

R. CouE  
7.1.1944

GINO LORIA  
PROFESSORE NELL'UNIVERSITÀ DI GENOVA

# CURVE SGHEMME SPECIALI

ALGEBRICHE E TRASCENDENTI

VOLUME PRIMO  
CURVE ALGEBRICHE



BOLOGNA  
NICOLA ZANICHELLI  
EDITORE

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI  
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

## PREFAZIONE

*On sert peut-être plus encore la science en  
simplifiant des théories connues, qu'en  
l'enrichissant de théories nouvelles.*

GERGONNE.

Quando — circa un quarto di secolo fa — un concorso bandito da un'Accademia straniera diresse e fissò la mia attenzione sopra la totalità delle curve particolari <sup>1)</sup>, non tardai ad avvedermi che, volendo comporre un tutto organico col ricchissimo materiale esistente, era indispensabile considerare a parte le linee a doppia curvatura, giacchè esse si mostrano ribelli ad ordinamenti sistematici ed a metodi di ricerca del tipo di quelli che nel piano furono applicati con tanto successo. In conseguenza concentrai per il momento tutti i miei sforzi a dare corpo ad una Geometria comparata delle linee piane, riserbando a miglior tempo l'analogo studio relativo allo spazio. Da quel momento però iniziai la raccolta degli elementi a ciò necessari. Ed ora giudico opportuno di presentare al pubblico i risultati delle mie investigazioni, non già per la lusinghiera illusione di avere compiuta la collezione di tutto quello che meritava di venire ricordato, nè di essere riuscito ad assegnare a ciascuno degli enti considerati il posto che meglio gli conviene, ma perchè, quando si è raggiunto un certo punto della propria carriera mortale, è imprudente il fare sicuro assegnamento sull'indomani. Nel sottoporre questo lavoro ai miei giudici naturali esprimo la speranza che non mi sarà per essermi rifiutata quella benigna indulgenza di cui ha diritto chi affronta l'aspra fatica di coordinare innume-

<sup>1)</sup> Risultato dei miei studi sull'argomento è l'opera *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte, 2<sup>a</sup> Aufl. I Bd.* (Leipzig und Berlin 1910), *II Bd.* (1911).

revoli ricerche compiute sopra enti svariatissimi, con intendimenti e procedimenti fra loro differentissimi, nell'intento di offrire agli studiosi un quadro d'insieme di quanto si conosce sull'argomento, contemplando il quale emergono in piena luce i problemi la cui soluzione è più desiderata ed urgente.

Lo studio delle curve sghembe speciali nel presente volume viene eseguito con la scorta dei metodi classici, specialmente di quelli che hanno per midollo spinale la geometria cartesiana; non già che altre procedure più moderne non avrebbero potuto venire applicate con buoni risultati <sup>1)</sup>, ma perchè a tutti riesce penoso e non scevro di pericoli l'abbandonare quegli strumenti che una lunga consuetudine rese familiari, tanto più quando essi non manifestano quei segni di decrepitezza che alcuni entusiasti di novità credono scorgervi. Appunto perchè il metodo delle coordinate — e lo stadio di sua maggiore perfezione rappresentato dalla geometria differenziale — somministrò a chi scrive i mezzi per raggiungere lo scopo che si era prefisso, egli giudicò opportuno di raccogliere nel Cap. I alcune formole di uso più frequente, il che gli porse occasione per fissare una volta per tutte le notazioni usate nel corso dell'opera. Nello stesso Capitolo introduttorio si trovano poi alcuni concetti utili nello studio delle linee sghembe: alcuni sono talmente familiari ai cultori della geometria, che ritenemmo superfluo il farne più di un rapido cenno; ma, per altri, si trattava di considerazioni che si cercano indarno nei trattati o che furono applicate esclusivamente in casi speciali; onde ritenemmo nostro dovere l'entrare al riguardo in qualche più minuto particolare. Nella chiusa di detto Capitolo si trova un elenco delle varie specie di curve che vennero sinora considerate sopra una superficie; ora giova avvertire che per alcune (linee di curvatura, asintotiche, geodetiche) la loro determinazione venne già eseguita per numerose superficie speciali; ma, per altre di esse tale determinazione rappresenta un campo pressochè inesplorato che raccomandiamo ai giovani investigatori.

<sup>1)</sup> [A conferma di tale previsione sta il recente volume di F. Sibirani, *Elementi di geometria differenziale*, Milano, Hoepli, 1924 (Maggio 1924)].

*Caratteristico della geometria moderna è l'intervento continuo del concetto di « corrispondenza » o « trasformazione »; di fronte alle curve esso si presenta sotto due distinti aspetti, potendo la legge di derivazione essere applicabile a tutto lo spazio, oppure avere significato soltanto rispetto ad una linea isolata. Le principali di tali leggi sono descritte nel Cap. II: alcune sono così familiari a tutti che ci limitammo ad un rapidissimo cenno; altre, invece, essendo meno note o dotate di novità vennero caratterizzate con maggiori particolari; è opportuno notare che non tutte intervengono nello studio delle curve considerate nell'opera presente e che le applicazioni taciute possono offrire al lettore ampia materia per proprio esercizio.*

*Premesse queste generalità, nell'affrontare il nostro tema, ci si affacciò la questione di determinare da quali curve dovessimo prendere le mosse. Dopo maturo esame decidemmo di cominciare dallo stabilire le formole principali relative alle sezioni coniche considerate nello spazio (Cap. III), e ciò tanto perchè nessuna opera a noi nota ne offre una metodica raccolta, quanto perchè, in conseguenza, la geometria analitica delle curve di second'ordine viene spogliata del carattere di pura applicazione della teoria delle funzioni quadratiche, sotto il quale di consueto si presenta: però, trattandosi di considerazioni elementari, non svolgemmo tutti i calcoli completamente.*

*Alle linee sghembe di terzo ordine è consacrato il Cap. IV, nel quale sono esposte le principali proposizioni e formole che le concernono, senza escludere quelle di carattere metrico, chè si tratta di un campo che nel presente Secolo venne coltivato con impegno e profitto e che, oggi ancora, si presenta ben lungi dallo stato di esaurimento. Esso si chiude con la distribuzione di tutte le cubiche in quattro categorie, determinate queste in base al loro vario contegno all'infinito; a ciascuna di tali categorie è dedicata una delle quattro Sezioni in cui è ripartito il Cap. V, l'altro di quelli dedicati alle anzidette curve. In ciascuna Sezione, non soltanto sono fatte conoscere le più spiccate qualità comuni a tutti gli enti ivi contemplati, ma vengono esaminate a parte le specializzazioni che*

*ne vennero sinora considerate; tali specializzazioni sono già abbastanza numerose, ma saranno in avvenire per accrescersi, chè ad ogni caso particolare metrico di una figura collegata ad una curva, corrisponde (almeno sino a prova in contrario) un nuovo caso particolare della curva stessa.*

*Un analogo ordinamento della materia si adottò nel Cap. VI trattando delle curve di quart'ordine e prima specie; se non che, essendone stati alcuni casi particolari studiati prima della teoria generale, giudicammo del caso premettere alla esposizione di questa qualche informazione intorno ad essi, rimandando quelli dovuti ai geometri fioriti in quest'ultimo secolo (1822-1921) all'ultima Sezione del succitato Capitolo.*

*Invece per le curve di quart'ordine e seconda specie (la cui scoperta è vanto di geometri moderni) nel Cap. VII esporremo prima le proprietà generali e poi quanto concerne i casi particolari che si presentano dal punto di vista proiettivo o metrico.*

*Intorno alle curve di ordine determinato superiore a quattro non esistono esaurienti ricerche; però furono già investigate, più o meno profondamente, molte categorie di curve di quinto e sesto ordine; nè del tutto ignote sono quelle dei seguenti ordini settimo ed ottavo: mentre all'inesauribile teoria delle quadriche si deve la scoperta di parecchie di ordini ancora più elevate: di tutte queste figure porge notizie il nostro Cap. VII.*

*Ma vi sono altre curve algebriche che, pur essendo di ordine non determinato godono di speciali prerogative; sono enti di grande importanza, giacchè grazie alla loro posizione intermedia, fra le linee generali e quelle particolari, porgono preziose illustrazioni della teoria delle curve algebriche a doppia curvatura: di quelle note tenemmo parola nel Cap. VIII, lamentando che il loro numero sia molto meno considerevole di quanto esigerebbero gl'interessi della geometria<sup>1)</sup>.*

<sup>1)</sup> I Capitoli IX-XII formeranno il II Volume della presente opera.

Di cubiche gobbe reali nessuna appartiene ad una sfera, chè per comporre con una tal curva un' intersezione completa è necessario aggregarvi una generatrice di sfera ed è noto che se di una totalità reale fa parte un ente immaginario il residuo è pure immaginario. Ma, per converso, molte curve speciali di ordine pari hanno i loro punti equidistanti da un punto fisso, onde ritenemmo opportuno considerarle metodicamente dedicandovi uno speciale Capitolo (il X): il quale si apre con una Sezione contenente alcune generalità intorno allo studio della geometria sulla sfera mediante coordinate, mentre una seconda Sezione offre molteplici applicazioni dei metodi esposti all' investigazione di parecchie curve (non tutte algebriche) per qualche ragione notevole: notiamo che ivi si manifesta il fenomeno assai interessante che le curve gobbe che corrispondono sulla sfera a certe speciali linee piane trascendenti sono algebriche.

Mentre nei Capitoli testè discorsi la parte fondamentale trovasi affidata alle coordinate cartesiane o polari, nell'XI l'ufficio di protagonista viene assunto dagli elementi intrinseci (arco  $s$ , flessione  $k$  e torsione  $\alpha$ ), giacchè ivi viene eseguita l'investigazione di alcune curve definite col mezzo di una relazione fra siffatti elementi; la questione che in ogni caso si presenta è quella di scoprire qualche importante proprietà geometrica delle linee corrispondenti <sup>1)</sup>. Ora è notevole il fatto che nei casi sinora incestigati tale scopo venne raggiunto quasi incidentalmente. Si ricordi, infatti, che fu lo studio diretto delle eliche situate sopra cilindri qualsivogliono che portò a riconoscere che per tutte e sole tali curve è costante il rapporto fra flessione e torsione; onde l'interpretazione geometrica dell'equazione  $\frac{k}{\alpha} = \text{cost.}$  si ottenne come accidentale prodotto secondario di altra ricerca. Poco dopo, la questione se esista una curva avente comune con altra tutte le normali principali guidò a

1) Per risolverla si potrebbe pensare a ricorrere all'ordinaria rappresentazione parametrica della curva; però, per ottenerla, si devono conoscere, non una, ma due relazioni fra  $s$ ,  $k$  e  $\alpha$ ; ma allora per dedurne l'espressione delle coordinate dei punti della curva in funzione di un parametro, è necessario integrare un'equazione di Riccati, il che è possibile soltanto in rarissimi casi.

caratterizzare la totalità delle curve in cui flessione e torsione sono legate da una relazione lineare, in altre parole all'interpretazione geometrica di una equazione del tipo  $Ak + B\alpha + C = 0$ . Come risolvere la questione analoga per una equazione di secondo grado? In un caso speciale si conseguì l'intento cercando una curva di cui tutte le normali principali fossero binormali di un'altra; ma in generale vi si giunse ricorrendo al movimento di una retta invariabilmente connessa al triedro satellite della curva considerata; se essa descrive una superficie sviluppabile, flessione e torsione della curva sono legate da una relazione quadratica senza termine costante; se invece essa genera una rigata la quale ammetta una direttrice che sia traiettoria di un punto della retta mobile nel corso dell'anzidetto movimento e che sia incontrata sotto angolo costante da tutte le generatrici, fra flessione e torsione passa una relazione generale del tipo seguente:

$$Ak^2 + B\alpha^2 + Ck\alpha + Dk + E\alpha + F = 0.$$

Ora quali emmaestramenti possono trarsi da questi speciali problemi? Uno soltanto e di carattere generale e molto vago: cioè l'opportunità di aggregare ad una curva gobba il maggior numero possibile di altre figure, nella speranza che queste siano capaci di proiettare qualche luce sul significato geometrico di una relazione fra  $k$  e  $\alpha$  che non sia lineare o quadratica.

L'ultimo Capitolo dell'opera presente è molto esteso e comprende l'esposizione dei più importanti contributi dati sinora alla Geometria differenziale sopra superficie particolari; ivi, infatti, sono investigate le curve di determinate specie che ivi si trovano: si tratta di ricerche nelle quali lo strumento analitico di regola consiste in speciali equazioni differenziali, l'integrazione delle quali si effettua soltanto in casi eccezionali, superando sempre gravi difficoltà e ricorrendo a riposti artifici; sono ricerche abbastanza numerose, ma che auguriamo vengano proseguite in un prossimo avvenire; così all'analisi e alla geometria verranno fatte aggiunte che saranno titoli di onore per chi le avrà compiute.

Di ciascuna delle curve considerate il lettore troverà nel presente volume la definizione, la genesi, le più convenienti rappre-

sentazioni analitiche e le proprietà fondamentali, ma non tutte, chè, altrimenti esso sarebbe stato trasformato in una grandiosa enciclopedia, in un repertorio che sarebbe stato forse consultato, ma non letto per intero: d'altronde alcuni dati bibliografici, non molto diffusi ma, per quanto possibile esatti, serviranno a sopperire al nostro silenzio. Le cognizioni matematiche che vengono presupposte nei nostri lettori non oltrepassano quanto costituisce l'ordinario bagaglio di ogni investigatore nel campo delle scienze esatte; in conseguenza ci astenemmo dal riprodurre certi sviluppi troppo elevati o speciali, limitandoci a segnalarne i risultati più salienti.

Quanto al contributo personale dell'autore esso consiste principalmente nello sforzo di dare una certa unità a ricerche compiute da molte persone, in epoche differenti e con intenti diversi, sostituendo spesso alle argomentazioni ed ai ragionamenti originali, altri di un tipo unico, ed eventualmente aggiungendo corollari a teoremi noti ed osservazioni complementari <sup>1)</sup>. Con ciò non nutriamo la stolta pretesa di avere colmate tutte le lacune che presenta la teoria delle curve speciali; anzi, col lasciare chiaramente scorgere i campi non ancora abbastanza coltivati, segnalando ai futuri pionieri le regioni non ancora dissodate, reputiamo di avere fatta opera indirettamente giovevole al progresso della scienza.

Genova, 27 agosto 1921.

<sup>1)</sup> Di tutte le curve speciali a noi note giudicammo opportuno far menzione, senza escludere quelle che sino ad oggi non rivelarono qualità di grande interesse.

## CAPITOLO I.

### RIASSUNTO DI CONCETTI E FORMOLE CONCERNENTI LE CURVE SGHEMME.

L'indagine delle proprietà di qualsivoglia figura geometrica si effettua associandovi altri enti ad essa collegati; nel caso delle curve gobbe (o sghembe o a doppia curvatura), alcuni di tali nuovi enti furono da tempo considerati e per essi basterà ricordare qui le formole relative; altri, per converso, sono meno generalmente noti, o vennero considerati in poche occasioni, o sotto forme speciali: riguardo ad essi è necessario che noi entriamo in qualche particolare, pur avvertendo che molti vennero sino ad ora di rado o scarsamente utilizzati nello studio delle curve speciali notevoli.

#### A) CURVE CONSIDERATE NELLO SPAZIO.

##### § 1. Formole classiche.

Dette  $x, y, z$  le coordinate cartesiane di un punto generico della data curva  $I$ , supporremo che siano espresse mediante funzioni di un parametro  $t$ , le quali, per risparmio di lettere, indicheremo con  $x(t), y(t), z(t)$ . Tali funzioni supporremo generalmente continue e dotate di derivate sino all'ordine che sarà necessario di considerare; queste derivate verranno rappresentate mediante accenti, mentre con  $s$  si designerà l'arco della curva.

Per rappresentare analiticamente in modo simmetrico la corda di  $\Gamma$  che congiunge i punti individuati dai valori  $t_1$  e  $t_2$  del parametro, servono le equazioni:

$$(I) \quad \frac{X - \frac{x(t_1) + x(t_2)}{2}}{x(t_2) - x(t_1)} = \frac{Y - \frac{y(t_1) + y(t_2)}{2}}{y(t_2) - y(t_1)} = \frac{Z - \frac{z(t_1) + z(t_2)}{2}}{z(t_2) - z(t_1)},$$

ove  $X, Y, Z$  sono coordinate correnti.

Le equazioni della (retta) tangente e del (piano) osculatore nel punto corrispondente al valore  $t$  del parametro sono:

$$(II) \quad \frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)},$$

$$(III) \quad \begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0;$$

mentre l'equazione

$$(IV) \quad \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix} = 0$$

ha per radici i valori del parametro relativi ai punti di contatto dei *piani stazionari*.

Nel caso in cui il parametro  $t$  verifichi le equazioni

$$\frac{x''(t)}{x'(t)} = \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{z''(t)}{z'(t)}$$

il punto corrispondente si dice *di inflessione*; ivi il piano osculatore è indeterminato; è chiaro che, generalmente parlando, una curva gobba non possiede siffatta singolarità.

I coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale in un punto qualunque di  $\Gamma$  s'indicheranno rispettivamente con

$$\begin{aligned} &\alpha, \beta, \gamma, \\ &\xi, \eta, \zeta, \\ &\lambda, \mu, \nu, \end{aligned}$$

e si supporrà che il determinante da essi così formato (il quale è ortogonale) valga + 1.

Sussiste la formola

$$(V) \quad s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

e tutte quelle che se ne deducono per differenziazione rispetto al parametro. Si hanno poi le relazioni:

$$(VI) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{x'}{s'} & , & \beta = \frac{y'}{s'} & , & \gamma = \frac{z'}{s'} & , \\ \xi = r \frac{s'x'' - s''x'}{s'^3} & , & \eta = r \frac{s'y'' - s''y'}{s'^3} & , & \zeta = r \frac{s'z'' - s''z'}{s'^3} & , \\ \lambda = r \frac{y'z'' - y''z'}{s'^3} & , & \mu = r \frac{z'x'' - z''x'}{s'^3} & , & \nu = r \frac{x'y'' - x''y'}{s'^3} & , \end{cases}$$

ove  $r$  (raggio di I curvatura o di flessione) è determinato dalla formola:

$$(VII) \quad \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{\left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\|^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{s''^2 + y''^2 + z''^2 - s'^2}}{s'^3};$$

$\rho$  (raggio di II curvatura o di torsione) è invece espresso come segue:

$$(VIII) \quad \frac{1}{\rho} = - \frac{1}{\left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\|^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

Le precedenti formole si semplificano notevolmente supponendo che come parametro si scelga l'arco  $s$  della curva, chè allora  $s' = 1$ ,  $s'' = s''' = \dots = 0$ ; in tale ipotesi hanno luogo inoltre le seguenti relazioni, note sotto il nome di *formole di Serret-Frenet*:

$$(IX) \quad \begin{cases} \alpha' = \frac{\xi}{r} & , & \beta' = \frac{\eta}{r} & , & \gamma' = \frac{\zeta}{r} & , \\ \xi' = -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right) & , & \eta' = -\left(\frac{\beta}{r} + \frac{\mu}{\rho}\right) & , & \zeta' = -\left(\frac{\gamma}{r} + \frac{\nu}{\rho}\right) & , \\ \lambda' = \frac{\xi}{\rho} & , & \mu' = \frac{\eta}{\rho} & , & \nu' = \frac{\zeta}{\rho} & . \end{cases}$$

Del raggio di torsione esiste anche una comoda espressione per il caso in cui la curva considerata sia l'involuppo di  $\infty'$  piani. Sia, infatti,

$$(a) \quad A(t)x + B(t)y + C(t)z + D(t) = 0$$

l'equazione generale di tali piani, si ricordi essere

$$(\beta) \quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}{ds^2} = \frac{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}{s'^2}$$

e si osservi che, essendo  $\lambda, \mu, \nu$  i coseni direttori della binormale, si ha

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \mu = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \nu = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ne segue

$$\lambda' = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)A' - (AA' + BB' + CC')A}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ ecc.}$$

epperò

$$(\gamma) \quad \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \frac{\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Ora combinando l'equazione data (a) con le sue due prime derivate rispetto al parametro  $t$  si trova

$$x = - \frac{\begin{vmatrix} B & C & D \\ B' & C' & D' \\ B'' & C'' & D'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}}, \text{ ecc.}$$

Per scrivere più semplicemente le formole seguenti consideriamo il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix};$$

ne sia

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

il reciproco; si vedrà allora essere

$$x' = \frac{d_3 a_2 - d_2 a_3}{d_3^2}, \text{ ecc.}$$

ossia, per note proprietà dei determinanti reciproci,

$$x' = \frac{\Delta(BC' - B'C)}{d_3^2}, \text{ ecc. :}$$

in conseguenza

$$(\delta) \quad s'^2 = \frac{A^2 \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}^2}{d_3^4}.$$

Combinando le relazioni ( $\gamma$ ) e ( $\delta$ ) con la ( $\beta$ ) si conclude essere

$$(VIII') \quad \frac{1}{\varrho} = - \frac{\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}^2}{(A^2 + B^2 + C^2)} \frac{\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{vmatrix}},$$

ove il segno si è determinato considerando un esempio (come sarebbe la curva  $x = t^3, y = t^2, z = t$ , che è involupata dagli  $\infty'$  piani  $x - 3ty + 3t^2z - t^3 = 0$ )<sup>1)</sup>.

Detto  $R$  il raggio della sfera osculatrice in un punto della data curva, si ha la formola

$$(X) \quad R^2 = r^2 + \left(\frac{\varrho dr}{ds}\right)^2$$

<sup>1)</sup> La formola (VIII) fu stabilita con un ragionamento diverso da quello usato nel testo nella nota di A. Demoulin, *Sur la torsion d'une courbe définie par son plan osculateur* (Bull. de la Soc. math. de France, T. XXVIII, 1900, p. 180-83). L'argomentazione da noi esposta cade in difetto quando le funzioni  $A, B, C$  sono tali che, per ogni valore di  $t$ , si ha

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C};$$

ma allora  $A, B, C$  hanno la forma  $p\omega(t), q\omega(t), r\omega(t)$  ove  $p, q, r$  sono costanti e la serie ( $\alpha$ ) consta di un fascio di piani paralleli.

riguardo alla quale va notato che essa è applicabile anche quando la variabile indipendente non sia l'arco, purchè la si scriva come segue:

$$R^2 = r^2 + \left( \rho \frac{dr}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} \right)^2$$

ossia:

$$(X') \quad R^2 = r^2 + \left( \frac{\rho r'}{s'} \right)^2$$

Una curva sferica è caratterizzata dalla equazione

$$\frac{r}{\rho} + r' \rho' + r'' \rho = 0,$$

le derivate essendo prese rispetto all'arco.

La legge di dualità suggerisce di considerare una sfera analoga alla osculatrice, cioè la posizione limite che assume una delle sfere tangenti a quattro piani osculatori di una curva quando tre di questi tendono a coincidere col quarto <sup>1)</sup>; si può chiamarla *sfera para-osculatrice*. Il suo raggio è espresso dalla formola

$$\frac{1}{\frac{d}{ds} \left( \frac{r}{\rho} \right)}$$

la condizione affinché essa non vari al mutare del piano osculatore considerato, cioè affinché tutti i piani osculatori della data curva tocchino la medesima sfera, è:

$$\frac{d}{ds} \left[ r \frac{d}{ds} \left( \frac{\rho}{r} \right) \right] = -1.$$

<sup>1)</sup> B. Hostinsky, *Sur quelques figures déterminés par les éléments infiniment voisins d'une courbe gauche* (Journ. de Math. pures et appl., VI Ser., T. V, 1909, p. 263-92) e *Sur les propriétés de la sphère qui touche quatre plans tangents consécutifs d'une surface développable* (C. R. du Congrès international des Mathématiciens, 1919); G. Loria, *Applicazioni geometriche di una formola di Siacci* (Boll. Unione mat. ital., T. I, 1922-23).

## § 2. Corde principali.

Chiamasi *principale* <sup>1)</sup> una corda di una curva gobba quando sia intersezione dei piani che la osculano nei suoi estremi.

Se  $P_1, P_2$  sono gli estremi di una corda principale e  $t_1, t_2$  i corrispondenti valori del parametro, succederà allora ed allora soltanto che il piano osculatore in  $P_1$  passi per  $P_2$  e inversamente; da ciò le equazioni:

$$(XI) \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} x(t_2) - x(t_1) & y(t_2) - y(t_1) & z(t_2) - z(t_1) \\ x'(t_1) & y'(t_1) & z'(t_1) \\ x''(t_1) & y''(t_1) & z''(t_1) \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x(t_1) - x(t_2) & y(t_1) - y(t_2) & z(t_1) - z(t_2) \\ x'(t_2) & y'(t_2) & z'(t_2) \\ x''(t_2) & y''(t_2) & z''(t_2) \end{vmatrix} = 0; \end{cases}$$

esse servono alla risoluzione del problema della ricerca delle corde principali.

## § 3. Asintoti e Piani asintotici.

La tangente in un punto all'infinito di una curva, se non sta tutta all'infinito, chiamasi *asintoto*, mentre il piano che la oscula ivi, se non è improprio, dicesi *piano asintotico*.

Per determinare gli asintoti ed i piani asintotici di una curva, supporremo questa rappresentata da equazioni della forma

$$x = \frac{x_1(t)}{x_0(t)}, \quad y = \frac{x_2(t)}{x_0(t)}, \quad z = \frac{x_3(t)}{x_0(t)};$$

un valore di  $t$  annullante la funzione  $x_0(t)$  potrà annullare una o due delle funzioni  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  ma non può annullarle tutte, chè in tal caso le quattro funzioni  $x_0(t), x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  avrebbero un fattore comune, che potrebbesi sopprimere; in con-

<sup>1)</sup> Concetto è nome usato per la prima volta in un caso particolare da E. Bertini nella memoria *Sulla curva gobba di 4° ordine e 2° specie*. (Rend. del R. Ist. Lombardo, Ser. II, T. V, 1872).



seguenza quel valore di  $t$  rende infinita una almeno delle coordinate, epperò corrisponde ad un punto all'infinito della curva. Ora osserviamo che i quattro piani proiettanti la tangente generica (I) dai punti all'infinito degli assi e dall'origine sono rappresentati dalle quattro equazioni compendiate nella formola

$$(II') \quad \left\| \begin{array}{cccc} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 0 \end{array} \right\| = 0,$$

due delle quali sono sufficienti ad individuare detta tangente. Si osservi adesso che, per le ipotetiche espressioni di  $x, y, z$  si ha

$$x' = \frac{x_0 x_1' - x_0' x_1}{x_0^2}, \quad y' = \frac{x_0 x_2' - x_0' x_2}{x_0^2}, \quad z' = \frac{x_0 x_3' - x_0' x_3}{x_0^2},$$

onde le (II') divengono:

$$\left\| \begin{array}{cccc} X & Y & Z & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \\ x_0 x_1' - x_0' x_1 & x_0 x_2' - x_0' x_2 & x_0 x_3' - x_0' x_3 & 0 \end{array} \right\| = 0$$

o finalmente, dopo qualche facile trasformazione,

$$(II'') \quad \left\| \begin{array}{cccc} X & Y & Z & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_0' \end{array} \right\| = 0$$

Se, quindi, il parametro  $t$  soddisfa l'equazione  $x_0 = 0$ , per rappresentare il corrispondente asintoto servono due delle quattro equazioni compendiate nella scrittura:

$$(XII) \quad \left\| \begin{array}{cccc} X & Y & Z & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_0' \end{array} \right\| = 0;$$

notisi che, ove  $F$  fosse tangente al piano all'infinito, per il considerato valore del parametro, sarebbe anche  $x_0' = 0$  e come asintoto potrebbesi riguardare la retta all'infinito del piano

$$\left| \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \right| = 0$$

Per determinare l'equazione generale dei piani asintotici scriviamo la (III) sotto la forma seguente:

$$\left| \begin{array}{cccc} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 0 \\ x'' & y'' & z'' & 0 \end{array} \right| = 0$$

e notiamo che sussiste la relazione

$$x'' = \frac{x_0^2 x_1'' - 2 x_0 x_0' x_1' + (2 x_0'^2 - x_0 x_0'') x_1}{x_0^3},$$

con le due analoghe. Emerge da ciò che la equazione precedente può scriversi come segue:

$$\left| \begin{array}{cccc} X & Y & Z & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \\ x_0 x_1' - x_0' x_1 & x_0 x_2' - x_0' x_2 & x_0 x_3' - x_0' x_3 & 0 \\ x_0^2 x_1'' - 2 x_0 x_0' x_1' + (2 x_0'^2 - x_0 x_0'') x_1 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right| = 0,$$

ossia, dopo qualche facile trasformazione,

$$(III') \quad \left| \begin{array}{cccc} X & Y & Z & 1 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_0' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_0'' \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_0' \end{array} \right| = 0$$

Ora, se il punto di contatto si trova all'infinito, è  $x_0 = 0$ , onde

$$(XIII) \quad \left| \begin{array}{cccc} X & Y & Z & 1 \\ x_1' & x_2' & x_3' & 0 \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_0'' \\ x_1' & x_2' & x_3' & 0 \end{array} \right| = 0$$

è l'equazione del corrispondente piano asintotico; notisi che tale equazione è applicabile anche nel caso in cui il valore del parametro che rende  $x_0 = 0$ , annulli anche  $x_0'$ ; ma se è anche  $x_0'' = 0$  il corrispondente piano asintotico coincide col piano all'infinito.

#### § 4. Formole in coordinate omogenee.

Si ponga

$$X = \frac{X_1}{X_0}, \quad Y = \frac{X_2}{X_0}, \quad Z = \frac{X_3}{X_0};$$



$$D_3 f = f - \frac{3f'}{n} + \frac{3f''}{n(n-1)} - \frac{f'''}{n(n-1)(n-2)}$$

$$D_4 f = f - \frac{4f'}{n} + \frac{6f''}{n(n-1)} - \frac{4f'''}{n(n-1)(n-2)} + \frac{f'''}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

Si vedrà allora che le formole (II''), (III'''), (IV') si possono scrivere come segue:

$$(II''') \quad \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ D_1 x_0 & D_1 x_1 & D_1 x_2 & D_1 x_3 \\ x_0' & x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix} = 0$$

$$(III''') \quad \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ D_2 x_0 & D_2 x_1 & D_2 x_2 & D_2 x_3 \\ D_1 x_0' & D_1 x_1' & D_1 x_2' & D_1 x_3' \\ x_0'' & x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0$$

$$(X''') \quad \begin{vmatrix} D_3 x_0 & D_3 x_1 & D_3 x_2 & D_3 x_3 \\ D_2 x_0' & D_2 x_1' & D_2 x_2' & D_2 x_3' \\ D_1 x_0'' & D_1 x_1'' & D_1 x_2'' & D_1 x_3'' \\ x_0''' & x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} = 0,$$

le quali presentano il vantaggio di dipendere da funzioni di  $t$  tutte di uno stesso grado inferiore a  $n$ . Esse, ad es., mostrano subito che: *Una curva razionale d'ordine  $n$  è in generale di rango  $2(n-1)$  e classe  $3(n-2)$  e possiede  $4(n-3)$  piani stazionari.*

### § 5. Elica osculatrice.

In un punto qualunque di una curva gobba esiste un'elica ordinaria avente ivi la stessa flessione e la stessa torsione della data curva; riferendo questa al corrispondente triedro satellite, il suo asse può rappresentarsi mediante le formole

$$x = \frac{rt}{\sqrt{r^2 + \rho^2}}, \quad y = \frac{r\rho^2}{r^2 + \rho^2}, \quad z = -\frac{qt}{\sqrt{r^2 + \rho^2}}.$$

Questa retta è l'asse del movimento elicoidale infinitesimo capace di trasferire quel triedro nel triedro satellite relativo al punto consecutivo della curva data.

### § 6. Superficie mediana di una linea gobba.

È il luogo dei punti medi delle corde della data curva; essa, quindi, ammette la seguente rappresentazione perimetrica:

$$(XIV) \quad X = \frac{x(t) + x(u)}{2}, \quad Y = \frac{y(t) + y(u)}{2}, \quad Z = \frac{z(t) + z(u)}{2}.$$

### § 7. Larghezza di una curva.

Se  $\Gamma$  è una curva gobba esente da singolarità, ne sia  $A$  un punto arbitrario e  $P$  un altro punto qualunque: allora la minima distanza fra la tangente nel primo e quella nel secondo di questi punti, varia al muoversi di  $P$  e raggiunge un valore massimo quando  $P$  occupa una certa posizione  $B$ .

Tale massimo si dice *larghezza* della data curva nel punto  $P$ <sup>1)</sup>. Generalmente la larghezza muta al variare del punto  $A$  sulla curva  $\Gamma$ ; se essa è invece indipendente dalla posizione di  $A$ ,  $\Gamma$  si dirà *curva di larghezza costante*: allora gode di una proprietà che ne manifesta l'analogia con le curve piane di egual nome, cioè con le *curve orbiformi* di Eulero<sup>2)</sup>.

Per stabilire tale proprietà consideriamo la totalità delle curve gobbe  $\Gamma$  esenti da singolarità e dotate della proprietà che il piano normale in un punto arbitrario  $P$  seghi la curva in un unico punto  $Q$ , che diremo *opposto* a  $P$ ; se quel piano è normale anche in  $Q$  (nel qual caso la retta  $PQ$  è una normale doppia alla curva) allora la curva è di larghezza costante<sup>3)</sup>. Supponiamo infatti la curva  $\Gamma$  rappresentata dalle formole

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

1) M. Fujiwara, *On Space Curves of Constant Breadth* (The Tohoku mathem. Journal, Vol. V, 1914, p. 180-84).

2) Cfr. G. Loria, *Spec. alg. u. transs. ebene Kurven*, 2<sup>a</sup> Aufl., I Bd. (Leipzig, 1910), p. 376.

3) Si potrebbero invece definire per curve di lunghezza costante quelle godenti della proprietà di avere  $\infty'$  coppie di osculatori fra loro paralleli, a distanze tutte eguali; per quanto ci consta non vennero sino ad ora considerate.

ove  $s$  è l'arco e  $x(s), y(s), z(s)$  sono funzioni uniformi, continue insieme alle loro derivate prime. Il piano normale nel punto corrispondente al valore  $\sigma$  dell'arco ha per equazione

$$x'(\sigma)[X - x(\sigma)] + y'(\sigma)[Y - y(\sigma)] + z'(\sigma)[Z - z(\sigma)] = 0;$$

esso taglia la curva  $F$  in un punto  $Q$  di parametro  $\sigma'$  determinato dalla equazione

$$x'(\sigma)[x(\sigma') - x(\sigma)] + y'(\sigma)[y(\sigma') - y(\sigma)] + z'(\sigma)[z(\sigma') - z(\sigma)] = 0,$$

che ha, per ipotesi, un'unica radice  $\sigma$ . Ora se  $PQ$  è normale doppia sussisterà similmente l'equazione

$$x'(\sigma')[x(\sigma) - x(\sigma')] + y'(\sigma')[y(\sigma) - y(\sigma')] + z'(\sigma')[z(\sigma) - z(\sigma')] = 0.$$

Ma si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\overline{PQ}^2)}{d\sigma} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{[x(\sigma') - x(\sigma)]^2}{x'(\sigma')} + \frac{[y(\sigma') - y(\sigma)]^2}{y'(\sigma')} + \frac{[z(\sigma') - z(\sigma)]^2}{z'(\sigma')} \right\} \\ = \left\{ x'(\sigma')[x(\sigma') - x(\sigma)] + \dots \right\} \frac{d\sigma'}{d\sigma} + \left\{ x'(\sigma)[x(\sigma) - x(\sigma')] + \dots \right\},$$

cioè, per le relazioni supposte,  $= 0$ . Dunque la distanza fra un punto  $P$  della curva ed il suo opposto  $Q$  è costante. Ora, per essere  $PQ$  normale doppia alla curva, essa è perpendicolare alle tangenti in  $P$  e  $Q$  alla stessa, ed una semplice considerazione prova che essa corrisponde al massimo della distanza fra la tangente in  $P$  e quella in un punto variabile della curva; cioè  $PQ$  misura realmente quella che definimmo come larghezza della curva relativa al punto  $P$ . Perciò la proprietà enunciata resta dimostrata.

### § 8. Tetraedri di osculazione.

Siano  $M_1$  e  $M_2$  i due punti (arbitrari) della curva che corrispondono ai valori  $t_1$  e  $t_2$  del parametro;  $m_1$  e  $m_2$  siano le corrispondenti tangenti;  $\mu_1$  e  $\mu_2$  i corrispondenti osculatori. Se  $N_1$  e  $N_2$  sono i punti  $m_1\mu_2$  e  $m_2\mu_1$  il tetraedro avente per vertici i punti  $M_1, M_2, N_1, N_2$  si chiama *tetraedro di osculazione* rela-

tivo alla corda  $M_1 M_2$  <sup>1)</sup>. È evidentemente una figura correlativa a sè stessa, di cui indicheremo con  $V$  il volume.

Per determinare  $V$  in funzione di  $t_1$  e  $t_2$  calcoleremo anzitutto le coordinate de' punti  $N_1$  e  $N_2$ . A tale scopo notiamo che le coordinate di un punto qualunque della tangente  $m$ , sono della forma

$$x(t_1) + k_1 x'(t_1), \quad y(t_1) + k_1 y'(t_1), \quad z(t_1) + k_1 z'(t_1),$$

mentre il piano  $\mu_2$  è rappresentato dall'equazione

$$\begin{vmatrix} X - x(t_2) & Y - y(t_2) & Z - z(t_2) \\ x'(t_2) & y'(t_2) & z'(t_2) \\ x''(t_2) & y''(t_2) & z''(t_2) \end{vmatrix} = 0;$$

perciò nel punto  $N_1$  l'indeterminata  $k_1$  ha il valore seguente:

$$(*) \quad k_1 = - \begin{vmatrix} x(t_1) - x(t_2) & y(t_1) - y(t_2) & z(t_1) - z(t_2) & x'(t_1) & y'(t_1) & z'(t_1) \\ x'(t_1) & y'(t_1) & z'(t_1) & x'(t_2) & y'(t_2) & z'(t_2) \\ x''(t_1) & y''(t_1) & z''(t_1) & x''(t_2) & y''(t_2) & z''(t_2) \end{vmatrix}.$$

Similmente le coordinate di  $N_2$  hanno la forma

$$x(t_2) + k_2 x'(t_2), \quad y(t_2) + k_2 y'(t_2), \quad z(t_2) + k_2 z'(t_2)$$

ove  $k_2$  ha il seguente valore:

$$(*) \quad k_2 = - \begin{vmatrix} x(t_2) - x(t_1) & y(t_2) - y(t_1) & z(t_2) - z(t_1) & x'(t_2) & y'(t_2) & z'(t_2) \\ x'(t_2) & y'(t_2) & z'(t_2) & x'(t_1) & y'(t_1) & z'(t_1) \\ x''(t_2) & y''(t_2) & z''(t_2) & x''(t_1) & y''(t_1) & z''(t_1) \end{vmatrix};$$

e poichè evidentemente

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x(t_1) & y(t_1) & z(t_1) & 1 \\ x(t_1) + k_1 x'(t_1) & y(t_1) + k_1 y'(t_1) & z(t_1) + k_1 z'(t_1) & 1 \\ x(t_2) & y(t_2) & z(t_2) & 1 \\ x(t_2) + k_2 x'(t_2) & y(t_2) + k_2 y'(t_2) & z(t_2) + k_2 z'(t_2) & 1 \end{vmatrix},$$

dopo qualche facile trasformazione si trova

$$(XV) \quad V = - \frac{k_1 k_2}{6} \begin{vmatrix} x(t_1) - x(t_2) & y(t_1) - y(t_2) & z(t_1) - z(t_2) \\ x'(t_1) & y'(t_1) & z'(t_1) \\ x'(t_2) & y'(t_2) & z'(t_2) \end{vmatrix}$$

ove  $k_1$  e  $k_2$  hanno i valori dati dalle (\*).

<sup>1)</sup> Fu considerato per la prima volta e soltanto in un caso particolare da H. Schröter nella nota *Metrische Eigenschaften der cubischen Parabel (Raumcurve 3. O.)* (Math. Annalen, T. XXV, 1885).

Questa espressione si può porre sotto varie forme atte a mettere in evidenza le grandezze geometriche da cui dipende il volume del tetraedro di osculazione.

A tale scopo chiamiamo  $\varphi, \chi, \psi$  gli angoli formati con gli assi coordinati dalla retta  $r$  che unisce i punti dati e  $\varrho, \sigma, \tau$  gli angoli analoghi relativi alla retta  $n$  che incontra ortogonalmente le tangenti  $m_1$  e  $m_2$ .

Per semplificare i calcoli supporremo che, come parametro  $t$  che entra nella rappresentazione analitica della curva  $\Gamma$ , si scelga l'arco della stessa.

Si ha anzitutto

$$\cos \varphi = \frac{x(t_1) - x(t_2)}{M_1 M_2}, \quad \cos \chi = \frac{y(t_1) - y(t_2)}{M_1 M_2}, \quad \cos \psi = \frac{z(t_1) - z(t_2)}{M_1 M_2};$$

poi:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \varrho}{\begin{vmatrix} y'(t_1) z'(t_1) \\ y'(t_2) z'(t_2) \end{vmatrix}} &= \frac{\cos \sigma}{\begin{vmatrix} z'(t_1) x'(t_1) \\ z'(t_2) x'(t_2) \end{vmatrix}} = \frac{\cos \tau}{\begin{vmatrix} x'(t_1) y'(t_1) \\ x'(t_2) y'(t_2) \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} x'(t_1) y'(t_1) z'(t_1) \\ x'(t_2) y'(t_2) z'(t_2) \end{vmatrix}^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - [x'(t_1)x'(t_2) + y'(t_1)y'(t_2) + z'(t_1)z'(t_2)]^2}} = \frac{1}{\text{sen } \widehat{m_1 m_2}}, \end{aligned}$$

onde viceversa

$$\left| \frac{y'(t_1) z'(t_1)}{y'(t_2) z'(t_2)} \right| = \text{sen } \widehat{m_1 m_2} \cdot \cos \varrho, \quad \left| \frac{z'(t_1) x'(t_1)}{z'(t_2) x'(t_2)} \right| = \text{sen } \widehat{m_1 m_2} \cdot \cos \sigma,$$

$$\left| \frac{x'(t_1) y'(t_1)}{x'(t_2) y'(t_2)} \right| = \text{sen } \widehat{m_1 m_2} \cdot \cos \tau.$$

Ciò premesso, svolgendo il determinante (13) secondo gli elementi della sua prima orizzontale e applicando le formole ora scritte si trova successivamente

$$\begin{aligned} V &= -\frac{k_1 k_2}{6} \left\{ [x(t_1) - x(t_2)] \begin{vmatrix} y'(t_1) z'(t_1) \\ y'(t_2) z'(t_2) \end{vmatrix} + \dots \right\} \\ &= -\frac{k_1 k_2}{6} \overline{M_1 M_2} \text{sen } \widehat{m_1 m_2} (\cos \varphi \cos \varrho + \cos \chi \cos \sigma + \cos \psi \cos \tau) \\ &= -\frac{k_1 k_2}{6} \overline{M_1 M_2} \text{sen } \widehat{m_1 m_2} \cdot \cos \widehat{rn}. \end{aligned}$$

Per esprimere analogamente  $k_1$  e  $k_2$  chiamiamo  $b_1$  e  $b_2$  le binormali di  $\Gamma$  in  $M_1$  e  $M_2$ , e  $n_1$  e  $n_2$  le normali principali negli stessi punti. Tenendo presenti le (VI) in cui si sia fatto  $s' = 0, s'' = 0$ , si trova che il numeratore di  $k_1$  può scriversi successivamente come segue:

$$\begin{aligned} & [x(t_1) - x(t_2)] \begin{vmatrix} y'(t_2) z'(t_2) \\ y'(t_2) z'(t_2) \end{vmatrix} + \dots = \\ &= \frac{\overline{M_1 M_2}}{r_2} \left\{ \cos \varphi \cdot \cos \widehat{b_2 x} + \cos \chi \cdot \cos \widehat{b_2 y} + \cos \psi \cdot \cos \widehat{b_2 z} \right\} \\ &= \frac{\overline{M_1 M_2}}{r_2} \cos \widehat{rb_2}; \end{aligned}$$

similmente il denominatore può esprimersi nella forma seguente:

$$\begin{aligned} & x''(t_1) \begin{vmatrix} y'(t_1) z'(t_1) \\ y'(t_2) z'(t_2) \end{vmatrix} + \dots = \\ &= \frac{\text{sen } \widehat{m_1 m_2}}{r_2} \left\{ \cos \varrho \cdot \cos \widehat{n_2 x} + \cos \sigma \cdot \cos \widehat{n_2 y} + \cos \tau \cdot \cos \widehat{n_2 z} \right\} \\ &= \frac{\text{sen } \widehat{m_1 m_2}}{r_2} \cos \widehat{nn_2}. \end{aligned}$$

Tutto ciò porta a concludere che

$$k_1 = -\frac{\overline{M_1 M_2} \cos \widehat{rb_2}}{\text{sen } \widehat{m_1 m_2} \cos \widehat{nn_2}}.$$

Similmente:

$$k_2 = -\frac{\overline{M_1 M_2} \cos \widehat{rb_1}}{\text{sen } \widehat{m_1 m_2} \cos \widehat{nn_1}}.$$

Dunque:

$$(XV') \quad V = -\frac{1}{6} \overline{M_1 M_2}^3 \frac{\cos \widehat{rn} \cdot \cos \widehat{rb_1} \cdot \cos \widehat{rb_2}}{\text{sen } \widehat{m_1 m_2} \cdot \cos \widehat{nn_1} \cdot \cos \widehat{nn_2}}.$$

Ad una terza espressione del medesimo volume si perviene osservando che la distanza del punto  $M_1$  dal piano  $\mu_2$  è misurata dal quoziente di

$$\begin{vmatrix} x(t_1) - x(t_2) & y(t_1) - y(t_2) & z(t_1) - z(t_2) \\ x'(t_2) & y'(t_2) & z'(t_2) \\ x''(t_2) & y''(t_2) & z''(t_2) \end{vmatrix}$$

per

$$\sqrt{\left\| \begin{matrix} x'(t_2) & y'(t_2) & z'(t_2) \\ x''(t_2) & y''(t_2) & z''(t_2) \end{matrix} \right\|^2} = \sqrt{x''(t_2)^2 + y''(t_2)^2 + z''(t_2)^2} = \frac{1}{r_2},$$

onde inversamente

$$\left| \begin{matrix} x(t_1) - x(t_2) & y(t_1) - y(t_2) & z(t_1) - z(t_2) \\ x'(t_2) & y'(t_2) & z'(t_2) \\ x''(t_2) & y''(t_2) & z''(t_2) \end{matrix} \right| = \frac{\overline{M_1 \mu_2}}{r_2}.$$

Ciò prova essere:

$$k_1 = - \frac{\overline{M_1 \mu_2}}{\widehat{\text{sen } m_1 m_2} \cdot \widehat{\text{cos } n n_2}}.$$

Similmente:

$$k_2 = - \frac{\overline{M_2 \mu_1}}{\widehat{\text{sen } m_1 m_2} \cdot \widehat{\text{cos } n n_1}}.$$

Per conseguenza si conclude questa nuova espressione del volume del tetraedro di osculazione relativo alla corda  $\overline{M_1 M_2}$ :

$$(XV'') \quad V = - \frac{\overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M_1 \mu_2} \cdot \overline{M_2 \mu_1} \cdot \widehat{\text{cos } r n}}{\widehat{\text{sen } m_1 m_2} \cdot \widehat{\text{cos } n n_1} \cdot \widehat{\text{cos } n n_2}}.$$

## B) CURVE CONSIDERATE SOPRA UNA SUPERFICIE.

### § 1. Caso di enti algebrici.

Quando una curva algebrica appartiene ad una superficie pure algebrica della quale sia nota la rappresentazione univoca su di un piano, alcune sue proprietà si potranno ottenere agevolmente, servendosi appunto della risultante corrispondenza. I casi che noi incontreremo sono quelli in cui la superficie sia di secondo o terzo ordine.

Se si tratta di una quadrica  $\Sigma_2$ , proiettandola da un suo punto arbitrario si giunge ad una corrispondenza tale che alle  $\infty^3$  sezioni piane della superficie corrispondono le coniche passanti per due punti fissi e alle sue generatrici le rette passanti per questi punti. Se, come punti fondamentali si assumono i

punti all'infinito degli assi coordinati e se la curva obbiettiva segna in  $m$  punti le generatrici di un sistema ed in  $n$  quelle dell'altro, la sua immagine sarà un'equazione della forma  $f(x, y) = 0$  di grado  $m$  nell'una delle variabili e di grado  $n$  nell'altra; la data curva sarà quindi dell'ordine  $m + n$  e del genere  $(m-1)(n-1) - d - k$ , supposto che l'immagine abbia  $d$  punti doppi e  $k$  cuspidi.

Se invece la data è una superficie di terzo ordine  $\Sigma_3$ , è noto che la sua rappresentazione univoca d'ordine minimo fa corrispondere alle sezioni piane della superficie le  $\infty^3$  cubiche piane passanti per sei punti fissi 1, 2, ..., 6. Le rette della superficie corrispondono:

1° ai sei punti fissi (tali rette verranno designate sempre con le lettere  $a_1, a_2, \dots, a_6$ );

2° alle quindici rette che li congiungono due a due (sono le rette  $c_{ik} = c_{ki}$  per  $i, k = 1, 2, \dots, 6$ );

3° alle sei coniche ognuna delle quali passa per cinque dei punti 1, 2, ..., 6 (si indicherà con  $b_i$  quella retta che corrisponde alla conica passante per i punti fondamentali, escluso l' $i$ mo).

### § 2. Continuazione: intersezioni complete o non.

Se una curva gobba è l'intersezione di due superficie degli ordini  $m, n$  essa è dell'ordine  $mn$ , del rango  $mn(m+n-2)$ , della classe  $3mn(m+n-3)$  e del genere  $\frac{1}{2} mn(m+n-4)+1$ ; di più ha  $\frac{1}{2} mn(m-1)(n-1)$  punti doppi apparenti.

Se detta curva si decompone in due degli ordini  $n_1, n_2$ , dei generi  $p_1, p_2$  con  $i$  punti comuni, sussisteranno le relazioni

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= mn \\ p_1 &= \frac{1}{2} [n_1(m+n-4) - i] + 1 \\ p_2 &= \frac{1}{2} [n_2(m+n-4) - i] + 1. \end{aligned}$$

## § 3. Formole di geometria differenziale.

Se la superficie è rappresentata dalle formole

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

stabilendo una relazione fra le variabili  $u, v$  oppure esprimendole mediante una terza variabile si ottiene una linea situata sulla superficie. In tutte le formole relative alla geometria su quelle superficie entrano le quantità  $E, F, G$ , fondamentali di I ordine, e le  $L, M, N$ , fondamentali di II; sono definite come segue:

$$(XVI) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \end{aligned} \right.$$

$$(XVII) \quad L = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad M = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

$$N = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

$$\text{ove (XVIII) } D = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2}.$$

L'angolo  $\theta$  sotto cui si tagliano le linee coordinate è determinato dalla formola

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}};$$

supposto dato  $\theta$ , l'equazione

$$EG \cos^2 \theta - F^2 = 0$$

rappresenta una *linea isoclina della superficie*; in particolare, per  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , l'equazione  $F = 0$  appartiene alla *linea ortoclina* della superficie stessa.

I coseni direttori della normale alla superficie data sono dati

$$(XIX) \quad X, Y, Z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

mentre la curvatura integra  $K$  e la curvatura media in un punto qualunque sono date rispettivamente da

$$(XX) \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{R_1 R_2}$$

$$(XXI) \quad H = \frac{EN - 2FL + GL}{EG - F^2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

$R_1$  e  $R_2$  essendo i due raggi principali di curvatura della superficie nel punto considerato.

Di una linea appartenente alla superficie, oltre all'ordinaria flessione e torsione, si sogliono considerare la curvatura *normale* e la curvatura *geodetica*; la prima è espressa dalla formola

$$(XXII) \quad Lu'^2 + Mu'v' + Nv'^2$$

supposto che la curva considerata sia individuata dando le espressioni delle coordinate curvilinee  $u, v$  in funzione dell'arco  $s$ ; mentre, se la curva è individuata dall'equazione

$q(u, v) = 0$  la sua curvatura geodetica si calcola mediante la seguente formola di O. Bonnet:

$$(XXIII) \frac{1}{D} \sqrt{\frac{\partial}{\partial u}} \left( \frac{F \frac{\partial q}{\partial v} - G \frac{\partial q}{\partial u}}{\sqrt{E \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 - 2F \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial q}{\partial u} + G \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{F \frac{\partial q}{\partial u} - E \frac{\partial q}{\partial v}}{\sqrt{E \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 - 2F \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial q}{\partial u} + G \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2}} \right) ;$$

eguagliando a 0 quest'espressione si ottiene l'equazione di una nuova curva che può dirsi Hessiana della data.

#### § 4. Linee notevoli di una superficie.

1. *Linee di curvatura*: sono le linee integrali dell'equazione differenziale

$$(XXIV) \begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ dx^2 & dx \cdot du & du^2 \end{vmatrix} = 0;$$

se in particolare la superficie è rappresentata dall'equazione  $z = z(x, y)$  e si indicano con  $p, q$  le derivate prime e con  $r, s, t$  le derivate seconde di  $z$ , le sue linee di curvatura si otterranno integrando l'equazione:

$$(XXIV') \begin{vmatrix} 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ r & s & t \\ dq^2 & -dy \cdot dx & dx^2 \end{vmatrix} = 0$$

che si può scrivere:

$$(XXIV'') \frac{dx+p \cdot dz}{dp} = \frac{dy+q \cdot dz}{dq}.$$

2. *Linee asintotiche*: sono determinate dall'equazione differenziale:

$$(XXV) L du^2 + 2M du \cdot dv + N dv^2 = 0.$$

Si può considerare il luogo dei punti in ognuno dei quali le asintotiche si tagliano sotto un dato angolo; se questo è retto l'equazione del luogo è

$$EN - 2FM + GL = 0;$$

e se la superficie è algebrica d'ordine  $n$  nasce tagliandolo con altra superficie dell'ordine  $3n-4$ .

3. *Linee geodetiche*: si ottengono integrando l'equazione differenziale:

$$(XXVI) \begin{vmatrix} Eu' + Fv', & \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} u'^2 + \frac{\partial E}{\partial v} u'v' + \\ + \left( \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u} \right) v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv', & \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial v} v'^2 + \frac{\partial G}{\partial u} u'v' + \\ + \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \right) u'^2 + Gv'' + Fu'' \end{vmatrix} = 0,$$

gli accenti indicando derivazioni rispetto al parametro in funzione del quale sono espresse le coordinate dei punti della geodetica. Siccome in ogni punto di una geodetica il piano osculatore contiene la normale alla superficie, così sussiste la relazione

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

$X, Y, Z$  essendo i coseni direttori della normale e gli accenti indicano derivate rispetto al perimetro in funzione del quale sono espresse le coordinate dei punti della geodetica.

4. *Linee di Delaunay*. Analoghe alle geodetiche sono le linee caratterizzate dalla proprietà di racchiudere un'area massima fra quelle di data lunghezza <sup>1)</sup>; se la superficie considerata ha per

<sup>1)</sup> C. Delaunay, *Note sur la ligne de longueur donnée qui renferme une aire maximum sur une surface* (Jour. de Math., T. VIII, 1843, p. 241-45). Considerazioni geometriche conducenti allo stesso risultato si leggono nei primi paragrafi della *Note sur quelques courbes à double courbure* dell'Aelt (Nouv. Ann. de Math., T. XIX, 1860, p. 100-7).



equazione  $z = z(x, y)$  e se  $y = y(x)$  rappresenta una di quelle curve, il calcolo delle variazioni conduce alla seguente equazione differenziale:

$$(XXVII) \quad y''(1+p^2+q^2) + (r+2sy'+ty'^2)(q-pq') = \\ = \frac{1}{m} \sqrt{1+p^2+q^2} \sqrt{(1+p^2)+2pqy'+(1+q^2)y'^2}$$

$m$  essendo una costante. Le dette curve sono caratterizzate dalla proprietà seguente

$$R = m \cos \theta,$$

ove  $R$  è il raggio di flessione in un loro punto e  $\theta$  l'angolo del corrispondente piano osculatore della curva col corrispondente piano tangente della superficie <sup>1)</sup>.

5. Senza integrazioni si possono determinare su una superficie, che non sia di curvatura costante, il luogo dei punti per cui è costante la curvatura integra <sup>2)</sup>; esse infatti hanno per equazione generale

$$(XXVIII) \quad LN - M^2 = r(EG - F^2)$$

Similmente si possono considerare le linee lungo le quali è costante la curvatura media.

6. *Linee D o curve di Darboux* <sup>3)</sup>: ognuna è il luogo geometrico dei punti di una superficie  $f(x, y, z) = 0$  tali che in ciascuno la sfera osculatrice della curva risulti tangente alla superficie.

1) A titolo di verifica si osservi che se la superficie data è sviluppabile e si chiama  $[R]$  il raggio di curvatura della trasformata per sviluppo della curva data, per un noto teorema di Catalan si avrà  $R = [R] \cos \theta$ , relazione combinata con quella del testo di  $[R] = m$ : la trasformata è dunque di curvatura costante, cioè una circonferenza, come realmente doveva accadere.

2) Per il caso in cui la superficie data sia di second'ordine, v. Bianchi, *Lezioni di geom. diff.* (Pisa, 1894), p. 488.

3) Darboux, *Des courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface* (C. R., T. LXXIII, 1871, p. 732-36).

Per caratterizzarle analiticamente si osservi che l'equazione di una sfera tangente a quella superficie nel punto  $(x, y, z)$  ha un'equazione della forma

$$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 + 2\lambda \left\{ (X-x) \frac{\partial f}{\partial x} + \right. \\ \left. + (Y-y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z) \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = 0$$

$X, Y, Z$  essendo coordinate correnti. Sostituendo

$$X = x + dx + \frac{1}{2} dx^2 + \frac{1}{6} dx^3 + \dots$$

e le espressioni analoghe di  $Y, Z$  e scrivendo che nell'equazione risultante scompaiono i termini infinitesimi di 1°, 2° e 3° ordine, oltre l'identità

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

si trovano le condizioni:

$$ds^2 + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y + \frac{\partial f}{\partial z} d^2z \right) = 0$$

$$3 ds \cdot ds^2 + \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x} d^3x + \frac{\partial f}{\partial y} d^3y + \frac{\partial f}{\partial z} d^3z \right) = 0,$$

donde, eliminando  $\lambda$ , si ottiene:

$$\frac{3 d^2z}{ds^2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} d^3x + \frac{\partial f}{\partial y} d^3y + \frac{\partial f}{\partial z} d^3z}{\frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2y + \frac{\partial f}{\partial z} d^2z}$$

Ma, differenziando le (\*), si ottengono queste altre identità:

$$\left( d \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \dots \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \dots \right) = 0$$

$$\left( d^2 \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \dots \right) + 2 \left( d \frac{\partial f}{\partial x} d^2x + \dots \right) + \frac{\partial f}{\partial x} d^3x + \dots = 0;$$

La precedente diviene quindi

$$(XXIX) \quad \frac{3 d^2 s}{ds^2} = \frac{2 \left( d \frac{\partial f}{\partial x} \cdot d^2 x + d \frac{\partial f}{\partial y} \cdot d^2 y + d \frac{\partial f}{\partial z} \cdot d^2 z \right) + \left( d^2 \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + d^2 \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + d^2 \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz \right)}{d \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + d \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + d \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz}$$

e questa è l'equazione differenziale della curva di Darboux <sup>1)</sup>.

7. *Linee caratteristiche* di una superficie a curvatura positiva. Per definirle e trovarne l'equazione differenziale, ricordiamo che l'angolo  $\alpha$  delle tangenti alla data superficie che sono caratterizzate dai coefficienti  $k, z$  è determinato da una delle formole:

$$\cos \alpha = \frac{E + F(k+z) + Gkz}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2} \sqrt{E + 2Fz + Gz^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{D(k-z)}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2} \sqrt{E + 2Fz + Gz^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D(k-z)}{E + F(k+z) + Gkz} :$$

perciò, se le tangenti considerate sono fra loro coniugate, cioè se sussiste la relazione

$$L + M(k+z) + Nkz = 0$$

si ha

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D(L + 2Mk + Nk^2)}{\begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ k^2 & -k & 1 \end{vmatrix}}$$

Ora, quando la superficie considerata è a punti iperbolici  $\alpha$  ammette un minimo nullo. In caso diverso <sup>2)</sup> i valori massimo

<sup>1)</sup> Altre formole relative si trovano nella nota di A. Enneper intitolata *Bemerkungen über die Differentialgleichungen einer Art von Curven auf Flächen* (Gotting. Nachrichten, 1871, p. 577-83).

<sup>2)</sup> Cfr. Hoppe, *Ueber das Minimum des Winkels zwischen zwei conjugierten Tangenten auf positiv gekrümmte Fläche* (Arch. f. Math. u. Phys., T. LXXIX, 1882, p. 19-30).

e minimo di  $\operatorname{tg} \alpha$  corrispondono alle radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} N & FN - GM & k^2 \\ -2M & GL - EN & 2k \\ K & EM - FL & 1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

esse sono sempre reali perchè si possono considerare come ottenute cercando gli elementi comuni a due involuzioni una ellittica e l'altra iperbolica.

L'equazione precedente, con una nota considerazione, porta a studiare il doppio sistema di linee definite dalla seguente equazione differenziale

$$(XXX) \quad \begin{vmatrix} N & FN - GM & dv^2 \\ -2M & GL - EN & 2dv \cdot du \\ K & EM - FL & du^2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

sono appunto le linee caratteristiche <sup>1)</sup>. La precedente equazione può ridursi alle quadrature se la data superficie è di rotazione, oppure se è una quadrica (rappresentata mediante coordinate ellittiche).

Similmente fu considerato e studiato <sup>2)</sup> il doppio sistema di linee di una superficie caratterizzato dalla seguente proprietà: le tangenti alle due linee del sistema che passano per un punto arbitrario della superficie sono le polari rispetto alla corrispondente conica indicatrice dei punti ciclici del piano che tocca in  $P$  la superficie stessa. Sono linee immaginarie che si ottengono integrando le due seguenti equazioni differenziali:

$$[L(-F \pm iD) + EM] du + [M(F \pm iD) + EN] dv = 0$$

8. Queste considerazioni guidarono <sup>3)</sup> a considerare le curve tali che

$$E : L = G : N$$

<sup>1)</sup> Denominazione proposta da E. Pucci (*Dell'angolo caratteristico e delle linee caratteristiche*, Rend. Acc. Lincei, 4<sup>a</sup> Ser., T. V, I Sem. 1889, p. 501-7) e adottata subito da V. Reina (*Di alcune proprietà delle linee caratteristiche*, ivi, p. 881-85).

<sup>2)</sup> R. Neuendorff, *Ueber Kreispunktpolare* (Diss. Kiel. 1918).

<sup>3)</sup> L. P. Einsenhardt, *Three particular System of Lines of a Surface* (Trans. Amer. Math. Soc., T. V, 1904, p. 421-37); cfr. R. Occhipinti, *Sulla torsione di alcune linee di una superficie* (Period. di Matem., T. XXIX, 1913, p. 1-15).

nelle ipotesi che le coordinate siano scelte in modo che sia  $F=0$ , oppure  $M=0$  o finalmente  $HM - KN = 0'$  e poi <sup>1)</sup> quelle caratterizzate dall'essere in ogni punto la torsione geodetica della curva eguale alla curvatura media della superficie, ecc.

9. Nelle regioni di curvatura totale positiva fu anche considerato <sup>2)</sup> il doppio sistema di linee soddisfacente l'equazione differenziale seguente :

$$(XXXI) \quad \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \sqrt{\frac{LN - M^2}{EG - F^2}}$$

10. *Linee L o curve di de la Gournerie.* Ognuna è il luogo dei punti di una superficie  $z = f(x, y)$  tali che in ciascuno di questi la curva è tangente ad una sezione normale iperosculata ivi da un cerchio. Attribuendo alle lettere  $p, q, r, s, t$ , i consueti significati ed inoltre indicando con  $u, U, V, v$  le derivate terze di  $z$  rispetto a  $x, y$ , le dette curve sono le linee integrali della seguente equazione differenziale:

$$(XXXII) \quad (p^2 + q^2 + 1) [r y'^3 + 3 V y'^2 + 3 U y' + u] - 3 [(ps + qt)y' + (pr + qs)] [ty'^2 + 2 sy' + r] = 0 \quad ^3)$$

<sup>1)</sup> R. Occhipinti, *Su alcune linee di una superficie* (Atti dell'Acc. Gioenia, Ser. V, T. VII, 1914).

<sup>2)</sup> R. Occhipinti, *Sur un double système de lignes d'une surface* (Enseign. mathem.), T. XVI, 1914, p. 38-44.

<sup>3)</sup> J. de la Gournerie, *Étude sur la courbure des surfaces* (Journ. de Math., T. XX, 1855, p. 145-56).

## CAPITOLO II.

### LEGGI DI DERIVAZIONE DI UNA CURVA DA UNA O PIÙ ALTRE.

Il concetto di trasformazione, che occupa una posizione centrale in tutta la matematica moderna, applicato ad una curva permette di ottenerne infinite altre; onde riteniamo opportuno segnalare le leggi di derivazione che vennero sino ad oggi proposte, sia quelle che operano su tutto lo spazio ambiente, sia quelle che hanno significato soltanto partendo da una determinata curva. Ci limiteremo a brevissimi cenni quando si tratti di metodi di trasformazione noti, mentre aggiungeremo qualche particolare per quelli meno comuni.

#### 1. *Indicatrici sferiche delle tangenti, delle normali principali e delle binormali.*

Si ottengono conducendo nella sfera di centro  $O$  e raggio 1, i raggi paralleli risp. alle tangenti, alle normali principali ed alle binormali di una data curva; perciò esse hanno le seguenti rappresentazioni parametriche:

$$\begin{array}{lll} x = \alpha & y = \beta & z = \gamma \\ x = \xi & y = \eta & z = \zeta \\ x = \lambda & y = \mu & z = \nu, \end{array}$$

ove le lettere hanno, qui ed in seguito, i significati fissati nel Cap. I.

## 2. Curve radiali.

Il concetto di radiale di una curva piana <sup>1)</sup> si può estendere allo spazio in vari modi; quelli che sembrano dotati di maggiore importanza risultano dalle seguenti costruzioni:

a) Da un punto fisso si conducono segmenti equipollenti ai raggi di flessione di una data curva  $I'$  e si considera il luogo geometrico  $\Gamma_r$  dei loro estremi <sup>2)</sup>; dette  $a, b, c$  le coordinate del punto fisso, la radiale ha la seguente rappresentazione analitica:

$$x = a + r\xi, \quad y = b + r\eta, \quad z = c + r\zeta.$$

b) Da un punto fisso si conducono i segmenti equipollenti ai raggi delle sfere osculatrici di una data curva  $I'$  e si considera il luogo geometrico  $\Gamma_s$  dei loro estremi le sue equazioni sono:

$$x = a + r\xi - r'\rho\xi, \quad y = b + r\eta - r'\rho\eta, \quad z = c + r\zeta - r'\rho\zeta;$$

queste formole sono applicabili nell'ipotesi in cui la curva data sia determinata dando le espressioni delle coordinate de' suoi punti in funzione dell'arco.

Da queste definizioni delle radiali nascono due specie differenti di *antiradiali* <sup>3)</sup>.

## 3. Luoghi dei centri dei circoli osculatori e delle sfere osculatrici.

Supposto sempre che le coordinate dei punti della curva siano espresse in funzione dell'arco di essa, le coordinate dei

<sup>1)</sup> Cfr. Loria, *Spezielle alg. und transz. ebene Kurven*, II Aufl. II Bd. (Leipzig, 1913), p. 287.

<sup>2)</sup> Cfr. C. Burali-Forti, *Sulle radiali* (Rend. Circ. mat. di Palermo, T. XVI, 1902, p. 190-91); F. Sibirani, *Sulle radiali delle curve gobbe* (Rend. dell'Ist. Lomb. 1918, p. 118-33).

<sup>3)</sup> Riguardo alla determinazione analitica di tali curve v. la nota di C. Rossi, *Intorno ad alcune antiradiali delle curve* (Giorn. di Matem. T. XLVII, 1909, p. 201-11).

punti dei luoghi in discorso sono espresse, per il primo come segue:

$$x_1 = x + r\xi, \quad y_1 = y + r\eta, \quad z_1 = z + r\zeta$$

e per il secondo

$$x_2 = x + r\xi - \lambda \rho r', \quad y_2 = y + r\eta - \mu \rho r', \quad z_2 = z + r\zeta - \nu \rho r'.$$

Aggiungiamo che, estendendo allo spazio una considerazione immaginata da Th. Olivier <sup>1)</sup> si è portati a considerare le curve aventi la seguente rappresentazione parametrica

$$x_0 = x + \mu s \alpha, \quad y_0 = y + \mu s \beta, \quad z_0 = z + \mu s \gamma$$

$\mu$  essendo un coefficiente arbitrario; ma esse non furono ancora studiate di proposito.

## 4. Evolventi filari ed Evolventi planari.

Le *evolventi filari* di una curva gobba sono le traiettorie ortogonali delle sue tangenti: la loro equazione generale è:

$$x_f = x + \alpha(k - s), \quad y_f = y + \beta(k - s), \quad z_f = z + \gamma(k - s)$$

ove  $k$  è una costante arbitraria; esse quindi sono  $\infty^1$ .

Invece le *evolventi planari* sono le traiettorie ortogonali dei suoi osculatori ed hanno la seguente rappresentazione analitica:

$$\begin{aligned} x_p &= x + (\xi \sin t - \alpha \cos t) \int r \cos t \, dt - (\alpha \sin t + \xi \cos t) \int r \sin t \, dt \\ y_p &= y + (\eta \sin t - \beta \cos t) \int r \cos t \, dt - (\beta \sin t + \eta \cos t) \int r \sin t \, dt \\ z_p &= z + (\zeta \sin t - \gamma \cos t) \int r \cos t \, dt - (\gamma \sin t + \zeta \cos t) \int r \sin t \, dt \end{aligned}$$

ove

$$t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{r};$$

le evolventi planari sono dunque più numerose delle filari, essendo  $\infty^2$ .

<sup>1)</sup> Cfr. Loria, *Op. cit.*, p. 271.

Viceversa esistono  $\infty^1$  curve di cui una data curva è evolvente planare; sono le *evolutes planari* ed hanno per equazioni generali <sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned}\bar{x}_p &= x + r\xi + r\lambda \operatorname{tg} \left( \int_0^s \frac{ds}{\rho} + l \right) \\ \bar{y}_p &= y + r\eta + r\mu \operatorname{tg} \left( \int_0^s \frac{ds}{\rho} + l \right) \\ \bar{z}_p &= z + r\zeta + r\nu \operatorname{tg} \left( \int_0^s \frac{ds}{\rho} + l \right),\end{aligned}$$

ove  $l$  è una costante arbitraria.

Giova osservare qui che il concetto di curva polare di una data curva  $\Gamma$  (involuppo dei piani normali di questa) venne generalizzato nel seguente modo <sup>2)</sup>: Sopra la tangente  $t$  a  $\Gamma$  in un suo punto  $P$  si porti il segmento  $PP_1 = f(s)$ ,  $f$  essendo una frazione data ad arbitrio e  $s$  l'arco di  $\Gamma$ ; condotto il piano  $\pi_1$  perpendicolare in  $P_1$  alla retta  $t$ , l'involuppo di  $\pi_1$  è la nuova curva.

### 5. Il metodo del mutamento delle coordinate <sup>3)</sup>.

Il procedimento, consistente nel mutare il significato delle variabili, nell'equazione di una curva, che si mostrò così fecondo nella teoria delle curve piane, può evidentemente servire anche nello spazio.

Ne segnaliamo una semplice applicazione: se dalle equazioni intrinseche

$$r = f(s), \quad \rho = \varphi(s)$$

di una curva  $\Gamma$ , si deducono queste altre

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x)$$

<sup>1)</sup> G. Scheffers, *Einführung in die Theorie der Kurven*, II Aufl. (Leipzig, 1910) p. 409.

<sup>2)</sup> O. Hoel, *Ueber Verallgemeinerungen der Planevoluten und Filarevolventen* (Arch. für Math. og Naturvid., T. XXXVIII, 1922) ove sono definite e studiate altre curve derivate da una data.

<sup>3)</sup> Cfr. *Spez. Kurven*, II Bd., p. 223.

si ottiene una nuova curva  $\Delta$ , che fu detta, per ragioni di evidente analogia, *curva di Mannheim* della data <sup>1)</sup>.

### 6. Podarie o Pedali.

Un punto arbitrario  $A$  dello spazio si può proiettare ortogonalmente tanto sopra gli spigoli, quanto sopra le facce del triedro satellite relativo ad un punto qualunque  $P$  della data curva  $\Gamma$ ; si ottengono così sei punti che sono vertici di un parallelepipedo rettangolo di cui  $A$  e  $P$  sono vertici opposti. Variando il punto  $P$  quelle sei proiezioni descrivono altrettante curve che diremo *podarie* di  $A$  rispetto a  $\Gamma$  <sup>2)</sup>.

Per trovare la rappresentazione analitica delle podarie consideriamo la tangente in un punto arbitrario di  $\Gamma$ :

$$\frac{X-c}{a} = \frac{Y-y}{\beta} = \frac{Z-z}{\gamma};$$

il piano condotto dal punto  $A$  ( $a, b, c$ ) perpendicolarmente a questa tangente ha per equazione

$$(X-a)\alpha + (Y-b)\beta + (Z-c)\gamma = 0;$$

ora le coordinate di un punto di quella tangente sono della forma

$$X = x + \rho\alpha, \quad Y = y + \rho\beta, \quad Z = z + \rho\gamma$$

ed affinché quel punto appartenga all'anzidetto piano,  $\rho$  deve avere il valore

$$\rho = -[(x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma];$$

<sup>1)</sup> P. Ernst, *Die Mannheimsche Kurve von Raumkurven* (Monatshefte f. Math. u. Phys. T. XXV, 1914, p. 337-40). Molte altre applicazioni del medesimo concetto generale si trovano nella memoria di O. Hoel, *Ueber einige halbnatürliche Koordinaten* (Norsk matem. Forenings Skrifter, Ser. I, Nr. 11, 1923).

<sup>2)</sup> Delle podarie relative a tangenti ed osculatori tratta l'articolo di E. Raimondi, *Sulle podarie delle curve sghembe* (Giorn. di Matem., T. LVII, 1919, p. 103-28).

la rappresentazione analitica della podaria rispetto alle tangenti della data curva è quindi

$$\begin{aligned} X &= x - \alpha [(x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma] \\ Y &= y - \beta [(x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma] \\ Z &= z - \gamma [(x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma]. \end{aligned}$$

Per risolvere l'analogo problema relativo ai piani normali bisogna combinare similmente fra loro le equazioni

$$\begin{aligned} (X-x)\alpha + (Y-y)\beta + (Z-z)\gamma &= 0 \\ \frac{X-a}{\alpha} &= \frac{Y-b}{\beta} = \frac{Z-c}{\gamma}; \end{aligned}$$

si conclude in tal modo che la podaria del punto  $A$  rispetto ai piani normali della data curva ammette la seguente rappresentazione analitica

$$\begin{aligned} X &= a - \alpha [(a-x)\alpha + (b-y)\beta + (c-z)\gamma] \\ Y &= b - \beta [(a-x)\alpha + (b-y)\beta + (c-z)\gamma] \\ Z &= c - \gamma [(a-x)\alpha + (b-y)\beta + (c-z)\gamma]. \end{aligned}$$

Le equazioni delle altre quattro podarie del punto  $A$  si ottengono dalle (14), (15) mutando semplicemente  $\alpha, \beta, \gamma$  in  $\xi, \eta, \zeta$ , oppure in  $\lambda, \mu, \nu$ <sup>1)</sup>.

La considerazione delle podarie dà luogo a problemi del seguente tipo: « Determinare il punto  $A$  in modo che una assegnata delle sue podarie si particolarizzi in un determinato modo ». Secondo che questa specializzazione si traduce in una, due o tre equazioni si ha una superficie od una curva luogo del punto  $A$ , oppure un gruppo di posizioni per tale punto.

Il suindicato non è l'unico modo di estendere allo spazio il concetto di podaria di una curva piana: infatti è agevole concepirne due altri.

<sup>1)</sup> Invece di considerare i piedi delle perpendicolari abbassate dal punto fisso  $A$  sopra le facce e gli spigoli del triedro satellite relativo ad un punto qualunque  $P$  della data curva, si possono considerare i simmetrici di  $A$  rispetto ai detti elementi; si otterranno così sei nuove curve le quali godono di proprietà analoghe alle podarie dal momento che a queste corrispondono in una omotetica di centro  $A$  e rapporto 2.

Si consideri ancora un punto fisso  $A$  ( $a, b, c$ ) e lo si proietti ortogonalmente sulle corde della data curva; si otterranno così  $\infty^2$  punti costituenti una *superficie podaria*. Per trovarne la rappresentazione analitica basta evidentemente combinare fra loro le equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{X - \frac{1}{2}[x(t)+x(u)]}{x(u)-x(t)} &= \frac{Y - \frac{1}{2}[y(t)+y(u)]}{y(u)-y(t)} = \frac{Z - \frac{1}{2}[z(t)+z(u)]}{z(u)-z(t)} \\ (X-a)[x(u)-x(t)] + (Y-b)[y(u)-y(t)] + (Z-c)[z(u)-z(t)] &= 0; \end{aligned}$$

si ottengono così espressioni di  $X, Y, Z$  in funzione dei due parametri  $t, u$  che sono dello stesso tipo delle precedenti e che ci dispensiamo dallo scrivere.

Se invece si suppone data una retta fissa  $r$

$$\frac{X-a}{l} = \frac{Y-b}{m} = \frac{Z-c}{n}$$

e la si proietta ortogonalmente sui piani normali della data curva, si ottengono  $\infty^1$  rette costituenti la *rigata podaria di r rispetto ai piani normali di  $\Gamma$* . La sua equazione si ottiene eliminando il parametro che interviene nella rappresentazione della data curva fra le due equazioni:

$$\begin{aligned} (X-x)\alpha + (Y-y)\beta + (Z-z)\gamma &= 0 \\ \left| \begin{array}{ccc} X-a & Y-b & Z-c \\ l & m & n \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array} \right| &= 0. \end{aligned}$$

Cambiando  $\alpha, \beta, \gamma$  in  $\xi, \eta, \zeta$  o  $\lambda, \mu, \nu$  si ottengono altre due rigate podarie rispetto ai piani rettificanti od agli osculatori della data curva.

La considerazione delle rigate podarie dà luogo a questioni del genere seguente:

« Determinare la retta  $r$  in modo che una assegnata delle sue rigate podarie si particolarizzi in un determinato modo ».

Secondo che questa specializzazione si traduce in una, due, tre o quattro equazioni si hanno complessi, congruenze, rigate o gruppi di posizioni ammissibili per la retta  $r$ .

## 7. Linee e Superficie baricentriche di una data curva.

Se

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

è la rappresentazione analitica di una curva (supposta materiale ed omogenea) di cui  $s$  è l'arco, ad ogni suo punto  $P_0$  si può far corrispondere la linea  $\Gamma_0$  luogo geometrico dei baricentri degli  $\infty^1$  archi della data aventi per origine  $P_0$ ; la diremo *linea baricentrica* di  $\Gamma$  relativa al punto  $P_0$ . La rappresentazione analitica di  $\Gamma_0$  è, in virtù di note formole <sup>1)</sup>,

$$x_1 = \frac{\int_{t_0}^t x(t) ds}{s}, \quad y_1 = \frac{\int_{t_0}^t y(t) ds}{s}, \quad z_1 = \frac{\int_{t_0}^t z(t) ds}{s}.$$

Variando  $P_0$ , la curva  $\Gamma_0$  varia e descrive la *superficie baricentrica* di  $\Gamma$ . Per ottenere la rappresentazione analitica poniamo:

$$\int_{s_0}^s x ds = \varphi(s), \quad \int_{s_0}^s y ds = \chi(s), \quad \int_{s_0}^s z ds = \psi(s);$$

allora è chiaro che la superficie baricentrica può rappresentarsi come segue:

$$X = \frac{\varphi(t) - \varphi(u)}{t - u}, \quad Y = \frac{\chi(t) - \chi(u)}{t - u}, \quad Z = \frac{\psi(t) - \psi(u)}{t - u};$$

ma se si pone

$$t - u = v$$

si può scrivere

$$X = \frac{\varphi(u+v) - \varphi(u)}{v} = \frac{1}{1!} \varphi'(u) + \frac{v}{2!} \varphi''(u) + \frac{v^2}{3!} \varphi'''(u) + \dots;$$

<sup>1)</sup> Vedi p. es. Schell, *Theorie des Bewegung und der Kräfte*, II Auf. (Leipzig, 1879), I Bd., p. 84.

emerge da ciò che la superficie baricentrica si può rappresentare come segue, senza eseguire alcuna quadratura:

$$X = \frac{1}{1!} x(u) + \frac{v}{2!} x'(u) + \frac{v^2}{3!} x''(u) + \dots$$

$$Y = \frac{1}{1!} y(u) + \frac{v}{2!} y'(u) + \frac{v^2}{3!} y''(u) + \dots$$

$$Z = \frac{1}{1!} z(u) + \frac{v}{2!} z'(u) + \frac{v^2}{3!} z''(u) + \dots$$

## 8. Curve annesse ed associate ad una data.

Si supponga nuovamente che le coordinate dei punti di una data curva  $\Gamma$  siano espresse in funzione dell'arco  $s$  e si mantengano le notazioni usate sino ad ora.

Se si pone

$$x_1 = \int a ds, \quad y_1 = \int \beta ds, \quad z_1 = \int \gamma ds$$

si ottiene una curva  $\Gamma_1$ ; ora se si ricorda che

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

si vede essere (se  $a, b, c$  sono costanti arbitrari)

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b, \quad z_1 = z + c,$$

onde la curva  $\Gamma_1$  luogo geometrico del punto  $(x_1, y_1, z_1)$  si ottiene semplicemente imprimendo alla data una traslazione.

Si ponga invece <sup>1)</sup>:

$$x_2 = \int_{s_0}^s \xi ds, \quad y_2 = \int_{s_0}^s \eta ds, \quad z_2 = \int_{s_0}^s \zeta ds$$

$s_0$  essendo un valore arbitrario fisso; al variare di  $s$  il punto  $(x_2, y_2, z_2)$  descrive una curva  $\Gamma_2$  — di cui indicheremo gli elementi con le stesse lettere usate per la  $\Gamma$ , apponendovi l'indice 2 — che è legata a  $\Gamma$  da molteplici relazioni.

<sup>1)</sup> L. Bianchi, *Sulle curve a doppia curvatura* (G. di Matematiche, T. XXI, 1883).

Infatti dalle formole precedenti si trae

$$x_2' = \xi, \quad y_2' = \eta, \quad z_2' = \zeta; \quad x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2 = 1;$$

cioè  $s_2'^2 = 1$ , onde

$$s_2 = \pm s + \text{cost.};$$

scegliendo il segno +, differenziare rispetto a  $s_2$  val quanto differenziare rispetto a  $s$ ; perciò le relazioni precedenti danno

$$\alpha_2 = \xi, \quad \beta_2 = \eta, \quad \gamma_2 = \zeta;$$

dunque in ogni punto di  $\Gamma_2$  la tangente è parallela alla normale principale nel punto corrispondente di  $\Gamma$ . Una nuova differenziazione dà, avuto riguardo alle formole di Serret-Frenet:

$$x_2'' = -\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right), \quad y_2'' = -\left(\frac{\beta}{r} + \frac{\mu}{\rho}\right), \quad z_2'' = -\left(\frac{\gamma}{r} + \frac{\nu}{\rho}\right),$$

di cui, quadrando e sommando,

$$\frac{1}{r_2'^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}.$$

Differenziando ancora e applicando di nuovo le succitate formole si trovano la relazione

$$x_2''' = \frac{\alpha r'}{r^2} - \xi \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) + \lambda \frac{\rho'}{\rho^2}$$

e le due analoghe. Ricorrendo alla (VIII) Cap. I e servendosi della precedente, si ottiene

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{r\rho' - r'\rho}{r^2 + \rho^2}.$$

Inoltre:

$$\xi_2 = r_2 x_2'' = -\frac{\alpha\rho + \lambda r}{\sqrt{r^2 + \rho^2}}$$

e due analoghe; se ne trae facilmente

$$\xi\xi_2 + \eta\eta_2 + \zeta\zeta_2 = 0$$

relazione che dice: le normali principali in due punti corrispondenti delle due curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_2$  sono fra loro perpendicolari.

Finalmente per le formole precedenti:

$$\lambda_2 = r_2 \begin{vmatrix} y_2' & z_2' \\ y_2'' & z_2'' \end{vmatrix} = \frac{\lambda\rho - \alpha r}{\sqrt{r^2 + \rho^2}}$$

ed espressioni analoghe per  $\mu_2, \nu_2$ , ne emerge la relazione

$$\lambda_2 \xi + \mu_2 \eta + \nu_2 \zeta = 0,$$

la quale dice che: in punti corrispondenti la binormale di  $\Gamma_2$  è perpendicolare alla normale principale di  $\Gamma$ .

Similmente si ponga <sup>1)</sup>:

$$x_3 = \int_{s_0}^s \lambda ds, \quad y_3 = \int_{s_0}^s \mu ds, \quad z_3 = \int_{s_0}^s \nu ds;$$

al variare del punto sulla data curva, il punto di coordinate  $x_3, y_3, z_3$  descrive una terza curva detta da E. Goursat *courbe adjointe* di  $\Gamma$  <sup>2)</sup> e che a  $\Gamma$  è legata da interessanti relazioni. Essendo infatti

$$x_3' = \lambda, \quad y_3' = \mu, \quad z_3' = \nu$$

si ha

$$s_3'^2 = 1$$

onde

$$s_3 = \pm s + \text{cost.};$$

scelto, quindi, il segno +, differenziare rispetto a  $s_3$  è lo stesso che differenziare rispetto a  $s$ . Ne segue:

$$\alpha_3 = \lambda, \quad \beta_3 = \mu, \quad \gamma_3 = \nu$$

dunque: in punti corrispondenti la tangente di  $\Gamma_3$  è parallela alla binormale di  $\Gamma$ .

Differenziando ancora si trae

$$x_3'' = \lambda', \quad y_3'' = \mu', \quad z_3'' = \nu'$$

<sup>1)</sup> G. Pirondini, *Sur les lignes cylindriques* (El Progreso matematico, II Ser., T. I, 1899).

<sup>2)</sup> *Cours d'analyse*, T. I (2<sup>e</sup> éd., Paris, 1914) p. 58.



ossia

$$\frac{\xi_3}{r_2} = \frac{\xi}{\rho}, \quad \frac{\eta_3}{r_3} = \frac{\eta}{\rho}, \quad \frac{\zeta_3}{r_3} = \frac{\zeta}{\rho};$$

dunque: in punti corrispondenti la flessione di  $\Gamma_3$  è uguale alla torsione di  $\Gamma$  e le normali principali sono fra loro parallele.

Una nuova differenziazione con applicazione delle formole di Serret-Frenet dà la relazione

$$x_3''' = -\frac{\xi \rho'}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho} \right)$$

e le due analoghe. Servendosi della (VIII) Cap. I, si trova

$$\frac{1}{\rho_3} = r_3^2 \begin{vmatrix} \lambda, \frac{\xi}{\rho}, \frac{\xi \rho'}{\rho^2} + \frac{\alpha}{r \rho} + \frac{\lambda}{\rho^2} \\ \mu, \frac{\eta}{\rho}, \frac{\eta \rho'}{\rho^2} + \frac{\beta}{r \rho} + \frac{\mu}{\rho^2} \\ \nu, \frac{\zeta}{\rho}, \frac{\zeta \rho'}{\rho^2} + \frac{\gamma}{r \rho} + \frac{\nu}{\rho^2} \end{vmatrix}$$

e dopo qualche facile riduzione

$$\rho_3 = -r;$$

dunque: in punti corrispondenti la torsione di  $\Gamma_3$  è in valore assoluto eguale alla flessione di  $\Gamma$ .

Si ha ancora

$$\lambda_3 = \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} = -\alpha, \quad \mu_3 = -\beta, \quad \nu_3 = -\gamma;$$

dunque: in punti corrispondenti la binormale di  $\Gamma_3$  è parallela alla tangente di  $\Gamma$ .

Finalmente, detto  $\theta$  un angolo arbitrario, si ponga

$$x_0 = x \sin \theta + x_3 \cos \theta, \quad y_0 = y \sin \theta + y_3 \cos \theta, \quad z_0 = z \sin \theta + z_3 \cos \theta;$$

queste formole, al variare di  $\theta$ , definiscono  $\infty^1$  curve dette dal Goursat (l. c.) *courbes associées* alla data. Differenziando queste

formole e ricordando risultati noti o superiormente stabiliti si trova:

$$x_0' = \alpha \sin \theta + \lambda \cos \theta, \quad y_0' = \beta \sin \theta + \mu \cos \theta, \quad z_0' = \gamma \sin \theta + \nu \cos \theta$$

onde, quadrando e sommando

$$s_0'^2 = 1;$$

perciò

$$s_0' = \pm s + \text{cost.}$$

Scelto quindi il segno + si vede che differenziare rispetto a  $s_0$  è lo stesso che differenziare rispetto a  $s$ .

Ora le precedenti relazioni differenziate danno, grazie alle formole di Serret-Frenet,

$$x_0'' = \xi \left( \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\cos \theta}{\rho} \right), \quad y_0'' = \eta \left( \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\cos \theta}{\rho} \right), \quad z_0'' = \zeta \left( \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\cos \theta}{\rho} \right).$$

Segue da ciò che, in valore assoluto,

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

Osserviamo anche che si può scrivere

$$x_0' = x' \sin \theta + r \cos \theta \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, \text{ ecc.}$$

$$x_0'' = r x'' \left( \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\cos \theta}{\rho} \right) = x'' \left( \sin \theta + \frac{r}{\rho} \cos \theta \right), \text{ ecc.}$$

onde differenziando di nuovo

$$x_0''' = x''' \left( \sin \theta + \frac{r}{\rho} \cos \theta \right) + x'' \left( \sin \theta + \frac{r}{\rho} \cos \theta \right)', \text{ ecc.}$$

Da ciò emerge

$$\begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \\ x_0''' & y_0''' & z_0''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' \sin \theta + r \cos \theta \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} & & \\ x'' \left( \sin \theta + \frac{r}{\rho} \cos \theta \right) & & \\ x''' \left( \sin \theta + \frac{r}{\rho} \cos \theta \right) + x'' \left( \sin \theta + \frac{r}{\rho} \cos \theta \right)' & & \end{vmatrix}, \dots$$

$$= \left( \operatorname{sen} \theta + \frac{r}{\varrho} \cos \theta \right)^2 \left| \begin{array}{c} x' \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta \left| \begin{array}{c} y' \\ z' \end{array} \right|, \dots \\ x'' \\ x''' \end{array} \right|, \dots \\ = \left( \operatorname{sen} \theta + \frac{r}{\varrho} \cos \theta \right)^2 \left\{ \operatorname{sen} \theta \left| \begin{array}{c} x' \\ x'' \\ x''' \end{array} \right| + r \cos \theta \left\| \begin{array}{c} x' \\ x'' \\ x''' \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} y' \\ y'' \\ y''' \end{array} \right\| \right\}$$

Perciò

$$-\frac{1}{r_0^2 \varrho_0} = \frac{r^2}{\varrho_0^2} \left\{ -\operatorname{sen} \theta \cdot \frac{1}{\varrho^2} + r \cos \theta \cdot \frac{1}{r^2} \right\}$$

ossia

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\varrho_0} - \frac{\cos \theta}{r}$$

I valori trovati per la curvatura e la torsione della curva  $\Gamma_0$  portano a concludere che viceversa

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos \theta}{r_0} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\varrho_0}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos \theta}{r_0} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\varrho_0}$$

se, dunque,  $\Gamma$  è una curva a flessione od a torsione costante, tutte le curve ad essa associate godono la proprietà che flessione o torsione sono legate da una relazione lineare <sup>1)</sup>.

### 9. Curva areolare di una data.

Se le coordinate  $x, y, z$  di un punto di una curva  $\Gamma$  sono date in funzione di un parametro, altrettanto accade delle funzioni:

$$X = \frac{1}{2} \int (ydz - zdy), \quad Y = \frac{1}{2} \int (zdx - xdz), \\ Z = \frac{1}{2} \int (zdy - ydz)$$

<sup>1)</sup> Vedremo nel Cap. XI che sono queste le così dette Curve di Bertrand.

gl' integrali avendo lo stesso limite inferiore; perciò queste equazioni individuano una nuova curva  $\Gamma_a$  che si dice *areolare* della data <sup>1)</sup>. Un facile calcolo dimostra che fra il raggio di torsione  $\varrho_a$  di  $\Gamma_a$  ed il raggio di flessione  $r$  di  $\Gamma$  passa la relazione

$$\varrho_a = \frac{r^2}{2};$$

donde un procedimento per dedurre da una curva di flessione costante una curva di costante torsione.

### 10. Curve parallele.

Nel piano due curve parallele godono la proprietà che in punti corrispondenti le tangenti e le normali sono rette fra loro parallele. Per analogia si diranno *parallele* <sup>2)</sup> due linee sghembe tali che in punti corrispondenti gli spigoli dei triedri satelliti siano fra loro paralleli. Supposto che una di esse,  $\Gamma$ , sia determinata al solito dandone le coordinate in frazione dell'arco  $s$ , mostreremo che l'altra,  $\Gamma_p$ , con le consuete notazioni potrà rappresentarsi come segue:

$$(1) \quad \begin{cases} x_p = x + c(\xi \cos r + \lambda \operatorname{sen} r) \\ x_p = y + c(\gamma \cos r + \mu \operatorname{sen} r) \\ z_p = z + c(\zeta \cos r + \nu \operatorname{sen} r) \end{cases}$$

ove  $c$  è una costante arbitraria e l'angolo  $r$  è dato dalla formola

$$(2) \quad r = \int \frac{ds}{\varrho}$$

<sup>1)</sup> J. Rose, *Sur la courbe areolaire d'une courbe donnée* (Annales de Acad. polyt. de Porto, T. V, 1909, p. 84-90). La ragione di quel nome risiede nel fatto che  $\frac{1}{2}(ydz - zdy)$  misura l'area della proiezione sul piano  $yz$  del triangolo avente per vertici l'origine delle coordinate e due punti consecutivi della curva data; analoghi significati hanno i binomi  $\frac{1}{2}(zdx - xdz)$   $\frac{1}{2}(x dy - y dx)$ .

<sup>2)</sup> R. Hoppe, *Ueber parallelen geschlossenen Curven* (Arch. f. Math. u. Phys., T. LVI, 1881, p. 46-55).

