_0^x B(t) \operatorname{sen} \lambda(x-t)\, dt = \alpha(\lambda, x)$$

---

[1] J. LIOUVILLE: *Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable.* Journ. de Math. pur. et appl., 2 (1837), pp. 16-35.

[2] Cfr. nota del n. 1.

e la (7_2) può scriversi

$$U(x) = \cos \lambda x + \frac{\alpha(\lambda, x)}{\lambda} \tag{12}$$

e la (7_2) stessa, ponendo nel secondo membro questa espressione dà

$$\left\{ \begin{aligned} U(x) = {} & \cos \lambda x \left[1 - \frac{1}{\lambda} \int_0^x B(t) \operatorname{sen} \lambda t \left\{ \cos \lambda t + \frac{\alpha(\lambda, t)}{\lambda} \right\} dt \right] \\ & + \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda} \left[h + \int_0^x B(t) \cos \lambda t \left\{ \cos \lambda t + \frac{\alpha(\lambda, t)}{\lambda} \right\} dt \right]. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Supponiamo $B(t)$ *continua e a variazione limitata in* $(0, \pi)$, sia

$$|B(t)| \leqslant M, \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi)$$

e sia V la variazione totale di $B(t)$ in $(0, \pi)$; si ha [1]

$$\int_0^x B(t) \operatorname{sen} \lambda t \cos \lambda t \, dt = \frac{1}{2}(M + V) \int_\xi^\eta \operatorname{sen} 2\lambda t \, dt = \frac{\alpha(x, \lambda)}{\lambda}$$

$$\int_0^x B(t) \cos^2 \lambda t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^x B(t) [1 - \cos 2\lambda t] \, dt = \frac{1}{2} \int_0^x B(t) \, dt + \frac{\alpha(x, \lambda)}{\lambda}$$

e la (13) dà come espressione asintotica delle autofunzioni

$$U(x) = \cos \lambda x \left[1 + \frac{\alpha(x, \lambda)}{\lambda^2} \right] + \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda} \left[h + \frac{1}{2} \int_0^x B(t) dt + \frac{\alpha(x, \lambda)}{\lambda} \right], \tag{14}$$

formula di cui faremo uso in *c*).

b) Possiamo subito trovare l'espressione asintotica degli autovalori.

Le (10) tenuto conto della (14) dànno

$$P_1(\lambda) = h + H + h' + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda}, \qquad P_2(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda}$$

dove

$$h' = \frac{1}{2} \int_0^\pi B(t) \, dt, \tag{15}$$

---

[1] Cfr. ad es. M. Picone: *Appunti di analisi superiore.* (Napoli, 1940), p. 248.

e l'equazione (9) diventa

$$\operatorname{tg} \pi\lambda = \left[\frac{h+H+h'}{\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^2}\right]\left[1 - \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^2}\right]^{-1} = \frac{h+H+h'}{\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^2};$$

ma quest'ultima espressione ha per limite lo zero quando $\lambda \to \infty$, avremo quindi

$$\pi\lambda - n\pi = \operatorname{arctg}\left(\frac{h+H+h'}{\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^2}\right) = \frac{h+H+h'}{\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^2}$$

e perciò

$$\lambda = n + \frac{c}{\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^2}$$

dove n *è intero positivo* e

$$c = (h+h'+H)/\pi. \tag{16}$$

Si ha ancora

$$\lambda = n + \frac{c}{n}\left[1 + \frac{c}{n\lambda} + \frac{\alpha(\lambda)}{n\lambda^2}\right]^{-1} + \frac{\alpha(\lambda)}{\lambda^2}$$

da cui *l'espressione asintotica dell'n^{esimo} autovalore*

$$\lambda_n = n + \frac{c}{n} + \frac{\alpha(n)}{n^2}, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{17}$$

dove $\alpha(n)$ è una funzione di n limitata.

c) Sostituendo la (17) nella (14) determineremo la cercata *espressione asintotica delle $U_n(x)$*. Si ha

$$\cos\lambda_n x = \cos\left[n + \frac{c}{n} + \frac{\alpha(n)}{n^2}\right]x =$$
$$= \cos nx \cos\left(\frac{c}{n} + \frac{\alpha(n)}{n^2}\right)x - \operatorname{sen} nx \operatorname{sen}\left(\frac{c}{n} + \frac{\alpha(n)}{n^2}\right)x,$$

$$\cos\lambda_n x = \left[1 + \frac{\alpha(x,n)}{n^2}\right]\cos nx - \left[\frac{cx}{n} + \frac{\alpha(x,n)}{n^2}\right]\operatorname{sen} nx,$$

$$\operatorname{sen}\lambda_n x = \left[1 + \frac{\alpha(x,n)}{n^2}\right]\operatorname{sen} nx + \left[\frac{cx}{n} + \frac{\alpha(x,n)}{n^2}\right]\cos nx,$$

e indicando con $U_n(x)$ l'autofunzione corrispondente all'autovalore λ_n la (14) dà allora

$$U_n(x) = \left[1 + \frac{\alpha(x,n)}{n^2}\right]\cos nx + \left[\frac{h + \frac{1}{2}\int_0^x B(t)\,dt - cx}{n} + \frac{\alpha(x,n)}{n^2}\right]\operatorname{sen} nx.$$

Si ha ora

$$\int_0^\pi U_n^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\int_0^\pi \left(h + \frac{1}{2}\int_0^x B(t)\,dt - cx\right) \operatorname{sen} 2nx\,dx + \frac{a(n)}{n^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n^2}\left|\left(h + \frac{1}{2}\int_0^x B(t)\,dt - cx\right)\cos 2nx\right|_0^\pi +$$

$$+ \frac{1}{2n^2}\int_0^\pi \left|\frac{1}{2}B(x) - c\right| \cos 2nx\,dx + \frac{a(n)}{n^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{a(n)}{n^2},$$

e perciò *se indichiamo con $\varphi_n(x)$ le autofunzioni normalizzate* esse hanno l'espressione

$$\varphi_n(x) = U_n(x)\left|\frac{\pi}{2} + \frac{a(n)}{n^2}\right|^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,U_n(x)\left|1 + \frac{a(n)}{n^2}\right|^{-1/2},$$

ed infine

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|1 + \frac{a(x,n)}{n^2}\right| \cos nx + \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{n}\left(h + \frac{1}{2}\int_0^x B(t)dt - cx\right) + \frac{a(x,n)}{n^2}\right] \operatorname{sen} nx\end{aligned}} \tag{18}$$

d) Partendo dalla (6) con procedimento analogo si trova per $\frac{d\varphi_n}{dx}$ l'espressione asintotica

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\varphi_n(x)}{dx} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[n + \frac{a(x,n)}{n}\right] \operatorname{sen} nx + \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[h + \frac{1}{2}\int_0^x B(t)\,dt - cx + \frac{a(x,n)}{n}\right] \cos nx\end{aligned}} \tag{19}$$

4. - Supponiamo ancora $B(x)$ *continua e a variazione limitata in* $(0, \pi)$ *e si cerchino i valori del parametro* λ *e le corrispondenti soluzioni dell'equazione*

$$\frac{d^2U}{dx^2} + (\lambda^2 - B)U = 0 \tag{3}$$

che soddisfano le condizioni ai limiti

$$U'(0)=0, \qquad U(\pi)=0 \quad (^1). \tag{20}$$

Nella (5) in virtù della prima delle (20) dovrà risultare $c_1=0$ quindi

$$U=c_2 \operatorname{sen} \lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x B(t)\,U(t) \operatorname{sen} \lambda(x-t)\,dt.$$

Non potrà aversi $c_2=0$ perchè in tale ipotesi si avrebbe $U'(0)=0$ e la U sarebbe identicamente nulla. Disponiamo del fattore arbitrario che comparisce in U ponendo $c_2=\sqrt{2/\pi}$; la U soddisfa quindi l'equazione integrale

$$U=\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \lambda x+\frac{1}{\lambda}\int_0^x B(t)\,U(t) \operatorname{sen} \lambda(x-t)\,dt.$$

Ragionando come al n. 2 risulta che per $\lambda\geqslant\lambda_0>0$ si ha

$$U(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \lambda x+\frac{\alpha(x,\lambda)}{\lambda} \tag{21}$$

e la seconda delle (20) dà

$$\operatorname{tg} \lambda\pi=P_1(\lambda)/[\lambda+P_2(\lambda)] \tag{22}$$

con

$$P_1(\lambda)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi B(t)\,U(t) \operatorname{sen} \lambda t\,dt, \qquad P_2(\lambda)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi B(t)\,U(t) \cos \lambda t\,dt.$$

Tenuto conto della (21) queste ultime dànno

$$P_1(\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^\pi B(t)\,dt+\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda}, \quad P_2(\lambda)=\frac{\alpha(\lambda)}{\lambda},$$

e l'equazione (22) dà allora come *espressione asintotica dell'n^{esimo} autovalore*

$$\boxed{\lambda_n=n+\frac{h'}{\pi n}+\frac{\alpha(n)}{n^2}}, \quad h'=\frac{1}{2}\int_0^\pi B(t)\,dt, \qquad (n=1, 2,\ldots), \tag{23}$$

e dalla (21) otteniamo per la corrispondente *autofunzione* $\varphi_n(x)$

---

(1) Cfr. A. KNESER: *Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen physik.* Math. Ann. (1904), 58, (pp. 81-147), p. 136.

normalizzata l'espressione asintotica

$$\boxed{\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{sen}\ nx + \frac{\alpha(x, n)}{n}} \,. \tag{24}$$

§ 8. - Il teorema di Dini - Hobson di equiconvergenza delle serie di Sturm - Liouville con le serie trigonometriche di Fourier.

1. Il problema degli sviluppi in serie di funzioni di STURM - LIOUVILLE. - 2. Lemmi preliminari. - 3. Teorema di equiconvergenza di WALSH per le serie di funzioni ortogonali. - 4. Teorema di equiconvergenza delle serie di STURM - LIOUVILLE con le serie trigonometriche di FOURIER.

1. - Sia $\{\varphi_n(x)\}$ un sistema di funzioni di quadrato sommabile, ortogonale e normale in $(0, \pi)$

$$\int_0^\pi \varphi_n^2(x)\, dx = 1, \qquad \int_0^\pi \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, dx = 0, \qquad (n \neq m), \tag{1}$$

e sia $f(x)$ una funzione continua in $(0, \pi)$. Supponiamo che $f(x)$ si possa rappresentare in $(0, \pi)$ con una serie uniformemente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi\,; \tag{2}$$

moltiplicando per $\varphi_n(x)$ e integrando termine a termine si ha

$$a_n = \int_0^\pi f(t)\, \varphi_n(t)\, dt, \tag{3}$$

cioè i coefficienti a_n della (2) sono univocamente determinati dalla (3) [1].

In generale data una funzione $f(x)$ sommabile in $(0, \pi)$ abbia significato la successione delle costanti a_n definita dalle (3), si dirà

[1] Abbiamo già usato questo procedimento nel Cap. III, § 5, n. 5, c); § 6, n. 8, a proposito degli sviluppi in serie di polinomi di JACOBI e in serie di BESSEL. Per l'espressione (3) dei coefficienti a_n, nel caso che la $\{\varphi_n(x)\}$ sia una successione di STURM-LIOUVILLE, vedi il teorema di A. HAAR richiamato a p. 245 del testo.

allora che *la successione* $\{a_n\}$ *è la successione dei coefficienti di Fourier di* $f(x)$ *rispetto al sistema ortogonale e normale* $\{\varphi_n(x)\}$, *e che la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ *è la serie di Fourier di* $f(x)$ *rispetto al sistema* $\{\varphi_n(x)\}$, *e si scriverà*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x). \tag{4}$$

Il problema capitale della teoria degli sviluppi in serie è di assegnare condizioni sufficienti che permettano di sostituire nella (4) al segno $\sim$ il segno $=$, noi qui ci limiteremo a considerare il problema nel caso che la successione $\{\varphi_n(x)\}$ sia una successione di STURM - LIOUVILLE.

Tale problema fu trattato da J. LIOUVILLE in connessione con alcune questioni della teoria del calore [1] ma questi studi iniziali si limitarono più che altro all'esame formale delle serie stesse. La teoria ricevette un assetto soddisfacente nella celebre opera di U. DINI: *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale.* (Pisa, 1880), ove insieme agli sviluppi in serie trigonometriche, per le quali si possedeva il classico criterio di convergenza di DIRICHLET [2], furono anche considerati gli sviluppi in serie di funzioni di BESSEL e di funzioni sferiche.

Il problema della sviluppabilità in serie fu ripreso da W. STEKLOFF, da D. HILBERT, da A. KNESER [3] ma in condizioni molto

---

[1] Cfr. J. LIOUVILLE, Journ. de Math. pur. et appl., I (1836), p. 253, II (1837), pp. 16, 418, III (1838), p. 561; cfr. § 6, n. 1.

[2] P. G. L. DIRICHLET: *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.* Journ. für die reine und ang. Math., 4 (1829), pp. 157-169.

[3] W. STEKLOFF: *a) Problème de refroidissement d'une barre hétérogène.* Ann. de la Fac. de Sc. de Toulouse, (2), 3, (1901), pp. 281-313; *b) Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Tchébicheff et, en particulier, suivant les polynomes de Jacobi.* Journ. für die reine und ang. Math., 125 (1903), pp. 207-236.

D. HILBERT: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1.-6. Note, 1904.

A. KNESER: *a)* Mem. cit. § 7, n. 4; *b) Beiträge zur Theorie der Sturm-Liouvillischen Darstellung willkürlicher Funktionen.* Math. Ann., 60 (1905), pp. 402-423.

generali fu ancora considerato da U. DINI nei manoscritti passati agli studenti dell'Università di Pisa nel 1904 e pubblicati poi in corso autografato nel 1910 (1). Il DINI stabilì direttamente (2) un criterio di equiconvergenza tra le serie di STURM - LIOUVILLE e le serie trigonometriche di FOURIER e quasi contemporaneamente al DINI, E. W. HOBSON (3) trovava per le funzioni a variazione limitata un criterio di equiconvergenza puntuale. Successivamente altri risultati, notevolmente interessanti, furono stabiliti da A. HAAR (4).

Noi richiameremo nel Cap. V, § 3, n. 6, i risultati che si conseguono con la teoria delle equazioni integrali; qui, seguendo un procedimento di J. L. WALSH (5), improntato ai metodi della teoria generale degli sviluppi in serie, ci limiteremo a provare il teorema di equiconvergenza delle serie di STURM - LIOUVILLE relative al sistema considerato nel § 7, n. 4, e le serie trigonometriche di FOURIER [cfr. n. 4].

2. - *a*) LEMMA 1.° — *Se una doppia successione di costanti reali*

$$\{c_{n,k}\}, \qquad (n, k=1, 2,\dots)$$

è tale che

$$c_{n,k}+c_{k,n}+\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{n,\nu}c_{k,\nu}=0, \qquad (n, k=1, 2,\dots), \tag{5}$$

e se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}|\}^2 \tag{6}$$

---

(1) U. DINI: *Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle Funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in un certo intervallo.* (Pisa, 1911), pp. III + 477. Il corso fu dettato agli studenti nel 1910 e le litografie furono licenziate nel marzo 1911.

(2) Cfr. DINI, op. cit. in nota (1), pp. 81-82.

(3) E. W. HOBSON, mem. cit. al § 7, n. 1.

(4) A. HAAR: *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.* Math. Ann., 69 (1910), pp. 331-371, 71 (1912), pp. 38-63.

(5) J. L. WALSH: *On the convergence of the Sturm - Liouville Series.* Ann. of Math., (2), 24 (1923), pp. 109-120.

converge, allora si ha anche

$$c_{k,n}+c_{n,k}+\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu,n}\,c_{\nu,k}=0, \qquad (n,\,k=1,\,2,\ldots). \tag{7}$$

Si ha (¹)

$$\sum_{n}\Big(\sum_{k}|c_{n,k}|\Big)^2=\sum_{n}\Big(\sum_{\mu}|c_{n,\mu}|\Big)\Big(\sum_{\nu}|c_{n,\nu}|\Big)=\sum_{n,\mu,\nu}|c_{n,\mu}\,c_{n,\nu}|,$$

è convergente quindi la serie tripla

$$\sum_{n,\mu,\nu}|c_{n,\mu}\,c_{n,\nu}|, \tag{8}$$

e tali sono le serie

$$\sum_{n,k} c_{n,k}^2 \tag{9}$$

e $\sum_{\nu}|c_{\nu,n}\,c_{\nu,k}|$ contenute in essa (²).

Poniamo

$$\sigma_{n,k}=c_{k,n}+c_{n,k}+\sum_{\nu} c_{\nu,n}\,c_{\nu,k}, \qquad (n,\,k=1,\,2,\ldots)$$

e dimostriamo che $\sigma_{n,k}=0$.

Si ha

$$\sigma_{n,k}^2=(c_{n,k}+c_{k,n})^2+2\sum_{\nu} c_{n,k}\,c_{\nu,n}\,c_{\nu,k}+2\sum_{\nu} c_{k,n}\,c_{\nu,n}\,c_{\nu,k} + \Big(\sum_{\nu} c_{\nu,n}\,c_{\nu,k}\Big)^2. \tag{10}$$

Avendosi

$$\sum_{n,k}(c_{n,k}+c_{k,n})^2\leq 2\sum_{n,k} c_{n,k}^2+2\sum_{n,k} c_{k,n}^2$$

la serie $\sum_{n,k}(c_{n,k}+c_{k,n})^2$ è convergente; indicheremo con s la sua somma:

$$s=\sum_{n,k}(c_{n,k}+c_{k,n})^2. \tag{11}$$

(¹) Per semplicità di scrittura supporremo d'ora in avanti che tutti gli indici scritti sotto il simbolo $\sum$ varino da 1 a ∞.

(²) Ricordiamo che sulle serie multiple assolutamente convergenti può operarsi come sulle semplici. Cfr. ad es. G. Sansone: *Lez. di An. Mat.* Vol. I (4ª ed., Padova, 1940), Cap. XIII.

La convergenza della serie (9) implica l'esistenza di una costante M tale che

$$|c_{n,k}| \leqslant M, \qquad (n, k=1, 2, \ldots),$$

perciò

$$\sum_{\nu,n,k} |c_{n,k} c_{\nu,n} c_{\nu,k}| \leqslant M \sum_{\nu,n,k} |c_{\nu,n} c_{\nu,k}|,$$

quindi la serie tripla $\sum_{\nu,n,k} c_{n,k} c_{\nu,n} c_{\nu,k}$ è assolutamente convergente.

Tenuto conto delle (5) abbiamo

$$\sum_{\nu,n,k} c_{n,k} c_{\nu,n} c_{\nu,k} = \sum_{\nu,n} c_{\nu,n} \sum_{k} c_{n,k} c_{\nu,k} = -\sum_{\nu,n} c_{\nu,n}(c_{\nu,n} + c_{n,\nu}),$$

e analogamente

$$\sum_{\nu,n,k} c_{k,n} c_{\nu,n} c_{\nu,k} = \sum_{\nu,k} c_{\nu,k} \sum_{n} c_{k,n} c_{\nu,n} = -\sum_{\nu,k} c_{\nu,k}(c_{\nu,k} + c_{k,\nu})$$
$$= -\sum_{\nu,n} c_{n,\nu}(c_{n,\nu} + c_{\nu,n}),$$

e sommando le due ultime relazioni trovate e tenuto conto della (11) abbiamo

$$\sum_{\nu,n,k} c_{n,k} c_{\nu,n} c_{\nu,k} + \sum_{\nu,n,k} c_{k,n} c_{\nu,n} c_{\nu,k} = -s. \tag{12}$$

La convergenza della serie tripla (8) implica l'esistenza di una costante M_1 tale che

$$\sum_{\mu} |c_{\mu,n} c_{\mu,k}| < M_1, \qquad (n, k=1, 2 \ldots)$$

quindi

$$\sum_{\mu} |c_{\mu,n} c_{\mu,k} c_{\nu,n} c_{\nu,k}| < M_1 |c_{\nu,n} c_{\nu,k}|$$

e

$$\sum_{\mu,\nu,n,k} |c_{\mu,n} c_{\mu,k} c_{\nu,n} c_{\nu,k}| < M_1 \sum_{\nu,n,k} |c_{\nu,n} c_{\nu,k}|,$$

la serie quadrupla ora scritta è assolutamente convergente e tenuto conto delle (5) si ha

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{n,k}\Big(\sum_{\nu} c_{\nu,n}c_{\nu,k}\Big)^2=\sum_{n,k}\Big(\sum_{\nu} c_{\nu,n}c_{\nu,k}\Big)\Big(\sum_{\mu} c_{\mu,n}c_{\mu,k}\Big)=\\
&=\sum_{\mu,\nu,n,k} c_{\mu,n}c_{\mu,k}c_{\nu,n}c_{\nu,k}=\sum_{\mu,\nu,n} c_{\mu,n}c_{\nu,n}\sum_{k} c_{\mu,k}c_{\nu,k}\\
&=-\sum_{\mu,\nu,n} c_{\mu,n}c_{\nu,n}(c_{\mu,\nu}+c_{\nu,\mu})=-\sum_{\mu,\nu}(c_{\mu,\nu}+c_{\nu,\mu})\sum_{n} c_{\mu,n}c_{\nu,n}=\\
&=\sum_{\mu,\nu}(c_{\mu,\nu}+c_{\nu,\mu})^2=s
\end{aligned}
\right.
$$

e allora sommando la (10) rispetto agli indici n, k e tenuto conto delle (11), (12), (13) otteniamo

$$\sum_{n,k}\sigma^2_{n,k}=s-2s+s=0$$

da cui $\sigma_{n,k}=0$ per $n, k=1, 2,\ldots.$

b) LEMMA 2.° — ***Siano $\{u_n(x)\}$, $\{\bar{u}_n(x)\}$ due successioni di funzioni ortogonali e normali in (a, b); le funzioni $u_n(x)$ siano complessivamente limitate in (a, b), e sia***

$$(14)\quad \bar{u}_n(x)-u_n(x)=\sum_{\nu} c_{n,\nu}\,u_\nu(x),\qquad (a\leq x\leq b,\quad n=1, 2,\ldots).$$

Se la serie

$$(6)\qquad \sum_{n}\Big(\sum_{\nu}|c_{n,\nu}|\Big)^2$$

è convergente, allora anche la successione $\{\bar{u}_n(x)\}$ è complessivamente limitata in (a, b), e si ha

$$(15)\qquad u_n(x)-\bar{u}_n(x)=\sum_{\nu} c_{\nu,n}\,\bar{u}_\nu(x),\qquad (a\leq x\leq b),$$

ed è

$$(16)\qquad c_{n,k}=\int_a^b(\bar{u}_n(x)-u_n(x))\,u_k(x)\,dx,\qquad (n, k=1, 2,\ldots).$$

Le due serie che figurano nei secondi membri delle (14) e (15) sono inoltre assolutamente e uniformemente convergenti in (a, b).

La convergenza della serie (6) implica l'esistenza di una costante M tale che

$$\sum_{\nu} |c_{n,\nu}| < M, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

e poichè le $u_n(x)$ sono per ipotesi complessivamente limitate in (a, b), dalle (14) segue che le serie che figurano nel loro secondo membro sono assolutamente e uniformemente convergenti in (a, b), e le $\bar{u}_n(x)$ risultano anch'esse complessivamente limitate in (a, b).

Dalle (14) moltiplicando per $u_k(x)$ e integrando in (a, b), poichè nel secondo membro è lecita l'integrazione termine a termine, otteniamo

$$\int_a^b (u_n(x) - u_n(x))\, u_k(x)\, dx = c_{n,k}, \qquad (n, k = 1, 2, \ldots),$$

cioè la (16), e se $\varepsilon_{n,k}$ indica il simbolo di Kronecker [$\varepsilon_{n,n} = 1$; $\varepsilon_{n,k} = 0$ per $n \neq k$] abbiamo

$$\int_a^b u_k(x)\, \bar{u}_n(x)\, dx = c_{n,k} + \varepsilon_{n,k}.$$

Si ha ora

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,k} &= \int_a^b \bar{u}_n(x)\, \bar{u}_k(x)\, dx = \int_a^b \bar{u}_n(x) \left[u_k(x) + \sum_{\nu} c_{k,\nu}\, u_\nu(x)\right] dx \\
&= \int_a^b \bar{u}_n(x)\, u_k(x)\, dx + \sum_{\nu} c_{k,\nu} \int_a^b \bar{u}_n(x)\, u_\nu(x)\, dx \\
&= \varepsilon_{n,k} + c_{n,k} + \sum_{\nu} c_{k,\nu}(c_{n,\nu} + \varepsilon_{n,\nu}) \\
&= \varepsilon_{n,k} + c_{n,k} + c_{k,n} + \sum_{\nu} c_{k,\nu}\, c_{n,\nu},
\end{aligned}$$

valgono quindi le (5) e perciò anche

$$c_{k,n} + c_{n,k} + \sum_{\nu} c_{\nu,n}\, c_{\nu,k} = 0. \tag{7}$$

Per le osservazioni del lemma 1.° la serie $\sum_{\nu,k} |c_{\nu,n}\, c_{\nu,k}|$ è convergente, e se moltiplichiamo la (7) per $u_k(x)$ e sommiamo rispetto all'indice k abbiamo

$$\sum_k c_{k,n}\, u_k + \sum_k c_{n,k}\, u_k + \sum_\nu c_{\nu,n} \sum_k c_{\nu,k}\, u_k = 0,$$

$$\sum_k c_{k,n}\, u_k + (\bar{u}_n - u_n) + \sum_\nu c_{\nu,n}(\bar{u}_\nu - u_\nu) = 0,$$

$$u_n - \bar{u}_n = \sum_\nu c_{\nu,n}\, \bar{u}_\nu, \qquad \text{c. v. d.}$$

3. - *a*) È facile ora dimostrare il teorema di equiconvergenza di WALSH per le serie di funzioni ortogonali [1].

TEOREMA — *Siano* $\{u_n(x)\}$, $\{\bar{u}_n(x)\}$ *due successioni di funzioni ortogonali e normali in* (a, b), *le* $u_n(x)$ *siano complessivamente limitate in* (a, b) *e tali che*

$$\bar{u}_n(x) - u_n(x) = \sum_k c_{n,k}\, u_k(x), \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

dove [2]

$$c_{n,k} = \int_a^b (\bar{u}_n(x) - u_n(x))\, u_k(x)\, dx, \qquad (n, k = 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

e inoltre la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}|\Big)^2 \tag{6}$$

converga. Vogliamo dimostrare che se $f(x)$ *è una funzione sommabile insieme al suo quadrato in* (a, b), *e consideriamo le due serie*

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x), \qquad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \bar{u}_k(x), \tag{17}$$

$$a_k = \int_a^b f(x)\, u_k(x)\, dx, \qquad b_k = \int_a^b f(x) \bar{u}_k(x) dx,$$

---

[1] J. L. WALSH, mem. cit. al n. 1.

[2] Il lettore osservi che per la dimostrazione fatta nel n. 2 *b*) la (16) è conseguenza delle (14), (6), e dell'ipotesi che le $u_n(x)$ sono complessivamente limitate in (a, b).

esse hanno lo stesso carattere, nel senso che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k u_k(x) - b_k u_k(x)) \tag{18}$$

converge assolutamente, e si ha uniformemente in (a, b)

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k u_k(x) - b_k u_k(x)).$$

Si ha

$$b_n - a_n = \int_a^b f(x)[\bar{u}_n(x) - u_n(x)]\, dx = \int_a^b f(x) \left(\sum_\nu c_{n,\nu} u_\nu(x)\right) dx; \tag{19}$$

la convergenza uniforme della serie $\sum_\nu c_{n,\nu} u_n(x)$ porta che è lecita l'integrazione termine a termine nella (19) (¹) e perciò

$$b_n - a_n = \sum_\nu c_{n,\nu}\, a_\nu, \tag{20}$$

e analogamente

$$a_n - b_n = \sum_\nu c_{\nu,n}\, b_\nu. \tag{21}$$

Abbiamo allora dalle (20) e (14)

$$\sum_k \left| a_k u_k(x) - b_k \bar{u}_k(x) \right| = \sum_k \left| (a_k - b_k)\, u_k(x) - b_k(\bar{u}_k - u_k) \right| \tag{22}$$

$$= \sum_k \left| \sum_\nu c_{\nu,k} b_\nu u_k - \sum_\nu b_k c_{k,\nu} u_\nu \right|.$$

(¹) Posto $R_N = \sum_{\nu=N+1}^{\infty} c_{n,\nu}\, u_\nu(x)$ e applicando la limitazione di BUNIKOWSKY - SCHWARZ si ha:

$$\left| \int_a^b f(x) \left(\sum_\nu c_{n,\nu}\, u_\nu(x)\right) dx - \sum_{\nu=1}^{N} c_{n,\nu} \int_a^b f(x)\, u_\nu(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, |R_N|\, dx$$

$$\leq \left| \int_a^b f^2(x)\, dx \right|^{1/2} \left| \int_a^b R_N^2\, dx \right|^{1/2}.$$

Per la limitazione di BESSEL (1) la serie $\sum_n b_n^2$ è convergente, per la nota limitazione di LAGRANGIA si ha

$$\Big(\sum_n |b_n| \sum_k |c_{n,k}|\Big)^2 \leqslant \sum_n |b_n|^2 \Big(\sum_k |c_{n,k}|\Big)^2, \quad (2)$$

e poichè le $u_n(x)$ sono complessivamente limitate ne segue che la serie (22) è assolutamente e uniformemente convergente in (a, b), e si ha anche

$$\sum_k \big(a_k u_k(x) - b_k \bar{u}_k(x)\big) = \sum_{k,\nu} c_{\nu,k} b_\nu u_k - \sum_{\nu,k} b_k c_{k,\nu} u_\nu$$
$$= \sum_{k,\nu} c_{\nu,k} b_\nu u_k - \sum_{\nu,k} b_\nu c_{\nu,k} u_k = 0.$$

b) Dal teorema dimostrato segue che nelle ipotesi dichiarate *se una delle serie* (17) *è convergente* (sommabile) *ed ha per somma S, anche l'altra è convergente* (sommabile) *con la stessa somma S; se una diverge anche l'altra diverge; se una è uniformemente convergente* (sommabile) *in un intervallo anche l'altra è uniformemente convergente* (sommabile) *nello stesso intervallo.*

4. - *a*) Possediamo ora tutti gli elementi per stabilire il teorema di equiconvergenza tra le serie di STURM - LIOUVILLE e le serie trigonometriche.

Si consideri la successione $\{\bar{u}_n(x)\}$ ortogonale e normale di STURM - LIOUVILLE soddisfacente l'equazione

$$\frac{d^2\bar{u}_n}{dx^2} + \Big|\lambda_n^2 - B(x)\Big| \bar{u}_n = 0 \tag{23}$$

e le condizioni ai limiti

$$\bar{u}_n(0) = \bar{u}_n(\pi) = 0, \tag{24}$$

(1) Cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali.* Bologna (1935)), p. 13.

(2) Si ha $0 \leqslant \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + \dots + a_n^2, & a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \\ a_1 b_1 + \dots + a_n b_n, & b_1^2 + \dots + b_n^2 \end{vmatrix}$

perciò

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

e la successione $\{u_n(x)\}$

(25) $$u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} nx.$$

Supposto $B(x)$ *continua e a variazione limitata in* $(0, \pi)$ si ha [§ 7, n. 4, formule (24), (23)]

(26) $$\bar{u}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\operatorname{sen} nx+\frac{\alpha(x, n)}{n}\right], \qquad \lambda_n=n+\frac{a(n)}{n}$$

ed esiste una costante assoluta C tale che

$|a(n)|<C,\ (n=1, 2,\ldots);\qquad |\alpha(x, n)|<C$ (per $0\leqslant x\leqslant\pi$; $n=1, 2,\ldots$).

Poichè la funzione $\bar{u}_n(x)-u_n(x)$ ammette derivata seconda in $(0, \pi)$ si ha uniformemente in $(0, \pi)$ [1]

$$\bar{u}_n(x)-u_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k}u_k(x)$$

con

$$c_{n,k}=\int_0^{\pi}(\bar{u}_n(x)-u_n(x))\,u_k(x)\,dx,$$

ovvero

(27) $$c_{n,k}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\bar{u}_n(x)\operatorname{sen} kx dx-\varepsilon_{n,k}, \qquad (n, k=1, 2,\ldots),$$

e integrando per parti

(27′) $$c_{n,k}+\varepsilon_{n,k}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\bar{u}_n'(x)\cos kx dx=$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{k^2}\int_0^{\pi}\bar{u}_n''(x)\operatorname{sen} kx dx.$$

In virtù della seconda delle (26) si può trovare un intero N tale che si abbia

(28) $$|\lambda_n-n|<\frac{1}{2}\quad\text{per}\quad n>N.$$

[1] Cfr. ad es. G. SANSONE, op. cit. nel n. 3; Si applichi il teorema 38′ del Cap. II, p. 93.

Se consideriamo tutti gli indici $n \leqslant N$ dalle (23) e (26) segue che esiste una costante c_1 tale che

$$|\bar{u}_n''(x)| \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{per} \quad n = 1, 2, \ldots, N;$$

si ha allora

$$|c_{n,k}| < \frac{c_1}{k^2}, \qquad (n \leqslant N, \quad k \neq n, \quad k = 1, 2, \ldots),$$
$$|c_{n,n}| < 1 + \frac{c_1}{n^2},$$

e ne viene che $\sum_k |c_{n,k}|$ è convergente, e tale è pure la somma $\sum_{n \leqslant N} \{\sum_k |c_{n,k}|\}^2$. Si potrà applicare il teorema del n. 3 se dimostriamo la convergenza di $\sum_{n > N} \{\sum_k |c_{n,k}|\}^2$.

Dalle (27) e (26) si ha

$$c_{n,n} + 1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx \left[\operatorname{sen} nx + \frac{\alpha(x, n)}{n}\right] dx =$$
$$= 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\alpha(x, n)}{n} \operatorname{sen} nx\, dx,$$

quindi

$$|c_{n,n}| < \frac{c_2}{n}, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{29}$$

con c_2 costante assoluta.

Per $k \neq n$ dalla (27′) si ha

$$c_{n,k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} \int_0^\pi [\lambda_n^2 - B(x)]\, \bar{u}_n(x) \operatorname{sen} kx\, dx$$
$$= \frac{\lambda_n^2 c_{n,k}}{k^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2} \int_0^\pi B(x)\, \bar{u}_n(x) \operatorname{sen} kx\, dx,$$

quindi

$$c_{n,k}(\lambda_n^2 - k^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi B(x)\, \bar{u}_n \operatorname{sen} kx\, dx. \tag{30}$$

Essendo $n>N$ e $k \neq n$, perciò $|n-k| \geqslant 1$, abbiamo per la (28)

$$|\lambda_n - k| = |\lambda_n - n + (n-k)| \geqslant |n-k| - \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}|n-k|,$$

$$|\lambda_n + k| = |\lambda_n - n + (n+k)| \geqslant |n+k| - |\lambda_n - n| > \frac{1}{2}|n+k|,$$

e per la (30)

$$|c_{n,k}| \leqslant \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,|k^2-n^2|}\left|\int_0^\pi B(x)\,\bar{u}_n \operatorname{sen} kx\,dx\right|,$$

e per la limitazione di LAGRANGIA

(31) $$\left(\sum_k{}'|c_{n,k}|\right)^2 \leqslant \frac{32}{\pi}\sum_k{}'\frac{1}{(k^2-n^2)^2}\sum_k{}'\left|\int_0^\pi B(x)\,\bar{u}_n \operatorname{sen} kx\,dx\right|^2,$$

dove l'apice apposto al simbolo $\sum'$ indica che si esclude il valore $k=n$.

Si ha

$$\frac{1}{k^2-n^2} = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{k-n} - \frac{1}{n+k}\right), \quad \frac{1}{(k^2-n^2)^2} \leqslant \frac{1}{2n^2}\left(\frac{1}{(k-n)^2} + \frac{1}{(k+n)^2}\right),$$

$$\sum_k{}'\frac{1}{(k-n)^2} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(n-k)^2} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-n)^2} < 2\sum_k\frac{1}{k^2}, \quad \text{e}$$

$$\sum_k{}'\frac{1}{(k+n)^2} < \sum_k\frac{1}{k^2},$$

perciò

(32) $$\sum_k{}'\frac{1}{(k^2-n^2)^2} < \frac{3}{2n^2}\sum_k\frac{1}{k^2} = \frac{c_3}{n^2}$$

con c_3 costante assoluta.

Riferendo la funzione $B(x)\,\bar{u}_n(x)$ al sistema $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen} kx\right\}$, ortogonale e normale in $(0, \pi)$, si ha per la limitazione di BESSEL

$$\sum_k{}'\left[\int_0^\pi B(x)\,\bar{u}_n(x) \operatorname{sen} kx dx\right]^2 \leqslant \frac{\pi}{2}\int_0^\pi B^2(x)\,\bar{u}_n^2(x)\,dx,$$

e poichè le $\bar{u}_n(x)$ sono complessivamente limitate in $(0, \pi)$

(33) $$\sum_k{}'\left[\int_0^\pi B(x)\,\bar{u}_n(x) \operatorname{sen} kx\,dx\right]^2 < c_4$$

con c_4 costante assoluta, e le (31), (32), (33) dànno

$$\Big(\sum_k' |c_{n,k}|\Big)^2 \leqslant \frac{32\, c_3 c_4}{\pi n^2},$$

e per la (29)

$$\Big(\sum_k |c_{n,k}|\Big)^2 \leqslant \frac{1}{n^2}\Big(2c_2^2 + \frac{64\, c_3 c_4}{\pi}\Big) = \frac{C_1}{n^2}, \qquad (n > N),$$

con C_1 costante assoluta, quindi la serie $\sum\limits_{n>N}\Big(\sum\limits_k |c_{n,k}|\Big)^2$ è convergente.

Tenuto conto del risultato del n. 3 segue il teorema: *Se* $\{\bar{u}_n(x)\}$ *è la successione ortogonale e normale di Sturm-Liouville relativa all'equazione*

$$\frac{d^2\bar{u}_n}{dx^2} + [\lambda_n^2 - B(x)]\,\bar{u}_n = 0$$

e alle condizioni ai limiti

$$\bar{u}_n(0) = \bar{u}_n(\pi) = 0,$$

ed $f(x)$ *una funzione di quadrato sommabile in* $(0, \pi)$, *allora la serie di Fourier di* $f(x)$

$$(34) \qquad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_n \bar{u}_n(x), \qquad a_n = \int_0^{\pi} f(x)\, \bar{u}_n(x)\, dx$$

ha lo stesso comportamento della serie trigonometrica di $f(x)$ *rispetto al sistema* $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx\right\}$, *ortogonale e normale in* $(0, \pi)$,

$$(35) \qquad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

nel senso che se una delle serie (34), (35) *è convergente* (sommabile) *con somma* S, *anche l'altra è convergente* (sommabile) *con somma* S; *se una diverge anche l'altra diverge*; *se una è uniformemente convergente* (sommabile) *in un intervallo di* $(0, \pi)$, *anche l'altra è uniformemente convergente* (sommabile) *nello stesso intervallo.*

b) Si ha in particolare che *se* $f(x)$ *è continua e a variazione limitata in* $(0, \pi)$, *la serie* (34) *converge verso* $f(x)$ *in* $(0, \pi)$, *e uniformemente in qualunque intervallo interno a* $(0, \pi)$.

Tale proprietà appartiene infatti alla serie (35) [1].

Lo stesso teorema sussiste per gli sviluppi in serie di STURM-LIOUVILLE di una funzione continua e a variazione limitata [2].

Vogliamo infine ricordare l'enunciato del seguente teorema di unicità di A. HAAR.

Se $f(x)$ *è una funzione definita in* $(0, \pi)$, *limitata e integrabile, se* $\{\varphi_n(x)\}$ *è una successione di Sturm-Liouville, ortogonale e normale in* $(0, \pi)$, *e se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *converge in* $(0, \pi)$ *verso* $f(x)$, *allora i coefficienti* a_n *sono le costanti di Fourier di* $f(x)$ *rispetto al sistema* $\{\varphi_n(x)\}$; cioè le a_n hanno l'espressione (3) [3].

