

A. Dougl.  
1943

GINO LORIA  
*Professore nell'Università di Genova*

# CURVE PIANE SPECIALI ALGEBRICHE E TRASCENDENTI

TEORIA E STORIA

VOL. II. - CURVE TRASCENDENTI - CURVE DEDOTTE DA ALTRE  
*con 58 figure illustrative intercalate nel testo*

PRIMA EDIZIONE ITALIANA



ULRICO HOEPLI  
EDITORE - LIBRAIO DELLA REAL CASA  
MILANO  
1930

TUTTI I DIRITTI SONO RISERVATI

STABILIMENTO GRAFICO STUCCHI CERETTI - (SOC. AN.) - MILANO  
*(Printed in Italy)*

## INDICE

Indice ..... p. VII-XI

## LIBRO VI.

## CURVE TRASCENDENTI.

- CAP. I. **Introduzione. Le curve panalgebriche.** — 192. Curve algebriche, trascendenti e interscendenti — 193-195. Teoria delle curve panalgebriche — 196. Sguardo generale sulla collezione di curve trascendenti note ..... p. 1-12
- CAP. II. **Quadratrici.** — 197. La quadratrice di Ippia e Dinostrato: generazione, equazione, proprietà. — 198. Costruzione delle tangenti e determinazione dell'area — 199. Generazione stereometrica della quadratrice — 200. Quadratrice di Tschirnhausen e curva di Ozanam — 201. La cocleotide; varie sue generazioni. Costruzione delle tangenti. Genesi stereometriche della curva — 202. Una quadratrice dell'iperbole. Generalizzazione ..... p. 13-33
- CAP. III. **La spirale di Archimede.** — 203. Definizione, equazioni polare e cartesiana, prime proprietà — 204. Teoremi di quadratura e rettificazione — 205. Generazione stereometrica e descrizione meccanica della spirale d'Archimede. La neoide non differisce da questa curva. p. 34-42
- CAP. IV. **Le spirali di grado superiore.** — 206. Definizioni ed equazioni; rettificazione — 207. La spirale di Galileo — 208. La spirale parabolica di Giac. Bernoulli; esistenza in essa di infinite coppie di archi a differenza rettificabile ..... p. 43-51
- CAP. V. **Altre spirali algebriche.** — 209. Osservazioni sul significato della parola « spirale ». Generalità sopra le spirali algebriche — 210. La spirale iperbolica. Formole relative e proprietà — 211. Il lituus di R. Cotes. p. 52-60
- CAP. VI. **La spirale logaritmica e le curve che ne derivano.** — 212. Definizione data da Descartes per la spirale logaritmica; equazione che se ne trae e proprietà della curva — 213. Definizione della stessa curva secondo E. Torricelli. Equazione intrinseca; sue proprietà di riproduzione. Equazione della stessa curva — 214. Di alcune curve dedotte da una spirale logaritmica o che ne sono generalizzazioni. p. 61-71

- CAP. VII. **La clotoide.** — 215. Un problema proposto da Giac. Bernoulli; la curva che lo risolve è la clotoide. Teoremi relativi a questa curva; generalizzazione della medesima; sua evoluta ..... p. 72-75
- CAP. VIII. **Le cicloidi.** — 216. Notizie sull'origine delle cicloidi ordinaria, accorciata e allungata — 217. Equazione cartesiana delle cicloidi. Queste sono curve panalgebriche. Costruzione delle tangenti — 218. Le varie forme delle cicloidi — 219. Rettificazione e quadratura di esse; cubatura di solidi da essi generati — 220. Zone cicloidal quadrabili secondo Huygens, Leibniz e Giovanni Bernoulli — 221. Curvatura ed equazione intrinseca della cicloide ordinaria. Le tre cicloidi come proiezioni dell'elica cilindrica. Proprietà meccaniche della cicloide ordinaria — 222. Generalizzazioni delle cicloidi: le cicloidi di Fermat e di Laisant — 223. Seguito: Le cicloidi di M. A. Ricci ..... p. 76-98
- CAP. IX. **Epicycloidi, ipocicloidi, evolventi di circolo.** — 224. Notizie storiche sopra le epicycloidi e le ipocicloidi — 225. Rappresentazione analitica di queste curve. Loro duplice generazione — 226. Generazione delle epicycloidi ed ipocicloidi come involuppi di un circolo mobile o col mezzo di un parallelogrammo articolato. Equazione differenziale in coordinate polari; conseguenze — 227. Rettificazione, curvatura, equazione intrinseca — 228. Curva polare reciproca di un'epicycloide o ipocicloide (è una spiga). Le rodonee come curve generabili dal ruzzolamento di un cerchio fisso sopra un altro — 229. Considerazione particolare delle epicycloidi o ipocicloidi algebriche. Elenco delle più notevoli fra esse — 230. L'evolvente di circolo come particolare epicycloide. Sua rappresentazione analitica. Rettificazione, curvatura, equazione intrinseca. Teorema di curvatura — 231. Relazioni che passano fra le tre curve evolvente di circolo, spirale d'Archimede e spirale iperbolica e l'elica cilindrica ..... p. 99-131
- CAP. X. **Le pseudocicloidi.** — 232. Definizioni ed equazioni delle nuove curve — 233. Loro equazioni intrinseche. Cenno sopra alcune pseudocicloidi notevoli ..... p. 132-137
- CAP. XI. **Le curve di Delaunay e C. Sturm.** — 234. Generalizzazione del concetto di curva ciclica; trocoidi e involuppi trocoidali. Curva generata da un fuoco di una conica che ruzzola sopra una retta fissa (curva di Delaunay). Curva analoga generata dal centro (curva di Sturm). Equazioni e proprietà di queste curve — 235. Cenno intorno al problema inverso delle trocoidi; esempio ..... p. 138-144
- CAP. XII. **Curve sintrepenti e Curve isotrepenti.** — 236. Cenno sopra una ricerca di Giovanni Bernoulli. Curve in conseguenza generate. Applicazione a un esempio ..... p. 145-148
- CAP. XIII. **Le curve di Debeaune.** — 237. Enunciato di un problema proposto dal Debeaune a Descartes. Curve che lo risolvono — 238. Generalizzazione del citato problema ..... p. 149-155
- CAP. XIV. **Le curve di Ribaucour.** — 239. Un problema di Giovanni Bernoulli e le curve che lo risolvono in generale. Elenco di speciali curve risoltrici. Classificazione delle curve trovate; loro distribuzione in quattro classi — 240. Teoremi di quadratura. Rettificazione, curvatura e equazione intrinseca. Generalizzazione. Le curve di Ribaucour come involuppi trocoidali. Le curve baritrope e tautobaridi come curve di Ribaucour — 241. Risoluzione di una questione analoga a quella trattata nel n. prec. .... p. 156-167

- CAP. XV. La spirale di Norwich o di Sturm e la curva di Eulero.** — 242. Formole date da J. Riccati per determinare l'equazione di una curva conoscendone l'espressione della curvatura in funzione del raggio vettore. Applicazione alla determinazione delle curve per le quali il raggio di curvatura è eguale al raggio vettore — 243. Formole di Eulero e sua applicazione alla soluzione del problema risoluto dal Riccati. Esempi — 244. Continuazione. Studio di una nuova classe di curve; elementi notevoli in essa contenuti ..... p. 168-177
- CAP. XVI. Curve trigonometriche e Curve ipertrigonometriche.** — 245. Le sei curve che rappresentano graficamente le funzioni circolari. Sono tutte curve panalgebriche — 246. Curve congeneri ad equazioni più complesse ..... p. 178-183
- CAP. XVII. La logaritmica, la curva ipergeometrica e la linea di Wallis.** — 247. La curva logaritmica od esponenziale; ricerche relative di E. Torricelli e C. Huygens. Altre proprietà della curva. Sua costruzione per punti — 248. Curve analoghe ad equazioni più complesse. Curva rappresentatrice degli integrali euleriani di seconda specie. p. 184-194
- CAP. XVIII. Le curve straordinarie.** — 249. Curve continue esenti da tangenti. Curve che riempino tutta un'area. Ecc..... p. 195-198
- CAP. XIX. Le curve W di Klein e Lie.** — 250. Definizione e equazioni delle curve W; proprietà che ne risultano — 251. Casi speciali: la spirale logaritmica e la potenziale triangolare — 252. Continuazione: Le curve politropiche; loro proprietà..... p. 199-207
- CAP. XX. Le linee di Mercatore o di Sumner.** — 253. Formole concernenti la proiezione di Mercatore. Curve che corrispondono alle sezioni piane della sfera. I loro tre tipi. Equazione intrinseca delle linee trovate. Cenno intorno a linee analoghe sulla pseudosfera. p. 208-212
- CAP. XXI. Le trattrici.** — 254. Generalità sulle curve fisico-matematiche. Un problema proposto da C. Perrault; soluzione di esso; la trattrice; varie equazioni della medesima e sue proprietà — 255. Generalizzazione della trattrice: a) le pseudotrattrici; b) la sintrattrice; c) le trattrici a base qualunque e le curve equitangenziali — 256. La trattrice a base circolare e la sua evoluta, secondo A. Bordoni — 257. Analoga ricerca di F. Morley — 258. Curva per cui è costante la tangente polare (« complicata tractrix »); sue relazioni con l'evolvente di circolo e la spirale d'Archimede ..... p. 213-231
- CAP. XXII. Le catenarie.** — 259. Forma assunta da una catena omogenea pesante appesa con i suoi estremi; la curva funicolare o catenaria; sua equazione e proprietà. Cenno sul problema della curva velaria — 260. Generalizzazione della catenaria: a) le pseudocatenarie; b) le linee a volta, in particolare la catenaria con due nasi. Cenno sulle clinoidi — 261. La catenaria di eguale resistenza; equazioni varie e proprietà. Generalizzazione ..... p. 232-241
- CAP. XXIII. La curva elastica piana (lintearia), l'isocrona paracentrica e la curva meridiana del solido di minima resistenza.** 262. Il problema della curva elastica. Equazione relativa — 263. Il problema dell'isocrona paracentrica. Curva generatrice del solido di minima resistenza ..... p. 242-246

- CAP. XXIV. L'erpolodia, in particolare la spirale di Poinsoot.** — 264. Cenni sopra alcune ricerche del Poinsoot. La polodia e l'erpolodia. La spirale di Poinsoot, caso particolare dell'erpolodia. Relazione di questa con le lossodromiche di una sfera ..... p. 247-249
- CAP. XXV. Altre curve fisico-matematiche.** — 265. Curva elettromagnetica di E. Weyr. Curve magnetiche dell'Aoust — 266. Una linea studiata da H. Schubert. Cenni intorno ad altre curve fisico-matematiche ..... p. 250-253

## LIBRO VII.

## CURVE DEDOTTE DA ALTRE.

- CAP. I. Il metodo del mutamento delle coordinate.** — 267. Generalità sulle serie di curve deducibili da una data — 267. Metodo di deduzione ideato dal Varignon; curve risultanti — 269. Procedimenti analoghi di A. Peters e C. F. Krause — 270. Altra applicazione del medesimo concetto — 271. Nuove applicazioni di esso — 272. Cenni sopra alcuni problemi meccanici risolti da curve così ottenute — 273. Una recente metamorfosi della stessa idea ..... p. 254-271
- CAP. II. Le curve d'inseguimento o di caccia.** — 274. Problema che ha condotto al concetto di curva di caccia. Equazione delle linee che lo risolvono; loro proprietà e classificazione — 275. Altro modo di trattare la medesima questione; conseguenze a cui esso conduce p. 272-280
- CAP. III. Evolute ed evolventi.** — 276. Definizione di evoluta e evolvente di una data curva; caso in cui questa sia algebrica; equazione dell'evoluta e caratteristiche plückeriane della stessa — 277. Relazioni intrinseche fra evoluta od evolvente e la curva primitiva. Applicazioni — 278. Teorema di Timmermans — 279. L'equazione magica della retta e la sua applicazione alla teoria delle evolute — 280. Ricerca delle curve che sono simili alle loro  $n$ -me evolute. Applicazione ad alcuni esempi. Cenni su altre questioni relative alle evolute; teorema di Giov. Bernoulli ..... p. 281-296
- CAP. IV. Generalizzazioni delle evolute e delle evolventi.** — 281. Le sviluppidi; teorema di Réaumur — 282. Applicazione della equazione magica della retta. Teorema di Lancret e formola di Habich. Applicazioni — 283. Altro modo di trattare la stessa questione — 284. Evolventi imperfette di Olivier. Caso del cerchio — 285. Un problema risoluto da P. Maggi — 288. Le evolute in una metrica non euclidea — 287. Le panevolute di L. Braude ..... p. 297-317
- CAP. V. Le curve parallele.** — 288. Definizione delle curve parallele. Caso di curve algebriche; caratteristiche plückeriane. Teoremi di Crella sulla rettificazione e la quadratura delle curve parallele. Applicazioni delle coordinate intrinseche — 289. La curva parallela a un'ellisse (toroide); formole e proposizioni relative — 290. Curve parallele a un'epicloide o ipocicloide. Caso dell'asteroide regolare — 291. Teorema relativo a un'involuppo di cerchi..... p. 318-330
- CAP. VI. Le radiali.** — 292. Definizioni. Radiale di una curva algebrica; caratteristiche plückeriane della stessa — 293. Caso generale; uso delle coordinate intrinseche — 294. Applicazioni di quanto precede ad alcuni esempi — 295. Il problema inverso delle radiali. Osservazioni finali. p. 331-343

- CAP. VII. Le caustiche.** — 296. Definizioni; notizie storiche; teorema di Giov. Bernoulli — 297. Applicazioni della costruzione che ne risulta ad alcuni esempi — 298. Cenno intorno ad altre ricerche sulle caustiche; teorema di Gergonne; le caustiche secondarie. Ricerca delle singolarità della caustica di una curva algebrica — 299. Generalizzazione del concetto di caustica (le causticoidi); formole relative..... p. 344-357
- CAP. VIII. Podarie, contrapedali, podoidi e curve isotele.** — 300. Le trasformazioni pedali e antipedali nel piano. Caratteristiche plückeriane della trasformata di una curva algebrica. Esempi — 301. Teoremi di E. Catalan e J. Steiner sulle aree delle podarie — 302. Altre formole di quadratura — 303. Teorema di W. Roberts e ricerche di A. Ameseder sulle podarie positive e negative — 304. La trasformazione podoidale. Le curve d'inversione — 305. Le curve isotele ..... p. 358-376
- CAP. IX. Curve isottiche e curve ortottiche.** — 306. Definizioni. Applicazione dell'equazione magica della retta alla determinazione delle curve isottiche o ortottiche di una data — 307. Cenno sulle curve isottiche di due date; applicazione a un esempio ..... p. 377-380
- CAP. X. Curve differenziali e curve integrali. Altre analoghe leggi di deduzione.** — 308. Le curve differenziali di Kästner; esempio. Curve analoghe in coordinate polari; formole relative — 309. Curve integrali; formola relativa di M. d'Ocagne — 310-316. Analoghe leggi di derivazione. Applicazione ad alcuni esempi..... p. 381-406
- CAP. XI. Le curve opposte successive di una data.** — 317. Definizione di una speciale trasformazione birazionale quadratica fra punti e rette; applicazione — 318. Una trasformazione cubica birazionale fra i punti di un piano; formole relative; curve risultanti..... p. 407-412
- CAP. XII. Curve dedotte da un gruppo di curve.** — 319. Curve iper-aritmetiche e iperarmoniche. Curva media. Curva di Bérard. Curva equidistante da due date. Fibre moyenne — 320. Curve dedotte da una serie infinita di curve. Esempi relativi..... p. 413-421
- Epilogo**..... p. 423
- Addizioni** ..... p. 431
- Indice dei nomi citati**..... p. 433-439

CORREZIONE relativa al Vol. I.

Le curve studiate nel Cap. X del III Libro rientrano tutte nella classe di quelle a cui è dedicato il Cap. VI del IV Libro. Sono, dunque, curve **polizomiali** non **poligonali** come, per una svista, fu scritto più volte.

## LIBRO VI.

### CURVE TRASCENDENTI.

#### CAPITOLO I

#### Introduzione. Le curve panalgebriche.

**192.** Tutte le curve che non si possono rappresentare mediante un'equazione algebrica (razionale intera) fra le coordinate cartesiane  $x, y$  di un punto, si chiamano *trascendenti*. Fra le curve non algebriche meritano un posto speciale quelle il cui primo membro è un polinomio ove almeno alcuni degli esponenti delle variabili sono numeri irrazionali; secondo la proposta di Leibniz si chiamano *interscendenti*<sup>1)</sup>; esse rappresentano in certo modo il trapasso delle curve algebriche alle trascendenti; un esempio di esse ci è offerto dalle curve binomie interscendenti (Vol. I, p. 370).

Quella parte della teoria delle curve algebriche che tratta delle proprietà invarianti rispetto a una trasformazione proiettiva o cremoniana (teoria delle polari, curve covarianti, formole di Plücker, genere, curve aggiunte, ecc.), non ha sinora nulla di corrispondente nelle curve trascendenti; per converso la geometria infinitesimale delle curve (costruzione delle tangenti e dei cerchi di curvatura, quadratura, rettificazione, ecc.) è integralmente applicabile alle curve trascendenti, essendo indipendenti dall'ipotesi che la curva sia algebrica.

Inoltre H. Brocard per due volte (*Intermédiaire* T. V, 1898, p. 99 e T. XVI, 1905, p. 220) ha chiesto se per le curve trascendenti esistono punti analoghi ai fuochi delle curve algebriche. In risposta chi scrive e E. Dubois osservarono (Id., T. XVII, 1910, p. 10-13) che la definizione generale di fuoco data da Plücker è applicabile

<sup>1)</sup> Cfr. CRAMER, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750), p. 8; ove è addotto l'esempio seguente:  $y\sqrt{2} + y = x$ .

anche a curve trascendenti e mostrarono su qualche esempio (sinusoide e curva logaritmica) come si potessero trovare le coordinate dei fuochi delle curve trascendenti.

Invece una singolarità possibile esclusivamente per curve trascendenti è il *punto asintotico*, cioè un punto attorno a cui la curva compie infinite circonvoluzioni, accostandosi ad esso senza raggiungerlo mai; una curva trascendente può presentare più di un punto asintotico.

Attenendosi esclusivamente all'uso di coordinate cartesiane, le curve algebriche e le trascendenti appaiono come enti geometrici del tutto differenti; ma usando altri sistemi di coordinate questa barriera divisoriosa scompare. Cui nel n. 149 (Vol. I, p. 419) vedemmo che l'equazione polare  $\rho = R \cdot \text{sen } \mu \omega$ , al variare dell'indice  $\mu$ , rappresenta infinite curve che sono algebriche o trascendenti secondo che  $\mu$  è o non razionale, ma che godono di molte proprietà comuni; altrettanto può dirsi delle curve di Lissajous (n. 191; id., p. 563), nelle cui equazioni i coefficienti  $m, n$  possono essere numeri irrazionali. Ma questi casi sono rari, onde per altra via si è cercato di coordinare le proprietà delle curve trascendenti, cioè collegandole a curve algebriche; il collegamento fu ottenuto ricorrendo alla teoria delle equazioni differenziali<sup>1)</sup>, come ora passiamo ad esporre.

**193.** La generalità delle curve trascendenti note godono di proprietà che in ogni loro punto il coefficiente angolare della tangente ( $y' = dy/dx$  in coordinate cartesiane ortogonali) è radice di un'equazione algebrica i cui coefficienti sono polinomi interi in  $x, y$ ; in altri termini ogni siffatta curva è un elemento del sistema di linee integrali di un'equazione differenziale (di I ordine) del seguente tipo:

$$(1) \quad F(x, y, y') \equiv \sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) y'^{n-r} = 0,$$

ove  $f_r, f_1, \dots, f_n$  sono  $n+1$  polinomi senza alcun fattore comune; ne indicheremo con  $\nu$  il grado comune (ipotesi che non esclude possano essere di gradi differenti, potendo alcuni coefficienti risultare nulli). Siccome la stessa proprietà è evidentemente posseduta anche dalle curve algebriche, così le curve in questione possono riguardarsi come generalizzazioni delle curve algebriche, epperò verranno

<sup>1)</sup> Per ciò che segue vedi: FOURET, *Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendentes, définis par deux caractéristiques* e *Sur les courbes planes transcendentes susceptibles de faire partie d'un système  $\mu, \nu$*  (Bull. de la Soc. math. de France, T. II, 1873-74); CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, T. I (Leipzig 1875), VII Abth., IV Cap.; G. LORIA, *Le curve panalgebriche* (Prager. Ber., 1901; Le matematiche pure e applicate, T. II, 1902).

chiamate *curve panalgebriche*. Ne diremo  $n$  il grado e  $\nu$  il rango: questi numeri hanno significati geometrici che ora determineremo.

Se nella (1) supponiamo dati  $x$  e  $y$ , essa diviene un'equazione di grado  $n$  in  $y'$ , la quale ha altrettante radici; dunque per ogni punto del piano passano  $n$  curve integrali dell'equazione (1). Cerchiamo invece quante riescono tangenti a una retta

$$y = ax + b;$$

per una tale curva dovrà aversi  $y' = a$  onde la (1) diviene

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, ax + b), a^{n-r} = 0$$

la quale è un'equazione in generale di grado  $\nu$ ; ciò prova che in generale ogni retta del piano è tangente a  $\nu$  curve integrali dell'equazione (1)<sup>1)</sup>.

Dimostriamo ora una serie di teoremi atti a porre in luce l'analisi esistente fra le curve di cui ragioniamo e le algebriche.

**TEOREMA I.** — Una curva panalgebrica come luogo di punti lo è anche come involuppo delle sue tangenti.

Chiamiamo  $u, v$  le coordinate plückeriane della tangente a una curva panalgebrica nel punto di coordinate  $x, y$ ; si avrà evidentemente:

$$u = \frac{y'}{y - xy'}, \quad v = \frac{-1}{y - xy'};$$

se ne deduce

$$y' = -\frac{u}{v}, \quad u' = \frac{yy''}{(y - xy')^2}, \quad v' = -\frac{xy''}{(y - xy')^2},$$

$$\frac{v'}{u'} = \frac{d v}{d u} = -\frac{x}{y}$$

epperò

$$x = \frac{-d v}{u d v - v d u}, \quad y = \frac{d u}{u d v - v d u}.$$

<sup>1)</sup> Che questo numero possa scendere al disotto di  $\nu$  è mostrato dalla equazione di JACOBI, in cui  $\nu = 2$ :

$(Ax + By + C) + (A'x + B'y + C')y' + (A''x + B''y' + C'')(xy' - y) = 0$ ; applicando infatti il procedimento indicato nel testo, si giunge all'equazione

$$[Ax + B(ax + b) + C] + [A'x + B'(ax + b) + C']b = [A''x + B''(ax' + b) + C'']b$$

la quale, non è quadratica, ma lineare in  $x$ .

Se nella (1) sostituiamo a  $x, y, y'$  i loro valori in funzione di  $u$  e  $r$  troveremo

$$(2) \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r u^{n-r} v^r f_r \left[ -\frac{dv}{u dv - v du}, \frac{du}{u dv - v du} \right] = 0;$$

ora in  $u$  e  $v$  questa è un'equazione differenziale analoga alla (1), ma di grado  $v$  invece che  $n$ ; ciò prova che una curva panalgebrica considerata come involuppo delle proprie tangenti è suscettibile di una definizione analoga a quella che ha quando è riguardata come luogo di punti.

**TEOREMA II.** — *In un sistema di curve panalgebriche di grado  $n$  e rango  $v$  si trovano in generale in  $m v + n \mu$  curve tangenti a una curva d'ordine  $m$  e classe  $\mu$ .*

Sia

$$(3) \quad \varphi(x, y) = 0$$

l'equazione della curva considerata; se ha  $d$  punti doppi e  $k$  cuspidi sussisterà la relazione

$$\mu = m(m-1) - 2d - 3k.$$

Ma se questa è toccata nel punto  $(x, y)$  da una curva del sistema definito dalla equazione (1), questa dovrà essere soddisfatta sostituendovi

$$y' = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

sarà quindi

$$(4) \quad \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r f_r(x, y) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]^{r-r} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]^r$$

Emerge da ciò che i punti di contatto della curva data con curve del dato sistema saranno punti comuni alle curve (3), (4), purchè non siano singolari per la prima.

Ora la (4) rappresenta una curva dell'ordine  $v + n(m-1)$ , la quale in ogni punto doppio della (3) ha un punto  $n$ -plo e in ogni cuspidi un punto  $n$ -plo a tangenti coincidenti. Perciò il numero  $N$  di punti di contatto è dato da

$$N = m \{ v + n(m-1) \} - 2dn - 3kn = m v + n \{ m(m-1) - 2d - 3k \},$$

cioè, per quanto precede,  $N = m v + n \mu$  c. d. d.

Dette  $X, Y$  le coordinate di un punto qualunque della tangente nel punto  $(x, y)$  di una delle curve considerate, si avrà

$$(5) \quad \frac{Y - y}{X - x} = y';$$

sostituendo nella (1) a  $y'$  questo valore si trova

$$(6) \quad \sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) (X - x)^r (Y - y)^{n-r} = 0$$

Se in quest'equazione si considerano  $x, y$  come date e  $X, Y$  come variabili, essa rappresenta l'insieme delle tangenti nel punto  $(x, y)$  alle curve del sistema che passano per questo punto. Se invece  $X, Y$  sono date essa rappresenta il luogo dei punti del piano tali che le corrispondenti tangenti alle curve integrali del sistema (1) passino per il punto  $(X, Y)$ ; in altre parole la (6) rappresenta il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da questo punto alle dette curve integrali; osservando finalmente che l'equazione (6) rappresenta una curva dell'ordine  $n + v$  passante  $n$  volte per il punto  $(X, Y)$ , si conclude:

**TEOREMA III.** — *I punti di contatto delle tangenti condotte alle curve di un sistema di grado  $n$  e rango  $r$  da un punto del loro piano è una curva dell'ordine  $n + v$  avente quel punto per  $n$ -plo<sup>1)</sup>.*

Correlativamente si dimostra:

**TEOREMA IV.** — *Le tangenti delle curve di un sistema di rango  $v$  e grado  $n$  nei punti in cui esse sono tagliate da una retta del loro piano involuppono una curva di classe  $n + v$  avente quella retta per tangente  $v$ -pla.*

Dal Teorema III risulta che, rispetto a una curva panalgebrica, ad ogni punto del piano corrisponde una determinata curva algebrica che diremo *parapolare* di quel punto (che chiameremo *polo*). Se quella è una curva integrale dell'equazione (1) questa ha per equazione la (6); se immaginiamo che il polo vada all'infinito, la (6) si trasforma nell'altra

$$(7) \quad \sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) \operatorname{tg}^r a = 0$$

onde l'ordine della parapolare si abbassa da  $n + v$  a  $v$ ; la curva ottenuta si dice *paradiametricale*.

Supponendo che la curva considerata sia rappresentata in coordinate polari  $\rho, \omega$  di polo  $O$ , la parapolare si può determinare, senza ricorrere a coordinate cartesiane, nel seguente modo: Sia  $P$

<sup>1)</sup> Per alcuni casi speciali di questo teorema vedi P. H. SCHOUBE, *Intermédiaire*, T. III, 1896, p. 7.

( $P, \Omega$ ) un punto arbitrario della tangente nel punto  $M(\varrho, \omega)$  alla data curva; ora, se  $\mu$  è l'angolo formato dal raggio vettore  $OM$  con la tangente  $MP$ , la considerazione del triangolo  $OMP$  dà

$$(8) \quad \frac{P}{\operatorname{sen} \mu} = \frac{\varrho}{\operatorname{sen}(\mu + \Omega - \omega)};$$

siccome quest'equazione è soddisfatta soltanto dalle coordinate  $\varrho, \omega$  dai punti di contatto della data curva con le tangenti uscenti dal punto  $P$ , così non è che l'equazione polare della parabola di  $P$ . Similmente si trova l'equazione polare della curva paradiametricale; chiamisi infatti  $\alpha$  l'angolo formato con l'asse polare delle tangenti considerate e  $M(\varrho, \omega)$  il punto di contatto di una di esse; conservando a  $\mu$  il precedente significato, la figura mostra che  $\mu = \alpha - \omega$ ; perciò  $\operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg}(\alpha - \omega)$  ossia, grazie a formule note,

$$(9) \quad \varrho \frac{d\omega}{d\varrho} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega);$$

e questa rappresenta la curva anzidetta quando si tenga conto del fatto che il punto  $M(\varrho, \omega)$  appartiene alla curva data.

**194.** Un'altra proprietà delle curve panalgebriche si ottiene applicando un teorema di Darboux relativo alle soluzioni singolari delle equazioni differenziali del primo ordine<sup>1)</sup>; esso dice che se si elimina  $y'$  fra le due equazioni

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

si ottiene l'equazione del luogo delle cuspidi delle curve integrali dell'equazione (1). Ora è evidente che l'equazione risultante è algebrica, onde le cuspidi di una qualunque delle curve stesse appartengono a una linea algebrica. Ciò prova il seguente

**TEOREMA V.** — *Le cuspidi di una curva panalgebrica stanno sopra una curva algebrica.*

Applicando lo stesso teorema di Darboux all'equazione (2) si conclude:

**TEOREMA VI.** — *Le tangenti di flesso di una curva panalgebrica toccano una curva algebrica.*

Qualunque trasformazione di contatto «algebrica», rappre-

<sup>1)</sup> *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles* (Bull. des Sc. math. et astr., T. IV, 1873); cfr. E. PICARD, *Traité d'analyse*, T. III (Paris, 1896), p. 47.

sentabile cioè con equazioni della forma:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, y'; x_1, y_1, y_1') &= 0 \\ \chi(x, y, y'; x_1, y_1, y_1') &= 0 \\ \psi(x, y, y'; x_1, y_1, y_1') &= 0, \end{aligned}$$

ove  $\varphi, \chi, \psi$  sono frazioni algebriche razionali intere delle due serie  $xyy', x_1y_1y_1'$  trasforma la equazione (1) in altra dell'identico tipo, onde muta ogni curva integrale di questa in altra analoga. Da ciò risulta il

**TEOREMA VII.** — *Qualunque curva panalgebrica viene mutata in altra da ogni trasformazione di contatto; p. es., le proiezioni, le curve, le parallele, le podarie o antipodarie e le inverse di una curva panalgebrica sono curve pure panalgebriche.*

Le traiettorie ortogonali delle  $\infty'$  curve integrali dell'equazione (1) soddisfano la equazione

$$\sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r f_r(x, y) (dy/dx)^r = 0;$$

essendo questa di forma analoga alla (1) si ha:

**TEOREMA VIII.** — *Le traiettorie ortogonali di un sistema di curve panalgebriche sono curve pure panalgebriche<sup>1)</sup>.*

Le curve parapolari dei punti di un piano rispetto ad una curva panalgebrica possiedono in generale ciascuna un numero determinato di punti singolari, fissi o variabili, di assegnata molteplicità; ve ne sarà fra esse un numero semplicemente infinito aventi un punto doppio di più e si potrà considerare (per analogia con quanto avviene nelle curve algebriche) sia il luogo dei poli le cui parapolari hanno ciascuna un punto doppio in più, che il luogo di questi punti doppi; chiameremo (sempre guidati dall'analogia) tali curve una *parasteineriana*, l'altra *parahessiana*. È facile dimostrare:

**TEOREMA IX.** — *Le curve parahessiana e parasteineriana di una curva panalgebrica sono curve algebriche.*

Infatti affinché la curva rappresentata dall'equazione (6) abbia un punto doppio in  $(x, y)$  devono sussistere, oltre la (6), le due seguenti equazioni:

$$\sum_{r=0}^{r=n} \left\{ \partial f_r / \partial x (X-x)^r (Y-y)^{n-r} - r f_r (X-x)^{r-1} (Y-y)^{n-r} \right\} = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{r=0}^{r=n} \left\{ \partial f_r / \partial y (X-x)^r (Y-y)^{n-r} - (n-r) f_r (X-x)^r (Y-y)^{n-r-1} \right\} = 0;$$

<sup>1)</sup> Il teorema sussiste anche per le traiettorie oblique.

eliminando fra queste e la (6)  $X, Y$  si giunge all'equazione della parahessiana; eliminando invece  $x, y$  si ottiene quella della parasteineriana. Benchè l'eliminazione non si possa eseguire in generale, è noto che in ogni caso il risultato è una equazione algebrica, onde è dimostrata la verità del Teorema IX.

La suindicata eliminazione si può eseguire agevolmente nel caso in cui le funzioni  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$  siano identicamente nulle. Infatti le equazioni (6) (10) divengono:

$$(6') \quad f_0(Y-y)^n + f_n(X-x)^n = 0$$

$$(10') \quad \begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial x}(Y-y)^n + \frac{\partial f_n}{\partial x}(X-x)^n = f_n(X-x)^{n-1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial y}(Y-y)^n + \frac{\partial f_n}{\partial y}(X-x)^n = n f_0(Y-y)^{n-1} \end{cases}$$

Scriviamo queste due ultime come segue:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} \frac{(Y-y)^n}{(X-x)^n} + \frac{\partial f_n}{\partial x} = \frac{n f_n}{X-x},$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} \frac{(X-x)^n}{(Y-y)^n} + \frac{\partial f_0}{\partial y} = \frac{n f_0}{Y-y}$$

ossia tenendo conto della prima

$$\left| \begin{array}{cc} f_0 & f_n \\ \frac{\partial f_0}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{array} \right| = \frac{n f_0 f_n}{X-x}, \quad \left| \begin{array}{cc} f_n & f_0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial y} & \frac{\partial f_0}{\partial y} \end{array} \right| = \frac{n f_n f_0}{Y-y}$$

Elevando queste all' $n^{\text{ma}}$  potenza e tenendo ancora conto della (6') si trova come equazione della parahessiana

$$(11) \quad f_0 \left| \begin{array}{cc} f_0 & f_n \\ \frac{\partial f_0}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{array} \right|^n + f_n \left| \begin{array}{cc} f_n & f_0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial y} & \frac{\partial f_0}{\partial y} \end{array} \right|^n = 0$$

Se in particolare  $n = 1$  e si scrive  $f_n = \varphi, f_0 = \psi$  quest'equazione si scrive

$$(12) \quad H \equiv \left| \begin{array}{ccc} \varphi & \psi & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \varphi \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \psi \end{array} \right| = 0$$

Si osservi ora che sotto questa forma si può sempre scrivere l'equazione della parahessiana di qualsiasi curva panalgebrica; infatti risolvendo l'equazione (1) si ottiene un risultato della forma

$$(13) \quad \frac{d y}{d x} = - \frac{\varphi}{\psi}$$

onde come equazione della parapolare del punto  $(X, Y)$  si trova

$$\frac{X-x}{Y-y} = - \frac{\varphi}{\psi} \quad \text{ossia} \quad (X-x)\varphi + (Y-y)\psi = 0$$

e affinchè questa curva acquisti un punto doppio si trova come condizione la (12). Questa osservazione guida ad un'altra proprietà delle curve panalgebriche. Per ottenerla differenziamo la (13) e teniamo poi conto della stessa; otterremo facilmente

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{H}{\psi^3}$$

Segue da ciò che tutti i punti in cui si ha  $H = 0, \psi \neq 0$ , è pure  $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ ; quei punti sono punti d'inflessione e viceversa affinchè sia  $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ , dev'essere  $H = 0, \psi \neq 0$ . Ciò prova che sulla parahessiana cadono tutti i flessi di una qualunque delle curve integrali dell'equazione (1) epperò si può ritenere dimostrato il seguente:

**TEOREMA X.** — *I flessi di una curva panalgebrica stanno sempre su una curva algebrica.*

Ragionando similmente sull'equazione differenziale (2) si dimostra l'altro

**TEOREMA XI.** — *Le tangenti cuspidali di una curva panalgebrica toccano sempre una curva algebrica.*

Il Teor. X offre un metodo comodo per trovare l'equazione della parahessiana di una curva panalgebrica; giacchè, se questa è definita in coordinate cartesiane, basta calcolare  $\frac{d^2 y}{d x^2}$ , eliminare dal risultato le funzioni trascendenti servendosi della equazione data ed eguagliare a zero il risultato; se essa è invece definita in coordinate polari, basta far scomparire le funzioni trascendenti della equazione

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{d^2}{d \omega^2} \left[ \frac{1}{\varrho} \right] = 0$$

(determinatrice dei flessi)<sup>1)</sup> tenendo conto dell'equazione data.

<sup>1)</sup> V. p. es. STURM, *Cours d'analyse*, T. I (VI ed., Paris 1880), p. 255.

**195.** Ulteriori proprietà delle curve panalgebriche scaturiscono dalla considerazione delle normali. Per giungervi assumiamo nel piano di una curva panalgebrica che sia un'integrale dell'equazione differenziale (1) un punto arbitrario  $P(x_0, y_0)$ ; i punti della curva stessa le cui tangenti passano per  $P$  soddisfaranno alla condizione

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = y';$$

le normali corrispondenti sono rappresentate dall'equazione

$$(X - x_0) + (Y - y_0) y' = 0$$

onde le loro coordinate plückeriane sono espresse come segue:

$$u = -\frac{1}{x + yy'}, \quad v = -\frac{y}{x + yy'}$$

In conseguenza sussisteranno le relazioni seguenti:

$$y' = v/u, \quad ux + vy + 1 = 0, \quad vx - uy = vx_0 - uy_0;$$

da questa si trae

$$x = -\frac{u + v(u y_0 - v x_0)}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v + u(u y_0 - v x_0)}{u^2 + v^2}$$

Sostituendo nella (1) i valori trovati per  $x, y, y'$  si trova

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r \left[ -\frac{u + v(u y_0 - v x_0)}{u^2 + v^2}, -\frac{v + u(u y_0 - v x_0)}{u^2 + v^2} \right] \left[ \frac{v}{u} \right]^{r-2} = 0$$

Ora, essendo quest'equazione algebrica in  $u$  e  $v$  rimane dimostrato il seguente

**TEOREMA XII.** — *Le normali di una curva panalgebrica nei punti nei quali essa è toccata da raggi di un fascio, sono tangenti di una stessa curva algebrica<sup>1)</sup>.*

Le curve trascendenti note che non appartengono alla cate-

<sup>1)</sup> Vedremo nel Cap. X che un caso particolare di questa proposizione fu notato dal JUI, dimostrando che le normali di un'epicloide o ipocicloide nei punti in cui essa è toccata da rette uscenti da un punto toccano una medesima conica.

goria delle curve panalgebriche sono così poco numerose<sup>1)</sup> che non sembra ancora giunto il momento per farne una metodica classificazione. Tuttavia si può sin d'ora pensare a porre in una classe quelle tali che i punti di contatto delle tangenti uscenti da un punto appartengono a una curva, non algebrica, ma panalgebrica; in altra quelle i cui punti di contatto appartengono a una curva della classe precedente; e così continuare.

**196.** Molti dei concetti che vedemmo già applicati per ottenere nuove curve algebriche vennero sfruttati, e con buoni risultati, anche per giungere a nuove curve trascendenti.

Anzitutto l'idea di generalizzare certe proprietà delle coniche fu feconda di risultati anche nel ramo di geometria di cui attualmente ci occupiamo; lo prova il seguente esempio: È noto che la tangente in un punto qualunque di una conica a centro forma angoli eguali con i raggi vettori condotti dai fuochi a quel punto; che tale proprietà sia caratteristica delle curve di second'ordine a centro venne dimostrato da Eulero<sup>2)</sup>. Ora ciò suggerì a G. Bellavitis il problema generale seguente: *Trovare una curva tale che la tangente in un suo punto qualunque formi con le congiungenti questo punto a due punti fissi due angoli la cui differenza sia costante.* Se questo valore costante è diverso da zero, le curve corrispondenti sono trascendenti e vennero determinate appunto dal Bellavitis col metodo delle equipollenze<sup>3)</sup> e da S. R. Minich con gli ordinari procedimenti insegnati dal calcolo integrale<sup>4)</sup>. D'altronde, detti  $A$  e  $B$  i punti fissi e  $\delta$  la differenza costante, è facile vedere che le curve cercate altro non sono che le traiettorie d'angolo  $\delta$  del sistema delle coniche aventi  $A$  e  $B$  per fuochi; da questo punto di vista il problema del Bellavitis è stato risolto da G. Mainardi<sup>5)</sup>; e siccome l'elegante soluzione di questo venne inserita in un conoscutissimo trattato del Boole<sup>6)</sup>, ci è lecito limitarci a questa menzione di essa.

Un'altra ricca fonte di curve trascendenti è rappresentata dai

<sup>1)</sup> Da quanto esporremo nel presente Libro risulta che, fra le curve trascendenti che portano un nome, non sono panalgebriche: la clotoide, la curva di Eulero, le linee di Mercatore, la catenaria di eguale resistenza, la lemniscatrice e le logaritmiche di addizione e sottrazione.

<sup>2)</sup> *Solutio trium problematum difficultiorum ad methodum tangentium inversa pertinentem* (Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, T. X, 1821-22).

<sup>3)</sup> *Saggio d'applicazione del calcolo delle equipollenze* (Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, T. III, 1835). Cfr. anche *Sposizione del metodo delle equipollenze* (Mem. della Soc. It. delle Scienze, T. XXV, II Parte, 1854).

<sup>4)</sup> *Soluzione d'un problema di geometria relativo al metodo inverso delle tangenti* (Annali delle Scienze del Regno Lombardo Veneto, T. VII, 1837).

<sup>5)</sup> *Sulla integrazione delle equazioni differenziali* (Annali di Matem., T. I, 1850).

<sup>6)</sup> *A treatise on differential Equations* (IV ed., London 1877), p. 248-251.

secolari studi sulla quadratura del circolo; perciò alle linee quadrate si è dedicato un Cap. (il II) del presente Libro. Una notevole curva scoperta da Archimede e tutte quelle che vennero ideate generalizzandone la definizione diede una materia a quattro altri Capitoli (III - VI); altri cinque (VIII - XII) concernano le linee che nascono (al pari della spirale archimedeana) dalla combinazione opportuna di speciali movimenti. Tratteremo in seguito delle principali curve a cui si pervenne risolvendo questioni di geometria infinitesimale (Cap. VII, XIII-XV). Meno interessanti sono le curve nascenti dalla rappresentazione grafica di speciali funzioni (Capitoli XVI-XVIII); fra esse se ne trovano però alcune importanti perchè dotate di singolarità affatto straordinarie. Alcune classi di curve trascendenti provenienti da speciali trasformazioni geometriche sono studiate nei Cap. XIX-XX, mentre nell'ultima parte del Libro presente (Cap. XXI-XXV) sono esposte le più spiccate proprietà di cui godono le curve a cui guidarono ricerche di filosofia naturale.

## CAPITOLO II

## Quadratrici.

**197.** Nel Cap. XII del Libro prec. abbiamo data notizia di molte curve algebriche le quali possono servire a risolvere geometricamente il problema della divisione di un angolo in parti eguali. Ora questo problema — anzi la questione più generale di decomporre un dato angolo in parti aventi fra loro dei rapporti prestabiliti — è risolubile mediante una curva non algebrica di cui, al dire di Proclo, il sofista Ippia d'Elea avrebbe determinata la proprietà caratteristica (*τὸ σύμπτωα*)<sup>1)</sup>. Ma la stessa curva venne adoperata da un altro geometra — Dinostrato — per risolvere un altro problema non meno famoso, quello della quadratura del circolo; donde il nome di *quadratrice* (*τετραγωνίζουσα*) con cui la si designa seguendo l'esempio di Pappo. Questo celebre commentatore indica con le parole seguenti la genesi della curva<sup>2)</sup>: « Dato (fig. 1) un quadrato  $ABCD$  si descriva col centro in  $A$  la circonferenza  $BED$  e si faccia muovere la retta  $AB$  in modo che il punto  $A$  resti fisso e  $B$  descriva la circonferenza  $BED$ . La retta  $BC$  rimanga poi sempre parallela a  $AD$ , mentre il suo punto  $B$  percorre la retta  $BA$ ; mentre la retta  $AB$  descriva uniformemente l'angolo  $BAD$  (cioè il punto  $B$  la circonferenza  $BED$ ) e lo stesso faccia la retta  $BC$ ; inoltre la retta  $AB$  descriva uniformemente l'angolo  $BAD$  (cioè il punto  $B$  la circonferenza  $BED$ ) e lo stesso faccia la retta  $BC$  (cioè il punto  $C$  sopra la retta  $AB$ ). Accada poi che  $AB$  e  $BC$  coincidano contemporaneamente sulla retta  $AD$ . Supposti tali movimenti regolati in questo modo, le rette  $AB$  e  $BC$  s'intersecheranno in ogni loro posizione in un punto variabile  $F$ , il quale descrive, entro lo spazio limitato dalle rette  $BA$  e  $AD$  e

<sup>1)</sup> È noto che con tale nome gli antichi designavano quel *quid* che, nel loro metodo, faceva l'ufficio dell'equazione di una curva nella moderna geometria analitica.

<sup>2)</sup> PAPPUS ed. HULTSCH, p. 250-2. Cfr. G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, p. 70 e 160.

dalla circonferenza  $BE D$ , una certa linea tutta concava dalla stessa parte, la quale si mostra atta alla ricerca di un quadrato eguale ad un dato circolo». Da questo passo emerge che la quadratrice si può facilmente costruire per punti (il modo più conveniente è di dividere tanto la retta  $AB$  quanto il quadrante  $BD$  in  $2r$  parti eguali); emerge anche che essa serve a ridurre il problema della divisione di un angolo in parti aventi fra loro dati rapporti al pro-

Fig. 1. — Quadratrice (incompleta).

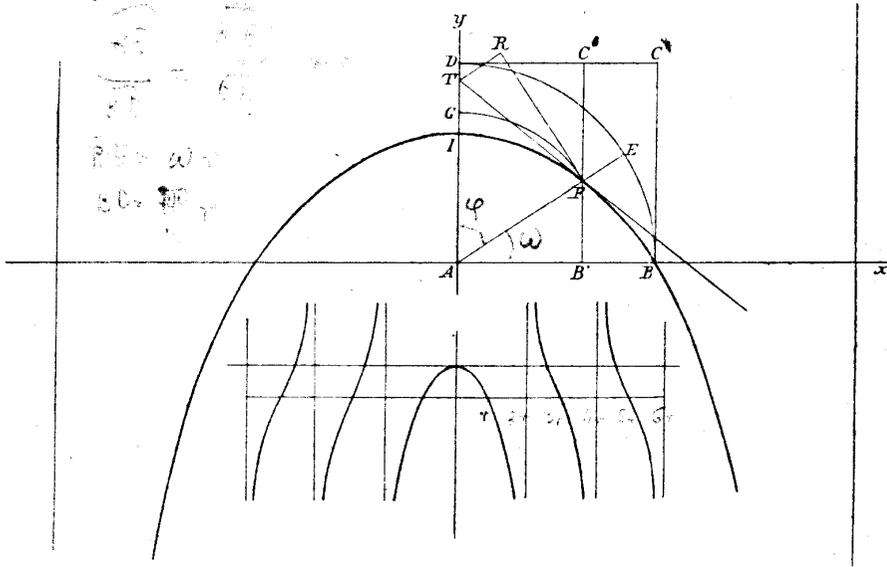


Fig. 2. — Quadratrice (completa).

blema analogo per un segmento rettilineo, e tale riduzione abilita a risolvere il problema.