Notiamo anzitutto che la congiungente due punti corrispondenti  $M, M_p$  delle due curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_p$  ha coseni di direzione proporzionali rispetto a

$$\xi \cos r + \lambda \sin r, \eta \cos r + \mu \sin r, \zeta \cos r + \nu \sin r;$$

ora siccome è identicamente

$$\alpha(\xi \cos r + \lambda \sin r) + \beta(\eta \cos r + \mu \sin r) + \gamma(\zeta \cos r + \nu \sin r) = 0$$

così quella retta risulta perpendicolare alla tangente in  $M$  alla curva  $\Gamma$ . Inoltre il segmento  $MM_p$  ha la lunghezza costante  $c$ . Applicando ora le formole di Serret-Frenet, si trae dalle (1):

$$\frac{dx_p}{ds} = \alpha \left(1 - \frac{c}{r}\right), \frac{dy_p}{ds} = \beta \left(1 - \frac{c}{r}\right), \frac{dz_p}{ds} = \gamma \left(1 - \frac{c}{r}\right)$$

ossia (indicando con l'indice  $p$  tutti gli elementi della curva  $\Gamma_p$ )

$$\alpha_p \frac{ds_p}{ds} = \alpha \left(1 - \frac{c}{r}\right), \beta_p \frac{ds_p}{ds} = \beta \left(1 - \frac{c}{r}\right), \gamma_p \frac{ds_p}{ds} = \gamma \left(1 - \frac{c}{r}\right);$$

dunque in valore assoluto

$$\frac{ds_p}{ds} = 1 - \frac{c}{r}, \alpha_p = \alpha, \beta_p = \beta, \gamma_p = \gamma,$$

onde in punti corrispondenti le curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_p$  hanno tangenti fra loro parallele. Da queste si trae:

$$\frac{d\alpha_p}{ds_p} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{ds_p}$$

ossia

$$\frac{\xi_p}{r_p} = \frac{\xi}{r} \frac{1}{1 - \frac{c}{r}} = \frac{\xi}{r - c},$$

avendosi due relazioni analoghe, si deduce in valore assoluto

$$r_p = r - c$$

epperò

$$\xi_p = \xi, \eta_p = \eta, \zeta_p = \zeta$$

onde in punti corrispondenti di  $\Gamma$  e  $\Gamma_p$  sono fra loro parallele anche le normali principali.

In conseguenza lo stesso accade per le binormali; cioè, d'altronde, può dimostrarsi mediante un breve calcolo che conduce ad un nuovo risultato. Essendo infatti

$$\xi_p = \xi$$

si trova

$$\frac{d\xi_p}{ds_p} = \frac{d\xi}{ds} \frac{ds}{ds_p},$$

cioè, per le formole di Serret-Frenet e per quanto si è già dimostrato,

$$\frac{\alpha_p}{r_p} + \frac{\lambda_p}{\rho_p} = \left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\lambda}{\rho}\right) \frac{r}{r - c}$$

o più semplicemente

$$\frac{\lambda_p}{\rho_p} = \frac{\lambda r}{\rho(r - c)};$$

e questa, combinata alle due analoghe, porta a concludere

$$\rho_p = \frac{\rho(r - c)}{r}, \lambda_p = \lambda, \mu_p = \mu, \nu_p = \nu.$$

Resta così determinato anche la torsione della curva parallela. Notiamo che dalle relazioni

$$r_p = r - c, \rho_p = \frac{\rho(r - c)}{r}$$

si trae

$$\frac{\rho_p}{r_p} = \frac{\rho}{r}$$

donde, applicando un teorema che stabiliremo più avanti, si può trarre che tutte le curve parallele ad un'elica cilindrica sono curve della stessa specie. In particolare, per l'elica del cilindro circolare retto, tutte le curve parallele sono curve di egual natura, perchè se  $r, \rho$  sono costanti lo stesso avviene per  $r_p, \rho_p$ .

## 11. Curve dedotte da due altre.

Oltre alla curva  $\Gamma$   $x=x(s)$ ,  $y=y(s)$ ,  $z=z(s)$  ne sia data una seconda  $\Delta$

$$x=\varphi(s), \quad y=\chi(s), \quad z=\psi(s);$$

si può allora immaginarne una terza tale che le coordinate di un suo punto qualunque  $P$  rispetto al triedro satellite relativo al punto  $M$  di  $\Gamma$  corrispondente al valore  $s$  dell'arco valgono appunto  $\varphi(s)$ ,  $\chi(s)$ ,  $\psi(s)$ . È evidente che le coordinate  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  di un punto arbitrario della nuova curva, hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} X = x + \varphi(s)\alpha + \chi(s)\xi + \psi(s)\lambda \\ Y = y + \varphi(s)\beta + \chi(s)\eta + \psi(s)\mu \\ Z = z + \varphi(s)\gamma + \chi(s)\zeta + \psi(s)\nu \end{cases}$$

Variando le funzioni  $\varphi$ ,  $\chi$ ,  $\psi$  si ottengono in tal modo dalla data infinite altre curve.

Due casi furono sino ad oggi considerati <sup>1)</sup>.

1°. Le funzioni anzidette si riducono a costanti  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; la nuova curva è allora rappresentata come segue:

$$\begin{cases} X = x + a\alpha + b\xi + c\lambda \\ Y = y + a\beta + b\eta + c\mu \\ Z = z + a\gamma + b\zeta + c\nu \end{cases}$$

le quali permettono di determinare tutte le proprietà della curva. Così, servendosi delle formole di Serret-Frenet si trova che la tangente in un suo punto qualunque è rappresentata (se  $u$ ,  $v$ ,  $w$  designano coordinate correnti):

$$\frac{u-X}{\alpha + \frac{a\xi - b\alpha}{r} + \frac{c\xi - b\lambda}{\rho}} = \frac{v-Y}{\beta + \frac{a\eta - b\beta}{r} + \frac{c\eta - b\mu}{\rho}} = \frac{w-Z}{\gamma + \frac{a\zeta - b\gamma}{r} + \frac{c\zeta - b\nu}{\rho}},$$

<sup>1)</sup> O. Hoel, *Recherches sur les courbes à double courbure* (Archiv für Mathem. og Naturvidens. T. XXXVI, 1920).

mentre la retta che unisce il punto  $P$  al centro di curvatura  $C$  della data curva in  $M$  ha per equazione

$$\frac{u-X}{a\alpha + (b-r)\xi + c\lambda} = \frac{v-Y}{a\beta + (b-r)\eta + c\mu} = \frac{w-Z}{a\gamma + (b-r)\zeta + c\nu};$$

tali formole provano che l'angolo  $\theta$  formato da queste due rette è tale che

$$\cos \theta = \frac{-cr}{\rho \sqrt{a^2 + c^2 + (b-r)^2} \sqrt{1 + b^2 \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) - \frac{2b}{r} + \left( \frac{a}{r} + \frac{c}{\rho} \right)^2}}$$

epperò dipende esclusivamente dalle costanti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e dai raggi  $r$ ,  $\rho$ . Se, ad esempio, la curva considerata è piana,  $\frac{1}{\rho} = 0$  epperò  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; la stessa circostanza si verifica nel caso  $c = 0$ .

Detti poi  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$  gli angoli che in punti corrispondenti della curva  $\Gamma$  e della curva data formano fra di loro le tangenti, le normali principali e le binormali, si trova:

$$\cos \bar{\alpha} = \frac{r-b}{rR}, \quad \cos \bar{\beta} = \frac{a\rho + cr}{r\rho R}, \quad \cos \bar{\gamma} = -\frac{b}{\rho R}$$

avendo posto per brevità

$$R = \sqrt{1 + b^2 \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2} \right) - \frac{2b}{r} + \left( \frac{a}{r} - \frac{c}{\rho} \right)^2}$$

Se in particolare  $b=c=0$ , si ottengono  $\infty^1$  curve analoghe alle *equitangenziali* del piano, le quali si possono designare con lo stesso nome; in tal caso giova rappresentare le curve ottenute mediante le formole:

$$X = x - a \frac{dx}{ds}, \quad Y = y - a \frac{dy}{ds}, \quad Z = z - a \frac{dz}{ds};$$

ora, se supponiamo dato il luogo dei punti  $(X, Y, Z)$  e si cerca quello dei punti  $(x, y, z)$ , si giungerà ad una curva che, per analogia con la nomenclatura in uso nel piano, si dirà *trattrice* della data; la ricerca di essa dipende dall'integrazione del prece-

dente sistema di equazioni differenziali, ove si supponga che  $X, Y, Z$  siano funzioni conosciute di  $s$ .

2°. Sia ora invece

$$\varphi(s) = as, \chi(s) = br, \psi(s) = cq$$

ove  $a, b, c$  s'intendono rappresentare i numeri arbitrari. La curva dedotta ha allora per equazioni

$$\begin{cases} X = x + as\alpha + br\xi + cq\lambda \\ Y = y + as\beta + br\eta + cq\mu \\ Z = z + as\gamma + br\zeta + cq\nu \end{cases}$$

Da queste, applicando opportunamente le formole di Serret-Frenet, si trova, se si lasciano alle lettere  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  i significati precedenti,

$$\cos \bar{\alpha} = \frac{1+a-b}{R}, \cos \bar{\beta} = \frac{\frac{as}{r} + c + br'}{R}, \cos \bar{\gamma} = \frac{-b\frac{r}{\varrho} + cq'}{R}$$

ove si è posto per compendio

$$R = \sqrt{(1+a-b)^2 + \left(\frac{as}{r} + c + br'\right)^2 + \left(\frac{br}{\varrho} - cq'\right)^2}$$

## 12. Assoide di due linee gobbe.

Ad un'altra categoria di curve dedotte da due altre si perviene mediante la seguente generalizzazione del concetto di « assoide di due linee piane » introdotto dal Résal <sup>1)</sup>.

Siano  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  due curve qualsivogliono fra le quali sia stabilita una corrispondenza univoca; ne siano  $A_1$  e  $A_2$  due punti corrispondenti, mentre sia  $A$  il punto medio del segmento  $A_1 A_2$ ; se dalla curva  $\Gamma$ , luogo geometrico del punto  $A$ , la retta  $A_1 A_2$  è normale,  $\Gamma$  si dirà assoide delle due date.

È chiaro che tale definizione conserva significato anche se

<sup>1)</sup> *Axoides de deux lignes planes* (C. R. T. CXX, 1895); cfr. *Spez. Kurven*, II Bd., p. 357.

$\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  coincidono e porta alla considerazione dell'assoide di una linea isolata <sup>1)</sup>.

Nella surriferita definizione esistono pertanto le due curve  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  e la legge di corrispondenza fra i loro punti; quelle siano rappresentate dalle equazioni

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(u), y = \chi_1(u), z = \psi_1(u) \\ x &= \varphi_2(v), y = \chi_2(v), z = \psi_2(v) \end{aligned}$$

e questa dall'equazione

$$v = f(u);$$

<sup>1)</sup> Un secondo modo di estendere allo spazio il concetto di assoide di due linee piane è il seguente:

Siano  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  due superficie qualunque fra le quali sia stabilita una corrispondenza univoca; ne siano  $A_1$  e  $A_2$  due punti corrispondenti e sia  $A$  il centro del segmento  $A_1 A_2$ . Se dalla superficie  $\Sigma$ , luogo geometrico del punto  $A$ , la retta  $A_1 A_2$  è normale,  $\Sigma$  si dirà superficie assoide della data.

Se  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  hanno le seguenti rappresentazioni analitiche

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(u_1, v_1), y = \chi_1(u_1, v_1), z = \psi_1(u_1, v_1) \\ x &= \varphi_2(u_2, v_2), y = \chi_2(u_2, v_2), z = \psi_2(u_2, v_2), \end{aligned}$$

mentre le equazioni

$$u_2 = f(u_1, v_1), v_2 = g(u_1, v_1)$$

determinano la corrispondenza fra le due superficie,  $\Sigma$  avrà per equazioni

$$x = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, y = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}, z = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$$

supposto che ne siano eliminate le variabili  $u_2, v_2$  mediante le due relazioni precedenti. Ora i coseni di direzione della retta  $A_1 A_2$  sono proporzionali alle differenze  $\varphi_1 - \varphi_2, \chi_1 - \chi_2, \psi_1 - \psi_2$ , mentre quelli della normale a  $\Sigma$  lo sono ai determinati estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{aligned} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial(\chi_1 + \chi_2)}{\partial u_1}, \frac{\partial(\psi_1 + \psi_2)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial v_1}, \frac{\partial(\chi_1 + \chi_2)}{\partial v_1}, \frac{\partial(\psi_1 + \psi_2)}{\partial v_1} \end{aligned} \right\|;$$

scrivendo che quelli sono proporzionali a questi si ottengono due equazioni simultanee o derivate parziali di I ordine che serviranno a determinare le funzioni  $f$  e  $g$ .

Le superficie  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  non sono necessariamente distinte.

in conseguenza  $\Gamma$  ammette la seguente rappresentazione analitica:

$$x = \frac{\varphi_1(u) + \varphi_2(v)}{2}, \quad y = \frac{\chi_1(u) + \chi_2(v)}{2}, \quad z = \frac{\psi_1(u) + \psi_2(v)}{2}.$$

I coseni di direzione della tangente in un punto di  $\Gamma$  sono proporzionali rispettivamente a

$$\frac{d}{du} [\varphi_1(u) + \varphi_2(v)], \quad \frac{d}{du} [\chi_1(u) + \chi_2(v)], \quad \frac{d}{du} [\psi_1(u) + \psi_2(v)],$$

mentre quelli della retta  $A_1 A_2$  lo sono alle differenze

$$\varphi_1(u) - \varphi_2(v), \quad \chi_1(u) - \chi_2(v), \quad \psi_1(u) - \psi_2(v).$$

Per le condizioni del problema si avrà:

$$\begin{aligned} & \left[ \varphi_1(u) - \varphi_2(v) \right] \left[ \varphi_1'(u) + \varphi_2'(v) \frac{dv}{du} \right] + \\ & \left[ \chi_1(u) - \chi_2(v) \right] \left[ \chi_1'(u) + \chi_2'(v) \frac{dv}{du} \right] + \\ & \left[ \psi_1(u) - \psi_2(v) \right] \left[ \psi_1'(u) + \psi_2'(v) \frac{dv}{du} \right] = 0 \end{aligned}$$

È questa un'equazione differenziale di I ordine che servirà a determinare  $v$  in funzione, ad ogni soluzione della quale corrisponde una delle  $\infty_1$  assoidi delle date linee. Il loro luogo geometrico è una superficie connessa alle due date curve.

*Esempio.* Le due linee date siano le rette  $r_1$  e  $r_2$  di equazioni

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u \cos \alpha_1, \quad y = b_1 + u \cos \beta_1, \quad z = c_1 + u \cos \gamma_1, \\ x &= a_2 + v \cos \alpha_2, \quad y = b_2 + v \cos \beta_2, \quad z = c_2 + v \cos \gamma_2, \end{aligned}$$

l'equazione differenziale del problema diviene:

$$\left( a_1 - a_2 + u \cos \alpha_1 - v \cos \alpha_2 \right) \left( \cos \alpha_1 + \frac{dv}{du} \cos \alpha_2 \right) + \dots = 0$$

Indichiamo con  $O_1$  e  $O_2$  i punti  $(a_1, b_1, c_1)$  e  $(a_2, b_2, c_2)$ , con  $\varrho_1$  e  $\varrho_2$  gli angoli che con la loro congiungente formano le rette  $r_1$  e  $r_2$ , finalmente con  $\varrho$  l'angolo di  $r_1$  e  $r_2$ . Posto poi

$$a_1 - a_2 = k \cos \lambda, \quad b_1 - b_2 = k \cos \mu, \quad c_1 - c_2 = k \cos \nu$$

l'equazione precedente può scriversi

$$\left[ k \cos \varrho_1 + u - v \cos \varrho \right] + \frac{dv}{du} \left[ k \cos \varrho_2 + u \cos \varrho - v \right] = 0$$

Si osservi ora che, essendo  $O_1$  e  $O_2$  punti arbitrari delle rette, si può supporre siano le intersezioni di esse con la perpendicolare comune; in conseguenza  $\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{\pi}{2}$  e la equazione precedente diviene:

$$(u - v \cos \varrho) + \frac{dv}{du} (u \cos \varrho - v) = 0$$

Questa è un'equazione differenziale omogenea che integrata dà

$$\left( u^2 - v^2 \right) \left( \frac{u+v}{u-v} \right)^{\cos \varrho} = c^2,$$

e essendo una costante arbitraria, variando la quale si ottengono le  $\infty^1$  assoidi delle date.

### 13. Chiusa: Cenni intorno ad alcune questioni generali.

Quando ad una curva  $\Gamma$  si applica una certa legge di derivazione si ottiene in generale una curva  $\Gamma_1$ , distinta da  $\Gamma$ , a cui si può applicare la stessa considerazione; nasce così una terza curva  $\Gamma_2$  distinta dalle due prime. Così continuando si giunge ad una serie generalmente illimitata di curve  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ . Ma si può anche considerare una curva  $\Gamma_{-1}$  tale che, trasformata con la medesima legge, si muti in  $\Gamma$ ; così proseguendo si arriva ad una successione illimitata in due sensi

$$\dots \Gamma_{-2}, \Gamma_{-1}, \Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots,$$

la quale dà luogo a un problema generale, cioè: *come scegliere la curva  $\Gamma$  affinché una curva data  $\Gamma_{=m}$ , di determinato ordine sia simile (o più in particolare eguale) alla curva di partenza?* È un problema analogo ad altro che s'incontra nel piano e che nel piano venne risolto nell'ipotesi che ad ogni curva si associasse la sua evoluta. Per analogia, nello spazio si può considerare per ogni curva  $\Gamma$  la sua « curva polare » cioè il luogo  $\Gamma_0$  dei centri delle sfere osculatrici. Ora l'Aoust <sup>1)</sup> cercò le curve per cui  $\Gamma$  è identica alla curva  $\Gamma_{00}$  polare della sua polare  $\Gamma$ ; il suo esempio fu seguito dall'Hoppe <sup>2)</sup> e poi da H. Jackstein <sup>3)</sup>.

Per risolverlo è necessario tenere presente che fra le curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_0$  passa la relazione che la tangente, la normale principale e la binormale in un punto di  $\Gamma_0$  sono parallele rispetto alla binormale, alla normale ed alla tangente di  $\Gamma$ . Posto quindi

$$r = \frac{ds}{dt}, \quad \varrho = \frac{ds}{d\tau}$$

e adottando per la  $\Gamma_0$  notazioni del tutto analoghe a quelle usate sempre per  $\Gamma$ , avremo:

$$dt_0 = d\tau, \quad d\tau_0 = dt$$

Il raggio di curvatura  $r_0$  di  $\Gamma_0$  è dato da:

$$r_0 = r + \varrho (r' \varrho' + r'' \varrho),$$

gli accenti indicando sempre derivazioni rispetto all'arco  $s$  di  $\Gamma$ . Osserviamo ora che si ha:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \varrho r'$$

<sup>1)</sup> *Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles* (Bull. de la Soc. math. de France, T. VII, 1879, p. 143-54).

<sup>2)</sup> *Das Aoust'sche Problem in der Curven theorie* (Arch. f. Math. u. Phys., T. LVI, 1881, p. 386-96). V. anche una memoria di egual titolo di E. Salzkowski, Sitzungsbei de Berlin mathem. Gesell., seduta del 20 Marzo 1907.

<sup>3)</sup> *Ausdehnung eines von Poncelet für ebene Curven behandelten Problems auf Räume* (Diss. Halle 1888).

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{d}{ds} (\varrho r') \cdot \frac{ds}{d\tau} = \varrho (\varrho' r' + \varrho r'');$$

in conseguenza la formola precedente equivale quest'altra:

$$r_0 = r + \frac{d^2r}{d\tau^2}$$

Considerando ora la curva  $\Gamma_{00}$  polare di  $\Gamma_0$  (cioè seconda polare rispetto a  $\Gamma$ ) avremo similmente

$$r_{00} = r_0 + \frac{d^2r_0}{d\tau_0^2}$$

e, per le condizioni del problema, dovrà essere  $r_{00} = r$ . Giova ora introdurre la funzione ausiliare

$$\varphi = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\varrho}{r} = \frac{d\tau_0}{dt} = \frac{r_0}{\varrho_0}$$

Allora l'equazione del problema può scriversi:

$$r = r_0 + \frac{1}{\varphi} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\varphi} \frac{dr_0}{d\tau} \right)$$

o, sostituendo a  $r_0$  il valore precedente:

$$\frac{d^4r}{d\tau^4} - \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d^3r}{d\tau^3} + (1 + \varphi^2) \frac{d^2r}{d\tau^2} - \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0$$

o anche

$$\frac{d^4r}{d\tau^4} - \frac{d^2t}{d\tau^2} \frac{dr}{d\tau} \left( \frac{d^3r}{d\tau^3} - \frac{dr}{d\tau} \right) + \left[ 1 + \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{d^2r}{d\tau^2} = 0.$$

È questa un'equazione differenziale lineare di quart'ordine (che si riduce immediatamente al terzo), dalla cui integrazione dipende la risoluzione del problema di Aoust. Ora essa è identicamente soddisfatta dalla posizione:

$$\frac{dr}{d\tau} = \lambda;$$

applicando, infatti, le formole di Serret-Frenet se ne trae:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \xi$$

$$\frac{d^3 r}{d\tau^3} = -\frac{dt}{d\tau} a - \lambda$$

$$\frac{d^4 r}{d\tau^4} = -a \frac{d^2 t}{d\tau^2} - \xi \left[ 1 + \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \right],$$

donde la verità dell'asserto. Similmente si vede che la stessa equazione è soddisfatta facendo una delle altre posizioni:

$$\frac{dr}{d\tau} = \mu, \quad \frac{dr}{d\tau} = \nu.$$

Ciò prova che si otterranno  $\infty^3$  soluzioni di quell'equazione facendo:

$$\frac{dr}{d\tau} = a\lambda + b\mu + c\nu$$

$a, b, c$  essendo costanti arbitrarie. In conseguenza:

$$r = k + \int (a\lambda + b\mu + c\nu) d\tau,$$

$k$  essendo una nuova costante arbitraria. E poichè  $ds = r dt$  si ottiene:

$$s = \int dt [k + \int (a\lambda + b\mu + c\nu) d\tau]$$

D'altronde:

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

onde

$$dx = a ds = ar dt \text{ ecc.},$$

dunque

$$x = \int ar dt, \quad y = \int \beta r dt, \quad z = \int \gamma r dt$$

Per il lettore sarà un utile esercizio l'applicare queste formole supponendo che  $\Gamma$  sia dotata di proprietà speciali (p. es. sia un'elica cilindrica)<sup>1)</sup>.

Un altro tipo generale di problemi a cui dà luogo la considerazione delle curve derivate da una data è il seguente: come devesi scegliere la curva di partenza  $\Gamma$  affinché una sua derivata di ordine assegnato  $\Gamma_{\pm m}$  goda di una data proprietà? Appartiene a siffatto tipo la ricerca delle curve le cui evolventi filari siano sferiche<sup>2)</sup>. La determinazione di esse può effettuarsi calcolando l'arco ed i raggi di flessione e torsione di una evolvente, mettendo a profitto le formole di Serret-Frenet, e poi scrivendo che è soddisfatta l'equazione intrinseca delle curve sferiche. Ma qualche proprietà si può stabilire più elementarmente col procedimento seguente dovuto al Bobillier.

Se al punto  $(x, y, z)$  della curva data  $\Gamma$  corrisponde il punto  $(x_1, y_1, z_1)$  di una sua evolvente  $\Gamma_1$  e se si sceglie convenientemente l'origine degli archi,  $\Gamma_1$  si potrà rappresentare con le formole seguenti:

$$(1) \quad x_1 = x - s \frac{dx}{ds}, \quad y_1 = y - s \frac{dy}{ds}, \quad z_1 = z - s \frac{dz}{ds}$$

Differenziandole rispetto a  $s$  si trova:

$$(1') \quad dx_1 = -s \cdot d \frac{dx}{ds}, \quad dy_1 = -s \cdot d \frac{dy}{ds}, \quad dz_1 = -s \cdot d \frac{dz}{ds}$$

epperò

$$dx \cdot dx_1 + dy \cdot dy_1 + dz \cdot dz_1 = -\frac{s}{2} d \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 \right]$$

cioè

$$(2) \quad dx \cdot dx_1 + dy \cdot dy_1 + dz \cdot dz_1 = 0.$$

Sia ora

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

<sup>1)</sup> Per ulteriori sviluppi sull'argomento si ricorra alla Diss. di laurea di H. Hampel, *Ueber Lous'sche Kurven* (Halle a. S. 1921).

<sup>2)</sup> Bobillier, *Recherches sur les courbes à double courbure dont les développées sont sphériques* (Ann. de Mathém. T. XVIII, 1878, p. 67-77).



l'equazione della sfera contenente la curva  $\Gamma_1$ ; sarà

$$(4) \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2,$$

epperò

$$(5) \quad x_1 \cdot dx_1 + y_1 \cdot dy_1 + z_1 \cdot dz_1 = 0.$$

Eliminando  $x_1, y_1, z_1$  fra la (1) e (4) si trova:

$$(6) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2s \left( x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} + z \frac{dz}{ds} \right) + s^2 - a^2 = 0;$$

d'altronde, grazie alle (1') la (5) diviene:

$$(5') \quad x_1 \cdot d \frac{dx}{ds} + y_1 \cdot d \frac{dy}{ds} + z_1 \cdot d \frac{dz}{ds} = 0.$$

Integrando questa e tenendo conto dell'identità

$$\int x_1 \cdot d \frac{dx}{ds} = x_1 \frac{dx}{ds} - \int \frac{dx}{ds} dx_1$$

e delle due analoghe, si trova

$$x_1 \frac{dx}{ds} + y_1 \frac{dy}{ds} + z_1 \frac{dz}{ds} - \int \left( \frac{dx}{ds} dx_1 + \frac{dy}{ds} dy_1 + \frac{dz}{ds} dz_1 \right) = c$$

cioè per la (2)

$$(6) \quad x_1 \frac{dx}{ds} + y_1 \frac{dy}{ds} + z_1 \frac{dz}{ds} = c.$$

Chiamisi ora  $\varphi$  l'angolo formato dalla direzione del filo con il raggio corrispondente della sfera; sarà evidentemente

$$\cos \varphi = \frac{x_1}{a} \frac{dx}{ds} + \frac{y_1}{a} \frac{dy}{ds} + \frac{z_1}{a} \frac{dz}{ds}$$

da cui per la (6)

$$\cos \varphi = \frac{c}{a};$$

dunque: *il filo fa angoli costanti con la sfera.*

Scriviamo la relazione precedente sotto la forma

$$a \cos \varphi = c;$$

questa ci dice che *la costante  $c$  rappresenta la proiezione, sulla direzione del filo, del raggio della sfera passante per il suo estremo*<sup>1)</sup> e che quindi *la sfera considerata stacca corde di lunghezza  $2c$  sulle tangenti della curva cercata. Se  $r$  è la distanza del centro da una di queste, si ha evidentemente  $r = \sqrt{a^2 - c^2}$ ; dunque anche  $r$  è costante, epperò: *Le tangenti di una linea gobba le cui evolventi filari appartengono ad una data sfera sono tangenti ad una sfera concentrica a questa.**

<sup>1)</sup> Questa proprietà è analoga ad altra che caratterizza una curva il cui studio venne proposto in Francia ad un concorso scolastico: alludiamo alla curva del cilindro circolare retto avente per base il cerchio di centro  $O$ , tale che sia costante la proiezione ortogonale sulla sua tangente in un punto qualunque  $M$  del raggio vettore  $OM$ . Questa condizione si traduce in una equazione differenziale di primo ordine di facile integrazione: v. E. Faugnerberg, *Question de licence; Montpellier, Novembre 1879* (Nouv. Ann. de Math., II Ser., T. XX, 1881, p. 348-50).

## CAPITOLO III.

## LE CONICHE NELLO SPAZIO.

## 1. Questioni proiettive.

Una curva di second'ordine reale e non decomposta in due rette si può rappresentare mediante coordinate cartesiane (che supporremo in generale oblique) mediante formole del seguente tipo:

$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{a_0 \lambda^2 + 2a_1 \lambda + a_2}{d_0 \lambda^2 + 2d_1 \lambda + d_2} \\ y = \frac{b_0 \lambda^2 + 2b_1 \lambda + b_2}{d_0 \lambda^2 + 2d_1 \lambda + d_2} \\ z = \frac{c_0 \lambda^2 + 2c_1 \lambda + c_2}{d_0 \lambda^2 + 2d_1 \lambda + d_2} \end{cases}$$

ove i dodici coefficienti  $a_0, a_1, \dots, d_2$  sono numeri reali, dati ad arbitrio; uno di essi si può sempre supporre eguale ad 1, mentre ad altri tre si possono far assumere valori arbitrari mediante una sostituzione lineare sul parametro; per conseguenza una curva di 2° ordine nello spazio dipende da otto costanti; in altre parole le coniche dello spazio sono in numero  $\infty^8$ . — Gli eventuali punti all'infinito della curva corrispondono alle radici del comune denominatore, onde coincidono se  $d_0 d_2 - d_1^2 = 0$ .

Un piano

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \omega = 0$$

taglia la curva in due punti i cui parametri sono radici dell'equazione

$$\xi (a_0 \lambda^2 + 2a_1 \lambda + a_2) + \eta (b_0 \lambda^2 + 2b_1 \lambda + b_2) + \zeta (c_0 \lambda^2 + 2c_1 \lambda + c_2) + \omega (d_0 \lambda^2 + 2d_1 \lambda + d_2) = 0$$

ossia

$$(2) \quad (a_0 \xi + b_0 \eta + c_0 \zeta + d_0 \omega) \lambda^2 + 2(a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \omega) \lambda + (a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \omega) = 0$$

Ora questa diviene identica se i coefficienti  $\xi, \eta, \zeta, \omega$  soddisfano le tre equazioni:

$$\begin{aligned} a_0 \xi + b_0 \eta + c_0 \zeta + d_0 \omega &= 0 \\ a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \omega &= 0 \\ a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \omega &= 0 \end{aligned}$$

le quali servono a determinare in generale univocamente i rapporti  $\xi:\eta:\zeta:\omega$ : a questi valori corrisponde il piano di equazione

$$(3) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0;$$

questo piano contenendo infiniti punti della curva è il piano della curva stessa<sup>1)</sup>. Esso risulta indeterminato quando

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} = 0;$$

allora la curva riducesi ad una retta doppia.

Le due radici dell'equazione (2) coincidono se

$$(4) \quad (a_0 \xi + b_0 \eta + c_0 \zeta + d_0 \omega) (a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \omega) - (a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \omega)^2 = 0;$$

emerge da ciò che questa è l'equazione della data conica come involuppo dei suoi piani tangenti.

<sup>1)</sup> Allo stesso risultato si arriva cercando l'equazione del piano osculatore della curva mediante la (III') del Cap. I, chè, con facili trasformazioni, si prova che il parametro vi entra solo apparentemente. La planarità della curva risulta anche da un'osservazione fatta nel Cap. I sull'equazione (IV').

Ora è noto che se  $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \omega) = 0$  è l'equazione tangenziale di una quadrica,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = 0$  è quello del suo centro; da ciò si desume che l'equazione del centro della conica data è

$$\xi(d_0 a_2 - 2d_1 a_1 + d_2 a_0) + \eta(d_0 b_2 - 2d_1 b_1 + d_2 b_0) + \zeta(d_0 c_2 - 2d_1 c_1 + d_2 c_0) + 2(d_0 d_2 - d_1^2)\omega = 0,$$

onde le coordinate del centro stesso sono:

$$(5) \quad x_0 = \frac{d_0 a_2 - 2d_1 a_1 + d_2 a_0}{2(d_0 d_2 - d_1^2)}, \quad y_0 = \frac{d_0 b_2 - 2d_1 b_1 + d_2 b_0}{2(d_0 d_2 - d_1^2)}, \\ z_0 = \frac{d_0 c_2 - 2d_1 c_1 + d_2 c_0}{2(d_0 d_2 - d_1^2)};$$

questi valori divengono infiniti solo quando la curva è tangente al piano all'infinito.

Le rette che proiettano i singoli punti della data curva da un punto arbitrario  $(X, Y, Z)$  dello spazio hanno per equazioni in generale

$$\frac{x - X}{(a_0 \lambda^2 + 2a_1 \lambda + a_2) - X(d_0 \lambda^2 + 2d_1 \lambda + d_2)} = \\ = \frac{y - Y}{(b_0 \lambda^2 + 2b_1 \lambda + b_2) - Y(d_0 \lambda^2 + 2d_1 \lambda + d_2)} = \\ = \frac{z - Z}{(c_0 \lambda^2 + 2c_1 \lambda + c_2) - Z(d_0 \lambda^2 + 2d_1 \lambda + d_2)};$$

eliminando  $\lambda$  fra queste equazioni si otterrà l'equazione del cono costituito da quelle rette proiettanti. Per eseguire questa eliminazione si indichi con  $\frac{1}{\rho}$  il valore comune di quelle tre frazioni; si otterrà quindi il sistema

$$(a_0 - X d_0) \lambda^2 + 2(a_1 - X d_1) \lambda - \rho(x - X) = -(a_2 - X d_2) \\ (b_0 - Y d_0) \lambda^2 + 2(b_1 - Y d_1) \lambda - \rho(y - Y) = -(b_2 - Y d_2) \\ (c_0 - Z d_0) \lambda^2 + 2(c_1 - Z d_1) \lambda - \rho(z - Z) = -(c_2 - Z d_2)$$

Queste equazioni, considerate come lineari in  $\lambda^2, 2\lambda, -\rho$  danno:

$$\lambda^2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x & X \\ b_1 & b_2 & y & Y \\ c_1 & c_2 & z & Z \\ d_1 & d_2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & x & X \\ b_0 & b_1 & y & Y \\ c_0 & c_1 & z & Z \\ d_0 & d_1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, \quad 2\lambda = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & x & X \\ b_0 & b_2 & y & Y \\ c_0 & c_2 & z & Z \\ d_0 & d_2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & x & X \\ b_0 & b_1 & y & Y \\ c_0 & c_1 & z & Z \\ d_0 & d_1 & 1 & 1 \end{vmatrix}};$$

sostituendo questi valori nell'identità  $4\lambda^2 = (2\lambda)^2$  si conclude

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & x & X \\ b_0 & b_2 & y & Y \\ c_0 & c_2 & z & Z \\ d_0 & d_2 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 = 4 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & x & X \\ b_0 & b_1 & y & Y \\ c_0 & c_1 & z & Z \\ d_0 & d_1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x & X \\ b_1 & b_2 & y & Y \\ c_1 & c_2 & z & Z \\ d_1 & d_2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Questa può intendersi come l'equazione della data curva considerata come complesso delle sue rette secanti; essa permette in infiniti modi di considerare detta curva come sezione di un cono quadrico col piano di equazione (3).

Si trova similmente che l'equazione

$$(7) \quad \begin{vmatrix} b_0 & b_2 & y \\ c_0 & c_2 & z \\ d_0 & d_2 & 1 \end{vmatrix}^2 - 4 \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & y \\ c_0 & c_1 & z \\ d_0 & d_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & y \\ c_1 & c_2 & z \\ d_1 & d_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

rappresenta il cilindro proiettante la data curva sul piano  $yx$  parallelamente a  $Oz$ , onde essa può riguardarsi come sezione di questo cilindro col piano anzidetto; i due cilindri analoghi sono rappresentati similmente, mentre quello che proietta la curva dal punto all'infinito della direzione  $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$  ha per equazione

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & x & \lambda \\ b_0 & b_2 & y & \mu \\ c_0 & c_2 & z & \nu \\ d_0 & d_2 & 1 & 0 \end{vmatrix}^2 - 4 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & x & \lambda \\ b_0 & b_1 & y & \mu \\ c_0 & c_1 & z & \nu \\ d_0 & d_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x & \lambda \\ b_1 & b_2 & y & \mu \\ c_1 & c_2 & z & \nu \\ d_1 & d_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La rappresentazione analitica della tangente in un punto qualunque della curva si trae dalle equazioni (II) del I Capitolo ed è

$$(9) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_0 \lambda + a_1 & b_0 \lambda + b_1 & c_0 \lambda + c_1 & d_0 \lambda + d_1 \\ a_1 \lambda + a_2 & b_1 \lambda + b_2 & c_1 \lambda + c_2 & d_1 \lambda + d_2 \end{vmatrix} = 0;$$

ma la tangente può anche rappresentarsi associando all'equazione (3) del piano della curva, la seguente:

$$(9') \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 0 \\ a_0 & b_0 & c_0 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & -\lambda \\ a_2 & b_2 & c_2 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0;$$

giòva anche notare che i coseni di direzione della tangente nel punto  $\lambda$  sono proporzionali ai seguenti determinanti

$$\begin{vmatrix} a_0 & d_0 & 1 \\ a_1 & d_1 & -\lambda \\ a_2 & d_2 & \lambda^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_0 & d_0 & 1 \\ b_1 & d_1 & -\lambda \\ b_2 & d_2 & \lambda^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_0 & d_0 & 1 \\ c_1 & d_1 & -\lambda \\ c_2 & d_2 & \lambda^2 \end{vmatrix}.$$

## 2. Questioni metriche.

Per risolvere la questione metrica fondamentale « ricerca degli assi di una conica », ci serviremo come lemma della determinazione degli assi di una quadrica considerata come involuppo di piani.

Per giungere allo scopo, supponiamo tale superficie rappresentata dall'equazione

$$(10) \quad A_{11} u^2 + A_{22} v^2 + A_{33} w^2 + 2 A_{23} v w + 2 A_{31} w u + 2 A_{12} u v + 2 A_{01} u + 2 A_{02} v + 2 A_{03} w + A_{00} = 0$$

e cerchiamone un piano tangente parallelo ad un dato piano

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

ove supporremo

$$(11) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Tale piano abbia per equazione

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + p = 0,$$

$p$  essendo la sua distanza dall'origine; onde avrà per coordinate plückeriane

$$u = \frac{\alpha}{p}, \quad v = \frac{\beta}{p}, \quad w = \frac{\gamma}{p}.$$

In forza della (10)  $p$  dovrà soddisfare l'equazione:

$$(A_{11} \alpha^2 + A_{22} \beta^2 + A_{33} \gamma^2 + 2 A_{23} \beta \gamma + 2 A_{31} \gamma \alpha + 2 A_{12} \alpha \beta) + 2 p (A_{01} \alpha + A_{02} \beta + A_{03} \gamma) + A_{00} p^2 = 0,$$

ove  $A_{00} \neq 0$ , trattandosi di una superficie a centro.

Due piani rispondono in generale al quesito; essi determinano uno strato il cui spessore  $\Delta$  è espresso da  $|p_1 - p_2|$ , ove  $p_1$  e  $p_2$  sono le radici dell'equazione. Ora la differenza delle radici di un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

è espresso da

$$\frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha};$$

perciò

$$(12) \quad \Delta^2 = \frac{4}{A_{00}^2} \left\{ (A_{01} \alpha + A_{02} \beta + A_{03} \gamma)^2 - A_{00} (A_{11} \alpha^2 + A_{22} \beta^2 + A_{33} \gamma^2 + 2 A_{23} \beta \gamma + 2 A_{31} \gamma \alpha + 2 A_{12} \alpha \beta) \right\}.$$

Le lunghezze degli assi della data quadrica sono evidentemente i valori massimi e minimi di  $\Delta$  nell'ipotesi che  $\alpha, \beta, \gamma$  soddisfacciano la (11); in forza di una nota regola bisognerà, quindi, annullare le derivate parziali della funzione:

$$(A_{01} \alpha + A_{02} \beta + A_{03} \gamma)^2 - A_{00} (A_{11} \alpha^2 + \dots + 2 A_{12} \alpha \beta) - k (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1).$$

Si hanno così le equazioni:

$$\begin{aligned} A_{01}(A_{01}\alpha + A_{02}\beta + A_{03}\gamma) - A_{00}(A_{11}\alpha + A_{12}\beta + A_{13}\gamma) - k\alpha &= 0 \\ A_{02}(A_{01}\alpha + A_{02}\beta + A_{03}\gamma) - A_{00}(A_{21}\alpha + A_{22}\beta + A_{23}\gamma) - k\beta &= 0 \\ A_{03}(A_{01}\alpha + A_{02}\beta + A_{03}\gamma) - A_{00}(A_{31}\alpha + A_{32}\beta + A_{33}\gamma) - k\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Ora, moltiplicando queste equazioni per  $\alpha, \beta, \gamma$  addizionando i risultati e tenendo conto delle (11) e (12), si trova

$$\frac{A_{00}^2 \Delta^2}{4} = k$$

o viceversa

$$(13) \quad \Delta = \frac{2\sqrt{k}}{A_{00}}$$

Ma le equazioni precedenti si possono scrivere

$$\begin{aligned} (A_{01}^2 - A_{00}A_{11} - k)\alpha + (A_{01}A_{02} - A_{00}A_{12})\beta + (A_{01}A_{03} - A_{00}A_{13})\gamma &= 0 \\ (A_{02}A_{01} - A_{00}A_{21})\alpha + (A_{02}^2 - A_{00}A_{22} - k)\beta + (A_{02}A_{03} - A_{00}A_{23})\gamma &= 0 \\ (A_{03}A_{01} - A_{00}A_{31})\alpha + (A_{03}A_{02} - A_{00}A_{32})\beta + (A_{03}^2 - A_{00}A_{33} - k)\gamma &= 0 \end{aligned}$$

e siccome non possono essere soddisfatte da valori tutti nulli di  $\alpha, \beta, \gamma$ , si conclude essere:

$$\begin{vmatrix} A_{01}^2 - A_{00}A_{11} - k & A_{01}A_{02} - A_{00}A_{12} & A_{01}A_{03} - A_{00}A_{13} \\ A_{02}A_{01} - A_{00}A_{21} & A_{02}^2 - A_{00}A_{22} - k & A_{02}A_{03} - A_{00}A_{23} \\ A_{03}A_{01} - A_{00}A_{31} & A_{03}A_{02} - A_{00}A_{32} & A_{03}^2 - A_{00}A_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} A_{11} + \frac{k}{A_{00}} & A_{12} & A_{13} & A_{01} \\ A_{21} & A_{22} + \frac{k}{A_{00}} & A_{23} & A_{02} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} + \frac{k}{A_{00}} & A_{03} \\ A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{00} \end{vmatrix} = 0$$

Tenendo presente la (13) e ponendo  $\frac{\Delta}{2} = \delta$  (onde  $\delta$  è la lunghezza d'un semiasse della quadrica) si otterrà l'equazione

$$(14) \quad \begin{vmatrix} A_{11} + A_{00}\delta^2 & A_{12} & A_{13} & A_{01} \\ A_{21} & A_{22} + A_{00}\delta^2 & A_{23} & A_{02} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} + A_{00}\delta^2 & A_{03} \\ A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{00} \end{vmatrix} = 0,$$

la quale è quella che risolve il problema.

Volendo applicarla alla curva (1), considerata ora come inviluppo dei propri piani tangenti, bisogna, in virtù della (4), fare le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2(a_0a_2 - a_1^2), & A_{23} &= b_0c_2 + b_2c_0 - 2b_1c_1, & A_{01} &= a_0d_2 + a_2d_0 - 2a_1d_1 \\ A_{22} &= 2(b_0b_2 - b_1^2), & A_{31} &= c_0a_2 + c_2a_0 - 2c_1a_1, & A_{02} &= b_0d_2 + b_2d_0 - 2b_1d_1 \\ A_{33} &= 2(c_0c_2 - c_1^2), & A_{12} &= a_0b_2 + a_2b_0 - 2a_1b_1, & A_{03} &= c_0d_2 + c_2d_0 - 2c_1d_1 \\ A_{00} &= 2(d_0d_2 - d_1^2); \end{aligned}$$

l'equazione risultante dopo qualche facile trasformazione, assume il seguente aspetto:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} 2(d_0d_2 - d_1^2)\delta^2 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 2(d_0d_2 - d_1^2)\delta^2 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 2(d_0d_2 - d_1^2)\delta^2 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2(d_0d_2 - d_1^2)\delta^2 & d_0 & d_1 & d_2 \\ a_0 & b_0 & c_0 & d_0 & 0 & 0 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & -1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione cubica in  $\delta^2$  ha per radici 0 e i quadrati dei semiasse della data conica; naturalmente essa risulta inapplicabile nel caso della parabola, essendo allora  $d_0d_2 - d_1^2 = 0$ .

Si hanno anche elementi sufficienti per determinare i fuochi; ricordisi infatti che un fuoco è intersezione di due tangenti in punti immaginari coniugati ed incontranti il cerchio immaginario all'infinito e si tenga presente l'osservazione che

chiude il § 1. Si vedrà allora che per risolvere il problema si deve ricorrere all'equazione

$$\begin{vmatrix} a_0 & d_0 & 1 \\ a_1 & d_1 & \lambda \\ a_2 & d_2 & \lambda^2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_0 & d_0 & 1 \\ b_1 & d_1 & \lambda \\ b_2 & d_2 & \lambda^2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_0 & d_0 & 1 \\ c_1 & d_1 & \lambda \\ c_2 & d_2 & \lambda^2 \end{vmatrix}^2 = 0;$$

se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  ne sono due radici immaginarie coniugate, si sostituiscono nella (9'); si otterranno le equazioni di due piani secantisi in una retta reale, la cui intersezione col piano (3) sarà un fuoco; e di tali se ne otterranno così due.

### 3. Equazioni ridotte.

Dalla teoria della decomposizione delle funzioni razionali in frazioni semplici risulta che, secondochè il denominatore comune delle frazioni (1) ha due radici reali e distinte, immaginarie o coincidenti, le formole citate, scegliendo convenientemente il parametro, assumono i seguenti aspetti:

$$(1') \begin{cases} x = x_0 + \frac{m_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{m_2}{\lambda - \lambda_2} \\ y = y_0 + \frac{n_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{n_2}{\lambda - \lambda_2} \\ z = z_0 + \frac{p_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{p_2}{\lambda - \lambda_2} \end{cases} \quad (1'') \begin{cases} x = x_0 + \frac{m_1 \lambda + m_2}{\lambda^2 + k^2} \\ y = y_0 + \frac{n_1 \lambda + n_2}{\lambda^2 + k^2} \\ z = z_0 + \frac{p_1 \lambda + p_2}{\lambda^2 + k^2} \end{cases}$$

$$(1''') \begin{cases} x = x_0 + \frac{m_1}{\lambda} + \frac{m_2}{\lambda^2} \\ y = y_0 + \frac{n_1}{\lambda} + \frac{n_2}{\lambda^2} \\ z = z_0 + \frac{p_1}{\lambda} + \frac{p_2}{\lambda^2} \end{cases},$$

di cui le prime competono ad un'iperbole, le seconde ad un'ellisse e le ultime ad una parabola. In ogni caso il piano della

curva ha per equazione:

$$(3') \begin{vmatrix} x - x_0 & m_1 & m_2 \\ y - y_0 & n_1 & n_2 \\ z - z_0 & p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Gli asintoti si determinano applicando alla curva (1'), la teoria generale esposta nel Cap. I. Posto

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0, \quad Z = z - z_0,$$

per ciascun asintoto si trovano le equazioni di quattro piani che lo contengono; una di esse rappresenta il piano della curva, mentre le altre sono (parlando dell'asintoto corrispondente al valore  $\lambda = \lambda_1$ )

$$\begin{vmatrix} Y & Z \\ n_1 & p_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} Z & X \\ p_1 & m_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0;$$

per il secondo asintoto basta scambiare fra di loro gli indici 1 e 2. Entrambi passano per il centro della curva, le cui coordinate rispetto alla nuova origine valgono:

$$-\frac{m_1 - m_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad -\frac{n_1 - n_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad -\frac{p_1 - p_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Notiamo da ultimo, che può recare meraviglia il fatto che non si sia incontrata una funzione dei coefficienti  $a_0, \dots, d_2$  che prenda il posto del discriminante nell'ordinaria teoria delle coniche; ciò si spiega notando che la rappresentazione analitica (1) non è applicabile ad una conica scissa in due rette. Basterà dimostrare ciò supponendo la conica situata in uno dei piani coordinati, p. es., nel piano  $xy$ . Adoperando allora coordinate omogenee  $x_0, x_1, x_2$ , consideriamo due fasci proiettivi di raggi

$$A + \lambda B = 0, \quad A' + \lambda B' = 0,$$

ove  $A, A', B, B'$  sono funzioni lineari omogenee delle coordinate. La conica da essi generata può rappresentarsi o mediante la equazione  $AB' - A'B = 0$  o col sistema

$$x_0, x_1, x_2 \equiv \left\| \begin{array}{ccc} a_0 + \lambda b_0 & , & a_1 + \lambda b_1 & , & a_2 + \lambda b_2 \\ a_0' + \lambda b_0' & , & a_1' + \lambda b_1' & , & a_2' + \lambda b_2' \end{array} \right\|$$

il quale dà le  $x$  proporzionali a funzioni quadratiche del parametro  $\lambda$ ; ma se  $A' = A$  si ottiene, oltre la  $A = 0$ , una retta avente per equazione  $B - B' = 0$  e come rappresentazione parametrica

$$x_0, x_1, x_2 \equiv \left\| \begin{array}{ccc} b_0 - \lambda b_0' & , & b_1 - \lambda b_1' & , & b_2 - \lambda b_2' \\ k_0 & & k_1 & & k_2 \end{array} \right\|$$

(ove  $k_0, k_1, k_2$  sono costanti arbitrarie); ora in queste equazioni le  $\lambda$  entrano solo linearmente, onde ecc.

#### 4. Il cerchio.

Fra le coniche la più nota è il cerchio. Per determinarne una conveniente rappresentazione parametrica partiamo dalle seguenti espressioni

$$X = r \cos \omega, \quad Y = r \sin \omega, \quad Z = 0$$

ed applichiamo le formole generali della trasformazione di coordinata che nascono dall'applicazione dei noti angoli di Eulero<sup>1)</sup>; si giunge così a queste altre

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + r \{ \cos \varphi \cos (\psi - \omega) + \sin \varphi \sin (\psi - \omega) \cos \theta \} \\ y = y_0 + r \{ \sin \varphi \cos (\psi - \omega) - \cos \varphi \sin (\psi - \omega) \cos \theta \} \\ z = z_0 + r \sin (\psi - \omega) \sin \theta; \end{array} \right.$$

queste sono le espressioni di cui occasionalmente ci serviremo.

<sup>1)</sup> Cfr. E. d'Ovidio, *Geometria analitica*, III ed. (Torino, 1903), p. 124.

## CAPITOLO IV.

### CURVE SGHEMME DI TERZO ORDINE (CUBICHE GOBBE) IN GENERALE<sup>1)</sup>.

#### § 1. Generazioni e costruzioni.

Una curva sghemba di terzo ordine è tagliata in tre punti da un piano arbitrario dello spazio; essa è, quindi, proiettata da un suo punto qualunque secondo un cono quadrico. Emerge da ciò che, presi due punti qualsivogliano sulla curva come centri di due coni proiettanti, questi si taglieranno, all'infuori della congiungente dei centri, nella data curva. Dunque: *ogni cubica gobba può riguardarsi come intersezione di due coni quadrici aventi per comune generatrice la congiungente dei centri di queste due superficie.*

Da ciò una procedura semplicissima per rappresentare una cubica gobba in doppia proiezione ortogonale<sup>2)</sup>. Si suppongano, infatti, date (fig. 1) due coniche  $\Gamma$  e  $\Delta$  nel secondo piano bisettore e sia  $S$  un punto ad esse comune; siano poi  $U \equiv (U', U'')$  e  $V \equiv (V', V'')$  due punti di una retta passante per  $S$ ; presi questi per vertici di due coni aventi per basi rispettive le date co-

<sup>1)</sup> Per la storia e la bibliografia di queste curve, a cui da un secolo si è rivolta l'attenzione dei geometri, si veggia: G. Loria, *Il passato ed il presente delle più importanti teorie geometriche*, III ed. (Torino, 1907), p. 132-36; Th. Reye, *Der gegenwärtige Stand unserer Kenntniss der kubischen Raumkurven übersichtlich dargestellt* (Festschrift herausgeg. von der math. Gesellschaft. in Hamburg, 1890), il quale merita ancor oggi di venire consultato da chi s'interessa alle proprietà metriche delle curve di cui ci occupiamo.

<sup>2)</sup> Cfr. G. Loria, *Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva* (Milano, 1912), p. 180.

niche, essi si taglieranno, oltrechè nella retta  $UV$  in una cubica gobba, la quale può costruirsi per punti con una nota procedura, cioè: Si conduca per il punto  $S$  nel secondo piano

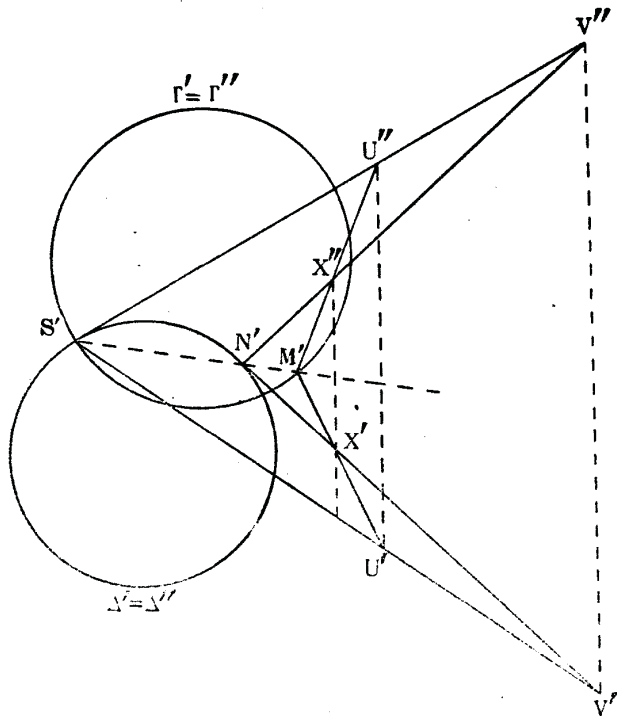


Fig. 1.

bisettore una retta arbitraria e se ne determinino le intersezioni  $M$  e  $N$  con le coniche  $\Gamma$  e  $\Delta$ . I punti

$$X' \equiv M'U' \cdot N'V', \quad X'' \equiv M'U'' \cdot N'V''$$

apparterranno alla stessa ordinata e saranno proiezioni di uno stesso punto della cubica gobba. Si osservi che (per note costruzioni di geometria proiettiva) questo metodo è applicabile, non soltanto quando le due coniche siano completamente tracciate, ma anche se di ciascuna si conoscono quattro punti all' in-

fuori di  $S$ , oppure si ha altro congenere sistema di dati. Aggiungiamo che la tangente in  $M'$  a  $\Gamma'$  e la tangente in  $N'$  a  $\Delta'$  si tagliano in un punto che unito rispettivamente a  $X'$  e  $X''$  dà le due proiezioni della tangente in  $X$  alla data cubica.

Una cubica gobba è determinata da sei punti  $U, V, A, B, C, D$ ; essa è infatti l'ulteriore intersezione dei coni quadrici uno individuato dalle rette  $UV, UA, UB, UC, UD$  e l'altro dalle rette  $VU, VA, VB, VC, VD$ . — Siccome ognuno dei punti determinatori si può, senza ledere la generalità, scegliere in un piano assegnato, così è chiaro che una cubica gobba dipende da dodici costanti; in altri termini vi sono nello spazio  $\infty^{12}$  cubiche gobbe.

Altre due genesi di una cubica gobba si ottengono come estensioni della nota generazione di una conica con fasci proiettivi di raggi; esse risultano dai due seguenti teoremi:

I. Tre fasci proiettivi di raggi ad assi sghembi generano con le intersezioni delle terne di piani corrispondenti una cubica gobba.

Se, infatti, si indicano con  $a_1, a_2, a_3$  gli assi dei tre fasci dati, il primo e secondo generano con le intersezioni delle coppie di piani corrispondenti un'iperboloide ad una falda contenente le due rette  $a_1$  e  $a_2$ ; similmente il primo ed il terzo producono una analoga superficie contenente le rette  $a_1$  e  $a_3$ . Queste due superficie si tagliano, all'infuori della retta  $a_1$ , in una cubica gobba, per ogni punto della quale passano evidentemente tre piani corrispondenti nei tre dati fasci; donde il teorema. — Notisi che il primo dei detti iperboloidi incontra la retta  $a_3$  in due punti, per ognuno dei quali passa una terna di piani corrispondenti dei tre fasci; dunque: gli assi dei tre fasci generatori sono corde della cubica gobba da essi prodotta. Osserviamo ancora che le generatrici del primo degli anzidetti iperboloidi sono riferite proiettivamente agli elementi del fascio di asse  $a_3$ ; dunque: se i piani di un fascio corrispondono proiettivamente alle generatrici di una schiera rigata, il luogo dei punti d'intersezione delle coppie di elementi corrispondenti è una cubica gobba.

II. (Teorema di Seydewitz). Due stelle proiettive di raggi generano con le intersezioni delle coppie di elementi corrispondenti una cubica gobba passante per i loro centri.



Siano  $S_1$  e  $S_2$  i centri delle due date stelle. Il raggio  $S_1S_2$  considerato nella seconda stella è evidentemente tagliato in  $S_1$  da quello che gli corrisponde nella prima, onde  $S_1$  fa parte della curva generata: e così  $S_2$ . Si taglino ora le due stelle date con un arbitrario piano  $\sigma$ ; si otterranno due sistemi piani proiettivi, dotati di tre punti uniti; è chiaro che questi sono tutti e soli i punti della curva generata che appartengono al piano  $\sigma$ . Dunque, ecc. — Da ciò una conferma del fatto che una cubica gobba è determinata da sei punti  $S_1, S_2, A, B, C, D$ ; essa è infatti generabile mediante le stelle proiettive individuate dalle quattro coppie di raggi corrispondenti  $S_1A, S_2A$ ;  $S_1B, S_2B$ ;  $S_1C, S_2C$ ;  $S_1D, S_2D$ .

Dal primo di questi due modi di generazione delle cubiche gobbe se ne possono trarre altri, notati da M. Charles e che meritano di essere riferiti:

a) *Se tre diedri di grandezza costante  $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$  ruotano attorno ai loro spigoli  $a, b, c$  e se il punto  $\alpha\beta\gamma$  comune a tre delle loro facce percorre una retta, il punto  $\alpha'\beta'\gamma'$  comune alle altre tre descriverà una cubica gobba.* Infatti  $\alpha', \beta', \gamma'$  descrivono attorno agli assi  $a, b, c$  tre fasci proiettivi di piani.

b) *Se tre corde  $a, b, c$  di una cubica gobba sono spigoli di tre diedri  $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$  di grandezza costante e se il punto  $\alpha\beta\gamma$  comune a tre loro facce descrive la curva, il punto  $\alpha'\beta'\gamma'$  comune alle altre tre percorrerà una seconda curva della stessa specie; perchè i fasci descritti dai piani  $\alpha', \beta', \gamma'$  sono evidentemente fra loro proiettivi.*

c) *Se tre punti descrivono di moto uniforme tre rette arbitrarie, i piani che li proiettano da altre tre rette pure arbitrarie si tagliano in un punto avente per luogo geometrico una cubica gobba.* Ciò è evidente osservando che i piani in discorso descrivono tre fasci proiettivi.

d) *Dati nello spazio: tre punti  $A, B, C$ ; tre piani  $\alpha, \beta, \gamma$ ; una retta  $r$ ; se, attorno a questa si fa ruotare un piano che tagli i dati piani secondo le rette  $a, b, c$  e queste si congiungono mediante piani rispett. ai punti  $A, B, C$ , il luogo del punto comune alle terne di piani risultanti è una cubica gobba.* Infatti le rette  $a, b, c$ , descrivono tre fasci aventi per sedi rispett. i tre piani dati e

per centri rispettivi i punti  $ra = A_0, r\beta = B_0, r\gamma = C_0$ ; tali fasci sono palesemente fra loro proiettivi. Proiettando quelle rette dai punti  $A, B, C$  si otterranno tre fasci proiettivi di piani aventi per assi le rette  $AA_0, BB_0, CC_0$ ; dunque, per il teorema I, si conclude a norma dell'enunciato.

e) *Quando le facce  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  di un tetraedro variabile ABCD ruotano attorno ad altrettante rette fisse  $a, b, c, d$ , mentre i vertici appartenenti alla prima si appoggiano a tre rette fisse  $l, m, n$ , il vertice opposto descrive una cubica gobba.* Ruotando, infatti, la faccia  $\alpha$  attorno alla retta  $r$ , i punti  $B, C, D$  descrivono sulle rette  $l, m, n$  tre punteggiate proiettive; onde proiettivi fra di loro sono anche i fasci  $bB, cC, dD$ , epperò trova applicazione il I dei precedenti teoremi.

## § 2. Rappresentazione analitica.

Le esposte generazioni di una cubica gobba mediante forme geometriche fondamentali fra loro proiettive conducono nel modo più naturale alla rappresentazione parametrica della curva. Fisseremo a tale scopo un sistema di coordinate omogenee  $x_0, x_1, x_2, x_3$  avente  $A_0A_1A_2A_3$  per tetraedro fondamentale ed indicheremo in genere con  $\alpha_x$  un quadrimomio della forma  $\alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3$ .

Allora due equazioni della forma

$$\alpha_x + \lambda\beta_x = 0, \quad \gamma_x + \mu\delta_x = 0,$$

se  $\lambda$  e  $\mu$  sono parametri qualunque, rappresenteranno due fasci di piani, i quali saranno fra loro proiettivi se fra i detti parametri passerà una relazione della forma

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0,$$

$A, B, C, D$  essendo costanti date ad arbitrio, ma soddisfacenti alla condizione:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ora dalla relazione precedente si trae:

$$\mu = -\frac{B\lambda + D}{A\lambda + C},$$

onde la seconda delle date equazioni può scriversi

$$(A\lambda + C)\gamma_x - (B\lambda + D)\delta_x = 0$$

o anche

$$(C\gamma_x - D\delta_x) + \lambda(A\gamma_x - B\delta_x) = 0.$$

Osserviamo ora che

$$C\gamma_x - D\delta_x = 0, \quad A\gamma_x - B\delta_x = 0.$$

rappresentano due nuovi piani del secondo fascio, i quali si possono assumere come elementi determinatori del fascio stesso; posto, quindi,

$$\alpha'_x = C\gamma_x - D\delta_x, \quad \beta'_x = A\gamma_x - B\delta_x,$$

siamo in diritto di asserire: *due fasci di piani fra loro proiettivi possono sempre rappresentarsi analiticamente mediante due equazioni della forma*

$$(1) \quad \alpha_x + \lambda\beta_x = 0, \quad \alpha'_x + \lambda\beta'_x = 0$$

$\lambda$  essendo un parametro variabile.

Similmente: le equazioni

$$\begin{aligned} \lambda\alpha_x + \lambda'\alpha'_x + \lambda''\alpha''_x &= 0 \\ \mu\bar{\alpha}_x + \mu'\bar{\alpha}'_x + \mu''\bar{\alpha}''_x &= 0 \end{aligned}$$

rappresentano due stelle di piani, le quali saranno fra loro proiettive se fra le due terne di parametri  $\lambda, \lambda', \lambda''$ ;  $\mu, \mu', \mu''$  passano relazioni della forma

$$\begin{cases} \mu = a_{00}\lambda + a_{01}\lambda' + a_{02}\lambda'' \\ \mu' = a_{10}\lambda + a_{11}\lambda' + a_{12}\lambda'' \\ \mu'' = a_{20}\lambda + a_{21}\lambda' + a_{22}\lambda'' \end{cases}$$

ove le costanti  $a_{ik}$  devono soddisfare soltanto alla condizione

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si sostituiscano nella seconda delle date equazioni a  $\mu, \mu', \mu''$  i loro valori e si otterrà:

$$\begin{aligned} \lambda(a_{00}\bar{\alpha}_x + a_{10}\bar{\alpha}'_x + a_{20}\bar{\alpha}''_x) + \lambda'(a_{01}\bar{\alpha}_x + a_{11}\bar{\alpha}'_x + a_{21}\bar{\alpha}''_x) + \\ + \lambda''(a_{02}\bar{\alpha}_x + a_{12}\bar{\alpha}'_x + a_{22}\bar{\alpha}''_x) = 0; \end{aligned}$$

ora i coefficienti di  $\lambda, \lambda', \lambda''$  sono funzioni lineari omogenee delle  $x$  che possiamo indicare con  $\beta_x, \beta'_x, \beta''_x$ ; allora le equazioni  $\beta_x = 0, \beta'_x = 0, \beta''_x = 0$  rappresentano tre piani che possono servire ad individuare la seconda stella. Tutto ciò abilita a concludere: *due stelle proiettive di piani possono sempre rappresentarsi analiticamente col mezzo di due equazioni della forma seguente:*

$$(2) \quad \lambda\alpha_x + \lambda'\alpha'_x + \lambda''\alpha''_x = 0, \quad \lambda\beta_x + \lambda'\beta'_x + \lambda''\beta''_x = 0.$$

Si considerino ora queste stelle come costituite da raggi; uno di questi sia l'intersezione dei due piani:

$$\lambda_1\alpha_x + \lambda'_1\alpha'_x + \lambda''_1\alpha''_x = 0, \quad \lambda_2\alpha_x + \lambda'_2\alpha'_x + \lambda''_2\alpha''_x = 0;$$

gli corrisponderà nell'altra stella la intersezione dei piani

$$\lambda_1\beta_x + \lambda'_1\beta'_x + \lambda''_1\beta''_x = 0, \quad \lambda_2\beta_x + \lambda'_2\beta'_x + \lambda''_2\beta''_x = 0;$$

ma se si indicano con  $l, l', l''$  i suddeterminati estratti della matrice

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda'_1 & \lambda''_1 \\ \lambda_2 & \lambda'_2 & \lambda''_2 \end{vmatrix}$$

si vede che queste due coppie di equazioni possono scriversi come segue:

$$(3) \quad \frac{\alpha_x}{l} = \frac{\alpha'_x}{l'} = \frac{\alpha''_x}{l''}, \quad \frac{\beta_x}{l} = \frac{\beta'_x}{l'} = \frac{\beta''_x}{l''};$$

dunque: due stelle proiettive di raggi si possono sempre rappresentare col mezzo di equazioni della forma (3).

Applicando queste osservazioni si vede che tre fasci proiettivi di piani si possono sempre rappresentare mediante tre equazioni della seguente forma:

$$(4) \quad \alpha_x + \lambda\beta_x = 0, \quad \alpha'_x + \lambda\beta'_x = 0, \quad \alpha''_x + \lambda\beta''_x = 0.$$

Eliminando  $\lambda$  fra esse, prese due a due, si trovano le tre equazioni compendiate nella formola

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha'_x & \alpha''_x \\ \beta_x & \beta'_x & \beta''_x \end{vmatrix} = 0$$

le quali rappresentano tre quadriche che, a due a due, si tagliano, oltre che nella cubica generata, in uno degli assi dei fasci di piani generatori. Per la curva passano  $\infty^2$  quadriche, quelle cioè rappresentate, al variare dei parametri  $p, p', p''$ , dall'equazione

$$(6) \quad \begin{vmatrix} p & p' & p'' \\ \alpha_x & \alpha'_x & \alpha''_x \\ \beta_x & \beta'_x & \beta''_x \end{vmatrix} = 0;$$

esse costituiscono una rete.

Osserviamo che alle equazioni (5) si perviene anche cercando di rappresentare analiticamente il luogo dei punti dello spazio per ognuno dei quali passano due raggi corrispondenti delle due stelle di equazioni (3): così si ritrova la generazione delle cubiche gobbe per mezzo di stelle proiettive di raggi.

Le equazioni (4) scritte per esteso si presentano sotto il seguente aspetto

$$(4') \quad \begin{cases} (\alpha_0 + \lambda\beta_0)x_0 + (\alpha_1 + \lambda\beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \lambda\beta_2)x_2 + (\alpha_3 + \lambda\beta_3)x_3 = 0 \\ (\alpha'_0 + \lambda\beta'_0)x_0 + (\alpha'_1 + \lambda\beta'_1)x_1 + (\alpha'_2 + \lambda\beta'_2)x_2 + (\alpha'_3 + \lambda\beta'_3)x_3 = 0 \\ (\alpha''_0 + \lambda\beta''_0)x_0 + (\alpha''_1 + \lambda\beta''_1)x_1 + (\alpha''_2 + \lambda\beta''_2)x_2 + (\alpha''_3 + \lambda\beta''_3)x_3 = 0 \end{cases}$$

queste, per ogni valore di  $\lambda$ , rappresentano tre determinati piani i quali si tagliano in un punto della curva di cui ci oc-

cupiamo; le coordinate di tale punto sono proporzionali ai determinanti estratti dalla matrice dei coefficienti delle equazioni (4'); onde, indicando col segno  $\equiv$  una relazione di proporzionalità, si può scrivere:

$$(5) \quad x_0, x_1, x_2, x_3 \equiv \begin{vmatrix} \alpha_0 + \lambda\beta_0 & \alpha_1 + \lambda\beta_1 & \alpha_2 + \lambda\beta_2 & \alpha_3 + \lambda\beta_3 \\ \alpha'_0 + \lambda\beta'_0 & \alpha'_1 + \lambda\beta'_1 & \alpha'_2 + \lambda\beta'_2 & \alpha'_3 + \lambda\beta'_3 \\ \alpha''_0 + \lambda\beta''_0 & \alpha''_1 + \lambda\beta''_1 & \alpha''_2 + \lambda\beta''_2 & \alpha''_3 + \lambda\beta''_3 \end{vmatrix}^{1)}$$

Nasce così una rappresentazione parametrica della forma seguente:

$$(6) \quad \varrho x_i \equiv \sum_{k=0}^{k=3} a_{ik} \lambda^k \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

ove  $\varrho$  è un fattore di proporzionalità.

Il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{03} \\ a_{30} & \dots & a_{33} \end{vmatrix}$$

è diverso da zero; se infatti fosse  $\Delta = 0$  e se  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ , sono quantità proporzionali agli elementi di una sua verticale, dalla (6) trarrebbe la relazione

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

<sup>1)</sup> I punti nei quali questa curva taglia il piano  $\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$  corrispondono ai valori di  $\lambda$  che sono radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \dots & \xi_3 \\ \alpha_0 + \lambda\beta_0 & \dots & \alpha_3 + \lambda\beta_3 \\ \alpha'_0 + \lambda\beta'_0 & \dots & \alpha'_3 + \lambda\beta'_3 \\ \alpha''_0 + \lambda\beta''_0 & \dots & \alpha''_3 + \lambda\beta''_3 \end{vmatrix} = 0$$

Se questa risultasse avere infinite soluzioni, la data curva si spezzerebbe. Ora scrivendo che sono ad un tempo nulli i coefficienti di  $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$  si ottengono quattro equazioni lineari nelle  $\xi$ , fra cui le  $\xi$  stesse possono venire eliminate. Il risultante è un determinante il cui annullarsi annuncia lo spezzarsi della cubica considerata; è la funzione che M. Stuyvaert chiama *invariante della cubica gobba* (v. *Algèbre à deux dimensions*, Gand, 1920, p. 19).

la quale dice che la curva data sta tutta in un piano, contrariamente alle ipotesi. *Prescindendo da questa limitazione i coefficienti  $a_{ik}$  sono arbitrari*; di essi sono essenziali  $16 - 1 = 15$ ; ma, con una sostituzione della forma

$$\lambda = \frac{A\mu + B}{\mu + C},$$

a tre di essi si possono far assumere valori arbitrari prefissati; per ciò quelle costanti riduconsi a 12; ciò prova che le curve rappresentabili con equazioni del tipo (6) sono  $\infty^{12}$ , tante cioè, per quante sono le cubiche gobbe dello spazio, onde ai coefficienti  $a_{ik}$  non è imposta alcuna limitazione<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Nel caso in cui la cubica gobba passi per i vertici del tetraedro fondamentale e per il punto  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  la sua rappresentazione parametrica assume la seguente forma:

$$(a) \quad x_i \equiv \frac{a_i}{\lambda - a_i} \quad (i=0.1.2.3).$$

Per mostrarne un'applicazione chiamiamo  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  i valori del parametro  $\lambda$  che competono ai punti  $P_1, P_2, P_3$  in cui la curva è tagliata dal piano  $\pi$  di equazione

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0.$$

Sussisteranno allora le 3 relazioni:

$$\sum_{i=0}^{i=3} \frac{\xi_i a_i}{\lambda_i - a_i} = 0 \quad (k=1.2.3).$$

Ora sottraendo la seconda di esse dalla terza si trova

$$\sum_{i=0}^{i=3} \frac{\xi_i a_i}{(\lambda_2 - a_i)(\lambda_3 - a_i)} = 0,$$

la quale dice che i punti  $P_2$  e  $P_3$  sono coniugati rispetto alla quadrica  $\Sigma$  di equazione

$$(b) \quad \sum_{i=0}^{i=3} \frac{\xi_i x_i^2}{a_i} = 0.$$

Similmente dimostrasi che lo sono  $P_3, P_1$  e  $P_1, P_2$ . Dunque il triangolo  $P_1 P_2 P_3$  è autoconiugato rispetto alla conica  $\Gamma$  in cui si tagliano  $\pi$  e  $\Sigma$ . Ora nella (b) non entrano le  $a$ , al variare di queste costanti, le (a)

Per semplificare la trovata rappresentazione parametrica eseguiamo la trasformazione di coordinate definita dalle formole

$$x_i = \sum_{k=0}^{k=3} a_{ik} x_k;$$

applicandole alla curva (6) si trovano le equazioni

$$\sum_{k=0}^{k=3} a_{ik} \lambda^k = \varrho \sum_{k=0}^{k=3} a_{ik} x_k$$

ossia

$$\sum_{k=0}^{k=3} (\varrho x_k - \lambda^k) a_{ik} = 0;$$

e queste, essendo il determinante  $\Delta$  non nullo, esigono si abbia

$$\varrho x_k = \lambda^k \quad (k=0.1.2.3).$$

Queste formole danno la rappresentazione parametrica canonica di qualunque cubica gobba; ne faremo applicazione scrivendole come segue:

$$(7) \quad \varrho x_i = \lambda^i \quad (i=0.1.2.3)$$

e più esplicitamente

$$(7') \quad \varrho x_0 = 1, \quad \varrho x_1 = \lambda, \quad \varrho x_2 = \lambda^2, \quad \varrho x_3 = \lambda^3;$$

p. es. ai valori  $\lambda=0$  e  $\lambda=\infty$  corrispondono i vertici  $A_0$  e  $A_4$  del tetraedro fondamentale<sup>1)</sup>.

rappresentano infinite cubiche gobbe passanti nei vertici del tetraedro fondamentale e per il punto  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ . Si giunge così al seguente teorema (analogo a quello di C. Sturm per le coniche: *Le  $\infty^3$  terne di punti in cui un piano arbitrario dello spazio è tagliato da tutte le cubiche gobbe circoscritte ad un pentagono gobbo, sono vertici di altrettanti triangoli autoconiugati rispetto ad una conica fissa* (Dixon, *On twisted cubics which fulfil certain given conditions*; *Quest. Journ. of Math.*, T. XXIII, 1889, p. 345).

<sup>1)</sup> Estendendo un procedimento ideato da O. Hesse (v. la nota *Ein Uebertragungsprinzip*, *Journ. f. Math.*, T. LXVI, oppure *Ges Werke*, München, 1897, p. 531-38) si possono rappresentare i punti dello spazio sopra le terne di punti di una retta  $r$ ; allora le terne di punti di  $r$  con un punto doppio corrispondono ai punti di una determinata superficie di quarto ordine, mentre quelle con punto triplo hanno per immagini i punti di una cubica gobba; ecc.

## § 3. Corde e tangenti.

Dalla (7') si trae

$$x_1^2 = x_0 x_2, \quad x_0 x_3 = x_1 x_2, \quad x_2^2 = x_1 x_3,$$

onde si può dire che la curva (7) appartiene alle  $\infty^2$  quadriche di equazione generale:

$$(6') \quad \begin{vmatrix} p & p' & p'' \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ove  $p, p', p''$  sono numeri qualsivogliano.

I punti in cui la data curva è tagliata dal piano

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

corrispondono ai valori di  $\lambda$  che sono radici dell'equazione

$$\xi_0 + \xi_1 \lambda + \xi_2 \lambda^2 + \xi_3 \lambda^3 = 0;$$

ora questa ha tre o una sola radice reale secondochè la funzione

$$(8) \quad R = (9 \xi_0 \xi_3 - \xi_1 \xi_2)^2 - 4 (3 \xi_0 \xi_2 - \xi_1^2) (3 \xi_1 \xi_3 - \xi_2^2) \leq 0;$$

onde quel piano taglia la data curva in tre od un punto reale secondochè la funzione  $R$  è negativa o positiva.

Cerchiamo quante corde della data curva passino per un punto arbitrario  $P$  dello spazio. A tale scopo chiamiamo  $x_0, x_1, x_2, x_3$  le coordinate di  $P$  e  $\lambda, \mu$  i valori del parametro che corrispondano agli estremi  $L$  e  $M$  di una delle corde cercate. Essendo  $P, L, M$  tre punti in linea retta saranno nulli i determinanti estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{vmatrix} = 0$$

per il che è necessario e sufficiente siano soddisfatte le due equazioni

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \mu & \mu^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \mu & \mu^2 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{cases} x_0 \lambda \mu - x_1 (\lambda + \mu) + x_2 = 0 \\ x_1 \lambda \mu - x_2 (\lambda + \mu) + x_3 = 0. \end{cases}$$

Emerge da ciò che  $\lambda$  e  $\mu$  sono le radici dell'equazione di secondo grado seguente:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dunque: per ogni punto dello spazio passa sempre una ed una sola corda di una cubica gobba; secondochè i suoi estremi sono reali od immaginari coniugati, la corda si dirà reale o ideale. Perciò la proiezione su un piano di una cubica gobba è una curva con punto doppio; questo è un nodo od un punto isolato secondochè la corda della linea obbiettiva che contiene il centro di proiezione è reale o ideale.

La corda della data cubica che passa per il punto  $P (x_0, x_1, x_2, x_3)$  può avere gli estremi coincidenti, essere cioè tangente; affinché questo accada la (9), considerata come equazione in  $\omega$ , deve avere due radici eguali: ciò esige si abbia

$$(10) \quad D \equiv (x_0 x_3 - x_1 x_2)^2 - 4 (x_0 x_2 - x_1^2) (x_1 x_3 - x_2^2) = 0.$$

Quest'equazione rappresenta l'equazione della superficie di quarto grado, luogo geometrico delle tangenti della data cubica; siccome è di quarto grado così ogni retta dello spazio è incontrata da quattro tangenti di una cubica gobba. Notisi che, se  $D$  non è nulla, secondochè è  $\geq 0$ , per il punto  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  passa una corda reale o ideale della cubica.

Per la corda che unisce i punti  $L, M$  passano i quattro piani rappresentati dalle equazioni

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{vmatrix} = 0;$$

essa può quindi individuarsi mediante le equazioni

$$\begin{cases} \lambda\mu x_0 - (\lambda + \mu)x_1 + x_2 = 0 \\ \lambda\mu x_1 - (\lambda + \mu)x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Di detta corda le coordinate  $\gamma_{ik}$  sono proporzionali ai determinanti estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{vmatrix};$$

tolto il fattore  $\lambda - \mu$  comune a tutti i detti determinanti e chiamato  $\sigma$  un fattore di proporzionalità si trova:

$$(11) \quad \begin{cases} \sigma p_{01} = 1 & \sigma p_{02} = \lambda + \mu & \sigma p_{03} = \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 \\ \sigma p_{23} = \lambda^2\mu^2 & \sigma p_{31} = -\lambda\mu(\lambda + \mu) & \sigma p_{12} = \lambda\mu. \end{cases}$$

Facendo coincidere gli estremi della corda si vede che la tangente in  $L$  alla data curva può rappresentarsi mediante le due equazioni

$$\begin{cases} \lambda^2 x_0 - 2\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ \lambda^2 x_1 - 2\lambda x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$$

p. es. nel punto  $A_0$  la tangente ha per equazioni  $x_2 = 0, x_3 = 0$ , onde coincide con lo spigolo  $A_0A_1$  del tetraedro fondamentale; invece nel punto  $A_3$  la tangente ha per equazioni  $x_0 = 0, x_1 = 0$ , onde coincide con lo spigolo  $A_3A_1$  dello stesso tetraedro. Supponendo ora nella (11)  $\mu = \lambda$  si ottengono le seguenti espressioni per le coordinate della tangente  $l$  alla curva nel punto corrispondente al valore  $\lambda$  del parametro:

$$(12) \quad \begin{cases} \sigma p_{01} = 1 & \sigma p_{02} = 2\lambda & \sigma p_{03} = 3\lambda^2 \\ \sigma p_{23} = \lambda^4 & \sigma p_{31} = -2\lambda^3 & \sigma p_{12} = \lambda^2. \end{cases}$$

Da queste si deducono le seguenti notevoli relazioni:

$$(12') \quad p_{03} = 3 p_{12}$$

$$(12'') \quad p_{01} p_{23} = \frac{p_{02} p_{31}}{-4} = \frac{p_{03} p_{11}}{3}$$

le quali ci dicono: *le tangenti di una cubica gobba appartengono tanto ad un complesso lineare, quanto ad un complesso tetraedrale.*

In virtù delle (12) la tangente  $m$  alla data cubica nel punto  $M$  di parametro  $\mu$  ha le coordinate  $q_{ik}$  date dalle formole

$$\begin{cases} \tau q_{01} = 1 & \tau q_{02} = 2\mu & \tau q_{03} = 3\mu^2 \\ \tau q_{23} = \mu^4 & \tau q_{31} = -2\mu^3 & \tau q_{12} = \mu^2 \end{cases}$$

$\tau$  essendo un fattore di proporzionalità. Per conseguenza

$$\sigma (p_{01} q_{23} + q_{01} p_{23} + p_{02} q_{31} + q_{02} p_{31} + p_{03} q_{12} + p_{12} q_{03}) = (\lambda - \mu)^4.$$

Ora l'esanomio posto al primo membro è una funzione (detta *invariante simultanea* delle due rette considerate) che si annulla sempre e soltanto quando le rette  $l, m$  si tagliano; indicandola con  $I_{lm}$  avremo

$$\sigma \tau I_{lm} = (\lambda - \mu)^4$$

ossia

$$\lambda - \mu = \sqrt[4]{\sigma \tau I_{lm}},$$

relazione la quale prova che gl' invarianti simultanei delle tangenti di una cubica gobba si comportano come i segmenti di una medesima retta; perciò, da ogni relazione fra tali punti si può trarre una relazione fra invarianti simultanei delle tangenti di una cubica gobba. Per esempio, dalla nota relazione

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0,$$

che sussiste fra quattro punti in linea retta, si deduce (dopo di avere soppresso un fattore non nullo comune a tutti i termini)

$$\sqrt[4]{I_{ab} \cdot I_{cd}} + \sqrt[4]{I_{ac} \cdot I_{db}} + \sqrt[4]{I_{ac} \cdot I_{bc}} = 0,$$

relazione che conduce all'importante conclusione seguente: *quattro tangenti di una cubica gobba sono rette fra loro non indi-*

pendenti <sup>1)</sup>. La relazione che le collega sotto forma razionale si scrive come segue:

$$[(U + V + W)^2 - 4(VW + WU + UV)]^2 - 128UVW(U + V + W) = 0$$

avendo posto per brevità

$$U = I_{ab} \cdot I_{cd}, \quad V = I_{ac} \cdot I_{db}, \quad W = I_{ad} \cdot I_{bc}.$$

#### § 4. Piani seganti, tangenti ed osculatori.

I tre punti  $L, M, N$  della curva che corrispondono ai valori  $\lambda, \mu, \nu$  del parametro determinano un piano di equazione:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \\ 1 & \nu & \nu^2 & \nu^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Svolgendo il primo membro secondo gli elementi della prima orizzontale e sopprimendo il fattore non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \mu & \mu^2 \\ 1 & \nu & \nu^2 \end{vmatrix}$$

si trova

$$(13) \quad \lambda \mu \nu x_0 - (\mu \nu + \nu \lambda + \lambda \mu) x_1 + (\lambda + \mu + \nu) x_2 - x_3 = 0.$$

Questa equazione dà luogo a parecchie conseguenze. Anzi tutto la si scriva sotto la seguente forma:

$$\lambda \{ \mu \nu x_0 - (\mu + \nu) x_1 + x_2 \} - \{ \mu \nu x_1 - (\mu + \nu) x_2 + x_3 \} = 0$$

e si attribuiscono al parametro  $\lambda$  quattro valori arbitrari  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ; si otterranno così le equazioni dei piani proiettanti dalla

<sup>1)</sup> A. Voss, *Ueber vier Tangenten einer Raumcurven dritter Ordnung*, Math. Annalen., T. XIII (1878), p. 168.

corda  $MN$  della curva i quattro corrispondenti punti  $L_1, L_2, L_3, L_4$  della stessa. Ora il birapporto di quei quattro piani è dato da  $\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4} : \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4}$  onde non varia mutando la corda  $MN$ ; ciò si esprime dicendo: *il fascio che risulta dal proiettare quattro punti di una cubica gobba da una corda di questa ha un birapporto indipendente da tale corda*; lo si può chiamare *birapporto dei quattro punti della cubica*.

Supponiamo ora che i parametri  $\mu, \nu$  tendano a coincidere; al limite il piano (13) sarà *tangente*. Se, ancor più in particolare, supponiamo che  $\mu$  e  $\nu$  tendano entrambi ad assumere il valore  $\lambda$ , il piano  $LMN$  avrà per posizione limite *l'osculatore* in  $\lambda$ , mentre la (13) finirà per assumere il seguente aspetto:

$$(14) \quad \lambda^3 x_0 - 3\lambda^2 x_1 + 3\lambda x_2 - x_3 = 0;$$

per conseguenza le coordinate del piano che oscula nel punto  $L$  di parametro  $\lambda$  la data cubica ha coordinate della seguente forma:

$$(15) \quad r\xi_0 = \lambda^3, \quad r\xi_1 = -3\lambda^2, \quad r\xi_2 = 3\lambda, \quad r\xi_3 = -1,$$

espressioni di cui è evidente l'analogia con le equazioni (7). P. es. le equazioni dei piani osculatori nei punti  $A_0$  e  $A_4$  si ottengono supponendo  $\lambda = 0$  o  $\infty$ , onde sono rispetti.  $x_3 = 0$  o  $x_0 = 0$ , perciò quei piani coincidono con le facce  $A_0A_1A_2$  e  $A_1A_2A_3$  del tetraedro fondamentale. E poichè vedemmo che le tangenti in  $A_0$  e  $A_3$  sono le rette  $A_0A_1$  e  $A_2A_3$  così *il tetraedro fondamentale è (v. Cap. I, § 7) il tetraedro di osculazione relativo alla corda  $A_0A_2$*  <sup>1)</sup>.

Siccome dalle (15) seguono le altre:

$$3\xi_0\xi_2 - \xi_1^2 = 0, \quad 9\xi_0\xi_3 - \xi_1\xi_2 = 0, \quad 3\xi_1\xi_3 - \xi_2^2 = 0$$

<sup>1)</sup> Quando si assumono per facce del tetraedro di riferimento gli osculatori in quattro punti reali della curva, la rappresentazione parametrica della curva assume il seguente notevole aspetto:

$$x_i \equiv a_i (\lambda - \alpha_i)^3 \quad (i = 0.1.2.3)$$

così si vede che gli osculatori della data cubica gobba toccano le  $\infty^2$  quadriche di equazione generale

$$(16) \quad \begin{vmatrix} \pi & \pi' & \pi'' \\ 3\xi_0 & \xi_1 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & 3\xi_3 \end{vmatrix} = 0$$

ove  $\pi, \pi', \pi''$  sono numeri qualsivogliano; tali superficie costituiscono un sistema lineare doppiamente infinito (o tessuto) di quadriche.

Se nell'equazione (14) si suppongono date le  $x$  essa servirà a determinare i punti di contatto dei piani che osculano la data curva e passano per il punto  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ; e poichè essa è cubica, tali punti sono in numero di tre; perciò le cubiche gobbe sono curve di terza classe. Ora la citata equazione (14) ammette una o tre radici reali secondochè la quantità  $D$  definita dall'equazione (10) è positiva o negativa; combinando questa ad altra precedente osservazione si giunge al seguente teorema:

*Per un punto arbitrario dello spazio si possono condurre uno o tre osculatori di una cubica gobba secondochè per quel punto passa una corda reale o ideale della curva<sup>1)</sup>.*

Nella (14) mutiamo, per maggiore chiarezza,  $x$  in  $y$  e indichiamo con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  le radici della risultante equazione; si avrà

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{3y_1}{y_0}, \quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = \frac{3y_2}{y_0}, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{y_3}{y_0}.$$

I punti  $L_1, L_2, L_3$  di parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  determinano un piano che, in forza della (13), ha la seguente equazione:

$$\frac{y_3}{y_0} x_0 - \frac{3y_2}{y_0} x_1 + \frac{3y_1}{y_0} x_2 - x_3 = 0$$

<sup>1)</sup> Applicando questo risultato alla proiezione si ottiene la proposizione: una cubica piana con punto doppio possiede uno o tre punti d'inflexione reali secondochè quel punto singolare è un nodo od un punto isolato.

ovvero

$$y_3 x_0 - 3y_2 x_1 + 3y_1 x_2 - y_0 x_3 = 0.$$

Ora questa equazione definisce una correlazione nello spazio e siccome è soddisfatta facendovi  $x_i = y_i$  così la quadrica dei punti uniti è indeterminata; da tutto ciò il seguente teorema:

*Da un punto qualunque P dello spazio partono tre osculatori di una cubica gobba; i loro punti di contatto determinano un piano  $\pi$  che passa per P e corrisponde a questo punto in una determinata correlazione nulla dello spazio. Tale corrispondenza è annessa ad un complesso lineare, cioè a quello di equazione*

$$(12') \quad p_{03} - 3p_{12} = 0,$$

che già incontrammo (v. p. 83).

Continuiamo ad applicare le formole trovate. Gli osculatori nei punti corrispondenti ai valori  $\lambda, \mu$  del parametro si tagliano in una retta detta *asse della curva*; per rappresentarla servono le due equazioni

$$\begin{cases} \lambda^3 x_0 - 3\lambda^2 x_1 + 3\lambda x_2 - x_3 = 0 \\ \mu^3 x_0 - 3\mu^2 x_1 + 3\mu x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

perciò le sue coordinate  $\pi_{ik}$  sono date dai determinanti estratti dalla seguente matrice:

$$\begin{vmatrix} \lambda^3 & -3\lambda^2 & 3\lambda & -1 \\ \mu^3 & -3\mu^2 & 3\mu & -1 \end{vmatrix},$$

onde hanno le seguenti espressioni

$$(17) \quad \begin{cases} \pi_{01} \equiv p_{23} \equiv 3\lambda^2\mu^2, & \pi_{02} \equiv p_{31} \equiv 3\lambda\mu(\lambda + \mu), & \pi_{03} \equiv p_{12} \equiv -(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) \\ \pi_{23} \equiv p_{01} \equiv -3, & \pi_{31} \equiv p_{02} \equiv -3(\lambda + \mu), & \pi_{12} \equiv p_{03} \equiv -\lambda\mu \end{cases}$$

Consideriamo invece i piani che osculano la curva nei punti corrispondenti ai valori  $\lambda, \mu, \nu$  del parametro; le loro equazioni sono:

$$\begin{cases} \lambda^3 x_0 - 3\lambda^2 x_1 + 3\lambda x_2 - x_3 = 0 \\ \mu^3 x_0 - 3\mu^2 x_1 + 3\mu x_2 - x_3 = 0 \\ \nu^3 x_0 - 3\nu^2 x_1 + 3\nu x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$



risolvendole si vede che le coordinate del punto  $P$  d'intersezione di quei tre osculatori sono determinate dalle relazioni

$$(18) \quad \frac{x_0}{3} = \frac{x_1}{\lambda + \mu + \nu} = \frac{x_2}{\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu} = \frac{x_3}{\lambda\mu\nu};$$

ricordando la (13) si vede che il punto  $P$  appartiene al piano  $LMN$ , ciò che si esprime dicendo: *gli osculatori in tre punti di una cubica gobba si tagliano in un punto del piano determinato dai punti di contatto di quei piani.*

Invece che con le (18) il punto  $P$  può determinarsi mediante la seguente equazione

$$(18') \quad 3\xi_0 + (\lambda + \mu + \nu)\xi_1 + (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)\xi_2 + \lambda\mu\nu\xi_3 = 0;$$

la si scriva sotto la forma equivalente

$$\{3\xi_0 + (\mu + \nu)\xi_1 + \mu\nu\xi_2\} + \lambda\{\xi_1 + (\mu + \nu)\xi_2 + \mu\nu\xi_3\} = 0$$

e si attribuiscono al parametro  $\lambda$  quattro valori arbitrari  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ; si otterranno così quattro punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$  situati sull'asse in cui si tagliano gli osculatori alla data curva nei punti  $M, N$  corrispondenti ai valori  $\mu, \nu$  del parametro; quei quattro punti formano un birapporto il cui valore è  $\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_4}$ :

$\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_4}$ ; ora siccome questo non dipende dai valori di  $\mu, \nu$  così si conclude: *la punteggiata che risulta dal segare quattro osculatori di una cubica gobba con un asse di questa ha un birapporto il cui valore è indipendente da tale asse; lo si può chiamare birapporto dei quattro considerati osculatori e se ne può dedurre che una cubica gobba, considerata come involuppo dei suoi osculatori, può generarsi mediante i piani ognuno dei quali contiene tre punti corrispondenti in tre punteggiate proiettive ad assi sghembi. E da ciò, con una considerazione analitica del tutto analoga ad altra fatta sulle equazioni (3), (4), si deduce che gli  $\infty$  osculatori di una cubica possono ottenersi come piani ognuno dei quali contiene due rette corrispondenti in due sistemi piani fra loro proiettivi.*

L'analogia, che le considerazioni precedenti manifestano, fra le corde e gli assi di una cubica gobba suggerisce la questione:

*quanti assi cadono in un piano arbitrario dello spazio? Per risolverla consideriamo il piano  $\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ , nonchè l'asse comune ai due osculatori*

$$\lambda^3 x_0 - 3\lambda^2 x_1 + 3\lambda x_2 - x_3 = 0$$

$$\mu^3 x_0 - 3\mu^2 x_1 + 3\mu x_2 - x_3 = 0$$

Se questo sta in quello, vuol dire che il piano considerato appartiene al fascio determinato da questi due osculatori e affinché ciò accada debbono risultare nulli tutti i determinanti estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \lambda^3 & -3\lambda^2 & 3\lambda & -1 \\ \mu^3 & -3\mu^2 & 3\mu & -1 \end{vmatrix};$$

e per ciò basta che sussistano le due equazioni

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \lambda^2 & -3\lambda & 3 \\ \mu^2 & -3\mu & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -3\lambda^2 & 3\lambda & -1 \\ -3\mu^2 & 3\mu & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

le quali semplificate divengono

$$3\xi_0 + (\lambda + \mu)\xi_1 + \lambda\mu\xi_2 = 0, \quad \xi_1 + (\lambda + \mu)\xi_2 + 3\lambda\mu\xi_3 = 0.$$

Ricavando da queste equazioni i valori di  $\lambda + \mu$  e  $\lambda\mu$  si vede che i parametri  $\lambda, \mu$  che individuano uno dei cercati assi sono radici della seguente equazione in  $\omega$ :

$$(18) \quad \begin{vmatrix} \omega^2 & -\omega & 1 \\ 3\xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & 3\xi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dunque: *in un piano qualunque dello spazio si trova sempre uno ed un solo asse di una cubica gobba. Secondochè i punti di contatto dei corrispondenti piani osculatori sono reali o immaginari coniugati l'asse si dirà reale o ideale. Ora l'equazione (18) ha per discriminante la funzione*

$$R = (9\xi_0\xi_3 - \xi_1\xi_2)^2 - 4(3\xi_1\xi_3 - \xi_2^2)(3\xi_0\xi_2 - \xi_1^2)$$

onde, l'asse suddetto è reale o ideale secondochè  $R \geq 0$ . Ma vedremo che il piano  $\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$  taglia la cubica in tre od in un solo punto reale appunto secondochè è  $R \geq 0$ ; perciò si conclude: *un piano qualunque dello spazio contiene un asse reale o ideale di una cubica gobba secondochè esso taglia la curva in uno o tre punti reali.*

Le esposte relazioni fra i punti di una cubica gobba e gli osculatori della stessa e quelle in cui intervengono inoltre punti e piani dello spazio mostrano che quella curva, considerata come luogo ed involuppo, è un ente autocorrelativo, in cui ai punti corrispondono gli osculatori, alle corde corrispondono gli assi, alle tangenti le tangenti. Esse danno luogo a molte altre conseguenze, di cui ci limiteremo a riferire le seguenti:

a) Siano  $A, B, C, D$  quattro punti della curva;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  i piani delle facce del tetraedro di cui questi punti sono vertici;  $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$  siano i piani che osculano la data curva nei punti  $A, B, C, D$ ; essi determinano un nuovo tetraedro i cui vertici indicheranno risp. con  $A', B', C', D'$ . In virtù di quanto si è visto il punto  $A'$  punto comune ai piani  $\beta', \gamma', \delta'$  che osculano la curva ne' punti  $B, C, D$  appartiene al piano  $BCD = \alpha$ ; similmente  $B'$  sta in  $\beta$ ,  $C'$  in  $\gamma$  e  $D'$  in  $\delta$ . Ora siccome  $A' \equiv \beta' \gamma' \delta'$  sta in  $\alpha$ , cioè i quattro piani  $\alpha, \beta', \gamma', \delta'$  passano per un punto, così  $A, B', C', D'$  saranno quattro punti coplanari, onde il punto  $A$  sta nel piano  $B'C'D' = \alpha'$ : così  $B$  appartiene a  $\beta'$ ,  $C$  a  $\gamma'$  e  $D$  a  $\delta'$ . Tutto ciò prova che *i due tetraedri  $ABCD, A'B'C'D'$  sono mutuamente inscritti e circoscritti l'uno all'altro.* In memoria del loro scopritore si chiamano *tetraedri di Möbius*; essi si corrispondono rispetto al complesso lineare determinato dalla data cubica.