---

[1] Cfr. ad es. G. SANSONE, op. cit. al n. 4, *a*).

[2] Cfr. ad es. E. W. HOBSON, mem. cit. al § 7, n. 1, pp. 386-387.

[3] Cfr. per questo teorema la seconda memoria di A. HAAR [p. 48], citata nella nota [6] del n. 1.

CAPITOLO V.

I problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore al secondo.

§ 1. - Forme bilineari. Forme canoniche [1].

a) Sia $\{a_{i,k}\}$, $i, k=1, 2,\ldots, n$, un sistema di n^2 costanti e $x_1, x_2,\ldots, x_n$; $y_1, y_2,\ldots, y_n$ formino un sistema di $2n$ variabili; l'espressione

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} F=&a_{1,1}x_1y_1+a_{1,2}x_1y_2+\ldots+a_{1,n}x_1y_n\\ &+a_{2,1}x_2y_1+a_{2,2}x_2y_2+\ldots+a_{2,n}x_2y_n\\ &+\ldots \qquad\qquad \ldots\\ &+a_{n,1}x_ny_1+a_{n,2}x_ny_2+\ldots+a_{n,n}x_ny_n=\sum_{i,k}^{1,\ldots n}a_{i,k}x_iy_k \end{aligned}\right.$$

prende il nome di *forma bilineare* nelle $2n$ variabili

$$x_1,\quad x_2,\ldots,\quad x_n$$
$$y_1,\quad y_2,\ldots,\quad y_n,$$

e il determinante

$$A=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2},\ldots, & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2},\ldots, & a_{2,n}\\ & \ldots & \\ a_{n,1} & a_{n,2},\ldots, & a_{n,n}\end{vmatrix}$$

chiamasi il ***determinante*** della forma F.

Noi supporremo che sia $A\neq 0$, o come dicesi la forma F sia ***ordinaria***.

---

[1] Per i §§ 1, 2, 3 di questo Capitolo cfr.: *a*) M. BÖCHER: *Leçons sur les méthodes de Sturm*, (Paris, 1917), (Cap. II e V; *b*) E. L. INCE: *Ordinary differential equations*, (London, 1927), Cap. IX e XI.

b) Supponiamo di effettuare sulle variabili x_i, y_k due sostituzioni lineari

(2) $$S \frown x_i = \sum_{r=1}^{n} c_{i,r} X_r ,$$

(3) $$T \frown y_k = \sum_{s=1}^{n} d_{k,s} Y_s ,$$

con i moduli

$$C = \text{det.} \| c_{i,r} \|, \qquad D = \text{det.} \| d_{k,s} \|,$$
$$(i, r, k, s = 1, 2, \ldots, n)$$

entrambi diversi da zero (e perciò invertibili), si avrà

$$F = \sum_{i,k}^{1\ldots n} a_{i,k} \sum_{r=1}^{n} c_{i,r} X_r \sum_{s=1}^{n} d_{k,s} Y_s$$

(4_1) $$F = \sum_{r,s}^{1\ldots n} a'_{r,s} X_r Y_s$$

con

(4_2) $$a'_{r,s} = \sum_{i,k}^{1\ldots n} a_{i,k} c_{i,r} d_{k,s},$$

otteniamo quindi una nuova forma bilineare nelle variabili X_r, Y_s con il determinante

$$A' = ACD$$

anch'esso non nullo, e perciò *operando su una forma ordinaria con le sostituzioni* (2) *e* (3) *si ottiene una nuova forma ordinaria.*

c) Diremo che una forma bilineare nelle $2n$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ha la *forma canonica* se ha l'espressione

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n .$$

Dimostreremo che *assegnata una forma F ordinaria, e una sostituzione lineare S nelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a determinante non nullo, ad essa si può associare una e una sola sostituzione lineare T sulle $y_1, y_2, \ldots, y_n$, tale che la forma trasformata di F assuma la forma canonica*

(5) $$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n .$$

Con le nostre notazioni dovrà risultare

$$\sum_{i,k}^{1\ldots n} a_{i,k}\, c_{i,r}\, d_{k,s} = \varepsilon_{r,s} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

dove $\varepsilon_{r,s}$ è il simbolo di KRONECKER: $\varepsilon_{r,r} = 1$, $\varepsilon_{r,s} = 0$ per $r \neq s$.

Fissato s, per la determinazione di $d_{1,s}, d_{2,s}, \ldots, d_{n,s}$ abbiamo il sistema lineare

$$\sum_{k}^{1\ldots n} \Big(\sum_{i}^{1\ldots n} a_{i,k}\, c_{i,r} \Big)\, d_{k,s} = \varepsilon_{r,s}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

col determinante $AC \neq 0$; da esso possono perciò ricavarsi $d_{1,s}, d_{2,s}, \ldots, d_{n,s}$ in uno e in un sol modo.

d) Sulla forma canonica ($\bar{5}$) ottenuta col procedimento descritto in c) si effettui una sostituzione lineare che lasci immutate le variabili $X_1, X_2, \ldots, X_m$ e cangi $X_{m+1}, \ldots, X_n$ in $X'_{m+1}, \ldots, X_n'$, e se $Y_1', Y_2', \ldots, Y'_m, Y'_{m+1}, \ldots, Y_n'$ sono le corrispondenti variabili per le quali la trasformata di F assume ancora la forma canonica, proponiamoci di porre in evidenza le espressioni di $Y_1', Y_2', \ldots, Y'_m, Y'_{m+1}, \ldots, Y_n'$ per le $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

Si ha

$$(6) \quad X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_m Y_m + X_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + X_n Y_n = \\ = X_1 Y_1' + X_2 Y_2' + \ldots + X_m Y'_m + X'_{m+1} Y'_{m+1} + \ldots + X_n' Y_n'.$$

Poichè le $X_1, X_2, \ldots, X_m, X'_{m+1}, \ldots, X_n'$ si esprimono in modo invertibile per le $x_1, x_2, \ldots, x_n$, esiste uno e un solo sistema di valori di queste ultime per il quale risulta

$$X'_{m+1} = 0, \ldots, \quad X'_{m+\nu-1} = 0, \quad X'_{m+\nu} = 1, \quad X'_{m+\nu+1} = 0, \ldots, \quad X_n' = 0,$$
$$[\nu = 1, 2, \ldots, n-m]$$
$$X_1 = 0, \ldots, \quad X_m = 0$$

e se per tali valori di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le $X_{m+1}, \ldots, X_n$ assumono rispettivamente i valori $A_{m+1,\nu}, \ldots, A_{n,\nu}$ dall'identità (6) segue

$$(7_1) \qquad Y'_{m+\nu} = A_{m+1,\nu}\, Y_{m+1} + A_{m+2,\nu}\, Y_{m+2} + \ldots + A_{n,\nu}\, Y_n,$$
$$[\nu = 1, 2, \ldots, n-m].$$

Con lo stesso procedimento possiamo ottenere le espressioni di Y_1', Y_2',...., Y'_m per le Y_1, Y_2,...., Y_n; se scegliamo infatti le x_1, x_2,...., x_n in modo che sia

$$X_1=0,\dots,\ X_{\mu-1}=0,\ X_\mu=1,\ X_{\mu+1}=0,\dots,\ X_m=0,\quad [\mu=1,2,\dots,m],$$
$$X'_{m+1}=0,\dots,\quad X_n'=0$$

e indichiamo con $B_{m+1,\mu}$,...., $B_{n,\mu}$, $[\mu=1, 2,...., m]$, i valori assunti da X_{m+1},...., X_n, risulterà

$$(7_2)\qquad Y_\mu'=Y_\mu+B_{m+1,\mu}Y_{m+1}+\dots+B_{n,\mu}Y_n,\quad [\mu=1,2,\dots,m].$$

Le (7_1), (7_2) sono appunto le formule cercate.

§ 2. - Sistemi differenziali aggiunti e autoaggiunti.

1. Sistemi differenziali. Indice di compatibilità. - 2. Sistemi differenziali aggiunti. - 3. Indice di un sistema e del suo aggiunto. - 4. Sistemi lineari autoaggiunti. - 5. Sistemi autoaggiunti del secondo ordine. - 6. Sistemi autoaggiunti di STURM - LIOUVILLE. - 7. Sistemi autoaggiunti del quarto ordine.

1. - *a*) Generalizzando i sistemi di STURM - LIOUVILLE del Cap. IV, § 6, consideriamo l'equazione differenziale

$$(1)\quad L(y)=p_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+p_n(x)y=0,$$ [1]

dove i coefficienti $p_i(x)$ sono definiti in un intervallo (a, b), $p_0(x)\neq 0$ in (a, b), e si cerchi una soluzione che agli estremi a e b soddisfi le m condizioni

$$(2)\quad U_i(y)=\alpha_i y(a)+\alpha_i^{(1)}y'(a)+\dots+\alpha_i^{(n-1)}y^{(n-1)}(a)$$
$$+\beta_i y(b)+\beta_i^{(1)}y'(b)+\dots+\beta_i^{(n-1)}y^{(n-1)}(b)=0,\quad (i=1,2,\dots,m),$$

essendo le $(\alpha_i, \alpha_i^{(1)},..., \alpha_i^{(n-1)};\ \beta_i, \beta_i^{(1)},...., \beta_i^{(n-1)})$, $(i=1, 2,...., m)$, costanti reali assegnate.

Il sistema (1), (2) chiamasi *sistema differenziale omogeneo*, e se è soddisfatto soltanto dalla soluzione $y(x)\equiv 0$ esso si dirà *incompatibile*. Se il sistema ammette invece k $[k\leqslant n]$ soluzioni (non nulle) linearmente indipendenti $y_1(x)$, $y_2(x)$,...., $y_k(x)$ che lo

---

[1] D'ora in avanti supporremo di riferirci ad equazioni di ordine $n>2$.

soddisfano, la più generale soluzione del sistema (1), (2) ha la forma

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x)$$

con $c_1, c_2, \dots, c_k$ costanti arbitrarie, e k si dirà l'*indice di compatibilità del sistema differenziale* (1), (2), e $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ un *sistema fondamentale*.

b) Le seguenti considerazioni permettono di precisare l'indice di compatibilità del sistema differenziale (1), (2).

Senza ledere le generalità noi supponiamo che le m condizioni ai limiti (2)

$$U_i(y) = 0 \; ; \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

siano linearmente indipendenti, quando si pensino le $U_i(y)$ come forme lineari nelle $y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a)$; $y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$.

Sia $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione (1), le soluzioni del sistema (1), (2) hanno allora la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

ove per le (2) le costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ debbono esser tali che

$$c_1 U_1(y_1) + c_2 U_1(y_2) + \dots + c_n U_1(y_n) = 0,$$

$$\dots$$

$$c_1 U_m(y_1) + c_2 U_m(y_2) + \dots + c_n U_m(y_n) = 0.$$

Ne viene che *se la matrice*

$$\left\| \begin{matrix} U_1(y_1), & U_1(y_2), \dots, & U_1(y_n) \\ U_2(y_1), & U_2(y_2), \dots, & U_2(y_n) \\ & \dots & \\ U_m(y_1), & U_m(y_2), \dots, & U_m(y_n) \end{matrix} \right\|$$

ha la caratteristica $n-k$, il sistema differenziale (1), (2) *ha l'indice k, e inversamente.*

2. - Sia

$$(3) \qquad L(y) \equiv p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y$$

un'espressione differenziale di ordine n con i coefficienti p_i funzioni continue di x in (a, b) ; p_i ammetta derivate continue fino all'ordine $n-i$ in (a, b), e sia $p_0(x) \neq 0$ in tutto (a, b).

Se indichiamo con $M(z)$ l'espressione differenziale aggiunta di $L(y)$ [Cap. II, § 5, n. 1]

$$(4) \qquad M(z) = (-1)^n \frac{d^n(p_0 z)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(p_1 z)}{dx^{n-1}} + \dots - \frac{d(p_{n-1} z)}{dx} + p_n z$$

tra $L(y)$ e $M(z)$ sussiste l'identità di LAGRANGIA

$$(5) \qquad z L(y) - y M(z) = \frac{d}{dx} \psi(y, z)$$

dove $\psi(y, z)$ è una *forma bilineare* nelle

$$(6) \qquad \begin{matrix} y, & y', \dots, & y^{(n-1)}, \\ z, & z', \dots, & z^{(n-1)}, \end{matrix}$$

espressa da

$$(7) \qquad \begin{aligned} \psi(y, z) = y & \left[p_{n-1} z - \frac{d(p_{n-2} z)}{dx} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(p_0 z)}{dx^{n-1}} \right] \\ & + y' \left[p_{n-2} z - \frac{d(p_{n-3} z)}{dx} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}(p_0 z)}{dx^{n-2}} \right] \\ & + \dots \\ & + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} p_0 z. \end{aligned}$$

Il determinante $\Delta(x)$ di $\psi(y, z)$ vale

$$(8) \qquad \Delta(x) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot & (-1)^{n-1} p_0 \\ \cdot & \cdot & \dots & (-1)^{n-2} p_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & -p_0 & \dots & 0 & 0 \\ p_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = p_0^n(x)$$

ed è diverso da zero in (a, b), quindi $\psi(y, z)$ *è una forma bilineare ordinaria nelle variabili* (6).

Integrando la (5) tra a e b otteniamo la cosidetta *formula di Green* (¹)

$$(9) \qquad \int_a^b [z L(y) - y M(z)] \, dx = \Big[\psi(y, z) \Big]_{x=a}^{x=b}.$$

(¹) La (9) si chiama formula di GREEN per analogia alla formula che riduce un integrale doppio ad un integrale curvilineo.

Il secondo membro è una forma bilineare rispetto a

$$(10_1) \qquad y(a),\ y'(a),\ldots,\ y^{(n-1)}(a)\ ;\quad y(b),\ y'(b),\ldots,\ y^{(n-1)}(b)$$

$$(10_2) \qquad z(a),\ z'(a),\ldots,\ z^{(n-1)}(a)\ ;\quad z(b),\ z'(b),\ldots,\ z^{(n-1)}(b)$$

e il suo determinante vale $(-1)^n \Delta(a)\,\Delta(b) = (-1)^n[p_0(a)p_0(b)]^n \neq 0$, e perciò $\Big|\psi(y,z)\Big|_a^b$ è una forma bilineare ordinaria nelle variabili (10_1), (10_2).

Siano $U_1, U_2,\ldots, U_{2n}$, $2n$ espressioni lineari nelle (10_1) della forma

$$(11) \qquad \begin{aligned} U_i(y) &= \alpha_i y(a) + \alpha_i^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_i^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) \\ &+ \beta_i y(b) + \beta_i^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_i^{(n-1)} y^{(n-1)}(b), \quad (i=1, 2,\ldots, 2n) \end{aligned}$$

col determinante della matrice dei coefficienti non nullo; per le cose dette al n. 1 si possono determinare $2n$ forme lineari nelle variabili (10_2)

$$(12) \qquad \begin{aligned} V_i(z) &= \gamma_i z(a) + \gamma_i^{(1)} z'(a) + \ldots + \gamma_i^{(n-1)} z^{(n-1)}(a) \\ &+ \delta_i z(b) + \delta_i^{(1)} z'(b) + \ldots + \delta_i^{(n-1)} z^{(n-1)}(b) \end{aligned}$$

in modo che

$$(13) \qquad \Big|\psi(y,z)\Big|_a^b = U_1 V_{2n} + U_2 V_{2n-1} + \ldots + U_{2n} V_1,$$

e la (9) diventa

$$(14) \qquad \int_a^b [z\,L(y) - y\,M(z)]\,dx = U_1 V_{2n} + U_2 V_{2n-1} + \ldots + U_{2n} V_1 .$$

Il sistema

$$(15_2) \qquad \begin{cases} M(z) = 0, \\ V_i(z) = 0, \qquad (i = 1, 2,\ldots, 2n-m) \end{cases}$$

si chiama il sistema differenziale lineare aggiunto di

$$(15_1) \qquad \begin{cases} L(y) = 0, \\ U_i(y) = 0, \qquad (i = 1, 2,\ldots, m) \end{cases} \quad (^1).$$

---

(1) Un particolare sistema aggiunto fu considerato da J. LIOUVILLE: *Sur la Théorie des Équations différentielles linéaires et sur le développement des Fonctions en séries*, Journ. de Math. pur. et appl., 3 (1838), (pp. 561-614), p. 604. Sistemi differenziali aggiunti del secondo ordine furono considerati

Questa definizione è giustificata dall'osservazione fatta in 1, *d*) che se effettuiamo una sostituzione lineare sulle (10_1) per la quale le forme U_1, $U_2,\dots, U_m$ restano invariate (mentre si cangiano $U_{m+1},\dots, U_n$), le V_1, $V_2,\dots, V_{2n-m}$ si cangiano in altrettante forme V_1', $V_2',\dots, V'_{2n-m}$ ciascuna combinazione lineare di V_1, $V_2,\dots, V_{2n-m}$.

Osserviamo ancora che essendo l'equazione aggiunta di $M(z)=0$, l'equazione $L(y)=0$, [Cap. II, § 5, n. 1, *c*)] dalla simmetria della (13) abbiamo che il *sistema differenziale aggiunto di* (15_2), *è il sistema* (15_1).

3. - *a*) Vogliamo determinare dei sistemi lineari e dei loro aggiunti l'indice di compatibilità, e ci sarà utile allo scopo premettere un lemma.

LEMMA. - *Il sistema*

$$L(y)=0,$$
$$U_i(y)=0, \qquad (i=1, 2,\dots, m),$$

abbia l'indice di compatibilità k, e sia $y_1(x)$, $y_2(x),\dots, y_k(x)$ *un sistema fondamentale di soluzioni. Vogliamo dimostrare che se scegliamo le forme* $U_{m+1},\dots, U_n$ *lineari nelle* $y(a), y'(a),\dots, y^{(n-1)}(a)$; $y(b)$, $y'(b),\dots, y^{(n-1)}(b)$, *in modo che le forme* U_1, $U_2,\dots, U_m$, $U_{m+1},\dots, U_n$ *siano linearmente indipendenti, allora la matrice*

$$\left\|\begin{matrix} U_{m+1}(y_1), & U_{m+1}(y_2),\dots, & U_{m+1}(y_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1), & U_n(y_2),\dots, & U_n(y_k) \end{matrix}\right\|$$

ha la caratteristica k.

da M. MASON: *On the boundary value problems of linear ordinary differential equations of second order*, Trans. of the Am. Math. Soc., 7 (1906), pp. 337-360, ma la definizione di sistema lineare aggiunto per le equazioni di ordine *n*, e per $m=n$, è di G. D. BIRKOFF: *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations*, Trans. of the Am. Math. Soc., 9 (1908), (pp. 373-395), p. 375. La definizione di sistema aggiunto nel caso generale è di M. BÔCHER: *Applications and generalizations of the conception of adjoint systems*, Trans. of the Am. Math. Soc., 14 (1913), pp. 403-420 Il lettore noti che la nozione di *sistema differenziale aggiunto* qui assegnata è diversa dalla nozione di *sistema di equazioni differenziali aggiunto* data nel Cap. II, § 1, n. 4, *a*).

Supponiamo per assurdo che ciò non sia; si potranno allora trovare delle costanti $c_1, c_2, \dots, c_k$, non tutte nulle, tali che

$$c_1 U_i(y_1) + c_2 U_i(y_2) + \dots + c_k U_i(y_k) = 0, \qquad (i = m+1, \dots, n),$$

ovvero

$$U_i(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k) = 0, \qquad (i = m+1, \dots, n),$$

talchè posto $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_k y_k$ si avrà

$$U_i(y) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n);$$

ma le $U_1, U_2, \dots, U_m, U_{m+1}, \dots, U_n$ sono linearmente indipendenti, e allora

$$y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0; \qquad y(b) = y'(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0,$$

ma queste implicano $y \equiv 0$, e ciò non può essere.

b) È facile provare ora il teorema: *Se $U_1(y), \dots, U_n(y)$ sono linearmente indipendenti, allora il sistema*

$$(16) \qquad \begin{cases} L(y) = 0, \\ U_i(y) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

e il suo aggiunto

$$(17) \qquad \begin{cases} M(z) = 0, \\ V_i(z) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

hanno lo stesso indice di compatibilità.

Sia k l'indice di compatibilità del sistema (16) e sia $y_1, y_2, \dots, y_k$ un suo sistema fondamentale di soluzioni; sia inoltre $z_1, z_2, \dots, z_n$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione

$$M(z) = 0.$$

Dalla formula di Green (14), facendo $z = z_1, z_2, \dots, z_n$, otteniamo

$$U_{n+1}(y) V_n(z_1) + \dots + U_{2n}(y) V_1(z_1) = 0,$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$U_{n+1}(y) V_n(z_n) + \dots + U_{2n}(y) V_1(z_n) = 0;$$

questo sistema ammette le k soluzioni

$$U_{n+1}(y_i), \dots, U_{2n}(y_i), \qquad (i = 1, 2, \dots, k),$$

che per il lemma dimostrato in a) sono linearmente indipendenti quindi la matrice

$$\begin{Vmatrix} V_n(z_1),\ldots, & V_1(z_1) \\ \ldots & \ldots \\ V_n(z_n),\ldots, & V_1(z_n) \end{Vmatrix}$$

ha al massimo la caratteristica $n-k$.

Ma se il sistema aggiunto (17) ha l'indice k' la caratteristica di quest'ultima matrice è $n-k'$ (n. 1, b)) perciò $n-k' \leqslant n-k$; invertendo le nostre considerazioni è $n-k \leqslant n-k'$ e infine $k=k'$.

c) Se $m \neq n$ si può provare nello stesso modo che $k'=k+m-n$ (1).

4. - Un *sistema differenziale* si dice *autoaggiunto* se esso, qualunque siano i valori attribuiti ad $y(a)$, $y'(a),\ldots, y^{(n-1)}(a)$, $y(b)$, $y'(b),\ldots, y^{(n-1)}(b)$, coincide col suo aggiunto.

Ne viene che se

$$L(y)=0,$$
$$U_i(y)=0, \qquad (i=1, 2,\ldots, m),$$

è autoaggiunto, $L(y)=0$ è un'equazione autoaggiunta [Cap. II, § 5, n. 3], i due sistemi $U_i(y)=0$, $(i=1, 2,\ldots, n)$, $V_i(y)=0$, $(i=1, 2,\ldots, 2n-m)$ dovranno riuscire equivalenti, e in particolare sarà $m=n$.

5. - Vogliamo determinare esplicitamente la forma di un sistema differenziale aggiunto del secondo ordine.

Un sistema differenziale del secondo ordine ha la forma

$$(18) \qquad \begin{cases} L(y)=\dfrac{d}{dx}\left[\theta\,\dfrac{dy}{dx}\right]-Qy=0, \\ U_1(y)=\alpha_1\,y(a)+\alpha_2\,y(b)+\alpha_3\,y'(a)+\alpha_4\,y'(b)=0, \\ U_2(y)=\beta_1\,y(a)+\beta_2\,y(b)+\beta_3\,y'(a)+\beta_4\,y'(b)=0, \end{cases}$$

e la matrice

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{Vmatrix}$$

ha la caratteristica 2.

(1) Cfr. E. L. Ince, op. cit. in § 1, n. 1, p. 213.

Per semplicità di scrittura poniamo

$$\delta_{i,h} = \begin{vmatrix} \alpha_i, & \alpha_h \\ \beta_i, & \beta_h \end{vmatrix},$$

e dimostriamo che *condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema* (18) *sia autoaggiunto è che*

$$(19) \qquad \delta_{2,4}\,\theta(a) = \delta_{1,3}\,\theta(b).$$

Supponiamo dapprima $\delta_{1,2} \neq 0$; se prendiamo allora $U_3 = y'(a)$, $U_4 = y'(b)$ le quattro forme U_1, U_2, U_3, U_4 lineari in $y(a)$, $y(b)$, $y'(a)$, $y'(b)$ sono indipendenti, e si avrà dalle (9) e (14)

$$\int_a^b [zL(y) - yL(z)]dx = \left[\theta\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\right]_a^b = U_1V_4 + U_2V_3 + U_3V_2 + U_4V_1$$

ossia

$$\begin{aligned}\theta(b)[z(b)\,y'(b) - y(b)\,z'(b)] - \theta(a)[z(a)\,y'(a) - y(a)\,z'(a)] = \\ = [\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b)]\,V_4 \\ + [\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b)]\,V_3 \\ + y'(a)\,V_2 + y'(b)\,V_1,\end{aligned}$$

e siccome quest'ultima dovrà riuscire identica rispetto ad $y(a)$, $y'(a)$, $y(b)$, $y'(b)$, dovranno sussistere le quattro equazioni

$$\alpha_1 V_4 + \beta_1 V_3 = \theta(a)\,z'(a), \qquad \alpha_2 V_4 + \beta_2 V_3 = -\theta(b)\,z'(b),$$
$$V_2 + \alpha_3 V_4 + \beta_3 V_3 = -\theta(a)\,z(a), \qquad V_1 + \alpha_4 V_4 + \beta_4 V_3 = \theta(b)\,z(b),$$

da cui risolvendo si ottengono per V_1, V_2, V_3, V_4 le espressioni

$$V_1 = \theta(b)\,z(b) + \frac{1}{\delta_{1,2}}[\delta_{2,4}\,\theta(a)\,z'(a) + \delta_{1,4}\,\theta(b)\,z'(b)],$$

$$V_2 = -\theta(a)\,z(a) + \frac{1}{\delta_{1,2}}[\delta_{2,3}\,\theta(a)\,z'(a) + \delta_{1,3}\,\theta(b)\,z'(b)],$$

$$V_3 = -\frac{1}{\delta_{1,2}}[\alpha_2\,\theta(a)\,z'(a) + \alpha_1\,\theta(b)\,z'(b)],$$

$$V_4 = \frac{1}{\delta_{1,2}}[\beta_2\,\theta(a)\,z'(a) + \beta_1\,\theta(b)\,z'(b)].$$

Perchè il sistema (18) sia autoaggiunto occorre che le forme lineari V_1, V_2 siano ciascuna una combinazione lineare di U_1, U_2.

In V_1 non comparisce $z(a)$, perciò V_1 dovrà differire per un fattore dall'espressione ottenuta eliminando $z(a)$ tra $U_1(z)$ e $U_2(z)$. Quest'ultima eliminazione dà

$$\delta_{1,2}z(b)+\delta_{1,3}z'(a)+\delta_{1,4}z'(b)$$

perciò la matrice

$$\begin{Vmatrix} \theta(b), & \frac{\delta_{2,4}}{\delta_{1,2}}\theta(a), & \frac{\delta_{1,4}}{\delta_{1,2}}\theta(b) \\ \delta_{1,2}, & \delta_{1,3}, & \delta_{1,4} \end{Vmatrix}$$

ha la caratteristica 1, e da ciò consegue la (19).

Si arriva ancora alla (19) ove si esprima che V_2 è una combinazione lineare di U_1, U_2.

Si arriva sempre alle (19) quando si esaminino gli altri cinque casi possibili $\delta_{1,3} \neq 0$, $\delta_{1,4} \neq 0$. $\delta_{2,3} \neq 0$, $\delta_{2,4} \neq 0$, $\delta_{3,4} \neq 0$.

6. - Generalizzando la definizione del Cap. IV, § 6, n. 6 diremo *sistema* di STURM - LIOUVILLE il sistema

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{dy}{dx}\right]+[\lambda A-B]\,y=0, \tag{20}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y(b)+\alpha_3 y'(a)+\alpha_4 y'(b)=0, \\ \beta_1 y(a)+\beta_2 y(b)+\beta_3 y'(a)+\beta_4 y'(b)=0, \end{cases} \tag{21}$$

con $\theta'(x)$, $A(x)$, $B(x)$ continue in (a, b), $\theta(x) \neq 0$ in (a, b).

Da quanto abbiamo detto al n. 5 segue che un tale sistema è autoaggiunto se

$$\delta_{2,4}\,\theta(a)=\delta_{1,3}\,\theta(b).$$

Ad esempio, il problema della conduzione del calore in un filo sottile [Cap. IV, § 6, n. 1] implica le condizioni iniziali

$$\alpha' y(a)-\alpha y'(a)=0, \qquad \beta' y(b)+\beta y'(b)=0, \tag{22}$$

è quindi $\delta_{1,3}=\delta_{2,4}=0$, e perciò tale problema si riduce ad un sistema autoaggiunto del secondo ordine.

Notiamo che dalle (21) eliminando successivamente $y'(a)$, $y(a)$ si ottiene

$$\delta_{1,3}\,y(a)+\delta_{2,3}\,y(b)-\delta_{3,4}\,y'(b)=0,$$
$$\delta_{1,3}\,y'(a)+\delta_{1,2}\,y(b)+\delta_{1,4}\,y'(b)=0,$$

quindi se $\delta_{1,3}=0$ il sistema (20), (21) è autoaggiunto allora e allora soltanto che sia $\delta_{2,4}=0$, e le condizioni ai limiti sono del tipo (22); se invece $\delta_{1,3}\neq 0$, il sistema (20), (21) può scriversi

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{dy}{dx}\right]+[\lambda A-B]y=0,$$

$$y(a)=\gamma_1 y(b)+\gamma_1' y'(b),\quad y'(a)=\gamma_2 y(b)+\gamma_2' y'(b),$$

e il sistema è autoaggiunto se

$$\theta(b)=\theta(a)[\gamma_1\gamma_2'-\gamma_2\gamma_1'].$$

In particolare se le condizioni ai limiti (21) si riducono a

$$y(a)=y(b),\qquad y'(a)=y'(b),$$

o come si dice si impongono ai limiti *condizioni periodiche*, il sistema è autoaggiunto se

$$\theta(a)=\theta(b)\quad (^1).$$

7. - Consideriamo l'equazione

$$[\theta(x)y'']''+[\lambda A(x)+B(x)]y=0$$

dove $\theta''(x)$, $A(x)$, $B(x)$ sono funzioni continue in (a, b), $\theta(x)>0$ in $(a\ b)$, e si cerchi una soluzione che soddisfi le condizioni ai limiti

$$U_1(y)=a_{1,1}(\theta y'')'+a_{1,2}(\theta y'')+a_{1,3}y'+a_{1,4}y\Big|_{x=a}=0,$$

$$U_2(y)=a_{2,1}(\theta y'')'+a_{2,2}(\theta y'')+a_{2,3}y'+a_{2,4}y\Big|_{x=a}=0,$$

$$U_3(y)=b_{1,1}(\theta y'')'+b_{1,2}(\theta y'')+b_{1,3}y'+b_{1,4}y\Big|^{x=b}=0,$$

$$U_4(y)=b_{2,1}(\theta y'')'+b_{2,2}(\theta y'')+b_{2,3}y'+b_{2,4}y\Big|^{x=b}=0.$$

---

(1) Per lo studio dei sistemi autoaggiunti del secondo ordine cfr., anche per la bibliografia, E. KAMKE: *Über die Existenz von Eigenwerten bei Randwertaufgaben zweiter Ordnung*, Math. Zeitschr., 44 (1938), pp. 619-634; *b*) *Neue Herleitung der Oszillationssätze für die linearen selbstadjungierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung*, Ibidem, pp. 635-658.

Considereremo il caso delle condizioni periodiche nel Cap. VI, § 3.

Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema risulti autoaggiunto è che siano verificate le due uguaglianze:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,4} \\ a_{2,1}, & a_{2,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,2}, & a_{2,3} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,4} \\ b_{2,1}, & b_{2,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{1,2}, & b_{1,3} \\ b_{2,2}, & b_{2,3} \end{vmatrix} \quad (^1).$$

§ 3. - La funzione di Green e la trasformazione dei sistemi differenziali in equazioni integrali di seconda specie di Fredholm.

1. La funzione di GREEN per un particolare sistema autoaggiunto del secondo ordine. - 2. La funzione di GREEN per i sistemi differenziali. - 3. Formula integrale risolutiva dei sistemi differenziali non omogenei aventi una sola soluzione. - 4. Le soluzioni dei sistemi differenziali come soluzioni di un'equazione integrale di FREDHOLM di seconda specie. - 5. Sistemi lineari dipendenti da un parametro. Autovalori e autofunzioni. - 6. Sistemi lineari autoaggiunti di ordine pari. Sviluppi in serie di autofunzioni e teorema di HILBERT - SCHMIDT.

1. - Consideriamo il sistema autoaggiunto [Cfr. § 2, n. 6] del secondo ordine

$$(1_1) \qquad L(y) = \frac{d}{dx}\left[\theta \frac{dy}{dx}\right] - Qy = 0,$$

$$(1_2) \qquad y(a) = y(b) = 0,$$

con $\theta'(x)$, $Q(x)$ continue in (a, b), $\theta(x) > 0$ in (a, b) e supponiamo che esso sia incompatibile, sia quindi $y = 0$ l'unica soluzione del sistema (1_1), (1_2), o ciò che è lo stesso i punti a e b non siano coniugati rispetto all'equazione (1_1) [Cap. IV, § 2, n. 3].

Possiamo trovare una funzione $y(x)$ che soddisfi il sistema (1_1), (1_2), non identicamente nulla, a condizione di abbandonare qualcuna delle condizioni prescritte per la soluzione, precisamente

---

(1) Cfr. S. A. JANCZEWSKY: *Oscillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order*, Ann. of Math, 29 (1927), (pp. 521-542), p. 522. Per le proprietà dei sistemi autoaggiunti in generale cfr. D. JACKSON: *Algebraic properties of self-adjoint systems*, Trans. of the Am. Math. Soc., 17 (1916), pp. 418-424; V. V. LATSHAW: *The algebra of self-adjoint boundary-value problems*, Bull. of the Am. Math. Soc., 39 (1933), pp. 969-978.

vedremo che fissato un punto ξ di (a, b), $a < \xi < b$, è possibile costruire in uno e in un sol modo una funzione continua $y = G(x, \xi)$, che in (a, ξ) e (ξ, b) soddisfa l'equazione data, e la cui derivata prima ha nel punto ξ una discontinuità di prima specie, con un salto uguale ad $1/\theta(\xi)$.

Poichè a e b non sono coniugati rispetto all'equazione (1_1) possiamo considerare due suoi integrali indipendenti $y_1(x)$, $y_2(x)$ univocamente determinati dalle condizioni iniziali

$$(2) \qquad y_1(a) = 1, \quad y_1(b) = 0; \qquad y_2(a) = 0, \quad y_2(b) = 1.$$

La funzione $G(x, \xi)$ che ci proponiamo di costruire avrà in (a, ξ) l'espressione $cy_1(x) + c_2 y_2(x)$ con c e c_2 costanti, e poichè vogliamo $G(a, \xi) = 0$ ne segue $c = 0$, si avrà quindi per $x \leqslant \xi$,

$$G(x, \xi) = c_2 y_2(x),$$

e analogamente per $\xi \leqslant x$,

$$G(x, \xi) = c_1 y_1(x),$$

e la continuità nel punto $x = \xi$ esige $c_2 y_2(\xi) = c_1 y_1(\xi)$, dalla quale se $y_1(\xi) \neq 0$, $y_2(\xi) \neq 0$ si ottiene $c_1/y_2(\xi) = c_2/y_1(\xi) = h$; avremo quindi per $x \leqslant \xi$,

$$G(x, \xi) = h y_1(\xi) y_2(x),$$

e per $\xi \leqslant x$,

$$G(x, \xi) = h y_2(\xi) y_1(x) \quad (^1).$$

Si ha

$$G_x(\xi - 0, \xi) = h y_1(\xi) y_2'(\xi), \qquad G_x(\xi + 0, \xi) = h y_2(\xi) y_1'(\xi),$$

quindi

$$h\,[y_2(\xi) y_1'(\xi) - y_1(\xi) y_2'(\xi)] = 1/\theta(\xi),$$
$$1/h = \theta(\xi)\,[y_2(\xi) y_1'(\xi) - y_1(\xi) y_2'(\xi)].$$

Si ha d'altra parte

$$0 = y_2 L(y_1) - y_1 L(y_2) = \frac{d}{dx}\left[\theta(y_2 y_1' - y_1 y_2')\right]$$

---

(1) Se $y_1(\xi) = 0$, avendosi $y_2(\xi) \neq 0$, prenderemo $c_2 = 0$, perciò per $x \leqslant \xi$, $G(x, \xi) = 0$, mentre per $\xi \leqslant x$, $G(x, \xi) = c_1 y_1(x)$.

perciò $\theta(y_2 y_1' - y_1 y_2') = c$, con c costante assoluta, e infine le formule

$$(3_1) \qquad G(x, \xi) = \frac{y_1(\xi)\, y_2(x)}{c} \qquad \text{per} \quad x \leqslant \xi,$$

$$(3_2) \qquad G(x, \xi) = \frac{y_2(\xi)\, y_1(x)}{c} \qquad \text{per} \quad x \geqslant \xi,$$

le quali dimostrano l'esistenza e l'unicità di $G(x, \xi)$.

La funzione $G(x, \xi)$ si chiama la *funzione di* GREEN ([1]), relativa al sistema (1_1), (1_2) e al *polo* ξ; per essa, a motivo delle (3) sussiste la relazione fondamentale

$$(4) \qquad G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

2. - Nel n. 1 abbiamo definito la così detta funzione di GREEN in un caso particolare, passeremo ora a considerare il caso generale.

a) Sia dato il sistema differenziale

$$(5) \quad \begin{cases} L(y) = p_0 \dfrac{d^n y}{dx^n} + p_1 \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \dfrac{dy}{dx} + p_n y = 0, \quad (n \geqslant 2), \\ U_i(y) = \alpha_i y(a) + \alpha_i^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha_i^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) \\ \qquad + \beta_i y(b) + \beta_i^{(1)} y'(b) + \dots + \beta_i^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0, \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

dove supponiamo $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n$ continue in (a, b), $p_0(x) \neq 0$ in (a, b) e le $U_1, U_2, \dots, U_n$ considerate come forme lineari nelle $y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a)$; $y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$ linearmente indipendenti, e supponiamo pure che esso sia incompatibile, cioè l'*unica soluzione del sistema* (5) *sia quella identicamente nulla.*

Dimostriamo che *fissato comunque un punto* ξ *di* (a, b) *è possibile costruire una funzione* $y = G(x, \xi)$ *avente le seguenti proprietà* :

([1]) La funzione di GREEN per l'equazione $y'' = 0$ fu considerata la prima volta da H. BURKHARDT: *Sur les fonctions de Green relatives à une domaine d'une dimension*, Bull. Soc. Math. de France, Vol. XXII (1894), pp. 71-75; la definizione di funzione di GREEN per un'equazione di ordine qualunque è dovuta a M. BÔCHER: *Green's functions in space of one dimension*, Bull. of the Am. Math. Soc., (2) 7, (1901), pp. 297-299. Per i contributi di G. D. BIRKHOFF, E. BOUNITZKY e per la bibliografia cfr. M. BÔCHER: *Boundary problems and Green's functions for linear differential and difference equations*, Ann. of Math. (2), 13 (1911), (pp. 71-88), p. 71.

i) $G(x, \xi)$, $G_x(x, \xi), \ldots, G_{x^{n-2}}(x, \xi)$ *sono continue in* (a, b);

ii) $G_{x^{n-1}}(x, \xi)$ *è continua in* (a, b) *salvo che nel punto* ξ *dove presenta una discontinuità di prima specie con un salto uguale ad* $1/p_0(\xi)$, *sia cioè*

$$G_{x^{n-1}}(\xi+0, \xi) - G_{x^{n-1}}(\xi-0, \xi) = 1/p_0(\xi);$$

iii) $y = G(x, \xi)$ *soddisfa in tutto* (a, b), *salvo il punto* ξ, *il sistema* (5).

Proveremo inoltre che la funzione $G(x, \xi)$ *che soddisfa le condizioni dichiarate è unica.*

Se $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ è un sistema fondamentale relativo all'equazione $L(y)=0$, la $G(x, \xi)$ supposta esistente, avrà nei due intervalli (a, ξ), (ξ, b) rispettivamente la forma

$$G(x, \xi) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \ldots + a_n y_n(x), \qquad (a \leqslant x \leqslant \xi),$$
$$G(x, \xi) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \ldots + b_n y_n(x), \qquad (\xi \leqslant x \leqslant b),$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ costanti.