Per ottenere una conveniente rappresentazione analitica della quadratrice di Dinostrato prenderemo  $AB$  e  $AD$  per assi delle  $x$  e  $y$ , chiameremo  $r$  il lato del quadrato,  $\omega$  l'angolo variabile  $F A B$  e  $\mu$  un coefficiente; sussisteranno allora le relazioni

$$x = (1 - \mu) r, \quad \omega = \mu \pi / 2,$$

donde, eliminando  $\mu$ ,

$$\frac{r - x}{r} = \frac{2 \omega}{\pi}$$

$$\frac{r - x}{r} = \frac{\omega}{\pi/2}$$

Ma, se  $AF = \rho$ , si ha  $x = \rho \cos \omega$ , dunque

$$(1) \quad \rho = \frac{r}{\cos \omega} \left[ 1 - \frac{2 \omega}{\pi} \right]$$

che è l'equazione polare della curva; ponendo  $\omega = \pi/2 - \varphi$  se ne trae

$$(1') \quad \rho = \frac{2r}{\pi} \frac{\varphi}{\sin \varphi},$$

altra forma dell'equazione polare che incontrammo più indietro (Vol. I, p. 464). Essendo  $x = \rho \cos \omega$ ,  $\omega = \arctg y/x$  la (1) diviene

$$\frac{x}{r} = 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{y}{x}$$

ossia

$$(2) \quad y = x \cot(\pi x / 2r);$$

è l'equazione cartesiana della quadratrice. Da essa si trae una conseguenza importante; sia  $y_0$  la ordinata del punto  $I$  in cui la quadratrice taglia la retta  $AD$  (asse delle  $y$ ); avremo

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} \pi x / 2r} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{2r}{\pi} \cos^2 \frac{\pi x}{2r} \right] = \frac{2r}{\pi};$$

onde  $\pi = 2r/y_0$ ; costruito che sia geometricamente il punto  $I$  resta quindi determinato anche  $\pi$ , epperò rettificata qualunque circonferenza e quadrato qualunque cerchio; è così assodata l'applicabilità della curva di Ippia e Dinostrato al problema della quadratura del circolo. — Ad un'altra conseguenza conduce la (2); essa prova infatti che l'equazione della tangente alla quadratrice nel punto  $(x, y)$  ha per equazione ( $X, Y$  essendo coordinate correnti)

$$(3) \quad Y - y = (X - x) \left\{ \cot \frac{\pi x}{2r} - \frac{\pi x / 2r}{\cos^2(\pi x / 2r)} \right\}$$

ossia, per la (2),

$$(3') \quad Y - y = (X - x) \left\{ \frac{y}{x} - \frac{\pi(x^2 + y^2)}{2rx} \right\}.$$

Se in questa equazione consideriamo date  $X, Y$  e incognite  $x, y$  essa, combinata con la (2), servirà a determinare i punti di contatto delle tangenti condotte dal punto  $P(X, Y)$  alla quadratrice; ora essendo la (3) una equazione cubica in  $x, y$  soddisfatta

da  $X = x$ ,  $Y = y$  si conclude che: i punti di contatto delle tangenti che si possono condurre da un punto ad una quadratrice stanno sopra una curva del ter'ordine passante per quel punto; la quadratrice fa dunque parte di un sistema le cui caratteristiche sono  $n = 1$ ,  $v = 2$ : ne consegue che le tangenti condotte ad una quadratrice dai punti in cui essa è tagliata da una retta involuppano una curva di terza classe avente quella retta per tangente doppia.

**198.** Come risulta dal passo della *Collezione* di Pappo che riferimmo nel n. prec., gli antichi ritenevano che la quadratrice fosse costituita semplicemente dal ramo  $BI$  interno al quadrante  $ABD$ , e quest'opinione si è conservata almeno sino ai tempi di Viète. L'erroneità di essa è dimostrata ad evidenza dal fatto che l'equazione (2) non muta cambiando il segno di  $x$ , onde la quadratrice è simmetrica rispetto all'asse delle  $y$  (retta  $AD$ ); la stessa equazione dimostra che se  $|x| > r$ ,  $y < 0$ , onde la curva estendesì anche dalla parte delle  $y$  negative, tanto che per  $x = |2r|$  risulta  $y = \infty$ ; anzi si vede agevolmente, applicando ad una delle equazioni della curva delle regole note, che le due rette  $x = \pm 2r$  sono asintoti della quadratrice. Essa curva è simmetrica rispetto a  $Oy$  e taglia l'asse delle  $x$  in infiniti punti di ascisse  $\pm (2h + 1)r$ ,  $h$  essendo uno dei numeri  $0, 1, 2, \dots$ ; ne sono flessi le intersezioni con la retta  $y = 2r/\pi$  e asintoti le rette  $x = \pm 2hr$ ; tutto ciò prova che oltre alla parte di curva interna al dato quadrato, che è la sola nota agli antichi, la curva consta d'infiniti rami infiniti, a coppie simmetrici rispetto a  $Oy$ , come indica la fig. 2. Sono queste osservazioni importanti che il Montucla attribuisce<sup>1)</sup> al P. Léautaud<sup>2)</sup>, ma che si trovano fatte, almeno in parte e forse prima, dal Roberval<sup>3)</sup>. Al quale devesi inoltre una notevole costruzione della tangente, che crediamo opportuno di riferire adoperando per esprimerci il linguaggio dell'algebra.

Sia  $T$  (fig. 1) l'intersezione dell'asse delle  $y$  con la tangente in  $F$  alla quadratrice; grazie alla (3) avremo:

$$AT = \frac{\pi x^2}{2r} \frac{1}{\text{sen}^2(\pi x/2r)}$$

Descriviamo ora il cerchio di centro  $A$  e raggio  $AF$ ; ne sia  $G$  l'intersezione con  $AB$ . Sulla tangente in  $F$  a tale cerchio prendiamo il segmento  $FR$  eguale in lunghezza all'arco circolare  $FG$ ; dico che

<sup>1)</sup> *Histoire des mathématiques*, Nouv. éd., T. II, p. 77.

<sup>2)</sup> V. l'opera *Cyclomathia, seu de multipli circuli contemplatione* (Lugd. Bat., 1663).

<sup>3)</sup> *Observations sur la composition des mouvements etc.* (Mem. de l'Acad. des Sciences, T. VI, Paris 1739), p. 51.

la perpendicolare condotta da  $R$  a  $RF$  passa pel punto  $T$ . Essendo infatti (v. sopra)

$$\frac{r-x}{r} = \frac{2\omega}{\pi}$$

si ha

$$AF = \frac{x}{\cos \omega} = \frac{r}{\cos \omega} \left[ 1 - \frac{2\omega}{\pi} \right],$$

onde, per la costruzione indicata,

$$\begin{aligned} FR = FG &= \frac{r}{\cos \omega} \left[ 1 - \frac{2\omega}{\pi} \right] \left[ \frac{\pi}{2} - \omega \right] = \\ &= \frac{2r}{\pi \cos \omega} \left[ \frac{\pi}{2} - \omega \right]^2 \end{aligned}$$

Condotta poi la retta  $AR$  si chiami  $\psi$  l'angolo  $ARF$  e  $U$  la traccia su  $Oy$  della perpendicolare condotta da  $R$  a  $RF$ . Si avrà:

$$FR = AR \cos \psi; \frac{AU}{\text{sen}(\pi/2 - \psi)} = \frac{AR}{\text{sen}(\pi/2 + \omega)}$$

onde

$$\begin{aligned} AU = AR &= \frac{\cos \psi}{\cos \omega} = \frac{FR}{\cos \omega} = \frac{2r}{\pi \cos^2 \omega} \left[ \frac{\pi}{2} - \omega \right]^2 = \\ &= \frac{\pi x}{2r \text{sen}^2(\pi x/2r)}; \end{aligned}$$

ciò prova che  $AU = AT$  e che quindi il punto  $T$  è la traccia della tangente in  $F$  alla quadratrice.  $T$  può quindi costruirsi e quindi la tangente<sup>1)</sup>.

Per quadrare la quadratrice poniamo

$$\frac{\pi x}{2r} = u$$

ed avremo:

$$\int y dx = \int \frac{2ru}{\pi} \cdot \cot u \cdot \frac{2r}{\pi} du = \left[ \frac{2r}{\pi} \right]^2 \int u \cot u \cdot du;$$

<sup>1)</sup> Sulla stessa questione vedi le *Lectiones geometricae* del BARROW (Londini, 1670; ristampate in *The mathematical Works of IS. BARROW* ed. WHEWELL, Cambridge, 1860) e l'*Analyse des infiniment petits* del Marchese DE L'HÔPITAL (II ed., Paris 1705), p. 26; inoltre *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 163 e T. III, p. 145 e H. RÉNAL, *Construction de la tangente en un point de la quadratrice* (Nouv. Ann., 2<sup>a</sup> Serie, T. XV, 1876).

ora

$$u \cot. u = u \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1 - u^2/2! + u^4/4! - \dots}{1 - u^2/3! + u^4/5! - \dots} =$$

$$= 1 - \frac{u^2}{3} - \frac{u^4}{45} - \frac{2u^6}{945} - \dots$$

quindi

$$\int y du = \left[ \frac{2r}{\pi} \right]^2 \left\{ u - \frac{u^3}{9} - \frac{u^5}{225} - \frac{2u^7}{6615} - \dots \right\}$$

Quest'espressione s'incontra in una lettera scritta da Newton il 13 Luglio 1676 a Oldenburg perchè a Leibniz la comunicasse<sup>1)</sup>, lettera in cui trovasi lo sviluppo analogo per l'arco della quadratrice. Essa venne però pubblicata per la prima volta molto dopo da A. Stone in *A method of fluxions* (London, 1730)<sup>2)</sup> e venne tosto aspramente criticata da Giovanni Bernoulli, il quale osservò: « Avec tout cela il ne donne pas la quadrature par une expression finie, comme nous en pouvons donner une, quoique les logarithmes y entrent »<sup>3)</sup>. A qual formola egli alludesse non è noto con certezza matematica. Ammesso che egli pensasse ad una espressione dell'area  $A$  compressa fra le curve l'asse delle  $x$  (cioè il doppio del settore  $AB I$ ), la formola da lui annunciata è probabilmente quella che si ottiene come segue<sup>4)</sup>:

La (3) prova che:

$$A = 2 \int_0^r x \cot \frac{\pi x}{2r} dx;$$

pongasi ora  $\pi(r-x) = 2ru$  e si otterrà

$$A = \frac{4r^2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} (\pi - 2u) \operatorname{tg} u du =$$

$$= \frac{4r^2}{\pi^2} \left\{ [(2u - \pi) \log \cos u]_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \log \cos u du \right\};$$

e poichè la parte integrata annullasi ai limiti

$$A = - \frac{8r^2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \log \cos u du;$$

<sup>1)</sup> Leibniz ed. Gerhardt, T. I, p. 109. Cfr. anche il *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (1736) riprodotto in *Isaaci Newtoni Opuscula*, T. I (Lausanne et Genevae, 1744), p. 198.

<sup>2)</sup> Cfr. *Analyse des infiniment petits par M. Stone*, trad. RONDET (Paris, 1735), p. 70-71.

<sup>3)</sup> *Remarque sur le livre intitulé etc.* (Joh. Bernoulli Opera T. IV), p. 177.

<sup>4)</sup> *Intermédiaire*, T. IV, 1897, p. 14.

quindi<sup>1)</sup>

$$A = \frac{8r^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \pi \log 2 = \frac{4r^2 \log 2}{\pi},$$

che è la formola cercata.

**199.** Pappo ha scoperta una notevolissima generazione stereometrica della quadratrice; è espressa dal seguente

TEOREMA. Segando un elicoide a piano direttore mediante un piano condotto per una generatrice e proiettando la curva sezione sopra il piano della base si ottiene una quadratrice.

DIMOSTRAZIONE. Siano

$$(4) \frac{2\pi z}{p} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad z - \frac{p\alpha}{2\pi} + \lambda \left[ \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha} \right] = 0$$

l'equazione dell'elicoide e del piano segante. Eliminando  $z$  fra queste equazioni si otterrà l'equazione della curva proiezione considerata nel teorema; tale nuova equazione è:

$$\frac{p}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{p\alpha}{2\pi} + \lambda \left[ \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha} \right] = 0.$$

Passando a coordinate polari diviene:

$$\varrho = \frac{p \operatorname{sen} 2\alpha}{4\pi\lambda} \frac{\alpha - \varphi}{\operatorname{sen}(\alpha - \varphi)};$$

essendo questa della forma (1') il teorema è dimostrato.

Va ora notato che segando lo stesso elicoide (4) con un piano arbitrario

$$z = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha - k$$

si ottiene come proiezione la curva

$$\varrho = \frac{p}{2\pi} \frac{\varphi + 2k\pi/p}{\operatorname{sen}(\varphi + \alpha)},$$

evidentemente più generale della quadratrice, giacchè con questa coincide solo quando sia

$$\alpha = \frac{2k\pi}{p} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2}.$$

<sup>1)</sup> E. CESÀRO, *Calcolo infinitesimale* (Napoli 1899), p. 263-4.

Le curve da essa rappresentate vennero considerate da M. Chasles<sup>1)</sup> che diede loro il nome di *quadratrici allungate* od *accorciate*. Esse possono ottenersi, senza abbandonare il piano, in modo analogo a quello indicato da principio per la quadratrice<sup>2)</sup>; infatti se nella genesi riferita nel n. 197 si toglie la condizione che le due rette mobili coincidano al termine del movimento si otterranno delle curve rappresentabili con equazioni del seguente tipo

$$\rho = a \frac{\omega \pm \alpha}{\sin \omega},$$

che sono appunto quadratrici allungate od accorciate.

**200.** La letteratura matematica del secolo XVII offre due contributi geometrici al problema della quadratura del cerchio rappresentati da due nuove quadratrici.

La più antica è anche la più nota; è la *quadratrice di Tschirnhausen*<sup>3)</sup>, curva rappresentata dall'equazione

$$(5) \quad y = r \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2r};$$

ora questa è della forma

$$y = b \operatorname{sen} \frac{x}{a},$$

che vedremo rappresentare una senoide; per ciò la quadratrice di Tschirnhausen è una particolare senoide. Supposta descritta completamente detta curva si potrà costruire una frazione eguale a  $\pi$ , onde è chiaro che essa è una quadratrice; infatti l'area compresa fra l'asse delle  $x$  ed il primo degli archi di curva che hanno gli estremi su quest'asse è espressa come segue:

$$\int_0^r r \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2r} dx = \frac{2r^2}{\pi},$$

onde, misurata direttamente detta area, se ne trae il valore di  $\pi$ .

<sup>1)</sup> *Aperçu historique* (II ed., Paris 1875), p. 32 nota; cfr. FOURET, *Sur une généralisation de la quadratrice* (Nouv. Ann., 3<sup>a</sup> Serie, T. V, 1886).

<sup>2)</sup> BROCARD, *Question de licence* (Mathésis, T. VI, 1886).

<sup>3)</sup> *Medicina mentis* (Amstel., 1686), p. 115.

Similmente il volume generato dalla rotazione di quell'area attorno a  $Ox$  è dato da

$$\pi \int_0^r r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2r} dx = \frac{1}{2} \pi r^3,$$

onde, determinatolo direttamente, ne seguirebbe del pari  $\pi$ .

La quadratrice di Tschirnhausen si può costruire nel seguente modo: « Dato un cerchio di centro  $O$  e raggio  $r$  e due suoi diametri  $AA'$ ,  $BB'$  fra loro perpendicolari, si supponga che un raggio  $OM$  ruoti uniformemente attorno a  $O$  mentre una parallela a  $AA'$  si muova uniformemente partendo da questo diametro; si supponga ancora che quei due moti comincino contemporaneamente e che nell'istante in cui  $M$  giunge in  $B$ , quella parallela coincida con la corrispondente tangente al dato cerchio. Il luogo del punto  $P$  nel quale tagliansi quelle due rette mobili è una quadratrice di Tschirnhausen ». Detto infatti  $\varphi$  l'angolo  $AO M$ , si ha

$$y = r \operatorname{sen} \varphi, \quad \frac{r \varphi}{r \cdot \pi/2} = \frac{x}{r}$$

onde

$$y = r \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2r}.$$

Assai somigliante a questa è la linea che, dal nome del suo inventore, diremo *curva di Ozanam*<sup>1)</sup>, e che è definita col mezzo della seguente costruzione: « Sia  $AB$  un diametro fisso di un cerchio di centro  $O$  e raggio  $a$ ; da un punto qualunque  $P$  di esso si abbassi la perpendicolare sopra  $AB$  e si porti su di essa, a partire dal suo piede  $H$ , il segmento  $HM$  eguale all'arco  $AP$  del dato cerchio; il luogo del punto  $M$  è la curva di cui trattasi ». Assunta  $A$  per origine delle coordinate e  $AB$  per asse delle  $x$ , indicando con  $\varphi$  l'angolo  $POB$ , per rappresentare analiticamente la curva si trovano le due equazioni

$$x = a + a \cos \varphi, \quad y = a(\pi - \varphi)$$

donde, eliminando  $\varphi$ ,

$$x = a - a \cos \frac{y}{a}.$$

<sup>1)</sup> OZANAM, *Dictionnaire mathématique, ou Idée générale des mathématiques* (Amsterdam 1691), p. 98-99 ove è citato come fonte il *Traité d'algèbre* dello stesso autore.

Ora facendo

$$a - x = x', \quad \frac{\pi a}{2} - y = y'$$

questa diviene

$$x' = a \operatorname{sen} \frac{y'}{a}$$

che evidentemente è pure caso particolare di quella che rappresenta in generale la sinusoidale.

**201.** Dell'altra quadratrice dà notizia il N. 260 delle *Philosophical Transactions* (1700), il quale contiene uno scritto anonimo<sup>1)</sup> intitolato *The construction of a Quadratrix to the circle, being the curve described by its equable evolution*. La curva di cui si tratta è rappresentabile in coordinate polari  $\varrho, \omega$  mediante l'equazione

$$(6) \quad \varrho = \frac{4\pi r \cos \omega}{\pi - 2\omega}$$

Che essa possa servire a quadrare il cerchio si vede osservando che l'equazione (6) dà per  $\omega = \pi/2$ ,  $\varrho = 2\pi r$ ; onde descritta la curva, almeno pei valori di  $\omega$  compresi fra 0 e  $\pi/2$ , si conoscerà la lunghezza della periferia del cerchio di raggio  $r$  e quindi  $\pi$ . Siccome per

$$\omega = (2k + 1)\pi/2 \quad (k \neq 0)$$

è  $\varrho = 0$  così è chiaro che la curva passa infinite volte pel polo; il raggio vettore passa poi per infiniti massimi finiti; ecc. La curva è in una relazione geometrica semplicissima con la quadratrice di Dinostrato, relazione che spiega perchè essa al pari di questa serve a quadrare il cerchio. Effettuando infatti sulla curva (6) la trasformazione per raggi vettori reciproci avente il suo centro nel polo e per potenza  $k^2$  si ottiene la curva di equazione

$$\varrho = \frac{k^2}{4r} \frac{1 - 2\omega/\pi}{\cos \omega};$$

essendo questa sostanzialmente identica alla (1), resta dimostrato

<sup>1)</sup> Gli editori (C. HUTTON, G. SHAW e R. PEARSON) della ristampa di *The philosophical Transactions of the R. Society of London* notano a questo proposito (T. IV, London 1809, p. 462): « This paper, which is anonymous has much of the manner, style and peculiarities of William Jones, Esq., who soon afterwards made so conspicuous figure in the Royal Society, and in the mathematical world ». Invece E. WÖLFFING (*Bibliografia della cocleotide*, Boll. di bibl. e stor., T. III, 1900) ha stabilito, conformemente alle vedute di chi scrive, che ne è autore J. PERKS (v. nota a p. 31).

che la nuova quadratrice non è che la trasformata per raggi vettori reciproci dell'antica.

Facendo  $\pi - 2\omega = 2\varphi$  e  $2\pi r = a$  la (6) diviene

$$(6') \quad \varrho = a \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi},$$

e sotto questa forma elegante venne incontrata da parecchi che riscopersero la curva di cui ci occupiamo e dei quali dobbiamo fare cenno.

Anzitutto a Gregorio Fontana venne proposto il seguente problema: « In una retta indefinita (fig. 3)  $MQ$  è dato un punto  $A$  e fuori di essa un punto qualunque  $B$ ; la retta  $AB$  e l'angolo  $BAQ$  sono quindi noti; si conduca ad  $AB$  la perpendicolare  $BC$  e dell'angolo  $BAQ$  la bisettrice  $AC$ ; similmente si conduca ad  $AC$  la perpendicolare  $CD$  e dell'angolo  $CAQ$  la bisettrice  $AD$ ; così si conduca ad  $AD$  la perpendicolare  $DE$  e dell'angolo  $DAQ$  la bisettrice  $AE$ ;

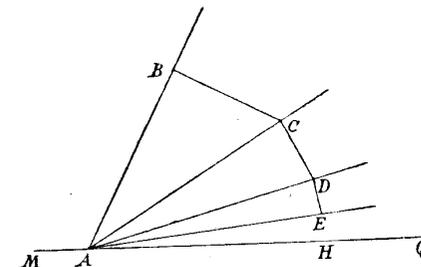


Fig. 3.

proseguendo in questo modo all'infinito si otterranno infiniti punti l'ultimo dei quali — che chiameremo  $H$  — viene a cadere sulla retta  $MQ$ . Ciò posto si domanda: I. la posizione di questo punto  $H$ ; II. l'equazione della curva su cui stanno i punti  $B, C, D, E, F, \dots, H$ . Per risolvere questo problema il Fontana procede in sostanza così<sup>1)</sup>: Si prenda  $A$  per polo e  $AQ$  per asse polare; si indichino con  $\varrho, \varphi$  le coordinate di un punto qualunque della curva e con  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n, \dots$  i raggi vettori corrispondenti agli angoli

$$\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2^2}, \dots, \frac{\varphi}{2^n}, \dots;$$

la costruzione indicata conduce evidentemente alle seguenti relazioni:

<sup>1)</sup> V. la prima parte dell'articolo *Sopra l'equazione d'una curva, sopra la falsità di due famosi teoremi, e sopra le serie armoniche a termini infinitamente piccoli* (Mem. della Soc. It. delle Scienze, T. II, 1784); l'equazione polare della curva trovasi anche in una lettera di Malfatti a Lorgna del 27 aprile 1783 (Bull. di bibl. e storia ecc., T. IX, 1876, p. 438).

$$(*) \quad \varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos \varphi/2}, \quad \varrho_2 = \frac{\varrho_1}{\cos \varphi/2^2}, \quad \dots, \quad \varrho_n = \frac{\varrho_{n-1}}{\cos \varphi/2^n},$$

dalle quali deducesi moltiplicando

$$\varrho_n = \frac{\varrho}{\cos \varphi/2 \cos \varphi/2^2 \dots \cos \varphi/2^n};$$

ora dalle notissime relazioni

$$\text{sen } \varphi = 2 \text{ sen } \varphi/2 \cos \varphi/2, \quad \text{sen } \varphi/2 = 2 \text{ sen } \varphi/2^2 \cos \varphi/2^2, \dots$$

si trae

$$\dots, \quad \text{sen } \varphi/2^{n-1} = 2 \text{ sen } \varphi/2^n \cos \varphi/2^n$$

onde

$$\text{sen } \varphi = 2^n \cos \varphi/2 \cos \varphi/2^2 \dots \cos \varphi/2^n \text{ sen } \varphi/2^n$$

$$\varrho_n \text{ sen } \varphi = \varrho \varphi \cdot \frac{\text{sen } \varphi/2^n}{\varphi/2^n}.$$

Passando al limite per  $n = \infty$  si conclude

$$\varrho_\infty \text{ sen } \varphi = \varrho \varphi.$$

Ora, se chiamiamo  $\alpha$ ,  $\alpha$  le coordinate polari del punto  $B$  di cui si diparte la curva, avremo in particolare

$$\varrho_\infty \text{ sen } \alpha = a \alpha;$$

dividendo per questa la precedente si ottiene

$$\varrho = \frac{a \alpha}{\text{sen } \alpha} \frac{\text{sen } \varphi}{\varphi},$$

equazione che ha la forma (6') onde i punti  $B C D E \dots H$  stanno sopra una quadratrice della suddetta specie<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Cfr. F. RUDIO, *Mathesis*, III Ser., T. VII, 1907, p. 271. Le equazioni (\*) del testo si possono compendiare nella

$$\rho_k = \frac{\rho_{k-1}}{\cos \phi/2^k}$$

ove  $k = 1, 2, \dots$ , che può anche scriversi

$$\rho \left[ \frac{\phi}{2^{k-1}} \right] = \rho \left[ \frac{\phi}{2^k} \right] \cdot \cos \frac{\phi}{2^k}$$

Tale curva era stata già prima incontrata dal Fontana<sup>1)</sup> cercando il luogo dei centri di gravità degli archi di un dato cerchio aventi una data origine. Se  $O$  è il centro ed  $r$  il raggio del cerchio e  $A$  l'origine e si prende  $O$  per polo e  $OA$  per asse polare, si consideri uno qualunque  $AA' = 2r\varphi$  (fig. 4) di quegli archi; è noto che il suo baricentro avrà per coordinate polari risp.  $\varphi$  e  $r \text{ sen } \varphi/\varphi$ ; onde l'equazione del luogo in questione è appunto  $\varrho = r \text{ sen } \varphi/\varphi^2$ .

Un terzo problema risoluto dalla medesima curva venne trattato privatamente tra D. Bernoulli e Goldbach<sup>2)</sup> e pubblicamente

ossia, ponendo  $\phi/2^k = \omega$ ,

$$\rho(2\omega) = \rho(\omega) \cdot \cos \omega,$$

relazione che porta a concludere che la ricerca dell'equazione della curva di cui ci occupiamo non differisce da quella della funzione  $\rho$  soddisfacente la precedente equazione funzionale. Notisi ora che se  $\rho_0$  è una funzione che vi soddisfa, tale cioè che sia

$$\rho_0(2\omega) = \rho_0(\omega) \cdot \cos \omega$$

si avrà

$$\frac{\rho(2\omega)}{\rho_0(2\omega)} = \frac{\rho(\omega)}{\rho_0(\omega)}$$

onde il rapporto  $\rho(\omega)/\rho_0(\omega)$  è una funzione di  $\omega$  che non muta cambiando  $\omega$  in  $2\omega$ . Perciò, in virtù di un teorema di Laplace, essa ha la forma

$$\Theta \left[ \text{sen } \frac{2\pi \log \omega}{\log 2}, \cos \frac{2\pi \log \omega}{\log 2} \right],$$

$\Theta$  rappresentando una funzione arbitraria di due argomenti. Se, dunque,  $\rho_0(\omega)$  è una soluzione particolare dell'anzidetta equazione frazionale, ne sarà

$$\Theta \left[ \text{sen } \frac{2\pi \log \omega}{\log 2}, \cos \frac{2\pi \log \omega}{\log 2} \right] \rho_0(\omega)$$

la soluzione generale. Tale dimostrazione della non equivalenza della equazione trovata per la curva in questione con la risoltrice di quell'equazione funzionale è in sostanza dovuta a E. BELTRAMI (*Remarques au sujet de la Question 654*; *Nouv. Ann. de math.*, II Ser., T. II, 1863; *Opere matematiche*, T. I, p. 100-102).

<sup>1)</sup> V. il secondo problema della IX fra le *Disquisitiones physico-mathematicae nunc primum editae* (Pavia 1780); è caso particolare di un problema di cui si è occupato LEIBNIZ nella memoria *Constructio problematis ducendi recta quae tangunt lineas centrorum gravitatis* (Miscell. Berol., T. I, 1710).

<sup>2)</sup> Questa generazione della curva si ritrova in una nota di E. EGGER inserita nel T. VI, 1864, degli *Ann. di Mat.*, p. 21-27, e nel più recente lavoro di V. STOEKLY, *Bedeutung und Eigenschaften der ans  $r = a \text{ sen } \phi/\phi$  entspringenden Curve* (Archiv, T. XLVIII, 1868).

<sup>3)</sup> V. le lettere del 30 e 31 ottobre 1726 pubblicate da P. H. FUSS in *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII Siècle* (T. II, St.-Petersbourg, 1843, p. 242-244).

proposto dal Bossut<sup>1)</sup> e poi da E. Catalan<sup>2)</sup>; eccone l'enunciato: Un'infinità di circonferenze sono tangenti in un punto ad una retta; si prende sopra ciascuna a partire questo punto un arco di data lunghezza; qual è il luogo degli estremi di tutti questi archi? Per rispondere a questa domanda assumiamo un sistema di coordinate polari avente per polo  $O$  il punto fisso (fig. 5) e per asse polare la retta data. Sia  $C$  il centro e  $r$  il raggio di una qualunque delle circonferenze di cui parla il problema; detta  $l$  la lunghezza data

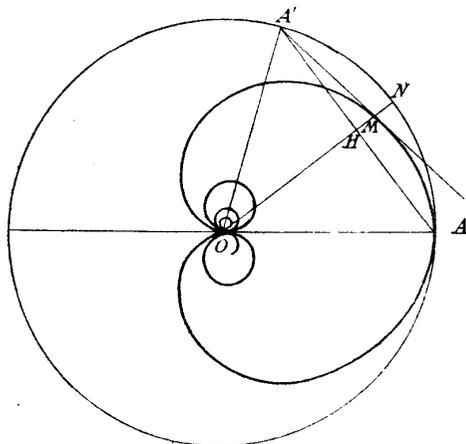


Fig. 4. — Cocleioide.

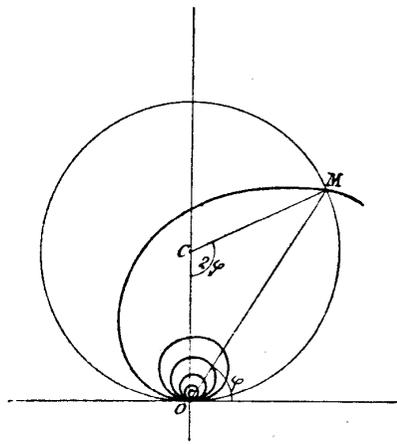


Fig. 5.

e  $\varrho$ ,  $\varphi$  le coordinate dell'estremo dall'arco  $OM$  di lunghezza  $l$  avremo evidentemente  $l = 2r\varphi$ ,  $\varrho = 2r\sin\varphi$ , donde eliminando  $r$  si ottiene  $\varrho = l\sin\varphi/\varphi$  come equazione del luogo di  $M$ : *q. e. d.*

Alla stessa curva si è giunti più tardi da G. Jung<sup>3)</sup> e C. Falkenburg<sup>4)</sup> partendo da considerazioni di meccanica applicata<sup>5)</sup>; quest'ultimo anzi, tenendo conto della somiglianza che essa ha con una lumaca, le impose il nome di *cocleioide* che essa sembra destinata

<sup>1)</sup> *Calcul intégral* (Paris, An IX); se ne trova una soluzione nel T. III delle *Annales de Mathém.* di GERGONNE.

<sup>2)</sup> *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, T. I (Paris 1857), p. 331. Cfr. AZZARELLI, *Alcune proprietà di una curva trascendente* (Ann. di Mat., T. V, 1863).

<sup>3)</sup> *Nuovi teoremi a complemento della regola di Guldin e proprietà della spirale*  $r = a \sin \theta / \theta$  (Lincei Rend., 3ª serie, T. VIII, 1883).

<sup>4)</sup> *Die Cochleioide* (Archiv, T. LXX, 1884).

<sup>5)</sup> V. anche F. CESÀRO, *Elementi di calcolo infinitesimale* (Napoli 1899) p. 332, e R. WOOD, *The cochleoid* (Amer. math. Monthly, maggio 1924).

a conservare; che essa sia appunto la curva che gli antichi chiamavano con questo nome è un'ipotesi che P. Mausion ha emessa<sup>1)</sup>, ma che possiede ben scarsa verosimiglianza<sup>2)</sup>.

L'equazione (6') mette in evidenza che la curva è simmetrica rispetto all'asse polare e passa per il punto  $A$  di questo distante di  $a$  dal polo; essa poi mostra l'esistenza di un punto asintotico; infatti se  $\varphi$  tende a infinito  $\varrho$  tende a 0 onde il polo è un punto di detta specie.

Per trovare ora la tangente in un punto qualunque  $M(\varrho, \varphi)$  della curva serviamoci della seconda delle suddette generazioni e (fig. 4) chiamiamo  $\theta$  l'angolo che detta tangente forma col raggio vettore; la (6') ci darà:

$$\operatorname{tg} \theta = \varrho : \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varphi \sin \varphi}{\varphi \cos \varphi - \sin \varphi}$$

Segniamo ora le intersezioni  $H, N$  del raggio  $OM$  con la retta  $AA'$  e con la periferia del dato cerchio; detto  $\lambda$  l'angolo  $HMA'$  avremo:

$$\begin{aligned} OH &= r \cos \varphi, \quad AH = HA' = r \sin \varphi, \\ MH &= OH - OM = r \cos \varphi - r \frac{\sin \varphi}{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{A'H}{MH} = \frac{\varphi \sin \varphi}{\varphi \cos \varphi - \sin \varphi};$$

Ciò dimostra essere  $\lambda = \theta$ , essere quindi la retta  $A'M$  tangente in  $M$  alla cocleioide; quindi per costruire la tangente in un punto  $M$  di questa curva basta congiungere  $M$  al simmetrico  $A'$  di  $A$  rispetto a  $OM$ . Siccome la posizione del punto  $A'$  non dipende che dal punto  $A$  e dalla retta  $OM$ , così si può concludere con C. H. Otto<sup>3)</sup> e E. Cesàro<sup>4)</sup>: *Ogni retta uscente dal polo  $O$  della cocleioide  $\varrho = a \sin \varphi / \varphi$  taglia la curva in infiniti punti; le corrispondenti tangenti concorrono in un punto  $A'$  il cui luogo è la circonferenza di centro  $O$  e raggio  $a$ ; viceversa conducendo da  $A'$  le tangenti alla cocleioide i loro punti di contatto si trovano sulla bisettrice dell'angolo  $AOA'$ . Questi punti sono i baricentri degli infiniti archi di quella circonferenza aventi per estremi i punti  $A$  e  $A'$ .*

<sup>1)</sup> *Mathésis*, T. V (1885), p. 92.

<sup>2)</sup> Cfr. F. RUDIO, *Mathésis*, III Ser., T. VII, 1907, p. 261.

<sup>3)</sup> *Ueber einige Eigenschaften der Schwerpunktskurve des Kreises* (Diss. Jena 1872).

<sup>4)</sup> *Quelques propriétés de la courbe représentée par  $u = R \sin \omega / \omega$*  (Nouv. Con. math., T. IV, 1878).

Queste conclusioni si possono confermare come segue. In coordinate cartesiane la cocleotide è rappresentata dall'equazione seguente:

$$(x^2 + y^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} y/x - ay = 0;$$

onde l'equazione della retta che la tocca nel punto  $(x, y)$  è:

$$[2axy - y(x^2 + y^2)]X + [a(y^2 - x^2) + x(x^2 + y^2)]Y = ay(x^2 + y^2).$$

Date ora  $X, Y$  questa equazione rappresenta una curva di terzo ordine passante pel punto avente queste coordinate; dunque: *le tangenti condotte ad una cocleotide da un punto qualunque P del suo piano stanno sopra una curva di terz'ordine passante per quel punto ed avente il polo per punto doppio*; la cocleotide fa dunque parte di un sistema avente per caratteristiche 1 e 2. Introducendo coordinate polari e supponendo che il punto  $P$  stia alla distanza  $a$  dal polo, ponendo cioè

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega \quad X = a \cos \alpha, \quad Y = a \sin \alpha.$$

l'equazione precedente diviene

$$a \sin(2\omega - \alpha) = \rho [\sin \omega + \sin(\omega - \alpha)]$$

ossia

$$\sin(\omega - \alpha/2) \{ a \cos(\omega - \alpha/2) - \rho \cos \alpha/2 \} = 0;$$

la cubica del caso generale decomponesi quindi nella retta  $\omega = \alpha/2$  e nella circonferenza

$$\rho \cos \alpha/2 = a \cos(\omega - \alpha/2),$$

circonferenza che passa pei due punti  $O, A$  della cocleotide ed ha il proprio centro sulla bisettrice dell'angolo  $POA$ .

La cocleotide può anche ottenersi come proiezione ortogonale d'un'elica cilindrica<sup>1)</sup>; sussiste, infatti, il seguente

**TEOREMA.** È una cocleotide la proiezione di un'ordinaria elica cilindrica fatta da un punto della curva sopra un piano perpendicolare all'asse.

**DIMOSTRAZIONE.** Si consideri infatti la curva rappresentata dalle equazioni

<sup>1)</sup> *Mathesis*, III Ser., T. I, 1901, Question 1273 (BROCARD). Applicazioni di tale definizione trovansi nell'articolo di R. DEAUX, *Sur la cocleotide* (Id. T. XLI, 1927).

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = h \varphi$$

e la si proietti sopra il piano  $z = z_0$  dal punto della curva che corrisponde al valore  $\varphi_0$  del parametro  $\varphi$ .

La proiezione ortogonale sul piano  $xy$  della curva risultante è eguale alla curva obbiettiva ed è rappresentata dalle equazioni

$$\frac{x - R \cos \varphi_0}{R(\cos \varphi - \cos \varphi_0)} = \frac{y - R \sin \varphi_0}{R(\sin \varphi - \sin \varphi_0)} = \frac{z_0 - h \varphi_0}{h(\varphi - \varphi_0)}.$$

Ora da queste si ricava

$$\frac{y - R \sin \varphi_0}{x - R \cos \varphi_0} = -\cot \frac{\varphi + \varphi_0}{2},$$

$$(x - R \cos \varphi_0)^2 + (y - R \sin \varphi_0)^2 = \left[ R \frac{z_0 - h \varphi_0}{h} \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{\frac{\varphi - \varphi_0}{2}} \right]^2$$

Si trasporti ora l'origine nel punto  $(R \cos \varphi_0, R \sin \varphi_0)$  e si chiamino  $\bar{x}, \bar{y}$  le nuove coordinate del punto  $(x, y)$ ; si avrà allora

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -\cot \frac{\varphi + \varphi_0}{2}, \quad \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = R \frac{z_0 - h \varphi_0}{h} \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{\frac{\varphi - \varphi_0}{2}}$$

ossia, introducendo le solite coordinate polari,

$$\operatorname{tg} \omega = -\cot \frac{\varphi + \varphi_0}{2}, \quad \rho = \frac{z_0 - h \varphi_0}{h} \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{\frac{\varphi - \varphi_0}{2}}$$

La prima dà

$$\omega = \frac{\varphi + \varphi_0}{2} - \frac{\pi}{2}$$

ossia

$$\omega + \frac{\pi}{2} - \varphi_0 = \frac{\varphi - \varphi_0}{2}.$$

Se ora si fa ruotare l'asse polare dell'angolo  $\pi/2 - \varphi_0$  e si chiama  $\bar{\omega}$  la nuova anomalia si ha

$$\bar{\omega} = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 + \omega,$$

onde si conclude

$$\varrho = R \frac{z_0 - h \varphi_0}{h} \frac{\text{sen } \bar{\omega}}{\bar{\omega}},$$

conformemente all'enunciato.

Dimostreremo da ultimo come un problema di Geometria descrittiva conduca ad una classe di curve in cui trovasi la cocleotide. Si consideri per ciò la superficie elicoidale di equazione

$$y = x \operatorname{tg} \frac{z}{h};$$

la curva di contatto di essa con i piani tangenti condotti pel punto  $O$  ( $X, Y, Z$ ) è rappresentata dal sistema formato dalla equazione precedente e dalla seguente:

$$-(X-x) \frac{y}{x} + (Y-y) - \frac{x^2 + y^2}{h x} (Z-z) = 0$$

Eliminando  $z$  si otterrà l'equazione della proiezione sul piano  $xy$  di detta curva di contatto; il risultato è

$$Yx - Xy = \frac{x^2 + y^2}{h} \left[ Z - h \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right],$$

ossia, passando a coordinate polari e di più ponendo  $X = a \cos \alpha$ ,  $Y = a \sin \alpha$ ,

$$\varrho = \frac{ah \operatorname{sen} (\alpha - \omega)}{Z - h \omega}.$$

Ora, se in particolare è  $Z = h \alpha$ , cioè se il punto  $O$  appartiene alla data superficie elicoidale, questa diviene

$$\varrho = \frac{h \operatorname{sen} (\alpha - \omega)}{\alpha - \omega}.$$

che rappresenta una cocleotide. Dunque: *Le proiezioni su di un piano orizzontale delle linee d'ombra propria di una superficie d'una vite a filetto quadrato, illuminata da un punto della superficie, è una cocleotide<sup>1)</sup>, che si conserva eguale a sè stessa quando quel punto descrive la superficie suddetta.*

<sup>1)</sup> G. FOURET, *Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique  $v$ , ayant un point principal multiple d'ordre  $v$* . (Bull. Soc. Math. de France, VII, 1878-79).

**202.** L'iperbola, al pari del cerchio, non è quadrabile algebricamente, onde chi voglia calcolarne l'area deve ricorrere a funzioni e curve trascendenti; orbene è chiaro che mentre una quadratrice del cerchio deve contenere almeno un punto di cui una coordinata cartesiana od il raggio vettore sia un multiplo (intero o frazionario) di  $\pi$ , per una quadratrice dell'iperbola una delle coordinate dev'essere una funzione logaritmica dell'altra. Di tale natura è la curva per cui è costante la somma della tangente e della sotttangente cartesiane. Infatti la sua equazione differenziale è

$$\sqrt{y^2 + y^2 \left[ \frac{dx}{y dy} \right]^2} + y \frac{dx}{dy} = a$$

ossia

$$dx = \frac{a^2 - y^2}{2ay} dy;$$

integrando si trova subito

$$(7) \quad x = -\frac{y^2}{4a} + \frac{a}{2} \log \frac{y}{b},$$

$b$  essendo una costante arbitraria. È chiaro che descritta questa curva si avrà  $\log y/b$  in funzione razionale della  $y$  e della corrispondente  $x$ . Ebbene sin dal 1706 il PERKS ha ideato<sup>1)</sup> un ingegnoso strumento per descrivere con moto continuo la curva (7); non ci arresteremo a descriverlo, come non ci dilungheremo a riferire le proposizioni che su questa *quadratrice dell'iperbola* stabilì John Colson<sup>2)</sup>, il ben noto professore dell'Università di Cambridge<sup>3)</sup>. Osser-

<sup>1)</sup> *The construction and properties of a new Quadratrix to the hyperbol* (Phil. Trans., n. 306, 1706; T. V, p. 302 della ristampa). Una circostanza va notata. Il PERKS nell'introduzione del suo scritto ricorda « the old quadratrix of Dinostratus, by which the circle and the ellipse are squared », ed aggiunge « an other sort for the same purpose, I inserted in the Transactions for the same year ». Ora siccome l'unico articolo a cui può riferirsi siffatto richiamo è quello anonimo che citammo in principio del n. 201, così ci sembra illegittima l'attribuzione di essa al JONES fatta (vedi nota a pag. 22) dagli editori della ristampa delle *Phil. Trans.*

<sup>2)</sup> V. il succitato articolo del PERKS.

<sup>3)</sup> Citiamo un esempio: detto  $R$  il raggio di curvatura e  $T$  la lunghezza della tangente si trova

$$R = \frac{(a^2 + y^2)^2}{4a^2 y}, \quad T^2 = \frac{(a^2 + y^2)^2}{4a^2}$$

donde la seguente proprietà della curva:  $R : T = T : y$ . Aggiungiamo che i punti di contatto delle tangenti condotte alla curva da un punto arbitrario del suo piano appartengono a una cubica passante per quel punto; mentre quelli delle tangenti formanti con l'asse delle  $x$  l'angolo  $a$  sono distribuiti sulle due rette  $y = a (1 \pm \operatorname{tg} a)$ .

veremo invece che la medesima curva venne incontrata assai più tardi da Paolo Fuss<sup>1)</sup>, il quale ne rilevò una bella proprietà dimostrando la quale chiuderemo questo Capitolo. Notiamo perciò che siccome la costante  $b$  non influisce che sulla posizione della curva rispetto all'asse delle  $y$ , così, scegliendola opportunamente, la (7) potrà surrogarsi con la seguente:

$$(8) \quad x = \frac{a}{2} \log \frac{a}{y} + \frac{a^2 - y^2}{4a};$$

ora, fissando convenientemente l'origine ed il senso positivo degli archi  $s$  della curva, si trova facilmente

$$(9) \quad s = \frac{a}{2} \log \frac{y}{a} - \frac{a^2 - y^2}{4a}$$

Le (8) (9) danno

$$x - s = \frac{a^2 - y^2}{2a}$$

e poichè la (8) mostra essere per  $y = 0$   $x = \infty$ , si conclude

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - s) = a/2;$$

dunque la differenza fra l'arco indefinito della curva ed il proprio asintoto è una quantità finita.

La quadratrice dell'iperbola è caso particolare delle curve che risolvono il seguente problema<sup>2)</sup>: «Data una retta ed un punto  $A$  di essa, far passare per questo una curva tale che condotta la tangente in un suo punto qualunque  $M$  e determinatane la intersezione  $T$  coll'asse delle  $x$ , sia  $AT = n \text{ arc } AM$ ,  $n$  essendo un rapporto dato». Presa la data retta per asse delle  $x$ , e detta  $a$  l'ascissa del punto  $A$ ,  $s$  l'arco e  $p$  il rapporto  $dy/dx$ , il problema si traduce subito nella relazione:

$$(10) \quad ns = x - \frac{y}{p} - a$$

Differenziando questa si ottiene:

$$n ds = \frac{y dp}{p^2};$$

<sup>1)</sup> V. il quarto dei problemi trattati nella memoria intitolata: *Quantum differat longitudo arcus ab asymptota, utraque ih infinitum extensa, inquiritur* (Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, T. IX, 1924).

<sup>2)</sup> P. FUSSE, *De curva quadam transcendente ejusque proprietatibus* (Mém. de St. Pétersbourg, III T., 1822).

e poichè

$$ds = \frac{dy \sqrt{1+p^2}}{p},$$

si può anche scrivere

$$n \frac{dy}{y} = \frac{p dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

onde integrando

$$\left[ \frac{y}{a} \right]^n = \frac{p}{1 + \sqrt{1+p^2}}$$

$a$  essendo la costante d'integrazione. Deduciamo da questa il valore di  $p = dy/dx$  ed otterremo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 a^n y^n}{a^{2n} - y^{2n}}$$

ossia

$$(11) \quad 2 a^n dx = a^{2n} \frac{dy}{y^n} - y^n dy$$

Supposto anzitutto  $n \neq 1$ , integrando si trova

$$2 a^n x = - \frac{a^{2n}}{(n-1) y^{n-1}} - \frac{y^{n+1}}{n+1} + \text{cost.};$$

e poichè la curva deve passare pel punto  $A$  la cost. è determinata e l'equazione precedente diviene

$$(12) \quad x = \frac{a (y^{n-1} - a^{n-1})}{2 (n-1) y^{n-1}} + \frac{a^{n+1} - y^{n+1}}{2 (n+1) a^n},$$

la quale rappresenta una curva algebrica o trascendente secondoche il numero  $n$  è razionale o non. Nel caso escluso  $n = 1$  la (11) dà invece

$$x = \frac{a}{2} \log y - \frac{y^2}{4a} + \text{cost.};$$

determinando la costante in modo che la curva passi per  $A$  si trova

$$x = \frac{a}{2} \log \frac{y}{a} + \frac{a^2 - y^2}{4a}$$

come equazione della curva cercata: poichè questa coincide con la (8), è dimostrato quanto sopra enunciammo.