Essendo ogni coppia individuata dalla conoscenza dei vertici dell'uno, i quali sono punti arbitrari della data cubica; così da ogni cubica gobba si possono dedurre  $\infty^4$  tetraedri di Möbius.

b) Da un punto arbitrario  $P$  dello spazio si possono condurre tre osculatori alla data cubica, se ne chiamino  $I_1, I_2, I_3$  i punti di contatto, mentre si indichino con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  i valori del parametro  $\lambda$  relativi a questi punti. Dato il punto  $P$

risultano individuati i numeri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ; inversamente, se si conoscono questi numeri, sono determinati i punti  $I_1, I_2, I_3$  ed i corrispondenti osculatori di  $\Gamma$  s'intersecano in un punto determinato ed unico. In conseguenza i tre numeri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  si possono assumere come coordinate del punto  $P$ ; esso risulta reale se questi numeri sono reali, oppure se uno è reale e gli altri due sono immaginari coniugati. Analogamente come coordinate di un piano si possono assumere i valori del parametro  $\lambda$  relativi ai tre punti in cui quel piano taglia la curva  $\Gamma$ ; se quel piano è reale questi valori sono o tutti reali oppure uno è reale e gli altri due immaginari coniugati. — Questo sistema di coordinate si presta egregiamente allo studio dei poliedri inscritti o circoscritti ad una cubica gobba<sup>1</sup>).

#### § 5. Punti e piani congiunti.

Ad un'estesa ed importante categoria di proprietà delle cubiche gobbe si perviene come segue<sup>2</sup>):

Sia  $\tau$  il piano che oscula la data cubica gobba  $\Gamma$  nel punto che corrisponde al valore  $\omega$  del parametro; la sua equazione è:

$$(19) \quad \omega^3 x_0 - 3 \omega^2 x_1 + 3 \omega x_2 - x_3 = 0;$$

esso taglia la superficie di quarto grado — v. eq. (10) — costituita dalle tangenti di  $\Gamma$ , oltre che nella corrispondente generatrice, in una conica  $\Delta$ , la quale è involupata dalle tracce sul piano  $\tau$  degli  $\infty^1$  osculatori di  $\Gamma$ , cioè dai piani che, al variare di  $\lambda$ , sono rappresentati dall'equazione

$$\lambda^3 x_0 - 3 \lambda^2 x_1 + 3 \lambda x_2 - x_3 = 0.$$

La proiezione  $\Delta'$  di  $\Delta$  fatta dal vertice  $A_3$  del tetraedro fondamentale sopra la faccia opposta è l'involuppo della retta

<sup>1</sup>) L. Cremona, *Sulle superficie e le curve che passano per i vertici d'infiniti poliedri formati da piani osculatori di una cubica gobba* (Rend. Ist. Lomb., Ser. II, Vol. XII, 1879; oppure Opere, T. III, 1917, p. 437-42).

<sup>2</sup>) L. Cremona, *Sulle linee di terz'ordine a doppia curvatura* (Ann. di Matem., T. I, 1858, p. 62 e segg.; oppure Opere, T. I, 1914, p. 39-69).

rappresentata, al variare di  $\lambda$ , dall'equazione proveniente dall'eliminazione di  $x_3$  fra le due precedenti equazioni, cioè dall'equazione

$$(\omega^2 + \omega\lambda + \lambda^2)x_0 - 3(\omega + \lambda)x_1 + 3x_2 = 0;$$

in conseguenza l'equazione di  $\Delta'$  si ottiene eguagliando a 0 il discriminante di questa equazione in  $\lambda$ , perciò è

$$(20) \quad (x_1 - \omega x_0)^2 - 4(x_1^2 - x_0 x_2) = 0.$$

Consideriamo poi il piano  $\pi$  rappresentato dall'equazione

$$(21) \quad x_2 - h x_1;$$

il polo  $P$  della retta  $\pi\tau$  rispetto alla conica  $\Delta$  ha per proiezione sul piano  $A_0A_1A_2$  il polo rispetto a  $\Delta'$  dell'analoga proiezione di quella retta; ora tale retta nel piano anzidetto è ancora rappresentata dall'equazione (21); perciò le coordinate di  $P'$ , nel piano  $A_0A_1A_2$ , essendo quelle del polo della retta (21) rispetto alla curva (20), sono determinate come segue:

$$\frac{x_0}{3} = \frac{x_1}{2h - \omega} = \frac{x_2}{\omega(h - 2\omega)}.$$

Queste relazioni determinano anche le tre prime coordinate del punto  $P$ ; la quarta se ne deduce tenendo conto del fatto che il punto  $P$  appartiene al piano  $\tau$ ; per il punto  $P$  si ha quindi:

$$x_0 \equiv -3, \quad x_1 \equiv \omega - 2h, \quad x_2 \equiv \omega(2\omega - h), \quad x_3 \equiv 3h\omega^2.$$

Essendo tali espressioni quadratiche in  $\omega$ , così, al variare del piano  $\tau$ , rappresentano una conica  $\Delta$  la quale, per quanto si vide nel Cap. III, sta nel piano  $\pi_1$  di equazione

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -3 & -2h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3h \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$(22) \quad 2h^3x_0 - 3h^2x_1 - 3hx_2 + 2x_3 = 0,$$

ed è ulteriormente determinata dalla sua proiezione sul piano  $A_0A_1A_2$

$$(23) \quad x_0x_3 + h(3x_1 - 2hx_0)^2 = 0.$$

Raccogliendo le cose testè esposte, dopo avere notato che  $\pi$  è un piano arbitrario dello spazio, si ha il seguente

**TEOREMA.** *Il luogo geometrico dei poli di un piano rispetto alle  $\infty'$  coniche nelle quali gli osculatori di una cubica gobba segano la relativa sviluppabile osculatrice è una conica.*

Fra il piano  $\pi$  di partenza e quello  $\pi_1$  a cui si è ora giunti passa una relazione geometrica della massima importanza, la quale si pone in luce mediante le considerazioni che seguono: Il piano  $\pi$  taglia la data cubica in tre punti  $A, B, C$  i cui parametri  $\alpha, \beta, \gamma$  sono radici dell'equazione cubica

$$\lambda^3 - h\lambda = 0$$

onde sono dati rispett. da

$$\alpha = 0, \quad \beta = h, \quad \gamma = \infty.$$

Invece i valori  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  del parametro relativi alle intersezioni della stessa curva col piano  $\pi_1$  sono radici dell'equazione

$$2h^3 - 3h^2\lambda - 3h\lambda^2 + 2\lambda^3 = 0$$

onde

$$\alpha_1 = 2h, \quad \beta_1 = -h, \quad \gamma_1 = \frac{h}{2}$$

ora da queste si traggono le relazioni seguenti:

$$(24) \quad \begin{cases} (\alpha\alpha_1\beta\gamma) = -1, & (\beta\beta_1\gamma\alpha) = -1, & (\gamma\gamma_1\alpha\beta) = -1 \\ (\alpha_1\alpha\beta_1\gamma_1) = -1, & (\beta_1\beta\gamma_1\alpha_1) = -1, & (\gamma_1\gamma\alpha_1\beta_1) = -1, \end{cases}$$

le quali mettono in evidenza che  $\pi$  e  $\pi_1$  sono fra di loro in posizione scambievole; in conseguenza nel piano  $\pi$  si troverà la conica luogo dei poli del piano  $\pi_1$  rispetto alle  $\infty'$  coniche appartenenti alla sviluppabile osculatrice della cubica  $I'$ . Da ciò rimane giustificata la denominazione di *congiunti* data ai due piani  $\pi$  e  $\pi_1$ .

Le relazioni (24) permettono di determinare il piano  $\pi_1$  congiunto ad un piano arbitrario  $\pi$ . Si supponga, infatti, che questo intersechi la data cubica ne' punti aventi per parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e si sostituisca, nella rappresentazione parametrica di  $\Gamma_3$  a  $\lambda$  il parametro  $\mu$  definito dalla formola:

$$\lambda = \frac{\gamma(\alpha - \beta)\mu + h\alpha(\beta - \gamma)}{(\alpha - \beta)\mu + h(\beta - \gamma)};$$

allora a  $\mu = 0, h, \infty$  corrispondono risp. i valori  $\lambda = \alpha, \beta, \gamma$ ; onde questa nuova rappresentazione parametrica di  $\Gamma$  riconduce alle ipotesi su cui riposano le considerazioni precedenti; sussistono quindi le (24), le quali danno:

$$\alpha_1 = \frac{2\beta\gamma - \alpha(\beta + \gamma)}{2\alpha - (\beta + \gamma)}, \beta_1 = \frac{2\gamma\alpha - \beta(\gamma + \alpha)}{2\beta - (\gamma + \alpha)}, \gamma_1 = \frac{2\alpha\beta - \gamma(\alpha + \beta)}{2\gamma - (\alpha + \beta)}$$

e viceversa

$$\alpha = \frac{2\beta_1\gamma_1 - \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1)}{2\alpha_1 - (\beta_1 + \gamma_1)}, \beta = \frac{2\gamma_1\alpha_1 - \beta_1(\gamma_1 + \alpha_1)}{2\beta_1 - (\gamma_1 + \alpha_1)}, \gamma = \frac{2\alpha_1\beta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)}{2\gamma_1 - (\alpha_1 + \beta_1)}.$$

I piani  $\pi$  e  $\pi_1$ , al pari di tutti i piani dello spazio, contengono ciascuno un asse della data cubica; per trovarli serve l'equazione (18), la quale nei due casi considerati diviene:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & -\omega & 1 \\ 0 & -h & 1 \\ -h & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \omega^2 & -\omega & 1 \\ 2h^3 & -h^2 & -h \\ -h^2 & -h & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

ora queste coincidono nella seguente

$$(25) \quad \omega^2 + h\omega + h^2 = 0$$

epperò l'intersezione di due piani congiunti rispetto ad una cubica gobba è un asse della stessa. Dette  $\omega'$  e  $\omega''$  le radici della (25) gli osculatori  $\tau'$ ,  $\tau''$  segantisi in quest'asse hanno per equazioni risp.

$$\xi'_x \equiv \omega'^3 x_0 - 3\omega'^2 x_1 + 3\omega' x_2 - x_3 = 0$$

$$\xi''_x \equiv \omega''^3 x_0 - 3\omega''^2 x_1 + 3\omega'' x_2 - x_3 = 0$$

ossia (per essere  $\omega'^2 + h\omega' + h^2 = 0$ ,  $\omega''^2 + h\omega'' + h^2 = 0$ )

$$\xi'_x \equiv -h^3 x_0 + 3h(\omega' + h)x_1 - 3\omega' x_2 - x_3 = 0$$

$$\xi''_x \equiv -h^3 x_0 + 3h(\omega'' + h)x_2 - 3\omega'' x_2 - x_3 = 0.$$

Ora, tenendo conto dell'essere  $\omega' + \omega'' = -h$ , da queste si trae:

$$\xi'_x - \xi''_x = 3(hx_1 - x_2)$$

$$\xi'_x + \xi''_x = 3(2h^3 x_0 - 3h^2 x_1 - 3hx_2 + 2x_3);$$

le quantità in parentesi essendo i primi membri delle equazioni (21) e (22), che rappresentano i piani  $\pi$  e  $\pi_1$ , resta dimostrato che questi formano un fascio armonico con gli osculatori  $\tau'$  e  $\tau''$ : possiamo quindi completare il risultato precedente affermando che due piani congiunti rispetto ad una cubica gobba si tagliano in un asse di tale curva e sono coniugati armonicamente rispetto ai due osculatori della curva intersecantisi in questo asse.

Le considerazioni che ci guidarono alla nozione ed alle proprietà dei piani congiunti rispetto ad una cubica ne ammettono altrettante di correlative le quali portano al seguente risultato: *L'inviluppo dei piani polari di un punto arbitrario P rispetto agli  $\infty'$  coni quadrici proiettanti una cubica gobba è un cono di second'ordine avente per vertice un punto P', che dicesi congiunto di P rispetto alla curva; P e P' appartengono ad una determinata corda della curva stessa e sono coniugati armonicamente rispetto agli estremi della medesima.*

Volendo stabilire direttamente questo risultato si può seguire il procedimento seguente, che giudichiamo opportuno esporre perchè insegna formole utili in molti casi. L'equazione (13) mostra che il piano il quale sega la data cubica in  $L$  e la tocca in  $M$  ha per equazione:

$$\lambda\mu^2 x_0 - (\mu^2 + 2\lambda\mu)x_1 + (\lambda + 2\mu)x_2 - x_3 = 0$$

ossia

$$(\lambda x_0 - x_1)\mu^2 - 2(\lambda x_1 - x_2)\mu + (\lambda x_2 - x_3) = 0;$$

variando  $\mu$  si ottengono da questa equazione gli  $\infty'$  piani tangenti dalla data cubica uscenti dal punto  $L$ ; il loro involuppo è il cono proiettante la curva da questo punto, epperò questo è rappresentato dal discriminante della precedente equazione eguagliato a 0, cioè come segue:

$$(\lambda x_1 - x_2)^2 - (\lambda x_0 - x_1)(\lambda x_2 - x_3) = 0.$$

Il piano polare rispetto a questo cono del punto  $P (y_0, y_1, y_2, y_3)$  ha per equazione:

$$(-\lambda^2 y_2 + \lambda y_3) x_0 + (2\lambda^2 y_1 - \lambda y_2 - y_3) x_1 + (-\lambda^2 y_0 - \lambda y_1 + 2y_2) x_2 + (\lambda y_0 - y_1) x_3 = 0;$$

al variare di  $\lambda$  questo piano involuppa un cono il cui vertice ha le seguenti coordinate:

$$(26) \quad \begin{cases} y'_0 \equiv 2y_1^2 - 3y_0y_1y_2 + y_0^2y_3 \\ y'_1 \equiv y_1^2y_2 - 2y_0y_2^2 + y_0y_1y_3 \\ y'_2 \equiv y_1y_2^2 + 2y_1^2y_3 - y_0y_2y_3 \\ y'_3 \equiv 2y_2^3 + 3y_1y_2y_3 - y_0y_3^2 \end{cases}$$

Queste relazioni determinano analiticamente il punto  $P'$  congiunto di  $P$  rispetto alla data curva. La retta  $PP'$  è una corda  $LM$  della data cubica ed i quattro punti  $P, P', L, M$  sono armonici;  $P'$  appartiene quindi al piano polare di  $P$  rispetto ad una qualunque delle  $\infty^2$  quadriche passanti per  $\Gamma$ . L'equazione generale di tali superficie è la (6'), onde la rete da esse costituita può intendersi individuata dalle tre superficie

$$x_1x_3 - x_2^2 = 0, \quad x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \quad x_0x_2 - x_1^2 = 0$$

e  $P'$  può intendersi definito come il punto comune ai tre piani polari di  $P$  rispetto a queste tre superficie, vale a dire ai tre seguenti piani:

$$(26') \quad \begin{aligned} x_1y_3 + x_2y_1 - 2x_2y_2 = 0, \quad x_0y_3 + x_2y_0 - x_1y_2 - x_2y_1 = 0, \\ x_0y_2 + x_2y_0 - 2x_1y_1 = 0; \end{aligned}$$

risolvendo queste equazioni rispetto alle  $x$  si ricade nella (26). — Le equazioni (26') definiscono una corrispondenza involutoria nello spazio, tale che ai piani vengono associate  $\infty^3$  superficie cubiche. Correlativamente la considerazione delle coppie di piani congiunti dà origine ad una analoga trasformazione cubica fra i piani dello spazio la cui rappresentazione analitica può ottenersi come segue: Tutti gli osculatori della data cubica toccano le  $\infty^2$  quadriche rappresentate dall'equazione (16), in particolare le tre seguenti:

$$3\xi_1\xi_3 - \xi_2^2 = 0, \quad 9\xi_0\xi_3 - \xi_1\xi_2 = 0, \quad 3\xi_0\xi_2 - \xi_1^2 = 0;$$

i poli di un piano qualunque  $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$  rispetto ad esse hanno per equazioni rispett.

$$\begin{aligned} 3(\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1) - 2\xi_2\eta_2 = 0, \quad 9(\xi_0\eta_3 + \xi_3\eta_0) - (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) = 0, \\ 3(\xi_0\eta_2 + \xi_2\eta_0) - 2\xi_1\eta_1 = 0, \end{aligned}$$

epperò determinano un piano che è il congiunto di quello considerato e di cui l'equazione è evidentemente la seguente:

$$(27) \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 3\eta_3 & -2\eta_2 & -\eta_3 \\ 9\eta_3 & -\eta_2 & -\eta_1 & 9\eta_0 \\ 3\eta_2 & -2\eta_1 & 3\eta_0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

svolvendo il primo membro secondo gli elementi della prima orizzontale i coefficienti di  $x_0, x_1, x_2, x_3$  si avranno le coordinate del piano congiunto a quello di coordinate  $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$  cioè la rappresentazione analitica dell'anzidetta corrispondenza involutoria dello spazio di piani <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Data una cubica gobba  $\Gamma$ , si prendano su di essa sei punti arbitrari 1, 2, ..., 6 e si considerino le  $\infty^3$  quadriche passanti per tali punti, nonchè la superficie di 4° ordine  $\Sigma$  luogo dei centri dei coni passanti per detti punti. Per  $\Gamma$  e le due corde 34, 56 passa una quadrica, la quale taglia ancora  $\Sigma$  in una cubica gobba  $\Delta$ , i cui punti sono a due a due congiunti rispetto a  $\Gamma$ . Così si ottengono le  $\infty^4$  le cubiche gobbe congiunte alla data. T. Reye, *Ueber Beziehungen zwischen kubischen Raumkurven*, II (Math. Annalen, T. LXXV, 1914, p. 568-91).

§ 6. *Collineazioni e correlazioni*

che mutano in sè stessa una cubica gobba.

Una collineazione dello spazio è determinata quando, di cinque punti scelti ad arbitrio, si diano i corrispondenti; perciò dipende da 15 costanti. Affinchè essa muti una data cubica gobba in altra è necessario e sufficiente che trasformi sei punti scelti ad arbitrio sulla prima in altrettanti appartenenti alla seconda; ciò esige siano soddisfatte 12 condizioni. Da ciò si deduce che: *Esistono  $\infty^3$  collineazioni che trasformano una cubica gobba in altra; perciò tutte le cubiche gobbe sono fra loro proiettivamente identiche. In particolare: Una cubica gobba è trasformata in sè stessa da  $\infty^3$  collineazioni.*

Se il punto  $L$  della data cubica  $\Gamma$  si muta nel punto  $M$  della stessa, fra i corrispondenti parametri  $\lambda, \mu$  passa una relazione della forma

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

ove  $a, b, c, d$  sono costanti arbitrarie, la quale determina una proiettività fra i punti di  $\Gamma$ . Viceversa, fissata che sia una tale corrispondenza fra i punti di  $\Gamma$ , resta individuata una collineazione dello spazio, che può costruirsi come segue: a) Si consideri un punto qualunque  $P$ ; siano  $L_1, L_2, L_3$  i punti di contatto degli osculatori di  $\Gamma$  passanti per  $P$  e  $M_1, M_2, M_3$  i loro corrispondenti nella presupposta proiettività; i piani che osculano  $\Gamma$  in tali punti s' incontrano nel punto  $Q$  corrispondente a  $P$ . b) Se un piano  $\lambda$  taglia la cubica nei punti  $L_1, L_2, L_3$  ad esso corrisponde il piano  $\mu$  che passa per i punti  $M_1, M_2, M_3$  che a questi corrispondono nell'ipotetica proiettività. Le formole che stabiliscono la collineazione di cui è parola si possono ottenere come segue: Se  $y_0y_1y_2y_3$  e  $z_0z_1z_2z_3$  sono le coordinate dei punti  $P, Q$  i parametri dei punti  $L_1, L_2, L_3$  sono radici dell'equazione

$$y_0\lambda^3 - 3y_1\lambda^2 + 3y_2\lambda - y_3 = 0,$$

mentre quelli relativi ai punti  $M_1, M_2, M_3$  sono radici dell'equazione

$$z_0\mu^3 - 3z_1\mu^2 + 3z_2\mu - z_3 = 0$$

ora, per le fatte ipotesi, se in questa si sostituisce il valore

$$\mu = -\frac{b\lambda + d}{a\lambda + c},$$

si deve ricadere nella precedente. Fatto il calcolo ed eseguita l'identificazione si trovano le relazioni seguenti:

$$(28) \begin{cases} y_0 \equiv b^3z_0 + b^2az_1 + ba^2z_2 + a^3z_3 \\ y_1 \equiv 3b^2dz_0 + b(2ad + bc)z_1 + a(ad + 2bc)z_2 + 3a^2cz_3 \\ y_2 \equiv 3bd^2z_0 + d(ad + 2bc)z_1 + c(2ad + bc)z_2 + 3ac^2z_3 \\ y_3 \equiv d^3z_0 + d^2cz_1 + dc^2z_2 + c^3z_3 \end{cases}$$

le quali rappresentano la collineazione di cui si tratta. Esse provano che, in coordinate di piani, la stessa è rappresentabile mediante queste altre formole:

$$(28') \begin{cases} \zeta_0 \equiv b^3\eta_0 + 3b^2d\eta_1 + 3bd^2\eta_2 + d^3\eta_3 \\ \zeta_1 \equiv b^2a\eta_0 + b(2ad + bc)\eta_1 + a(ad + 2bc)\eta_2 + d^2c\eta_3 \\ \zeta_2 \equiv ba^2\eta_0 + a(ad + 2bc)\eta_1 + c(2ad + bc)\eta_2 + dc^2\eta_3 \\ \zeta_3 \equiv a^3\eta_0 + 3a^2c\eta_1 + 3ac^2\eta_2 + c^3\eta_3 \end{cases}$$

Ragionando in modo analogo al precedente si vede che: *Vi sono  $\infty^3$  correlazioni ognuna delle quali muta una cubica gobba nella sua sviluppabile osculatrice; facendo corrispondere ad ogni punto della curva il punto di contatto del corrispondente osculatore si stabilisce una proiettività fra i punti della curva; viceversa: ogni tale corrispondenza dà origine ad una delle correlazioni anzidette. Queste sono rappresentate o dalle equazioni (28) in cui si legga  $\eta$  in luogo di  $y$  o dalla (28') in cui si faccia il cambiamento inverso. Cubiche gobbe speciali ammettono altre trasformazioni in sè stesse; così, se per individuare una di tali curve si scelgono tre punti arbitrari ed i loro simme-*

trici rispetto ad un asse si ottiene una cubica gobba godente di simmetria ortogonale rispetto a questa retta ed avente altre notevoli proprietà<sup>1)</sup>.

Finiamo notando che, accoppiando in involuzione i punti od i piani osculatori di una cubica gobba, si ottengono infinite rette costituenti speciali superficie rigate; esse sono di sesto grado, come il lettore potrà verificare.

### § 7. Proprietà metriche delle cubiche gobbe.

Nuove proprietà delle cubiche gobbe si ottengono supponendo che alcuni degli elementi considerati si trovino all'infinito o considerando relazioni di perpendicolarità.

Ad esempio, essendo una conica il luogo dei poli di un piano rispetto alle  $\infty^1$  coniche situate nella sviluppabile osculatrice di una cubica gobba (v. p. 93) si vede che è una conica il luogo dei centri delle coniche appartenenti alla sviluppabile osculatrice di una cubica gobba. Ogni diametro di detta conica che incontri un asintoto della cubica gobba ne fu denominato diametro<sup>2)</sup>, mentre al suo centro fu dato il nome di centro della cubica gobba<sup>3)</sup> (quantunque non si tratti di un centro di simmetria). Similmente da un'osservazione fatta nella chiusa del § precedente si desume che è in generale di sesto grado la rigata generata dalle coppie di osculatori ortogonali di una cubica gobba.

Questa proposizione fa sorgere la questione: « possiede una cubica gobba una terna di osculatori mutuamente ortogonali? » Per risolverla ricordiamo che gli osculatori di una cubica gobba sono tutti tangenti alle quadriche di un tessuto e

1) T. Reye, *Axial-symmetrisch kubische Raumkurven* (Mathem. Zeitschrift, T. V, 1919, p. 161-68).

2) Schröter, *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung* (Leipzig, 1880), p. 335.

3) Geisenheimer, *Ueber den Mittelpunkt der Raumkurven dritten Ordnung* (Zeit. f. Math. u. Phys., T. XXVII, 1882, p. 321-8).

che<sup>1)</sup> i vertici dei triedri trirettangoli circoscritti alle quadriche di equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \dots + a_{44} = 0$$

sono distribuiti sulla superficie (sfera di Monge) di equazione

$$A_{44}(x^2 + y^2 + z^2) - 2(A_{14}x + A_{24}y + A_{34}z) + (A_{11} + A_{22} + A_{33}) = 0,$$

ove  $A_{ik}$  è il complemento algebrico di  $a_{ik}$  nel determinante della data quadrica. Emerge da ciò che ad un tessuto di quadriche corrisponde un sistema lineare di  $\infty^2$  sfere di Monge; perciò queste passano per due punti fissi; se, in particolare, quel tessuto è annesso ad una delle curve che stiamo studiando si conclude: *Esistono in generale nello spazio due triedri trirettangoli, le cui facce osculano una cubica gobba*<sup>2)</sup>.

Tale conclusione si può confermare e completare ragionando come segue<sup>3)</sup>: La sviluppabile osculatrice di una cubica gobba è tagliata da un piano arbitrario dello spazio secondo una curva di 4° ordine e 3ª classe; ad ogni terna di tangenti della curva nascente in questo modo nel piano all'infinito, costituenti un triangolo autoconiugato rispetto al cerchio immaginario corrisponde un triedro trirettangolo le cui facce osculano la data curva; ora generalmente parlando di dette terne non ne esistono che due, onde si ritrova la proposizione precedente. Ma se ne esiste una terza, ve ne saranno infinite; e, mediante un ragionamento che esporremo per esteso nel Capitolo seguente trattando delle parabole gobbe, si dimostra che il luogo dei vertici dei corrispondenti  $\infty^1$  triedri è una retta, che si dice direttrice della curva; dunque se una cubica gobba ammette una linea direttrice, questa è una retta.

1) J. de Vries, *On the Spheres belonging to ordinary and tangential Pencils of quadratic Surfaces* (Proc. of the Acad. of Amsterdam, 26 febr. 1903).

2) H. Krüger, *Die Focaleigenschaften der cubischen Raumkurven* (Diss., Breslau, 1885).

3) Cfr. H. S. White, *On twisted cubic Curves that have a Directrix* (Trans. of the Amer. math. Soc., T. IV, 1903, p. 134-41).

Un'altra questione che si presenta quando si considera una cubica gobba  $\Gamma$  è se fra le  $\infty^2$  quàdriche su cui essa giace, se ne trovino di rotonde<sup>1)</sup>. Per risolverla si ricordi che una quàdrica di rivoluzione è bitangente al cerchio immaginario all'infinito e si consideri una conica  $\Delta$  godente di tale proprietà e passante per i punti all'infinito di  $\Gamma$ ; se ora si fa passare una quàdrica  $\Sigma$  per  $\Delta$  e per i quattro punti all'infinito di  $\Gamma$ , essa, passando per sette punti di questa, la contiene totalmente, onde è una delle superficie cercate; ora di coniche  $\Delta$  ve ne sono generalmente quattro<sup>2)</sup>, dunque per una cubica gobba passano in generale quattro quàdriche di rivoluzione<sup>3)</sup>. Sia  $a$  l'asse di una di esse e  $O$  un suo punto arbitrario; questo punto sarà centro di una sfera tangente a  $\Sigma$  in tutti i punti di un parallelo, epperò alla curva  $\Gamma$  nei punti in cui essa è tagliata dal piano del parallelo stesso; ciò prova che gli assi delle quàdriche di rivoluzione passanti per una cubica gobba costituiscono il luogo delle sfere tritangenti alla curva. Se si ricorda che gli assi di una conica formano il luogo dei centri delle sfere bitangenti alla curva si ravviserà nelle rette di cui parla il problema precedente la figura analoga a quella costituita dagli assi di una conica e si comprenderà la ragione del nome di *assi della cubica gobba* che fu proposto per quelle quattro rette<sup>4)</sup>.

1) Cremona, *Sur les hyperboloides de rotation qui passent par une cubique donnée* (Journ. f. r. n. a. Mathem., T. LXIII, 1864, p. 141-4, oppure Opere matematiche, T. II, Milano, 1915, p. 151-4).

2) Infatti, l'equazione generale delle coniche bitangenti alla curva  $\Sigma a_k x_k x_k = 0$  è

$$\Sigma a_k x_k x_k - (\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^2 = 0;$$

affinchè questa risulti circoscritta al triangolo fondamentale è necessario e sufficiente supporre

$$\xi_0 = \sqrt{a_{00}}, \xi_1 = \pm \sqrt{a_{11}}, \xi_2 = \pm \sqrt{a_{22}}$$

i segni essendo arbitrari; dunque ecc.

3) Analogamente si dimostra che per una cubica gobba passano  $\infty$  quàdriche ortogonali od equilateri.

4) Dixon, *On twisted Cubics* (Quart. Journ. of Mathem., T. XXIV, 1890, p. 32).

La proposizione precedente fa parte della raccolta di quelle a cui guidò lo studio metodico delle sfere aventi contatti pre-stabiliti con una cubica gobba, studio il quale può collegarsi convenientemente con quello delle relazioni che intercedono fra sei punti consferici di una cubica gobba<sup>1)</sup>. Tale considerazione dà luogo ad una nuova nozione che giova qui stabilire. Si rammenti a tale scopo che una quàdrica qualsivoglia ammette due serie di sezioni circolari; due piani della stessa serie stanno in piani fra loro paralleli, mentre due sezioni appartenenti a serie differenti giacciono sulla medesima sfera. Sia poi  $\Sigma$  una qualunque delle  $\infty^2$  quàdriche passanti per la data cubica  $\Gamma$  e  $K_1$  una delle sue sezioni circolari;  $K_1$  è una circonferenza trisecante  $\Gamma$  e sta su una sfera contenente una seconda sezione circolare  $K_2$  di  $\Sigma$ , cioè una nuova conica trisecante  $\Gamma$ . Viceversa partendo dalla circonferenza  $K_2$  si ritrova  $K_1$ ; se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sono i piani di queste, le loro giaciture (e così le loro rette all'infinito) si dicono fra loro *coniugate*. Nota che sia una di esse, l'altra si trova come segue: se  $\pi_1$  è un piano avente quella giacitura, esso taglia  $\Gamma$  in tre punti che determinano una circonferenza  $K_1$  la quale si trova con  $\Gamma$  sopra una determinata quàdrica  $\Sigma$ ; questa contiene una seconda conica  $K_2$  consferica a  $K_1$ , il cui piano  $\pi_2$  ha la giacitura coniugata a quello di  $\pi_1$ .

Si considerino tre punti reali  $A, B, C$  di una cubica gobba, il cerchio  $K$  che essi determinano ed il piano  $\pi$  su cui si trovano.  $K$  e la data cubica  $\Gamma$  determinano una quàdrica  $\Sigma$  di cui tutte le sezioni parallele a  $\pi$  sono circolari. Per una nota proprietà delle quàdriche i centri di questi si trovano sopra una retta (diametro); dunque: *Se si taglia una cubica gobba con una serie di piani fra loro paralleli si ottengono infiniti triangoli di cui i centri dei cerchi circoscritti appartengono ad una retta*<sup>2)</sup>.

Questa proposizione appartiene ad una serie di teoremi che insegnano la distribuzione nello spazio dei punti notevoli dei triangoli determinati da una cubica gobba sui piani di data giaci-

1) Timmerding, *Ueber die Kugeln, welche eine cubische Raumcurve mehrfach oder mehrpunktig berühren* (Diss., Strassburg, 1894).

2) Dixon, l. c., p. 34.



tura, teoremi notevoli perchè in molti casi si trova come luogo geometrico una retta <sup>1)</sup>; nel Cap. seguente, p. es., vedremo trattando delle iperboli gobbe che i baricentri dei triangoli generati nel modo anzidetto stanno in una retta; le risultanti « rette baricentriche » appartengono ad una congruenza di 1° ordine e 3ª classe. Siffatte considerazioni portano a chiederci come siano distribuiti nello spazio i piani che tagliano una cubica gobba in triangoli aventi una proprietà comune: se p. es. si tratta di triangoli rettangoli si trova che i loro piani involuppano una superficie di ottava classe, mentre se sono equilateri i loro piani osculano una curva di decimo ordine <sup>2)</sup>.

Volendo estendere allo spazio le proprietà focali delle coniche giova prendere le mosse <sup>3)</sup> dalla definizione plückeriana di fuoco; come in questo s'incontrano le tangenti della curva che passano pei punti ciclici del piano, così gioverà considerare quegli osculatori di una cubica gobba che toccano il cerchio immaginario all'infinito. Ora se si riferisce la curva ad un sistema cartesiano ortogonale i suoi piani osculatori avranno un'equazione generale della forma

$$f_1(\lambda)x + f_2(\lambda)y + f_3(\lambda)z + f_0(\lambda) = 0$$

ove  $\lambda$  è un parametro e le  $f_0, f_1, f_2, f_3$  sono funzioni algebriche razionali intere di terzo grado a coefficienti reali; ed affinchè il piano così rappresentato risulti tangente al cerchio immaginario all'infinito è necessario e sufficiente scegliere il parametro  $\lambda$  per modo che risulti

$$f_1(\lambda)^2 + f_2(\lambda)^2 + f_3(\lambda)^2 = 0.$$

È questa un'equazione di sesto grado a radici immaginarie a due a due coniugate; gli osculatori relativi a due siffatte ra-

<sup>1)</sup> Weill, *Nouv. Ann. de Mathém.* II Ser., T. XIX, 1880, p. 309; Krüger, *Metrische Strahlencongruenzen bei cubischen Raumcurven* (Zeitschrift. Mathem. Phys., T. XL, 1895, p. 193-210).

<sup>2)</sup> Krüger, l. c.

<sup>3)</sup> H. Krüger, *Die Focaleigenschaften der cubischen Raumcurven* (Diss., Breslau, 1885).

dici si tagliano in una retta reale; dunque: *esistono in generale nello spazio tre rette reali da ognuna delle quali si possono condurre ad una cubica gobba due osculatori tangenti al cerchio immaginario all'infinito*; si chiamano raggi focali della curva in questione <sup>1)</sup>.

Notiamo finalmente che un'altra classe di teoremi relativi alle cubiche gobbe proviene dall'applicazione a tali curve dei concetti, emanati dalla geometria infinitesimale (cioè centri di curvatura, centri delle sfere osculatrici, normali, ecc.). Si trova ad es. che i centri di curvatura di una cubica gobba costituiscono una curva di 15° ordine, che per ogni punto dello spazio passano dodici sfere osculatrici e che le sue normali principali costituiscono una rigata di 10° grado <sup>2)</sup>.

#### § 8. Classificazione delle cubiche gobbe.

Essendo tutte le cubiche gobbe fra loro identiche dal punto di vista della geometria proiettiva, così volendo distribuirle in classi, come si fece riguardo alle coniche, è necessario ricorrere alla considerazione del loro contegno rispetto al piano all'infinito <sup>3)</sup>. Ora siccome questo incontra la curva in tre punti, gli unici casi che si possono presentare sono i seguenti: a) tre punti reali e distinti; b) un solo punto reale e gli altri due immaginari coniugati; c) due punti d'intersezione coincidenti; d) tutte tre le intenzioni riunite. Le curve corrispondenti a questi casi, si chiamano risp.: a) *iperbole gobba*, b) *ellisse gobba*, c) *iperbole parabolica gobba*, d) *parabola gobba*.

<sup>1)</sup> Indipendentemente dal Krüger furono incontrati dal Dixon nella mem. dianzi citata. Una loro elegante proprietà, che ne mostra l'analogia con i fuochi di una conica, trovasi stabilita nella nota di W. Fr. Meyer., *Ein grundlegender Satz von Poncelet über die Breunpunkte der Kegelschmittten und seine Ausdehnung auf kubische Raumkurven* (Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver., T. XXVII, 1918, p. 57-66).

<sup>2)</sup> R. Sturm, *Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurven* (Zeitsch. f. Mathem. Phys., T. XL, 1895, p. 1-14).

<sup>3)</sup> Nuovamente per analogia a quanto accade nella teoria delle coniche, si arriva a sotto-classi introducendo la considerazione del cerchio immaginario all'infinito.

In coordinate cartesiane tutte si possono rappresentare mediante equazioni della forma

$$(29) \quad x = \frac{f_1(\lambda)}{f_0(\lambda)}, \quad y = \frac{f_2(\lambda)}{f_0(\lambda)}, \quad z = \frac{f_3(\lambda)}{f_0(\lambda)}$$

ove  $f_0, f_1, f_2, f_3$  sono funzioni di terzo grado in  $\lambda$ ; siccome i punti all'infinito della curva corrispondono ai valori di  $\lambda$  che annullano  $f_0(\lambda)$ , così i quattro casi su enumerati corrispondono alle quattro ipotesi che si possono fare riguardo al numero ed alle radici dell'equazione  $f_0(\lambda) = 0$ ; ciascuna dà origine ad una forma canonica della rappresentazione parametrica della curva; onde è necessario considerare tali ipotesi separatamente.

a) Siano  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  le tre radici reali e distinte dall'equazione  $f_0(\lambda) = 0$ . Ricorrendo allora alla decomposizione in frazioni semplici delle frazioni che entrano nella (29) si trovano formole del seguente tipo:

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{a_{11}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_{12}}{\lambda - \lambda_2} + \frac{a_{13}}{\lambda - \lambda_3} \\ y &= b + \frac{a_{21}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_{22}}{\lambda - \lambda_2} + \frac{a_{23}}{\lambda - \lambda_3} \\ z &= c + \frac{a_{31}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_{32}}{\lambda - \lambda_2} + \frac{a_{33}}{\lambda - \lambda_3} \end{aligned}$$

Si indichi ora con

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

il determinante reciproco del determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^{-1};$$

1) È  $A \neq 0$  se la curva non è piana.

allora alle formole precedenti si potranno sostituire queste altre:

$$\begin{aligned} a_{11}(x-a) + a_{21}(y-b) + a_{31}(z-c) &= \frac{A}{\lambda - \lambda_1} \\ a_{12}(x-a) + a_{22}(y-b) + a_{32}(z-c) &= \frac{A}{\lambda - \lambda_2} \\ a_{13}(x-a) + a_{23}(y-b) + a_{33}(z-c) &= \frac{A}{\lambda - \lambda_3} \end{aligned}$$

Operisi ora una trasformazione di coordinate cartesiane definita da equazioni della seguente forma:

$$(30) \quad \begin{cases} a_{11}(x-a) + a_{21}(y-b) + a_{31}(z-c) = \frac{A}{a_1} X \\ a_{12}(x-a) + a_{22}(y-b) + a_{32}(z-c) = \frac{A}{a_2} Y \\ a_{13}(x-a) + a_{23}(y-b) + a_{33}(z-c) = \frac{A}{a_3} Z \end{cases}$$

ove  $a_1, a_2, a_3$  sono costanti arbitrarie non nulle e si otterrà la seguente rappresentazione parametrica canonica dell'iperbole gobba:

$$(31) \quad X = \frac{a_1}{\lambda - \lambda_1}, \quad Y = \frac{a_2}{\lambda - \lambda_2}, \quad Z = \frac{a_3}{\lambda - \lambda_3}.$$

b) Delle radici dell'equazione  $f_0(\lambda) = 0$  una  $\lambda_1$  sia reale e le altre due siano immaginarie coniugate  $\lambda_2 \pm i\lambda_3$ , ove  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  sono quantità reali. In tal caso la decomposizione in frazioni semplici guida a formole del seguente tipo:

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{a_{11}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_{12}\lambda + a_{13}}{(\lambda - \lambda_2)^2 + \lambda_3^2} \\ y &= b + \frac{a_{21}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_{22}\lambda + a_{23}}{(\lambda - \lambda_2)^2 + \lambda_3^2} \\ z &= c + \frac{a_{31}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_{32}\lambda + a_{33}}{(\lambda - \lambda_2)^2 + \lambda_3^2} \end{aligned}$$

Eseguendo ora la trasformazione di coordinate (30) si giunge alla seguente *rappresentazione parametrica canonica dell'ellisse gobba*:

$$(32) \quad X = \frac{a_1}{\lambda - \lambda_1}, \quad Y = \frac{a_2 \lambda}{(\lambda - \lambda_2)^2 + \lambda_3^2}, \quad Z = \frac{a_3}{(\lambda - \lambda_2)^2 + \lambda_3^2}.$$

c) Se l'equazione  $f_0(\lambda) = 0$  possiede la radice semplice  $\lambda_1$  e la doppia  $\lambda_2$ , la decomposizione in frazioni semplici guida dalle (29) alle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{a_{11}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_{12}}{\lambda - \lambda_2} + \frac{a_{13}}{(\lambda - \lambda_2)^2} \\ y &= b + \frac{a_{21}}{\lambda - \lambda_2} + \frac{a_{22}}{\lambda - \lambda_2} + \frac{a_{23}}{(\lambda - \lambda_2)^2} \\ z &= c + \frac{a_{31}}{\lambda - \lambda_2} + \frac{a_{32}}{\lambda - \lambda_2} + \frac{a_{33}}{(\lambda - \lambda_2)^2} \end{aligned}$$

e da queste, applicando la stessa trasformazione (30), si arriva a questa *rappresentazione parametrica canonica dell'iperbole parabolica gobba*:

$$(33) \quad X = \frac{a_1}{\lambda - \lambda_1}, \quad Y = \frac{a_2}{\lambda - \lambda_2}, \quad Z = \frac{a_3}{(\lambda - \lambda_2)^2}.$$

d) Finalmente se l'equazione  $f_0(\lambda) = 0$  ha la radice tripla  $\lambda_1$  la decomposizione in frazioni semplici muta le (29) nelle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{a_{11}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_{12}}{(\lambda - \lambda_1)^2} + \frac{a_{13}}{(\lambda - \lambda_1)^3} \\ y &= b + \frac{a_{21}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_{22}}{(\lambda - \lambda_1)^2} + \frac{a_{23}}{(\lambda - \lambda_1)^3} \\ z &= c + \frac{a_{31}}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_{32}}{(\lambda - \lambda_1)^2} + \frac{a_{33}}{(\lambda - \lambda_1)^3} \end{aligned}$$

donde, con l'artificio usato nei casi precedenti, si trae la seguente *rappresentazione parametrica canonica gobba*

$$(34) \quad X = \frac{a_1}{\lambda - \lambda_1}, \quad Y = \frac{a_2}{(\lambda - \lambda_1)^2}, \quad Z = \frac{a_3}{(\lambda - \lambda_1)^3}$$

o più semplicemente (posto  $\mu = \frac{1}{\lambda - \lambda_1}$ )

$$(34') \quad X = a_1 \mu, \quad Y = a_2 \mu^2, \quad Z = a_3 \mu^3.$$

Oltre a queste rappresentazioni parametriche, altre se ne conoscono di pari generalità e delle quali faremo cenno:

#### I. Formole del Cremona<sup>1)</sup>;

per l'iperbole e l'ellisse cubiche:

$$(35) \quad x = \frac{a\lambda^3}{\lambda^2 \mp k^2}, \quad y = \frac{b\lambda^2}{\lambda^2 \mp k^2}, \quad z = \frac{c\lambda}{\lambda^2 \mp k^2};$$

per l'iperbole parabolica

$$(36) \quad x = \frac{a\lambda^3}{\lambda - k}, \quad y = b\lambda^2, \quad z = c\lambda$$

oppure

$$(36') \quad x = \frac{a\lambda^3}{(\lambda - \alpha)^2}, \quad y = \frac{b\lambda^2}{(\lambda - \alpha)^2}, \quad z = \frac{c\lambda}{(\lambda - \alpha)^2};$$

e per la parabola cubica

$$(37) \quad x = a\lambda^3, \quad y = b\lambda^2, \quad z = c\lambda.$$

Tutte si ottengono scegliendo come origine il punto della curva corrispondente al valore  $\lambda = 0$  del parametro, per corrispondente tangente l'asse dello  $z$  e per piano osculatore il piano  $yz$ ; al valore  $\lambda = \infty$  corrisponde un punto reale della curva, che trovasi all'infinito dell'asse delle  $x$ . Nei casi in cui sono applicabili le formole (35) l'asintoto relativo al detto punto all'infinito ha per equazioni  $y=b, z=0$ , onde è parallelo all'asse della  $x$ . Quando invece la curva è l'iperbole parabolica di equazione (36) il punto corrispondente al valore  $\lambda = k$  è all'infinito ed ha per asintoto la

<sup>1)</sup> Intorno alle coniche inscritte in una stessa superfioie sviluppabile di quart'ordine (e terza classe) (Ann. di Matem., T. I, 1859, p. 201 7; Opere, T. I, 1914, p. 100-7).

retta  $y = bk^2$ ,  $z = ck$ , onde è ancora parallelo ad  $Ox$ . Se finalmente si tratta della parabola cubica (37), siccome da queste equazioni si trae  $\frac{y}{b} = \left(\frac{z}{c}\right)^2$  così si vede che l'asse delle  $x$  è parallelo alle generatrici dell'unico cilindro di second'ordine che contenga la curva, esso è quindi diretto all'unico punto all'infinito della curva. Emerge da tutto ciò che di rappresentazione dell'indicato tipo ne esistono  $\infty^1$ ; in tutte l'asse delle  $x$  ha una direzione determinata (nel caso dell'iperbole gobba in tre modi) dal momento che contiene un punto all'infinito della curva (l'unico reale nel caso dell'ellisse gobba, mentre nel caso dell'iperbole parabolica è il solo punto d'intersezione della curva col piano all'infinito). Affinchè fra tali  $\infty^1$  rappresentazioni ve ne sia una in assi ortogonali è evidentemente necessario e sufficiente che la retta all'infinito comune a tutti i piani perpendicolari alla direzione in cui trovasi il punto reale che sempre la curva possiede sia traccia sul piano all'infinito di un osculatore. Per ciò le cubiche gobbe rappresentate in COORDINATE ORTOGONALI dalle equazioni (35)-(37) sono particolari.

## II. Formole dello Staude <sup>1)</sup>.

Tutte le cubiche gobbe si possono rappresentare in coordinate cartesiane ortogonali mediante le formole seguenti:

$$(38) \quad x = \frac{a\lambda^3 + a'\lambda^2 + a''\lambda}{D}, \quad y = \frac{b\lambda^2 + b'\lambda}{D}, \quad z = \frac{c\lambda}{D}$$

ove  $D$  ha i seguenti valori

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lambda^2 + e^2 & \text{per l'ellisse gobba} \\ \lambda^2 - e^2 & \text{» l'iperbole gobba} \\ \lambda - e & \text{» l'iperbole parabolica} \\ 1 & \text{» la parabola gobba;} \end{array} \right.$$

<sup>1)</sup> *Analytische Geometrie des kubischen Kegelschnitts* (Leipzig, Berlin, 1913, p. 26).

in ogni caso la curva passa per l'origine delle coordinate, punto che corrisponde al valore  $\lambda = 0$  del parametro. Nei primi due casi la curva ha ivi per tangente la retta

$$\frac{x}{a''} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c}$$

e per osculatore il piano

$$bcx - ca'y + (a'b' - ab'')z = 0;$$

essa contiene il punto all'infinito, a cui compete il valore  $\lambda = \infty$ ; il corrispondente asintoto è la retta  $y = a$ ,  $z = 0$  ed il corrispondente piano asintotico  $b'z - c(y - a) = 0$ . Ciò prova che ad una rappresentazione dell'indicato tipo si perviene assumendo per origine un punto della curva, per asse della  $x$  la corrispondente parallela all'asintoto reale della curva e per asse delle  $y$  la perpendicolare condotta da quel punto al detto asintoto.

Cose perfettamente analoghe valgono per l'iperbole parabolica e la parabola gobba rappresentate dalle equazioni (38), che entrambe contengono il punto all'infinito di  $Ox$ .

Nel Cap. seguente noi applicheremo queste rappresentazioni parametriche allo studio delle suindicate varietà di curve; ma vogliamo, prima di chiudere il presente, notare che, specializzando le ipotesi fatte alcuni teoremi superiormente dimostrati, si giunge ai seguenti risultati:

1. Tutte le coniche situate nella sviluppabile osculatrice d'un'iperbole gobba sono iperboli, i cui centri hanno per luogo geometrico un'ellisse; la curva non ammette coppie di piani osculatori paralleli e sta in tre cilindri di 2° ordine iperbolici.

2. Le coniche appartenenti alla sviluppabile osculatrice d'un'ellisse gobba sono  $\infty^1$  ellissi ed altrettante iperboli, un ramo delle quali corrisponde alle anzidette ellissi e l'altro alle iperboli; la curva ammette una coppia di piani osculatori fra loro paralleli ed è contenuta in un unico cilindro di 2° ordine, che è ellittico.

3. Finalmente le coniche appartenenti alla sviluppabile osculatrice d'una parabola gobba sono tutte parabole; la curva giace su un unico cilindro quàdrico, che è parabolico.

## § 9. Cubiche gobbe degeneri.

Servendosi di una speciale rappresentazione analitica applicabile a tutte le linee gobbe, A. Brill ha dimostrato <sup>1)</sup> che le curve di cui ci occupiamo possono presentarsi soltanto sotto le due seguenti forme degeneri:

Una conica ed una retta che la taglia in un punto;

Due rette sghembe ed una terza che le incontra entrambe.

<sup>1)</sup> *Ueber die Raumcurven dritter Ordnung* (Rend. del Circ. mat. di Palermo, T. XXV, 1908, p. 188-93).

## CAPITOLO V.

## CUBICHE GOBBE PARTICOLARI.

## A. L'IPERBOLE GOBBA.

## § 1. Generalità.

Se si ricorda quanto si espone al termine del precedente Cap. si vedrà che, per rappresentare analiticamente un'iperbole gobba  $\Gamma$ , possono servire le seguenti equazioni:

$$(1) \quad x = \frac{a_1}{a-\lambda}, \quad y = \frac{b_1}{b-\lambda}, \quad \frac{z_1}{c-\lambda},$$

ove  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$ , sono sei costanti reali qualunque; ai valori  $a, b, c$  del parametro  $\lambda$  corrispondono i punti all'infinito della curva, mentre per  $\lambda = \infty$  si ha l'origine, altro punto della stessa.

Eliminando  $\lambda$  fra queste relazioni prese due a due si ottiene l'equazione a tre membri

$$a - \frac{a_1}{x} = b - \frac{b_1}{y} = c - \frac{c_1}{z},$$

donde emerge che la curva  $\Gamma$  appartiene ai tre cilindri iperbolici di equazioni:

$$(2) \quad c_1 y - b_1 z + (b-c)yz = 0, \quad a_1 z - c_1 x + (c-a)zx = 0, \\ b_1 x - a_1 y + (a-b)xy = 0,$$

i cui assi sono rappresentati come segue:

$$(3) \quad \begin{cases} y = \frac{b_1}{b-c}, z = \frac{c_1}{c-b} \\ z = \frac{c_1}{c-a}, x = \frac{a_1}{a-c} \\ x = \frac{a_1}{a-b}, y = \frac{b_1}{b-a} \end{cases}$$

Scrivendo le (1) sotto la forma

$$\frac{a_1}{x} = a - \lambda, \quad \frac{b_1}{y} = b - \lambda, \quad \frac{c_1}{z} = c - \lambda,$$

se ne deduce

$$\frac{a_1(b-c)}{x} + \frac{b_1(c-a)}{y} + \frac{c_1(a-b)}{z} = 0;$$

per conseguenza la curva  $\Gamma$  appartiene al seguente cono quadratico col vertice nell'origine:

$$(4) \quad a_1(b-c)yz + b_1(c-a)zx + c_1(a-b)xy = 0$$

Per scrivere più comodamente molte formole concernenti la curva di cui ci occupiamo giova introdurre la considerazione metodica di queste altre sei costanti:

$$(I) \quad \begin{cases} \alpha' = \frac{a_1}{a-b}, \beta' = \frac{b_1}{b-c}, \gamma' = \frac{c_1}{c-a} \\ \alpha'' = \frac{a_1}{a-c}, \beta'' = \frac{b_1}{b-a}, \gamma'' = \frac{c_1}{c-b} \end{cases}$$

e delle due quantità

$$(II) \quad D = - \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$$

$$(III) \quad L = \frac{a_1 b_1 c_1}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

Fra di loro ed le sei primitive costanti passano molteplici relazioni, alcune delle quali è giovevole qui enunciare:

$$(IV) \quad \alpha' + \alpha'' = \frac{a_1(b+c-2a)}{(c-a)(a-b)}, \quad \beta' + \beta'' = \frac{b_1(c+a-2b)}{(a-b)(b-c)},$$

$$\gamma' + \gamma'' = \frac{c_1(a+b-2c)}{(b-c)(c-a)}$$

$$(V) \quad \alpha' - \alpha'' = -\frac{a_1(b-c)}{(c-a)(a-b)}, \quad \beta' - \beta'' = -\frac{b_1(c-a)}{(a-b)(b-c)},$$

$$\gamma' - \gamma'' = -\frac{c_1(a-b)}{(b-c)(c-a)}$$

$$(VI) \quad \beta' \gamma'' = -\frac{b_1 c_1}{(b-c)^2}, \quad \gamma' \alpha'' = -\frac{c_1 c_1}{(c-a)^2}, \quad \alpha' \beta'' = -\frac{a_1 b_1}{(a-b)^2}$$

$$(VII) \quad \beta'' \gamma' = -\frac{b_1 c_1}{(c-a)(a-b)}, \quad \gamma'' \alpha' = -\frac{c_1 a_1}{(a-b)(b-c)}$$

$$\alpha'' \beta' = -\frac{a_1 b_1}{(b-c)(c-a)}$$

$$(VIII) \quad \begin{cases} (\beta' - \beta'')(\gamma' - \gamma'') = -\beta' \gamma'', (\gamma' - \gamma'')(\alpha' - \alpha'') = -\gamma' \alpha'', (\alpha' - \alpha'')(\beta' - \beta'') = -\alpha' \beta'' \\ \frac{\gamma''}{\gamma'} + \frac{\beta''}{\beta'} = 1, \quad \frac{\alpha''}{\alpha'} + \frac{\gamma''}{\gamma'} = 1, \quad \frac{\beta''}{\beta'} + \frac{\alpha''}{\alpha'} = 1 \end{cases}$$

$$(IX) \quad \alpha' \beta' \gamma' = -\alpha'' \beta'' \gamma'', \quad (\alpha' - \alpha'')(\beta' - \beta'')(\gamma' - \gamma'') = L$$

$$(X) \quad \frac{\alpha' + \alpha''}{\alpha' - \alpha''} + \frac{\beta' + \beta''}{\beta' - \beta''} + \frac{\gamma' + \gamma''}{\gamma' - \gamma''} = \frac{(\alpha' + \alpha'')(\beta' + \beta'')(\gamma' + \gamma'')}{L} =$$

$$= - \frac{2(a^3 + b^3 + c^3) + 12abc - 3(bc^2 + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

In virtù delle (I) le (3) si semplificano divenendo:

$$(3') \quad \begin{cases} y = \beta' & , & z = \gamma'' \\ z = \gamma' & , & x = \alpha'' \\ x = \alpha' & , & y = \beta'' \end{cases}$$

Faremo subito un'applicazione di queste formole alla dimostrazione del seguente:

**TEOREMA.** È una retta il luogo geometrico dei baricentri degli infiniti triangoli secondo cui un'iperbole cubica è tagliata dai piani di giacitura assegnata.

Consideriamo infatti gli  $\infty'$  piani rappresentati al variare di  $\omega$  dall'equazione

$$\xi x + \eta y + \zeta z + \omega = 0$$

Uno qualunque di essi taglia la data curva nei punti  $P_1, P_2, P_3$  che corrispondono ai valori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  di  $\lambda$  soddisfacenti l'equazione seguente:

$$\frac{a_1 \xi}{a-\lambda} + \frac{b_1 \eta}{b-\lambda} + \frac{c_1 \zeta}{c-\lambda} + \omega = 0$$

Sussiste, quindi, la seguente identità, rispetto a  $\lambda$ :

$$a_1 \xi (b-\lambda)(c-\lambda) + b_1 \eta (c-\lambda)(a-\lambda) + c_1 \zeta (a-\lambda)(b-\lambda) + \omega (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) = -\omega (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3);$$

e mediante differenziazione logaritmica si desume da essa quest'altra identità:

$$\begin{aligned} & a_1 \xi (b+c-2\lambda) + b_1 \eta (c+a-2\lambda) + c_1 \zeta (a+b-2\lambda) \\ & + \omega \{ (b-\lambda)(c-\lambda) + (c-\lambda)(a-\lambda) + (a-\lambda)(b-\lambda) \} = \\ & = - \left\{ \frac{1}{\lambda-\lambda_1} + \frac{1}{\lambda-\lambda_2} + \frac{1}{\lambda-\lambda_3} \right\} \left\{ a_1 \xi (b-\lambda)(c-\lambda) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

In particolare, facendo ivi  $\lambda$  successivamente eguale a  $a, b, c$  si ottengono tre nuove identità la prima delle quali è

$$\frac{1}{a-\lambda_1} + \frac{1}{a-\lambda_2} + \frac{1}{a-\lambda_3} = - \frac{a_1 \xi (b+c-2a) + b_1 \eta (c-a) + c_1 \zeta (a-b) + \omega (b-a)(c-a)}{a_1 \xi (b-c)(c-a)};$$

le altre sono analoghe. D'altronde, se  $x_0, y_0, z_0$  sono le coordinate del baricentro  $G$  del triangolo  $P_1 P_2 P_3$ , sussisteranno la relazione

$$3x_0 = a_1 \left\{ \frac{1}{a_1-\lambda} + \frac{1}{a_2-\lambda} + \frac{1}{a_3-\lambda} \right\}$$

e le due analoghe; onde si hanno l'uguaglianza

$$3x_0 = - \frac{a_1 \xi (b+c-2a) + b_1 \eta (c-a) + c_1 \zeta (b-a) + \omega}{\xi (b-a)(c-a)} + \frac{\omega}{\xi}$$

e due altre del medesimo tipo. Eliminando  $\omega$  si conclude che il luogo geometrico del punto  $G$  è la retta rappresentata dalle equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \xi \left\{ 3x_0 + \frac{a_1 \xi (b+c-2a) + b_1 \eta (c-a) + c_1 \zeta (b-a)}{\xi (b-a)(c-a)} \right\} &= \\ \eta \left\{ 3y_0 + \frac{a_1 \xi (c-b) + b_1 \eta (c+a-2b) + c_1 \zeta (a-b)}{\eta (c-b)(a-b)} \right\} &= \\ \zeta \left\{ 3z_0 + \frac{a_1 \xi (b-c) + b_1 \eta (a-c) + c_1 \zeta (a+b-2c)}{\zeta (a-c)(b-c)} \right\} &= \end{aligned}$$

e. d. d.

## § 2. Corde, Tangenti, Asintoti.

La corda dell'iperbole rappresentata dalle equazioni (1), che congiunge i punti corrispondenti ai valori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  del parametro  $\lambda$  è rappresentata dalle equazioni che si ottengono an-

nullando due dei determinanti di terz'ordine che possono trarsi dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \frac{a_1}{a-\lambda_1} & \frac{b_1}{b-\lambda_1} & \frac{c_1}{c-\lambda_1} & 1 \\ \frac{a_1}{a-\lambda_2} & \frac{b_1}{b-\lambda_2} & \frac{c_1}{c-\lambda_2} & 1 \end{vmatrix};$$

se ne deduce facilmente che detta corda può rappresentarsi mediante la seguente equazione a tre membri:

$$(5) \quad \frac{x}{a_1}(a-\lambda_1)(a-\lambda_2) = \frac{y}{b_1}(b-\lambda_1)(b-\lambda_2) = \frac{z}{c_1}(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)$$

Facendo coincidere i due valori  $\lambda_1, \lambda_2$  si conclude che la tangente nel punto corrispondente al valore  $\lambda$  del parametro è la retta di equazioni:

$$(6) \quad \frac{x}{a_1}(a-\lambda)^2 = \frac{y}{b_1}(b-\lambda)^2 = \frac{z}{c_1}(c-\lambda)^2;$$

p. es. la tangente nell'origine è la retta

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1}$$

Supponendo nelle (6) successivamente  $\lambda = a, b, c$  si vede che, i tre asintoti dell'iperbole sono le tre seguenti rette:

$$(7) \quad \begin{cases} y = \frac{b_1}{b-a}, z = \frac{c_1}{c-a} \\ z = \frac{c_1}{c-b}, x = \frac{a_1}{a-b} \\ x = \frac{a_1}{a-c}, y = \frac{b_1}{b-c} \end{cases}$$

ossia, introducendo le costanti definite dalle (I),

$$(7') \quad \begin{cases} y = \beta'' & , & z = \gamma' \\ z = \gamma'' & , & x = \alpha' \\ x = \alpha'' & , & y = \beta' \end{cases}$$

Paragonando queste alle equazioni (3') si deduce che ogni asintoto della curva è parallelo all'asse d'uno dei cilindri proiettanti la medesima ed incontra gli altri due e viceversa che ogni asse è parallelo ad uno asintoto ed incontra gli altri due. Assi e asintoti costituiscono tre coppie di spigoli opposti di parallelepipedo (che diremo *proiettante*), di cui le

facce sono i piani di equazioni

$$\begin{aligned} x = \alpha' & , & x = \alpha'' & , & y = \beta' & , \\ y = \beta'' & , & z = \gamma' & , & z = \gamma'' & \end{aligned}$$

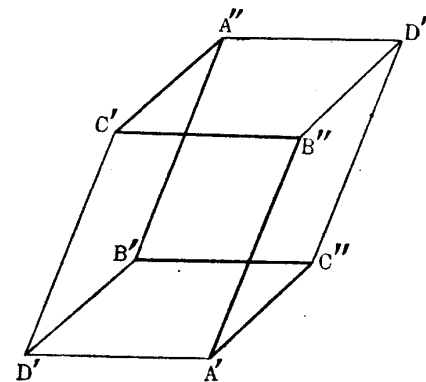


Fig. 2.

mentre i vertici sono (v. fig. 2) i punti:  $A'(\alpha', \beta', \gamma')$ ,  $A''(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ ,  $B'(\alpha', \beta'', \gamma')$ ,  $B''(\alpha'', \beta', \gamma'')$ ,  $C'(\alpha', \beta', \gamma'')$ ,  $C''(\alpha'', \beta'', \gamma')$ ,  $D'(\alpha', \beta', \gamma')$ ,  $D''(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ ; i due ultimi, non appartenendo ad alcun asse od asintoto, diremo *vertici parassiti* di quel parallelepipedo; la loro congiungente chiameremo *diagonale principale* di questo: essa ha coseni direttori proporzionali alla differenze  $\alpha' - \alpha''$ ,  $\beta' - \beta''$ ,  $\gamma' - \gamma''$  e passa pel punto  $O\left(\frac{\alpha' + \alpha''}{2}, \frac{\beta' + \beta''}{2}, \frac{\gamma' + \gamma''}{2}\right)$ , centro del parallelepipedo, che diremo *centro della curva*: essa è, quindi rappresentabile con le equazioni seguenti:

$$(8) \quad \frac{x - \frac{\alpha' + \alpha''}{2}}{\alpha' - \alpha''} = \frac{y - \frac{\beta' + \beta''}{2}}{\beta' - \beta''} = \frac{z - \frac{\gamma' + \gamma''}{2}}{\gamma' - \gamma''}.$$



I punti medi dei lati dell'esagono gobbo  $A'C''B'A''C'B''$  stanno nel piano bisettore dello strato determinato dai piani  $A'B'C'$ ,  $A''B''C''$ ; ora questi hanno per equazioni

$$\frac{x-\alpha'}{\alpha''-\alpha'} + \frac{y-\beta'}{\beta''-\beta'} + \frac{z-\gamma'}{\gamma''-\gamma'} - 1 = 0,$$

$$\frac{x-\alpha''}{\alpha'-\alpha''} + \frac{y-\beta''}{\beta'-\beta''} + \frac{z-\gamma''}{\gamma'-\gamma''} - 1 = 0,$$

onde l'equazione di quello è

$$(9) \quad \frac{x - \frac{\alpha' + \alpha''}{2}}{\alpha' - \alpha''} + \frac{y - \frac{\beta' + \beta''}{2}}{\beta' - \beta''} + \frac{z - \frac{\gamma' + \gamma''}{2}}{\gamma' - \gamma''} = 0;$$

tale piano diremo *mediano* della data curva. Esso è tagliato dagli asintoti e dagli assi nelle due terne di punti di coordinate

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha' + \alpha''}{2}, \beta', \gamma' \\ \alpha', \frac{\beta' + \beta''}{2}, \gamma'' \\ \alpha'', \beta'', \frac{\gamma' + \gamma''}{2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha' + \alpha''}{2}, \beta', \gamma'' \\ \alpha'', \frac{\beta' + \beta''}{2}, \gamma' \\ \alpha', \beta'', \frac{\gamma' + \gamma''}{2} \end{array} \right.;$$

ora il baricentro della prima quanto della seconda di tali terne è il punto  $O$ ; dunque il *mediano d'un'iperbole gobba* è tagliato dagli asintoti e dagli assi della curva in due triangoli aventi per comune baricentro il centro di questa.

Introdotte le nuove costanti (I), le equazioni (2) dei cilindri proiettanti l'iperbole assumono il seguente aspetto:

(2')

$$(y - \beta')(z - \gamma'') = \beta' \gamma'', (z - \gamma')(x - \alpha'') = \gamma' \alpha'', (x - \alpha')(y - \beta'') = \alpha' \beta''.$$

Assumiamo ora come nuova origine delle coordinate il punto  $D'$  conservando immutata la direzione degli assi; le formole di trasformazione essendo

$$x - \alpha' = x', \quad y - \beta' = y', \quad z - \gamma' = z'$$

le equazioni precedenti divengono

$$y'(z' + \gamma' - \gamma'') = \beta' \gamma'', \quad z'(x' + \alpha' - \alpha'') = \gamma' \alpha'', \quad x'(y' + \beta' - \beta'') = \alpha' \beta'';$$

ora tenendo conto di queste equazioni e delle relazioni che legano le nuove alle antiche costanti si trova successivamente:

$$x'y'z' = -(\gamma' - \gamma'')x'y' + \beta'\gamma''x' = \frac{c_1(b-a)}{(b-c)(c-a)}x'y' - \frac{b_1c_1}{(b-c)^2}$$

$$= \frac{c_1(a-b)}{(b-c)(c-a)}x' \left\{ y' - \frac{b_1(c-a)}{(a-b)(b-c)} \right\} = \frac{c_1(a-b)x'}{(b-c)(c-a)}(y' + \beta' - \beta'')$$

$$= \frac{c_1(a-b)}{(b-c)(c-a)} \frac{a_1b_1}{(a-b)^2} = - \frac{a_1b_1c_1}{(c-a)(a-b)(b-c)} = -L$$

Ad una relazione somigliante si giunge assumendo come origine il punto  $D''$ . Si conclude, quindi, la seguente proposizione, di cui è evidente l'analogia con quella che esprime l'equazione d'un'iperbole ordinaria riferita agli asintoti:

*Assunto come origine di un sistema di coordinate cartesiane uno dei vertici parassiti del parallelepipedo proiettante d'un'iperbole gobba e gli assi paralleli agli asintoti, per ogni punto della curva è costante il prodotto delle coordinate <sup>1)</sup>.*

Nelle equazioni (6) supponiamo dati  $x, y, z$  ed incogniti  $\lambda_1, \lambda_2$ ; esse allora serviranno a determinare la corda della curva che esce dal punto  $(x, y, z)$ ; per eseguire il calcolo di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  simmetricamente indichiamo con  $u$  il valore comune dei tre membri della (5) avremo in conseguenza

$$a^2 - \frac{aa_1}{x} - (\lambda_1 + \lambda_2)a + \lambda_1\lambda_2 - \frac{a_1}{x}u = 0$$

$$b^2 - \frac{bb_1}{y} - (\lambda_1 + \lambda_2)b + \lambda_1\lambda_2 - \frac{b_1}{y}u = 0$$

$$c^2 - \frac{cc_1}{z} - (\lambda_1 + \lambda_2)c + \lambda_1\lambda_2 - \frac{c_1}{z}u = 0;$$

<sup>1)</sup> Majcen, *Einigen Sätze über die räumliche Hyperbel* (Arch. Math. Phys., (3) XIII, 1908, p. 145); Vogt, *Metrische Untersuchungen der kubischen Hyperbel, insbesondere der gleichseitigen* (J. f. r. u. a. Mathem., T. CXLI, 1912, p. 305).

e siccome  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  possono intendersi come radici di un'equazione della forma

$$\omega^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\omega + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

così il problema della determinazione di quella corda può intendersi ridotto alla risoluzione dell'equazione seguente:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \omega^2 & \omega & 1 & 0 \\ a^2 - \frac{aa_1}{x} & a & 1 & \frac{a_1}{x} \\ b^2 - \frac{bb_1}{y} & b & 1 & \frac{b_1}{y} \\ c^2 - \frac{cc_1}{z} & c & 1 & \frac{c_1}{z} \end{vmatrix} = 0$$

o anche

$$(10') \quad \frac{a_1}{x} (b-c)(\omega-b)(\omega-c) + \frac{b_1}{y} (c-a)(\omega-c)(\omega-a) + \frac{c_1}{z} (a-b)(\omega-a)(\omega-b) = \frac{b_1 c_1}{yz} (b-c)(\omega-a) + \frac{c_1 a_1}{zx} (c-a)(\omega-b) + \frac{a_1 b_1}{xy} (a-b)(\omega-c)$$

Se adesso s'immagina che il punto  $(x, y, z)$  si allontani indefinitamente nella direzione  $(l, m, n)$  si ottiene, per determinare la corda dell'iperbole avente appunto questa direzione, l'equazione seguente:

$$(11) \quad \frac{a_1(b-c)}{l(\omega-a)} + \frac{b_1(c-a)}{m(\omega-b)} + \frac{c_1(a-b)}{n(\omega-c)} = 0$$

### § 3. Coppie di iperboli gobbe fra loro coniugate.

Abbiamo dimostrato che una cubica gobba è determinata da sei punti; se questi coincidono a coppie si vede che essa può determinarsi anche mediante tre tangenti con i relativi

punti di contatto; in particolare un'iperbole gobba è determinata dalla conoscenza dei propri asintoti.

Applicando quest'osservazione potremo considerare una seconda iperbole avente per asintoti gli assi dei cilindri proiettanti la data; gli assi dei cilindri proiettanti la nuova iperbole saranno tre rette ognuna delle quali è parallela ad uno dei nuovi asintoti ed incontra gli altri due, onde coincideranno con gli asintoti della data. Due iperboli in tale scambievole relazione si dicono *coniugate*<sup>1)</sup>; esse hanno comune centro e piano medesimo; il paragone delle equazioni (3') e (7') mostra che le formole relative ad una di esse si ottengono da quelle concernenti l'altra mutando  $\alpha', \beta', \gamma'$  rispettivamente in  $\alpha'', \beta'', \gamma''$ .

Esiste un iperboloide contenente gli assi e quindi anche gli asintoti di un'iperbole gobba; lo diremo *iperboloide asintotico* della curva; evidentemente due iperboli gobbe coniugate hanno lo stesso iperboloide asintotico; per quelle da noi considerate l'equazione è:

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha'yz + \beta'zx + \gamma'xy - \beta'\gamma'x - \gamma'\alpha'y - \alpha'\beta'z + \alpha'\beta'\gamma' = \\ \alpha''yz + \beta''zx + \gamma''xy - \beta''\gamma''x - \gamma''\alpha''y - \alpha''\beta''z + \alpha''\beta''\gamma'' \end{cases}$$

o anche

$$(11') \quad (\alpha' - \alpha'')yz + (\beta' - \beta'')zx + (\gamma' - \gamma'')xy - (\beta'\gamma' - \beta''\gamma'')x - (\gamma'\alpha' - \gamma''\alpha'')y - (\alpha'\beta' - \alpha''\beta'')z + 2L = 0$$

Applicando note formole se ne deduce:

*Il mediano comune a due iperboli gobbe fra loro coniugate è il piano diametrico dell'iperboloide asintotico coniugato alla diagonale principale del parallelepipedo proiettante*<sup>2)</sup>.

Per un punto arbitrario  $P$  della curva conduciamo i piani paralleli ciascuno a due asintoti (ossia ad un piano coordinato); essi tagliano ognuno l'asintoto escluso in tre punti, i quali de-

<sup>1)</sup> Heinrichs, *Einige metrische Eigenschaften der cubischen räumlichen Hyperbel* (Zeitsch. Math. Phys. T. XXXIX, 1894, p. 224); Vogt mem. cit. p. 305.

<sup>2)</sup> Vogt, mem. cit. p. 308.

terminano un piano la cui equazione è (come è facile vedere)

$$(12) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{a_1}{a-\lambda} & \frac{b_1}{b-a} & \frac{c_1}{c-a} \\ \frac{a_1}{a-b} & \frac{b_1}{b-\lambda} & \frac{c_1}{c-b} \\ \frac{a_1}{a-c} & \frac{b_1}{b-c} & \frac{c_1}{c-\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$(12') \quad \left(x - \frac{a_1}{a-\lambda}\right) \frac{b_1 c_1 (a-\lambda)}{b-c} + \left(y - \frac{b_1}{b-\lambda}\right) \frac{c_1 a_1 (b-\lambda)}{c-a} + \left(z - \frac{c_1}{c-\lambda}\right) \frac{a_1 b_1 (c-\lambda)}{a-b} = 0;$$

ma la (12) è anche soddisfatta dalle due terne di valori

$$x = \frac{a_1}{a-b}, \quad y = \frac{b_1}{b-c}, \quad z = \frac{c_1}{c-a}$$

$$x = \frac{a_1}{a-c}, \quad y = \frac{b_1}{b-a}, \quad z = \frac{c_1}{c-b}$$

perciò quel piano passa per i punti  $D'$  e  $D''$ , cioè per la diagonale principale del parallelepipedo proiettante. Donde la seguente nuova generazione della curva che studiamo:

*Si costruisca completamente il parallelepipedo avente per tre spigoli gli asintoti d'un'iperbole gobba, si conduca un piano arbitrario per la sua diagonale principale e se ne determinino le intersezioni con gli asintoti; i piani condotti dai punti risultanti parallelamente alle facce di quel parallelepipedo si taglieranno in un punto della curva<sup>1)</sup>.*

Traducendo in formole questa costruzione si perviene ad una nuova rappresentazione parametrica dell'iperbole gobba in

<sup>1)</sup> Majcen, mem. cit., p. 145.

cui entrano le costanti (I). Ricordando infatti le equazioni (8) si vede che un piano condotto ad arbitrio per la diagonale  $D'D''$  ha un'equazione della forma

$$\lambda \frac{x - \frac{\alpha' + \alpha''}{2}}{\alpha' - \alpha''} + \mu \frac{y - \frac{\beta' + \beta''}{2}}{\beta' - \beta''} + \nu \frac{z - \frac{\gamma' + \gamma''}{2}}{\gamma' - \gamma''} = 0$$

nell'ipotesi che i coefficienti  $\lambda, \mu, \nu$  soddisfacciano alla condizione

$$(13) \quad \lambda + \mu + \nu = 0.$$

Esso taglia il primo asintoto della curva nel punto di coordinate

$$\frac{\alpha' + \alpha''}{2} + \frac{\mu - \nu}{2\lambda} (\alpha' - \alpha''), \quad \beta'', \quad \gamma'$$

onde il piano guidato da tale punto parallelamente agli altri due asintoti ha per equazione:

$$x = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} + \frac{\mu - \nu}{2\lambda} (\alpha' - \alpha'').$$

Di una analoga rappresentazione sono suscettibili gli altri due piani di cui parla il teorema; perciò le coordinate del punto comune ai piani stessi sono:

$$(14) \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} + \frac{\mu - \nu}{2\lambda} (\alpha' - \alpha'') \\ y = \frac{\beta' + \beta''}{2} + \frac{\nu - \lambda}{2\mu} (\beta' - \beta'') \\ z = \frac{\gamma' + \gamma''}{2} + \frac{\lambda - \mu}{2\nu} (\gamma' - \gamma''); \end{cases}$$

queste formole esprimono evidentemente le coordinate di un punto qualunque dell'iperbole cubica in funzione dei parametri  $\lambda, \mu, \nu$  legati dalla relazione (13): esse porgono l'annunciata rappresentazione parametrica. Ad es. le terne seguenti di valori dei parametri

$$(0, 1, -1) \quad , \quad (-1, 0, 1) \quad , \quad (1, -1, 0)$$

corrispondono ai punti all'infinito dell'iperbole.

Se nelle formole (14) si scambiano le costanti  $\alpha', \beta', \gamma'$  rispettivamente con  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  si ottiene l'analoga rappresentazione parametrica dell'iperbole  $\bar{I}$  coniugata della data; eccola:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} - \frac{\mu - \nu}{2\lambda} (\alpha' - \alpha'') \\ \bar{y} = \frac{\beta' + \beta''}{2} - \frac{\nu - \lambda}{2\mu} (\beta' - \beta'') \\ \bar{z} = \frac{\gamma' + \gamma''}{2} - \frac{\lambda - \mu}{2\nu} (\gamma' - \gamma'') \end{cases}$$

Ora combinando queste con le (14) si ottengono queste altre:

$$\frac{x + \bar{x}}{2} = \frac{\alpha' + \alpha''}{2}, \quad \frac{y + \bar{y}}{2} = \frac{\beta' + \beta''}{2}, \quad \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{\gamma' + \gamma''}{2}$$

le quali esprimono il seguente

**TEOREMA.** *Due iperboli gobbe coniugate sono simmetriche rispetto al loro centro comune<sup>1)</sup>*;

Esse, quindi, stanno sullo stesso cono cubico concentrico alla curva.

Osserviamo ora: che i valori  $1 \pm i\sqrt{3}, 1 \pm i\sqrt{3}, -2$  sono valori leciti per le costanti  $\lambda, \mu, \nu$  dal momento che la loro somma è nulla; che essi fanno assumere a  $x, y, z$  valori rispettivamente eguali a quelli assunti rispettivamente da  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ; e che finalmente questi valori soddisfano le equazioni (8). Avremo così elementi per concludere: *Due iperboli gobbe coniugate hanno comuni due punti (immaginari) situati sulla diagonale principale del loro comune parallelepipedo proiettante.*

Siccome essi hanno comuni anche i loro punti all'infinito così ne hanno in tutto cinque; epperò<sup>2)</sup> stanno su una stessa quadrica, di cui troveremo ora l'equazione. A tale scopo traspor-

<sup>1)</sup> Heinrichs, mem. cit., p. 226.

<sup>2)</sup> Si applica qui l'osservazione che due cubiche gobbe aventi comuni cinque punti A, B, C, D, E stanno su una medesima quadrica; è quella determinata dai punti A, B, C, D, E, da due punti F, G della prima delle date curve e da due H, K della seconda.

tiamo l'origine delle coordinate nel centro della curva e poniamo per brevità:

$$\alpha' - \alpha'' = 2l, \quad \beta' - \beta'' = 2m, \quad \gamma' - \gamma'' = 2n;$$

allora le equazioni delle due iperboli considerate assumeranno la seguente forma

$$(15) \quad X = \pm \frac{\mu - \nu}{2} l, \quad Y = \pm \frac{\nu - \lambda}{\mu} m, \quad Z = \pm \frac{\lambda - \mu}{\nu}$$

ove  $\lambda, \mu, \nu$  soddisfano sempre alla condizione (13). Se ne deduce facilmente che le due terne di cilindri proiettanti le due curve sono rappresentati rispettivamente come segue:

(16)

$$\begin{cases} (Y - m)(Z + n) + 4mn = 0 \\ (Z - n)(X + l) + 4nl = 0 \\ (X - l)(Y + m) + 4lm = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (Y + m)(Z - n) + 4mn = 0 \\ (Z + n)(X - l) + 4nl = 0 \\ (X + l)(Y - m) + 4lm = 0 \end{cases}$$

perciò le due reti di quadriche aventi per basi le due iperboli coniugate hanno per equazioni rispettivamente

$$\begin{aligned} A \{ (Y - m)(Z + n) + 4mn \} + M \{ (Z - n)(X + l) + 4nl \} + \\ N \{ (X - l)(Y + m) + 4lm \} = 0 \\ A \{ (Y + m)(Z - n) + 4mn \} + M \{ (Z + n)(X - l) + 4nl \} + \\ N \{ (X + l)(Y - m) + 4lm \} = 0 \end{aligned}$$

$A, M, N$  essendo parametri; ora per  $A = l, M = m, N = n$  queste equazioni si identificano nella seguente

$$(17) \quad lYZ + mXZ + nXY + 9lmn = 0,$$

onde questa rappresenta la quadrica a cui appartengono le due iperboli coniugate considerate. Restituiamo ora a  $l, m, n, X, Y, Z$  i loro valori; tenendo conto delle relazioni che passano fra le

costanti (I) potremo sostituire alla (17) la seguente equazione

$$(17') (\alpha' - \alpha'')yz + (\beta' - \beta'')zx + (\gamma' - \gamma'')xy - (\beta'\gamma' - \beta''\gamma'')x - \\ - (\gamma'\alpha' - \gamma''\alpha'')y - (\alpha'\beta' - \alpha''\beta'')z + \frac{9L}{8} = 0$$

Se paragoniamo questa equazione alla (11') si conclude: *La quadrica a cui appartengono due iperboli coniugate è concentrica ed omotetica al loro comune iperboloide asintotico, essendo  $\frac{3}{4}$  il rapporto di omotetia.*

Per stabilire un'altra relazione fra due iperboli coniugate poniamo  $\frac{\lambda}{\mu} = \theta$ ; sarà  $\frac{\nu}{\mu} = -\theta - 1$  e le equazioni (15) diverranno:

$$(15') \left\{ \begin{array}{l} \frac{X}{l} = \frac{\theta - 1}{\theta + 1} \\ \frac{Y}{m} = 1 + 2\theta \\ \frac{Z}{n} = -\left(1 + \frac{2}{\theta}\right) \end{array} \right. \quad (15'') \left\{ \begin{array}{l} \frac{X}{l} = -\frac{\theta - 1}{\theta + 1} \\ \frac{Y}{m} = -(1 + 2\theta) \\ \frac{Z}{n} = 1 + \frac{2}{\theta} \end{array} \right.$$

Ora l'equazione (17) può scriversi sotto la forma

$$\left(\frac{X}{l} + \frac{Y}{m}\right)\left(\frac{X}{l} + \frac{Z}{n}\right) = \left(\frac{X}{l} + 3\right)\left(\frac{X}{l} - 3\right);$$

emerge da ciò che della quadrica considerata è una generatrice la retta  $r$  rappresentata dalle equazioni

$$\frac{X}{l} + \frac{Y}{m} = 0, \quad \frac{X}{l} + 3 = 0$$

ossia

$$\frac{X}{l} + 3 = 0, \quad \frac{Y}{m} - 3 = 0;$$

un piano arbitrario  $\pi$  passante per questa retta ha per equazioni

$$\left(\frac{X}{l} + 3\right) + \varrho\left(\frac{Y}{m} - 3\right) = 0$$

onde le sue intersezioni con la curva (15') che non cadono in  $r$  saranno radici dell'equazione

$$\frac{\theta - 1}{\theta + 1} + 3 + 2\varrho(\theta - 1) = 0$$

ossia

$$\varrho\theta^2 + 2\theta + 1 - \varrho = 0.$$

Essendo quest'equazione quadratica in  $\theta$ ,  $r$  è unisecante della curva e lo stesso accade di tutte le generatrici dell'iperboloide (17) del sistema a cui appartiene  $r$ , mentre sul piano  $\pi$  cade ancora una corda della data iperbole; detti  $\theta_1$  e  $\theta_2$  i valori del parametro che corrispondono agli estremi di tale corda, si avrà

$$\theta_1 + \theta_2 = -\frac{2}{\varrho}, \quad \theta_1\theta_2 = \frac{1}{\varrho} - 1;$$

tali estremi possono essere immaginari, ma il loro punto medio è sempre reale ed ha per coordinate  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  rispett.

$$\frac{l}{2} \left( \frac{\theta_1 - \theta}{\theta_1 + \theta} + \frac{\theta_2 - 1}{\theta_2 + 1} \right) = l \frac{\theta_1\theta_2 - 1}{\theta_1\theta_2 + (\theta_1 + \theta_2) + 1} = l(2\varrho - 1),$$

$$\frac{m}{2} (1 + 2\theta_1 + 1 + 2\theta_2) = m(1 + \theta_1 + \theta_2) = m\left(\frac{\varrho - 2}{\varrho}\right),$$

$$\frac{n}{2} \left( -1 - \frac{2}{\theta_1} - 1 - \frac{2}{\theta_2} \right) = n \left( -1 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1\theta_2} \right) = n \left( \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \right).$$

Ma se ora si pone

$$\varrho = \frac{1}{1 + \sigma}$$

queste espressioni divengono

$$-l \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}, \quad -m(1 + 2\sigma), \quad n \left( 1 + \frac{2}{\sigma} \right)$$

e queste, avuto riguardo alle (15''), fanno vedere che quel punto medio appartiene all'iperbole coniugata alla data. Tenendo finalmente conto dell'invertibilità della relazione esistente fra due iperboli coniugate, si è in diritto di asserire quanto segue:

*I punti medi delle corde d'un' iperbole gobba che sono generatrici dell'iperboloide contenente anche l'iperbole coniugata si trovano su questa seconda curva <sup>1)</sup>.*

Gli assi e gli asintoti delle due iperboli gobbe considerate costituiscono un esagono gobbo, i cui vertici sono quelli del parallelepipedo proiettante, escluse due  $D, D'$ . Ora è chiaro che altre coppie di iperboli gobbe coniugate, aventi lo stesso centro ed i medesimi punti all'infinito, possono ottenersi escludendo invece una delle altre coppie di vertici opposti. Mentre assi ed asintoti delle iperboli sinora considerate sono rappresentati dalle equazioni (3') e (7') quelli delle iperboli risultanti dall'omissione di una delle coppie  $A'A'', B'B'', C'C''$  sono risp.

$$\left. \begin{array}{l} y = \beta'', \quad z = \gamma' \\ x = \alpha'', \quad z = \gamma'' \\ x = \alpha', \quad y = \beta' \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \beta', \quad z = \gamma'' \\ x = \alpha', \quad z = \gamma' \\ x = \alpha'', \quad y = \beta'' \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \beta', \quad z = \gamma' \\ x = \alpha', \quad z = \gamma'' \\ x = \alpha'', \quad y = \beta'' \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \beta'', \quad z = \gamma'' \\ x = \alpha'', \quad z = \gamma' \\ x = \alpha', \quad y = \beta' \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \beta'', \quad z = \gamma'' \\ x = \alpha', \quad z = \gamma' \\ x = \alpha'', \quad y = \beta' \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \beta', \quad z = \gamma' \\ x = \alpha'', \quad z = \gamma'' \\ x = \alpha', \quad y = \beta'' \end{array}$$

Paragonando queste tre coppie di formole alle citate (3'), (7') si vede che quelle nascono da queste scambiando: 1°  $\beta'$  con  $\beta''$  e  $\gamma'$  con  $\gamma''$ ; oppure 2°  $\gamma'$  con  $\gamma''$  e  $\alpha'$  con  $\alpha''$ ; o finalmente 3°  $\alpha'$  con  $\alpha''$  e  $\beta'$  con  $\beta''$ . Eseguendo tali scambi nelle formole dianzi stabilite si deducono tutte quelle relative alle tre nuove coppie di iperboli gobbe coniugate. Lasciamo al lettore

<sup>1)</sup> Vogt, mem. cit., p. 311.

di scrivere le formole risultanti e dedurne che *le otto iperboli gobbe inerenti allo stesso parallelepipedo proiettante stanno due a due sopra dodici cilindri quàdrlici.*

#### § 4. Piani per tre punti, piani osculatori, piani asintotici.

Il piano passante per tre punti della data iperbole corrispondenti ai valori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  del parametro ha per equazione

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \frac{a_1}{a-\lambda_1} & \frac{b_1}{b-\lambda_1} & \frac{c_1}{c-\lambda_1} & 1 \\ \frac{a_1}{a-\lambda_2} & \frac{b_1}{b-\lambda_2} & \frac{c_1}{c-\lambda_2} & 1 \\ \frac{a_1}{a-\lambda_3} & \frac{b_1}{b-\lambda_3} & \frac{c_1}{c-\lambda_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$(18) \quad \frac{x}{a_1} (b-c)(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3) + \frac{y}{b_1} (c-a)(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3) + \frac{z}{c_1} (a-b)(c-\lambda_1)(c-\lambda_2)(c-\lambda_3) + (b-c)(c-a)(a-b) = 0$$

Portando a coincidenza i tre punti considerati si deduce da questa l'equazione del piano che oscula l'iperbole nel punto di parametro  $\lambda$ ; è la seguente:

$$\frac{b-c}{a_1} (\lambda-a)^2 x + \frac{c-a}{b_1} (\lambda-b)^2 y + \frac{a-b}{c_1} (\lambda-c)^2 z - (b-c)(c-a)(a-b) = 0;$$

p. es. facendo tendere  $\lambda$  a  $\infty$  si conclude che l'oscultore nell'origine è rappresentato dall'equazione

$$(20) \quad \frac{b-c}{a_1} x + \frac{c-a}{b_1} y + \frac{a-b}{c_1} z = 0;$$

supponendo invece successivamente  $\lambda = a, b, c$  si ottengono le seguenti equazioni dei piani asintotici:

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{y}{b_1(c-a)^2} - \frac{z}{c_1(a-b)^2} - \frac{(b-c)^3}{D^2} = 0 \\ \frac{z}{c_1(a-b)^2} - \frac{x}{a_1(b-c)^2} - \frac{(c-a)^3}{D^2} = 0 \\ \frac{x}{a_1(b-c)^2} - \frac{y}{b_1(c-a)^2} - \frac{(a-b)^3}{D^2} = 0; \end{cases}$$

esse mostrano che tali piani sono paralleli alla retta

$$\frac{x}{a_1(b-c)^2} = \frac{y}{b_1(c-a)^2} = \frac{z}{c_1(a-b)^2},$$

ossia, introducendo le nuove costanti (I),

$$\frac{x}{\alpha' - \alpha''} = \frac{y}{\beta' - \beta''} = \frac{z}{\gamma' - \gamma''};$$

e poichè questa retta è parallela alla  $D'D''$  così si conclude:

*I piani asintotici d'un'iperbole gobba sono i piani condotti per gli asintoti parallelamente alla diagonale principale del parallelepipedo proiettante. Si può anche notare che introducendo le stesse costanti  $\alpha', \dots, \gamma''$  nelle equazioni dei piani asintotici, queste assumono il seguente aspetto:*

$$(21') \quad \begin{cases} \frac{y - \frac{\beta' + \beta''}{2}}{\beta' - \beta''} - \frac{z - \frac{\gamma' + \gamma''}{2}}{\gamma' - \gamma''} + 1 = 0 \\ \frac{z - \frac{\gamma' + \gamma''}{2}}{\gamma' - \gamma''} - \frac{x - \frac{\alpha' + \alpha''}{2}}{\alpha' - \alpha''} + 1 = 0 \\ \frac{x - \frac{\alpha' + \alpha''}{2}}{\alpha' - \alpha''} - \frac{y - \frac{\beta' + \beta''}{2}}{\beta' - \beta''} + 1 = 0; \end{cases}$$

mentre l'equazione generica dell'osculatore può scriversi, come si dimostra servendosi di un calcolo che omettiamo per brevità,

$$(19') \quad \frac{x - \frac{\alpha' + \alpha''}{2}}{\alpha' - \alpha''} \lambda^3 + \frac{y - \frac{\beta' + \beta''}{2}}{\beta' - \beta''} \mu^3 + \frac{z - \frac{\gamma' + \gamma''}{2}}{\gamma' - \gamma''} \nu^3 + \frac{(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)}{2} = 0.$$

Se poi la curva s' intende rappresentata dalle equazioni (15), cioè

$$X = \frac{\mu - \nu}{\lambda} (\alpha' - \alpha''), Y = \frac{\nu - \lambda}{\mu} (\beta' - \beta''), Z = \frac{\lambda - \mu}{\nu} (\gamma' - \gamma'')$$

(ove i parametri sono soggetti alla condizione  $\lambda + \mu + \nu = 0$ ) l'equazione generale dell'osculatore diviene

$$(19'') \quad \frac{X}{l} \lambda^3 + \frac{Y}{m} \mu^3 + \frac{Z}{n} \nu^3 + (\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu) = 0:$$

in particolare i piani asintotici assumono le seguenti rappresentazioni

$$(21'') \quad \begin{cases} \frac{Y}{m} - \frac{Z}{n} + 2 = 0 \\ \frac{Z}{n} - \frac{X}{l} + 2 = 0 \\ \frac{X}{l} - \frac{Y}{m} + 2 = 0 \end{cases}$$

Per risolvere col minimo dispendio di calcolo il problema di « determinare l'asse dell'iperbole cubica considerata situata in un piano arbitrario dello spazio » faremo uso della formola (18) del Cap. precedente, la quale risolve l'analogo problema per la curva rappresentata dall'equazioni

$$\varrho x_0 = 1, \varrho x_1 = \lambda, \varrho x_2 = \lambda^2, \varrho x_3 = \lambda^3$$

Per ridurre un caso all'altro eseguiremo la trasformazione di coordinate determinata dalle seguenti formole:

$$(a) \begin{cases} \frac{b-c}{a_1} x + \frac{c-a}{b_1} y + \frac{a-b}{c_1} z = \sigma x_0 \\ \frac{b-c}{a_1} a x + \frac{c-a}{b_1} b y + \frac{a-b}{c_1} c z = \sigma x_1 \\ \frac{b-c}{a_1} a^2 x + \frac{c-a}{b_1} b^2 y + \frac{a-b}{c_1} c^2 z = \sigma x_2 \\ \frac{b-c}{a_1} a^3 x + \frac{c-a}{b_1} b^3 y + \frac{a-b}{c_1} c^3 z - D = \sigma x_3 \end{cases}$$

L'equazione (19) diviene in conseguenza

$$\lambda^3 x_0 - 3 \lambda^2 x_1 + 3 \lambda x_2 - x_3 = 0$$

e fra le coordinate omogenee di un piano e le sue coordinate plückeriane passeranno le seguenti relazioni:

$$(22) \begin{cases} -(a_1 b e u + b_1 c v + c_1 a w) + abc = s \xi_0 \\ a_1 (b+c) u + b_1 (c+a) v + c_1 (a+b) w - (bc + ca + ab) = s \xi_1 \\ -(a_1 u + b_1 v + c_1 w) + (a+b+c) = s \xi_2 \\ -1 = s \xi_3 \end{cases}$$

$s$  essendo un nuovo fattore di proporzionalità. In conseguenza potremo dire che i valori del parametro corrispondenti ai due osculatori che si tagliano sul piano

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

sono le radici dell'equazione

$$(23) \begin{vmatrix} \omega^2 & -\omega & 1 \\ 3 \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & 3 \xi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

nella quale le  $\xi$  hanno i valori dati dalle formole (22). In particolare, supponendo  $u = v = w = 0$  si conclude che l'iperbole cu-

bica ammette due osculatori fra loro paralleli, i cui parametri sono le radici dell'equazione

$$(24) \begin{vmatrix} \omega^2 & -\omega & 1 \\ 3abc & -(bc+ca+ab) & a+b+c \\ -(bc+ca+ab) & a+b+c & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Tali piani sono immaginari (in virtù di un teorema dimostrato nel Cap. precedente, pag. 90), dal momento che sono reali le intersezioni della curva che stiamo studiando col piano all'infinito.