La continuità di G e delle sue prime $n-2$ derivate rispetto ad x nel punto ξ, e la condizione *ii)*, impongono alle n differenze

$$c_i = b_i - a_i$$

le n condizioni

$$\begin{aligned}
&c_1 y_1(\xi) + c_2 y_2(\xi) + \ldots + c_n y_n(\xi) = 0,\\
&c_1 y_1'(\xi) + c_2 y_2'(\xi) + \ldots + c_n y_n'(\xi) = 0,\\
&\quad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots\\
&c_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-2)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-2)}(\xi) = 0,\\
&c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) = 1/p_0(\xi).
\end{aligned}$$

Il determinante di questo sistema è il valore del wronskiano $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ in ξ che è diverso da zero, perciò le costanti c_i possono determinarsi in una e in una sola maniera.

Se poniamo $U_i(y) = A_i(y) + B_i(y)$ con

$$A_i(y) = \alpha_i y(a) + \alpha_i^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_i^{(n-1)} y^{(n-1)}(a),$$
$$B_i(y) = \beta_i y(b) + \beta_i^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_i^{(n-1)} y^{(n-1)}(b),$$

e scriviamo che $G(x, \xi)$ soddisfa le n condizioni $U_i(y)=0$, $(i=1, 2,...., n)$, si ottiene

$$a_1A_i(y_1)+a_2A_i(y_2)+....+a_nA_i(y_n)+ \\ +b_1B_i(y_1)+b_2B_i(y_2)+....+b_nB_i(y_n)=0, \qquad (i=1, 2,...., n),$$

che può anche scriversi

$$b_1U_i(y_1)+b_2U_i(y_2)+....+b_nU_i(y_n)= \\ =c_1A_i(y_1)+c_2A_i(y_2)+....+c_nA_i(y_n), \qquad (i=1, 2,...., n).$$

Il determinante della matrice $\|U_i(y_k)\|$, $(i, k=1, 2,...., n)$ di questo sistema è diverso da zero perchè le n funzioni $y_1, y_2,...., y_n$ formano un sistema fondamentale e il sistema (5) è incompatibile [§ 2, n. 1, b)]; il sistema determina quindi univocamente le costanti b_1, b_2,...., b_n, ed essendo $a_i=b_i-c_i$ anche le a_i risultano univocamente determinate.

Il teorema enunciato è così dimostrato.

b) Giova mettere in evidenza una *relazione tra la funzione di Green di un sistema e la funzione di Green del sistema aggiunto* [1].

Supponiamo ancora il sistema (5) incompatibile, tale sarà il suo sistema aggiunto [§ 2, n. 3, b)]

$$(6) \qquad \begin{cases} M(z)=0, \\ V_i(z)=0, \qquad (i=1, 2,...., n) \end{cases}$$

di cui indicheremo con $\overline{G}(x, \xi)$ la corrispondente funzione di GREEN.

Essendo il coefficiente di $z^{(n)}$ in $M(z)$, $(-1)^n p_0$, si ha

$$G_{x^{n-1}}(\xi+0, \xi)-\overline{G}_{x^{n-1}}(\xi-0, \xi)=(-1)^n/p_0(\xi) \quad [2].$$

Siano poi ξ_1 e ξ_2 due punti di (a, b) e per fissare le ipotesi $\xi_1 \leqslant \xi_2$; integrando la (5) del § 2, n. 2, si ha

$$0=\int_a^b [zL(y)-yM(z)]\,dx=\Big[\psi(y, z)\Big]_a^{\xi_1-0}+\Big[\psi(y, z)\Big]_{\xi_1+0}^{\xi_2-0}+\Big[\psi(y, z)\Big]_{\xi_2+0}^{b};$$

dove $y=G(x, \xi_1)$, $z=\overline{G}(x, \xi_2)$.

---

(1) Supponiamo ora $p_i^{(n-i)}(x)$, $(i=0, 1,...., n)$, continua in (a, b).

(2) Si osservi che se un sistema è autoaggiunto [cfr. § 2, n. 4] di ordine pari si ha $\overline{G}(x, \xi)=G(x, \xi)$; se il sistema è invece autoaggiunto di ordine dispari si ha $\overline{G}(x, \xi)=-G(x, \xi)$.

La funzione $\psi(y, z)$ ha soltanto le sue discontinuità in ξ_1 e ξ_2, e poichè per le (5) e (6) [cfr. (14), § 2, n. 2] è

$$\Big[\psi(y, z)\Big]_a^b = U_1 V_{2n} + \dots + U_{2n} V_1 = 0,$$

ne viene

$$\Big[\psi(y, z)\Big]_{\xi_1-0}^{\xi_1+0} + \Big[\psi(y, z)\Big]_{\xi_2-0}^{\xi_2+0} = 0,$$

e tenuto conto che per la (7) del § 2, n. 2 l'unico termine discontinuo di $\psi(y, z)$ è

$$p_0 z \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (-1)^{n-1} p_0 y \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}},$$

si ha

$$p_0(\xi_1)\, \bar{G}(\xi_1, \xi_2) \frac{1}{p_0(\xi_1)} - p_0(\xi_2)\, G(\xi_2, \xi_1) \frac{1}{p_0(\xi_2)} = 0,$$

perciò la relazione fondamentale

$$(7) \qquad \boxed{\bar{G}(\xi_1, \xi_2) = G(\xi_2, \xi_1)}\,.$$

c) Si ha in particolare che se un sistema è autoaggiunto di ordine pari la sua funzione di Green è *simmetrica*

$$G(\xi_1, \xi_2) = G(\xi_2, \xi_1),$$

proprietà, che in un caso particolare, abbiamo verificato nel numero precedente; per un sistema autoaggiunto di ordine dispari si ha invece

$$G(\xi_1, \xi_2) = -G(\xi_2, \xi_1).$$

3. - *a*) Consideriamo il sistema differenziale lineare non omogeneo

$$(8_1) \qquad L(y) = p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = r(x), \quad (n \geq 2),$$

$$(8_2) \qquad \begin{aligned} U_i(y) = {} & \alpha_i y(a) + \alpha_i^{(1)} y'(a) + \dots + \alpha_i^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \\ & + \beta_i y(b) + \beta_i^{(1)} y'(b) + \dots + \beta_i^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) = \gamma_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

dove supponiamo $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n, r(x)$ continue in (a, b), $p_0(x) \neq 0$ in (a, b), $U_1, U_2, \dots, U_n$ linearmente indipendenti nelle

$y(a)$, $y'(a)$,...., $y^{(n-1)}(a)$; $y(b)$, $y'(b)$,...., $y^{(n-1)}(b)$, e le α_i, β_i, γ_i costanti.

Sia $y_1, y_2,...., y_n$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione

$$L(y)=0,$$

e y_0 una soluzione particolare dell'equazione (8_1); la più generale soluzione della (8_1) è data da

$$y=c_1y_1+c_2y_2+....+c_ny_n+y_0,$$

con $c_1, c_2,...., c_n$ costanti, e questa soddisferà le (8_2) se

$$(9)\qquad \begin{cases} c_1U_1(y_1)+c_2U_1(y_2)+....+c_nU_1(y_n)=\gamma_1-U_1(y_0), \\ \quad .... \qquad\qquad .... \\ c_1U_n(y_1)+c_2U_n(y_2)+....+c_nU_n(y_n)=\gamma_n-U_n(y_0). \end{cases}$$

Dal teorema di ROUCHÉ - CAPELLI abbiamo che quest'ultimo sistema e perciò *il sistema* (8_1), (8_2) *ammette soluzioni, allora e allora soltanto che le due matrici*

$$(10_1)\qquad \left\| \begin{matrix} U_1(y_1), & U_1(y_2),...., & U_1(y_n) \\ .... & & .... \\ U_n(y_1), & U_n(y_2),...., & U_n(y_n) \end{matrix} \right\|$$

$$(10_2)\qquad \left\| \begin{matrix} U_1(y_1), & U_1(y_2),...., & U_1(y_n), & \gamma_1-U_1(y_0) \\ .... & & .... & \\ U_n(y_1), & U_n(y_2),...., & U_n(y_n), & \gamma_n-U_n(y_0) \end{matrix} \right\|$$

abbiano la stessa caratteristica, e se il valore della caratteristica comune è $n-k$, *la soluzione del sistema* (8_1), (8_2) *dipende linearmente da* k *costanti arbitrarie.*

Insieme al sistema (8_1), (8_2) giova considerare il sistema ottenuto da esso facendo $r(x)=0$, $\gamma_i=0$, $(i=1, 2,...., n)$,

$$(11)\qquad \begin{cases} L(y)=0, \\ U_i(y)=0, \qquad (i=1, 2,...., n), \end{cases}$$

il quale prende il nome di *sistema ridotto.*

Se osserviamo che il sistema (8_1), (8_2) avrà una e una sola soluzione allora e allora soltanto che le matrici (10_1), (10_2) abbiano la caratteristica n, ovvero se il sistema (11) è incompatibile, concludiamo che *condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema* (8_1), (8_2) *abbia una sola soluzione è che il suo sistema ridotto* (11) *sia incompatibile.*

b) Supponiamo che nelle (8_2) sia $\gamma_1=\gamma_2=....=\gamma_n=0$, si abbia cioè il sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} L(y)=r(x), & \\ U_i(y)=0, & (i=1,2,....,n), \end{array}\right. \tag{12}$$

e supponiamo anche che il sistema ridotto (11) sia incompatibile.

Vogliamo dimostrare che *se* $G(x,\xi)$ *è la funzione di Green del sistema* (11), *la soluzione del sistema* (12) *è data da*

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)\,r(\xi)\,d\xi. \tag{13}$$

Infatti da questa, per la continuità in (a,b) delle derivate di $G(x,\xi)$ rispetto ad x fino all'ordine $n-2$, si ha

$$y^{(k)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial x^k}\,r(\xi)\,d\xi, \qquad (k=1,2,....,n-2); \tag{14_1}$$

si ha pure

$$\begin{aligned} y^{(n-1)}(x) &= \frac{d}{dx}\left[\int_a^x \frac{\partial^{n-2}G}{\partial x^{n-2}}\,r(\xi)\,d\xi+\int_x^b \frac{\partial^{n-2}G}{\partial x^{n-2}}\,r(\xi)\,d\xi\right] \\ &= \int_a^x \frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}r(\xi)d\xi+G_{x^{n-2}}(x,x)r(x)+ \\ &\qquad\qquad + \int_x^b \frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}r(\xi)d\xi-G_{x^{n-2}}(x,x)\,r(x), \end{aligned}$$

perciò

$$y^{(n-1)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\,r(\xi)\,d\xi; \tag{14_2}$$

si ha poi con lo stesso procedimento

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= \int_a^b \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}\,r(\xi)\,d\xi+r(x)\ [G_{x^{n-1}}(x,x-0)-G_{x^{n-1}}(x,x+0)] \\ &= \int_a^b \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}\,r(\xi)\,d\xi+r(x)\ [G_{x^{n-1}}(x+0,x)-G_{x^{n-1}}(x-0,x)] \end{aligned}$$

quindi

$$(14_3) \qquad y^{(n)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}\, r(\xi)\, d\xi+\frac{r(x)}{p_0(x)},$$

e dalle (14_1), (14_2), (14_3) si ha

$$L(y)=\int_a^b L[G(x,\xi)]\, r(\xi)\, d\xi+r(x)=r(x).$$

Si ha pure

$$U_i(y)=\int_a^b U_i(G)\, r(\xi)\, d\xi=0, \qquad (i=1,\, 2,\ldots,\, n),$$

e resta così verificato che la (13) dà la soluzione del sistema (11).

c) Più in generale facciamo l'ipotesi che *il sistema* (8_1), (8_2) *abbia una sola soluzione*, e sia perciò incompatibile il sistema ridotto (11).

Se indichiamo ancora con $G(x, \xi)$ *la funzione di Green del sistema ridotto* (11) *e con* $G_i(x)$ *la soluzione del sistema*

$$L[G_i]=0,$$
$$U_1(G_i)=\ldots=U_{i-1}(G_i)=0, \quad U_i(G_i)=1, \quad U_{i+1}(G_i)=\ldots=U_n(G_i)=0,$$
$$(i=1,\, 2,\ldots,\, n),$$

[univocamente esistente per *a*)], possiamo provare come in *b*) che *la soluzione del sistema* (8_1), (8_2) *ha l'espressione*

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi+\gamma_1 G_1(x)+\gamma_2 G_2(x)+\ldots+\gamma_n G_n(x).$$

4. - Consideriamo il sistema differenziale

$$(15) \qquad \begin{cases} L(y)=g(x)\, y+r(x), \\ U_i(y)=\gamma_i, \qquad (i=1,\, 2,\ldots,\, n), \end{cases}$$

dove per $L(y)$, $U_i(y)$, $r(x)$ facciamo le ipotesi dichiarate nel n. 3 *a*), e supponiamo inoltre $g(x)$ continua in (a, b).

Se facciamo ancora l'ipotesi che il sistema

$$(11) \qquad \begin{cases} L(y)=0, \\ U_i(y)=0, \qquad (i=1,\, 2,\ldots,\, n), \end{cases}$$

sia incompatibile, abbiamo in virtù dei risultati del n. 3 *c*) che se $G(x, \xi)$ è la funzione di Green del sistema (11), ogni soluzione $y(x)$ del sistema (15) soddisfa l'equazione integrale

$$y(x)=\int_a^b G(x, \xi)\,[g(\xi)\,y(\xi)+r(\xi)]\,d\xi+\gamma_1 G_1(x)+\dots+\gamma_n G_n(x)$$

e inversamente.

Se poniamo

$$K(x, \xi)=G(x, \xi)\,g(\xi)$$

$$f(x)=\gamma_1 G_1(x)+\dots+\gamma_n G_n(x)+\int_a^b G(x, \xi)\,r(\xi)\,d\xi$$

le espressioni di $K(x, y)$, $f(x)$ possiamo *supporle note* quando si conosca l'integrale generale dell'equazione $L(y)=0$, e si avrà allora per $y(x)$ l'equazione integrale di seconda specie di Fredholm

$$y(x)=f(x)+\int_a^b K(x, \xi)\,y(\xi)\,d\xi\,. \tag{16}$$

Abbiamo dunque che *nell'ipotesi che il sistema* (11) *sia incompatibile, il sistema* (15) *e l'equazione integrale* (16) *sono equivalenti*, nel senso che ogni soluzione del sistema (15), supposta esistente, soddisfa la (16), e inversamente ([1]).

5. - *a*) In analogia agli studi del Capitolo IV, prenderemo d'ora innanzi in considerazione dei sistemi differenziali contenenti un parametro, soffermandoci dapprima sul caso omogeneo.

Sia dato il sistema differenziale

$$\left\{\begin{aligned} &L(y)+\lambda y=p_0\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+(p_n+\lambda)\,y=0,\\ &U_i(y)=\alpha_i\,y(a)+\alpha_i^{(1)}y'(a)+\dots+\alpha_i^{(n-1)}y^{(n-1)}(a)+\\ &\qquad\qquad+\beta_i\,y(b)+\beta_i^{(1)}y'(b)+\dots+\beta_i^{(n-1)}y^{(n-1)}(b)=0,\\ &\qquad\qquad\qquad (i=1, 2,\dots, n), \end{aligned}\right. \tag{17}$$

([1]) Per la riduzione dei sistemi differenziali alle equazioni integrali, anche in casi più generali, cfr. M. Picone: *Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), XV, (1932), pp. 942-948.

dove $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sono funzioni continue di x in (a, b), indipendenti dal parametro λ, $p_0(x) \neq 0$ in (a, b), le α e β costanti, e le $U_1, U_2, \ldots, U_n$ considerate come forme nelle $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a)$; $y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$ siano linearmente indipendenti.

Se il sistema

$$\begin{cases} L(y) = 0, \\ U_i(y) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

è incompatibile, e indichiamo con $G(x, \xi)$ la corrispondente funzione di Green [n. 2], per i risultati del n. 4 *il sistema* (17) *è equivalente all'equazione integrale omogenea di seconda specie*

$$[g(x) = -\lambda, \quad r(x) \equiv 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0]$$

$$y(x) + \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0. \tag{18}$$

Se poniamo

$$G\begin{pmatrix} \xi_1, & \xi_2, \ldots, & \xi_p \\ \xi_1, & \xi_2, \ldots, & \xi_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} G(\xi_1, \xi_1), & G(\xi_1, \xi_2), \ldots, & G(\xi_1, \xi_p) \\ G(\xi_2, \xi_1), & G(\xi_2, \xi_2), \ldots, & G(\xi_2, \xi_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G(\xi_p, \xi_1), & G(\xi_p, \xi_2), \ldots, & G(\xi_p, \xi_p) \end{vmatrix},$$

dalla teoria generale delle equazioni integrali è noto che (¹)

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{(p)} G\begin{pmatrix} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p \end{pmatrix} d\xi_1 \; d\xi_2 \ldots \; d\xi_p$$

è una trascendente intera in λ e che l'*equazione* (18) *ammette soluzioni allora e allora soltanto che λ sia uno zero di $D(\lambda)$*

$$D(\lambda) = 0,$$

o come dicesi sia λ un *autovalore.*

Dal così detto *secondo teorema di Fredholm* si ha inoltre che se λ è uno zero multiplo di ordine m dell'equazione $D(\lambda) = 0$,

---

(¹) Cfr. ad es. É. Goursat: *Cours d'Analyse Mathématique,* T. III, (4.ª éd., Paris, 1927), Cap. XXXI, p. 368 e segg., in particolare p. 380.

l'equazione (18), e perciò il sistema (17), ammette k soluzioni linearmente indipendenti con $0<k\leqslant m$, o come si dice vi sono k *autofunzioni* linearmente indipendenti che lo soddisfano, [il sistema (17) ha perciò l'indice k].

Qui è opportuno notare che non sempre assegnato un sistema differenziale della forma (17) esistono autovalori e autofunzioni corrispondenti; vedremo però nel prossimo numero, che limitandoci a sistemi autoaggiunti di ordine pari, esistono infiniti autovalori e tutti reali.

b) Consideriamo ora il sistema differenziale non omogeneo

$$(19)\quad \begin{cases} L(y)+\lambda y \equiv p_0 \dfrac{d^n y}{dx^n} + p_1 \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}\dfrac{dy}{dx} + (p_n+\lambda)\, y = r(x), \\ U_i(y)=0, \qquad (i=1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

dove per i coefficienti $p_0, p_1, \dots, p_n$ e le forme U_i facciamo le ipotesi dichiarate in a); supporremo ancora che p_i, $(i=1, 2, \dots, n)$, ammetta derivata continua di ordine $n-i$ in (a, b), ed $r(x)$ continua in (a, b).

Se il sistema

$$(20)\qquad \begin{cases} L(y)=0, \\ U_i(y)=0, \qquad (i=1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

è incompatibile, e $G(x.\ \xi)$ è la corrispondente funzione di GREEN, il sistema (19) è equivalente all'equazione integrale [n. 4]

$$(21_1)\qquad y(x)+\lambda \int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x),$$

dove

$$(21_2)\qquad f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi.$$

Facciamo ancora l'ipotesi che il sistema

$$(22)\qquad \begin{cases} L(y)+\lambda y=0, \\ U_i(y)=0, \qquad (i=1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

per un assegnato valore di λ, sia incompatibile, ossia λ *non sia un autovalore*; per i risultati del n. 3, a) il sistema (19), e di conseguenza l'equazione (21_1), ammette una e una sola soluzione.

L'ipotesi fatta sul sistema (22) implica l'incompatibilità del suo sistema aggiunto [§ 2, n. 3, b)]

$$(23) \qquad \begin{cases} M(z)+\lambda z=0, \\ V_i(z) \quad =0, \qquad (i=1, 2,\dots, n), \end{cases}$$

e di quest'ultimo indicheremo con $\Gamma(x, \xi; \lambda)$ la corrispondente funzione di GREEN.

Se nella (5) del § 2, n. 2 facciamo $y=G(x, \xi_1)$, $z=\Gamma(x, \xi_2; \lambda)$, e ripetiamo il ragionamento del n. 2, b) di questo paragrafo, troviamo

$$\lambda \int_a^b G(x, \xi_1)\, \Gamma(x, \xi_2; \lambda)\, dx = -\Big[\psi(y, z)\Big]_{\xi_1-0}^{\xi_1+0} - \Big[\psi(y, z)\Big]_{\xi_2-0}^{\xi_2+0},$$

e perciò

$$(24) \qquad \lambda \int_a^b G(x, \xi_1)\, \Gamma(x, \xi_2; \lambda)\, dx = G(\xi_2, \xi_1) - \Gamma(\xi_1, \xi_2; \lambda).$$

Da quest'ultima segue facilmente che per il considerato valore di λ l'equazione integrale (21_1) ha la soluzione

$$(25) \qquad y(x)=f(x)-\lambda \int_a^b \Gamma(\xi, x; \lambda)\, f(\xi)\, d\xi;$$

infatti la (24) è una delle equazioni caratteristiche del nucleo risolvente della (21_1) [1].

Peraltro la (25) si prova col seguente ragionamento; si cangi nella (21_1) x in ξ, si moltiplichi per $\lambda\Gamma(\xi, x; \lambda)$, e si integri tra a e b; si ottiene

$$\lambda \int_a^b \Gamma(\xi, x; \lambda)\, y(\xi)\, d\xi + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b G(\xi, \xi_1)\, \Gamma(\xi, x; \lambda)\, y(\xi_1)\, d\xi\, d\xi_1$$
$$= \lambda \int_a^b \Gamma(\xi, x; \lambda)\, f(\xi)\, d\xi,$$

---

[1] Cfr. ad es. É. GOURSAT, op. cit., p. 350, oppure M. PICONE: *Appunti di Analisi Superiore*, [Napoli, 1940], p. 567.

e per la (24),

$$\lambda \int_a^b \Gamma(\xi, x; \lambda)\, y(\xi)\, d\xi + \lambda \int_a^b [G(x, \xi_1) - \Gamma(\xi_1, x; \lambda)]\, y(\xi_1)\, d\xi_1 = \\ = \lambda \int_a^b \Gamma(\xi, x; \lambda)\, f(\xi)\, d\xi,$$

da cui

$$\lambda \int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = \lambda \int_a^b \Gamma(\xi, x; \lambda)\, f(\xi)\, d\xi,$$

e perciò la (25).

6. - *a*) Riprendiamo il sistema

$$(17) \quad \begin{cases} L(y) + \lambda y \equiv p_0 \dfrac{d^n y}{dx^n} + p_1 \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \dfrac{dy}{dx} + (p_n + \lambda)\, y = 0, \\ \qquad U_i(y) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

considerato nel n. 5, *a*), e i coefficienti p_i di $L(y)$ e le $U_i(y)$ soddisfino le ipotesi dichiarate in 5, *a*) e *b*), e supponiamo ancora ***n pari*** e il sistema

$$\begin{cases} L(y) = 0, \\ U_i(y) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

autoaggiunto e incompatibile, [$\lambda = 0$ non è autovalore].

Come abbiamo già visto, il sistema (17) è equivalente all'equazione integrale omogenea di seconda specie

$$(18) \qquad y(x) + \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0,$$

e il nucleo $G(x, \xi)$ è ***simmetrico*** [n. 2, *c*)].

Il nucleo $G(x, \xi)$ è ***chiuso***, cioè non può esistere una funzione $r(x)$ continua, non identicamente nulla, tale che

$$\psi(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi = 0$$

qualunque sia x in (a, b), perchè in caso opposto la funzione

$y=\psi(x)\,[\equiv 0]$ soddisfa il sistema [n. 3, b)]

$$\begin{cases} L(y)=r(x), \\ U_i(y)=0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

e poichè è ora $L(y)\equiv 0$ ne viene $r(x)\equiv 0$ contro l' ipotesi.

Da risultati noti della teoria delle equazioni integrali segue che esistono infiniti valori di λ, *autovalori*, per i quali la (18) ammette soluzioni non identicamente nulle; gli autovalori sono tutti reali e possono ordinarsi in una successione $\{\lambda_N\}$ con i termini non decrescenti in valore assoluto, e dove ogni λ_N sarà scritto tante volte quante sono le autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti.

Se con φ_N indichiamo l'autofunzione corrispondente a λ_N, si ha

$$(26) \qquad \varphi_N(x)+\lambda_N\int_a^b G(x, \xi)\,\varphi_N(\xi)\,d\xi=0, \qquad (N=1, 2, \ldots),$$

ed è inoltre lecito supporre che la successione $\{\varphi_N(x)\}$ formi un *sistema ortogonale e normale in* (a, b)

$$(27) \quad \int_a^b \varphi_N^2(x)\,dx=1, \quad \int_a^b \varphi_N(x)\,\varphi_M(x)\,dx=0, \qquad (N\neq M) \quad (^1).$$

---

(1) Cfr. É. Goursat, op. cit. Cap. XXXII, pp. 439-446. La seconda delle (27), quando le autofunzioni φ_N e φ_M corrispondono a due autovalori diversi λ_N e λ_M si prova subito in questo modo. Si ha

$$(\lambda_N-\lambda_M)\varphi_N(x)\,\varphi_M(x)=$$
$$=-\lambda_N\lambda_M\,\varphi_N(x)\int_a^b G(x, \xi)\,\varphi_M(\xi)\,d\xi+\lambda_N\lambda_M\,\varphi_M(x)\int_a^b G(x, \xi)\,\varphi_N(\xi)\,d\xi,$$

$$(\lambda_N-\lambda_M)\int_a^b \varphi_N(x)\,\varphi_M(x)\,dx=$$
$$=-\lambda_N\lambda_M\left[\int_a^b\!\!\int_a^b G(x, \xi)\,\varphi_N(x)\,\varphi_M(\xi)\,dx\,d\xi-\int_a^b\!\!\int_a^b G(x, \xi)\,\varphi_N(\xi)\,\varphi_M(x)\,dx\,d\xi\right]$$

e cangiando nell'ultimo integrale del secondo membro x con ξ, e tenendo

Ritornando al *sistema* (17) abbiamo che esso *ammette soluzioni non identicamente nulle allora e allora soltanto che il parametro λ coincida con un autovalore λ_N, e se nella successione $\{\lambda_N\}$ vi sono k valori uguali a λ_N, e di essi λ_N è l'autovalore di indice minore, tutte le soluzioni del sistema quando sia $\lambda = \lambda_N$ sono date da*

$$y = c_1 \varphi_N(x) + \dots + c_k \varphi_{N+k-1}, \qquad [\lambda_N = \lambda_{N+1} = \dots = \lambda_{N+k-1}],$$

con $c_1, c_2, \dots, c_k$ costanti arbitrarie.

b) Relativamente agli sviluppi in serie di autofunzioni vale il seguente teorema di HILBERT e SCHMIDT: *Ogni funzione $F(x)$ della forma*

$$F(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi, \tag{28}$$

ove $h(\xi)$ è una funzione integrabile col suo quadrato in (a, b), *ammette lo sviluppo in serie di Fourier*

$$F(x) = \sum_{N=1}^{\infty} c_N \varphi_N(x), \tag{29}$$

con

$$c_N = \int_a^b F(\xi)\, \varphi_N(\xi)\, d\xi, \qquad (N = 1, 2, \dots), \tag{30}$$

e la serie (29) *è uniformemente e assolutamente convergente in* (a, b).

Anche per questo risultato rimandiamo il lettore alla teoria delle equazioni integrali [1].

---

conto della simmetria di $G(x, \xi)$,

$$(\lambda_N - \lambda_M) \int_a^b \varphi_N(x)\, \varphi_M(x)\, dx = 0,$$

da cui per $\lambda_N - \lambda_M \neq 0$ la seconda delle (27).

Nel n. 2 del § 4 daremo una dimostrazione di L. TONELLI, fondata sul suo *Metodo diretto del Calcolo delle Variazioni*, dell'esistenza di un'autofunzione relativa all'equazione integrale (26).

[1] Cfr. ad es. É. GOURSAT, op. cit., p. 446.

§ 4. - I problemi ai limiti per i sistemi autoaggiunti di ordine pari, e il Calcolo delle Variazioni.

1. Proprietà hilbertiana di estremo degli autovalori dedotta dalla teoria delle equazioni integrali. - 2. Dimostrazione di TONELLI dell'esistenza di autovalori col metodo diretto del Calcolo delle Variazioni. - 3. Proprietà hilbertiana di estremo degli autovalori dedotta dalla teoria dei sistemi differenziali. Dimostrazione di PICONE. - 4. Una disuguaglianza integrale.

1. - Abbiamo ricondotto la determinazione degli autovalori relativi al sistema differenziale autoaggiunto (17) del n. 6, a), del § 3, alla determinazione degli autovalori relativi all'equazione integrale (18) dello stesso numero citato, autovalori i quali godono le classiche proprietà di estremo poste in luce da HILBERT [1], espresse dal seguente teorema.

Un nucleo $K(x, y)$ simmetrico $[K(y, x)=K(x, y)]$ nel quadrato di vertici opposti (a, a), (b, b) sia ivi *definito positivo* o *semidefinito positivo* (negativo), cioè qualunque sia la funzione $\varphi(x)$ integrabile col suo quadrato riesca

$$I[\varphi]=\int_a^b\int_a^b K(x, y)\,\varphi(x)\,\varphi(y)\,dxdy \geqslant 0, \qquad [\leqslant 0] \quad [2].$$

Sia $\{\lambda_m\}$ la successione degli autovalori relativi all'equazione integrale

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy, \quad [3]$$

e $\{\varphi_m(x)\}$ la corrispondente successione ortogonale e normale di

---

(1) Cfr. D. HILBERT: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, (1904), (pp. 49-91), p. 78.

(2) Se vale sempre il segno $>$, $[<]$, il nucleo si dice *definito*, se alle volte il segno $>$, $[<]$, e alle volte il segno $=$, *semidefinito*. Tali definizioni restano invariate anche se $K(x, y)$ non è simmetrico.

(3) Ovviamente si passa da questa equazione alla (18) del § 3, facendo $K(x, y)= - G(x, y)$.

autofunzioni,

$$\varphi_m(x) = \lambda_m \int_a^b K(x, y)\, \varphi_m(y)\, dy,$$

$$\int_a^b \varphi_m^2(x)\, dx = 1\,; \qquad \int_a^b \varphi_r(x)\, \varphi_s(x)\, dx = 0, \qquad (r \neq s).$$

In queste ipotesi gli autovalori λ_m formano una successione a termini positivi (negativi) che possiamo pensare ordinata in ordine non decrescente (non crescente)

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_m \leqslant \dots\,;$$

l'inverso $1/\lambda_1$ del primo autovalore rappresenta il massimo dell'integrale $I[\varphi]$ rispetto a tutte le funzioni $\varphi(x)$ integrabili con il loro quadrato in (a, b), tali che

$$\int_a^b \varphi^2(x)\, dx = 1,$$

e tale massimo è raggiunto allora e allora soltanto che $\varphi(x)$ risulti una combinazione lineare a coefficienti costanti delle autofunzioni corrispondenti all'autovalore λ_1.

Così pure se $\lambda_{m-1} < \lambda_m$, il reciproco $1/\lambda_m$, dell'm^{esimo} autovalore, rappresenta il massimo di $I[\varphi]$ rispetto a tutte le funzioni $\varphi(x)$ integrabili con il loro quadrato in (a, b) le quali soddisfano le condizioni

$$\int_a^b \varphi^2(x)\, dx = 1, \qquad \int_a^b \varphi(x)\, \varphi_r(x)\, dx = 0, \qquad (r = 1, 2, \dots, m-1),$$

e tale massimo è raggiunto allora e allora soltanto che $\varphi(x)$ risulti una combinazione lineare a coefficienti costanti delle autofunzioni φ_m, $\varphi_{m+1} \dots$ corrispondenti all'autovalore λ_m $[\lambda_m = \lambda_{m+1} = \dots]$.

2. - La proposizione di HILBERT ora ricordata esprime una proprietà caratteristica per le autofunzioni, cosicchè prescindendo dalla teoria delle equazioni integrali si potrà stabilire l'esistenza delle autofunzioni delle equazioni integrali a nucleo simmetrico [e dei corrispondenti sistemi differenziali autoaggiunti] con l'ausilio

del calcolo delle variazioni. Qui esporremo una notevole dimostrazione di esistenza di autofunzioni elaborata da L. TONELLI con il suo metodo diretto ([1]); per semplicità faremo $a=0$, $b=1$, e per maggiore generalità in questo numero e nel successivo ci riferiremo a funzioni integrabili nel senso di LEBESGUE.

a) Sia $K(x, z)$ integrabile insieme con $K^2(x, z)$ nel quadrato Q di vertici opposti $(0, 0)$, $(1, 1)$ e non generalmente nulla in Q. Consideriamo l'integrale

$$I[\varphi]=\int_0^1\int_0^1 K(x, z)\,\varphi(x)\,\varphi(z)\,dx dz$$

per ogni funzione che diremo della classe (C) integrabile insieme col proprio quadrato in $(0, 1)$ e tale che

$$\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx=1.$$

Per studiare gli estremi di $I[\varphi]$ in (C), consideriamo la classe (A) delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in $(0, 1)$ tali che abbiano la derivata prima (quasi ovunque) a quadrato integrabile, e che soddisfino alle condizioni

$$(1) \qquad y(0)=0, \qquad \int_0^1 y'^2 dx \leqslant 1.$$

Consideriamo, nella classe (A), l'integrale

$$I[y']=\int_0^1\int_0^1 K(x, z)\,y'(x)\,y'(z)\,dx dz;$$

per la limitazione di BUNIKOWSKY - SCHWARZ si ha

$$I^2[y'] \leqslant \int_0^1\int_0^1 K^2(x, z)\,dx dz \int_0^1\int_0^1 y'^2(x)\,y'^2(z)\,dx dz \leqslant \int_0^1\int_0^1 K^2(x, z)\,dx dz,$$

([1]) A L. TONELLI, che ha voluto comunicarmi gentilmente la sua dimostrazione, rivolgo il mio cordiale ringraziamento. Il lettore troverà la questione inquadrata in un problema più generale di Calcolo delle Variazioni nella memoria di L. TONELLI: *Su alcuni funzionali*, Ann. di Mat. pura ed appl., (4), 18, (1939), pp. 1-21.

e pertanto $I[y']$ risulta limitato in (A), ed ha perciò finiti i suoi estremi in tale classe.

b) Dimostriamo che $I[y']$ è un funzionale continuo in (A), nel senso che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si può trovare un $\delta > 0$, tale che, se $y(x)$ e $y_0(x)$ sono due qualunque funzioni di (A) soddisfacenti ovunque alla condizione $|y(x) - y_0(x)| < \delta$, risulta $|I[y'] - I[y_0']| < \varepsilon$.

Poniamo per n intero positivo

$$\begin{array}{lll} K_n(x, z) = K(x, z), & \text{ove sia} & -n \leqslant K(x, z) \leqslant n, \\ K_n(x, z) = -n, & \text{ove sia} & K(x, z) < -n, \\ K_n(x, z) = n, & \text{ove sia} & K(x, z) > n. \end{array}$$

Abbiamo, qualunque sia la $y(x)$ di (A),

$$\left| I[y'] - \int_0^1\!\!\int_0^1 K_n(x, z) y'(x) y'(z)\, dx dz \right| = \left| \int_0^1\!\!\int_0^1 \{K - K_n\} y'(x) y'(z)\, dx dz \right|$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^1\!\!\int_0^1 (K - K_n)^2\, dx dz \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \iint_{E_n} K^2 dx dz \right\}^{1/2},$$

dove abbiamo indicato con E_n l'insieme dei punti in cui è $K(x, z) < -n$, oppure $K(x, z) > n$.

Per l'integrabilità di $K^2(x, z)$ in Q, si può trovare un $\bar{n}$ sufficientemente grande tale che

$$\iint_{E_{\bar{n}}} K^2 dx dz < \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^2,$$

e perciò per tutte le $y(x)$ di (A)

$$\left| I[y'] - \int_0^1\!\!\int_0^1 K_{\bar{n}}(x, z) y'(x) y'(z)\, dx dz \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Sia ora $P_\nu(x, z)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ una successione di polinomi tale che sia sempre $|P_\nu(x, z)| < \bar{n} + 1$ e $P_\nu(x, z)$ converga per $\nu \to \infty$ quasi ovunque verso $K_{\bar{n}}(x, z)$ [1].

---

[1] Cfr. L. Tonelli: *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, XXIX (1910), (pp. 1-36), pp. 19-20.

Avremo allora per ogni ν e per qualsiasi $y(x)$ di (A)

$$\left|\int_0^1\int_0^1 K_{\bar{n}}(x,z)\,y'(x)\,y'(z)\,dxdz - \int_0^1\int_0^1 P_\nu(x,z)\,y'(x)\,y'(z)\,dxdz\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1 (K_{\bar{n}}-P_\nu)^2 dxdz\right\}^{1/2}.$$

Per $\bar{\nu}$ sufficientemente grande è

$$\int_0^1\int_0^1 (K_{\bar{n}}-P_{\bar{\nu}})^2\,dxdz < \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^2$$

e perciò per *tutte* le $y(x)$ di (A)

$$\left|\int_0^1\int_0^1 K_{\bar{n}}(x,z)\,y'(x)\,y'(z)\,dxdz - \int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)\,y'(x)\,y'(z)\,dxdz\right| < \frac{\varepsilon}{6},$$

ed anche

$$\left|I[y'] - \int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)\,y'(x)\,y'(z)\,dxdz\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Siano ora $y(x)$, $y_0(x)$ due qualsiasi funzioni di (A), tali che in tutto $(0, 1)$ risulti $|y(x)-y_0(x)| < \delta$. È

$$\Delta = \int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)\,y'(x)\,y'(z)\,dxdz - \int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)\,y_0'(x)\,y_0'(z)\,dxdz =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)\,\{y'(x)y'(z) - y_0'(x)y'(z) + y_0'(x)y'(z) - y_0'(x)y_0'(z)\}\,dxdz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)y'(z)\,\{y'(x)-y_0'(x)\}\,dxdz +$$
$$+ \int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)y_0'(x)\,\{y'(z)-y_0'(z)\}\,dxdz$$

$$= \int_0^1 y'(z)dz\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)\,\{y'(x)-y_0'(x)\}\,dx +$$
$$+ \int_0^1 y_0'(x)\,dx\int_0^1 P_\nu(x,z)\,\{y'(z)-y_0'(z)\}\,dz.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)\{y'(x)-y_0'(x)\}\,dx =$$
$$=\{y(1)-y_0(1)\}\,P_{\bar{\nu}}(1,z)-\int_0^1\{y(x)-y_0(x)\}\frac{\partial}{\partial x}P_{\bar{\nu}}(x,z)\,dx$$

$$\left|\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)\,\{y'(x)-y_0'(x)\}\,dx\right| < \delta L$$

ove con $L/2$ abbiamo indicato un numero positivo maggiore di $|P_{\bar{\nu}}(x,y)|$ $\left|\frac{\partial}{\partial x}P_{\bar{\nu}}(x,y)\right|$, $\left|\frac{\partial}{\partial y}P_{\bar{\nu}}(x,y)\right|$ in tutto Q. Abbiamo allora

$$|\varDelta| < \delta L\left\{\int_0^1|y'(z)|\,dz+\int_0^1|y_0'(x)|\,dx\right\},$$

ma

$$\left\{\int_0^1|y'(z)|\,dz\right\}^2 \leqslant \left\{\int_0^1 y'^2(z)dz\right\}\left\{\int_0^1 dz\right\} \leqslant 1, \qquad \int_0^1|y_0'(x)| \leqslant 1,$$

quindi

$$|\varDelta| < 2\delta L$$

e perciò se è $\delta < \varepsilon/6L$,

$$|I[y']-I[y_0']| \leqslant \left|I(y')-\int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)y'(x)y'(z)\,dxdz\right|$$
$$+\left|I(y_0')-\int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)y_0'(x)y_0'(z)\,dxdz\right|$$
$$+\left|\int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)y'(x)y'(z)dxdz-\right.$$
$$\left.-\int_0^1\int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x,z)y_0'(x)y_0'(z)dxdz\right| < \varepsilon.$$

c) Ciò posto, indichiamo con M l'estremo superiore di $I[y']$ in (A), e sia $y_1(x)$, $y_2(x)$,...., una successione massimizzante $I[y']$ in (A), tale cioè che la successione $\{I[y_n']\}$ abbia per estremo superiore M.