## CAPITOLO III

## La spirale di Archimede.

**203.** Se una retta si muove in un piano rotando attorno ad un punto fisso con velocità uniforme e se un punto mobile percorre questa retta pure con velocità uniforme partendo da quel punto fisso, il punto mobile descriverà una curva passante pel punto origine del movimento e facente infinite circonvoluzioni attorno ad esso. La si chiama *spirale di Archimede* perchè al sommo geometra di Siracusa si deve la scoperta di essa e delle sue proprietà più importanti<sup>1)</sup>. È evidente che, se si prende per polo il punto fisso e per asse polare la posizione iniziale della retta mobile, l'equazione polare della curva è

$$(1) \quad \rho = a \omega,$$

$a$  essendo una costante, che possiamo supporre positiva. Facendo variare  $\omega$  da 0 a  $+\infty$ ,  $\rho$  varia pure da 0 a  $+\infty$ ; si ottiene così un ramo di curva che ordinariamente si considera costituire tutta la spirale d'Archimede; ma se, conformemente al nostro modo di vedere, attribuiamo a  $\omega$  valori negativi otterremo un altro ramo, simmetrico del primo rispetto all'asse polare secondario; su questo

<sup>1)</sup> V. l'opuscolo *περί ἑλικῶν*. — Nella lettera-prefazione ARCHIMEDE narra (cfr. G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, II ed., p. 301) come egli avesse inviati anteriormente a CONONE da Samo gli enunciati di alcuni teoremi intorno alla spirale; ciò indusse PAPPo ad attribuire a CONONE la scoperta della curva di cui ci occupiamo (*Pappo ed. Hultsch*, p. 234), errore questo che venne riprodotto da molti. Quanto al tentativo fatto dal SÉDILLOT (*De l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon*, Bull. di bibl. e storia ecc., T. VI, 1873 o Comptes rendus, T. LXXV, 1872) di fare risalire a PLATONE la scoperta della spirale in questione, esso deve dichiararsi fallito perchè la spirale di cui parlasi nel *Timeo* non è definita geometricamente.

si tagliano i due rami considerati determinando infiniti punti doppi della curva (fig. 6)<sup>1)</sup>.

La spirale di Archimede non differisce dalla *spiralis quadrantis* di Bartolomeo Souvey (lat. Soverus)<sup>2)</sup>; questa infatti è generata da un punto che percorre uniformemente il diametro di un cerchio mentre questo subisce una rotazione di 90°. La curva è dunque rappresentabile con un'equazione del tipo (1); se  $R$  è il raggio del dato cerchio deve essere  $\rho = R$  per  $\omega = \pi/2$  onde  $a = 2R/\pi$  e la (1) diviene

$$\rho = \frac{2R\omega}{\pi},$$

equazione sostanzialmente identica alla (1).

La equazione (1) insegna a determinarne quantisivogliano punti della spirale d'Archimede quando siasi rettificata la circonferenza di raggio  $a$ ; onde, viceversa, sapendola descrivere con

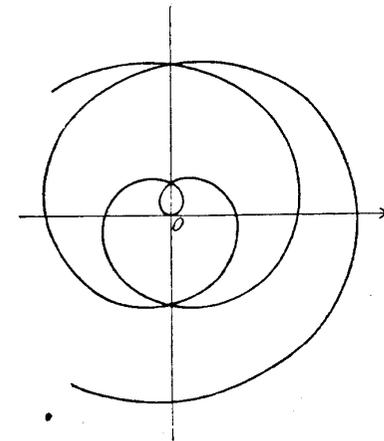


Fig. 6. — Spirale d'Archimede.

<sup>1)</sup> Di questi due rami della spirale gli antichi conoscevano soltanto uno. La prima menzione del secondo ramo (ci esprimiamo così perchè nelle opere di S. DEGLI ANGELI, *De infinitorum spiraliū spatiorum mensura*, Venetiis, 1660, e del P. CARACCIOLI, *De lineis curvis liber*, Pisis, 1740, ne è designato uno solo) si trova nell'*Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne, 1748, T. II, p. 301-2) di EULERO. Dopo la si trova negli *Elementi di algebra* (Pisa, 1798), T. I, p. 312 di PIETRO PAOLI, nelle *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze* (Berlin, 1833), p. 313-4 del MAGNUS, nel *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* (Paris 1841) del COURNOT, nelle *Leçons de géométrie analytique* (IX ed., Paris 1878), p. 349 di BRIOT e BOUQUET, nell'*Analytische Geometrie* (Leipzig, 1882) di R. BALTZER, nell'*Analytische Geometrie* (Leipzig 1900), p. 23-24 di M. SIMON. Figure esatte trovansi anche nella monografia di A. MICHALITSCHKE, *Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale* (II ed., Prag 1891), p. 6. In altre opere assai diffuse della spirale archimedeana si considera una sola metà; citiamo le seguenti: *Encyclopédie méthodique, Géométrie*, Tav. IV, Fig. 39; MONTFERRIER, *Dictionnaire des sciences mathém.*, Tavola LVII, Fig. 12; SERRET, *Calcul différentiel* (II Aufl., Paris 1879), p. 359 (la figura fu completata nella nota traduzione tedesca fattane da G. SCHEFFEN); STURM, *Cours d'analyse*, T. I (VI ed., Paris 1880), p. 214; HAAS, *Kleyer's Lehrbuch der Differentialrechnung*, III Tl. (Stuttgart, 1894), p. 22 e 180; ecc.

<sup>2)</sup> Cfr. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, T. II (II Aufl., Leipzig 1900), p. 832.

moto continuo si arriverà a rettificare qualunque circonferenza: ora ciò potendosi effettivamente fare mediante uno strumento semplicissimo<sup>1)</sup>, è chiaro che la spirale d'Archimede è una quadratrice: della qual cosa incontreremo fra breve una conferma.

Intanto notiamo che, passando a coordinate cartesiane, la (1) diviene:

$$\sqrt{x^2+y^2} - a \operatorname{arc} \operatorname{tg} y/x = 0;$$

l'equazione della tangente alla curva nel punto  $(x, y)$  è quindi rappresentata dall'equazione

$$(X-x) \{x \sqrt{x^2+y^2} + ay\} + (Y-y) \{y \sqrt{x^2+y^2} - ax\} = 0$$

Razionalizzando quest'equazione si ottiene l'altra

$$(x^2+y^2) \{Xx + Yy - \sqrt{x^2+y^2}\}^2 = a^2 (Yx - Xy)^2;$$

ora, siccome, quando siano date  $X, Y$ , questa rappresenta una curva del sesto ordine che ha per punto doppio il punto avente  $X, Y$  per coordinate, così i punti di contatto delle tangenti condotte da un punto ad una spirale d'Archimede appartengono ad una curva del sesto ordine del quale quello è un punto doppio; ciò basta per concludere che ogni spirale d'Archimede fa parte di un sistema avente per caratteristiche 2 e 4. Le tangenti della stessa spirale facenti l'angolo  $\alpha$  con l'asse polare hanno i loro punti di contatto sopra la curva kappa di equazione

$$\rho = a \operatorname{cotg} (\alpha - \omega).$$

**204.** Quando la retta mobile generatrice della spirale ha compiuti  $n$  giri, il punto mobile si sarà allontanato dal polo di una lunghezza  $ON = 2n\pi a$ ; il cerchio di centro  $O$  e raggio  $ON$  è chiamato da Archimede *n-mo cerchio*; la lunghezza della sua periferia è  $4n\pi^2 a$ . D'altronde detto  $\mu$  l'angolo fatto dalla tangente col raggio vettore, la nota formola

$$\operatorname{tg} \mu = \rho : \frac{d\rho}{d\omega}$$

dà nel caso attuale

$$\operatorname{tg} \mu = a\omega : a = \omega,$$

onde la tangente trigonometrica dell'angolo fatto dal raggio vettore  $ON$  con la tangente nel suo estremo è  $= 2n\pi$ . Ciò prova che

<sup>1)</sup> CLIFFORD, *Il senso comune nelle scienze esatte* (Milano 1886), p. 197-199.

la perpendicolare condotta dal polo all'asse polare incontra l'anzidetta tangente in un punto la cui distanza dal polo è  $2n\pi a \times \times 2n\pi = n \times 4n\pi^2 a$ , cioè eguale a  $n$  volte la periferia dell' $n$ -mo cerchio. Emerge da questo che, quando sappiasi tracciare la tangente in  $N$  alla spirale, si è pure in grado di rettificare la circonferenza e viceversa; donde un modo — segnalato da Archimede — per considerare la spirale in discorso come una quadratrice.

Se  $S_t$  è la sotttangente polare si ha

$$S_t = \rho^2 : \frac{d\rho}{d\omega} = \frac{\rho^2}{a};$$

ora se si descrive il cerchio che ha il centro in  $O$  e passa pel punto  $M(\rho, \omega)$  della spirale, la lunghezza del suo arco intercetto fra l'asse polare e la retta  $OM$  è  $= \rho\omega = \rho^2/a = S_t$ ; donde un procedimento per trovare l'estremo di quella sotttangente e quindi per costruire la tangente. È questo il più antico esempio di costruzione di una tangente servendosi della sotttangente polare, epperò meritava di essere qui notato; ma a tale metodo per costruire la tangente alla spirale è preferibile quello che trae origine dall'osservazione che in detta curva la normale polare ( $S_n = d\rho/d\omega$ ) è costante ( $= a$ ).

Sia  $E_n$  l'area descritta dal raggio vettore quando  $\omega$  varia tra  $2(n-1)\pi$  e  $2n\pi$  e  $C_n$  l'area dell' $n$ -mo cerchio; avremo:

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \int_{2(n-1)\pi}^{\omega=2n\pi} \rho^2 d\omega = \frac{a^2}{2} \int_{2(n-1)\pi}^{\omega=2n\pi} \omega^2 d\omega = \frac{a^2}{6} [8n^3\pi^3 - 8(n-1)^3\pi^3] = \\ &= \frac{4\pi^3 a^2}{3} (3n^2 - 3n + 1); \quad C_n = 4n^2\pi^2 a^2 \end{aligned}$$

donde

$$\frac{E_n}{C_n} = \frac{2n\pi a \cdot 2(n-1)\pi a + \frac{1}{3}(2\pi a)^2}{2n\pi a^2},$$

formola che dice: *L'area compresa fra l' $n$ -mo spira della curva di Archimede e la posizione iniziale della retta mobile sta all'area dell' $n$ -mo cerchio nel rapporto in cui il prodotto delle periferie dei cerchi  $(n-1)$ -mo e  $n$ -mo accresciuto dalla terza parte del quadrato della periferia del primo cerchio sta al quadrato della periferia del cerchio  $n$ -mo.* Dal precedente valore di  $E_n$  deducesi

$$E_n - E_{n-1} = 8(n-1)\pi^3 a^2;$$

in particolare

$$E_2 - E_1 = 8\pi^3 a^2;$$

quindi

$$\frac{E_n - E_{n-1}}{E_2 - E_1} = n - 1,$$

relazione elegante che è facile esprimere a parole.

Consideriamo ora l'area  $S$  del triangolo mistilineo avente per lati un arco di spirale ed i due raggi vettori  $\rho_1$  e  $\rho_2 > \rho_1$  relativi agli estremi  $M_1$  e  $M_2$  di quell'arco. Si trova agevolmente:

$$S = \frac{(\rho_2^2 + \rho_2 \rho_1 + \rho_1^2)(\rho_2 - \rho_1)}{6a};$$

siano poi  $S_1$  e  $S_2$  le aree dei settori circolari limitati dagli stessi raggi vettori e da archi passanti risp. per  $M_1$  e  $M_2$ . Sarà:

$$S_1 = \frac{\rho_1^2(\rho_2 - \rho_1)}{2a}, \quad S_2 = \frac{\rho_2^2(\rho_2 - \rho_1)}{2a}$$

quindi:

$$A' = S - S_1 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2(2\rho_1 + \rho_2)}{6a},$$

$$A'' = S_2 - S = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2(\rho_1 + 2\rho_2)}{6a}$$

$$\frac{A'}{A''} = \frac{\rho_1 + \frac{2}{3}(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \frac{1}{3}(\rho_2 - \rho_1)}, \quad \frac{S}{S_2} = \frac{\frac{1}{3}(\rho_2 - \rho_1)^2 + \rho_1 \rho_2}{\rho_2^2},$$

equazioni che esprimono algebricamente altrettanti teoremi scoperti da Archimede.

Riandando al fin qui esposto si vede che Archimede risolse riguardo alla sua spirale due fra i tre problemi metrici fondamentali concernenti una curva qualunque data, cioè il tracciamento della tangente e la quadratura, lasciando intatto il problema della rettificazione; questa importante questione, non solo non venne risolta da alcuno dei contemporanei od immediati successori di Archimede, ma non venne affrontata e sciolta che diciannove secoli dopo, quando Bonaventura Cavalieri<sup>1)</sup>, Gregorio a S.to Vincentio<sup>2)</sup>, e Fermat<sup>3)</sup>, indipendentemente l'uno dagli altri, scopersero che il problema di rettificare una spirale di Archimede è identico all'analogo per una parabola; ciò fu dimostrato semplicemente da

<sup>1)</sup> *Geometria indivisibilibus* (Bononiae 1635), Lib. VI.

<sup>2)</sup> *Opus geometricum* (Antverpiae 1647).

<sup>3)</sup> V. una lettera scritta a CARCAVI presumibilmente nel 1659 (*Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 438).

B. Pascal<sup>1)</sup>. Per giustificare e precisare questa asserzione consideriamo le due curve

$$(2) \quad y^2 = 2px \quad (3) \quad \rho = \frac{a\omega}{2\pi};$$

dettine  $s_p$  e  $s_s$  gli archi avremo

$$(4) \quad ds_p = \frac{1}{p} dy \sqrt{p^2 + y^2}, \quad ds_s = \frac{2\pi}{a} d\rho \sqrt{\left[\frac{a}{2\pi}\right]^2 + \rho^2}$$

donde emerge che, supposto

$$(5) \quad p = \frac{a}{2\pi},$$

l'arco della parabola (2) compreso fra il vertice ed il punto di ordinata  $y = k$  è eguale all'arco della spirale (3) compreso fra il polo ed il punto il cui raggio vettore è  $\rho = k$ . La relazione (5) fra le costanti  $a, p$  può esprimersi dicendo che *nella parabola il punto avente per ordinata il raggio del primo cerchio della spirale deve avere per ascissa la semiperiferia del cerchio stesso*. Integrando l'equazione (4, 1<sup>a</sup>) con la condizione che il vertice della parabola sia l'origine degli archi si trova

$$(6) \quad s_p = \frac{y}{2p} \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2} \log \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p},$$

formola che spiega come uno dei fondatori dell'Accademia delle Scienze di Parigi — Adriano Azout — abbia potuto dimostrare che «*étant donnée une droite égale à une parabole ou à une spirale, la quadrature de l'hyperbole est donnée, et contra*»<sup>2)</sup>. Aggiungiamo che, se s'introducono le funzioni iperboliche col porre

$$y = p \sinh \varphi,$$

la (6) assume la seguente forma più semplice ed elegante

$$(6') \quad s_p = (p/4) (\sinh 2\varphi + 2\varphi)^2.$$

<sup>1)</sup> V. la memoria *Egalité des lignes spirales et paraboliques* (*Oeuvres de B. PASCAL*, T. V, La Haye, 1779, p. 441), la quale — stando a quanto asserisce C. HENRY (*Bull. di Bibliogr. e Storia etc.*, T. XVII, 1884) risalirebbe al 1659. Nella *Lettre de M. Dettonville* premessa a questo scritto è detto che ROBERVAL giunse alle stesse conseguenze «*mais sans en donner de démonstration autrement que par les mouvements, dont on voit quelque chose dans le Livre des Hydrauliques du R. P. MERSENNE*».

<sup>2)</sup> Cfr. una lettera di C. MYLON a HUYGENS del 31 gennaio 1659 (*Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 334).

<sup>3)</sup> HOÛEL, *Cours de Calcul infinitésimal*, T. II (Paris 1879), p. 33;

**205.** Pappo ha osservato<sup>1)</sup> che la spirale d'Archimede può costruirsi con un metodo analogo a quello che egli scoprì per la quadratrice di Dinostrato (v. n. 199); secondo lui *la spirale d'Archimede è la proiezione ortogonale della intersezione di un'elicoide a piano direttore con un cono di rotazione coassiale, avente il vertice sull'asse, proiezione fatta ortogonalmente alla base del cono sopra la base stessa.* Per dimostrare ciò si osservi che le due superficie di cui parla Pappo si possono rappresentare mediante le due seguenti equazioni:

$$\frac{2\pi z}{p} = \text{arc tg } \frac{y}{x}, \quad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} + \frac{z}{c} - 1 = 0;$$

eliminando  $z$  si ottiene la seguente equazione della curva proiezione:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} + \frac{p}{2\pi c} \text{arc tg } \frac{y}{x} = 1;$$

passando a coordinate polari questa diviene

$$\rho = \frac{ap}{2\pi c} \left[ \frac{2\pi c}{p} - \omega \right],$$

che effettivamente appartiene ad una spirale d'Archimede.

Mentre questa generazione stereometrica della curva che studiamo presenta esclusivamente un interesse teorico, ve n'è un'altra, scoperta da Clairaut<sup>2)</sup>, la quale è utile in pratica perchè conduce a concepire un nuovo strumento per descrivere la curva con moto continuo<sup>3)</sup>. Alla nuova genesi il geometra francese giunse cercando il luogo delle tracce di uno stilo verticale fisso sul piano di un cerchio orizzontale, mobile con la condizione di rimanere costantemente tangente ad una retta fissa  $r$ . Per trovare l'equazione di tale luogo consideriamo (fig. 7) il cerchio mobile in una sua posizione qualunque  $BMEI$  e segniamo anche quel cerchio nella posizione

GÜNTHER, *Die Lehre der gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen* (Halle a. S., 1881), p. 241. — Costruzioni del centro di curvatura in un punto della spirale d'Archimede furono indicate da L. BURMESTER (*Lehrbuch der Kinematik*, Leipzig, 1884, p. 157) e H. WIENER (*Arch. Math. Phys.*, III Ser., T. XV, 1909, p. 107).

<sup>1)</sup> PAPPUS ed. HULTSCH, p. 262.

<sup>2)</sup> V. la memoria intitolata: *De la spirale d'Archimède décrite par un mouvement pareil à celui qui donne la cycloïde, et de quelques autres courbes du même genre* (Mém. de Paris, anno MDCCXL, Paris 1742).

<sup>3)</sup> Si deve rilevare che la questione di descrivere meccanicamente la spirale d'ARCHIMEDE è pure trattata in un lavoro giovanile dell'HUYGENS (v. *Oeuvres complètes*, T. XI, 1908, p. 216).

in cui esso tocca la retta  $r$  nel piede  $A$  della perpendicolare abbassata dalla traccia  $S$  dello stilo sopra  $r$  stessa. Sia  $BMEI$  la posizione presa dal diametro  $AS$  quando il cerchio è nella posizione  $BMEI$ . Noi prenderemo questo diametro come asse polare ed il suo centro  $C$  per polo; allora per avere l'equazione del luogo cercato basterà stabilire una relazione fra il raggio vettore  $CS = \rho$  e l'angolo  $SCE = \omega$ . A tale scopo chiamiamo  $a$  il raggio del cerchio mobile, conduciamo da  $C$  la retta  $IM$  perpendicolare a  $r$  e da  $S$  la retta  $SH$  a questa parallela;  $CH$ , differenza fra  $SA$  e  $a$ , è una lunghezza pure data che indicheremo con  $b$ . Avremo:

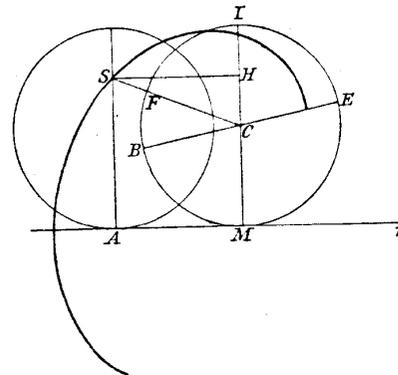


Fig. 7.

$$\text{arc } BM = AM = SH = \sqrt{CS^2 - CH^2} = \sqrt{\rho^2 - b^2} = \text{arc } IE;$$

$$\text{ang } SCH = \text{ang tg } \frac{SH}{CH} = \text{ang tg } \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{b};$$

$$\text{arc } IF = a \text{ arc tg } \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{b}; \quad \text{arc } EF = a \omega$$

E siccome

$$\text{arc } FE = \text{arc } FI + \text{arc } IE,$$

così si conclude

$$(7) \quad a \omega = a \text{ arc tg } \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{b} + \sqrt{\rho^2 - b^2}.$$

Se in particolare  $b = 0$ , cioè lo stilo sta nel centro del cerchio mobile, quest'equazione si semplifica e diviene

$$\rho = a(\omega - \pi/2)$$

onde che rappresenta una spirale d'Archimede<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Riguardo alle curve (7) e ad altre considerate da CLAIRAUT nel citato lavoro, veggasi un'osservazione di V. RETALI nel T. IV, 1897, p. 252 dell'*Intermédiaire*.

Queste considerazioni fanno apparire la spirale d'Archimede come individuo di un'intera classe di curve. Ad altra classe analoga credette giungere A. von Burg <sup>1)</sup> introducendo la considerazione delle curve aventi per equazione polare generale

$$(8) \quad \rho = a \omega + b.$$

Una siffatta curva si ottiene evidentemente prolungando della lunghezza  $b$  tutti i raggi vettori della spirale (1) e venne chiamata *neotide* <sup>2)</sup>. Ma se si osserva <sup>3)</sup> che, ponendo  $\omega_1 = \omega + b/a$ , la (8) diviene  $\rho = a \omega_1$  si conclude che la *neotide non differisce dalla spirale d'Archimede* <sup>4)</sup>. Intanto si vede che: *la concoide di una spirale d'Archimede è un'altra spirale eguale alla primitiva*. Aggiungiamo che tale proprietà è caratteristica per la spirale d'Archimede; infatti se  $\rho = f(\omega)$  è l'equazione polare di una curva dotata di tale proprietà, dovrà esistere un angolo  $\alpha$  tale che, qualunque sia  $\omega$ , si abbia

$$f(\omega) + b = f(\omega + \alpha)$$

ossia

$$b = \alpha f'(\omega) + \alpha^2 f''(\omega)/2 + \dots;$$

e affinché ciò accada deve essere  $f'(\omega) = b/\alpha$ ,  $f''(\omega) = 0$ , ... dunque l'equazione della curva in questione è

$$\rho = b \omega/\alpha + e, \quad \text{c. d. d.}$$

Notiamo finalmente che applicando il calcolo delle variazioni si giunge a dimostrare che la spirale di Archimede gode una proprietà di minimo <sup>5)</sup>.

<sup>1)</sup> *Lehrbuch der Mathematik*, III Bd. (Wien 1832), p. 241.

<sup>2)</sup> Cfr. HOFFMANN, *Mathem. Wörterbuch*, IV Bd. (Berlin 1864), p. 194.

<sup>3)</sup> STEGMANN, *Verschiedene mathematische Bemerkungen* (Arch. Math. Phys., T. VIII, 1846).

<sup>4)</sup> Perciò la nota di W. RULF (*Bestimmung des Krümmungsmittelpunkts der Neotide mittelst eines Kegelschnittes*, Arch. Math. Phys., 2<sup>a</sup> Serie, T. XI, 1892) si riferisce alla spirale d'ARCHIMEDE. L'identità della neotide con la spirale d'ARCHIMEDE farebbe cancellare il nome neotide dal catalogo delle curve speciali ove esso non fosse stato applicato in un altro senso; v. infatti la memoria di W. J. MACQUORN RANKINE, *On the mathematical theory of stream lines, especially those of four foci and upwards* (Phil. Trans., Volume CLXI, 1871), ove si parla (p. 268) di « Neoids, that is ship-shape lines ». Ivi s'incontrano poi altre curve, chiamate (dal greco *κυκνοειδής*) « Cyenoids, or swan-like lines »; essendo le une e le altre di pertinenza della matematica applicata, non ne facciamo che questa fugace menzione.

<sup>5)</sup> E. JANISCH, Arch. Math. Phys., II Ser., T. IX, 1890, p. 445.

## CAPITOLO IV

### Le spirali di grado superiore.

**206.** Come immediate generalizzazioni della spirale d'Archimede sono da considerarsi le curve rappresentate in coordinate polari da un'equazione della forma

$$(1) \quad \rho^k = a^k \frac{\omega}{2\pi},$$

ove il numero  $k$  è intero e positivo; le indicheremo col nome di *spirali di grado superiore*. Di esse parla Fermat in una lettera diretta al P. Mersenne addì 3 giugno 1636 <sup>1)</sup>, nella quale, non soltanto ne promette una trattazione completa, ma enuncia alcune proprietà di quella corrispondente all'ipotesi  $k = 2$ , da lui supposta essere la *curva ammirabile* (*παράδοξος γραμμή*) che, al dire di Pappo <sup>2)</sup>, venne inventata dal geometra Menelao d'Alessandria <sup>3)</sup>. I ritrovati di Fermat vennero divulgati dal Mersenne, il quale ne parlò nella seconda parte della sua *Harmonie universelle* (Paris 1637) e poi nei *Cogitata physico-mathematica* (Lut. Paris. 1644); lo stesso ne fece menzione in una lettera a C. Huygens del 22 maggio 1648 <sup>4)</sup>, ove è proposta la questione di determinare il rapporto dell'area  $A$  descritta dal raggio vettore quando l'angolo  $\omega$  varia tra 0 e  $2\pi$  alla area  $C$  del cerchio (detto ancora *primo cerchio*) di centro  $O$  e raggio  $a$ . Tale questione risolvesi coi nostri metodi assai facilmente; essendo infatti

$$A = \frac{1}{2} \int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \rho^2 d\omega = \frac{k\pi}{a^k} \int_{\rho=0}^{\rho=a} \rho^{k+1} d\rho = \frac{k\pi a^2}{k+2}; \quad C = \pi a^2$$

<sup>1)</sup> *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 12-14 e T. III, p. 277-278.

<sup>2)</sup> *Pappo ed. Hultsch*, p. 270.

<sup>3)</sup> Quest'opinione del celebre senatore tolosano trovò scarsi aderenti, perchè si ritiene generalmente che la curva mirabile sia a doppia curvatura: v. G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, II ed., p. 518-20.

<sup>4)</sup> *Oeuvres de Huygens*, T. I, p. 95.

si ha tosto

$$\frac{A}{C} = \frac{k}{k+2};$$

per  $k = 1$  si ritrova così un teorema di Archimede (v. n. 204), mentre per  $k > 1$  si ottiene una proposizione che concorda con altre di Stefano degli Angeli e G. Wallis, segnalate da R. de Sluse in una lettera a Huygens dell'agosto 1663<sup>1)</sup>.

Se  $\mu$  è l'angolo formato dalla tangente alla spirale col raggio vettore terminato al punto di contatto, la (1) dà

$$\operatorname{tg} \mu = \rho : \frac{d\rho}{d\omega} = k\rho$$

donde si può dedurre un metodo per costruire la tangente; altri si ottengono osservando che la sottangente e la surnormale polari sono espresse rispettivamente come segue:

$$2k\pi \frac{\rho^{k+1}}{a^k} \text{ e } \frac{1}{2k\pi} \frac{a^k}{\rho^{k-1}}.$$

Il calcolo fatto al termine del n. 203 relativamente alla spirale d'Archimede può adattarsi con lievi modificazioni alla curva rappresentata dall'equazione (1) e mostra che anche siffatta curva può far parte di un sistema, le cui caratteristiche però hanno espressioni differenti secondochè  $k$  è pari o dispari. Questa diversità di comportamento in quei due casi si ripresenta studiando la forma delle curve di cui ci occupiamo; infatti se  $k$  è pari, per ottenere dei punti reali della curva, bisogna attribuire a  $\omega$  valori positivi, e per ognuno si hanno per  $\rho$  due valori eguali e di segni contrari, onde la curva è simmetrica rispetto al polo (che è sempre un punto della curva); invece se  $k$  è dispari a valori di  $\omega$  eguali e di segni contrari corrispondono valori di  $\rho$  eguali e di segni contrari, il che dimostra essere la curva simmetrica rispetto all'asse polare secondario.

La rettificazione delle spirali di grado superiore dà luogo ad un teorema, rilevato da Fermat, che è la generalizzazione di quello del Cavalieri che dimostrammo a p. 39. Per vedere in che cosa consista osserviamo che, detto  $s_p$  l'arco della spirale (1), si ha:

$$ds_p = \sqrt{\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} = \frac{2k\pi}{a^k} \cdot d\omega \sqrt{\left[\frac{a^k}{2k\pi}\right]^2 + \rho^{2k}};$$

d'altronde se diciamo  $s_p$  l'arco della parabola d'ordine  $k+1$  rap-

<sup>1)</sup> *Oeuvres de Huygens*, T. IV, p. 399.

presentata dall'equazione

$$y^{k+1} = (k+1)p^k x$$

si ha

$$ds_p = \frac{1}{p^k} dy \sqrt{p^{2k} + y^{2k}};$$

ciò prova che l'arco della spirale compreso fra il polo ed il punto in cui  $\rho = c$  è eguale all'arco della parabola compreso fra il vertice ed il punto di ordinata  $y = c$ , purchè si supponga che le costanti  $a$  e  $p$  siano legate fra loro dalla relazione

$$a = \sqrt[2k]{2k\pi} p.$$

Per  $k = 1$  si ritrova il succitato teorema di Cavalieri; per  $k$  qualunque si giunge ad una proposizione che E. Torricelli comunicò a Michelangelo Ricci il 24 agosto del 1647<sup>1)</sup> e che Fermat faceva conoscere a Carcavi in una lettera che venne comunicata a Huygens il 13 settembre 1659<sup>2)</sup>. È curioso notare come Huygens nel rispondere a Carcavi il 26 febbraio 1660 osservasse: « La comparaison des autres sortes de spirales avec les lignes paraboloides que donne M. de Fermat est véritable, mais non pas fort difficile à trouver après que la première est connue. Et je n'estonne qu'il prend plaisir à inventer des lignes nouvelles qui n'ont pas autrement des propriétés dignes de considération »<sup>3)</sup>. Colpito da tale appunto Fermat replicò all'Huygens pel tramite di Carcavi<sup>4)</sup> che per  $k = 1/2$  le sue spirali al pari delle corrispondenti parabole (v. Vol. I, p. 364) godono la notevole prerogativa di essere rettificabili; osservazione questa importante perchè mostra che Fermat non restringeva le proprie considerazioni alle spirali rappresentate dall'equazione (1) quando  $k$  è intero; si può aggiungere che la stessa spirale ( $k = 1/2$ ) si ottiene cercando il luogo degli estremi delle sottangenti polari di una spirale d'Archimede.

**207.** Il carteggio di Fermat ha serbato notizia di un'altra curva la cui invenzione viene attribuita a Galileo<sup>5)</sup>; dopo essere stata

<sup>1)</sup> Vedi *Opere di E. Torricelli*, ed. G. LORIA e G. VASSURA (Faenza 1919), T. III, p. 473; inoltre la memoria *De infinitis spiralibus* pubblicata per la prima volta ivi, T. I, P. II, p. 351-399.

<sup>2)</sup> *Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 538; *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 441. V. anche le proposizioni dirette a LALOUBÈRE e da questo pubblicate nel 1660 in appendice all'opera *Veterum geometria promota in septem de cycloide libris*; vennero ristampate in *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 206 e T. III, p. 178.

<sup>3)</sup> *Oeuvres de Huygens*, T. III, p. 27.

<sup>4)</sup> V. la lettera di FERMAT datata 25 giugno 1660 e pubblicata in *Oeuvres de Huygens*, T. III, p. 89 e in *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 448.

<sup>5)</sup> *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 12.

impropriamente chiamata *helix Baliani*<sup>1)</sup>; si indica oggi col nome di *spirale di Galileo*. Essa deve annoverarsi fra le curve fisico-matematiche essendo per definizione « la linea descritta, relativamente alla terra animata dal suo movimento diurno, da un punto materiale pesante, cadente liberamente »; in coordinate polari essa è rappresentabile mediante un'equazione della seguente forma:

$$(2) \quad \rho = a - b \omega^2.$$

Siccome quest'equazione non cambia mutando il segno di  $\omega$ , così la spirale di Galileo è simmetrica rispetto all'asse polare; il polo è un punto doppio e le relative tangenti formano coll'asse polare angoli eguali  $a \pm \sqrt{a/b}$ ; la curva ha poi sull'asse stesso infiniti punti doppi, quelli cioè per cui  $\omega = k\pi$ ,  $k$  essendo un intero positivo o negativo; per  $k = 0$  si ha invece un punto semplice con la tangente perpendicolare all'asse polare. Essendo la sunnormale polare espressa da  $S_n = -2b\omega$  si vede che *nella spirale di Galileo il luogo degli estremi delle sunnormali polari è una spirale d'Archimede*. Altre proprietà non vennero sinora avvertite nella spirale in discorso, la quale non sembra possedere che un interesse storico.

La spirale di Galileo è caso particolare di un'altra curva fisico-matematica, alla quale il Varignon<sup>2)</sup> pervenne generalizzando quella questione che vedemmo (Vol. I, p. 364) Leibniz avere proposto nel corso della sua celebre disputa con i Cartesiani. È la curva isocrona nell'ipotesi che il centro della terra si trovi, non più all'infinito, ma in un punto a distanza finita. Mediante considerazione che qui non importa riferire il citato geometra francese ottenne come equazione differenziale della curva in questione in coordinate polari la seguente:

$$(1) \quad \frac{l\sqrt{a}}{c} d\omega = \frac{\sqrt{\rho-a} d\rho}{c-\rho},$$

ove  $a$ ,  $c$ ,  $l$  sono costanti positive date. L'integrazione di questa equazione è possibile, ma il Varignon non la effettuò, e così mancò di fare una distinzione importante, quella cioè dei tre casi  $c > a$ ,  $c = a$  e  $c < a$ .

I. Se  $c > a$  si ponga

$$\rho = a + u^2, \quad c = a + k^2;$$

<sup>1)</sup> Cfr. le osservazioni di P. TANNERY in *L'Intermédiaire des mathématiciens*, T. III, 1896, p. 78 e 213.

<sup>2)</sup> Vedi *Méthode pour trouver des courbes le long desquelles un corps tombant, s'approche ou s'éloigne de l'horizon en telle raison des tems qu'on voudra, et dans quelque hypothèse de vitesses que ce soit etc.* (Mém. de Paris, 1699).

la (1) diverrà:

$$\frac{l\sqrt{a}}{c} d\omega = d u \left\{ k \left[ \frac{1}{u+k} - \frac{1}{u-k} \right] - 1 \right\};$$

questa s'integra subito e diviene (con una scelta opportuna della costante d'integrazione)

$$\frac{l\sqrt{a}}{c} \omega = k \log \frac{u+k}{u-k} - u,$$

ossia riponendo per  $u$  e  $k$  i loro valori

$$(2) \quad \frac{l\sqrt{a}}{c} \omega = \sqrt{c-a} \log \frac{\sqrt{\rho-a} + \sqrt{c-a}}{\sqrt{\rho-a} - \sqrt{c-a}} - \sqrt{\rho-a},$$

equazione che, sott'altra forma venne stabilita per la prima volta da L. Mascheroni<sup>1)</sup>. Siccome facendo  $\rho = c$  quest'equazione dà  $\omega = \infty$ , così è chiaro che la curva fa attorno al polo infiniti giri. Scriviamo la (2) come segue

$$\frac{l\sqrt{a}}{c\sqrt{c-a}} \omega = \log \frac{\sqrt{\frac{\rho-a}{c-a}} + 1}{\sqrt{\frac{\rho-a}{c-a}} - 1} - \sqrt{\frac{\rho-a}{c-a}};$$

ponendo allora  $\sqrt{\rho-a} = \theta$  vedremo che, invece della (2), si può assumere come rappresentazione analitica della curva la seguente coppia di equazioni:

$$(3) \quad \rho = a + (c-a)\theta^2, \quad \omega = \frac{c\sqrt{c-a}}{l\sqrt{a}} \left[ \log \frac{\theta+1}{\theta-1} - \theta \right]$$

II. Se  $c = a$  la (1) diviene

$$\frac{l}{\sqrt{a}} d\omega + \frac{d\rho}{\sqrt{\rho-a}} = 0;$$

<sup>1)</sup> Si veggia un foglio diretto *Al Nobile Signor Achille Alessandri* e datato da Bergamo, 19 settembre 1782 e la nota di G. LORIA, *Mascheroni contro Varignon* (Contributi alla biografia di L. Mascheroni, Bergamo 1904).

integrandola se ne trae

$$(4) \quad \varrho = a + \frac{l^2}{4a} \omega^2,$$

che rappresenta una spirale di Galileo.

III. Se finalmente  $c < a$ , porremo

$$a = c + k^2, \quad \varrho = a + u^2;$$

la (1) diverrà quindi

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c} d\omega + du - k^2 \frac{du}{u^2 + k^2} = 0;$$

onde, con un'opportuna scelta della costante d'integrazione,

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c} \omega + u - k \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{u}{k} = 0,$$

ossia, restituendo a  $u$  e  $k$  i loro valori,

$$(5) \quad \frac{l\sqrt{a}}{2c} \omega + \sqrt{\varrho - a} - \sqrt{a - c} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\varrho - a}}{\sqrt{a - c}} = 0$$

Quest'equazione è soddisfatta da  $\varrho = a$ ,  $\omega = 0$  onde la curva parte da un punto dell'asse polare. Scrivendo la (5) come segue:

$$\frac{l\sqrt{a}}{2c\sqrt{a-c}} \omega = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\varrho - a}{a - c}} - \sqrt{\frac{\varrho - a}{a - c}}$$

e ponendo  $\sqrt{\frac{\varrho - a}{a - c}} = \theta$ , si vedrà che la curva in questione può, nel caso presente rappresentarsi mediante queste due equazioni:

$$(6) \quad \varrho = a + (a - c) \theta^2, \quad \omega = \frac{2c\sqrt{a-c}}{l\sqrt{a}} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} \theta - \theta)$$

Emerge dalle equazioni (3) (4) (6) che l'*isocrona di Varignon* è una curva simmetrica rispetto ad un asse (l'asse polare); lasciamo al lettore di farne una più minuta discussione e di dimostrare che è una curva panalgebraica.

208. In condizioni non molto dissimili si trovano le  $\infty^2$  curve rappresentate, al variare delle costanti  $a$  e  $p$ , dall'equazione

$$(3) \quad (\varrho - a)^2 = 2ap\omega;$$

quando in particolare  $a$  tende a 0 e contemporaneamente  $p$  tende a  $\infty$  in modo che sia  $\lim (2ap) = b^2/2\pi$ , ove  $b$  è una nuova costante finita, la (3) diviene

$$\varrho^2 = b^2 \frac{\omega}{2\pi},$$

e rappresenta una spirale di Fermat (p. 45).<sup>1)</sup> Le curve rappresentate dall'equazione (3) vennero considerate da Giacomo Bernoulli<sup>2)</sup> il quale (grazie all'analogia dell'equazione (3) con quella di una parabola) chiamò una qualunque di esse « parabola helicoides, vel, si mavis, spiralis parabolica »; i posteri diedero la preferenza al nome di *spirale parabolica* che noi pure adopereremo. Le curve di cui si tratta presentano forme differenti a seconda del valore che ha il rapporto  $a/p$  (il Bernoulli ha specialmente considerato il caso  $a/p = 4\pi$ ); si può sempre supporre quelle costanti positive, allora i punti reali della curva corrispondono a valori positivi di  $\omega$ , a ciascuno spettano due valori di  $\varrho$  eguali e di segni contrari, onde tutte le spirali paraboliche hanno centro.

Alle spirali paraboliche il Bernoulli applicò sin dal 1691 i metodi che Leibniz cominciò nel 1684 a fare conoscere al mondo matematico. Così egli ne determinò la tangente osservando che la sunnormale polare è data da  $d\varrho/d\omega = ap/(\varrho - a)$ , espressione di facile costruzione e che mostra essere  $\varrho^2(\omega - \pi/2) = ap/2$  l'equazione del luogo degli estremi delle sunnormali polari, essere quindi tal luogo un *lituus* (v. n. 211). Similmente il Bernoulli determinò i valori massimi e minimi di  $\varrho$  e  $\omega$ ; la prima ricerca egli ridusse allo studio di un'equazione algebrica fra  $\omega$  e  $\operatorname{tg} \omega$ ; ora se  $\omega$  fosse legato a  $\operatorname{tg} \omega$  da una relazione algebrica, l'equazione precedente si potrebbe ridurre ad essere algebrica in  $\omega$ ; le sue radici sarebbero in numero finito e quindi in numero finito sarebbero pure i valori estremi di  $\varrho$ ; ma la forma della spirale parabolica prova invece che  $\varrho$  ammette infiniti massimi, onde è assurda l'ipotesi che fra  $\omega$  e  $\operatorname{tg} \omega$  passi una relazione algebrica; in particolare, facendo  $\omega = \pi/4$  si vede che  $\pi$  non può essere radice di un'equazione algebrica<sup>3)</sup>. È questo forse

<sup>1)</sup> Scrivendo la (3) sotto la forma  $\rho = a + \sqrt{2ap\omega}$  si vede che in generale essa rappresenta una concoide della spirale di FERMAT  $\rho^2 = 2ap\omega$ .

<sup>2)</sup> *Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis etc.* (Acta erud. Gennaio 1691 oppure *Jacobi Bernoulli Opera*, T. I, p. 431; cfr. *Joh. Bernoulli Opera*, T. I, p. 46-47).

<sup>3)</sup> Il BERNOULLI aggiunge che si dimostrerebbe similmente l'impossi-

il più antico tentativo per dimostrare l'impossibilità di risolvere algebricamente il problema della quadratura del circolo.

I flessi della spirale (3) si ottengono (sempre secondo il citato autore) combinando questa equazione con la seguente

$$\varrho^2 + 2 \left[ \frac{d\varrho}{d\omega} \right]^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\omega^2} = 0,$$

cioè

$$(a - \varrho)^5 - 2a(a - \varrho)^4 + a^2(a - \varrho)^3 + 3p^2 a^2(a - \varrho) - p^3 a^3 = 0.$$

L'analoga ricerca dei punti doppi non venne affrontata dal Bernoulli ma può compiersi senza difficoltà. Per converso egli si è occupato della quadratura della curva; il controllare le sue conclusioni è facilissimo osservando che

$$\frac{1}{2} \int \varrho^2 d\omega = \frac{1}{2ap} \int \varrho^2 (\varrho - a) d\varrho = \frac{\varrho^3}{2p} \left[ \frac{\varrho}{4a} - \frac{1}{3} \right] + \text{Cost.},$$

onde, supposto  $2p = a/2\pi$  e preso l'integrale fra  $\varrho = 0$  e  $\varrho = a$  si ottiene  $1/6 \pi a^2$ , come appunto trovò Bernoulli.

Assai più arduo ed interessante è il problema della rettificazione della spirale parabolica; Giacomo Bernoulli, occupandosene, scoperse una proprietà notevole di essa — che si riscontra anche in altre curve —<sup>1)</sup> di cui vogliamo dare notizia. Detto  $s$  l'arco della spirale la (3) dà:

$$s = \int d\varrho \sqrt{1 + \left[ \varrho \frac{d\omega}{d\varrho} \right]^2} = \int d\varrho \sqrt{1 + \varrho^2 \left[ \frac{\varrho - a}{pa} \right]^2},$$

onde il calcolo di  $s$  dipende da integrali ellittici. Ora se s'introduce la considerazione della curva rappresentata dall'equazione seguente:

$$y^2 = 1 + \frac{x^2(x-a)^2}{a^2 p^2},$$

si vede che la rettificazione della spirale parabolica equivale alla quadratura di questa curva. Questa curva, o meglio quella affine ad essa rappresentata dall'equazione

bilità di quadrare algebricamente « ullius curvae geometricae in se redeuntis », affermazione su cui è lecito nutrire qualche dubbio.

<sup>1)</sup> Cfr. ENNEPER, *Elliptische Functionen*, II Aufl. (Halle a. S., 1890), p. 526 e seg.

$$(4) \quad y^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{x^2(x-a)^2}{4p^2}$$

si può costruire nel modo seguente: « Sia  $C$  (fig. 8) il centro di un cerchio di diametro  $a$  tangente nell'origine all'asse delle  $y$ . Presi ad arbitrio sopra  $Ox$  i segmenti  $CW = CZ$  e condotte nel cerchio le corrispondenti ordinate  $WT$  e  $ZX$  si determini la intersezione  $S$  di  $TX$  coll'asse delle  $y$ . Sia poi  $A$  un punto dell'asse delle  $x$  tale che si abbia  $OA = 2p$  e si porti sullo stesso asse  $OK = OS$ ; si

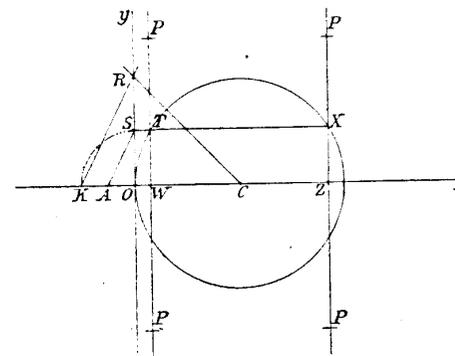


Fig. 8.

conduca  $AS$  e da  $K$  la parallela a questa retta; se  $R$  ne è l'intersezione con  $Oy$ , portando il segmento  $CR$  a partire risp. da  $W$  e  $Z$  sopra le rette  $WT$  e  $ZX$  si otterranno quattro punti della curva (4). Lasciamo al lettore di dimostrare ciò; e notiamo che emerge dalla costruzione che la curva (4) è simmetrica rispetto alla retta  $x = a/2$ , onde contiene infinite coppie di aree equivalenti; ciò prova che la spirale parabolica malgrado l'irregolarità di forma che presenta contiene infinite coppie di archi fra loro equali: è questa la proprietà geometrica più cospicua in essa sinora rilevata<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Ulteriori ragguagli sopra la curva ora studiata e sui lavori che vi si riferiscono si troveranno nella monografia di G. D. E. WEYER, *Ueber die parabolische Spirale* (Kiel und Leipzig, 1894).

CAPITOLO V

Altre spirali algebriche.

209. Il vocabolo spirale, che usammo nelle pagine precedenti, risale all'antichità più remota essendovene tracce nel sistema astronomico di Platone<sup>1)</sup>; ma il corrispondente concetto generale non raggiunse ancora quel grado di precisione che si esige da qualunque concetto matematico<sup>2)</sup>; noi provvisoriamente chiameremo spirali<sup>3)</sup> tutte le curve la cui rappresentazione analitica più semplice e conveniente si ottiene adoperando coordinate polari. Tali sono le curve aventi per equazione

$$\rho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)},$$

ove  $f$  e  $\varphi$  sono funzioni razionali delle linee trigonometriche dell'angolo  $\omega$  e dei multipli e summultipli del medesimo<sup>4)</sup>; tali sono le

<sup>1)</sup> V. A. SÉDILLOT, *De l'origine de la semaine planétaire et de la spirale de Platon* (C. R., 7 dicembre 1872, p. 1646), e TH. H. MARTIN, *Hypothèse astronomique de Platon* (Mém. de l'Acad. des Inscriptions et Belles Lettres, T. XXX, I Parte, 1881), p. 46-48. Va notato che nel Cap. XXI dell'*Astronomia* di TEONE SMIRNEO (v. THEON DE SMYRNE, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, éd. Dupuis, Paris 1892, p. 328) si parla di un'altra spirale astronomica; è di forma analoga alla sinusoidale essendo descritta da un cavallo obbligato a restare fra due barriere: v. anche MARTIN, *Mem. cit.*, p. 49.