Dalle formole (15) e (19'') risulta che la distanza di un punto qualunque  $M$  della curva dal primo dei piani asintotici della iperbole è dato da

$$\frac{1}{P} \left( \frac{v-\lambda}{\mu} - \frac{\lambda-\mu}{v} + 2 \right)$$

ossia, per essere  $\lambda + \mu + v = 0$ ,  $\frac{2\lambda^2}{P\mu v}$  ove  $P$  è una nota funzione delle costanti  $m$ ,  $n$  e degli angoli formati fra loro dagli assi coordinati. Se  $Q$ ,  $R$  sono analoghe funzioni, si vede che le distanze dello stesso punto  $M$  dagli altri due piani asintotici sono espresse rispett. da  $\frac{2\mu^2}{Qv\lambda}$  e  $\frac{2v^2}{R\lambda\mu}$ ; quindi il prodotto di dette distanze vale  $\frac{8}{PQR}$ , epperò è indipendente della posizione di quel punto. Possiamo, pertanto, ritenere dimostrato il seguente

**TEOREMA.** È costante il prodotto delle distanze di un punto arbitrario di un'iperbole gobba dai suoi piani asintotici<sup>1)</sup>.

In conseguenza la proiezione ortogonale della curva fatta sopra un piano  $\sigma$  perpendicolare alla diagonale principale del parallelepipedo proiettante può rappresentarsi mediante un'equazione della forma  $pqr = \text{cost}$ ,  $p, q, r$  essendo le distanze della proie-

<sup>1)</sup> Majeen, op. cit., p. 146.



zione di un punto arbitrario della curva dalle tracce sopra  $\sigma$  dei piani asintotici <sup>1)</sup>.

Dalle stesse formole si può trarre la dimostrazione di quest'altro

**TEOREMA.** *Sopra un osculatore arbitrario d'un' iperbole gobba gli asintoti ed i piani asintotici determinano due triangoli tali che l'area del primo è doppia di quella del secondo <sup>2)</sup>.*

Indichiamo, infatti, con  $T_a$  e  $T_p$  le aree dei due triangoli di cui parla il teorema; siccome essi appartengono allo stesso piano, così il rapporto  $\frac{T_a}{T_p}$  non differisce da quello dei volumi dei tetraedri

che li hanno per basi e per comune vertice un punto arbitrario dello spazio. Assumendo per semplicità quale punto ausiliare il centro della curva (che è l'origine delle coordinate) si vede facilmente che il rapporto dei detti volumi è eguale a quello dei determinanti  $A_a, A_p$  formati dalle coordinate dei vertici  $P_1P_2P_3$  e  $P'P''P'''$  di quei triangoli. Ora siccome il primo asintoto dell'iperbole data ha per equazioni

$$Y = -m, Z = n,$$

così esso taglia il piano (19'') nel punto  $P_1$  di coordinate

$$\frac{3l(\mu - \nu)}{\lambda}, -m, n.$$

Analoghe espressioni avendosi per le coordinate di  $P_2$  e  $P_3$  si conclude:

$$A_a = \begin{vmatrix} \frac{3l(\mu - \nu)}{\lambda}, & -m, & n \\ l, & \frac{3m(\nu - \lambda)}{\mu}, & -n \\ -l, & m, & \frac{3n(\lambda - \mu)}{\nu} \end{vmatrix} =$$

<sup>1)</sup> Heinrichs, mem. cit., p. 124.

<sup>2)</sup> Majcen, id., p. 146.

$$\frac{l m n}{\lambda \mu \nu} \begin{vmatrix} 3(\mu - \nu), & -\lambda, & \lambda \\ \mu, & 3(\nu - \lambda), & -\mu \\ -\nu, & \nu, & 3(\lambda - \mu) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{l m n}{\lambda \mu \nu} \left\{ 27(\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu) - 3\mu\nu(\mu - \nu) - 3\nu\lambda(\nu - \lambda) - 3\lambda\mu(\lambda - \mu) \right\} \\ = \frac{24 l m n (\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)}{\lambda \mu \nu}$$

Passiamo al secondo triangolo. Ricordando le equazioni (21) dei piani asintotici si trova che le coordinate  $X', Y', Z'$  del punto  $P'$  sono date dalle relazioni seguenti:

$$\frac{X'}{l} = \frac{(\mu - \nu)(\lambda^2 + 2\mu\nu)}{3\lambda\mu\nu}, \quad \frac{Y'}{m} = \frac{X'}{l} + 2, \quad \frac{Z'}{n} = \frac{X'}{l} - 2.$$

Similmente sono espresse quelle di  $P''$  e  $P'''$ ; perciò

$$A_p = 12 l m n \left\{ \frac{X''}{l} + \frac{Y''}{m} + \frac{Z''}{n} \right\} = -\frac{12 l m n (\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu)}{\lambda \mu \nu}.$$

È dunque in valore assoluto  $\frac{A_a}{A_p} = 2$  c. d. d.

### § 5. Il complesso lineare e la superficie mediana d'un' iperbole gobba.

Riprendiamo l'equazione (18), che rappresenta il piano condotto per tre punti della data curva corrispondente ai valori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  del parametro  $\lambda$  e poniamo per brevità

$$(25) \quad \begin{cases} t_k = \frac{b-c}{a_1} a^k x + \frac{c-a}{b_1} b^k y + \frac{a-b}{c_1} c^k z \\ \tau_k = \frac{b-c}{a_1} a^k \xi + \frac{c-a}{b_1} b^k \eta + \frac{a-b}{c_1} c^k \zeta \end{cases}$$

per  $k = 0, 1, 2, 3$ ; essa allora diviene

(18')

$$t_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - t_1 (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) + t_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - t_3 - D = 0$$

Se ora noi supponiamo che i punti di parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  siano quelli in cui la data curva è toccata dagli osculatori uscenti dal punto  $M(\xi, \eta, \zeta)$  avremo

$$\frac{b-c}{a_1} (\lambda-a)^3 \xi + \frac{c-a}{b_1} (\lambda-b)^3 \eta + \frac{a-b}{c_1} (\lambda-c)^3 \zeta - D = 0,$$

cioè, per le posizioni (25),

$$\tau_0 \lambda^3 - 3 \tau_1 \lambda^2 + 3 \tau_2 \lambda - 3 \tau_3 = 0;$$

sarà quindi

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{3 \tau_1}{\tau_0}, \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = \frac{3 \tau_2}{\tau_0}, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{3 \tau_3}{\tau_0}$$

e la (18') diverrà

$$D(t_0 - \tau_0) + 3(t_2 \tau_1 - t_1 \tau_2) + (t_0 \tau_3 - t_3 \tau_0) = 0$$

Introducendo ora le coordinate di rette

$$p_{01} = \xi - x, \quad p_{02} = \eta - y, \quad p_{03} = \zeta - z$$

$$p_{23} = y \zeta - z \eta, \quad p_{31} = z \xi - x \zeta, \quad p_{12} = x \eta - y \xi$$

si trova

$$t_0 - \tau_0 = \frac{b-c}{a_1} p_{01} + \frac{c-a}{b_0} p_{02} + \frac{a-b}{c_1} p_{03}$$

$$t_2 \tau_1 - t_1 \tau_2 = D \left\{ \frac{bc}{b_1 c_1} p_{23} + \frac{ca}{c_1 a_1} p_{31} + \frac{ab}{a_1 b_1} p_{12} \right\}$$

$$t_0 \tau_3 - t_3 \tau_0 = -D \left\{ \frac{b^2 + bc + c^2}{b_1 c_1} p_{23} + \frac{c^2 + ca + a^2}{c_1 a_1} p_{31} + \frac{a^2 + ab + b^2}{a_1 b_1} p_{12} \right\}$$

e l'equazione precedente diviene

$$(26) \quad \frac{b-c}{a_1} p_{01} + \frac{c-a}{b_1} p_{02} + \frac{a-b}{c_1} p_{03} +$$

$$+ \frac{(b-c)^2}{b_1 c_1} p_{23} + \frac{(c-a)^2}{c_1 a_1} p_{31} + \frac{(a-b)^2}{a_1 b_1} p_{12} = 0:$$

essa rappresenta il complesso lineare relativo alla data iperbole. Introducendo le altre costanti  $\alpha', \dots, \gamma''$  essa assume la forma seguente

$$(26') \quad \frac{\alpha' - \alpha''}{\alpha' \alpha''} p_{01} + \frac{\beta' - \beta''}{\beta' \beta''} p_{02} + \frac{\gamma' - \gamma''}{\gamma' \gamma''} p_{03} +$$

$$+ \frac{(\alpha' - \alpha'') p_{23} + (\beta' - \beta'') p_{31} + (\gamma' - \gamma'') p_{12}}{(\alpha' - \alpha'')(\beta' - \beta'')(\gamma' - \gamma'')} = 0$$

Cambiando ivi  $\alpha', \beta', \gamma'$  rispett. in  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  si otterrà l'equazione analoga relativa all'iperbole coniugata; è la seguente:

$$\frac{\alpha' - \alpha''}{\alpha' \alpha''} p_{01} + \frac{\beta' - \beta''}{\beta' \beta''} p_{02} + \frac{\gamma' - \gamma''}{\gamma' \gamma''} p_{03} -$$

$$- \frac{(\alpha' - \alpha'') p_{23} + (\beta' - \beta'') p_{31} + (\gamma' - \gamma'') p_{12}}{(\alpha' - \alpha'')(\beta' - \beta'')(\gamma' - \gamma'')} = 0$$

Calcolando ora l'invariante simultaneo di questi due complessi si ottiene per risultato 0; dunque: *I complessi lineari determinati da due iperbole gobbe fra loro coniugate sono in involuzione<sup>1)</sup>*.

Ricordando la definizione di superficie mediana d'una curva (v. p. 13) e la rappresentazione parametrica<sup>2)</sup> della linea che stiamo studiando, si vede che *la superficie mediana dell'iperbole gobba può rappresentarsi mediante le formole:*

$$(27) \quad \left. \begin{aligned} x &= \frac{a_1}{2} \left( \frac{1}{a-\lambda} + \frac{1}{a-\mu} \right) \\ y &= \frac{b_1}{2} \left( \frac{1}{b-\lambda} + \frac{1}{b-\mu} \right) \\ z &= \frac{c_1}{2} \left( \frac{1}{c-\lambda} + \frac{1}{c-\mu} \right)^2. \end{aligned} \right\}$$

<sup>1)</sup> Vogt, mem. cit. p. 310.

<sup>2)</sup> Questa superficie è suscettibile di altra definizione. Consideriamo, infatti, una qualunque delle  $\infty^2$  quadriche passanti per la data curva  $\Gamma$  e

Per trovarne l'equazione scriviamo queste relazioni sotto la forma seguente:

$$\begin{aligned} 2a \left( \frac{ax}{a_1} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{2ax}{a_1} \right) (\lambda + \mu) + \frac{2x}{a_1} \lambda \mu &= 0 \\ 2b \left( \frac{bx}{b_1} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{2bx}{b_1} \right) (\lambda + \mu) + \frac{2y}{b_1} \lambda \mu &= 0 \\ 2c \left( \frac{cx}{c_1} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{2cx}{c_1} \right) (\lambda + \mu) + \frac{2z}{c_1} \lambda \mu &= 0; \end{aligned}$$

eliminando allora linearmente fra queste  $\lambda + \mu$  e  $\lambda \mu$  si conclude che la superficie mediana ha per equazione

$$\begin{aligned} (28) \quad -2(b-c)(c-a)(a-b) + \frac{a_1(b-c)(b+c-2a)}{x} + \\ + \frac{b_1(c-a)(c+a-2b)}{y} + \frac{c_1(a-b)(a+b-2c)}{z} + \\ + \frac{b_1c_1(b-c)}{yz} + \frac{c_1a_1(c-a)}{zr} + \frac{a_1b_1(a-b)}{xz} = 0; \end{aligned}$$

questa *c'* insegna intanto che la superficie mediana d'un' iperbole gobba è di terzo ordine. Questa curva appartiene evidentemente alla superficie mediana (sulla quale essa è rappresentata dalla equazione  $\lambda = \mu$ ); per meglio chiarire l'ufficio che essa disimpegna su detta superficie, consideriamone un punto qualunque e la relativa tangente; se  $\lambda$  è il valore del parametro che compete a quel punto e  $\varrho$  una variabile affatto libera, le coordinate di un punto qualunque di quella tangente, grazie alle (6), avranno la seguente forma:

$$\frac{(a+\varrho)a_1}{(a-\lambda)^2}, \quad \frac{(b+\varrho)b_1}{(b-\lambda)^2}, \quad \frac{(c+\varrho)c_1}{(c-\lambda)^2};$$

chiamiamone il centro  $C$ . Per questo passa una corda  $MN$  di  $\Gamma$  la quale ha  $C$  per punto medio;  $C$  è, dunque, un punto della superficie mediana, epperò questa è anche il luogo geometrico delle  $\infty^3$  quadriche passanti per la data curva.

in particolare il punto di contatto corrisponde a  $\varrho = -\lambda$ , mentre le intersezioni di quella tangente con la superficie (28) corrispondono ai valori di  $\varrho$  soddisfacenti l'equazione

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{a^2(a+\varrho)}{(a-\lambda)^2} - a, & 1 - \frac{2a(a+\varrho)}{(a-\lambda)^2}, & \frac{(a+\varrho)}{(a-\lambda)^2} \\ \frac{b^2(b+\varrho)}{(b-\lambda)^2} - b, & 1 - \frac{2b(b+\varrho)}{(b-\lambda)^2}, & \frac{(b+\varrho)}{(b-\lambda)^2} \\ \frac{c^2(c+\varrho)}{(c-\lambda)^2} - c, & 1 - \frac{2c(c+\varrho)}{(c-\lambda)^2}, & \frac{(c+\varrho)}{(c-\lambda)^2} \end{array} \right| = 0;$$

ora tolti i denominatori, questa si può scrivere

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} a^2 & a & 1 & \varrho + 2\lambda & -\lambda^2 & 0 \\ b^2 & b & 1 & -1 & -2(\varrho + \lambda) & \lambda^2 \\ c^2 & c & 1 & 0 & 1 & \varrho \end{array} \right| = 0$$

cioè  $(\varrho + \lambda)^2 = 0$ . Ciò prova che quella tangente dell'iperbole gobba è una tangente principale della superficie mediana; e siccome si tratta di una tangente qualunque, così si conclude: un'iperbole gobba è asintotica della corrispondente superficie mediana<sup>1)</sup>.

Introducendo la costante  $\alpha', \dots, \gamma''$  e riferendo tutte le figure al centro della curva come origine delle coordinate, l'equazione (28) assume la forma seguente:

$$\begin{aligned} (28') \quad 2XYZ + (\beta' - \beta'')(\gamma' - \gamma'')X + (\gamma' - \gamma'')(\alpha' - \alpha'')Y + \\ + (\alpha' - \alpha'')(\beta' - \beta'')Z = 0; \end{aligned}$$

ora siccome questa non cambia mutando  $\alpha', \beta', \gamma'$  rispettivamente in  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  così è chiaro che due iperboli gobbe fra loro coniugate hanno la stessa superficie mediana<sup>1)</sup>.

La superficie mediana, essendo di terzo ordine è rappre-

<sup>1)</sup> Vogt, l. c., p. 311.

sentabile univocamente su di un piano; per caratterizzare tale rappresentazione scriviamo le (27) come segue:

$$x = \frac{a_1}{2} \frac{2a - (\lambda + \mu)}{a^2 - (\lambda + \mu)a + \lambda\mu}, \quad y = \frac{b_1}{2} \frac{2b - (\lambda + \mu)}{b^2 - (\lambda + \mu)b + \lambda\mu},$$

$$z = \frac{c_1}{2} \frac{2c - (\lambda + \mu)}{c^2 - (\lambda + \mu)c + \lambda\mu}$$

e poniamo

$$\lambda + \mu = u, \quad \lambda\mu = v;$$

giungeremo così alle seguenti formole

(29)

$$x = \frac{a_1}{2} \frac{2a - u}{a^2 - au + v}, \quad y = \frac{b_1}{2} \frac{2b - u}{b^2 - bu + v}, \quad z = \frac{c_1}{2} \frac{2c - u}{c^2 - cu + v}.$$

Se qui s'interpretano  $u, v$  come coordinate cartesiane di un punto del piano del disegno, queste si possono considerare come le formole che danno la rappresentazione cercata dalla superficie mediana. Le scriveremo per brevità sotto la forma

$$(30) \quad x = \frac{X_1}{X}, \quad y = \frac{Y_1}{Y}, \quad z = \frac{Z_1}{Z}$$

intendendo con  $X, \dots, Z_1$  funzioni lineari delle variabili  $u, v$ . Alla sezione prodotta nella superficie di un piano arbitrario

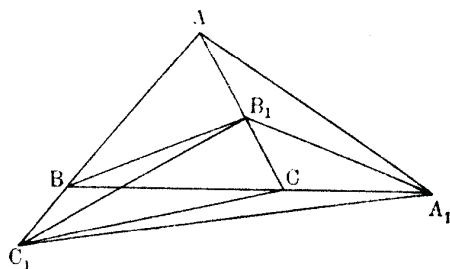


Fig. 3.

fig. 3)  $A, B, C$  del triangolo avente per lati le tre rette  $X = 0, Y = 0, Z = 0$ , nonchè per i punti  $A_1, B_1, C_1$  in cui si tagliano

$$ax + by + cz + d = 0$$

corrisponde nel piano di rappresentazione la cubica

$$a X_1 Y Z + b Y_1 Z X + c Z_1 X Y + d X Y Z = 0,$$

la quale evidentemente passa per i vertici (v.

rispett. le coppie di rette

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ X_1 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Y = 0 \\ Y_1 = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Z = 0 \\ Z_1 = 0 \end{array} \right\}$$

I punti  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  sono i punti fondamentali della rappresentazione della superficie; essi corrispondono ad altrettante rette di essa; questa ne contiene altre sei, rappresentate dalle rette  $AA_1, BB_1, CC_1, B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$ . Con tali elementi si può completamente studiare la geometria sulla superficie mediana e caratterizzarne meglio la specializzazione rispetto ad un'arbitraria superficie cubica.

### § 6. Iperboli gobbe metricamente specializzate.

I. Se gli asintoti d'un'iperbole gobba sono fra loro a due a due ortogonali, la curva si dice ortogonale; ad essa sono applicabili tutte le formole stabilite, aggiungendo l'ipotesi che gli assi siano ortogonali. Accenniamo a qualche conseguenza.

Dalle equazioni (5), che rappresentano una corda della curva, si deduce che, affinchè le corde  $\lambda_1\lambda_2$  e  $\lambda_3\lambda_4$  siano fra loro ortogonali dev'essere

$$(31) \quad \Sigma \frac{a_1^2}{(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)(a - \lambda_3)(a - \lambda_4)} = 0,$$

la somma essendo estesa agli altri due termini che nascono da quello scritto mutando  $a$  in  $b, c$ .

Similmente dalla equazione (18) si trae che i piani  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$  e  $\lambda_4\lambda_5\lambda_6$  risultano fra loro ortogonali se sussiste la relazione analoga.

$$\Sigma \frac{(b - c)}{a_1^2} (a - \lambda_1)(a - \lambda_2)(a - \lambda_3)(a - \lambda_4)(a - \lambda_5)(a - \lambda_6) = 0$$

Ora siccome le formole (31) e (32) possiedono la qualità di essere simmetriche nei valori dei parametri, così possiamo ritenere stabilite le due seguenti proposizioni:

Se le corde  $P_1P_2, P_3P_4$  d'un'iperbole gobba ortogonale sono

fra loro perpendicolari, lo stesso accadrà delle corde  $P_2P_3$ ,  $P_1P_4$  e delle  $P_3P_1$ ,  $P_2P_4$ <sup>1)</sup>.

Se i sei punti  $P_1, \dots, P_6$  d'un' iperbole gobba ortogonale sono tali che i due piani  $P_1P_2P_3$  e  $P_4P_5P_6$  siano fra loro perpendicolari, lo stesso accadrà delle altre nove coppie di piani che si possono far passare per quei punti<sup>2)</sup>.

Una curva della specie ora considerata s'incontra nella teoria delle quadriche. Infatti, consideriamo ad es. la superficie di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e cerchiamo le normali condotte ad essa dal punto di coordinate  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ; si vede facilmente che le coordinate dei loro piedi devono soddisfare, oltre che all'equazione precedente, a queste altre

$$\frac{a^2(\alpha - x)}{x} = \frac{b^2(\beta - y)}{y} = \frac{c^2(\gamma - z)}{z};$$

ora, indicando con  $\sigma$  il valore comune di queste frazioni, si ottiene

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2 + \sigma}, \quad y = \frac{b^2\beta}{b^2 + \sigma}, \quad z = \frac{c^2\gamma}{c^2 + \sigma}$$

e siccome queste rientrano nel tipo (1) così si vede che i piedi delle sei normali che si possono condurre ad una quadrica da un punto arbitrario dello spazio stanno su una cubica gobba ortogonale, passante per il centro e pei punti all'infinito degli assi della superficie.

II. Nella geometria del triangolo s'incontra una conica detta « iperbole di Kiepert »; come analoga nello spazio fu suggerita la curva che si ottiene come segue<sup>3)</sup>: Si consideri il te-

<sup>1)</sup> Bioche, *Sur les cubiques gauches équilibrées* (Proc. of the math. Soc. of Edimburgh, 1895).

<sup>2)</sup> Vogt, mem. cit., p. 317.

<sup>3)</sup> F. D. Murnaghan, *A cubic Space Curve connected with the Tetrahedron* (The Amer. Math. Monthly, T. XXVIII, 1921, 203-6).

traedro  $A_0A_1A_2A_3$  e si chiamino  $O_0, O_1, O_2, O_3$  i centri delle sue facce; un punto qualunque della perpendicolare condotta dal punto  $O_0$  alla faccia  $A_1A_2A_3$  è centro di una sfera circoscritta al triangolo  $A_1A_2A_3$  e gli angoli  $O_0C_0A_1, O_0C_0A_2, O_0C_0A_3$  sono fra loro eguali; ne sia  $\theta$  il valore comune; in particolare sia  $\theta_0$  il valore di  $\theta$  che corrisponde alla sfera circoscritta al tetraedro. Ragionando similmente su tutte le facce si vede che ad ogni valore di  $\theta$  corrispondono quattro sfere, ognuna delle quali è circoscritta ad una faccia del dato tetraedro. Esse ammettono un centro radicale, il quale muta al variare di  $\theta$  e descrive una curva che, in coordinate tetraedriche<sup>1)</sup> si può rappresentare mediante le seguenti equazioni

$$(32) \quad \rho x_i = \frac{1}{\text{sen}(\theta_i - \theta)}$$

ove  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  hanno significati analoghi a  $\theta_0$ . Ora queste equazioni si possono scrivere come segue:

$$\text{sen} \theta_1 \cos \theta - \cos \theta_1 \text{sen} \theta = \frac{1}{\rho x_1};$$

si attribuiscono a  $i$  i valori 1, 2, 3, e si eliminino  $\cos \theta, \text{sen} \theta, \frac{1}{\rho}$  fra le equazioni risultanti; si otterrà così

$$\begin{vmatrix} \text{sen} \theta_1, \cos \theta_1, \frac{1}{x_1} \\ \text{sen} \theta_2, \cos \theta_2, \frac{1}{x_2} \\ \text{sen} \theta_3, \cos \theta_3, \frac{1}{x_3} \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$x_2 x_3 \text{sen}(\theta_2 - \theta_3) + x_3 x_1 \text{sen}(\theta_3 - \theta_1) + x_1 x_2 \text{sen}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

che rappresenta un cono quadrico circoscritto al triedro avente per spigoli le rette  $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3$ . Altri tre si ottengono

<sup>1)</sup> Distanze di un punto delle facce del dato tetraedro.

in modo analogo. Da ciò è facile dedurre che la curva rappresentata dalle equazioni (32) è una cubica gobba.

B) L'IPERBOLE PARABOLICA.

La più comoda rappresentazione parametrica della cubica gobba tangente al piano all'infinito è la seguente:

$$(1) \quad x = \frac{a\lambda^3}{\lambda - k}, \quad y = b\lambda^2, \quad z = c\lambda$$

La curva passa per l'origine (come vedesi facendo  $\lambda = 0$ ); taglia il piano all'infinito nel punto corrispondente al valore  $\lambda = k$  e lo tocca nel punto in cui  $\lambda = \infty$ . Essa sta sull'unico cilindro quadrico (parabolico) di equazione

$$(2) \quad \frac{y}{b} = \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

Ragionando come si fece sull'iperbole gobba si vede che la corda della curva che stiamo studiando che passa per i punti di parametri  $\lambda, \mu$  è rappresentata dalle equazioni

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} (\lambda + \mu) + \lambda\mu = 0 \\ \frac{x}{a} (\lambda - k) (\mu - k) \frac{y}{b} - \left[ \lambda\mu - k (\lambda + \mu) \right] - \frac{z}{c} k\lambda\mu = 0; \end{cases}$$

in conseguenza la tangente nel punto  $\lambda$  ha per equazioni

$$(4) \quad \frac{y}{b} - \frac{2\lambda z}{c} + \lambda^2 = 0, \quad \frac{x}{a} (\lambda - k)^2 - \frac{y}{b} \lambda (\lambda - 2k) - \frac{z}{c} k\lambda^2 = 0;$$

p. es. la tangente nell'origine è la retta  $x = 0, y = 0$ , cioè l'asse della  $x$ . L'asintoto della curva ha per equazioni

$$(5) \quad y = k^2 b, \quad z = kc.$$

onde esso è parallelo a  $Ox$ , mentre la tangente esistente nel piano all'infinito sta nel piano

$$(6) \quad \frac{x}{c} - \frac{y}{b} - \frac{kz}{c} = 0$$

Il piano passante per i punti  $\lambda, \mu, \nu$  ha per equazione

$$(7) \quad \frac{x}{a} - \frac{1}{k} \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) (\lambda + \mu + \nu) + \left[ \frac{1}{k^2} \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) - \frac{z}{kc} \right] (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) - \left[ \frac{1}{k^3} \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) - \frac{z}{k^2 c} - \frac{1}{k} \right] \lambda\mu\nu = 0,$$

epperò l'osculatore in  $\lambda$  ha per equazione

$$(8) \quad \frac{x}{a} - \frac{3\lambda}{k} \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) + 3\lambda^2 \left[ \frac{1}{k^2} \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) - \frac{z}{kc} \right] - \lambda^3 \left[ \frac{1}{k^2} \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) - \frac{z}{k^2 c} - \frac{1}{k} \right] = 0;$$

p. es. nell'origine l'osculatore è  $x = 0$ , mentre i due piani asintotici hanno per equazioni rispettive

$$(9) \quad \frac{y}{b} - \frac{2kz}{c} + k^2 = 0$$

$$(10) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{kz}{c} - k^2 = 0$$

In assi ortogonali, chiamando  $\delta_1$  e  $\delta_2$  le distanze da questi piani di un punto arbitrario della curva, si trova:

$$\delta_1 = \frac{(\lambda - k)^2}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{4k^2}{c^2}}}, \quad \delta_2 = \frac{k^3}{(\lambda - k) \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{k^2}{c^2}};$$

segue da queste

$$(11) \quad \delta_1 \delta_2^2 = \frac{k^6}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{4k^2}{c^2}} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} \right)} = \text{cost.}$$

proprietà dell'iperbole parabolica del tutto analoga ad altra che accertammo nell'iperbole gobba (v. pag. 135).

Dalle (8) si trae che l'iperbole gobba non ammette coppie di osculatori fra loro paralleli.

Con lo stesso metodo seguito per l'iperbole gobba si giunge alla seguente equazione del complesso lineare determinato dalla curva in esame:

$$(12) \quad \frac{k}{a} \left( \frac{p_{12}}{a} - \frac{p_{31}}{c} \right) - 3 \left[ \frac{1}{k} \left( \frac{p_{01}}{a} - \frac{p_{02}}{b} \right) - \frac{p_{03}}{c} \right] = 0.$$

(<sup>1</sup>) L'ELLISSE GOBBA.

§ 1. Generalità.

Per studiare una cubica gobba avente all'infinito un punto reale e due immaginari coniugati ci serviremo della seguente rappresentazione parametrica esposta nel Cap. prec. 1):

$$(1) \quad x = \frac{a\lambda^3}{k^2 + \lambda^2}, \quad y = \frac{b\lambda^2}{k^2 + \lambda^2}, \quad z = \frac{c\lambda}{k^2 + \lambda^2};$$

ivi  $a, b, c$  rappresentano segmenti, mentre  $k$  (al pari di  $\lambda$ ) è una quantità numerica reale e diversa da zero. La curva passa per l'origine (tale punto corrisponde a  $\lambda = 0$ ), mentre i suoi punti all'infinito corrispondono ai valori  $\infty$  e  $\pm i k$  del parametro  $\lambda$ . L'unico cilindro di 2° ordine reale che contenga la curva ha un'equazione che si ottiene eliminando  $\lambda$  fra la seconda e terza delle equazioni (1), onde è rappresentato come segue:

$$(2) \quad k^2 b^2 z^2 + c^2 y^2 = bc^2 x;$$

1) V. eq. (35) p. 109; siccome mutando  $k$  in  $ik$  si passa dall'iperbole all'ellisse gobba o viceversa così molte delle proposizioni che stiamo per dimostrare riguardo a questa valgono anche per la curva di cui ci occupammo nelle pagine precedenti.

è dunque un cilindro ellittico. Dall'origine la curva è proiettata secondo il cono quadrico di equazione

$$b^2 x z = a c y^2.$$

§ 2. Corde, tangenti, asintoti.

La retta che unisce i punti della curva corrispondenti ai valori  $\lambda, \mu$  del parametro è rappresentata dalle equazioni che si possono ottenere eguagliando a 0 due dei determinanti di terzo ordine contenuti nella matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & \frac{z}{c} & 1 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & k^2 + \lambda^2 \\ \mu^3 & \mu^2 & \mu & k^2 + \mu^2 \end{vmatrix};$$

come tali possono servire le seguenti:

$$(3) \quad \begin{cases} k^2 \frac{y}{b} - k^2 (\lambda + \mu) \frac{z}{c} + \lambda \mu \left( 1 - \frac{y}{b} \right) = 0 \\ \frac{x}{a} - (\lambda + \mu) \frac{y}{b} + \lambda \mu \frac{z}{c} = 0 \end{cases}$$

Facendo coincidere  $\mu$  con  $\lambda$  se ne ricava la seguente rappresentazione analitica della tangente nel punto  $\lambda$ :

$$(4) \quad \frac{y}{b} (k^2 - \lambda^2) - 2k^2 \lambda \frac{z}{c} + \lambda^2 = 0, \quad \frac{x}{a} - 2\lambda \frac{y}{b} + \lambda^2 \frac{z}{c} = 0;$$

p. es. la tangente nell'origine è la retta  $x = 0, y = 0$  cioè l'asse delle  $z$ ; invece facendo tendere  $\lambda$  a  $\infty$  si vede che l'unico asintoto reale della curva ha per equazioni

$$(5) \quad y = b, \quad z = 0,$$

è dunque una parallela a  $Ox$  posta nel piano  $xy$ ; supponendo

nelle stesse (4)  $\lambda = \pm i k$  si vede che i due asintoti immaginari della curva sono rappresentati come segue:

$$(6) \quad \frac{2y}{b} \mp 2ik \frac{z}{c} - 1 = 0, \quad \frac{x}{a} \mp 2ik \frac{y}{b} - k^2 \frac{z}{c} = 0$$

epperò sono paralleli al piano reale di equazione

$$(7) \quad \frac{x}{a} + k^2 \frac{z}{c} = 0.$$

I tre asintoti appartengono poi alla quadrica di equazione

$$(8) \quad 2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 + 3ak^2 \left( \frac{z}{c} \right)^2 + \frac{xz}{c} - 3 \frac{y}{b} + 1 = 0,$$

che è una iperboloide ad una falda avente per centro il punto  $\left( 0, \frac{3b}{4}, 0 \right)$ .

§ 3. Piano per tre punti, piano osculatore, piano asintotico.

I tre punti di parametri  $\lambda, \mu, \nu$  determinano il piano di equazione

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & \frac{z}{c} & 1 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & k^2 + \lambda^2 \\ \mu^3 & \mu^2 & \mu & k^2 + \mu^2 \\ \nu^3 & \nu^2 & \nu & k^2 + \nu^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia, a calcoli fatti,

$$(9) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \left[ \lambda + \mu + \nu - \frac{\lambda\mu\nu}{k^2} \right] + \frac{z}{c} (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) - \frac{\lambda\mu\nu}{k^2} = 0$$

Per conseguenza l'oscultore nel punto  $\lambda$  è rappresentato come segue

$$(10) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \left( 3\lambda - \frac{\lambda^3}{k^2} \right) + \frac{3z}{c} \lambda^2 - \frac{\lambda^3}{k^2} = 0;$$

p. es. nell'origine l'oscultore ha per equazione  $x = 0$  onde coincide col piano  $yz$ ; invece, facendo tendere  $\lambda$  a  $\infty$  la (10) diviene

$$y = b,$$

equazione che rappresenta l'unico piano asintotico reale dell'elisse gobba.

Da un punto arbitrario  $P(x, y, z)$  dello spazio partono tre osculatori della curva; i parametri  $\alpha, \beta, \gamma$  dei punti di osculazione sono radici dell'equazione:

$$\frac{y-b}{bk^2} \omega^3 + \frac{3z}{c} \omega^2 - \frac{3y}{b} \omega + \frac{x}{a} = 0;$$

si ha quindi:

$$(11) \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{3bk^2z}{c(b-y)}, \quad \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = \frac{3k^2y}{b-y}, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{bk^2x}{a(b-y)}$$

epperò:

$$(12) \quad \frac{x}{a} = \frac{3\alpha\beta\gamma}{3k^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}, \quad \frac{y}{b} = \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{3k^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta},$$

$$\frac{z}{c} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3k^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta},$$

formole che danno le coordinate dal punto arbitrario  $P$  in funzione dei parametri dei punti della curva in cui essa è osculata da piani passanti per quel punto. Notisi per verifica che al tendere di  $\alpha, \beta, \gamma$  ad uno stesso valore  $\lambda$ , le (12) si identificano alle equazioni (1) donde partimmo.

Risulta dalle formole (12) che la distanza  $d$  fra il punto  $P$



considerato e l'osculatore alla data curva nel punto  $\omega$ , cioè il piano di equazione

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \left( 3\omega - \frac{\omega^3}{k^2} \right) + \frac{3z}{c} \omega^2 - \frac{\omega^3}{k^2} = 0,$$

è determinata dalla formola

$$(13) \quad d = \frac{3(\alpha - \omega)(\beta - \omega)(\gamma - \omega)}{3k^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta} \Psi(\omega)$$

avendo posto per brevità <sup>1)</sup>

$$\Psi^2(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yx & 1 & \cos yz \\ \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix} :$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \left( 3\omega - \frac{\omega^3}{k^2} \right) & \frac{3\omega^2}{c} \\ \frac{1}{a} & 1 & \cos xy & \cos xz \\ -\frac{1}{b} \left( 3\omega - \frac{\omega^3}{k^2} \right) & \cos yx & 1 & \cos yz \\ \frac{3\omega^2}{c} & \cos zx & \cos zy & 1 \end{vmatrix}$$

In conseguenza, per trovare la distanza tra lo stesso osculatore ed il punto della curva di parametro  $\lambda$  devesi applicare quest'altra relazione :

$$(14) \quad d = \frac{(\lambda - \omega)^3 \Psi(\omega)}{k^2 + \lambda^2}$$

Per mostrare un'applicazione di questa formola consideriamo i tre punti  $X, Y, S$  della curva che corrispondono ai

<sup>1)</sup> Cfr. E. d'Ovidio, *Geometria analitica* (Torino, 1903) p. 134.

valori  $\lambda, \mu, \omega$  del parametro e chiamiamo  $\xi, \eta, \sigma$  i corrispondenti osculatori; in forza della (14) si avrà :

$$\overline{X\eta} = \frac{(\lambda - \mu)^3 \Psi(\mu)}{k^2 + \lambda^2}, \quad \overline{X\sigma} = \frac{(\lambda - \omega)^3 \Psi(\omega)}{k^2 + \lambda^2}, \quad \overline{S\eta} = \frac{(\omega - \mu)^3 \Psi(\mu)}{k^2 + \omega^2}$$

e quindi :

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{X\eta}}{\overline{X\sigma} \cdot \overline{S\eta}}} = \sqrt[3]{\frac{k^2 + \omega^2}{\Psi(\omega)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \omega} - \frac{1}{\mu - \omega} \right\}}.$$

Similmente :

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{Y\xi}}{\overline{S\xi} \cdot \overline{Y\sigma}}} = -\sqrt[3]{\frac{k^2 + \omega^2}{\Psi(\omega)} \left\{ \frac{1}{\lambda - \omega} - \frac{1}{\mu - \omega} \right\}}$$

Ciò prova che se, sopra un asse arbitrario, si sceglie un sistema di ascisse e si fa corrispondere al punto generico  $L$  della curva obbiettiva, il punto  $L'$  di ascissa  $\frac{1}{\lambda - \omega} \sqrt[3]{\frac{k^2 + \omega^2}{\Psi(\omega)}}$  si avrà :

$$L'M' = -M'L' = -\sqrt[3]{\frac{\overline{X\eta}}{\overline{X\sigma} \cdot \overline{S\eta}}} = \sqrt[3]{\frac{\overline{Y\xi}}{\overline{Y\sigma} \cdot \overline{S\xi}}};$$

perciò ad ogni relazione fra punti situati sopra una retta ne corrisponde un'altra fra punti ed osculatori della curva che stiamo investigando <sup>1)</sup>.

Siccome il piano all'infinito sega l'ellisse gobba in un unico punto reale, così, in forza di un teorema dimostrato nel Cap. prec. (v. p. 90), su di esso cade un asse reale della curva; in altre parole *l'ellisse gobba ammette una coppia di osculatori paralleli*. Per determinarli osserviamo che dall'equazione (10) se-

<sup>1)</sup> È questo il primo dei « principi di trasporto » di R. Mehmke (*Metrische Strahlenkongruenzen bei einer cubischen Raumcurve*; *Zeitschr. f. Math. m. Phys.*, T. XL, 1895, p. 225).

gue che, se gli osculatori relativi ai valori  $\lambda$  e  $\lambda'$  del parametro sono fra loro paralleli, dev'essere

$$3\lambda - \frac{\lambda^3}{k^2} = 3\lambda' - \frac{\lambda'^3}{k^2}, \lambda^2 = \lambda'^2$$

e a queste si soddisfa soltanto supponendo

$$\lambda = -\lambda' = k\sqrt{3}$$

I cercati piani sono pertanto rappresentati dalle equazioni

$$(15) \quad \frac{x}{a} + \frac{9k^2z}{c} \pm 3\sqrt{3}k = 0;$$

li indicheremo con  $\beta$  e  $\beta'$  ed osserveremo che determinano uno strato avente per piano bisettore quello di equazione

$$\frac{x}{a} + \frac{9k^2z}{c} = 0;$$

ora questo taglia l'ellisse gobba nei punti determinati dall'equazione

$$\lambda(\lambda^2 + 9k^2) = 0;$$

di essi uno solo è reale, corrisponde al valore  $\lambda = 0$  del parametro e coincide con l'origine delle coordinate: lo diremo *punto centrale della curva*.

La distanza  $\Delta$  dal punto di questa relativo al valore  $\lambda$  del parametro dal piano  $\beta$

$$\frac{x}{a} + \frac{9k^2z}{c} + 3\sqrt{3}k = 0$$

è determinata dalla formola:

$$\Delta = \frac{(\lambda + k\sqrt{3})^3}{k^2 + \lambda^2} \Theta$$

ove

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yx & 1 & \cos yz \\ \cos zx & \cos zy & 1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{9k^2}{c} & 0 \\ \frac{1}{a} & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \frac{9k^2}{c} & \cos yx & 1 & \cos yz \\ 0 & \cos zx & \cos zy & 1 \end{array} \right| \right\} \frac{1}{2}$$

Similmente la distanza  $\Delta'$  dello stesso punto dal piano  $\beta'$  è espressa come segue:

$$\Delta' = \frac{(\lambda - k\sqrt{3})^3}{k^2 + \lambda^2} \Theta;$$

perciò

$$(16) \quad \frac{\Delta}{\Delta'} = \left( \frac{\lambda + k\sqrt{3}}{\lambda - k\sqrt{3}} \right)^3$$

Consideriamo poi il piano  $\pi$ , di equazione (10), che oscula in  $P$  la data curva e il triedro (detto *primo triedro principale*) avente per facce il piano  $\alpha$  ( $x = 0$ ) che la oscula nel punto centrale, il piano  $\beta$  e l'unico piano asintotico reale  $\omega$  della curva<sup>1)</sup>; posto

$$\Omega = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yx & 1 & \cos yz \\ \cos zx & \cos zy & 1 \end{array} \right| \frac{1}{2}$$

il volume  $T$  del tetraedro avente per facce i piani  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $\pi$  è espresso dal quoziente di

$$\frac{\Omega \cdot 3^6 \cdot \lambda^6 (\lambda + k\sqrt{3})^3}{6 c^3}$$

<sup>1)</sup> « Secondo » triedro principale è quello che ha per facce i piani  $\alpha$ ,  $\beta'$ ,  $\omega$ .

per il prodotto dei quattro determinanti contenuti nella matrice:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{b} \left( 3\lambda - \frac{\lambda^3}{k^2} \right) \\ 0 & \frac{9k^2}{c} & 0 & \frac{3\lambda^2}{c} \end{vmatrix}$$

Analogamente è espresso il volume  $T'$  del tetraedro avente per facce i piani  $\alpha, \beta, \omega, \pi$ . Per conseguenza si ha:

$$(17) \quad \frac{T}{T'} = \left( \frac{\lambda + k\sqrt{3}}{\lambda - k\sqrt{3}} \right)^3$$

Paragonando fra loro le relazioni (16), (17) si trova:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{T}{T'}$$

relazione che esprime il seguente

**TEOREMA.** *Le distanze di un punto arbitrario di un'ellisse gobba dai due osculatori fra loro paralleli, stanno fra loro come i volumi dei tetraedri che l'osculatore in quel punto forma con i due triedri principali della curva <sup>1)</sup>.*

#### § 4. Complesso lineare determinato da un'ellisse gobba.

Combinando fra loro le equazioni (9) e (11) si vede che l'equazione del piano  $\pi$  determinato dai tre punti nei quali la data curva è osculata da piani passanti pel punto  $P(x, y, z)$  è

$$\frac{b}{a} (x - X) - \frac{xY - yX}{a} + \frac{3k^2 (yZ - zY)}{c} = 0,$$

<sup>1)</sup> D. Valeri, *Proprietà metriche delle cubiche gobbe* (Mem. della R. Acc. di Modena, II Ser., T. VIII, 1892, p. 409).

essendo  $X, Y, Z$  coordinate correnti. Introducendo le coordinate di rette  $p_{ik}$ , cioè i determinanti estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & X & Y & Z \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix}$$

l'equazione precedente diviene

$$(18) \quad bp_{01} + p_{12} + \frac{3ak^2}{c} p_{23} = 0,$$

e questa rappresenta il complesso lineare determinato dalla data curva.

#### § 5. Tetraedri collegati ad un'ellisse gobba.

I. Presi sulla curva due punti arbitrari  $L, M$  si chiamino  $l, m$  le corrispondenti tangenti e  $A, M$  i relativi osculatori; detti  $L', M'$  i punti  $LM$  e  $m A$ , i quattro punti  $L, M, L', M'$  sono i vertici del tetraedro di osculazione (v. p. 14) relativo alla corda  $LM$ . Per determinarne il volume  $V$  osserviamo che le coordinate dei punti  $L, M$  valgono risp.:

$$\frac{a\lambda^3}{k^2 + \lambda^2}, \frac{b\lambda^2}{k^2 + \lambda^2}, \frac{c\lambda}{k^2 + \lambda^2}; \frac{a\mu^3}{k^2 + \mu^2}, \frac{b\mu^2}{k^2 + \mu^2}, \frac{c\mu}{k^2 + \mu^2};$$

mentre quelle di  $L', M'$  si trovano facilmente espresse come segue:

$$\frac{3a\lambda^2\mu}{3k^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu}, \frac{b\lambda(\lambda + 2\mu)}{3k^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu}, \frac{c(2\lambda + \mu)}{3k^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu}$$

$$\frac{3a\lambda\mu^2}{3k^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu}, \frac{b\mu(\mu + \lambda)}{3k^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu}, \frac{c(2\mu + \lambda)}{3k^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu}$$

Per conseguenza si ha:

$$(19) \quad V = \frac{\Omega}{6} \frac{abc(\lambda - \mu)^6}{(k^2 + \lambda^2)(k^2 + \mu^2)(3k^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu)(3k^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu)}$$

Consideriamo ad esempio il tetraedro d'osculazione relativo alla corda avente per estremi il centro  $O$  della curva ed il punto

$B$  in cui essa è osculata dal piano  $\beta$ ; dovremo supporre nella

(19)  $\lambda = k\sqrt{3}, \mu = 0$ ; otterremo quindi  $V = \frac{3}{8} abc \Omega$ . Ora la stessa

espressione si otterrebbe sostituendo a  $\beta$  il piano  $\beta'$ ; dunque: Sono fra loro equivalenti i tetraedri di osculazione relativi alle corde di un'ellisse gobba che hanno per comune origine il punto centrale della curva e per estremi i punti di contatto degli osculatori fra loro paralleli<sup>1)</sup>.

Giova ora notare che, conservando al simbolo funzionale  $\Psi$  il significato precedente (v. p. 152), le distanze dei punti  $L', M'$  dall'oscultatore  $\sigma$  di parametro  $\omega$  hanno le seguenti espressioni:

$$(20) \quad \overline{L'\sigma} = \frac{3(\lambda - \omega)^2(\mu - \omega)}{3k^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu} \Psi(\omega), \quad \overline{M'\sigma} = \frac{3(\lambda - \omega)(\mu - \omega)^2}{3k^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu} \Psi(\omega)$$

II. Conserviamo alle lettere  $L, M, L', M'$  i significati precedenti e indichiamo con  $P$  il punto della curva corrispondente al valore  $\theta$  del parametro; allora il volume del tetraedro avente per vertici i punti  $LL'M'P$  sarà espresso come segue:

$$(21) \quad \overline{LL'M'P} = \frac{k^2 \Omega abc (\lambda - \mu)^3 (\lambda - \theta)^3}{6(k^2 + \lambda^2)(k^2 + \theta^2)(3k^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu)(3k^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu)}$$

Similmente:

$$(21) \quad \overline{MM'L'P} = \frac{k^2 \Omega abc (\mu - \lambda)^3 (\mu - \theta)^3}{6(k^2 + \mu^2)(k^2 + \theta^2)(3k^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu)(3k^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu)}$$

I tetraedri del tipo considerato possono chiamarsi *emiosculatori di I specie*.

III. Diremo invece *emioscuttore di II specie* il tetraedro avente per vertici i punti  $L, P, M, M'$ ; come espressione del suo volume si trova:

$$(22) \quad \overline{LPM M'} = \frac{k^2 \Omega abc (\lambda - \theta)(\mu - \theta)(\lambda - \mu)^3}{6(k^2 + \lambda^2)(k^2 + \mu^2)(k^2 + \theta^2)(3k^2 + 2\lambda\mu + \mu^2)}$$

<sup>1)</sup> Valeri, mem. cit.

Similmente:

$$(22) \quad \overline{MPLL'} = \frac{k^2 \Omega abc (\mu - \theta)(\lambda - \theta)(\mu - \lambda)^3}{6(k^2 + \mu^2)(k^2 + \lambda^2)(k^2 + \theta^2)(3k^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2)}$$

Combinando le espressioni (20), (21), (22) si ottiene:

$$\overline{LPM'M} \cdot \overline{L'\sigma} + \overline{MPLL'} \cdot \overline{M'\sigma} = \frac{k^2 abc \Omega \Psi(\omega) (\lambda - \theta)(\mu - \theta)(\lambda - \mu)^4 (\lambda - \omega)(\mu - \omega)(\omega - \theta)}{6(k^2 + \theta^2)(k^2 + \lambda^2)(k^2 + \mu^2)(3k^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu)(3k^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu)}$$

Ma dalle formole (19), (21) si trae:

$$\overline{L'PMM'} \cdot \overline{M'PLL'} \cdot \overline{LL'MM'} \cdot \overline{L\sigma} \cdot \overline{M\sigma} \cdot \overline{P\sigma} = \left\{ \frac{k^2 abc \Omega \Psi(\omega) (\lambda - \theta)(\mu - \theta)(\lambda - \mu)^4 (\lambda - \omega)(\mu - \omega)(\omega - \theta)}{3 \cdot 6(k^2 + \theta^2)(k^2 + \lambda^2)(k^2 + \mu^2)(3k^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu)(3k^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu)} \right\}^3$$

perciò

$$\overline{L'PMM'} \cdot \overline{L'\sigma} + \overline{MPLL'} \cdot \overline{M'\sigma} = 3 \sqrt[3]{\overline{L'PMM'} \cdot \overline{M'PLL'} \cdot \overline{L\sigma} \cdot \overline{M\sigma} \cdot \overline{P\sigma}} \quad ^1)$$

Combinando similmente le succitate espressioni si ottiene quest'altra relazione:

$$(24) \quad \sqrt[3]{\overline{LL'M'P} \cdot \overline{M\sigma}} + \sqrt[3]{\overline{MM'L'P} \cdot \overline{L\sigma}} = \sqrt[3]{\overline{LL'MM'} \cdot \overline{P\sigma}} \quad ^2)$$

IV. Oltre i punti  $L, M, L', M'$ , consideriamo i due punti  $S, T$  della curva determinati dai valori  $\sigma, \tau$  del parametro.  $S, T, L', M'$  sono vertici di un nuovo tetraedro che può dirsi *metaoscuttore* perchè coincide con il tetraedro di osculazione relativo alla corda  $LM$  quando  $S$  cade in  $L$  e  $T$  in  $M$ ; dettone  $U$  il volume si trova:

$$(25) \quad U = \frac{k^2 \Omega abc (\tau - \sigma)(\mu - \lambda)}{6(k^2 + \sigma^2)(k^2 + \tau^2)(3k^2 + 2\lambda\mu + \mu^2)(3k^2 + \lambda^2 + 2\lambda\mu)} \left\{ 3(\lambda^2 \mu^2 + \sigma^2 \tau^2) + 9\lambda\mu\sigma\tau + (\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2)(\sigma^2 + \sigma\tau + \tau^2) - 3(\lambda\mu + \sigma\tau)(\lambda + \mu)(\sigma + \tau) \right\}$$

<sup>1)</sup> Mehmke, mem. cit., p. 220.

<sup>2)</sup> Ivi, pag. 219-20.

V. I punti  $A, B, C, D$  dell'ellisse gobba corrispondenti ai valori  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  del parametro sono vertici di un tetraedro il cui volume  $V$  è espresso come segue

$$(26) \quad V = \frac{6(k^2 + \alpha^2)(k^2 + \beta^2)(k^2 + \gamma^2)(k^2 + \delta^2)}{k^2 \Omega abc D}$$

avendo posto

$$D = \begin{vmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^3 & \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^3 & \gamma^2 & \gamma & 1 \\ \delta^3 & \delta^2 & \delta & 1 \end{vmatrix} = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta)(\gamma - \delta)$$

Chiameremo col Mehmke *volume ridotto di un tetraedro* rispetto ad un piano  $\sigma$  il quoziente del volume di quel tetraedro per il prodotto delle distanze dei suoi vertici da quel piano. Ora assumendo per piano  $\sigma$  quello che oscula la data curva nel punto di parametro  $\omega$  si hanno l'espressione

$$\overline{A\sigma} = \frac{(\alpha - \omega)^3 \Psi(\omega)}{k^2 + \alpha^2}$$

e le tre analoghe relative ai punti  $B, C, D$ . Detto, quindi,  $V'$  il volume ridotto del tetraedro  $ABCD$  rispetto a quel piano  $\sigma$  si ha:

$$(27) \quad V' = \frac{\Omega abc D}{6(\alpha - \omega)^3(\beta - \omega)^3(\gamma - \omega)^3(\delta - \omega)^3 \Psi^4(\omega)}$$

Consideriamo similmente il tetraedro avente per facce i piani che osculano la data curva nei punti  $A, B, C, D$ ; ne siano  $A_0, B_0, C_0, D_0$  i vertici; le loro coordinate si ottengono applicando le formole (12) (p. 151); perciò, se si pone

$$a_1 = \beta + \gamma + \delta, \quad a_2 = \gamma\delta + \delta\beta + \beta\gamma, \quad a_3 = \beta\gamma\delta,$$

quelle del punto  $A_0$  saranno espresse come segue:

$$a \frac{3a_3}{3k^2 + a_2}, \quad b \frac{3a_2}{3k^2 + a_2}, \quad c \frac{3a_1}{3k^2 + a_2};$$

espressioni del tutto simili hanno le coordinate dei punti  $B_0, C_0, D_0$ , purchè alle lettere  $b_k, c_k, d_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) si attribuiscono significati analoghi a quelli che hanno le lettere  $a_1, a_2, a_3$ . Perciò il volume  $V_0$  del tetraedro  $A_0B_0C_0D_0$  è dato da:

$$V_0 = \frac{3abc\Omega}{2(3k^2 + a_2)(3k^2 + b_2)(3k^2 + c_2)(3k^2 + d_2)} \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 \\ c_3 & c_2 & c_1 & 1 \\ d_3 & d_2 & d_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Se ora si prova

$$s_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta, \quad s_2 = \alpha\beta + \dots + \gamma\delta, \quad s_3 = \beta\gamma\delta, \quad a_1\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma, \quad s_4 = \alpha\beta\gamma\delta$$

si vede essere

$$a_1 = s - \alpha, \quad a_2 = s_2 - s_1\alpha + \alpha^2, \quad a_3 = s_3 - s_2\alpha + s_1\alpha^2 - \alpha^3$$

ecc., onde

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 \\ c_3 & c_2 & c_1 & 1 \\ d_3 & d_2 & d_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_3 - s_2 & s_1 - 1 \\ s_2 - s_1 & 1 & 0 \\ s_1 - 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = D.$$

Dunque:

$$(28) \quad V_0 = \frac{3abc\Omega D}{2(3k^2 + a_2)(3k^2 + b_2)(3k^2 + c_2)(3k^2 + d_2)}$$

Del tetraedro  $A_0B_0C_0D_0$  giova calcolare anche il volume ridotto  $V'_0$ . Osserviamo perciò che la (12) dà

$$\overline{A_0\sigma} = \frac{3(\gamma - \omega)(\gamma - \omega)(\delta - \omega)\Psi(\omega)}{3k^2 + a_2}$$

e le tre analoghe; perciò

$$(29) \quad V'_0 = \frac{abc\Delta\Psi^4(\omega)}{2 \times 27(\alpha - \omega)^3(\beta - \omega)^3(\gamma - \omega)^3(\delta - \omega)^3}$$

Paragonando fra di loro le formole (27), (29) si conclude essere

$$\frac{V'_0}{V'} = \frac{1}{9},$$

cioè

$$(30) \quad V = 9 V'_0$$

formola che il lettore potrà agevolmente esprimere a parole<sup>1)</sup>.

Calcoleremo da ultimo anche il valore ridotto  $V'_{LM}$  del tetraedro osculatore relativo ad una corda arbitraria  $LM$ . Applicando formole precedenti si trova senza difficoltà

$$V'_{LM} = \frac{\overline{LL' M' M}}{L\sigma \cdot M\sigma \cdot L'\sigma \cdot M'\sigma} = \frac{abc(\lambda - \mu)^6}{6 \times 9(\lambda - \omega)^6(\mu - \omega)^6 \Psi^4(\omega)}$$

Emerge da questa espressione che se si considerano quattro punti arbitrari  $ABCD$  della curva si avrà:

$$V'_{BC} \cdot V'_{AD} \cdot V'_{CA} \cdot V'_{BD} \cdot V'_{AB} \cdot V'_{CD} = \left\{ \frac{abc \Delta}{6 \times 9(a-\omega)^3(\beta-\omega)^3(\gamma-\omega)^3(\delta-\omega)^3 \Psi^4(\omega)} \right\}^6$$

ossia, in forza della (27),

$$(32) \quad V'_{BC} \cdot V'_{AD} \cdot V'_{CA} \cdot V'_{BD} \cdot V'_{AB} \cdot V'_{CD} = \left\{ \frac{1}{9} V'_1 \right\}^6$$

dunque: *il prodotto dei volumi ridotti dei tetraedri osculatori relativi alle sei corde che si ottengono congiungendo due a due quattro punti arbitrari d'un'ellisse gobba, è eguale alla sesta potenza del nono del volume ridotto del tetraedro arente per vertici quei quattro punti, la riduzione essendo fatta rispetto al medesimo piano osculatore della curva*<sup>2)</sup>.

#### § 6. Cubiche gobbe circolari (Circoli sghembi).

Il primo cenno a noi noto delle cubiche gobbe che hanno all'infinito due punti situati sul cerchio immaginario fu fatto

<sup>1)</sup> Mehmké, mem. cit., p. 235.

<sup>2)</sup> Mehmké, mem. cit., p. 236.

da L. Cremona nella chiusa della sua *Solution de la Question 491*<sup>1)</sup>; ivi è considerato il luogo dei piedi delle perpendicolari calate dagli elementi di una punteggiata sopra i piani corrispondenti di un fascio proiettivo ed è dimostrato che si tratta di una cubica gobba bisecante il cerchio immaginario all'infinito; « on peut donner », soggiunge il citato geometra « à cette espèce de cubique gauche le nom de *cercle gauche* ou *cubique gauche circulaire* ». Un secondo cenno ancor più fugace delle medesime linee si trova verso il termine dell'altro lavoro dello stesso geometra *Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubische gauche donnée*<sup>2)</sup>, ove è osservato che le quadriche passanti per una cubica gobba bisecante il cerchio immaginario all'infinito hanno comune una serie di piani ciclici e che fra esse una sola è di rotazione.

Per stabilire la surriferita genesi delle cubiche gobbe dell'indicata specie, chiamiamo  $r$  la sede della punteggiata considerata e  $a$  l'asse del fascio di piani ad essa proiettivo. Siano poi  $P$  e  $\pi$  due elementi corrispondenti di queste due forme geometriche. Ora quando  $\pi$  ruota attorno a  $a$ , il suo polo rispetto al cerchio immaginario  $K$  descrive nel piano all'infinito una punteggiata  $b$  proiettiva al fascio  $a$  epperò anche alla punteggiata  $r$ ; perciò tutte le perpendicolari calate dai punti  $P$  sopra i piani  $\pi$  costituiscono un paraboloide iperbolico  $I$ . La curva di cui ci occupiamo è quindi, generabile come luogo dei punti d'intersezione dei piani del fascio  $a$  con le generatrici del paraboloide  $P$ , le quali sono riferite proiettivamente a quei piani. Ora se noi proiettiamo dalle rette  $r$ ,  $b$  le singole generatrici del paraboloide  $P$  otterremo due fasci di piani proiettivi al fascio dato; per conseguenza la curva proposta è generabile mediante tre fasci di piani fra loro proiettivi; dunque è una cubica gobba. Notiamo poi che nel dato fascio si trovano due piani  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  tangenti al cerchio  $K$ ; i loro poli sono i relativi punti di contatto  $S_1$ ,  $S_2$ ; se  $P_1$  e  $P_2$  sono

<sup>1)</sup> Nouv. Ann. de Mathém. 2<sup>e</sup> Sér., T. III, (1864, p. 25-30), oppure *Opere matematiche* di L. Cremona, T. II, (Milano, 1915, p. 174).

<sup>2)</sup> Journ. f. d. r. u. a. Mathem., T. LXIII, (1864, p. 141-4), oppure *Opere*, T. II, p. 154.

i punti della punteggiata  $r$  che corrispondono risp. a  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , i piedi delle perpendicolari calate da  $P_1$  e  $P_2$  risp. a  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , sono appunto  $S_1$  e  $S_2$ , onde questi appartengono all'anzidetta cubica gobba, appunto c. d. d.

Se  $A$  è il punto reale e  $A_1, A_2$  sono i due punti immaginari all'infinito della cubica considerata, esisterà una conica  $\Gamma$  passante per i punti  $A, A_1, A_2$  e tangente a  $K$  risp. in  $A_1$  e  $A_2$ ; se si fa passare una quàdrice per i tre punti  $A, A_1, A_2$ , per altri due punti di  $\Gamma$  e per altri quattro della data cubica, essa conterrà tutta questa e sarà di rotazione: siccome è evidente che è l'unica costruibile nel detto modo, così resta stabilita l'esattezza anche dell'altra surriferita proposizione di Cremona, secondo cui una cubica gobba circolare appartiene ad un'unica quàdrice di rivoluzione.

Proiettando la cubica circolare dal punto  $A$  si ottiene l'unico cilindro reale a cui appartiene la curva; ne sono generatrici le rette  $AA_1$  e  $AA_2$ , mentre ogni piano passante per la retta  $A_1A_2$  lo taglia in un circolo<sup>1)</sup>.

Ricordiamo ora che se da due corde di una cubica gobba si proiettano quattro punti fissi della stessa si ottengono due fasci di piani (proiettivi cioè) di birapporti eguali. Supponiamo ora che la cubica sia circolare e che due dei punti fissi scelti siano  $A_1$  e  $A_2$ , mentre gli altri siano arbitrari e che essi vengano tagliati mediante un piano passante per la retta  $A_1A_2$ ; si otterranno così due fasci di quattro raggi fra loro proiettivi; e poichè in ognuno due raggi contengono i punti ciclici, gli angoli formati dalle due coppie restanti sono fra loro eguali. Si può dunque asserire che: *Se si scelgono su una cubica gobba circolare due punti fissi e si proiettano da due corde arbitrarie della curva, sopra un piano passante per la congiungente i due punti all'infinito della stessa, si otterranno due coppie di rette formanti fra di loro angoli eguali*<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Tale cilindro trovasi investigato nella nota del Cosentius, *Der kubische Kreis*, (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XXV, 1880, p. 119-21).

<sup>2)</sup> A. Hurwitz, *Ueber eine besondere Raumcurve 3. Ordnung* (Math. Ann. T. XXX, 1887, p. 291-8); il punto di partenza scelto dall'autore sta in al-

Lasciamo al lettore di dimostrare che: « Date nello spazio tre rette ed un piano, il luogo di un punto tale che proiettando da esso le dette rette sul detto piano si ottenga un triangolo simile ad un dato, è una cubica gobba circolare »<sup>1)</sup>. Ed osserviamo piuttosto che, volendo studiare analiticamente le cubiche gobbe circolari giova considerarle come appartenenti alla classe delle podarie, giacchè sussiste il seguente

TEOREMA: *È una cubica gobba circolare il luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari abbassate da un punto fisso sopra le generatrici d'un paraboloide iperbolico*<sup>2)</sup>.

Si consideri, infatti, la quàdrice

$$(33) \quad z^2 - kyz + k^2px = 0$$

(ove  $k$  è un numero e  $p$  un segmento rettilineo) e si noti che essa può intendersi generata mediante i due fasci

$$(34) \quad z - k\lambda = 0, \quad px - \lambda y + \lambda^2 = 0,$$

$\lambda$  essendo un parametro variabile. Il piano condotto dal punto  $A$  ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) perpendicolarmente alla retta rappresentata, per un determinato valore di  $\lambda$ , della (34) ha per equazione

$$(x - \alpha)\lambda + (y - \beta)p = 0,$$

eperò taglia quella retta nel punto  $P$  di coordinate

$$(35) \quad x = \frac{(\alpha - p)\lambda^2 + p\beta\lambda}{\lambda^2 + p^2}, \quad y = \frac{\lambda^3 + p\alpha\lambda + \beta p^2}{\lambda^2 + p^2}, \quad z = k\lambda.$$

Ora al variare di  $\lambda$  queste equazioni danno la rappresentazione parametrica di una cubica gobba, anzi di un'ellisse gobba dal momento che i punti all'infinito sono uno reale ( $\lambda = \infty$ ) e due immaginari coniugati ( $\lambda = \pm ip$ ); di più, scrivendo le (35) come segue

$$x = \alpha - p + p \frac{\beta\lambda - (\alpha - p)p}{\lambda^2 + p^2}$$

tra generazione meccanica della curva; si può notare che egli non mostra conoscere i lavori anteriori sull'argomento.

<sup>1)</sup> Hurwitz, mem. cit.

<sup>2)</sup> A. Grünwald, *Betrachtungen von Fusskurven in der Ebene und im Raume*, (33. Jahresber. der II Staatsrealschule Prag-Kleinseite, 1906-7, § 12, p. 41).

$$y = \lambda + p \frac{(\alpha - p)\lambda + \beta p}{\lambda^2 + p}, \quad z = k\lambda,$$

se ne deduce

$$\frac{x - \alpha + p}{y - \lambda} = \frac{\beta\lambda - (\alpha - p)p}{(\alpha - p)\lambda + \beta p};$$

se quindi si fa  $\lambda = \pm ip$ , si vede che i punti all'infinito della curva si trovano sulle rette

$$x \mp iy = \alpha, \quad z = \pm ikp$$

e quindi anche sulle loro parallele

$$x \pm iy = 0, \quad z = 0;$$

ma i punti impropri di queste ultime rette appartengono evidentemente al cerchio immaginario all'infinito; dunque si può ritenere completa la dimostrazione dell'enunciato teorema.

Proiettando la curva (35) sul piano  $xy$  parallelamente alla retta

$$x = 0, \quad z - ky = 0$$

si ottiene la curva

$$x = \frac{(\alpha - p)\lambda^2 + p\beta\lambda}{\lambda^2 + p^2}, \quad y = \frac{\lambda^3 + p\alpha\lambda + \beta p^2}{\lambda^2 + p^2},$$

ora queste equazioni si possono scrivere come segue

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{p} = \frac{(\alpha - p)\lambda + \beta p}{\lambda^2 + p^2};$$

ed eliminando fra esse il parametro si trova

$$(36) \quad x^2 + y^2 = (\alpha - p)x + \beta y,$$

equazione del cerchio di centro  $\left(\frac{\alpha - p}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$  e raggio  $\frac{\sqrt{(\alpha - p)^2 + \beta^2}}{2}$ .

Dunque: la proiezione parallela della data curva fatta sul piano  $xy$  parallelamente alla retta  $x = 0, z - ky = 0$  è una circonferenza.

Per ottenere la rappresentazione analitica degli elementi principali relativi alla curva in esame, consideriamone le intersezioni con un piano arbitrario

$$(37) \quad Ax + By + Cz + D = 0;$$

esse corrispondono ai valori del parametro che soddisfano la equazione seguente:

$$(B + Ck)\omega^3 + \{A(\alpha - p) + D\}\omega^2 + \{Ap\beta + Bpa + Ckp^2\}\omega + \{B\beta + D\}p^2 = 0$$

Se ne chiamino  $\lambda, \mu, \nu$  le radici e si ponga:

$$(38) \quad \lambda + \mu + \nu = s_1, \quad \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu = s_2, \quad \lambda\mu\nu = s_3;$$

applicando allora le note relazioni fra i coefficienti e le radici d'un'equazione troveremo:

$$A(\alpha - p) + Bs_1 + Cks_1 + D = 0$$

$$A\beta p + B(\alpha p - s_2) + Ck(p^2 - s_2) = 0$$

$$B(\beta p^2 + s_3) + Cks_3 + Dp^2 = 0$$

le quali abilitano ad eliminare  $A, B, C$  e  $D$  dalle (37). Si ottiene così l'equazione

$$(39) \quad \begin{vmatrix} x & y & -\frac{z - ky}{kp} & 1 \\ \alpha - p & s_1 & 0 & 1 \\ \beta p & \alpha p - s_2 & \alpha - p & 0 \\ 0 & \beta p^2 + s_3 & \beta p & p^2 \end{vmatrix}$$

per rappresentare il piano determinato dai punti della curva che corrispondono ai valori  $\lambda, \mu, \nu$  del parametro.



Se ora si pone

$$(40) \quad \lambda + \mu = \sigma_1, \quad \lambda\mu = \sigma_2$$

le (38) diverranno

$$s_1 = \sigma_1 + \nu, \quad s_2 = \sigma_2 + \nu\sigma_1, \quad s_3 = \nu\sigma_2$$

ed alle (39) si potrà dare il seguente aspetto:

$$\begin{vmatrix} x & y & -\frac{z-ky}{kp} & 1 \\ a-p & \sigma_1 & 0 & 1 \\ \beta p & \alpha p - \sigma_2 & \alpha - p & 0 \\ 0 & \beta p^2 & \beta p & p^2 \end{vmatrix} + \nu \begin{vmatrix} x & 0 & -\frac{z-ky}{kp} & 1 \\ a-p & 1 & 0 & 1 \\ \beta p & -\sigma_1 & \alpha - p & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \beta p & p^2 \end{vmatrix} = 0$$

Ciò prova che la corda  $\lambda\mu$  della curva considerata è rappresentata come segue:

(41)

$$\begin{vmatrix} x & y & -\frac{z-ky}{kp} & 1 \\ a-p & \sigma_1 & 0 & 1 \\ \beta p & \alpha p - \sigma_2 & \alpha - p & 0 \\ 0 & \beta p^2 & \beta p & p^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & 0 & -\frac{z-ky}{kp} & 1 \\ a-p & 1 & 0 & 1 \\ \beta p & -\sigma_1 & \alpha - p & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \beta p & p^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Facendo nelle (41)  $\mu = \lambda$  si vede che nel punto  $\lambda$  la tangente ha per equazioni

(42)

$$\begin{vmatrix} x & y & -\frac{z-ky}{kp} & 1 \\ a-p & 2\lambda & 0 & 1 \\ \beta p & \alpha p - \lambda^2 & \alpha - p & 0 \\ 0 & \beta p^2 & \beta p & p^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & -\frac{z-ky}{kp} & 1 \\ a-p & 1 & 0 & 1 \\ \beta p & -2\lambda & \alpha - p & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \beta p & p^2 \end{vmatrix} = 0;$$

mentre dalla (39) facendo coincidere  $\mu$  e  $\nu$  con  $\lambda$  si giunge alla seguente equazione dell'osculatore corrispondente:

$$(43) \quad \begin{vmatrix} x & y & -\frac{z-ky}{kp} & 1 \\ a-p & 3\lambda & 0 & 1 \\ \beta p & \alpha p - 3\lambda^2 & \alpha - p & 0 \\ 0 & \beta p^2 + \lambda^3 & \beta p & p^2 \end{vmatrix} = 0$$

Se ora nelle (42), (43) facciamo tendere  $\lambda$  a  $\infty$  si giunge alle seguenti rappresentazioni analitiche dell'asintoto e del piano asintotico reali della curva:

$$(44) \quad x = a - p, \quad y = \frac{z}{k}$$

$$(45) \quad (\alpha - p)(x - \alpha + p) - \beta \left( y - \frac{z}{k} \right) = 0$$

Se si volesse la rappresentazione analitica degli asintoti e dei piani asintotici immaginari basterebbe fare nelle equazioni (42), (43)  $\lambda = \pm ip$ .

#### § 7. La curva *oropectera*<sup>1)</sup>.

Fra le cubiche gobbe circolari è notevole la *curva oropectera* che, dal punto di vista fisiologico, è il luogo dei punti dello spazio che sono « visti semplici » per una data posizione degli occhi dell'osservatore, mentre geometricamente è la cubica gobba generata da due stelle di raggi fra loro eguali. Partendo da questa seconda definizione si trova<sup>2)</sup> che essa è rappresentabile

<sup>1)</sup> W. Ludwig, *Die Horopterkurven mit einer Einleitung in die Theorie der cubischen Raumkurven* (Halle, 1902); F. Schuh, *Die Horopterkurve* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XLVII, 1902, p. 375-99).

<sup>2)</sup> M. Stuyvaert, *La courbe horoptère* (Mathesis, 3<sup>e</sup> Sér., T. III, 1903, p. 153-62).

parametricamente come segue:

$$(46) \quad x = \frac{2r}{1 + \lambda^2}, \quad y = \frac{2r\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad z = k\lambda, \quad (1)$$

$r$  e  $k$  essendo due date lunghezze; due punti corrispondenti a valori del parametro eguali ed opposti corrispondono a  $x$  a  $x$  due punti della curva con coordinate della forma  $x, \pm y, \pm z$ , epperò l'asse delle  $x$  è un asse di simmetria dell'oroptera. Eliminando  $\lambda$  fra le (46, 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup>) si trova l'equazione

$$xz^2 = k^2(2r - x)$$

la quale, quando si supponga  $k = 2r$ , dice che la proiezione dell'oroptera sul piano  $xz$  è una versiera<sup>2)</sup>. Siccome dalla (46) se-

gue  $x^2 + y^2 = \frac{4r^2}{(1 + \lambda^2)^2}$ , così l'oroptera è tagliata da ogni sfera in soli quattro punti al finito, essa dunque ne ha due altri sul cerchio immaginario all'infinito, epperò è circolare.

Siano  $D$  e  $S$  i punti dell'oroptera relativi ai valori  $\pm \alpha$  del parametro e  $P$  il punto della stessa corrispondente al valore  $\lambda$  dello stesso. La corda  $DP$  ha per equazione

$$(47) \quad \frac{x - \frac{2z}{1 + \lambda^2}}{\lambda - \alpha} = \frac{y - \frac{2z\lambda}{1 + \lambda^2}}{\lambda\alpha - 1} = \frac{z - k\lambda}{k},$$

onde il piano che la proietta ortogonalmente sul piano  $xy$  è rappresentato come segue:

$$\frac{x - \frac{2z}{1 + \lambda^2}}{\lambda + \alpha} = \frac{y - \frac{2z\lambda}{1 + \lambda^2}}{\lambda\alpha - 1}$$

1) Posto  $\lambda = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ , invece delle (46), si hanno le seguenti:

$$x = r(1 - \cos \omega), \quad y = r \operatorname{sen} \omega, \quad z = k \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

2) Cfr. G. Loria, *Spez. alg. und transs. ebene Kurven*, I Bd. (II Aufl., 1910) p. 79.

Similmente, l'analogo piano relativo alla corda  $SP$  è:

$$\frac{x - \frac{2z}{1 + \lambda^2}}{\lambda - \alpha} = \frac{y - \frac{2z\lambda}{1 + \lambda^2}}{- (\lambda\alpha + 1)}$$

Detto  $\varphi$  l'angolo di questi due piani, si trova

$$\cos \varphi = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2},$$

dunque  $\varphi$  è un angolo invariabile al muoversi del punto  $P$  sull'oroptera. L'angolo che la corda  $DP$  forma con l'asse  $Oz$ , grazie alle (47), ha per coseno

$$k : \sqrt{\frac{4r^2}{(1 + \lambda^2)(1 + \alpha^2)} + k^2};$$

ora siccome quest'espressione non muta cambiando il segno di  $\alpha$ , così le corde  $DP$ ,  $SP$  formano angoli eguali con la retta  $Oz$ , epperò anche col piano  $xy$ .

Dalle (46) traesi l'equazione

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2,$$

la quale prova che l'oroptera appartiene al cilindro circolare retto così rappresentato; svolgendone la superficie su un piano si ottiene come trasformata dall'oroptera la curva di equazione

$$z = k \operatorname{tg} \frac{u}{2},$$

cioè una tangente.

Applicando lo stesso procedimento di cui ci servimmo per studiare le cubiche gobbe circolari in generale si vede che il piano passante per tre punti  $\lambda, \mu, \nu$  dell'oroptera ha per equazione

$$(48)$$

$$(\lambda + \mu + \nu - \lambda\mu\nu)x + (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu - 1)y + 2r[kz - (\lambda + \mu + \nu)] = 0$$

mentre le corda  $\lambda\mu$  è rappresentata come segue:

$$(49) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu)x + (\lambda\mu - 1)y + 2r[kz - (\lambda + \mu)] = 0 \\ (1 - \lambda\mu)x + (\lambda + \mu)y - 2r = 0 \end{cases}$$

In conseguenza osculatore e tangente nel punto  $\lambda$  sono rappresentati come segue:

$$(50) \quad (3\lambda - \lambda^3)x + (3\lambda^2 - 1)y + 2r[kz - 3\lambda] = 0$$

$$(51) \quad \begin{cases} 2\lambda x + (\lambda^2 - 1)y + 2r[kz - 2\lambda] = 0 \\ (1 - \lambda^2)x + 2\lambda y - 2r = 0 \end{cases}$$

Da queste ultime si desume che la traccia della tangente sul piano  $xy$  ha per coordinate

$$x = \frac{2r(3\lambda^2 + 1)}{(\lambda^2 + 1)^2}, \quad y = \frac{4\lambda^3 r}{\lambda^2 + 1},$$

onde

$$x - 2r = 2r \frac{\lambda^2(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2}, \quad y = \frac{4\lambda^3 r}{(1 + \lambda^2)};$$

ora ponendo

$$x - 2r = \bar{x}, \quad y = \bar{y}$$

queste equazioni divengono

$$\bar{x} = 2r \frac{\lambda^2(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2}, \quad \bar{y} = \frac{4\lambda^3}{\lambda^2 + 1}$$

e mostrano <sup>1)</sup> che il luogo geometrico delle tracce delle tangenti d'un oroptera sul piano  $xy$  è una cardioide.

Se ora nelle (50), (51) si fa tendere  $\lambda$  a  $\infty$  si vede che l'unico asintoto reale dell'oroptera ha per equazioni  $x = 0$ ,  $y = 0$  onde non differisce dall'asse  $Oz$ ; il corrispondente piano asintotico ha per equazione  $x = 0$  epperò coincide col piano  $yz$ . Si può notare che l'intersezione del piano osculatore (50) con l'asintoto reale dell'oroptera è tale che  $z = 3k\lambda = 3z_0$ ,  $z_0$  es-

<sup>1)</sup> Cfr. G. Loria, op. cit., p. 153.

sendo la terza coordinata del punto di contatto: donde una conveniente costruzione del piano osculatore in un punto dell'oroptera nel quale già si conosca la tangente.

L'oroptera, come tutte le ellissi gobbe, possiede una coppia di osculatori fra loro paralleli; detti  $\omega$  e  $\omega'$  i valori del parametro nei punti di contatto, in forza della equazione (50) si avranno le relazioni

$$3\omega - \omega^3 = 3\omega' - \omega'^3, \quad 3\omega^2 - 1 = 3\omega'^2 - 1$$

onde

$$\omega = -\omega' = \sqrt{3}$$

e i piani cercati hanno per equazioni

$$(52) \quad \frac{4y}{r} + \frac{z}{k} = \pm 3\sqrt{3}$$

Servendosi finalmente delle equazioni (48) e (50) e del ragionamento usato in tutti i casi analoghi, si trova che il complesso lineare determinato dall'oroptera ha per equazione

$$2p_{12} - krp_{13} + 3rp_{02} = 0;$$

il suo asse è la retta

$$2y - krz = 0, \quad x = \frac{6z}{4 + k^2 r^2},$$

ne sono diametri le rette

$$x = \text{cost.}, \quad 2y - krz = 0$$

ed il suo parametro è espresso da  $\frac{3kr^2 - 1}{4 + k^2 r^2}$ .

<sup>1)</sup> Questi ultimi risultati sono facili corollari delle formole generali date da Plücker (*Neue Geometrie des Raumes*, I Bd., Leipzig 1868, p. 32-41).

## D) LA PARABOLA GOBBA.

## § 1. Generalità.

Una cubica gobba osculatrice al piano all'infinito si può rappresentare (v. p. 109) analiticamente (quando si usino coordinate cartesiane generalmente oblique) mediante le formole

$$(1) \quad x = a\lambda^3, \quad y = b\lambda^2, \quad z = c\lambda.$$

$a, b, c$  essendo tre segmenti e  $\lambda$  il parametro. La curva passa per l'origine. A valori  $\pm\lambda$  del parametro corrispondono punti di coordinate  $\pm x, y, \pm z$ , onde la curva è simmetrica rispetto all'asse  $Oy$ , due punti corrispondenti trovandosi sopra una stessa parallela al piano  $xz$ . La curva appartiene ad un unico cilindro quadrico; è il cilindro parabolico

$$(2) \quad \frac{y}{b} = \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

La sua corda passante pei punti  $\lambda, \mu$  ha per equazioni

$$(3) \quad \frac{x}{a} - (\lambda + \mu) \frac{y}{b} + \lambda\mu \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} - (\lambda + \mu) \frac{z}{c} + \lambda\mu = 0,$$

onde, in particolare, la tangente nel punto  $\lambda$  ha per equazioni

$$(4) \quad \frac{x}{a} - 2\lambda \frac{y}{b} + \lambda^2 \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} - 2\lambda \frac{z}{c} + \lambda^2 = 0;$$

p. es. nell'origine la curva ha per tangente la retta  $x = 0, y = 0$  cioè l'asse delle  $z$ . Il piano contenente i punti  $\lambda, \mu, \nu$  della curva ha per equazione

$$(5) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b}(\lambda + \mu + \nu) + \frac{z}{c}(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) - \lambda\mu\nu = 0;$$

si deduce da ciò che l'osculatore in  $\lambda$  è rappresentato come segue:

$$(6) \quad \frac{x}{a} - \frac{3\lambda y}{b} + \frac{3\lambda^2 z}{c} - \lambda^3 = 0;$$

p. es. nell'origine la curva ha per osculatore il piano  $x = 0$ , cioè il piano  $yz$ .

Supposti gli assi coordinati ortogonali, è facile costruire per punti la parabola gobba<sup>1)</sup>; infatti la proiezione di essa sul piano  $xy$  ha per equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{b}\right)^3$$

onde è una curva rettificabile (parabola semicubica<sup>2)</sup>); ora essendo

$$dx = 3a\lambda^2.d\lambda, \quad dy = 2b.\lambda d\lambda$$

si ha

$$ds = \lambda\sqrt{9a^2\lambda^2 + 4b^2}.d\lambda$$

e integrando

$$s = a \left( \lambda^2 + \frac{4b^2}{9a^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \text{cost.}$$

Se di più si suppone che l'origine degli archi cada nell'origine delle coordinate, si avrà

$$s = a \left\{ \lambda^2 + \frac{4b^2}{9a^2} \right\}^{\frac{3}{2}} - a.$$

Emerge da tutto ciò che svolgendo su di un piano il cilindro che proietta la cubica sul piano  $xy$  si ottiene la curva rappresentata come segue:

$$\xi = a \left\{ \lambda^2 + \frac{4b^2}{9a^2} \right\}^{\frac{3}{2}} - a, \quad \eta = c\lambda;$$

è dunque la sestica di equazione

$$\left(\frac{\xi + a}{a}\right)^2 = \left(\frac{\eta^2}{c^2} + \frac{4b^2}{9a^2}\right)^3,$$

<sup>1)</sup> G. Loria, *Remarques sur la construction des courbes gauches avec application à la parabole cubique* (L'enseignement mathém., T. XX, 1918-19, p. 43-47).

<sup>2)</sup> G. Loria, *Spezielle alg. und transsc. ebene Kurven*, II ed. T. I, p. 310.

curva simmetrica rispetto all'asse delle ascisse ed alla retta  $\xi + a = 0$ , che è facile descrivere; fatto ciò riponendo il cilindro proiettante nella sua posizione iniziale si otterrà la parabola gobba.

Il complesso lineare determinato dalla curva ha per equazione

$$(7) \quad ap_{23} + bcp_{01} = 0.$$

La superficie baricentrica ha una rappresentazione analitica che risulta dalle equazioni esposte a p. 37, ond'è:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} = u^3 + \frac{3}{2}u^2v + uv^2 + \frac{v^3}{4} \\ \frac{y}{b} = u^2 + uv + \frac{v^2}{3} \\ \frac{z}{c} = u + \frac{v}{2}; \end{cases}$$

ora eliminando  $v$  dalle due prime mediante la terza si trova

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \left(\frac{z}{c}\right)u^2 - 2\left(\frac{z}{c}\right)u + 2\left(\frac{z}{c}\right)^3 \\ 3\frac{y}{b} &= 5u^2 - 10\left(\frac{z}{c}\right)u + 8\left(\frac{z}{c}\right)^2; \end{aligned}$$

ed eliminando  $u$  si conclude che la superficie baricentrica di una parabola gobba è razionale di sesto ordine.

La superficie centrale della parabola gobba è (v. p. 13) rappresentata come segue:

$$x = \frac{a}{2}(\lambda^3 + \mu^3), \quad y = \frac{b}{2}(\lambda^2 + \mu^2), \quad z = \frac{c}{2}(\lambda + \mu);$$

ora le due ultime danno

$$\lambda + \mu = \frac{2z}{c}, \quad \lambda\mu = \frac{2z^2}{c^2} - \frac{y}{b};$$

e siccome la prima equivale a

$$\frac{2x}{a} = (\lambda + \mu)^3 - 3\lambda\mu(\lambda + \mu),$$

così si vede che la superficie anzidetta ha per equazione

$$\frac{x}{a} = \frac{3yz}{bc} - \frac{2z^3}{c^3}.$$

Ma questa può intendersi come risultante dalla eliminazione di  $\omega$  fra le due equazioni

$$z = c\omega, \quad \frac{x}{a} = -2\omega^3 + \frac{3\omega y}{b},$$

le quali, al variare di  $\omega$ , rappresentano  $\infty'$  rette; per conseguenza si è in diritto di concludere che la superficie centrale d'una parabola gobba è una rigata di terzo grado.

Essendo il piano all'infinito osculatore alla parabola gobba, il numero degli osculatori al finito che toccano il cerchio immaginario all'infinito sarà minore che nel caso generale; ed infatti l'equazione (6) prova che, supposti gli assi ortogonali, questi speciali osculatori corrispondono ai valori del parametro che soddisfano l'equazione seguente:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{9\lambda^2}{b^2} + \frac{9\lambda^4}{c^2} = 0$$

onde sono in numero di quattro, a due a due immaginari coniugati; ciò abilita a concludere che una parabola gobba ammette due soli raggi focali. Le radici dell'equazione precedente sono della forma  $\pm(\alpha \pm i\beta)$ ; gli osculatori corrispondenti ai valori  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  si tagliano nella retta reale

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{3ay}{b} + \frac{3(\alpha^2 - \beta^2)z}{c} - (\alpha^3 - 3\alpha^2\beta) = 0 \\ \frac{3y}{b} - \frac{3az}{c} + (3\alpha^2 - \beta^2) = 0 \end{cases}$$

che è uno degli assi focali; l'altro è rappresentato dalle equazioni analoghe che nascono cambiando i segni di  $\alpha$  e  $\beta$ .

§ 2. Tetraedri collegati ad una parabola gobba.

Annessi alla parabola gobba vi sono alcune specie di tetraedri, i quali danno luogo a relazioni analoghe ma più semplici di quelle che incontrammo parlando dell'ellisse gobba<sup>1)</sup>. Per stabilirle cominciamo con notare che la tangente nel punto  $L$  (di parametro  $\lambda$ ) della data curva taglia l'osculatore nel punto  $M$  (di parametro  $\mu$ ) della stessa nel punto  $L'$  di coordinate

$$a \cdot 2^2 \mu, \frac{b}{3} \lambda (\lambda + 2\mu), \frac{c}{3} (2\lambda + \mu)$$

L'analogo punto  $M'$  ha coordinate

$$a \cdot \lambda \mu^2, \frac{b}{3} \mu (\mu + 2\lambda), \frac{c}{3} (2\mu + \lambda).$$

Per conseguenza (se  $\Omega$  ha il consueto significato; v. p. 155) il volume dell'osculazione relativo alla corda  $LM$  è dato

$$(10) \quad V_{LM} = -\Omega \frac{abc}{54} (\lambda - \mu)^6$$

da questa relazione ricavasi

$$\lambda - \mu = \sqrt[6]{-\frac{54}{abc \Omega} V_{LM}},$$

intendendo che nel secondo si debba prendere pel radicale quel valore reale che ha il segno della differenza  $\lambda - \mu$ ; sarà quindi

$$\mu - \lambda = -\sqrt[6]{-\frac{54}{abc \Omega} V_{LM}};$$

1) Cfr. H. Schröter, *Metrische Eigenschaften der cubischen Parabel (Raumcurve 3.0)* (Math. Annalen T. XXV, 1884, p. 293-18); G. Loria, *Su alcune proprietà metriche della cubica gobba osculatrice al piano all'infinito* (Rend. della R. Acc. di Napoli, dicembre 1885).

si vede pertanto che: fra le radici seste dei (numeri che misurano i) volumi dei tetraedri di osculazione relativi a più corde di una parabola gobba passano le stesse relazioni che hanno luogo fra i segmenti di una retta. Applicando questo « principio di trasporto » all'ipotesi che si considerino tre punti, si ha l'identità

$$\sqrt[6]{V_{MN}} + \sqrt[6]{V_{NL}} + \sqrt[6]{V_{LM}} = 0$$

mentre la considerazione di quattro conduce a queste altre

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{V_{MN} \cdot V_{LP}} + \sqrt[6]{V_{NL} \cdot V_{MP}} + \sqrt[6]{V_{LM} \cdot V_{NP}} &= 0 \\ \sqrt[6]{\frac{V_{LP}^2}{V_{LM} \cdot V_{LN}}} + \sqrt[6]{\frac{V_{MP}^2}{V_{MN} \cdot V_{ML}}} + \sqrt[6]{\frac{V_{NP}^2}{V_{NL} \cdot V_{NM}}} &= 0 \end{aligned}$$

Sia  $T$  un altro punto arbitrario della parabola e  $\tau$  il corrispondente valore del parametro. Si trova

$$(11) \quad \text{Vol. } (LTL'M) = -\Omega \frac{abc}{54} (\lambda - \mu)^3 (\tau - \lambda)^3$$

$$(12) \quad \text{Vol. } (MTM'L) = -\Omega \frac{abc}{54} (\mu - \lambda)^3 (\tau - \mu)^3$$

Scriviamo queste formole come segue:

$$\sqrt[3]{\text{Vol. } (LTL'M)} = \sqrt[3]{-\Omega \frac{abc}{54} (\lambda - \mu) (\tau - \lambda)}$$

$$\sqrt[3]{\text{Vol. } (MTM'L)} = \sqrt[3]{-\Omega \frac{abc}{54} (\mu - \lambda) (\tau - \mu)};$$

e addizionamole; il secondo membro della formola risultante vale  $\sqrt[3]{-\frac{abc}{54 \Omega} (\mu - \lambda)^6}$  cioè, per la (10),  $\sqrt[3]{V_{LM}}$ ; si conclude pertanto che è

$$\sqrt[3]{\text{Vol. } (LTL'M)} + \sqrt[3]{\text{Vol. } (MTM'L)} + \sqrt[3]{V_{LM}} = 0,$$

relazione che dice: *Se T è un punto qualunque della parabola gobba, la somma delle radici cubiche dei tetraedri LTL'M, MTM'L conserva lo stesso valore al variare di T, essendo eguale in valore assoluto alla radice cubica del volume del tetraedro di osculazione relativo alla corda LM.*

Sia S un quarto punto della parabola gobba e  $\sigma$  il corrispondente valore del parametro; si trova facilmente:

$$(13) \quad \text{Vol. (STL'M')} = -\Omega \frac{abc}{54} (\lambda - \mu) (\sigma - \tau) \{3(\lambda^2\mu^2 + \sigma^2\tau^2) + 9\lambda\mu\sigma\tau + (\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2)(\sigma^2 + \sigma\tau + \tau^2) - 3(\lambda\mu + \sigma\tau)(\lambda + \mu)(\sigma + \tau)\};$$

essendo il secondo membro simmetrico rispetto alle coppie  $\lambda, \mu$  e  $\sigma, \tau$  si può asserire che se LML'M' e STS'T' sono i tetraedri di osculazione relativi a due corde arbitrarie LM, ST di una parabola gobba, i due tetraedri STL'M', LMS'T' saranno fra loro equivalenti.