Se E è un insieme di intervalli (a_1, b_1), (a_2, b_2),...., (a_s, b_s) di $(0, 1)$ non ricoprentisi si ha

$$\left[\sum_{r=1}^{s} |y(a_r)-y(b_r)|\right]^2 \leq \left[\int_E |y'(x)|\, dx\right]^2 \leq \int_E dx \int_E y'^2 dx \leq \text{mis}\, E,$$

e poichè $y_n(0)=0$ segue che le $y_n(x)$ sono tutte equiassolutamente continue ed ugualmente limitate in $(0, 1)$, e dalla successione scritta se ne può estrarre un'altra (che per semplicità di scrittura supporremo coincidente con la successione iniziale) convergente uniformemente verso una funzione $y_\infty(x)$, assolutamente continua, tale che $y_\infty(0)=0$ (1).

Dalla semicontinuità inferiore dell'integrale $\int_0^1 y'^2 dx$, e dalla seconda delle (1) si ha

$$\int_0^1 y_\infty'^2(x) \leq 1$$

perciò $y_\infty(x)$ appartiene alla classe (A), e dalla continuità di $I[y']$ in (A) segue allora, essendo $\lim_{n\to\infty} I[y_n']=M$,

$$I[y'_\infty]=M.$$

Dunque $y'_\infty(x)$ dà il massimo assoluto di $I[y']$ in (A).

Supponiamo che sia $M>0$ (2) e proviamo che deve essere $\int_0^1 y_\infty'^2(x)dx=1$. Non può essere $\int_0^1 y_\infty'^2(x)dx=0$, perchè ne verrebbe $y'_\infty(x)=0$ quasi ovunque in $(0, 1)$ e perciò $I[y'_\infty]=M=0$; se fosse $\int_0^1 y_\infty'^2(x)\, dx<1$ poniamo

$$c^2=1/\int_0^1 y_\infty'^2(x)\, dx, \qquad c^2>1,$$

ne verrebbe

$$I[cy'_\infty]=c^2 I[y'_\infty]=c^2 M>M$$

---

(1) Cfr. ad es. L. Tonelli: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, I, (Bologna, 1922), p. 86; oppure Cap. I, § 6, n. 2, nota (1), c) di p. 38.

(2) Si può dimostrare che l'estremo superiore di $I[\varphi]$ in (C) non può mai essere negativo. Cfr. L. Tonelli, mem. cit. al n. 2, a), p. 7.

il che è impossibile, perchè anche la funzione $cy'_\infty(x)$ appartiene alla classe (A). Dunque è

$$\int_0^1 y'^2_\infty(x)\,dx=1$$

e la $y'_\infty(x)$ dà il massimo di $I[\varphi]$ nella classe (C), perchè il massimo di $I[\varphi]$ in (C) non può superare quello di $I[y']$ in (A): infatti ad ogni elemento $\varphi(x)$ di (C) corrisponde in (A) l'elemento

$$y(x)=\int_0^x \varphi(x)dx.$$

Si è dunque dimostrata l'esistenza del massimo (*assoluto*) *di* $I[\varphi]$ *in* (C), *nell'ipotesi* $M>0$.

Se perciò l'estremo superiore di $I[\varphi]$ in (C) è >0, l'esistenza del massimo indicato è provata. In particolare si ha tale esistenza se il nucleo $K(x, z)$ è *definito positivo* o anche soltanto *semidefinito positivo.* [Cfr. n. 1].

Analoghe conclusioni si hanno per il minimo (assoluto), se l'estremo inferiore di $I[\varphi]$ in (C) è <0; se $I[\varphi]$ non è in (C) sempre >0 e neppure sempre <0, $I[\varphi]$ ha in (C) tanto il massimo quanto il minimo.

d) Supponiamo ora che il nucleo $K(x, z)$ sia *simmetrico*, oltre che soddisfare alle ipotesi di essere integrabile col suo quadrato $K^2(x, z)$, e di non essere generalmente nullo.

Ammesso che $\varphi_0(x)$ sia una funzione massimante (o minimante) $I[\varphi]$ in (C), e supposto che *non* sia $M=0$, proviamo che $\varphi_0(x)$ è un'autofunzione per $K(x, z)$.

Sia $g(x)$ una qualsiasi funzione integrabile, in $(0, 1)$, insieme col suo quadrato, e consideriamo la funzione $\varphi_0+\eta\varphi_0+\varepsilon g$, dove η e ε sono due parametri indipendenti da x. Questa funzione è integrabile insieme col suo quadrato, e noi determineremo η in funzione di ε, $\eta=\eta(\varepsilon)$, in modo che si abbia

$$\int_0^1 \{\varphi_0+\eta\varphi_0+\varepsilon g\}^2 dx=1,$$

e che risulti $\eta(0)=0$. Ciò è possibile perchè è

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^1(\varphi_0+\eta\varphi_0+\varepsilon g)^2dx=$$

$$=2\int_0^1\varphi_0(\varphi_0+\eta\varphi_0+\varepsilon g)\,dx=$$

$$=2\left\{1+\eta+\varepsilon\int_0^1\varphi_0 g\,dx\right\}$$

derivata che per $\varepsilon=0$, $\eta=0$ è uguale a 2 ($\neq 0$). Dunque la $\eta(\varepsilon)$ è possibile determinarla e in modo unico in un intorno di $\varepsilon=0$, ed ivi risulta continua e derivabile; ed è

$$\eta'(0)=-\left[2\int_0^1 g(\varphi_0+\eta\varphi_0+\varepsilon g)dx/2\left\{1+\eta+\varepsilon\int_0^1\varphi_0 g\,dx\right\}\right]_{\varepsilon=0,\ \eta=0}$$

$$=-\int_0^1 g\varphi_0\,dx.$$

Poichè la funzione $\varphi_0+\eta(\varepsilon)\varphi_0+\varepsilon g$ appartiene alla classe (C), per ε in un certo intorno dello 0, per la proprietà massimante di φ_0 abbiamo

$$0=\left[\frac{d}{d\varepsilon}I[\varphi_0+\eta(\varepsilon)\varphi_0+\varepsilon g]\right]_{\varepsilon=0}=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 K(x,z)\left[\varphi_0(x)g(z)+\varphi_0(z)g(x)+2\varphi_0(x)\varphi_0(z)\eta'(0)\right]dx\,dz,$$

ed anche, poichè $K(x,z)=K(z,x)$,

$$0=\int_0^1\int_0^1 K(x,z)\left[\varphi_0(x)g(z)+\varphi_0(x)\varphi_0(z)\eta'(0)\right]dx\,dz$$

$$=\int_0^1\int_0^1 K(x,z)\varphi_0(x)g(z)\,dx\,dz-$$

$$-\left\{\int_0^1 g(x)\varphi_0(x)\,dx\right\}\left\{\int_0^1\int_0^1 K(x,z)\varphi_0(x)\varphi_0(z)\,dx\,dz\right\},$$

onde posto

$$h = \int_0^1\int_0^1 K(x, z)\varphi_0(x)\varphi_0(z)\,dx dz\ (= M),$$

$$0 = \int_0^1\int_0^1 K(x, z)\varphi_0(z)g(x)\,dx dz - h\int_0^1 \varphi_0(x)g(x)dx,$$

$$(2_1) \qquad 0 = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 K(x, z)\varphi_0(z)dz - h\varphi_0(x) \right\} g(x)\,dx.$$

Da quest'ultima per l'arbitrarietà della $g(x)$ segue quasi ovunque in $(0, 1)$

$$(2_2) \qquad \int_0^1 K(x, z)\varphi_0(z)dz - h\varphi_0(x) = 0,$$

perchè, se in un insieme E di $(0, 1)$, di misura positiva, fosse >0 il primo membro della (2_2), assumendo $g(x)$ uguale a tale primo membro in E e uguale a zero altrove, l'integrale (2_1) sarebbe >0 e non $=0$, e analogamente se in un insieme di misura positiva il primo membro della (2_2) fosse <0.

Posto ora

$$\overline{\varphi}_0(x) = \frac{1}{h}\int_0^1 K(x, z)\varphi_0(z)dz$$

è quasi ovunque $\overline{\varphi}_0(x) = \varphi_0(x)$, quindi

$$\int^1 K(x, z)\,\overline{\varphi}_0(x)dz - h\varphi_0(x) = 0$$

in tutto $(0, 1)$. E siccome per essere $(h=)M \neq 0$, $\varphi_0(x)$ non può essere nulla quasi ovunque, anche $\overline{\varphi}_0(x)$ non è nulla quasi ovunque, e la $\overline{\varphi}_0(x)$, funzione massimizzante di $I[\varphi]$ in (C) è un'*autofunzione*. L'autovalore corrispondente è

$$\lambda_0 = \frac{1}{h} = \frac{1}{M}.$$

Ma, se λ è autovalore e $\psi(x)$ l'autofunzione corrispondente, di quadrato integrabile, con $\int_0^1 \psi^2(x)dx=1$, è

$$\lambda \int_0^1 K(x, z)\, \psi(z)dz=\psi(x),$$

$$\lambda \int_0^1\int_0^1 K(x, z)\, \psi(z)\, \psi(x)\, dxdz=\int_0^1 \psi^2(x)dx=1,$$

e supposto $M>0$,

$$\lambda=1 \Big/ \int_0^1\int_0^1 K(x, z)\, \psi(z)\, \psi(x)\, dxdz \geqslant \frac{1}{M}=\frac{1}{h}=\lambda_0\,,$$

dunque se è $M>0$, λ_0 è il più piccolo degli autovalori.

3. - *a*) Come abbiamo visto nel paragrafo precedente [nn. 4 e 5] i problemi ai limiti per i sistemi differenziali possono farsi dipendere dalla teoria delle equazioni integrali, e per le cose ora dette ai nn. 1 e 2 di questo paragrafo gli stessi problemi possono collegarsi direttamente col calcolo delle variazioni.

Le prime applicazioni del calcolo delle variazioni ai problemi ai limiti per i sistemi differenziali del secondo ordine sono dovute a M. MASON (1). Per indicazioni sui lavori successivi il lettore potrà consultare un recente lavoro di W. T. REID (2) nel quale sono contenuti precisi riferimenti bibliografici sulle ricerche relative ai sistemi differenziali e al calcolo delle variazioni; noi però ci limitiamo soltanto a ricordare che con metodi propri del calcolo delle variazioni BLISS e SCHOENBERG hanno esteso ai sistemi differenziali lineari autoaggiunti del secondo ordine i teoremi di separazione, confronto, oscillazione (3).

(1) M. MASON: *On the boundary value problems of linear ordinary differential equations of second order*, Trans. of the Am. Soc., 7 (1906), pp. 337-360.

(2) W. T. REID: *Boundary value problems of the calculus of variations*, Bull. of the Am. Math. Soc., 43 (1937), pp. 633-666.

(3) G. A. BLISS, I. J. SCHOENBERG: *On separation, comparison and oscillation theorems for self-adjoint systems of linear second order differential equations*, Am. Journ. of Math., 53 (1931), pp. 781-800.

È inversamente manifesto che dai teoremi esistenziali relativi ai sistemi differenziali possono dedursi teoremi di calcolo delle variazioni; qui, basandoci sui risultati del Cap. IV, § 5, e seguendo M. PICONE (1) proveremo direttamente una proposizione di estremo, di tipo hilbertiano, [cfr. n. 1] per le autofunzioni di un particolare sistema differenziale del secondo ordine.

b) Siano $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $A(x)$ *continue in* (a, b), $\theta(x) > 0$, $A(x) > 0$, *e sia* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *la successione degli autovalori relativi al sistema differenziale*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta \frac{d\varphi_n}{dx}\right] + \lambda_n A \varphi_n = 0, \tag{3}$$

$$\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0. \tag{4}$$

I termini delle successioni $\{\lambda_n\}$ sono positivi e possiamo pensarli ordinati in ordine di grandezza crescente [Cap. IV, § 6, n. 6] e l'autofunzione $\varphi_n(x)$ corrispondente all'autovalore λ_n ha internamente ad (a, b) n zeri ed n soltanto.

Si consideri ora la classe (C) delle funzioni $u(x)$ *assolutamente continue* in (a, b), *con derivata prima* (esistente quasi ovunque) *di quadrato integrabile, che si annullino nei punti in cui si annulla* $\varphi_n(x)$, *e si ponga*

$$I_n[u] = \int_a^b \left[\theta \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \lambda_n A u^2\right] dx. \tag{5}$$

Vogliamo dimostrare che $I_n[u] \geqslant 0$, e *il segno uguale vale allora e allora soltanto che sia* $u(x) = k\varphi_n(x)$, *con* k *costante.*

---

(1) M. PICONE: *a) Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine*, Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (1), XI (1910), pp. 1-141; *b) Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie autoaggiunte*, Math. Zeitschr., 28 (1928), pp. 519-555. Per la redazione di questo n. ci siamo attenuti ai §§ 1, 2, 3 di quest'ultima memoria.

Per le proprietà di minimo degli autovalori relative a particolari equazioni del quarto ordine, cfr. G. CIMMINO: *Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte di ordine superiore*, Math. Zeitschr., 32 (1930), (pp. 1-58), pp. 52-58.

Infatti le funzioni u/φ_n, u^2/φ_n sono finite e continue in (a, b) e si ha

$$\frac{d}{dx}\frac{u^2}{\varphi_n} = 2\frac{u}{\varphi_n}\frac{du}{dx} - \frac{u^2}{\varphi_n^2}\frac{d\varphi_n}{dx};$$

si ha pure dalla (3)

$$-\int_a^b \lambda_n A u^2 dx = \int_a^b \frac{u^2}{\varphi_n}\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d\varphi_n}{dx}\right)dx,$$

e integrando per parti nel secondo membro

$$-\lambda_n\int_a^b Au^2dx = \left[\frac{u^2}{\varphi_n}\theta\frac{d\varphi_n}{dx}\right]_a^b - 2\int_a^b \theta\frac{u}{\varphi_n}\frac{du}{dx}\frac{d\varphi_n}{dx}dx + \int_a^b \theta\left[\frac{u}{\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx}\right]^2 dx,$$

e siccome il primo termine del secondo membro è nullo, ricaviamo

$$(6)\qquad I_n[u] = \int_a^b \theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n\int_a^b Au^2dx = \int_a^b \theta\left[\frac{du}{dx} - \frac{u}{\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx}\right]^2 dx,$$

quindi

$$(7)\qquad I_n[u] = \int_a^b \theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n\int_a^b Au^2dx \geqslant 0.$$

Dalla (6) segue che in quest'ultima vale il segno $=$ allora e allora soltanto che sia quasi ovunque

$$(8)\qquad \frac{du}{dx} - \frac{u}{\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx} = 0.$$

Ne viene, qualunque sia x,

$$u(x) - u(a) = \int_a^x \frac{du}{dx}dx = \int_a^x \frac{u}{\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx}dx,$$

e dalla continuità di $\frac{u}{\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx}$ segue che la (8) vale in tutto (a, b). Si ha allora che in ogni intervallo limitato tra due zeri consecutivi di φ_n, u e φ_n avendo il loro wronskiano nullo differiscono per un fattore costante, e poichè nei punti di zero di φ_n è $\varphi_n' \neq 0$, in tutto (a, b) dovrà aversi $u = k\varphi_n$ c. v. d.

c) Dal teorema dimostrato in *b*) dedurremo un teorema variazionale caratteristico per l'autofunzione φ_n, e allo scopo dimostriamo preventivamente il seguente lemma.

Se $a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n}$ sono gli n zeri di $\varphi_n(x)$ interni ad (a, b), il determinante

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_0(a_{n,1}), & \varphi_0(a_{n,2}), \ldots, & \varphi_0(a_{n,n}) \\ \varphi_1(a_{n,1}), & \varphi_1(a_{n,2}), \ldots, & \varphi_1(a_{n,n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n-1}(a_{n,1}), & \varphi_{n-1}(a_{n,2}), \ldots, & \varphi_n(a_{n,n}) \end{vmatrix}$$

è diverso da zero.

Sia infatti per assurdo $D = 0$, ne segue l'esistenza di una combinazione

$$y = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_{n-1}\varphi_{n-1}$$

a coefficienti *non tutti nulli*, che si annulla oltre che in a e in b negli n punti $a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n}$ e perciò per b)

$$(9) \qquad I[y] = \int_a^b \theta \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d\varphi_k}{dx} \right)^2 dx - \lambda_n \int_a^b A \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \varphi_k \right)^2 dx \geq 0,$$

ma per $h \neq k$ si ha [Cap. IV, § 6, n. 7]

$$\int_a^b A\varphi_h\varphi_k\, dx = 0;$$

$$\int_a^b \theta \frac{d\varphi_h}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx} dx = \left[\varphi_k \theta \frac{d\varphi_h}{dx} \right]_a^b - \int_a^b \varphi_k \frac{d}{dx} \left[\theta \frac{d\varphi_h}{dx} \right] dx = \lambda_h \int_a^b A\varphi_h\varphi_k\, dx = 0;$$

è pure

$$\int_a^b \theta \left(\frac{d\varphi_k}{dx} \right)^2 dx = \lambda_k \int_a^b A\varphi_k^2(x)\, dx > 0,$$

perciò dalla (9) otteniamo

$$I[y] = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 (\lambda_k - \lambda_n) \int_a^b A\varphi_k^2\, dx \geq 0,$$

ma $\lambda_k - \lambda_n < 0$, quindi $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$ il che è assurdo.

Possiamo ora dimostrare il teorema: *se $y(x)$ è una funzione assolutamente continua in (a, b), con derivata prima* (esistente quasi ovunque) *di quadrato integrabile, nulla in a e in b, e verificante le n equazioni*

$$\int_a^b A\varphi_0 y\,dx = \int_a^b A\varphi_1 y\,dx = \dots = \int_a^b A\varphi_{n-1} y\,dx = 0, \tag{10}$$

allora

$$I_n[y] = \int_a^b \left[\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \lambda_n A y^2\right] dx \geqslant 0,$$

e il segno uguale sussiste allora e allora soltanto che risulti $y = k\varphi_n$, con k costante.

Infatti per il lemma premesso, possiamo determinare n costanti $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ in modo che la funzione

$$\eta = y + c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1}$$

abbia in (a, b) tutti gli zeri di φ_n, ne segue per b)

$$I_n[\eta] \geqslant 0. \tag{11}$$

Abbiamo per le (10)

$$\begin{aligned} I_n[\eta] &= \int_a^b \left[\theta\left(\frac{dy}{dx} + \sum_{k=0}^{u-1} c_k \frac{d\varphi_k}{dx}\right)^2 - \lambda_n A\left(y + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k\right)^2\right] dx \\ &= I_n[y] + \int_a^b \theta\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d\varphi_k}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n \int_a^b A\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k\right)^2 dx + \\ &\quad + 2\int_a^b \theta \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d\varphi_k}{dx}\frac{dy}{dx}\,dx; \end{aligned} \tag{12}$$

ma è

$$y\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{d\varphi_k}{dx}\right] + \lambda_k A\varphi_k y = 0, \qquad y(a) = y(b) = 0,$$

e integrando tra a e b e tenuto conto delle (10)

$$0 = \int_a^b y\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{d\varphi_k}{dx}\right] dx = -\int_a^b \theta\frac{d\varphi_k}{dx}\frac{dy}{dx}\,dx;$$

si ha pure

$$\int_a^b \theta\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d\varphi_k}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n \int_a^b A\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k\right)^2 dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2(\lambda_k - \lambda_n)\int_a^b A\varphi_k^2 dx \leqslant 0,$$

e la (12) dà

$$I_n[\eta] \leqslant I_n[y],$$

ma per *b*), $I_n[\eta] \geqslant I_n[\varphi_n]$, quindi $I_n[y] \geqslant I_n[\varphi_n]$, e il teorema è dimostrato.

d) Perchè il lettore ritrovi il filo conduttore delle cose ora esposte, sarà opportuno osservare che l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[\theta \frac{du}{dx}\right] + \lambda A u = 0$$

è l'equazione di Eulero delle estremali relative all'integrale $\int_a^b \theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$ e alle condizioni $\int_a^b Au^2 dx = 1$, $u(a) = u(b) = 0$. Infatti tale equazione per l'integrale $\int_a^b F(x, u, u')dx$, ove $F = \theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \lambda A(x)u^2$, è data da

$$0 = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx} F_{u'} - F_u\right] = \frac{d}{dx}\left[\theta \frac{du}{dx}\right] + \lambda A u \quad [1].$$

4. - Applichiamo le cose dette per provare una notevole disuguaglianza integrale di uso frequente in analisi.

Se $y(x)$ è una funzione assolutamente continua in (a, b), con derivata prima di quadrato integrabile, nulla in a e in b, si ha allora

$$\int_a^b y^2 dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b y'^2 dx, \tag{13}$$

---

[1] Per scrivere l'equazione del testo ci siamo valsi della così detta *regola isoperimetrica di Eulero*. Cfr. ad esempio, L. Tonelli: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, II, (Bologna, 1923), p. 486; oppure O. Bolza: *Lectures on the Calculus of Variations*, (Chicago, 1904), p. 210.

e l'uguaglianza ha luogo soltanto quando sia $y = c \operatorname{sen} \frac{\pi(x-a)}{b-a}$, *con c costante* (¹).

Infatti se nella (3) facciamo $\theta = 1$, $A = 1$, e osserviamo che il minimo autovalore relativo al sistema differenziale $y'' + \lambda y = 0$, $y(a) = y(b) = 0$ è $\lambda_0 = \pi^2/(b-a)^2$, e che la corrispondente autofunzione è $\varphi_0 = c \operatorname{sen}[\pi(x-a)/(b-a)]$, dai risultati del n. 3 *b*) risulta appunto la (13).

§ 5. - Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.

Vogliamo in questo capitolo da ultimo considerare una classe di sistemi differenziali, non autoaggiunti, per i quali dall'esame dell'integrale generale trarremo direttamente l'esistenza di infiniti autovalori. Proveremo il teorema: (²)

Data l'equazione differenziale lineare omogenea di ordine $n > 2$

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \lambda p_2 y^{(n-2)} + \dots + \lambda p_{n-1} y' + \lambda p_n y = 0, \tag{1}$$

con $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ *costanti reali,* $p_2 \neq 0$, $p_n \neq 0$, *e fissati n punti reali e distinti* $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n,$$

supposto anche che non esista un integrale (non identicamente nullo) *dell'equazione*

$$p_2 y^{(n-2)} + p_3 y^{(n-3)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{2}$$

che si annulli negli $n-2$ *punti* $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$, *e che l'equazione*

$$p_2 a^{n-2} + p_3 a^{n-3} + \dots + p_{n-1} a + p_n = 0 \tag{3}$$

sia priva di radici multiple, esistono allora infiniti valori del parametro λ (autovalori) *per ciascuno dei quali l'equa-*

(¹) Cfr. ad esempio L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, II (Bologna, 1923), p. 439.

(²) Cfr. G. SANSONE: *Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti*, Rend. Circ. Mat. Palermo, LV, (1931), pp. 168-176.

zione (1) *ammette corrispondentemente un integrale* $y(x)$, *non identicamente nullo, che si annulla negli* n *punti prefissati* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, *tale cioè che si abbia*

$$(4) \qquad y(a_1)=y(a_2)=\ldots=y(a_{n-1})=y(a_n)=0.$$

Consideriamo l'equazione caratteristica della (1) [1]

$$(5) \qquad \alpha^n+p_1\alpha^{n-1}+\lambda p_2\alpha^{n-2}+\ldots+\lambda p_{n-1}\alpha+\lambda p_n=0,$$

e studiamo il comportamento delle sue radici $\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda), \ldots, \alpha_n(\lambda)$ quando $\lambda \to +\infty$, oppure $\lambda \to -\infty$.

La (5) può scriversi

$$\frac{1}{\lambda}\alpha^n+\frac{p_1}{\lambda}\alpha^{n-1}+p_2\alpha^{n-2}+\ldots+p_{n-1}\alpha+p_n=0,$$

e perciò per $\lambda \to \infty$ due radici $\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda)$ della (5) tendono all'∞, ed $n-2$ radici $\alpha_3(\lambda), \ldots, \alpha_n(\lambda)$ tendono alle $n-2$ radici (distinte per ipotesi) dell'equazione (3). Si ha da qui che

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}[\alpha_3(\lambda)+\ldots+\alpha_n(\lambda)]=-p_3/p_2$$

e per la (5)

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}[\alpha_1(\lambda)+\alpha_2(\lambda)]=-p_1+p_3/p_2.$$

Ma si osservi che

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\alpha_1(\lambda)\,\alpha_2(\lambda)=\lim_{\lambda\to\pm\infty}\frac{(-1)^n\lambda p_n}{\alpha_3(\lambda)\ldots\alpha_n(\lambda)}=\lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda p_2,$$

quindi se $p_2>0$, quando $\lambda\to+\infty$ si avrà

$$\alpha_1(\lambda)=\gamma_1(\lambda)+i\gamma_2(\lambda), \qquad \alpha_2(\lambda)=\gamma_1(\lambda)-i\gamma_2(\lambda)$$

con

$$(6) \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\gamma_1(\lambda)=[-p_1+p_3/p_2]/2, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\gamma_2(\lambda)=+\infty,$$

per $\lambda\to-\infty$ si avrà invece che $\alpha_1(\lambda)$ e $\alpha_2(\lambda)$ sono reali con

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\alpha_1(\lambda)=+\infty, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty}\alpha_2(\lambda)=-\infty;$$

e il contrario accadrà se $p_2<0$.

---

[1] Cfr. Cap. II, § 1, n. 6, *d*).

Supponiamo senz'altro $p_2 > 0$, allora la (5) ammetterà per λ positivo sufficientemente grande le due radici $\gamma_1(\lambda) \pm i\gamma_2(\lambda)$ per le quali valgono le (6) e altre $n-2$ radici diverse tra loro due a due, che distinguiamo nelle r radici reali

$$\beta_1(\lambda), \quad \beta_2(\lambda), \ldots, \quad \beta_r(\lambda), \tag{7}$$

e nelle $2s-2$ radici complesse e coniugate

$$\gamma_3(\lambda) \pm i\gamma_4(\lambda), \ldots, \quad \gamma_{2s-1}(\lambda) \pm i\gamma_{2s}(\lambda), \qquad (r+2s=n),$$

e il più generale integrale della (1) per λ positivo sufficientemente grande ha la forma

$$y(x, \lambda) = c_1 e^{\gamma_1(\lambda)x} \cos \gamma_2(\lambda)x + d_1 e^{\gamma_1(\lambda)x} \operatorname{sen} \gamma_2(\lambda)x$$

$$+ \sum_1^s {}_l\, e^{\gamma_{2l-1}(\lambda)x} \left\{ c_l \cos \gamma_{2l}(\lambda)x + d_l \operatorname{sen} \gamma_{2l}(\lambda)x \right\} + \sum_1^r {}_l\, b_l e^{\beta_l(\lambda)x},$$

essendo $c_1, c_2, \ldots, c_s$; $d_1, d_2, \ldots, d_s$; $b_1, b_2, \ldots, b_r$ costanti arbitrarie.

Se imponiamo all'integrale $y(x, \lambda)$ le condizioni (4), di annullarsi cioè per $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ otteniamo per le costanti c, d, b un sistema lineare omogeneo il quale ammetterà soluzioni non tutte nulle per queste costanti, allora e allora soltanto che il determinante $\Delta(\lambda)$ del sistema

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} e^{\gamma_1(\lambda)a_1} \cos \gamma_2(\lambda)a_1, & e^{\gamma_1(\lambda)a_1} \operatorname{sen} \gamma_2(\lambda)a_1, \ldots \\ \ldots & , \ldots \\ e^{\gamma_1(\lambda)a_n} \cos \gamma_2(\lambda)a_n, & e^{\gamma_2(\lambda)a_n} \operatorname{sen} \gamma_2(\lambda)a_n, \ldots \end{vmatrix}.$$

si annulli.

Sviluppando $\Delta(\lambda)$ per i minori del secondo ordine contenuti nelle prime due colonne avremo

$$\Delta(\lambda) = \sum_{r>s}^{1\ldots n} P_{r,s}(\lambda) \operatorname{sen} (a_r - a_s)\, \gamma_2(\lambda)$$

con la somma estesa a tutte le combinazioni semplici (r, s) della seconda classe dei numeri $1, 2, \ldots, n$.

Le $P_{r,s}(\lambda)$, per note proprietà delle funzioni algebriche, sono funzioni continue di λ le quali tendono verso quantità finite quando $\lambda \to +\infty$, e $\gamma_2(\lambda)$ è una funzione continua di λ che, per la seconda delle (6), tende a $+\infty$ quando $\lambda \to +\infty$.

Poniamo $\lim_{\lambda\to+\infty} P_{r,s}(\lambda)=P_{r,s}$; se osserviamo che l'annullarsi della costante $P_{r,s}$ implica l'esistenza di un integrale dell'equazione differenziale (2) che si annulla negli $n-2$ punti

$$a_1, \dots, a_{s-1}, a_{s+1}, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_n,$$

abbiamo che dall'ipotesi che la (2) non ammetta un integrale nullo in $a_2, \dots, a_{n-1}$, segue $P_{n,1} \neq 0$.

Se scriviamo ora che

$$\Delta(\lambda)=\sum_{r>s}^{1\dots n} P_{r,s} \operatorname{sen}(a_r-a_s)\gamma_2(\lambda)+ \\ +\sum_{r>s}^{1\dots n} [P_{r,s}(\lambda)-P_{r,s}] \operatorname{sen}(a_r-a_s)\gamma_2(\lambda)$$

e notiamo che la seconda somma del secondo membro per $\lambda\to+\infty$ ha per limite lo zero, ne viene che basterà dimostrare che comunque fissate le costanti $P_{r,s}$, con $P_{n,1}$, relativa alla massima differenza a_n-a_1, diversa da zero, la funzione di λ, $\sum_{r>s}^{1\dots n} P_{r,s} \operatorname{sen}(a_r-a_s)\gamma_2(\lambda)$, ha il massimo limite positivo e il minimo limite negativo, per concludere che quando $\lambda\to+\infty$, $\Delta(\lambda)$ si annulla infinite volte.

Se notiamo infine che per $\lambda\to+\infty$, $\gamma_2(\lambda)$ tende con continuità a $+\infty$, ne viene che la proposizione da dimostrare è conseguenza della proprietà nota: la funzione $F(t)=A_1 \operatorname{sen} d_1t+A_2 \operatorname{sen} d_2t+\dots+A_m \operatorname{sen} d_mt$, dove $A_1, A_2, \dots, A_m$ sono m costanti diverse da zero, e $d_1, d_2, \dots, d_m$ sono costanti positive, $d_1<d_2<\dots<d_m$, quando t varia in $(0,+\infty)$ ha il massimo limite positivo e il minimo limite negativo [1].

[1] Cfr. G. Sansone, lav. cit., p. 173.

CAPITOLO VI.

Equazioni e sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. Soluzioni periodiche e quasi periodiche dei sistemi di equazioni differenziali.

§ 1. - Gli integrali delle equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici.

1. Esempi. - 2. L'equazione fondamentale. - 3. I divisori elementari di WEIERSTRASS di una matrice. - 4. Gli integrali nel caso che gli esponenti dei divisori elementari della matrice fondamentale siano ciascuno uguale ad uno. Esponenti e numeri caratteristici. - 5. Gli integrali nel caso generale. Sottogruppi di HAMBURGER. - 6. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione periodica. - 7. Soluzioni periodiche delle equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti periodici.

1. - La prima parte di questo capitolo è dedicata allo studio delle soluzioni delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti periodici, e per un primo orientamento gioverà premettere alcuni esempi dai quali potranno dedursi le proprietà formali pertinenti alle soluzioni delle equazioni e dei sistemi considerati.

a) Si abbia l'equazione

$$x'+p(t)x=0, \tag{1}$$

ove $p(t)$ è definita in $(-\infty, +\infty)$, continua, periodica, col periodo $\omega>0$,

$$p(t+\omega)=p(t);$$

integrando si avrà

$$x(t)=c\,e^{-\int_0^t p(t)\,dt} \qquad (c=\text{cost})$$

quindi

$$x(t+\omega)=e^{-\int_0^\omega p(t)\,dt}\,x(t),$$

la quale ci avverte che l'aggiunta di ω all'argomento t fa acquistare all'integrale il fattore $e^{-\int_0^\omega p(t)\,dt}$.

Si ponga

$$a = -\frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(t)\,dt,$$

ed osserviamo che si ha

$$x(t+\omega)\,e^{-a(t+\omega)} = x(t)\,e^{-at},$$

posto perciò $x(t)\,e^{-at} = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ è *una funzione periodica col periodo* ω, e l'integrale della (1) ha la forma

$$x(t) = e^{at}\,\varphi(t),$$

e un tale integrale risulterà periodico allora e allora soltanto che sia $[a=0]$

$$\int_0^\omega p(t)\,dt = 0.$$

b) Consideriamo l'equazione del secondo ordine

$$x'' + \left[2 + \operatorname{sen} t\right]^{-1}(\operatorname{sen} t)\,x = 0,$$

nella quale il coefficiente di x ha il periodo 2π; le funzioni $x_1(t)$, $x_2(t)$ definite dalle relazioni

$$x_1(t) = (2 + \operatorname{sen} t)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\operatorname{sen} t)^2}, \qquad x_2(t) = (2 + \operatorname{sen} t)\int_0^{t}\frac{dt}{(2+\operatorname{sen} t)^2}$$

formano un sistema fondamentale di integrali; essi sono legati dalle relazioni

$$x_1(t+2\pi) = x_1(t), \qquad x_2(t+2\pi) = x_1(t) + x_2(t);$$

e il primo ha il periodo 2π, *e il secondo non è manifestamente periodico.*

c) Consideriamo infine l'equazione

$$x'' - p(t)\,x = 0,$$

con $p(t)$ continua in $(-\infty, +\infty)$, periodica, col periodo ω; basterà supporre che nell'intervallo periodico $(0, \omega)$ sia $p(t) > 0$ per concludere [Cap. IV, § 2, n. 4, b)] che essa *non ammette soluzioni periodiche.*

2. - a) Si consideri l'equazione

$$p_0(t)\frac{d^n x}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + p_n(t)x = 0, \tag{2}$$

dove $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$ sono funzioni definite in $(-\infty, +\infty)$, continue, periodiche, di periodo ω $[\omega > 0]$,

$$p_k(t+\omega) = p_k(t), \qquad (-\infty < t < +\infty\,;\ k = 0, 1, \dots, n), \tag{3}$$

e

$$p_0(t) > 0.$$

Sia $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ un sistema fondamentale di integrali della (2); poichè il cangiamento della variabile t in $t+\omega$ lascia invariata la (2), segue che anche le funzioni $x_1(t+\omega), x_2(t+\omega), \dots, x_n(t+\omega)$ rappresentano un sistema di integrali della (2), ed esisterà quindi un sistema di n^2 costanti $a_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ tali che

$$X_i = x_i(t+\omega) = a_{i,1}x_1(t) + a_{i,2}x_2(t) + \dots + a_{i,n}x_n(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{4}$$

Si verifica facilmente che posto

$$H = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \dots, & a_{1,n} \\ \dots & \dots \\ a_{n,1}, \dots, & a_{n,n} \end{vmatrix} \tag{5}$$

tra i due wronskiani $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $W(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sussiste la relazione

$$W(X_1, X_2, \dots, X_n) = H\,W(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ma si ha [Cap. II, § 1, n. 2]

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\,e^{-\int_0^t p_1\,dt},$$

perciò

$$W(X_1, X_2, \dots, X_n) = c\,e^{-\int_0^{t+\omega} p_1\,dt} = e^{-\int_0^{\omega} p_1\,dt}\,W(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

e le $x_1(t+\omega),\ldots, x_n(t+\omega)$ forniscono anch'esse un sistema fondamentale di integrali della (2).

Dalla dimostrazione consegue

$$H = e^{-\int_0^\omega p_1 dt} \neq 0, \tag{6}$$

e se $p_1(t) \equiv 0$, si ha la formula di POINCARÉ [1]

$$H = 1. \tag{7}$$

b) Abbiamo già visto negli esempi del n. 1 che non sempre un'equazione differenziale a coefficienti periodici ammette integrali periodici, e in analogia dell'esempio del n. 1, *a*) proponiamoci di trovare se esistono integrali $x(t)$ della (2) tali che

$$x(t+\omega) = \varrho x(t), \qquad (-\infty < t < +\infty), \quad [2] \tag{8}$$

dove ϱ è una ***costante***, o ciò che è lo stesso se esistono delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, non tutte nulle, tali che per l'integrale della (2)

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \ldots + c_n x_n(t) \tag{9}$$

si abbia

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t+\omega) = \varrho \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t).$$

Tenuto conto delle (4) dovrà aversi

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} c_i\, a_{i,k} - \varrho c_k \right] x_k(t) = 0,$$

e per l'indipendenza lineare delle $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ dovrà quindi risultare

$$\begin{aligned} (10) \quad & a_{1,k} c_1 + \ldots + a_{k-1,k} c_{k-1} + (a_{k,k} - \varrho) c_k + \\ & \qquad + a_{k+1,k} c_{k+1} + \ldots + a_{n,k} c_n = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

[1] H. POINCARÉ: *Sur les groupes des équations linéaires.* Acta Math., IV (1884), (pp. 201-311); p. 202.

[2] Lo studio degli integrali che soddisfano la (8) è stato considerato da G. FLOQUET: *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques,* Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup., (2), XII (1883), pp. 47-89, e la teoria che trattiamo prende il nome di *teoria di Floquet.*

Questo sistema ammetterà una soluzione con le $c_1, c_2, \ldots, c_n$ non tutte nulle, allora e allora soltanto che sia ϱ una radice della equazione ottenuta uguagliando a zero il determinante della così detta *matrice fondamentale* (caratteristica)

$$\left\| \begin{matrix} a_{1,1}-\varrho, & a_{2,1},\ldots, & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}-\varrho,\ldots, & a_{n,2} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{1,n}, & a_{2,n},\ldots, & a_{n,n}-\varrho \end{matrix} \right\|$$

ovvero della così detta *equazione fondamentale* (caratteristica)

$$D(\varrho)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\varrho, & a_{2,1},\ldots, & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}-\varrho,\ldots, & a_{n,2} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{1,n}, & a_{2,n},\ldots, & a_{n,n}-\varrho \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

Avendosi $D(0)=H \neq 0$, segue che le radici dell'equazione (11) sono *tutte* diverse da zero, e per ciascuna radice, e per ogni sistema di costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ che soddisfa il sistema lineare (10), l'integrale $x(t)$, determinato con la (9), verifica la (8).

Lo studio degli integrali che verificano la (8) è perciò legato allo studio delle radici dell'equazione fondamentale (11), e di questo ci occuperemo nei nn. 3, 4, 5.

3. - *a*) Sia ϱ un'indeterminata, siano $\{a_{i,k}\}$, $\{b_{i,k}\}$, $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ due sistemi di n^2 elementi, e si consideri la matrice

$$D(\varrho)=\left\| \begin{matrix} a_{1,1}\varrho+b_{1,1},\ldots, & a_{1,n}\varrho+b_{1,n} \\ a_{2,1}\varrho+b_{2,1},\ldots, & a_{2,n}\varrho+b_{2,n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\varrho+b_{n,1},\ldots, & a_{n,n}\varrho+b_{n,n} \end{matrix} \right\|, \qquad A=\det. \| a_{i,k} \| \neq 0.$$

della quale indicheremo il determinante con lo stesso simbolo $D(\varrho)$.