<sup>2)</sup> V. gli articoli *Spirale* dell'*Encyclopédie méthodique*, del *Mathematisches Wörterbuch* dell'HOFFMANN e del *Dictionnaire des Sciences mathématiques* del MONTFERRIER. Cfr. anche BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques, Partie complémentaire* (Bar Le-Duc, 1899), p. 166.

<sup>3)</sup> Altri adopera il nome di curve radiali (v. MONTFERRIER, *op. cit.*, T. II, p. 410).

<sup>4)</sup> G. FOURET, *Sur la construction de la tangente à la courbe*  $\rho = \frac{f(\omega)}{\omega + \varphi(\omega)}$ ,  $f(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  désignant des fonctions rationnelles des lignes trigonométriques de l'angle  $\omega$ , de ses multiples ou de ses parties aliquotes (Nouv. Ann., 2<sup>e</sup> Serie, T. XIX, 1880).

curve rappresentate da un'equazione algebrica fra  $\rho$  e  $\omega$  e che si possono opportunamente chiamare spirali algebriche<sup>1)</sup>.

Sia (1)  $f(\rho, \omega) = 0$  l'equazione di una spirale algebrica;  $f$  sia di grado  $p$  in  $\omega$  e di grado  $n$  complessivamente. Essendo

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \omega = \text{arc tg } \frac{y}{x},$$

si vede che è

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{\rho^2} \left\{ \rho x \frac{\partial f}{\partial \rho} - y \frac{\partial f}{\partial \omega} \right\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\rho^2} \left\{ \rho y \frac{\partial f}{\partial \rho} + x \frac{\partial f}{\partial \omega} \right\}$$

e che quindi

$$(2) \quad (X - x) \left\{ \rho x \frac{\partial f}{\partial \rho} - y \frac{\partial f}{\partial \omega} \right\} + (Y - y) \left\{ \rho y \frac{\partial f}{\partial \rho} + x \frac{\partial f}{\partial \omega} \right\} = 0$$

è l'equazione della tangente alla spirale nel punto  $(x, y)$ .

Il lettore potrà facilmente dimostrare che per una tale spirale il luogo degli estremi delle sottotangenti o sottonormali polari è un'altra spirale analoga, proposizione generale di cui già incontrammo e troveremo qualche caso speciale.

Eliminando da questa equazione  $\omega$  tenendo conto della equazione  $f(\rho, \omega) = 0$  e scrivendo per  $\rho$  il suo valore  $\sqrt{x^2 + y^2}$  si otterrà l'equazione del luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte alla curva dal punto  $(X, Y)$ ; così si giunge sempre ad un'equazione algebrica, onde tutte le spirali algebriche sono curve pналgebriche; ma le caratteristiche di questi hanno varie espressioni a secondo dei casi.

I. Se nella (2) non entra  $\omega$  essa rappresenta senz'altro il luogo suddetto. Tale circostanza si verifica quando sia

<sup>1)</sup> Questo nome è adoperato nel senso indicato da W. RULF nell'articolo *Geometrische Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der algebraischen Spiralen* (Monatshefte, T. III, 1892). Invece il SYLVESTER lo usa (*Philosophical Magazine*, 4<sup>a</sup> Serie, T. 36, 1868) per indicare le curve tali che la lunghezza della perpendicolare calata dal polo sulla tangente sia una funzione algebrica dell'angolo di contingenza; in particolare si possono considerare le spirali intere, le quali sono le successive evolventi di circolo e di cui tratteremo più avanti.

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \rho x \frac{\partial f}{\partial \rho} - y \frac{\partial f}{\partial \omega} \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \rho y \frac{\partial f}{\partial \rho} + x \frac{\partial f}{\partial \omega} \right] = 0$$

cioè

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \omega} = \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = 0,$$

cioè quando sia  $f = a\omega + \varphi(\rho)$ : l'esempio più semplice di siffatte curve è offerto dalla spirale d'Archimede. Se nella (2) non vi sono che potenze pari di  $\rho$ , essa è razionale in  $x, y$  onde rappresenta una curva di un ordine eguale al grado  $m$  della (2) in  $x, y$  passante semplicemente pel punto  $(X, Y)$  onde la curva fa parte di un sistema avente per caratteristiche 1 e  $m - 1$ . Ma se nella (2) vi sono anche potenze dispari di  $\rho$  è necessaria un'elevazione a quadrato, eseguita la quale si vede che le caratteristiche del sistema sono 2 e  $2(m - 1)$ .

II. Se invece nella (2)  $\omega$  entra al grado  $q$ , l'eliminazione di  $\omega$  fra le (1) e (2) eseguita col metodo dialitico di Sylvester conduce ad un'equazione il cui primo membro è un determinante d'ordine  $p + q$  in cui gli elementi delle prime  $q$  orizzontali hanno ciascuno uno dei fattori  $X - x, Y - y$ ; quindi, se quel primo membro non contiene che potenze pari di  $\rho$ , il luogo di cui ci occupiamo passa  $q$  volte pel punto  $(X, Y)$ , in caso diverso vi passerà  $2q$  volte; la spirale fa dunque parte di un sistema in cui una caratteristica è  $q$  o  $2q$ ; l'altra caratteristica si deduce dalla semplice ispezione della suddetta equazione risultante, razionalizzata se è necessario.

Le spirali algebriche sono suscettibili di una generazione stereometrica analoga a quella segnalata per la spirale d'Archimede (p. 40). Si consideri, infatti, l'elicoide-conoide avente per equazione

$$\frac{2\pi z}{p} = \text{arc tg } \frac{y}{x}$$

e lo si tagli con la superficie di rivoluzione coassiale

$$f(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0.$$

La curva d'intersezione si proietterà sul piano  $xy$  nella linea

$$f \left[ \frac{p}{2\pi} \text{arc tg } \frac{y}{x}, \sqrt{x^2 + y^2} \right] = 0;$$

ora introducendo coordinate polari  $\rho, \omega$  questa diviene

$$f \left[ \frac{p\omega}{2\pi}, \rho \right] = 0,$$

onde, se  $f$  è una funzione algebrica, algebrica sarà pure la spirale così rappresentata; come appunto si è asserito.

**210.** Alla grande categoria delle spirali algebriche appartengono tutte le curve studiate nei due Capitoli precedenti; ma in essa trovano ancora altre non meno notevoli al cui studio ci volgiamo ora.

Se si sottopone una spirale d'Archimede ad una trasformazione per raggi vettori reciproci avente per centro il polo della curva, si ottiene una curva rappresentabile in coordinate polari col mezzo di un'equazione della seguente forma:

$$(3) \quad \rho \omega = a.$$

Essa incontrasi — fra altre più generali — in una memoria di Varignon, presentata all'Accademia di Parigi nel 1704 ma pubblicata soltanto nel 1722<sup>1)</sup>; essa fu poi scoperta anche da Giovanni Bernoulli, il quale, in una lettera scritta in francese all'Hermann addì 7 ottobre 1710 la chiamò *spirale hyperbolique*<sup>2)</sup>, e tre anni appresso, dopo di averne avvertite le analogie e le differenze con la spirale d'Archimede, scrisse: « ita ut non incongrue haec spiralis vocari possit *Hyperbolica*, vel etiam *Archimedeae inversa*; utpote, quae cum *Archimedeae ordinaria* hoc commune habet, quod in utraque distantiae punctorum ab umbilico sint proportionales circulationibus emensis, in *Archimedeae vulgari directe*, in nostra vero *inverse* »<sup>3)</sup>. Venne generalmente adottato il nome di *spirale iperbolica*, consigliato all'analogia fra l'equazione (3) e quella dell'iperbole riferita agli asintoti.

L'equazione (1) dimostra che a valori di  $\omega$  eguali e di segni contrari corrispondono valori di  $\rho$  pure eguali e di segni contrari, onde la spirale iperbolica è una curva simmetrica rispetto all'asse polare secondario; su questo si trovano infiniti punti doppi della curva (fig. 9). Facendo tendere  $\omega$  a  $\pm \infty$ ,  $\rho$  tende a 0 onde il polo è un punto asintotico della curva; facendo invece  $\omega = 0$  si ottiene  $\rho = \infty$  onde la curva passa pel punto all'infinito dell'asse polare; e siccome la (1) dà

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \rho = \lim_{\omega \rightarrow 0} (\rho \sin \omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[ a \frac{\sin \omega}{\omega} \right] = a,$$

così la retta parallela all'asse polare e distante da questo della lunghezza  $a$  è un asintoto della curva.

<sup>1)</sup> Riguardo a questo lavoro di VARIGNON v. il Cap. I del Libro seguente.

<sup>2)</sup> Joh. Bernoulli Opera omnia, T. 1, p. 480.

<sup>3)</sup> Id., p. 552.

La sotttangente polare è data da  $S_t = \rho^2 : d\rho/d\omega = -a$ ; perciò: nella spirale iperbolica (1) il luogo degli estremi delle sotttangenti polari è il cerchio di raggio  $a$  col centro nel polo; donde una semplicissima costruzione della tangente. A questo proposito noteremo che in coordinate cartesiane la curva (1) è rappresentata dalla equazione

$$\sqrt{x^2+y^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} y/x - a = 0$$

onde la sua tangente nel punto  $(x, y)$  lo è dall'altra

$$(X-x) \{ax - y\sqrt{x^2+y^2}\} + (Y-y) \{ay + x\sqrt{x^2+y^2}\} = 0;$$

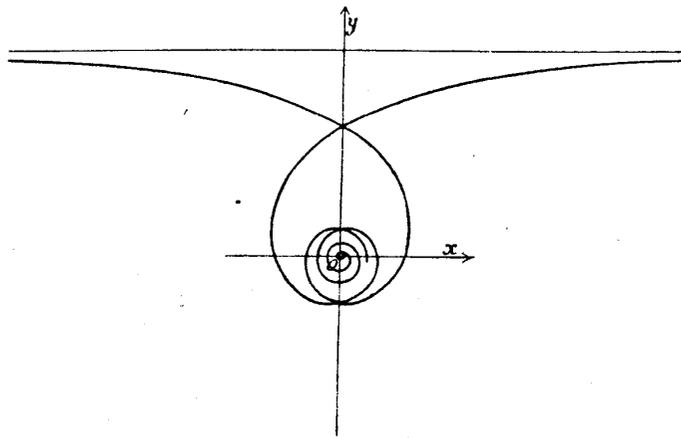


Fig. 9. — Spirale iperbolica.

supposto quindi dato il punto  $P$  di coordinate  $X, Y$ , se ne deduce agevolmente che: i punti di contatto delle tangenti che si possono condurre da un punto qualunque  $P$  del piano ad una spirale iperbolica appartengono ad una curva di quarto ordine avente  $P$  per punto doppio; per conseguenza qualunque spirale iperbolica fa parte di un sistema di caratteristiche 2, 2. Se  $P$  trovasi all'infinito il luogo dei punti di contatto è una curva kappa. L'area  $A$  del settore compreso fra un arco di spirale ed i raggi vettori dei punti estremi è dato da

$$A = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\Omega} \rho^2 d\omega = \frac{a^2}{2} \left[ \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\Omega} \right];$$

onde, quando  $\Omega$  tende a  $\infty$ ,  $A$  si accosta indefinitamente al valore

$a^2/2\omega_0$ , sempre finito se  $\omega_0 \neq 0$ . Invece pel differenziale dell'arco si ha

$$ds = d\omega \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2} = -\frac{a\sqrt{a^2+\rho^2}}{\rho} d\rho$$

onde

$$s = \frac{a}{2} \log \frac{\sqrt{a^2+\rho^2} + a}{\sqrt{a^2+\rho^2} - a} - \sqrt{a^2+\rho^2} + \text{cost.},$$

il che dimostra che la rettificazione della spirale iperbolica dipende da logaritmi.

Sia  $\mu$  l'angolo che la tangente forma col raggio vettore e  $R$  il raggio di curvatura. Si trova agevolmente

$$\operatorname{sen} \mu = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\omega)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad R = \frac{a}{\omega} \left\{ \frac{\sqrt{1+\omega^2}}{\omega} \right\}^3 \quad 1),$$

donde, eliminando  $\omega$ ,

$$\rho/R = \operatorname{sen}^3 \mu;$$

si potrebbe dimostrare che questa relazione è caratteristica per la spirale iperbolica <sup>2)</sup>.

Fra la spirale iperbolica e la cocleide intercede una relazione semplicissima che va rilevata. Si consideri un punto qualunque  $M(\rho, \omega)$  della curva (3), si conduca da esso la parallela all'asse polare e si prenda su di essa  $MM_1 = MO$ ; il luogo del punto  $M_1(\rho_1, \omega_1)$  è una cocleide. Si ha infatti

$$\omega_1 = \frac{\pi + \omega}{2}, \quad \rho_1 = 2\rho \operatorname{sen} \frac{\omega}{2},$$

ossia

$$\omega = 2\omega_1 - \pi, \quad \rho = \frac{\rho_1}{2 \operatorname{sen}(\omega_1 - \pi/2)};$$

sostituendo nella (3) si trova

$$\rho_1 \left[ \omega_1 - \frac{\pi}{2} \right] = a \operatorname{sen} \left[ \omega_1 - \frac{\pi}{2} \right]$$

che rappresenta una cocleide, come erasi affermato.

<sup>1)</sup> Per la relativa costruzione, v. BALITRAND, *Construction du centre de courbure de la spirale hyperbolique* (Nouv. Ann. Math., IV Ser., T. XVI, 1916).

<sup>2)</sup> TISSERAND, *Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infini-tésimal*, II ed. (Paris 1895), p. 310.

$$\frac{x}{-a \cos \omega} = \frac{y}{-a \sin \omega} = \frac{z - \lambda}{-ka\omega} = -\frac{1}{1 + \lambda}$$

Ma vi è anche una notissima curva gobba avente con la spirale iperbolica una relazione intima. Si consideri infatti l'elica di equazioni:

$$x = a \cos \omega, \quad y = a \sin \omega, \quad z = ka\omega;$$

proiettandola da un punto qualunque dell'asse, p. es. da quello di ordinata  $\zeta$ , si ottiene una superficie conica che può rappresentarsi mediante le equazioni

$$x = \frac{a \cos \omega}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{a \sin \omega}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{ka\omega + \lambda \zeta}{1 + \lambda},$$

$\lambda$  essendo un nuovo parametro. La traccia di questo cono sul piano  $xy$  si ottiene facendo  $z = 0$  cioè  $\lambda = -ka\omega/\zeta$ , onde è rappresentata dalle equazioni

$$x = \frac{a \cos \omega}{1 - ka\omega/\zeta}, \quad y = \frac{a \sin \omega}{1 - ka\omega/\zeta}.$$

Ora da queste si deduce

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{1 - ka\omega/\zeta};$$

ossia, ponendo

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \varrho, \quad 1 - \frac{ka\omega}{\zeta} = \varphi, \quad \varrho \varphi = a;$$

dunque: una spirale iperbolica è la proiezione di un'ordinaria elica cilindrica fatta da un punto dell'asse del cilindro di rotazione sul quale essa è tracciata sopra un piano perpendicolare all'asse stesso<sup>1)</sup>.

### 211. Le equazioni

$$\varrho_1 = \frac{a}{\omega - 1}, \quad \varrho_2 = \frac{a}{\omega + 1}$$

rappresentano evidentemente due spirali iperboliche eguali e con lo stesso polo. Cerchiamone la conoidale (Vol. I, p. 172) ponendo  $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$  ed otterremo la curva

$$(4) \quad \varrho = \frac{2a}{\omega^2 - 1},$$

la quale venne incontrata risolvendo il seguente problema: trovare

<sup>1)</sup> TH. OLIVIER, Journ. de l'Ec. pol., XXII Cah., 1833, p. 108.

una curva piana tale che, quando la si faccia muovere con la condizione di toccare sempre una data retta, un suo punto descriva una circonferenza di raggio  $a$  tangente a quella retta<sup>1)</sup>. È notevole che questa curva è rettificabile elementarmente: infatti dalla (4) traesi

$$\frac{ds}{d\varrho} = \frac{\varrho + a}{\sqrt{\varrho^2 + 2a\varrho}}$$

onde integrando

$$s = \sqrt{\varrho^2 + 2a\varrho};$$

detto poi  $R$  il raggio di curvatura si trova<sup>2)</sup>

$$R = \varrho \left[ \frac{a + \varrho}{a} \right]^2;$$

se ne deduce l'equazione intrinseca:

$$R = \frac{(\sqrt{a^2 + s^2} - a)(a^2 + s^2)}{a^2}$$

Ad un'altra spirale algebrica si arriva cercando la curva tale che l'area limitata da un suo arco e dai raggi vettori negli estremi sia proporzionale al logaritmo del rapporto dei raggi vettori stessi. È questo un problema che R. CÔTES si è proposto ed ha risolto come segue<sup>3)</sup>: Le condizioni del problema si traducono subito nell'equazione

$$\frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \varrho^2 d\omega = a^2 \log \frac{\varrho_1}{\varrho_0}$$

Differenziando si trae:

$$d\omega = 2a^2 \frac{d\varrho}{\varrho^3}$$

onde integrando

$$\omega - \alpha = -\frac{a^2}{\varrho^2}.$$

Ponendo quindi  $\alpha - \omega = \varphi$  si trova

$$(5) \quad \varrho^2 \varphi = a^2$$

<sup>1)</sup> R. FABRI, *Sulle curve cicloidalì* (Atti dell'Acc. Pont. dei Nuovi Lincei, T. X, 1856).

<sup>2)</sup> È consigliabile applicare qui la formola: data dal SERRER (*Calcul différentiel*, II éd., Paris 1879, p. 305).

<sup>3)</sup> *Harmonia mensurarum* (Cambridge, 1722), p. 85.

come equazione della curva cercata. Questa è una curva simmetrica rispetto al polo, il quale ne è un punto asintotico; i punti reali di questa si ottengono attribuendo a  $\varphi$  valori positivi (fig. 10). Trasformandola per raggi vettori reciproci si ottiene, se il centro della trasformazione coincide col polo della curva,

$$\rho^2 = b^2 \omega$$

che rappresenta una spirale parabolica di Fermat del 2° grado; per tal fatto la curva rappresentata dalla (5) si chiama talvolta *spirale parabolica inversa*<sup>1)</sup>; più diffuso è il nome di *lituus* (bastone ricurvo) usato dal Cotes, che equivale a quello di *tromba* adoperato da G. Sacchi<sup>2)</sup>. Siccome la (5) dà per  $\varphi = \infty$ ,  $\rho = 0$  così il polo è un punto asintotico della curva in questione; ne è un flesso

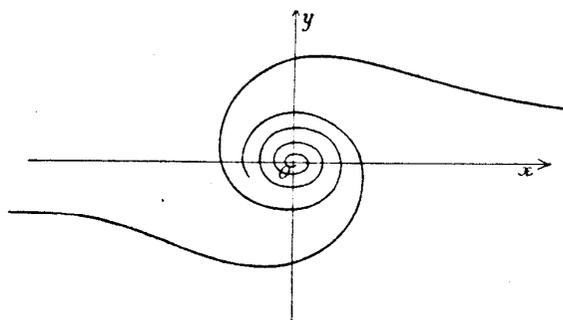


Fig. 10. — Lituus di R. Cotes.

invece il punto di coordinate  $\varphi = 1/2$ ,  $\rho = a\sqrt{2}$ ; ecc. Particularizzando il procedimento indicato nel n. 209 si vede che il *lituus* fa parte di un sistema avente per caratteristiche 1 e 2. Finalmente un'immediata conseguenza della (5) è il seguente teorema: Data una serie di cerchi di centro  $O$  ed una retta  $OX$  passante pel loro centro comune, si determina sulla periferia di quello che ha per raggio il segmento  $OA$  della retta  $OX$  un punto  $M$  tale che il settore  $AOM$  valga  $1/2 a^2$ ; il luogo del punto  $M$  è il *lituus* rappresentato dall'equazione (5)<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> SCHLÖMILCH, *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, I Th., 3. Aufl. (Leipzig 1878), p. 106.

<sup>2)</sup> Sulla geometria analitica delle curve piane (Pavia 1854), p. 9. La ragione di questi nomi risulta evidente riflettendo che ordinariamente si considera della curva di cui ci occupiamo solo il ramo corrispondente a valori positivi di  $\rho$  e che Orazio e Virgilio indicano col nome di *lituus* una tromba di ottone ricurva verso il fondo.

<sup>3)</sup> LAISANT, *Nouv. Corr. Mathém.*, Question 251, 1877, p. 87-88; ove la curva è indicata col nome troppo generico di *spirale polare*.

## CAPITOLO VI

### La spirale logaritmica e le curve che ne derivano.

**212.** In una lettera diretta al P. Mersenne il 12 settembre 1638, Descartes, per soddisfare il suo corrispondente, che avevagli chiesto di « plus particulièrement expliquer la nature de la spirale qui représente le plan également incliné » gli comunicò la seguente proprietà di quella curva: « si  $A$  est le centre de la terre, et que  $ANBCD$  soit la spirale, ayant tiré les droites  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  et semblables il y a même proportion entre la courbe  $ANB$  e la droite  $AB$  que entre la courbe  $ANBC$  et la droite  $AC$  ou  $ANBCD$  et  $AD$ , et ainsi des autres. Et si on tire les tangentes  $DE$ ,  $CF$ ,  $BG$  etc. les angles  $ADE$ ,  $ACF$ ,  $ABG$  etc. seront égaux »<sup>1)</sup>. La proprietà con cui Descartes caratterizzò la nuova spirale si traduce subito nell'equazione

$$s/\rho = a,$$

$\rho$  essendo il raggio vettore uscente dal punto  $A$ ,  $s$  l'arco della curva e  $a$  una costante. Differenziando l'equazione precedente e sostituendo a  $ds$  il suo valore  $\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}$  si ottiene

$$d\omega = \sqrt{a^2 - 1} \frac{d\rho}{\rho}$$

donde integrando

$$(1) \quad \rho = c e^{\frac{\omega}{\sqrt{a^2 - 1}}},$$

ove  $c$  è una costante arbitraria. Questa è l'equazione polare della spirale in questione; per la forma della (1) la spirale stessa venne chiamata da Varignon<sup>2)</sup> *spirale logaritmica*, nome che le è rimasto<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> *Oeuvres des Descartes*, ed. ADAM e TANNERY, T. II (Paris 1898), p. 360.

<sup>2)</sup> Cfr. la già nominata memoria di cui diffusamente parleremo nel Cap. I del Libro seguente.

<sup>3)</sup> Meno adoperato è il nome di *Spirale proporzionale* (HOFFMANN, *Math. Wörterbuch*, T. IV, p. 319).

Detto  $\mu$  l'angolo della tangente col raggio vettore, essendo in generale  $\operatorname{tg} \mu = \rho : d\rho/d\omega$ , si ha nel caso attuale

$$(2) \quad \operatorname{tg} \mu = \sqrt{a^2 - 1};$$

$\mu$  è dunque costante, come avvertì il Descartes stesso nel brano surriferito. La spirale logaritmica è dunque una traiettoria obliqua dei raggi di un fascio; per ciò da taluno fu designata col nome di spirale equiangola<sup>1)</sup> e Giacomo Bernoulli asserì « ipsamet etiam esset vera loxodromia<sup>2)</sup>, si terra plane foret ». Questa proprietà della spirale logaritmica dimostra che per condurre ad essa le tangenti da un punto arbitrario del piano basta descrivere (se  $O$  è il polo) su  $PO$  un segmento circolare capace dell'angolo  $\mu$ ; il suo arco taglia la curva nei punti di contatto delle cercate tangenti. Perciò: i punti di contatto delle tangenti condotte ad una spirale logaritmica da un punto qualunque del piano stanno su una circonferenza passante per quel punto ed il polo; ogni spirale logaritmica è dunque panalgebraica e fa parte di un sistema le cui caratteristiche valgono entrambe uno.

Dall'equazione (1) traggonsi subito alcune conseguenze degne di essere rilevate. Anzitutto facendo tendere  $\omega$  a  $-\infty$ ,  $\rho$  tende a 0, dunque il polo è un punto asintotico della spirale logaritmica. Consideriamo quattro punti  $A, B, C, D$  della curva corrispondenti a valori  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  di  $\omega$  tali che  $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ . In forza della (1) si ha, se al solito  $O$  è il polo,

$$\frac{OB}{OA} = \frac{e^{\frac{\beta-\alpha}{\sqrt{a^2-1}}}}{1}, \quad \frac{OD}{OC} = \frac{e^{\frac{\delta-\gamma}{\sqrt{a^2-1}}}}{1},$$

onde, per le fatte ipotesi,

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC};$$

ciò prova che i due triangoli  $AOB$  e  $COD$  sono fra loro simili. Se quindi della spirale si conoscono due punti  $M, N$  e si costruisce su  $ON$  il triangolo  $ONP$  simile al triangolo  $OMN$ , sarà  $P$  un terzo punto della curva, da cui se ne dedurrà un quarto, poi un quinto e così via (fig. 11). Un altro corollario dell'equazione trovata è che al variare della costante  $c$  l'equazione (1) rappresenta infinite curve

<sup>1)</sup> WITHWORTH, *La spirale équiangle. Ses propriétés prouvées géométriquement* (Nouv. Ann., 2<sup>a</sup> Serie, T. VIII, 1869, e IX, 1870).

<sup>2)</sup> È noto che si chiama *loxodromia* una curva sferica segante tutti i meridiani sotto angolo costante; quindi la proiezione stereografica di una loxodromia è una spirale logaritmica.

fra loro identiche. Se infatti si considera la curva

$$\rho = c_1 e^{\frac{\omega}{\sqrt{a^2-1}}},$$

si ponga

$$c_1 = c e^{\frac{\alpha}{\sqrt{a^2-1}}},$$

$\alpha$  sarà un angolo pienamente determinato e si avrà

$$\rho = c e^{\frac{\omega+\alpha}{\sqrt{a^2-1}}},$$

posto quindi  $\omega + \alpha = \omega_1$  si otterrà

$$\rho = c e^{\frac{\omega_1}{\sqrt{a^2-1}}},$$

che paragonata alla (1) mostra la verità dell'enunciato. Segue da questo che la spirale logaritmica si trasforma in una curva eguale per qualunque inversione avente il suo centro nel polo; supposto infatti  $\rho_1 = k^2$  la (1) dà

$$k^2 = c \rho_1 e^{\frac{\omega}{\sqrt{a^2-1}}},$$

onde, posto  $\omega_1 = -\omega$ ,

$$\rho_1 = \frac{k^2}{c} e^{\frac{\omega_1}{\sqrt{a^2-1}}}$$

che rappresenta una curva eguale alla (1).

Similmente si dimostra che la podaria di una spirale logaritmica rispetto al suo polo è una curva ad essa identica.

**213.** Alla spirale logaritmica Evangelista Torricelli pervenne dal canto suo partendo da altre considerazioni: in quale anno egli abbia compiuto tale scoperta non è noto con certezza; ma è probabile che essa sia stata circa contemporanea a quella di Descartes<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Di queste ricerche di TORRICELLI dà notizia il *Racconto d'alcune*

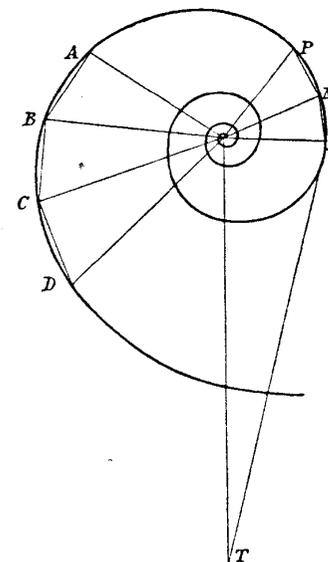


Fig. 11. — Spirale logaritmica.

Della nuova curva il celebre discepolo di Galileo, non soltanto assegnò due generazioni, una geometrica e l'altra meccanica, ma ne scoperse la rettificazione e la quadratura; cosicchè se Fermat, Neil e van Heuraet hanno la gloria di avere per primi rettificata una curva algebrica (Vol. I, p. 64) al Torricelli spetta il merito di avere per primo rettificata una curva matematicamente definita<sup>1)</sup>: vero è che la rettificabilità della spirale logaritmica è immediata conseguenza dell'equazione  $s = a \varrho$  con cui la definì Descartes, ma non lo è per chi prenda le mosse da una delle definizioni torricelliane. Comunque è importante dimostrare qui il teorema di rettificazione dovuto a Torricelli; osserviamo perciò che essendo  $s = a \varrho$  e essendo per la (2)

$$(2') \quad \cos \mu = \frac{1}{a}, \quad \text{si ha} \quad (3) \quad s = \frac{\varrho}{\cos \mu};$$

dunque: *Se in un punto M della spirale logaritmica si conduce la relativa tangente e se ne determina la intersezione T con la retta condotta dal polo O perpendicolare al raggio vettore OM, sarà il segmento MT eguale a tutta la spirale dal punto M sino al polo<sup>2)</sup>.* Questo è uno dei teoremi di Torricelli. Per stabilire l'altro notiamo che dalla (1) si trae:

$$\int_{-\infty}^{\omega} \frac{1}{2} \varrho^2 d\omega = \frac{c^2}{2} \int_{-\infty}^{\omega} \frac{2\omega}{e^{\sqrt{a^2-1}}} d\omega = \frac{\sqrt{a^2-1}}{4} \varrho^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \varrho \cdot \varrho \operatorname{tg} \mu;$$

dunque: *Eseguita la costruzione indicata nel teorema precedente, l'area del triangolo OMT è doppia dell'area descritta dal raggio vettore quando parte dalla posizione OM e fa infiniti giri attorno al polo nel senso negativo; è questa la seconda delle citate proposizioni.*

*proposizioni proposte e passate scambievolmente fra Matematici di Francia dall'anno 1640 in qua, pubblicato dal FABBRONI nel T. I (Pisis, 1788, pagina 345-372) delle Vitae Italarum doctrina excellentium qui Saeculis XVIII et XVIII floruerunt e ristampato nelle Opere di E. Torricelli (Faenza, 1919), T. II, p. 222; v. anche il brano della memoria De spiratibus (Id., T. I, P. II, p. 362 e segg.) e la lettera scritta a M. A. RICCI il 17 marzo 1646 (Id., I. III, p. 360).*

<sup>1)</sup> Cfr. G. LORIA, *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva* (Lincei Rend., 5<sup>a</sup> Serie, vol. 6, II sem., 1897).

<sup>2)</sup> Essendo  $OT = \rho \operatorname{sen} \mu$ ,  $TM = \rho \operatorname{cos} \mu$  si ha pure  $OT/TM = \operatorname{tg} \mu$ , donde si deduce che se una spirale logaritmica rotola senza strisciare sopra una retta il suo polo descrive una linea retta (CATALAN, Nouv. Ann. de math., T. XV, 1856, p. 106).

Ad altri teoremi si perviene notando che la sunnormale  $S_n$ , la sottangente  $S_t$  ed il raggio di curvatura  $R$  della spirale logaritmica sono espresse risp. come segue:

$$(4) \quad S_t = \varrho \operatorname{tg} \mu, \quad S_n = \frac{\varrho}{\operatorname{tg} \mu}, \quad R = \frac{\varrho}{\operatorname{sen} \mu}.$$

Combinando opportunamente queste equazioni fra loro e con la (3) si trova:

$$(5) \quad R = s \operatorname{cot} \mu$$

$$(6) \quad \varrho^2 + S_t^2 = s^2, \quad \varrho^2 + S_n^2 = R^2.$$

La (5) è l'equazione intrinseca della spirale logaritmica; interpretata convenientemente essa dice che se una spirale logaritmica ruzzola sopra di una retta, il luogo dei centri di curvatura nei singoli punti di contatto è una retta<sup>1)</sup>. Delle equazioni (6), la prima esprime nuovamente il teorema di rettificazione di Torricelli, mentre la seconda dice che nella spirale logaritmica il centro di curvatura in un punto si trova nell'estremo della corrispondente sunnormale polare. Dette quindi  $\varrho_1, \omega_1$  le coordinate del centro di curvatura nel punto di coordinate  $\varrho, \omega$  si avrà

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\operatorname{sen} \mu}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} + \omega;$$

eliminando  $\varrho, \omega$  fra queste equazioni e la

$$(1') \quad \varrho = c e^{\omega \operatorname{cot} \mu},$$

che rappresenta la spirale data, si otterrà

$$\varrho_1 = \frac{c}{\operatorname{sen} \mu} e^{\pi \operatorname{cot} \mu / 2} e^{\omega_1 \operatorname{cot} \mu},$$

equazione che, grazie ad un'osservazione generale già fatta (p. 63) rappresenta un'altra spirale logaritmica eguale alla data. Siamo quindi autorizzati a concludere: *la spirale logaritmica è una curva eguale a tutte le sue evolute successive<sup>2)</sup>.*

<sup>1)</sup> MANNHEIM, *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (G. di Lionville, 2<sup>a</sup> Serie, T. IV, 1859, p. 95).

<sup>2)</sup> Fra le spirali logaritmiche reali se ne trovano che sono le loro proprie evolute (cfr. G. SCHEFFERS, *Einführung in die Theorie der Kurven*, III Aufl., Berlin 1923, p. 103); M. ALLÉ osservò (*Ein Beitrag zur Theorie der Evoluten*, Wien. Ber., T. 113, 1904) che sono le uniche curve che siano dotate della detta proprietà.

Sia  $C$  il centro di curvatura della spirale logaritmica nel punto  $M(\rho, \omega)$  e sia  $C'(\rho', \omega')$  il simmetrico di  $C$  rispetto a  $M$ ; il luogo del punto  $C'$  chiamasi *anti-evoluta* della curva data. Essendo  $O M$  mediana del triangolo  $C O C'$  si ha

$$2 R^2 + 2 \rho^2 = S_n^2 + \rho'^2$$

onde, per le (4),

$$\rho' = \rho \sqrt{4 + \cot^2 \mu} = c \sqrt{4 + \cot^2 \mu} e^{\omega \cot \mu};$$

inoltre

$$M C' = M C = \frac{\rho}{\sin \mu}, \quad \frac{M C'}{\sin(\omega - \omega')} = \frac{\rho}{\cos(\omega - \omega' + \mu)},$$

onde

$$\sin \mu \sin(\omega - \omega') = \cos(\mu + \omega - \omega')$$

ossia

$$2 \operatorname{tg} \mu \operatorname{tg}(\omega - \omega') = 1$$

Se ne deduce

$$\omega = \omega' + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\cot \mu}{2} \right]$$

epperò come equazione del luogo del punto  $C'$  si ottiene finalmente

$$\rho' = c \sqrt{4 + \cot^2 \mu} e^{\cot \mu \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\cot \mu / 2)} e^{\omega' \cot \mu};$$

ora questa rappresenta una spirale logaritmica; dunque: *la spirale logaritmica è una curva eguale alla sua antevoluta*. Questa proposizione, al pari della precedente, è dovuta a Giacomo Bernoulli<sup>1)</sup>, il quale di più notò che, se il lume si pone nel polo della spirale logaritmica, anche le caustiche per riflessione e per rifrazione sono

<sup>1)</sup> V. l'articolo: *Lineae cycloides, evolutae, anti-evolutae, causticae, anticausticae, peri-causticae. Earum usus et simplex relatio ad se invicem. Spira mirabilis* (Acta Erud., maggio 1692). I casi segnalati dal Bernoulli non sono gli unici di riproduzione della spirale logaritmica. Fra quelli che gli sfuggirono noteremo il seguente scoperto da HATON DE LA GOUPILLIÈRE (*De la courbe qui est elle-meme sa propre développée*, G. di Liouville, 2ª Serie, T. XI, 1866 o *Mémoires divers*, II ed., Paris 1909): se si cerca una curva la cui podaria sia una curva ad essa simile e fatta rotare di un certo angolo, si giunge ad una spirale logaritmica. Un altro caso emerge dal teorema seguente: La curva d'aberrazione di una spirale logaritmica è un'altra spirale logaritmica (F. J. VAN DEN BERG, *Over Krommingskegelsnede van vlakke kromme lignen*, Amsterdam Verl., 3ª Serie, T. IX, 1892). Cfr. finalmente la Questione 107 proposta dal PECHÉ in Arch. Math. Phys., III Serie, T. VIII, 1904, p. 173 e risolta dal MEISSNER, Id., T. IX, 1905, p. 94.

curve ad essa eguali; impressionato sino all'entusiasmo da queste facoltà di riprodursi posseduta dalla spirale logaritmica il celebre geometra scrisse: « Cum autem ob proprietatem tam singularem tamque admirabilem mire mihi placeat spira haec mirabilis, sic ut ejus contemplatione satiari vix queam; cogitavi, illum ad varias res symbolice repraesentandas non inconcinne adhiberi posse. Quoniam enim semper sibi similem et eandem spiram gignit, utcumque volvatur, evolvatur, radiet; hinc poterit esse vel sobolis parentibus per omnia similis Emblema; *Simillima Filia Matri*: vel (si rem aeternae veritatis Fidei mysteriis accomodare non est prohibitum) ipsius aeternae generationis Filii, qui Patris velut Imago, et ab illo ut Lumen a Lumine emanans, eidem  $\delta\mu\delta\sigma\iota\sigma$  existit, qualiscumque adumbratio. Aut, si mavis, quia Curva nostra mirabilis in ipsa mutatione semper sibi constantissime manet similis et numero eadem, poterit esse vel fortitudinis et constantiae in adversitatibus; vel etiam Carnis nostrae post varias alterationes, et tandem ipsam quoque mortem, ejusdem numero resurrecturae symbolum; adeo quidem, ut si *Archimedem* imitandi hodiernum consuetudo obtineret, libenter Spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum Epigraphe: *Eadem numero mutata resurgo* ».

Per lo studio della spirale logaritmica le equazioni più convenienti sono quelle in coordinate polari (1) o (1') e la equazione intrinseca (5). Va tuttavia notata una conseguenza a cui conduce l'equazione cartesiana. Dalla (1') prendendo i logaritmi si ottiene:

$$\frac{1}{2} \log [(x+iy)(x-iy)] = \log c + \cot \mu \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

o anche

$$\frac{1}{2} \log [(x+iy)(x-iy)] = \log c + \frac{\cot \mu}{2i} \log \frac{iy+x}{iy-x};$$

onde, ponendo  $x+iy = \xi$ ,  $x-iy = \eta$ , otterremo un'equazione della seguente forma:

$$(7) \quad \xi^{\frac{1-i\alpha}{2}} \eta^{\frac{1+i\alpha}{2}} = \text{cost.},$$

la quale prova essere la spirale logaritmica una speciale curva binomia interscedente; vedremo più avanti quanto sia importante quest'osservazione che collega la spirale logaritmica ad altre curve più generali.

Aggiungiamo che se nell'equazione

$$\rho = c e^{\mu\omega}$$

si attribuiscono alle costanti  $c, \mu$  convenienti valori complessi si possono ottenere delle curve, non solo reali, ma anche algebriche<sup>1)</sup>.

**214.** Non ci dilungheremo a descrivere gli strumenti che G. Collins<sup>2)</sup> e Th. Olivier<sup>3)</sup> hanno immaginato per delineare la spirale logaritmica e chiuderemo questo Capitolo menzionando alcune curve che da questa vennero dedotte.

I. Si considerino le due spirali logaritmiche rappresentate dalle equazioni:

$$\varrho_1 = c e^{\omega \cot \mu} \quad \varrho_2 = c e^{-\omega \cot \mu};$$

sono evidentemente due curve eguali, fra loro simmetriche rispetto all'asse polare. Ponendo  $\varrho = \varrho_1 \pm \varrho_2$  si otterranno due nuove curve rappresentate come segue:

$$(8) \quad \varrho = c \cosh(\omega \operatorname{tg} \mu) \quad ; \quad (9) \quad \varrho = c \sinh(\omega \operatorname{tg} \mu);$$

H. Dittrich che per primo le considerò<sup>4)</sup> chiamò la prima *Summenspirale* e la seconda *Differenzenspirale*<sup>5)</sup>; egli se ne servì per rappresentare geometricamente le funzioni iperboliche: queste curve sono le analoghe, nel campo iperbolico, delle rodonee (Vol. I, p. 419); le incontreremo di nuovo più avanti da un altro punto di vista.

II. Se  $z = x + iy$  e  $Z = X + iY$  sono due variabili complesse e si pone

$$Z = \frac{z + 1}{z - 1},$$

fra i punti  $(x, y)$  e  $(X, Y)$  resta stabilita una corrispondenza isogonale involutoria. Essendo

$$X + iY = \frac{x + iy + 1}{x + iy - 1}, \quad X - iY = \frac{x - iy + 1}{x - iy - 1}$$

si deduce

$$X^2 + Y^2 = \frac{(x+1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}, \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y}{X} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x+1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x-1}.$$

<sup>1)</sup> R. BALDUS, *Ueber logarithmische Spiralen, die gleichzeitig algebraische Kurven sind* (Arch. Math. Phys., III Ser., T. XXVIII, 1920).

<sup>2)</sup> *Correspondence of scientific Men of the seventeenth Century etc.*, Vol. I (Oxford 1841), p. 218; cfr. A. FAVARO, *Notizia storica sulle applicazioni della spirale logaritmica* (Bibl. mathem., 1891).

<sup>3)</sup> *Compléments de géométrie descriptive* (Paris 1845), p. 102 e *Mémoires de géométrie descriptive* (Paris 1848), p. 284.

<sup>4)</sup> *Die logarithmische Spirale* (Progr. Breslau, 1872).

<sup>5)</sup> AUBRY (*De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes* (Journ. de math. spéc., IV Serie, T. V, 1896, p. 29) le indicò col nome di *spirales tractrices*.

Chiaminsi ora  $R, \Omega$  le coordinate polari del punto  $(X, Y)$ ; nel piano  $z$  si considerino poi i punti  $(\pm 1, 0)$  e se ne dicano  $\varrho_1$  e  $\varrho_2$  le distanze dal punto generico  $(x, y)$ ; siano finalmente  $\omega_1$  e  $\omega_2$  gli angoli che l'asse delle  $x$  forma con le congiungenti di quei due punti fissi con questo punto mobile. Le ultime equazioni stabilite potranno allora scriversi come segue

$$R = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \quad \Omega = \omega_1 - \omega_2$$

Per conseguenza se si effettua la trasformazione testè definita sulla spirale logaritmica

$$R = \frac{a_1}{a_2} e^{b\Omega}$$

si ottiene la nuova curva rappresentata dall'equazione

$$(10) \quad \frac{\varrho_1}{a_1 e^{b\omega_1}} = \frac{\varrho_2}{a_2 e^{b\omega_2}};$$

ed avente quindi per punti asintotici i due punti fissi  $(\pm 1, 0)$ , essa chiamasi *logarithmische Doppelspirale*<sup>1)</sup>.

III. Se i raggi vettori di una spirale logaritmica  $\varrho = a e^{m\omega}$  si prolungano di una lunghezza costante  $b$ , si ottiene una nuova linea rappresentata dall'equazione

$$(11) \quad \varrho = a e^{m\omega} + b.$$

Essa venne proposta nel 1840 dal conchiliologo C. F. Naumann per rappresentare matematicamente la proiezione ortogonale di una conchiglia sopra un piano perpendicolare all'asse; donde il nome di *Concospirale* con cui è designata. Dal punto di vista matematico la concospirale presenta interesse assai limitato. Due cose però vanno notate. La prima è che siccome la (11) dà

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} (\varrho - b) = 0,$$

così il cerchio di centro  $O$  e raggio  $b$  è un cerchio asintotico della curva. L'altra è che l'equazione (11) al variare delle costanti  $a, b, m$  rappresenta  $\infty^3$  curve fra cui se ne trovano di già note; così per  $b = 0$  si hanno  $\infty^2$  spirali logaritmiche e per  $a = 0$  oppure  $m = 0$

<sup>1)</sup> HOLZMÜLLER, *Ueber die logarithmische Abbildung und die aus ihr entspringenden orthogonalen Curvensysteme* (Zeitschrift, T. XVI, 1871) e *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig 1882), pag. 65.

$\infty'$  circoli; inoltre, posto  $a = -b = \alpha/m$  la (11) diviene

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{\alpha}{m} e^{m\omega} - \frac{\alpha}{m} = \frac{\alpha}{m} \left[ 1 + m\omega + \frac{m^2 \omega^2}{2!} + \dots - 1 \right] = \\ &= \alpha \omega + \frac{m \alpha \omega^2}{2!} + \dots; \end{aligned}$$

se quindi si fa tendere  $m$  a  $0$  si ottiene l'equazione  $\varrho = \alpha \omega$  che rappresenta una spirale d'Archimede; finalmente se si pone  $b = -\lambda a$  la (11) diviene

$$\frac{\varrho}{a} = e^{m\omega} - \lambda;$$

donde, facendo tendere  $a$  a  $\infty$ ,

$$\omega = \frac{1}{m} \log \lambda,$$

equazione di una retta passante per l'origine<sup>1)</sup>.

IV. Come generalizzazioni della spirale logaritmica possono riguardarsi le curve di equazione polare

$$\varrho = \frac{a + b e^{m\omega}}{a' + b' e^{m\omega}}$$

che in casi speciali furono incontrate da O. Schlömilch<sup>2)</sup> e in generale furono studiate da W. Heyman<sup>3)</sup> sotto il nome, difficilmente traducibile di *Anakondaspirelen*. Scrivendo l'equazione precedente sotto la forma

$$\varrho = p + \frac{q}{a' + b' e^{m\omega}}$$

si vede che la curva generale può considerarsi come concoide di

<sup>1)</sup> Ulteriori particolari su la curva in questione e le sue applicazioni si trovano nella Dissertazione di A. H. GRABAU, *Ueber die Naumann'sche Couchospirale und ihre Bedeutung für die Couchilometrie* (Leipzig 1872). Applicazioni della stessa curva alla tecnica sono segnalate nella nota di A. E. MAYER, *Geometrie der Fräserhinterdrehung* (Werkstatlts Technik, T. I, 1926, p. 6).

<sup>2)</sup> *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, II ed., T. II (Leipzig 1874), p. 286-8.

<sup>3)</sup> *Ein Rollenproblem. Die Kurven T und N* (Abhand. und Berichte der Techn. Staatslehranstalten in Chemnitz, 1915).

quella speciale

$$\varrho = \frac{q}{a' + b' e^{m\omega}};$$

applicando a questa una conveniente affinità si arriva a una delle seguenti

$$\varrho = \frac{l}{1 \pm e^{m\omega}};$$

prendendo il segno  $+$  si giunge a una curva di cui il polo è un punto asintotico e il cerchio di centro  $O$  e raggio  $l$  circolo asintotico; prendendo invece il segno  $-$  si ha una curva costituita di due rami aventi per comune asintoto la retta

$$y = -\frac{a}{m}.$$

Tutte le curve di cui si tratta sono quadrabili elementarmente<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> La spirale logaritmica fu incontrata anche nella recente geometria differenziale come curva tale che in ogni suo punto la normale affine faccia un angolo costante con la corrispondente tangente; v. T. KUBOTA, *Ein Problem in der Affingometrie* (Science Report of the Tôhoku Imperial University. Ser. I, Vol. XVI, 1927). Altre spirali che, al pari della logaritmica, non possono dirsi algebriche nel senso dichiarato a p. 52, sono considerate nell'articolo di M. DA COSTA LOBO, *Espiraes reversives* (Ann. Acad. Porto, T. XIII, 1918-9); la più semplice ha per equazione polare  $\rho = l a \operatorname{sen}(\omega/p)$ .