Indichiamo con  $T_1, T_2$  le intersezioni della tangente in T alla parabola con gli osculatori alla stessa in L, M e T', T'' le intersezioni dell'osculatore in T con le tangenti in L, M. Si trova facilmente:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Vol. (LM} T_1 T_2) &= -\frac{8 \Omega abc}{54} (\lambda - \tau)^2 (\mu - \tau)^2 (\lambda - \mu)^2 \\ \text{Vol. (LM} T' T'') &= -\frac{\Omega abc}{54} (\lambda - \tau) (\mu - \tau) (\lambda - \mu)^4 \\ \text{Vol. (L'M'} T_1 T_2) &= -\frac{\Omega abc}{54} (\lambda - \tau)^2 (\mu - \tau)^2 (\lambda - \mu)^2 \\ \text{Vol. (L'M'} T' T'') &= -\frac{\Omega abc}{54} (\lambda - \tau) (\mu - \tau) (\lambda - \mu)^4 \end{aligned} \right.$$

dalle quali rilevasi essere:

$$\begin{aligned} \text{Vol. (LMT}_1 T_2) &= 8 \text{Vol. (L'M'} T_1 T_2), \\ \text{Vol. (LMT' T'')} &= \text{Vol. (L'M'} T' T'') \end{aligned}$$

relazioni che è agevole enunciare a parole. Si trova ancora

$$(15) \quad \text{Vol. (LL'T}_1 T_2) = -\Omega \frac{abc}{54} (\lambda - \mu)^2 (\tau - \lambda)^4$$

e analogamente

$$\text{Vol. (MM'T}_1 T_2) = -\Omega \frac{abc}{54} (\mu - \lambda)^2 (\tau - \mu)^4;$$

in conseguenza

$$\begin{aligned} \text{Vol. (LL'T}_1 T_2) \times \text{Vol. (MM'T}_1 T_2) &= \\ &= \left\{ -\Omega \frac{abc}{54} (\lambda - \mu)^2 (\tau - \lambda)^2 (\tau - \mu)^2 \right\}^2 \end{aligned}$$

cioè per la (14, 3<sup>a</sup>)

$$\text{Vol. (LL'T}_1 T_2) \times \text{Vol. (MM'T}_1 T_2) = \left\{ \text{Vol. (L'M'} T_1 T_2) \right\}^2;$$

e questa relazione prova che il volume del tetraedro L'M'T<sub>1</sub>T<sub>2</sub> è medio proporzionale fra quelli dei tetraedri LL'T<sub>1</sub>T<sub>2</sub> e MM'T<sub>1</sub>T<sub>2</sub>.

Detto V il volume del tetraedro avente per vertici i punti della curva corrispondenti ai valori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  del parametro  $\lambda$  e U quello del tetraedro avente per facce i corrispondenti osculatori, si trova:

$$(16) \quad V = -\frac{\Omega abc}{6} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_1 - \lambda_4) (\lambda_2 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_4) (\lambda_3 - \lambda_4)$$

$$(17) \quad U = -\frac{\Omega abc}{54} (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_1 - \lambda_4) (\lambda_2 - \lambda_3) (\lambda_2 - \lambda_4) (\lambda_3 - \lambda_4)$$

epperò [scrivendo per brevità  $V_{ik}$  invece di  $V(L_i L_k)$ ]

$$U = \frac{1}{9} V = \sqrt[6]{V_{23} \cdot V_{14} \cdot V_{31} \cdot V_{24} \cdot V_{12} \cdot V_{34}};$$

dunque: *il volume del tetraedro che ha per vertici quattro punti di una parabola gobba è eguale a nove volte quello che ha per facce i corrispondenti piani osculatori e questo eguaglia la radice sesta del prodotto dei volumi dei tetraedri di osculazione relativi*

alle sei corde di quella curva che hanno per estremi i punti considerati<sup>1)</sup>).

La relazione  $V = 9U$  che passa fra due tetraedri di definizioni correlative suggerisce di considerare il tetraedro avente per facce due osculatori  $A, M$  della curva considerata ed i piani  $A', M'$  determinati ciascuno dal punto di contatto dell'uno con la tangente situata nell'altro. Tali piani avendo per equazioni

$$\frac{x}{a} - \frac{3\lambda y}{b} + \frac{3\lambda^2 z}{c} - \lambda^3 = 0$$

$$\frac{x}{a} - \frac{3\mu y}{b} + \frac{3\mu^2 z}{c} - \mu^3 = 0$$

$$\frac{x}{a} - (2\lambda + \mu) \frac{y}{b} + (\lambda^2 + 2\lambda\mu) \frac{z}{c} - \lambda^2\mu = 0$$

$$\frac{x}{a} - (\lambda + 2\mu) \frac{y}{b} + (\mu^2 + 2\lambda\mu) \frac{z}{c} - \lambda\mu^2 = 0$$

il volume del detto tetraedro è dato da

$$(18) \quad U(AM) = \frac{\Omega abc}{54} \frac{1}{(\lambda - \mu)^6}$$

Questa espressione combinata alla (10) porta a concludere

$$V(LM) \cdot U(AM) = - \left( \frac{abc \Omega}{54} \right)^2,$$

cioè: I volumi del tetraedro di osculazione relativo ad una corda di una parabola gobba e del tetraedro analogo proveniente dai corrispondenti piani osculatori della stessa curva, sono inversamente proporzionali.

Queste che dimostrammo sono le principali, ma non le uniche proporzioni volumetriche a cui dà luogo una parabola gobba; altre si leggano nelle memorie citate in principio di questo §.

<sup>1)</sup> Questa relazione è analoga (ma più semplice) di altra che incontrammo trattando dell'ellisse gobba (v. p. 162).

### § 3. Parabola gobba con direttrice.

Nel piano di una parabola ordinaria esiste notoriamente una retta (la cosiddetta direttrice) da ogni punto della quale parte una coppia di rette fra loro perpendicolari; questo fatto suggerisce la questione: esiste nello spazio una linea luogo di punti, da ognuno dei quali si può condurre una terna di osculatori di una parabola gobba, a due a due perpendicolari? Essa fu sollevata sino dal 1868 da L. Cremona<sup>1)</sup>; essendosi ripresentata al Böklen, venne risolta con altri mezzi da W. Fr. Meyer<sup>2)</sup>, il quale confermò le conclusioni a cui era giunto il Cremona. Che generalmente parlando non esistano nello spazio punti gendenti dell'indicata prerogativa si riconosce come segue: Il piano all'infinito taglia la sviluppabile osculatrice di una parabola gobba, oltre che in una generatrice (da contarsi due volte), secondo una conica  $\Gamma$ , alla quale riescono tangenti le rette all'infinito di tutti gli osculatori della detta parabola; se dunque tre osculatori di questa sono a due a due ortogonali le loro rette all'infinito costituiranno un triangolo circoscritto a  $\Gamma$  ed autocongiugato rispetto al circolo immaginario all'infinito; ora è noto che di siffatti triangoli in generale non ne esiste alcuno, ma che se ve ne è uno, ne esisteranno  $\infty'$ . Dunque: una parabola gobba ammette nessuno o  $\infty'$  terne di triedri trirettangoli circoscritti. In questo ultimo caso il luogo dei vertici si dice *direttrice*; dimostreremo che è una retta. Siccome si tratta di una linea certamente algebrica, per dimostrare l'asserto ne cercheremo l'ordine, cioè il numero  $x$  dei punti  $P$  in cui essa è tagliata da un piano arbitrario  $\pi$  dello spazio, per es., da un osculatore della curva. Ora ognuno dei cercati punti  $P$  è vertice di un triedro trirettangolo di cui  $\pi$  è una faccia; i risultanti  $x$  triedri sono tagliati dal piano all'infinito secondo altrettanti triangoli circoscritti

<sup>1)</sup> Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in ispecie sulla parabola gobba (Giorn. di Matem., T. II, 1864, oppure Opere, T. II, Milano 1915, p. 109-18).

<sup>2)</sup> Wann besitzt eine kubische Parabel eine Directrix? (Zeitschr. f. Mathem. Phys., T. XXX, 1885, p. 345-9).



a  $\Gamma$ , autoconiugati rispetto al cerchio immaginario all'infinito ed aventi come comune lato la retta all'infinito di  $\pi$ ; ma una retta ha rispetto ad una conica propria un unico polo e taglia una conica qualunque in due punti determinati; perciò di triangoli dell'indicata specie non ve ne può essere che uno c. d. d.

Emerge da ciò che affinché una parabola gobba abbia una direttrice è necessario e sufficiente sia inscritta in un triedro trirettangolo; presene le facce come piani coordinati, la curva si potrà intendere involupata dagli  $\infty'$  piani rappresentati, al variare del parametro  $\lambda$ , dell'equazione

$$(19) \quad \frac{a_1 x}{\lambda - a} + \frac{b_1 y}{\lambda - b} + \frac{c_1 z}{\lambda - c} + 1 = 0$$

Scrivendo questa sotto la forma

$$(19) \quad a_1(\lambda - b)(\lambda - c)x + b_1(\lambda - a)(\lambda - c)y + c_1(\lambda - a)(\lambda - b)z + (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) = 0$$

si vede che ai valori  $a, b, c$  del parametro corrispondono i piani coordinati, mentre per  $\lambda = \infty$  si ha il piano all'infinito. Per determinare la direttrice della curva, che sappiamo esistere e passare per l'origine delle coordinate, supponiamo che sia rappresentata dalle equazioni

$$x = at, \quad y = \beta t, \quad z = \gamma t,$$

$t$  essendo un nuovo parametro. Osserviamo ora che i tre osculatori della curva in questione che passano pel punto  $(x, y, z)$  corrispondono ai valori di  $\lambda$  che sono radici dell'equazione (19); quindi quelli che passano pel punto  $(ta, t\beta, t\gamma)$  saranno determinati dall'equazioni

$$\frac{a_1 a}{\lambda - a} + \frac{b_1 \beta}{\lambda - b} + \frac{c_1 \gamma}{\lambda - c} + \frac{1}{t} = 0.$$

In particolare quelli che passano per il punto all'infinito dell'anzidetta retta corrisponderanno alle due radici  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  della seguente equazione quadratica:

$$\frac{a_1 a}{\lambda - a} + \frac{b_1 \beta}{\lambda - b} + \frac{c_1 \gamma}{\lambda - c} = 0.$$

Sarà quindi

$$\frac{a_1 a}{\lambda_1 - a} + \frac{b_1 \beta}{\lambda_1 - b} + \frac{c_1 \gamma}{\lambda_1 - c} = 0, \quad \frac{a_1 a}{\lambda_2 - a} + \frac{b_1 \beta}{\lambda_2 - b} + \frac{c_1 \gamma}{\lambda_2 - c} = 0$$

donde, sottraendo membro a membro,

$$\frac{a_1 a}{(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)} + \frac{b_1 \beta}{(\lambda_1 - b)(\lambda_2 - b)} + \frac{c_1 \gamma}{(\lambda_1 - c)(\lambda_2 - c)} = 0.$$

Ora, affinché i piani rappresentati dall'equazione (19) per  $\lambda = \lambda_1$ , e  $\lambda = \lambda_2$  risultino fra loro ortogonali dev'essere

$$\frac{a_1^2}{(\lambda_1 - a)(\lambda_2 - a)} + \frac{b_1^2}{(\lambda_1 - b)(\lambda_2 - b)} + \frac{c_1^2}{(\lambda_1 - c)(\lambda_2 - c)} = 0;$$

e se questa relazione deve essere conseguenza della precedente si deve avere

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\beta}{b_1} = \frac{\gamma}{c_1};$$

dunque la parabola gobba considerata ha per direttrice la retta

$$(20) \quad \frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1}$$

*Ad abundantia* si può verificare che da ogni punto di questa retta esce una terna di osculatori a due a due ortogonali della parabola. Infatti le coordinate di un tal punto essendo della forma  $la_1, lb_1, lc_1$  i piani del sistema (19) che lo contengono sono determinati dalle radici  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  della equazione

$$\frac{a_1^2}{\lambda - a} + \frac{b_1^2}{\lambda - b} + \frac{c_1^2}{\lambda - c} + \frac{1}{l} = 0;$$

si hanno, quindi, le seguenti identità:

$$\frac{a_1^2}{\lambda_1 - a} + \frac{b_1^2}{\lambda_1 - b} + \frac{c_1^2}{\lambda_1 - c} + \frac{1}{l} = 0$$

$$\frac{a_1^2}{\lambda_2 - a} + \frac{b_1^2}{\lambda_2 - b} + \frac{c_1^2}{\lambda_2 - c} + \frac{1}{l} = 0$$

$$\frac{a_1^2}{\lambda_3 - a} + \frac{b_1^2}{\lambda_3 - b} + \frac{c_1^2}{\lambda_3 - c} + \frac{1}{l} = 0;$$

ma queste danno per mutua sottrazione la relazione

$$\frac{a_1^2}{(\lambda_2 - a)(\lambda_3 - a)} + \frac{b_1^2}{(\lambda_2 - b)(\lambda_3 - b)} + \frac{c_1^2}{(\lambda_2 - c)(\lambda_3 - c)} = 0$$

e le due analoghe, le quali dicono appunto che i tre piani

$$\frac{a_1 x}{\lambda_1 - a} + \frac{b_1 y}{\lambda_1 - b} + \frac{c_1 z}{\lambda_1 - c} + 1 = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

formano un triedro trirettangolo.

Notiamo ancora che per ottenere la rappresentazione parametrica della curva in questione bisogna e basta combinare la equazione (19) con le sue due prime derivate rispetto a  $\lambda$ ; si trovano così le seguenti formole:

$$(21) \quad x = \frac{(\lambda - a)^3}{a_1(a - b)(a - c)}, \quad y = \frac{(\lambda - b)^3}{b_1(b - c)(b - a)},$$

$$z = \frac{(\lambda - c)^3}{c_1(c - a)(c - b)}$$

Il punto all'infinito della curva corrisponde al valore  $\lambda = \infty$  e si trova sopra la retta di equazione

$$(22) \quad \frac{a_1 x}{b - c} = \frac{b_1 y}{c - a} = \frac{c_1 z}{a - b}$$

Ora essendo

$$a_1 \frac{b - c}{a_1} + b_1 \frac{c - a}{b_1} + c_1 \frac{c - b}{c_1} = 0$$

è chiaro che le rette (20) e (22) sono fra loro perpendicolari; dunque: la direttrice di una parabola gobba è perpendicolare alla comune direzione delle generatrici dell'unico cilindro di second'ordine a cui appartiene la curva.

#### § 4. Parabola gobba rettificabile. Elica cubica.

Dalle formole (1) si trae per differenziazione:

$$\begin{cases} x' = a & x'' = 0 & x''' = 0 \\ y' = 2b\lambda & y'' = 2b & y''' = 0 \\ z' = 3c\lambda^2 & z'' = 6c\lambda & z''' = 6c \end{cases}$$

e quindi:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + 4b^2\lambda^2 + 9c^2\lambda^4, \quad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 12abc.$$

Supposti, quindi, gli assi ortogonali (nel qual caso la parabola gobba si dirà *retta*) per rettificare la curva devesi applicare la relazione:

$$(23) \quad s = \int \sqrt{a^2 + 4b^2\lambda^2 + 9c^2\lambda^4} \, d\lambda.$$

Affinchè la curva sia rettificabile è necessario e sufficiente che il trinomio che si trova sotto il radicale sia un quadrato perfetto; ciò esige si abbia

$$(24) \quad 9a^2c^2 = 4b^4$$

ossia

$$(24') \quad 3ac = \pm 2b^2;$$

supposta soddisfatta la (24) dà:

$$s = \int \left( a + \frac{2b^2}{a} \lambda^2 \right) d\lambda = a\lambda + \frac{2b^2\lambda^3}{3a} + \text{cost.}$$

Per interpretare geometricamente questo risultato calcoliamo il rapporto  $\frac{r}{\rho}$  delle due curvatures della curva considerata; in generale esso è dato (v. p. 3) da:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \right\|^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \left\{ \frac{3}{2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \right\};$$

ora, per le formole precedenti e per essere

$$\left\| \begin{array}{ccc} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{array} \right\|^2 = 4(a^2b^2 + 9a^2c^2\lambda^2 + 9b^2c^2\lambda^4),$$

risulta

$$\frac{r}{\rho} = -12abc \left\{ \frac{4(a^2b^2 + 9a^2c^2\lambda^2 + 9b^2c^2\lambda^4)}{a^2 + 4b^2\lambda^2 + 9c^2\lambda^4} \right\}^{\frac{3}{2}}$$

Affinchè questo rapporto risulti eguale ad una costante  $k$  dev'essere identicamente (rispetto a  $\lambda$ )

$$4(a^2b^2 + 9a^2c^2\lambda^2 + 9b^2c^2\lambda^4) = k(a^2 + 4b^2\lambda^2 + 9c^2\lambda^4),$$

ossia

$$a^2(4b^2 - k) + 4\lambda^2(9a^2c^2 - kb^2) + 9c^2\lambda^4(4b^2 - k) = 0:$$

ciò esige sia

$$k = 4b^2, \quad 9a^2c^2 - 4b^4 = 0$$

onde si ritrova la (24). Ora vedremo nel Cap. XII che il rapporto delle due curvatures è costante in tutti i punti di una curva solo quando questa sia un'elica cilindrica; dunque: *Le parabole gobbe rette rettificabili sono eliche cilindriche*<sup>1)</sup>. Detti al solito  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni degli angoli che la tangente alla curva forma con gli assi coordinati, tenendo conto della (24'), si trova:

$$\alpha = \frac{a^2}{a^2 + 2b^2\lambda^2}, \quad \beta = \frac{2ab\lambda}{a^2 + 2b^2\lambda^2}, \quad \gamma = \pm \frac{3ac\lambda^2}{a^2 + 2b^2\lambda^2},$$

e siccome da queste si trae

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

così le generatrici del cilindro a cui appartiene la curva considerata formano con gli assi coordinati angoli i cui coseni val-

<sup>1)</sup> Mary F. Curtiss, *On the Rectifiability of a Twisted Cubic* (Bull. of the Amer. Math. Society, T. XXV, 1918-9, p. 87-8).

gono risp.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 0,  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  e con le tangenti alla curva l'angolo  $\frac{\pi}{4}$ .

Per riconoscere se sussista un teorema analogo al precedente per le parabole gobbe (non rette, ossia) oblique, osserviamo<sup>2)</sup> che se si riferisce la curva ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali tale che l'origine si trovi nel punto di parametro 0 e si suppone che gli assi coordinati coincidono risp. con la tangente, la normale principale e la binormale, qualunque parabola gobba è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica:

$$x = a_1\lambda^3 + a_3\lambda, \quad y = b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2, \quad z = c_1\lambda^3.$$

Si ha in conseguenza:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (3a_1\lambda + a_3)^2 + (3b_1\lambda^2 + 2b_2\lambda)^2 + 9c_1^2\lambda^4$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{array} \right\|^2 = 86a_2^2c_1^2\lambda^4 + 36a_3^2c_1^2\lambda^4 + (-6a_1b_2\lambda^2 + 9c_1b_1\lambda + 2a_3b_2)^2$$

$$\left| \begin{array}{ccc} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{array} \right| = 12a_3b_2c_1.$$

Essendo questo determinante costante, affinché altrettanto accada del rapporto  $\frac{r}{\rho}$  deve essere

$$\left\| \begin{array}{ccc} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{array} \right\|^2 = k(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

<sup>1)</sup> Scelto il segno + si trova come equazione del cilindro contenente l'elica la seguente:

$$9a^2z(x-z)^2 = y(3a^2 - 2by)^2$$

<sup>2)</sup> T. Hayashi, *On the Rectifiability of a Twisted Cubic* (Bull. of the Amer. Math. Society, T. XXVI, 1919-20, p. 23-5).

$k$  essendo costante. Ora sostituendo alle quantità che qui compaiono i valori superiormente calcolati ed identificando i coefficienti dei termini costanti si vede essere  $k = 4b_2^2$ . Teniamo conto di questo risultato e confrontiamo i coefficienti di  $\lambda^4$  nei due membri e troveremo  $b_1 = 0$ . Giovandosi di ciò il paragone dei coefficienti di  $\lambda^2$  dà finalmente:

$$9a_3^2c_1^2 = 12a_1a_3b_2^2 + 4b_2^4$$

e quindi

$$\frac{r}{\varrho} = -\frac{4b_2^2}{3a_1c_1}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 9(a_1^2 + c_1^2)\lambda^4 + 2(3a_1a_3 + 2b_2^2)\lambda^2 + a_3^2$$

Ora se fra le costanti  $a_1, a_3, b_2, c_1$  ha luogo la relazione precedente quest'ultima espressione è il quadrato perfetto d'una espressione quadratica in  $\lambda$  epperò la curva è rettificabile. Vediamo dunque che: *tutte le parabole gobbe che rientrano nella categoria delle eliche sono rettificabili*. Ma <sup>1)</sup> non tutte le parabole gobbe rettificabili sono eliche, perchè l'integrale

$$\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} d\lambda$$

può essere esprimibile mediante funzioni elementari quando la funzione di  $\lambda$  che si trova sotto il segno  $\int$  è di 3° grado ed ammette una radice doppia; siccome ciò non accade che per curve immaginarie <sup>2)</sup> così si può asserire che: *una parabola gobba reale è rettificabile soltanto quando è una elica*; per rap-

<sup>1)</sup> Mary F. Curtiss, *On the Rectifiability of twisted Cubic* (Bull. of the Amer. Math. Soc. T. XXVI, 1920-21, p. 275-7).

<sup>2)</sup> Infatti le condizioni affinché ciò accade sono

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 0$$

$$2(3a_1a_3 - 2r_1^2)^2 + 24a_2^3b_1^2b_2^2 = 0$$

presentarle analiticamente servono le formole seguenti:

$$\begin{cases} x = \lambda \left[ \cos \alpha . at + \sqrt{3} . \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sqrt{ab} . t^2 + \cos \beta . bt^3 \right] \\ y = \lambda \left[ \sin \alpha . at + \sqrt{2} . \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sqrt{ab} . t^2 + \sin \beta . bt^3 \right] \\ z = at + \sqrt{3} . \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sqrt{ab} . t^2 + bt^3 \end{cases}$$

Parecchi anni prima che si fosse giunti ai precedenti risultati, A. Grünwald incontrò incidentalmente <sup>2)</sup> una parabola gobba godente della proprietà che caratterizza le eliche, curva che, appunto per tale ragione, egli chiamò *elica cubica*.

In coordinate cartesiane ortogonali essa ammette la seguente rappresentazione parametrica:

$$(25) \quad x = m . (3\lambda - \lambda^3) , \quad y = m . (3\lambda^2 - 1) , \quad z = m \operatorname{tg} \omega . (3\lambda + \lambda^3) ,$$

ove  $m$  e  $\omega$  sono due costanti.

Ora queste danno

$$x' = 3m(1 - \lambda^2) , \quad y' = 6m\lambda , \quad z' = 3m \operatorname{tg} \omega (1 + \lambda^2) ;$$

da esse si trae la seguente formola:

$$(26) \quad s = \frac{3m}{\cos \omega} \int_0^\lambda (1 + \lambda^2) d\lambda + \frac{m}{\cos \omega} (3\lambda + \lambda^3) ,$$

cioè

$$s = \frac{2}{\cos \omega} ;$$

la curva è quindi rettificabile.

<sup>1)</sup> P. Stäckel, *Algebraisch rektificirbare Raumcurven* (Math. Ann. T. XLIII, 1893, p. 178). e *Ueber algebraische Raumcurven* (Id. T. XLV, 1894, p. 366-70).

<sup>2)</sup> V. la memoria *Die kubische Kreisbewegung eines starren Körpers* (Zeitschr. f. Math. u. Phys. T. LV, 1907, p. 264-96), ove è manifestata l'opinione (che mostreremo erronea nel Cap. XII) che quella curva fosse l'unica elica algebrica.

Dalle formole precedenti si deduce poi:

$$\alpha = \cos \omega \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}, \quad \beta = \cos \omega \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}, \quad \gamma = \sin \omega;$$

dunque tutte le tangenti della curva formano con l'asse delle  $z$  l'angolo costante  $\frac{\pi}{2} - \omega$ , epperò essa è un'elica (d'accordo col risultato precedente).

Cerchiamo quale sia la base del cilindro sulla quale si deve considerare la curva; a tale scopo osserviamo che dalla (25, 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>) si trae:

$$x^2 + y^2 = m^2 (1 + \lambda^2)^3, \quad \frac{x}{y} = \frac{3\lambda - \lambda^3}{3\lambda^2 - 1};$$

pongasi ora

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \theta, \quad \lambda = \operatorname{tg} \tau;$$

si avrà

$$\varrho = m (1 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} 3\tau, \quad \theta = 3\tau, \quad \varrho = \frac{m}{\cos^3 \tau}$$

o finalmente

$$(27) \quad \varrho = m \cos^{-3} \left( \frac{\theta}{3} \right),$$

equazione polare della speciale spirale sinusoidale che si chiama *ortogenide*<sup>1)</sup>.

#### § 5. Parabola gobba di torsione costante.

Nelle equazioni (38) del Cap. IV (p. 110) che rappresentano tutte le cubiche gobbe si può evidentemente supporre che, con un previo mutamento dell'origine i numeratori, siano stati ridotti di secondo grado; allora esse si scrivono come segue:

$$(28) \quad x = \frac{a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2}{d_0 \lambda^3 + d_1 \lambda^2 + d_2 \lambda + d_3}, \quad y = \frac{b_0 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_2}{d_0 \lambda^3 + d_1 \lambda^2 + d_2 \lambda + d_3},$$

$$z = \frac{c_0 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_2}{d_0 \lambda^3 + d_1 \lambda^2 + d_2 \lambda + d_3}$$

1) G. Loria, op. cit., T. I, p. 470.

Inoltre si può supporre  $d_0 = 1$ ; facendo poi un cambiamento del parametro si può rendere  $d_1 = 0$ . Le risultanti equazioni mostrano che l'origine delle coordinate è il punto della curva che corrisponde a  $\lambda = \infty$ ; e se si suppone finalmente che gli assi coincidano con gli spigoli del corrispondente triedro proiettante si trova che tutte le cubiche gobbe sono rappresentabili mediante equazioni della seguente forma:

$$(29) \quad x = \frac{a_0 t^2 + a_1 t + a_2}{t^3 + dt + e}, \quad y = \frac{b_1 t + b_2}{t^3 + dt + e}, \quad z = \frac{c_2}{t^3 + dt + e}$$

Volendo determinarne la torsione in un punto qualunque basta applicare l'espressione (VII'') a p. 11 nelle seguenti ipotesi:

$$x_0 = t^3 + dt + e, \quad x_1 = a_0 t^2 + a_1 t + a_2, \quad x_2 = b_1 t + b_2, \quad x_3 = c_2.$$

Della risultante espressione si può trarre profitto per determinarne le cubiche gobbe di torsione costante; scrivendo, infatti, che la detta espressione è indipendente dal parametro  $t$  si trova che le costanti che entrano nelle (29) devono soddisfare alle condizioni seguenti:

$$b_2 = 0, \quad d = 0, \quad a_2^2 + c_2^2 = 0, \quad 3a_0 c_2 = 2 a_2 b_1^2;$$

allora la torsione è data da  $\frac{3c_2}{a_0 b_1}$ .

Mutando la designazione delle costanti ed assumendo come nuovo parametro  $\frac{1}{t}$  si conclude:

*Tutte le cubiche gobbe di torsione costante sono immaginarie ed hanno rappresentazioni parametriche riducibili alla seguente forma:*

$$(30) \quad x = a\lambda + b\lambda^3, \quad y = \lambda^2 \sqrt{-\frac{3}{2} ab}, \quad z = i b \lambda^3,$$

ove  $a, b$  sono costanti arbitrarie finite; la loro torsione è data da  $\frac{\sqrt{6b}}{a\sqrt{a}}$ .

1) Questo risultato è dovuto al Lyon, *Sur les courbes à torsion constante* (Annales de l'enseignement supérieur de Grenoble, T. II, 1890, p. 353).

Tali curve sono dunque tutte parabole gobbe, le quali godono di altre notevoli proprietà oltre quella che possiedono per definizione.

Posto, infatti, per brevità di scrittura

$$c = \sqrt{-\frac{3}{2}ab}$$

le (30) danno per differenziazione:

$$\begin{aligned} x' &= a + 3b\lambda^2, & y' &= 2c\lambda, & z' &= 3ib\lambda^2 \\ x'' &= 6b\lambda, & y'' &= 2c, & z'' &= 6ib\lambda. \end{aligned}$$

Per conseguenza

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2$$

onde, scegliendo convenientemente il senso positivo e l'origine degli archi, si può scrivere  $s = a\lambda$ . — Inoltre, detto al solito  $r$  il raggio di curvatura, si trova

$$\frac{1}{r^2} = \frac{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}{s'^4} = \frac{-6ab}{a^4}$$

onde  $r = \sqrt{-\frac{a^3}{6b}}$  ciò prova che delle curve in questione è costante, non solo la torsione, ma anche la flessione. Sostituendo  $s$  al parametro  $\lambda$  le (30) assumono quest'altro aspetto notevole:

$$x = s - \frac{s^3}{3r^2}, \quad y = \frac{s^2}{2r}, \quad z = -\frac{is^3}{6r^2},$$

le quali permettono di stabilire l'identità della curva risultante con l'unica (oltre l'ordinaria elica cilindrica) di cui sono costanti entrambe le curvature; se infatti si pone

$$\bar{x} = -x, \quad \bar{y} = -z, \quad \bar{z} = -y$$

Il metodo seguito nel testo è quello indicato nella nota di W. H. Salmon, *The twisted Cubic of constant Torsion* (The Mess. of Math., T. XLV, 1915-16, p. 125-28).

le (30') divengono

$$\bar{x} = \frac{s^3}{3r^2} - s, \quad \bar{y} = \frac{is^3}{6r^2}, \quad \bar{z} = -\frac{s^2}{2r}$$

e queste non differiscono da quelle costituenti la rappresentazione parametrica canonica della succitata curva<sup>1)</sup>.

Dalle precedenti equazioni risulta che i coseni direttori della tangente in un punto qualunque della curva in questione sono dati da

$$\alpha = \frac{s^2}{r^2} - 1, \quad \beta = \frac{is^2}{2r^2}, \quad \gamma = -\frac{s}{r};$$

donde segue che le tangenti alla curva formano angolo costante con la retta i cui coseni direttori sono proporzionali a  $i, -2, 0$ : ciò conferma che la curva appartiene alla categoria delle eliche.

#### E) ALTRE CUBICHE GOBBE METRICAMENTE SPECIALIZZATE.

A nuove curve sghembe del terz'ordine dotate di particolarità metriche si giunge in base ad altre considerazioni, di cui faremo rapido cenno prima di abbandonare questa classe di curve.

I. Delle quattro superficie di rotazione che passano in generale per una cubica gobba (v. p. 102) sono reali *quattro* per l'iperbole gobba, *due* per l'ellisse gobba *tre* per l'iperbole parabolica e *due* per la parabola gobba. Ora, l'ellisse gobba appartiene ad un unico cilindro; se questo è di rotazione la curva si specializza e si specializza ulteriormente se è un cono l'altra delle superficie di rotazione contenente la curva; se invece le due superficie di rotazione passanti per la curva coincidono, i due punti impropri della curva appartengono al cerchio immaginario all'infinito, cioè la curva è circolare<sup>2)</sup>. Casi analoghi si

<sup>1)</sup> G. Scheffers, *Einführung in die Theorie der Kurven*, II Aufl. (Leipzig, 1910, p. 305).

<sup>2)</sup> Staudé, *Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitten* (Leipzig, und Berlin 1913, p. 81-86).

possono considerare riguardo alle altre tre specie di cubiche gobbe.

II. Tutti gli osculatori di una cubica gobba segano un osculatore fisso in  $\infty'$  rette che involuppano una conica; il luogo dei centri delle  $\infty'$  coniche risultanti è la *conica centrale* della data curva; per l'ellisse gobba questa è un'iperbole e per l'iperbole gobba un'ellisse e una parabola per l'iperbole parabolica, mentre per la parabola gobba si riduce ad una retta posta all'infinito. Ora l'ellisse gobba si può particolarizzare perchè la sua conica centrale sia un'iperbole equilatera e l'iperbole gobba perchè la curva analoga è un cerchio <sup>1)</sup>.

III. Per una cubica gobba passano  $\infty'$  quadriche, altrettante sono tangenti a tutti i suoi osculatori; quelle costituiscono una rete e queste un tessuto; di quello fa parte la serie degli  $\infty'$  coni quadrici proiettanti la curva, di questa la serie delle  $\infty'$  coniche situate nei suoi piani osculatori. Ora se uno o l'altro di questi sistemi lineari gode di speciali proprietà metriche, la data curva si specializza. Tale è, ad es., il caso corrispondente a supporre che tutte le coniche appartenenti alla sviluppabile osculatrice d'un'iperbole gobba siano iperboli equilateri <sup>2)</sup>; allora la conica centrale è un cerchio, il quale è tagliato dagli asintoti della curva nei vertici di un triangolo equilatero; ecc.

<sup>1)</sup> Staude, l. c., p. 51.

<sup>2)</sup> H. Krüger, *Ueber eine besondere cubische Raumcurve (die gleichwinklige cubische Hyperbel)* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XXXVIII, 1893, p. 344-9.

## CAPITOLO VI.

### CURVE GOBBE DI QUARTO ORDINE E PRIMA SPECIE.

#### A) QUARTICHE DI I SPECIE

NOTE ANTERIORMENTE ALLA TEORIA GENERALE.

##### § 1. Curva di Archita.

Per inserire due medie proporzionali fra due dati segmenti rettilinei — problema di cui è caso particolare quello della duplicazione del cubo o problema di Delo — Archita da Taranto, nel IV Sec. a. C., ha immaginato una geniale considerazione <sup>1)</sup> stereometrica il cui nocciolo consiste nell'applicazione della curva in cui il cilindro di rotazione

$$(1) \quad x^2 + y^2 = ax$$

è tagliato dal cono rotondo

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2} x^2.$$

Si tratta, dunque, di una curva gobba di quarto ordine; siccome dalle (1), (2) si trae

$$(3) \quad z^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2} - ax,$$

così essa appartiene anche al cilindro iperbolico rappresentato da quest'equazione. La rappresentazione grafica della curva in

<sup>1)</sup> Cfr. G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia* (II ed., Milano, 1914), p. 102.

questione col metodo di Monge si ottiene con un'agevole applicazione di metodi classici<sup>1)</sup>. Supposto  $a > b$ <sup>2)</sup>, si scriva la equazione (2) sotto la forma

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)^2$$

e si vedrà che si può sostituirla con le due altre

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} x \cos \lambda, \quad z = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} x \sin \lambda$$

ove  $\lambda$  è un parametro arbitrario e con  $\sqrt{a^2 - b^2}$  s'intende la radice positiva<sup>2)</sup>. Sostituendo il primo di questi valori nella (1) si ottiene

$$x = \frac{ab^2}{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda}$$

il che abilita a concludere che la curva di Archita ammette la seguente rappresentazione parametrica:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{ab^2}{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda} \\ y = \frac{ab \sqrt{a^2 - b^2} \cos \lambda}{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda} \\ z = \frac{ab \sqrt{a^2 - b^2} \sin \lambda}{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda} \end{array} \right.$$

le quali possono servire ad uno studio completo della curva. Assumendo come parametro  $\tau = tg \frac{\lambda}{2}$  si ottengono espressioni tutte razionali.

<sup>1)</sup> Tale osservazione venne fatta e svolta per la prima volta da V. Flauti (*Geometria di sito*, II ed., Napoli 1821, p. 173-5).

<sup>2)</sup> Ciò è lecito perchè si può sempre supporre di avere indicato con  $a$  il maggiore dei dati segmenti.

## § 2. L'ippopeda di Eudosso.

Per spiegare i fenomeni che presenta il movimento degli astri in cielo un eminente contemporaneo di Platone, Eudosso da Cnido, ha immaginato uno speciale gruppo di sfere<sup>1)</sup>. Secondo la geniale ricostruzione fattane da G. V. Schiaparelli<sup>2)</sup> nel risultante sistema astronomico ha una parte cospicua la curva d'intersezione di una sfera con un cilindro di rotazione ad essa tangente; è l'*ippopeda di Eudosso*, curva rappresentabile in coordinate cartesiane ortogonali, col mezzo delle due seguenti equazioni:

$$(5) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x^2 + (y-a)^2 = (r-a)^2$$

È facile vedere che tutte le quadriche passanti per essa sono di rivoluzione, onde l'ippopeda è il primo elemento della classe di quartiche ciascuna delle quali è base di un fascio di superficie di second'ordine rotonde, della quale ci occuperemo metodicamente più avanti (p. 233).

Sottraendo dalla prima la seconda delle (5) si ottiene la equazione

$$(6) \quad z^2 = 2a(r-y),$$

che rappresenta un cilindro parabolico passante per l'ippopeda. Aggiungendo invece alla (5, 1<sup>a</sup>) moltiplicata per  $a-r$  la (5, 2<sup>a</sup>) moltiplicata per  $r$  si ottiene

$$(7) \quad a[x^2 + (y-r)^2] + (a-r)z^2 = 0,$$

equazione di un cono di rotazione su cui pure si trova l'ippopeda.

Siccome la (7) è soddisfatta per tutti i valori di  $\lambda$  ponendo:

$$x = \sqrt{\frac{r-a}{a}} z \cos \lambda, \quad y = r + \sqrt{\frac{r-a}{a}} z \sin \lambda,$$

<sup>1)</sup> G. Loria, *Le scienze esatte*, ecc., p. 470 e segg.

<sup>2)</sup> Id., p. 475.



così, tenendo conto dell'equazione (6), si giunge alla seguente rappresentazione parametrica dell'ippopeda:

$$(8) \quad x = 2(a-r) \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda, \quad y = r + 2(a-r) \operatorname{sen}^2 \lambda, \quad z = -2\sqrt{a(r-a)} \operatorname{sen} \lambda,$$

ove si possono far scomparire le funzioni trigonometriche introducendo il parametro  $\tau = \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}$ ;

Il cilindro circolare contenente l'ippopeda si può rappresentare, invece che con la (5, 2\*), mediante le equazioni:

$$x = (r-a) \cos \varphi, \quad y = a + (r-a) \operatorname{sen} \varphi,$$

le quali combinate con la (6) danno:

$$z = \pm 2\sqrt{a(r-a)} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Se, quindi, si sviluppa quel cilindro su di un piano si ottiene la curva che, in coordinate cartesiane ortogonali  $u, z$  ha la seguente rappresentazione parametrica:

$$(9) \quad u = (r-a) \varphi, \quad z = \pm 2\sqrt{a(r-a)} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right);$$

ora siccome eliminando  $\varphi$  fra queste si trova

$$z = \pm 2\sqrt{a(r-a)} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{u}{2(r-a)} \right)$$

così si vede che: sviluppando su di un piano il cilindro circolare retto su cui sta l'ippopeda di Eudosso, questa curva si muta in due sinusoidi identiche fra loro e simmetriche rispetto al loro comune asse. L'area compresa fra un arco completo di una di tali curve e l'asse delle ascisse è data da

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} z du = 2(r-a)\sqrt{a(r-a)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi$$

$$= 2(r-a)\sqrt{a(r-a)} \left[ 2 \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}},$$

cioè in valore assoluto

$$= 4(r-a)\sqrt{2a(r-a)};$$

onde  $8(r-a)\sqrt{2a(r-a)}$  esprime la superficie dell'anzidetto cilindro che si trova fra due archi completi corrispondenti dell'ippopeda<sup>1)</sup>.

### § 3. La finestra di Viviani.

Gli *Acta Eruditorum* pubblicati addì 4 Aprile 1692 contengono sotto il titolo *Aenigma geometricum de unico opificio testudinis quadrabilis hemisphaericae a D. Pio Lisci Posillo Geometra* la questione di « costruire in una cupola emisferica quattro finestre eguali in modo che la parte restante risulti esattamente quadrabile ». Non si tardò a sapere che il proponente era Vincenzo Viviani, ben noto discepolo di Galileo. Il problema è indeterminato; esso fu risolto in data 27 Maggio dello stesso anno da Leibniz<sup>2)</sup> e poi si può dire da tutti i più eminenti matematici di quell'epoca<sup>3)</sup>, non escluso il Viviani, che a quel problema dedicò una speciale pubblicazione<sup>4)</sup>.

Per risolverlo con procedimenti moderni si consideri la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

1) Montuola, *Histoire des mathématiques* Nouv. 6d., T. III, p. 101.

2) *Acta Eruditorum* 1692, p. 275-9.

3) Ne è fatto cenno in una lettera scritta da C. Huygens, al marchese de l'Hôpital in data 22 Ottobre 1692 (*Oeuvres de Huygens*, T. X, La Haye, 1905, p. 329), in appendice alla quale gli editori inserirono uno squarcio inedito in cui il grande geometra olandese dimostra l'identità delle soluzioni del problema di Viviani suggerite da questi e da Leibniz. Nella risposta di de l'Hôpital scritta il 23 Novembre 1692 (op. cit., p. 346) lo scrivente afferma di avere date, otto mesi prima, non meno di tre soluzioni della questione, non appena essa gli fu comunicata dall'ambasciatore della corte di Toscana presso il re di Francia.

4) *Formazione e misura di tutti i cieli* (Firenze 1692). V. anche G. Grandi, *Geometrica divinitio Vivianeorum problematum* (Flor., 1699).

e la si rappresenti mediante le equazioni:

$$(10) \quad x = r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad y = r \operatorname{sen} u \cos v, \quad z = r \cos u;$$

per determinarne l'area serve la formola:

$$\begin{aligned} r^2 \iint \operatorname{sen} u \, du \, dv &= r^2 \int dv \int \operatorname{sen} u \, du \\ &= -r^2 \int \cos u \, dv. \end{aligned}$$

Naturalmente si deve supporre che le  $u$  e  $v$  siano una funzione dell'altra; ora la più semplice legge di dipendenza fra esse è espressa da  $v = \pm u$ ; ove la si assuma quell'integrazione è effettuabile e dà per risultato  $\mp r^2 \operatorname{sen} u$ . Da ciò una soluzione del problema di Viviani. Ora se  $v = u$  le (10) divengono:

$$(11) \quad x = r \operatorname{sen}^2 u, \quad y = r \operatorname{sen} u \cos u, \quad z = r \cos u;$$

le due prime danno

$$\cos 2u = \frac{r - 2x}{r}, \quad \operatorname{sen} 2u = \frac{2y}{r}$$

epperò

$$(2x - r)^2 + 4y^2 = r^2$$

o anche

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2;$$

in conseguenza la finestra di Viviani è l'intersezione della data sfera con un cilindro circolare retto ad essa tangente e di raggio metà. Assumendo invece  $v = -u$  si trova similmente

$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

e si giunge ad una curva identica alla precedente. Emerge da ciò che la finestra di Viviani è il caso particolare dell'ippopeda che corrisponde all'ipotesi  $a = \frac{r}{2}$ ; dunque tutte le proprietà rilevate in questa sussistono integralmente per quella.

Ponendo

$$t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

le equazioni (11) divengono

$$(11') \quad x = r \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}, \quad y = r \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \quad z = r \frac{(1-t)^2}{1+t^2}.$$

Per mostrare l'applicazione di questa rappresentazione parametrica, consideriamo i punti della curva situati in un piano arbitrario

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

essi corrispondono ai valori  $t_1, t_2, t_3, t_4$  del parametro che sono radici dell'equazione

$$4At^2 + 2Bt(1-t^2) + C(1-t^4) + \frac{D}{r}(1+t^2)^2 = 0$$

ossia

$$\left(C + \frac{D}{r}\right) + 2Bt + 2\left(\frac{D}{r} + 2A\right)t^2 - 2Bt^3 + \left(\frac{D}{r} - C\right)t^4 = 0;$$

emerge da questa che

$$(12) \quad t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_2 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_4 + t_2 t_3 t_4 = 0,$$

è la condizione di coplanarità dei quattro punti della curva corrispondenti ai valori  $t_1, t_2, t_3, t_4$  del parametro. Da essa si desume agevolmente la maggior parte delle proprietà della finestra.

La proiezione stereografica della curva di Viviani ha una equazione polare che si ottiene applicando le formole (v. Cap. X)

$$\varrho = r \cot \frac{u}{2}, \quad \omega = v;$$

onde è

$$\varrho = r \cot \frac{\omega}{2},$$

quartica particolare notevole appartenente alla classe dei nodi <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Cfr. Loria, *Spec. alg. u. trans. Kurven*, T. I, p. 199.

§ 4. *La Ciclo-cilindrica di Roberval*<sup>1)</sup>.

È l'intersezione di un cilindro circolare retto con una sfera il cui centro appartiene alla superficie del cilindro; può quindi rappresentarsi mediante le equazioni seguenti:

$$(13) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + (y-b)^2 = b^2.$$

Il fascio determinato da queste due superficie

$$(14) \quad x^2 + y^2 - 2by + \rho(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0$$

consta tutto di quadriche rotonde; oltre alle due date superficie esso contiene altre tre quadriche singolari, quelle cioè che corrispondono a  $\rho = -1$  ed ai valori di  $\rho$  soddisfacenti l'equazione

$$\rho(\rho + 1)a^2 + b^2 = 0;$$

se  $a > 2b$ , cioè se il raggio della sfera supera il diametro del dato cilindro, i due cono risultanti sono reali e la ciclo-cilindrica consta di due parti distinte; il contrario accade se  $a < 2b$ ; nel caso intermedio  $a = 2b$  la curva non differisce dalla finestra di Viviani. La prima delle date equazioni può surrogarsi con le seguenti

$$x = a \cos \varphi \cdot \cos \psi, \quad y = a \sin \varphi \cdot \cos \psi, \quad z = a \sin \psi$$

e la seconda diviene

$$a \cos \psi = 2b \sin \varphi$$

che è l'equazione della ciclo-cilindrica in coordinate sferiche.

Posto  $y - b = y_1$  le equazioni (13) divengono

$$x^2 + (y_1 + b)^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y_1^2 = b^2;$$

<sup>1)</sup> Mém. de l'Acad. des Sciences, (T. VI, p. 241-53). Alla ciclo-cilindrica sembra avere ricorso Descartes per dividere un arco circolare in 27 parti eguali (v. una lettera al P. Merseune dell'8 Ottobre 1629 riprodotta in *Oeuvres de Descartes*, ed. Adam e Tannery, T. I, p. 25) con un procedimento di cui E. Lucas ha proposta una geniale divinazione (Nouv. Ann. de Math., T. XV, 1876, p. 8).

siccome la seconda può surrogarsi con le due seguenti

$$x = b \sin \omega, \quad y_1 = b \cos \omega$$

la prima diviene

$$z = \sqrt{a^2 - 4b^2 \cos^2 \frac{\omega}{2}}$$

Da ciò è facile dedurre che la quadratura della ciclo-cilindrica dipende in generale da integrali ellittici, ma è effettuabile elementarmente nell'ipotesi  $a = 2b$ . Così si giunge alla soluzione del problema di Roberval: « tracciare sopra un cilindro circolare retto uno spazio quadrabile mediante una costruzione dipendente dalla delineazione di un solo arco di cerchio ».

§ 5. *La quartica di A. G. Kästner*<sup>1)</sup>.

L'architettura ha indotto a considerare l'intersezione di due cilindri circolari retti ad assi incidenti. Per trovarne la rappresentazione analitica consideriamo una retta qualunque  $a$  passante per l'origine delle coordinate

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

ove

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Il piede  $P$  della perpendicolare calata su di essa dal punto  $M(x, y, z)$  ha per coordinate

$$\alpha(ax + \beta y + \gamma z), \quad \beta(ax + \beta y + \gamma z), \quad \gamma(ax + \beta y + \gamma z),$$

onde

$$\overline{PM}^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (ax + \beta y + \gamma z)^2$$

Ciò prova che il cilindro circolare retto avente per asse la retta  $a$  e per raggio  $r$  ha per equazione

$$(15) \quad x^2 + y^2 + z^2 - (ax + \beta y + \gamma z)^2 = r^2$$

<sup>1)</sup> *Cylindrorum rectorum se decussantium sectiones ad geometriam formosam relatae* (Comment. Acad. Gottling., T. X, 1787-90).

e che la curva dianzi definita può rappresentarsi mediante il sistema formato dall'equazione (15) e dell'analogha seguente:

$$(15') \quad x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha'x + \beta'y + \gamma'z)^2 = r'^2$$

Supposto  $r' = r^1$ ) dalle equazioni (15) e (15') si trae per sottrazione

$$[(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (\alpha'x + \beta'y + \gamma'z)][(\alpha x + \beta y + \gamma z) - (\alpha'x + \beta'y + \gamma'z)] = 0,$$

perciò la curva d'intersezione si spezza in due coniche.

In caso diverso dalle citate equazioni si trae

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha'x + \beta'y + \gamma'z)^2}{r'^2}$$

equazione che rappresenta una quadrica passante per la curva considerata; siccome è un'equazione quadratica omogenea così si vede che detta curva sta in un cono avente per vertice il punto d'incontro degli assi dei due dati cilindri. Dalle (15) (15') si deduce anche per sottrazione l'equazione

$$(15'') \quad (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 - (\alpha'x + \beta'y + \gamma'z)^2 + r^2 - r'^2 = 0,$$

rappresentante altra quadrica passante per la data curva; ora il discriminante del primo membro della (15'') vale

$$\begin{array}{l} (r^2 - r'^2) \begin{vmatrix} \alpha^2 - \alpha'^2 & \alpha\beta - \alpha'\beta' & \alpha\gamma - \alpha'\gamma' \\ \beta\alpha - \beta'\alpha' & \beta^2 - \beta'^2 & \beta\gamma - \beta'\gamma' \\ \gamma\alpha - \gamma'\alpha' & \gamma\beta - \gamma'\beta' & \gamma^2 - \gamma'^2 \end{vmatrix} = \\ (r^2 - r'^2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha' \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta' \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma & -1 & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \end{array}$$

1) È il caso contemplato da Archimede in un suo celebre scritto di recente scoperto (cfr. G. Loria, *Le scienze esatte*, ecc. p. 326) con l'aggiunta che gli assi sono fra loro ortogonali.

emerge da ciò che quella quadrica è essa pure singolare; siccome le derivate del primo membro della (15'') si annullano in tutti i punti per cui è ad un tempo

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad \alpha'x + \beta'y + \gamma'z = 0,$$

così quella quadrica è un cilindro le cui generatrici sono parallele all'intersezione di questi due piani, cioè sono perpendicolari al piano degli assi dei due cilindri. Applicando noti criteri si vede che quel cilindro, non è di rivoluzione, ma ellittico. Il teorema di Poncelet che dimostreremo fra poco (p. 208) assicura che la curva in esame non appartiene ad altre quadriche singolari oltre i tre cilindri ed il cono di cui abbiamo parlato.

## B) TEORIA GENERALE DELLE QUARTICHE GOBBE DI I SPECIE<sup>1)</sup>.

### § 1. Generalità.

Una curva gobba di quarto ordine è tagliata da una arbitraria superficie del secondo in otto punti; se quella ha comuni con questa più di otto punti, appartiene totalmente alla stessa. Emerge da ciò che se per nove punti di una quartica gobba si fa passare una quadrica, la curva appartiene totalmente alla superficie. Per conseguenza: Una curva gobba di quart'ordine si trova sempre sopra una superficie del secondo. Nel caso in cui per essa ne passino due (come accade per le curve di cui parliamo nella prima parte del presente Cap.) essa ne è la completa intersezione e si chiama *quartica di I specie*; diremo, invece, di *II specie*<sup>2)</sup> la curva corrispondente all'ipotesi in cui per essa passi un'unica quadrica. Nel presente Capitolo

1) La più antica opera a noi nota ove siano metodicamente considerate le intersezioni di quadriche è quella del Padre Courcier *De sectione superficies sphaericae per superficies sphaericae, cylindricae per cylindricam et conicam per conicam* (Divionae, 1662). Per la storia e la bibliografia dell'argomento ricordiamo a: G. Loria, *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, III ed. (Torino, 1907, pp. 136-8, 381-2).

2) Questa nomenclatura si giustifica soltanto tenendo conto dell'epoca della scoperta di tali curve.

ci occuperemo esclusivamente delle curve della *I specie*, riserbando quelle di *II* al Capitolo seguente.

Essendo una quattica di *I specie* l'intersezione di due quadriche, essa potrà rappresentarsi in coordinate omogenee mediante due equazioni della seguente forma:

$$(1) \quad \sum a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \sum b_{ik} x_i x_k = 0 \quad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

ove si suppone  $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $b_{ik} = b_{ki}$ .

Siccome queste equazioni hanno per conseguenza questa altra

$$(2) \quad \sum (a_{ik} + \lambda b_{ik}) x_i x_k = 0,$$

qualunque sia  $\lambda$ , così per una quattica di *I specie* passano  $\infty'$  superficie di second'ordine, le quali costituiscono un fascio di superficie; questo è individuato dalla conoscenza di otto punti arbitrari della curva. Per un punto arbitrario dello spazio passa una superficie del fascio, in generale determinata ed unica, perchè nella (2) il parametro  $\lambda$  si può determinare in modo che essa sia soddisfatta dalle coordinate di quel punto.

In generale la superficie rappresentata dall'equazione (2) non è un cono; affinchè ciò accada deve il suo discriminante risultare nullo, cioè dev'essere:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a_{00} + \lambda b_{00}, & \dots, & a_{03} + \lambda b_{03} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{30} + \lambda b_{30}, & \dots, & a_{33} + \lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

ora questa è un'equazione biquadratica in  $\lambda$ , a ciascuna radice della quale corrisponde un cono del fascio; ad ogni particolarità di quella equazione ne corrisponde una della curva; possiamo per tanto, ritenere stabilito il seguente:

**TEOREMA DI PONCELET.** Per qualunque quattica gobba di *I specie* passano in generale quattro cono quadrici.

In conseguenza una qualunque delle curve di cui ci occupiamo può riguardarsi come intersezione di due cono di second'ordine; volendo, quindi, rappresentarla con uno dei metodi della Geometria descrittiva, si potrà applicare la procedura

nota che serve a costruire per punti l'intersezione di due cono, supponendo questi di second'ordine.

Le radici dell'equazione (3), se sono tutte distinte, possono essere *a)* o tutte reali, oppure *b)* due reali e le altre immaginarie coniugate, o finalmente *c)* tutte immaginarie, a coppie coniugate; in corrispondenza la curva può essere o totalmente immaginaria e, se è reale, può constare di un solo o di due rami; nasce così la seguente classificazione <sup>1)</sup>:

I. *Curva reale monogrammica*; essa appartiene a due soli cono quadrici reali.

II. *Curva reale digrammica*; essa non sta su alcun cono reale.

III. *Altra curva reale digrammica*; appartiene a quattro cono quadrici reali.

IV. *Curva immaginaria*; i quattro cono quadrici passanti per la curva hanno i loro vertici reali, ma del resto sono immaginari.

M. Chasles, ha scoperta <sup>2)</sup> una notevole genesi delle quattiche di *I specie*, estendendo una considerazione anteriormente fatta riguardo alla conoide circoscritta alla sfera <sup>3)</sup>; eccone l'enunciato: *Se una retta si muove nello spazio con la condizione di toccare costantemente una quadrica ed incontrare due rette sghembe, il luogo dei suoi punti di contatto è una quattica di I specie* <sup>4)</sup>. Per dimostrare questo teorema si consideri una quadrica  $\Sigma$  e due rette arbitrarie  $a$ ,  $b$  e  $s'$  immagini la rigata costituita dalle rette  $r$  che toccano quella superficie ed incontrano queste linee. Per costruirla si consideri un punto  $A$  di  $a$  ed il suo polare  $a$  ri-

<sup>1)</sup> Cremona, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen* (Berlin, 1870, p. 22).

<sup>2)</sup> *Propriétés des courbes gauches du quatrième ordre et de première espèce* (C. R., T. LIV, 1862, pp. 317-324, 418-425).

<sup>3)</sup> Cfr. G. Loria, *Vorles. üb. darstell. Geometrie*, II Bd. (Leipzig, 1913, p. 245).

<sup>4)</sup> Nel caso in cui la quadrica sia una sfera, la curva risultante di essi *cassiniiana* secondo Laguerre (*Sur les cassiniennes planes et sphériques*, Bull. de la Soc. philom. 1868, oppure *Oeuvres de Laguerre*, T. II, Paris 1905, p. 47).

spetto a  $\Sigma$ ; esso è evidentemente incontrato dal piano  $Ab = \pi$  secondo una retta, le cui intersezioni con  $\Sigma$  congiunte al punto  $A$  danno le due generatrici di quella rigata che escono dal detto punto; quindi il luogo geometrico  $\Gamma$  dei punti di contatto di dette generatrici appartiene alla superficie su cui stanno tutte le rette analoghe alla  $a\pi$ . Ora, quando  $A$  percorre la retta  $a$ , i due piani  $\alpha$  e  $\pi$  descrivono evidentemente due fasci proiettivi fra loro, perchè lo sono entrambi alla punteggiata di sede  $a$ ; in conseguenza il luogo della retta  $a\pi$  è una schiera rigata. Emerge da ciò che la curva  $\Gamma$  è l'intersezione della data superficie  $\Sigma$  con la quadrica a cui appartiene tale schiera, onde è una quartica di I specie. — Che all'infuori di  $\Gamma$  non esistano altri punti di contatto di  $\Sigma$  con rette  $r$  si vede osservando che queste formano una rigata di quarto grado, dal momento che risultano dalle congiungenti dei punti corrispondenti di due punteggiate aventi per sedi le rette  $a$  e  $b$  e fra i cui elementi passa una relazione algebrica (2, 2); ora una superficie di 2° ed una di 4° ordine non possono toccarsi in una curva di ordine superiore a quattro.

Qualunque quartica di I specie può generarsi nell'anzidetto modo, non solo in una, ma in sei maniere differenti; ci limitiamo ad enunciare questo risultato perchè la dimostrazione esorbita dai limiti che ci siamo imposti<sup>1)</sup>; ma vogliamo esporre una deduzione analitica del precedente risultato la quale mette in evidenza che la curva generata nell'anzidetto modo non è specializzata.

A tale scopo assumiamo le due rette date come spigoli  $A_0A_1$ ,  $A_2A_3$  del tetraedro fondamentale e

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0$$

come equazione della quadrica  $\Sigma$ , che supponiamo esente da punti doppi e in posizione affatto generale rispetto a quelle rette. Se  $P$  è un punto qualunque della curva  $\Gamma$  in discorso accadrà

<sup>1)</sup> Essa fu data dal Laguerre nella memoria *Sur un problème de géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre* (Journ. de mathém., 1870, oppure *Oeuvres di Laguerre*, T. II, Paris, 1905, p. 141-163).

che, chiamando  $Q$  e  $R$  le intersezioni del piano che tocca  $\Sigma$  in  $P$  con i detti spigoli, i tre punti  $P, Q, R$  stiano in linea retta.

Ora se  $x_0, x_1, x_2, x_3$  sono le coordinate di  $P$  si vede facilmente che le coordinate di  $Q$  e  $R$  sono risp.:

$$\begin{aligned} & -\sum_{\dagger} a_{11} x_i, \sum_{\dagger} a_{0i} x_i, 0, 0 \\ & 0, 0, -\sum_{\dagger} a_{3i} x_i, \sum_{\dagger} a_{2i} x_i, \end{aligned}$$

onde la condizione di collinearità dei punti  $P, Q, R$  è espressa dall'annullarsi dei determinanti che si possono estrarre dalla seguente matrice:

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -\sum_{\dagger} a_{1i} x_i & \sum_{\dagger} a_{0i} x_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sum_{\dagger} a_{3i} x_i & \sum_{\dagger} a_{2i} x_i \end{array} \right\|$$

Basta per ciò che si annullino due di detti determinanti, p. es., i seguenti:

$$\sum_{\dagger} a_{3i} x_i \left\{ x_0 \sum_{\dagger} a_{0i} x_i + x_1 \sum_{\dagger} a_{1i} x_i \right\} = 0$$

$$\sum_{\dagger} a_{1i} x_i \left\{ x_2 \sum_{\dagger} a_{2i} x_i + x_3 \sum_{\dagger} a_{3i} x_i \right\} = 0$$

Ora  $\sum_{\dagger} a_{3i} x_i \neq 0$ , perchè il punto  $P$  non appartiene al piano polare di  $A_3$ , che è un punto qualunque della prima delle rette date, e similmente è  $\sum_{\dagger} a_{1i} x_i \neq 0$ . Dunque le coordinate del punto  $x$  soddisfano alle due equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \sum_{\dagger} a_{0i} x_i + x_1 \sum_{\dagger} a_{1i} x_i = 0 \\ x_2 \sum_{\dagger} a_{2i} x_i + x_3 \sum_{\dagger} a_{3i} x_i = 0 \end{array} \right.$$

e soltanto ad esse dal momento che delle stesse è conseguenza l'equazione della quadrica  $\Sigma$ . Resta così stabilito che il luogo del punto  $P$  è una quartica di I specie. Questa è base di un

fascio i cui coni corrispondono ai valori di  $\lambda$  che sono radici dell'equazione seguente

$$(a) \begin{vmatrix} 2a_{00} & 2a_{01} & (1+\lambda)a_{02} & (1+\lambda)a_{03} \\ 2a_{10} & 2a_{11} & (1+\lambda)a_{12} & (1+\lambda)a_{13} \\ (1+\lambda)a_{20} & (1+\lambda)a_{21} & 2\lambda a_{22} & 2\lambda a_{23} \\ (1+\lambda)a_{30} & (1+\lambda)a_{31} & 2\lambda a_{32} & 2\lambda a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ma, ponendo

$$(b) \frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda} = \rho,$$

questa si può scrivere

$$(c) \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \rho a_{02} & \rho a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & \rho a_{12} & \rho a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ciò prova che la risoluzione dell'equazione biquadratica determinatrice dei quattro coni del fascio è ridotta a quella delle due equazioni quadratiche (b) e (c). Notisi ora che la (b) dà

$$\lambda = 2\rho - 1 \pm 2\sqrt{\rho(\rho - 1)};$$

sostituendo in questa a  $\rho$  ciascuna delle radici della (c) si ottengono le quattro radici della (a). Queste si riducono a due se  $\rho = 1$ , oppure se  $\rho = 0$ , oppure se la (c) ha una radice doppia; la prima circostanza si verifica se  $\Sigma$  è un cono, caso escluso; la seconda se è nullo il prodotto

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

cioè se  $\Sigma$  è tangente ad una delle date rette, il che in generale non avviene. Se finalmente la (c) avesse sempre una radice doppia, la (a) [come mostra l'equazione (b)] avrebbe sempre due radici doppie e la curva luogo del punto  $P$  sarebbe sempre spezzata

in due coniche. Ma che tal fatto non avvenga sempre è dimostrato considerando essere noto che esso di regola non ha luogo quando  $\Sigma$  sia una sfera e una delle rette date si trovi all'infinito, chè in tal caso la figura è quella notissima che s'incontra nello studio della conoide circoscritta ad una sfera. L'equazione (a) ha, dunque, in generale quattro radici distinte, cioè per la curva  $\Gamma$  luogo del punto  $P$  passano quattro coni di second'ordine.

Nel punto  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  la curva (2) ha un piano osculatore rappresentato (supposte  $X_0, X_1, X_2, X_3$  coordinate correnti) dalla seguente equazione:

$$(4) \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} & \sum_k a_{k0} x_k \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \sum_k a_{k1} x_k \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \sum_k a_{k2} x_k \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & \sum_k a_{k3} x_k \\ \sum_k a_{0k} x_k & \sum_k a_{1k} x_k & \sum_k a_{2k} x_k & \sum_k a_{3k} x_k & 0 \end{vmatrix} \sum_{ik} a_{ik} x_i X_k =$$

(4)

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \sum_k b_{k0} x_k \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \sum_k b_{k1} x_k \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \sum_k b_{k2} x_k \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \sum_k b_{k3} x_k \\ \sum_k b_{0k} x_k & \sum_k b_{1k} x_k & \sum_k b_{2k} x_k & \sum_k b_{3k} x_k & 0 \end{vmatrix} \sum_{ik} b_{ik} x_i X_k; \quad 1)$$

1) Essa si ottiene applicando una formola generale di O. Hesse (Journ. f. reine und angew. Mathem., T. XLI, p. 272-84, oppure Werke, München, 1897, p. 263 e seg.).

riguardo alla quale può giovare l'osservazione che i determinanti che vi compaiono eguagliati a zero rappresentano le quadriche polari reciproche di ciascuna delle date rispetto all'altra.

§ 2. *Rappresentazione parametrica; prime conseguenze di essa.*

Siccome le due forme quaternarie quadratiche (2) si possono sempre ridurre a forma canonica, così la curva di cui ci occupiamo, se non si fa distinzione fra reale ed immaginario, potrà sempre rappresentarsi mediante equazioni della seguente forma:

$$(2') \quad \sum_i a_i x_i^2 = 0 \quad , \quad \sum_i b_i x_i^2 = 0 ;$$

allora i vertici  $A_0, A_1, A_2, A_3$  del tetraedro fondamentale sono i centri dei coni del fascio e il tetraedro stesso è autocongiugato rispetto a tutte le quadriche del fascio stesso. La (15) si semplifica in conseguenza e diviene

$$(4') \quad b_0 b_1 b_2 b_3 \sum_i a_i x_i X_i \cdot \sum_i \frac{a_i^2}{b_i} x_i^2 = \\ a_0 a_1 a_2 a_3 \sum_i b_i x_i X_i \cdot \sum_i \frac{b_i^2}{a_i} x_i^2$$

Mutando convenientemente il punto unità del sistema di riferimento si può supporre nella (2')  $b_1 = 1$ ; è un'ipotesi che torna utile in molti casi, in particolare per giungere alla rappresentazione delle coordinate dei punti della curva in funzione di un parametro, come ora mostreremo.

A tale scopo notiamo che dalle equazioni

$$(2'') \quad a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0 \quad , \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

si trae

$$(a_0 - a_2) x_0^2 + (a_1 - a_2) x_1^2 + (a_3 - a_2) x_3^2 = 0$$

ossia

$$\frac{a_0 - a_2}{a_2 - a_3} \left( \frac{x_0}{x_3} \right)^2 + \left( \frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} \right) \left( \frac{x_1}{x_3} \right)^2 = 1$$

equazione a cui si soddisfa, qualunque sia  $\varphi$ , ponendo

$$\frac{x_0}{x_3} = \sqrt{\frac{a_2 - a_3}{a_0 - a_2}} \operatorname{sen} \varphi, \quad \frac{x_1}{x_3} = \sqrt{\frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2}} \cos \varphi ;$$

servendosi della (2'', 2\*) se ne deduce

$$\frac{x_2}{x_3} = \sqrt{\frac{a_3 - a_1}{a_1 - a_2} \left[ 1 - \frac{(a_1 - a_0)(a_2 - a_3)}{(a_0 - a_2)(a_1 - a_3)} \operatorname{sen}^2 \varphi \right]} ;$$

in queste formole ogni radicale ha un valore determinato, scelto una volta per tutte.

Poniamo ora

$$k^2 = \frac{a_0 - a_1}{a_0 - a_2} : \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2} \quad , \quad \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn} u ;$$

le formole precedenti diverranno in conseguenza

$$(5) \quad \frac{x_0}{x_3} = \sqrt{\frac{a_2 - a_3}{a_0 - a_2}} \operatorname{sn} u, \quad \frac{x_1}{x_3} = \sqrt{\frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2}} \operatorname{cn} u, \quad \frac{x_2}{x_3} = \sqrt{\frac{a_3 - a_1}{a_1 - a_2}} \operatorname{dn} u$$

le quali costituiscono una prima soluzione del problema di stabilire una rappresentazione parametrica applicabile a tutte le quartiche di I specie.

Per trovarne un'altra più conveniente determiniamo tre costanti  $e_1, e_2, e_3$  tali che risulti:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad , \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0 ;$$

servendosi allora di notazioni e formole classiche<sup>1)</sup> si avrà

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{e_1 - e_3} \frac{\sigma\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}\right)},$$

<sup>1)</sup> J. Molk et J. Tannery, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, T. I (Paris, 1893) passim.



$$dn u = \frac{\sigma_2 \left( \frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}} \right)}{\sigma_3 \left( \frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}} \right)} ;$$

Se, dunque, s'introduce il parametro

$$t = \frac{u}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

e si chiamano  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  costanti il cui significato risulta dalle equazioni (5) si otterrà

$$\frac{x_0}{x_3} = \frac{\lambda_0}{\lambda_3} \frac{\sigma t}{\sigma_3 t}, \quad \frac{x_1}{x_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \frac{\sigma_1 \tau}{\sigma_3 \tau}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \frac{\sigma_2 \tau}{\sigma_3 \tau},$$

che si possono compendiare nella formola seguente

$$(6) \quad \varrho x_k = \lambda_k \cdot \sigma_k t \quad (k = 0.1.2.3),$$

$\varrho$  essendo un fattore di proporzionalità. Se finalmente si sposta opportunamente il punto-unità si giunge alla seguente rappresentazione canonica delle quartiche di I specie

$$(6') \quad \varrho x_k = \sigma_k t,$$

applicabile sempre, purchè non si faccia distinzione fra reale ed immaginario<sup>1)</sup>.

Sono note le formole

$$\sigma_r (z + 4m_1\omega_1 + 4m_2\omega_2 + 4m_3\omega_3) = e^{4H(z+2\omega)} \sigma z \quad (r = 0.1.2.3)$$

1) Altre congeneri rappresentazioni parametriche, in cui sono distinti i casi in cui per la quartica passino 4, 2 o 0 coni reali, si leggono nelle memorie di E. Montessus de Ballore *Sur les quartiques gauches de première espèce, leur représentation paramétrique et leur classification* (Journ. de mathém., VII Sér., T. III, 1917, p. 77-169), v. anche F. Klein, *Ueber die elliptischen Normalkurven n-ter Ordnung* (Ges. mathem. Abhandlungen, T. III, Berlin, 1923, p. 198 e seg.).

ove  $m_1, m_2, m_3$  sono numeri interi, positivi o non, e si è posto per brevità

$$H = m_1\eta_1 + m_2\eta_2 + m_3\eta_3;$$

esse mostrano che, se ad un punto della quartica considerata corrisponde un certo valore  $t$  del parametro, ad esso corrispondono anche gli  $\infty^2$  valori<sup>1)</sup> compresi nell'espressione  $t + 4m_1\omega_1 + 4m_2\omega_2 + 4m_3\omega_3$  qualunque siano gl'interi  $m_1, m_2, m_3$ ; fra essi, in ogni occasione si sceglierà quello che maggiormente conviene.

Ricordiamo anche le formole

$$\begin{aligned} \sigma(z + 2\omega_1) &= -e^{2\eta_1(z + \omega_1)} \sigma z, \\ \sigma_1(z + 2\omega_1) &= -e^{2\eta_1(z + \omega_1)} \sigma_1 z, \\ \sigma_2(z + 2\omega_1) &= +e^{2\eta_1(z + \omega_1)} \sigma_2 z, \\ \sigma_3(z + 2\omega_1) &= +e^{2\eta_1(z + \omega_1)} \sigma_3 z; \end{aligned}$$

combinandole con le espressioni (6') si deduce che due punti della quartica considerata determinati da due valori del parametro della forma  $t$  e  $t + 2\omega_1$  si corrispondono in una omologia assiale armonica (involutoria)  $I_1$  avente per assi gli spigoli  $A_0A_1, A_2A_3$  del tetraedro fondamentale.

Similmente esistono altre due analoghe trasformazioni della quartica in sè stessa, che indicheremo con  $I_2$  e  $I_3$  perchè i loro assi sono risp. le coppie  $A_0A_2, A_3A_1$  e  $A_0A_3, A_1A_2$  di spigoli opposti del tetraedro fondamentale. Indicando con  $I$  la tra-

1) Diciamo  $\infty^2$  e non  $\infty^3$  perchè, essendo  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ , è

$$\begin{aligned} &t + 4m_1\omega_1 + 4m_2\omega_2 + 4m_3\omega_3 \\ &= t + 4(m_1 - m_3)\omega_1 + 4(m_2 - m_3)\omega_2, \end{aligned}$$

epperò ciò che vi è di essenziale è rappresentato dalle differenze

$$m_1 - m_3, m_2 - m_3.$$

sformazione identica, fra le considerate trasformazioni hanno luogo le relazioni seguenti:

$$I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = I, \quad I_2 I_3 = I_1, \quad I_3 I_1 = I_2, \quad I_1 I_2 = I_3$$

Similmente le formole:

$$\sigma(-z) = -\sigma z, \quad \sigma_1(-z) = \sigma_1 z, \quad \sigma_2(-z) = \sigma_2 z, \quad \sigma_3(-z) = \sigma_3 z$$

provano che i punti della quartica corrispondenti a due valori del parametro eguali e di segni contrari si corrispondono nell'omologia involutoria  $O_0$  di cui  $A_0$  è il centro e  $A_1 A_2 A_3$  è il piano unito.

Finalmente le seguenti relazioni:

$$\sigma(-z + 2\omega_1) = +e \frac{2\eta_1(-z + \omega_1)}{\sigma z}$$

$$\sigma_1(-z + 2\omega_1) = -e \frac{2\eta_1(-z + \omega_1)}{\sigma_1 z}$$

$$\sigma_2(-z + 2\omega_1) = +e \frac{2\eta_1(-z + \omega_1)}{\sigma_2 z}$$

$$\sigma_3(-z + 2\omega_1) = +e \frac{2\eta_1(-z + \omega_1)}{\sigma_3 z}$$

rivelano l'esistenza di una seconda omologia involutoria  $O_1$  che trasforma la curva in sè stessa; è quella di cui  $A_1$  è il centro e  $A_0 A_2 A_3$  è il piano unito ed in cui si corrispondono due punti della curva corrispondenti a valori del parametro della forma  $t$  e  $t + 2\omega_1$ . Similmente se ne trovano altre due  $O_2$  e  $O_3$ . Fra questa e le precedenti sussistono evidentemente le relazioni seguenti:

$$O_0^2 = O_1^2 = O_2^2 = O_3^2 = I, \quad O_0 O_1 = O_2 O_3 = I_1,$$

$$O_0 O_2 = O_3 O_1 = I_2, \quad O_0 O_3 = O_1 O_2 = I_3.$$

### § 3. Applicazioni della rappresentazione parametrica canonica.

Per lo studio della geometria sulla curva che consideriamo ha importanza fondamentale il seguente:

**TEOREMA DI ABEL.** *La condizione necessaria e sufficiente*

affinchè stiano nello stesso piano i quattro punti della quartica (6') corrispondenti ai valori  $a, b, c, d$  del parametro è che sussista la congruenza

$$(8) \quad a + b + c + d \equiv 0 \pmod{4\omega_1, 4\omega_2, 4\omega_3}.$$

Per dimostrare quest'importante relazione notiamo che le citate formole (6'') danno subito come condizione di coplanarità dei quattro punti considerati l'annullarsi del seguente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \sigma a & \sigma_1 a & \sigma_2 a & \sigma_3 a \\ \sigma b & \sigma_1 b & \sigma_2 b & \sigma_3 b \\ \sigma c & \sigma_1 c & \sigma_2 c & \sigma_3 c \\ \sigma d & \sigma_1 d & \sigma_2 d & \sigma_3 d \end{vmatrix}.$$

Sviluppandolo secondo i prodotti dei determinanti binari estratti dalle due prime verticali per i loro complementari si ottiene un risultato della forma

$$D = [01, 23] + [02, 31] + [03, 12]$$

ove questi simboli hanno significati evidenti.

Ora è noto<sup>1)</sup> che se si pone

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = \frac{1}{2}(a + b + c + d) \\ b' = \frac{1}{2}(a + b - c - d) \\ c' = \frac{1}{2}(a - b + c - d) \\ d' = \frac{1}{2}(a - b - c + d) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a'' = \frac{1}{2}(a + b + c - d) \\ b'' = \frac{1}{2}(a + b - c + d) \\ c'' = \frac{1}{2}(a - b + c + d) \\ d'' = \frac{1}{2}(a - b - c - d) \end{array} \right\}$$

sussisteranno tutte le relazioni del seguente tipo:

$$\sigma_1 a \cdot \sigma_\mu b \cdot \sigma_\nu c \cdot \sigma d + \sigma_1 a' \cdot \sigma_\mu b' \cdot \sigma_\nu c' \cdot \sigma d' + \sigma_1 a'' \cdot \sigma_\mu b'' \cdot \sigma_\nu c'' \cdot \sigma d'' = 0,$$

<sup>1)</sup> Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* (Göttingen, 1885, p. 48).

ove  $\lambda, \mu, \nu$  è un'arbitraria permutazione dei numeri 1, 2, 3. Mutiamo in essa

$$a, b, c, d \text{ risp. in } c, d, a, b$$

e notiamo che in conseguenza

$$\begin{aligned} a', b', c', d' \text{ diverranno } a', -b', -c', -d' \\ \text{mentre } a'', b'', c'', d'' \quad > \quad c'', -d'', -a'', -b''. \end{aligned}$$

Perciò la precedente identità si trasforma in quest'altra:

$$\sigma_\lambda c \cdot \sigma_\mu d \cdot \sigma_\nu a \cdot ob - \sigma_\lambda a' \cdot \sigma_\mu b' \cdot \sigma_\nu c' \cdot od' - \sigma_\lambda c'' \cdot \sigma_\mu d'' \cdot \sigma_\nu a'' \cdot ob'' = 0$$

Addizionando questa relazione alla precedente e poi mutando nel risultato il segno di  $a$  si trova:

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda a \cdot \sigma_\mu b \cdot \sigma_\nu c \cdot od + \sigma_\lambda c \cdot \sigma_\mu d \cdot \sigma_\nu a \cdot ob = \\ \sigma_\lambda d' \cdot \sigma_\mu c' \cdot \sigma_\nu b' \cdot oa' - \sigma_\lambda b' \cdot \sigma_\mu a' \cdot \sigma_\nu d' \cdot oc. \end{aligned}$$

Applicando siffatte relazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} [01, 23] &= 2\sigma a' \cdot \sigma_1 b' (\sigma_2 c' \cdot \sigma_3 d' - \sigma_2 d' \cdot \sigma_3 c') \\ [02, 31] &= 2\sigma a' \cdot \sigma_2 b' (\sigma_3 c' \cdot \sigma_1 d' - \sigma_3 d' \cdot \sigma_1 c') \\ [03, 12] &= 2\sigma a' \cdot \sigma_3 b' (\sigma_1 c' \cdot \sigma_2 d' - \sigma_1 d' \cdot \sigma_2 c'), \end{aligned}$$

epperò

$$D = 2\sigma a' \cdot \begin{vmatrix} \sigma_1 b' & \sigma_2 b' & \sigma_3 b' \\ \sigma_1 c' & \sigma_2 c' & \sigma_3 c' \\ \sigma_1 d' & \sigma_2 d' & \sigma_3 d' \end{vmatrix}.$$

Questa espressione prova che, affinché risulti  $D = 0$ , deve essere o  $\sigma a' = 0$ , oppure dev'essere nullo quest'ultimo determinante; ma, ove si verifichi questo secondo fatto i tre punti corrispondenti ai valori  $b', c', d'$  del parametro determinano un piano passante per il vertice  $A_0$  del tetraedro fondamentale, circostanza che in generale non si verifica data l'arbitrarietà dei valori  $a, b, c, d$ . Si ha pertanto

$$\sigma a' = 0 \text{ cioè } \sigma \left( \frac{a + b + c + d}{2} \right) = 0$$

epperò

$$a + b + c + d \equiv 0 \pmod{4\omega_1, 4\omega_2, 4\omega_3}$$

c.d.d.

Per stabilire l'importanza del teorema di Abel mostreremo come da esso scaturisca un grande numero di proprietà delle quartiche di I specie.

1°. Consideriamo la corda che unisce i due punti  $A, B$  della curva corrispondenti ai valori  $a, b$  del parametro. Se  $M$  ne è un punto arbitrario, la quàdrice passante per  $M$  del fascio avente per base quella curva contiene evidentemente tutta la corda  $AB$ ; ogni piano del fascio di asse  $AB$  taglia quella quàdrice in una conica quadrisecante la quartica; ma di essa fa parte la corda  $AB$ ; quindi ciò che rimane sarà una seconda corda. Segue da ciò che: ogni piano del fascio avente per asse una corda  $AB$  di una quartica di I specie contiene una seconda corda  $CD$  della curva; tutte le corde così risultanti costituiscono un sistema di generatrici di una quàdrice passante per la curva. L'altro sistema di generatrici della stessa quàdrice si ottiene in modo analogo partendo da una qualunque delle corde  $CD$ .

Posto per brevità

$$a + b = K,$$

in virtù delle (8) si avrà

$$c + d \equiv -K; ^1)$$

onde si può dire che tutte le generatrici del sistema  $AB$  congiungono punti  $x, y$  della curva tali che

$$x + y \equiv K,$$

mentre tutte quelle del sistema  $CD$  soddisfano la relazione

$$z + u \equiv -K.$$

Le due schiere risultanti coincidono sempre e solo quando

$$K \equiv -K$$

<sup>1)</sup> Le congruenze s' intendono sempre rispetto ai moduli  $4\omega_1, 4\omega_2, 4\omega_3$ .

cioè

$$K \equiv 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

ove  $m$  e  $n$  sono interi arbitrari. Ora  $K$  è suscettibile soltanto dei seguenti quattro valori fra loro incongrui:

$$0, 2\omega_1, 2\omega_3, 2\omega_1 + 2\omega_3,$$

ed una quàdrice in cui le due schiere di generatrici coincidono è un cono, onde quei valori della costante  $K$  caratterizzano i quattro coni passanti per la data curva.

2°. Cerchiamo i piani tangenti della quartica che passano per la corda  $AB$ ; se  $z$  è il parametro del punto di contatto di essi dovrà essere

$$(9) \quad a + b + 2z \equiv 0$$

onde

$$z = -\frac{K}{2} + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

espressione la quale non ammette che i quattro seguenti valori fra loro incongrui:

$$-\frac{K}{2}, -\frac{K}{2} + 2\omega_1, -\frac{K}{2} + 2\omega_3, -\frac{K}{2} + 2\omega_1 + 2\omega_3;$$

siccome poi questi dipendono non dai valori  $a, b$  considerati separatamente, ma dalla loro somma, così si può asserire che per una corda qualunque di una quartica di I specie passano quattro piani tangenti della curva: i loro punti di contatto non variano sostituendo a quella corda un'altra generatrice qualunque della rigata che la contiene e che appartiene ad una quàdrice del fascio avente per base la curva data. In altre parole: ogni schiera rigata passante per una quartica di I specie contiene quattro generatrici tangenti alla curva.

La somma dei quattro valori da ultimo scritti vale  $-2K + 4\omega_1 + 4\omega_3$  ond'è  $\equiv -2K$ ; se quindi  $2K \equiv 0$  gli anzidetti punti di contatto sono coplanari; dunque: se per una generatrice di uno dei coni passanti per una quartica di I specie si conducono alla curva i piani tangenti, i loro punti di contatto sono coplanari.

3°. Se  $x, y$  sono i punti di contatto della curva in discorso con un suo piano bitangente si avrà per la (8) (p. 219).

$$(10) \quad 2x + 2y \equiv 0;$$

ciò prova che detti piani bitangenti costituiscono quattro serie caratterizzate come segue:

$$x + y \equiv 0, \quad x + y \equiv 2\omega_1, \quad x + y \equiv 2\omega_3, \quad x + y = 2\omega_1 + 2\omega_3.$$

Perciò i punti di contatto di uno di essi si corrispondono in una delle omologie  $O_0, O_1, O_2, O_3$ , epperò sono allineati con uno dei punti  $A_0, A_1, A_2, A_3$ ; i detti piani sono tangenti ciascuno ad uno dei coni del fascio. Si vede, adunque, che per una quartica di I specie la sviluppabile bitangente è costituita dai quattro coni quàdrici passanti per la curva.

4°. Se un piano oscula la data curva nel punto  $x$  e l'incontra nel punto  $y$ , fra i numeri  $x$  e  $y$ , in forza della (8), deve sussistere la relazione

$$(11) \quad 3x + y \equiv 0.$$

Emerge da questa che, se si considerano quattro punti della curva appartenenti al medesimo piano, se in ciascuno di essi si costruisce il corrispondente osculatore e se finalmente si chiamano  $b_1, b_2, b_3, b_4$  i punti in cui questi piani tagliano nuovamente la curva, sussisteranno le relazioni seguenti:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv 0 \\ 3a_1 + b_1 \equiv 0, \quad 3a_2 + b_2 \equiv 0, \quad 3a_3 + b_3 \equiv 0, \quad 3a_4 + b_4 \equiv 0;$$

ora siccome queste danno

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0,$$

così si può concludere: gli osculatori di una quartica gobba di I specie in quattro punti di uno stesso piano tagliano ulteriormente la curva in quattro punti coplanari.

5°. Cerchiamo gli osculatori della curva uscenti da un suo punto  $a$ ; detto  $x$  il punto di contatto di uno di essi, grazie alle (11), si avrà

$$3x + a \equiv 0$$

onde

$$x = \frac{-a + 4m\omega_1 + 4n\omega_3}{3};$$

ora di questi valori sono incongrui rispetto a  $4\omega_1$  e  $4\omega_3$  i nove seguenti:

$$-\frac{a}{3}, \frac{-a + 4\omega_1}{3}, \frac{-a + 4\omega_3}{3}, \frac{-a - 4\omega_1 + 4\omega_3}{3},$$

$$\frac{-a + 8\omega_1}{3}, \frac{-a + 8\omega_3}{3}, \frac{-a + 8\omega_1 + 8\omega_3}{3},$$

$$\frac{-a + 4\omega_1 + 8\omega_3}{3}, \frac{-a + 8\omega_1 + 4\omega_3}{3},$$

onde quegli osculatori sono in numero di nove; e siccome sussistono la relazione

$$a + \frac{-a}{3} + \frac{-a + 4\omega_1}{3} + \frac{-a + 8\omega_1}{3} \equiv 0$$

e le otto analoghe, così siamo autorizzati a ritenere stabilito che: *per ogni punto di una quartica di I specie passano nove piani che la osculano altrove: i punti di contatto cadono tre a tre in nove piani passanti tutti per il punto donde si è partiti*<sup>1)</sup>.

1) Questo teorema e quello dimostrato nel 4° comma del presente § si possono dedurre con opportuni passaggi al limite, dalla proposizione a cui guida la seguente considerazione. Se tre piani  $\alpha, \beta, \gamma$  tagliano la nostra curva in altrettante quaderne di punti, fra i corrispondenti parametri sussisteranno le relazioni:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &\equiv 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &\equiv 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &\equiv 0; \end{aligned}$$

se ora  $x_1$  è il quarto punto d'intersezione con la curva del piano determinato dai punti  $a_1, b_1, c_1$  si avrà

$$a_1 + b_1 + c_1 + x_1 \equiv 0$$

6°. Se  $x$  è un punto stazionario della curva si ha, sempre in conseguenza della (8),

$$4x \equiv 0;$$

onde

$$x = m\omega_1 + n\omega_3,$$

ove  $m$  e  $n$  sono numeri suscettibili ciascuno dei valori 0, 1, 2, 3. Una quartica di I specie ammette, dunque, sedici punti stazionari. Siccome

$$\sigma(0) = 0, \sigma(2\omega_1) = 0, \sigma(2\omega_3) = 0, \sigma(2\omega_1 + 2\omega_3) = 0$$

così quattro di detti punti appartengono alla faccia  $A_1A_2A_3$  del tetraedro fondamentale; un fatto analogo si verifica per gli altri, epperò: *I punti stazionari di una quartica di I specie sono i suoi punti d'intersezione con le facce del tetraedro avente per vertici i centri dei quattro coni passanti per la curva*. Siccome poi sussistono la relazione

$$0 + \omega_1 + (3\omega_1 + \omega_2) + 3\omega_2 \equiv 0$$

e tutte le analoghe, così: *I punti stazionari di una quartica di I specie stanno quattro a quattro in centosedici piani*.

7°. Se  $x$  e  $y$  sono gli estremi di una corda principale della curva in esame, il piano osculatore in uno di essi passa per l'altro; sussistono, dunque, le relazioni:

$$3x + y \equiv 0, \quad x + 3y \equiv 0$$

Da queste segue

$$3(3x + y) - (x + 3y) \equiv 0$$

relazione che ne ammette altre tre di analoghe e che sono:

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 + c_2 + x_2 &\equiv 0 \\ a_3 + b_3 + c_3 + x_3 &\equiv 0 \\ a_4 + b_4 + c_4 + x_4 &\equiv 0 \end{aligned}$$

Ora se dalla somma di queste ultime quattro congruenze si tolgono le tre prime si trova

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 0$$

donde emerge che anche i quattro punti  $x_1, x_2, x_3, x_4$  giacciono in un piano.

cioè

$$8x \equiv 0;$$

dunque

$$x = \frac{m\omega_1 + n\omega_3}{2}$$

ove a  $m$  e  $n$  si devono attribuire i valori  $0, 1, \dots, 7$ ; fra i 64 punti così ottenuti figurano evidentemente, come corrispondenti a soluzioni estranee, i punti stazionari; tolti questi si conclude che una quartica di I specie ammette  $\left(\frac{64-16}{2} =\right)$  24 corde principali.

8°. Il teorema di Abel permette finalmente di risolvere la seguente questione: « Per una curva di quart'ordine e I specie si può far passare una quadrica tale che con  $n$  sue generatrici di un sistema e con altrettante dell'altro si possa formare un  $2n$ -gono gobbo inscritto nella curva? ».

Ricordando quanto si dimostrò nel comma 1° si vede che, detti  $x_1 x_2 \dots x_{2n}$  i valori del parametro corrispondenti ai vertici di uno dei poligoni cercati, sussisteranno le relazioni seguenti, ove  $K$  è una costante da determinare,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \equiv K, \\ x_3 + x_4 \equiv K, \\ \dots \dots \dots \\ x_{2n-1} + x_{2n} \equiv K, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 \equiv -K \\ x_4 + x_5 \equiv -K \\ \dots \dots \dots \\ x_{2n} + x_1 \equiv -K; \end{array} \right.$$

ora addizionando le  $n$  equazioni che trovansi in ciascuna colonna si trova:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} &\equiv nK \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} &\equiv -nK; \end{aligned}$$

donde, sottraendo membro a membro,

$$2nK \equiv 0$$

epperò

$$K = \frac{2p\omega_1 + 2q\omega_3}{n}.$$

Per ogni valore di  $K$  che abbia questa forma, preso un punto arbitrario della curva come primo vertice del cercato poligono, si potrà costruire un poligono dell'indicata specie. Emerge da ciò che, per ogni valore di  $n$ , vi è un certo numero di quadriche soddisfacenti al problema, ciascuna in infiniti modi.

#### § 4. Formole relative a tangenti ed osculatori.

La rappresentazione parametrica della quartica di I specie mediante le funzioni  $\sigma$  ellittiche, la quale ci condusse al teorema di Abel, guida ad altri utili risultati, che ora stabiliremo. Siano  $s_{ik} = -s_{ki}$  ( $i, k = 0, 1, 2, 3$ ) le coordinate omogenee della corda che unisce i punti della curva corrispondenti ai valori  $a, b$  del parametro; esse sono proporzionali ai determinanti estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} \sigma a & \sigma_1 a & \sigma_2 a & \sigma_3 a \\ \sigma b & \sigma_1 b & \sigma_2 b & \sigma_3 b \end{array} \right\|;$$

ora è noto che sussistono le due formole

$$\begin{aligned} \sigma y \cdot \sigma_1 z - \sigma z \cdot \sigma_1 y &= \frac{\sigma_1 (y+z) \sigma (y-z)}{\sigma y \cdot \sigma_1 z + \sigma z \cdot \sigma_1 y}, \\ \sigma_2 y \cdot \sigma_3 z - \sigma_3 y \cdot \sigma_2 z &= -\frac{(e_2 - e_3) \cdot \sigma (y+z) \cdot \sigma (y-z)}{\sigma_2 y \cdot \sigma_3 z + \sigma_2 z \cdot \sigma_3 y} \end{aligned}$$

e le analoghe nascenti da queste mediante permutazioni circolari degli indici 1, 2, 3. Da ciò si conclude, detto al solito  $\varrho$  un fattore di proporzionalità:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho^{s_{oi}} = \frac{1}{\sigma a \cdot \sigma_1 b + \sigma b \cdot \sigma_1 a} \text{ ove } i = 1, 2, 3 \\ \varrho^{s_{kl}} \equiv \frac{e_k - e_l}{\sigma_k a \cdot \sigma_1 b + \sigma_1 a \cdot \sigma_k b} \text{ ove } k, l = 2, 3; 3, 1; 1, 2 \end{array} \right.$$

Facendo coincidere  $b$  con  $a$  se ne deducono le seguenti espressioni per le coordinate di una tangente:

$$(13) \quad \varrho^{t_{oi}} = \frac{1}{\sigma a \cdot \sigma_1 a}, \quad \varrho^{t_{kl}} = -\frac{e_k - e_l}{\sigma_k a \cdot \sigma_1 a},$$

Siccome da queste si traggono queste altre:

$$\frac{t_{01} t_{23}}{e_2 - e_3} = \frac{t_{02} t_{31}}{e_3 - e_1} = \frac{t_{03} t_{12}}{e_1 - e_2}$$

così si vede che le tangenti di una quartica di I specie appartengono al complesso quadratico avente per superficie singolare il tetraedro i cui vertici coincidono con i centri dei coni quadrici passanti per la curva.

Dalle formole (13) si desume che il piano che tocca la data curva nel punto  $a$  e la taglia nel punto  $b$  ha per equazione:

$$-x_0 [(e_2 - e_3) \sigma_1 a \cdot \sigma_1 b + (e_3 - e_1) \sigma_2 a \cdot \sigma_2 b + (e_1 - e_2) \sigma_3 a \cdot \sigma_3 b] + x_1 \cdot \sigma_1 a [(e_2 - e_3) \sigma a \cdot \sigma b + \sigma_2 a \cdot \sigma_2 b - \sigma_3 a \cdot \sigma_3 b] + \dots = 0$$

Per trasformare quest'equazione applichiamo le seguenti note <sup>1)</sup> formole

$$(e_2 - e_3) \sigma a \cdot \sigma b + \sigma_2 a \cdot \sigma_2 b - \sigma_3 a \cdot \sigma_3 b = -2 (e_2 - e_3) \sigma^2 \frac{a-b}{2} \cdot \sigma_1^2 \frac{a+b}{2}$$

$$(e_2 - e_3) \sigma_1 a \cdot \sigma_1 b + (e_3 - e_1) \sigma_2 a \cdot \sigma_2 b + (e_1 - e_2) \sigma_3 a \cdot \sigma_3 b =$$

$$2 (e_2 - e_3) (e_3 - e_1) (e_1 - e_2) \sigma^2 \frac{a-b}{2} \cdot \sigma^2 \frac{a+b}{2}$$

e le analoghe risultanti dalla prima mediante permutazioni circolari degli indici. In forza di esse l'equazione precedente, divisa per  $2\sigma^2 \frac{a-b}{2}$ , assume il seguente aspetto:

$$(14) \quad (e_2 - e_3) (e_3 - e_1) (e_1 - e_2) \sigma a \cdot \sigma^2 \frac{a+b}{2} \cdot x_0 + (e_2 - e_3) \sigma_1 a \cdot \sigma_1 \frac{a+b}{2} \cdot x_1 + (e_3 - e_1) \sigma_2 a \cdot \sigma_2 \frac{a+b}{2} \cdot x_2 + (e_1 - e_2) \sigma_3 a \cdot \sigma_3 \frac{a+b}{2} \cdot x_3 = 0.$$

<sup>1)</sup> Schwarz, op. cit., formole [D, 2 e 6] e [D, 3 e 4].