Sia ϱ_0 una radice dell'equazione $D(\varrho)=0$, e ne sia l_0, $(l_0 \geqslant 1)$ l'ordine di molteplicità; la differenza $\varrho-\varrho_0$ chiamasi un *divisore lineare* di $D(\varrho)$.

Fissato un valore di k tra 0 e $n-1$, si considerino tutti i minori di $D(\varrho)$ di ordine $n-k$; essi sono polinomi in ϱ di grado $n-k$ che non possono essere tutti identicamente nulli rispetto a ϱ, perchè si avrebbe $D(\varrho)\equiv 0$, e perciò $A=0$, che è contro l'ipotesi.

Se il fattore $\varrho-\varrho_0$ è contenuto nel massimo comune divisore dei minori di ordine $n-k$ di $D(\varrho)$, considerati come polinomi in ϱ, con l'esponente l_k [1], vogliamo dimostrare che per i numeri l_0, l_1, l_2.... si ha

$$l_0 > l_1 > l_2 > .... .$$

Infatti vi è almeno un minore di ordine $n-k$ che ha il divisore $\varrho-\varrho_0$ con l'esponente l_k, la derivata rispetto a ϱ di questo minore ha lo stesso divisore con l'esponente l_k-1, ma tale derivata si esprime come somma di prodotti degli elementi del determinante A per i minori di ordine $n-k-1$ di $D(\varrho)$ pei quali il massimo comun divisore contiene $\varrho-\varrho_0$ con l'esponente l_{k+1} e abbiamo quindi $l_{k+1} \leqslant l_k-1$.

Sia l_ν l'ultimo esponente non nullo, si avrà dunque

$$l_0 > l_1 > l_2 > .... > l_\nu ,$$

e se poniamo

$$l_0-l_1=e_0, \quad l_1-l_2=e_1, ..., \quad l_{\nu-1}-l_\nu=e_{\nu-1}, \quad l_\nu=e_\nu ,$$

avremo

$$l_0=e_0+e_1+....+e_{\nu-1}+e_\nu .$$

È facile provare che si ha

$$e_0 \geqslant e_1 .$$

Infatti se $\begin{vmatrix} L, M \\ N, P \end{vmatrix}$ è un minore del determinante aggiunto di $D(\varrho)$, si ha identicamente $LP-MN=D(\varrho)C$, ove C è un opportuno minore di ordine $n-2$ di $D(\varrho)$; se C indica appunto il minore di ordine $n-2$ di $D(\varrho)$ che contiene il fattore $\varrho-\varrho_0$ con l'esponente l_2, il secondo membro ha il fattore $\varrho-\varrho_0$ con l'esponente l_0+l_2, ma il primo membro ha lo stesso fattore almeno con l'esponente $2l_1$, perciò $2l_1 \leqslant l_0+l_2$, $l_1-l_2 \leqslant l_0-l_1$, ed $e_0 \geqslant e_1$.

Si può dimostrare che in generale si ha

$$e_0 \geqslant e_1 \geqslant e_2 \geqslant .... \geqslant e_{\nu-1} \geqslant e_\nu \quad [2].$$

---

[1] Faremo la convenzione che se un minore di ordine $n-k$ è identicamente nullo, esso è divisibile per $(\varrho-\varrho_0)^{n-k}$.

[2] Cfr. ad es. M. Bôcher: *Introduction to higher algebra*, (New-York, 1907), Cap. XX, pp. 262-278.

b) Siano $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ le m radici distinte di $D(\varrho)=0$, con i rispettivi ordini di molteplicità $l_0^{(1)}, l_0^{(2)}, \ldots, l_0^{(m)}$; avremo con le nostre notazioni

$$\begin{aligned} D(\varrho) \equiv A(\varrho-\varrho_1)^{e_0^{(1)}}(\varrho-\varrho_1)^{e_1^{(1)}} \ldots (\varrho-\varrho_1)^{e_{\nu_1}^{(1)}} \\ (\varrho-\varrho_2)^{e_0^{(2)}}(\varrho-\varrho_2)^{e_1^{(2)}} \ldots (\varrho-\varrho_2)^{e_{\nu_2}^{(2)}} \\ \ldots \quad \ldots \\ (\varrho-\varrho_m)^{e_0^{(m)}}(\varrho-\varrho_m)^{e_1^{(m)}} \ldots (\varrho-\varrho_m)^{e_{\nu_m}^{(m)}} \end{aligned}$$

con

$$l_0^{(i)} = e_0^{(i)} + e_1^{(i)} + \ldots + e_{\nu_i}^{(i)}, \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

I fattori $(\varrho-\varrho_i)^{e_j^{(i)}}$, $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=0, 1, \ldots, \nu_i)$, si chiamano i ***divisori elementari della matrice*** $D(\varrho)$; tra i loro esponenti e il grado n di $D(\varrho)$ si ha evidentemente

$$n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{\nu_i} e_j^{(i)} \quad (^1).$$

È quasi superfluo notare che se sulla matrice $D(\varrho)$ si cangiano tra loro due linee parallele, o ordinatamente le righe con le colonne, non si alterano i divisori elementari.

c) Sia

$$P = \begin{vmatrix} p_{1,1}, & p_{1,2}, \ldots, & p_{1,n} \\ p_{2,1}, & p_{2,2}, \ldots, & p_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \\ p_{n,1}, & p_{n,2}, \ldots, & p_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

ed effettuiamo sulle $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, *a destra*, la sostituzione lineare di modulo P

$$(12) \qquad a'_{i,k} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s} p_{s,k}, \qquad b'_{i,k} = \sum_{s=1}^{n} b_{i,s} p_{s,k};$$

---

(1) La teoria dei divisori elementari è di K. WEIERSTRASS, Math. Werke, II (Berlin, 1895), *Zur. Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, (pp. 19-44), p. 21.

Per l'interpretazione geometrica della teoria dei divisori elementari cfr. E. BERTINI: *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, (Pisa, 1907), Cap. IV. *Omografie di uno spazio S_r in sè*, pp. 63-100.

vogliamo dimostrare che posto

$$D'(\varrho)=\left\| \begin{array}{ll} a'_{1,1}\varrho+b'_{1,1},\dots, & a'_{1,n}\varrho+b'_{1,n} \\ a'_{2,1}\varrho+b'_{2,1},\dots, & a'_{2,n}\varrho+b'_{2,n} \\ \dots & \dots \\ a'_{n,1}\varrho+b'_{n,1},\dots, & a'_{n,n}\varrho+b'_{n,n} \end{array} \right\|$$

le matrici $D(\varrho)$, $D'(\varrho)$ hanno i medesimi divisori elementari, o ciò che è lo stesso *le radici dell'equazione* $D(\varrho)=0$ *e i divisori elementari sono invarianti rispetto ad una medesima sostituzione lineare a modulo non nullo effettuata sulle* $a_{i,k}$ *e* $b_{i,k}$.

Poichè

$$\varrho\, a'_{i,k}-b'_{i,k}=\sum_{s=1}^{n}(a_{i,s}\varrho-b_{i,s})p_{s,k}, \qquad (i,\, k=1,\, 2,\dots,\, n),$$

un qualunque minore di ordine $n-k$ di $D'(\varrho)$, ad esempio

$$\left\| \begin{array}{ll} a'_{1,1}\varrho-b'_{1,1},\dots, & a'_{1,n-k}\varrho-b'_{1,n-k} \\ \dots & \dots \\ a'_{n-k,1}\varrho-b'_{n-k,1},\dots, & a'_{n-k,n-k}\varrho-b'_{n-k,n-k} \end{array} \right\|$$

vale il prodotto per righe delle due matrici

$$\left\| \begin{array}{lll} a_{1,1}\varrho-b_{1,1}, & a_{1,2}\varrho-b_{1,2},\dots, & a_{1,n}\varrho-b_{1,n} \\ \dots & \dots & \\ a_{i,1}\varrho-b_{i,1}, & a_{i,2}\varrho-b_{i,2},\dots, & a_{i,n}\varrho-b_{i,n} \\ \dots & \dots & \\ a_{n-k,1}\varrho-b_{n-k,1}, & a_{n-k,2}\varrho-b_{n-k,2},\dots, & a_{n-k,n}\varrho-b_{n-k,n} \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{lll} p_{1,1}, & p_{2,1},\dots, & p_{n,1} \\ \dots & \dots & \\ p_{1,k}, & p_{2,k},\dots, & p_{n,k} \\ \dots & \dots & \\ p_{1,n-k}, & p_{2,n-k},\dots, & p_{n,n-k} \end{array} \right\|$$

e perciò può esprimersi come combinazione lineare dei minori di ordine $n-k$ di $D(\varrho)$; ne viene che il fattore $\varrho-\varrho_0$ in ciascun minore di ordine $n-k$ di $D'(\varrho)$ è contenuto almeno con l'ordine l_k, e se l'_k è l'esponente di $\varrho-\varrho_0$ nel massimo comun divisore dei minori di ordine $n-k$ di $D'(\varrho)$ si ha $l_k \leqslant l'_k$. Il ragionamento può invertirsi ricavando dalle (12) le $a_{i,s}$, $b_{i,s}$ per le $a'_{i,k}$, $b'_{i,k}$, quindi $l_k=l_k'$, e il teorema è dimostrato.

Analoghe conclusioni sussistono ove si operi sulle $a_{i,k}$ e $b_{i,k}$ la sostituzione a *sinistra*

$$(12)' \qquad a'_{i,k}=\sum_{s=1}^{n} p_{i,s}\, a_{s,k}, \qquad b'_{i,k}=\sum_{s=1}^{n} p_{i,s}\, b_{s,k}.$$

d) Applichiamo le cose dette allo studio degli integrali dell'equazione differenziale (2). Chiamiamo la matrice

$$D(\varrho)=\begin{Vmatrix} a_{1,1}-\varrho, & a_{2,1},\ldots, & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}-\varrho,\ldots, & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \\ a_{1,n}, & a_{2,n},\ldots, & a_{n,n}-\varrho \end{Vmatrix}$$

la *matrice fondamentale dell'equazione differenziale* (2) e proviamo che *le sue radici e i suoi divisori elementari, sono invarianti, rispetto al sistema fondamentale prescelto per costruirla*.

Infatti per ottenere il più generale sistema fondamentale $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t),\ldots, \bar{x}_n(t)$ basta prendere n^2 costanti $c_{i,k}$ tali che det. $\|c_{i,k}\| \neq 0$, e porre

$$\bar{x}_i(t)=c_{i,1}\, x_1(t)+c_{i,2}\, x_2(t)+\ldots+c_{i,n}\, x_n(t), \qquad (i=1, 2,\ldots, n).$$

Se $\gamma_{i,k}$ indica il reciproco dell'elemento $c_{i,k}$ nel determinante C, [cioè il rapporto tra il complemento algebrico $C_{i,k}$ di $c_{i,k}$ in C e il determinante C stesso] si ha

$$x_l(t)=\gamma_{1,l}\,\bar{x}_1(t)+\gamma_{2,l}\,\bar{x}_2(t)+\ldots+\gamma_{n,l}\,\bar{x}_n(t), \qquad (l=1, 2,\ldots, n),$$

e tenuto conto delle (4) abbiamo

$$\bar{x}_i(t+\omega)=\sum_{r=1}^{n} c_{i,r}\, x_r(t+\omega)=\sum_{r,l}^{1\ldots n} c_{i,r}\, a_{r,l}\, x_l(t)$$

$$=\sum_{r,l,k}^{1\ldots n} c_{i,r}\, a_{r,l}\,\gamma_{k,l}\,\bar{x}_k(t)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{r,l}^{1\ldots n} c_{i,r}\, a_{r,l}\,\gamma_{k,l}\right\}\bar{x}_k(t).$$

perciò

$$\bar{x}_i(t+\omega)=\sum_{k=1}^{n} a'_{i,k}\,\bar{x}_k(t), \qquad (i=1, 2,\ldots, n),$$

dove

$$a'_{i,k}=\sum_{r,l}^{1\ldots n} c_{i,r}\, a_{r,l}\,\gamma_{k,l}.$$

Poichè la matrice

$$\begin{Vmatrix} a'_{1,1}-1\varrho, & a'_{1,2}-0\varrho,\ldots, & a'_{1,n}-0\varrho \\ a'_{2,1}-0\varrho, & a'_{2,2}-1\varrho,\ldots, & a'_{2,n}-0\varrho \\ \ldots & & \ldots \\ a'_{n,1}-0\varrho, & a'_{n,2}-0\varrho,\ldots, & a'_{n,n}-1\varrho \end{Vmatrix}$$

relativa al nuovo sistema fondamentale [abbiamo cangiato le righe con le colonne] si ottiene dalla matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1}-1\varrho, & a_{1,2}-0\varrho,\ldots, & a_{1,n}-0\varrho \\ a_{2,1}-0\varrho, & a_{2,2}-1\varrho,\ldots, & a_{2,n}-0\varrho \\ \ldots & & \ldots \\ a_{n,1}-0\varrho, & a_{n,2}-0\varrho,\ldots, & a_{n,n}-1\varrho \end{Vmatrix}$$

operando sulle due matrici

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2},\ldots, & a_{1,n} \\ \ldots, & & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2},\ldots, & a_{n,n} \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} -1, & 0,\ldots, & 0 \\ \ldots & & \ldots \\ 0, & 0,\ldots, & -1 \end{Vmatrix}$$

prima *a destra* colla sostituzione

$$\begin{Vmatrix} \gamma_{1,1}, & \gamma_{2,1},\ldots, & \gamma_{n,1} \\ \ldots & & \ldots \\ \gamma_{1,n}, & \gamma_{2,n},\ldots, & \gamma_{n,n} \end{Vmatrix},$$

e poi *a sinistra* colla sostituzione

$$\begin{Vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2},\ldots, & c_{1,n} \\ \ldots & & \ldots \\ c_{n,1}, & c_{n,2},\ldots, & c_{n,n} \end{Vmatrix},$$

ne risulta la nostra affermazione.

e) La somma delle radici dell'equazione fondamentale vale $a_{1,1}+a_{2,2}+\ldots+a_{n,n}$, e dalle cose dette si ha che *la somma* $a_{1,1}+a_{2,2}+\ldots+a_{n,n}$ *è un invariante rispetto al sistema fondamentale prescelto.*

4. - *a*) La natura degli integrali dell'equazione (2), come abbiamo già visto, è collegata con le radici dell'equazione fondamentale (11), e con maggior precisione, come diremo tra poco, con i divisori elementari della matrice fondamentale $D(\varrho)$.

Supponiamo che *per ogni radice* ϱ_i, $(i=1, 2,\ldots, m)$ *dell'equazione fondamentale* $D(\varrho)=0$, *multipla di ordine* ν_i, *la matrice* $D(\varrho_i)$ *abbia appunto la caratteristica* $n-\nu_i$; questa ipotesi, con le notazioni del n. 3, implica

$$l_0^{(i)}=\nu_i; \qquad l_1^{(i)}\geqslant 1, \quad l_2^{(i)}\geqslant 1,\ldots, \quad l_{\nu_i-1}^{(i)}\geqslant 1; \qquad l_{\nu_i}^{(i)}=0,$$

e poichè $\nu^{(i)}=l_0^{(i)}>l_1^{(i)}>\ldots>l_{\nu_i-1}^{(i)}$, si ha

$$l_0^{(i)}=\nu_i, \quad l_1^{(i)}=\nu_i-1, \quad l_2^{(i)}=\nu_i-2,\ldots, \quad l_{\nu_i-1}^{(i)}=1, \quad l_{\nu_i}^{(i)}=0,$$

$$e_0^{(i)}=1, \quad e_1^{(i)}=1,\ldots, \quad e_{\nu_i-1}^{(i)}=1,$$

cioè *la matrice fondamentale ha gli esponenti di tutti i suoi divisori elementari uguali ad* 1.

Inversamente se tutti gli esponenti dei divisori elementari corrispondenti alla radice ϱ_i sono uguali ad 1, ed essi sono in numero di ν_i, cioè equivale a dire che la radice ϱ_i dell'equazione fondamentale annulla $D(\varrho)$ insieme a tutti i suoi minori fino all'ordine $n-\nu_i-1$, ma non tutti quelli di ordine $n-\nu_i$, perciò $D(\varrho_i)$ ha la caratteristica $n-\nu_i$.

Siano dunque $\varrho_1, \varrho_2,\ldots, \varrho_m$ le m radici distinte dell'equazione fondamentale e $\nu_1, \nu_2,\ldots, \nu_m$ i rispettivi ordini di molteplicità,

$$n=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m,$$

e per ogni radice ϱ_i risulti $n-\nu_i$ la caratteristica di $D(\varrho_i)$; se nel sistema lineare omogeneo (10) facciamo $\varrho=\varrho_i$, la matrice dei coefficienti ha la caratteristica $n-\nu_i$, possiamo perciò scegliere tra le $c_1, c_2,\ldots, c_n$, ν_i di esse in modo arbitrario, mentre le altre $n-\nu_i$ risultano univocamente determinate; alla radice ϱ_i corrispondono quindi ν_i integrali linearmente indipendenti che indicheremo con

$$(13) \qquad x_{1,i}, \quad x_{2,i},\ldots, \quad x_{\nu_i,i}, \qquad (i=1, 2,\ldots, m),$$

per ciascuno dei quali si ha

$$x_{\lambda,i}(t+\omega)=\varrho_i x_{\lambda,i}(t), \qquad (\lambda=1, 2,\ldots, \nu_i;\ i=1, 2,\ldots, m).$$

È subito visto che gli n integrali così ottenuti sono linearmente indipendenti; infatti in caso opposto dovrebbe sussistere una relazione lineare a coefficienti costanti $c_{\lambda,i}$ non tutti nulli della forma

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_1} c_{\lambda,1}\, x_{\lambda,1}(t) + \sum_{\lambda=1}^{\nu_2} c_{\lambda,2}\, x_{\lambda,2}(t) + \dots + \sum_{\lambda=1}^{\nu_m} c_{\lambda,m}\, x_{\lambda,m}(t) = 0\,;$$

cangiando t in $t+k\omega$, $(k=0, 1, 2,\dots, m-1)$, insieme a questa si avrebbe

$$\varrho_1^k \left[\sum_{\lambda=1}^{\nu_1} c_{\lambda,1}\, x_{\lambda,1}(t)\right] + \varrho_2^k \left[\sum_{\lambda=1}^{\nu_2} c_{\lambda,2}\, x_{\lambda,2}(t)\right] + \dots + \varrho_m^k \left[\sum_{\lambda=1}^{\nu_m} c_{\lambda,m}\, x_{\lambda,m}(t)\right] = 0,$$

ma il determinante di questo sistema lineare è il determinante di CAUCHY - VANDERMONDE degli m numeri distinti due a due $\varrho_1, \varrho_2,\dots, \varrho_m$, e perciò identicamente

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_i} c_{\lambda,i}\, x_{\lambda,i}(t) = 0, \qquad (i=1, 2,\dots, m),$$

e a motivo dell'indipendenza lineare degli integrali (13) si ha

$$c_{\lambda,i}=0, \qquad (\lambda=1, 2,\dots, \nu_i;\; i=1, 2,\dots, m)$$

e perciò l'assurdo che le $c_{\lambda,i}$ siano tutte nulle.

Abbiamo così dimostrato il teorema: *Se la matrice fondamentale $D(\varrho)$ ha tutti i suoi divisori elementari uguali all'unità, ad ogni radice ϱ_i dell'equazione fondamentale $D(\varrho)=0$, multipla di ordine ν_i, corrispondono ν_i integrali linearmente indipendenti*

$$x_{1,i}(t), \quad x_{2,i}(t),\dots, \quad x_{\nu_i,i}(t),$$

caratterizzati dalla proprietà

$$x_{\lambda,i}(t+\omega)=\varrho_i\, x_{\lambda,i}(t), \qquad (\lambda=1, 2,\dots, \nu_i),$$

e gli integrali corrispondenti alle radici distinte dell'equazione fondamentale formano un sistema fondamentale.

b) Sia θ_k l'argomento principale della radice ϱ_k e $x_k(t)$ un integrale corrispondente; si avrà

$$\varrho_k = |\varrho_k|\, e^{i\theta_k}, \qquad -\pi < \theta_k \leq \pi, \qquad (i \text{ unità immaginaria})$$

e posto

$$\alpha_k = \frac{1}{\omega}\Big[\log|\varrho_k| + i\theta_k\Big] = \frac{l\varrho_k}{\omega},$$

[$l\varrho_k$ *logaritmo principale* di ϱ_k] diremo α_k *esponente caratteristico* e $\omega^{-1} l |\varrho_k|$ *numero caratteristico.*

Poniamo $\varphi_k(t) = x_k(t) e^{-\alpha_k t}$; si ha

$$\varphi_k(t+\omega) = x_k(t+\omega)\, e^{-\alpha_k(t+\omega)} = |\varrho_k|\, e^{i\theta_k} x_k(t)\, e^{-\alpha_k t}\, e^{-[l|\varrho_k| + i\theta_k]}$$

$$= x_k(t)\, e^{-\alpha_k t} = \varphi_k(t),$$

φ_k è perciò una funzione periodica a periodo ω, e abbiamo quindi: *se per ogni radice* ϱ_i *dell'equazione fondamentale, di ordine di molteplicità* ν_i, *la matrice* $D(\varrho)$, *per* $\varrho = \varrho_i$, *acquista la caratteristica* $n - \nu_i$, *esiste allora un sistema fondamentale di integrali della forma*

$$e^{\alpha_1 t}\varphi_1(t), \quad e^{\alpha_2 t}\varphi_2(t), \ldots, \quad e^{\alpha_n t}\varphi_n(t),$$

con $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *funzioni periodiche di periodo* ω, *e dove ogni esponente* α_k [esponente caratteristico] *è uguale a* $\omega^{-1} l\varrho_k$.

e) Volendo rimanere nel campo reale esaminiamo separatamente i casi $\varrho_k > 0$, $\varrho_k < 0$, ϱ_k complesso.

Se $\varrho_k > 0$, le corrispondenti soluzioni $e_1, e_2, \ldots, e_n$ del sistema (10) sono reali, $x_k(t)$ è reale, così pure $\alpha_k = \omega^{-1} l\varrho_k$, e perciò $\varphi_k(t)$.

Così per $\varrho_k < 0$, se osserviamo che

$$x_k(t + 2\omega) = \varrho_k^2\, x_k(t)$$

potremo ancora porre

$$x_k(t) = e^{\omega^{-1} t\, l|\varrho_k|} \varphi_k(t)$$

con $\varphi_k(t)$ *reale e a periodo* 2ω.

Se poi

$$\varrho_k = |\varrho_k|\, e^{i\theta_k}, \quad \text{con} \quad \theta_k \neq 0, \quad -\pi < \theta_k < \pi,$$

cioè la radice ϱ_k è complessa, l'equazione fondamentale ammetterà anche la radice coniugata $|\varrho_k|\, e^{-i\theta_k}$, e ad esse corrispondono due integrali coniugati $x_k(t)$, $\bar{x}_k(t)$; i relativi esponenti caratteristici sono anch'essi coniugati, quindi $\varphi_k(t)$ e $\bar{\varphi}_k(t)$ sono coniugate e a periodo ω, e avremo

$$x_k(t) = e^{t\omega^{-1} l|\varrho_k|}\left[\cos\frac{\theta_k t}{\omega} + i \operatorname{sen}\frac{\theta_k t}{\omega}\right]\left[\psi_1(t) + i\,\psi_2(t)\right],$$

$$\bar{x}_k(t) = e^{t\omega^{-1} l|\varrho_k|}\left[\cos\frac{\theta_k t}{\omega} - i \operatorname{sen}\frac{\theta_k t}{\omega}\right]\left[\psi_1(t) - i\,\psi_2(t)\right],$$

con $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ reali e a periodo ω. Da queste, per somma e differenza, si deducono i due integrali reali dell'equazione data, linearmente indipendenti

$$e^{t\omega^{-1}l|\varrho_k|}\left[\cos\frac{\theta_k t}{\omega}\,\psi_1(t) - \text{sen}\,\frac{\theta_k t}{\omega}\,\psi_2(t)\right],$$
$$e^{t\omega^{-1}l|\varrho_k|}\left[\cos\frac{\theta_k t}{\omega}\,\psi_2(t) + \text{sen}\,\frac{\theta_k t}{\omega}\,\psi_1(t)\right].$$

d) Si voglia studiare il comportamento degli integrali della (2) quando $t \to +\infty$, o come si dice il *comportamento asintotico degli integrali della* (2).

Dalle cose dette risulta che *se la matrice fondamentale ha gli esponenti di tutti i suoi divisori elementari uguali ad* 1, *condizione necessaria e sufficiente perchè tutte le soluzioni della* (2), *per* $t \to +\infty$, *abbiano per limite lo zero, è che* $l|\varrho_k| < 0$, $(k=1, 2, \ldots)$; *cioè siano negativi tutti i numeri caratteristici* [*o ciò che è lo stesso i moduli delle radici dell'equazione caratteristica siano tutti inferiori all'unità*].

5. - Passando al caso che gli esponenti dei divisori elementari non siano tutti uguali all'unità si può dimostrare, ma qui per brevità lo ammetteremo, che *se* ϱ_0 *è una radice dell'equazione fondamentale* $D(\varrho)=0$, *multipla di ordine* l_0, *e se* $(\omega-\varrho_0)^{e_0}$, $(\omega-\varrho_0)^{e_1}, \ldots, (\omega-\varrho_0)^{e_\nu}$ *sono i divisori elementari associati a questa radice, a* ϱ_0 *appartengono* l_0 *integrali indipendenti che si possono suddividere in* $\nu+1$ *sottogruppi di integrali* [sottogruppi di HAMBURGER], *e se* $x_1^{(s)}$, $x_2^{(s)}$, $x_{e_s}^{(s)}$ *formano gli integrali del sottogruppo corrispondente al divisore* $(\omega-\varrho_0)^{e_s}$, $(s=0, 1, \ldots, \nu)$, *essi sono caratterizzati dal fatto che*

$$\begin{aligned} x_1^{(s)}(t+\omega) &= \varrho_0\, x_1^{(s)}(t), \\ x_2^{(s)}(t+\omega) &= \varrho_0\, x_2^{(s)}(t) + x_1^{(s)}(t), \\ \ldots\ & \quad \ldots \\ x_{e_s}^{(s)}(t+\omega) &= \varrho_0\, x_{e_s}^{(s)}(t) + x_{e_s-1}^{(s)}(t), \qquad (s=0, 1, \ldots, \nu) \end{aligned}$$ [1].

(1) Un primo studio degli integrali corrispondenti a una radice multipla dell'equazione fondamentale è dovuto a L. FUCHS: *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten*, Journ. für die reine und ang. Math., 66 (1866), (pp. 121-160), p. 136. La ripartizione degli integrali in sottogruppi è di M. HAMBURGER: *Bemerkung über die Form der*

6. - *a*) I risultati dei numeri precedenti ci consentono di enunciare senz'altro un criterio necessario e sufficiente per l'esistenza di una soluzione periodica dell'equazione (2); vale infatti il teorema: *condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione* (2) *abbia una soluzione periodica di periodo* ω *è che l'equazione fondamentale* (11) *abbia una radice uguale ad* 1. *Inoltre il numero delle soluzioni della* (2) *di periodo* ω, *linearmente indipendenti, è uguale al numero dei divisori elementari della matrice*

$$\left\| \begin{matrix} a_{1,1}-\varrho, & a_{2,1},\ldots, & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2}-\varrho,\ldots, & a_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \\ a_{1,n}, & a_{2,n},\ldots, & a_{n,n}-\varrho \end{matrix} \right\|$$

che contengono il fattore $\varrho-1$.

b) Abbiamo più in generale che se l'equazione fondamentale (11) ammette una radice k^{esima} dell'unità, (k intero positivo), a una tale radice corrisponde un integrale di periodo $k\omega$.

Vale anche la proposizione inversa. Sia infatti $x(t)$ un integrale della (2), periodico, di periodo $k\omega$ (k intero positivo), e si esprima $x(t)$ linearmente per gli integrali appartenenti ai vari sottogruppi di HAMBURGER; identificando $x(t+k\omega)$ con $x(t)$ si deduce appunto che $D(\varrho)=0$ deve possedere almeno una radice k^{esima} dell'unità.

7. - Vogliamo ora occuparci brevemente della ricerca delle soluzioni periodiche delle equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti periodici.

Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, Journ. für die reine und ang. Math., 76 (1873), (pp. 113-125), p. 121; l'associazione dei sottogruppi di HAMBURGER con i divisori elementari della matrice $D(\varrho)$ è di F. CASORATI: *Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéaires en sous-groupes*, C. Rend. Ac. Sc., XCII (1881), pp. 175-178, 238-241.

Per la dimostrazione del teorema enunciato nel testo cfr. *a*) R. FORSYTH: *Theory of differential equations*. IV, (Cambridge, 1902), p. 60 e p. 416; *b*) L. SAUVAGE: *Théorie des diviseurs élémentaires et applications*, Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup., (3), VIII, (1891), (pp. 285-340), p. 326.

a) Si abbia l'equazione

$$(14) \qquad p_0(t)\frac{d^n x}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots+p_n(t)\,x(t)=f(t),$$

dove $p_0(t), p_1(t),\dots, p_n(t), f(t)$ sono funzioni definite in $(-\infty, +\infty)$, continue, periodiche, col periodo ω $[\omega>0]$,

$$p_0(t)>0,$$

$$p_k(t+\omega)=p_k(t), \quad (k=1, 2,\dots, n); \qquad f(t+\omega)=f(t),$$

e proponiamoci di trovare se essa ammette integrali periodici di periodo ω.

Sia $\varphi_0(t)$ un integrale particolare della (14), e $x_1(t), x_2(t),\dots, x_n(t)$ un sistema fondamentale di integrali della corrispondente equazione omogenea (2); l'integrale generale della (14) ha quindi la forma

$$(15) \qquad \varphi(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\dots+c_nx_n(t)+\varphi_0(t)$$

con le $c_1, c_2,\dots, c_n$ costanti.

Poichè $\varphi_0(t+\omega)$ è un integrale della (14), esisteranno delle costanti $\beta_1, \beta_2,\dots, \beta_n$ tali che

$$\varphi_0(t+\omega)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k(t)+\varphi_0(t),$$

e se le β_k sono tutte nulle, $\varphi_0(t)$ è appunto un integrale periodico della (14).

In generale, poichè le $x_1(t+\omega), x_2(t+\omega),\dots, x_n(t+\omega)$ si esprimono per le $x_1(t), x_2(t),\dots, x_n(t)$ mediante le (4), avremo

$$\varphi(t+\omega)=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i(t+\omega)+\varphi_0(t+\omega)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}c_i a_{i,k}+\beta_k\Big]x_k(t)+\varphi_0(t),$$

e $\varphi(t)$ risulterà periodico allora e allora soltanto che si possano scegliere le costanti $c_1, c_2,\dots, c_n$ in modo che

$$\sum_{i=1}^{n}c_i a_{i,k}+\beta_k=c_k, \qquad (k=1, 2,\dots, n),$$

cioè le costanti c_1, c_2,...., c_n debbono risultare una soluzione del sistema

$$(16)\qquad \begin{cases} (a_{1,1} \;-1)\, c_1 + a_{2,1}\, c_2 + ... + a_{n,1}\, c_n = -\beta_1, \\ a_{1,2}\, c_1 + (a_{2,2}-1)\, c_2 \;+ .... + a_{n,2}\, c_n = -\beta_2, \\ .... \qquad\qquad .... \\ a_{1,n}\, c_1 + a_{2,n}\, c_2 \qquad + ... + (a_{n,n}-1)\, c_n = -\beta_n. \end{cases}$$

Il determinante di questo sistema è diverso da zero se l'equazione fondamentale dell'equazione omogenea

$$(2)\qquad p_0 \frac{d^n x}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + p_n x = 0$$

non ha la radice 1, cioè se questa equazione non ammette soluzioni periodiche di periodo ω, [n. 6, a)]. Abbiamo così dimostrato che *se l'equazione omogenea* (2) *non ha soluzioni periodiche di periodo* ω, *la* (14) *ha una e una sola soluzione di periodo* ω.

b) Se la (2) ammette invece una soluzione periodica, col periodo ω, la (14) non ammette soluzioni periodiche, oppure ne ammette infinite, secondochè il sistema (16) è incompatibile o ammette infinite soluzioni. Si dirà che nell'uno e l'altro caso ha luogo il così detto *fenomeno di risonanza* ([1]).

c) Illustriamo le cose dette con un esempio ([2]).

Sia data l'equazione

$$(17)\qquad x''(t) + \lambda^2 x(t) = f(t),$$

dove $f(t)$ è una funzione periodica, di periodo ω, e λ^2 una costante non nulla (parametro).

L'equazione omogenea corrispondente

$$(18)\qquad x'' + \lambda^2 x = 0$$

([1]) Per un esame approfondito di questo caso cfr. W. B. FITE: *Periodic solutions of linear differential equations*, Ann. of Math., (2), 28 (1927), pp. 59-64; F. UNDERWOOD: *a*) *Note on periodic solutions of linear differential equations*, Ann. of Math., (2), 31 (1930), pp. 655-656; *b*) *An integral condition associated with linear differential equations having simply-periodic coefficients*, Tôhoku Math. Journ., 36 (1933), pp. 269-274; *c*) *A classification of certain ordinary linear differential equations having simply-periodic coefficients*, Idem, pp. 275-302.

([2]) Cfr. R. IGLISCH: *Über den Resonanzbegriff bei nichtlinearen Schwingungen*, Zeitschr. für Ang. Math. und Mech., 17 (1937), pp. 249-258.

ha l'integrale generale $c_1 \cos \lambda t + c_2 \operatorname{sen} \lambda t$, con c_1 e c_2 costanti, e se $\varphi_0(t)$ è un integrale particolare della (17), il suo integrale generale ha l'espressione $x(t) = c_1 \cos \lambda t + c_2 \operatorname{sen} \lambda t + \varphi_0(t)$. Tale integrale risulta periodico, col periodo ω se $x(0) = x(\omega)$, $x'(0) = x'(\omega)$, e per questó occorre e basta che c_1 e c_2 soddisfino il sistema

$$\begin{aligned} (19) \qquad & -c_1[1 - \cos \lambda\omega] + c_2 \operatorname{sen} \lambda\omega = \varphi_0(0) - \varphi_0(\omega); \\ & \lambda c_1[-\operatorname{sen} \lambda\omega] - \lambda c_2[1 - \cos \lambda\omega] = \varphi_0'(0) - \varphi_0'(\omega). \end{aligned}$$

Il determinante dei coefficienti del sistema vale $4\lambda \operatorname{sen}^2(\lambda\omega/2)$, perciò per $\omega \neq 2\pi k/\lambda$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, cioè se il periodo ω non è multiplo del periodo delle soluzioni dell'equazione omogenea (18), la (17) ammette una e una sola soluzione periodica.

Ove sia $\omega = 2\pi k/\lambda$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, *si verifichi cioè il caso di risonanza*, il sistema (19) diventa

$$\varphi_0(0) - \varphi_0(\omega) = 0, \quad \varphi_0'(0) - \varphi_0'(\omega) = 0,$$

e allora se $\varphi_0(t)$ ha il periodo ω, qualsiasi integrale della (17) ha il periodo ω, e perciò *nel caso di risonanza, gli integrali della* (17), *o hanno tutti il periodo* ω *o nessuno possiede tale periodo.*

Questa proprietà si desume dal resto dell'espressione dell'integrale generale della (17). Con il procedimento del Cap. II, § 1, n. 5, c) per l'integrale generale della (17) otteniamo

$$\varphi(t) = -\frac{\cos \lambda t}{\lambda}\int_0^t f(u) \operatorname{sen} \lambda u\, du + \frac{\operatorname{sen} \lambda t}{\lambda}\int_0^t f(u) \cos \lambda u\, du$$
$$+ c_1 \cos \lambda t + c_2 \operatorname{sen} \lambda t,$$

e se $\omega = 2\pi k/\lambda$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, un tale integrale risulta periodico, col periodo ω (comunque si scelgano c_1, c_2) allora e allora soltanto che sia

$$A_1 = \frac{2}{\omega}\int_0^\omega f(u) \cos \lambda u\, du = 0, \qquad A_2 = \frac{2}{\omega}\int_0^\omega f(u) \operatorname{sen} \lambda u\, du = 0.$$

Se invece A_1 e A_2 non sono entrambi nulli, e poniamo

$$f_1(t) = f(t) - A_1 \cos \lambda t - A_2 \operatorname{sen} \lambda t$$

si ha

$$\varphi(t)=\left[-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\int_0^t f_1(u)\operatorname{sen}\lambda u\,du+\frac{\operatorname{sen}\lambda t}{\lambda}\int_0^t f_1(u)\cos\lambda u\,du+c_1\cos\lambda t+\right.$$
$$\left.+\left(c_2+\frac{A_2}{2\lambda^2}\right)\operatorname{sen}\lambda t\right]+\frac{t}{2\lambda}\left[A_1\operatorname{sen}\lambda t-A_2\cos\lambda t\right],$$

e il primo termine del secondo membro ha il periodo ω $[=2k\pi/\lambda]$, mentre i valori del secondo nei punti t, $t+\omega$, $t+2\omega,\ldots$, variano linearmente.

§ 2. - Calcolo degli esponenti caratteristici.

1. Ricerca degli esponenti caratteristici. - 2. Le ricerche di LIAPOUNOFF per le equazioni del secondo ordine. - 3. Il metodo dei determinanti infiniti di HILL per la determinazione degli esponenti caratteristici.

1. - Da quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente risulta che per lo studio del comportamento degli integrali dell'equazione

$$(1)\qquad p_0(t)\frac{d^n x}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+p_n(t)x=0,$$

dove supponiamo $p_0, p_1,\ldots, p_n$ definiti in $(-\infty, +\infty)$, continui, col periodo $\omega>0$,

$$p_i(t+\omega)=p_i(t),\qquad (i=0, 1,\ldots, n;\ -\infty<t<+\infty),$$
$$p_0(t)>0,$$

è necessaria la conoscenza degli esponenti caratteristici, ciò che esige la risoluzione dell'equazione fondamentale e preventivamente il calcolo dei coefficienti $a_{i,k}$ che figurano nelle (4) del § 1.

Il calcolo delle costanti $a_{i,k}$ può ottenersi in questo modo. Si costruiscano gli n integrali particolari $x_1(t), x_2(t),\ldots, x_n(t)$ che soddisfano le condizioni iniziali

$$(2)\qquad x_i(t_0)=\varepsilon_{1,i},\quad x_i'(t_0)=\varepsilon_{2,i},\ldots,\quad x_i^{(n-1)}(t_0)=\varepsilon_{n,i},\quad (i=1, 2,\ldots, n)$$

dove $\varepsilon_{k,i}=0$ se $k\neq i$, $\varepsilon_{k,k}=1$.

Tali integrali formano un sistema fondamentale, e con le notazioni del § 1, n. 2, [cfr. (4)] si ha

$$x_i(t+\omega)=a_{i,1}x_1(t)+a_{i,2}x_2(t)+\ldots+a_{i,n}x_n(t),$$
$$x_i^{(r)}(t+\omega)=a_{i,1}x_1^{(r)}(t)+a_{i,2}x_2^{(r)}(t)+\ldots+a_{i,n}x_n^{(r)}(t),$$

e per $t=t_0$, tenuto conto delle (2),

$$(3)\qquad x_i(t_0+\omega)=a_{i,1},\quad x_i'(t_0+\omega)=a_{i,2},\ldots,\quad x_i^{(n-1)}(t_0+\omega)=a_{i,n},$$
$$(i=1,2,\ldots,n),$$

e perciò il calcolo dei coefficienti $a_{i,1}$, $a_{i,2},\ldots,$ $a_{i,n}$ è ricondotto al calcolo dei valori di $x_i(t)$, $x_i'(t),\ldots,$ $x_i^{(n-1)}(t)$ per $t=t_0+\omega$.

Per quest'ultima valutazione si proceda come appresso. In luogo della (1) si consideri l'altra equazione

$$(4)\qquad L[x(t)]\equiv p_0\frac{d^nx}{dt^n}+\lambda p_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+\lambda p_{n-1}\frac{dx}{dt}+\lambda p_n x=0,$$

ove λ è un parametro, e si costruisca col metodo delle approssimazioni successive l'integrale che soddisfa le condizioni iniziali (2).