## CAPITOLO VII

## La clotoide.

**215.** L'equazione intrinseca della spirale logaritmica (p. 65) esprime algebricamente che questa è una linea tale che la sua curvatura in un punto qualunque è *inversamente* proporzionale all'arco. Quest'osservazione conduce naturalmente alla ricerca delle curve tali che in un punto qualunque la curvatura è *direttamente* proporzionale all'arco. Di tale ricerca è fatto cenno in un articolo postumo di Giacomo Bernoulli, ma non è ivi esaurita <sup>1)</sup>; essa può effettuarsi facilmente come segue applicando le formole esposte nella nota 3 della pag. 186, Vol. I. Essendo, infatti, per ipotesi

$$(1) \quad Rs = a^2,$$

si ha

$$f(s) = \frac{a^2}{s}, \quad \varphi = \int \frac{ds}{f(s)} = \frac{s^2}{2a^2},$$

onde viceversa

$$s = a\sqrt{2\varphi}$$

e quindi

$$x = \int_0^\varphi \frac{a}{\sqrt{2\varphi}} \cos \varphi \, d\varphi, \quad y = \int_0^\varphi \frac{a}{\sqrt{2\varphi}} \sin \varphi \, d\varphi.$$

Ponendo  $\varphi = \pi v^2/2$  queste equazioni divengono

$$(2) \quad x = a\sqrt{\pi} \int_0^v \cos \frac{\pi v^2}{2} \, dv, \quad y = a\sqrt{\pi} \int_0^v \sin \frac{\pi v^2}{2} \, dv,$$

<sup>1)</sup> *Ipsoenire curva, cujus curvado in singulis punctis est proportionali longitudi arcus id est quae ab appenso pondere flectitur in rectam* (Jac. Bernoulli Opera, p. 1084-1086).

e si ha

$$s = a\sqrt{\pi}v.$$

Gli integrali che qui compaiono sono i ben noti integrali di Fresnel che s'incontrano nella teoria matematica della luce; ed appunto per ottenere una rappresentazione geometrica espressiva dei fenomeni di diffrazione il fisico francese A. Cornu <sup>1)</sup> considerò per primo la curva rappresentata dalle due equazioni (2); solo molto più tardi E. Cesàro <sup>2)</sup> avvertì che essa gode della proprietà espressa dalla equazione (1).

Le equazioni (2) provano che per  $v = 0$  si ha  $x = y = s = 0$  e quindi — per la (1) —  $R = \infty$ ; l'origine è dunque un flesso della curva. Le stesse equazioni (2) provano che a valori di  $v$  eguali e di segni contrari corrispondono valori di  $x$  e  $y$  pure eguali e di segni contrari; dunque la curva è *simmetrica rispetto all'origine*. Facciasi ora tendere  $v$  a infinito: essendo <sup>3)</sup>

$$\int_0^\infty \cos \frac{\pi v^2}{2} \, dv = \int_0^\infty \sin \frac{\pi v^2}{2} \, dv = \frac{1}{2}$$

si vede che il punto

$$A \left[ \frac{a\sqrt{\pi}}{2}, \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \right]$$

è un punto *asintotico della curva*. Un altro punto è il simmetrico  $A'$  di  $A$  rispetto all'origine. La curva consta di due spirali riuentisi nell'origine e simmetriche l'una dell'altra rispetto a questa (fig. 12). Questa forma suggerì al Cesàro il nome di *clotoide* <sup>4)</sup> che la curva è destinata a portare.

Se  $\varepsilon$  è l'angolo di contingenza si ha notoriamente  $R = ds/d\varepsilon$  onde la (1) equivale alla seguente

$$s \, ds = a^2 \, d\varepsilon$$

<sup>1)</sup> *Etudes sur la diffraction: méthode géométrique pour la discussion des problèmes de diffraction* (C. R. T. LXXXVIII, 1874; Journal de Physique, T. III, 1874).

<sup>2)</sup> *Les lignes barycentriques* (Nouv. Ann., 3<sup>a</sup> Serie, T. V, 1886); *Sulla curva rappresentativa dei fenomeni di diffrazione* (Nuovo Cimento, 3<sup>a</sup> Serie, vol. XXVIII, 1890; C. R., T. CX, 1890).

<sup>3)</sup> V. per es. SERRET, *Calcul intégral*, 2<sup>a</sup> ed. (Paris 1880), p. 136.

<sup>4)</sup> V., oltre le memorie citate nella nota 2), *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896), p. 15 e *Elementi di calcolo infinitesimale* (Napoli 1899), p. 334.

onde integrando

$$s^2 = 2 a^2 \varepsilon,$$

equazione di forma analoga all'equazione canonica della parabola. Ciò prova che la clotoide non differisce da una curva molto tempo addietro studiata da A. Peters<sup>1)</sup> e K. C. F. Krause<sup>2)</sup> e da questo ultimo designata (per ragioni facili a comprendersi) col nome di *parabola originaria longitudinaria*.

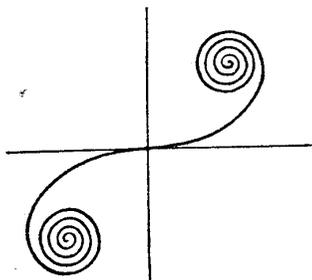


Fig. 12. — Clotoide.

La clotoide gode di molteplici proprietà, la maggior parte delle quali vennero avvertite da E. Cesàro; limitiamoci a enunciare le seguenti: *Nella clotoide il baricentro di un arco qualunque è centro di similitudine per i cerchi osculatori negli estremi dell'arco. La clotoide è l'unica curva in cui il baricentro di un arco qualunque stia sulla congiun-*

*gente dei centri di curvatura negli estremi dell'arco*<sup>3)</sup>.

Le equazioni intrinseche della spirale logaritmica e della clotoide dimostrano che entrambe queste curve sono casi speciali di quelle caratterizzate dall'equazione

$$(3) \quad R = k s^m \quad 4);$$

vedremo tra poco che della stessa categoria fa parte un'altra notevole curva, cioè l'evolvente di circolo.

Queste curve si chiamano *pseudospirali*<sup>5)</sup> e godono la proprietà di avere per evolte delle curve appartenenti alla stessa classe. Applicando infatti alcune formole che stabiliremo più avanti, si vede che l'equazione intrinseca dell'evolvente della curva (3) si ottiene

<sup>1)</sup> *Neue Curvenlehre* (Dresden 1835), p. 173.

<sup>2)</sup> *Nova theoria linearum curvarum* (München, 1835), p. 79.

<sup>3)</sup> Altre si leggono nella nota di H. WIELEITNER, *Die Parallelkurven der Klothoide* (Arch. Math. Phys., III Ser., T. XI, 1907).

<sup>4)</sup> H. ONNEN, *Discussion d'un système de spirales d'après leurs équations essentielles* (Arch. néerland., T. X, 1875) e G. PIRONDINI, *Intorno a una famiglia notevole di linee piane* (G. di Matem., T. XXX, 1892). Queste curve erano già state incidentalmente incontrate dal PUISEUX (v. la seconda parte dei *Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes*, G. di Liouville, T. IX, 1844).

<sup>5)</sup> G. PIRONDINI, *Sur les pseudo-spirales* (Jornal di Teixeira, T. XV, 1905).

eliminando  $s$  fra le due seguenti:

$$R_1 = m k^2 s^{2m-1}, \quad s_1 = k s^m$$

onde è

$$R_1 = m k^{\frac{1}{m}} s_1^{\frac{2m-1}{m}},$$

che è appunto della forma (3).

*s. Addizionale*

## CAPITOLO VIII

## Le cicloidi.

**216.** Il concetto di movimento geometrico, che vedemmo intervenire nelle definizioni della quadratrice di Ippia e Dinocrato (n. 197) e della spirale d'Archimede (n. 203), è germe di un gran numero di curve importanti, a cui sono dedicati il presente Capitolo ed i seguenti quattro.

Quando un cerchio rotola senza strisciare sopra di una retta fissa (*base*) ogni punto del suo piano descrive una linea che si dice *cicloide*, e precisamente cicloide *ordinaria* se il punto generatore appartiene alla periferia del cerchio mobile, *accorciata* se è interno, *allungata* se è esterno. Chi per primo ha considerato questa linea? La questione è malagevole a risolversi; perchè il concepire questa linea non riesce difficile, per esempio a chi contempla il movimento della ruota di un carro; ed un eccitamento a tale concezione può essersi trovato sia cercando di spiegare il paradosso noto sotto il nome di «ruota d'Aristotele», sia nell'osservazione che, se si sapesse costruire geometricamente la cicloide ordinaria, si saprebbe immediatamente rettificare qualunque circonferenza e riuscirebbe ridotto all'analogo problema sulla retta qualunque questione avente per iscopo la divisione di un arco circolare in parti soddisfacenti a condizioni prestabilite. Nulla dunque vieta di supporre che gli antichi abbiano conosciuta la cicloide: un passo di Giamblico<sup>1)</sup>, ove si parla di una «linea a doppio movimento» inventata da Carpo d'Antiochia per quadrare il cerchio, venne interpretato<sup>2)</sup> come riferentesi alla curva di cui ci occupiamo. Esso però non basta a fare ascrivere la cicloide fra le curve note sin dall'antichità; onde non possiamo esimerci dal citare altri nomi più moderni collegati alla scoperta di quella

<sup>1)</sup> *Comment. in Aristotelis phys. libros quattuor priores*, ed. Diels, p. 60.

<sup>2)</sup> P. TANNERY, *Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité*, paragr. II (Bull. des Sc. math. et astr., 2<sup>a</sup> Serie, T. VIII, 1884; oppure *Mémoires scientifiques*, T. II, Paris 1912, p. 5).

linea. Prescindendo dal Cardinale di Cusa, il quale venne dal Wallis<sup>1)</sup> annoverato fra gli scopritori della cicloide in base a documenti di attendibilità assai dubbia<sup>2)</sup>, troviamo Carlo de Bouvelles, il quale nel 1501 ne avvertì l'intervento nel problema della quadratura del cerchio<sup>3)</sup>, e Galileo Galilei, il quale circa un secolo dopo considerò la cicloide ordinaria, le diede il nome con cui noi la designamo e tentò indarno di determinarne l'area servendosi della bilancia<sup>4)</sup>. Questi scienziati appartengono a quello che si può considerarsi come il *periodo preistorico* della cicloide; la vera storia comincia intorno al 1615 o meglio nel 1628 quando il P. Mersenne, non riuscendo a scoprire le proprietà della cicloide, invitò il Roberval ad investigarle. E questo geometra nel 1634 trovò che l'area dell'intera cicloide ordinaria (da lui chiamata *trocoide* da *τροχος* = ruota) è eguale al triplo della superficie del cerchio generatore: proposizione estremamente notevole che valse a fissare sulla cicloide gli sguardi del mondo matematico e che venne confermata subito (1638) da Descartes e Fermat. Poco dopo il Wren giungeva alla rettificazione della curva e circa nello stesso tempo il Pascal scopriva in essa (da lui chiamata *roulette*) tante e così eleganti proprietà che credette opportuno di porre (1658) la dimostrazione di esse come tema di un pubblico concorso. Quali ne siano stati i risultati, quali le ragioni per cui il Wallis e il P. Lalouère (unici concorrenti) non ottennero il premio promesso, Pascal ha diffusamente narrato<sup>5)</sup> e noi non ripeteremo, come non rileveremo le calunnie che vi si leggono, nè ci faremo eco delle lagnanze dei vinti; se abbiamo fatto cenno di questa pubblica sfida è per notare che essa diede immensa celebrità alla cicloide e fu probabilmente causa non ultima dell'essere essa stata studiata da tanti eminenti geometri del secolo XVII: essi determinano il *primo*

<sup>1)</sup> *An extract of a letter, of May 4, 1697, concerning the Cycloid known to Cardinal Cusanus, about the year 1450; and to Carolus Bovillus about the year 1500* (Phil. Trans., 1697, p. 561).

<sup>2)</sup> Cfr. S. GÜNTHER, *War die Zykloide bereits in XVI Jahrhundert bekannt?* (Bibl. math., 1887).

<sup>3)</sup> BOVILLUS, *Geometriae introductionis libri ser* (Parisiis, 1501).

<sup>4)</sup> «Quella linea arcuata sono più di cinquant'anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parveni da principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che le descrive; ma non fu così, benchè la differenza non sia molta». Così leggesi in una lettera di GALILEO a B. CAVALIERI del 24 febbraio 1640 (*Opere di G. Galilei*, T. XVIII, 1906, p. 153-4). V. anche FABBRONI, *Vitae Italorum doctrinae excellentium*, T. II (Pisis, 1788), p. 12.

<sup>5)</sup> *Histoire de la Roulette, appelée autrement Trochoïde, ou Cycloïde, ou l'on rapporte par quels degrés on est arrivé à la connoissance de cette ligne* (Oeuvres de B. Pascal, T. V, La Haye, 1779, p. 135-214).

periodo della storia della curva di cui trattiamo<sup>1)</sup>. La invenzione del metodo infinitesimale porse nuovi procedimenti per studiare la cicloide: gli importanti teoremi di quadratura scoperti da Huygens, Leibniz e Giovanni Bernoulli dimostrarono come ancora molto rimanesse a fare prima di avere esaurita l'investigazione delle sue proprietà; inoltre le questioni di filosofia naturale in cui interviene la cicloide ordinaria e che vennero segnalate in quel tempo da Huygens ed altri<sup>2)</sup> fecero prolungare questo secondo periodo della storia della cicloide e lo fanno giudicare non meno importante del primo.

Nelle linee precedenti, in cui è descritto a grandi linee l'evoluzione successiva della teoria della cicloide, è in pari tempo tracciato il programma che dobbiamo svolgere in questo paragrafo: esporre, cioè, le più spiccate proprietà delle cicloidi, indicandone gli scopritori: così la precedente notizia storica perderà quanto ancora racchiude di vago ed impreciso.

**217.** Cominciamo dal trovare l'equazione della cicloide, tanto della ordinaria quanto delle altre più generali (figure 13, 14, 15). Indicheremo con  $C$  il centro e con  $r$  il raggio del cerchio mobile; e con  $d$  la distanza di  $C$  dal punto generatore. Prenderemo poi come asse delle  $x$  la base e come asse delle  $y$  la perpendicolare calata sulla base dalla posizione iniziale  $P$  del punto mobile. Sia  $P'(x, y)$  una posizione qualunque di questo,  $C'$  il centro e  $K'$  il punto di contatto coll'asse delle  $x$  della corrispondente posizione del cerchio mobile e finalmente  $O'$  la posizione attuale del punto della periferia del cerchio mobile che in origine stava in  $O$ . Sarà evidentemente arc  $O'K' = OK'$ . Condotto il diametro  $K'C'$ , proiettiamo su di esso ortogonalmente in  $N'$  il punto  $P'$ ; avremo evidentemente  $x = OK' = N'P'$ ,  $y = C'K' - C'N'$ . Ora se si chiama  $\varphi$  l'angolo  $O'C'K'$  è chiaro che si ha arc  $O'K' = r\varphi$ ,  $N'P' = d \sin \varphi$ ,  $C'N' = d \cos \varphi$ ; perciò

$$(1) \quad x = r\varphi - d \sin \varphi, \quad y = r - d \cos \varphi. \quad \varphi = \frac{dx}{d\varphi}$$

Questa è la rappresentazione parametrica applicabile a tutte le cicloidi; nel caso della cicloide ordinaria ( $d = r$ ) essa diviene:

$$(1') \quad x = r(\varphi - \sin \varphi), \quad y = r(1 - \cos \varphi)^3.$$

<sup>1)</sup> A questo periodo appartiene una questione di priorità dibattutasi fra TORRICELLI e ROBERVAL; il lettore ne troverà i particolari nella *Lettera di T. Antiate*, ristampata in fine del T. I delle *Opere di E. Torricelli* (Faenza 1919), nel T. II (p. 52-73 della 2ª ed.) dell'*Histoire des mathématiques* del MONTUCLA e nel T. II delle *Vorlesungen* di M. CANTOR.

<sup>2)</sup> Cfr. POPPE, *Ausführliche Geschichte der Anwendungen aller krummen Linien etc.* (Nürnberg 1802), p. 122-124.

<sup>3)</sup> Si deduce da queste che nella rappresentazione conforme definita

Facendo ruotare gli assi dell'angolo  $\lambda$  e scegliendo opportunamente l'origine le (1) possono sostituirsi con le seguenti più

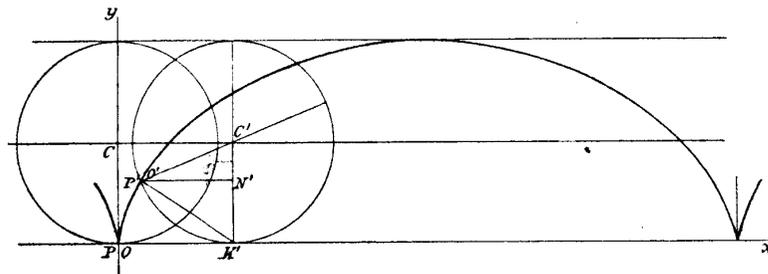


Fig. 13. — Cicloide ordinaria.

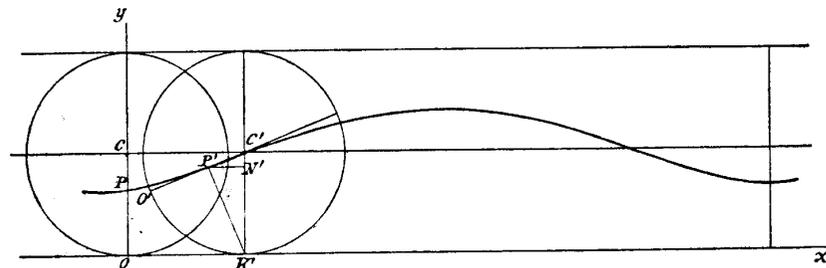


Fig. 14. — Cicloide accorciata.

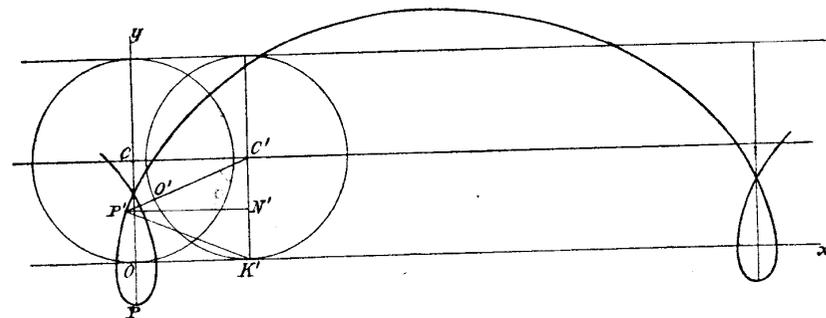


Fig. 15. — Cicloide allungata.

dalla funzione  $z = 1 + w - e^w$  alla retta  $x = 0$  (asse delle  $y$ ) corrisponde la cicloide ordinaria generata dal cerchio di raggio 1: cfr. AMSTEIN, *Quelques exemples de représentation conforme* (Bull. de la Soc. Vaudoise, T. XVI, 1882).

simmetriche

$$x = d \operatorname{sen} \psi - \psi \cdot r \cos \lambda, \quad y = d \cos \psi - \psi \cdot r \operatorname{sen} \lambda$$

o anche

$$x = d \operatorname{sen} \psi - p \psi, \quad y = d \cos \psi - q \psi;$$

in quest'ultima ipotesi  $\sqrt{p^2 + q^2}$  è il raggio del cerchio generatore, onde la cicloide è allungata, ordinaria od accorciata secondochè è

$$\sqrt{p^2 + q^2} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} d.$$

Le equazioni (1) porgono il mezzo in generale più comodo per rappresentare analiticamente le cicloidi; ma talvolta può tornare utile la equazione fra  $x, y$  che si ottiene eliminando  $\varphi$  fra le (1); è la seguente:

$$(2) \quad x = r \operatorname{arc} \cos \frac{r-y}{d} - \sqrt{(d+r-y)(d-r+y)},$$

che, nel caso  $d = r$ , diviene

$$(2') \quad x = r \operatorname{arc} \cos \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Notiamo subito che dalla (2) deducesi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(d+r-y)(d-r+y)}}{y},$$

onde l'equazione della tangente alla cicloide nel punto  $(x, y)$  è

$$(3) \quad \frac{Y-y}{X-x} = \frac{\sqrt{(d+r-y)(d-r+y)}}{y}.$$

Ne viene che i punti di contatto delle tangenti condotte dal punto

<sup>1)</sup> Scrivendo la (2') come segue

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2ry - y^2}} - \sqrt{2ry - y^2}$$

si ritrova un'equazione scoperta ed assai vantata da LEIBNIZ; v. una lettera a HUYGENS dell'11-21 luglio 1690 (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. II, p. 43-44) e una al WALLIS del 19-29 marzo 1697 (Id., T. IV, p. 14); inoltre l'articolo, pubblicato sin dal 1686 negli *Acta erud.*, intitolato *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Id., T. V, p. 231).

$(X, Y)$  stanno sulla curva di equazione

$$(4) \quad (X-x)^2 (d+r-y)(d-r+y) - y^2 (Y-y)^2 = 0.$$

Siccome questa in generale rappresenta una curva di quarto ordine avente  $(X, Y)$  per punto doppio, così i punti di contatto delle tangenti condotte ad una cicloide allungata od accorciata da un punto qualunque del suo piano stanno sopra una curva di quart'ordine avente quel punto per punto doppio; ciò prova che ogni cicloide allungata od accorciata è una curva panalgebrica che fa parte di un sistema avente per caratteristiche 2, 2. Ma nel caso della cicloide ordinaria, la (4) diviene

$$(4') \quad (X-x)^2 (2r-y) - y(Y-y)^2 = 0;$$

perciò: i punti di contatto delle tangenti condotte ad una cicloide ordinaria da un punto qualunque del suo piano stanno sopra una cubica avente un nodo in quel punto; ogni cicloide ordinaria è una curva panalgebrica che fa parte di un sistema avente per caratteristiche 2, 1.

Per ottenere una conveniente costruzione per la tangente o la normale alla cicloide in un suo punto qualunque, osserviamo che dalle (1) deducesi

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = \frac{d \operatorname{sen} \varphi}{r - d \cos \varphi},$$

e questa funzione misura la tangente trigonometrica dell'angolo fatto dalla retta tangente nel punto  $P'$  (di parametro  $\varphi$ ) alla cicloide coll'asse delle  $x$ , ossia dell'angolo  $\theta$  fatto dalla retta normale in quel punto  $P'$  coll'asse delle  $y$ . Ora se noi conduciamo (figure preced.) la retta  $P'K'$  e chiamiamo  $\psi$  l'angolo  $P'K'N'$ , dal triangolo  $K'N'P'$  trarremo

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{N'P'}{N'K'} = \frac{d \operatorname{sen} \varphi}{r - d \cos \varphi};$$

dunque  $\psi = \theta$ . Perciò la normale in  $P'$  alla cicloide, oltre a passare per  $P'$ , forma con la retta  $K'N'$  un angolo eguale a  $P'K'N'$ ; essa quindi coincide con  $P'K'$ . Per costruire la normale in un punto qualunque della curva che studiamo basta dunque congiungerlo al punto in cui la corrispondente posizione del cerchio generatore tocca la base<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Questa costruzione si legge in una lettera di DESCARTES al P. MERSENNE datata 23 agosto 1638 (*Oeuvres de Descartes*, ed. ADAM e TANNERY, T. II, Paris 1898, p. 307-311). Per la cicloide ordinaria essa si trova anche nel famoso *Methodus ad disquirendam maximum et minimum* di FERMAT (*Oeuvres*

**218.** Esaminando le equazioni (1) si vede che mutando in esse  $\varphi$  in  $\varphi + 2k\pi$  ( $k$  intero)  $y$  non cambia e  $x$  non fa che aumentare di  $x + 2k\pi r$ ; il che mostra che *imprimendo ad una cicloide un moto traslatorio in direzione parallela alla base e di ampiezza  $2k\pi r$  la curva si sovrappone a sè stessa*<sup>1)</sup>; la curva consta di infinite parti fra loro eguali; per conoscere la forma di una qualunque di esse basta ad es. fare variare  $\varphi$  tra  $-\pi$  e  $+\pi$  o tra  $0$  e  $2\pi$ . Le formole (1) mostrano che i punti in cui la cicloide taglia la base sono dati da  $\varphi = \arccos r/d$ ; tali punti sono reali soltanto quando  $r \leq d$ ; dunque *soltanto le cicloidi ordinarie ed accorciate tagliano le loro basi*. I valori massimi e minimi di  $y$  sono  $r \pm d$ ; onde *la curva rappresentata dalle (1) è tutta compresa nella striscia di piano limitata dalle rette  $y = r \pm d$* . Per trovare, se esistono, i punti doppi bisogna cercare delle coppie di valori di  $\varphi$  a cui corrispondano valori fra loro eguali tanto di  $x$  quanto di  $y$ ; nascono così le equazioni

$$r\varphi - d \operatorname{sen} \varphi = r\psi - d \operatorname{sen} \psi, \quad \cos \varphi = \cos \psi;$$

esclusa come insignificante la soluzione  $\varphi = \psi$  della seconda fra queste relazioni, resta l'altra  $\psi = -\varphi$  che muta la prima in

$$r\varphi - d \operatorname{sen} \varphi = 0.$$

La soluzione  $\varphi = 0$  è da escludersi perchè non dà che la posizione iniziale del punto mobile; resta quindi per determinare  $\varphi$  l'equazione

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi} = \frac{r}{d};$$

essendo sempre  $\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\varphi} \leq 1$  affinché quest'equazione abbia radici reali dev'essere  $r \leq d$ , dunque *le cicloidi allungate sono esenti da punti doppi*. Nel caso  $r/d < 1$  l'equazione precedente ammette due radici reali, eguali e di segni contrari; la (5) prova che le corrispondenti tangenti formano coll'asse delle  $y$  angoli fra loro eguali, mentre

*de Fermat*, T. I, p. 163 e T. III, p. 144); cfr. la lettera di FERMAT al P. MERSENNE del 22 ottobre 1638, in *Oeuvres* ora citate (T. II, p. 171). Sullo stesso tema si veggia ROBERVAL, *Observations sur la composition des mouvements* (Mém. de l'Acad. des Sciences, T. VI, 1730), p. 58, nonché alcune lettere di R. DE SLUSE a PASCAL e ad OLDENBURG, datate risp. 6 luglio, 2 agosto e 13 settembre 1658, 29 aprile e 26 maggio 1659, tutte pubblicate da C. LE PAIGE nel T. XVII del *Bullettino di Bibliografia e Storia ecc.*

<sup>1)</sup> La cicloide offre il primo esempio delle linee, chiamate dal WHEWELL *running pattern curves*, che constano di infinite parti sovrapponibili per traslazione: cfr. A. WALTER, *William Whewell Abhandlung zur natürlichen Geometrie der Kurven* (Jahresber. der I. Staatsrealschule in Graz, 1907).

la (1, 1<sup>a</sup>) fa vedere che nel comune loro punto di contatto si ha  $x=0$ ; dunque *le cicloidi accorciate ammettono infiniti punti doppi le cui ascisse sono multipli della lunghezza della circonferenza generatrice*. Nel caso limite  $r = d$  quelle tangenti coincidono, onde *le cicloidi ordinarie hanno infinite cuspidi*. Un'ultima proprietà di forma delle cicloidi si ha notando che il raggio di curvatura di esse è in generale dato da

$$(6) \quad R = \frac{\{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi\}^{3/2}}{d(r \cos \varphi - d)},$$

e nel caso di cicloidi ordinarie da

$$(6') \quad R = 4r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}.$$

Emerge dalla (6) che i flessi della curva (1) sono i punti determinati dall'equazione

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{r-d}{r+d}};$$

ora, affinché questa abbia radici reali dev'essere  $d \leq r$ , dunque intanto *le cicloidi accorciate sono esenti da flessi*; nel caso  $d = r$  i punti in cui  $R$  risulta nullo sono quelli in cui  $\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , cioè sono le cuspidi, dunque *soltanto le cicloidi allungate sono fornite di punti d'inflessione*.

Da questa discussione si trae che le cicloidi accorciate, ordinarie e allungate, potrebbero chiamarsi in modo più espressivo risp. *inflettute, cuspidate e nodate*.

**219.** Chiamiamo  $ds_c$  il differenziale dell'arco della cicloide rappresentata dalle equazioni (1). Avremo:

$$(7) \quad ds_c = d\varphi \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi};$$

poniamo poi

$$r + d = \frac{a}{2}, \quad |r - d| = \frac{b}{2}$$

ed otterremo

$$ds_c = \frac{d\varphi}{2} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

o, ponendo  $\varphi = 2\psi$ ,

$$ds_c = d\psi \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \psi}.$$

Se ora consideriamo l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ossia

$$x = a \cos \psi, \quad y = b \sin \psi$$

il suo arco  $s_e$  avrà per differenziale

$$ds_e = d\psi \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \psi}$$

onde  $ds_e = ds_e$ . Questa notevole relazione che intercede tra un arco di cicloide ed uno di ellisse è stata scoperta da B. Pascal e può enunciarsi brevemente dicendo: *la rettificazione di un cicloide qualunque dipende in generale da quella di un'ellisse*<sup>1)</sup>. Ma nel caso in cui si tratti di una cicloide ordinaria la rettificazione non esige che l'impiego di funzioni circolari; infatti per  $d = r$  la (7) diviene

$$(7') \quad ds_e = 2r \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi,$$

che, integrata fra 0 e  $\varphi$  dà

$$(8) \quad s_e = 4r \left[ 1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right] = 8r \sin^2 \frac{\varphi}{4}$$

Per ottenere la lunghezza dell'arco di cicloide ordinaria compreso tra due cuspidi consecutive basta fare qui  $\varphi = 2\pi$ ; si ottiene così come risultato  $8r$ , e si è in grado di concludere il seguente teorema di Wren: *l'arco di una cicloide ordinaria compreso fra due cuspidi consecutive è eguale al quadruplo del diametro del cerchio generatore*<sup>2)</sup>.

L'area  $S$  generata dall'ordinata della cicloide (1) quando  $\varphi$  varia tra 0 e  $2\pi$  è data da

<sup>1)</sup> *Dimensions des lignes courbes de toutes les roulettes* (Oeuvres de B. Pascal, T. V, La Haye 1779, p. 411). Cfr.: GIANNINI, *Opuscula mathematica* (Parma 1773), p. 85; KÜPPER, *Übungsaufgaben für Schüler* (Arch. Math. Phys., T. XXVII, 1856); J. NEUBERG, *Sur la cycloïde* (Nouv. Corresp. mathém., T. V, 1879).

<sup>2)</sup> Vedi WALLIS, *Tractatus duo etc.* (Opera mathematica, T. I, p. 533-541); cfr. la nota intitolata *Propositio Domini Wren. Demonstrata a Claudio Mylon die 26 Januarii 1659*, annessa ad una lettera inviata dal MYLON a HUYGENS in data 31 gennaio 1659 (Oeuvres de Huygens, T. II, p. 335).

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^\pi y dx = 2 \int_0^\pi (r - d \cos \varphi)^2 d\varphi = \\ &= \left[ (2r^2 + d^2) \varphi - 4dr \sin \varphi + \frac{d^2 \sin 2\varphi}{2} \right]_0^\pi = \\ &= (2r^2 + d^2) \pi = 2\pi r^2 + \pi d^2, \end{aligned}$$

onde è equivalente al doppio dell'area del cerchio generatore aumentata dell'area del cerchio avente per raggio la distanza del centro di questo dal punto mobile. Supponendo in particolare  $d = r$  si giunge al teorema che dice: *in una cicloide ordinaria l'area compresa tra la base e l'arco della curva limitato da due cuspidi consecutive è eguale al triplo dell'area del cerchio generatore*<sup>1)</sup>.

Nello stabilire questo memorabile teorema il Roberval fu tratto ad introdurre la considerazione di una nuova curva strettamente collegata alla cicloide ordinaria e per tale ragione da lui chiamata *compagna della cicloide* (*trochoidis comes* o *socia*)<sup>2)</sup>; essa si costruisce come segue: da un punto qualunque  $P'$  della cicloide (fig. 13) si conduce la parallela alla base e su di essa si porta a partire da  $P'$  nel senso in cui avviene il movimento il segmento  $P'N'$  eguale alla metà della corda che sopra quella parallela taglia il cerchio generatore;  $N'$  starà sulla compagna della cicloide. Le coordinate di  $N$  sono evidentemente espresse come segue:

$$x = r\varphi, \quad y = r(1 - \cos \varphi);$$

eliminando  $\varphi$  si ottiene

$$r - y = r \cos x/r$$

la quale rappresenta evidentemente una curva di Ozanam (v. p. 21)<sup>3)</sup>. Osserviamo che l'area  $S_1$  limitata dalla compagna della cicloide e dalla base è data da:

$$S_1 = 2r^2 \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) d\varphi = 2\pi r^2$$

<sup>1)</sup> ROBERVAL, *De trochoïde ejusque spatio* (Mém. de l'Ac. des Sciences, T. VI, 1730), p. 311; v. anche una lettera diretta a FERMAT il 1° giugno 1638 (Oeuvres de Fermat, T. II, p. 151), nonché due lettere scambiate fra il P. MERSENNE e DESCARTES il 28 aprile (o il 1° maggio) e il 27 maggio 1638 (Oeuvres de Descartes, ed. ADAM e TANNERY, T. II, 1898, p. 116 e 135). Una dimostrazione geometrica semplicissima del teorema di ROBERVAL leggesi in *The mathematical and other Writings of R. L. ELLIS* (Cambridge 1863), p. 224.

<sup>2)</sup> *De trochoïde* etc., p. 63 e 306. Il MONTUCLA (*Histoire des mathématiques*, Nouv. éd., T. II, p. 72) adopera invece il nome di *petite cycloïde*.

<sup>3)</sup> Siccome essa non differisce da una sinusoida, così a ragione il WALLIS osserva in una lettera scritta a LEIBNIZ il 6 aprile 1697 (*Leibniz math. Schriften*, T. IV, p. 18): «Et Gallorum socia Cycloidis est ea Curva quae (mih) terminat Sinnum rectorum».

onde è media proporzionale fra l'area ( $\pi r^2$ ) del cerchio generatore e quella ( $\pi \cdot 4 r^2$ ) del cerchio che ha per raggio il diametro di questo. Roberval, oltre a ciò, ha notato essere  $S - S_1 = \pi r^2$ .

Egli poi si è servito della stessa curva ausiliare per cercare il volume  $V$  generato dalla rotazione della cicloide (supposta sempre limitata fra due cuspidi) e la propria base<sup>1)</sup>. Per dimostrare i risultati da lui ottenuti chiamiamo  $V_1$  l'analogo volume generato dalla compagna della cicloide e  $U$  quello del cilindro circoscritto alla curva; applicando formole note si trova

$$V = 5\pi^2 r^3, \quad V_1 = 3\pi^2 r^3, \quad U = 8\pi^2 r^3,$$

onde

$$\frac{V}{U} = \frac{5}{8}, \quad \frac{V_1}{U} = \frac{3}{8}, \quad V + V_1 = U,$$

come ottenne il citato geometra francese. Dette quindi  $g$  e  $g_1$  le ordinate dei baricentri delle aree  $S$  e  $S_1$  si avrà, grazie al teorema di Pappo-Guldin,

$$V = 2\pi g \cdot S, \quad V_1 = 2\pi g_1 \cdot S_1,$$

da cui

$$g = \frac{5}{6}r, \quad g_1 = \frac{3}{4}r$$

Lasciamo al lettore di calcolare similmente (come fece Roberval sin dal 1644) il volume generato dalla rotazione della cicloide attorno alla sua linea mediana ed il baricentro di un suo arco<sup>2)</sup> e ritorniamo alla quadratura della cicloide ordinaria per stabilire alcune importanti proposizioni che vi si riferiscono.

**220.** Quella di più antica data venne scoperta da Huygens<sup>3)</sup>. Per stabilirla osserviamo anzitutto che le (1') danno

$$\int x dy = r^2 \int (\varphi \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) d\varphi = r^2 \left\{ -\varphi \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi - \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi \right\} + \text{cost.}$$

<sup>1)</sup> Alle questioni di cubatura fanno allusione DESCARTES in una lettera al P. MERSENNE in data 8 ottobre 1638 (*Oeuvres de Descartes*, ed. cit., T. II, p. 395) e FERMAT in altra lettera allo stesso del 1° aprile 1640 (*Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 191). Alle stesse si riferisce la Prop. XX del trattato *Mechanicorum* (1670) del WALLIS (*Opera mathematica*, T. I, p. 815-835).

<sup>2)</sup> SAINT-GERMAIN, *Recueil complémentaire d'exercices sur la mécanique rationnelle* (Paris 1889), p. 56.

<sup>3)</sup> V. una lettera da lui scritta a I. BOULLIAU il 25 Luglio 1658 (*Oeuvres complètes de Huygens*, T. II, p. 200).

Segnamo (fig. 16) ora il cerchio generatore nella posizione in cui tocca il punto di culminazione  $A$  della cicloide; né sia  $B$  il centro e  $H$  il punto di contatto con la base; pel punto medio  $G$  del raggio  $AB$  conduciamo la parallela alla base stessa a tagliare la curva

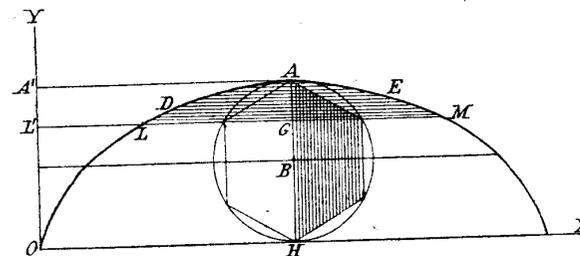


Fig. 16.

in  $L$  e l'asse delle  $y$  in  $L'$ ; sia poi  $A'$  l'intersezione di questo asse con la parallela condotta da  $A$  alla base. Avremo:

$$\begin{aligned} \text{Area } A' L' L A &= \\ &= \int_{y=-\frac{3r}{2}}^{y=2r} x dy = r^2 \left[ -\varphi \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi - \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi \right]_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}^{\varphi=\pi} \\ &= \frac{\pi r^2}{2} - \frac{3\sqrt{3} r^2}{8} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\text{area } A G L D A = \frac{3\sqrt{3} r^2}{8},$$

$$\text{area segmento } A D L M E A = \frac{3\sqrt{3} r^2}{4}.$$

Ma quest'ultima esprime l'area di metà dell'esagono regolare inscritto nel cerchio di raggio  $r$ ; dunque la zona cicloidale  $A D L M E A$  è quadrabile esattamente.

Questo notevole risultato conseguito da Huygens spinse Leibniz a cercarne di analoghi; e non indarno. Egli infatti trovò<sup>1)</sup> che, trac-

<sup>1)</sup> *Extrait d'une lettre de M. Leibniz écrite d'Hanovre à l'auteur du Journal touchant la quadrature d'une portion de roulette* (Journ. des Savants, 1678; Leibniz ed. Gerhardt, T. V, p. 116-117). Cfr. una lettera scritta da LEIBNIZ a OLDENBURG il 15 luglio 1674 (Id., T. I, p. 52), nonché le lettere scambiate fra LEIBNIZ ed il marchese DE L'HÔPITAL il 30 settembre ed il 1° dicembre 1695 ed il 15 gennaio 1696 (Id., T. II, p. 299, 304 o 311).

ciato il cerchio nella posizione in cui tocca la cicloide nel suo punto di culminazione  $A$  (fig. 17), se si conduce pel suo centro  $B$  la parallela alla base a tagliare quel cerchio, la cicloide e l'asse delle  $y$  rispettivamente in  $E$ ,  $F$  e  $B'$ , il segmento limitato dalla retta  $A F$

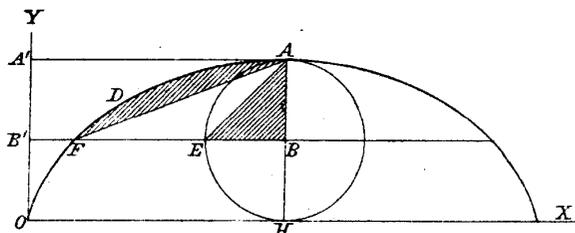


Fig. 17.

e dal corrispondente arco di cicloide è equivalente al triangolo  $A B E$ . Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \text{area segm. } AFDA &= \text{area trap. } AA'B'FA - \text{area } AA'B'FDA = \\ &= \frac{r}{2} \left[ \pi r + r \frac{\pi}{2} - r \right] - r^2 \left[ -\varphi \cos \varphi + \sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} 2 \varphi \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} r^2 = \text{triangolo } A E B \quad \text{c. d. d.} \end{aligned}$$

I due teoremi ora dimostrati suggerirono a Giovanni Bernoulli la ricerca di altro in cui essi fossero inclusi come casi speciali; ed

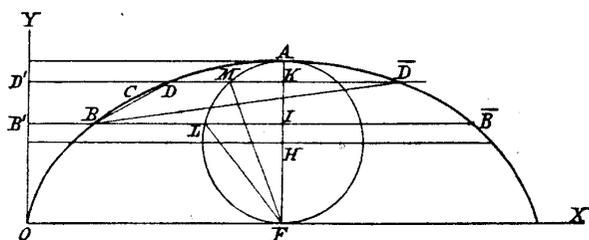


Fig. 18.

infatti egli giunse a scoprire nella cicloide ordinaria infinite superficie esattamente quadrabili<sup>1)</sup>. Per esporre come si determinino

<sup>1)</sup> *Cycloidis primariae segmenta innumera quadratura determinatio* etc. (Acta erud., Jul. 1699; *Joh. Bernoulli Opera*, T. I, p. 322-327).

consideriamo ancora il cerchio generatore nella posizione in cui tocca la cicloide nel suo punto di culminazione  $A$ ; ne sia  $H$  il centro (fig. 18) e  $F$  il punto di contatto con la base. Siano  $I$ ,  $K$  punti del diametro  $A H$  tali che si abbia  $A K = H I (= \eta)$ ; da  $K$  e  $I$  conduciamo le parallele  $D' \bar{D} M D$  e  $B' B L \bar{B}$  alla base della cicloide e proponiamoci di calcolare le aree dei segmenti  $B C D B$  e  $B C D \bar{D} B$ . Chiamiamo per ciò  $\varphi_0$ ,  $\Phi$ ,  $\bar{\Phi}$  i valori dell'angolo  $\varphi$  corrispondenti ai punti  $B, D, \bar{D}$ ;  $(x_0, y_0)$ ,  $(X, Y)$ ,  $(\bar{X}, \bar{Y})$  le coordinate di questi punti. Avremo:

$$\cos \varphi_0 = -\frac{\eta}{r}, \quad \text{sen } \varphi_0 = \frac{\sqrt{r^2 - \eta^2}}{r};$$

$$\cos \Phi = \cos \bar{\Phi} = -\frac{r - \eta}{r};$$

$$\text{sen } \Phi = -\text{sen } \bar{\Phi} = \frac{\sqrt{2r\eta - \eta^2}}{r}.$$

Ora dalla figura e dall'espressione generale di  $\int x dy$  stabilita in principio di questo numero, si trae:

$$\text{area } B C D B = \text{trapezio } B B' D' B - \text{area } B B' D' C B =$$

$$= \frac{(Y - y_0)(X + x_0)}{2} - \int_{y=y_0}^{y=2r-\eta} x dy =$$

$$= \frac{(r - 2\eta)(X + x_0)}{2} -$$

$$\left[ -\varphi \cos \varphi + \sin \varphi - \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \text{sen } 2\varphi \right] \Big|_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=\Phi}$$

o dopo qualche riduzione

$$\text{area } B C D B = \frac{(\eta + r) \sqrt{r^2 - \eta^2}}{2} - \frac{(2r - \eta) \sqrt{2r\eta - \eta^2}}{2}$$

Similmente

$$\text{area } B C \bar{D} B = \frac{(\eta + r) \sqrt{r^2 - \eta^2}}{2} + \frac{(2r - \eta) \sqrt{2r\eta - \eta^2}}{2}$$

Ma congiunto  $F$  ai punti  $L$  e  $M$  si ha

$$\text{area triang. } F I L = \frac{1}{2} (r + \eta) \sqrt{r^2 - \eta^2},$$

$$\text{area triang. } F M K = \frac{1}{2} (2r - \eta) \sqrt{2r\eta - \eta^2};$$

dunque

$$(9) \quad \left. \begin{array}{l} \text{area } B C D B \\ \text{area } B C D D B \end{array} \right\} = \text{triang. } F I L \mp \text{triang. } F M K.$$

Questa doppia relazione compendia il teorema con cui Giovanni Bernoulli generalizzò i precedenti di Huygens e Leibniz. Egli, nonchè suo fratello Giacomo, fece poi ulteriori congeneri ricerche su cui ci è vietato di estenderci<sup>1)</sup>: notiamo solo che esse condussero alla scoperta di una relazione analoga alla (9) valida per tutte le cicloidi allungate od accorciate<sup>2)</sup>.

**221.** Ad altre proprietà notevoli della cicloide ordinaria conduce la considerazione della sua curvatura.

Essendo infatti

$$R = 4r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}, \quad s = 4r \left[ 1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right], \quad y = 2r \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$$

si conclude

$$(10) \quad R^2 + (s - 4r)^2 = 4r^2,$$

$$(11) \quad \frac{R^2}{y} = 8r.$$

La (10), cambiando l'origine degli archi, diviene  $R^2 + s^2 = (4r)^2$ ; è questa l'equazione intrinseca canonica della cicloide ordinaria: convenientemente interpretata essa dice che *se una cicloide ruzzola senza strisciare sopra una retta fissa, il luogo dei centri di curvatura nei successivi punti di contatto è una circonferenza di raggio quadruplo della circonferenza generatrice*<sup>3)</sup>. La (11) dice invece che *nella ci-*

<sup>1)</sup> Joh. Bernoulli Opera, T. I, p. 328-335; Jac. Bernoulli Opera, pagine 1129-1134.

<sup>2)</sup> Acta Eruditorum, Jun. 1700; Joh. Bernoulli Opera, T. I, p. 330.

<sup>3)</sup> MANNHEIM, Recherches géométriques sur le lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droites (G. di Lionville, 2<sup>a</sup> serie, T. IV, 1859), p. 99.

cloide ordinaria il raggio di curvatura in un punto qualunque è medio proporzionale fra la corrispondente ordinata ed una lunghezza costante: e questa è un'altra proprietà caratteristica della cicloide<sup>1)</sup>.

Se  $(x_1, y_1)$  sono le coordinate del centro di curvatura della cicloide ordinaria nel punto  $(\varphi)$  si trova facilmente

$$(12) \quad x_1 = r(\varphi + \operatorname{sen} \varphi), \quad y_1 = -r(1 - \cos \varphi);$$

se ora si effettua la trasformazione di coordinate determinata dalle formole

$$x_1 = x' + \pi r, \quad y_1 = y' - 2r$$

e si introduce un angolo  $\psi$  legato a  $\varphi$  dalla relazione  $\varphi = \pi + \psi$ , si mutano le equazioni precedenti in queste altre

$$x' = r(\psi - \operatorname{sen} \psi), \quad y' = r(1 - \cos \psi);$$

e queste, paragonate con le (1') mostrano che *l'evoluta di una cicloide ordinaria è una curva ad essa eguale*<sup>2)</sup>.

Il segmento  $N$  della normale alla cicloide compreso fra il punto da cui essa si diparte e l'intersezione con la base è dato

$$N = y \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = 2r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2},$$

onde  $R = 2N$ ; *nella cicloide ordinaria il raggio di curvatura è dunque doppio della normale, e tutti i raggi di curvatura sono bisecati da una retta fissa (la base): anche questa proprietà è posseduta esclusivamente dalla cicloide ordinaria*<sup>3)</sup>.