Da questa rappresentazione analitica del piano tangente-segante si trae quella dell'osculatore nel punto  $a$ ; eccola:

$$(19) \quad (e_2 - e_3) (e_3 - e_1) (e_1 - e_2) \sigma^3 a \cdot x_0 + (e_2 - e_3) \sigma_1^3 a \cdot x_1 + (e_3 - e_1) \sigma_2^3 a \cdot x_2 + (e_1 - e_2) \sigma_3^3 a \cdot x_3 = 0.$$

Così si hanno le rappresentazioni, in funzione ellittica di un parametro, non solo dei punti, ma anche delle tangenti e degli osculatori della curva in esame <sup>1)</sup>.

C) QUARTICHE DI I SPECIE PARTICOLARI.

§ 1. La quartica orto-tetraedrica.

Fra le figure geometriche collegate ad un tetraedro vi è una quartica di I specie, che chiameremo *orto-tetraedrica*, per ragioni che risulteranno da quanto segue, e che fu studiata per la prima volta, sinteticamente, da H. Schröter e H. Thieme <sup>2)</sup>. Per stabilirne analiticamente le proprietà caratteristiche usiamo coordinate ortogonali e indichiamo con

$$(1) \quad \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z - p_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

le equazioni di quattro piani costituenti un tetraedro; supponendo

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1,$$

<sup>1)</sup> Per ogni punto  $P$  dello spazio passano due corde  $A_1 B_1$  e  $A_2 B_2$  di una quartica di I specie; siano  $P_1$  e  $P_2$  i coniugati armonici di  $P$  rispetto a queste coppie di punti; nasce così nello spazio una corrispondenza. Ora, se  $P$  descrive un'altra quartica di I specie,  $P_1$  e  $P_2$  descriveranno una nuova curva che può, per eccezione, coincidere con la prima. La determinazione dei casi in cui ciò conviene fu fatta da A. L. Hjelman nella memoria *Sur les courbes gauches bigonales autoconjugées* (Annales Acad. Scient. Fennicae, Série A, T. XI, 1917); egli, fra l'altro, ha trovato che se una quartica è autoconjugata rispetto ad una seconda, questa lo sarà rispetto alla prima e le due curve avranno comune il tetraedro autopolare.

<sup>2)</sup> Schröter, *Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species* (Jouru. f. r. u. a. Mathem., T. XCIII, 1882, p. 132-176); Thieme, *Zur Geometrie des Tetraeders* (Zeitschrift f. Math. u. Phys., T. XXVII, 1882, p. 56-61). Cfr. J. Neuberg, *Ueber die Schrötersche Raumcurve vierter Ordnung* (Archiv. f. Math. u. Phys., III Ser., T. XIV, 1909, p. 200-9).

saranno  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  i coseni di direzione della normale all'ima faccia del tetraedro e  $x_i$  sarà la distanza dalla stessa del punto di coordinate  $x, y, z$ . Indichiamo poi con  $\pi_i$  le facce e con  $P_i$  i vertici dell'anzidetto tetraedro e consideriamo l'iperboloide (ortogonale) generato dalle coppie di piani fra loro perpendicolari che appartengono ai due fasci di assi  $\pi_0\pi_1$  e  $\pi_2\pi_3$ . Tali fasci hanno per equazioni

$$x_0 + \lambda x_1 = 0, \quad x_2 + \mu x_3 = 0;$$

affinchè i piani così rappresentati siano fra loro ortogonali i parametri  $\lambda, \mu$  devono soddisfare alle condizione seguente:

$$(\alpha_0 + \lambda\alpha_1)(\alpha_2 + \mu\alpha_3) + (\beta_0 + \lambda\beta_1)(\beta_2 + \mu\beta_3) + (\gamma_0 + \lambda\gamma_1)(\gamma_2 + \mu\gamma_3) = 0.$$

Emerge da ciò che l'equazione dell'anzidetto iperboloide è il risultato dell'eliminazione di  $\lambda$  e  $\mu$  fra le tre ultime equazioni scritte, onde è:

$$(2) \quad (\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_0)(\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2) + (\beta_0 x_1 - \beta_1 x_0)(\beta_2 x_3 - \beta_3 x_2) + (\gamma_0 x_1 - \gamma_1 x_0)(\gamma_2 x_3 - \gamma_3 x_2) = 0.$$

Altre due superficie analoghe si ottengono dalle altre due coppie di spigoli opposti del dato tetraedro; esse sono rappresentate come segue:

$$(3) \quad (\alpha_0 x_2 - \alpha_2 x_0)(\alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3) + (\beta_0 x_2 - \beta_2 x_0)(\beta_3 x_1 - \beta_1 x_3) + (\gamma_0 x_2 - \gamma_2 x_0)(\gamma_3 x_1 - \gamma_1 x_3) = 0$$

$$(4) \quad (\alpha_0 x_3 - \alpha_3 x_0)(\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) + (\beta_0 x_3 - \beta_3 x_0)(\beta_1 x_2 - \beta_2 x_1) + (\gamma_0 x_3 - \gamma_3 x_0)(\gamma_1 x_2 - \gamma_2 x_1) = 0.$$

Ora addizionando le tre equazioni (2), (3), (4) si ottiene l'identità  $0 = 0$ ; ciò prova che *le tre iperboloide da esse rappresentati formano fascio*; la base di questo è appunto la curva orto-tetraedrica. Ricordando che il primo degli anzidetti iperboloide è tagliato in un cerchio da ogni piano che sia perpendicolare all'asse di uno dei fasci di piani generatori, si giunge a concludere che *la curva orto-tetraedrica è tagliata in quattro punti conciclici da ogni piano che sia perpendicolare ad uno degli spigoli del dato tetraedro*.

Si ponga

$$(5) \quad \varrho_{ik} = \varrho_{ki} = \alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k;$$

sarà  $\varrho_{ik} = \cos(\pi_i \pi_k)$  e le (2), (3), (4) potranno scriversi:

$$(2') \quad \varrho_{02} x_1 x_3 - \varrho_{12} x_0 x_3 - \varrho_{03} x_1 x_2 + \varrho_{13} x_0 x_2 = 0$$

$$(3') \quad \varrho_{03} x_2 x_1 - \varrho_{23} x_0 x_1 - \varrho_{01} x_2 x_3 + \varrho_{21} x_0 x_3 = 0$$

$$(4') \quad \varrho_{01} x_3 x_2 - \varrho_{31} x_0 x_2 - \varrho_{02} x_3 x_1 + \varrho_{32} x_0 x_1 = 0;$$

ponendo poi

$$(6)$$

$$F_1 = \varrho_{01} x_2 x_3 + \varrho_{23} x_0 x_1, \quad F_2 = \varrho_{02} x_3 x_1 + \varrho_{31} x_0 x_2, \quad F_3 = \varrho_{03} x_1 x_2 + \varrho_{12} x_0 x_3$$

le stesse assumeranno la forma

$$(2'') \quad F_2 - F_3 = 0, \quad (3'') \quad F_3 - F_1 = 0, \quad (4'') \quad F_1 - F_2 = 0,$$

donde risulta la possibilità di rappresentare la curva orto-tetraedrica come segue:

$$(7) \quad F_1 = F_2 = F_3$$

I piani tangenti nel vertice  $P_0$  alle superficie (2'), (3'), (4') hanno per equazioni rispettive

$$\frac{x_2}{\varrho_{12}} = \frac{x_3}{\varrho_{13}}, \quad \frac{x_3}{\varrho_{23}} = \frac{x_1}{\varrho_{21}}, \quad \frac{x_1}{\varrho_{31}} = \frac{x_2}{\varrho_{32}},$$

onde la tangente in  $P_0$  alla detta curva è rappresentata come segue:

$$(8) \quad \varrho_{23} x_1 = \varrho_{31} x_2 = \varrho_{12} x_3$$

Similmente le sue tangenti negli altri tre vertici sono rappresentate nel seguente modo:

$$(9) \quad \varrho_{23} x_0 = \varrho_{30} x_2 = \varrho_{02} x_3$$

$$(10) \quad \varrho_{13} x_0 = \varrho_{30} x_1 = \varrho_{01} x_2$$

$$(11) \quad \varrho_{12} x_0 = \varrho_{20} x_1 = \varrho_{01} x_3$$

Per interpretare queste formole, conveniamo di chiamare *ortoraggio di un triedro* la retta secondo cui si tagliano i piani con-



dotti dagli spigoli alle facce risp. opposte; vedremo allora facilmente che la curva orto-tetraedrica è tangente nei vertici del dato tetraedro agli orto-raggi dei triedri che si possono comporre con le sue facce.

Siano

$$\frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{x_2}{\lambda_2} = \frac{x_3}{\lambda_3}$$

le equazioni dell'altezza del dato tetraedro uscente dal vertice  $P_0$ . Il piano  $\frac{x_1}{\lambda_1} - \frac{x_2}{\lambda_2} = 0$  essendo perpendicolare a  $x_0 = 0$ , dev'essere  $\frac{\varrho_{01}}{\lambda_1} - \frac{\varrho_{02}}{\lambda_2} = 0$ ; si vede similmente che si deve avere  $\frac{\varrho_{01}}{\lambda_1} = \frac{\varrho_{02}}{\lambda_2}$ , donde si desume che la detta altezza è rappresentata come segue:

$$(12) \quad \frac{x_1}{\varrho_{01}} = \frac{x_2}{\varrho_{02}} = \frac{x_3}{\varrho_{03}}.$$

Similmente si trova che le altre tre altezze del tetraedro hanno le seguenti rappresentazioni analitiche:

$$(13) \quad \frac{x_0}{\varrho_{10}} = \frac{x_2}{\varrho_{12}} = \frac{x_3}{\varrho_{13}}$$

$$(14) \quad \frac{x_0}{\varrho_{20}} = \frac{x_1}{\varrho_{21}} = \frac{x_3}{\varrho_{23}}$$

$$(15) \quad \frac{x_0}{\varrho_{30}} = \frac{x_1}{\varrho_{31}} = \frac{x_2}{\varrho_{32}}.$$

Queste rette generalmente parlando non passano per il medesimo punto; ciò accade se, posto

$$(16) \quad \sigma_1 = \varrho_{01} \varrho_{23}, \quad \sigma_2 = \varrho_{02} \varrho_{31}, \quad \sigma_3 = \varrho_{03} \varrho_{12},$$

si ha

$$(17) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3.$$

Si considerino tre delle altezze del tetraedro; esse determinano un iperboloide la cui equazione si ottiene considerando i fasci

(proiettivi) che proiettano da due di esse i punti della terza; si giunge così all'equazione seguente

$$(18) \quad F_1(\sigma_2 - \sigma_3) + F_2(\sigma_3 - \sigma_1) + F_3(\sigma_1 - \sigma_2) = 0,$$

la cui perfetta simmetria prova che le quattro altezze di un tetraedro appartengono al medesimo iperboloide. Se poi si scrive la (18) sotto la forma

$$\sigma_1(F_2 - F_3) + \sigma_2(F_3 - F_1) + \sigma_3(F_1 - F_2) = 0,$$

si vede che la curva orto-tetraedrica appartiene anche all'iperboloide contenente le quattro altezze del dato tetraedro.

Le equazioni (2'), (3'), (4'), (12), (13), (14), (15) provano ancora che la curva orto-tetraedrica passa per i piedi delle altezze del dato tetraedro.

L'altezza uscente dal vertice  $P_0$  e l'orto-raggio del relativo triedro determinano un piano di equazione

$$\varrho_{23}(\sigma_2 - \sigma_3)x_1 + \varrho_{31}(\sigma_3 - \sigma_1)x_2 + \varrho_{12}(\sigma_1 - \sigma_2)x_3 = 0;$$

ora questo è il piano che tocca in  $P_0$  la superficie (18), e però si ha un modo semplice per costruire i piani tangenti all'iperboloide delle quattro altezze nei vertici del tetraedro fondamentali. Tale risultato è tanto più notevole giacchè, applicando l'equazione data da Hesse e precedentemente riferita (p. 213), si può dimostrare che questi piani sono quelli che osculano la curva orto-tetraedrica nei vertici del tetraedro dato.

#### § 2. Le quartiche basi di fasci di quadriche rotonde <sup>1)</sup>.

Una quadrica di rotazione è bitangente al cerchio immaginario all'infinito (che indicheremo per brevità con  $K$ ); per ciò, se un fascio di quadriche consta tutto di superficie di rotazione <sup>2)</sup>, esso è tagliato dal piano all'infinito in un fascio di

<sup>1)</sup> Cfr. G. Loria, *Fasci di quadriche rotonde e curve cartesiane* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 17 Marzo 1918).

<sup>2)</sup> La finestra di Viviani, l'ippopeda di Eudosso e la ciclo-cilindrica di Roberval ci hanno già offerti degli esempi di curve dotate di tale proprietà.

coniche  $\Gamma$  tutte bitangenti a  $K$ . Ora se i punti di contatto delle curve  $\Gamma$  col circolo  $K$  fossero variabili, il fascio da esse costituito avrebbe  $K$  per inviluppo, mentre un fascio di curve non ammette inviluppo. In conseguenza le coniche  $\Gamma$  toccano  $K$  in due punti fissi e del fascio che esse formano fanno parte il cerchio  $K$ , la corda di contatto e le due tangenti a  $K$  negli estremi di tale corda. Emerge da ciò che se una quartica è base di un fascio di quadriche rotonde, essa è l'intersezione di una sfera con una quadrica di rotazione.

Tale condizione è, non solo necessaria, ma anche sufficiente affinché si verifichi la circostanza anzidetta; infatti una quadrica di rotazione rispetto al terzo asse di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali ha un'equazione della forma

$$(1) \quad x^2 + y^2 + az^2 + 2\beta z + \gamma = 0,$$

mentre l'equazione di una sfera è

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz - p = 0,$$

ove tutti i coefficienti si suppongono reali; per ciò tutte le quadriche del fascio così determinato si possono rappresentare con l'equazione

$$(3) \quad (\lambda + 1)(x^2 + y^2) + (\lambda a + 1)z^2 - 2ax - 2by + 2(\lambda\beta - c)z + (\lambda\gamma + p) = 0,$$

ove  $\lambda$  è un parametro, epperò sono effettivamente di rotazione; va soltanto escluso il caso  $\lambda = -1$  chè allora la (3) diviene

$$(4) \quad (1 - a)z^2 - 2ax - 2by - 2(\beta + c)z + (p - \gamma) = 0$$

la quale appartiene ad un cilindro parabolico. Concludiamo pertanto: Una sfera ed una quadrica di rotazione determinano un fascio di cui tutti gli elementi sono superficie di tale specie, eccezion fatta per un cilindro parabolico; i loro assi sono rette fra loro parallele.

Il discriminante  $D(\lambda)$  della (3) è dato da

$$D(\lambda) = (\lambda + 1)\{(\lambda + 1)[(a\lambda + 1)(\gamma\lambda + p) - (\lambda\beta - c)^2] - (a^2 + b^2)(a\lambda + 1)\},$$

mentre in esso il suddeterminante  $B(\lambda)$  del termine noto è espresso come segue:

$$B(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (a\lambda + 1);$$

emerge da ciò che: 1°  $D(\lambda)$  si annulla, oltrechè per il valore già considerato  $\lambda = -1$ , per altri tre, uno dei quali reali e gli altri due in generale distinti; 2° che l'equazione  $B(\lambda) = 0$  ha una sola radice, oltre alla doppia  $\lambda = -1$ ; dunque:

Per l'intersezione di una quadrica di rotazione con una sfera entrambe reali, passano in generale tre coni quadrici, uno dei quali ad equazione certamente reale, ed inoltre un solo paraboloide; nel caso considerato questo ha per equazione

$$(5) \quad (a - 1)(x^2 + y^2) - 2a(ax + by) - (\beta + ca)z + -2(a\gamma + p) = 0,$$

onde è ellittico.

Dal momento che nel fascio di quadriche che stiamo investigando si trovano sempre due coni le cui equazioni sono reali od immaginarie coniugate, noi potremo servircene per individuare il fascio stesso<sup>1)</sup>; i loro vertici sono reali od immaginari coniugati, il punto medio del segmento che essi limitano è pure sempre reale e noi lo assumeremo in seguito come origine delle coordinate; i loro assi sono rette reali od immaginarie coniugate di I specie, onde noi potremo assumere come asse  $Oz$  una retta ad essi parallela. Siccome è reale anche la congiungente dei vertici di quei due coni così essa determina con  $Oz$  un piano, nel quale fisseremo ad arbitrio l'asse delle  $x$ . In conseguenza i coni anzidetti potranno rappresentarsi mediante due equazioni del seguente tipo:

$$(6) \quad (x - a)^2 + y^2 = \frac{1}{\mu}(z - c)^2, \quad (x + a)^2 + y^2 = \frac{1}{\nu}(z + c)^2;$$

se tutte le costanti che entrano in queste equazioni sono reali i coni hanno vertici reali e se  $\mu$  e  $\nu$  sono positivi hanno infiniti punti reali; ma se sono immaginari coniugati tanto  $a$  e  $c$ , quanto  $\mu$  e  $\nu$  quei due coni sono immaginari coniugati. Tutte

1) Dell'intersezione di due coni rotondi ad assi paralleli si è occupato G. Monge nella sua *Géométrie descriptive* (n. 73).

le superficie del fascio determinato dalle superficie (6) sono rappresentate dall'equazione

$$(7) \quad (\mu + \nu)(x^2 + y^2) - (1 + \lambda)z^2 - 2a(\mu - \nu\lambda)x + 2c(1 - \lambda)z + a^2(\mu + \nu) - (1 + \lambda)c^2 = 0;$$

se le equazioni (6) sono a coefficienti reali, le superficie reali del fascio corrispondono a valori reali del parametro, nel caso opposto  $\lambda$  dev'essere della forma  $-\frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\lambda_1 - i\lambda_2}$ , con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reali.

Il centro  $C$  della superficie (7) ha per coordinate

$$(8) \quad x = a \frac{\mu - \nu\lambda}{\mu + \nu\lambda}, \quad y = 0, \quad z = c \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda},$$

onde, per gli anzidetti valori del parametro, sono sempre reali; il luogo geometrico del punto  $C$  è l'iperbole equilatera che sta nel piano  $xz$  ed ha per equazione

$$(9) \quad \left(x + \frac{\mu + \nu}{\mu - \nu}a\right)\left(z - \frac{\mu + \nu}{\mu - \nu}c\right) + \frac{4\mu\nu ac}{(\mu - \nu)^2} = 0.$$

Consideriamo alcuni elementi notevoli del fascio (7):

a) Per  $\lambda = -\frac{\mu}{\nu}$  l'or citata equazione diviene:

$$(10) \quad (\mu - \nu)z^2 - 2a(\mu + \nu)x + 2c(\mu - \nu)z - (\mu - \nu)c^2 = 0,$$

equazione sempre reale, che rappresenta un cilindro parabolico.

b) Il discriminante  $D(\lambda)$  della equazione (7) è dato da

$$(11) \quad D(\lambda) = 4\lambda(\mu + \nu\lambda)[(\mu + \nu\lambda)c^2 - a^2\mu\nu(1 + \lambda)].$$

L'equazione  $D(\lambda) = 0$ , biquadratica in  $\lambda$ , ha anzitutto per radici  $0, \infty, -\frac{\mu}{\nu}$  le quali corrispondono ai due coni ed al cilindro parabolico di cui già parliamo; la quarta radice vale  $-\frac{\mu(c^2 - a^2\nu)}{\nu(c^2 - a^2\mu)}$ , epperò è reale se tali sono i coni dati, mentre ha la forma  $-\frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\lambda_1 - i\lambda_2}$  se questi sono immaginari coniugati;

epperò in ogni caso il terzo cono del fascio ha un'equazione reale. Tenendo presente l'equazione (7) si vede che affinché esso contenga punti reali dev'essere positiva la quantità

$$\frac{\mu + \lambda\nu}{1 + \lambda} = \frac{a^2\mu\nu}{c^2};$$

ora questa è reale se  $a, c, \mu, \nu$  sono reali ed è positiva se  $\mu$  e  $\nu$  sono del medesimo segno; è pure reale e positiva se  $a$  e  $c$  sono quantità immaginarie pure e,  $\mu, \nu$  sono immaginarie coniugate. Ciò porta a concludere che la curva d'intersezione di due coni di rotazione ad assi paralleli giace sopra un terzo cono a punti reali, sia quando i dati coni sono entrambi a punti reali, sia quando sono ambedue soltanto ad equazioni reali, sia finalmente quando sono immaginari coniugati.

c) L'equazione (7) rappresenta una sfera solo quando il parametro  $\lambda$  soddisfa all'equazione

$$(\mu + \nu\lambda) + (\lambda + 1) = 0.$$

Da questa si trae

$$\lambda = -\frac{\mu + 1}{\nu + 1}$$

valore reale se tali sono  $\mu, \nu$ , invece della forma  $-\frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\lambda_1 - i\lambda_2}$ , se  $\mu$  e  $\nu$  sono numeri immaginari coniugati; in ogni caso, quindi l'equazione di quella sfera è a coefficienti reali e può scriversi come segue:

$$\left(x - a \frac{2\mu\nu + \mu + \nu}{\mu - \nu}\right)^2 + y^2 + \left(z + c \frac{\mu + \nu + 2}{\mu - \nu}\right)^2 = \frac{4\mu\nu(\mu + 1)(\nu + 1)}{(\mu - \nu)^2}a^2 + \frac{4(\mu + 1)(\nu + 1)}{(\mu - \nu)^2}c^2;$$

ora l'espressione che sta al secondo membro è palesemente positiva se  $a$  e  $c$  sono reali e  $\mu$  e  $\nu$  sono positive, ma lo è eziandio allorchè sono quantità immaginarie coniugate tanto  $a$  e  $c$ , quanto  $\mu$  e  $\nu$ . Emerge da ciò che la curva d'intersezione di due coni di rotazione ad assi paralleli si trova sopra una sfera a punti

reali tanto se quei due coni sono pure a punti reali, quanto se essi sono immaginari coniugati<sup>1)</sup>.

Combinando fra di loro le due ultime proposizioni si conclude che la curva d'intersezione di due coni di rotazione ad assi paralleli può riguardarsi come intersezione di una sfera e di un cono di rotazione entrambi a punti reali, tanto quando i due coni sono a punti reali, quanto se essi sono immaginari coniugati; nel primo caso la curva è digrammica, monogrammica nel secondo.

L'intersezione dei due coni (6) si proietta sul piano  $xy$  nella curva di equazione

$$\sqrt{\nu(x+a^2+y^2)} - \sqrt{\mu(x+a^2+y^2)} = 2c;$$

è questa una curva di quart'ordine, avente per cuspidi i punti ciclici del piano e per fuochi i punti dell'asse delle  $x$  le cui coordinate valgono

$$a, -a, \frac{\mu+\nu}{\mu-\nu}a - \frac{2c^2}{a} \frac{1}{\mu-\nu}^2)$$

Se i dati coni sono reali, tali sono anche questi fuochi, mentre se sono immaginari coniugati è reale soltanto il terzo fuoco; nel primo caso quella proiezione consta di una coppia di ovali cartesiane coniugate, mentre nel secondo è una curva cartesiana; ma poichè in entrambi i casi la curva obbiettiva è l'intersezione di una sfera reale con un cono pure reale, così la sua proiezione si può costruire applicando la procedura che la geometria descrittiva insegna per costruire l'intersezione di due superficie di rotazione ad assi paralleli.

### § 3. Le quartiche basi di fasci di paraboloidi.

La determinazione dei fasci costituiti di quadriche rotonde fa parte del problema della ricerca dei fasci di quadriche do-

<sup>1)</sup> La curva in questione è chiamata *cartesiana* dal Darboux (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, Paris, 1873, p. 54).

<sup>2)</sup> G. Loria, *Spec. Kurv.*, I Bd., p. 179-80.

tati di speciali proprietà metriche<sup>1)</sup>. Un nuovo caso di tale problema ha per intento la ricerca di un fascio tutto costituito da quadriche equilatera; è facile vedere che lo si risolve assumendo come elementi determinatori del fascio appunto due quadriche di tale specie<sup>2)</sup>. Meno agevole a trattarsi è il caso in cui si voglia un fascio costituito di paraboloidi. Per risolvere questo problema ricordiamo che il piano all'infinito taglia un fascio di quadriche in un fascio di coniche e che la sezione prodotta dallo stesso piano in un paraboloide consta di due rette (reali od immaginarie coniugate). Perciò, se un fascio di quadriche appartiene alla suindicata specie, la sua sezione col piano all'infinito sarà un fascio di rette accoppiate in involuzione; dunque tutte le superficie di un fascio di paraboloidi toccano nel medesimo punto il piano all'infinito, opperò i loro assi sono fra loro paralleli. Assunto come asse delle  $z$  una retta avente tale direzione, per determinare il fascio possono servire due equazioni del tipo seguente:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z + a_{00} = 0 \\ b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{01}x + 2b_{02}y + 2b_{03}z + b_{00} = 0, \end{cases}$$

ove supporremo i coefficienti  $a, b$ , reali. Si verifica subito che effettivamente tutte le superficie del fascio così determinato sono paraboloidi; per conseguenza i coefficienti  $a, b$  sono totalmente arbitrari.

L'equazione di una qualunque superficie del fascio essendo

$$(a_{11} + \lambda b_{11})x^2 + 2(a_{12} + \lambda b_{12})xy + (a_{22} + \lambda b_{22})y^2 + \dots + (a_{00} + \lambda b_{00}) = 0$$

<sup>1)</sup> Si osservi che, siccome in un fascio non esiste in generale alcuna quadrica rotonda, così il contenerne anche una sola rappresenta una particolarizzazione per la curva base.

<sup>2)</sup> Per convincersi di ciò basta ricordare che la condizione affinché la quadrica

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \dots = 0$$

sia equilatera è

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0.$$

il discriminante è dato da

$$(2) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} & 0 & a_{01} + \lambda b_{01} \\ a_{21} + \lambda b_{21} & a_{22} + \lambda b_{22} & 0 & a_{02} + \lambda b_{02} \\ 0 & 0 & 0 & a_{03} + \lambda b_{03} \\ a_{01} + \lambda b_{01} & a_{02} + \lambda b_{02} & a_{03} + \lambda b_{03} & a_{03} + \lambda b_{00} \end{vmatrix} =$$

$$-(a_{03} + \lambda b_{03})^2 \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} \\ a_{21} + \lambda b_{21} & a_{22} + \lambda b_{22} \end{vmatrix}$$

Emerge da ciò che nel fascio non esistono che tre quadriche singolari, una delle quali da contarsi due volte e che quindi la base del fascio stesso ha un punto doppio (è evidentemente il punto all'infinito dell'asse  $Oz$ ). L'equazione dell'ultima delle nominate quadriche singolari è il cilindro di equazione

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} & a_{03} \\ b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{01}x + 2b_{02}y + b_{00} & b_{03} \end{vmatrix} = 0,$$

la quale rappresenta anche la conica proiezione della quartica in esame sul piano  $xy$ . Le coordinate di un punto arbitrario di tale curva possono esprimersi in funzione razionale di un parametro; sostituendo tali espressioni in una delle (1) — che sono lineari in  $z$  — si giungerà ad un'analoga espressione della terza coordinata. Dall'espressione (2) risulta anche che tutte le quadriche del fascio sono della medesima specie se l'equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} \\ a_{21} + \lambda b_{21} & a_{22} + \lambda b_{22} \end{vmatrix} = 0$$

ha radici immaginarie, mentre, se ne ha di reali, il fascio contiene paraboloidi tanto ellittici quanto iperbolici.

Alla classe di curve di cui ragioniamo appartengono tre curve notevoli per le indagini a cui diede luogo la loro rettificazione: sono l'ellisse, l'iperbole e la parabola logaritmiche di J. Booth <sup>1)</sup>; esse possono definirsi come intersezioni del para-

<sup>1)</sup> A. *Treatise on some new geometrical Methods* (London, 1887, T. II, p. 51, 77 e 110). V. anche B. Tortolini, *Sopra la curvatura di alcune linee prodotte dall'intersezione di due superficie del secondo grado* (Annali di Mathe., T. V, 1863, p. 305-27).

boloide rotondo di equazione

$$(4) \quad x^2 + y^2 = 2kz$$

con uno dei cilindri quadrici

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 4h^2 + 4hx.$$

L'ellisse logaritmica appartiene non solo al cilindro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ma anche ai due, pure di 2° grado, rappresentati come segue:

$$y^2(a^2 - b^2) + 2kb^2z - a^2b^2 = 0,$$

$$x^2(b^2 - a^2) + 2ka^2z - a^2b^2 = 0,$$

donde emerge che, mentre la curva di cui si tratta si proietta sul piano  $xy$  in un'ellisse, si proietta in una parabola tanto sul piano  $yz$  quanto sul piano  $xz$ . È facile vedere che essa è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica:

$$(6) \quad x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi, \quad z = \frac{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}{2k}.$$

Considerazioni analoghe possono ripetersi riguardo all'iperbole logaritmica.

Per la parabola logaritmica passano invece soltanto due quadriche singolari; una è il cilindro parabolico

$$y^2 = 4h^2 + 9hx$$

da contarsi tre volte, l'altra è il cilindro, pure parabolico,

$$(x + 2h)^2 = 2kz;$$

donde emerge che la curva si proietta in una parabola tanto sul piano  $xy$  quanto sul piano  $xz$ . Come rappresentazione parametrica della curva può servire la seguente:

$$(7) \quad x = \frac{t^2 - 4h^2}{4h}, \quad y = t, \quad z = \frac{(t^2 + 4h^2)^2}{32h^2k};$$

se ne deduce essere

$$(8) \quad t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$$

la condizione di coplanarità dei quattro punti che corrispondono ai valori  $t_1, t_2, t_3, t_4$  del parametro  $t$ ; da essa emerge che per ogni punto della curva passa un unico osculatore e che la stessa possiede l'unico punto stazionario  $(-h, 0, \frac{q^2}{2k})$ .

Volendo stabilire le analoghe proprietà dell'ellisse logaritmica porremo

$$t = tg \frac{1}{2} \varphi;$$

allora le (6) diverranno

$$x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1+t^2}, \quad z = \frac{a^3(1-t^2)^2 + 2b^3t^2}{2k(1+t^2)^2}$$

e queste guidano alla seguente condizione di coplanarità:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 + t_1t_2t_4 + t_1t_2t_3;$$

ne consegue che sono stazionari i punti della curva che corrispondono ai valori  $0, \pm 1, \infty$  del parametro  $t$ , cioè i punti di coordinate

$$\left(a, 0, \frac{a^2}{2k}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{a^2}{4k}\right), \left(0, b, \frac{b^2}{2k}\right).$$

Cose analoghe sussistono per l'iperbole logaritmica.

La rettificazione delle curve del Booth dipende in generale da integrali ellittici.

#### § 4. Le quartiche basi di fasci di quadriche coassiali.

Due quadriche aventi comuni il centro e gli assi si possono rappresentare mediante due equazioni della forma

$$(1) \quad \begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2 + d_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2z^2 + d_2 = 0 \end{cases}$$

epperò determinano un fascio tutto costituito da superficie della medesima specie; la quartica che ne è base è evidentemente simmetrica rispetto ai piani coordinati. Tale curva si trova su un cono quadrico avente per centro l'origine e su tre cilindri di secondo ordine con le generatrici parallele a gli assi coordinati; emerge da ciò che essa si proietta ortogonalmente sui piani coordinati secondo tre coniche<sup>1)</sup>. Tale considerazione abilita anche a trovare la rappresentazione parametrica della curva mediante funzioni ellittiche, come ora mostreremo, avvertendo prima che non facciamo alcuna distinzione fra reale ed immaginario, per non dilungarci in una minuta enumerazione di casi.

Dalle (1) traesi:

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)y^2 + (d_1c_2 - d_2c_1) = 0,$$

la quale può sostituirsi con le due seguenti:

$$x = \sqrt{\frac{c_1d_2 - c_2d_1}{a_1c_2 - a_2c_1}} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\frac{c_1d_2 - c_2d_1}{b_1c_2 - b_2c_1}} \sin \varphi.$$

Sostituendo questi valori in una delle equazioni (1) se ne trae:

$$z^2 = \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1c_2 - a_2c_1} \left[ 1 - \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1)}{a_1d_2 - a_2d_1} \sin^2 \varphi \right].$$

Se quindi si pone:

$$k^2 = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1)}{a_1d_2 - a_2d_1}$$

$$\frac{c_1d_2 - c_2d_1}{a_1c_2 - a_2c_1} = l^2, \quad \frac{c_1d_2 - c_2d_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = m^2, \quad \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1c_2 - a_2c_1} = n^2,$$

$$\sin \varphi = sn(\omega, k) = sn \omega$$

<sup>1)</sup> La s'incontra in *La théorie et la pratique de la coupe des pierres* (Strassburg, 1737) del Frézier sotto il nome *ellipsimbre*, usato più tardi anche da J. de la Gournerie (*Recherches sur les surfaces tétraédrales symétriques*, Paris, 1867, p. 12). Ad essa si riferiscono le questioni 258 e 259 proposte da Strebler (W. Roberts) nelle *Nouvelles Annales de Mathématiques* (T. XI, 1852, p. 358) e risolte dal Gerlin (id., T. XII, 1853, p. 70-6).

si giungerà alle formole seguenti:

$$x = l \operatorname{sn} \omega, \quad y = m \operatorname{cn} \omega, \quad z = n \operatorname{dn} \omega,$$

le quali costituiscono la cercata rappresentazione parametrica della curva; lasciamo al lettore di applicarla alla ricerca delle proprietà della curva stessa ed anche di distinguere i vari casi che questa offre corrispondentemente ai segni ed ai valori relativi delle costanti  $a_1, \dots, d_2$ .

Alla indicata categoria di curve appartiene la curva rappresentata dalle due equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

di cui fu studiata e costruita la superficie centrale; è una superficie di 6° ordine avente un'equazione della seguente forma:

$$d^{10} x^2 y^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) - e^{10} x^2 z^2 \left( \frac{x^2}{g^2} + \frac{z^2}{i^2} - 1 \right) - f^{10} y^2 z^2 \left( -\frac{y^2}{h^2} + \frac{z^2}{k^2} - 1 \right) = 0^1.$$

§ 5. *Continuazione: le linee di curvatura delle quadriche a centro, la polodia di Poincaré e la curva L di una quadrica.*

Fra gli ellissimbri s'incontrano due categorie particolari che diedero origine a molteplici ricerche, onde ci corre l'obbligo di dirne qualche cosa.

I. La determinazione delle linee di curvatura dell'ellissoide fu fatta da Monge<sup>2)</sup> — al quale, come tutti sanno, devesi

1) Cfr. la memoria K. Böhmhändler, *Die Sehnenmittelpunktsfläche*, che illustra la Ser. XXX dei Modelli editi dalla casa Brill.

2) *Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde* (Journ. de l'Éc. Polyt. II, Ch., An. VI, p. 145-65, con bellissime figure illustrative); alcune osservazioni complementari vennero aggiunte da Dupin, *Développements de Géométrie* (Paris, 1813, p. 298-34). Cfr. anche la memoria di R. Diesel, *Die Krümmungslinien auf den Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung*, la quale serve per illustrare una parte della Ser. III dei Modelli della Casa Brill.

il concetto generale di linea di curvatura — con un procedimento sostanzialmente identico a quello che ora esporremo:

È noto che l'equazione differenziale delle linee di curvatura su una superficie  $z = f(x, y)$  qualunque può scriversi

$$(1) \quad y'^2 [(1+q^2)s - pqt] + y' [(1+q^2)r - (1+p^2)t] - [(1+p^2)s - pqr] = 0$$

ove

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ora se la superficie che si considera è l'ellissoide di equazione

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{ove } a < b < c,$$

si ha:

$$p = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad q = -\frac{c^2 y}{b^2 z}, \quad r = -\frac{a^4 (b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3},$$

$$s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3}, \quad t = -\frac{c^4 (a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3}.$$

Sostituendo questi valori nella (1) ed eliminando  $z$  mediante la (2) si trova:

$$(3) \quad A xy y'^2 + (x^2 - Ay^2 - B) y' - xy = 0$$

avendo posto per brevità

$$(4) \quad A = \frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)}, \quad B = \frac{a^2 (a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}.$$

La (3) è l'equazione differenziale delle proiezioni delle linee di curvatura dell'ellissoide sul piano  $xy$ ; per integrarla giova sottoporla ad una nuova differenziazione rispetto a  $x$ ; si trova così:

$$y'' (2Axy' + x^2 - Ay^2 - B) + (Ay'^2 + 1) (xy' - y) = 0.$$

Sostituendo qui al trinomio  $x^2 - Ay^2 - B$  il suo valore tratto dalla (3) si ottiene:

$$(Ay'^2 + 1)(xyy'' + xy'^2 - yy') = 0;$$

e poichè il binomio  $Ay'^2 + 1$  è sempre positivo, questa si semplifica e diviene

$$xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$$

ossia

$$\frac{y''}{y'} + \frac{\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{x} \right)}{\frac{y}{x}} = 0.$$

Questa è suscettibile di una prima integrazione, la quale dà

$$\log y' + \log \frac{y}{x} = \log \beta$$

(ove  $\beta$  è una costante arbitraria), ossia

$$yy' = \beta x;$$

integrando di nuovo si trova

$$(5) \quad y^2 = \beta x^2 + \gamma$$

( $\gamma$  essendo una nuova costante). Ma, essendo la (3) un'equazione differenziale di I ordine, il suo integrale generale non deve contenere più di una costante arbitraria, onde  $\beta$  e  $\gamma$  non sono fra loro indipendenti. Per determinare la relazione da cui esse sono legate scriviamo l'integrale (5) sotto la forma

$$(5) \quad \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1;$$

ne segue

$$y' = -\frac{nx}{my};$$

sostituendo questo valore nella (3) deve risultare un'identità e ciò esige si abbia

$$An + B = m$$

cioè, per le posizioni (4),

$$\frac{m(a^2 - c^2)}{a^2} - \frac{n(b^2 - c^2)}{b^2} = a^2 - b^2 \lambda;$$

questa è la relazione cercata. Notisi che essa è soddisfatta, qualunque sia  $\lambda$ , ponendo

$$m = \frac{a^2(a^2 + \lambda)}{a^2 - c^2}, \quad n = \frac{b^2(b^2 + \lambda)}{b^2 - c^2}.$$

Da tutto ciò si accoglie che le  $\infty'$  linee di curvatura dell'ellissoide (2) si proiettano sul piano  $xy$  nelle  $\infty'$  coniche (concentriche e coassiali) rappresentate al variare di  $\lambda$  dall'equazione

$$(6) \quad \frac{x^2}{a^2(a^2 + \lambda)} + \frac{y^2}{b^2(b^2 + \lambda)} = 1.$$

Ad analoghi risultati si perviene ragionando sopra un'iperboloide ad una o due falde; senza ripetere tutti i calcoli per tale superficie, mostreremo <sup>2)</sup> una conseguenza a cui essi guidano nel caso dell'iperboloide ad una falda

$$(7) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b).$$

Di tale superficie le generatrici dei due sistemi si possono rappresentare come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos u + \sin u \\ \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \sin u - \cos u \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos v - \sin v \\ \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \sin v + \cos v \end{array} \right.$$

1) Quest'equazione è soddisfatta da  $m = a^2$ ,  $n = b^2$ ; da ciò si deduce che le sezioni principali di una ellissoide sono speciali linee di curvatura il che è evidente per la definizione di tali linee.

2) Floquet, *Intégrations de l'équation d'Euler par les lignes de courbures de l'hyperboloïde réglé* (Nouv. Ann. de Math., II Sér., T. XIV, 1875, p. 120-27.



$u$  e  $v$  variando fra 0 e  $2\pi$ . Se ne trae la seguente rappresentazione parametrica della superficie (7):

$$(8) \quad x = a \frac{\cos \frac{u+v}{2}}{\sin \frac{u-v}{2}}, \quad y = b \frac{\sin \frac{u+v}{2}}{\cos \frac{u-v}{2}}, \quad z = c \frac{\cos \frac{u-v}{2}}{\sin \frac{u-v}{2}}.$$

Da ciò è facile dedurre che le linee di curvatura di quell'iperboloide nascono integrando la seguente equazione differenziale

$$\frac{du^2}{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + c^2} = \frac{dv^2}{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + c^2};$$

ora, se si pone

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

essa può scriversi

$$(9) \quad \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}},$$

che è la notissima equazione differenziale ellittica; servendosi del noto integrale algebrico di essa, si può trovare l'equazione finita delle linee di curvatura dell'iperboloide ad una falda.

II. Le classiche ricerche contenute nella memoria di Poincot *Théorie nouvelle de la rotation des corps* (Journ. de mathem. pures et appliquées, T. XVII, 1851) diedero origine a molteplici importanti ricerche<sup>1)</sup>, nelle quali le funzioni ellittiche rappresentano una parte importante<sup>2)</sup>. Ivi poi s'incontra una notevole curva, chiamata dal suo inventore *polhodie* (da  $\pi\acute{o}\lambda\omicron\varsigma$  = polo e  $\delta\delta\omicron\varsigma$  = cammino) che ha diritto ad un posto nell'opera presente. Geometricamente la si può definire come curva di con-

<sup>1)</sup> Cfr. W. Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, II Bd. (Leipzig, 1880, p. 421-44).

<sup>2)</sup> Halphen, *Théorie des fonctions elliptiques*, T. II, (Paris, Cap. I-III); Molk e Tannery, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, T. IV (Paris, 1902, p. 192).

tatto di un ellissoide con i suoi piani tangenti che toccano anche una sfera concentrica. Se l'ellissoide è rappresentato dall'equazione (2) e se  $r$  è il raggio della data sfera, se inoltre si ricorda che l'equazione del piano che tocca quell'ellissoide nel punto  $(x, y, z)$ , nelle coordinate correnti  $X, Y, Z$ , ha per equazione

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} - 1 = 0,$$

si vedrà che, per le condizioni indicate, deve aversi

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = r,$$

ossia

$$(10) \quad \frac{x^2}{\left(\frac{a^2}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b^2}{r}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{c^2}{r}\right)^2} = 1:$$

la polodia è, quindi rappresentata dalle due equazioni (2), (10), epperò è uno speciale ellissimbro. Per determinare la natura della specializzazione, notiamo anzitutto che affinché quella curva contenga punti reali dev'essere

$$(11) \quad a^2 > r^2 > c^2;$$

posto poi

$$(12) \quad \frac{a^2}{r} = \alpha, \quad \frac{b^2}{r} = \beta, \quad \frac{c^2}{r} = \gamma$$

la (10) diviene

$$(10') \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

donde emerge che affinché le equazioni (2), (10') rappresentino una polodia dev'essere

$$(13) \quad \frac{a^2}{\alpha} = \frac{b^2}{\beta} = \frac{c^2}{\gamma}.$$

Per giungere alla rappresentazione parametrica dei punti della curva in questione, osserviamo che la sua proiezione sul piano  $xy$  ha per equazione

$$\frac{r^2 (a^2 - c^2)}{a^4} x^2 + \frac{r^2 (b^2 - c^2)}{b^4} y^2 = r^2 - c^2;$$

a questa si soddisfa, qualunque sia l'angolo  $\varphi$ , ponendo

$$x = \frac{a^2}{r} \sqrt{\frac{r^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \cos \varphi, \quad y = \frac{b^2}{r} \sqrt{\frac{r^2 - c^2}{b^2 - c^2}} \sin \varphi.$$

Sostituendo questi valori nella (2) se ne trae

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{c^2 (a^2 - r^2)}{r^2 (a^2 - c^2)} \left\{ 1 - \frac{(a^2 - b^2) (r^2 - c^2)}{(a^2 - r^2) (b^2 - c^2)} \sin^2 \varphi \right\}.$$

Si ponga ora

$$k^2 = \frac{(a^2 - b^2) (r^2 - c^2)}{(a^2 - r^2) (b^2 - c^2)}$$

e si vedrà che  $k^2 < 1$  se  $r^2 > b^2$ ; all'angolo  $\varphi$  si sostituisca la variabile  $u$  definita dalla relazione

$$\varphi = am(u, k)$$

e si giungerà alle seguenti formole

$$(14) \quad x = \frac{a^2}{r} \sqrt{\frac{r^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \operatorname{cn} u, \quad y = \frac{b^2}{r} \sqrt{\frac{r^2 - c^2}{b^2 - c^2}} \operatorname{sn} u, \\ z = \frac{c^2}{r} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - c^2}} \operatorname{dn} u, \quad \text{per } r > b.$$

Proiettando, invece, la polodia sul piano  $yz$ , con analogo procedimento si vede che, posto

$$k_1^2 = \frac{(a^2 - r^2) (b^2 - c^2)}{(a^2 - b^2) (r^2 - c^2)},$$

risulta  $k_1^2 < 1$  se  $r^2 < b^2$  e si arriva all'altra rappresentazione parametrica

$$(15) \quad x = \frac{a^2}{r} \sqrt{\frac{r^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \operatorname{dn} u, \quad y = \frac{b^2}{r} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}} \operatorname{sn} u, \\ z = \frac{c^2}{r} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - c^2}} \operatorname{cn} u, \quad \text{per } r < b.$$

Le formole (14), (15) danno in ogni caso la rappresentazione parametrica della polodia col mezzo di funzioni ellittiche.

III. Proponiamoci <sup>1)</sup> di determinare su una quàdrica una curva  $L$  di la Gournerie, tale cioè che in ogni suo punto essa risulti tangente ad una sezione normale iperosculata ivi da un cerchio. L'equazione differenziale — la (XXXII) a pag. 28 — si semplifica perchè dal suo primo membro si stacca in tal caso come fattore il trinomio

$$ty'^2 + 2sy' + r$$

che eguagliato a 0 rappresenta le generatrici. Essa diviene in conseguenza:

$$[v(p^2 + q^2 + 1) - 3(ps + qt)]y' + [u(p^2 + q^2 + 1) - 3(pr + qs)] = 0.$$

Se la quàdrica considerata ha per equazione

$$(16) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c$$

la precedente diviene

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \frac{xdx}{a^2} + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \frac{ydy}{b^2} = 0$$

<sup>1)</sup> J. de la Gournerie, *Etude sur la courbure des surfaces* (Journ. de Math., T. XX, 1855, p. 145-57). Ivi sono anche determinate le curve  $L$  dell'elicoide conoide ed è dimostrato che le loro proiezioni ortogonali su un piano perpendicolare all'asse hanno equazioni polari del tipo

$$\rho = h \operatorname{senh} \frac{\omega}{\sqrt{3}}.$$

e questa s' integra subito e dà

$$(17) \quad \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \frac{x^2}{a^2} + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \frac{y^2}{b^2} = C,$$

$C$  essendo la costante introdotta dall' integrazione. Tenendo conto della precedente e ponendo

$$\frac{1-C}{c^2} = \frac{1}{k^2}$$

la (17) può surrogarsi con quest'altra

$$(17') \quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{k^2}.$$

Sulla data quadrica esistono quindi  $\infty'$  curve  $L$ ; sono le quarte di I specie rappresentate al variare di  $k$  dalle equazioni (16), (17'); affinché siano reali dev'essere  $\frac{1}{a} < k < \frac{1}{c}$ .

Ragionando in modo analogo sul paraboloido

$$(18) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = z$$

si trova che le linee  $L$  si ottengono su di esso tagliandolo con gli  $\infty'$  cilindri

$$(19) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C,$$

ove  $C$  è una costante positiva. Qualunque sia  $C$  la quartica rappresentata dalle equazioni (18), (19) è base di un fascio di paraboloidi, onde appartiene alla classe di linee a cui è dedicato il precedente § 2 (p. 233).

### § 6. Cicliche sferiche.

Seguendo Darboux <sup>1)</sup> si chiamano *cicliche sferiche* (o più brevemente *cicliche*) le quartiche di I specie situate su di una sfera.

<sup>1)</sup> Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques (Paris, 1873) p. 27.

È noto che una superficie sferica ammette due serie di generatrici rettilinee, che sono rette immaginarie di prima specie; due generatrici di sistemi opposti s' incontrano in un punto reale (della sfera) e stanno in un piano reale (che tocca la sfera); se una curva sferica è toccata da due generatrici della sfera di sistemi opposti, il punto ad esse comune si dice *fuoco* della curva; siccome, come vedemmo (p. 222), una quartica di I specie è tangente a quattro generatrici di ogni schiera rigata passante per la curva, così una ciclica è toccata da quattro generatrici di ogni sistema della sfera cui appartiene: dunque *una ciclica possiede in generale quattro fuochi*.

In virtù della sua definizione una ciclica si può rappresentare mediante due equazioni della seguente forma

$$(1) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 - d = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0;$$

ove i coefficienti sono tutti numeri reali; supporremo, come è lecito,  $a > b > c$  ed osserveremo che si è supposta a centro la quadrica contenente la ciclica perchè sappiamo che un fascio di paraboloidi non contiene alcuna sfera; essendo poi il raggio  $R$  della sfera considerata determinato dalla formola

$$(2) \quad R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta,$$

la sfera su cui si trova la data ciclica è reale od immaginaria secondochè  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \delta$ .

Il discriminante del fascio avente per base la ciclica è dato da

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a + \lambda & 0 & 0 & -\alpha\lambda \\ 0 & b + \lambda & 0 & -\beta\lambda \\ 0 & 0 & c + \lambda & -\gamma\lambda \\ -\alpha\lambda & -\beta\lambda & -\gamma\lambda & \delta\lambda - d \end{vmatrix}$$

$$= (\delta\lambda - d)(a + \lambda)(b + \lambda)(c + \lambda) -$$

$$\lambda^2 \{ \alpha^2(b + \lambda)(c + \lambda) + \beta^2(c + \lambda)(a + \lambda) + \gamma^2(a + \lambda)(b + \lambda) \}$$

e si osservi che il coefficiente di  $\lambda^4$  vale  $\delta - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = -R^2$ . Ora se in  $D(\lambda)$  noi sostituiamo a  $\lambda$  risp.

$$-\infty, -a, -b, -c, +\infty,$$

nel caso della sfera reale otteniamo risultati dei segni seguenti:

$$-, -, +, -, -,$$

onde l'equazione  $D(\lambda) = 0$  ha sempre almeno due radici reali; dunque: *una ciclica situata sopra una sfera reale sta sempre almeno su DUE coni quadrici reali*; nel caso invece in cui quella sfera abbia raggio immaginario le anzidette sostituzioni guidano alla seguente successione di segni:

$$+, -, +, -, +,$$

il che abilita a concludere che *una ciclica situata sopra una sfera immaginaria sta sempre su QUATTRO coni quadrici reali*<sup>1)</sup>. Avendo ora dimostrato che una ciclica sta sempre sopra un cono quadrico reale, siano autorizzati a supporre che nella prima delle equazioni (1) sia  $d = 0$ .

Siano  $P_0, P_1, P_2, P_3$  i vertici dei quattro coni del fascio avente per base la data ciclica; essi determinano un tetraedro auto-coniugato rispetto alla sfera che è sede della curva; in conseguenza  $P_1P_2P_3$  sarà il piano polare del vertice  $P_0$ , epperò perpendicolare alla retta congiungente di questo punto col centro  $C$  di detta sfera;  $P_0C$  è dunque un'altezza del sunnominato tetraedro; altrettanto accade delle rette  $P_1C, P_2C, P_3C$ : possiamo dunque affermare che *il tetraedro fondamentale di una ciclica ha per punto delle altezze il centro della sfera a cui appartiene la curva*; di esso sono reali almeno due vertici e due spigoli opposti.

I piani tangenti ad uno dei coni del fascio di quadriche determinato dalla ciclica tagliano la corrispondente sfera in cerchi bitangenti alla curva; questa può in conseguenza riguar-

<sup>1)</sup> Se uno dei coni quadrici passanti per una ciclica è di rotazione, la curva è base di un fascio di quadriche rotonde e, come già dicemmo, (p. 238), si chiama (pure secondo Darboux) *cartesiana*.

darsi come involuppo di tali cerchi: anzi, ciò è possibile in quattro modi differenti.

I cerchi situati nei piani tangenti al cono di vertice  $P_0$  sono tutti ortogonali a quello in cui la data sfera è tagliata dal piano  $P_1P_2P_3$ ; i centri sferici di quei cerchi si ottengono abbassando dal centro della stessa sfera le perpendicolari ai piani tangenti del cono  $P_0$ ; siccome tali perpendicolari costituiscono un nuovo cono quadrico supplementare al precedente, così il luogo dei detti centri sferici è l'intersezione della data sfera con un cono quadrico concentrico, epperò (v. il § seguente) è una conica sferica. Si conclude da ciò:

*Una ciclica sferica può riguardarsi in quattro modi diversi come involuppo degli  $\infty'$  cerchi di una sfera che sono ortogonali ad un cerchio fisso ed hanno per centri sferici i punti di una conica sferica.*

Se si assume per centro di un'inversione come polo il punto  $P_0$  e per potenza il quadrato della tangente condotta da esso alla data sfera, tanto questa quanto il cono di vertice  $P_0$  si mutano in sè stessi; ciò dimostra che *una ciclica è invariante rispetto a quattro inversioni* (è in quattro modi diversi « anallargmatica » per usare la nomenclatura di Moutard).

Se di un punto qualunque  $A$  dello spazio si determina il piano polare  $\alpha$  rispetto alla data sfera e se poi si fa un'arbitraria proiezione stereografica del cerchio  $\Gamma$  d'intersezione, si ottiene una rappresentazione univoca dei punti dello spazio sopra gli  $\infty^3$  cerchi del piano<sup>1)</sup>. E se  $A$  descrive una conica tutti gli analoghi cerchi  $\Gamma$  involuppano una ciclica, la cui proiezione stereografica è una curva piana involuppo di cerchi, cioè una ciclica piana: donde un procedimento per studiare tali curve col mezzo di considerazioni stereometriche<sup>2)</sup>.

Un risultato generale precedentemente stabilito (v. p. 209) mostra che *se una retta si muove nello spazio col vincolo di*

<sup>1)</sup> J. Thomae, *Das ebene Kreisssystem und seine Abbildung auf den Raum* (Zeitsch. f. Math u. Phys., T. XXIX, 1894, p. 284-304).

<sup>2)</sup> E. Czuber, *Die sphärische Curve vierter Ordnung als Einhüllende von Kreischaaren* (Arch. f. Math. u. Phys. II Ser., T. VII, 1888, p. 143-164).

toccare costantemente una sfera ed incontrare due rette fisse, il luogo dei punti di contatto è una ciclica sferica <sup>1)</sup>. — Un'altra genesi delle stesse curve è espressa dal seguente

TEOREMA DI LAGUERRE <sup>2)</sup>. Il luogo geometrico dei punti di una sfera con i suoi piani tangenti che toccano anche una conica data ad arbitrio, è una ciclica.

Chiamisi infatti  $\Sigma$  la sfera e  $\Gamma$  la conica considerate,  $t$  una qualunque tangente di questa curva e  $s$  la polare reciproca di  $t$  rispetto a  $\Sigma$ ; è chiaro che i punti in cui  $s$  taglia  $\Sigma$  appartengono alla linea di cui parla il teorema di Laguerre. Ora, al variare della tangente  $t$ , la retta  $s$  descrive un cono quádrico avente per vertice il polo rispetto a  $\Sigma$  del piano della conica  $\Gamma$ ; ciò prova che detta linea è l'intersezione di  $\Sigma$  con questo cono, epperò è una ciclica c. d. d.

Di questa la rappresentazione analitica può ottenersi come segue: La sfera  $\Sigma$  abbia per equazione

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

mentre la conica  $\Gamma$  sia determinata dalle due equazioni

$$(4) \quad \xi x + \eta y + \zeta z - \omega = 0, \quad (5) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

Notiamo anzitutto che affinché il piano

$$ux + vy + wz = 0$$

tocchi il cono (5) è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente:

$$\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = 0;$$

emerge da ciò che, affinché il piano

$$(r^2\xi + \omega x)X + (r^2\eta + \omega y)Y + (r^2\zeta + \omega z)Z = 0$$

<sup>1)</sup> Tale curva fu per la prima volta incontrata studiando la conoide circoscritta alla sfera.

<sup>2)</sup> *Sur les courbes resultantes de l'intersection d'une sphère avec une surface du second degré* (Bull. Soc. phil. 1867) e *Sur la biquadratique sphérique et sur la déterminatica du plan osculateur en un point de cette courbe* (Bull. Soc. math. de France, 1873, oppure *Oeuvres de Laguerre*, T. II, Paris, 1905, p. 32 e 347).

(ove  $X, Y, Z$  sono coordinate correnti), il quale proietta dall'origine l'intersezione dal piano (4) della conica con il piano

$$xX + yY + zZ - r^2 = 0$$

tangente alla data sfera nel punto  $(x, y, z)$ , deve essere

$$(5) \quad \frac{(r^2\xi + \omega x)^2}{a} + \frac{(r^2\eta + \omega y)^2}{b} + \frac{(r^2\zeta + \omega z)^2}{c} = 0.$$

Ora questa equazione, insieme alla (3) rappresenta il luogo geometrico dei punti di contatto dei piani tangenti dei quali parla il teorema; e siccome la (5) rappresenta una quádrica, così questo resta nuovamente dimostrato.

Il piano (4) della conica  $\Gamma$  taglia la sfera  $\Sigma$  secondo una circonferenza  $K$ ; se esiste un quadrilatero  $ABCD$  inscritto in  $K$  e circoscritto a  $\Gamma$ , ne esisteranno notoriamente infiniti; allora la ciclica si specializza e porta il nome di curva *cassiniana* <sup>1)</sup>, potendosi definire come luogo dei punti  $M$  caratterizzati dalla proprietà

$$\frac{MB \cdot MC}{MB \cdot MD} = \text{cost.}^2$$

### § 7. Coniche sferiche.

Le curve di cui stiamo per occuparci rientrano nella classe delle cicliche, ma fecero il loro ingresso nella scienza come risoltrici della seguente questione, la quale fu suggerita a N. Fuss <sup>3)</sup> da una notissima proprietà delle sezioni coniche:

Problema. *Dati in una sfera due punti fissi A, B determinare il luogo geometrico dei punti M della stessa superficie tali*

<sup>1)</sup> Laguerre, *Sur les cassiniennes planes et sphériques* (Bull. Soc. phil. 1868, oppure *Oeuvres de Laguerre*, T. II, Paris, 1905, p. 46).

<sup>2)</sup> Per altre proprietà delle cicliche, v. G. Humbert, *Sur les surfaces cycloïdes* (Journ. de l'Ec. Pol., LV cah., 1888).

<sup>3)</sup> *Problematum quorundam sphaericorum solutio* (Acta Acad. Petrop., T. II, 1787) e *De proprietatibus quibusdam ellipsis in superficie sphaerica descriptas* (Id., T. III, 1788).

che la somma degli archi  $MA, MB$  sia eguale ad un arco dato  $2c$ . Prima di risolverlo osserviamo che la proprietà  $MA + MB = 2c$  induce a chiamare la curva cercata *ellisse sferica*; ma, detto  $B'$  il punto della sfera diametralmente opposta a  $B$ , si ha  $MA + MB = MA + \pi - B'M$ , onde  $MA - MB' = 2c - \pi$ , epperò la curva può, con pari ragione chiamarsi *iperbole sferica*; meglio è usare la locuzione *conica sferica*, di cui noi ci serviremo.

Per risolvere l'enunciato problema assumiamo come origine delle coordinate il centro  $O$  della data sfera, come asse delle  $z$  la congiungente di  $O$  col centro  $N$  dell'arco  $AB = 2d$  e come asse delle  $x$  la perpendicolare condotta dal punto  $O$  alla retta  $ON$  nel piano  $OAB$ . Detto  $\varphi$  l'arco  $NM$  e  $\theta$  l'angolo che formano fra loro i cerchi massimi  $NA$  e  $NM$ , una duplice applicazione del teorema del coseno della trigonometria sferica guida alle due relazioni:

$$\begin{aligned}\cos MA &= \cos \theta \cdot \cos d + \sin \theta \cdot \sin d \cdot \cos \varphi \\ \cos MB &= \cos \theta \cdot \cos d - \sin \theta \cdot \sin d \cdot \cos \varphi.\end{aligned}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned}\cos \theta \cdot \cos d &= \frac{\cos MA + \cos MB}{2} = \cos \frac{MA + MB}{2} \cos \frac{MA - MB}{2}, \\ \sin \theta \cdot \sin d \cdot \cos \varphi &= \frac{\cos MA - \cos MB}{2} = \\ &= -\sin \frac{MA + MB}{2} \sin \frac{MA - MB}{2};\end{aligned}$$

e poichè per ipotesi  $MA + MB = 2c$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\cos \theta \cdot \cos d}{\cos c} &= \cos \frac{MA - MB}{2}, \\ \frac{\sin \theta \cdot \sin d \cdot \cos \varphi}{\sin c} &= -\sin \frac{MA - MB}{2}.\end{aligned}$$

Quadrando e sommando se ne trae

$$(1) \quad \frac{\cos^2 \theta \cdot \cos^2 d}{\cos^2 c} + \frac{\sin^2 \theta \cdot \sin^2 d \cdot \cos^2 \varphi}{\sin^2 c} = 1;$$

e questa è l'equazione della curva cercata nelle coordinate sferiche  $\theta$  e  $\varphi$ <sup>1)</sup>.

Per semplificare questo risultato indichiamo con  $b$  il valore di  $\theta$  che corrisponde a  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ; in virtù della (1) sarà

$$\frac{\cos^2 b \cdot \cos^2 d}{\cos^2 c} = 1$$

epperò la (1), previa eliminazione di  $d$ , diviene:

$$(2) \quad \sin^2 \theta \left\{ \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 b} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 c} \right\} = 1.$$

Ma se  $a$  è il raggio della data sfera si ha

$$x = a \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad y = a \sin \theta \cdot \cos \varphi,$$

epperò la (2) si scrive

$$(3) \quad \frac{x^2}{\sin^2 b} + \frac{y^2}{\sin^2 c} = a^2.$$

Ciò prova che la curva in questione è l'intersezione della data sfera

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

col cilindro rappresentato dall'equazione (3); è dunque la quartica sferica di I specie che si proietta sul piano  $xy$  secondo l'ellisse (3). Dalle (3), (4) si trae:

$$\frac{x^2}{\sin^2 b} + \frac{y^2}{\sin^2 c} = x^2 + y^2 + z^2$$

ossia

$$(5) \quad \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 b} + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 c} = z^2,$$

<sup>1)</sup> Nel caso  $c = \frac{\pi}{2}$  cioè  $MA + MB = \pi$ , la (1) diviene  $\cos \theta = 0$  e dà  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; la curva è allora un cerchio massimo, caso che escluderemo costantemente in seguito.

onde la curva in questione può anche definirsi come intersezione della sfera (4) e del cono (5) aventi il medesimo centro. Eliminando fra le equazioni (4) e (5) la  $x$  o la  $y$  si trovano queste altre

$$(6) \quad y^2 \left\{ \frac{1}{\text{sen}^2 c} - \frac{1}{\text{sen}^2 b} \right\} - \frac{z^2}{\text{sen}^2 b} + \frac{a^2}{\text{tg}^2 b} = 0$$

$$(7) \quad x^2 \left\{ \frac{1}{\text{sen}^2 b} - \frac{1}{\text{sen}^2 a} \right\} - \frac{z^2}{\text{sen}^2 c} + \frac{a^2}{\text{tg}^2 c} = 0,$$

le quali provano che la curva considerata si proietta sui piani  $xz$  e  $yz$  secondo due coniche a centro, una ellisse e l'altra iperbole; resta in pari tempo stabilito che per una conica sferica passano quattro quadriche singolari sempre reali, di cui una è un cono e le altre sono cilindri.

La quadratura e la rettificazione delle coniche sferiche diedero materia a dotti ed eleganti sviluppi analitici su cui non possiamo dilungarci<sup>1)</sup>. Osserviamo piuttosto che una nuova genesi delle coniche sferiche è corollario del seguente:

**TEOREMA DI MAC CULLAGH.** *Se due spigoli di un triedro trirettangolo di vertice fisso percorrono due piani passanti per questo, il terzo spigolo descrive un cono quadrico le cui sezioni circolari sono in piani paralleli ai dati piani<sup>2)</sup>;*

Essa, infatti, porta a concludere che se di un triangolo sferico trirettangolo due vertici percorrono due dati cerchi massimi, il terzo descriverà in generale una conica sferica.

Per dimostrare quella proposizione supponiamo che i coseni

<sup>1)</sup> J. Booth, *Réctification et quadrature d'une ellipse sphérique* (Nouv. Ann. de Math., T. XIII, 1854, p. 94-113; v. anche il T. II del *Treatise on some new geom. methods*, London, 1877); B. Tortolini, *Sopra la rettificazione dell'ellissi sferica e sulla divisione dei suoi archi* (Giornale arcadico 1846); Gudermann, *De curva quarti ordinis sphaerica* (J. f. die r. u. a. Mathem., T. XLIII, 1852, p. 93-113).

<sup>2)</sup> Cfr. Cayley, *Mathem. Papers*, T. IV, p. 424.

direttori degli spigoli del triedro considerato costituiscano il determinante ortogonale

$$\begin{array}{ccc} a & \beta & \gamma \\ a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{array}$$

e che le equazioni dei dati piani siano

$$l_1 x + m_1 y + n_1 z = 0, \quad l_2 x + m_2 y + n_2 z = 0;$$

sarà in conseguenza

$$\begin{cases} l_1 a_1 + m_1 \beta_1 + n_1 \gamma_1 = 0 \\ a a_1 + \beta \beta_1 + \gamma \gamma_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_2 a_2 + m_2 \beta_2 + n_2 \gamma_2 = 0 \\ a a_2 + \beta \beta_2 + \gamma \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

epperò:

$$a_1, \beta_1, \gamma_1 \equiv \left\| \begin{array}{ccc} l_1 & m_1 & n_1 \\ a & \beta & \gamma \end{array} \right\|, \quad a_2, \beta_2, \gamma_2 \equiv \left\| \begin{array}{ccc} l_2 & m_2 & n_2 \\ a & \beta & \gamma \end{array} \right\|;$$

e siccome è anche

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \\ a^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \end{aligned}$$

si conclude

$$\left| \begin{array}{cc} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 & l_1 a + m_1 \beta + n_1 \gamma \\ l_2 a + m_2 \beta + n_2 \gamma & 1 \end{array} \right| = 0;$$

ma se  $x, y, z$  sono le coordinate di un punto arbitrario dello spigolo libero del triedro si ha

$$a \equiv \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \beta \equiv \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \gamma \equiv \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

perciò la precedente equazione si muta in quest'altra

(8)

$$(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) (x^2 + y^2 + z^2) - (l_1 x + m_1 y + n_1 z) (l_2 x + m_2 y + n_2 z) = 0,$$

la quale mostra che il luogo geometrico di quello spigolo è in generale un cono quadrico; soltanto quando i due piani dati

siano fra loro ortogonali esso si spezza nei piani stessi. Se in particolare  $l_2 = m_2 = 0$  la (8) diviene

$$n_1(x^2 + y^2 + z^2) - (l_1x + m_1y + n_1z)z = 0;$$

ora se ivi si suppone  $z = \text{cost.}$  si ha l'equazione di una circonferenza; da ciò l'ultima parte dell'enunciato teorema.

Siccome una conica sferica è una quartica di I specie, così le coordinate di un suo punto qualunque si potranno esprimere mediante funzioni ellittiche di un parametro. Per ottenere le formole in parola <sup>1)</sup>, consideriamo l'intersezione delle due superficie

$$(9) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

ove supporremo, come è lecito  $a > b$ . Poniamo

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \text{sen } \alpha, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \text{cos } \alpha, \quad \frac{a}{c} = \text{tg } \alpha;$$

inoltre

$$\frac{b^2}{a^2 + c^2} = \text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \varepsilon;$$

sarà quindi  $\varepsilon < \alpha$  e

$$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}} = \text{sen } \varepsilon, \quad \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}} = \text{cos } \varepsilon, \quad \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}} = \text{tg } \varepsilon.$$

se ne deduce che la proiezione della curva (9) sul piano  $xy$  ha per equazione

$$\left(\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \alpha}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\text{cos } \varepsilon}{\text{cos } \alpha}\right)^2 z^2 = 1$$

ond'è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica:

$$(10) \quad x = \frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \varphi}{\text{sen } \varepsilon}, \quad y = \frac{\text{cos } \alpha \cdot \text{cos } \varphi}{\text{cos } \varepsilon}.$$

<sup>1)</sup> G. Huber, *Ueber dem sphärischen Kegelschnitte und seine abwickelbare Tangentensfläche* (Zeitsch. f. Math. u. Phys., T. XLV, 1900, p. 86-118): ivi molte applicazioni delle formole che stiamo per esporre.

Sostituendo questi valori nelle (9) si ottiene

$$(10) \quad z = \frac{1}{\text{sen } \varepsilon \text{ cos } \varepsilon} \sqrt{\text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \varepsilon} \sqrt{\text{sen}^2 \varepsilon - \text{sen}^2 \varphi}.$$

Le (10) porgono una prima rappresentazione parametrica della curva. Pongasi  $k = \text{sen } \varepsilon$ , sarà  $k' = \sqrt{1 - k^2} = \text{cos } \varepsilon$ ; ora, assumendo  $k$  per modulo di un sistema di funzioni ellittiche jacobiane, porremo  $\text{sen } \varphi = k \text{ sn } u$ ; verrà  $\text{cos } \varphi = \text{dn } u$ ,  $\sqrt{\text{sen}^2 \varepsilon - \text{sen}^2 \varphi} = k \text{ cn } u$ , epperò le (10) diverranno:

$$(11) \quad x = \text{sen } \alpha_1 \text{ sn } u, \quad y = \frac{\sqrt{\text{sen}^2 \alpha - k^2}}{k'} \text{ cn } u, \quad z = \frac{\text{cos } \alpha}{k'} \text{ dn } u$$

le quali sono le formole cercate. Introducendo le funzioni  $\Theta, H$  <sup>1)</sup> si può scrivere invece

(11')

$$x = \frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad y = \frac{\sqrt{\text{cn}^2 \alpha - k^2}}{\sqrt{k} \sqrt{k'}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \quad z = \frac{\text{cos } \alpha}{\sqrt{k'}} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}$$

o, se si preferiscono le funzioni  $\vartheta$  <sup>2)</sup>,

(11'')

$$x = \frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta(u)}, \quad y = \frac{\sqrt{\text{cn}^2 \alpha - k^2}}{\sqrt{k} \sqrt{k'}} \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta(u)}, \quad z = \frac{\text{cos } \alpha}{\sqrt{k'}} \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta(u)}.$$

Se ne deduce come condizione di complanarità dei punti determinati dai valori  $a, b, c, d$  del parametro:

$$a + b + c + d \equiv 0 \pmod{4K''4iK'}.$$

Le coniche sferiche godono di molte prerogative analoghe alle proprietà focali delle sezioni coniche e che si rendono manifeste investigando le relazioni che intercedono fra quelle curve ed il cerchio immaginario all'infinito; la loro scoperta risale a

<sup>1)</sup> Cfr. Jacobi, *Ges. Werke*, I Bd. (Berlin, 1881), p. 225.

<sup>2)</sup> Id., p. 512.



M. Chasles<sup>1)</sup>, la loro prima dimostrazione a L. Cremona<sup>2)</sup>. Seguendo l'esempio dato da questo geometra designamo con  $x, y, z$  tre numeri proporzionali alle coordinate cartesiane ortogonali di un punto di una sfera<sup>3)</sup>; allora per tutti i punti di una conica sferica sussisterà una relazione della forma seguente:

$$(12) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta yz + 2\varepsilon zx + 2\varphi xy = 0;$$

se in particolare si tratta di un cerchio minore si avrà una equazione del tipo

$$(13) \quad \lambda(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = 0;$$

ai valori 0 e  $\infty$  del parametro  $\lambda$  corrispondono i cerchi massimi della sfera ed il cerchio immaginario all'infinito  $K$

$$(14) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Il centro sferico del circolo (13) ha coordinate soddisfacenti alla relazione

$$(15) \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c};$$

esso è quindi il polo rispetto al cerchio (14) del cerchio massimo

$$(16) \quad ax + by + cz = 0.$$

Un punto arbitrario  $(X, Y, Z)$  della sfera ha un cerchio massimo polare rispetto a  $K$  ed uno rispetto alla data conica sferica; le loro equazioni sono risp.:

$$Xx + Yy + Zz = 0$$

$$(\alpha X + \varphi Y + \varepsilon Z)x + (\varphi X + \beta Y + \delta Z)y + (\varepsilon X + \delta Y + \gamma Z)z = 0,$$

<sup>1)</sup> *Resumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales*, (C. B., T. L., 1860, p. 623-33).

<sup>2)</sup> *Sur les coniques sphériques* (Nouv. Ann. de Mathém., T. XIX, 1860, 269-79, oppure Opere matematiche, T. I, Milano, 1915, p. 116-24).

<sup>3)</sup> Avvertiamo una volta per tutte che su questa superficie si trovano tutte le figure che considereremo nel resto del presente §.

epperò coincidono se esiste un valore di  $\varrho$  tale che sia:

$$\alpha X + \varphi Y + \varepsilon Z = \varrho X$$

$$\varphi X + \beta Y + \delta Z = \varrho Y$$

$$\varepsilon X + \delta Y + \gamma Z = \varrho Z.$$

ora da queste, eliminando le coordinate  $X, Y, Z$ , si trova

$$\begin{vmatrix} \alpha - \varrho & \varphi & \varepsilon \\ \varphi & \beta - \varrho & \delta \\ \varepsilon & \delta & \gamma - \varrho \end{vmatrix} = 0;$$

è questa un'equazione cubica in  $\varrho$  alle cui radici corrispondono tre punti della sfera costituenti un triangolo sferico trirettangolo autoconiugato rispetto alla data conica sferica; si chiamano *centri* di questa curva perchè, quando gli assi coordinati passano per essi, la (12) assume la forma canonica

$$(12') \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0;$$

donde emerge che ogni circolo massimo passante per un vertice dell'anzidetto triangolo incontra la conica sferica in due punti simmetrici rispetto al vertice stesso.

Affinchè la curva rappresentata dall'equazione (12') contenga punti reali, le costanti  $\alpha, \beta, \gamma$  devono essere non tutte del medesimo segno; per fissare le idee e come è sempre lecito supporremo

$$(17) \quad \alpha > \beta > 0, \quad \gamma < 0;$$

porremo poi

$$(18) \quad \frac{\gamma}{\alpha} = -tg^2 \theta$$

ed avremo

$$(18') \quad \cos 2\theta = \frac{\alpha + \gamma}{\alpha - \gamma}, \quad \text{sen}^2 2\theta = -\frac{4\alpha\gamma}{(\alpha - \gamma)^2}.$$

I punti comuni alle curve (12') e (14) sono vertici di un

quadrangolo sferico completo, i cui lati sono a coppie rappresentati come segue:

$$(19) \quad \begin{cases} (\alpha - \beta) y^2 + (\alpha - \gamma) z^2 = 0 \\ (\alpha - \beta) x^2 - (\beta - \gamma) z^2 = 0 \\ (\alpha - \gamma) x^2 + (\beta - \gamma) y^2 = 0; \end{cases}$$

di essi due soltanto sono reali, quelli rappresentati dall'equazione intermedia, epperò sono separatamente rappresentate come segue:

$$(20) \quad x\sqrt{\alpha - \beta} \pm z\sqrt{\beta - \gamma} = 0;$$

si chiamano *linee cicliche* della conica sferica ed *omocicliche* si chiamano le coniche sferiche seganti nei medesimi punti il cerchio immaginario all'infinito.

Il cerchio massimo rappresentato dall'equazione (16) tocca la curva (12') se sussiste la relazione

$$(21) \quad \frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} = 0;$$

detti  $\omega$  e  $\omega'$  gli angoli che esso forma con quelli rappresentati dalle equazioni (20) si trova, tenendo conto della (21),

$$(22) \quad \left. \begin{array}{l} \cos \omega \\ \cos \omega' \end{array} \right\} = \frac{a\sqrt{\alpha - \beta} \pm c\sqrt{\beta - \gamma}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\alpha - \gamma}}.$$

Se ne trae

$$\cos^2 \omega + \cos^2 \omega' = 2 \frac{a^2(\alpha - \beta) + c^2(\beta - \gamma)}{(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha - \gamma)}$$

e ricordando le (18')

$$\cos^2 \omega + \cos^2 \omega' - 2 \cos \omega \cdot \cos \omega' \cdot \cos 2\theta = - \frac{4\alpha\gamma}{(\alpha - \gamma)^2}$$

cioè

$$\cos^2 \omega + \cos^2 \omega' - 2 \cos \omega \cdot \cos \omega' \cdot \cos 2\theta = \sin^2 2\theta.$$

Ora questa si trasforma agevolmente nell'altra

$$\cos(\omega \pm \omega') = \cos 2\theta.$$

Si conclude quindi

$$\omega \pm \omega' = 2\theta = \text{cost.}$$

cioè: l'area del triangolo formato da un cerchio massimo tangente ad una conica sferica con le linee cicliche della stessa è di area costante.

Cerchiamo le tangenti comuni alle coniche (12') e (14); a tale scopo si può cominciare dal considerare i punti comuni alle due curve reciproche

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

ora queste hanno due sole corde reali comuni, cioè quelle di equazioni

$$\sqrt{\gamma(\beta - \alpha)} y \pm \sqrt{\beta(\alpha - \gamma)} z = 0;$$

i loro poli rispetto al cerchio  $K$  hanno per coordinate

$$(23) \quad x = 0, \quad \frac{y}{\sqrt{\gamma(\beta - \alpha)}} = \pm \frac{z}{\sqrt{\beta(\alpha - \gamma)}}$$

e sono gli unici vertici reali del quadrilatero completo avente per lati i cerchi massimi tangenti simultaneamente alle coniche (12') (14). Quei vertici si chiamano *fuochi* della conica sferica e diconsi *omofocali* tutte le coniche inscritte nello stesso quadrilatero circoscritto al cerchio immaginario all'infinito.

Da quanto si espose emerge che la teoria delle coniche sferiche  $\left\{ \begin{array}{l} \text{omocicliche} \\ \text{omofocali} \end{array} \right\}$  non differisce in fondo da quella  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dei fasci} \\ \text{delle schiere} \end{array} \right\}$  di coniche: è un'osservazione importante che si può applicare alla dimostrazione dei teoremi enunciati da Chasles, come ora mostreremo su qualche esempio.

Le equazioni

$$A \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$A' \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda'(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

rappresentano due coniche sferiche omocicliche; sia  $U = 0$  la equazione di una terza conica sferica; allora le equazioni

$$B \equiv U + \mu A = 0, \quad B' \equiv U + \mu' A' = 0,$$

rappresentano due nuove coniche sferiche circoscritte la prima al quadrangolo  $[UA]$ <sup>1)</sup> e la seconda al quadrangolo  $[UA']$ . Ora da queste si trae:

$$B - B' = \mu A - \mu' A'$$

$$\mu' B - \mu B' = (\mu' - \mu) U + (\lambda - \lambda') \mu \mu' (x^2 + y^2 + z^2);$$

per conseguenza l'equazione  $B - B' = 0$  rappresenta una conica sferica circoscritta al quadrangolo  $[BB']$  ed omociclica alle curve  $A = 0$ ,  $A' = 0$ , mentre  $\mu' B - \mu B' = 0$  ne rappresenta una analoga omociclica alla  $U = 0$ . Dunque: *Date due coniche sferiche omocicliche  $A$ ,  $A'$  ed una terza arbitraria  $U$ , se ai quadrangoli  $[UA]$ ,  $[UA']$  si circoscrivono due coniche sferiche qualunque  $B$ ,  $B'$ , il quadrangolo  $[BB']$  sarà circoscritto tanto ad una conica omociclica alle due  $A$ ,  $A'$  quanto ad una omociclica a  $U$ .*

Si considerino ora le due coniche sferiche

$$B \equiv U + \mu A = 0, \quad \bar{B} \equiv U + \mu \bar{A};$$

essendo

$$B - \bar{B} = \mu(A - \bar{A}) = \mu(\lambda - \bar{\lambda})(x^2 + y^2 + z^2)$$

la conica sferica  $B - \bar{B} = 0$  è omociclica alla  $A$ ,  $\bar{A}$ ; ciò prova che:

*Date due coniche sferiche omocicliche  $A$ ,  $\bar{A}$  ed una terza curva analoga  $U$ , se al quadrangolo  $[UA]$  si circoscrive un'arbitraria conica sferica  $B$ , si potrà circoscrivere al quadrangolo  $[UA]$  una conica sferica  $\bar{B}$  concidica a  $B$ .*

<sup>1)</sup> Questo simbolo rappresenta il quadrangolo avente per vertici i punti comuni alle due coniche  $U = 0$ ,  $A = 0$ .

Oltre alle alle  $A$ ,  $A'$  consideriamo queste altre:

$$A'' \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda''(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$B \equiv U + \mu A = 0, \quad B' \equiv U + \mu' A' = 0, \quad B'' \equiv U + \mu'' A'' = 0;$$

ora è possibile circoscrivere al quadrangolo  $[BB']$  una conica che coincida con  $B''$ ; infatti all'identità

$$B + k U' \equiv (1 + k) U + \mu A + \mu' k A' = \varrho (B + \mu'' A'')$$

si soddisfa ponendo

$$k = \frac{\mu(\lambda'' - \lambda)}{\mu'(\lambda' - \lambda'')}, \quad \mu'' = \frac{\mu\mu'(\lambda' - \lambda)}{\mu(\lambda'' - \lambda) + \mu'(\lambda' - \lambda'')};$$

ciò abilita ad asserire:

*Date tre coniche sferiche omocicliche  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  ed una quarta arbitraria  $U$ , se ai tetragoni  $[UA]$ ,  $[UA']$  si circoscrivono due altre coniche sferiche  $B$ ,  $B'$ , i due quadrangoli  $[UA'']$ ,  $[BB']$  saranno inscritti in una medesima conica  $B''$ .*

Si considerino finalmente le coniche sferiche:

$$U = 0, \quad V = 0$$

$$U' \equiv U + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \quad V' \equiv V + \mu(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$W \equiv U - V = 0$$

$$W' \equiv U' - V' \equiv W + (\lambda - \mu)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

e si noti che i quadrangoli  $[UV]$ ,  $[U'V']$  sono inscritti nella conica  $K \equiv \mu U' - \lambda V' \equiv \mu U - \lambda V = 0$  e si sarà autorizzati a concludere quanto segue:

*Quando tre coniche sferiche  $U$ ,  $V$ ,  $W$  sono circoscritte allo stesso quadrangolo, se si descrivono altre due coniche  $U'$ ,  $V'$  omocicliche risp. a  $U$ ,  $V$  si potrà circoscrivere al quadrangolo  $[U'V']$  una conica  $W'$  omociclica alla terza  $W$  e gli otto vertici dei quadrangoli  $[UV]$ ,  $[U'V']$  apparterranno alla medesima conica sferica.*

Applicando la legge di dualità da questi teoremi se ne desumono altrettanti concernenti le coniche sferiche omofocali, che lasciamo al lettore di enunciare.

§ 8. *Generalizzazione delle coniche sferiche: le curve di W. Roberts.*

Le coniche sferiche si possono riguardare come casi particolari di altre quartiche sferiche, che furono investigate a fondo da W. Roberts <sup>1)</sup> perchè la loro rettificazione dipende da integrali ellittici di III specie: infatti una curva di Roberts è intersezione di una sfera con un cono quádrico avente centro arbitrario ed un asse disposto secondo un diametro di tale sfera; la si può, quindi, rappresentare mediante due equazioni della seguente forma:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

$$(2) \quad \frac{x^2}{tg^2 c} + \frac{y^2}{tg^2 b} = (z - z_0)^2;$$

il vertice del cono contenente la curva è il punto  $V(0, 0, z_0)$ . La curva in questione è base del seguente fascio di quádriche

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) + \lambda \left\{ \frac{x^2}{tg^2 c} + \frac{y^2}{tg^2 b} - (z - z_0)^2 \right\} = 0;$$

in questo, oltre il dato cono, si trovano altre tre superficie singolari; due sono cilindri e corrispondono ai valori  $-tg^2 b$  e  $-tg^2 c$  del parametro  $\lambda$ ; l'ultima corrisponde a

$$\lambda = \frac{R^2}{z_0^2 - R^2}$$

ed al cono avente la seguente equazione:

$$(3) \quad x^2 \left\{ 1 + \frac{R^2}{(z_0^2 - R^2) tg^2 c} \right\} + y^2 \left\{ 1 + \frac{R^2}{(z_0^2 - R^2) tg^2 b} \right\} + \frac{(z_0 - R)^2}{z_0^2 - R^2} = 0,$$

<sup>1)</sup> *Sur une représentation géométrique des trois fonctions elliptiques* (Journ. de Mathém., T. IX, 1854, p. 155-60); *Mémoire sur quelques propriétés géométriques relatives aux fonctions elliptiques* (Id., T. X, 1845, p. 297-315).

il quale è reale solo se  $|z_0| > R$ , cioè se il vertice  $V$  del dato cono è esterno alla data sfera. Il vertice del nuovo cono è il punto  $U\left(0, 0, \frac{R^2}{z_0}\right)$ , cioè il coniugato armonico di  $V$  rispetto agli estremi del diametro della sfera considerata che è situato sulla retta  $OV$ . Emerge da ciò che la curva di Roberts è suscettibile di una seconda generazione del tipo di quella con cui essa fu definita e di più può riguardarsi come intersezione di due coni quádrici aventi comune un asse. Giova però osservare che due coni in tali condizioni non s'intersecano sempre in una curva di detta specie; essi infatti si possono rappresentare mediante due equazioni della forma

$$a_1 x^2 + b_1 y^2 + (z - z_1)^2 = 0$$

$$a_2 x^2 + b_2 y^2 + (z - z_2)^2 = 0;$$

ora affinché nel fascio che essi determinano si trovi una sfera deve esistere un valore di  $\lambda$  tale che risulti

$$a_1 + \lambda a_2 = b_1 + \lambda b_2 = 1 + \lambda,$$

il che esige sia

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Fra le curve di Roberts se ne trovano due suscettibili sulla sfera di eleganti speciali definizioni, onde è opportuno dedicare ad esse qualche parola.

a) *Dati sulla sfera due punti fissi A, B è una curva di Roberts il luogo dei punti M della superficie tali che sia*

$$tg \frac{AM}{2} \cdot tg \frac{BM}{2} = \text{cost.}$$

Se, infatti si ricorda che, in genere

$$tg^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x},$$

si vedrà che la definizione della curva in questione equivale alla seguente:

$$\frac{(1 - \cos MA)(1 - \cos MB)}{(1 + \cos MA)(1 + \cos MB)} = \text{cost.} = \mu.$$

Si assuma ora lo stesso sistema di assi e si usino le stesse notazioni di cui si fece uso per ottenere l'equazioni delle coniche sferiche e si trasformerà la precedente equazione nell'altra:

$$\frac{(1 - \cos \theta \cos d - \text{sen} \theta \text{sen} d \cos \varphi)(1 - \cos \theta \cos d + \text{sen} \theta \text{sen} d \cos \varphi)}{(1 + \cos \theta \cos d + \text{sen} \theta \text{sen} d \cos \varphi)(1 + \cos \theta \cos d - \text{sen} \theta \text{sen} d \cos \varphi)} = \mu$$

ossia

$$\frac{(1 - \cos \theta \cos d)^2 - \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 d \cos^2 \varphi}{(1 + \cos \theta \cos d)^2 - \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 d \cos^2 \varphi} = \mu.$$

Ma si ha:

$$x = R \text{sen} \theta \text{sen} \varphi, \quad y = R \text{sen} \theta \cos \varphi, \quad z = R \cos \theta,$$

onde l'equazione precedente diviene

$$\frac{(R - z \cos d)^2 - y^2 \text{sen}^2 d}{(R + z \cos d)^2 - y^2 \text{sen}^2 d} = \mu$$

o, più semplicemente, posto  $\rho = \frac{\mu + 1}{\mu - 1}$ ,

$$R^2 + 2a R \cos d \cdot z + \cos^2 d \cdot z^2 - \text{sen}^2 d \cdot y^2 = 0,$$

equazione del cilindro proiettante la curva in questione sul piano  $yz$ . Ora questo cilindro e la data sfera determinano il fascio

(3)

$$x^2 + y^2(1 - \lambda \text{sen}^2 d) + z^2(1 + \lambda \cos^2 d) + 2R\rho \lambda \cos d \cdot z + (\lambda - 1)R^2 = 0$$

il cui discriminante vale

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \text{sen}^2 d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda \cos^2 d & \rho R \lambda \cos d \\ 0 & 0 & \rho R \lambda \cos d & (\lambda - 1)R^2 \end{vmatrix};$$

ora  $D(\lambda)$  si annulla se  $1 - \lambda \text{sen}^2 d = 0$  e allora la (3) rappresenta il cilindro proiettante la curva sul piano  $xz$ ;  $D(\lambda)$  si annulla anche se  $\lambda$  soddisfa l'equazione

$$(1 + \lambda \cos^2 d)(\lambda - 1) - \rho^2 \lambda^2 \cos^2 d = 0;$$

ma allora la (3) può scriversi sotto la forma

$$x^2 + m y^2 + n(z - z_0)^2 = 0$$

e rappresenta un cono quadrico avente un asse disposto secondo un diametro della sfera: e ciò è sufficiente per concludere secondo l'enunciato.

b) *Dati su una sfera due punti fissi AB, il luogo dei punti M della superficie tali che sia  $\text{sen} \frac{AM}{2} \cdot \text{sen} \frac{BM}{2} = \text{sen}^2 \frac{AB}{2}$  è una curva di Roberts con punto doppio, la quale, grazie alla sua definizione ed alla sua forma, può chiamarsi lemniscata sferica.*

Siccome infatti è

$$\text{sen}^2 \frac{MA}{2} = \frac{1 - \cos MA}{2}, \quad \text{sen}^2 \frac{MB}{2} = \frac{1 - \cos MB}{2},$$

$$\text{sen}^2 \frac{AB}{2} = \frac{1 - \cos AB}{2}$$

la definizione surriferita equivale all'altra

$$(1 - \cos AB)^2 = (1 - \cos MA)(1 - \cos MB);$$

servendosi poi degli assi e simboli usati nella ricerca precedente si ottiene

$$(1 - \cos d)^2 = (1 - \cos \theta \cdot \cos d)^2 - \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 d \cos^2 \varphi$$

e introducendo coordinate cartesiane:

$$R^2(1 - \cos d)^2 = (z \cos d - R)^2 - y^2 \text{sen}^2 d.$$

È questa l'equazione del cilindro proiettante la curva in questione sul piano  $yz$ ; essendo esso di second'ordine, detta

curva è una quartica di I specie. Quel cilindro con la solita sfera determina un fascio di equazione

$$\lambda x^2 + (\lambda + \operatorname{sen}^2 d)y^2 + (\lambda - \operatorname{cos}^2 d)z^2 + 2Rz \operatorname{cos} d + R^2 (\operatorname{cos}^2 d - 2 \operatorname{cos} d - \lambda) = 0;$$

di questo il discriminante vale

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \operatorname{sen}^2 d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \operatorname{cos}^2 d & R \operatorname{cos} d \\ 0 & 0 & R \operatorname{cos} d & R^2 (\operatorname{cos}^2 d - 2 \operatorname{cos} d - \lambda) \end{vmatrix};$$

esso si annulla per  $\lambda = 0$  e per  $\lambda = -\operatorname{sen}^2 d$  e questi valori guidano ai cilindri proiettanti la curva sui piani  $yz$  e  $xz$ . Ma  $D(\lambda) = 0$  ha anche la radice doppia  $\lambda = \operatorname{cos}^2 d - \operatorname{cos} d$  e ad essa corrisponde nel fascio la quàdrice di equazione:

$$x^2 - \frac{y^2}{\operatorname{cos} d} + \frac{(z - R)^2}{1 - \operatorname{cos} d} = 0;$$

ora questa rappresenta un cono quàdrico avente per vertice il punto  $(0, 0, R)$  della sfera e per uno dei suoi assi il corrispondente diametro della sfera stessa. Si hanno così tutti gli elementi per concludere secondo l'enunciato precedente.

### § 9. Quartiche di I specie degeneri.

Applicando il metodo del Brill citato a pag. 112 si giunge a concludere che una quartica di I specie può dar luogo soltanto alle seguenti forme singolari<sup>1)</sup>:

I. Quartica con punto doppio effettivo (ne incontrammo già parecchi esempi);

II. Cubica gobba e una sua corda;

III. Conica e due rette incidenti e seganti ciascuna la conica in un punto;

<sup>1)</sup> Anna Crespi, *Forme di spezzamento delle quartiche gobbe di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie* (Giornale di Matematiche, T. LV, 1917).

IV. Quattro rette costituenti un quadrilatero sghembo;

V. Due coniche bisecantisi

VI. Quattro rette uscenti da un punto;

VII. Cubica piana con punto doppio e retta uscente da questo;

VIII. Conica e due rette passanti per un punto della curva e situate in un piano a questa tangente;

IX. Tre rette concorrenti in un punto e situate in un piano ed una quarta retta segante una delle precedenti.

X. Una cubica piana ed una retta che l'incontra in un punto.

Notisi che non sempre una cubica singolare può essere base di un fascio di quàdriche non tutte degeneri; così nel VI caso tutte le quàdriche del fascio sono coni concentrici, mentre nei casi VII, IX e X il fascio di quàdriche consta di un piano fisso accompagnato da un elemento di un fascio di piani.

CAPITOLO VII.

CURVE DI QUARTO ORDINE E SECONDA SPECIE <sup>1)</sup>.

A) TEORIA GENERALE DELLE QUARTICHE DI SECONDA SPECIE.

§ 1. Preliminari.

Abbiamo visto nel Cap. prec. che per una quartica gobba passa almeno una superficie di second'ordine; avendo già studiato il caso in cui ne passino due (epperò  $\infty^1$ ), supporremo ora che per le curve di cui imprendiamo lo studio passi un'unica quadrica.

Presi 19 punti, 13 dei quali appartengano ad una,  $\Gamma$ , delle curve in esame, potremo far passare per essi una superficie di terz'ordine  $\Sigma_3$ , la quale conterrà tutta la curva  $\Gamma$  e taglierà ulteriormente la quadrica  $\Sigma_2$  su cui si trova  $\Gamma$  in un luogo lineare di second'ordine, cioè in una conica od in una coppia di rette sghembe.

Nel primo caso, chiamando  $f$  e  $p$  due forme la prima quadratica, la seconda lineare nelle coordinate omogenee  $x_0, x_1, x_2, x_3$  potremo rappresentare con le equazioni

$$f = 0, \quad p = 0$$

la conica comune alle due superficie  $\Sigma_3$  e  $\Sigma_2$ , mentre queste potranno rappresentarsi con equazioni della forma

$$fq + gp = 0, \quad j + pr = 0,$$

<sup>1)</sup> Per la storia e la bibliografia dell'argomento v. G. Loria, *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, III ed. (Torino, 1907, p. 139-40 e 382).

se  $g$  è una nuova forma quadratica nelle coordinate mentre  $q$  e  $r$  sono tre forme lineari. Ora poichè queste equazioni possono scriversi

$$-\frac{j}{p} = \frac{g}{q} = r$$

così per tutti i punti della curva  $\Gamma$  sussiste anche la relazione

$$g - qr = 0,$$

quindi  $\Gamma$  appartiene anche alla quadrica così rappresentata, epperò è una quartica di I specie.