Come prima approssimazione di $x_i(t)$ possiamo assumere il polinomio di grado $n-1$ in t, $(i=1,2,\ldots,n)$,

$$(5)\qquad f_{0,i}(t)=\varepsilon_{1,i}+\frac{t-t_0}{1!}\varepsilon_{2,i}+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\varepsilon_{3,i}+\ldots+\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon_{n,i},$$

e l'integrale $x_i(t)$ ha la forma [Cfr. Cap. I, § 3, n. 4, a)]

$$(6)\qquad x_i(t)=f_{0,i}(t)+\lambda f_{1,i}(t)+\ldots+\lambda^s f_{s,i}(t)+\ldots,\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

ed $x_i(t)$ e le sue derivate fino a quelle di ordine n sono trascendenti intere in λ. L'espressione di $x_i^{(r)}(t)$ si ottiene derivando termine a termine r volte la serie del secondo membro ([1]), perciò:

$$(6)'\qquad x_i^{(r)}(t)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s f_{s,i}^{(r)}(t),\qquad (r=1,2,\ldots,n),$$

e per $t=t_0$, qualunque sia λ, si avrà:

$$\varepsilon_{r+1,i}=x_i^{(r)}(t_0)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s f_{s,i}^{(r)}(t_0),\qquad [f^{(0)}=f],$$

([1]) Indicando per maggior chiarezza $x_k(t)$ con $x_k(t,\lambda)$ si ha:

$$x_k'(t,\lambda)=\varphi_{0,k}(t)+\lambda\varphi_{1,k}(t)+\ldots+\lambda^s\varphi_{s,k}(t)+\ldots;$$

ma dalla formula integrale di CAUCHY abbiamo $\varphi_{s,k}(t)=\dfrac{s!}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{x_k'(t,\lambda)}{\lambda^{s+1}}d\lambda$, $f_{s,k}(t)=\dfrac{s!}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{x_k(t,\lambda)}{\lambda^{s+1}}d\lambda$, e tenuto conto del teorema di derivazione sotto il segno integrale, $f'_{s,k}(t)=\varphi_{s,k}(t)$.

quindi

$$f_{0,i}^{(r)}(t_0)=\varepsilon_{r+1,i}; \quad f_{s,i}^{(r)}(t_0)=0, \tag{7}$$

$$(r=0, 1, 2,\dots, n; \quad s=1, 2,\dots; \quad i=1, 2,\dots, n).$$

Abbiamo ora

$$0 \equiv L[x_i(t)] \equiv p_0 x_i^{(n)}(t)+\lambda\sum_{r=0}^{n-1} p_{n-r} x_i^{(r)}(t) \equiv$$

$$\equiv \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s p_0 f_{s,i}^{(n)}(t)+\sum_{s=0}^{\infty}\left[\sum_{r=0}^{n-1} p_{n-r} f_{s,i}^{(r)}(t)\right]\lambda^{s+1},$$

perciò

$$p_0 f_{s+1,i}^{(n)}+\sum_{r=0}^{n-1} p_{n-r} f_{s,i}^{(r)}(t)=0,$$

da cui, tenuto conto delle (7), la formula ricorrente

$$f_{s+1,i}(t)=-\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{n-1}\frac{1}{p_0(u)}\sum_{r=0}^{n-1} p_{n-r}(u) f_{s,i}^{(r)}(u)\,du. \tag{8}$$

Se nelle (6) e (6)′ si fa $\lambda=1$ e $t=t_0+\omega$, e teniamo conto delle (3), per le costanti $a_{i,r}$ otteniamo:

$$a_{i,r+1}=\sum_{s=0}^{\infty} f_{s,i}^{(r)}(t_0+\omega), \qquad (i=1, 2,\dots, n; \ r=0, 1,\dots, n-1).$$

2. - a) Come applicazione delle cose ora dette vogliamo considerare l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda p(t)\,x=0 \tag{9}$$

con $p(t)$ definita in $(-\infty, +\infty)$, continua, periodica, di periodo $\omega>0$, e ricordare alcuni risultati di LIAPOUNOFF [1].

---

[1] A. LIAPOUNOFF: a) *Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, C. Rend. Ac. Sc., 123, (1896), pp. 1248-1252; b) *Sur une équation différentielle linéaire du second ordre*, ibid., 128, (1899), pp. 910-913; c) *Sur une équation trascendante et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques*, ibid., 128, (1899), pp. 1085-1088.

Per lo studio delle soluzioni periodiche della equazione (9) del testo e per gli sviluppi in serie di autofunzioni corrispondenti cfr. É. PICARD: a)

Siano $f(t)$, $\varphi(t)$ due integrali dell'equazione (9) soddisfacenti le condizioni iniziali

(10) $$f(0)=1, \quad f'(0)=0; \qquad \varphi(0)=0, \quad \varphi'(0)=1, \quad (^1)$$

si avrà

(11) $$f(t+\omega)=a_{1,1}f(t)+a_{1,2}\varphi(t), \quad \varphi(t+\omega)=a_{2,1}f(t)+a_{2,2}\varphi(t)$$

e l'equazione fondamentale [§ 1, n. 2, b)] può scriversi

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\varrho & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2}-\varrho \end{vmatrix} = \varrho^2-(a_{1,1}+a_{2,2})\,\varrho+(a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}\,a_{2,1})=0,$$

ma per il teorema di POINCARÉ [§ 1, n. 2 a)] $a_{1,1}\,a_{2,2}-a_{1,2}\,a_{2,1}=1$, perciò l'equazione fondamentale diventa

$$\varrho^2-(a_{1,1}+a_{2,2})\,\varrho+1=0.$$

Si ha dalle (10) e (11), $f(\omega)=a_{1,1}$, $\varphi'(\omega)=a_{2,2}$, perciò posto

(12) $$2A=f(\omega)+\varphi'(\omega),$$

l'equazione fondamentale ha l'espressione

(13) $$\varrho^2-2A\varrho+1=0.$$

Per i risultati del n. 1 si ha (²)

$$f(t)=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n f_n(t), \quad \varphi(t)=\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(t)$$

dove

(14) $$\begin{cases} f_0=1, & f_{s+1}(t)=-\int_0^t (t-u)\,p(u)\,f_s(u)\,du, \\ \varphi_0=t, & \varphi_{s+1}(t)=-\int_0^t (t-u)\,p(u)\,\varphi_s(u)\,du, \qquad (s=0,1,\ldots), \end{cases}$$

Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique, Rend. Circ. Mat. Palermo, 29, (1910) [pp. 79-97], pp. 84-93; b) *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, (Paris, 1930), pp. 37-50; 107-111.

(¹) Con le notazioni del n. 1: $f=x_1(t)$, $\varphi=x_2(t)$.

(²) Con le notazioni del n. 1: $f_{n,1}=f_n$, $f_{n,2}=\varphi_n$.

perciò

$$2A = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n [f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)],$$

ovvero posto

$$(-1)^n 2A_n = f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega), \tag{15}$$

$$A = 1 - \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 - \lambda^3 A_3 + \dots . \tag{16}$$

Dalle (14) e (15) si ha

$$2\,A_1 = \int_0^\omega (\omega - u)\, p(u)\, f_0(u)\, du + \int_0^\omega p(u)\, \varphi_0(u)\, du = \omega \int_0^\omega p(u)\, du,$$

ossia

$$2\,A_1 = \omega \int_0^\omega p(u)\, du,$$

e se poniamo

$$\int_0^t p(u)\, du = P(t), \qquad P(\omega) = \Omega,$$

si dimostra per induzione la formula

$$2\,A_n = \int_0^\omega du_1 \int_0^{u_1} du_2 \dots \int_0^{u_{n-1}} \Theta\, du_n,$$

ove

$$\Theta = [\Omega - P(u_1) + P(u_2)]\,[P(u_1) - P(u_2)] \dots [P(u_{n-1}) - P(u_n)].$$

b) Se facciamo l'ipotesi $p(t) < 0$, si ha $f_n(\omega) > 0$, $\varphi_n'(\omega) > 0$, *le costanti* A_n *hanno il segno di* $(-1)^n$, e la (16), per $\lambda > 0$, dà $A > 1$, perciò l'equazione fondamentale (13) ammette due radici reali ϱ_1 e ϱ_2, con $\varrho_1 > 1$ e $0 < \varrho_2 < 1$. Per i corrispondenti esponenti caratteristici α_1 e α_2 si ha

$$\alpha_1 = (l\varrho_1)/\omega > 0, \qquad \alpha_2 = (l\varrho_2)/\omega < 0,$$

e l'integrale generale della (1) ha la forma

$$c_1\, e^{\alpha_1 t}\, \sigma_1(t) + c_2\, e^{\alpha_2 t}\, \sigma_2(t), \qquad [c_1,\, c_2 \text{ costanti}],$$

con $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ funzioni periodiche di periodo ω, dalla quale si deduce il comportamento (asintotico) degli integrali per $t \to \infty$. [Cfr. § 1, n. 4, d)].

c) Se $p(t) > 0$, $(-\infty < t + \infty)$, tutti gli A_n sono positivi.

Valgono in questo caso i seguenti risultati di LIAPOUNOFF che qui ci limitiamo a ricordare:

$$i) \qquad 0 < A_{m+n} < \frac{m!\, n!}{(m+n)!} A_m A_n;$$

ii) Per tutti i valori positivi di λ per i quali

$$0 < \frac{\lambda\omega}{2} \int_0^\omega p(u)\, du \leq 2, \tag{17}$$

si ha $A^2 < 1$. Segue che *se* $p(t) > 0$, *e vale la* (17), le radici dell'equazione fondamentale (13) hanno l'espressione $\varrho = A \pm i\sqrt{1 - A^2}$, $\varrho_1 = e^{i\theta}$, $\varrho_2 = e^{-i\theta}$, e l'integrale generale della (9) ha la forma [§ 1, n. 4, c)]

$$x(t) = c_1\, \sigma_1(t) + c_2\, \sigma_2(t),$$

$$\sigma_1(t) = \cos\frac{\theta t}{\omega}\, \psi_1(t) - \operatorname{sen}\frac{\theta t}{\omega}\, \psi_2(t), \quad \sigma_2(t) = \cos\frac{\theta t}{\omega}\, \psi_2(t) + \operatorname{sen}\frac{\theta t}{\omega}\, \psi_1(t)$$

dove $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ sono funzioni periodiche di periodo ω, e c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Nelle nostre ipotesi, dall'espressione trovata per $x(t)$ si deduce facilmente che se $x(t)$ è un integrale della (9) che verifica le condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0'$, fissato ε positivo arbitrario, si può corrispondentemente determinare un numero δ tale, che per tutti gli integrali $\bar{x}(t)$ della (9) che verificano le condizioni iniziali

$$\bar{x}(t_0) = x_0 + \delta_1, \qquad \bar{x}'(t_0) = x_0' + \delta_2,$$

con $|\delta_1| < \delta$, $|\delta_2| < \delta$, risulta per t variabile in $(-\infty, +\infty)$

$$|\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon,$$

o come si dice *gli integrali della* (9) *sono stabili* [1].

---

[1] Cfr. Cap. VII, § 1, n. 1.

Recentemente E. R. v. KAMPEN e A. WINTNER [1] hanno dimostrato che la (17) non può migliorarsi, cioè supposto $p(t) > 0$ e

$$0 < \frac{\lambda\omega}{2}\int_0^\omega p(u)\,du \leqslant 2+\varepsilon, \qquad (\varepsilon > 0),$$

non può dedursi la stabilità di tutti gli integrali della (9).

3. - *a*) Vogliamo chiudere questo paragrafo con l'esposizione del metodo dei determinanti infiniti usato dall'astronomo HILL per la determinazione degli esponenti caratteristici [2].

Siano da studiare le soluzioni dell'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A(t)\,x = 0, \tag{18}$$

dove $A(t)$ è una funzione continua pari, $[A(-t) = A(t)]$, periodica, col periodo π $[A(t+\pi) = A(t)]$, e supponiamo che lo sviluppo in serie trigonometrica di FOURIER di $A(t)$

$$A(t) = \theta_0 + 2\theta_1 \cos 2t + 2\theta_2 \cos 4t + \dots + 2\theta_n \cos 2nt + \dots \tag{19}$$

abbia la proprietà che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\theta_n| \tag{20}$$

risulti convergente [3].

Supponiamo che la (18) ammetta un integrale della forma $e^{\mu t}\varphi(t)$, [μ esponente caratteristico] con $\varphi(t)$ periodica di periodo π [§ 1, n. 4, *b*)]; considerando di $\varphi(t)$ lo sviluppo in serie di FOURIER

---

(1) E. R. van KAMPEN and A. WINTNER: *On an absolute constant in the teory of variational stability*, Am. Journ. of Math., 59 (1937), pp. 270-274.

(2) G. W. HILL: *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon*, (Cambridge Ms., U. S. A., 1877); la memoria fu pubblicata con aggiunte negli Acta Math., VIII (1888), pp. 1-36. Avvertiamo il lettore che gli studi sulle equazioni differenziali a coefficienti periodici traggono appunto origine da questa classica memoria.

(3) Una tale circostanza si verifica ad esempio se $A(t)$ possiede in $(0, \pi)$ derivata prima $A'(t)$ lipscitziana di ordine $\alpha > 0$, $|A'(t_1) - A'(t_2)| \leqslant L\,|t_1 - t_2|^\alpha$; [cfr. ad es. G. SANSONE: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (Bologna, 1935), p. 54].

ed esprimendo i seni e i coseni con esponenziali avremo

$$x=e^{\mu t}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{2int}, \tag{21}$$

e poichè $\varphi(t)$ ammette derivata seconda continua, risulta $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|b_n|<+\infty$.

Poniamo

$$\theta_{-n}=\theta_n, \tag{22}$$

sostituiamo la (21) nella (18) e supposte lecite le derivazioni termine a termine, otteniamo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\mu+2in)^2 b_n e^{(\mu+2in)t}+\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\theta_n e^{2int}\Big)\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{(\mu+2in)t}\Big)=0,$$

e il verificarsi di quest'ultima esige che le costanti

$$\ldots, b_{-2},\quad b_{-1},\quad b_0,\quad b_1,\quad b_2,\ldots$$

soddisfino il sistema lineare omogeneo di infinite equazioni con infinite incognite

$$(\mu+2in)^2 b_n+\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\theta_m b_{n-m}=0. \tag{23}$$

Supposto $\theta_0 \neq (2n)^2$, $(n=0, 1, 2,\ldots)$, moltiplicando quest'ultima per $-1/[(2n)^2-\theta_0]$ otteniamo l'altro sistema:

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta_m}{(2n)^2-\theta_0}+\frac{(i\mu-2n)^2-\theta_0}{(2n)^2-\theta_0}b_n-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta_m}{(2n)^2-\theta^0}b_{n+m}=0, \tag{24}$$

$$(n=\ldots, -2, -1, 0, 1, 2,\ldots)$$

del quale indicheremo con $\Delta(i\mu)$ il determinante, porremo cioè:

$$\Delta(i\mu)=\left|\begin{array}{ccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{(i\mu+4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_2}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_3}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_4}{4^2-\theta_0}, & \cdot \\
\cdot & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \frac{(i\mu+2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_2}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_3}{2^2-\theta_0}, & \cdot \\
\cdot & -\frac{\theta_2}{0^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{0^2-\theta_0}, & \frac{(i\mu)^2-\theta_0}{0^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{0^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_2}{0^2-\theta_0}, & \cdot \\
\cdot & -\frac{\theta_3}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_2}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \frac{(i\mu-2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \cdot \\
\cdot & -\frac{\theta_4}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_3}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_2}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{4^2-\theta_0}, & \frac{(i\mu-4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0}, & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right|,$$

e chiameremo anche $\Delta(i\mu)$ il *determinante di Hill* del sistema (24).

Supponiamo ancora $\theta_0-(i\mu-2n)^2\neq0$, $(n=0, \pm1, \pm2,....)$; se in luogo dell'equazione (23) consideriamo quella ottenuta dividendo per $\theta_0-(i\mu-2n)^2$, avremo per le b_n un nuovo sistema il cui determinante $\Delta_1(i\mu)$ ha la forma $\Delta_1(i\mu)=\|a_{n,m}\|$, $(n, m=...., -2 -1, 0, 1, 2,....)$ essendo

$$a_{n,n}=1, \quad a_{n,m}=-\theta_{n-m}/[(2n-i\mu)^2-\theta_0], \qquad (n\neq m).$$

Proveremo immediatamente che il determinante $\Delta_1(i\mu)$ è *normale* [1]; infatti posto $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\theta_n|=L$ si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m\neq n}^{-\infty...\infty}\frac{|\theta_{n-m}|}{|(2n-i\mu)^2-\theta_0|}=\frac{L}{|\mu^2+\theta_0|}+L\sum_{n\neq0}^{-\infty...\infty}\frac{1}{|(2n-i\mu)^2-\theta_0|}<+\infty.$$

Poichè le costanti $|b_n|$ sono complessivamente limitate, per noti risultati della teoria dei determinanti infiniti si ha che l'esistenza di una soluzione con le b_n non tutte nulle esige $\Delta_1(i\mu)=0$, [2], ma si ha

$$\Delta(i\mu)=\Delta_1(i\mu)\prod_{n=-\infty}^{+\infty}[\theta_0-(i\mu-2n)^2]/[\theta_0-4n^2],$$

e poichè da una nota formula di EULERO abbiamo [3]

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(i\mu-\sqrt{\theta_0})\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(i\mu+\sqrt{\theta_0})}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)}=\frac{(i\mu)^2-\theta_0}{\theta_0}\times$$
$$\times\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{(i\mu-\sqrt{\theta_0})^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{(i\mu+\sqrt{\theta_0})^2}{4n^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}\frac{\theta_0}{n^2}\right)^2},$$

---

[1] Cfr. F. RIESZ: *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, (Paris, 1913), p. 24; oppure G. SANSONE: *Lezioni di Analisi Matematica*, I (4ª ed., Padova, 1940), Cap. XIII, n. 24

[2] Cfr. F. RIESZ, opera cit., p. 29; oppure G. SANSONE, opera cit., Cap. XIII, n. 27.

[3] Cfr. ad es. L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, (Pisa, 1901), p. 187.

ne viene

$$\Delta(i\mu) = -\Delta_1(i\mu)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(i\mu-\sqrt{\theta_0})\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi(i\mu+\sqrt{\theta_0})}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)},$$

e quindi l'*esponente caratteristico* μ *dell'integrale* $e^{\mu t}\varphi(t)$ *soddisfa l'equazione*

$$\Delta(i\mu)=0.$$

b) Si può dimostrare che si ha

$$\Delta(i\mu)=\Delta(0)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right) / \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)$$

e perciò l'*esponente caratteristico* μ *soddisfa l'equazione*

$$\Delta(0)\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)=\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right) \quad (^1).$$

§ 3. - I sistemi autoaggiunti del secondo ordine con condizioni ai limiti periodiche.

1. Esistenza di autovalori. - 2. Teorema di oscillazione.

1\. - Consideriamo il sistema differenziale

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left[\theta(t,\lambda)\frac{dx}{dt}\right]-Q(t,\lambda)x=0, \qquad \theta(t,\lambda)>0,$$

$$(2) \quad x(a,\lambda)-x(b,\lambda)=0, \qquad (3) \quad x'(a,\lambda)-x'(b,\lambda)=0$$

dove $\theta(t,\lambda)$, $Q(t,\lambda)$ dipendono da un parametro λ variabile nell'intervallo aperto (Λ_1, Λ_2), $(\Lambda_1<\Lambda_2)$ e supponiamo che:

a) le funzioni $\theta(t,\lambda)$, $\frac{\partial\theta(t,\lambda)}{\partial t}$, $Q(t,\lambda)$ siano funzioni continue di t e λ per $a\leqslant t\leqslant b$ e λ in (Λ_1,Λ_2), e fissato comunque un valore di t in (a,b), le funzioni $\theta(t,\lambda)$, $Q(t,\lambda)$ riescano funzioni continue non crescenti di λ quando λ varia tra Λ_1 e Λ_2;

b) $Q(t,\lambda)$ non si annulli in uno stesso tratto di (a,b) per due valori distinti di λ;

c) per due valori λ_1 e λ_2 distinti, in nessun tratto di (a,b) si abbia simultaneamente $\theta(t,\lambda_1)=\theta(t,\lambda_2)$, $Q(t,\lambda_1)=Q(t,\lambda_2)$.

(1) Cfr. E. T. Whittaker, G. N. Watson: *Modern Analysis*, (3ª ed., Cambridge, 1920), p. 416.

Abbiamo visto che il sistema è autoaggiunto se è verificata la condizione [Cap. V, § 2, n. 6]

$$\theta(a, \lambda) = \theta(b, \lambda) \tag{4}$$

e noi vogliamo studiare in questa ipotesi se esistono valori del parametro λ (autovalori) cui corrispondono soluzioni (non identicamente nulle) del sistema (1), (2), (3).

Se oltre la (4) valgono le relazioni $\theta_t'(a, \lambda) = \theta_t'(b, \lambda)$, $Q(a, \lambda) = Q(b, \lambda)$, e definiamo $\theta(t, \lambda)$, $Q(t, \lambda)$ per t variabile in $(-\infty, +\infty)$, con le relazioni $\theta[t+(b-a), \lambda] = \theta[t, \lambda]$, $Q[t+(b-a), \lambda] = Q(t, \lambda)$, $-\infty < t < +\infty$, la (1) è un'equazione a coefficienti periodici di periodo $b-a$, e il problema considerato equivale in questo caso alla ricerca delle soluzioni periodiche dell'equazione (1) di periodo $b-a$; per tale ragione il sistema (1), (2), (3) chiamasi un *sistema differenziale con condizioni ai limiti periodiche.*

Noi supponiamo che in aggiunta delle ipotesi a), b), c) i coefficienti $Q(t, \lambda)$, $\theta(t, \lambda)$ verifichino una o l'altra delle seguenti condizioni:

d_1) $$\lim_{\lambda \to \Lambda_2} - \max_{a \leqslant t \leqslant b} Q(t, \lambda) \Big/ \max_{a \leqslant t \leqslant b} \theta(t, \lambda) = +\infty,$$

$$\lim_{\Lambda \to \Lambda_1} \min_{a \leqslant t \leqslant b} Q(t, \lambda) = +\infty, \tag{5$_1$}$$

$$\theta(t, \lambda) \geqslant \tau > 0, \quad \text{per} \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad \text{e} \quad \Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2;$$

d_2) all'intervallo (Λ_1, Λ_2) appartenga l'estremo Λ_1 e si abbia

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_2} - \max_{a \leqslant t \leqslant b} Q(t, \lambda) \Big/ \max_{a \leqslant t \leqslant b} \theta(t, \lambda) = +\infty, \tag{5$_2$}$$

$$\min_{a \leqslant t \leqslant b} Q(t, \Lambda_1) \geqslant 0.$$

Dimostreremo che *nelle ipotesi* a), b), c), d_1), oppure a), b), c), d_2) *esistono infiniti autovalori pel sistema differenziale* (1), (2), (3) [1].

---

[1] Cfr. M. Bôcher: *Leçons sur les méthodes de Sturm*, (Paris, 1917), p. 78, p. 83; cfr. anche O. Haupt: *Über eine Methode zum Beweise von Oszillationstheoremen*, Math. Ann., 76 (1915), pp. 67-104; H. J. Ettlinger: *a) Existence theorems for the general real self-adjoint linear system of the second order*, Trans. of the Am. Math. Soc., 19 (1918), pp. 79-96; *b) Oscil-*

Sia $x_1(t, \lambda)$, $x_2(t, \lambda)$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione (1), determinato dalle condizioni iniziali

$$x_1(a, \lambda)=1, \quad x_1'(a, \lambda)=0; \qquad x_2(a, \lambda)=0, \quad x_2'(a, \lambda)=1;$$

si ha [Cap. II, § 1, n. 2, c)]

$$\begin{vmatrix} x_1(t, \lambda), & x_2(t, \lambda) \\ x_1'(t, \lambda) & x_2'(t, \lambda) \end{vmatrix} = \frac{\theta(a, \lambda)}{\theta(t, \lambda)},$$

e per $t=b$

$$x_1(b, \lambda)\, x_2'(b, \lambda) - x_2(b, \lambda)\, x_1'(b, \lambda) = 1. \tag{6}$$

Se $c_1 x_1(t, \lambda) + c_2 x_2(t, \lambda)$ è un integrale per il quale risultano verificate le condizioni periodiche (2) e (3) dovrà riuscire

$$c_1 [1 - x_1(b, \lambda)] - c_2 x_2(b, \lambda) = 0, \qquad -c_1 x_1'(b, \lambda) + c_2 [1 - x_2'(b, \lambda)] = 0,$$

e questo sistema sarà soddisfatto da valori delle costanti c_1 e c_2 non entrambi nulli allora e allora soltanto che λ sia una radice dell'equazione ottenuta annullando il determinante della matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 - x_1(b, \lambda), & -x_2(b, \lambda) \\ -x_1'(b, \lambda), & 1 - x_2'(b, \lambda) \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

che per la (6) può scriversi

$$F(\lambda) = -2 + x_1(b, \lambda) + x_2'(b, \lambda) = 0; \tag{8}$$

abbiamo quindi che *gli autovalori λ sono tutti e soltanto le radici dell'equazione* (8).

Notiamo che se per un autovalore λ la matrice (7) ha la caratteristica 1, ad essa corrisponde una sola autofunzione, ma se λ annulla tutti i termini della (7), vi sono due autofunzioni linearmente indipendenti che soddisfano il sistema (1), (2), (3) e λ si dirà un *autovalore doppio*.

Insieme al sistema (1), (2), (3), consideriamo il sistema

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t, \lambda)\frac{dx}{dt}\right] - Q(t, \lambda)\, x = 0, \tag{9}$$

$$(10) \quad x(a, \lambda) = 0; \qquad\qquad (11) \quad x(b, \lambda) = 0,$$

---

lation theorems for the real, self-adjoint linear system of the second order, Trans. of the Am. Math. Soc., 22 (1921), pp. 136-143; E. KAMKE: *Neue Herleitung der Oszillationsätze für die linearen selbstadjungierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung*, Math. Zeitschr., 44 (1938), pp. 635-658.

il quale, per le ipotesi dichiarate, ammette una successione di autovalori

$$\mu_0, \quad \mu_1, \ldots, \quad \mu_i, \ldots, \qquad (\mu_i < \mu_{i+1}) \quad ,$$

tale che l'autosoluzione $x(t, \mu_i)$ corrispondente all'autovalore μ_i ha precisamente i zeri consecutivi *interni* ad (a, b) ed i soltanto [Cap. IV, § 6, n. 5].

Dalla (6), posto $\lambda = \mu_i$, poichè $x_2(b, \mu_i) = 0$, si ha

$$x_1(b, \mu_i)\, x_2'(b, \mu_i) = 1, \tag{12}$$

quindi $x_1(b, \mu_i)$, $x_2'(b, \mu_i)$ sono dello stesso segno, e dalla (8) si ha

$$F(\mu_i) = \varepsilon\, [\sqrt{|x_1(b, \mu_i)|} - \varepsilon \sqrt{|x_2'(b, \mu_i)|}\,]^2,$$

dove $\varepsilon = +1$ se $x_2'(b, \mu_i) > 0$, ed $\varepsilon = -1$ se $x_2'(b, \mu_i) < 0$.

Poichè $x_2'(a, \mu_0) = 1$ e la $x_2(t, \mu_0)$ è positiva in (a, b) si ha $x_2'(b, \mu_0) < 0$; analogamente è $x_2'(a, \mu_1) = 1$, ma $x_2(t, \mu_1)$ hà uno zero soltanto in (a, b), perciò $x_2'(b, \mu_1) > 0$; e così continuando ricaviamo

$$F(\mu_0) \leqslant 0, \quad F(\mu_1) \geqslant 0, \quad F(\mu_2) \leqslant 0, \quad F(\mu_3) \geqslant 0, \ldots,$$

ma $F(\lambda)$ è una funzione continua del parametro λ, e perciò l'equazione $F(\lambda) = 0$ ha almeno una radice in ciascuno degli intervalli (μ_0, μ_1), $(\mu_1, \mu_2), \ldots$.

È facile ancora provare che

$$F(\mu_0) < 0, \quad F(\mu_2) < 0, \ldots, \quad F(\mu_{2p}) < 0, \ldots.$$

Infatti l'autofunzione del sistema (9), (10), (11) corrispondente all'autovalore μ_{2p} ha $2p$ zeri internamente ad (a, b), e per il così detto teorema di separazione [Cap. IV, § 2, n. 7] ogni altra soluzione dell'equazione (9) da essa indipendente (corrispondente al valore $\lambda = \mu_{2p}$) ha soltanto $2p + 1$ zeri (numero *dispari*) in (a, b), e perciò agli estremi dell'intervallo (a, b) non può prendere valori uguali, circostanza che per la (2) dovrebbe verificarsi ove si supponesse $F(\mu_{2p}) = 0$.

Abbiamo allora che *l'equazione* $F(\lambda) = 0$, *ha internamente a ciascuno degli intervalli* (μ_0, μ_2), $(\mu_2, \mu_4), \ldots$ *almeno una coppia di zeri, eventualmente coincidenti*, e l'esistenza quindi di infiniti autovalori per il sistema differenziale (1), (2), (3) è dimostrata.

2. - a) Sia $\bar{\lambda}$ un autovalore relativo al sistema (1), (2), (3) compreso nell'intervallo (μ_{2p}, μ_{2p+2}); poichè l'autofunzione $y(x, \mu_{2p})$ relativa al sistema (9), (10), (11) ha $2p$ zeri interni all'intervallo (a, b), e le ipotesi a), b), c) consentono l'applicazione del teorema di confronto [Cap. IV, § 6, n. 3, a)] ne segue che l'autosoluzione $y(x, \bar{\lambda})$ del sistema (1), (2), (3) ha almeno $2p+1$ zeri interni ad (a, b). Ne viene che *il numero degli zeri delle autosoluzioni del sistema* (1), (2), (3), *cresce oltre ogni limite al crescere di* $\bar{\lambda}$, e si presenta allora naturale la questione di precisare la dipendenza tra il posto degli autovalori, supposti ordinati in una successione non decrescente, e il numero degli zeri dell'autosoluzione corrispondente.

b) Vale in generale il teorema di cui qui ci limitiamo a ricordare l'enunciato: *Se per il sistema differenziale* (1), (2), (3), *valgono le ipotesi* a), b), c), d_1), *oppure* a), b), c), d_2), *gli autovalori corrispondenti si possono ordinare in una successione non decrescente*

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \dots, \quad \lambda_i, \dots, \qquad (\lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}),$$

tale che l'autosoluzione corrispondente all'autovalore λ_i *ha in* $a \leqslant x < b$, i *zeri, se* i *è pari, e* $i+1$ *zeri, se* i *è dispari* (¹).

Ad esempio consideriamo l'equazione $x'' + \lambda x = 0$, e si vogliano determinare le soluzioni che soddisfano le condizioni periodiche

$$x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi);$$

gli autovalori sono

$$\lambda = 0^2, \quad 1^2, \dots, \quad i^2, \dots;$$

ogni autovalore, salvo $\lambda = 0$, è doppio, e le autofunzioni corrispondenti a $\lambda = i^2$ sono sen it, cos it; la prima ha in $0 \leqslant t < \pi$, $2i$ zeri nei punti 0, $1\frac{\pi}{i}$, $2\frac{\pi}{i}, \dots$, $(2i-1)\frac{\pi}{i}$; l'altra ha ugualmente $2i$ zeri nei punti $1\frac{\pi}{2i}$, $3\frac{\pi}{2i}, \dots$, $(4i-1)\frac{\pi}{2i}$.

(¹) Cfr. M. Bôcher: *Leçons sur les méthodes de Sturm*, (Paris, 1917), p. 89.

§ 4. - L'equazione differenziale di Mathieu, e le funzioni associate del cilindro ellittico.

1. Le soluzioni elementari dell'equazione delle membrane di forma ellittica, vibranti, e l'equazione di MATHIEU. - 2. Le funzioni di MATHIEU. Classificazione in tipi. - 3. Inesistenza di soluzioni periodiche indipendenti corrispondenti ad un medesimo autovalore. Teorema di INCE. - 4. L'equazione integrale di WHITTAKER delle funzioni di MATHIEU.

1. - *a*) Consideriamo una membrana piana, omogenea, di forma ellittica, ugualmente tesa in tutte le direzioni, della quale si mantenga fisso il contorno.

Assumiamo come assi di riferimento gli assi dell'ellisse, e fissato un suo punto (x, y), proponiamoci di calcolare lo spostamento $w(x, y, t)$ che compete al punto (x, y) al tempo t, quando la membrana si sposti inizialmente dalla posizione di equilibrio.

Come è ben noto se m^2 indica il rapporto tra la tensione e la densità della membrana, la $w(x, y, t)$ è una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = m^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \tag{1}$$

annullantesi sul contorno dell'ellisse ([1]).

([1]) Cfr. É. MATHIEU: *Théorie de l'élasticité des corps solides*, (Paris, 1890), Iª p., p. 197. Cfr. anche P. BURGATTI: (*Analisi Vettoriale generale e Applicazioni, III*) *Teoria Matematica della Elasticità*, (Bologna, 1931), p. 330.

Altri problemi della fisica matematica conducono all'equazione (1). Consideriamo la propagazione delle onde elettromagnetiche; il vettore elettrico $\underline{E}$ del fronte d'onda sia parallelo all'asse z, e $(H_x, H_y, 0)$ siano le componenti della forza magnetica. Le equazioni fondamentali di MAXWELL si scrivono

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c\frac{\partial H_y}{\partial x} - c\frac{\partial H_x}{\partial y}, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial t} = -c\frac{\partial E}{\partial y}, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial t} = c\frac{\partial E}{\partial x},$$

ove c indica la velocità della luce [Cfr. ad es. G. A. MAGGI: *Teoria fenomenologica del Campo elettromagnetico*, (Milano, 1931), p. 183, p. 190].

Si ha

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial t}; \qquad (1^*) \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2},$$

e se le onde incidono su un cilindro ellittico conduttore avente per assi della sua sezione retta col piano $z = 0$ gli assi coordinati x e y, dovendo il vettore $\underline{E}$ annullarsi sulla superficie del cilindro, si deduce per la (1^*) lo stesso problema al contorno per la (1) del testo.

Se vogliamo determinare delle soluzioni con la *costante di frequenza* p e della forma $w=u(x, y)\cos(pt+\varepsilon)$, $u(x, y)$ deve soddisfare l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{p^2}{m^2}u=0. \tag{2}$$

Siano $(\pm c, 0)$ le coordinate dei fuochi dell'ellisse, ed effettuiamo il cangiamento di variabili indipendenti

$$x=c\cosh\xi\cos\eta, \qquad y=c\,\mathrm{senh}\,\xi\,\mathrm{sen}\,\eta, \tag{3}$$

[ξ, η *coordinate ellittiche*]; per esso le curve $\xi=\text{cost}$, $\eta=\text{cost.}$ sono rispettivamente ellissi ed iperboli omofocali con i fuochi nei punti $(-c, 0)$, $(+c, 0)$.

Si otterranno tutti i punti della membrana per $\xi>0$ e $-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$, ed effettuando la trasformazione (3), la (2), con semplici calcoli diventa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{c^2p^2}{m^2}(\cosh^2\xi-\cos^2\eta)\,u=0. \tag{4}$$

Si voglia ora, di quest'ultima equazione, determinare una *soluzione elementare* della forma

$$u=F(\xi)\,G(\eta);$$

dovrà risultare

$$\left[\frac{F''(\xi)}{F(\xi)}+\frac{c^2p^2}{m^2}\cosh^2\xi\right]=-\left[\frac{G''(\eta)}{G(\eta)}-\frac{c^2p^2}{m^2}\cos^2\eta\right],$$

e poichè i due membri sono rispettivamente funzioni di ξ e η soltanto, essi sono entrambi uguali ad una costante assoluta A, dovrà riuscire quindi

$$F''(\xi)+\left(\frac{c^2p^2}{m^2}\cosh^2\xi-A\right)F(\xi)=0, \tag{5}$$

$$G''(\eta)-\left(\frac{c^2p^2}{m^2}\cos^2\eta-A\right)G(\eta)=0. \tag{6}$$

Notiamo esplicitamente le condizioni che dovranno essere imposte alla F e alla G perchè si abbia una soluzione che soddisfi le condizioni ai limiti richieste dal problema.

La continuità della soluzione esige

$$G(-\pi)=G(\pi), \qquad G'(-\pi)=G'(\pi)$$

e quindi *la G deve risultare periodica, di periodo* 2π, o ciò che è lo stesso nella (6) la costante A [autovalore] deve essere scelta in guisa che l'equazione ammetta una soluzione periodica di periodo 2π.

Se indichiamo poi con a il semiasse maggiore dell'ellisse, e se ξ_0 è tale che $c \cosh \xi_0 = a$, dovrà risultare $F(\xi_0)=0$ e per la (5) questa condizione, fissato l'autovalore A, determina la $F(\xi)$ a meno di un fattore costante.

b) Se nella (6) poniamo

$$l = A - \frac{c^2p^2}{2m^2}, \qquad h^2 = \frac{c^2p^2}{4m^2},$$

essa diventa

$$G''(\eta) + (l - 2h^2 \cos 2\eta)\, G = 0,$$

e sotto questa forma prende il nome di equazione di MATHIEU. Tale equazione è un caso particolare dell'equazione di HILL del § 2, n. 3 (¹).

2. - *a*) Consideriamo l'equazione di MATHIEU

$$y'' + [l - 2h^2 \cos 2x]\, y = 0, \tag{7}$$

e notiamo che per i risultati del Cap. III, § 2, n. 1, qualunque suo integrale è una trascendente intera tanto rispetto ad x che rispetto ad l.

Se $y(x, l)$ indica un integrale della (7), anche $y(-x, l)$ è un suo integrale, perciò $[y(x, l)+y(-x, l)]/2$, $[y(x, l)-y(-x, l)]/2$ sono due soluzioni della (7), ma di queste una è pari e l'altra dispari, basterà quindi occuparci delle soluzioni pari o delle soluzioni dispari della (7).

Per un fissato valore di l la (7) non può possedere due integrali indipendenti entrambi pari o entrambi dispari; infatti una trascen-

(¹) Per lo studio dell'equazione di MATHIEU e la completa bibliografia rimandiamo il lettore alle seguenti opere *a*) E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON: *A cours of Modern Analysis*, (Cambridge, 1920), pp. 404-428; *b*) P. HUMBERT: *Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu*, (Paris, 1926), pp. 1-55; *c*) M. J. O. STRUTT: *Laméscha-Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, I, 3 (Berlin, 1932), (pp. VIII + 116).

dente intera pari ha la sua derivata che si annulla necessariamente nell'origine [una dispari si annulla essa stessa nell'origine] mentre la (7) ammette soluzioni che nell'origine soddisfano la condizione $y'(0)=1$ [$y(0)=1$]. Abbiamo quindi che *un sistema fondamentale di integrali dell'equazione* (7) *può formarsi con una soluzione pari e una dispari.*

Osserviamo ora che se nella (1) del § 3, n. 1 cangiamo t in x, λ in l, e facciamo $\theta=1$, $Q(x, l)=2h^2 \cos 2x-l$ otteniamo la (7) e se poniamo $\Lambda_1=-2h^2$, $[Q(x,-2h^2)=2h^2 \cos 2x+2h^2 \geqslant 0]$, $\Lambda_2=+\infty$ sono verificate le ipotesi *a*), *b*), *c*), d_2) del n. 1 citato, *esiste quindi una successione non decrescente di autovalori* $\{l_m\}$ *avente per limite* $+\infty$, *alla quale corrisponde una successione di autofunzioni* $\{y(x, l_m)\}$, *periodiche di periodo* 2π,

$$y(-\pi, l_m)=y(\pi, l_m); \qquad y'(-\pi, l_m)=y'(\pi, l_m),$$

e ogni $y(x, l_m)$ *è caratterizzata dal fatto che essa in* $-\pi \leqslant x < \pi$ *possiede* m *zeri, o* $m+1$ *zeri, secondochè* m *è pari o dispari.*

b) Consideriamo una soluzione *pari*, di periodo 2π della (7); essa è sviluppabile in una serie uniformemente convergente di coseni [1], e poichè se y è una soluzione della (7) anche $y(x+\pi)$ è una soluzione della stessa equazione, e l'equazione non può ammettere due soluzioni indipendenti pari, si ha che $y(x+\pi)$ deve differire per un fattore costante da $y(x)$ e ciò esige che lo sviluppo in serie di coseni di $y(x)$ abbia una o l'altra delle forme

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos (2r+1)x, \qquad \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos 2rx.$$

Analogamente le soluzioni dispari avranno la forma

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r' \operatorname{sen} (2r+1)x, \qquad \sum_{r=1}^{\infty} c_r' \operatorname{sen} 2rx.$$

Queste *soluzioni* si dicono rispettivamente di *tipo* C_1, C_0, S_1, S_0.