Dimostriamo finalmente il seguente

**TEOREMA DI GUILLERY<sup>4)</sup>:** *Ogni proiezione parallela di un'elica cilindrica sul piano della base è una cicloide ordinaria, accorciata od allungata secondochè l'inclinazione dei raggi proiettanti sulle generatrici del cilindro è eguale, inferiore o superiore all'inclinazione dell'elica.*

<sup>1)</sup> TISSERAND, Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal, 2<sup>a</sup> ed. (Paris 1895), p. 251.

<sup>2)</sup> HUYGENS, Horologium oscillatorium (1673), 3<sup>a</sup> Parte, Prop. VI.

<sup>3)</sup> CESÀRO, Lezioni di geometria intrinseca (Napoli 1896), p. 24.

<sup>4)</sup> Lettres sur l'architecture (Bruxelles 1847); cfr. una comunicazione fatta da TH. OLIVIER nel 1847 alla Société philomatique e dello stesso Mémoires de géom. descript. (Paris 1850), p. 290. Pel caso della cicloide ordinaria il MONTUCLA parla di quel teorema (Histoire des Mathém., Nouv. éd., T. II, p. 78) come di cosa propria e ne deduce che la cicloide si estende all'infinito, mentre sembra che prima non se ne considerasse che l'arco compreso fra due cuspidi consecutive.

Si consideri infatti l'elica

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \cot \mu \cdot \varphi;$$

se la si proietta nella direzione definita dagli angoli  $\alpha, \beta, \gamma$ , si ottiene il cilindro rappresentato dalle equazioni

$$\frac{x - r \cos \varphi}{\cos \alpha} = \frac{y - r \sin \varphi}{\cos \beta} = \frac{z - r \cot \mu \cdot \varphi}{\cos \gamma}.$$

Facendo ivi  $z = 0$  si ottengono le due equazioni seguenti per rappresentare la curva proiezione:

$$x = r \cos \varphi - r \cot \mu \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \varphi, \quad y = r \sin \varphi - r \cot \mu \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \varphi$$

che appartengono effettivamente ad una cicloide (p. 80). Il raggio del circolo generatore è

$$= r \cot \mu \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}}{\cos^2 \gamma} = r \cot \mu \operatorname{tg} \gamma,$$

onde la cicloide è accorciata, ordinaria od allungata secondochè  $r \cot \mu \operatorname{tg} \gamma \leq r$ , cioè a norma che  $\gamma \leq \mu$ , come appunto dice il teorema enunciato.

Le proprietà geometriche dimostrate nella cicloide ordinaria — e non sono le uniche da essa possedute <sup>1)</sup> — provano a sufficienza quale curva notevole essa sia e basterebbero a spiegare l'assiduità con cui venne studiata a partire dal secolo XVII. Ma il pregio in cui essa era tenuta si accrebbe a dismisura quando Huygens avvertì <sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Fra le proposizioni da noi taciute ricorderemo specialmente quella esposta da GIOV. BERNOULLI nella nota *De evolutione successiva et alternante curvae cujusque* etc. (Opera, T. IV, p. 98); essa venne studiata poi da LEGENDRE (*Exercices de calcul intégral*, T. II) e da POISSON (Journ. de l'Ec. pol., XVIII cahier) e generalizzata da G. MAINARDI (*Sullo sviluppo imperfetto continuo di una curva piana*, Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, T. VII, 1837). — E fra i problemi risolti dalla cicloide va ricordato il seguente: « Trovare una curva che passi per due punti dati e limiti con le normali corrispondenti ed il relativo arco di evoluta un quadrilatero di area minima (cfr. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, Braunschweig, 1900, p. 203); esso fu risolto da EULERO nel suo lavoro fondamentale sul calcolo delle variazioni (1744) e studiato di recente da O. DUNKEL (*A determination of the curve minimizing the area enclosed by it and its evolute*, Amer. math. Montly, T. XXVIII, 1921).

<sup>2)</sup> *Horologium oscillatorium*, II Parte, Prop. XXV; cfr. DE LA HIRE, *Traité de mécanique* (Mém. de Paris, T. IX). Una dimostrazione semplicissima del tautocronismo della cicloide si trova in *The math. and other Writing of R. L. ELLIS* (Cambridge, 1863), p. 326. V. anche LEHMANN, *Theorie der Cycloide als Tautochrone* (Journ. f. Math., T. VI, 1830).

essere dessa la *curva tautochrone* nel vuoto (da  $\tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\varsigma$  = lo stesso e  $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$  = tempo <sup>1)</sup>), quando cioè egli scoperse che « la curva tale che un punto pesante che la percorre arriva alla sua posizione più bassa nel medesimo tempo qualunque sia il punto da cui si diparte è una cicloide ordinaria a base orizzontale concava verso l'alto ». Non basta. Giovanni Bernoulli <sup>2)</sup> negli *Acta eruditorum* del Giugno 1696 e poi in un *Programma editum Groningae A.º 1697* propose come « problema novorum ad eujus solutionem mathematici invitantur » il seguente: « datis in plano verticali duobus punctis *A* et *B*, assignari mobili *M*, viam *AMB*, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto *A*, brevissimo tempore perveniat ad altrum punctum *B* »; ora la curva risoltrice — designata in quel programma come *linea celerrimi descensus* e chiamata oggi *curva brachistocrona* (da  $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$  = brevissimo e  $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$  = tempo) è una cicloide ordinaria, non un arco di cerchio come credeva Galileo <sup>3)</sup>; lo dimostrarono Leibniz, Giacomo Bernoulli, il marchese de l'Hôpital e Newton <sup>4)</sup>. Inoltre, se nel movimento di un punto pesante su una cicloide, si considera l'orizzontale del punto di partenza, quella del punto più basso e l'orizzontale equidistante, il tempo impiegato dal mobile nel passare dalla prima posizione alla terza sarà eguale a quello impiegato nel passare dalla seconda alla terza <sup>5)</sup>; ciò si esprime dicendo che la cicloide è una *curva mesocrona* <sup>6)</sup>.

Finalmente la cicloide è collegata alle origini della teoria delle *curve sincrone*; infatti negli *Acta eruditorum* del maggio 1697 Giovanni Bernoulli proponeva il seguente problema <sup>7)</sup>: « Queritur in plano verticali curva *PB*, quam synchronam appellare liceat, ad eujus singuli puncta *B*, grave en *A* descendens per cycloides continerians *AB* aequali tempore pervenirete ». Più tardi la nozione di curve sincrone venne grandemente generalizzata: si suppose cioè di considerare una famiglia di curve poste in un piano verticale ed uscenti da un punto *A* e si considerò il luogo delle posizioni occupate nel medesimo istante da punti che percorrono le curve date sotto

<sup>1)</sup> GIOV. BERNOULLI adopera invece il nome di *linea tachystoptoma* (lettera a) LEIBNIZ del 16 giugno 1696; Leibniz ed. Gerhardt, T. III, p. 291) e GIACOMO BERNOULLI quello di *curva oligochrona* (*Acta erud.*, maggio 1697; *Jac. Bernoulli Opera*, p. 768-778).

<sup>2)</sup> *Joh. Bernoulli Opera*, T. I, p. 155-161 e 166-169.

<sup>3)</sup> *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giornata III, Prop. 36, Scolio (*Opere di Galileo Galilei*, T. VIII, Firenze 1898, p. 263).

<sup>4)</sup> Le prime tre soluzioni del problema di BERNOULLI si trovano in *Acta Erud.*, maggio 1697; l'ultima, anonima, nel numero 224 delle *Phil. Trans.*, gennaio 1697. V. anche Leibniz ed. Gerhardt, T. III, p. 290 e *Is. Newtoni Opuscula*, T. I (Lausannae et Genevae, 1744), p. 285.

<sup>5)</sup> P. SERRET, *Des méthodes en géométrie* (Paris 1855), p. 132.

<sup>6)</sup> BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar-le-Duc, 1897), p. 201.

<sup>7)</sup> *Joh. Bernoulli Opera*, T. I, p. 192.

l'impero di forze date, dopo essere partiti contemporaneamente da  $A^1$ ). La trattazione di questo problema, come quella dei problemi delle curve tautocrone e brachistocrone — sia sotto la forma primitiva, sia supponendo che il moto avvenga in un mezzo resistente — esce dai limiti che abbiamo posti a questo lavoro <sup>2)</sup>.

**222.** La definizione di cicloide è suscettibile di svariate generalizzazioni, alcune delle quali si presentarono nel periodo di tempo in cui quella curva venne specialmente studiata e vanno qui menzionate <sup>3)</sup>. Fermat, in una lettera scritta nel 1660 a Carcavi <sup>4)</sup> e che questi comunicò a Huygens il 6 marzo di tale anno <sup>5)</sup>, definì ed assegnò una proprietà di alcune curve, di cui il pubblico aveva già avuto notizia vent'anni prima, avendone il P. Laloubère parlato nell'appendice della sua opera *Veterum Geometria promoti in septem de Cycloide libris* (Tolosae, 1640) <sup>6)</sup>. Sono curve affini alla cicloide ordinaria, essendo rappresentabili con equazioni della forma:

$$(13) \quad x = k r (\varphi - \operatorname{sen} \varphi), \quad y = r (1 - \cos \varphi),$$

ove  $k$  è numero dato. Se  $k > 1$  si ha una *cicloide allungata*, se  $k < 1$  si ha invece una *cicloide accorciata*.

Fermat ha osservato che le cicloidi allungate sono rettificabili mediante archi di circolo, mentre quelle accorciate lo sono mediante archi di parabola. Per dimostrarlo notiamo che dalle equazioni (13) si deduce:

$$ds = r d\varphi \sqrt{(k^2 + 1) - 2k^2 \cos \varphi + (k^2 - 1) \cos^2 \varphi};$$

ponendo  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = u$  si può scrivere

$$ds = \frac{4 r u du \sqrt{1 + k^2 u^2}}{(1 + u^2)^2};$$

ed introducendo invece di  $u$  una nuova variabile  $z$  con la condizione

<sup>1)</sup> V. due memorie postume di EULERO stampate nel T. IX (1824) dei *Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg*.

<sup>2)</sup> Il lettore desideroso di ragguagli più precisi ricorra a: LACROIX, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, T. II (Paris 1798), p. 696; PASCAL, *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite* (Milano 1897), p. 172; SAINT-GERMAIN, *Recueil d'exercices etc.*, p. 292 e 298; ecc. Inoltre ai lavori storici di C. OHRTMANN (*Das Problem der Tautochronen*, Berlin 1872) e F. AMODEO (*Monografia delle curve tautocrone*, Avellino 1883).

<sup>3)</sup> Per altre vedi E. KÖSTLIN, *Ueber eine transcendente Kurve von der die Zyklode ein Grenzfall ist* (Württemberg, Mitth., II Ser., T. IX, 1907).

<sup>4)</sup> *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 445-448.

<sup>5)</sup> *Oeuvres de Huygens*, T. III, p. 39-40.

<sup>6)</sup> Cfr. *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 202 e T. III, p. 175.

$1 + k^2 u^2 = z^2$  otterremo

$$ds = \frac{4 k^2 r z^2 dz}{(k^2 + z^2 - 1)^2}.$$

Integrando per parti si conclude

$$\frac{s}{2 k^2 r} = - \frac{z^2}{z^2 + k^2 - 1} + \int \frac{dz}{z^2 + k^2 - 1};$$

ed eseguendo la rimanente quadratura

$$\frac{s}{2 k^2 r} = \left\{ \begin{array}{l} - \frac{z^2}{z^2 + k^2 - 1} + \frac{1}{2 \sqrt{1 - k^2}} \log \frac{z - \sqrt{1 - k^2}}{z + \sqrt{1 - k^2}} \text{ se } k < 1 \\ - \frac{z^2}{z^2 + k^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \operatorname{arc tg} \frac{z}{\sqrt{k^2 - 1}} \text{ se } k > 1; \end{array} \right.$$

e poichè se  $k < 1$  si hanno cicloidi accorciate e se  $k > 1$  cicloidi allungate, si è in grado di concludere l'enunciato di Fermat <sup>1)</sup>.

Le *cicloidi di Fermat* si incontrano in una questione di geometria descrittiva <sup>2)</sup>. Ma è notevole il fatto che, probabilmente senza conoscere le osservazioni del celebre senatore tolosano, il Laisant le ritrovò generalizzando la genesi della cicloide ordinaria <sup>3)</sup>. Il Laisant infatti osservò che se un'ellisse è animata da un moto uniforme progressivo in una direzione parallela ad un asse, ed un suo punto ne percorre la periferia con moto uniforme, la traiettoria del risultante moto composto è una curva che può rappresentarsi con due equazioni del tipo seguente:

$$(14) \quad x = r (\varphi - \operatorname{sen} \varphi) / a^2, \quad y = r \cos \varphi;$$

dalle quali emerge che per  $a = 1$  la curva è una cicloide ordinaria, ma che per  $a \neq 1$  è una cicloide di Fermat. Il Laisant la chiama *cicloide ellittica*, per distinguerla dalla curva analoga generata si-

<sup>1)</sup> Questo teorema fu ritrovato nel 1859 da B. TORROLINI; v. la memoria *Sul metodo inverso delle tangenti* (Giornale arcadico e Journ. f. Math., T. 26, 1843); cfr. dello stesso *Rivista bibliografica. Sugli archi di cicloide* (Ann. di mat., T. VI, 1865).

<sup>2)</sup> F. J., *Exercices de géométrie descriptive* (III éd., Paris 1893), p. 545.  
<sup>3)</sup> *Essai sur les fonctions hyperboliques* (Paris 1874), p. 56 e seg. V. anche S. GÜNTHER, *Die Lehre der gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen* (Halle, 1881), p. 243 e seg.

milmente mediante un'iperbole, curva che egli chiama *cicloide iperbolica* e che è rappresentata dalle equazioni seguenti:

$$(15) \quad x = r(\varphi - \operatorname{senh} \varphi)/a^2, \quad y = r \cosh \varphi.$$

**223.** In data 6 maggio 1674 Michelangelo Ricci scriveva a Huygens: « Presa (fig. 19) la retta  $AB$  di qualsivoglia lunghezza, sopra di essa s'intendano due semicerchi simili, et eguali, e similmente posti  $BCD$ ,  $AGE$ , con i loro diametri  $BD$ ,  $AE$  perpendicolari

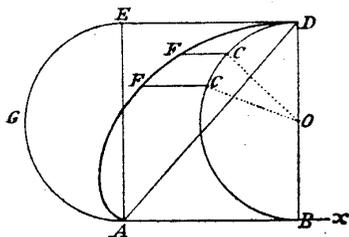


Fig. 19.

Cicloide secondaria di M. Ricci.

alla  $AB$ , e prendendo nella periferia i punti  $C$ ,  $C$ , etc., si tirino le  $CF$ ,  $CF$ , ecc. parallele alla base  $AB$ , con tal proporzione, che  $BCD$  alla  $DC$ ,  $DC$ , etc. sieno, come  $AB$  alle  $CF$ ,  $CF$ , etc. I punti  $F$ ,  $F$  etc. descriveranno una linea, che sarà cicloide primaria, se  $AB$  si porrà eguale alla periferia  $BCD$ , e secondaria se la supporremo diseguale; e la medesima curva  $DFFA$ , quasi diametro del curvilineo parallelogrammo  $DCCBAGE$  lo segherà in due parti eguali; dal che segue, che il triangolo curvilineo  $AFFDCCB$  sarà la metà di esso e del suo eguale rettangolo  $AEDB$ ; e tirata la retta  $AD$ , il curvilineo  $ADFFA$  sarà eguale alla figura genitrice  $BCD$  <sup>1)</sup>.

Per trovare le equazioni della *cicloide secondaria* del Ricci prendiamo  $AB$  come asse delle  $x$  e  $AE$  come asse delle  $y$ ; posto  $AB = a$ ,  $BD = 2r$ ,  $\operatorname{ang} DOC = \omega$  si trova agevolmente

$$x = a - r \operatorname{sen} \omega - a\omega/\pi, \quad y = r + r \cos \omega;$$

ovvero — ponendo  $\omega = \pi - \varphi$  e  $a = \pi R$  —

$$(16) \quad x = R\varphi - r \operatorname{sen} \varphi, \quad y = r - r \cos \varphi$$

e questa è la cercata rappresentazione analitica. Siccome per  $R = r$  le (16) coincidono con le (1') così è evidente che della nuova curva è caso particolare la cicloide ordinaria. Dalle stesse (16) si deduce:

<sup>1)</sup> *Oeuvres de Huygens*, T. VII (La Haye, 1897), p. 381.

$$\begin{aligned} \text{area } ABDFFA &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} y \, dx = \int_0^{\pi} (r - r \cos \varphi) (R - r \cos \varphi) \, d\varphi = \\ &= Rr \int_0^{\pi} d\varphi - 2Rr \int_0^{\pi} \cos \varphi \, d\varphi + r^2 \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \pi (Rr + r^2/2), \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \text{area } ABCDFFA &= \pi Rr = \frac{1}{2} \cdot \pi R \cdot 2r = \frac{1}{2} a \cdot 2r = \\ &= \frac{1}{2} \text{rettangolo } ABDE = \frac{1}{2} ABCDEGA. \end{aligned}$$

È questo il principale dei teoremi enunciati dal Ricci: gli altri non sono conseguenza. Sembra che essi siano rimasti ignoti al pubblico sino al momento (1897) in cui la surriferita lettera vide la luce insieme alle altre che formano il carteggio scientifico di Huygens. Tuttavia la curva a cui si riferiscono detti teoremi non rimase del tutto ignota; infatti, se si dividono in un dato rapporto  $k$  le normali della curva rappresentata dall'equazione (1') si ottiene una curva rappresentata come segue:

$$x = \frac{r}{1+k} \{ (1+k)\varphi - \operatorname{sen} \varphi \}, \quad y = \frac{r}{1+k} \{ 1 - \cos \varphi \};$$

e siccome queste equazioni sono della forma (16), così la curva corrispondente non differisce da una cicloide secondaria del Ricci. Ora, appunto partendo dall'esposta considerazione, il Mannheim <sup>1)</sup> s'imbattè nelle stesse curve e notò che sono rettificabili mediante archi d'ellisse, cosa che è facile verificare mediante le equazioni precedenti.

D'altra parte Clairaut nel trattare certe questioni di meccanica <sup>2)</sup>, trovò che una di esse è risolta da una curva descritta dall'estremo del raggio di un cerchio quando il centro percorre uniformemente una retta ed il raggio stesso ruota uniformemente attorno al centro; ora tale curva può rappresentarsi con due equazioni del tipo seguente

$$x = at + b - r \operatorname{sen} (at + \beta), \quad y = r - r \cos (at + \beta),$$

le quali sono facilmente riducibili alla forma (16). Va notato che

<sup>1)</sup> *Nouv. Ann. de math.*, II Ser., T. III (1864), Quest. 699, risolta ivi T. IV (1865), p. 55. Cfr. anche la memoria del MANNHEIM, *Recherches géométriques sur les longueurs comparées de différentes courbes* (Journ. Ec. pol., Cah. XL, 1863).

<sup>2)</sup> A. CLAIRAUT, *Solution de quelques problèmes de dynamique par rapport aux tractions* (Mém. de Paris, 1736).

il Clairaut, definita la curva risoltrice nel modo anzidetto, soggiunge: « tout le monde reconnaitra dans cette description la cycloïde allongée ou accourcie ».

La nuova cicloide non gode di spiccate proprietà<sup>1)</sup>, onde l'abbandoniamo per altre più importanti generalizzazioni dell'ordinaria cicloide. Prima però osserviamo che, se nelle definizioni delle tre primitive cicloidi, si toglie la condizione che il moto considerato sia uniforme, si ottengono delle nuove curve che, appunto come generalizzazioni delle cicloidi, furono studiate da Varignon in una memoria presentata all'Accademia di Parigi il 31 marzo 1693<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Il lettore dimostrerà agevolmente che essa è una curva algebrica e appartiene ad un sistema di caratteristiche 2, 2.

<sup>2)</sup> *Des cycloïdes ou roulettes à l'infini, traitées à la manière des lignes géométriques* (Mém. de l'Acad., T. X).

## CAPITOLO IX

### Epicycloidi, Ipoicycloidi, Evolventi di circolo.

**224.** Il concetto che guidò dalla conoide di Nicomede alla lumaca di Pascal (Vol. I, p. 171), l'idea cioè di sostituire alla base rettilinea una base circolare, condusse dalle cicloidi alle nuove curve a cui è dedicato il presente Capitolo; idea che si presenta in tal caso assai spontanea a chi ricordi come la considerazione del moto di rotolamento di un cerchio sopra un cerchio fisso risalga almeno all'epoca di Ipparco, il quale se ne servì per dare una plausibile spiegazione dei movimenti celesti (*sistema degli epicycli*).

Quando un cerchio ruzzola sopra un cerchio fisso può toccarlo o sempre esternamente o sempre internamente; nel primo caso un punto qualunque del piano di quel cerchio genera una *epicycloide* (o *epitrocoide* o *epicycloide esterna*), nel secondo una *ipoicycloide* (o *ipotrocoide* o *epicycloide interna*); gli epiteti *ordinaria*, *accorciata* e *allungata* si adoperano per indicare che il punto generatore sta sulla periferia, è interno od esterno al cerchio mobile; gli stessi aggettivi si uniscono da taluno al nome *pericycloide* quando il cerchio mobile tocca internamente il cerchio fisso ed è più grande di questo. Le epicycloidi e le ipoicycloidi vengono poi talvolta indicate complessivamente col nome di *curve cicliche*<sup>1)</sup> o anche *cicloidali*. Il più antico cenno di tali curve si trova nell'opera di Alberto Dürer intitolata *Underweysung der messung mit dem zyrkel und rychscheyt* (Nürnberg, 1525)<sup>2)</sup>, ove l'epicycloide è designata col nome di *Spinnenlinie* ed è costruita coll'aiuto di un apposito strumento<sup>3)</sup>. Ma si direbbe che le parole del geniale pittore tedesco non abbiano fatta impressione

<sup>1)</sup> Per altri nomi vedi *Intermédiaire*, T. VI, 1899, p. 266.

<sup>2)</sup> V. anche *Alberti Dureri Institutionum geometricarum libri quatuor* (Arnhemii 1606), p. 37; cfr. S. GÜNTHER, *Geschichte des math. Unterricht im deutschen Mittelalter bis zum Jahr 1525* (Berlin 1887), p. 367.

<sup>3)</sup> Un altro apparato analogo (*epicyclografo*) è descritto dal RIDOLFI nella memoria *Di alcuni usi delle epicycloidi e di uno strumento per la loro descrizione e specialmente per quella dell'ellisse* (Firenze, 1844), p. 43.

sui matematici, od almeno è soltanto più di un secolo dopo che esse fruttificarono e sotto altro cielo: giacchè è un francese — il de la Hire — che scrisse la prima trattazione metodica delle curve in questione. Sembra però che, nel concepire tali curve e nello scoprirne l'applicazione alle ruote dentate presentanti l'attrito minimo, egli abbia avuto un precursore in Francia: giacchè, nella prefazione al suo *Traité de Mécanique*, egli stesso accenna ad una ruota « dont la première invention était due à Mr. Desargues, qui étoit un des plus excellents géomètres de notre siècle »<sup>1)</sup>. Lo stesso de la Hire nell'esordio del suo *Traité des épicycloïdes, et de leurs usages dans le mécaniques*, ritornando sullo stesso soggetto dice: « mais je n'ai point su que cet excellent Géomètre (Desargues) eut jamais rien expliqué de sa construction, et comme il n'étoit pas appliqué à cette partie de la Géométrie, je crois qu'il en avait seulement déterminé la figure mécaniquement »<sup>2)</sup>; congettura questa che sembrerà indubbiamente poco accettabile a chiunque conosca l'alto valore e l'originalità di vedute di Desargues come geometra. Ad ogni modo è certo che le epicicloidi e la loro principale applicazione erano conosciute in Francia nella seconda metà del secolo XVII; ivi probabilmente ne avrà avuto notizia il Römer, che fu uno dei primi collaboratori di Cassini nel grande osservatorio fondato a Parigi nel 1667<sup>3)</sup>, ed al quale molti, seguendo l'esempio di Leibniz<sup>4)</sup>, fanno risalire l'invenzione di quelle curve e la scoperta del loro intervento nella meccanica pratica; ma ammesso anche che il Römer nel 1674 sia giunto all'una ed all'altra, la priorità spetta sempre a Desargues, il quale era sceso nella tomba sin dal 1662: al de Lahire invece spetta la gloria di avere inaugurato le investigazioni geometriche sulle curve di cui ci occupiamo, dimostrando buon numero di eleganti teoremi concernenti le loro tangenti, la rettificazione e la quadratura: li incontreremo nella trattazione che ora cominciamo<sup>5)</sup>.

**225.** Indichiamo con  $R$  il raggio del cerchio fisso, con  $r$  quello del cerchio mobile e con  $h$  la distanza del centro  $\Omega$  di questo dal punto generatore  $P$ <sup>6)</sup>. Prendiamo (fig. 20 e 21) poi come origine il centro  $O$  del cerchio fisso e come asse delle  $x$  una retta che passa pel punto di contatto  $A$  di questo col cerchio mobile, quando

<sup>1)</sup> *Mém. de l'Académie des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699* (Paris 1730). Cfr. *Oeuvres de Desargues réunies et analysés par Poudra* (Paris 1864), pag. 31.

<sup>2)</sup> *Mém. de l'Acad. des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699*, p. 222.

<sup>3)</sup> R. WOLF, *Geschichte der Astronomie* (München, 1877), p. 433.

<sup>4)</sup> V. le lettere scritte a GIOV. BERNOULLI il 18 gennaio 1698 ed il 1° febbraio 1707 (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. III, p. 477 e 811).

<sup>5)</sup> Un ricco elenco bibliografico dei lavori relativi venne somministrato da E. WÖLFFLING a *L'Intermédiaire*, T. V, 1898, p. 235 e T. VI, 1899, p. 11.

<sup>6)</sup>  $h$  si prenderà positivo quando  $P$  cade nella semiretta che va da  $\Omega$  verso  $A$ , negativo nel caso opposto.

questo è in tale posizione che  $P$  si trovi sulla linea dei centri  $O\Omega$ . Consideriamo poi il cerchio mobile in un'altra sua posizione arbitraria; ne sia  $\Omega'$  il centro,  $B$  il punto di contatto col cerchio fisso e  $P'$  la corrispondente posizione del punto mobile e  $A'$  l'estremo

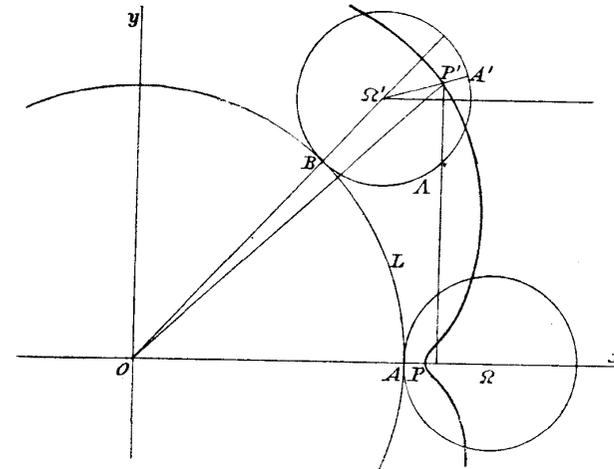


Fig. 20. — Epicicloide.

dell'arco  $\Omega P'$ ; avremo evidentemente  $\text{arc } A L M = \text{arc } A' \Lambda B$ ; onde, posto  $\text{ang } B O A = \varphi$ ,  $\text{ang } B \Omega' A' = \psi$ , si avrà

$$(1) \quad R \varphi = r \psi.$$

Considerando ora che la retta  $O P'$  e la spezzata  $O \Omega' P'$  hanno i medesimi estremi, avremo che

$$\text{proiez. } P O' = \text{proiez. } O \Omega' + \text{proiez. } \Omega' P';$$

noi faremo le proiezioni ortogonalmente sui due assi; ma, a questo punto, bisogna distinguere il caso dell'epicicloide dal caso dell'ipoicicloide. Per l'epicicloide si ha (fig. 20)

$$O \Omega' = R + r, \quad \text{ang } (\Omega' P', O x) = \varphi + \psi - \pi;$$

per l'ipoicicloide invece (fig. 21)

$$O \Omega' = R - r, \quad \text{ang } (\Omega' P', O x) = \varphi - \psi;$$

quindi per l'epicicloide sussistono le equazioni

$$(2_e) \quad \begin{aligned} x &= (R + r) \cos \varphi - h \cos (\varphi + \psi), \\ y &= (R + r) \sin \varphi - h \sin (\varphi + \psi), \end{aligned}$$

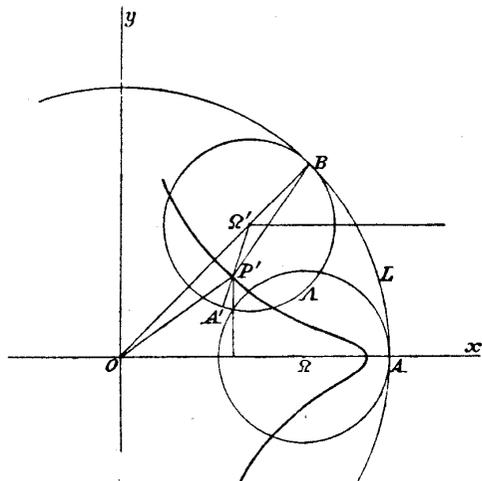


Fig. 21. — Ipoicicloide.

mentre per l'ipocicloide si ha

$$(2_h) \quad \begin{aligned} x &= (R - r) \cos \varphi + h \cos (\varphi - \psi), \\ y &= (R - r) \sin \varphi + h \sin (\varphi - \psi). \end{aligned}$$

Queste equazioni insieme alla (1) porgono la rappresentazione analitica di tutte le curve cicliche; è in generale conveniente eliminare uno degli angoli  $\varphi$  e  $\psi$ . Eliminando  $\psi$  le (2) divengono:

$$(3_e) \quad \begin{aligned} x &= (R + r) \cos \varphi - h \cos \left[ \frac{R + r}{r} \varphi \right], \\ y &= (R + r) \sin \varphi - h \sin \left[ \frac{R + r}{r} \varphi \right] \end{aligned}$$

$$(3_h) \quad \begin{aligned} x &= (R - r) \cos \varphi + h \cos \left[ \frac{R - r}{r} \varphi \right], \\ y &= (R - r) \sin \varphi - h \sin \left[ \frac{R - r}{r} \varphi \right] \end{aligned} \quad ^1)$$

Si elimini invece  $\varphi$ ; ponendo

$$(4) \quad \frac{r}{R} = n$$

( $n$  si chiama *modulo* della curva), si ottiene

$$(4_e) \quad \begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{1 + n}{n} \cos n \psi - \frac{h}{r} \cos (n + 1) \psi, \\ \frac{y}{r} &= \frac{1 + n}{n} \sin n \psi - \frac{h}{r} \sin (n + 1) \psi \end{aligned}$$

$$(4_h) \quad \begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{1 - n}{n} \cos n \psi + \frac{h}{r} \cos (1 - n) \psi, \\ \frac{y}{r} &= \frac{1 - n}{n} \sin n \psi - \frac{h}{r} \sin (1 - n) \psi: \end{aligned}$$

si può notare che l'equazione (4<sub>h</sub>) nasce dalla (4<sub>e</sub>) cambiando  $r$ ,  $\psi$ ,  $n$  risp. in  $-r$ ,  $-\psi$ ,  $-n$ .

Dalle equazioni trovate scaturisce agevolmente una conseguenza della massima importanza.

Indichiamo con  $E(R, r, h)$  la curva rappresentata dalle equazioni (3<sub>e</sub>) e con  $H(R, r, h)$  quella rappresentata dalle equazioni (3<sub>h</sub>).

Nella (3<sub>e</sub>) invece delle costanti  $R, r, h$  introduciamone altre  $R_1, r_1, h_1$  legate alle prime dalle relazioni:

$$(5) \quad R_1 = \frac{hR}{r}, \quad r_1 = \frac{h(R+r)}{r}, \quad h_1 = R + r,$$

<sup>1)</sup> Se  $R < r$ , e si mutano le direzioni positive degli assi coordinati le (3<sub>h</sub>) divengono:

$$\begin{aligned} x &= (r - R) \cos \phi - h \cos \left[ \frac{r - R}{r} \phi \right] \\ y &= (r - R) \sin \phi - h \sin \left[ \frac{r - R}{r} \phi \right]. \end{aligned}$$

onde

$$R_1 < r_1$$

esse diverranno

$$x = h_1 \cos \varphi + (R_1 - r_1) \cos \frac{r_1 \varphi}{r_1 - R_1},$$

$$y = h_1 \sin \varphi + (R_1 - r_1) \sin \frac{r_1 \varphi}{r_1 - R_1};$$

e ponendo

$$\frac{r_1}{r_1 - R_1} \varphi = \varphi_1, \quad x_1 = -x, \quad y_1 = -y$$

si potranno scrivere

$$x_1 = (r_1 - R_1) \cos \varphi_1 - h_1 \cos \left[ \frac{r_1 - R_1}{r_1} \varphi_1 \right],$$

$$y_1 = (r_1 - R_1) \sin \varphi_1 - h_1 \sin \left[ \frac{r_1 - R_1}{r_1} \varphi_1 \right].$$

Paragonando queste alle equazioni (3<sub>n</sub>) si vede che la curva da esse rappresentata è da designarsi simbolicamente con  $H(R_1, r_1, h_1)$ . Dunque: *l'epicicloide E (R, r, h) non differisce dall'epicicloide E (R<sub>1</sub>, r<sub>1</sub>, h<sub>1</sub>) quando sussistano le relazioni (5). Similmente se sussistono le relazioni*

$$(5') \quad R_1 = \frac{hR}{r}, \quad r_1 = \frac{h(R-r)}{r}, \quad h_1 = R-r,$$

*l'ipocicloide H (R, r, h) coincide con l'ipocicloide H (R<sub>1</sub>, r<sub>1</sub>, h<sub>1</sub>)<sup>1)</sup>.*

Se si considera il modulo  $n_1 = r_1/R_1$  si ha, quando sussistono le (5),  $n_1 = n + 1$  e quando sussistono le (5')  $n_1 = n - 1$ . Nel caso di epicicloidi ed ipocicloidi ordinari è  $h = r$ ; le (5) divengono  $R_1 = R$ ,  $r_1 = h_1 = R + r$ , mentre le (5') si mutano in  $R_1 = R$ ,  $r_1 = h_1 = r - R$ : si arriva così alla duplice generazione degli epicicloidi ordinari avvertita da de la Hire ed Eulero<sup>2)</sup>; l'analogo teorema

<sup>1)</sup> Quando  $R < r$  in queste formole bisogna cambiare il segno della differenza  $R - r$ .

<sup>2)</sup> *De duplici genesi tam epicycloidum quam hypocycloidum* (Acta Petrop. pro anno 1781, Part I, 1784). La stessa proposizione venne avvertita da DANIELE BERNOULLI e comunicata a GOLDBACH da NICOLA BERNOULLI con lettera datata 2 giugno 1725; GOLDBACH ne diede una dimostrata nella risposta scritta il 18 settembre 1725 (P. H. FUSS, *Correspondance math. et phys. de quelques célèbres géomètres du XVIII<sup>e</sup> siècle*, T. II, St. Pétersbourg, 1843, p. 168-170).

generale venne scoperto da parecchi, ma in tempi assai più vicini a noi<sup>1)</sup>.

Altre conseguenze che si traggono dalla trovata rappresentazione analitica delle curve cicliche concernono la forma di esse. Considerazioni analoghe a quelle svolte nel n. 218 portano a concludere che *in generale le epicicloidi ordinarie hanno infinite cuspidi sulla periferia del cerchio base, quelle allungate possiedono invece infiniti punti d'inflessione e quelle accorciate infiniti punti doppi*. Inoltre tutti i punti reali della curva (3<sub>e</sub>) stanno entro la corona limitata dai due cerchi di centro  $O$  e raggi  $|R + r \pm h|$  mentre quelli della curva (3<sub>h</sub>) stanno entro l'analogo spazio limitato dai cerchi di centro  $O$  e raggi  $|R - r \pm h|$ .

**226.** La generazione delle epicicloidi acquista maggiore chiarezza e conduce a nuove conseguenze se si considera come caso limite del movimento determinato da un poligono  $ABC\dots$  che si sposta nel piano con la condizione che i suoi lati coincidano successivamente con i lati (supposti ordinatamente eguali ai lati di quel poligono) di un poligono fisso  $A'B'C'\dots$ <sup>2)</sup>. Consideriamo i due poligoni quando il lato  $AB$  del primo coincide col lato  $A'B'$  del secondo; si immagini ora che il poligono mobile ruoti attorno al vertice  $B'$  sinché il suo lato  $BC$  si disponga sopra  $B'C'$ ; un punto  $P$  invariabilmente connesso al primo descriverà in corrispondenza un arco  $P_1P_2$  del cerchio di centro  $B'$  e di raggio  $B'P$  e sarà  $\text{ang } PB'P_1 = \text{ang } CB'C'$ . Effettuando ora sul poligono mobile una seconda rotazione di centro  $C'$  per modo che il suo vertice  $D$  cada in  $D'$ , il punto  $P_1$  descriverà un secondo arco di cerchio di centro  $C'$  e raggio  $C'P_1$ . Continuando così si vedrà che la traiettoria del punto  $P$

<sup>1)</sup> GILDEMEISTER, *De lineis curvis epicycloidibus et hypocycloidibus* (Diss., Marburg 1866); BELLERMANN, *Epicykloiden und Hypocykloiden* (Diss. Jena 1867); FOURRET, *Sur la double génération des épicycloides planes* (Nouv. Ann., 2<sup>a</sup> Serie, T. VIII, 1869); A. PROCTOR, *A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves* (London 1878), p. 154-157. Cfr. VIETOR, *Die Polkreispaare einer Cykloide* (Zeitschrift, T. XXV, 1880), e CH. WIENER, *Doppelte Entstehungsweise der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven* (Id., T. XXVI, 1881, e XXVII, 1882); F. W. REED, *On parametric and pseudographic transformations* (Amer. math. Monthly, T. III, 1926). F. SCHILLING in una memoria che citeremo a p. 108 (Zeitschr. Math. Phys., T. 44, 1899) distingue i due modi di generazione con le locuzioni di centro coperto e centro libero, secondo che la superficie del cerchio mobile ricopre o non il cerchio fisso.

Dall'esposto teorema emerge che la distinzione fra epicicloidi e ipocicloidi è possibile esclusivamente tenendo conto della definizione da cui si parte.

<sup>2)</sup> R. HENNIG, *Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten* (G. di Crelle, T. LXV, 1866; ivi le due curve generate dal ruzzolamento interno ed esterno di una stessa curva sulla stessa base vengono considerate come costitutive una *zweiseitige Roulette* o *Doppelroulette*); SCHLÖMILCH, *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, II Tl., II Aufl. (Leipzig 1873), p. 320 e seg.

consta di una serie di archi circolari con i centri nei vertici del poligono fisso. Supponendo ora che i lati dei due poligoni siano infinitesimi, si otterrà il movimento determinato dallo svilupparsi di una curva mobile sopra una curva fissa; e la traiettoria del punto  $P$  sarà l'inviluppo di una serie di cerchi aventi i loro centri sopra la curva fissa. Siccome in ogni suo punto l'inviluppo ha comune la tangente (e quindi la normale) con la corrispondente inviluppata e siccome la normale all'inviluppata (che è un cerchio) passa pel (centro di questo, cioè pel) punto di contatto della corrispondente posizione della curva mobile con la curva fissa, così si ha un metodo semplicissimo per trovare la normale in ogni punto della traiettoria; notevole osservazione di Descartes<sup>1)</sup>, che comprende come suo caso specialissimo la costruzione da lui scoperta (v. p. 81) per la normale alla cicloide. Particolarizzando le considerazioni precedenti si vede che ogni epicycloide od ipocicloide si può considerare come inviluppo di un cerchio di raggio variabile il cui centro descrive una circonferenza fissa. Tale conseguenza si può confermare e meglio precisare col calcolo seguente<sup>2)</sup>.

Si prenda, come prima, per origine il centro  $O$  del cerchio fisso e per asse delle  $x$  una retta tale che contenga tanto il centro  $\Omega$  del cerchio mobile in una sua posizione quanto la posizione corrispondente del punto generatore  $P$  (fig. 20 e 21). Si consideri il cerchio mobile in una sua posizione qualunque e si cerchi l'inviluppo del cerchio di centro  $B$  e raggio  $\Omega'P'$ . Ritenendo tutte le notazioni di prima vedremo che l'equazione generale dell'inviluppante è

$$(x - R \cos \varphi)^2 + (y - R \sin \varphi)^2 = h^2 + r^2 - 2 h r \cos \varphi$$

o per la (1)

$$(6) \quad x^2 + y^2 + R^2 - 2 R x \cos \frac{r \psi}{R} - 2 R y \sin \frac{r \psi}{R} = h^2 + r^2 - 2 h r \cos \psi.$$

Differenziando questa rispetto a  $\psi$  se ne trae:

$$(7) \quad x \sin \frac{r \psi}{R} - y \cos \frac{r \psi}{R} = h \sin \psi.$$

<sup>1)</sup> V. anche HUYGENS, *Horologium oscillatorium*. Parte I, Prop. 15 (è noto che la dedica di questa celebre opera porta la data 25 marzo 1673). Una dimostrazione analitica semplice di questa costruzione leggesi nelle Note di F. FRENET sur un théorème de Descartes, courbe roulant sur une autre (Nouv. Ann. Math., T. XIII, 1854).

<sup>2)</sup> O. WETZEL, *Die cyclischen Curven als Einhüllungskurven eines beweglichen Kreises* (Diss. Marburg 1880).

Mediante le (6) (7) potremo esprimere  $x$  e  $y$  in funzione di  $\psi$ . A tale scopo poniamo

$$(8) \quad x - R \cos \frac{r \psi}{R} = \xi, \quad y - R \sin \frac{r \psi}{R} = \eta;$$

le (6) (7) diverranno:

$$(6') \quad \xi^2 + \eta^2 = h^2 + r^2 - 2 h r \cos \psi,$$

$$(7') \quad \xi \sin \frac{r \psi}{R} - \eta \cos \frac{r \psi}{R} = h \sin \psi.$$

Alla (6') si soddisfa ponendo

$$(9) \quad \begin{aligned} \xi &= \cos \lambda \sqrt{h^2 + r^2 - 2 h r \cos \psi}, \\ \eta &= \sin \lambda \sqrt{h^2 + r^2 - 2 h r \cos \psi}; \end{aligned}$$

e queste mutano la (7') nella seguente:

$$\sin \left[ \frac{r \psi}{R} - \lambda \right] = \frac{h \sin \psi}{\sqrt{h^2 + r^2 - 2 h r \cos \psi}};$$

in corrispondenza

$$\cos \left[ \frac{r \psi}{R} - \lambda \right] = \varepsilon \frac{r - h \cos \psi}{\sqrt{h^2 + r^2 - 2 h r \cos \psi}},$$

(ove  $\varepsilon = \pm 1$ ), ossia per le (9)

$$(10) \quad \xi \cos \frac{r \psi}{R} + \eta \sin \frac{r \psi}{R} = \varepsilon (r - h \cos \psi).$$

Risolviendo le (7') (10) rispetto a  $\xi, \eta$  si ottiene:

$$\xi = a \sin \psi \sin \frac{r \psi}{R} + \varepsilon (r - h \cos \psi) \cos \frac{r \psi}{R},$$

$$\eta = -a \sin \psi \cos \frac{r \psi}{R} + \varepsilon (r - h \cos \psi) \sin \frac{r \psi}{R}$$

cioè per le (8):

$$(11) \quad \begin{aligned} x &= (R + \varepsilon r) \cos \frac{r \psi}{R} - h \varepsilon \cos \frac{(R + \varepsilon r) \psi}{R}, \\ y &= (R + \varepsilon r) \sin \frac{r \psi}{R} - h \varepsilon \sin \frac{(R + \varepsilon r) \psi}{R}. \end{aligned}$$

Questa è la rappresentazione analitica dell'inviluppo: essa prova che questo è costituito da due distinte curve cicliche, corrispondenti ai due valori  $\pm 1$  che può assumere  $\varepsilon$ .

Le epicicloidi sono suscettibili di una seconda generazione come inviluppo: è infatti facilissimo dimostrare (e lasciamo al lettore di farlo) che se due punti descrivono la periferia di un cerchio con velocità angolari in rapporto costante, l'inviluppo della retta che li congiunge è un epicicloide. Ed è notevole che un'altra analoga curva nasce dividendo nel medesimo rapporto tutte codeste congiungenti<sup>1)</sup>.

Non meno notevole dei precedenti è il metodo di generazione indicato nel seguente teorema: Se due lati consecutivi  $OE_1$ ,  $OE_2$  di un parallelogrammo articolato ruotano uniformemente (ma con velocità diverse  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ) attorno al comune vertice  $O$ , il quarto vertice  $M$  descriverà un'epicloide od un'ipocicloide<sup>2)</sup>. Per dimostrarlo noteremo che si può sempre supporre che in origine i lati  $OE_1$  e  $OE_2$  coincidano in una retta; prenderemo questa per asse delle  $x$ , porremo  $OE_1 = l_1$ ,  $OE_2 = l_2$ , e, come è lecito,  $\text{ang } E_1 O x = t\omega_1$ ,  $\text{ang } E_2 O x = t\omega_2$ ,  $t$  essendo una variabile libera (il tempo). Detti allora  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z$  i numeri complessi<sup>3)</sup> che rappresentano, nel modo consueto, i punti  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $M$ , avremo:

$$z_1 = l_1 e^{i\omega_1 t}, \quad z_2 = l_2 e^{i\omega_2 t}, \quad z = z_1 + z_2$$

onde

$$(12) \quad z = l_1 e^{i\omega_1 t} + l_2 e^{i\omega_2 t} \quad 4).$$

<sup>1)</sup> ECKARDT, *Einige Sätze über die Epicycloide und Hypocycloide* (Zeitschrift, T. XV, 1870); WOLSTENHOLME, *On epicycloids and hypocycloids* (Proc. Lond. Math. Soc., T. IV, 1873); F. SCHWERING, *Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten* (Leipzig 1884), p. 77. Come caso particolare si vede che, in un orologio a lancette eguali, l'inviluppo delle congiungenti delle posizioni corrispondenti dei loro estremi è un ipocicloide; se le lancette avessero lunghezze differenti, l'inviluppo sarebbe l'evoluta di un'epicloide (v. *Intermédiaire*, T. II, p. 9 e 396).

<sup>2)</sup> Questa generazione venne segnalata dal BELLERMANN nella *Diss. citata nella nota 1* a pag. 105 e da F. MORLEY nella memoria *On adjustable cycloidal and trochoidal curves* (Amer. Journ. Math., T. XVI, 1894); ed in un caso particolare dal NEUBERG (*Sur la cycloïde*, Nouv. Corr. math., T. V, 1879). F. SCHILLING l'ha applicata per costruire degli apparati che servono a descrivere tutte le curve cicliche: v. l'articolo *Ueber neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyclischen Curven* (Zeitschrift, T. XLIV, 1899).

<sup>3)</sup> La più antica menzione di applicazione dei numeri complessi (o se si vuole del calcolo delle equipollenze) alle epicicloidi e ipocicloidi trovansi in una lettera diretta da E. FRANÇOISE a G. BELLAVITIS e da questi pubblicata nella *II Parte dell'XI Rivista di giornali* (Atti Ist. Ven., IV Ser., T. I, 1872-72), nella quale sono elegantemente stabilite parecchie proprietà e risolte alcune questioni concernenti le dette curve.