Si conclude pertanto: *Una quartica gobba di II specie è l'intersezione di due superficie, una di secondo ordine e l'altra di terzo <sup>1)</sup>, aventi comuni due rette sghembe.*

Indichiamo con  $a'$  e  $a''$  queste due rette e chiamiamo primo sistema di generatrici di  $\Sigma_2$  quello a cui esse appartengono, secondo l'altro. Ogni generatrice  $a$  del primo sistema incontra  $\Sigma_3$  in tre punti situati sulla completa intersezione delle superficie  $\Sigma_2$  e  $\Sigma_3$ ; ma essa non incontra nè  $a'$ , nè  $a''$  onde sarà una trisecante di  $\Gamma$ . Un piano qualunque  $\pi$  passante per  $a$  taglia  $\Sigma_2$  in un'altra retta  $b$ ; dei quattro punti comuni a  $\pi$  e  $\Gamma$ , tre, come vedemmo, cadono in  $a$ , onde il rimanente si troverà in  $b$ . Dunque: *della quadrica  $\Sigma_2$  tutte le generatrici del primo sistema sono trisecanti di  $\Gamma$ , mentre tutte quelle del secondo ne sono uni-secanti.*

§ 2. Rappresentazione parametrica generale e costruzione della curva.

Emerge da ciò che fra i piani  $\pi$  condotti per un'arbitraria generatrice del primo sistema della superficie  $\Sigma_2$  ed i punti della curva  $\Gamma$  passa una corrispondenza univoca; le coordinate di tali punti si potranno in conseguenza esprimere con funzioni

<sup>1)</sup> Questo risultato dà ragione del nome *excubo quartic* con cui Cayley designa una delle curve che stiamo studiando.

razionali di un parametro  $\lambda$ , il cui grado sarà quattro. Scriveremo, quindi,

$$(1) \quad \varrho x_i = f_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{k=4} a_{ik} \lambda^{4-k} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

e sarà questa la rappresentazione analitica della curva che noi useremo; chiameremo poi *birapporto* di quattro punti di  $\Gamma$  il birapporto dei quattro piani che li proiettano da una sua trisecante arbitraria.

Per determinare la quadrica (unica) su cui si trova la curva, supponiamo che

$$\sum_{ik} q_{ik} x_i x_k = 0$$

ne sia l'equazione; scrivendo che la seguente

$$\sum_{ik} q_{ik} f_i(\lambda) f_k(\lambda) = 0$$

è un'identità rispetto a  $\lambda$ , otterremo nove equazioni lineari omogenee nelle dieci quantità  $q_{ik}$  le quali in generale ne determinano univocamente i rapporti.

Applicando un risultato generale stabilito nel Cap. I (v. p. 12), si vede che una *quartica di II specie è di rango 6 e classe pure 6 e che possiede quattro piani stazionari*.

Nelle (1) entrano 20 coefficienti arbitrari; ma, uno si può scegliere ad arbitrio, in forza della presenza del fattore  $\varrho$ , e ad altri tre si possono far assumere valori arbitrari sostituendo al parametro  $\lambda$  una sua funzione lineare  $\frac{m+n\lambda}{p+\lambda}$ ; perciò *esistono nello spazio  $\infty^{16}$  quartiche di II specie*.

Una procedura conveniente per costruire per punti una quartica di II specie è contenuta nel seguente:

**TEOREMA.** *Data una schiera rigata e tre piani fissi, se su ogni generatrice  $g$  di quella si determina un punto  $P$  tale che, dette  $L, M, N$  le intersezioni di  $g$  con i piani dati, sia  $(LMNP) = \theta$ ,  $\theta$  essendo un numero dato, il luogo dei punti  $P$  è una quartica razionale <sup>1)</sup>.*

<sup>1)</sup> L. Vitoris, *Eine besondere Erzeugungsweise der Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art* (Sitzungsber. der Wiener Akad., T. CXXV, 1916, p. 259-283).

Per dimostrarlo assumiamo i piani dati per fondamentali in un sistema cartesiano e supponiamo che la schiera rigata sia generata dalle rette che uniscono i punti corrispondenti di due punteggiate avente per sedi le rette  $A_0A_1$  e  $A_2A_3$ . Indicando con  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) le coordinate del punto  $A_i$ , quelle di due punti corrispondenti in dette punteggiate saranno della forma

$$\frac{x_0 + \varrho x_1}{1 + \varrho}, \quad \frac{y_0 + \varrho y_1}{1 + \varrho}, \quad \frac{z_0 + \varrho z_1}{1 + \varrho}$$

$$\frac{x_2 + \varrho x_3}{1 + \varrho}, \quad \frac{y_2 + \varrho y_3}{1 + \varrho}, \quad \frac{z_2 + \varrho z_3}{1 + \varrho},$$

epperò la superficie contenente la data schiera ammetterà la seguente rappresentazione parametrica:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\frac{x_0 + \varrho x_1}{1 + \varrho} + \sigma \frac{x_2 + \varrho x_3}{1 + \varrho}}{1 + \sigma} \\ y = \frac{\frac{y_0 + \varrho y_1}{1 + \varrho} + \sigma \frac{y_2 + \varrho y_3}{1 + \varrho}}{1 + \sigma} \\ z = \frac{\frac{z_0 + \varrho z_1}{1 + \varrho} + \sigma \frac{z_2 + \varrho z_3}{1 + \varrho}}{1 + \sigma} \end{array} \right.$$

I punti  $L, M, N$ , in cui la generatrice della schiera rigata individuata dal valore  $\varrho$  del parametro incontra i tre piani coordinati corrispondono ai seguenti valori di  $\sigma$ :

$$-\frac{x_0 + \varrho x_1}{x_2 + \varrho x_3}, \quad -\frac{y_0 + \varrho y_1}{y_2 + \varrho y_3}, \quad -\frac{z_0 + \varrho z_1}{z_2 + \varrho z_3}$$

mentre al punto  $P$  corrisponde il valore di  $\varrho$  determinato dall'equazione

$$\left( -\frac{x_0 + \varrho x_1}{x_2 + \varrho x_3}, -\frac{y_0 + \varrho y_1}{y_2 + \varrho y_3}, -\frac{z_0 + \varrho z_1}{z_2 + \varrho z_3}, \sigma \right) = \theta;$$



perciò

$$\sigma = - \frac{(x_0 + \rho x_1) X \theta + (y_0 + \rho y_1) Y}{(x_2 + \rho x_3) X \theta + (y_2 + \rho y_3) Y},$$

avendo indicato per brevità con  $X, Y, Z$  i determinanti estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x_0 + \rho x_1 & , & y_0 + \rho y_1 & , & z_0 + \rho z_1 \\ x_2 + \rho x_3 & , & y_2 + \rho y_3 & , & z_2 + \rho z_3 \end{vmatrix}.$$

Sostituendo questi valori nelle (2) si trova

$$x = \frac{YZ}{(1 + \rho) \{[(x_2 + \rho x_3) - (x_0 + \rho x_1)] \theta X + [(y_2 + \rho y_3) - (y_0 + \rho y_1)] Y\}}$$

e due analoghe per  $y$  e  $z$ . Ora siccome  $X, Y, Z$  sono funzioni quadratiche in  $\rho$ , le espressioni trovate sono di 4° grado, epperò rappresentano una quartica razionale, c. d. d. Notisi che per  $\rho = -1$ ,  $x, y, z$  divengono infinite onde la curva possiede un punto reale all'infinito, epperò anche un secondo.

Supponendo all'infinito uno dei piani dati e di più  $\theta = -1$  si conclude che: è una quartica di II specie il luogo dei punti medi dei segmenti staccati sulle generatrici di una schiera rigata da due arbitrari piani dello spazio. Da ciò una procedura convenientissima per costruire e rappresentare graficamente una quartica razionale con il metodo della doppia proiezione ortogonale.

Riprendiamo le equazioni generali (1) e notiamo che i punti nei quali la quartica che esse rappresentano taglia il piano generico  $\sum_{i=0}^{i=3} \xi_i x_i = 0$  corrispondono ai valori di  $\lambda$  soddisfacenti l'equazione

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{k=4} \lambda^{4-k} \sum_{i=0}^{i=3} a_{ik} \xi_i = 0.$$

Affinchè i punti della curva corrispondenti ai valori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  del parametro stiano nello stesso piano dev'essere

$$\begin{vmatrix} f_0(\lambda_1) & , & f_1(\lambda_1) & , & f_2(\lambda_1) & , & f_3(\lambda_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_0(\lambda_4) & , & f_1(\lambda_4) & , & f_2(\lambda_4) & , & f_3(\lambda_4) \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda_1^4 & \lambda_1^3 & \lambda_1^2 & \lambda_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_4^4 & \lambda_4^3 & \lambda_4^2 & \lambda_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o finalmente, designando con  $(\lambda)_r$  la somma dei prodotti  $r$  a  $r$  di  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & -(\lambda)_1 & (\lambda)_2 & -(\lambda)_3 & (\lambda)_4 \\ a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = 0.$$

Indicando poi con  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  i determinanti estratti dalla matrice formata coi coefficienti  $a_{ik}$  questa condizione di coplanarità si scrive più concisamente come segue:

$$(4') \quad A_0 + A_1(\lambda)_1 + A_2(\lambda)_2 + A_3(\lambda)_3 + A_4(\lambda)_4 = 0.$$

§ 3. Applicazioni della rappresentazione esposta.

Trarremo dalla (4') alcune conseguenze importanti:

a) Se  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sono i parametri dei punti di appoggio di una retta trisecante la curva, la (4') sussiste per tutti i valori di  $\lambda_4$ ; ciò esige si abbia:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + A_2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) + A_3\lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= 0 \\ A_1 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + A_3(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) + A_4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando  $\lambda_3$  si ottiene

$$(5) \quad \begin{vmatrix} A_0 + A_1(\lambda_1 + \lambda_2) + A_2\lambda_1\lambda_2 & , & A_1 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2) + A_3\lambda_1\lambda_2 \\ A_1 + A_2(\lambda_1 + \lambda_2) + A_3\lambda_1\lambda_2 & , & A_2 + A_3(\lambda_1 + \lambda_2) + A_4\lambda_1\lambda_2 \end{vmatrix} = 0,$$

relazione che intercede fra i parametri di due dei punti d'appoggio di una retta trisecante la curva. In particolare identificando detti parametri si ottiene l'equazione

$$(6) \quad \begin{vmatrix} A_0 + 2A_1\lambda + A_2\lambda^2 & , & A_1 + 2A_2\lambda + A_3\lambda^2 \\ A_1 + 2A_2\lambda + A_3\lambda^2 & , & A_2 + 2A_3\lambda + A_4\lambda^2 \end{vmatrix} = 0,$$

equazione che determina le rette che toccano la quartica in un punto e la segano in un altro; essendo la (6) di quarto grado si conclude che *una quartica razionale ammette quattro rette tangenti-seganti*.

b) Supponendo  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$  la (4') diviene

$$(7) \quad A_0 + 4 A_1 \lambda + 6 A_2 \lambda^2 + 4 A_3 \lambda^3 + A_4 \lambda^4 = 0,$$

equazione biquadratica che serve a determinare i quattro piani stazionari della curva.

c) Facendo invece nella stessa (4')  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$  essa diviene

$$(8) \quad A_0 + A_1 (\lambda_1 + 3\lambda) + 3A_2 \lambda (\lambda_1 + \lambda) + A_3 \lambda^2 (3\lambda_1 + \lambda) + A_4 \lambda^3 \lambda_1 = 0$$

donde è facile dedurre che *da ogni punto di una quartica di II specie si possono condurre tre piani che oscolino altrove la curva*.

d) Siano  $\lambda$  e  $\lambda_1$  i parametri degli estremi di una corda principale. Oltre alla (8) sussisterà l'analoga equazione

(8')

$$A_0 + A_1 (\lambda + 3\lambda_1) + 3A_2 \lambda_1 (\lambda + \lambda_1) + A_3 \lambda_1^2 (3\lambda + \lambda_1) + A_4 \lambda_1^3 \lambda = 0.$$

Ora le (8), (8') sono soddisfatte per  $\lambda = \lambda_1$ , quando il parametro  $\lambda$  è radice dell'equazione (7); si hanno in conseguenza quattro soluzioni da escludere; inoltre dette equazioni si possono intendere come rappresentanti due corrispondenze (3, 1), (1, 3) fra  $\lambda$  e  $\lambda_1$ , e queste ammettono notoriamente dieci soluzioni; tolte le quattro estranee, di cui sopra, ne restano sei; ma, per la simmetria delle (8), (8') in  $\lambda_1$ ,  $\lambda$ , queste non danno in realtà che tre corde. Si conclude pertanto: *una quartica gobba di II specie possiede tre corde principali*, una delle quali certamente reale.

e) Supponiamo che la curva ammetta un punto doppio; se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono i due corrispondenti valori del parametro, la (4') dev'essere soddisfatta per tutti i valori di  $\lambda_3$  e  $\lambda_4$ ; devono, quindi, coesistere le tre equazioni

$$A_0 + A_1 (\lambda_1 + \lambda_2) + A_2 \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

$$A_1 + A_2 (\lambda_1 + \lambda_2) + A_3 \lambda_1 \lambda_2 = 0$$

$$A_2 + A_3 (\lambda_1 + \lambda_2) + A_4 \lambda_1 \lambda_2 = 0;$$

eliminando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  si conclude essere

$$(8) \quad \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0$$

la condizione affinché la data curva ammetta un punto doppio. In tale ipotesi i valori del parametro relativi al punto singolare sono radici dell'equazione

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = 0,$$

sempre nell'ipotesi che i coefficienti  $A_0, A_1, \dots, A_4$  soddisfacciano l'equazione (8). Calcolando il discriminante della (9) con riguardo alla (8) si conclude che quel punto singolare della quartica è una cuspide se inoltre sussiste la relazione

$$(10) \quad A_0 A_4 - 4 A_1 A_2 + 3 A_2^2 = 0.$$

f) La considerazione delle rette tangenti-seganti e dei piani stazionari sta a base di una classificazione delle quartiche gobbe di II specie esenti da punti singolari<sup>1)</sup>; secondo essa queste curve si distribuiscono in cinque categorie, caratterizzate come segue:

I. Quattro rette tangenti-seganti reali e quattro piani stazionari immaginari;

II. Quattro rette tangenti-seganti immaginarie e quattro piani stazionari reali; allora tutte le trisecanti incontrano la curva in un solo punto reale;

III. Quattro rette tangenti-seganti immaginarie e quattro piani stazionari immaginari; ogni piano reale dello spazio taglia la curva almeno in due punti reali;

<sup>1)</sup> K. Rohn, *Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species* (Ber. der K. Sächs. Ges. d. Wiss., T. XLII p. 208-244 e XLIII p. 1-23, 1890-91).

IV. Due delle tangenti seganti e due dei piani stazionari sono reali;

V. Curva totalmente immaginaria.

§ 4. *Rappresentazioni parametriche speciali.*

Le formole (1) si possono surrogare con altre, non meno generali, ma più semplici, epperò più utili nelle applicazioni; faremo cenno di due specialmente raccomandabili.

I. *Rappresentazione parametrica del Cayley*<sup>1)</sup>.

Si giunge ad essa partendo dalle (1) e cercando se sia possibile determinare le costanti  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \alpha, \beta$  per modo che si abbia identicamente (rispetto a  $\lambda$ ):

$$(11) \quad \mu_0 f_0(\lambda) + \mu_1 f_1(\lambda) + \mu_2 f_2(\lambda) + \mu_3 f_3(\lambda) = (\alpha + \beta\lambda)^4.$$

Ora eguagliando i coefficienti delle potenze simili di  $\lambda$  nei due membri di questa relazione nascono cinque equazioni fra cui si possono eliminare linearmente le  $\mu$ ; si ottiene così

$$\begin{vmatrix} \beta^4 & , & 4\beta^3\alpha & , & 6\beta^2\alpha^2 & , & 4\beta\alpha^3 & , & \alpha^4 \\ a_{00} & , & a_{01} & , & a_{02} & , & a_{03} & , & a_{04} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{30} & , & a_{01} & , & a_{32} & , & a_{33} & , & a_{34} \end{vmatrix} = 0,$$

equazione biquadratica nel rapporto  $\frac{\alpha}{\beta}$ , ad ogni radice della quale corrisponde un'identità del tipo (11); dette  $-a_1, -a_2, -a_3, -a_4$  tali radici e  $\mu_{i0}, \mu_{i1}, \mu_{i2}, \mu_{i3}$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) i corrispondenti valori di  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  si può scrivere

$$\frac{\alpha}{\beta^4} (\mu_{i0}x_0 + \mu_{i1}x_1 + \mu_{i2}x_2 + \mu_{i3}x_3) = (\lambda - a_i)^4 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

<sup>1)</sup> On a certain septic Torse (Trans. of the Cambridge phil. Society, Vol. XI, 1871; oppure The collected Papers, T. VII, p. 99).

Mutando ora il tetraedro fondamentale se ne deduce che, se non si fa distinzione fra reale ed immaginario, qualunque quartica di II specie può rappresentarsi mediante equazioni della forma

$$(12) \quad \varrho x_k = (\lambda - a_k)^4 \quad (k = 0, 1, 2, 3);$$

è chiaro che i piani fondamentali del corrispondente sistema di coordinate non sono che i piani stazionari della curva<sup>1)</sup>.

Faremo qualche applicazione di tale rappresentazione.

a) I parametri dei punti comuni alla curva ed al piano

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

sono radici dell'equazione

$$(13) \quad \sum_{k=0}^3 \xi_k (\lambda - a_k)^4 = 0$$

che scriveremo

$$(13') \quad b_0 \lambda^4 - 4b_1 \lambda^3 + 6b_2 \lambda^2 - 4b_3 \lambda + b_4 = 0$$

avendo posto

$$(14) \quad b_0 = \sum_k \xi_k, \quad b_1 = \sum a_k \xi_k, \quad b_2 = \sum a_k^2 \xi_k, \quad b_3 = \sum a_k^3 \xi_k, \quad b_4 = \sum a_k^4 \xi_k;$$

è quindi

$$(\lambda)_1 = \frac{4b_1}{b_0}, \quad (\lambda)_2 = \frac{6b_2}{b_0}, \quad (\lambda)_3 = \frac{4b_3}{b_0}, \quad (\lambda)_4 = \frac{b_4}{b_0}.$$

<sup>1)</sup> Le (12) mostrano che le quartiche di II specie appartengono alla classe di curve rappresentabili con equazioni della forma

$$\varrho x_k = (\lambda - a_k)^n$$

n essendo un numero intero positivo; esse godono della proprietà di essere trasformate in sé stesse da ogni proiettività dello spazio individuata da un'omografia fra i punti della curva che muta in sé stessa la quaderna dei punti di iperosculazione. Cfr. E. Ciani, *Sopra le curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione* (Rend. Circ. mat. di Palermo, T. XXVI, 1908, p. 315-324) ed i lavori ivi citati.

Sono queste quattro equazioni lineari omogenee in  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$  fra le quali si possono eliminare tali quantità; si trova così:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \frac{(\lambda)_1}{4} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \frac{(\lambda)_2}{6} \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \frac{(\lambda)_3}{4} \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & (\lambda)_4 \end{vmatrix} = 0$$

ossia:

$$(15) \quad a_1 a_2 a_3 a_4 - \frac{(\lambda)_1}{4} (a_2 a_3 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_2 a_3) + \\ + \frac{(\lambda)_2}{6} (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3 + a_2 a_1 + a_2 a_4) - \\ - \frac{(\lambda)_3}{4} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (\lambda)_4 = 0$$

e questa è la condizione di coplanarità dei quattro punti della curva corrispondente ai valori  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  del parametro  $\lambda$ . Per verifica si noti che se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$  essa diviene

$$(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)(\lambda - a_4) = 0$$

come doveva accadere.

b) Il primo membro della (13), essendo una funzione bi-quadratica di  $\lambda$ , ammette i due invarianti

$$b_0 b_4 - 4 b_1 b_3 + 3 b_2^2, \quad \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix};$$

sostituendo alle  $b_i$  i loro valori ed eguagliando a 0 i risultati si otterrà l'equazione dell'inviluppo dei piani che tagliano la data curva in quattro punti risp. equianarmonici od anarmonici. Tale sostituzione applicata al primo di quegli invarianti guida alla seguente equazione

$$(16) \quad \sum (a_i - a_k)^4 \xi_i \xi_k = 0,$$

la quale, quando si tenga conto dal significato geometrico dell'annullarsi di quell'invariante, dice che l'inviluppo dei piani che segano una quartica gobba di II specie in quattro punti equianarmonici è una quadrica tangente ai quattro piani stazionari della curva.

Similmente, eseguita la medesima sostituzione nel secondo degli anzidetti invarianti, dopo alcune facili trasformazioni si giunge all'equazione seguente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ 1 & a_0 & a_0^2 & -\frac{1}{\xi_0} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & 0 & -\frac{1}{\xi_1} & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{\xi_2} & 0 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\xi_3} \end{vmatrix} = 0;$$

ora svolgendo questo determinante secondo i prodotti dei determinanti estratti dalla matrice costituita dalle prime tre orizzontali per i loro determinanti complementari si trova

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \frac{1}{\xi_0} + \dots = 0$$

ossia

$$(17) \quad \frac{(a_2 - a_3)^2 (a_3 - a_1)^2 (a_1 - a_2)^2}{\xi_0} + \frac{(a_3 - a_0)^2 (a_0 - a_2)^2 (a_2 - a_3)^2}{\xi_1} + \\ + \frac{(a_0 - a_1)^2 (a_1 - a_3)^2 (a_3 - a_0)^2}{\xi_2} + \frac{(a_1 - a_2)^2 (a_2 - a_0)^2 (a_0 - a_1)^2}{\xi_3} = 0,$$

la quale prova che l'involuppo dei piani che tagliano una quartica di II specie in quattro punti armonici è una superficie (di Steiner) di quart'ordine e terza classe.

c) La corda che unisce i punti della nostra curva che corrispondono ai valori  $\lambda, \lambda'$  del parametro ha per coordinate

$$p_{ik} \equiv \begin{vmatrix} (\lambda - a_i)^4 & , & (\lambda - a_k)^4 \\ (\lambda' - a_i)^4 & , & (\lambda' - a_k)^4 \end{vmatrix}$$

ossia

(13)

$$p_{ik} \equiv (a_i - a_k) [(\lambda - a_i)(\lambda' - a_k) + (\lambda' - a_i)(\lambda - a_k)] [(\lambda - a_i)^2(\lambda' - a_k)^2 + (\lambda - a_k)^2(\lambda' - a_i)^2];$$

in particolare la tangente nel punto di parametro  $\lambda$  ha per coordinate:

$$(19) \quad p_{ik} \equiv (a_i - a_k) (\lambda - a_i)^3 (\lambda - a_k)^3.$$

Da queste (oltre ad una conferma dell'essere la curva in questione di rango 6) si trae la doppia equazione

$$\frac{p_{01}p_{23}}{(a_0 - a_1)(a_2 - a_3)} = \frac{p_{02}p_{31}}{(a_0 - a_2)(a_3 - a_1)} = \frac{p_{03}p_{12}}{(a_0 - a_3)(a_1 - a_2)},$$

donde emerge che le tangenti di una quartica gobba di II specie appartengono ad un complesso quadratico la cui superficie singolare consta dei quattro piani stazionari.

d) Le tangenti della curva che stiamo studiando si possono rappresentare diversamente; infatti se

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

è un piano tangente di quella linea nel punto  $\lambda$ , sussisteranno le equazioni

$$\xi_1 (\lambda - a_1)^4 + \xi_2 (\lambda - a_2)^4 + \xi_3 (\lambda - a_3)^4 = 0$$

$$\xi_1 (\lambda - a_1)^3 + \xi_2 (\lambda - a_2)^3 + \xi_3 (\lambda - a_3)^3 = 0;$$

perciò  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sono proporzionali alle quantità

$$(\lambda - a_2)^3 (\lambda - a_3)^3 (a_2 - a_3), (\lambda - a_3)^3 (\lambda - a_1)^3 (a_3 - a_1), (\lambda - a_1)^3 (\lambda - a_2)^3 (a_1 - a_2)$$

e l'equazione di quel piano tangente assume il seguente aspetto:

$$\frac{x_1 (a_2 - a_3)}{(\lambda - a_1)^3} + \frac{x_2 (a_3 - a_1)}{(\lambda - a_2)^3} + \frac{x_3 (a_1 - a_2)}{(\lambda - a_3)^3} = 0.$$

Ragionando similmente si giunge a concludere che la tangente alla quartica nel punto  $\lambda$  può rappresentarsi mediante due qualsivogliono delle seguenti equazioni:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \star \quad \frac{(a_2 - a_3) x_1}{(\lambda - a_1)^3} + \frac{(a_3 - a_1) x_2}{(\lambda - a_2)^3} + \frac{(a_1 - a_2) x_3}{(\lambda - a_3)^3} = 0 \\ \frac{(a_2 - a_3) x_0}{(\lambda - a_0)^3} \quad \star \quad + \frac{(a_3 - a_0) x_2}{(\lambda - a_2)^3} + \frac{(a_0 - a_2) x_3}{(\lambda - a_3)^3} = 0 \\ \frac{(a_1 - a_3) x_0}{(\lambda - a_0)^3} + \frac{(a_3 - a_0) x_1}{(\lambda - a_1)^3} \quad \star \quad + \frac{(a_0 - a_1) x_3}{(\lambda - a_3)^3} = 0 \\ \frac{(a_1 - a_2) x_0}{(\lambda - a_0)^3} + \frac{(a_2 - a_0) x_1}{(\lambda - a_1)^3} + \frac{(a_0 - a_1) x_2}{(\lambda - a_2)^3} \quad \star \quad = 0. \end{array} \right.$$

e) Se il piano

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

oscula la data curva nel punto  $\lambda$ , sussisteranno le tre equazioni:

$$\xi_0 (\lambda - a_0)^4 + \xi_1 (\lambda - a_1)^4 + \xi_2 (\lambda - a_2)^4 + \xi_3 (\lambda - a_3)^4 = 0$$

$$\xi_0 (\lambda - a_0)^3 + \xi_1 (\lambda - a_1)^3 + \xi_2 (\lambda - a_2)^3 + \xi_3 (\lambda - a_3)^3 = 0$$

$$\xi_0 (\lambda - a_0)^2 + \xi_1 (\lambda - a_1)^2 + \xi_2 (\lambda - a_2)^2 + \xi_3 (\lambda - a_3)^2 = 0;$$

in conseguenza  $\xi_0$  è proporzionale a

$$\left| \begin{array}{l} (\lambda - a_1)^4, (\lambda - a_2)^4, (\lambda - a_3)^4 \\ (\lambda - a_1)^3, (\lambda - a_2)^3, (\lambda - a_3)^3 \\ (\lambda - a_1)^2, (\lambda - a_2)^2, (\lambda - a_3)^2 \end{array} \right| = (\lambda - a_1)^2 (\lambda - a_2)^2 (\lambda - a_3)^2 (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2);$$

similmente dicasi riguardo a  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ; perciò l'equazione del piano che oscula in  $\lambda$  la data curva ha la seguente equazione:

(21)

$$\frac{(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)}{(\lambda - a_0)^2} x_0 + \frac{(a_3 - a_0)(a_0 - a_2)(a_2 - a_3)}{(\lambda - a_1)^2} x_1 +$$

$$\frac{(a_0 - a_1)(a_1 - a_3)(a_3 - a_0)}{(\lambda - a_2)^2} x_2 + \frac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_0)(a_0 - a_1)}{(\lambda - a_3)^2} x_3 = 0;$$

da ciò una conferma dell'essere la curva di sesta classe.

Le coordinate del piano (21) sono evidentemente determinate dalle seguenti formole (ove  $r$  è un fattore di proporzionalità)

$$(21') \left\{ \begin{aligned} r\eta_0 &= \frac{(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)}{(\lambda - a_0)^2} \\ r\eta_1 &= \frac{(a_3 - a_0)(a_0 - a_2)(a_2 - a_3)}{(\lambda - a_1)^2} \\ r\eta_2 &= \frac{(a_0 - a_1)(a_1 - a_3)(a_3 - a_0)}{(\lambda - a_2)^2} \\ r\eta_3 &= \frac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_0)(a_0 - a_1)}{(\lambda - a_3)^2} \end{aligned} \right.$$

Si può dedurre da esse che tutti gli osculatori di una quartica di II specie toccano una quadrica inscritta nel tetraedro avente per facce i piani stazionari della curva; infatti una tale superficie ha un'equazione tangenziale della forma

$$a_{01} \xi_0 \xi_1 + a_{22} \xi_2 \xi_3 + a_{02} \xi_0 \xi_2 + a_{31} \xi_3 \xi_1 + a_{03} \xi_0 \xi_3 + a_{12} \xi_1 \xi_2 = 0;$$

ora l'osculatore della data curva nel punto  $\lambda$  risulta tangente a questa superficie ove  $\lambda$  soddisfi l'equazione seguente:

$$a_{01} \frac{a_2 - a_3}{a_0 - a_1} (\lambda - a_2)^2 (\lambda - a_3)^2 + a_{23} \frac{a_0 - a_1}{a_2 - a_3} (\lambda - a_0)^2 (\lambda - a_1)^2 + \dots = 0,$$

la quale è biquadratica in  $\lambda$ ; scrivendo che essa è soddisfatta identicamente si giunge ad un sistema di cinque equazioni li-

neari omogenee nei coefficienti  $a_{ik}$ , donde si possono trarre univocamente i mutui rapporti dei coefficienti stessi, e però ecc. <sup>1)</sup>

II. *Rappresentazione parametrica del Bertini* <sup>2)</sup>.

Detta  $MN$  una corda principale di una quartica gobba di II specie, si riferisca la curva ad un sistema di coordinate avente:

per faccia  $x_0 = 0$  il piano che oscula la curva nel punto  $M$  e la taglia in  $N$ ;

per faccia  $x_1 = 0$  il piano determinato dalla tangente in  $M$  e dalla trisecante  $MM'M''$  della curva uscente da questo punto;

per faccia  $x_2 = 0$  l'analogo piano contenente la tangente in  $N$  e la trisecante  $NN'N''$ ;

finalmente per faccia  $x_3 = 0$  il piano che oscula la curva in  $N$  e la taglia in  $M$ .

Si scelga poi il parametro  $\omega$  che serve a determinare i punti della curva per modo che ai punti  $M, N, M', N'$  corrispondono risp. i valori  $0, \infty, a, 1$ ; dico che in conseguenza ai punti  $M'', N''$  corrisponderanno i valori  $-a, -1$ ; infatti, ogni piano passante per la retta  $MN$  taglia nuovamente la data curva in coppie di punti costituenti un'involuzione di secondo grado, di cui  $M, N$  sono i punti doppi, mentre  $M', M''$  e  $N', N''$  ne sono due coppie di elementi coniugati; emerge da ciò che i due gruppi  $MNM'M''$  e  $MNN'N''$  sono armonici e siccome  $M, N$  hanno per parametri  $0$  e  $\infty$ , quelli dei due punti  $M', M''$  o  $N', N''$  devono essere eguali e di segni contrari.

<sup>1)</sup> La proprietà delle quartiche di II specie di avere i loro punti situati su una superficie di second'ordine ed i loro osculatori tangenti ad una di seconda classe, ha condotto W. Stahl alla considerazione od allo studio di tutte le linee gobbe godenti della medesima proprietà: v. la memoria *Ueber eine gewisse Gattung von Raumcurven* (J. f. r. und a. Mathem. T. XCIX, 1886, p. 154-60); di esse manca ed è desiderata una trattazione analitica.

<sup>2)</sup> V. la memoria *Sulla curva gobba di 4° ordine e 2ª specie* (Rend. del R. Ist. Lomb., Ser. II, T. V, 1872, p. 622-38).

Fatte le anzidette scelte, la rappresentazione della curva si presenta sotto il seguente aspetto:

$$(22) \quad \rho x_0 = \omega^3, \quad \rho x_1 = \omega^2(\omega^2 - a^2), \quad \rho x_2 = \omega^2 - 1, \quad \rho x_3 = \omega.$$

I punti nei quali detta curva è tagliata da un piano arbitrario

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

corrispondono ai valori di  $\omega$  che soddisfano l'equazione

$$(23) \quad \xi_1 \omega^4 + \xi_0 \omega^3 + (\xi_2 - a^2 \xi_1) \omega^2 + \xi_3 \omega - \xi_2 = 0.$$

Ciò prova che (adoperando una notazione già usata) si ha:

$$(23') \quad (\omega)_1 = -\frac{\xi_0}{\xi_1}, \quad (\omega)_2 = \frac{\xi_2 - a^2 \xi_1}{\xi_1}, \quad (\omega)_3 = -\frac{\xi_3}{\xi_1}, \quad (\omega)_4 = -\frac{\xi_2}{\xi_1}.$$

Da queste, eliminando le costanti  $\xi$ , si desume essere:

$$(24) \quad (\omega)_4 + (\omega)_2 + a^2 = 0;$$

la condizione di coplanarità dei quattro punti della curva di parametri  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ . Ne faremo alcune applicazioni:

a) Se  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sono i parametri dei punti di appoggio della data curva con una sua trisecante, la (24) dev'essere soddisfatta per tutti i valori di  $\omega_4$ ; ciò esige si abbia

$$(25) \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_1 \omega_2 \omega_3 = 0, \quad \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1 + \omega_1 \omega_2 + a^2 = 0;$$

ora a queste si possono sostituire, qualunque sia  $\lambda$ , le altre:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = -\lambda, \quad \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1 + \omega_1 \omega_2 = -a^2, \quad \omega_1 \omega_2 \omega_3 = \lambda;$$

ciò prova che detti parametri sono radici di un'equazione della forma

$$(26) \quad \omega(\omega^2 - a^2) + \lambda(\omega^2 - 1) = 0,$$

e questa, al variare di  $\lambda$ , rappresenta una involuzione di terzo grado, quella cioè costituita dai punti d'appoggio delle  $\infty'$  trisecanti della data quartica.

b) Se  $\omega_1$  è il punto di contatto di una tangente della

data curva segante questa nuovamente nel punto  $\omega_2$ , grazie alle (25) sussisteranno le seguenti relazioni

$$(27) \quad 2\omega_1 + \omega_2 + \omega_1^2 \omega_2 = 0, \quad \omega_1^2 + 2\omega_1 \omega_2 + a^2 = 0.$$

Eliminando successivamente  $\omega_2$  e  $\omega_1$  si giunge alle equazioni seguenti:

$$(28) \quad \begin{cases} \omega_1^4 + (a^2 - 3)\omega_1^2 + a^2 = 0 \\ 4\omega_1^4 + (a^4 - 6a^2 - 8)\omega_1^2 + 4a^2 = 0, \end{cases}$$

la prima delle quali determina i punti di contatto e la seconda i punti d'intersezione delle quattro rette tangenti-seganti possedute dalla curva che stiamo studiando.

c) Emerge dalla condizione (24) che, se un piano oscula la data curva nel punto  $\omega$  e la taglia in  $\omega_1$ , sussiste la relazione

$$(29) \quad \omega_1(\omega^3 + 3\omega) + 3\omega^2 + a^2 = 0,$$

e che i punti stazionari corrispondono ai valori del parametro che soddisfano l'equazione

$$(30) \quad \omega^4 + 6\omega^2 + a^2 = 0.$$

Se nella (29) si suppone dato  $\omega_1$ , le sue tre radici  $\alpha, \beta, \gamma$  corrisponderanno ai punti di contatto dei tre osculatori della curva che passano per quel punto; sarà quindi

$$(31) \quad \alpha + \beta + \gamma = -\frac{3}{\omega_1}, \quad \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 3, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{a^2}{\omega_1};$$

ora da queste segue:

$$\alpha\beta\gamma\omega_1 + (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + \alpha\omega_1 + \beta\omega_1 + \gamma\omega_1) + a^2 = 0,$$

la quale, avuto riguardo alla (24), dice che i quattro punti  $\alpha, \beta, \gamma, \omega_1$  appartengono al medesimo piano. Si conclude pertanto: *i punti di contatto dei tre osculatori che si possono condurre ad una quartica gobba di II specie da un suo punto arbitrario si trovano in un piano passante per questo punto.*

d) Posto

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = s_1, \quad \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1 + \omega_1 \omega_2 = s_2, \quad \omega_1 \omega_2 \omega_3 = s_3$$

le equazioni (23') assumono il seguente aspetto

$$\omega_4 + s_1 = -\frac{\xi_0}{\xi_1}, \quad s_2 + \omega_1 s_1 = \frac{\xi_2 - a^2 \xi_1}{\xi_1},$$

$$s_3 + \omega_4 s_1 = -\frac{\xi_3}{\xi_1}, \quad s_3 \omega_4 = -\frac{\xi_2}{\xi_1};$$

sostituendo nelle prime tre il valore  $\omega_4 = -\frac{\xi_2}{s_3 \xi_1}$  dato dall'ultima si trova:

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{s_2(s_2 + a^2)}{s_1 + s_3} - s_3, \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{s_3(s_2 + a^2)}{s_1 + s_3}, \quad \frac{\xi_0}{\xi_1} = \frac{s_2 + a^2}{s_1 + s_3} - s_1;$$

emerge da ciò che l'equazione del piano determinato dai tre punti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  è:

$$(32) \quad (s_2 - s_1^2 - s_1 s_3 + a^2) x_0 + (s_1 + s_3) x_1 + s_3 (s_2 + a^2) x_2 + (s_2^2 + a^2 s_2 - s_1 s_3) x_3 = 0,$$

mentre l'osculatore nel punto  $\omega$  è rappresentato come segue

$$(33) \quad (a^2 - 6\omega^2 - 3\omega^4) x_0 + \omega (3 + \omega^2) x_1 + \omega^3 (3\omega^2 + a^2) x_2 + \omega^2 (3a^2 + 6\omega^2 - \omega^4) x_3 = 0.$$

e) Sostituendo i valori (22) nell'equazione  $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$  di una quadrica si ottiene un'equazione di 8° grado in  $\omega$ ; scrivendo che essa è soddisfatta identicamente si arriva all'equazione dell'unica quadrica passante per la curva; è la seguente:

$$(34) \quad (x_0 - x_3) (x_0 - a^2 x_3) - x_1 x_2 = 0;$$

ne sono generatrici le due seguenti serie di  $\infty'$  rette:

$$(34') \quad x_3 - x_0 + \frac{1}{\lambda} x_1 = 0, \quad a^2 x_3 - x_0 + \lambda x_2 = 0$$

$$(34'') \quad x_3 - x_0 + \frac{1}{\lambda} x_2 = 0, \quad a^2 x_3 - x_0 + \lambda x_1 = 0,$$

la prima costituita da unisecanti, la seconda di trisecanti.

f) Le coordinate della corda che unisce i punti  $\alpha, \beta$  della curva ha coordinate proporzionali alle quantità seguenti:

$$-(\alpha^3 \beta^3 + a^2 \alpha^2 \beta^2), 1 + \alpha \beta, a^2 \beta^2 - (\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2), \alpha \beta (\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2) - a^2 \alpha \beta, \\ \alpha \beta (\alpha + \beta), a^2 \beta^2 (\alpha + \beta) - (\alpha^3 + \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 + \beta^3) + a^2 (\alpha + \beta);$$

perciò quelle della tangente del punto  $\omega$  lo sono alle altre:

$$-\omega^4 (\omega^2 + a^2), 1 + \omega^2, \omega^2 (\omega^2 - 3), \omega^2 (3\omega^2 - a^2), 2\omega^3, 2\omega (\omega^4 - 2\omega^2 + a^2).$$

g) Se  $\omega, \omega_1$  sono gli estremi di una corda principale, assieme alla (29) sussisterà l'equazione

$$\omega (\omega_1^3 + 3\omega_1) + 3\omega_1^2 + a^2 = 0;$$

eliminando  $\omega_1$  se trae

$$\omega^8 + 6\omega^6 - 6a^2 \omega^2 - a^4 = 0,$$

la quale si spezza nelle due

$$\omega^4 + 6\omega^2 + a^2 = 0, \quad \omega^4 - a^2 = 0;$$

ma la prima non differisce dalla (30) onde riconduce ai piani stazionari, la seconda invece ha per radici  $\pm \sqrt{\pm a}$ . Se di più si ricorda che anche la congiungente dei punti 0 e  $\infty$  è una corda principale, si è autorizzati a concludere che la data curva ammette come corde principali le rette che uniscono i punti

$$0, \infty; \sqrt{a}, -\sqrt{a}; \sqrt{-a}, -\sqrt{-a}$$

Ora la (24) mostra che i quattro punti  $0, \infty, \omega_1, \omega_2$  stanno in un piano quando  $\omega_1 + \omega_2 = 0$ ; per conseguenza la prima delle corde principali taglia le altre due; ma — sempre in forza della (24) — anche queste s'incontrano; e siccome le tre corde principali non stanno nel medesimo piano (altrimenti questo avrebbe con la curva sei punti in comune) così si conclude che le tre corde principali di una quartica gobba di II specie concor-



rono nel medesimo punto. Siccome i piani contenenti ognuno due corde principali hanno per equazioni

$$ax_3 - x_0 = 0, \quad ax_3 + x_0 = 0, \quad a^2x_3 + x_2 = 0,$$

così quel punto ha per coordinate  $0, a^2, -1, 0$ .

h) Se la curva ha un punto doppio e se questo corrisponde ai valori  $\omega_1, \omega_2$  del parametro, la (24) deve sussistere per tutti i valori di  $\omega_3, \omega_4$ : donde le relazioni

$$a^2 + \omega_1\omega_2 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 = 0, \quad \omega_1\omega_2 = 1,$$

le quali coesistono soltanto quando sia  $a^2 + 1 = 0$ .

Siccome tali valori sono sempre distinti così resta dimostrato che della rappresentazione parametrica (22) non sono suscettibili le quartiche gobbe cuspidate.

#### B) QUARTICHE DI SECONDA SPECIE PARTICOLARI.

##### § 1. Quartiche equianarmoniche.

Passando ora ad occuparci delle quartiche gobbe di II specie che offrono qualche particolarità, osserveremo che ad alcune di esse si può giungere attribuendo valori speciali alla costante  $a$  che entra nella rappresentazione parametrica del Bertini; del caso  $a^2 + 1 = 0$  (quartica con punto doppio) parleremo diffusamente fra poco (§ 3); ora tratteremo l'ipotesi  $a^2 = -3$  riserbando al § seguente il caso  $a^2 = 9$ .

Nel caso suindicato l'equazione determinatrice dei punti di contatto dei piani tangenti stazionari diviene

$$\omega^4 + 6\omega^2 - 3 = 0$$

onde ha per radici  $\pm\sqrt{-3 \pm 2\sqrt{3}}$ ; siccome il birapporto di questi quattro numeri vale  $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ , cioè è eguale ad una radice cu-

bica immaginaria di  $-1$ , così quei punti di contatto costituiscono un gruppo equianarmonico, epperò *equianarmonica* si chiama in tal caso la curva considerata.

Le equazioni tangenziale e locale della quadrica involupata dagli  $\infty'$  piani seganti la data curva in quaterne equianarmoniche sono risp.

$$3\xi_0\xi_1 - (3\xi_1 - \xi_2)^2 = 0, \quad (x_1 + 3x_2)^2 = 0;$$

essa quindi si riduce ad una conica situata nel piano

$$x_1 + 3x_2 = 0;$$

questo taglia la curva ne' punti determinati dall'equazione  $\omega^4 + 6\omega^2 - 3 = 0$ , epperò si conclude: *gli  $\infty'$  piani seganti una quartica equianarmonica in quaterne equianarmoniche di punti involupano una conica appartenente al piano su cui stanno i punti di contatto dei quattro piani stazionari.*

Nel caso generale vedemmo (p. 293) che i piani stazionari sono determinati dall'equazione

$$\omega^4 + 6\omega^2 + a^2 = 0;$$

onde si ha

$$(\omega)_2 = 6, \quad (\omega)_4 = a^2;$$

ricordando la condizione di coplanarità di quattro punti, si vede che, affinché essa sia soddisfatta dai punti di contatto dei piani stazionari, si deve avere  $a^2 + 3 = 0$ . Ciò autorizza a concludere: *Le quartiche equianarmoniche sono caratterizzate dall'essere coplanari i punti di contatto dei loro piani stazionari.*

##### § 2. Quartiche con due tangenti stazionarie <sup>1)</sup>.

L'equazione  $\omega^4 + 6\omega^2 + a^2 = 0$ , che determina i punti di contatto dei piani stazionari in una quartica di II specie rappresentata con le formole del Bertini, ha per primo membro un qua-

1) L'attenzione dei geometri fu attratta su questa curva dal fatto che di tale specie sono le asintotiche della superficie di Steiner: cfr. Clebsch, *Ueber die Steiner'sche Fläche* (Journ. f. r. u. a. Math. T. LXVII, 1867, p. 1-22), Cremona, *Rappresentazione della superficie di Steiner e delle superficie gobbe di terzo grado sopra un piano* (Rendic. dell'Ist. Lomb., Ser. I, vol. IV, 1867 oppure, Opere, T. II, p. 389-395). Le ritroveremo come asintotiche di un'altra specie di superficie (Cap. XII, D. § 1).

drato perfetto quando e sol quando sia  $a^2 = 9$ ; la curva ha allora due soli piani stazionari corrispondenti ai valori  $\pm\sqrt{3}$  del parametro, nei quali la curva ammette due tangenti stazionarie. Nelle fatte ipotesi l'equazione (33) della pag. 294 che rappresenta l'osculatore è divisibile per  $\omega^2 + 3$  e diviene

$$(\omega^4 - 18\omega^2 + 9)x_0 + (\omega^4 - 9)x_1 - \omega(\omega^2 + 3)x_2 + \omega(\omega^2 - 3)x_3 = 0.$$

donde emerge che la curva è di quarta classe. Essa è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica

$$(1) \quad \rho r_0 = \omega^4, \quad \rho x_1 = \omega^3, \quad \rho x_2 = \omega, \quad \rho r_3 = 1,$$

indicata del Cremona <sup>1)</sup> e che si ottiene assumendo come vertici  $A_0, A_3$  del tetraedro fondamentale i due punti singolari della curva, come facce  $A_0A_1A_2$  e  $A_1A_2A_3$  i corrispondenti osculatori e come spigoli  $A_0A_1, A_2A_3$  le tangenti in detti vertici. Dalle (1) si deduce anzitutto che la curva corrispondente è intersezione (parziale) delle due superficie:

$$(2) \quad x_0x_3 - x_1x_2 = 0, \quad x_1^2x_3 - x_0^2x_2 = 0;$$

essa taglia il piano

$$\xi_0x_0 + \xi_1x_1 + \xi_2x_2 + \xi_3x_3 = 0,$$

nei punti i cui parametri sono radici dell'equazione

$$(3) \quad \xi_0\omega^4 + \xi_1\omega^3 + \xi_2\omega + \xi_3 = 0;$$

se ne deduce

$$(\omega)_1 = -\frac{\xi_1}{\xi_0}, \quad (\omega)_2 = 0, \quad (\omega)_3 = -\frac{\xi_2}{\xi_0}, \quad (\omega)_4 = \frac{\xi_3}{\xi_0},$$

donde emerge che la condizione di coplanarità dei punti di parametri  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  è:

$$(4) \quad \omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \omega_1\omega_3 + \omega_4\omega_2 + \omega_1\omega_4 + \omega_2\omega_3 = 0;$$

<sup>1)</sup> Sopra una certa curva gobba di quart'ordine (Rend. Ist. Lomb., II Ser., T. I, 1868, oppure, Opere matem., T. II, Milano, 1915, p. 402-4).

Posto poi, come già si fece,

$$s_1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad s_2 = \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 + \omega_1\omega_2, \quad s_3 = \omega_1\omega_2\omega_3,$$

si ha dalla (4)

$$\omega_4 = -\frac{s_2}{s_1}$$

epperò le formole precedenti divengono:

$$-\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{s_1^2 - s_2}{s_1}, \quad -\frac{\xi_2}{\xi_0} = \frac{s_1s_3 - s_2^2}{s_1}, \quad \frac{\xi_3}{\xi_0} = -\frac{s_2s_3}{s_1};$$

ciò prova che il piano determinato dai tre punti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  ha per equazione:

$$(5) \quad s_1x_0 - (s_1^2 - s_2)x_1 - (s_1s_3 - s_2^2)x_2 - s_2s_3x_3 = 0.$$

Supponendo  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$  questa diviene

$$(6) \quad x_0 - 2\omega x_1 + 2\omega^3 x_2 - \omega^4 x_3 = 0,$$

equazione dell'osculatore, la quale conferma essere la curva in esame di quarta classe. La (6) serve anche a determinare i punti di contatto degli osculatori della curva uscenti dal punto di coordinate  $x_0, x_1, x_2, x_3$ ; e siccome essa prova essere  $(\omega)_4 = 0$  così si conclude: *i punti di contatto della curva in questione con i suoi osculatori uscenti da un punto arbitrario dello spazio appartengono allo stesso piano.* Se

$$\xi_0X_0 + \xi_1X_1 + \xi_2X_2 + \xi_3X_3 = 0$$

(ove  $X_0, X_1, X_2, X_3$  sono coordinate correnti) è l'equazione di tale piano, l'equazione

$$\xi_0\omega^4 + \xi_1\omega^3 + \xi_2\omega + \xi_3 = 0$$

deve coincidere con la (5), il che esige si abbia

$$-\frac{\xi_0}{x_3} = \frac{\xi_1}{2x_2} = -\frac{\xi_2}{2x_1} = \frac{\xi_3}{x_0};$$

perciò la (6) diviene

$$(x_3 X_0 - x_0 X_3) + 2(x_1 X_2 - x_2 X_1) = 0.$$

essendo questa soddisfatta da  $X_i = x_i$  si vede che il piano di cui parla il teorema precedente passa per il punto considerato e che punti ed osculatori della curva si corrispondono rispetto al complesso lineare

$$(7) \quad p_{03} - 2p_{12} = 0.$$

Calcolando gl'invarianti quadratico e cubico del primo membro della (6) ed eguagliando a 0 i risultati si vede che:  
a) Il luogo dei punti da cui escono quaterne equianarmoniche di osculatori della data curva ha per equazione  $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$ , onde coincide con la quàdrca passante per la curva; siccome tale quàdrca consta di trisecanti della curva così risulta chiaro che da ogni trisecante della data curva si possono condurre quattro osculatori equianarmonici della curva stessa.

b) Il luogo dei punti da cui escono quaterne armoniche di osculatori della data curva ha per equazione  $x_1^2 x_3 - x_0^2 x_2 = 0$ , onde coincide con la rigata cubica dianzi considerata.

Le superficie che corrispondono a queste due rispetto al complesso lineare (7) godono di proprietà correlative a quelle ora stabilite.

Se nella condizione di coplanarità  $(\omega)_4 = 0$  facciamo  $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega$  si ottiene  $\omega_1 + \omega_2 = 0$ , la quale ci dice: se si fa corrispondere un punto della data curva a quello in cui la stessa è tagliata dal corrispondente osculatore, si ottiene una relazione proiettiva involutoria avente per punti uniti i due punti singolari della curva.

Può giovare l'osservazione che la tangente alla curva nel punto  $\omega$  ha coordinate proporzionali alle espressioni

$$\omega^6, 3\omega^4, 4\omega^3, 1, -3\omega^2, 2\omega_3$$

donde emerge che la curva è di sesta classe, come nel caso generale.

Va da ultimo notato che la rappresentazione parametrica cremoniana presuppone la realtà dei due punti singolari della

curva; in tal caso, se si usano coordinate cartesiane la curva può anche rappresentarsi come segue:

$$(8) \quad \begin{cases} x = a \frac{\lambda^3 + \lambda}{\lambda^4 + 1} \\ y = b \frac{\lambda^3 - \lambda}{\lambda^4 + 1} \\ z = c \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^4 + 1}; \end{cases}$$

mentre nell'ipotesi contraria servono queste altre formole:

$$(8) \quad \begin{cases} x = -a \frac{2\mu(1 + \mu^2)}{1 - 6\mu^2 + \mu^4} \\ y = b \frac{1 - \mu^4}{1 - 6\mu^2 + \mu^4} \\ z = c \frac{4\mu(1 - \mu^2)}{1 - 6\mu^2 + \mu^4}. \quad 1) \end{cases}$$

Nel primo caso la condizione di coplanarità è, come prima,  $(\lambda)_2 = 0$  ed i punti singolari sono quelli di coordinate  $(0, 0, \pm c)$ ; mentre nel secondo quella si presenta sotto la forma  $3(\mu)_4 + (\mu)_2 + 3 = 0$  e questi hanno per coordinate  $(0, 0, \pm ci)$ .

### § 3. Quartiche gobbe con punto doppio.

Come rappresentazione analitica della curva giova in questo caso assumere la seguente: <sup>2)</sup>

$$(1) \quad \varrho x_0 = \omega^3, \quad \varrho x_1 = \omega^2, \quad \varrho x_2 = \omega, \quad \varrho x_3 = \omega^4 + k \quad \text{ove } k \neq 0.$$

Ai valori  $\omega = 0$  e  $\omega = \infty$  corrisponde il punto avente nulle le sue tre prime coordinate, onde il vertice  $A_3$  del tetraedro

1) G. Frauenfeld. *Büschel von Raumkurven 4. Ordnung II Art mit zwei stationäre Tangenten* (Diss., Zürich 1903, p. 12-27).

2) Le prerogative del tetraedro fondamentale risultano dalle considerazioni seguenti.

fondamentale è punto doppio della curva. Siccome dalle (1) si trae

$$(2) \quad x_0 x_2 - x_1^2 = 0, \quad x_0^2 + k x_2^2 - x_1 x_3 = 0,$$

così la curva si può intendere intersezione di queste due superficie, la seconda delle quali è il cono che proietta la curva dal punto  $A_3$ ; essa è base di un fascio di quadriche contenente questi altri due coni:

$$(3) \quad (x_0 \pm \sqrt{k} x_2)^2 - x_1 (\pm \sqrt{k} x_1 + x_3) = 0.$$

Le intersezioni della curva col piano

$$\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

corrispondono ai valori del parametro che soddisfano l'equazione

$$(4) \quad \xi_0 \omega^3 + \xi_1 \omega^2 + \xi_2 \omega + \xi_3 (\omega^4 + k) = 0.$$

Ciò prova che la condizione di coplanarità dei quattro punti di coordinate  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  è:

$$(5) \quad \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 = k^1);$$

quindi per ogni punto della curva passano tre osculatori della stessa e questa ammette quattro piani stazionari determinati dell'equazione

$$\omega^4 = k;$$

di essi al più due sono reali, quando  $k > 0$ . Gli estremi  $\alpha, \beta$  di una corda principale devono evidentemente soddisfare alle equazioni

$$\alpha^3 \beta = k, \quad \alpha \beta^3 = k;$$

da queste si trae

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha^4 + k = 0;$$

per ciò la curva ammette due corde principali, cioè la congiungente dei punti  $\pm \sqrt{\sqrt{-k}}$  e  $\pm \sqrt{-\sqrt{-k}}$ ; siccome il prodotto di

<sup>1)</sup> Em. WEYR, *Ueber rationale Curven vierter Ordnung* (Math. Annalen. T. IV, 1871, p. 242-43).

questi valori vale  $k$ , così, ricordando la (4), si vede che una quartica gobba nodata ammette due sole corde principali poste nel medesimo piano. E poichè l'equazione  $\alpha^4 + k = 0$  prova che gli estremi delle corde principali sono le intersezioni della quartica col piano  $x_3 = 0$ , questo è il piano delle due corde principali.

Dalle (4) si trae, oltre la (5),

$$(\omega)_1 = -\frac{\xi_0}{\xi_3}, \quad (\omega)_2 = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad (\omega)_3 = -\frac{\xi_2}{\xi_3};$$

onde, eliminando  $\omega_4$  e ponendo

$$s_1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad s_2 = \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1 + \omega_1 \omega_2, \quad s_3 = \omega_1 \omega_2 \omega_3$$

si trova

$$\frac{s_1 s_3 + k}{s_3} = -\frac{\xi_0}{\xi_3}, \quad \frac{s_2 s_3 - k s_1}{s_2} = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \frac{s_3^2 + k s_2}{s_3} = -\frac{\xi_2}{\xi_3};$$

dunque il piano determinato dai tre punti  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  della curva ha per equazione:

$$(6) \quad (s_1 s_3 + k) x_0 - (s_2 s_3 - k s_1) x_1 + (s_3^2 + k s_2) x_2 - s_3 x_3 = 0.$$

Ciò prova che l'equazione

$$(3\omega^4 + k) x_0 - (3\omega^5 - 3k\omega) x_1 + (\omega^6 + 3k\omega^2) x_2 - \omega^3 x_3 = 0,$$

rappresenta l'oscultore in  $\omega$  alla data curva; questa è, in conseguenza, di sesta classe ed i piani  $x_0 = 0, x_2 = 0$  sono quelli che osculano la data curva nel punto doppio  $A_3$ .

Si seghi la data curva con tre piani arbitrari  $\lambda, \mu, \nu$ ; le tre risultanti quaterne di punti danno luogo alle seguenti relazioni:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = k, \quad \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 = k, \quad \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 = k;$$

i punti  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$  determinano un piano, il quale incontra la curva in un quarto punto  $\pi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ); si avrà allora, sempre in virtù della condizione di coplanarità,

$$\lambda_1 \mu_1 \nu_1 \pi_1 = k, \quad \lambda_2 \mu_2 \nu_2 \pi_2 = k, \quad \lambda_3 \mu_3 \nu_3 \pi_3 = k, \quad \lambda_4 \mu_4 \nu_4 \pi_4 = k,$$

relazioni che, in virtù delle precedenti, danno quest'altra:

$$\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 = k,$$

la quale prova che i quattro punti  $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$  stanno nel medesimo piano; in particolare: se quattro punti stanno in un piano, i corrispondenti osculatori tagliano ancora la curva in quattro punti coplanari.

La tangente nel punto  $\omega$  è rappresentata da due qualunque delle quattro equazioni

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \omega^3 & \omega^2 & \omega & \omega^4 + k \\ 3\omega^2 & 2\omega & 1 & 4\omega^3 \end{array} \right\| = 0.$$

ossia, svolgendo,

$$\begin{aligned} x_0 - 2\omega x_1 + \omega^2 x_2 &= 0 \\ 2(\omega^4 - k)x_0 - \omega(\omega^4 - 3k)x_1 - \omega^3 x_3 &= 0 \\ (3\omega^4 - k)x_0 - \omega^2(\omega^4 - 3k)x_2 - 2\omega^3 x_3 &= 0 \\ (3\omega^4 - k)x_1 - 2\omega(\omega^4 - k)x_2 + \omega x_3 &= 0; \end{aligned}$$

in particolare le tangenti nel punto doppio hanno risp. per equazioni  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0$  e  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ; ciò prova che il piano  $x_1 = 0$  è quello determinato dalle due tangenti alla data curva nel suo punto doppio. Un'altra rappresentazione analitica delle tangenti della data curva si ottiene considerando la corda che ne unisce due punti arbitrari  $\alpha$ ,  $\beta$ ; questa ha coordinate proporzionali ai determinanti estratti dalla matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & \alpha^4 + k \\ \beta^3 & \beta^2 & \beta & \beta^4 + k \end{array} \right\|$$

cioè alle quantità

$$\begin{aligned} \alpha^2 \beta^2, k - \alpha \beta (\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2), \alpha \beta (\alpha + \beta), (\alpha^2 \beta^2 - k) (\alpha + \beta), \\ k (\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2) - \alpha^3 \beta^3, \alpha \beta; \end{aligned}$$

facendo ivi  $\alpha = \beta = \omega$  si conclude che per la tangente in questo punto le coordinate sono proporzionali alle seguenti espressioni:

$$\lambda^4, -3\lambda^4, 2\lambda^3, 2\lambda(\lambda^4 - k), 3k\lambda^2 - \lambda^6, \lambda^2$$

donde risulta che la curva è di rango 6 e che le sue tangenti appartengono al complesso lineare di equazione

$$3p_{01} + p_{23} = 0.$$

Se  $\lambda$  e  $\mu$  sono i punti di contatto di un piano bitangente alla nostra curva sussisterà, in conseguenza della (5), la relazione

$$\lambda^2 \mu^2 = k;$$

questa prova che, dato  $\mu$ ,  $\lambda$  è suscettibile di due valori, onde ogni tangente  $l$  della curva è incontrata da altre due  $m'$ ,  $m''$ . Se  $\mu'$ ,  $\mu''$  sono i parametri dei corrispondenti punti di contatto si avranno le due relazioni:

$$\lambda^2 \mu'^2 = k, \lambda^2 \mu''^2 = k;$$

ora  $m'$  è incontrata, oltrechè da  $l$ , da una nuova tangente  $n$ , la quale dà luogo alla relazione

$$\nu^2 \mu'^2 = k,$$

che, combinata alle precedenti, dà  $\lambda^2 = \nu^2$  epperò  $\nu^2 \mu''^2 = k$ , e questa prova che  $n$  è anche la seconda delle tangenti che incontrano  $m''$ ; tutto ciò mostra che le quattro rette  $l$ ,  $m'$ ,  $m''$  e  $n$  costituiscono un quadrilatero gobbo. Ora dalle formole precedenti

si deducono queste altre  $\mu' = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}$ ,  $\mu'' = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}$ ,  $\nu = -\lambda$ , donde  $\lambda \mu' \mu'' \nu = k$  relazione che ci dice: Se un quadrilatero è circoscritto ad una quartica gobba con punto doppio, i punti di contatto dei suoi lati appartengono allo stesso piano.

Nel caso in cui il punto della curva sia, non un nodo, ma un punto isolato, non è più applicabile la rappresentazione parametrica (1); si può allora servirsi della seguente:

$$qx_0 = 1 + \omega^2, qx_1 = \omega^2(1 + \omega^2), qx_2 = \omega(1 + \omega^2), qx_3 = \frac{1}{h}(1 - \omega^2)^2;$$



$$\varrho (A_{03}x_0 + A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3) = \Delta \lambda$$

$$\varrho (A_{04}x_0 + A_{14}x_1 + A_{24}x_2 + A_{34}x_4) = \Delta;$$

epperò la curva può rappresentarsi come segue

$$\sigma y_0 = \lambda^4, \quad \varrho y_1 = \lambda^2, \quad \varrho y_2 = \lambda, \quad \sigma y_3 = 1,$$

onde (p. 306) possiede una *cuspidè*. Alla stessa conclusione si perviene supponendo nulli tutti i coefficienti  $a_{03}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ ; se finalmente ciò accade riguardo ai coefficienti  $a_{02}, a_{12}, a_{22}, a_{22}$  la curva è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica

$$\tau z_0 = \lambda^4, \quad \tau z_1 = \lambda^3, \quad \tau z_2 = \lambda, \quad \tau z_3 = 1,$$

epperò (p. 298) è dotata di due tangenti stazionarie.

Emerge da tutto ciò che *l'annullarsi di una verticale*

della matrice  $\begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{04} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{30} & \dots & a_{34} \end{vmatrix}$  esprime una proprietà della curva indipendente dal sistema di riferimento scelto.

### § 5. Linea d'ombra propria per raggi paralleli d'una conoide di Plücker.

Questa superficie è una rigata di terzo grado che può rappresentarsi mediante l'equazione seguente:

$$(1) \quad y(x^2 + z^2) - az^2 = 0.$$

Supposto che la direzione dei raggi luminosi formi con gli assi coordinati gli angoli  $\lambda, \mu, \nu$ , la linea d'ombra propria è l'intersezione della data superficie con la quadrica

$$(2) \quad 2xy \cos \lambda + (x^2 + z^2) \cos \mu + 2z(y - a) \cos \nu = 0.$$

Siccome questa passa per l'asse delle  $y$ , che è retta doppia della data conoide, così l'intersezione consta di tale retta, contata due volte, e di una curva di quart'ordine per la quale

non passa altra quadrica. Per trovare la rappresentazione parametrica di tale curva poniamo

$$x = tz;$$

la (1) dà

$$(3) \quad y = \frac{a}{1+t^2}.$$

Sostituendo questi valori nella (2) si trova

$$(4) \quad z = \frac{2at(t \cos \lambda - \cos \nu)}{(1+t^2)^2 \cos \mu}$$

e quindi

$$(5) \quad x = \frac{2at^2(t \cos \lambda - \cos \nu)}{(1+t^2)^2 \cos \mu}.$$

Le (3), (4), (5) sono le formole cercate; esse provano che la curva in questione non ammette all'infinito alcun punto reale<sup>1)</sup>.

### § 6. Linea di stringimento dell'iperboloide ad una falda<sup>2)</sup>.

Se  $g$  è una generatrice di una superficie rigata  $R$  e si considerano le coppie di piani ortogonali passanti per essa, questi saranno piani tangenti di  $R$  ed i loro punti di contatto costituiranno un'involuzione, nella quale al punto all'infinito di  $g$

1) Dal punto di vista costruttivo tale curva trovasi investigata nella nota di O. Danzer, *Schattenkonstruktion für das Plücker'sche Konoid* (Wiener Sitzungsber., T. CXXIII, Abt. II, 1914, p. 2049-64).

2) La nozione generale di linea di stringimento di una rigata ed il primo studio di quella di un sistema di generatrici di una quadrica appartengono a M. Chasles (*Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*; Corr. math. et phys., T. XI, 1839, p. 49-113). Dopo ne trattarono tutti coloro che esposero con larghezza la geometria descrittiva. Il metodo analitico adottato nel testo trovasi, con altri sviluppi ed una completa bibliografia, nella memoria di R. Mehmke *Ueber die Striktionlinien des einschaligen Hyperboloids* (Württemberg. Mit., II Ser., T. VI, 1904, p. 1-27); mentre dal punto di vista costruttivo ha importanza il posteriore lavoro di O. Danzer, *Einfache Konstruktion für metrisch spezielle Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art* (Wiener Sitzungsber., T. CXXII, Abt. II, 1913, p. 1107-34).

corrisponde il *punto centrale* della stessa. Il luogo di tutti i punti analoghi è la *linea di stringimento* di  $R$ . Nell'ipotesi che questa sia costituita dalle generatrici di un sistema dell'iperboloide ad una falda avente per equazione

$$(1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \text{ ove } a > b,$$

giòva sostituire a questa le due equazioni seguenti (ove  $t, u$  sono parametri arbitrari)

$$(2) \quad x = a(\cos t + u \operatorname{sen} t), \quad y = b(\operatorname{sen} t - u \cos t), \quad z = cu;$$

allora per rappresentare un sistema di generatrici della superficie serve la doppia equazione seguente:

$$\frac{x - a \cos t}{a \operatorname{sen} t} = \frac{y - b \operatorname{sen} t}{-b \cos t} = \frac{z}{c}.$$

L'equazione generale del piano tangente alla superficie (2) è

$$\begin{vmatrix} \frac{x - a \cos t}{a} & \frac{y - b \operatorname{sen} t}{b} & \frac{z - cu}{c} \\ -\operatorname{sen} t + u \cos t & \cos t + u \operatorname{sen} t & 0 \\ \operatorname{sen} t & -\cos t & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\frac{(x - a \cos t)(\cos t + u \operatorname{sen} t)}{a} + \frac{(y - b \operatorname{sen} t)(\operatorname{sen} t - u \cos t)}{b} - \frac{z}{c} u = 0.$$

Emerge da ciò che l'equazione dell'anzidetta involuzione relativa alla generatrice di parametro  $t$ , è

$$\frac{(\cos t + u_1 \operatorname{sen} t)(\cos t + u_2 \operatorname{sen} t)}{a^2} + \frac{(\operatorname{sen} t - u_1 \cos t)(\operatorname{sen} t - u_2 \cos t)}{b^2} + \frac{u_1 u_2}{c^2} = 0.$$

Facendo ivi  $u_1 = u$ ,  $u_2 = \infty$  si trova:

$$u = \frac{c^2(a^2 - b^2) \operatorname{sen} t \cos t}{a^2 b^2 + c^2(a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t)} = \frac{c^2(a^2 - b^2) \operatorname{sen} t \cos t}{a^2(b^2 + c^2) - c^2(a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 t}.$$

Sostituendo questo valore nella (2) si ottengono le equazioni seguenti:

$$(3) \quad \begin{cases} x = \frac{a^3(b^2 + c^2) \cos t}{a^2(b^2 + c^2) - c^2(a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 t} \\ y = \frac{b^3(a^2 + c^2) \operatorname{sen} t}{a^2(b^2 + c^2) - c^2(a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 t} \\ z = \frac{c^3(a^2 - b^2) \operatorname{sen} t \cos t}{a^2(b^2 + c^2) - c^2(a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 t}, \end{cases}$$

le quali costituiscono la cercata rappresentazione parametrica della linea di stringimento del I sistema di generatrici del dato iperboloide; quella del II si ottiene mutando nelle (3) i segni dei secondi membri e ciò perchè i due sistemi di generatrici di una quadrica si corrispondono in una simmetria concentrica alla data superficie.

Se si pone

$$k^2 = \frac{c^3(a^2 - b^2)}{a^2(b^2 + c^2)}, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{b^2(a^2 + c^2)}{a^2(b^2 + c^2)}$$

le (3) assumono la seguente forma più semplice:

$$x = \frac{a \cos t}{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}, \quad y = \frac{b k'^2 \operatorname{sen} t}{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 t}, \quad z = \frac{c k^2 \operatorname{sen} t \cos t}{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t};$$

essendo  $k^2 < 1$ , il comune denominatore non si annulla per alcun valore reale di  $t$ , epperò la curva non si estende all'infinito. Ora la terza di queste equazioni si può scrivere

$$\frac{c^2 k^4}{z^2} = (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t)^2 \left( \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t} \right),$$

ossia, grazie alle due prime,

$$\frac{c^2 k^4}{z^2} = \frac{k'^4 b^2}{y^2} + \frac{a^2}{x^2},$$

equazione di un cono di quart'ordine segante la data quadrica nelle linee di stringimento dei due sistemi di generatrici di questa superficie.



Sostituendo nelle (4) a  $t$  il parametro  $\lambda = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$  si ottengono per  $x, y, z$  delle espressioni biquadratiche in  $\lambda$  avente il medesimo comune denominatore, donde emerge che la linea di stringimento di un sistema di generatrici di una quadrica è una quartica razionale; siccome dimostreremo fra poco che non ha punti doppi, così risulterà che è una quartica di II specie per la quale non passa altra quadrica se non quella donde partimmo.

Le proiezioni della curva (4) sui tre piani coordinati hanno risp. per equazioni:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( \frac{y^2}{k'^2 b^2} - \frac{z^2}{k^2 c^2} \right)^2 &= \frac{y^2}{k^4 b^2} - \frac{z^2}{k^4 c^2} \\ \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{k^4 c^2} \right)^2 &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{k^4 c^2} \\ \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k'^2 b^2} \right)^2 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k'^4 b^2}; \end{aligned} \right.$$

sono, quindi, quartiche ciascuna con tre punti doppi, uno situato nell'origine delle coordinate, gli altri (isolati) all'infinito sugli assi.

Le intersezioni della curva (4) col piano

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0$$

corrispondono ai valori di  $t$  che soddisfano l'equazione:

$$a\xi \cos t + bk'^2 y \operatorname{sen} t + c\zeta k^2 \operatorname{sen} t \cos t + (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t) = 0,$$

ossia, introducendo il parametro  $\lambda$  dianzi definito

$$(6) \quad (1 - a\xi)\lambda^4 + 2(k'^2 b\eta - k^2 c\zeta)\lambda^3 + 2(1 - 2k^2)\lambda^2 + 2(k'^2 b\eta + k^2 c\zeta)\lambda + (1 + a\xi) = 0;$$

servendosi di notazioni già usate ne deduciamo:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} (\lambda)_1 &= -2 \frac{k'^2 b\eta - k^2 c\zeta}{1 - a\xi} \\ (\lambda)_2 &= 2 \frac{1 - 2k^2}{1 - a\xi} \\ (\lambda)_3 &= -2 \frac{k'^2 b\eta + k^2 c\zeta}{1 - a\xi} \\ (\lambda)_4 &= \frac{1 + a\xi}{1 - a\xi}. \end{aligned} \right.$$

Se ne trae

$$1 + (\lambda)_4 = \frac{2}{1 - a\xi}, \quad \frac{1 + (\lambda)_4}{(\lambda)_2} = \frac{1}{1 - 2k^2},$$

epperò

$$(7) \quad (1 - 2k^2)[1 + (\lambda)_4] - (\lambda)_2 = 0$$

è la condizione di coplanarità dei quattro punti di parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ . Se la curva avesse un punto doppio e se questo corrispondesse ai valori  $\lambda_1, \lambda_2$  del parametro la precedente dovrebbe essere soddisfatta per tutti i valori di  $\lambda_3, \lambda_4$  il che esige sia:

$$1 - 2k^2 = \lambda_1 \lambda_2, \quad (1 - 2k^2) \lambda_1 \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0;$$

ora dalle due prime si trae

$$(1 - 2k^2)^2 - 1 = 0$$

ossia

$$k^2(1 - k^2) = 0$$

o anche

$$k^2 k'^2 = 0$$

la quale è soddisfatta o se  $a^2 = b^2$ , oppure se  $a^2 + c^2 = 0$  cioè quando la superficie è di rotazione; nel primo caso [v. eq. (3)] si ha  $z = 0$ , nel secondo  $y = 0$  onde sempre la linea di stringimento è piana: è il corrispondente circolo di gola. Tutto ciò

dimostra che in generale la linea di stringimento è esente da punti doppi.

Risulta dalla (7) che i parametri dei punti stazionari corrispondono alle radici dell'equazione

$$(8) \quad (1 - 2k^2)(\lambda^4 + 1) - 6\lambda^2 = 0,$$

le quali valgono:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{3 \pm 2\sqrt{(1+k^2)(2-k^2)}}{1-2k^2}};$$

ora siccome  $0 < k^2 < 1$ ,  $\lambda^2$  è sempre reale ma è positivo o negativo secondoche  $k^2 \leq 1$ ; dunque i piani stazionari della curva sono tutti reali o tutti immaginari secondoche  $k^2 \leq \frac{1}{2}$ ; nel caso intermedio  $k^2 = \frac{1}{2}$ , la (8) ha per radici doppie 0 e  $\infty$  epperò i piani stazionari coincidono a coppie: da ciò la distinzione delle curve in questione in tre tipi, indicati dal La Gournerie e studiati poi dal Mehmke.

Osserviamo finalmente che i due invarianti della funzione biquadratica primo membro della (8) valgono  $(1 - 2k^2)^2 + 3$ ,  $9k^2k'^2$  epperò non sono nulli; donde, in particolare, segue che la curva non è equianarmonica e che i punti di contatto dei suoi piani stazionari non giacciono nel medesimo piano.

OSSEVAZIONE. - Applichiamo la stessa procedura alla ricerca della linea di stringimento dei due sistemi di generatrici del paraboloido iperbolico

$$(9) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Consideriamo ad esempio il sistema di generatrici rappresentate al variare di  $t$  dalle equazioni

$$(10) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = tz, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}.$$

1) In tal caso fra gli assi del dato iperboloido passa la relazione

$$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}.$$

Siccome la data superficie è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica

$$(11) \quad x = \frac{a}{2} \left( tu + \frac{1}{t} \right), \quad y = \left( tu - \frac{1}{t} \right), \quad z = u,$$

così l'equazione generale del piano tangente è:

$$\begin{vmatrix} x - \frac{a}{2t} & y + \frac{b}{2t} & z \\ \frac{a}{2} \left( u - \frac{1}{t^2} \right) & \frac{b}{2} \left( u + \frac{1}{t^2} \right) & 0 \\ \frac{a}{2} t & \frac{b}{2} t & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

per conseguenza sulla generatrice  $t$  nasce nel modo suesposto l'involutione

$$\frac{1}{a^2} \left( u_1 + \frac{1}{t^2} \right) \left( u_2 + \frac{1}{t^2} \right) + \frac{1}{b^2} \left( u_1 - \frac{1}{t^2} \right) \left( u_2 - \frac{1}{t^2} \right) + \frac{1}{2} = 0.$$

Facciamo ivi  $u_1 = u$ ,  $u_2 = \infty$  ed otterremo:

$$u = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{t^2}$$

epperò

$$tu + \frac{1}{t} = \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{t}, \quad tu - \frac{1}{t} = -\frac{2b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{t}.$$

Sostituendo questi valori nelle (11) se ne deduce

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{t}, \quad \frac{y}{b} = -\frac{b^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{t}, \quad z = t.$$

Ora da queste si trae

$$\frac{x}{a^3} + \frac{y}{b^3} = 0$$

percì la linea di stringimento del considerato sistema di generatrici altro non è che la sezione del dato paraboloido col

piano di cui si è testè scritta la equazione. Similmente l'altro sistema conduce alla conica sezione della medesima superficie col piano

$$\frac{x}{a^3} - \frac{y}{b^3} = 0.$$

Dunque: la linea di stringimento di un paraboloido iperbolico consta di due sezioni coniche <sup>1)</sup>.

§ 7. Podaria di un punto rispetto ad un sistema di generatrici d'un iperboloido ad una falda <sup>2)</sup>.

Il luogo dei piedi delle perpendicolari calate da un punto arbitrario  $P$  sulle generatrici di un cono quàdrico di vertice  $V$  è una curva che evidentemente appartiene alla sfera di diametro  $PV$ ; è anzi la quartica in cui questa sega il dato cono;  $V$  ne è punto doppio.

Per determinarne il luogo anologo relativo ad un sistema di generatrici dell'iperboloido

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

fissiamo la nostra attenzione sopra le  $\infty'$  generatrici che, al variare del parametro  $t$ , sono rappresentate (v. p. 310) dall'equazione

$$(2) \quad \frac{x - a \cos t}{a \sin t} = \frac{y - b \sin t}{-b \cos t} = \frac{z}{c}$$

Il piano condotto dal punto  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  perpendicolarmente alla generatrice così rappresentata ha la seguente equazione:

$$(4) \quad (x - \alpha) a \sin t - (y - \beta) b \cos t + (z - \gamma) c = 0,$$

<sup>1)</sup> Alla stessa conclusione giunse altrimenti G. Salmon, *Geometry of three dimensions*, T. II (V ed., London 1915, p. 84).

<sup>2)</sup> A. Grünwald, *Betrachtung von Fusspunktkurven in der Ebene und im Raume* (33. Jahresber. der II Stad. Realschule Prag-Kleinseite, 1906-7 p. 29-34).

onde taglia l'anzidetta generatrice nel punto le cui coordinate si ottengono risolvendo rispetto a  $x, y, z$  le equazioni (2), (3); eccone i valori:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{(b^2 + c^2) \cos t + a\alpha \sin^2 t - b\beta \sin t \cos t + c\gamma \sin t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2} \\ \frac{y}{b} &= \frac{(a^2 + c^2) \sin t - a\alpha \sin t \cos t + b\beta \cos^2 t - c\gamma \cos t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2} \\ \frac{z}{c} &= \frac{a\alpha \sin t - b\beta \cos t + \gamma - (a^2 - b^2) \sin t \cos t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2} \end{aligned} \right.$$

Introducendo, invece di  $t$ , il parametro  $\tau = tg \frac{t}{2}$  nascono

per esprimere  $x, y, z$  tre funzioni razionali fratte di quarto grado in  $\tau$  con il medesimo denominatore, il quale non si annulla per alcun valore reale del parametro; ciò prova che la podaria di un punto rispetto alle generatrici d'un sistema d'un iperboloido ad una falda è una quartica razionale non avente all'infinito alcun punto reale.

Nel caso in cui il punto fisso cade nel centro della superficie <sup>1)</sup> le (4) si semplificano e divengono

$$(5) \quad \frac{x}{a} = \frac{(b^2 + c^2) \cos t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2}, \quad \frac{y}{b} = \frac{(a^2 + c^2) \sin t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2},$$

$$\frac{z}{c} = -\frac{(a^2 - b^2) \sin t \cos t}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2},$$

di cui è palese l'analogia con quelle che rappresentano la linea di stringimento del considerato sistema di generatrice. Dalle (5) si deduce

$$\frac{a^2 (b^2 + c^2)^2}{x^2} + \frac{b^2 (a^2 + c^2)^2}{y^2} - \frac{c^2 (a^2 - b^2)^2}{z^2} = 0$$

equazione di un cono di quart'ordine il quale sega il dato iperboloido nelle podarie del suo centro rispetto ai suoi due si-

<sup>1)</sup> Cfr. O. Danzer, *Die zentrische Fusspunktkurven und die Striktionslinien des einmanteligen Hyperboloids* (Prog. d. Staatsrealschule Wien, 1913).

stemi di generatrici. A risultati analoghi si giunge considerando un sistema di generatrici d'un paraboloido iperbolico <sup>1)</sup>.

§ 8. *Quartiche di II specie degeneri.*

Applicando il già citato (v. p. 112) metodo del Brill si dimostra <sup>2)</sup> che le possibili forme speciali sotto cui può presentarsi una delle curve che stiamo studiando sono le seguenti:

- I. Curva con punto doppio o cuspidi.
- II. Cubica gobba e retta che la incontra in un punto.
- III. Conica ed una coppia di rette sghembe, ognuna delle quali incontra in un punto quella curva.
- IV. Conica ed una coppia di rette incidenti, una delle quali incontra in un punto quella curva.
- V. Quattro rette costituenti una linea poligonale aperta.
- VI. Tre rette sghembe ed una quarta che tutte le incontra.
- VII. Due coniche aventi un punto comune.
- VIII. Cubica piana (eventualmente spezzata in parti) e retta che non l' incontra.

In ognuno di questi casi la curva appartiene ad una determinata quàdrice, esclusi il I e l'VIII nei quali sta in infinite (nell'ultimo decomposte ciascuna in due piani).

<sup>1)</sup> Per altre quartiche razionali particolari, v. più avanti.

<sup>2)</sup> Cfr. la II Parte della memoria di Anna Crespi, *Forme di spezzamento delle quartiche gobbe di I e di II specie* (Gior. di Matem., T. LV, 1919).

CAPITOLO VIII.

CURVE SGHEMME ALGEBRICHE SPECIALI  
DI ORDINE DETERMINATO SUPERIORE A QUATTRO.

A) CURVE DI QUINTO ORDINE.

§ 1. *Quintiche razionali in generale.*

Una curva gobba razionale di quinto ordine è proiettata da un punto qualunque sopra un piano arbitrario secondo una quintica di genere 0, la quale in generale ha 6 punti doppi, 0 cuspidi e 9 flessi; la sua classe è quindi 8 e 12 è il numero delle sue tangenti doppie.

*Emerge da ciò che una quintica razionale è in generale di classe 9 e rango 8; per un punto arbitrario dello spazio passano 6 sue corde e 12 piani bitangenti <sup>1)</sup>.*

Se, in particolare, il centro di proiezione cade sulla curva obbiettiva la proiezione ottenuta è in generale di ordine 4 e classe 6, possiede 3 punti doppi, 0 cuspidi e 4 tangenti doppie. Ciò prova che:

*Per un punto arbitrario della curva passano 3 rette che l'incontrano ancora in due punti, 6 osculatori e 4 piani bitangenti.*

Per 16 punti di una quartica razionale e 3 punti esterni si può far passare una superficie di 3° ordine  $\Sigma_3$ , la quale conterrà totalmente la curva; se quella superficie viene rappresentata su un piano in modo che alle sue sezioni piane corrispondono le  $\infty^3$  cubiche passanti per sei punti fissi 1, 2, 3, 4, 5, 6 alle  $\infty^4$  coniche passanti (ad es.) per il punto 1 corrisponde-

<sup>1)</sup> Questi numeri, che noi deducemmo dalle formole di Plücker si possono confermare mediante la rappresentazione parametrica di cui fra poco.

ranno sulla superficie  $\Sigma_3$  altrettante quintiche razionali. Di questa superficie cinque rette <sup>1)</sup>  $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  rappresentate da altrettanti punti fondamentali sono 0-secanti; mentre le sei  $a_1, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$  sono 1-secanti, le  $c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}, c_{34}, c_{35}, c_{36}, c_{45}, c_{46}$  sono bisecanti, le cinque  $b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$  sono 3-secanti e finalmente la  $b_1$  è 4-secante: vedremo fra poco che questa è l'unica retta dotata di siffatta proprietà.

Una curva della specie in discorso è sempre suscettibile di una rappresentazione parametrica della seguente forma:

$$(1) \quad \varrho x_k = \sum_{i=0}^{i=5} a_{ki} \lambda^{5-i} \quad (k = 0, 1, 2, 3)^2).$$

Le sue intersezioni col piano

$$\sum_{k=0}^{k=3} \xi_k x_k = 0$$

corrispondono alle radici della seguente equazione in  $\lambda$

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{i=5} \lambda^{5-i} \sum_{k=0}^{k=3} a_{ki} \xi_k = 0,$$

la quale, ponendo

$$(3) \quad p_i = \sum_{k=0}^{k=3} a_{ki} \xi_k \quad (i = 0, 1, \dots, 5),$$

si può scrivere

$$(2') \quad p_0 \lambda^5 + p_1 \lambda^4 + p_2 \lambda^3 + p_3 \lambda^2 + p_4 \lambda + p_5 = 0.$$

Indicando al solito con  $(\lambda)_r$  la somma dei prodotti  $r$  a  $r$  delle radici di quest'equazione si avrà  $(\lambda)_r = (-1)^r \frac{p_r}{p_0}$ ; e detto

<sup>1)</sup> Ci serviamo qui delle notazioni generalmente in uso.

<sup>2)</sup> Le coordinate di un punto arbitrario di una quintica gobba razionale si possono esprimere come derivate terze di una forma binare di 8° ordine; ci limitiamo ad enunciare questo fatto perchè non ci accadrà di farne uso.

$\tau$  un fattore di proporzionalità le (3), potranno surrogarsi con queste altre formole

$$\begin{aligned} -\tau p_0 &+ a_{00} \xi_0 + a_{10} \xi_1 + a_{20} \xi_2 + a_{30} \xi_3 = 0 \\ \tau p_0 (\lambda)_1 &+ a_{01} \xi_0 + a_{11} \xi_1 + a_{21} \xi_2 + a_{31} \xi_3 = 0 \\ -\tau p_0 (\lambda)_2 &+ a_{02} \xi_0 + a_{12} \xi_1 + a_{22} \xi_2 + a_{32} \xi_3 = 0 \\ \tau p_0 (\lambda)_3 &+ a_{03} \xi_0 + a_{13} \xi_1 + a_{23} \xi_2 + a_{33} \xi_3 = 0 \\ -\tau p_0 (\lambda)_4 &+ a_{04} \xi_0 + a_{14} \xi_1 + a_{24} \xi_2 + a_{34} \xi_3 = 0 \\ \tau p_0 (\lambda)_5 &+ a_{05} \xi_0 + a_{15} \xi_1 + a_{25} \xi_2 + a_{35} \xi_3 = 0. \end{aligned}$$

Eliminando fra queste sei equazioni le quantità  $\tau p_0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ , che vi compaiono sotto forma lineare ed omogenea, si ottengono le equazioni compendiate nella seguente scrittura:

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{ccccc} -1 & a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ (\lambda)_1 & a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ -(\lambda)_2 & a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ (\lambda)_3 & a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ -(\lambda)_4 & a_{04} & a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ (\lambda)_5 & a_{05} & a_{15} & a_{25} & a_{35} \end{array} \right\| = 0;$$

esse si riducono a due indipendenti e rappresentano le condizioni di coplanarità dei cinque punti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$ .

Separiamo il punto  $\lambda_5$  ponendo:

$$\begin{aligned} (\lambda)_1 &= \sigma_1 + \lambda_5, \quad (\lambda)_2 = \sigma_2 + \sigma_1 \lambda_5, \quad (\lambda)_3 = \sigma_3 + \sigma_2 \lambda_5, \\ (\lambda)_4 &= \sigma_4 + \sigma_3 \lambda_5, \quad (\lambda)_5 = \sigma_5 + \sigma_4 \lambda_5, \end{aligned}$$

onde  $\sigma_r$  rappresenta la somma dei prodotti  $r$  a  $r$  di  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ; in conseguenza le (4) diverranno:

$$\left\| \begin{array}{cccc} -1 & , & a_{00} & , \dots , a_{30} \\ \sigma_1 + \lambda_5 & , & a_{01} & , \dots , a_{31} \\ -(\sigma_2 + \sigma_1 \lambda_5) & , & a_{02} & , \dots , a_{32} \\ \sigma_3 + \sigma_2 \lambda_5 & , & a_{03} & , \dots , a_{33} \\ -(\sigma_4 + \sigma_3 \lambda_5) & , & a_{04} & , \dots , a_{34} \\ \sigma_4 \lambda_5 & , & a_{05} & , \dots , a_{35} \end{array} \right\| = 0.$$

Ora se i quattro punti  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  stanno in linea retta queste equazioni debbono essere soddisfatte qualunque sia  $\lambda_5$ ; ciò esige si abbia:

$$(5) \quad \left\| \begin{array}{cccc} -1 & a_{00} & \dots & a_{30} \\ \sigma_1 & a_{01} & \dots & a_{31} \\ -\sigma_2 & a_{02} & \dots & a_{32} \\ \sigma_3 & a_{03} & \dots & a_{33} \\ -\sigma_4 & a_{04} & \dots & a_{34} \\ 0 & a_{05} & \dots & a_{35} \end{array} \right\| = 0, \quad \left\| \begin{array}{cccc} 0 & a_{00} & \dots & a_{30} \\ 1 & a_{01} & \dots & a_{31} \\ -\sigma_1 & a_{02} & \dots & a_{32} \\ \sigma_2 & a_{03} & \dots & a_{33} \\ -\sigma_3 & a_{04} & \dots & a_{34} \\ \sigma_4 & a_{05} & \dots & a_{35} \end{array} \right\| = 0.$$

Questa scrittura serve a rappresentare quattro equazioni distinte, lineari nelle quantità  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  le quali sono in generale sufficienti a determinare univocamente tali quantità; emerge da ciò che i punti d'appoggio di una quadrisecante sono radici di un'equazione biquadratica in generale determinata; dunque: *una quintica gobba razionale ammette in generale un'unica quadrisecante*. Se ne ha più di una, ne ammette infinite e si dirà in tal caso *di II specie* (di *I specie* nell'altra ipotesi); affinché ciò succeda è sufficiente che risulti indeterminato il valore di una delle quantità  $\sigma_1, \dots, \sigma_4$  tratto dalle equazioni (5), per la qual cosa *devono essere soddisfatte due condizioni*.

Sia  $q$  la quadrisecante di una quintica razionale di I specie e  $t$  una sua trisecante; proiettando da queste due rette i punti della curva si viene a stabilire una corrispondenza (1, 2) fra i fasci di piani aventi per assi le stesse rette; il luogo geometrico delle  $\infty'$  rette d'intersezione delle coppie di piani corrispondenti è una rigata  $R$  di 3° grado avente  $q$  per retta doppia. Da un'altra trisecante  $t'$  si ottiene similmente un'analoga rigata  $R'$ .  $R$  e  $R'$  si tagliano nella retta  $q$  contata quattro volte e nella data curva. Ciò prova che *una quintica razionale di I specie può sempre ottenersi come intersezione di due rigate di terzo grado aventi comune la direttrice doppia*.

Se un piano taglia la data curva in quattro punti coincidenti ed in un quinto distinto dai precedenti, fra i cor-

rispondenti parametri  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  sussisteranno le seguenti relazioni

$$(6) \quad \left\| \begin{array}{ccc} -1 & a_{00} & \dots & a_{03} \\ 4\lambda + \lambda_0 & a_{10} & \dots & a_{13} \\ -(6\lambda^2 + 4\lambda\lambda_0) & a_{20} & \dots & a_{23} \\ 4\lambda^3 + 6\lambda^2\lambda_0 & a_{30} & \dots & a_{33} \\ -(\lambda^4 + 4\lambda^3\lambda_0) & a_{40} & \dots & a_{43} \\ \lambda^4\lambda_0 & a_{50} & \dots & a_{53} \end{array} \right\| = 0;$$

sono queste due relazioni lineari in  $\lambda_0$  e biquadratiche in  $\lambda$  le quali ammettono in generale otto soluzioni comuni; dunque *una quintica razionale di I specie ammette generalmente parlando otto piani stazionari*.

Se il piano che oscula la curva nel punto  $\lambda$  l'incontra nuovamente nei punti  $\mu, \nu$  sussisteranno queste altre relazioni

$$(7) \quad \left\| \begin{array}{ccc} -1 & a_{00} & \dots & a_{03} \\ 3\lambda + \mu + \nu & a_{10} & \dots & a_{13} \\ -[3\lambda^2 + 3\lambda(\mu + \nu) + \mu\nu] & a_{20} & \dots & a_{23} \\ \lambda^3 + 3\lambda^2(\mu + \nu) + 3\lambda\mu\nu & a_{30} & \dots & a_{33} \\ -[\lambda^3(\mu + \nu) + 3\lambda^3\mu\nu] & a_{40} & \dots & a_{43} \\ \lambda^3\mu\nu & a_{50} & \dots & a_{53} \end{array} \right\| = 0,$$

le quali sono in numero di due distinte; eliminando fra esse  $\nu$  si giunge ad un'equazione di 6° grado in  $\lambda$  e di 2° grado in  $\mu$ ,  $\Omega(\lambda, \mu) = 0$ , la quale lega ogni punto  $\lambda$  della data curva ai punti in cui essa è tagliata dal corrispondente osculatore.

Ora l'equazione  $\Omega(\lambda, \lambda) = 0$  determina i piani stazionari della curva; d'altronde le due equazioni  $\Omega(\lambda, \mu) = 0$ ,  $\Omega(\mu, \lambda) = 0$  ammettono  $2 \cdot 2 + 6 \cdot 6 = 40$  soluzioni, fra le quali si trovano quelle della  $\Omega(\lambda, \lambda) = 0$ ; le rimanenti 32 corrispondono agli estremi delle corde principali; si è dunque autorizzati ad affermare che *una quintica razionale di I specie ammette in generale 16 corde principali*.

Finalmente facciamo nelle equazioni (7)  $\nu = \mu$ ; si avranno le relazioni

$$(8) \quad \left\| \begin{array}{ccc} -1 & a_{00} \dots a_{03} \\ 3\lambda + 2\mu & a_{10} \dots a_{13} \\ -(3\lambda^2 + 6\lambda\mu + \mu^2) & a_{20} \dots a_{23} \\ \lambda^3 + 6\lambda^2\mu + 3\lambda\mu^2 & a_{30} \dots a_{33} \\ -(2\lambda^3\mu + 3\lambda^2\mu^2) & a_{40} \dots a_{43} \\ \lambda^3\mu^2 & a_{50} \dots a_{53} \end{array} \right\| = 0;$$

sono due equazioni di 3° grado in  $\lambda$  e di 2° grado in  $\mu$ , le quali ammettono in generale  $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$  soluzioni; dunque: una quintica razionale di I specie ammette in generale 12 piani osculatori-tangenti.