Tenuto conto che per $h=0$ l'equazione (7) diventa $y''+ly=0$, che ammette la successione di autovalori $l=m^2$, $(m=0, 1, 2, \ldots)$ e

---

[1] Cfr. ad es. L. Bianchi: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa*, (Pisa, 1901), p. 399.

le corrispondenti autosoluzioni $\cos mx$, $\operatorname{sen} mx$, si conviene di chiamare ***funzioni di Mathieu di prima specie*** le soluzioni periodiche della (7) che per $h \to 0$ (a meno di un fattore costante) si riducono a $\cos mx$, $\operatorname{sen} mx$. Esse si indicano rispettivamente con i simboli

$$c\, e_{2n+1}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,\,2m+1} \cos (2m+1)x, \qquad (n=0,\,1,\ldots,\ A_{n,\,2n+1}=1),$$

$$c\, e_{2n}(x) \;\; = \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,\,2m} \cos 2mx, \qquad (n=0,\,1,\ldots,\ A_{n,\,2n}=1),$$

$$s\, e_{2n+1}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{n,\,2m+1} \operatorname{sen} (2m+1)x, \qquad (n=0,\,1,\ldots,\ B_{n,\,2n+1}=1),$$

$$s\, e_{2n}(x) \;\; = \sum_{m=0}^{\infty} B_{n,\,2m} \operatorname{sen} 2mx, \qquad (n=1,\,2,\ldots,\ B_{n,\,2n}=1).$$

c) Noto l'autovalore l, con procedimento ricorrente possiamo determinare la corrispondente autosoluzione.

Si voglia ad esempio determinare una soluzione di tipo C_1; si avrà

$$C_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos (2r+1)x, \tag{8}$$

e poichè lo sviluppo in serie di $C_1''(x)$ può ottenersi derivando la (8) termine a termine si ha anche

$$C_1''(x) = -\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1)^2 c_r \cos (2r+1)x,$$

e sostituendo nella (7) avremo

$$\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1)^2 c_r \cos (2r+1)x - l \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos (2r+1)x + h^2 \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos (2r+3)x$$
$$+ h^2 \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos (2r-1)x = 0,$$

dalla quale si deducono le equazioni ricorrenti

$$\left\{ \begin{aligned} &(l-1-h^2)\, c_0 - h^2 c_1 = 0, \\ &[(2r+1)^2 - l]\, c_r + h^2 (c_{r-1} + c_{r+1}) = 0, \qquad (r=1,\,2,\ldots). \end{aligned} \right. \tag{9_1}$$

Analogamente per una soluzione di tipo C_0, $C_0(x)=\sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos 2rx$ si hanno le relazioni ricorrenti

$$(9_2)\qquad \begin{cases} -lc_0+h^2c_1=0, \quad [2^2-l]\,c_1+h^2(2c_0+c_2)=0, \\ [(2r)^2-l]\,c_r+h^2(c_{r-1}+c_{r+1})=0, \qquad (r=2,\,3,\ldots); \end{cases}$$

così pure per le due soluzioni

$$S_1=\sum_{r=0}^{\infty} c_r' \operatorname{sen}(2r+1)\,x, \qquad S_0=\sum_{r=1}^{\infty} c_r' \operatorname{sen} 2rx,$$

si hanno rispettivamente le relazioni ricorrenti

$$(9_3)\qquad \begin{cases} (l-1+h^2)\,c_0'-h^2c_1'=0, \\ [(2r+1)^2-l]\,c_r'+h^2(c'_{r-1}+c'_{r+1})=0, \qquad (r=1,\,2,\ldots); \end{cases}$$

$$(9_4)\qquad \begin{cases} (l-2^2)\,c_1'-h^2c_2'=0, \\ [(2r)^2-l]\,c_r'+h^2(c'_{r-1}+c'_{r+1})=0, \qquad (r=2,\,3,\ldots). \end{cases}$$

3. - *a*) Le formule (9_1), (9_2), (9_3), (9_4) del numero precedente ci consentono dimostrare il seguente teorema di INCE: *Salvo il caso $h=0$, per ogni $h\neq 0$, nell'equazione* (7), *ad ogni autovalore l corrisponde una e una sola autosoluzione* (1).

Supponiamo che ad un autovalore l corrispondano due autosoluzioni indipendenti y_1 e y_2; per le cose dette nel numero precedente possiamo supporre una di esse pari e l'altra dispari e possiamo allora supporre che y_1 sia di tipo C_0 o C_1, e y_2 di tipo S_0 o S_1.

Avendosi

$$y_1''+[l-2h^2\cos 2x]\,y_1=0, \qquad y_2''+[l-2h^2\cos 2x]\,y_2=0,$$

moltiplicando la prima per y_2 e la seconda per y_1 e sottraendo si ha $[y_2y_1'-y_1y_2']'=0$, quindi $y_2y_1'-y_1y_2'=$ cost., e questo porta che se y_1 è di tipo $C_1[C_0]$, y_2 è di tipo $S_1[S_0]$; infatti se y_1 fosse di tipo C_1 e y_2 di tipo S_0, cangiando x in $x+\pi$, l'espressione $y_2y_1'-y_1y_2'$ cambierebbe di segno, perciò $y_2y_1'-y_1y_2'=0$, e le y_1 e y_2 sarebbero linearmente dipendenti.

---

(1) E. L. INCE: *A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions*, Proc. of the Cambr. Phil. Soc., 21 (1922), pp. 117-120.

Siano allora y_1 e y_2 rispettivamente di tipo C_1 e S_1 ([1]); si avrà dalle (9_1), (9_3)

$$(10_1)\qquad (l-1-h^2)c_0-h^2c_1=0, \qquad (l-1+h^2)c_0'-h^2c_1'=0;$$

$$(10_2)\qquad [(2r+1)^2-l]c_r+h^2(c_{r+1}+c_{r-1})=0,$$
$$[(2r+1)^2-l]c_r'+h^2(c'_{r+1}+c'_{r-1})=0;$$

e supposto $h\neq 0$ ed eliminando nelle (10_1) e (10_2) l si ha:

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_0' & c_1' \end{vmatrix} = 2\,c_0\,c_0', \qquad \begin{vmatrix} c_r & c_{r+1} \\ c_r' & c'_{r+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{r-1} & c_r \\ c'_{r-1} & c_r' \end{vmatrix},$$

quindi

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} c_r & c_{r+1} \\ c_r' & c'_{r+1} \end{vmatrix} = 2c_0c_0', \qquad (r=0,\ 1,\ldots).$$

Ma le due serie trigonometriche

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos\,(2r+1)\,x,\ \sum_{r=0}^{\infty} c_r' \operatorname{sen}\,(2r+1)\,x$$

sono serie di Fourier e ciò implica

$$\lim_{r\to\infty} c_r = \lim_{r\to\infty} c_r' = 0, \quad ([2])$$

e dalle (11) $c_0c_0'=0$; ma $h\neq 0$, e dalle (10_1) e (10_2) segue che una almeno delle due successioni $\{c_r\}$, $\{c_r'\}$ ha tutti i suoi termini nulli e perciò o $y_1\equiv 0$, oppure $y_2\equiv 0$, e ciò non può essere.

b) Dal teorema dimostrato segue che ogni autofunzione dell'equazione di Mathieu deve essere pari o dispari; infatti se $y(x, l)$ è un'autofunzione di periodo 2π, anche $y(-x, l)$ è un'autofunzione con lo stesso periodo e appartenente al medesimo autovalore, e per il teorema dimostrato queste due soluzioni non possono differire che per un fattore costante.

4. - Noteremo infine una tra le notevoli equazioni integrali di Whittaker cui soddisfano le funzioni di Mathieu, equazioni alle

---

[1] Ugualmente si ragiona se y_1 e y_2 sono rispettivamente di tipo C_0 e S_0.

[2] Cfr. ad es. G. Sansone: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, (Bologna, 1935), p. 58.

quali si riattaccano le moderne ricerche della scuola inglese su questa importante classe di funzioni [1].

Dimostreremo che se $y(x)$ è una soluzione periodica dell'equazione di MATHIEU, di periodo 2π, essa soddisfa l'equazione integrale di WHITTAKER a nucleo simmetrico

$$(12) \qquad y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta} y(\theta)\, d\theta.$$

Osserviamo che la (7) può scriversi

$$y'' + (l_1 - 4h^2 \cos^2 x) y = 0,$$

e supposto che l_1 sia un autovalore e $y(x)$ la corrispondente soluzione periodica di periodo 2π, consideriamo la funzione

$$(13) \qquad Y(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta} y(\theta)\, d\theta,$$

che è anch'essa una funzione periodica di periodo 2π.

Si trova subito che è

$$\begin{aligned} Y'' + (l_1 - 4h^2 \cos^2 x) Y = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta} [4h^2 \cos^2 x \operatorname{sen}^2 \theta - 2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta + \\ + (l_1 - 4h^2 \cos^2 x)]\, y(\theta)\, d\theta, \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} 4h^2 \cos^2 x \operatorname{sen}^2 \theta - 4h^2 \cos^2 x = \\ = 4h^2 [(1 - \operatorname{sen}^2 x)(1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 x] = \\ = 4h^2 [\operatorname{sen}^2 x \cos^2 \theta - \cos^2 \theta], \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned} Y'' + (l_1 - 4h^2 \cos^2 x) Y = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta} [4h^2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 \theta - 2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta + \\ + (l_1 - 4h^2 \cos^2 \theta)]\, y(\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

---

[1] E. T. WHITTAKER: *On the functions associated with the elliptic-cylinder in armonic analysis*, Intern. Congr. of Math. (Cambridge, 1912), I (1912), pp. 366-371; cfr. anche E. G. C. POOLE: *On certain classes of Mathieu functions*, Proc. of the London Math. Soc., (2), 20 (1921), pp. 374-388.

Integrando successivamente per parti, e tenuto conto della periodicità di $y(\theta)$ e di $dy/d\theta$, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta} [4h^2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 \theta - 2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \theta]\, y(\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2h \frac{d\,[\operatorname{sen} x \cos\theta\, e^{2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\theta}]}{d\theta}\, y(\theta)\, d\theta =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\theta}\, 2h \operatorname{sen} x \cos\theta \frac{dy}{d\theta}\, d\theta =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\theta}\left[e^{2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\theta}\right] \frac{dy}{d\theta}\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\theta} \frac{d^2 y}{d\theta^2}\, d\theta,$$

perciò

$$Y'' + [l_1 - 4h^2 \cos^2 x] Y =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\theta} \left[\frac{d^2 y}{d\theta^2} + (l_1 - 4h^2 \cos^2\theta)\, y\right] d\theta = 0,$$

$Y(x)$ soddisfa quindi l'equazione di MATHIEU e differisce per il teorema di INCE (n. 3) da $y(x)$ per un fattore costante λ, abbiamo perciò $y(x) = \lambda Y(x)$, e dalla (13) si ha appunto la (12).

§ 5. - Sistemi lineari omogenei a coefficienti periodici.

a) Mostreremo brevemente come i resultati sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici, del § 1, valgono per i sistemi differenziali lineari omogenei a coefficienti periodici.

Sia dato il sistema

$$(1) \qquad x_i'(t) = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l}(t)\, x_l(t), \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e supponiamo i coefficienti $a_{i,l}(t)$ definiti in $(-\infty, +\infty)$, continui, periodici, col medesimo periodo ω, $(\omega > 0)$,

$$(2) \quad a_{i,l}(t+\omega) = a_{i,l}(t), \quad (i, l = 1, 2, \dots, n), \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Gli n sistemi di integrali del sistema (1)

$$(3) \qquad x_{1,k}(t), \quad x_{2,k}(t), \dots, \quad x_{n,k}(t), \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

formino un sistema fondamentale, sia quindi

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} x_{1,1}(t), & x_{2,1}(t),\dots, & x_{n,1}(t) \\ x_{1,2}(t), & x_{2,2}(t),\dots, & x_{n,2}(t) \\ \dots & & \dots \\ x_{1,n}(t), & x_{2,n}(t),\dots, & x_{n,n}(t) \end{vmatrix} \neq 0;$$

come è noto il più generale sistema di integrali del sistema (1) ha l'espressione

$$(4)\qquad x_i(t)=c_1x_{i,1}(t)+c_2x_{i,2}(t)+\dots+c_nx_{i,n}(t),\quad (i=1, 2,\dots, n),$$

e vogliamo ora determinare le costanti c_1, c_2,...., c_n in guisa che esista corrispondentemente una costante ϱ tale che

$$(5)\qquad x_i(t+\omega)=\varrho x_i(t),\qquad [i=1, 2,\dots, n;\ -\infty<t<+\infty].$$

Dalle nostre ipotesi deriva che gli n sistemi

$$x_{1,k}(t+\omega),\ \ x_{2,k}(t+\omega),\dots,\ \ x_{n,k}(t+\omega),\qquad (k=1, 2,\dots, n)$$

dànno anch'essi un sistema fondamentale di integrali del sistema (1); si ha infatti [Cap. II, § 1, n. 2]

$$(6)\qquad \Delta(t+\omega)=\det.\|x_{i,k}(t+\omega)\|=$$

$$=\Delta(t)\, e^{\int_t^{t+\omega}\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)dt}=\Delta(t)e^{\int_0^{\omega}\left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)dt}\neq 0,$$

ed esisteranno quindi n^2 costanti $a_{l,k}$, $(l, k=1, 2,\dots, n)$ tali che

$$(7)\qquad x_{i,k}(t+\omega)=\sum_{l=1}^n a_{k,l}\,x_{i,l}(t),\qquad (i, k=1, 2,\dots, n).$$

Dalle (4) si ha

$$x_i(t+\omega)=\sum_{l=1}^n\left(\sum_{k=1}^n c_k\,a_{k,l}\right)x_{i,l}(t),$$

e perchè si verifichino le (5) occorre e basta che le costanti c_1, c_2,...., c_n siano tali che

$$\sum_{l=1}^n\left(\sum_{k=1}^n c_k\,a_{k,l}-\varrho c_l\right)x_{i,l}(t)=0,\qquad (i=1, 2,\dots, n),$$

ma det. $\|x_{i,l}(t)\| = \Delta(t) \neq 0$, dovrà perciò risultare

$$\sum_{k=1}^{n} c_k a_{k,l} - \varrho c_l = 0, \qquad (l = 1, 2, \dots, n),$$

ossia

$$c_1 a_{1,l} + c_2 a_{2,l} + \dots + (a_{l,l} - \varrho) c_l + \dots + a_{n,l} c_n = 0, \tag{8}$$

perciò ϱ deve essere radice dell'*equazione fondamentale*

$$D(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - \varrho, & a_{2,1}, \dots, & a_{n,1} \\ a_{1,2}, & a_{2,2} - \varrho, \dots, & a_{n,2} \\ \dots & & \dots \\ a_{1,n}, & a_{2,n}, & a_{n,n} - \varrho \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Se dunque ϱ è una radice dell'equazione fondamentale (9), *e scegliamo le costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ in guisa da soddisfare il sistema* (8), *per tali valori di ϱ e delle $c_1, c_2, \dots, c_n$, gli integrali $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ determinati con le* (4), *soddisfano le* (5).

b) Dalle cose dette segue che *condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema* (1) *ammetta un sistema di integrali periodici, di periodo ω, è che la corrispondente equazione fondamentale* (9) *ammetta la radice $\varrho = 1$* (¹).

§ 6. - Sistemi differenziali dipendenti da un parametro. Soluzioni periodiche.

Sia dato un sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t;\ x_1, x_2, \dots, x_n;\ \lambda), \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1}$$

dove $t;\ x_1, x_2, \dots, x_n;\ \lambda$ variano nel campo C_{n+2} definito dalle limitazioni $-\infty < t < +\infty$; $|x_i - x_i^0| \leqslant a$, $(a > 0;\ i = 1, 2, \dots, n)$; $\lambda^0 - c \leqslant \lambda \leqslant \lambda^0 + c$, $(c > 0)$, e supponiamo che fissato per $t = t^0$ un

(¹) Per l'estensione ai sistemi lineari dei risultati del § su[illegible] differenziali cfr. *a*) É. GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathe[illegible]tiqu[illegible]* [illegible]. Paris, 1925), II, pp. 512-516; *b*) F. R. MOULTON: *Differ[illegible]* (New-York, 1930), pp. 317-348.

sistema di valori iniziali

$$x_1^0+a_1, \quad x_2^0+a_2, \dots, \quad x_n^0+a_n,$$

con $|a_i| \leqslant a$, $(i=1, 2, \dots, n)$, e comunque un valore λ del parametro in $(\lambda^0-c, \lambda^0+c)$, esso sia atto a definire uno e un sol sistema di integrali

$$(2) \qquad x_i=\varphi_i(t;\ a_1, a_2, \dots, a_n;\ \lambda), \qquad (i=1, 2, \dots, n),$$

dove la variabile t varia tra $-\infty$ e $+\infty$, e per il quale sono verificate le condizioni iniziali

$$(3) \qquad x_i^0+a_i=\varphi_i(t^0;\ a_1, a_2, \dots, a_n;\ \lambda), \qquad (i=1, 2, \dots, n).$$

Supponiamo anche che *le X_i considerate come funzioni di t, siano periodiche, col periodo $\omega>0$,*

$$X_i(t+\omega;\ x_1, x_2, \dots, x_n;\ \lambda)=X_i(t;\ x_1, x_2, \dots, x_n;\ \lambda),$$
$$-\infty<t<+\infty; \qquad (i=1, 2, \dots, n),$$

e ancora che per $\lambda=\lambda^0$ si abbia

$$(4) \quad \varphi_i(t^0+\omega;\ 0, 0, \dots, 0;\ \lambda^0)=\varphi_i(t^0;\ 0, 0, \dots, 0;\ \lambda^0), \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

cioè che le $\varphi_i(t;\ a_1, a_2, \dots, a_n;\ \lambda)$ siano tali che per $\lambda=\lambda^0$, $a_1=a_2=\dots=a_n=0$, e per $t=t^0$, $t=t^0+\omega$ riprendano lo stesso valore.

Se t è il tempo e interpretiamo le (1) come le equazioni del movimento di un punto mobile $P\equiv(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dello spazio S_n le (4) equivalgono a supporre che nel movimento corrispondente ai valori $\lambda=\lambda^0$, $a_1=a_2=\dots=a_n=0$, *il punto P al tempo t^0 e al tempo $t^0+\omega$ occupi la stessa posizione.* Ma le ipotesi fatte implicano che facendo nel sistema $\lambda=\lambda^0$, e cangiando t in $t+\omega$, esso rimane invariato, e perciò *le funzioni $\varphi_i(t;\ 0, 0, \dots, 0;\ \lambda^0)$, $(i=1, 2, \dots, n)$ risultano periodiche, col periodo ω, ossia per $\lambda=\lambda^0$, la soluzione del sistema* (1)

$$x_i=\varphi_i(t;\ 0, 0, \dots, 0;\ \lambda^0),$$

che verifica le condizioni iniziali

$$x_i^0=\varphi_i(t^0;\ 0, 0, \dots, 0;\ \lambda^0)$$

è periodica, e tale è il movimento di P.

Nelle applicazioni si presenta la notevole questione: *esiste un intorno $(\lambda^0-\delta, \lambda^0+\delta)$ di λ^0 tale, che ad ogni λ appartenente* *a questo intorno, si possano associare le costanti iniziali* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *in modo che il corrispondente sistema di integrali*

$$x_i = \varphi_i(t;\ a_1, a_2, a_n;\ \lambda), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

risulti anch'esso periodico, col periodo ω?

Tale questione vogliamo studiare in un caso abbastanza generale. In aggiunta alle nostre ipotesi supporremo che le $X_i(t; x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda)$ posseggano rispetto alle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda$ derivate parziali del primo ordine, continue in C_{n+2}, circostanza che assicura l'esistenza e la continuità delle derivate parziali degli integrali $\varphi_i(t;\ a_1, a_2, \ldots, a_n;\ \lambda)$ rispetto ad $a_1, a_2, \ldots, a_n; \lambda$ [Cfr. Cap. I, § 5; n. 2].

Ciò supposto, notiamo preliminarmente che per la periodicità degli integrali (2) occorre e basta che le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verifichino il sistema

$$(5) \quad \Phi_i = \varphi_i(t^0 + \omega\,; a_1, a_2, \ldots, a_n\,; \lambda) - \varphi_i(t^0;\ 0, 0, \ldots, 0\,; \lambda^0) - a_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Questo sistema per $\lambda = \lambda^0$ ammette la soluzione $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, e se il determinante Jacobiano

$$\frac{d[\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n]}{d[a_1, a_2, \ldots, a_n]}$$

risulta diverso da zero in un intorno del punto $(t^0; 0, 0, \ldots, 0; \lambda^0)$, in virtù del teorema sulle funzioni implicite, per $|\lambda - \lambda^0| \leqslant \delta$, con δ sufficientemente piccolo, si può dal sistema (5) determinare uno e un sol sistema di funzioni $a_1(\lambda), a_2(\lambda), \ldots, a_n(\lambda)$ per il quale esso risulta soddisfatto, e gli integrali corrispondenti

$$\varphi_i(t;\ a_1(\lambda), a_2(\lambda), \ldots, a_n(\lambda);\ \lambda), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

risultano periodici, col periodo ω.

Se indichiamo con $\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial a_k}\right)_0$ la derivata parziale di Φ_i rispetto ad a_k calcolata nel punto $(t;\ 0, 0, \ldots, 0;\ \lambda^0)$, e poniamo

$$V_{i,k} = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial a_k}\right)_0, \quad X_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

le $V_{i,k}$ *sono le soluzioni del sistema* (*lineare*) *alle variazioni* *del sistema* (1) [Cap. I, § 5, n. 2; Cap. VII, § 1, n. 2]

$$(6)\qquad \frac{dV_{i,k}}{dt}=\sum_{l=1}^{n} X_{i,l}[t;\varphi_1(t,0,0,\dots,0;\lambda^0),\dots,\varphi_n(t;0,0,\dots,0,\lambda^0)]\,V_{l,k},$$

$$(i=1,2,\dots,n;\quad k=1,2,\dots,n),$$

che soddisfano le condizioni iniziali

$$V_{i,k}(t^0)=\varepsilon_{i,k},\qquad [\varepsilon_{i,i}=1;\ \varepsilon_{i,k}=0\quad \text{per}\quad i\neq k;\ i,k=1,2,\dots,n].$$

Si ha

$$\left(\frac{d(\Phi_1,\Phi_2,\dots,\Phi_n)}{d(a_1,a_2,\dots,a_n)}\right)_0=\begin{vmatrix} V_{1,1}(t^0+\omega)-1, & V_{1,2}(t^0+\omega),\dots, & V_{1,n}(t^0+\omega)\\ V_{2,1}(t^0+\omega), & V_{2,2}(t^0+\omega)-1,\dots, & V_{2,n}(t^0+\omega)\\ \dots & \dots & \\ V_{n,1}(t^0+\omega), & V_{n,2}(t^0+\omega),\dots, & V_{n,n}(t^0+\omega)-1\end{vmatrix},$$

e il suo annullarsi, per le cose dette al paragrafo 5, dà la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema alle variazioni (6) ammetta un sistema di soluzioni periodiche col periodo ω; abbiamo così dimostrato che *nelle ipotesi dichiarate, se il sistema alle variazioni* (6) *del sistema* (1), *corrispondente alla soluzione nota* [periodica, di periodo ω]

$$(7)\qquad \varphi_1(t;\ 0,0,\dots,0;\ \lambda^0),\ \dots,\ \varphi_n(t;\ 0,0,\dots,0,\ \lambda^0)$$

non ammette soluzioni periodiche col periodo ω, esiste un numero positivo δ tale, che ad ogni valore del parametro λ che soddisfa la limitazione $|\lambda-\lambda^0|\leq\delta$, corrisponde una soluzione del sistema (1).

$$(8)\qquad \varphi_1[(t;\ a_1(\lambda),\dots,a_n(\lambda);\ \lambda),\ \dots,\ \varphi_n[t;\ a_1(\lambda),\dots,a_n(\lambda);\ \lambda]$$

col periodo ω.

Si ha di più che fissato σ positivo e arbitrario, si può impiccolire, se occorre, δ in modo che per $|\lambda-\lambda^0|\leq\delta$ e per t variabile in $(-\infty,+\infty)$, sia

$$|\varphi_i(t;\ a_1(\lambda),a_2(\lambda),\dots,a_n(\lambda);\ \lambda)-\varphi_i(t;\ 0,0,\dots,0;\ \lambda^0)|<\sigma,$$

$$(i=1,2,\dots,n)$$

o come si dice *la soluzione periodica* (7) *del sistema* (1), *rispetto* *al gruppo di soluzioni periodiche* (8), *è stabile.* [Cfr. Cap. VII; § 1, n. 1] [1].

§ 7. - Sulle soluzioni periodiche di un'equazione differenziale della dinamica del punto su traiettoria prestabilita.

1. Teorema di WEIERSTRASS. - 2. Calcolo di LEVI-CIVITA del periodo in prima approssimazione.

1. - Un punto materiale P, di massa costante m, si muova sotto l'azione di una forza F dipendente dal posto, lungo una traiettoria prestabilita Γ.

Assumiamo come parametro l'arco s della curva Γ, e la direzione positiva della retta tangente sia concordante col verso crescente di s. Se $f(s)$ indica la componente tangenziale di F, l'equazione del moto è

$$ms'' = f(s), \qquad [s'' = d^2s/dt^2,\ t = \text{tempo}], \tag{1}$$ [2]

e noi supponiamo che $f(s)$ sia una funzione continua di s. Posto

$$\int f(s)\,ds = U(s) \tag{2}$$

moltiplicando la (1) per s' si ha

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}ms'^2\right] = \frac{d}{dt}U,$$

e integrando risulta per la forza viva T del mobile $[T = ms'^2/2]$

$$T - U = E, \qquad (E = \text{cost.}). \tag{3}$$

Posto

$$\frac{2}{m}\left[U(s) + E\right] = \Phi(s) \tag{4}$$

---

[1] Il lettore desideroso di approfondire l'argomento studiato in questo paragrafo e le sue applicazioni al celebre problema dei tre corpi potrà consultare H. POINCARÉ: *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, I (Paris, 1892), Cap. III e IV; cfr. anche É. PICARD: *Traité d'Analyse*, III, (1928, 3ª ed., Paris, 1928), pp. 167-186.

Per alcuni casi di stabilità delle soluzioni dei sistemi lineari dipendenti da un parametro cfr. L. CESARI: *Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali a coefficienti periodici*, Mem. della R. Acc. d'Italia, (6), 11, (1940), pp. 633-695.

[2] Cfr. *a*) K. WEIERSTRASS: *Über eine Gattung reel periodischer Functionen*, Mathem. Werke, II, (Berlin, 1895), pp. 1-18; *b*) T. LEVI-CIVITA

la (3) dà (*l'integrale delle forze vive*)

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \Phi(s) \tag{5}$$

e ci serviremo di questa equazione per studiare il comportamento degli integrali della (1) in un caso particolarmente interessante.

Supporremo che $\Phi(s)$ per $s=s_1$, $s=s_2$, $s_1 < s_2$, abbia due zeri semplici, sia cioè

$$\lim_{s \to s_1} \Phi(s)/(s-s_1) = A_1 \neq 0, \quad \lim_{s \to s_2} \Phi(s)/(s_2-s) = A_2 \neq 0, \tag{6}$$

e per $s_1 < s < s_2$ la $\Phi(s)$ abbia sempre lo stesso segno, ad esempio

$$\Phi(s) > 0 \quad \text{per} \quad s_1 < s < s_2 . \tag{7}$$

Potremo porre per $s_1 < s < s_2$

$$\Phi(s) = (s-s_1)(s_2-s)\,\Phi_1(s), \tag{8_1}$$

$$\Phi_1(s_1) = A_1/(s_2-s_1), \quad \Phi_1(s_2) = A_2/(s_2-s_1) \tag{8_2}$$

e $\Phi_1(s)$ risulterà una funzione continua positiva in (s_1, s_2), estremi inclusi.

Noi faremo l'ipotesi che il mobile parta (al tempo $t=0$) da una posizione s_0 compresa tra s_1 e s_2, $s_1 < s_0 < s_2$, per esempio nella direzione (s_1, s_2). Per la (5), la sua velocità iniziale v_0, in grandezza e segno, è espressa dal valore aritmetico del radicale

$$v_0 = \sqrt{(s_0-s_1)(s_2-s_0)\,\Phi_1(s_0)} \quad (^1) \tag{9}$$

e mentre il mobile si muove da s_0 a s_2 si avrà

$$\frac{dt}{ds} = 1/\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\,\Phi_1(s)}$$

e perciò nelle nostre ipotesi il tempo $t_1 = t(s_0, s_2)$ che il mobile impiega a percorrere l'arco (s_0, s_2) è espresso dall'integrale convergente

$$t_1 = t(s_0, s_2) = \int_{s_0}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}} . \tag{10_1}$$

---

e U. AMALDI: *Lezioni di Meccanica Razionale*, (Bologna, 1926), T. II, p. 1ª, pp. 28-33.

(1) Si sceglierà invece il segno — avanti al radicale se il mobile si muove nella direzione (s_2, s_1).

In s_2 la velocità del mobile è nulla e il moto riprende nel verso della forza tangenziale sollecitante

$$f(s_2)=\left(\frac{dU}{ds}\right)_{s=s_2}=\frac{m}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_2}=-\frac{m}{2}(s_2-s_1)\,\Phi_1(s_2)<0,$$

cioè in direzione (s_2, s_1), e si avrà ora

$$\frac{dt}{ds}=-1/\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)} \quad (^1)$$

e nel tempo $t_2=t(s_2, s_1)$, espresso dall'integrale convergente

$$(10_2) \qquad t_2=t(s_2, s_1)=-\int_{s_2}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\,\Phi_1(s)}}$$

esso arriverà in s_1; ivi è nulla la velocità del mobile, e il moto riprende nel senso della forza tangenziale sollecitante

$$f(s_1)=\left(\frac{dU}{ds}\right)_{s=s_1}=\frac{m}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_1}=\frac{m}{2}(s_2-s_1)\,\Phi_1(s_1)>0,$$

cioè in direzione (s_1, s_2) e nel tempo t_3 espresso dall'integrale convergente

$$(10_3) \qquad t_3=t(s_1, s_0)=\int_{s_1}^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\,\Phi_1(s)}}$$

esso arriva alla posizione iniziale s_0 con la velocità espressa in grandezza e segno dalla (9), cioè con la vecchia velocità iniziale e il moto tornerà quindi a riprodursi integralmente.

Dalle cose dette segue il teorema di WEIERSTRASS: *Nelle ipotesi dichiarate se $s=s(t)$ è un integrale dell'equazione* (1) *determinato dalle condizioni iniziali*

$$s(0)=s_0, \qquad v(0)=v_0,$$

con

$$s_1<s_0<s_2,$$

allora $s(t)$ è una funzione periodica col periodo 2τ, $[s(t+2\tau)=s(t)]$

---

(1) Indipendentemente da ogni considerazione meccanica, essendo $s'(t_1)=0$, $s''(t_1)=f(s_2)/m=-(s_2-s_1)\Phi_1(s_2)/2<0$, t_1 è un punto di massimo di $s(t)$, perciò per $h>0$, sufficientemente piccolo, $s(t_1+h)<s(t_1)$. Noti il lettore che ragionamenti consimili a quelli del testo abbiamo fatto nel Cap. I, § 4, nn. 2, 3.

uguale alla somma $t_1+t_2+t_3$, cioè per le (10_1), (10_2), (10_3) col periodo *uguale a*

$$(11)\qquad 2\tau = 2\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}}\,.$$

2. - *a*) Se la funzione $\Phi(s)$ ha l'espressione particolare

$$(12_1)\qquad \varphi_0(s) = \omega^2(s-s_1)(s_2-s), \qquad (\omega = \text{cost.},\ \omega \neq 0),$$

col cangiamento di variabile

$$s = [(s_2+s_1)-(s_2-s_1)\cos\alpha]/2$$

si ottiene per il corrispondente periodo $2\tau_0$ il valore

$$2\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

Supposto più in generale

$$(12_2)\qquad \Phi(s) = \varphi_0(s) + \varepsilon\varphi_1(s) = F(\varepsilon, s),$$

con $\varphi_1(s)$ *funzione continua insieme alle sue derivate prime e seconde in un tratto* $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, *con* $\bar{s}_1 < s_1 < s_2 < \bar{s}_2$, *e ammesso di poter trascurare i termini in* $\varepsilon^{3/2}$, *o di ordine superiore*, vogliamo dare una elegante formula di T. Levi-Civita (1) per il calcolo del periodo 2τ.

L'equazione

$$(13)\qquad F(\varepsilon, s) = \varphi_0(s) + \varepsilon\varphi_1(s) = 0$$

è soddisfatta dalla coppia di valori $\varepsilon = 0$, $s = s_1$, e poichè si ha

$$F_s(0, s_1) = \left.\frac{d\varphi_0}{ds}\right|_{s=s_1} = \omega^2(s_2-s_1) \neq 0,$$

la (13) ammette per ε sufficientemente piccolo la radice

$$s_1{}^* = s_1 - \varepsilon\,\frac{F_\varepsilon(0, s_1)}{F_s(0, s_1)} + \varepsilon^2 O(1),$$

---

(1) T. Levi-Civita: *Sul calcolo effettivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione*, Revista de Ciencias (Lima, Perù), 38 (1937), n. 421, pp. 71-78; cfr. anche N. Cartovitch: *Sul calcolo effettivo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), 27 (1938), pp. 65-70.

ossia

$$(14_1) \qquad s_1^* = s_1 - \varepsilon \frac{\varphi_1(s_1)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1),$$

e analogamente l'altra radice

$$(14_2) \qquad s_2^* = s_2 + \varepsilon \frac{\varphi_1(s_2)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1),$$

e giova notare che dalle (14_1) e (14_2) segue che per ε sufficientemente piccolo è $s_1^* < s_2^*$.

Si ha $F(\varepsilon, s_1^*) = 0$, $F(\varepsilon, s_2^*) = 0$, e dalla formula di interpolazione di NEWTON arrestata ai termini del secondo ordine otteniamo per s variabile in $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$

$$F(\varepsilon, s) = F(\varepsilon, s_1^*) + (s - s_1^*) \frac{F(\varepsilon, s_2^*) - F(\varepsilon, s_1^*)}{s_2^* - s_1^*} + \frac{1}{2}(s - s_1^*)(s - s_2^*) R(\varepsilon, s)$$

con

$$R(\varepsilon, s) = \varphi_0''(\bar{s}) + \varepsilon \varphi_1''(\bar{s}) = -2\omega^2 + \varepsilon \varphi_1''(\bar{s}), \qquad \bar{s}_1 < \bar{s} < \bar{s}_2,$$

potremo perciò porre

$$(15) \qquad F(\varepsilon, s) = \omega^2 (s - s_1^*)(s_2^* - s) \quad [1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)]$$

con $|r(\varepsilon, s)|$ uniformemente limitato rispetto ad ε sufficientemente piccolo, ed s variabile in $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$.

Sostituendo le (14_1), (14_2) nella (15) e tenuto conto della (13) e della (12_1) abbiamo in $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$,

$$\omega^2 (s - s_1)(s_2 - s) + \varepsilon \varphi_1(s) = \omega^2 \left[(s - s_1) + \varepsilon \frac{\varphi_1(s_1)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1)\right] \cdot$$
$$\left[(s_2 - s) + \varepsilon \frac{\varphi_1(s_2)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1)\right] \times [1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)]$$

$$\omega^2 (s - s_1)(s_2 - s) r(\varepsilon, s) = \varphi_1(s) - \frac{\varphi_1(s_1)}{s_2 - s_1}(s_2 - s) - \frac{\varphi_1(s_2)}{s_2 - s_1}(s - s_1)$$
$$+ \varepsilon \omega^2 h(\varepsilon, s)$$

con $h(\varepsilon, s)$ uniformemente limitata rispetto ad ε e s.

Posto

$$(16_1) \quad \theta(s, s_1, s_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1(s), & s, & 1 \\ \varphi_1(s_1), & s_1, & 1 \\ \varphi_1(s_2), & s_2, & 1 \end{vmatrix}, \quad (16_2) \quad H(s, s_1, s_2) = \begin{vmatrix} s^2, & s, & 1 \\ s_1^2, & s_1, & 1 \\ s_2^2, & s_2, & 1 \end{vmatrix},$$

e posto anche per $s \neq s_1, s_2$

$$\lambda(s) = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\theta(s, s_1, s_2)}{H(s, s_1, s_2)}, \tag{17}$$

otteniamo

$$r(\varepsilon, s) = \lambda(s) + \varepsilon\,\frac{h(\varepsilon, s)}{(s-s_1)(s_2-s)}. \tag{18}$$

Si ha

$$(19_1)\quad \lim_{s\to s_1}\lambda(s) = -\frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \varphi_1'(s_1), & 1, & 0 \\ \varphi_1(s_1), & s_1, & 1 \\ \varphi_1(s_2), & s_2, & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2s_1, & 1, & 0 \\ s_1^2, & s_1, & 1 \\ s_2^2, & s_2, & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\omega^2(s_2-s_1)^2}\begin{vmatrix} \varphi_1'(s_1), & 1, & 0 \\ \varphi_1(s_1), & s_1, & 1 \\ \varphi_1(s_2), & s_2, & 1 \end{vmatrix},$$

e analogamente

$$(19_2)\quad \lim_{s\to s_2}\lambda(s) = \frac{1}{\omega^2(s_2-s_1)^2}\begin{vmatrix} \varphi_1'(s_2), & 1, & 0 \\ \varphi_1(s_1), & s_1, & 1 \\ \varphi_1(s_2), & s_2, & 1 \end{vmatrix};$$

ne viene che la funzione $\lambda(s)$ è finita e continua in $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, e si verificherà pure facilmente che essa ha derivata continua nello stesso intervallo, e perciò limitata.

Abbiamo ora per le (14_1), (14_2), (18)

$$(s-s_1^*)(s_2^*-s)[r(\varepsilon,s)-\lambda(s)] = (s-s_1)(s_2-s)[r(\varepsilon,s)-\lambda(s)] + \varepsilon O(1) =$$
$$= \varepsilon h(\varepsilon, s) + \varepsilon O(1) = \varepsilon k(\varepsilon, s)$$

con $k(\varepsilon, s)$ uniformemente limitata rispetto ad ε ed s, ed anche

$$r(\varepsilon, s) = \lambda(s) + \varepsilon\,\frac{k(\varepsilon, s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}, \tag{20}$$

la quale prova che in quest'ultima il termine $\varepsilon k(\varepsilon, s)/(s-s_1^*)(s_2^*-s)$ è uniformemente limitato rispetto ad ε ed s.