<sup>4)</sup> Lo studio dall'indicato punto di vista delle curve cicliche ha con-

Separando le parti reali e le parti immaginarie si conclude essere

$$x = l_1 \cos \omega_1 t + l_2 \cos \omega_2 t, \quad y = l_1 \sin \omega_1 t + l_2 \sin \omega_2 t$$

la rappresentazione analitica del luogo di  $M$ : la forma di queste equazioni conduce subito all'enunciato. Se poi si scrive la (12) come segue

$$z = \{l_1 + l_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}\} e^{i\omega_1 t}$$

e si applicano noti teoremi concernenti la rappresentazione geometrica dei numeri complessi, si concluderà: Qualunque epicicloide od ipocicloide è generabile da un punto  $M$  ruotante uniformemente attorno ad un punto  $E$ , il quale descrive, pure con velocità costante, la periferia di un cerchio fisso. Notiamo finalmente<sup>1)</sup> che il centro del parallelogrammo  $OE_1 M E_2$  è rappresentato dal numero complesso  $z/2$ , onde descrive una curva omotetica a quella generata dal punto  $M$ , cioè un'altra epicicloide<sup>2)</sup>.

L'equazione polare delle epicicloidi si presenta sotto forma così complicata che riesce di utilità pressochè nulla. Utile invece torna in parecchie occasioni l'equazione differenziale polare delle curve

dotto a considerare le linee rappresentabili con equazioni della forma

$$z = R_1 e^{i\omega} + R_2 e^{i\frac{p\omega}{q}} + R_3 e^{i\left(\frac{p\omega}{q}\right)+\varphi}$$

ove  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  sono date lunghezze,  $\phi$  un angolo dato e  $p$ ,  $q$  numeri interi positivi; esse si presentano sotto svariate forme e si possono tracciare mediante apposito apparato (il compasso SCHWARZBAND) costruito dalla Casa CHATEAU di Parigi.

<sup>1)</sup> REINCKE, *Ueber cyclischen Curven, dargestellt als geometrischer Ort des Mittelpunkts derjenigen Geraden, welche zwei auf zwei concentrischen Kreisen gleichförmig bewegte Punkte in jedem Moment verbindet* (Programm Malchin 1892).

<sup>2)</sup> L'equazione (12), con cui si può rappresentare qualsiasi epicicloide, è caso particolare della seguente:

$$z = l_0 + l_1 e^{i\omega_1 t} + \dots + l_n e^{i\omega_n t},$$

ove  $l_0$ ,  $l_1$ , ...,  $l_n$ ,  $\omega_1$ , ...,  $\omega_n$  sono numeri reali dati e  $t$  una variabile indipendente. Le curve da essa rappresentate vennero considerate da EICHLER (*Die Darstellung der cyclischen Curven und ihre Bedeutung für die Schwingungstheorie*, Hamb. Mitt., T. II, 1890), il quale ne segnalò la generazione mediante un poligono articolato analoga a quella riferita nel testo per le epicicloidi col mezzo di un parallelogramma analogo. Osserviamo anche che, senza ledere la generalità, si può sempre supporre  $l_0 = 0$ ; ne dedurremo che ogni curva di Eichler può considerarsi come luogo del baricentro di un poligono i cui vertici descrivono uniformemente altrettanti cerchi concentrici. Fra le curve in questione molte s'incontrano in ricerche di ottica e meccanica. Senza riferimento all'EICHLER, delle stesse curve si occupò R. E. MORITZ nella nota *On the kinematik construction of certain higher plane curves* (Amer. Math. Montly, T. XXXII, 1923).

stesse. Per ottenerla notiamo che posto  $R/r = n$  un epicicloide si può rappresentare colle equazioni

$$\frac{x}{r} = \frac{n+1}{n} \cos n \varphi - \cos (n+1) \varphi,$$

$$\frac{y}{r} = \frac{n+1}{n} \sin n \varphi - \sin (n+1) \varphi;$$

se ne trae

$$(\alpha) \quad \frac{\varrho^2}{r^2} = \left[ \frac{n+1}{n} \right]^2 + 1 - \frac{2(n+1)}{n} \cos \varphi.$$

D'altronde, essendo

$$\omega = \text{arc tg } \frac{y}{x},$$

si ha

$$d\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{dx}{r} \\ \frac{y}{r} & \frac{dy}{r} \end{vmatrix}}{\frac{\varrho^2}{r^2}} =$$

$$= \frac{r^2}{\varrho^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n} (1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

Ma, differenziando la (α), si ottiene

$$d\varrho = \frac{n+1}{n} \frac{r^2}{\varrho} \sin \varphi d\varphi,$$

onde la precedente diviene

$$\frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{2n+1}{\varrho} \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}},$$

cioè per la (α)

$$(14) \quad d\omega = \frac{d\varrho}{\varrho} \sqrt{\frac{\frac{\varrho^2}{r^2} - \frac{r^2}{n^2}}{\frac{r^2}{n^2} - \frac{\varrho^2}{(2n+1)^2}}}.$$

E questa è l'annunciata equazione differenziale. Appliciamola alla ricerca delle tangenti condotte dal punto  $A (\varrho_0, \omega_0)$  a una epicicloide. Se  $P (\varrho, \omega)$  è il punto di contatto di una di esse e  $\mu$  l'angolo della tangente col raggio vettore che va al punto di contatto, il triangolo  $OAP$  dà

$$\varrho = \varrho_0 \frac{\sin (\omega_0 - \omega + \mu)}{\sin \mu} = \varrho_0 [\sin (\omega_0 - \omega) \cdot \text{tg } \mu + \cos (\omega_0 - \omega)]$$

$$\text{Ma } \text{tg } \mu = \varrho \frac{d\omega}{d\varrho} \text{ onde}$$

$$(\beta) \quad \varrho = \varrho_0 [\sin (\omega_0 - \omega) \cdot \varrho \frac{d\omega}{d\varrho} + \cos (\omega_0 - \omega)].$$

Ponendo qui in luogo di  $\varrho d\omega/d\varrho$  la sua espressione data dalla equazione (14) e poi passando a coordinate cartesiane se ne deduce

$$\left\{ \frac{x^2 + y^2 - (x_0 x + y_0 y)}{y_0 x - x_0 y} \right\}^2 = \frac{x^2 + y^2 - \frac{r^2}{n^2}}{\frac{r^2}{n^2} - \frac{x^2 + y^2}{(2n+1)^2}},$$

equazione che, liberata dal fattore estraneo  $x^2 + y^2$ , diviene:

$$[x^2 + y^2 - (x x_0 + y y_0)]^2 =$$

$$= \frac{r^2}{n^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] - \frac{1}{2n+1} (x y_0 - x_0 y)^2;$$

ora, con un'opportuna trasformazione di coordinate, questa assume la forma

$$[X^2 + Y^2 - (X X_0 + Y Y_0)]^2 = a^2 (X - X_0)^2 + b^2 (Y - Y_0)^2$$

e vedremo che rappresenta la podaria di una conica; perciò: *I punti di contatto delle tangenti che si possono condurre a una curva ciclica (algebraica o trascendente) appartengono alla podaria di quel punto rispetto a una determinata conica*<sup>1)</sup>. Emerge da ciò che ogni epicicloide e ipocicloide è una curva panalgebraica appartenente a un sistema di caratteristiche 2, 2.

<sup>1)</sup> R. BLUM, *Cykloiden und Cykloidalen als Umhüllungskurven und deren Zusammenhang mit der Fusspunktkurven der Kegelschnitte* (Progr. Stuttgart, 1902).

227. Chiamisi  $s$  l'arco dell'epicicloide rappresentato dalle equazioni (3<sub>e</sub>); differenziando queste equazioni si ottiene

$$(13) \quad \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left[\frac{dx}{d\varphi}\right]^2 + \left[\frac{dy}{d\varphi}\right]^2} = \frac{R+r}{r} \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos \frac{R\varphi}{r}}$$

si ponga ora

$$r + h = a, \quad |r - h| = b, \quad \frac{R\varphi}{r} = 2\omega$$

e si otterrà

$$ds = \frac{2(R+r)}{R} \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \omega} d\omega.$$

Ma se si considera l'ellisse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  e se ne chiama  $\sigma$  l'arco si ha notoriamente

$$\text{dunque} \quad d\sigma = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \omega} d\omega$$

$$d\sigma = \frac{2(R+r)}{R} d\sigma;$$

computando gli archi tanto sull'ellisse come sull'epicicloide dal punto in cui  $\omega = 0$  se ne trae la seguente notevole relazione

$$s = \frac{2(R+r)}{R} \sigma.$$

La rettificazione delle epicicloidi dipende, adunque, come quella delle cicloidi (v. p. 74), in generale, di integrali ellittici<sup>1)</sup>. Ma nel caso speciale in cui sia  $h = r$  la (13) diviene

$$\frac{ds}{d\varphi} = 2(R+r) \operatorname{sen} \frac{R\varphi}{2r}$$

e dà

$$s = \text{Cost.} - \frac{4r(R+r)}{R} \cos \frac{R\varphi}{2r},$$

onde la rettificazione delle epicicloidi ordinarie può effettuarsi elementarmente.

<sup>1)</sup> Dimostrazioni geometriche di questo teorema trovansi nelle seguenti note: A. GOB, *Réctification des épitrochoïdes* (Mém. Soc. Liège, III Ser., T. IV, 1902) e H. WIENER, *Die Rektifikation der zyklischen Kurven* (Württemberg Math., II Ser., T. IX, 1907); M. D'OCAGNE, *Sur la rectification et la quadrature des épi- et hypocycloïdes* (Comptes rendus, T. 161, 1915).

Se si sceglie l'origine degli archi in modo che risulti  $s = 0$  per  $\varphi = 0$  dalla precedente relazione si trae

$$(14) \quad s = \frac{8r(R+r)}{R} \operatorname{sen}^2 \frac{R\varphi}{4r};$$

si può dedurne la lunghezza dell'arco di epicicloide limitato da due cuspidi consecutive, basta perciò supporre  $\varphi = 2\pi r/R$ ; si ottiene così come risultato  $8r(1 + r/R) = 8r(1 + n)$ , come trovò La Hire<sup>1)</sup>.

Indichiamo ora con  $dS$  l'area del settore infinitesimo di centro  $O$ , avente per arco l'elemento lineare dell'epicicloide (3<sub>e</sub>); avremo:

$$\frac{dS}{R+r} = \frac{x dy - y dx}{2(R+r)} = \frac{1}{2} \left\{ R+r + \frac{h^2}{r} - \frac{h(R+2r)}{r} \cos \frac{R\varphi}{r} \right\} d\varphi$$

onde integrando

$$(15) \quad S = \frac{(R+r)}{2} \left\{ (R+r + h^2/r) \varphi - \frac{h(R+2r)}{R} \operatorname{sen} \frac{R\varphi}{r} \right\},$$

e non aggiungiamo alcuna costante perchè supponiamo sia  $S = 0$  per  $\varphi = 0$ . Nel caso speciale di cicloidi ordinarie questa diviene

$$(16) \quad S = \frac{(R+r)(R+2r)}{2} \left\{ \varphi - r/R \cdot \operatorname{sen}(R\varphi/r) \right\}^2.$$

Facciamone un'applicazione supponendo  $\varphi = 2\pi r/R$ ; otterremo

$$S = \frac{\pi r(R+r)(R+2r)}{R};$$

ora il settore del circolo fisso limitato dai raggi corrispondenti agli angoli  $\varphi = 0$  e  $\varphi = 2\pi r/R$  ha un'area data da

$$\frac{1}{2} R \cdot \frac{2\pi r}{R} R = \pi r R;$$

la differenza di quei due settori è dunque

$$= \pi r^2 (3 + 2r/R) = \pi r^2 (3 + 2n),$$

come trovò La Hire<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Mém. de l'Acad. des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699 (Paris 1730), p. 234 e 239.

<sup>2)</sup> NEWTON, *Principia*, Lib. 1, Prop. 49.

<sup>3)</sup> Mém. de l'Acad. des Sciences etc., p. 230 e 231. Cfr. anche: CASWELL,

Nel caso di epicicloidi ordinarie il raggio di curvatura  $R$  è dato da

$$(17) \quad R = \frac{4r(R+r)}{2r+R} \operatorname{sen} \frac{R\varphi}{2r}$$

Eliminando  $\varphi$  tra le equazioni (14) e (17) si trova

$$\left\{ \frac{Rs}{4r(R+r)} - 1 \right\}^2 + \left\{ \frac{2r+R}{4r(R+r)} R \right\}^2 = 1,$$

equazione intrinseca dell'epicloide considerato; interpretata al solito modo essa dice che *se un'epicloide ordinaria ruotola sopra una retta fissa il luogo del centro di curvatura della curva nei successivi suoi punti di contatto con la retta è un'ellisse*<sup>2)</sup>.

Dal fatto, ora dimostrato, che ogni epicicloide ordinaria ha un'equazione intrinseca del tipo seguente

$$(18) \quad \frac{R^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1$$

si può dedurre una conseguenza importante. Intanto quest'equazione si può surrogare con le due seguenti:

$$R = a \cos \lambda, \quad s = b \operatorname{sen} \lambda,$$

$\lambda$  essendo una variabile libera. Detti  $R_1$  e  $s_1$  il raggio di curvatura e l'arco dell'evoluta della (18) si ha

$$R_1 = R \frac{dR}{ds}, \quad s_1 = R$$

cioè, per le precedenti,

$$R_1 = -\frac{a^2}{b} \operatorname{sen} \lambda, \quad s_1 = a \cos \lambda.$$

*The quadrature of a portion of the epicycloid* (Phil. Trans., 1695, n. 217) e E. HALLEY, *A general proposition for measuring all cycloids and epicycloids* (Id., n. 218).

<sup>1)</sup> Per la costruzione del centro di curvatura si veggia il § 1 del *Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten* (G. di Crellé, T. LXV, 1866) di R. HENNIG.

<sup>2)</sup> MANNHEIM, *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (G. di Liouville, 2<sup>a</sup> Serie, T. IV, 1859), p. 99; per il caso di un asteroide regolare questa proposizione fu notata prima da O. BÖKLEN (Arch. Math. Phys., T. XXXVII, 1856, p. 105).

Eliminando  $\lambda$  si conclude essere

$$\frac{R_1^2}{a^2} + \frac{s_1^2}{b^2} = \left[ \frac{a}{b} \right]^2$$

l'equazione intrinseca dell'evoluta della curva (18); paragonandola con la (18) stessa si conclude che *l'evoluta di un'epicloide ordinaria è un'altra epicicloide ad essa simile*<sup>1)</sup>: notevole proprietà pure avvertita da La Hire<sup>2)</sup>.

Riprendiamo le equazioni (3<sub>a</sub>) nell'ipotesi  $h = r$  e differenziamole rispetto a  $\varphi$ ; otterremo facilmente le relazioni seguenti (ove gli accenti indicano derivate rispetto a  $\varphi$ ):

$$x^2 + y^2 - R^2 = 4r(R+r) \operatorname{sen}^2 \frac{R\varphi}{2r}$$

$$x'^2 + y'^2 = 4(R+r)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{R\varphi}{2r}$$

$$x'y' - x'y = 2(R+r)(R+2r) \operatorname{sen}^2 \frac{R\varphi}{2r}$$

$$x'y'' - x''y' = \frac{2(R+r)(R+2r)}{r} \operatorname{sen}^2 \frac{R\varphi}{2r}$$

donde

$$\frac{x^2 + y^2 - R^2}{x^2 + y^2} = \frac{x'y' - x'y}{x'y'' - x''y'}$$

ossia

$$\begin{vmatrix} x & y & R^2 - (x^2 + y^2) \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & x'^2 + y'^2 \end{vmatrix} = 0,$$

<sup>1)</sup> Al BALITRAND si deve l'osservazione (*Intermédiaire*, T. XXIV, 1917, p. 25) che i raggi di curvatura successivi in un punto d'un epi- o ipoicicloide ordinaria costituiscono una progressione geometrica; essa fu dimostrata da chi scrive (Ivi, p. 92). Le evolute delle altre epicicloidi sono nuove curve che vennero studiate da CHR. WIENER (*Die Evoluten der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven*, Zeitschrift, T. XXVII, 1882).

<sup>2)</sup> *Mém. de l'Acad. des Sciences* T. IX, p. 265. Le evolventi delle epi- e ipoicicloidi furono dette *curve di Mannheim*; il lettore che desidera conoscerne le proprietà ricorra alle memorie sull'argomento pubblicate dal BALITRAND nelle *Nouv. Ann. de math.* (IV Ser., T. XII, 1912, e XIV, 1914).

che può anche scriversi

$$\begin{vmatrix} x & y & R^2 \\ x' & y' & xx' + yy' \\ x'' & y'' & x'^2 + y'^2 + xx'' + yy'' \end{vmatrix} = 0.$$

Questa relazione ammette una notevole interpretazione geometrica; essa dice, infatti che, indicando con  $X$  e  $Y$  coordinate correnti, le tre rette

$$xX + yY = R^2$$

$$(X - x)x' + (Y - y)y' = 0$$

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' = x'^2 + y'^2$$

concorrono in un punto. Ora: la seconda di queste equazioni rappresenta la normale nel punto  $(x, y)$  al dato epicicloide e la terza ne è la derivata, onde le rette che esse rappresentano si tagliano nel centro di curvatura dell'epicloide nel punto  $(x, y)$ ; tale punto appartiene anche alla retta rappresentata dalla prima di dette equazioni, che è la polare del punto  $(x, y)$  rispetto al cerchio  $X^2 + Y^2 = R^2$ . Ricordando la costruzione di Descartes della normale (v. p. 106) si conclude: *Per costruire il centro di curvatura in un punto P di un'epicloide o ipocicloide ordinaria, basta determinare l'intersezione della polare di P col cerchio fisso con la congiungente di P con il punto di contatto di questo con la posizione corrispondente del cerchio mobile*<sup>1)</sup>.

**228.** Dalle equazioni (3 e) si deduce che l'equazione della normale alla curva da esse rappresentata ha per equazione:

$$(19) \quad \begin{aligned} & \left[ (x - R \cos \varphi) - r \cos \varphi + h \cos \left( \frac{R+r}{r} \varphi \right) \right] \\ & \left[ \sin \varphi - \frac{h}{r} \sin \left( \frac{R+r}{r} \varphi \right) \right] - \\ & \left[ (y - R \sin \varphi) - r \sin \varphi + h \sin \left( \frac{R+r}{r} \varphi \right) \right] \\ & \left[ \cos \varphi - \frac{h}{r} \cos \left( \frac{R+r}{r} \varphi \right) \right] = 0; \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> ZEHME, *Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cycloiden* (Iserlohn und Elberfeld, 1854). Cfr.: DIEU, *Note sur les hypocycloïdes* (Nouv. Ann. de Math., T. XIX, 1860); HENNIG, *Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten* (Journ. f. Math., T. LXV, 1866); E. CESÀRO, *Remarques de géométrie infinitésimale* (Mathésis, T. VII, 1887) e *Sur deux classes remarquables de lignes planes* (Nouv. Ann. Math., III Ser., T. VII, 1887).

questa equazione è evidentemente soddisfatta da  $x = R \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \varphi$ , onde la normale passa pel punto che ha queste coordinate; e questo non è altro che il punto  $B$  (fig. 20 e 21) in cui il cerchio mobile tocca il cerchio fisso; la normale in  $P'$  è pertanto la retta  $P'B$ , d'accordo con un'osservazione generale precedente.

Nel caso di epicicloidi ordinarie, servendosi delle equazioni (4<sub>a</sub>) si vede facilmente che le equazioni

$$(20) \quad x \sin \frac{(2n+1)\varphi}{2} - y \cos \frac{(2n+1)\varphi}{2} = \frac{2n+1}{n} r \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$(21) \quad x \cos \frac{(2n+1)\varphi}{2} + y \sin \frac{(2n+1)\varphi}{2} = \frac{1}{n} r \cos \frac{\varphi}{2}$$

rappresentano rispettivamente la tangente e la normale all'epicloide nel punto  $(\varphi)$ . Dette quindi  $u$  e  $v$  le coordinate plückeriane della normale si avrà:

$$(22) \quad u = \frac{n \cos \frac{(2n+1)\varphi}{2}}{r \cos \varphi/2}, \quad v = \frac{-n \sin \frac{(2n+1)\varphi}{2}}{r \cos \varphi/2}$$

Se immaginiamo di condurre le normali all'epicloide nei punti in cui essa è toccata da rette passanti pel punto  $x, y$  l'angolo  $\varphi$  soddisferà l'equazione (20); onde eliminando  $\varphi$  fra le equazioni (20) e (22) si otterrà l'equazione tangenziale di una curva avente per tangenti tutte quelle normali. Ora le (22) danno

$$u^2 + v^2 = \frac{n^2}{r^2 \cos^2 \varphi/2};$$

d'altronde, sostituendo nella (20) i valori di

$$\sin \frac{(2n+1)\varphi}{2}, \quad \cos \frac{(2n+1)\varphi}{2}$$

dati dalle (22), si ottiene

$$xu - yv = (2n+1) \operatorname{tg} \varphi/2;$$

ed eliminando  $\varphi$  tra queste due ultime equazioni si ottiene:

$$(xu - yv)^2 = \left[ \frac{2n+1}{n} \right]^2 r^2 (u^2 + v^2) - (2n+1)^2.$$

Essendo questa di secondo grado in  $u, v$  si può concludere con C. Juel: *Le normali ad un ipocicloide ne' punti in cui esso è toccato da rette uscenti da un punto involuppano una conica*<sup>1)</sup>.

Questa elegante proprietà è collegata alla circostanza che qualunque epicicloide od ipocicloide fa parte di un sistema di cui entrambe le caratteristiche valgono 2. Lasciamo al lettore di dimostrarlo. Ed osserviamo invece che la polare del punto  $(\varphi)$  dell'epicicloide ordinario ( $3_0$ ) rispetto al cerchio  $x^2 + y^2 = l^2$  ha per equazione:

$$x \left\{ (R+r) \cos \varphi - r \cos \frac{R+r}{r} \varphi \right\} + \\ + y \left\{ (R+r) \sin \varphi - r \sin \frac{R+r}{r} \varphi \right\} = l^2;$$

differenziandola rispetto a  $\varphi$  e combinando il risultato coll'equazione primitiva si trovano le equazioni

$$x = \frac{l^2 \sin \frac{R+2r}{2r} \varphi}{(R+2r) \sin \frac{R\varphi}{2r}}, \quad y = - \frac{l^2 \cos \frac{R+2r}{2r} \varphi}{(R+2r) \sin \frac{R\varphi}{2r}}$$

per rappresentare la polare reciproca di quell'epicicloide rispetto a quel cerchio. Ora, introducendo un sistema di coordinate polari di cui l'asse polare coincide coll'asse delle  $y$ , queste due equazioni si possono surrogare con la seguente

$$\rho = \frac{l^2}{(2n+1)R} \frac{1}{\sin \frac{\omega}{2n+1}};$$

siccome questa rappresenta una curva a noi già nota (Vol. I, p. 430) così si conclude: *la curva polare reciproca di un'epicicloide rispetto ad un cerchio concentrico alla base è una spiga*<sup>2)</sup>.

Servendosi dell'equazione (20) si vede che la perpendicolare calata dal centro del cerchio base sulla tangente è rappresentata dall'equazione

$$x \cos \frac{(2n+1)\varphi}{2} + y \sin \frac{(2n+1)\varphi}{2} = 0,$$

<sup>1)</sup> *Intermédiaire*, T. I, 1894, p. 22 a 243, T. II, 1895, 208.

<sup>2)</sup> V. JERABEK, *Courbes polaires réciproques des épicycloïdes et hypocycloïdes* (Mathesis, 2<sup>a</sup> Serie, T. IX, 1899).

onde le coordinate del piede di quella perpendicolare sono:

$$x = \frac{2n+1}{2} r \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{(2n+1)\varphi}{2}, \\ y = - \frac{2n+1}{2} r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{(2n+1)\varphi}{2};$$

introducendo anche qui coordinate polari col porre

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{(2n+1)\varphi}{2} = \omega$$

si vede che il luogo del detto piede ha per equazione

$$\rho = \frac{2n+1}{2} r \cdot \cos \frac{\omega}{2n+1},$$

dunque (Vol. I, p. 419) *la podaria di un'ordinaria epicicloide rispetto al centro del cerchio base è una rodonea*<sup>1)</sup>.

I teoremi testè esposti mostrano quanto notevoli siano le epicicloidi e le ipocicloidi in cui  $h = r$ . Ma vi è un altro valore speciale che merita di essere rilevato: è il valore  $h = R - r$ . In tale ipotesi le equazioni (3  $h$ ) divengono:

$$x = (R - r) \left[ \cos \varphi + \cos \left[ \frac{R - r}{r} \varphi \right] \right], \\ y = (R - r) \left[ \sin \varphi - \sin \left[ \frac{R - r}{r} \varphi \right] \right]$$

ossia

$$x = 2 (R - r) \cos \frac{R\varphi}{2r} \cos \frac{(2r - R)\varphi}{2r}, \\ y = 2 (R - r) \cos \frac{R\varphi}{2r} \sin \frac{(2r - R)\varphi}{2r}$$

Ora da queste si deduce

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{(2r - R)\varphi}{2r}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 2 (R - r) \cos \frac{R\varphi}{2r};$$

<sup>1)</sup> BÖKLEN, *Einige geometrische Sätze über Kurven* (Zeitschrift, T. III, 1858).

se, quindi, introduciamo coordinate polari ponendo

$$\omega = \text{arc tg } \frac{y}{x}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

avremo

$$\omega = \frac{(2r - R)\varphi}{2r}, \quad \rho = 2(R - r) \cos \frac{R\varphi}{2r};$$

ed eliminando  $\varphi$

$$\rho = 2(R - r) \cos \frac{R\omega}{2r - R}.$$

Siccome quest'equazione rappresenta una rodonea generale (Vol. I, p. 420) così resta dimostrato che *qualunque rodonea è generabile in due modi col ruzzolamento di un cerchio sopra un altro cerchio fisso*; perciò essa può considerarsi tanto come un'epicicloide come un'ipocicloide; è un fatto importante scoperto nel 1844 da Luigi Ridolfi<sup>1)</sup>, e ritrovato venti anni dopo da Durige<sup>2)</sup> e più tardi nuovamente da E. W. Hyde<sup>3)</sup>.

**229.** Tutte le considerazioni svolte sinora sussistono qualunque sia il valore del modulo; ma a nuove proprietà delle epicicloidi si giunge facendo qualche ipotesi sul valore di esso. Notiamo anzitutto che dalle (3<sub>e</sub>) si deduce la doppia equazione:

$$x \pm iy = (R + r) e^{\pm i\varphi} - h e^{\pm i \frac{R+r}{r} \varphi}.$$

Se quindi il modulo è razionale  $(R+r)/r$  sarà una frazione che, ridotta ai suoi minimi termini potrà indicarsi con  $p/q$  ( $p > q$ ). Se si pone  $e^{i\varphi} = \lambda^q$ ,  $x + iy = \xi$ ,  $x - iy = \eta$  le equazioni precedenti diverranno:

$$(23) \quad \xi = (R + r) \lambda^q - h \lambda^p,$$

$$\eta = (R + r) \lambda^{-q} - h \lambda^{-p} = \frac{(R + r) \lambda^{p-q} - h}{\lambda^p};$$

questa nuova rappresentazione parametrica prova che, nel caso

<sup>1)</sup> V. lo scritto citato nella nota (3), pag. 99.

<sup>2)</sup> *Ueber eine besondere Art cyclischer Curven* (Zeitschrift, T. IX, 1864). Ivi le rodonee, considerate dall'attuale punto di vista, sono indicate col nome *sternformige Cycloide*.

<sup>3)</sup> *Foliate Curves* (The Analyst, T. II, 1875).

attuale si ha una curva algebrica d'ordine  $2p$ ; dunque: *le epicicloidi di modulo razionale sono tutte curve algebriche*. Quella rappresentazione parametrica, che è analoga a quella che incontrammo nello studio delle curve di Lissajous (Vol. I, p. 563) si presta benissimo alla determinazione delle caratteristiche plückeriane delle curve in questione<sup>1)</sup>; si trova ad es. che la classe della curva è  $p + q$ .

Se, ancora più in particolare, si suppone che  $n$  sia un numero intero positivo l'equazione (20), quando  $x$  e  $y$  si suppongono dati, servirà a determinare i punti di contatto delle  $2n+1$  tangenti che si possono condurre dal punto  $(x, y)$  alla curva. Tale determinazione si facilita introducendo coordinate polari. Posto infatti  $x = \rho \cos \omega$ ,  $y = \rho \sin \omega$  la (20) diviene

$$\rho \sin \left[ \frac{2n+1}{2} \varphi - \omega \right] = \frac{2n+1}{n} r \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Supponiamo in particolare

$$\rho = \frac{2n+1}{n} r;$$

quest'equazione diverrà

$$\sin \left[ \frac{2n+1}{2} \varphi - \omega \right] = \sin \frac{\varphi}{2}$$

e ad essa si soddisfa ponendo

$$\frac{2n+1}{2} \varphi - \omega = \frac{\varphi}{2} + 2k\pi \quad \text{oppure} \quad = (2k+1)\pi - \frac{\varphi}{2},$$

ossia ponendo

$$n\varphi - \omega = 2k\pi \quad \text{oppure} \quad (n+1)\varphi - \omega = (2k+1)\pi$$

cioè assumendo

$$\varphi = \frac{\omega + 2k\pi}{n} \quad \text{oppure} \quad \varphi = \frac{\omega + (2k+1)\pi}{n+1}.$$

Nella prima di queste formole basterà attribuire a  $k$  i valori  $0, 1, \dots, n-1$  e nella seconda i valori  $0, 1, \dots, n$ ; si ottengono così

<sup>1)</sup> S. ROBERTS, *Note on the Plückerian Characteristics of Epi- and Hypotrochoids and allied Curves* (Proc. L. M. S., T. IV, 1873); ELLING HOLST, *Ueber algebraische cycloidischen Curven* (Lie Archiv, T. VI, 1881); F. MORLEY, *On the Epycycloid* (Amer. Journ., T. XIII, 1890); D. M. Y. SOMMERVILLE, *The singularities of the algebraic trochoids* (Proc. L. M. S., II Ser., T. XVIII, 1920).

due gruppi uno di  $n$  e l'altro di  $n + 1$  tangenti dell'epicicloide formati ciascuno da fasci regolari. Dunque: *Le tangenti di un'epicicloide di modulo intero  $n$  concorrono  $n$  ad  $n$  e  $n + 1$  ad  $n + 1$  in punti di una circonferenza, formando in ogni punto di questa due fasci regolari; quella circonferenza è concentrica alla base dell'epicicloide ed il raggio sta nel rapporto  $1/n - 1$  col raggio del cerchio mobile.* È questa una notevole generalizzazione di una notissima proprietà dell'ipocicloide tricuspide (Vol. I, p. 194)<sup>1)</sup>.

Fra le epicicloidi algebriche si trovano parecchie curve note che crediamo opportuno di enumerare:

I. Sia  $r = h = R/2$ . Le  $(3_n)$  divengono:  $x = R \cos \varphi$ ,  $y = 0$ , che rappresentano il diametro del cerchio base steso sull'asse delle  $x$ ; dunque: *se un cerchio si muove conservandosi sempre tangente internamente ad un cerchio di raggio doppio, un punto qualunque della sua periferia descriverà un diametro del cerchio fisso.* Questo curioso teorema, trovandosi nel *Traité des épicycloïdes* del de La Hire<sup>2)</sup> venne da molti attribuito a questo geometra; ma fu osservato<sup>3)</sup> che si legge non soltanto in un lavoro di Tacquet stampato nel 1651 non soltanto in uno di Cardano stampato nel 1572, ma nella celebre opera di Copernico *De revolutionibus orbium coelestium*, pubblicata, come è noto, nel 1543.

II. Per  $R = 2r$  le  $(3_n)$  divengono

$$x = (r + h) \cos \varphi, \quad y = (r - h) \sin \varphi$$

che rappresentano un'ellisse; su quest'osservazione si fonda la costruzione di uno speciale ellissografo<sup>4)</sup>.

III. Se  $R = r$  le  $(3_e)$  divengono:

$$x = 2r \cos \varphi - h \cos 2\varphi, \quad y = 2r \sin \varphi - h \sin 2\varphi$$

ossia

$$x - h = 2 \cos \varphi \cdot (r - h \cos \varphi), \quad y = 2 \sin \varphi \cdot (r - h \cos \varphi);$$

ora, se introduciamo coordinate polari col porre  $x - h = \rho \cos \omega$ ,  $y = \rho \sin \omega$  avremo,  $\rho = 2(r - h \cos \varphi)$ ,  $\omega = \varphi$ , onde eliminando  $\varphi$

$$\rho = 2(r - h \cos \omega)$$

<sup>1)</sup> È implicitamente contenuta nel lavoro di P. SERRET, *Sur les équivalentes d'ordre quelconque* (C. R., T. CXX, 1895). Altra proprietà degli epicicloidi ordinari algebrici è esposta da T. L. BENNETT nella nota *A theorem on hypocycloid by the method of circular coordinates* (Amer. math. Monthly, T. XXVIII, 1921).

<sup>2)</sup> Mém. de l'Acad. des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699, p. 254.

<sup>3)</sup> C. LE PAIGE, *Sur un théorème attribué à La Hire* (Bibl. math., 1887); M. CURTZE, *Ueber einem De La Hire zugeschriebenen Lehrsatz* (Id., 1888).

<sup>4)</sup> RIDOLFI, op. cit., p. 25.

che rappresenta (Vol. I, p. 176) una lumaca di Pascal<sup>1)</sup>; in particolare, se  $h = r$ , si vede che la cardioide è una speciale epicicloide. Questo modo di considerare la cardioide fu osservato, se non prima, da G. CRAMER<sup>2)</sup>. Ma l'epicicloide speciale corrispondente all'ipotesi  $R = r = h$  venne studiato molto anteriormente, cioè sin dal 1678, dall'Abate de Vaumesle<sup>3)</sup>: è anzi alle comunicazioni fattegli da questo che Huygens venne spinto ad occuparsi delle epicicloidi in generale<sup>4)</sup>.

Applicando l'equazione (20) al caso  $r/R = n = 1$  si ottiene come equazione della tangente alla cardioide

$$x \sin \frac{3\varphi}{2} - y \cos \frac{3\varphi}{2} = 3r \sin \frac{\varphi}{2};$$

ce ne serviremo per stabilire una proprietà notevole di tale curva. Posto

$$\varphi = \pi - 2\theta, \quad 3r = a$$

l'equazione precedente diviene

$$(a) \quad -x \cos 3\theta + y \sin 3\theta = a \cos \theta.$$

L'equazione

$$(a') \quad -x \cos 3\theta' + y \sin 3\theta' = a \cos \theta'$$

rappresenterà una tangente perpendicolare alla precedente quando  $\theta' = \theta + \pi/2$  oppure  $\theta' = \theta \pm \pi/6$ .

Nella prima ipotesi l'equazione (a') diviene

$$(\beta) \quad x \cos 3\theta + y \sin 3\theta = a \sin \theta;$$

ora eliminando  $\theta$  fra le (a) e ( $\beta$ ) si trova

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{9r^2}{2}$$

onde da ogni punto di questo cerchio partono coppie di tangenti ortogonali della data cardioide.

<sup>1)</sup> SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven deutsch von Fiedler* (Leipzig, 1873), p. 345.

<sup>2)</sup> CRAMER, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Génève, 1750), p. 431.

<sup>3)</sup> Vedi le lettere scritte a HUYGENS il 29 ottobre e il 19 novembre 1678, il 31 luglio 1679 (*Oeuvres de Huygens*, T. VIII, p. 117, 127 e 189); ivi la curva in questione è chiamata *cicloïde circolare*.

<sup>4)</sup> *Oeuvres de Huygens*, T. VIII, p. 117, nota 6.

Nell'altra ipotesi e prendendo il segno + la ( $\alpha'$ ) diviene

$$(\gamma) \quad x \operatorname{sen} 3\theta + y \operatorname{cos} 3\theta = a \operatorname{cos} (\theta + \pi/6);$$

eliminando  $\theta$  fra le ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) si ottiene

$$8(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 6a^2(x^2 + y^2 - a^2) + 3a^3(2x - a) = 0,$$

equazione che si sarebbe ottenuta anche prendendo nella ( $\alpha'$ )  $\theta' = \theta - \pi/6$ . Onde la curva di 4° ordine da essa rappresentata esaurisce il luogo dei punti da cui partono coppie di tangenti ortogonali della cardioide. Ora se si trasporta l'origine nel punto di coordinate  $(a/2, 0)$  e poi si passa a coordinate polari si arriva a scrivere la equazione precedente sotto la forma seguente

$$\rho + a \operatorname{cos} \omega = a \operatorname{cos} \pi/6,$$

la quale equazione rappresenta una lumaca di Pascal. Dunque: *l'ortotica di una cardioide è formata da una circonferenza ed una lumaca di Pascal*<sup>1)</sup>.

IV. Se un cerchio ruzzola su un cerchio di raggio metà, si ottiene una curva che alcuni<sup>2)</sup>, seguendo l'esempio di R. A. Proctor<sup>3)</sup>, chiamano *nefroide*<sup>4)</sup>.

V. Per  $R = 3r$  le (3h) divengono

$$x = r(2 \operatorname{cos} \varphi + \operatorname{cos} 2\varphi), \quad y = r(2 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} 2\varphi),$$

le quali rappresentano un ipocicloide tricuspidato (Vol. I, p. 192)<sup>5)</sup>.

VI. Supponiamo  $R = 4r$ ,  $h = r$  le (3h) danno:

$$x = 3r \operatorname{cos} \varphi + r \operatorname{cos} 3\varphi, \quad y = 3r \operatorname{sen} \varphi - r \operatorname{sen} 3\varphi$$

ossia

$$\frac{x}{r} = 4 \operatorname{cos}^3 \varphi, \quad \frac{y}{r} = -4 \operatorname{sen}^3 \varphi$$

<sup>1)</sup> WOLSTENHOLME, *On the locus of point of concurrence of perpendicular tangents to a cardioid* (Proc. Lond. math. Soc., IV, 1873).

<sup>2)</sup> H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig, 1908), p. 139; F. BALITRAND, *Note sur la néphroïde de Proctor* (Nouv. Ann., IV Ser., T. 14, 1914).

<sup>3)</sup> *A treatise on the Cycloid* ecc. (London, 1878), p. 79.

<sup>4)</sup> Come trisettrice la s'incontra nell'articolo di G. M. JUREDINI, *A new curve connected with two classical problems* (Amer. Math. Month., T. XXIII, 1926).

<sup>5)</sup> L'ipocicloide tricuspidato s'incontra nell'articolo di D. F. BARROW, *On the envelope of the Wallace lines of an inscribed quadrangle* (Amer. math. Montly, T. XXVI, 1919).

donde, eliminando  $\varphi$

$$\left[ \frac{x}{4r} \right]^{2/3} + \left[ \frac{y}{4r} \right]^{2/3} = 1$$

che rappresenta un asteroide regolare (Vol. I, p. 340)<sup>1)</sup>.

**230.** Senza arrestarci ad esporre le applicazioni che riceveremo le epicycloidi alle arti<sup>2)</sup>, a problemi di meccanica<sup>3)</sup>, ed alla divisione di un angolo in parti eguali<sup>4)</sup>, osserveremo che nella definizione generale di epicycloide ed ipocicloide nulla vieta di supporre che il raggio della base od il raggio del cerchio mobile siano infiniti; ed infatti nella prima ipotesi si ricade nelle cicloidi, e nella seconda in nuove curve il cui studio servirà di chiusa al presente Capitolo. Se il punto generatore sta sulla retta mobile la curva risultante altro non è che una ordinaria *evolvente di circolo*<sup>5)</sup>, in caso diverso è una *evolvente allungata* od *accorciata* secondochè il punto mobile sta rispetto alla retta dalla parte opposta o dalla stessa parte del centro del circolo base<sup>6)</sup>. Le equazioni di queste evolventi potrebbero ottenersi dalle equazioni (3<sub>e</sub>) con un passaggio al limite<sup>7)</sup>; ma preferiamo stabilirle direttamente. Supporremo che il punto generatore parta da una posizione  $P$  tale che la sua congiungente col centro  $O$  del cerchio fisso riesca perpendicolare alla corrispondente posizione  $g$  della retta mobile. Assumeremo per origine (figura 22) il punto  $O$  e per asse delle  $x$  la retta  $OP$ ; chiameremo  $a$

<sup>1)</sup> Questa osservazione sembra sia stata fatta per la prima volta da C. STURM; v. la Question 39 delle Nouv. Annales, risolta nel 1843 dal BRETON (de Champ).

<sup>2)</sup> POPPE, *Ausführliche Geschichte der Anwendung aller krummen Linien* etc. (Nürnberg, 1802), p. 124 e 210.

<sup>3)</sup> Sin dai tempi di NEWTON (*Principia*, Lib. I, Sect. X) era noto che le epicycloidi risolvono alcuni problemi di tautocronismo in mezzi resistenti; ma il risultato più generale in proposito è quello esposto da HATON DE LA GOUPILLIÈRE nella nota: *Théorème sur le tautochronisme des epicycloïdes quand on a égard au frottement* (G. di Liouville, 2<sup>a</sup> Serie, T. XIII, 1868).

<sup>4)</sup> RIDOLFI, op. cit., p. 13-17.

<sup>5)</sup> Questa curva — di cui parlò il LA HIRE nel suo *Traité des Roulettes* (Mém. de l'Acad. des Sciences, 1706, p. 369) — venne trattata metodicamente dal DIDEROT nel suo *Examen de la développante du cercle* che forma il secondo dei *Mémoires sur différents sujets de mathématiques* (Paris, 1748).

<sup>6)</sup> Queste curve s'incontrano anche in questioni di meccanica di matematica applicata. Ad es. risolvono il seguente problema: « Un piano ruota con velocità uniforme attorno ad un asse ad esso perpendicolare; un suo punto muovesi per forza d'inerzia in causa di una spinta ricevuta in origine; trovarne la traiettoria » (ROTH, *Ueber die Bahn eines freien Theilchen auf einer sich gleichmässig drehende Scheibe*, Repertorium der Physik, T. 22, 1886).

<sup>7)</sup> V. ad es. SERRET, *Calcul différentiel*, II éd. (Paris 1879), p. 356.

il raggio del dato cerchio,  $A$  l'estremo del raggio  $OP$  e  $h$  la distanza  $AP$ . Se  $g'$  è una posizione qualunque della retta mobile e  $B$  il suo punto di contatto, prendendo  $BA' = \text{arc } BAA'$  sarà  $A'$  un punto dell'evolvente ordinaria del dato cerchio; condotto poi il segmento

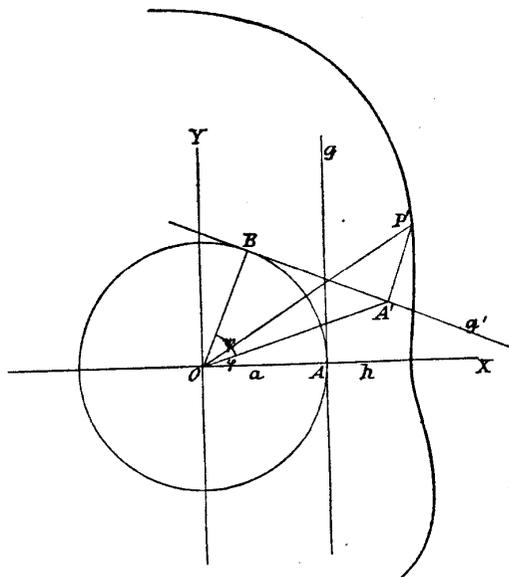


Fig. 22.

$A'P' = h$  e perpendicolare alla retta  $g'$ , sarà  $P'$  un punto dell'evolvente generata dal punto  $P$ . Poniamo:

$$\text{ang } A'Ox = \varphi, \text{ ang } BOA' = \psi, \overline{OA'} = \rho;$$

avremo

$$a(\varphi + \psi) = \sqrt{\rho^2 - a^2}, \quad a = \rho \cos \psi$$

ossia

$$\rho = \frac{a}{\cos \psi}, \quad \varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a} - \psi,$$

o anche

$$(24) \quad \rho = \frac{a}{\cos \psi}, \quad \varphi = \frac{\rho \sin \psi}{a} - \psi.$$

Queste equazioni possono considerarsi come una rappresentazione parametrica dell'ordinaria evolvente di cerchio; eliminando fra esse l'angolo ausiliario  $\psi$  si conclude

$$(25) \quad \varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a} - \text{arc } \cos \frac{a}{\rho},$$

che è l'equazione polare di detta curva. Ora, se si indicano con  $\xi, \eta$  le coordinate del punto  $A'$  cioè i prodotti  $\rho \sin \varphi$  e  $\rho \cos \varphi$  le (24) danno:

$$\xi = a \cos(\text{tg } \psi) + a \text{tg } \psi \sin(\text{tg } \psi),$$

$$\eta = a \sin(\text{tg } \psi) - a \text{tg } \psi \cos(\text{tg } \psi),$$

o, ponendo

$$(26) \quad \text{tg } \psi = \omega,$$

$$\xi = a \cos \omega + a \omega \sin \omega, \quad \eta = a \sin \omega - a \omega \cos \omega.$$

Ora, poichè il segmento  $A'P'$  è parallelo al raggio  $OB$ , dette  $x$  e  $y$  le coordinate del punto  $P'$  si ha:

$$x = \xi + h \cos(\varphi + \psi), \quad y = \eta + h \sin(\varphi + \psi);$$

inoltre, per le (24) e (26),

$$\varphi + \psi = \text{tg } \psi = \omega;$$

dunque finalmente

$$(27) \quad x = (a + h) \cos \omega + a \omega \sin \omega,$$

$$y = (a + h) \sin \omega - a \omega \cos \omega;$$

questa è la cercata rappresentazione analitica di tutte le evolventi di cerchio. Ne dedurremo qualche conseguenza. Anzitutto esse danno:

$$(28) \quad \frac{ds}{d\omega} = \sqrt{h^2 + a^2 \omega^2}$$

onde se  $h \neq 0$

$$(29) \quad s = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + a^2 \omega^2} + \frac{h^2}{4a} \log \frac{\omega + \sqrt{h^2 + a^2 \omega^2}}{\omega - \sqrt{h^2 + a^2 \omega^2}} + \text{cost.}$$

mentre se  $h = 0$  e si sceglie per origine degli archi il punto in cui  $\omega = 0$ ,

$$(29') \quad s = \frac{1}{2} a \omega^2.$$

Osservisi poi che è:

$$\frac{dx}{d\omega} = a \operatorname{sen} \omega - y, \quad \frac{dy}{d\omega} = -a \cos \omega + x$$

$$\frac{d^2x}{d\omega^2} = 2a \cos \omega - x, \quad \frac{d^2y}{d\omega^2} = 2a \operatorname{sen} \omega - y;$$

si otterrà quindi come valore del raggio di curvatura  $R$ :

$$(30) \quad R = \frac{(h^2 + a^2 \omega^2)^{3/2}}{a^2 \omega^2 + h^2 - ah};$$

le equazioni (29) e (30), dando  $R$  e  $s$  in funzione del parametro  $\omega$ , porgono la rappresentazione analitica della curva dal punto di vista della geometria intrinseca.