Scelti come vertici  $A_1A_2$  del tetraedro fondamentale e come facce  $A_1A_0A_2$  e  $A_2A_1A_3$  i corrispondenti piani osculatori, la rappresentazione parametrica della curva assume la forma seguente indicata da E. Bertini <sup>1)</sup>:

$$(9) \quad \varrho x_0 = \lambda^3(\lambda - m), \quad \varrho x_1 = \lambda^2(\lambda^3 - a_1\lambda^2 + a_2\lambda - a_3), \\ \varrho x_2 = \lambda^3 - b_1\lambda^2 + b_2\lambda - b_3, \quad \varrho x_3 = \lambda(\lambda - n);$$

in conseguenza le condizioni di coplanarità di 4 punti assumono il seguente aspetto:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} n b_3(\lambda)_3 - b_3(\lambda)_4 + (b_2 - n b_1)(\lambda)_5 - n a_3 b_3 = 0 \\ m b_3(\lambda)_1 - b_3(\lambda)_2 + (\lambda)_5 + b_3(a_2 - m a_1) = 0. \end{array} \right.$$

Diciamo ora qualcosa di relativo alle quintiche di II specie, cominciando dallo stabilire il seguente

**TEOREMA.** *Se una curva gobba razionale di quint'ordine ammette (due e quindi)  $\infty'$  quadrisecanti, queste appartengono ad una quadrica.*

Siano, infatti,  $a, b, c$  tre quadrisecanti di  $\Gamma_5$  e  $A_1A_2A_3A_4, B_1B_2B_3B_4, C_1C_2C_3C_4$  i loro punti di appoggio; due qualunque

<sup>1)</sup> *Sulle curve razionali di 5° ordine* (Collectanea mathem., Milano 1881, p. 313-27).

di esse non appartengono allo stesso piano, perchè altrimenti questo taglierebbe la curva in otto punti.

Ora per  $A_1A_2A_3, B_1B_2B_3, C_1C_2C_3$  si può far passare una quadrica  $\Sigma_2$  la quale conterrà tutte le rette  $a, b, c$  epperò anche i punti  $A_4B_4C_4$ .  $\Sigma_2$  e  $\Gamma_5$  hanno dunque comuni dodici punti, epperò la curva sta totalmente sulla superficie. Ogni piano per  $a$  taglia ancora  $\Sigma_2$  in una retta e  $\Gamma_5$  in un punto esterno ad  $a$ ; se, quindi, diciamo primo il sistema di generatrici di  $\Sigma_2$  al quale appartengono le rette  $a, b, c$ , vediamo che tutte le generatrici del secondo sistema sono unisecanti di  $\Gamma_5$  e quindi quelle del primo sono quadrisecanti. Altre rette di tale specie non possono esistere; infatti se per un punto  $P$  di  $\Gamma_5$  passassero due quadrisecanti, la proiezione di questa curva fatta dal punto  $P$  sopra un piano arbitrario sarebbe una quartica con due punti tripli, cosa notoriamente impossibile.

Per rappresentare analiticamente una quintica di II specie E. C. Colpitts <sup>1)</sup> ha suggerite le formole seguenti:

$$(11) \quad \varrho x_0 = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - n)f_2(\lambda), \quad \varrho x_1 = (\lambda - n)f_3(\lambda), \\ \varrho x_2 = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - p)f_2(\lambda), \quad \varrho x_3 = (\lambda - p)f_3(\lambda)$$

ove  $f_2$  e  $f_3$  sono funzioni risp. di 2° e 3° grado; la quadrica contenente la curva ha per equazione  $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$ . Si proietti stereograficamente tale superficie da un punto arbitrario su un piano qualunque; alle sezioni piane della superficie corrispondono le  $\infty^3$  coniche passanti per due punti fissi 1, 2 e le curve  $(1^4, 2)_5, (1, 2^4)_5$  rappresenteranno due sistemi composti ciascuno di  $\infty^9$  quintiche razionali di II specie; dunque per nove punti di una quadrica passano due quintiche razionali di II specie. E siccome nove punti sono necessari e sufficienti per individuare una quadrica possiamo anche dire che per nove punti dati ad arbitrio nello spazio passano in generale due quintiche razionali di II specie <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> *On twisted quintic Curves* (Amer. Journ. of Mathem., T. XXIX, 1907, p. 309-44). Il Bertini (l. c. p. 315 nota) ha suggerita altra rappresentazione meno generale.

<sup>2)</sup> Per altre proprietà v. A. L. Hjelmman, *Sur les courbes gauches rationnelles du cinquième ordre* (Annales Acad. Scient. Fennicae, Ser. A, T. III, 1912) e *Sur la quintic gauche rationnelle de seconde espèce* (Id. T. VII, 1915).

§ 2. *Cenni intorno ad alcune speciali quintiche razionali* <sup>1)</sup>.

Le equazioni

(1)

$$\varrho x_0 = \lambda^4(\lambda + a), \quad \varrho x_1 = \lambda^3(\lambda + b), \quad \varrho x_2 = \lambda + c, \quad \varrho x_3 = \lambda(\lambda + d)$$

rappresentano una quintica razionale passante per i punti  $A_2$  e  $A_0$ , i quali corrispondono ai valori 0 e  $\infty$  del parametro  $\lambda$ . Un piano passante per lo spigolo  $A_2A_3$  ha un'equazione della forma  $x_0 + kx_1 = 0$  onde taglia la curva in tre punti coincidenti con  $A_2$ ;  $A_2$  è dunque un punto d'inflessione, con la retta  $A_2A_3$  per corrispondente tangente. Similmente  $A_0$  è un secondo punto di inflessione con  $A_0A_1$  per corrispondente tangente.

Se la data curva appartiene ad una quádrica, questa deve palesemente contenere le rette  $A_0A_1$  e  $A_2A_3$ , onde ha un'equazione della forma

$$x_0x_2 + \mu x_1x_3 = 0;$$

ora questa taglia la curva in dieci punti, dei quali quattro sono assorbiti da  $A_2$  ed altrettanti da  $A_0$ ; i due restanti corrispondono ai valori di  $\lambda$  che soddisfano l'equazione

$$(\lambda + a)(\lambda + c) + \mu(\lambda + b)(\lambda + d);$$

siccome in generale questa non è un'identità, così la curva (1) in generale è di I specie. Affinchè sia di II deve aversi

$$\mu + 1 = 0, \quad (a + c) + \mu(b + d) = 0, \quad ac + \mu bd = 0$$

ossia

$$a + c = b + d, \quad ac = bd;$$

condizioni a cui si soddisfa supponendo

$$a = b, \quad c = d$$

oppure

$$a = d, \quad b = c.$$

<sup>1)</sup> Cfr. la citata memoria del Colpitts p. 321-36.

Le condizioni di coplanarità di cinque punti della curva hanno in generale la forma

$$b(\lambda)_1 + (\lambda)_2 + ab = 0, \quad cd(\lambda)_3 + c(\lambda)_4 + (\lambda)_5 = 0;$$

se ne deduce col procedimento usato nel caso generale che la curva ammette quattro piani stazionari i quali sono determinati dall'equazione

$$(d - c)\lambda^2[\lambda^2 + b\lambda + b(b - a)] + (a - b)bcd(\lambda + d) = 0;$$

se la quintica è di II specie tre di essi coincidono.

Di altre quintiche razionali di II specie ci limiteremo a riferire la rappresentazione parametrica e indicare di ciascuna il carattere più importante:

I. Curva con una tangente doppia:

$$\varrho x_0 = \lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda - n), \quad \varrho x_1 = (\lambda - n)f_2(\lambda),$$

$$\varrho x_2 = \lambda^2(\lambda - 1)^2(\lambda - p), \quad \varrho x_3 = (\lambda - p)f_2(\lambda)$$

ove qui ed in seguito in generale  $f_x(\lambda)$  rappresenta un polinomio del grado definito dall'indice.

II. Curva con un flesso:

$$\varrho x_0 = \lambda^3(\lambda - 1)(\lambda - n), \quad \varrho x_1 = (\lambda - n)f_3(\lambda),$$

$$\varrho x_2 = \lambda^3(\lambda - 1)(\lambda - p), \quad \varrho x_3 = (\lambda - p)f_3(\lambda).$$

III. Curva con una tangente doppia ed un flesso:

$$\varrho x_0 = \lambda^3(\lambda - 1)(\lambda - n), \quad \varrho x_1 = (\lambda - k)^2(\lambda - n),$$

$$\varrho x_2 = \lambda^3(\lambda - 1)(\lambda - p), \quad \varrho x_3 = (\lambda - k)^2(\lambda - p).$$

IV. Curva con due flessi:

$$\varrho x_0 = \lambda^3(\lambda - 1)(\lambda - n), \quad \varrho x_1 = (\lambda - k)(\lambda - n),$$

$$\varrho x_2 = \lambda^3(\lambda - 1)(\lambda - p), \quad \varrho x_3 = (\lambda - k)(\lambda - p).$$

V. Curva con due flessi ed una bitangente:

$$\varrho x_0 = \lambda^3(\lambda - 1)(\lambda - n), \quad \varrho x_1 = \left(\lambda + \frac{1}{8}\right)(\lambda - n),$$

$$\varrho x_2 = \lambda^3(\lambda - 1)(\lambda - p), \quad \varrho x_3 = \left(\lambda + \frac{1}{8}\right)(\lambda - p),$$



## VI. Curva con tre flessi:

$$\varrho x_0 = \lambda^3 (\lambda - 1) (\lambda - n), \quad \varrho x_1 = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) (\lambda - n),$$

$$\varrho x_2 = \lambda^3 (\lambda - 1) (\lambda - p), \quad \varrho x_3 = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right) (\lambda - p).$$

## VII. Curva con una tangente d'ondulazione:

$$\varrho x_0 = \lambda^4 (\lambda - n), \quad \varrho x_1 = (\lambda - n) f_3(\lambda),$$

$$\varrho x_2 = \lambda^4 (\lambda - p), \quad \varrho x_3 = (\lambda - p) f_3(\lambda).$$

## VIII. Curva con una tangente d'ondulazione ed un flesso:

$$\varrho x_0 = \lambda^4 (\lambda - n), \quad \varrho x_1 = (\lambda - k) (\lambda - n),$$

$$\varrho x_2 = \lambda^4 (\lambda - p), \quad \varrho x_3 = (\lambda - k) (\lambda - p).$$

## IX. Curva con due tangenti d'ondulazione:

$$\varrho x_0 = \lambda^5, \quad \varrho x_1 = \lambda, \quad \varrho x_2 = \lambda^4, \quad \varrho x_3 = 1;$$

in questo caso le condizioni di coplanarità si presentano sotto la forma  $(\lambda)_2 = 0$   $(\lambda)_3 = 0$ .

## § 3. Quintiche razionali invarianti

rispetto a gruppi finiti di proiettività<sup>1)</sup>.

Per le varie specie dotate dell'indicata proprietà riferiamo soltanto in generale la rappresentazione parametrica, scrivendo le funzioni a cui sono proporzionali le coordinate omogenee, solo aggiungendo qualche proprietà di alcune:

I.  $a_1 \lambda^5, b_2 \lambda^3, c_3 \lambda, a_4 \lambda^4 + b_4 \lambda^2 + c_4$  (curva con due nodi);

II.  $a_1 \lambda^4 + b_1 \lambda^2 + c_1, a_2 \lambda^4 + b_2 \lambda^2 + c_2, a_3 \lambda^5 + b_3 \lambda^3 + c_3 \lambda, a_4 \lambda^5 + b_4 \lambda^3 + c_4 \lambda$ ;

1) E. Ciani, *Le curve gobbe razionali di quinto ordine invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazione quaternarie* (Rend. dell'Ist. Lomb., II Ser. vol. XXXVII, 1904).

III.  $a_1 \lambda^3 + b_1, a_2 \lambda^3 + b_2, a_3 \lambda^5 + b_3 \lambda^2, a_4 \lambda^5 + b_4 \lambda^3$  (curva di II specie, con due cuspidi);

IV.  $a_1 \lambda^3 + b_1, a_2 \lambda^3 + b_2, a_3 \lambda^5 + b_3 \lambda^2, a_4 \lambda^4 + b_4 \lambda$ ;

V.  $a_1 \lambda^4 + b_1 \lambda, a_2 \lambda^4 + b_2 \lambda, a_3 \lambda^3 + b_3, a_4 \lambda^5 + b_4 \lambda$ ;

VI.  $\lambda^5, \lambda, \lambda^4, 1$  (fu già incontrata come quintica di II specie con due tangenti d'ondulazione).

VII.  $a_1 \lambda^4 + b_1, a_2 \lambda^4 + b_2, a_3 \lambda^5 + b_3 \lambda, a_4 \lambda^3$ ;

VIII.  $a_1 \lambda^4 + b_1, a_2 \lambda^2, a_3 \lambda^5 + b_3 \lambda, a_4 \lambda^5$ ;

IX.  $\lambda^5, \lambda, \lambda^2, 1$  (le condizioni di coplanarità sono  $(\lambda)_1 = 0, (\lambda)_2 = 0$ ).

X.  $\lambda^5, \lambda, \lambda^3, 1$  (le condizioni di coplanarità sono  $(\lambda)_1 = 0, (\lambda)_3 = 0$ ).

XI.  $\lambda^5, \lambda, \lambda^4, 1$  (le condizioni di coplanarità sono  $(\lambda)_2 = 0, (\lambda)_3 = 0$ ).

XII.  $\lambda^5, \lambda^2, \lambda^3, 1$  (le condizioni di coplanarità sono  $(\lambda)_1 = 0, (\lambda)_4 = 0$ ).

XIII.  $a \lambda^4 + b \lambda^2 + c, m \lambda^4 + n \lambda^2 + p, c \lambda^5 + b \lambda^3 + c \lambda, p \lambda^5 + n \lambda^3 + m \lambda$ .

XIV.  $(a \lambda + b)^5, (a \lambda - b)^5, (b \lambda + a)^5, (b \lambda - a)^5$ .

XV.  $h \lambda^4 + k, \lambda^2, k \lambda^5 + h \lambda, \lambda^3$ .

Nel caso XIV la curva ha quattro piani iperstationari (cioè le facce del tetraedro fondamentale) ed è anche suscettibile della seguente rappresentazione parametrica:

$$\varrho x_0 = \lambda^5, \quad \varrho x_1 = (\lambda - 1)^5, \quad \varrho x_2 = (\lambda - k)^5, \quad \varrho x_3 = 1$$

ed allora le condizioni di coplanarità assumono il seguente aspetto:

$$\begin{vmatrix} (\lambda)_1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} (\lambda)_2 & 1 & k \\ \frac{1}{2} (\lambda)_3 & 1 & k^2 \\ (\lambda)_4 & 1 & k^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$2k (\lambda)_1 - (k + 1) (\lambda)_2 + (\lambda)_3 = 0, \quad k (\lambda)_2 - (k + 1) (\lambda)_3 + 2 (\lambda)_4 = 0.$$

§ 4. *Quintiche razionali appartenenti ad un complesso lineare* <sup>1)</sup>.

$$\text{I.} \quad \varrho x_0 = \lambda^4 \left( \lambda - \frac{25}{7} c \right), \quad \varrho x_1 = \lambda^3 (\lambda - 3c), \\ \varrho x_2 = \lambda + c, \quad \varrho x_3 = \lambda \left( \lambda + \frac{5c}{7} \right);$$

questa curva possiede quattro tangenti d'inflessione e tutte le sue tangenti appartengono al complesso di equazione

$$p_{02} + 2p_{31} = 0.$$

$$\text{II.} \quad \varrho x_0 = \lambda^5, \quad \varrho x_1 = \lambda^4, \quad \varrho x_2 = \lambda + c, \quad \varrho x_3 = \lambda \left( \lambda + \frac{5c}{6} \right);$$

questa curva ammette due tangenti d'ondulazione e due flessi; le sue tangenti fanno parte dello stesso complesso lineare a cui appartiene la curva I.

$$\text{III.} \quad \varrho x_0 = \lambda^5, \quad \varrho x_1 = \lambda^3, \quad \varrho x_2 = \lambda^2, \quad \varrho x_3 = 1;$$

questa curva appartiene all'iperboloide  $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$ , onde è di II specie; ha due cuspidi con tangenti a contatto di quarto ordine; tutte le sue tangenti appartengono al complesso

$$p_{03} - 5p_{12} = 0.$$

$$\text{IV.} \quad \varrho x_0 = \lambda^5, \quad \varrho x_1 = \lambda^4, \quad \varrho x_2 = \lambda, \quad \varrho x_3 = 1;$$

questa curva si trova sull'iperboloide  $x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$ ; come già dicemmo (v. p. 328) ammette due tangenti d'ondulazione; le sue tangenti si trovano sul complesso  $3p_{03} - 5p_{12} = 0$ .

V.

$$\varrho x_0 = \lambda^5, \quad \varrho x_1 = \lambda^3 (\lambda + a), \quad \varrho x_2 = \lambda^2, \quad \varrho x_3 = \lambda + \frac{2a}{5} \quad \text{ove } a \neq 0;$$

questa curva ammette due flessi ed una cuspidi con piano tan-

<sup>1)</sup> Colpitts, l. c., p. 336-37.

gente iperstazionario; le sue tangenti appartengono al complesso  $p_{03} - 2p_{12} = 0$ .

$$\text{VI.} \quad \varrho x_0 = \lambda^4 \left( \lambda + \frac{b}{2} \right), \quad \varrho x_1 = \lambda^3 (\lambda + b), \\ \varrho x_2 = \lambda^3 (\lambda + b), \quad \varrho x_3 = \lambda^4 \left( \lambda + \frac{b}{8} \right) \quad \text{ove } b \neq 0;$$

curva con quattro flessi ed una tangente doppia; le sue tangenti appartengono al complesso  $p_{02} + 2p_{31} = 0$ .

Queste cinque curve godono della comune proprietà di avere per proiezioni quintiche con cinque flessi collineari.

OSSERVAZIONE GENERALE. Nelle equazioni generali di una quintica

$$\varrho x_k = a_{k0} \lambda^5 + a_{k1} \lambda^4 + a_{k2} \lambda^3 + a_{k3} \lambda^2 + a_{k4} \lambda + a_{k5} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

non possono mancare ad un tempo nè i quattro coefficienti  $a_{k0}$  nè i quattro  $a_{k5}$  senza che la curva si abbassi di ordine. Sono notevoli i casi in cui manchino due intere verticali di coefficienti; allora, con un'opportuna scelta del tetraedro fondamentale, la curva può rappresentarsi mediante equazioni del seguente tipo

$$\varrho x_0 = \lambda^5, \quad \varrho x_1 = \lambda^a, \quad \varrho x_2 = \lambda^b, \quad \varrho x_3 = 1$$

ove  $a, b$  sono numeri interi distinti scelti nella serie 1, 2, 3, 4; si può sempre supporre  $a > b$ . Tutte le curve che così si ottengono furono da noi già incontrate fra quelle invarianti rispetto ad un gruppo di proiettività o fra quelle di cui tutte le tangenti appartengono ad un complesso lineare.

§ 5. *Quintiche razionali collegate alla teoria delle quadriche.*

I. Data una schiera di coniche omofocali

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1$$

ed un punto  $P(\alpha, \beta)$  del suo piano, il luogo dei piedi delle normali condotte da questo a quelle curve ha evidentemente  $P$

per punto doppio, due essendo le coniche della schiera che contengono questo punto. Per trovarne l'equazione basta evidentemente eliminare  $\lambda$  fra la (1) e l'equazione seguente

$$(2) \quad \frac{(a^2 + \lambda)(\alpha - x)}{x} = \frac{(b^2 + \lambda)(\beta - y)}{y}.$$

A tale scopo chiamiamo  $\varrho$  il valore comune di queste frazioni; sarà in conseguenza

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} = \frac{(\alpha - x)x}{\varrho}, \quad \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = \frac{(\beta - y)y}{\varrho}$$

epperò la (1) darà

$$\varrho = (\alpha - x)x + (\beta - y)y;$$

essendo poi

$$a^2 + \lambda = \frac{\varrho x}{\alpha - x}, \quad b^2 + \lambda = \frac{\varrho y}{\beta - y}$$

sarà

$$a^2 - b^2 = \varrho \left( \frac{x}{\alpha - x} - \frac{y}{\beta - y} \right)$$

cioè, per il valore precedente di  $\varrho$ ,

$$(a^2 - b^2)(\alpha - x)(\beta - y) = \{(\alpha - x)x + (\beta - y)y\}(\beta x - \alpha y).$$

Siccome tale equazione rappresenta il luogo cercato, questo è una cubica; le tangenti in  $P$  essendo fra loro ortogonali si tratta di una strofoide <sup>1)</sup>.

L'analogo problema nella geometria dello spazio si enuncia come segue: *Trovare il luogo dei piedi delle normali condotte da un punto dato  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  alle  $\infty'$  quadriche omofocali.*

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

Notiamo subito che, siccome per  $P$  passano tre quadriche di tale schiera, questo punto è triplo per il luogo cercato.

<sup>1)</sup> G. Loria, *Sp. alg. und trans. ebene Kurven*, II Aufl. I Bd. p. 63.

La normale nel punto  $(x, y, z)$  alla quadrica (3) passa per il punto  $P$  se sussiste l'equazione a tre membri seguenti:

$$\left\| \begin{array}{ccc} (a^2 + \lambda)(\alpha - x) & (b^2 + \lambda)(\beta - y) & (c^2 + \lambda)(\gamma - z) \\ x & y & z \end{array} \right\| = 0;$$

ora quando ciò succede è anche

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha - x & \beta - y & \gamma - z \\ a^2(\alpha - x) + \lambda(\alpha - x) & b^2(\beta - y) + \lambda(\beta - y) & c^2(\gamma - z) + \lambda(\gamma - z) \\ a & \beta & \gamma \end{array} \right| = 0$$

ossia

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{\alpha}{\alpha - x} & \frac{\beta}{\beta - y} & \frac{\gamma}{\gamma - z} \end{array} \right| = 0,$$

o finalmente

$$(4) \quad \frac{\alpha(b^2 - c^2)}{\alpha - x} + \frac{\beta(c^2 - a^2)}{\beta - y} + \frac{\gamma(c^2 - a^2)}{\gamma - z} = 0.$$

Quest'equazione rappresentava una superficie contenente la curva cercata; ora essa rappresenta un cono quadrico col vertice in  $P$  e passante per le parallele condotte da questo punto agli assi delle date superficie. Per meglio determinare il luogo richiesto poniamo

$$\frac{(a^2 + \lambda)(\alpha - x)}{x} = \frac{(b^2 + \lambda)(\beta - y)}{y} = \frac{(c^2 + \lambda)(\gamma - z)}{z} = \varrho$$

e ricaviamone

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} = \frac{x(\alpha - x)}{\varrho}, \quad \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = \frac{y(\beta - y)}{\varrho}, \quad \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = \frac{z(\gamma - z)}{\varrho};$$

sostituendo nella (3) otterremo

$$\varrho = x(\beta - x) + y(\beta - y) + z(\gamma - z).$$

D'altronde le equazioni precedenti danno

$$b^2 + \lambda = \frac{\rho y}{\beta - y}, \quad c^2 + \lambda = \frac{\rho z}{\gamma - z}$$

epperò

$$b^2 - c^2 = \rho \frac{\gamma y - \beta z}{(\beta - y)(\gamma - z)}$$

cioè

$$(5) \quad (b^2 - c^2)(\beta - y)(\gamma - z) = (\gamma y - \beta z) \{x(\alpha - x) + y(\beta - y) + z(\gamma - z)\}.$$

Questa è l'equazione di una superficie di 3° ordine, avente  $P$  per punto doppio, passante per la retta  $y = \beta, z = \gamma$  e per la curva cercata. Tolta questa retta, come parte parassita, rimane come intersezione di questa superficie col cono (4) una quintica come curva domandata. Questa si trova anche sopra altre due superficie analoghe alla (5) cioè

$$(5) \quad (c^2 - a^2)(\gamma - z)(\alpha - x) = (az - \gamma x) \{x(\alpha - x) + y(\beta - y) + z(\gamma - z)\}$$

$$(5) \quad (a^2 - b^2)(\alpha - x)(\beta - y) = (\beta x - \alpha y) \{x(\alpha - x) + y(\beta - y) + z(\gamma - z)\};$$

siccome da  $P$  essa è proiettata secondo un cono quàdrico, quel punto ne è triplo (d'accordo con una osservazione precedente). La curva è razionale perchè può porsi in corrispondenza univoca con i piani del fascio avente per asse la congiungente del punto triplo con un punto scelto ad arbitrio sulla curva.

Al lettore lo studio dell'analogha curva relativa ad un paraboloide.

II. Ad una curva della stessa specie si giunge partendo da una quàdrica a centro, p. es. dall'ellissoide (6)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ , e ragionando come segue. Da un punto arbitrario  $M(\alpha, \beta, \gamma)$  dello spazio si abbassi la perpendicolare sul corrispondente piano polare

$$(7) \quad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1 = 0$$

e la si chiami *asse* del punto  $M^1$ ). Le sue equazioni essendo evidentemente

$$(8) \quad \frac{x - \alpha}{a^2} = \frac{y - \beta}{b^2} = \frac{z - \gamma}{c^2}$$

le sue coordinate sono date dalle formole

$$p_{01} \equiv \frac{\alpha}{a^2}, \quad p_{02} \equiv \frac{\beta}{b^2}, \quad p_{03} \equiv \frac{\gamma}{c^2}$$

$$p_{23} \equiv \frac{\beta\gamma(b^2 - c^2)}{b^2c^2}, \quad p_{31} \equiv \frac{\gamma\alpha(c^2 - a^2)}{c^2a^2}, \quad p_{12} \equiv \frac{\alpha\beta(a^2 - b^2)}{a^2b^2}.$$

Siccome da queste si trae

$$(9) \quad \frac{p_{01}p_{23}}{b^2 - c^2} = \frac{p_{02}p_{31}}{c^2 - a^2} = \frac{p_{03}p_{12}}{a^2 - b^2},$$

equazione ove scomparvero le coordinate del punto  $M$ , così resta dimostrato che *tutti gli assi di una quàdrica a centro appartengono ad un complesso tetraedrale la cui superficie singolare è formata dai piani principali della data superficie e dal piano all'infinito*. Si cerchi ora <sup>2)</sup> il luogo geometrico dei piedi degli assi di una quàdrica passanti per un dato punto  $A(x_0, y_0, z_0)$ . Intanto esso si trova sul cono del complesso relativo al punto  $A$ . Per meglio caratterizzarlo chiamiamo  $\rho$  il valore comune delle frazioni (8); sarà quindi

$$(10) \quad x = \alpha + \frac{\rho\alpha}{a^2}, \quad y = \beta + \frac{\rho\beta}{b^2}, \quad z = \gamma + \frac{\rho\gamma}{c^2}$$

epperò, tenendo conto della (7), è

$$(11) \quad \rho = - \frac{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1}{\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4} + \frac{\gamma^2}{c^4}}.$$

<sup>1)</sup> Cfr. Th. Reye, *Die Geometrie der Lage*, II Abth., IV Aufl. (Stuttgart, 1907), p. 244 e segg.

<sup>2)</sup> A. Schmitz, *Ueber eine besondere Raumcurve fünfter Ordnung* (Diss. München, 1887).

Sostituendo questo valore nelle (10) si otterranno le coordinate del piede dell'asse (8). Ora affinché quest'asse passi per il punto  $A$  dev'essere

$$\frac{x_0 - \alpha}{a^2} = \frac{y_0 - \beta}{b^2} = \frac{z_0 - \gamma}{c^2};$$

detto, quindi,  $\sigma$  il valore comune di queste frazioni si avrà

$$(12) \quad \alpha = \frac{a^2 x_0}{a^2 + \sigma}, \quad \beta = \frac{b^2 y_0}{b^2 + \sigma}, \quad \gamma = \frac{c^2 z_0}{c^2 + \sigma};$$

d'altronde, scrivendo le (10) sotto la forma

$$x = \frac{\alpha(a^2 + \varrho)}{a^2}, \quad y = \frac{\beta(b^2 + \varrho)}{b^2}, \quad z = \frac{\gamma(c^2 + \varrho)}{c^2}$$

ed applicando le (12), si trova:

$$(13) \quad x = \frac{a^2 + \varrho}{a^2 + \sigma} x_0, \quad y = \frac{b^2 + \varrho}{b^2 + \sigma} y_0, \quad z = \frac{c^2 + \varrho}{c^2 + \sigma} z_0.$$

Ma, per la (11) si ha:

$$a^2 + \varrho = \frac{\beta^2 \left( \frac{a^2}{b^4} - \frac{1}{b^2} \right) + \gamma^2 \left( \frac{a^2}{c^4} - \frac{1}{c^2} \right) + 1}{\frac{\alpha^2}{a^4} + \frac{\beta^2}{b^4} + \frac{\gamma^2}{c^4}}$$

e applicando le (12)

$$a^2 + \varrho = \frac{y_0^2(c^2 + \sigma)^2(a^2 - b^2) + z_0^2(b^2 + \sigma)^2(a^2 - c^2) + (b^2 + \sigma)^2(c^2 + \sigma)^2}{x_0^2(b^2 + \sigma)^2(c^2 + \sigma)^2 + y_0^2(c^2 + \sigma)^2(a^2 + \sigma)^2 + z_0^2(a^2 + \sigma)^2(b^2 + \sigma)^2} (a^2 + \sigma)^2.$$

Sostituendo questo valore e gli analoghi nelle (13) si conclude essere

(14)

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x_0 \frac{y_0^2(c^2 + \sigma)^2(a^2 - b^2) + z_0^2(b^2 + \sigma)^2(a^2 - c^2) + (b^2 + \sigma)^2(c^2 + \sigma)^2}{a_0^2(b^2 + \sigma)^2(c^2 + \sigma)^2 + y_0^2(c^2 + \sigma)^2(a^2 + \sigma)^2 + z_0^2(a^2 + \sigma)^2(b^2 + \sigma)^2} (a^2 + \sigma) \\ y &= y_0 \frac{z_0^2(a^2 + \sigma)^2(b^2 - c^2) + x_0^2(c^2 + \sigma)^2(b^2 - a^2) + (c^2 + \sigma)^2(a^2 + \sigma)^2}{x_0^2(b^2 + \sigma)^2(c^2 + \sigma)^2 + y_0^2(c^2 + \sigma)^2(a^2 + \sigma)^2 + z_0^2(a^2 + \sigma)^2(b^2 + \sigma)^2} (b^2 + \sigma) \\ z &= z_0 \frac{x_0^2(b^2 + \sigma)^2(c^2 - a^2) + y_0^2(a^2 + \sigma)^2(c^2 - b^2) + (a^2 + \sigma)^2(b^2 + \sigma)^2}{x_0^2(b^2 + \sigma)^2(c^2 + \sigma)^2 + y_0^2(c^2 + \sigma)^2(a^2 + \sigma)^2 + z_0^2(a^2 + \sigma)^2(b^2 + \sigma)^2} (c^2 + \sigma) \end{aligned} \right.$$

la rappresentazione analitica della curva in questione. Essendo i secondi membri delle formole (14) funzioni di quinto grado nel parametro  $\sigma$ , resta dimostrato che quella curva è di quinto ordine. E siccome essa è proiettata dal punto  $A$  secondo un cono quadrico, così questo ne è triplo. Osserviamo ancora che il denominatore delle (14) è una funzione biquadratica in  $\sigma$  che non si annulla per alcun valore reale e finito di questo parametro; perciò la curva ha un unico punto reale all'infinito corrispondente a  $\sigma = \infty$ ; per tale valore le (14) danno  $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$  il che prova che detto punto è il punto all'infinito della retta  $OA$ .

Lasciamo al lettore di stabilire le analoghe proposizioni relative all'ipotesi che la data quadrica sia priva di centro.

III. Ad una curva dotata di analoghe proprietà e chiamata *strofoide gobba* guida il seguente

PROBLEMA. *Date due quadriche ed un punto P, da ogni punto M dello spazio si possono circoscrivere ad essa due coni quadrici i quali ammettono in generale in comune una terna di diametri coniugati; trovare il luogo del punto M tale che uno di tali diametri passi pel punto P<sup>1)</sup>.*

Assunto come fondamentale il tetraedro  $A_0A_1A_2A_3$  autopolare comune alle due date quadriche, queste potranno rappresentarsi mediante equazioni della seguente forma:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} f_{xx} &\equiv a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0 \\ g_{xx} &\equiv b_0x_0^2 + b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Posto

$$\left\{ \begin{aligned} f_{xX} &= f_{xX} = a_0x_0X_0 + a_1x_1X_1 + a_2x_2X_2 + a_3x_3X_3 \\ g_{xX} &= g_{xX} = b_0x_0X_0 + b_1x_1X_1 + b_2x_2X_2 + b_3x_3X_3 \end{aligned} \right.$$

e supposto  $X_0, X_1, X_2, X_3$  coordinate correnti, le equazioni dei coni circoscritti alle date superficie del punto  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  saranno:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{XX} &\equiv f_{xx}f_{XX} - f_{xX}^2 = 0 \\ \psi_{XX} &\equiv g_{xx}g_{XX} - g_{xX}^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

<sup>1)</sup> L. Lipkin, *Ueber räumlichen Strophoiden* (Diss. Jena 1870).

interseca ancora la data nella curva avente per simbolo  $(1^{02}03^{11} \dots 6^1)_3$ : è appunto una quintica di genere 1. Le rette  $a_1, a_2$  della data superficie ne sono 0-secanti; le rette  $a_3, a_4, a_5, a_6, c_{34}, c_{35}, c_{36}, c_{45}, c_{46}, c_{56}$  ne sono 1-secanti;  $b_1, b_2, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}$  ne sono corde; finalmente le rimanenti  $b_3, b_4, b_5, b_6, c_{12}$  ne sono 3-secanti.

La rappresentazione parametrica più conveniente della curva esige l'impiego di funzioni ellittiche; ma alcune proprietà si possono stabilire direttamente, come ora mostreremo <sup>1)</sup>.

Ogni superficie cubica passante per 14 punti di  $\Gamma_5$  la taglia in un quindicesimo punto fisso. Infatti per quei 14 punti e per altri 4 scelti ad arbitrio nello spazio passano  $\infty^1$  superficie cubiche, costituenti un fascio, ognuna delle quali incontra nuovamente  $\Gamma_5$  in un punto  $P$ ; ora se questo fosse variabile si verrebbe a stabilire una corrispondenza univoca fra i punti di  $\Gamma_5$  e le superficie di un fascio, il che è impossibile non essendo  $\Gamma_5$  razionale; perciò  $P$  è fisso <sup>2)</sup>.

Tutte le corde di  $\Gamma_5$  che incontrano una retta arbitraria  $r$  costituiscono una rigata di cui (per una proprietà già avvertita)  $r$  è direttrice quintupla; ogni piano  $\sigma$  contenendo  $\frac{5}{1}, \frac{4}{2} = 10$  corde, si conclude che tutte le corde di  $\Gamma_5$  che incontrano una retta fissa costituiscono una rigata di 15° ordine. Per determinare l'ordine della sua linea doppia, osserviamo che ogni piano  $\sigma$  ne contiene 15 punti, tante essendo le mutue intersezioni delle dieci generatrici situate in  $\sigma$ ; l'ordine cercato è quindi  $15 + x$ , se  $x$  è il numero dei punti della curva doppia che cadono su  $r$ . Per trovare  $x$  consideriamo un punto arbitrario  $A$  di  $r$ ; per esso passano 5 corde di  $\Gamma_5$ ; una di esse  $c$  determina con  $r$  un piano che contiene (all'infuori dei due punti appar-

<sup>1)</sup> J. de Vries, *On twisted Quintic of genus Unity* (Proc. Acad., Amsterdam, 1900, p. 374-79).

<sup>2)</sup> Similmente si prova che tutte le superficie di ordine  $n$  condotte per  $5n - 1$  punti di  $\Gamma_5$  l'incontrano in un altro punto fisso: cfr. Em. Weyr, *Ueber Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins*, III (Wiener Ber., T. XCVII, 1888, p. 592-617).

tenenti a  $c$ ) altri tre punti di  $\Gamma_5$  i quali sono congiunti a due a due mediante tre rette, che incontrano  $r$  in altrettanti punti  $C$ . Nasce così fra i punti  $A$  e  $C$  una corrispondenza simmetrica di cui ogni coincidenza dà una delle  $x$  intersezioni di  $r$  con la curva doppia dell'anzidetta rigata. Ciò autorizza a concludere che essa è dell'ordine trenta.

### § 7. Quintiche gobbe di genere due <sup>1)</sup>.

Siano date due quadriche

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

e due piani fissi

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Ogni quadrica del fascio

$$(1) \quad \varphi + \lambda\psi = 0$$

determina con la quadrica  $x_0x_1 = 0$  un nuovo fascio di superficie di 2° ordine, il quale contiene notoriamente due soli coni propri; variando la quadrica (1), questi coni mutano e nasce la questione: « qual'è il luogo geometrico dei loro vertici? ». Per risolverla notiamo che se la quadrica

$$\varphi + \lambda\psi + \rho x_0x_1 = 0$$

è un cono, sussisteranno le quattro equazioni seguenti:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_0} + \rho x_1 = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \rho x_0 = 0 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0; \end{cases}$$

<sup>1)</sup> H. E. Timerding, *Ueber eine Raumcurve 5° Ordnung* (Journ. f. r. und a. Math., T. CXXIII, 1901, p. 284-311).

ciò prova che il luogo cercato è rappresentato da questo sistema di equazioni:

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & x_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & x_0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} & 0 \end{array} \right\| = 0.$$

Di esse due soltanto sono distinte e come tali possono assumersi le due

$$(5) \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & x_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & x_0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & 0 \end{array} \right| = 0 \quad (6) \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{array} \right| = 0;$$

ora queste rappresentano due superficie una di 3° ed una di 2° ordine aventi comune la retta  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0$ , tolta la quale resta una curva di 5° ordine, che è il luogo cercato. Detta curva  $\Gamma_5$  appartiene alla quadrica (6) e passa pei due punti in cui questa è tagliata dalla retta  $r$  data  $x_0 = 0, x_1 = 0$ . Notiamo ora che la (6) può intendersi come il risultante dell'eliminazione di  $\sigma$  fra le due equazioni

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sigma \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0;$$

d'altronde combinando le (3) (7) si trova:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\rho \sigma} = \frac{\partial \varphi}{-\rho} = \frac{\partial \psi}{-\sigma} = \frac{\partial \psi}{1};$$

essendo le quattro derivate che si trovano nei numeratori proporzionali a  $\rho \sigma, \rho, \sigma$  ed essendo le derivate stesse funzioni lineari delle coordinate, si vede che  $x_0, x_1, x_2, x_3$  sono della forma

$$a\rho\sigma + b\rho + c\sigma + d;$$

osserviamo ancora che eliminando  $\lambda$  fra le (2) si ottiene

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & x_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & x_0 \end{array} \right| + \rho \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} & x_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & x_0 \end{array} \right| = 0;$$

se ivi sostituiamo alle  $x$  le espressioni precedenti si giunge ad un'equazione della forma

$$(7) \quad \Omega(\rho, \sigma) = 0$$

quadratica in  $\rho$  e cubica in  $\sigma$  la quale si può intendere rappresenti la curva  $\Gamma'_5$  che corrisponde a  $\Gamma_5$  quando si proietta stereograficamente la quadrica (6). Detti 1, 2 i punti fondamentali di tale rappresentazione,  $\Gamma'_5$  può rappresentarsi col simbolo  $(1^3, 2^2)_5$  onde è del genere 2; di egual genere è la curva obiettiva  $\Gamma_5$ .

Emerge da ciò che per ogni punto dello spazio ne passano 4 corde e 21 osculatori, mentre ogni retta è incontrata da 12 sue tangenti.

Di analoghe proprietà gode la curva rappresentata dal sistema

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_x^2 & b_x & c_x \\ a'_x^2 & b'_x & c_x \end{array} \right\| = 0^1);$$

1) M. Stuyvaert, *Cinq études de géométrie analytiques* (Gand, 1908) p. 38 e sgg.; ivi è anche fatto cenno delle analoghe curve rappresentabili come segue:

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_x^4 & b_x & c_x \\ a'_x^4 & b'_x & c'_x \end{array} \right\| = 0.$$

Cfr. anche J. de Vries, *A simply infinite System of hyperelliptic twisted Curves of order five* (Proc. Acad. Amsterdam, vol. XIX, 1916, p. 271-74).

essa è ciò che rimane dall'intersezione delle due superficie

$$a'_x{}^2 b'_x - a'_x{}^2 b_x = 0, \quad b_x c'_x - b'_x c_x = 0$$

quando se ne separi la retta  $b_x = 0$ ,  $b'_x = 0$ .

## B) CURVE DI SESTO ORDINE.

### § 1. Sestiche razionali.

Fra le sestiche alcune sono invarianti rispetto a gruppi finiti di proiettività; indichiamo qui le loro rappresentazioni parametriche <sup>1)</sup> col sistema conciso usato nel caso analogo per una di quart'ordine:

I.  $a\lambda^6 + b\lambda^2, c\lambda^5 + d\lambda, e\lambda^3, f\lambda^4 + g.$

II.  $a(\lambda^6 + 1) + b(\lambda^2 + \lambda^4), a(\lambda^6 - 1) + d(\lambda^2 - \lambda^4), e(\lambda^5 + \lambda) + f\lambda^3, g(\lambda^5 - \lambda)$ ; i tre lati di una faccia del tetraedro fondamentale sono corde principali della curva.

III.  $a(\lambda^6 + 1) + b(\lambda^2 + \lambda^4), a'(\lambda^6 + 1) + b'(\lambda^2 + \lambda^4), c(\lambda^6 - 1) + d(\lambda^4 - \lambda^2), e(\lambda^5 + \lambda) + f\lambda^3.$

IV.  $a(\lambda^5 + \lambda) + b\lambda^3, a'(\lambda^5 + \lambda) + b'\lambda^3, a(\lambda^5 - \lambda), d(\lambda^6 + 1) + e(\lambda^4 + \lambda^2).$

V.  $\lambda^6 + 1 + \frac{15(p-1)}{5p+3}(\lambda^4 + \lambda^2), \lambda^6 - 1 + \frac{15(p+1)}{5p-3}, 6(\lambda^5 + \lambda) + 20p\lambda^3, 6(\lambda^5 - \lambda)$ , ove  $p$  è un numero intero positivo.

VI.  $\lambda^6 + 1 - 5(\lambda^2 + \lambda^4)\lambda^6 - 1 + 5(\lambda^2 - \lambda^4), \lambda^5 + \lambda, \lambda^5 - \lambda^2.$

VII.  $(\lambda^2 + 1)^3, (\lambda^2 - 1)^3, \lambda^3, \lambda^5 - \lambda$ ; questa curva possiede quattro punti doppi.

VIII.  $2\lambda^5 + 1, \lambda^6 - 2\lambda, \lambda^2, \lambda^4$ . Questa curva ammette  $\infty^1$  piani tritangenti costituenti una sviluppabile di sesta classe e fu incontrata per la prima volta da F. Klein <sup>2)</sup>; oltre ad essa gode di detta proprietà l'intersezione di una superficie di secondo ordine con un cono cubico; della stessa prerogativa è

<sup>1)</sup> E. Ciani, *Le curve razionali di sesto ordine invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazioni quaternarie* (Rend. Ist. Lomb., Ser. II, vol. XXXIX, 1906, p. 359-68); *Sopra le sestiche gobbe dotate di infiniti piani tritangenti* (Rend. Circ. mat. Palermo, T. XXII, 1906, p. 287-92).

<sup>2)</sup> Vorles. über das Ikosaeder (Leipzig, 1884, p. 187).

dotato lo spigolo di regresso della superficie involupata degli  $\infty^1$  piani

$$a\lambda^4 + 4b\lambda^3 + 6c\lambda^2 + 4d\lambda + e$$

(ove  $a, b, c, d, e$  sono funzioni lineari delle coordinate omogenee di un punto) nel caso in cui i suoi quattro punti cuspidali formino un gruppo equianarmonico <sup>1)</sup>.

Una sestica razionale che, al pari di quelle del tipo VII, possiede quattro punti doppi, ma che è metricamente specializzata, fu incontrata in alcuni studi sulle superficie cubiche <sup>2)</sup>; essa può definirsi come intersezione delle due superficie aventi le seguenti equazioni:

$$(1) \quad xyz + k^2(x + y + z) = 0, \quad yz + zx + xy = 0;$$

È una curva simmetrica tanto rispetto all'origine, quanto ai tre piani

$$y - z = 0, \quad z - x = 0, \quad x - y = 0;$$

ne sono punti doppi l'origine ed i punti all'infinito degli assi coordinati; scrivendo le (1) sotto la forma

$$yz + k^2\left(1 + \frac{y+z}{x}\right) = 0, \quad \frac{yz}{x} + y + z = 0$$

si vede che sono soddisfatte da  $x = \infty$  e

$$(2) \quad y = -z = \pm k$$

onde queste equazioni rappresentano l'asintoto relativo al punto all'infinito di  $Ox$ . Così

$$(2) \quad z = -x = \pm k, \quad x = -y = \pm k$$

rappresentano gli altri due. Nell'origine le tangenti sono le intersezioni del dato cono col piano  $x + y + z = 0$  il quale è il piano che tocca nell'origine l'altra delle date superficie.

<sup>1)</sup> E. Laguerre, *Recherches sur la surface de Steiner* (Nouv. Ann. de Mathém., 1873 e 1877; Oeuvres de Laguerre, T. II, Paris, 1905, p. 304).

<sup>2)</sup> C. Bioche, *Sur une certaine courbe gauche du sixième ordre* (Nouv. Ann. de Mathém., IV Ser. T. III, 1903, p. 435-37).



Facendo la trasformazione

$$(3) \quad x' = \frac{k^2}{x}, \quad y' = \frac{k^2}{y}, \quad z' = \frac{k^2}{z}$$

la data curva si trasforma in quella rappresentata dalle altre equazioni:

$$(4) \quad y'z' + z'x' + x'y' + k^2 = 0, \quad x' + y' + z' = 0;$$

ora siccome queste equivalgono alle seguenti:

$$(4') \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2k^2, \quad x' + y' + z' = 0$$

si vede che la curva trasformata è un circolo massimo della sfera di centro 0 e raggio  $k\sqrt{2}$ ; ciò basta a concludere che la data è una curva razionale.

Ora essendo per tutti i valori di  $\lambda$

$$\cos \lambda + \cos \left( \lambda + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( \lambda + \frac{4\pi}{3} \right) = 0$$

alla seconda delle (4') si soddisfa, qualunque sia  $\rho$ , ponendo

$$x' = \rho \cos \lambda, \quad y' = \rho \cos \left( \lambda + \frac{2\pi}{3} \right), \quad z' = \rho \cos \left( \lambda + \frac{4\pi}{3} \right);$$

sostituendo questi valori nella prima delle stesse (4') si trova

$$\rho = \frac{2k}{\sqrt{3}} = \frac{k}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}$$

epperò

$$x' = \frac{k \cos \lambda}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}, \quad y' = \frac{k \cos \left( \lambda + \frac{2\pi}{3} \right)}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}, \quad z' = \frac{k \cos \left( \lambda + \frac{4\pi}{3} \right)}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}$$

e applicando le (3) si conclude essere

$$(5) \quad x = \frac{k \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{\cos \lambda}, \quad y = \frac{k \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{\cos \left( \lambda + \frac{2\pi}{3} \right)}, \quad z = \frac{k \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{\cos \left( \lambda + \frac{4\pi}{3} \right)}$$

la rappresentazione parametrica della sestica in questione.

Ad altra sestica razionale fu condotto R. Hoppe <sup>1)</sup> da ricerche di geometria a più dimensioni. Essa possiede la seguente rappresentazione parametrica:

$$(6) \quad x = a \cos u (3 \cos u + 2), \quad y = 5a \operatorname{sen} u \cos u, \\ z = a \operatorname{sen} u (25 \cos^2 u - 1)$$

la quale, ponendo  $\tau = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$  si muta nella seguente:

$$(7) \quad x = \frac{a(\tau^2 - 1)(5\tau^2 - 1)}{(\tau^2 + 1)^2}, \quad y = \frac{10a\tau(\tau^2 - 1)}{(\tau^2 + 1)^2}, \\ z = \frac{8a\tau(3\tau^2 - 2)(2\tau^2 - 3)}{(\tau^2 + 1)^3}.$$

## § 2. Sestiche di genere due <sup>2)</sup>.

A tale classe di curve appartiene la linea  $\Gamma_6$  rappresentata dalla matrice

$$(1) \quad \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix} = 0,$$

ove

$$S_i \equiv a_i(x^2 + y^2 + z^2) + b_i x + c_i y + d_i z + e_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

sono le equazioni di sei sfere linearmente indipendenti. Essa appartiene alle  $\infty^2$  superficie rappresentabili, qualunque siano le costanti  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , come segue

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix} = 0$$

<sup>1)</sup> Gleichung der Curve einer Banden mit unauflösbaren Knoten selbst Auflösung in vierten Dimension (Arch. f. Math. u. Phys., T. LXIV, 1879, p. 224).

<sup>2)</sup> Stuyvaert, Sur la sextique gauche de genre 2 (Giorn. di Matem. T. L, 1912, p. 67-99); *Algèbre à deux dimensions* (Gand, 1920, p. 24-31).

le quali sono di quart'ordine ed hanno come linea doppia il cerchio immaginario all'infinito (cioè sono cicli). Due qualunque di tali superficie [in particolare quelle rappresentate eguagliando a 0 due qualunque dei determinanti (1)] si tagliano, oltre che in questo cerchio, in una linea d'ordine  $4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 8$ ; inoltre le superficie

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix} = 0$$

s'intersecano nel cerchio comune alle due sfere

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix} = 0;$$

in totale dall'intersezione si stacca un luogo di  $10^\circ$  ordine, tolto il quale rimane la sestica  $\Gamma_6$  di cui è parola.

Essa taglia il piano all'infinito in sei punti appartenenti al cerchio immaginario comune a tutte le sfere dello spazio.

Indicando per brevità con  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  i determinanti estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

le equazioni (3) si scrivono:

$$(4) \quad \delta_1 S_1 + \delta_2 S_2 + \delta_3 S_3 = 0, \quad \delta_1 S_4 + \delta_2 S_5 + \delta_3 S_6 = 0;$$

perciò le (1) danno

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_5} = \frac{S_3}{S_6} = \frac{\delta_1 S_1 + \delta_2 S_2 + \delta_3 S_3}{\delta_1 S_4 + \delta_2 S_5 + \delta_3 S_6}$$

onde la data curva può anche rappresentarsi come segue

$$\left\| \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & \delta_1 S_1 + \delta_2 S_2 + \delta_3 S_3 \\ S_4 & S_5 & \delta_1 S_4 + \delta_2 S_5 + \delta_3 S_6 \end{vmatrix} \right\| = 0;$$

ciò prova che i quattro punti a distanza finita nei quali il cerchio (4) taglia la ciclode  $S_1 S_5 - S_2 S_4 = 0$  stanno sulla nostra curva; perciò questa contiene  $\infty^2$  quaterne di punti concidici.

Le relazioni

$$(5) \quad \left\| \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & k \\ S_4 & S_5 & S_6 & 1 \end{vmatrix} \right\| = 0$$

qualunque sia  $k$  rappresentano due punti di  $\Gamma_6$  pei quali passano anche le tre sfere

$$S_1 - k S_4 = 0, \quad S_2 - k S_5 = 0, \quad S_3 - k S_6 = 0;$$

essi si diranno costituire una coppia.

Una quaterna ed una coppia appartengono alla stessa sfera: infatti il cerchio (4) e la coppia (5) si trovano entrambi sulla sfera di equazione:

$$(6) \quad \left\| \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ S_1 & S_2 & S_3 & k \\ S_4 & S_5 & S_6 & 1 \end{vmatrix} \right\| = 0;$$

ovvero

$$\delta_1 (S_1 - k S_4) + \delta_2 (S_2 - k S_5) + \delta_3 (S_3 - k S_6) = 0.$$

Tale superficie si riduce ad un piano nel caso in cui i coefficienti  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  soddisfano la relazione

$$\delta_1 (a_1 - k a_4) + \delta_2 (a_2 - k a_5) + \delta_3 (a_3 - k a_6) = 0;$$

ciò prova che al variare di  $k$  le equazioni

$$(7) \quad \left\| \begin{vmatrix} S_1 - k S_4 & S_2 - k S_5 & S_3 - k S_6 \\ a_1 - k a_4 & a_2 - k a_5 & a_3 - k a_6 \end{vmatrix} \right\| = 0$$

rappresentano gli  $\infty'$  piani del fascio avente per asse la congiungente i punti della coppia considerata. Se nelle funzioni  $S_i$  si sostituiscono alle variabili  $x, y, z$  le coordinate di un punto arbitrario della curva  $\Gamma_6$ , le  $S_1, S_2, S_3$  risultano proporzionali

risp. a  $S_4, S_5, S_6$ ; detti  $a_1, a_2, a_3$  tre costanti proporzionali ad entrambe tali terne si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} S_1 &= \rho a_1 & S_2 &= \rho a_2 & S_3 &= \rho a_3 \\ S_4 &= \sigma a_1 & S_5 &= \sigma a_2 & S_6 &= \sigma a_3; \end{aligned}$$

si risolvano queste equazioni rispetto a  $x^2 + y^2 + z^2, x, y, z, \rho, \sigma$ ; dette  $\Delta_1, \dots, \Delta_6$  i determinanti estratti dalla seguente matrice e presi con segni alternati

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & a_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & a_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & a_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & 0 & a_1 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & 0 & a_2 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$$

si potrà scrivere

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\Delta_1} = \frac{x}{\Delta_2} = \frac{y}{\Delta_3} = \frac{z}{\Delta_4} = \frac{1}{\Delta_5} = \frac{-\rho}{\Delta_6} = \frac{-\sigma}{\Delta_7}.$$

Ne segue

$$(8) \quad \Delta_1 \Delta_5 = \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta_4^2,$$

equazione biquadratica nelle  $a_1, a_2, a_3$  la quale si annulla al secondo grado nei punti comuni alle coniche  $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0, \Delta_4 = 0, \Delta_5 = 0$ ; l'equazione (8) rappresenta quindi una curva piana di 4° ordine con un punto doppio in corrispondenza univoca con la data, essendo essa di genere 2; altrettanto vale per la  $\Gamma_6$  che stiamo studiando.

Fra le superficie passanti per  $\Gamma_6$  sono notevoli le due rappresentate dalle equazioni

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a_1 & S_1 & S_4 \\ a_2 & S_2 & S_5 \\ a_3 & S_3 & S_6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_4 & S_1 & S_4 \\ a_5 & S_2 & S_5 \\ a_6 & S_3 & S_6 \end{vmatrix} = 0;$$

sono di terzo ordine e determinano un fascio di superficie analoghe

$$\begin{vmatrix} a_1 + k a_4 & S_1 & S_4 \\ a_2 + k a_5 & S_2 & S_5 \\ a_3 + k a_6 & S_3 & S_6 \end{vmatrix} = 0;$$

la base di tal fascio è costituita dalla curva  $\Gamma_6$ , dal cerchio immaginario all'infinito e dalla retta rappresentata come segue:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & S_1 & S_4 \\ a_2 & a_5 & S_2 & S_5 \\ a_3 & a_6 & S_3 & S_6 \end{vmatrix} = 0;$$

questa retta è una quadrisecante di  $\Gamma_6$ . Mediante una trasformazione proiettiva che muti il cerchio immaginario all'infinito in una conica, si può trasformare ogni sestica di genere 2 in una dell'indicata specie; da ciò un mezzo per dedurre le proprietà di quella dalle proprietà di questa.

### § 3. Sestiche di genere tre <sup>1)</sup>.

Date quattro stelle proiettive di piani

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda a_x + \lambda' a'_x + \lambda'' a''_x = 0 \\ \lambda b_x + \lambda' b'_x + \lambda'' b''_x = 0 \\ \lambda c_x + \lambda' c'_x + \lambda'' c''_x = 0 \\ \lambda d_x + \lambda' d'_x + \lambda'' d''_x = 0 \end{cases}$$

vi sono  $\infty'$  punti dello spazio per ognuno dei quali passa una quaterna di piani corrispondenti; la curva che essi formano può rappresentarsi mediante la matrice

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_x & a'_x & a''_x \\ b_x & b'_x & b''_x \\ c_x & c'_x & c''_x \\ d_x & d'_x & d''_x \end{vmatrix} = 0;$$

<sup>1)</sup> F. Schur, *Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen*, § 7-10 (Math. Annalen, T. XVIII, 1881, p. 13-22); F. Stuyvaert, *Cinq études de géométrie analytique* (Gand, 1908, p. 27-37).

Perciò essa è l'intersezione di due superficie di terz'ordine aventi una cubica gobba in comune onde è una curva di sesto ordine. Le (1) si possono scrivere come segue:

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{i=3} (\lambda a_i + \lambda' a'_i + \lambda'' a''_i) x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{i=3} (\lambda b_i + \lambda' b'_i + \lambda'' b''_i) x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{i=3} (\lambda c_i + \lambda' c'_i + \lambda'' c''_i) x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{i=3} (\lambda d_i + \lambda' d'_i + \lambda'' d''_i) x_i = 0; \end{array} \right.$$

se  $(x_0 x_1 x_2 x_3)$  sono le coordinate di un punto della data curva e soltanto allora queste quattro equazioni sono soddisfatte da valori non tutti nulli delle  $x$ ; allora è nullo il determinante

$$(3) \quad \left| \begin{array}{cccc} (\lambda a_0 + \lambda' a'_0 + \lambda'' a''_0) & \dots & (\lambda a_3 + \lambda' a'_3 + \lambda'' a''_3) & \\ \dots & \dots & \dots & \\ (\lambda d_0 + \lambda' d'_0 + \lambda'' d''_0) & \dots & (\lambda d_3 + \lambda' d'_3 + \lambda'' d''_3) & \end{array} \right| = 0;$$

ora, se  $\lambda, \lambda', \lambda''$  s'interpretano come coordinate omogenee di un punto, nel piano quest'equazione rappresenta una quartica piana generale: siccome questa risulta in corrispondenza univoca con la sestica in esame così le due curve sono del medesimo genere. Tenendo presente il genere di una quartica esente da punti doppi, si conclude: la sestica generata da quattro stelle proiettive di piani è di genere 3.

Consideriamo invece i tre spazi proiettivi di piani

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa a_x + \lambda b_x + \mu c_x + \nu d_x = 0 \\ \kappa a'_x + \lambda b'_x + \mu c'_x + \nu d'_x = 0 \\ \kappa a''_x + \lambda b''_x + \mu c''_x + \nu d''_x = 0 \end{array} \right.$$

ed in essi tre rette corrispondenti; esse potranno rappresen-

tarsi considerando ciascuna delle equazioni (4) con la omologa nel seguente sistema:

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa_1 a_x + \lambda_1 b_x + \mu_1 c_x + \nu_1 d_x = 0 \\ \kappa_1 a'_x + \lambda_1 b'_x + \mu_1 c'_x + \nu_1 d'_x = 0 \\ \kappa_1 a''_x + \lambda_1 b''_x + \mu_1 c''_x + \nu_1 d''_x = 0 \end{array} \right.$$

ora, siccome da queste si deducono queste altre

$$(\kappa \lambda_1 - \kappa_1 \lambda) b_x + (\kappa \mu_1 - \kappa_1 \mu) c_x + (\kappa \nu_1 - \kappa_1 \nu) d_x = 0$$

$$(\kappa \lambda_1 - \kappa_1 \lambda) b'_x + (\kappa \mu_1 - \kappa_1 \mu) c'_x + (\kappa \nu_1 - \kappa_1 \nu) d'_x = 0$$

$$(\kappa \lambda_1 - \kappa_1 \lambda) b''_x + (\kappa \mu_1 - \kappa_1 \mu) c''_x + (\kappa \nu_1 - \kappa_1 \nu) d''_x = 0$$

così, se un punto è comune a due rette corrispondenti nei dati tre spazi, sarà

$$\left| \begin{array}{ccc} b_x & c_x & d_x \\ b'_x & c'_x & d'_x \\ b''_x & c''_x & d''_x \end{array} \right| = 0.$$

Similmente si dimostra che sono nulli tutti gli altri determinanti che si possono estrarre dalla matrice (2). Ciò prova che la sestica generata da quattro stelle proiettive di piani si può anche definire come luogo dei punti per cui passano terne di rette corrispondenti in tre spazi proiettivi di piani.

Siccome la curva in questione è di ordine 6 e genere 3 così per un punto arbitrario dello spazio ne passano sette corde e trenta osculatori, mentre le sue tangenti costituiscono una superficie di sedicesimo ordine.

La curva non ammette alcuna quadrisecante; altrimenti questa apparterebbe a tutte le superficie di terz'ordine passanti per la curva, mentre le quattro superficie rappresentate dal sistema (2) non hanno alcuna retta in comune.

Ad una curva dell'indicata specie guida lo studio delle reti di quadriche. Infatti una tal rete è rappresentata da una equazione della forma

$$\lambda \varphi + \mu \chi + \nu \psi = 0,$$

se  $\varphi, \chi, \psi$  sono funzioni di secondo grado delle coordinate omogenee. Ora se la superficie così rappresentata è un cono col vertice nel punto  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ , sussisteranno le quattro equazioni seguenti:

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 0.1.2.3);$$

ciò prova che il luogo dei vertici dei coni della data rete può rappresentarsi come segue:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \chi}{\partial x_0} & \frac{\partial \psi}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial \chi}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{array} \right\| = 0;$$

il luogo stesso è quindi una sestica di genere tre della suindicata specie.

#### § 4. Sestiche di genere quattro.

Una superficie di 2° ed una di 3° ordine si tagliano secondo una curva di  $\Gamma_6$  6° ordine; se si rappresenta su un piano la prima di tali superficie mediante proiezione stereografica alla  $\Gamma_6$  corrisponde una curva pure di sest'ordine con due punti tripli, epperò di genere 4; se invece si rappresenta su un piano la seconda al modo consueto si ottiene come curva rappresentativa una sestica con sei punti doppi, epperò ancora di genere 4. Per ciò da un punto arbitrario dello spazio ne passano 6 corde e 36 osculatori. La curva ammette 120 piani tritangenti, i quali formano un sistema oloedricamente isomorfo a quello costituito dai piani che congiungono tre a tre 10 punti dati; sopra la realtà o meno dei detti piani tritangenti riposa una classifica-

zione topologica delle curve in questione, della quale ci è forza citare soltanto l'esistenza <sup>1)</sup>.

All'indicata categoria di curve appartiene una linea di cui venne avvertita una notevole prerogativa <sup>2)</sup> mediante un ragionamento puramente sintetico. Ricorrendo, invece, alla rappresentazione di una quadrica su di un piano si può completare tale risultato e farlo apparire come caso speciale di altro concernente la curva  $\Gamma_{2n}$  in cui si tagliano una superficie di secondo ordine e una di ordine  $n$ ; esponendo il risultato più generale noi veniamo ad anticipare la materia a cui è dedicato il Capitolo seguente.

Nella rappresentazione stereografica di una quadrica  $\Sigma_2$ , all'intersezione di questa con una superficie  $\Sigma_n$  d'ordine  $n$  corrisponde notoriamente una curva  $\Gamma_{2n}$  d'ordine  $2n$  avente per multipli secondo  $n$  i punti fondamentali epperò del genere  $n^2$ . Se detti punti cadono all'infinito di due rette  $Ox, Oy$  le generatrici dei due sistemi di  $\Sigma_2$  sono rappresentate dalle rette parallele a  $Ox$  e  $Oy$ ; e se si assumono dette rette per assi coordinati,  $\Gamma_{2n}$  sarà rappresentata da un'equazione  $f(x, y) = 0$  ove ogni coordinata sale soltanto al grado  $n$ ; pertanto  $f(x, y)$  può scriversi sotto una delle due forme

$$y^n f_0(x) + y^{n-1} f_1(x) + \dots + f_n(x),$$

$$x^n g_0(y) + x^{n-1} g_1(y) + \dots + g_n(y),$$

$f$  e  $g$  essendo polinomi in una variabile tutti del grado  $n$ .

Se, in particolare,  $\Gamma_{2n}$  contiene gli  $n^2$  punti in cui  $n$  generatrici dell'un sistema di  $\Sigma_2$  tagliano  $n$  generatrici dell'altro, l'equazione di  $\Gamma_{2n}$  avrà la forma

$$(y - b_1)(y - b_2) \dots (y - b_n) \varphi = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \psi$$

$\varphi$  e  $\psi$  essendo polinomi di grado  $n$  nelle coordinate; ora, se  $\varphi$  contenesse  $y$ , nell'equazione precedente questa coordinata sali-

<sup>1)</sup> E. Pascal, *Le varie forme delle curve storte di 6° ordine: intersezioni complete di quadriche e cubiche* (Rend. Ist. Lomb. II Ser., T. XXXVIII, 1905 p. 579-98).

<sup>2)</sup> F. Angust, *Lehrsatz eine gewisse Raumcurve sechsten Grades betreffend* (Arch. f. Mathem. Phys., T. LVIII, 1876, p. 216-23).

rebbe ad un grado superiore a  $n$ , perciò  $\varphi$  non contiene che la coordinata  $x$ ; per la stessa ragione  $\psi$  non può contenere  $y$ ; dette funzioni sono quindi della forma

$p(x-a_1')(x-a_2')\dots(x-a_n')$ ,  $q(y-b_1')(y-b_2')\dots(y-b_n')$ ,  
 $p, q$  essendo costanti, epperò  $\Gamma_{2n}$  è rappresentata come segue

$$\frac{p(y-b_1)\dots(y-b_n)(x-a_1')\dots(x-a_n')}{q(x-a_1)\dots(x-a_n)(y-b_1')\dots(y-b_n')} =$$

Ciò prova che  $\Gamma_{2n}$  contiene un secondo sistema di  $n^2$  punti, quelli, cioè, in cui le generatrici di  $\Sigma_2$  rappresentate dalle rette  $x-a_i'=0$  incontrano quelle rappresentate dalle rette  $y-b_i'=0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Ma la curva ne contiene infiniti altri; infatti la equazione precedente si può scrivere

$$\frac{p(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(x-a_1')(x-a_2')\dots(x-a_n')} = \frac{q(y-b_1)(y-b_2)\dots(y-b_n)}{(y-b_1')(y-b_2')\dots(y-b_n')}$$

od anche

$$\frac{p(x-a_1)\dots(x-a_n) + \lambda(x-a_1')\dots(x-a_n')}{p(x-a_1)\dots(x-a_n) + \mu(x-a_1')\dots(x-a_n')} =$$

$$= \frac{q(y-b_1)\dots(y-b_n) + \lambda(y-b_1')\dots(y-b_n')}{q(y-b_1)\dots(y-b_n) + \mu(y-b_1')\dots(y-b_n')}$$

$\lambda$  e  $\mu$  essendo numeri arbitrari. Ora questa equazione è della seguente forma:

$$\frac{P(x-A_1)\dots(x-A_n)}{(x-A_1')\dots(x-A_n')} = \frac{Q(y-B_1)\dots(y-B_n)}{(y-B_1')\dots(y-B_n')};$$

perciò  $\Gamma_{2n}$  contiene anche tanto gli  $n^2$  punti in cui le generatrici di  $\Sigma_2$  rappresentate dalle rette  $x-A_i=0$  tagliano quelle rappresentate dalle rette  $y-B_i=0$ , quanto quelli in cui le generatrici rappresentate dalle rette  $x-A_i'=0$  incontrano quelle rappresentate dalle rette  $y-B_i'=0$ . Emerge da tutto ciò che se si fa passare una superficie d'ordine  $n$  per gli  $n^2$  punti in cui  $n$  generatrici di un sistema di una quadrica ne incontrano altre

$n$ , essa taglia la quadrica stessa in una curva contenente infiniti altri analoghi gruppi di  $n^2$  punti ciascuno.

Supponendo  $n=3$  si ritrovano i risultati dell'August<sup>1)</sup>.

### C) CURVE DI SETTIMO ORDINE<sup>2)</sup>.

Date una rete di quadriche ed una stella di piani fra loro proiettive

$$\lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi = 0$$

$$\lambda a_x + \mu b_x + \nu c_x = 0$$

il sistema di equazioni

$$\begin{vmatrix} \varphi & \chi & \psi \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} = 0$$

rappresenta il luogo dei punti dello spazio per ognuno dei quali passa una retta della stella e la quartica che le corrisponde nella data rete: Essa è evidentemente una curva di settimo ordine passante pel centro della data stella e per i punti-base della data rete, di più situata sopra le  $\infty^2$  superficie di terzo ordine rappresentata dall'equazione

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \varphi & \chi & \psi \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} = 0$$

<sup>1)</sup> Per  $n=2$  si giunge ad una quartica di I specie circoscritta ad infiniti quadrangoli gobbi; ora, giova rilevare che tale fatto non determina una specializzazione della curva. Infatti supponendo di questa nota la rappresentazione mediante funzioni ellittiche di un parametro e fissato una delle  $\infty'$  quadriche che la contengono, presa ad arbitrio  $x$  risulteranno determinati  $y, z, u$  in modo che sia:

$$x + y \equiv K, \quad y + z \equiv -K, \quad z + u \equiv K, \quad u + x \equiv -K;$$

$x, y, z, u$  saranno quindi parametri dei vertici di un quadrangolo gobbo inscritto nella curva; e di tali se ne hanno  $\infty'$  per ciascuna delle  $\infty'$  quadriche passanti per la data curva. Ciò prova che la specializzazione della curva  $\Gamma_{2n}$  di cui sopra si inizia per  $n=3$ .

<sup>2)</sup> D. Montesano, *Su di un sistema lineare di coniche nello spazio* (Atti Acc. Torino, T. XXVII, 1891-92, p. 660-90); F. Stuyvaert, *Cinq études de géométrie analytique* (Gand, 1908, p. 42-44).

al variare dei parametri  $\alpha, \beta, \gamma$ . Due qualunque di tali superficie si tagliano ancora nella conica

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \varphi & \chi & \psi \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \varphi & \chi & \psi \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} = 0.$$

Ricorrendo alla consueta rappresentazione piana di una superficie cubica si vede che la curva in questione corrisponde ad una curva del seguente tipo  $(1^1 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2)_6$ ; essa è quindi di genere 5. Per ogni punto dello spazio passano quindi 10 sue corde e 45 osculatori; essa non ammette alcuna quadrisecante, altrimenti questa apparterebbe a tutte le superficie cubiche passanti per la curva.

#### D) CURVE DI OTTAVO ORDINE <sup>1)</sup>.

Dati <sup>2)</sup> due fasci di quàdrice ad un fascio di piani fra loro proiettivi

$$\lambda\varphi_1 + \mu\psi_1 = 0, \quad \lambda\varphi_2 + \mu\psi_2 = 0, \quad \lambda a_x + \mu b_x = 0$$

vi sono  $\infty'$  punti per ognuno dei quali passano tre superficie

<sup>1)</sup> Di quest'ordine è anche una curva che s'incontra nella soluzione ideata da Archita Tarantino per il problema di Delo (cf. G. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia* p. 99-104); è l'intersezione del cilindro

$$x^2 + y^2 = ax$$

col toro

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

<sup>2)</sup> F. Stuyvaert, *Cinq études de géométrie analytique* (Gand, 1908, p. 48-49).

corrispondenti di questi sistemi; essi costituiscono la curva rappresentata come segue

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & a_x \\ \psi_1 & \psi_2 & b_x \end{vmatrix} = 0;$$

è evidentemente una curva di 8° ordine, la quale forma con la retta  $a_x = 0$ ,  $b_x = 0$  la base del fascio di superficie di terzo ordine

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \varphi_1 & \varphi_2 & a_x \\ \psi_1 & \psi_2 & b_x \end{vmatrix} = 0,$$

$\alpha$  e  $\beta$  essendo parametri arbitrari. Ricorrendo alla rappresentazione di una di queste su un piano si vede che quella curva è di genere 7, il che permette di trovare tutte le altre caratteristiche.

Ad altra curva del medesimo ordine guida la considerazione seguente:

Per ogni punto di una quàdrice rigata passano due generatrici reali della superficie; il luogo dei punti per cui le corrispondenti generatrici formano fra di loro l'angolo  $\vartheta$  si dirà *curva isoclina* dell'angolo  $\vartheta$ ; nel caso particolare  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  *curva ortoclina* <sup>1)</sup>. Per determinarne la natura considereremo separatamente il caso dell'iperboloide ad una falda quello del paraboloide iperbolico.

*Iperboloide ad una falda.* Della superficie

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

<sup>1)</sup> Queste curve sono studiate sinteticamente nella Diss. di W. Ludwig, *Ueber die Ebenen welche auf einer Flächen zweiten Grades einem gegebenen Kegelschnitte ähnliche Kegelschnitte ausschneiden* (Breslau, 1898), che ci è nota solo per quanto se ne legge in *Jahrb. u. die Forsch. der Mathem.* Bd. XXIX, p. 539. La rappresentazione grafica col metodo di Monge si trova nell'articolo dello stesso autore *Ueber die «  $\vartheta$  - Kurven » des einmanteligen Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloids* (Arch. Math. Phys., III Ser., T. III, 1902, p. 217-25).

i due sistemi di generatrici sono rappresentati dalle seguenti coppie di equazioni:

$$(2) \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = u \left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{1}{u} \left(1 + \frac{x}{a}\right) \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = v \left(1 + \frac{x}{a}\right) \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{x}{a}\right), \end{cases}$$

ove  $u, v$  sono parametri arbitrari. Da queste si deduce:

$$(4) \quad x = a \frac{u-v}{u+v}, \quad y = b \frac{uv+1}{u+v}, \quad z = c \frac{uv-1}{u+v},$$

equazioni costituenti la rappresentazione parametrica della superficie. Da esse si trae:

$$(5) \quad \begin{cases} E = \frac{4a^2v^2 + b^2(v^2-1)^2 + c^2(v^2+1)^2}{(u+v)^4}, \\ G = \frac{4a^2u^2 + b^2(u^2-1)^2 + c^2(u^2+1)^2}{(u+v)^4}, \\ F = \frac{-4a^2uv + b^2(u^2-1)(v^2-1) + c^2(u^2+1)(v^2+1)}{(u+v)^4}. \end{cases}$$

Ricordiamo che, in generale, l'angolo  $\phi$  sotto cui si tagliano le linee coordinate di una superficie avente per elemento lineare

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

è dato da

$$\cos \phi = \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}}$$

onde per essa le linee isocline hanno per equazione

$$(6) \quad (EG - F^2) \cos^2 \phi - F^2 = 0;$$

sostituendo a  $E, F, G$  i valori (5) si ottiene un'equazione di 4° grado tanto in  $u$  quanto in  $v$ , la quale prova che le linee isocline incontrano in quattro punti le generatrici dei due sistemi del dato iperboloido, epperò sono curve di ottavo ordine (di genere 9).

Ma se  $\phi = 0$  la (6) si riduce a  $F = 0$  e questa rappresenta una curva che incontra in due punti le generatrici dei due sistemi; è dunque una curva di 4° ordine (di genere 1). Per trovare la equazione di un'altra quadrica contenente la curva ortoclina, prendiamo la equazione  $F = 0$ , cioè

$$-4a^2uv + (b^2 + c^2)u^2v^2 - (b^2 - c^2)(u^2 + v^2) + b^2c^2 = 0$$

e notiamo che le (2), (3) danno:

$$u = \frac{\frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{1 - \frac{x}{a}}, \quad v = \frac{\frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{1 + \frac{x}{a}}$$

e poi

$$uv = \frac{\frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{\frac{y}{b} - \frac{z}{c}}, \quad u^2 + v^2 = 2 \frac{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}{\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)^2},$$

onde la precedente diviene

$$(7) \quad -4a^2 \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) + (b^2 + c^2) \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 - 2(b^2 - c^2) \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right) = 0$$

e questa, assieme alla (1) rappresenta la curva ortoclina del dato iperboloido; i quattro coni quadrici passanti per la curva essendo (è facile dimostrarlo) distinti, la curva stessa è di genere 1.

In modo del tutto analogo si trova l'equazione di una superficie di quart'ordine segante lo stesso iperboloido in una curva isoclina.

*Paraboloido iperbolico.* La superficie

$$(8) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{p}$$

ammette la seguente rappresentazione parametrica:

$$(9) \quad x = \frac{a}{p}(u+v), \quad y = \frac{b}{p}(u-v), \quad z = \frac{2uv}{p};$$



per essa si ha quindi:

$$(10) \left\{ \begin{aligned} E &= \frac{a^2 + b^2 + 4v^2}{p^2} \\ G &= \frac{a^2 + b^2 + 4u^2}{p^2}, \quad D^2 = 4a^2b^2 + 4(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) - 8(a^2 - b^2)uv \\ F &= \frac{a^2 - b^2 + 4uv}{p^2}; \end{aligned} \right.$$

sostituendo nella (6) si vede che le linee isocline del paraboloide iperbolico sono quartiche di I specie mentre la linea ortoclina è la conica per cui

$$a^2 - b^2 + 4uv = 0;$$

questa è dunque la sezione della superficie col piano

$$a^2 - b^2 + 2pz = 0,$$

che è parallelo al piano  $xy$ .

**E) ALCUNE CURVE DEGLI ORDINI NOVE, DIECI, SEDICI E VENTITRATTRO COLLEGATE ALLE QUÀDRICHE.**

Dati <sup>1)</sup> una rete di quàdriche e tre stelle proiettive di piani a quella proiettivi

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi &= 0 \\ \lambda a_x + \mu b_x + \nu c_x &= 0 \\ \lambda a'_x + \mu b'_x + \nu c'_x &= 0 \\ \lambda a''_x + \mu b''_x + \nu c''_x &= 0 \end{aligned} \right.$$

esistono nello spazio  $\infty^1$  punti, per ognuno dei quali passano quattro superficie corrispondenti; essi costituiscono la curva rappresentata come segue:

$$(2) \left\| \begin{array}{ccc} \varphi & \chi & \psi \\ a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \\ a''_x & b''_x & c''_x \end{array} \right\| = 0;$$

<sup>1)</sup> Stuyvaert, l. c., p. 49.

è una curva di nono ordine, parziale intersezione di una superficie di 3° ordine ed una di 4° aventi comuni una cubica gobba; dalla rappresentazione piana della superficie cubica, risulta che la curva è di genere 9.

Similmente <sup>1)</sup>: dati cinque spazi di piani collineari

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \kappa a_x + \lambda b_x + \mu c_x + \nu d_x &= 0 \\ \kappa a'_x + \lambda b'_x + \mu c'_x + \nu d'_x &= 0 \\ \dots & \dots \\ \kappa a_x^{IV} + \lambda b_x^{IV} + \mu c_x^{IV} + \nu d_x^{IV} &= 0 \end{aligned} \right.$$

si ottiene una curva di decimo ordine come luogo dei punti per ognuno dei quali passano cinque piani corrispondenti; essa è rappresentata dalla matrice che risulta dall'eliminazione di  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$  fra le precedenti equazioni ed è intersezione di due superficie di quart'ordine aventi ancora in comune una sestica di genere 3; essa è in conseguenza del genere 9; ecc. <sup>2)</sup>.

Ad una curva d'un ordine ancor più elevato conduce la ricerca del luogo geometrico dei vertici dei triedri trirettangoli i cui spigoli sono normali all'ellissoide

$$(4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ } ^3)$$

Tale ricerca esige un calcolo molto complicato, di cui indicheremo le linee generali.

<sup>1)</sup> Stuyvaert, l. c., p. 37

<sup>2)</sup> Un grande numero di curve considerate nel presente Cap. sono rappresentabili mediante matrici, onde appartengono ad una vasta categoria di enti geometrici di cui M. Stuyvaert ha tracciate le prime linee: v. la nota *Courbes algébriques gauches représentables par des matrices* (Bull. de l'Acad. de Belgique, 1919), ed il IV Capitolo dell'opera *Algèbre à deux dimensions* (Gand, 1920).

<sup>3)</sup> L. Painvin, *Lieu des segments des trièdres trirectangles dont les côtés sont normaux à une surface du second ordre* (Nouv. Ann. de Math. II Ser., T. X, 1871, 1872, p. 332-59); W. van der Wonde, *Over de normalen van een oppervlakt van den tweeden grad* (Nieuw Arch. voor Wiskunde, II Ser., T. XIII, 1921, p. 299-406).

Indicando con  $x, y, z$  le coordinate e con  $X, Y, Z$  quelle di un punto della quadrica per rappresentare la normale servono le equazioni

$$(5) \quad \frac{x-X}{a^2} = \frac{y-Y}{b^2} = \frac{z-Z}{c^2}$$

con la condizione (6)  $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ .

Indicando con  $\lambda$  il valore comune delle frazioni (5) l'eliminazione di  $X, Y, Z$  fra le precedenti equazioni dà

$$(7) \quad \frac{a^2 x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2 + \lambda)^2} - 1 = 0,$$

equazione di sesto grado in  $\lambda$ , alle cui radici corrispondono le sei normali condotte alla data quadrica dal punto  $(x, y, z)$ . Ora i coseni di direzione della normale nel punto  $X, Y, Z$  sono proporzionali risp. a  $\frac{X}{a^2}, \frac{Y}{b^2}, \frac{Z}{c^2}$ , ossia, per le (5), a  $\frac{x}{\lambda + a^2}, \frac{y}{\lambda + b^2}, \frac{z}{\lambda + c^2}$ ; quindi le normali corrispondenti alle radici  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  formeranno un triedro trirettangolo se sussisteranno le tre relazioni

$$\frac{x^2}{(\lambda_1 + a^2)(\lambda_k + a^2)} = \frac{y^2}{(\lambda_1 + b^2)(\lambda_k + b^2)} = \frac{z^2}{(\lambda_1 + c^2)(\lambda_k + c^2)}$$

$i, k$  essendo due qualunque dei numeri 1, 2, 3; ma queste tre equivalgono a due sole, cioè alle seguenti:

$$(8) \quad \frac{x^2}{\lambda_1 + a^2} + \frac{y^2}{\lambda_1 + b^2} + \frac{z^2}{\lambda_1 + c^2} = \frac{x^2}{\lambda_2 + a^2} + \frac{y^2}{\lambda_2 + b^2} + \frac{z^2}{\lambda_2 + c^2} = \frac{x^2}{\lambda_3 + a^2} + \frac{y^2}{\lambda_3 + b^2} + \frac{z^2}{\lambda_3 + c^2}.$$

Essendo poi per ipotesi  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  radici dell'equazione (7), il primo membro (ridotto preventivamente a forma intera) è

divisibile per  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ . Scrivendo che ciò accade si arriva a concludere:

Posto:

(8')

$$A = x^2 + y^2 + z^2, \quad B = (b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2, \\ C = b^2 c^2 x^2 + c^2 a^2 y^2 + a^2 b^2 z^2.$$

$$(9) \quad m = a^2 + b^2 + c^2, \quad n = b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2, \quad p = a^2 b^2 c^2, \\ r = -(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2),$$

il luogo cercato è rappresentato dal sistema:

$$(10) \quad 4mA C^2 = (3pA - mC)^2, \quad mAB^2 = (2nA - mB)^2, \\ 3pAB = C(4nA - mB).$$

oppure in funzione del parametro  $\lambda$  come segue:

$$(11) \quad \begin{cases} rx^2 = (b^2 - c^2) \varrho^2 \left( a^4 m - \frac{2a^2}{\varrho + 1} + \frac{3p}{2\varrho + 1} \right) \\ ry^2 = (c^2 - a^2) \varrho^2 \left( b^4 m - \frac{2b^2}{\varrho + 1} + \frac{3p}{2\varrho + 1} \right) \\ rz^2 = (a^2 - b^2) \varrho^2 \left( c^4 m - \frac{2c^2}{\varrho + 1} + \frac{3p}{2\varrho + 1} \right) \end{cases}$$

È una curva di sedicesimo ordine di cui il centro della data quadrica è un punto ottuplo; facendo nelle (11)  $\lambda = \infty, -1, -\frac{1}{2}$  si vede che essa passa anche per i punti all'infinito degli assi di detta superficie.

Il problema analogo per un paraboloido guida ad una curva di ottavo ordine.

Alla questione ora trattata si connette l'altra di determinare il luogo dei piedi delle terne di normali dotate dall'anzidetta proprietà. Ora, mediante calcoli dello stesso tipo si arriva a concludere che:

Posto :

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} P = b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 \\ Q = b^2c^4x^2 + c^2a^4y^2 + a^2b^4z^2 \\ R = b^2c^6x^2 + c^2a^6y^2 + a^2b^6z^2 \end{array} \right. , s = \left| \begin{array}{ccc} b^2c^4 & a^2 & 1 \\ c^2a^4 & b^2 & 1 \\ a^2b^4 & c^2 & 1 \end{array} \right|$$

il luogo suddetto è l'intersezione della data con la superficie di dodicesimo ordine rappresentata come segue :

(13)

$$4p^3r^3x^2y^2z^2PQR + (PR - Q^2) \{ (3prPR - msQ^2) + Q(psP + mrR) \} = 0.$$

Se nei risultati ora stabiliti si mutano i segni di una o due delle quantità  $a^2, b^2, c^2$  si ottengono le curve analoghe relative alle altre quadriche a centro.

#### AGGIUNTA E CORREZIONI.

Pag. 26. — *Aggiungi* : Analoghe alle linee Darboux sono quelle che portano il nome di Segre perchè s'incontrano per la prima volta nella nota di questo geometra intitolata *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 5<sup>a</sup> Serie, T. XVII, 2<sup>o</sup> Sem. 1908, pp. 405-12). La loro equazione differenziale fu data da G. Fubini nella memoria *Invarianti proiettivo-differenziali delle curve* (Annali di matem. 3<sup>a</sup> Serie T. XXVI. 1913, p. 236, eq. (10); non la riferiamo perchè lo spazio non ci consente di spiegare il significato dei simboli usati.

Pag. 27. — La prima equazione va modificata come segue :

$$\left| \begin{array}{ccc} N & FN - GM & k^2 \\ -2\mu & GL - EN & 2k \\ L & EM - FL & 1 \end{array} \right|$$

conseguentemente va corretta la (XXX).

Pag. 207, linea 4<sup>a</sup> dal basso. — Invece di « ricordiamo » si legga « rimandiamo ».

INDICE

PREFAZIONE . . . . .	Pag. v
----------------------	--------

### CAPITOLO PRIMO.

#### Riassunto di concetti e formole concernenti le curve sghembe.

A) <i>Curve considerate nello spazio</i> . . . . .	Pag. 1
§ 1. Formole classiche . . . . .	1
§ 2. Corde principali. . . . .	7
§ 3. Asintoti e piani asintotici. . . . .	7
§ 4. Formole in coordinate omogenee. . . . .	9
§ 5. Elica osculatrice . . . . .	12
§ 6. Superficie mediana di una linea gobba. . . . .	13
§ 7. Larghezza di una curva . . . . .	13
§ 8. Tetraedri di osculazione . . . . .	14
B) <i>Curve considerate sopra una superficie</i> . . . . .	18
§ 1. Caso di enti algebrici . . . . .	18
§ 2. Continuazione: intersezioni complete o non . . . . .	19
§ 3. Formole di geometria differenziale . . . . .	20
§ 4. Linee notevoli di una superficie. . . . .	22

### CAPITOLO SECONDO.

#### Leggi di derivazione di una curva da una o più altre.

§ 1. Indicatrici sferiche delle tangenti, delle normali principali e delle binormali. . . . .	Pag. 29
§ 2. Curve radiali . . . . .	30
§ 3. Luoghi dei centri dei cerchi osculatori e delle sfere osculatrici. . . . .	30
§ 4. Evolventi filari ed evolventi planari . . . . .	31
§ 5. Il metodo del mutamento delle coordinate . . . . .	32
§ 6. Podarie o pedali . . . . .	33
§ 7. Linee e superficie baricentriche di una data curva. . . . .	36

§ 8. Curve annesso ed associate ad una data . . . . .	Pag. 37
§ 9. Curva areolare di una data . . . . .	42
§ 10. Curve parallele . . . . .	43
§ 11. Curve dedotte da due altre . . . . .	46
§ 12. Assoide di due linee gobbe . . . . .	48
§ 13. Chiusa: Cenni intorno ad alcune questioni generali . . . . .	51

### CAPITOLO TERZO.

#### Le coniche nello spazio.

§ 1. Questioni proiettive . . . . .	Pag. 58
§ 2. Questioni metriche . . . . .	62
§ 3. Equazioni ridotte . . . . .	66
§ 4. Il cerchio . . . . .	68

### CAPITOLO QUARTO.

#### Curve sghembe di terzo ordine (cubiche gobbe) in generale.

§ 1. Generazioni e costruzioni . . . . .	Pag. 69
§ 2. Rappresentazione analitica . . . . .	73
§ 3. Corde e tangenti . . . . .	80
§ 4. Piani seganti, tangenti ed osculatori . . . . .	84
§ 5. Punti e piani congiunti . . . . .	91
§ 6. Collineazioni e correlazioni che mutano in sè stessa una cubica gobba . . . . .	98
§ 7. Proprietà metriche delle cubiche gobbe . . . . .	100
§ 8. Classificazione delle cubiche gobbe . . . . .	105
§ 9. Cubiche gobbe degeneri . . . . .	112

### CAPITOLO QUINTO.

#### Cubiche gobbe particolari.

A) <i>L'iperbole gobba</i> . . . . .	Pag. 113
§ 1. Generalità . . . . .	113
§ 2. Corde, tangenti, asintoti . . . . .	117
§ 3. Coppie di iperboli gobbe fra loro coniugate . . . . .	122
§ 4. Piani per tre punti, piani osculatori, piani asintotici . . . . .	131
§ 5. Il complesso lineare e la superficie mediana d'un'iperbole gobba . . . . .	137
§ 6. Iperboli gobbe metricamente specializzate . . . . .	143

B) <i>L'iperbole parabolica</i> . . . . .	Pag. 146
C) <i>L'ellisse gobba</i> . . . . .	148
§ 1. Generalità . . . . .	148
§ 2. Corde, tangenti, asintoti . . . . .	149
§ 3. Piano per tre punti, piano osculatore, piano asintotico . . . . .	150
§ 4. Complesso lineare determinato da un'ellisse gobba . . . . .	156
§ 5. Tetraedri collegati ad un'ellisse gobba . . . . .	157
§ 6. Cubiche gobbe circolari (circoli sghembi) . . . . .	162
§ 7. La curva ooptera . . . . .	169
D) <i>La parabola gobba</i> . . . . .	174
§ 1. Generalità . . . . .	174
§ 2. Tetraedri collegati ad una parabola gobba . . . . .	178
§ 3. Parabola gobba con direttrice . . . . .	183
§ 4. Parabola gobba rettificabile. Elica cubica . . . . .	187
§ 5. Parabola gobba di torsione costante . . . . .	192
E) <i>Altre cubiche gobbe metricamente specializzate</i> . . . . .	195

### CAPITOLO SESTO.

#### Curve gobbe di quarto ordine e prima specie.

A) <i>Quartiche di I specie note anteriormente alla teoria generale</i> . . . . .	Pag. 197
§ 1. Curva di Archita . . . . .	197
§ 2. L'ippopeda di Endosso . . . . .	199
§ 3. La finestra di Viviani . . . . .	201
§ 4. La Ciclo-cilindrica di Roberval . . . . .	204
§ 5. La quartica di A. G. Kästner . . . . .	205
B) <i>Teoria generale delle quartiche gobbe di I specie</i> . . . . .	207
§ 1. Generalità . . . . .	207
§ 2. Rappresentazione parametrica; prime conseguenze di essa . . . . .	214
§ 3. Applicazioni della rappresentazione parametrica canonica . . . . .	218
§ 4. Formole relative a tangenti ed osculatori . . . . .	227
C) <i>Quartiche di I specie particolari</i> . . . . .	229
§ 1. La quartica orto-tetraedrica . . . . .	229
§ 2. Le quartiche basi di fasci di quàdrice rotonde . . . . .	233
§ 3. Le quartiche basi di fasci di paraboloidi . . . . .	238
§ 4. Le quartiche basi di fasci di quàdrice coassiali . . . . .	242
§ 5. Continuazione: le linee di curvatura delle quàdrice a centro, la polodia di Poincot e la curva L di una quàdrice . . . . .	244
§ 6. Cicliche sferiche . . . . .	252
§ 7. Coniche sferiche . . . . .	257
§ 8. Generalizzazione delle coniche sferiche: le curve di W. Roberts . . . . .	270
§ 9. Quartiche di I specie degeneri . . . . .	274

## CAPITOLO SETTIMO.

## Curve di quarto ordine e seconda specie.

A) <i>Teoria generale delle quartiche di II specie.</i> . . . .	Pag. 276
§ 1. Preliminari . . . . .	276
§ 2. Rappresentazione parametrica generale e costruzione della curva. . . . .	277
§ 3. Applicazioni della rappresentazione esposta . . . . .	281
§ 4. Rappresentazioni parametriche speciali. . . . .	284
B) <i>Quartiche di II specie particolari</i> . . . . .	296
§ 1. Quartiche equiaurmoniche . . . . .	296
§ 2. Quartiche con due tangenti stazionarie. . . . .	297
§ 3. Quartiche gobbe con punto doppio . . . . .	301
§ 4. Quartiche gobbe cuspidate . . . . .	306
§ 5. Linea d'ombra propria per raggi paralleli d'una conoide di Plücker. . . . .	308
§ 6. Linea di stringimento dell'iperboloide ad una falda . . . . .	309
§ 7. Podaria di un punto rispetto ad un sistema di generatrici d'un iperboloide ad una falda . . . . .	316
§ 8. Quartiche di II specie degeneri . . . . .	318

## CAPITOLO OTTAVO.

Curve sghembe algebriche speciali  
di ordine determinato superiore a quattro.

A) <i>Curve di quinto ordine</i> . . . . .	Pag. 319
§ 1. Quintiche razionali in generale . . . . .	319
§ 2. Cenni intorno ad alcune speciali quintiche razionali. . . . .	326
§ 3. Quintiche razionali invarianti rispetto a gruppi finiti di proiettività. . . . .	328
§ 4. Quintiche razionali appartenenti ad un complesso lineare . . . . .	330
§ 5. Quintiche razionali collegate alla teoria delle quadriche . . . . .	331
§ 6. Quintiche gobbe di genere 1. . . . .	339
§ 7. Quintiche gobbe di genere 2 . . . . .	241
B) <i>Curve di sesto ordine</i> . . . . .	344
§ 1. Sestiche razionali . . . . .	344
§ 2. Sestiche di genere due. . . . .	347
§ 3. Sestiche di genere tre. . . . .	351
§ 4. Sestiche di genere quattro . . . . .	354
C) <i>Curve di settimo ordine</i> . . . . .	357
D) <i>Curve di ottavo ordine</i> . . . . .	358
E) <i>Alcune curve degli ordini nove, dieci, sedici e ventiquattro colle- gate alle quadriche</i> . . . . .	362

FINITO DI STAMPARE IN FIRENZE  
NELLA TIPOGRAFIA « ENRICO ARIANI »  
IL XX GENNAIO MCMXXXV

**CASA EDITRICE N. ZANICHELLI - BOLOGNA**

---

**PINCHERLE SALVATORE** — *Lezioni di algebra complementare dettate nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti.*

Volume Primo - *Analisi algebrica.*

Volume Secondo - *Teoria delle equazioni.*

— *Lezioni di calcolo infinitesimale.*

— *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche - Parte prima.*

**PINCHERLE SALVATORE e U. AMALDI** — *Le operazioni distributive e le loro applicazioni alla analisi.*

**FORRO FRANCESCO** — *Trattato di astronomia - Volume Primo.*

**QUESTIONI RIGUARDANTI LE MATEMATICHE ELEMENTARI**, raccolte e coordinate da Federigo Enriques.

Parte Prima - *Critica dei principi. Vol. I.*

**TONELLI LEONIDA** — *Fondamenti di calcolo delle variazioni. Due volumi.*

---

*Chiedere catalogo alla Casa Editrice N. Zanichelli - Bologna*