Si ha dalla (11) e dalla (15) per il periodo 2τ corrispondente alla funzione $\Phi(s)$ definita dalla (12_2)

$$2\tau = \frac{2}{\omega}\int_{s_1^*}^{s_2^*}\frac{ds}{\sqrt{(s-s_1^*)(s_2^*-s)[1+\varepsilon r(\varepsilon, s)]}}$$

e col cangiamento di variabile

$$s = \frac{s_1^* + s_2^*}{2} - \frac{s_2^* - s_1^*}{2} \cos \alpha, \tag{21}$$

$$2\tau = \frac{2}{\omega} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)}} d\alpha,$$

ma

$$\left[1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)\right]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon r(\varepsilon, s) + \varepsilon^2 O(1),$$

perciò, tenuto conto della (20),

$$2\tau = 2\tau_0 - \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^\pi \lambda(s)\, d\alpha + \varepsilon^2 \int_0^\pi \frac{k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha + \varepsilon^2 O(1), \tag{22}$$

con s espresso dalla (21).

Osserviamo che si ha

$$\varepsilon \int_0^\pi \frac{k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha = \int_0^{\varepsilon^{1/2}} \frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha + \int_{\pi - \varepsilon^{1/2}}^\pi \frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha +$$
$$+ \varepsilon \int_{\varepsilon^{1/2}}^{\pi - \varepsilon^{1/2}} \frac{k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha;$$

ma

$$\int_0^{\varepsilon^{1/2}} \frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha = \varepsilon^{1/2} O(1),$$

$$\int_{\pi - \varepsilon^{1/2}}^\pi \frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha = \varepsilon^{1/2} O(1),$$

$$\varepsilon \int_{\varepsilon^{1/2}}^{\pi - \varepsilon^{1/2}} \frac{k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha = \varepsilon O(1) \int_{\varepsilon^{1/2}}^{\pi - \varepsilon^{1/2}} \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \varepsilon\, O(1) \operatorname{ctg} \varepsilon^{1/2} = \varepsilon^{1/2} O(1),$$

e la (22) dà

$$2\tau = 2\tau_0 - \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^\pi \lambda(s)\, d\alpha + \varepsilon^{3/2} O(1).$$

Se teniamo conto che $\lambda(s)$ ha derivata prima limitata in $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$, dalle (21), (14_1), (14_2), otteniamo

$$\lambda(s)=\lambda\left[\frac{s_1+s_2}{2}-\frac{s_2-s_1}{2}\cos\alpha\right]+\varepsilon O(1),$$

si avrà quindi per il periodo 2τ la formula di LEVI-CIVITA [1]

$$(23) \qquad 2\tau=2\tau_0-\frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^\pi \lambda\left[\frac{s_1+s_2}{2}-\frac{s_2-s_1}{2}\cos\alpha\right]d\alpha+\varepsilon^{3/2}O(1).$$

b) Della formula (23) N. CARTOVITCH [2] ha dato un'utile trasformazione.

Posto

$$s=\frac{s_2+s_1}{2}-\frac{s_2-s_1}{2}\cos\alpha$$

si ha dalla (16_2)

$$H(s, s_1, s_2)=\frac{(s_2-s_1)^2}{4}\,\text{sen}^2\,\alpha\,;$$

dalla (16_1) si ha pure

$$\frac{d\theta}{ds}=-\varphi_1'(s)(s_2-s_1)+\varphi_1(s_2)-\varphi_1(s_1)$$

quindi

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\theta(s)}{\text{tg}\,\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{d\alpha}\cos^2\alpha=\frac{s_2-s_1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\frac{d\theta}{ds}\,\text{sen}\,\alpha=0,$$

e analogamente

$$\lim_{\alpha\to\pi}\frac{\theta(s)}{\text{tg}\,\alpha}=0,$$

---

(1) La precisazione del termine $\varepsilon^{3/2}O(1)$ è dell'Autore. Cfr. G. SANSONE: *Valutazione dell'errore nel calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione*, Boll. Un. Mat. It., (2), 1, (1939), pp. 422-426.

(2) Cfr. N. CARTOVICH, lav. cit. in *a*).

e allora, tenuto conto della (17), si ha con trasformazioni evidenti

$$-\int_0^\pi \lambda(s)\,d\alpha = \frac{1}{\omega^2}\int_0^\pi \frac{\theta(s)}{H(s)}\,d\alpha = \frac{4}{\omega^2(s_2-s_1)^3}\int_0^\pi \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\,\theta(s) =$$

$$= \frac{4}{\omega^2(s_2-s_1)^3}\Big[-\theta(s)\operatorname{ctg}\alpha\Big]_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} + \frac{4}{\omega^2(s_2-s_1)^3}\int_0^\pi \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{d\alpha}\operatorname{ctg}\alpha\,d\alpha$$

$$= \frac{2}{\omega^2(s_2-s_1)^2}\int_0^\pi \frac{d\theta}{ds}\cos\alpha\,d\alpha = -\frac{2}{\omega^2(s_2-s_1)}\int_0^\pi \varphi_1'(s)\,d\operatorname{sen}\alpha$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\int_0^\pi \varphi_1''(s)\operatorname{sen}^2\alpha\,d\alpha.$$

Notando infine che

$$\frac{4}{(s_2-s_1)^2}\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)}\,ds = \operatorname{sen}^2\alpha\,d\alpha$$

la (23) diventa [1]

$$(24)\quad 2\tau = 2\tau_0 + \frac{4\varepsilon}{\omega^3(s_2-s_1)^2}\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)}\,\varphi_1''(s)\,ds + \varepsilon^{3/2}O(1).$$

---

[1] Il lettore potrà controllare la (24) con il seguente esempio. Sia $\varphi_1(s)=\varphi_0(s)$, si ha

$$2\tau = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1+\varepsilon}} = \frac{2\pi}{\omega}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right) + \varepsilon^2 O(1), \qquad \varphi_1''(s) = -2\omega^2,$$

e il secondo termine del secondo membro della (24) diventa appunto

$$-\frac{2\varepsilon}{\omega}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\alpha\,d\alpha = -\frac{\pi\varepsilon}{\omega}.$$

§ 8. - Il problema delle orbite periodiche e il Calcolo delle Variazioni.

1. Problema delle orbite periodiche. - 2. Teorema di TONELLI di esistenza di estremali periodiche.

1. - *a)* In alcune questioni l'esistenza di soluzioni periodiche, si consegue in condizioni assai particolari applicando i metodi propri della teoria delle equazioni differenziali, ma ove accada, (come nei problemi della dinamica), che tali equazioni rappresentino condizioni necessarie per l'esistenza del minimo di un dato integrale (l'integrale dell'azione), se con i *metodi diretti* potrà stabilirsi l'esistenza del minimo, risulterà simultaneamente provata l'esistenza delle cercate soluzioni periodiche.

Noi abbiamo già avuto occasione di applicare nel Cap. V [§ 4, n. 2] il *metodo diretto* di TONELLI, e ne daremo altre applicazioni nel Cap. XI, [§ 5, n. 3] a proposito del calcolo effettivo delle soluzioni corrispondenti a determinate condizioni ai limiti, qui accenneremo al così detto problema delle orbite periodiche, la cui esistenza, grazie appunto alla potenza dei ragionamenti del metodo diretto, potrà conseguirsi in ipotesi molto generali (1).

---

(1) Per l'applicazione del Calcolo delle Variazioni alla ricerca delle soluzioni periodiche delle equazioni del secondo ordine non lineari cfr. L. LICHTENSTEIN: *Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung*, Journ. für die reine und ang. Math., 145 (1914), [pp. 24-85], pp. 24-51; così pure per l'applicazione del Calcolo delle Variazioni allo studio della così detta equazione di STURM-LIOUVILLE generalizzata

$$\frac{1}{2k}\left(F_{y}-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)=\lambda y^{2k-1},$$

proveniente dall'annullamento della prima variazione dell'integrale

$$\int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

con le condizioni

$$\int_a^b y^{2k}\,dx=1, \quad y(a)=y(b)=0, \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

cfr. L. LUSTERNIK: *Une généralisation de l'équation du type Sturm-Liouville.* C. R. Ac. Sc. U. R. S. S., XV (1937), pp. 235-238.

b) Sia t il tempo, x e y siano le coordinate di un punto mobile P sotto l'azione di una forza derivante da un potenziale; i vincoli siano dipendenti dal tempo e x', y' indichino le derivate di x e y rispetto a t. Le equazioni del moto nella forma di LAGRANGIA sono le equazioni del secondo ordine

$$\frac{d}{dt}L_{x'}-L_x=0, \qquad \frac{d}{dt}L_{y'}-L_y=0, \tag{1}$$

e in queste L ha l'espressione

$$L=\frac{1}{2}\left[ax'^2+2bx'y'+cy'^2\right]+\alpha x'+\beta y'+\gamma, \tag{2}$$

ed L_x, L_y, $L_{x'}$, $L_{y'}$, indicano le derivate parziali di L rispetto alle variabili x, y, x', y' (¹).

Quanto ai coefficienti a, b, c, α, β, γ, facciamo l'ipotesi che essi siano funzioni continue di x e y insieme alle loro derivate parziali del primo ordine, e soddisfino le condizioni

$$a>0, \quad (c>0), \quad ac-b^2>0. \tag{3}$$

Il problema che ci proponiamo è quello di trovare se il punto P può descrivere un'*orbita periodica*, ossia una curva chiusa, semplice (priva di punti multipli), della classe 1, cioè se esistono coppie di funzioni $x(t)$, $y(t)$ che in un intervallo (t_0, t_1) soddisfino il sistema (1), le condizioni agli estremi (periodiche)

$$x(t_0)=x(t_1), \quad y(t_0)=y(t_1); \qquad x'(t_0)=x'(t_1), \quad y'(t_0)=y'(t_1),$$

e tali che $x=x(t)$, $y=y(t)$ siano in (t_0, t_1) le equazioni di una curva semplice.

Se $x(t)$, $y(t)$ è una soluzione del sistema (1) si ha

$$\frac{d}{dt}\left[x'L_{x'}+y'L_{y'}-L\right]=0,$$

perciò

$$x'L_{x'}+y'L_{y'}=L+k, \quad (^2) \tag{4}$$

(¹) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI: *Lezioni di Meccanica Razionale*, T. II, p. 1ª (Bologna, 1926), p. 365.

(²) Si dice che la (4) rappresenta un *integrale primo del sistema* (1) [Cfr. nota (¹), p. 96], e pel nostro problema il così detto *integrale primo dell'energia*. (T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, op. cit., p. 370].

con k costante, e siccome le (1) rimangono invariate aumentando L di una costante, potrà supporsi $k=0$,

$$x' L_{x'} + y' L_{y'} = L, \tag{5}$$

ovvero per la (2)

$$\frac{1}{2}\left[ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2\right] = \gamma, \tag{6}$$

e siccome il primo membro è una forma positiva nelle variabili x', y', dovrà risultare $\gamma(x, y) \geqslant 0$, e se $x = x(t)$, $y = y(t)$ è una soluzione del sistema (1), essa appartiene alla regione nella quale $\gamma(x, y) \geqslant 0$.

Nell'ipotesi che lungo due curve continue di JORDAN, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, chiuse, semplici, di cui la prima completamente interna alla seconda, e internamente alla regione anulare $\mathfrak{A}$ del piano x, y, limitata dalle curve $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, risulti

$$\gamma(x, y) > 0,$$

ci proponiamo di vedere se alla regione $\mathfrak{A}$ appartiene un'orbita periodica circondante $\mathfrak{L}_1$.

Le equazioni (1) delle traiettorie del punto P sono le equazioni di EULERO relative alle *curve estremali* dell'integrale

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt, \quad (1) \tag{7}$$

e per le (2) e (6) tale integrale può scriversi

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sqrt{2\gamma}\, \sqrt{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2} + \alpha x' + \beta y'\right] dt. \tag{8}$$

Si ha identicamente

$$J - J^* \equiv \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\sqrt{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2} - \sqrt{2\gamma}\right]^2 dt, \tag{9}$$

e perciò se lungo una curva iniziale è soddisfatta la (6) sono nulli $J - J^*$ e $\delta(J - J^*)$ abbiamo cioè per le prime variazioni di J e J^*

$$\delta J - \delta J^* = 0,$$

(1) L. TONELLI : *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, (Bologna, 1923), II, p. 105.

e δJ^* deve annullarsi per qualsiasi variazione di x e y, se la curva iniziale del piano x, y è un'orbita del sistema (1), (6).

Nell'integrale J^* la funzione integranda è positivamente omogenea e di grado 1 nelle x', y'; questa circostanza assicura che se C è una curva di equazioni parametriche $x=x(t)$, $y(t)$, l'integrale J^*_C è indipendente dalla rappresentazione parametrica particolare scelta per la curva C [1], e per questa ragione l'equazione (6) potrà pensarsi come determinante il parametro lungo l'orbita.

Se si ha $\delta J^*=0$ lungo una curva C, e se il parametro t è scelto in guisa che sia verificata la (6), si ha $\delta J=\delta J^*=0$ lungo la curva C, e perciò $x=x(t)$, $y=y(t)$ rappresenta una traiettoria del sistema (1), (6).

Posto

$$F=\sqrt{2\gamma}\,\sqrt{ax'^2+2bx'y'+cy'^2}+\alpha x'+\beta y'$$

si ha

$$F_1=F_{x',x'}/y'^2=\sqrt{2\gamma}\,(ac-b^2)/(ax'^2+2bx'y'+cy'^2)^{3/2}>0,$$

e con la terminologia del *Calcolo delle Variazioni* l'integrale J^*_C è *regolare positivo* [2] e il problema dell'esistenza delle orbite periodiche equivale quindi alla ricerca delle *estremali complete* (chiuse) di un integrale regolare positivo

$$\int_C F(x,y,x',y')\,dt,$$

appartenente all'assegnata regione anulare $\mathcal{A}$ e circondante $\mathcal{L}_1$. L'esistenza di tali estremali complete deriva da un teorema di TONELLI che ricorderemo nel numero seguente.

2. - *a*) Il primo enunciato relativo all'esistenza di un'orbita periodica nel così detto caso reversibile, $(\alpha_y-\beta_x=0)$, è di E. T. WHITTAKER [3], ma le due prime dimostrazioni rigorose, e indi-

---

(1) L. TONELLI, op. cit., (Bologna, 1922), I, p. 219.

(2) Cfr. L. TONELLI: *Fond. di Calc. delle Var.*, Op. cit., I, p. 224.

(3) E. T. WHITTAKER: *On periodic orbits*, Monthly Notices of the Royal Astronomic Soc. (London), LXII (1902) pp. 186-193.

pendenti l'una dall'altra, furono date da A. SIGNORINI e L. TONELLI (1).

Successivamente G. D. BIRKHOFF (2) considerò il caso non reversibile (α, β qualunque) e dimostrò ancora l'esistenza di un'orbita chiusa, risultato di cui L. TONELLI (3) diede nel 1923 una semplice dimostrazione.

Il criterio di BIRKHOFF fu generalizzato da W. DAMKÖHLER (4) e semplificato ed esteso da L. TONELLI (5). Qui, come abbiamo già avvertito al n. 1, riportiamo l'enunciato di alcuni risultati di TONELLI, e per la dimostrazione rimandiamo il lettore alla memoria originale.

b) Sia $F(x, y, x', y')$ definita e continua, insieme con le sue derivate parziali del primo ordine, per ogni punto (x, y) del campo anulare $\mathfrak{A}$ del piano x, y, limitato da due curve continue di JORDAN, chiuse, prive di punti multipli $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, di cui la prima risulti completamente interna alla seconda, e per ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli.

La $F(x, y, x', y')$ sia positivamente omogenea e di grado 1, rispetto a x' e y', sia cioè

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y'),$$

per ogni $k > 0$.

Chiamiamo complesso $\mathfrak{C}$ l'insieme di un *numero finito, qualunque* (che può essere anche uguale ad 1, e che *non* è necessariamente lo stesso per tutti i complessi), di curve continue (di

---

(1) A. SIGNORINI: *a*) *Sul teorema di Wittaker*, Rend. della R. Accad. Naz. dei Lincei, (5), 21 (1912, 1° sem.), pp. 36-39; *b*) *Esistenza di un'estremale chiusa dentro un contorno di Wittaker*, Rend. Circ. Mat. Palermo, XXXIII, (1912), pp. 187-193.

L. TONELLI: *Sulle orbite periodiche*, Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, XXI (1912, 1° sem.), pp. 251-258, 332-334.

(2) G. D. BIRKHOFF: *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Trans. of the Am. Math. Soc., 18 (1917), (pp. 199-300), pp. 224-382.

(3) L. TONELLI: *Sulle orbite periodiche irreversibili*, Mem. R. Acc. Sc. dell'Ist. di Bologna (Classe di Sc. Fis.) (VIII), I, (1923-24), pp. 21-25.

(4) W. DAMKÖHLER: *Periodische Extremalen vom Minimum typ in Ringbereichen*, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (2), V, (1936), pp. 127-140.

(5) L. TONELLI: *Sulle estremali complete*, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa, (2), V, (1936), pp. 159-168.

JORDAN) rettificabili, chiuse, semplici, e ognuna con un proprio verso, C_1, C_2,..., C_m, appartenenti al campo anulare $\mathfrak{A}$ e soddisfacenti le seguenti condizioni:

1) Ogni curva C_r di $\mathfrak{C}$ non può avere simultaneamente punti interni e punti esterni ad un'altra curva dello stesso complesso.

2) Due curve C_r, C_s di $\mathfrak{C}$ non possono essere costituite dagli stessi punti, anche se ordinati in senso inverso.

3) Ogni curva C_r di $\mathfrak{C}$ la quale non abbia punti interni ad altre curve dello stesso complesso avrà verso positivo (lascia l'interno della curva alla sua sinistra); per ogni altra curva C_s di $\mathfrak{C}$, detto i_s il massimo numero delle curve di $\mathfrak{C}$ alle quali risultano *interni* dei punti di C_s, il verso di C_s sarà *positivo* o *negativo* a seconda che i_s risulterà pari o dispari.

4) Tra le curve C_r di $\mathfrak{C}$ ve ne è sempre un *numero dispari* che circonda completamente la curva $\mathfrak{L}_1$, e pertanto ve ne è sempre almeno una che circonda completamente $\mathfrak{L}_1$, e che ha verso positivo.

Si ponga

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} = \sum_{r=1}^{m} \int_{C_r} F(x, y, x', y')\, ds = \sum_{r=1}^{m} J_{C_r}$$

dove $x = x(s)$, $y = y(s)$, $x' = dx/ds$, $y' = dy/ds$, e ds indica il differenziale dell'arco della curva C_r.

L'*integrale* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ sia *regolare* [posto cioè $F_1 = F_{x'x'}/y'^2 \equiv$ $\equiv -F_{x'y'}/x'y' \equiv F_{y'y'}/x'^2$ sia sempre $F_1(x, y, x', y') > 0$, o sempre $F_1(x, y, x', y') < 0$], *oppure quasi-regolare normale*, [sia cioè sempre $F_1(x, y, x', y') \geqslant 0$, oppure $F_1(x, y, x', y') \leqslant 0$, e i valori di θ per i quali risulta $F_1(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = 0$, non riempiano nell'intervallo $(0, 2\pi)$ alcun intervallo parziale] *in un campo* $\mathfrak{A}^*$ *che contiene come punti interni tutti i punti del campo anulare* $\mathfrak{A}$, *e il campo* $\mathfrak{A}$ *sia convessoidale, nel verso positivo, rispetto alla funzione* $F(x, y, x', y')$, [cioè sia tale che si possa determinare un numero $\varrho > 0$ in modo che tutte le estremali che congiungono gli estremi di un qualsiasi arco $\widehat{P_1P_2}$ di $\mathfrak{L}_1$ o di $\mathfrak{L}_2$, che insieme con quest'arco giacciono nel cerchio di centro P_1 e raggio ϱ, e che hanno un verso positivo concorde con quello dell'arco $\widehat{P_1P_2}$ detto, appartengono interamente al campo $\mathfrak{A}$]; *esiste allora almeno un'estremale periodica* (completa), *rela-*

tiva alla $F(x, y, x', y')$, semplice, circondante $\mathfrak{L}_1$, ed avente verso positivo.

Ferme le ipotesi enunciate, *se $F_1(x, y, x', y') \geqslant 0$, allora nell'insieme di tutti i complessi $\mathfrak{C}$, $\mathcal{I}_{\mathfrak{C}}$ ammette il minimo assoluto, che è dato da almeno un complesso formato da un numero finito di estremali complete, due a due senza punti comuni.*

§ 9. - Funzioni quasi-periodiche e soluzioni quasi-periodiche delle equazioni differenziali.

1. Funzioni quasi-periodiche. Prime proprietà. - 2. Teorema della media. - 3. Serie di FOURIER delle funzioni quasi-periodiche. - 4. Teorema di approssimazione. - 5. Equazioni differenziali lineari non omogenee. Teorema di BOHR e NEUGEBAUER.

1\. - *a*) In quest'ultimo quindicennio sono state studiate con grande successo da H. BOHR, H. WEYL, CH. DE LAVALLÉE-POUSSIN, S. BOCHNER, J. FAVARD, N. WIENER, le così dette *funzioni quasi-periodiche*, e G. D. BIRKHOFF e N. KRYLOFF ne hanno date notevoli applicazioni alla dinamica e alla fisica-matematica. Qui ci è impossibile approfondire l'argomento, e per un orientamento del lettore ci limiteremo soltanto a richiamare rapidamente le proprietà essenziali di questa classe di funzioni e a farne un'applicazione allo studio di un tipo particolare di equazioni differenziali lineari non omogenee [1].

b) Una funzione $f(x)$, reale o complessa, di una variabile reale x,

$$f(x)=u(x)+iv(x), \qquad (i = \text{unità immaginaria}),$$

finita e continua per $-\infty < x < +\infty$, si dice *quasi-periodica*, se ad ogni numero ε positivo e arbitrario, può associarsi un numero l

$$l=l(f, \varepsilon) > 0,$$

---

[1] Cfr. anche per la bibliografia H. BOHR: *Fastperiodische Funktionen*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, I, 5 (Berlin, 1932), pp. 1-96; A. S. BESICOVICH: *Almost periodic functions*, (Cambridge, 1932), pp. XIII+180; J. FAVARD: *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, (Paris, 1933), pp. VIII + 181. Per tutto quanto riguarda la materia di questo paragrafo potrà consultarsi utilmente quest'ultimo volume, di facilissima lettura.

detto ***lunghezza o intervallo d'inclusione***, tale che qualunque sia il numero reale a, all'intervallo $(a, a+l)$ appartiene almeno un numero τ,

$$a \leqslant \tau < a+l$$

detto ***quasi-periodo di*** $f(x)$ ***relativo ad*** ε, per il quale, qualunque sia x, si ha

$$|f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon .$$

Evidentemente una funzione continua periodica è quasi-periodica.

c) Per le funzioni quasi-periodiche valgono le seguenti proprietà:

i) Se $f(x)$ è quasi-periodica, ed a è costante, anche $f(x+a)$, $f(ax)$ sono quasi-periodiche;

ii) Le funzioni quasi-periodiche sono limitate in $(-\infty, +\infty)$;

iii) Se $f(x)$ è quasi-periodica e k è una costante reale o complessa qualunque, anche $f(x)+k$, $kf(x)$ sono quasi-periodiche;

$iiii$) Se $f(x)=u(x)+iv(x)$ è quasi-periodica, anche $f_0(x)=$ $=u(x)-iv(x)$ e $|f(x)|$ sono quasi-periodiche.

d) Le funzioni quasi-periodiche sono uniformemente continue in $(-\infty, +\infty)$, cioè scelto un numero ε positivo e arbitrario, si può determinare un numero positivo δ tale che se x_1, x_2 sono due numeri reali tali che $|x_2-x_1| < \delta$, è anche $|f(x_2)-f(x_1)| < \varepsilon$.

e) Se $f_1(x)$, $f_2(x)$,...., $f_n(x)$ sono quasi-periodiche, anche $f_1(x)+f_2(x)+....+f_n(x)$ è quasi-periodica.

f) Se le funzioni $f_n(x)$, $(n=1, 2,....)$, sono quasi-periodiche e la successione $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente verso $f(x)$ in $(-\infty, +\infty)$, anche $f(x)$ è quasi-periodica.

g) *Se* $\{a_n\}$ *è una successione di costanti reali o complesse, se* λ_n *è una successione di costanti reali, e se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ *converge uniformemente* in $(-\infty, \infty)$, la *sua somma è una funzione quasi-periodica.*

h) Se la derivata $f'(x)$ di una funzione quasi-periodica $f(x)$ è uniformemente continua, essa è anche quasi-periodica.

i) Se $f_1(x)$, $f_2(x)$,...., $f_n(x)$ sono quasi-periodiche, anche il prodotto $f_1(x)f_2(x)....f_n(x)$ è quasi-periodico.

2. - Per le funzioni quasi-periodiche vale il così detto *teorema della media.*

Se $f(x)$ è quasi-periodica, il limite

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$$

ha un valore finito; esso prende il nome di *valor medio della funzione* $f(x)$, e si indica con $M\{f(x)\}$;

$$M\{f(x)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx.$$

3. - a) Sussiste il teorema: *I numeri reali* Λ_n, *per i quali* $M\{f(x)\,e^{-i\Lambda_n x}\}$ *è diverso da zero sono in numero finito, o formano un'infinità numerabile.* Posto

$$A_n=M\{f(x)\,e^{-i\Lambda_n x}\},\qquad (n=1, 2,....),$$

si dirà i) la successione $\{\Lambda_n\}$ è la *successione degli esponenti di Fourier di* $f(x)$, ii) $\{A_n\}$ è la *successione dei coefficienti di Fourier di* $f(x)$, iii) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n\,e^{i\Lambda_n x}$ è la *serie di Fourier di* $f(x)$, e si scriverà

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,e^{i\Lambda_n x}. \tag{1}$$

b) Se $f(x)$ è una funzione periodica, la serie ora definita coincide con l'ordinaria serie trigonometrica di FOURIER di $f(x)$ cioè, se $f(x)$ è periodica, con il periodo p, posto $2\pi/p=k$, la (1) diventa

$$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n\,e^{inkx},\qquad a_n=\frac{1}{p}\int_0^p f(x)e^{-inkx}dx.$$

c) Sussiste la formula di PARSEVAL

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^2=M\{|f(x)|^2\},$$

e in generale

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n|^2 = M\left\{\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N} A_n\, e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\},$$

e poichè $\lim_{N\to\infty} \sum_{N+1}^{\infty} |A_n|^2 = 0$, si dirà con H. BOHR che la serie di FOURIER di una funzione quasi-periodica converge in media nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ verso $f(x)$.

d) Due funzioni quasi-periodiche distinte hanno le corrispondenti serie di FOURIER distinte.

e) Sia $f(x)$ quasi-periodica e per essa valga lo sviluppo (1); se l'integrale $\int_0^x f(\xi)\, d\xi$ è limitato per $-\infty < x < +\infty$, esso è quasi-periodico, e si ha

$$\int_0^x f(\xi)\, d\xi \sim c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x}, \qquad (c = \text{costante}),$$

cioè la serie di FOURIER di $\int_0^x f(\xi)\, d\xi$ si ottiene integrando il secondo membro della (1) termine a termine ([1]).

f) Una funzione quasi-periodica $f(x)$ abbia la rappresentazione (1); allora:

i) Se tutti gli A_n sono positivi, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ è convergente e si ha

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{i\Lambda_n x};$$

ii) Se gli esponenti $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n, \dots$ sono linearmente indipendenti, cioè preso un gruppo qualunque di esponenti $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ non possono trovarsi dei numeri razionali $r_1, r_2, \dots, r_n$ non tutti nulli per i quali risulti $r_1\Lambda_1 + r_2\Lambda_2 + \dots + r_n\Lambda_n = 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ è convergente e si ha

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{i\Lambda_n x}, \quad ([2]).$$

([1]) Cfr. J. FAVARD, op. cit. al n. 1, p. 82, p. 38.

([2]) Cfr. J. FAVARD, op. cit. al n. 1, p. 63.

4. - Un polinomio della forma

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x},$$

dove le a_n sono costanti qualsiasi, e le λ_n costanti reali, chiamasi *polinomio esponenziale*.

I polinomi esponenziali sono quasi-periodici [cfr. n. 1, *e*)].

Sussiste il teorema (di *approssimazione*): Se $f(x)$ è una funzione quasi-periodica, può costruirsi una successione di polinomi esponenziali

$$P_{N_1}(x), \quad P_{N_2}(x), \dots, \quad P_{N_k}(x), \dots ; \qquad N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots ;$$

la quale converge in $(-\infty, +\infty)$ uniformemente verso $f(x)$.

5. - Consideriamo l'equazione differenziale

$$\frac{d^n y}{dx^n} + c_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + c_n y = f(x), \tag{2}$$

con $c_1, c_2, \dots, c_n$ costanti reali, ed $f(x)$ reale quasi-periodica, e dimostriamo il teorema di Bohr e Neugebauer: *ogni soluzione limitata della* (2) *è una funzione quasi-periodica* (¹).

Sia $-\varrho$ una radice dell'equazione caratteristica della (2) [Cap. II, § 1, n. 6, *d*)]

$$r^n + c_1 r^{n-1} + \dots + c_{n-1} r + c_n = 0,$$

si avrà identicamente

$$r^n + c_1 r^{n-1} + \dots + c_{n-1} r + c_n = (r + \varrho)(r^{n-1} + \gamma_1 r^{n-2} + \dots + \gamma_{n-1})$$

e all'equazione differenziale (2) possiamo sostituire il sistema

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \gamma_1 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + \gamma_{n-1} y = Y, \tag{3}$$

$$Y' + \varrho Y = f(x). \tag{4}$$

Se $y(x)$ è una soluzione della (2), limitata in $(-\infty, +\infty)$,

(¹) H. Bohr, O. Neugebauer: *Über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer recter Seite*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, (1926), pp. 8-22. Cfr. anche J. Favard, op. cit. al n. 1, pp. 96-98.

per un teorema di ESCLANGON (¹), saranno limitate in $(-\infty, +\infty)$ $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, e, per la (3), tale riuscirà Y; basterà quindi dimostrare che ogni soluzione limitata della (4) è quasi-periodica per dedurne con procedimento di induzione il teorema enunciato.

Sia

$$\varrho = r + i\lambda$$

e distinguiamo i casi $r > 0$, $r < 0$, $r = 0$.

Se $r > 0$, la (4) ha l'integrale generale

$$Y(x) = e^{-\varrho x}\left[\int_{-\infty}^{x} e^{\varrho\xi} f(\xi)\, d\xi + c\right], \qquad [c = \text{costante}]$$

e se $|f(x)| \leqslant B$, si ha

$$\left| e^{-\varrho x}\int_{-\infty}^{x} e^{\varrho\xi} f(\xi)\, d\xi \right| \leqslant B\left| e^{-\varrho x}\frac{e^{\varrho x}}{\varrho}\right| = \frac{B}{|\varrho|},$$

perciò la (4) ha il solo integrale limitato in $(-\infty, +\infty)$

$$Y(x) = e^{-\varrho x}\int_{-\infty}^{x} e^{\varrho\xi} f(\xi)\, d\xi.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia τ il quasi-periodo di $f(x)$ relativo ad ε; si ha

$$\left| Y(x+\tau) - Y(x)\right| = \left| e^{-\varrho(x+\tau)}\int_{-\infty}^{x+\tau} e^{\varrho\xi} f(\xi)\, d\xi - e^{-\varrho x}\int_{-\infty}^{x} e^{\varrho\xi} f(\xi)\, d\xi\right|$$

$$= \left| e^{-\varrho(x+\tau)}\int_{-\infty}^{x} e^{\varrho(\xi+\tau)} f(\xi+\tau)\, d\xi - e^{-\varrho x}\int_{-\infty}^{x} e^{\varrho\xi} f(\xi)\, d\xi\right|$$

$$= \left| e^{-\varrho x}\int_{-\infty}^{x} e^{\varrho\xi}\left[f(\xi+\tau) - f(\xi)\right] d\xi\right| < \frac{\varepsilon}{|\varrho|},$$

perciò $Y(x)$ è quasi-periodica.

Ugualmente si ragiona se $r < 0$.

(¹) E. ESCLANGON: *Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques.* Ann. Obs. Bordeaux 16 (1917), (pp. 51-226); p. 192; cfr. anche E. LANDAU: *Über einen Satz von Herrn Esclangon*, Math. Ann., 102 (1929), pp. 177-188.

Sia $r = 0$; le soluzioni della (4) hanno la forma

$$(5) \qquad Y(x) = e^{-i\lambda x}\left[\int_0^x e^{i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi + c\right],$$

ed $Y(x)$ risulta limitata in $(-\infty, +\infty)$ se l'integrale $\int_0^x e^{i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi$ è limitato per x variabile in $(-\infty, +\infty)$. Ora $e^{i\lambda x} f(x)$ è quasi-periodica, e se l'integrale

$$\int_0^x e^{i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi$$

è limitato per x variabile in $(-\infty, +\infty)$, esso è quasi-periodico, [n. 3, e)], e di conseguenza $Y(x)$ è quasi-periodica.

ERRATA CORRIGE

Pag. 19, linea 12 e 13 (dal basso), *invece di* « è $b(1+b) < (1+b)^2$ », *leggi* « è $(1+b)^2$ ».

Pag. 28, linea 14 (dall'alto), *scrivere a sinistra* « (12') ».

Pag. 28, linea 4 (dal basso), *invece di* « (12) », *leggi* « (12') ».

Pag. 28, linea 4 (dal basso), *aggiungi* « Con ugual ragionamento si dimostra che *se per* $x^0 \leqslant x \leqslant x^0 + h$, *la funzione continua* $z(x)$ *soddisfa la limitazione* $0 \leqslant z(x) \leqslant \int_{x^0}^{x} (Mz + A)\,dx + B$, *dove* M, A, B *sono costanti, positive o nulle, allora si ha* $0 \leqslant z(x) \leqslant (Ah + B)e^{Mh}$, $(x^0 \leqslant x \leqslant x^0 + h)$ ».

Pag. 28, linea 1 (dal basso), *invece di* « F. KAMKE », *leggi* « E. KAMKE ».

Pag. 31, linea 10 (dall'alto), *invece di* « $\frac{\partial z_k}{\partial y^0}$ », *leggi* « $\frac{\partial z_i}{\partial y_k^0}$ ».

Pag. 43, linea 5 (dall'alto), *invece di* « $x < x^0 + \delta$ », *leggi* « $x \leqslant x^0 + \delta$ ».

Pag. 44, linea 4 (dall'alto), *invece di* « *d*) », *leggi* « *c*) ».

Pag. 44, linea 3 (dal basso), *invece di* « Se inoltre », *leggi* « *d*) Se inoltre ».

Pag. 183, linea 5 (dal basso), *invece di* « $y'z - y'z$ », *leggi* « $y'z - yz'$ ».

Pag. 205, linea 14 (dall'alto), *invece di* « l'esistenza di $f''(x)$ », *leggi* « $f(x)$ limitata e integrabile ».

Pag. 208, linea 2 (dall'alto), *invece di* « *che per ogni valore di* λ *appartenente a* (Λ_1, Λ_2) *le funzioni* », *leggi* « *che le funzioni* ».

Pag. 208, linea 4 (dall'alto), *invece di* « *continue di* x *per* » *leggi* « *continue di* x *e* λ *per* ».

Pag. 208, linea 7 (dall'alto), *invece di* « *in nessun tratto di* (a, b) », *leggi* « *in uno stesso tratto di* (a, b), *per due valori distinti di* λ ».

Pag. 210, linea 4 (dall'alto), *invece di* « $x_m + \varepsilon)$ », *leggi* « $x_{m-1} + \varepsilon)$ ».

Pag. 212, linea 15 (dall'alto), *invece di* « (13) e (21) », *leggi* « (13) e (22) ».

Pag. 304, nella linea 11 (dall'alto), e nelle due matrici seguenti, *cangiare i segni* « — » *in segni* « + ».

Pag. 305, linea 7 (dal basso), *invece di* « abbiamo », *leggi* « abbiamo ».

Pag. 307, linea 13 (dall'alto), *invece di* « cioè », *leggi* « ciò ».

Pag. 320, linea 4 (dall'alto), *invece di* « $(-\infty < t + \infty)$ », *leggi* « $(-\infty < t < +\infty)$ ».

Pag. 321, linea 3 (dal basso), *invece di* « lipscitziana », *leggi* « lipschitziana ».

Pag. 322, linea 8 (dall'alto), *invece di* « $\sum_{n--\infty}^{+\infty}$ », *leggi* « $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ ».

Pag. 322, nella formula (24), *invece di* « $\frac{\theta_m}{(2n)^2-\theta_0}$ », *leggi* « $\frac{\theta_m}{(2n)^2-\theta_0} b_{n-m}$ ».

Pag. 322, nella formula (24), *invece di* « θ^0 », *leggi* « θ_0 ».

INDICE PARTE PRIMA

CAPITOLO I.

I sistemi normali di equazioni differenziali ordinarie e il teorema di esistenza.

§ 1. - Sistemi normali.

§ 2. - Generazione dei sistemi di equazioni differenziali ordinari per l'eliminazione di costanti arbitrarie.

§ 3. - Il teorema fondamentale di esistenza e di unicità col metodo delle approssimazioni successive di Picard-Peano.

§ 4. - Continuazione analitica degli integrali. Esempi.

§ 5. - Gli integrali delle equazioni differenziali come funzioni dei loro valori iniziali.

§ 6. - Il teorema di esistenza col metodo di Cauchy-Lipschitz.

CAPITOLO II.

Sui sistemi normali di equazioni differenziali lineari e su alcune trasformazioni delle equazioni differenziali lineari.

§ 1. - Sistemi normali di equazioni differenziali lineari.

§ 2. - Il calcolo delle matrici per la determinazione delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti variabili.

§ 3. - Particolari trasformazioni delle equazioni differenziali lineari omogenee.

§ 4. - Normalizzazione relativa e normalizzazione canonica delle equazioni differenziali lineari omogenee.

§ 5. - L'equazione aggiunta di Lagrangia.

CAPITOLO III.

Le equazioni differenziali nel campo analitico e su alcune equazioni lineari del secondo ordine.

§ 1. - Metodo delle funzioni maggioranti. (Calcolo dei limiti di Cauchy).

§ 2. - Il teorema di esistenza e di unicità col metodo delle approssimazioni successive.

§ 3. - Equazioni differenziali lineari del secondo ordine nel campo analitico.

§ 4. - Equazioni differenziali lineari con tre punti singolari regolari. L'equazione ipergeometrica.

§ 5. - I polinomi ipergeometrici di Jacobi.

§ 6. - L'equazione di Bessel.

CAPITOLO IV.

I problemi ai limiti per le equazioni differenziali del secondo ordine.

§ 1. - Il problema della determinazione di un integrale di un'equazione differenziale di ordine n passante per n punti assegnati.

§ 2. - Le equazioni differenziali del secondo ordine e il teorema di confronto di Sturm.

§ 3. - Applicazione del teorema di confronto per la separazione degli zeri dei polinomi ultrasferici e delle funzioni di Bessel nel caso principale.

§ 4. - Il teorema di oscillazione.

§ 5. - Integrali nulli in due punti assegnati. Autovalori, autofunzioni.

§ 6. - I sistemi di Sturm. Autovalori. Autofunzioni.

§ 7. - Valutazione asintotica delle funzioni di Sturm-Liouville.

§ 8. - Il teorema di Dini-Hobson di equiconvergenza della serie di Sturm-Liouville con le serie trigonometriche di Fourier.

CAPITOLO V.

I problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore al secondo.

§ 2. - Sistemi differenziali aggiunti e autoaggiunti.

§ 3. - La funzione di Green e la trasformazione dei sistemi differenziali in equazioni integrali di seconda specie di Fredholm.

§ 4. - I problemi ai limiti per i sistemi autoaggiunti di ordine pari e il Calcolo delle Variazioni.

CAPITOLO VI.

Equazioni e sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. Soluzioni periodiche e quasi periodiche dei sistemi di equazioni differenziali.

§ 1. - Gli integrali delle equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici.

§ 2. - Calcolo degli esponenti caratteristici.