Se  $h = 0$  la (30) diviene

$$(30') \quad R = a \omega.$$

Eliminando  $\omega$  fra le (29') e (30') si trova:

$$(31) \quad R^2 = 2as;$$

è l'equazione intrinseca dell'ordinaria evolvente di circolo<sup>1)</sup>; essa mostra che la curva corrispondente appartiene alla classe segnalata a p. 74, e che se un'ordinaria evolvente di circolo ruzzola sopra una retta, il luogo dei centri di curvatura della curva nei suoi successivi punti di contatto con quella retta è una parabola<sup>2)</sup>. Osserviamo anche che, detto  $\varepsilon$  l'angolo di contingenza essendo in generale  $ds/d\varepsilon = R$  e nel caso attuale  $R = \sqrt{2as}$  si ha

$$\frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{2a} d\varepsilon,$$

onde, integrando,  $2s = a\varepsilon^2$ , equazione di forma analoga all'equazione

<sup>1)</sup> AMPÈRE, *Mémoire sur les avantages qu'on peut tirer, dans la théorie des courbes, de la considération des paraboles osculatrices* (Journ. de l'Ec. pol., XIV cah., 1808).

<sup>2)</sup> MANNHEIM, vedi p. 97 della memoria citata a p. 114.

canonica della parabola: ciò spiega il nome di *parabola originaria angularis* adoperato dal Krause per indicare la curva di cui ci occupiamo<sup>1)</sup>.

La quadratura dell'evolvente ordinaria dà luogo ad un elegante teorema scoperto dal Mannheim<sup>2)</sup>. Per esporlo chiamiamo  $T$  la superficie del triangolo avente per lati la tangente  $TM$  e gli

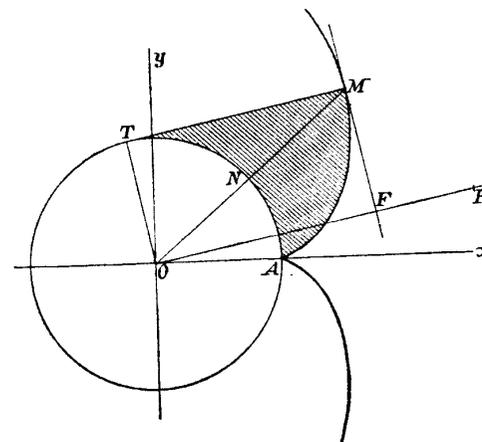


Fig. 23.

archi  $TA$  e  $AM$  del cerchio e dell'evolvente (fig. 23); dalle (24) si deduce:

$$\text{area settore } OAM = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} a^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} \left[ \frac{1}{\cos^2 \psi} - 1 \right] =$$

$$= \frac{a^2}{6} \operatorname{tg}^3 \psi.$$

Ma, se  $N$  è l'intersezione di  $OM$  col dato cerchio si ha:

$$\text{area settore } AON = \frac{1}{2} a^2 \varphi = (a^2/2) (\operatorname{tg} \psi - \psi);$$

$$\text{area settore } NOT = (a^2/2) \psi;$$

$$\text{area triang. } OTM = \frac{1}{2} a \cdot a (\varphi + \psi) = (a^2/2) \operatorname{tg} \psi.$$

<sup>1)</sup> *Novae theoriae linearum curvarum* (München, 1835), p. 79.

<sup>2)</sup> Mem. cit. p. 98.

Ora:

$T =$  settore  $O A M$  — sett.  $A O N$  + triang.  $O T M$  — sett.  $N O T$

dunque

$$T = (a^2/6) \operatorname{tg}^3 \psi.$$

Ma per la (29')

$$\operatorname{arc} A M = (a/2) \operatorname{tg}^2 \psi$$

onde

$$T = \frac{1}{3} \operatorname{arc} A T \operatorname{arc} A M;$$

equazione che dice: l'area compresa fra un arco di cerchio, l'arco corrispondente di una sua evolvente e la relativa tangente del primo, è misurato dalla terza parte del prodotto di quei due archi.

**231.** Fra l'evolvente di cerchio ordinaria e altre curve a noi già note esistono notevoli relazioni che non possono venir qui passate sotto silenzio.

a) Essendo in generale  $\operatorname{arc} \cos x = \pi/2 - \operatorname{arc} \sin x$ , ponendo  $\pi/2 + \varphi = \omega$  la (25) diverrà:

$$(23') \quad \omega = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{a} + \operatorname{arc} \sin \frac{a}{\varrho}.$$

Serviamocene per determinare la podaria di questa curva. Siano (fig. 23),  $\varrho_1$ ,  $\omega_1$  le coordinate del piede  $F$  della perpendicolare abbassata dal polo sulla tangente in  $M(\varrho, \omega)$ ; se si chiama  $\mu$  l'angolo  $O M F$  si trova:

$$\omega - \omega_1 = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \varrho_1 = \varrho \operatorname{sen} \mu, \quad \operatorname{sen} \mu = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho}$$

onde

$$\cos(\omega - \omega_1) = \operatorname{sen} \mu = \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho}, \quad \varrho_1 = \sqrt{\varrho^2 - a^2}$$

$$\omega - \omega_1 = \operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{\varrho^2 - a^2}}{\varrho} = \operatorname{arc} \sin \frac{\varrho}{a}$$

e la (23') diviene

$$\omega_1 = \frac{\varrho_1}{a}$$

ossia

$$(31) \quad \varrho_1 = a \omega_1.$$

Siccome questa rappresenta una spirale d'Archimede, così la podaria della evolvente di un cerchio rispetto al centro di questo, è una spirale d'Archimede<sup>1)</sup>.

b) Si descriva li cerchio di centro  $O$  e raggio  $l$ . Se sulla retta  $O T$  si prende il punto  $P(\varrho', \omega')$  tale che  $O T \cdot O P = l^2$ , il punto  $P$  sarà polo rispetto a quel cerchio della tangente  $M P$  ed il luogo di  $P$  sarà la polare reciproca dell'evolvente considerata. Ora essendo  $\omega_1 = \omega'$ ,  $\varrho' \varrho_1 = l^2$ , la (31) diviene

$$\frac{l^2}{\varrho'} + a \omega' = 0$$

ossia

$$\varrho' \omega' + \frac{l^2}{a} = 0$$

che rappresenta una spirale iperbolica. Dunque: la polare reciproca della evolvente di un cerchio rispetto ad un cerchio a questo concentrico è una spirale iperbolica<sup>2)</sup>.

c) Si consideri l'elica cilindrica rappresentata dalle equazioni:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi, \quad z = h \varphi;$$

l'equazione generica della tangente è

$$\frac{x - r \cos \varphi}{-r \operatorname{sen} \varphi} = \frac{y - r \operatorname{sen} \varphi}{r \cos \varphi} = \frac{z - h \varphi}{h}.$$

Facendo ivi  $z = 0$  si ottiene

$$x = r (\cos \varphi + \varphi \operatorname{sen} \varphi), \quad y = r (\operatorname{sen} \varphi - \varphi \cos \varphi).$$

Paragonando queste equazioni alle (27) si conclude: La traccia dell'elicoide sviluppabile sul piano della base è un'ordinaria evolvente di cerchio<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> CLAIRAUT, Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1740. V. anche LA GOURNERIE, *Traité de géométrie descriptive*, III ed., III Partie (Paris 1901), p. 143.

<sup>2)</sup> NEUBERG, Nouv. Corrèsp. math., T. VI, 1880. Un'altra relazione fra le stesse due curve è esposta nella nota di SCHIFFNER, *Ueber die Tangente der hyperbolischen Spirale* (Archiv f. Math., T. LXVI, 1881).

<sup>3)</sup> MONGE, *Géométrie descriptive* (Paris, An VII), p. 112.

## CAPITOLO X

## Le Pseudocicloidì.

232. Riprendiamo le equazioni (3<sub>h</sub>) (p. 103) e cerchiamo se esse possono rappresentare una curva reale anche quando le costanti  $R, r, h$  che in esse entrano non siano tutte reali<sup>1)</sup>. Porremo quindi per generalità

$R = R_1 + i R_2$ ,  $r = r_1 + i r_2$ ,  $h = h_1 + i h_2$ ,  $\varphi = (\varrho_1 + i \varrho_2) \omega$   
ove  $R_1, \dots, \varrho_2$  sono otto costanti reali. Porremo inoltre per brevità

$$d_1 + i d_2 = (R_1 - r_1) + i (R_2 - r_2);$$

$$(*) \quad \sigma_1 + i \sigma_2 = \frac{(\varrho_1 + i \varrho_2) (d_1 + i d_2)}{r_1 + i r_2}$$

Le citate equazioni diverranno quindi:

$$(1) \quad \begin{cases} x = (d_1 + i d_2) \cos (\varrho_1 + i \varrho_2) \omega + (h_1 + i h_2) \cos (\sigma_1 + i \sigma_2) \omega \\ y = (d_1 + i d_2) \sin (\varrho_1 + i \varrho_2) \omega - (h_1 + i h_2) \sin (\sigma_1 + i \sigma_2) \omega \end{cases}$$

Affinchè  $x$  e  $y$  risultino reali per tutti i valori reali di  $\omega$  alle costanti introdotte devono imporsi alcune equazioni di condizione; ed una non difficile discussione prova che a queste si soddisfa soltanto nei due modi seguenti:

$$(2) \quad \begin{array}{l} 1^\circ \quad d_2 = h_2 = \varrho_2 = \sigma_2 = 0 \\ 2^\circ \quad d_1 = h_1, \quad d_2 = -h_2, \quad \varrho_1 = -\sigma_1, \quad \varrho_2 = \sigma_2 \end{array}$$

<sup>1)</sup> Per ciò che segue vedi E. WÖLFING, *Ueber Pseudotrochoiden* (Zeitschrift, T. XLIV, 1899), ove si trovano anche estese notizie bibliografiche.

Nel primo caso si vede subito che è  $r_2 = 0, R_2 = 0$  onde dalle (1) scompare ogni traccia d'immaginarietà; esse allora ricadono nelle citate equazioni (3<sub>h</sub>), onde la curva corrispondente è un'ordinaria epicycloide.

Nel secondo caso si ha  $d_1 - i d_2 = h_1 + i h_2$ ,  $\sigma_1 + i \sigma_2 = -(\varrho_1 - i \varrho_2)$  e le (1) divengono:

$$(3) \quad \begin{cases} x = 2 d_1 \cos \varrho_1 \omega \cosh \varrho_2 \omega + 2 d_2 \sin \varrho_1 \omega \sinh \varrho_2 \omega \\ y = 2 d_1 \sin \varrho_1 \omega \cosh \varrho_2 \omega - 2 d_2 \cos \varrho_1 \omega \sinh \varrho_2 \omega. \end{cases}$$

Le curve reali così rappresentate, essendo generate dal ruzzolamento d'un cerchio complesso sopra un altro analogo, vennero chiamate da E. Cesàro e da E. Wölfing *Pseudocicloidì* o *Pseudotrochoidì*.

Siccome dalla (\*) si trae

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{(d_1 r_1 + d_2 r_2) \varrho_1 + (d_1 r_2 - d_2 r_1) \varrho_2}{r_1^2 + r_2^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{-(d_1 r_2 - d_2 r_1) \varrho_1 + (d_1 r_1 + d_2 r_2) \varrho_2}{r_1^2 + r_2^2}, \end{aligned}$$

e siccome per le (2)  $\sigma_1 = -\varrho_1$ ,  $\sigma_2 = \varrho_2$ , così si trova:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varrho_1 (r_1 d_1 + r_2 d_2 + r_1^2 + r_2^2) + \varrho_2 (d_1 r_2 - d_2 r_1) &= 0, \\ \varrho_1 (d_1 r_2 - d_2 r_1) + \varrho_2 (r_1 d_1 + r_2 d_2 - r_1^2 + r_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

donde eliminando  $\varrho_1$  e  $\varrho_2$

$$(5) \quad d_1^2 + d_2^2 = r_1^2 + r_2^2,$$

o anche

$$(5') \quad R_1^2 + R_2^2 - 2 R_1 r_1 - 2 R_2 r_2 = 0.$$

Ora  $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$  rappresenta il modulo della distanza del centro del cerchio fisso dal centro del cerchio mobile, mentre  $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$  rappresenta il modulo del raggio di quest'ultimo; dunque: *affinchè un cerchio complesso generi, ruzzolando sopra un altro, una pseudocicloide, deve il valore assoluto del suo raggio essere eguale al valore assoluto della distanza del suo centro dal centro della base.*

Le (3) si possono scrivere un po' diversamente. Posto infatti

$\mu = \varrho_2/\varrho_1$  le (4) e (5) danno

$$(6) \quad \mu = \frac{R_1}{R_2 - 2r_2} = \frac{R_2}{2r_1 - R_1}$$

e se si introduce invece di  $\omega$  l'angolo  $\theta = \mu \omega$  si avrà:

$$(7) \quad \begin{cases} x = 2(R_1 - r_1) \cos \theta \cosh \mu \theta + 2(R_2 - r_2) \sin \theta \sinh \mu \theta \\ y = 2(R_1 - r_1) \sin \theta \cosh \mu \theta - 2(R_2 - r_2) \cos \theta \sinh \mu \theta, \end{cases}$$

ove  $\mu$  è determinato dalla (6).

Ad ogni quaterna di valori di  $R_1, R_2, r_1, r_2$  soddisfacenti la condizione (5') corrisponde quindi una pseudocicloide; onde le pseudocicloidi distinte sono  $\infty^3$ ; sono  $\infty^2$  quelle di forme distinte. Come fra le cicloidi sono notevoli quelle in cui il punto generatore sta sulla periferia del cerchio mobile, così fra le pseudocicloidi meritano una speciale considerazione quelle in cui  $h = \pm r$ . Supposto anzitutto  $h = r$ , le (2) danno  $R_1 = 2r_1, R_2 = 0$  onde  $R = R_1, r = R_1/2 + ir_2$ ; la curva è generata dal ruzzolamento di un cerchio complesso sopra un cerchio reale; si chiama *paracicloide*<sup>1)</sup> ed ha per equazioni

$$(8) \quad \begin{cases} x = 2r_1 \cos \theta \cosh \mu \theta - 2r_2 \sin \theta \sinh \mu \theta, \\ y = 2r_1 \sin \theta \cosh \mu \theta + 2r_2 \cos \theta \sinh \mu \theta \end{cases}$$

ove  $\mu = -r_1/r_2$ .

Supposto invece  $h + r = 0$  le (2) danno  $R_1 = 0, R_2 = 2r_2$  onde  $R = iR_2$  e  $r = r_1 + iR_2/2$ ; la curva è generata dal ruzzolamento di un cerchio di raggio complesso sopra uno di raggio puramente immaginario; si chiama *ipercicloide*<sup>2)</sup> ed ha per equazioni

$$(9) \quad \begin{cases} x = -2r_1 \cos \theta \cosh \mu \theta + 2r_2 \sin \theta \sinh \mu \theta, \\ y = -2r_1 \sin \theta \cosh \mu \theta - 2r_2 \cos \theta \sinh \mu \theta \end{cases}$$

ove  $\mu = r_2/r_1$ .

**233.** Le pseudocicloidi godono di qualità analoghe a quelle dimostrate per gli epicicloidi; ad es. sono rettificabili mediante in-

<sup>1)</sup> R. DE SAUSSURE, *Sur la génération des courbes par roulement*, Diss. Genève, 1895, p. 41-55; *Note sur les lignes cycloïdales* (Amer. Journ., T. 17, 1895).

<sup>2)</sup> R. DE SAUSSURE mem. cit.

tegrali ellittici. Le paracicloidi e le ipercicloidi poi ne possiedono altre degne di menzione. Così dalle (8) (9) si ottiene come espressione dell'arco  $s$  e del raggio di curvatura  $R$ :

$$s = \pm 2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2} \cosh \mu \theta, \quad R = 2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1} \sinh \mu \theta.$$

Eliminando  $\theta$  si trova:

$$(10) \quad \left[ \frac{s}{r_2} \right]^2 - \left[ \frac{R}{r_1} \right]^2 = \left[ 2 \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_2} \right]^2:$$

è la comune equazione intrinseca della paracicloide e dell'ipercicloide; essa dice che *quando una paracicloide od una ipercicloide ruzzola sopra di una retta il luogo dei centri di curvatura della curva nei successivi punti di contatto è un'iperbole*. Paragonando la (10) coll'equazione intrinseca delle epicicloidi trovata a p. 114 si può dire che  $R^2 = as^2 + bs + c$  è l'equazione intrinseca di un'epicicloide se  $a < 0$ , mentre se  $a > 0$  appartiene ad una paracicloide o ad un'ipercicloide<sup>1)</sup>. Un'altra conseguenza merita di essere rilevata. Sia

$$\frac{R^2}{a^2} - \frac{s^2}{b^2} = 1$$

l'equazione intrinseca di una paracicloide od ipercicloide. Ponendo, come è lecito,

$$R = a \sec \lambda, \quad s = b \operatorname{tg} \lambda,$$

ove  $\lambda$  è un parametro, e chiamando  $R_1$  e  $s_1$  il raggio di curvatura e l'arco della evolvente, applicando il consueto procedimento, otterremo per rappresentare l'evolvente le due equazioni:

$$R_1 = \frac{a^2}{b} \operatorname{tg} \lambda, \quad s_1 = a \sec \lambda.$$

E se chiamiamo  $R_2$  e  $s_2$  gli elementi analoghi per la seconda evolvente troveremo similmente:

$$R_2 = \frac{a^3}{b^2} \sec \lambda, \quad s_2 = \frac{a^2}{b} \operatorname{tg} \lambda;$$

<sup>1)</sup> CESÀRO, *Sur deux classes remarquables de lignes planes* (Nouv. Ann. de Math., 3<sup>a</sup> Serie, T. VII, 1888). Cfr. una questione proposta dal CESÀRO stesso nel T. I, 1894, dell'*Intermédiaire* (p. 153) e le risposte di C. JUEL (T. II, p. 160), R. DE SAUSSURE (Id., p. 356) e G. TARRY (Id., p. 390). Nel caso escluso  $a = 0$ , si ha un'ordinaria evolvente di circolo.

eliminando  $\lambda$  si conclude essere

$$\frac{R_2^2}{a^2} - \frac{s_2^2}{b^2} = \left[ \frac{a^2}{b^2} \right]^2$$

l'equazione intrinseca della seconda evoluta. Dunque: *come le epicicloidi ordinarie sono curve simili alle loro prime evolute, così le paracicloidi e le ipericicloidi sono curve simili alle loro seconde evolute.* Ciò spiega perchè queste curve siano state incontrate da Eulero nel corso delle sue ricerche sulle curve che sono simili alle loro evolute di qualche ordine <sup>1)</sup>.

Altre notevoli pseudocicloidi speciali sono quelle che nascono supponendo  $R_2 = r_2$  oppure  $R_1 = r_1$ . Nel primo caso le (7) divengono

$$x = 2 (R_1 - r_1) \cos \theta \cosh \mu \theta, \quad y = 2 (R_1 - r_1) \sin \theta \cosh \mu \theta;$$

passando a coordinate polari si ottiene

$$\rho = 2 (R_1 - r_1) \cosh \mu \theta,$$

che rappresenta una *Summenspirale* (p. 68). Nel secondo caso le stesse (7) divengono

$$x = 2 (R_2 - r_2) \sin \theta \sinh \mu \theta, \quad y = -2 (R_2 - r_2) \cos \theta \sinh \mu \theta;$$

anche qui passando a coordinate polari si ottiene

$$\rho = 2 (R_2 - r_2) \sinh \mu \theta,$$

che rappresenta una *Differenzenspirale* (p. 68). Restano così assegnate due generazioni di codeste due curve. Va notato che esse si presentano come le podarie delle pseudocicloidi rispetto al centro del cerchio fisso; lo si dimostra con un procedimento analogo a quello con cui dimostrammo (p. 119) l'analogia relazione esistente fra le epicicloidi e le rodonee; nè va taciuto che esse s'incontrano in alcuni problemi di tautocronismo <sup>2)</sup>.

Notiamo da ultimo che è una pseudocicloide la curva che risolve il seguente problema: « Un piano ruota con velocità uniforme attorno a un asse ad esso perpendicolare; un punto si muove in esso incontrando dell'attrito, in causa di una spinta ricevuta in origine;

<sup>1)</sup> *Investigatio curvarum, quae evolutae sui similes produerunt* (Comm. Petrop., T. XII, 1750, p. 19-23) e *Investigatio curvarum quae similes sunt suis evolutis vel primis vel secundis vel tertiis vel adeo ordinis cujuscumque* (Nova Acta Petrop., T. I, 1783, p. 97-106).

<sup>2)</sup> PUISEUX, *Sur les courbes tautochrones* (G. di Liouville, T. IX, 1844).

trovarne la traiettoria». Questa infatti è rappresentabile con le equazioni:

$$x = \rho e^{\left(\beta - \frac{\alpha}{r}\right)t} \cos \{ (\gamma - w) t - \chi \} + \rho_1 e^{-\left(\beta + \frac{\alpha}{r}\right)t} \cos \{ (\gamma + w) t - \chi_1 \}$$

$$y = \rho e^{\left(\beta - \frac{\alpha}{r}\right)t} \sin \{ (\gamma - w) t - \chi \} - \rho_1 e^{-\left(\beta + \frac{\alpha}{r}\right)t} \sin \{ (\gamma + w) t - \chi_1 \},$$

ove  $t$  è la variabile indipendente (il tempo). È facile dimostrare che la curva in questione è pure generabile da un punto percorrente una spirale logaritmica il cui polo descrive un'altra spirale logaritmica; tale nuova generazione consigliò al Roth <sup>1)</sup> di chiamare quella curva *Ephelix*.

<sup>1)</sup> *Ueber die Bahn eines freien Theilchens auf eine sich gleichmässig drehende Scheibe* (Repertorium der Physik, T. XXIII, 1887).

## CAPITOLO XI

## Le curve di Delaunay e C. Sturm.

**234.** Cambiando la base da rettilinea a circolare si è passati dalle cicloidi alle epicycloidi ed ipocicloidi; mutandola in altra curva ed in pari tempo sostituendo alla circonferenza mobile una linea arbitraria si ottengono le curve che i Francesi e gli Inglesi chiamano *Roulettes*, e che noi diremo in generale *Trochoidi*. La considerazione di esse risale al secolo XVII; ma lo studio metodico venne fatto soltanto nei primi anni del secolo successivo per merito specialmente di de La Hire<sup>1)</sup>, Nicole<sup>2)</sup> e Waring<sup>3)</sup>. Si può inoltre supporre che la curva mobile trascini seco, non un punto, ma una curva, e quindi considerare la curva da questa involupata; essa appartiene ad una ancora più vasta categoria di linee chiamate dal Besant<sup>4)</sup> *Envelope-roulettes* e che noi possiamo designare col nome di *Inviluppi trocoidali*<sup>5)</sup>. La teoria delle trocoidi e degli inviluppi trocoidali è meno lo studio di una classe speciale di linee che un modo particolare di considerare le curve piane qualsivogliano, avendo de La Hire dimostrato che *qualunque curva piana può considerarsi come una trocoide*<sup>6)</sup>: onde quella teoria non può nè deve entrare in un'opera, come la nostra, dedicata alle curve che per qualche ragione si distinguono dalle generali. Rimandando perciò

<sup>1)</sup> *Traité des Roulettes* (Mém. de l'Acad. des Sciences, MDCCVI, Paris 1707).

<sup>2)</sup> *Méthode générale pour déterminer la nature des courbes formées par le roulement de toute sorte de courbes sur une courbe quelconque* (Mém. de l'Acad. des Sciences MDCCVII, Paris 1730); *Méthode générale pour rectifier toutes les roulettes à base droite et circulaire* (Id., MDCCVIII, Paris 1730).

<sup>3)</sup> *Miscellanea analytica* (Cantabrigire, 1763), p. 114.

<sup>4)</sup> *Notes ou Roulettes and Glissettes* (2<sup>a</sup> ed., Cambridge, 1890), p. 33.

<sup>5)</sup> A questa classe appartengono in particolare le curve studiate nella Diss. di W. MERKELBACH, *Ueber Kollcurven, die von einer Geraden eingehüllt werden* (Marburg, 1881).

<sup>6)</sup> Una dimostrazione semplice di questo fatto leggesi nella *Note sur la théorie des roulettes* di E. CATALAN (Nouv. Ann. math., T. XV, 1856).

il lettore ad altri lavori<sup>1)</sup>, noi osserveremo che fra le trocoidi particolari, dopo le epicycloidi, vennero considerate quelle generate da un punto invariabilmente connesso ad una conica che ruzzola sopra una retta fissa: e fra esse spiccano quelle descritte da un fuoco o dal centro della curva mobile<sup>2)</sup>.

L'occasione e lo stimolo per lo studio della prima si deve cercare nel seguente teorema di Delaunay: « Per trovare la curva meridiana della superficie di rivoluzione la cui curvatura media è costante  $e = 1/2a$  basta fare ruzzolare senza scorrimento sull'asse della superficie un'ellisse od un'iperbole il cui asse trasverso è eguale a  $2a$ ; ogni fuoco della conica descriverà la curva richiesta »<sup>3)</sup>. Grazie a questa proposizione la linea in questione, secondo la proposta di P. Mansion<sup>4)</sup>, è ordinariamente designata col nome di *curva di Delaunay*, nome preferito a quello di *catenaria ellittica*, *iperbolica* o *parabolica* corrispondentemente alla natura della curva mobile, adoperato da Lindelöf<sup>5)</sup>.

C. Sturm, applicando il calcolo delle variazioni, trovò<sup>6)</sup> che l'equazione differenziale della curva di Delaunay è

$$(1) \quad y^2 \pm 2ay \frac{dx}{ds} \pm b^2 = 0$$

o anche

$$(2) \quad dx = \frac{y^2 \pm b^2}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 \pm b^2)^2}} dy.$$

Per dimostrare che questa appartiene alla trocoide suddetta

<sup>1)</sup> LAMARLE, *Exposé géométrique du Calcul différentiel et intégral*, III P. (Paris, 1863), p. 218-229; Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873); H. ONNEN, *Notes concernant la théorie des équations essentielles des courbes planes* (Archives néerlandaises, T. XLV, 1879; ivi è adoperato l'epiteto *anticicloidali* per designare le due trocoidi risultanti dal ruzzolamento di una stessa curva da parti opposte della stessa base); E. CESARO, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1895); p. 65-77. Inoltre il succitato opuscolo del BESANT.

<sup>2)</sup> Per altri casi vedi: BROCARD, *Roulettes de coniques* (Nouv. Corr. math., T. II, 1875, e III, 1876); H. EKAMA, *Die Kurven welche von Punkten von Kegelschnitten die sich, ohne zu gleiten, längs andere Kurven wälzen, beschrieben werden* (Arch. Math. Phys., II Ser., T. VIII, 1890).

<sup>3)</sup> *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante* (G. di Liouville, T. VI, 1841); v. anche il § 5 della memoria di M. EHRHORN, *Ueber die von Challis vorgeschlagene Methode ecc.* (Arch. Math. Phys., T. LXVI, 1881) e R. VERDUZIO, *Curva di Delaunay* (Riv. di mat. e scienze natur., 2<sup>o</sup> Sem. 1908).

<sup>4)</sup> HABICH, *Sur une question de roulettes* (Mathésis, T. VI, 1880).

<sup>5)</sup> *Théorie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante* (Mém. de la Soc. des Sciences de Finlande, 1863).

<sup>6)</sup> *Note à l'occasion de l'article précédent* (di DELAUNAY) (G. di Liouville, T. VI, 1841).

consideriamo un'ellisse di assi  $2a$  e  $2b$  ruotante senza scorrimento sull'asse delle  $x$  (fig. 24). Il suo fuoco  $F$  descriverà una curva avente (in forza del surriferito teorema di Descartes, v. p. 106) per normale la congiungente di  $F$  col corrispondente punto di con-

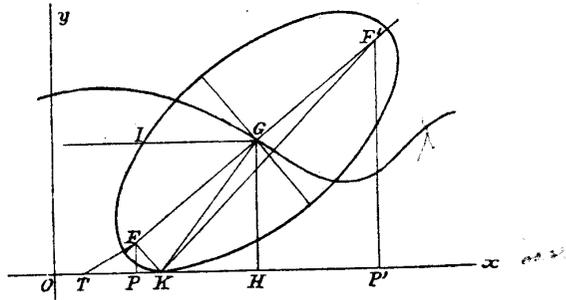


Fig. 24. — Curva di Delaunay.

tatto  $K$  dell'ellisse con la base. Siano  $OP = x$ ,  $PF = y$  le coordinate di  $F$ . Avremo evidentemente

$$y = \overline{FK} \cdot \text{sen } FKP.$$

Ora  $FKP$  è il complemento dell'angolo fatto con  $Ox$  dalla retta  $FT$  tangente in  $F$  alla curva di Delannay; è dunque

$$\text{sen } FKP = \cos FTK = \frac{dx}{ds};$$

e quindi

$$y = \overline{FK} \frac{dx}{ds}$$

Consideriamo anche l'altro fuoco  $F'$  e le sue coordinate  $OP'$  e  $P'F' = y'$ . Essendo eguali gli angoli  $FKP$  e  $F'KP'$  si trova similmente

$$y' = \overline{F'K} \frac{dx}{ds}.$$

Notando ora che

$$\overline{FK} + \overline{F'K} = 2a, \quad yy' = b^2$$

si possono eliminare  $\overline{FK}$ ,  $\overline{F'K}$  e  $y'$ ; si trova così

$$y^2 - 2ay \frac{dx}{ds} + b^2 = 0$$

come equazione differenziale della curva descritta dal fuoco  $F$ . E cambiando il segno del secondo termine si avrà quello che compete alla curva descritta da  $F'$ . Siccome le equazioni trovate coincidono con la (1), quanto si era enunciato resta dimostrato. Cambiando il segno di  $b^2$  si trasforma la (1) nell'equazione differenziale della curva analoga relativa ad un'iperbole. Lasciamo al lettore di dimostrare analogamente che se la curva mobile è una parabola il suo fuoco descrive una curva avente la seguente equazione differenziale

$$dx = a \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}};$$

questa s'integra e dà

$$y = \frac{a}{2} \left[ e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right],$$

che vedremo rappresentare una catenaria.

Prima di studiare l'equazione (1) cerchiamo anche la trocoide generata dal centro  $G$  dell'ellisse mobile. Per ciò consideriamo il semidiametro  $GI$  di questa curva parallelo all'asse delle  $x$  e quindi coniugato a  $GK$ . I teoremi d'Apollonio danno

$$\overline{GI}^2 + \overline{GK}^2 = a^2 + b^2; \quad GI \cdot GK \text{ sen } GIK = ab;$$

se poi si segnano le coordinate  $OH = x$ ,  $HG = y$  di  $G$ , avremo:

$$\text{sen } I GK = \text{sen } GKH = \frac{dx}{ds}, \quad y = GH = GK \text{ sen } I GK$$

onde

$$\overline{GI}^2 + \left[ y \frac{ds}{dx} \right]^2 = a^2 + b^2, \quad GI \cdot y = ab.$$

Eliminando fra queste  $GI$  se ne trae

$$\frac{a^2 b^2}{y^2} + y^2 \left[ \frac{ds}{dx} \right]^2 = a^2 + b^2$$

o anche

$$(3) \quad dx = \frac{y^2 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}}.$$

Questa è l'equazione differenziale del luogo del punto  $G$ ; il quale — dal nome del geometra che per primo lo ha considerato — può chiamarsi *curva di Sturm*.

Ritorniamo ora alle equazioni (1) e (2) scrivendole come segue:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + b^2}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 + b^2)^2}}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{2ay}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 + b^2)^2}}.$$

La seconda s'integra subito e dà

$$(4) \quad y^2 = a^2 \left\{ 1 + e^2 + 2e \operatorname{sen} \frac{s - s_0}{a} \right\},$$

ove  $s_0$  è la costante d'integrazione e  $e = \frac{a^2 \mp b^2}{a}$  è l'eccentricità.

Preso, come è lecito  $s_0 = \frac{1}{2}\pi a$ , si ha più semplicemente

$$(4') \quad y^2 = a^2 \left[ 1 - 2e \cos \frac{s}{a} + e^2 \right].$$

Detto poi  $R$  il raggio di curvatura della curva di Delaunay si trova senza difficoltà

$$(5) \quad R = \frac{2ay^2}{y^2 - b^2},$$

relazione che permette di eliminare  $y$  dalla (4'): si trova così

$$(6) \quad R = a \frac{1 - 2e \cos s/a + e^2}{e(e - \cos s/a)}$$

come equazione intrinseca della curva in questione<sup>2)</sup>.

Se  $N$  è la lunghezza della normale alla linea che studiamo, applicando le equazioni già stabilite, troveremo:

$$N = y \frac{ds}{dx} = y \frac{ds}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{2ay^2}{y^2 + b^2};$$

eliminando  $y$  fra questa e la (5) otterremo

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{N} \right] = \frac{2}{a},$$

dunque: *nella curva di Delaunay è costante la media armonica fra il raggio di curvatura e la normale.*

<sup>1)</sup> SPITZER, *Merkwürdige Eigenschaften derjenigen Curve, welche vom Brennpunkte einer Ellipse beschrieben wird, wenn diese auf eine Gerade rollt* (Archiv, T. XLVIII, 1868).

<sup>2)</sup> CESÀRO, *Lezioni citate*, p. 70.

La (6) mostra che se  $e < 1$ , cioè se la curva mobile è ellittica, la curva di Delaunay ammette infiniti flessi, cioè tutti i punti in cui  $s = a \operatorname{arc} \cos e$ ; essa è di forma simile alla cicloide allungata. Se invece  $e > 1$ , cioè se la curva mobile è iperbolica, la stessa curva è esente da flessi ma possiede infiniti punti doppi; è di forma analoga alla cicloide accorciata.

*Osservazione.* — L'equazione e le principali proprietà della curva generata da uno degli estremi dell'asse focale di un'ellisse che ruzzola sopra una retta si apprendono dalle *Note ou a roulette* di A. V. Lane (Amer. Journ. Math., T. VIII, 1886); mentre un metodo per ottenere l'equazione della curva (*epiellipside*) generata da un punto arbitrario d'un'ellisse che ruzzola sopra un'altra è contenuto nella memoria di O. Biermann, *Ableitung einer analytischen Darstellung der Epiellipside* (Monatshefte Math. Phys., T. VIII, 1877). Notevole è il caso in cui le due ellissi siano fra loro eguali, ché allora il punto mobile, dopo un intero giro, ritorna al punto di partenza, onde si ha una curva chiusa, la quale è trascendente, escluso il caso in cui all'inizio del movimento le due curve si tocchino in un punto che sia per entrambe un estremo dell'asse maggiore; risulta intanto, contrariamente a un'opinione diffusa, che *esistono curve trascendenti chiuse*<sup>1)</sup>.

**235.** Nella definizione generale di trocoide entrano tre curve: la base, la curva mobile e la trocoide generata; supponendo date le due prime la ricerca della terza costituisce il *problema delle trocoidi*; supponendo invece data la terza (e può supporre totalmente arbitraria in forza del teorema di de La Hire citato a p. 138), si può cercare una delle due prime: nasce così il *problema inverso delle trocoidi*. Risolvendolo si ricade talora in curve già note, ma più spesso se ne ottengono di nuove: lo provano gli enunciati seguenti: 1° La linea su cui si deve far ruzzolare un'ellisse affinché un punto ad essa invariabilmente connesso descriva una retta è una curva di Delaunay. 2° La linea che devesi far ruzzolare, sopra una retta affinché un punto ad essa collegato descriva una circonferenza ha per equazione differenziale, in coordinate polari,

$$(7) \quad \frac{\rho \, d\omega}{d\rho} = \frac{b}{\sqrt{(a - \rho)^2 - b^2}};$$

la integrazione ne è completamente eseguibile<sup>2)</sup>. 3° La linea su

<sup>1)</sup> C. SCHWERING, *Ueber eine Gattung transzendenten Kurven, welche eingeschlossen sind* (Zeitsch. Math. Phys., T. XX, 1875).

<sup>2)</sup> KOENIGS, *Leçons de cinématique* (Paris 1897), p. 170-171; se si esegué

cui si deve fare ruzzolare un'ellisse di assi  $2a$  e  $2b$  affinché il suo centro descriva una retta, è rappresentata, mediante funzioni ellittiche jacobiane, dell'equazione

$$(8) \quad y = a \operatorname{dn} \frac{x}{b}.$$

Il corrispondente problema per l'iperbole è risoluto dalla curva

$$(9) \quad a = y \operatorname{cn} \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad ^1).$$

Le curve analoghe, rappresentate dalle equazioni

$$y = b \operatorname{sn} \frac{x}{a}, \quad \varrho \operatorname{cn} \omega = \operatorname{cost}.$$

s'incontrano in questioni di meccanica; la penultima è detta dai francesi *courbe à sauter*, essendo la forma assunta da un filo pesante omogeneo flessibile ed inestendibile quando venga fatto ruotare attorno ad un asse orizzontale <sup>2)</sup>.

la quadratura si ottiene

$$\text{se } a < b, \quad \rho = \frac{a^2 - b^2}{a + b \cos \left[ \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \omega \right]}$$

$$\text{se } a = b, \quad \rho = \frac{2a}{1 - \omega^2}$$

$$\text{se } a < b, \quad \rho = \frac{a^2 - b^2}{a + b \cosh \left[ \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \omega \right]}$$

<sup>1)</sup> GREENHILL, *Applications of elliptic functions* (London, 1892), p. 71-73; OPIEZ, *Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem aus der Theorie der Rollkurven* (Dresden, 1904).

<sup>2)</sup> APPELL et LACOUR, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques* (Paris 1897), p. 188.

## CAPITOLO XII

### Curve sintrepenti e Curve isotrepenti.

**236.** Il metodo cinematico che condusse alla maggior parte delle curve esaminate nel presente Capitolo è il fondamento del concetto di altre: non ci arresteremo a trattare di quelle (le *curves reptorie* di Giovanni Bernoulli) <sup>1)</sup> generate da un punto invariabilmente connesso ad una curva, la quale si muove parallelamente a sè stessa conservandosi sempre tangente ad una curva fissa, perchè esse possiedono una generalità paragonabile a quella delle olistoidi (n. 109) e delle trocoidi (n. 234); ma ci occuperemo di altre più speciali a cui guidano le considerazioni seguenti.

Quando due cerchi materiali coplanari girevoli attorno ai loro centri sono tali che la distanza  $k$  dei loro centri è eguale alla somma  $r + r'$  dei loro raggi, essi possono muoversi senza che la circonferenza dell'uno strisci sopra quella dell'altro. Generalizzando siffatta condizione di cose si chiamano <sup>2)</sup> *sintrepenti* (da *συντρέπειν* = girare insieme) due curve  $\Gamma, \Gamma'$  quando possono girare simultaneamente attorno agli estremi del segmento  $OO'$ , posto nel loro piano comune, senza cessare di conservarsi fra loro tangenti e senza che abbia luogo strisciamento dell'una sull'altra; in modo cioè che risultino eguali due archi  $CM, CM'$  passanti durante lo stesso tempo pel punto di contatto delle due curve (punto variabile, ma sempre situato sulla retta  $OO'$ ). Un esempio di curve sintrepenti

<sup>1)</sup> V. l'articolo intitolato *Motus reptorius, ejusque insignis usus, pro lineis curvis in unam omnibus aequalem colligendis, vel a se mutuo subtrahendis atque hinc deducta problematis de transformatione curvarum* in Diario Gallico Paris, 12 Febr. 1702 *propositi, genuina solutio* (Acta Erud., Aug. 1705; Joh. Bernoulli Opera, T. I, p. 408); inoltre G. SACCHI, *Sulla geometria analitica delle curve piane* (Pavia 1854), p. 106-108 e PROUHET, *Etude géométrique sur les courbes engendrées par le mouvement de réptation, pour servir d'éclaircissement à plusieurs passages des Oeuvres de Jean Bernoulli* (Nouv. Ann. Math., T. XIII, 1854).

<sup>2)</sup> A. MIQUEL, *Sur quelques questions relatives à la théorie des courbes* (G. di Liouville, T. III, 1838).

non circolari è offerto da due ellissi eguali in cui assi maggiori siano uno sul prolungamento dell'altro; se  $O, O'$  sono fuochi corrispondenti e  $P, P'$  gli altri due, se inoltre  $M$  e  $M'$  sono due punti delle due curve equidistanti da  $C$ , si ha  $OM + O'M' = OM + PM = AC$ ; onde se le due curve girano in sensi opposti attorno a  $O$  e  $O'$  si potranno conservare sempre a

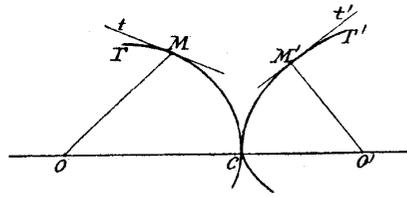


Fig. 25.

contatto senza che abbia luogo strisciamento. Passando al caso generale, se  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  sono curve sintrepenti (figura 25) e  $M, M'$  due loro punti corrispondenti la somma  $OM + O'M'$  dei loro raggi vettori è costante e  $= OO' = k$ ; devono inoltre risultare eguali gli angoli di

quei raggi vettori con le relative tangenti. Riferendo quindi  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  a due sistemi di coordinate polari di cui  $O$  e  $O'$  siano i poli e la retta  $OO'$  sia il comune asse, avremo:

$$(1) \quad \varrho + \varrho' = k, \quad \varrho \frac{d\omega}{d\varrho} = \varrho' \frac{d\omega'}{d\varrho'}$$

Supposto che  $\omega = \psi(\varrho)$  e  $\omega' = \varphi(\varrho')$  siano le equazioni di  $\Gamma$  e  $\Gamma'$ , la seconda di queste equazioni diviene

$$\varrho \psi'(\varrho) = \varrho' \varphi'(\varrho'),$$

o, tenendo conto della prima,

$$(2) \quad \varrho \psi'(\varrho) = (k - \varrho) \varphi'(k - \varrho).$$

Supposta, pertanto, data la funzione  $\varphi, \psi$  si determina mediante una quadratura, cioè

$$(3) \quad \psi(\varrho) = \int \frac{(k - \varrho) \varphi'(k - \varrho)}{\varrho} d\varrho;$$

si noti che la costante d'integrazione influisce sulla posizione, non sulla natura della curva  $\Gamma$ .

Si consideri, ad esempio, come curva  $\Gamma'$  l'ellisse

$$\varrho = \frac{b^2}{a_1 - c \cos \omega} \quad (c = \sqrt{a^2 - b^2})$$

ossia

$$\omega = \arccos \frac{a\varrho - b^2}{c\varrho};$$

la (3) diverrà:

$$\begin{aligned} \psi(\varrho) &= -b \int \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{c^2 - (a-k)^2 + 2(a-k)\varrho - \varrho^2}} = \\ &= \frac{b}{\sqrt{(a-k)^2 - c^2}} \arccos \frac{(a-k)\varrho - b^2}{c\varrho}. \end{aligned}$$

Scrivendo questa come segue:

$$\varrho = \frac{\frac{b^2}{a-k}}{1 + \frac{c}{a-k} \cos \frac{\sqrt{(a-k)^2 - c^2}}{b} \omega},$$

si vedrà che la curva corrispondente, quando  $k = 2a$ , diviene un'ellisse eguale alla data (si ricade allora nell'esempio addotto più sopra), onde in generale può riguardarsi come una generalizzazione dell'ellisse. Essa è algebrica o trascendente secondochè il numero  $\frac{\sqrt{(a-k)^2 - c^2}}{b}$  è razionale o non.

Ritornando alle considerazioni generali domandiamo se, oltre all'ellisse ed al circolo, esistano curve identiche alle loro sintrepenti. Per trovarle, se esistono (nella quale ipotesi le chiameremo *curve isotrepenti*), ci serviremo dell'equazione (2) ponendovi  $\psi$  invece di  $\varphi$ ; essa diverrà

$$\varrho \varphi'(\varrho) = (k - \varrho) \varphi'(k - \varrho);$$

ne dedurremo che, posto  $f(\varrho) = \varrho \varphi(\varrho)$ , è

$$f(\varrho) = f(k - \varrho),$$

cioè  $f$  è una funzione simmetrica di  $\varrho$  e  $k - \varrho$ . Indicandola con  $F(\varrho, k - \varrho)$  avremo

$$\varrho \varphi'(\varrho) = F(\varrho, k - \varrho)$$

onde

$$(4) \quad \varphi(\varrho) = \int \frac{F(\varrho, k - \varrho)}{\varrho} d\varrho.$$

Ciò prova che l'equazione

$$(5) \quad \omega = \int \frac{F(\varrho, k - \varrho)}{\varrho} d\varrho,$$

ove  $F$  è una funzione simmetrica di  $\varrho$  e  $k - \varrho$ , dà la rappresentazione analitica generale delle curve sintrepenti. L'ipotesi più semplice è  $F = k$ ; allora la (5) diviene

$$\omega = k \int \frac{d\varrho}{\varrho}$$

che integrata diviene

$$\varrho = e^{\frac{\omega + \alpha}{k}},$$

equazione di una spirale logaritmica: così resta incidentalmente trovato un nuovo caso di riproduzione di questa notevole curva.

## CAPITOLO XIII

### Le curve di Debeaune <sup>1)</sup>.

**237.** « Dato (fig. 26) un segmento rettilineo  $n$  e due rette  $GD$ ,  $FE$  formanti fra loro l'angolo  $\lambda = \pi/4$ , determinare una curva  $AB$  tale che se in un suo punto qualunque  $B$  si conduce la tangente a tagliare  $GD$  in  $L$  e poi la perpendicolare  $BC$  a  $GD$  stessa, si abbia, se  $I$  è l'intersezione di quella perpendicolare con  $EF$ ,

$$(1) \quad \frac{BC}{CL} = \frac{n}{BI} ».$$

Questo problema venne proposto dal Debeaune a Descartes e questi ne serbò memoria in una delle sue lettere <sup>2)</sup>; è il primo problema avente per iscopo la ricerca di una curva avente per tangenti delle rette soddisfacenti ad una assegnata condizione comune, epperò possiede non comune importanza storica, segnando esso il principio del così detto « calcolo inverso delle tangenti ».

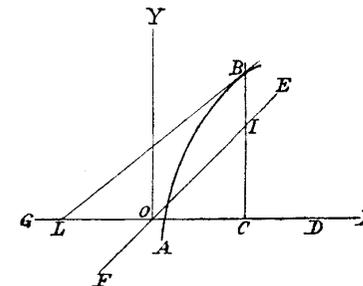


Fig. 26.

Per trovare l'equazione delle linee domandate (che possono ragionevolmente chiamarsi *curve di Debeaune*) prendiamo un sistema cartesiano ortogonale di cui la retta  $GD$  sia l'asse delle  $x$  e l'origine sia la sua intersezione con la retta  $EF$ . Allora, lasciando

<sup>1)</sup> Usiamo la grafia DEBEAUNE invece di DE BEAUNE per consiglio di P. TANNERY (Bibl. math., III, Ser., T. II, 1901, p. 149).

<sup>2)</sup> *Oeuvres de Descartes*, ed. Adam e Tannery, T. II (Paris 1898), p. 510 a p. 519.

pel momento arbitrario l'angolo  $\lambda$ , l'equazione della retta  $EF$  sarà

$$y - x \operatorname{tg} \lambda = 0,$$

e la (1) equivarrà alla seguente equazione:

$$\frac{y}{y \, dx/dy} = \frac{n}{y - x \operatorname{tg} \lambda}.$$

Scrivendole come segue

$$(2) \quad \frac{dx}{dy} + \frac{\operatorname{tg} \lambda}{n} x = \frac{y}{n},$$

e considerando  $x$  come funzione di  $y$ , si vede che essa è un'equazione differenziale lineare il cui integrale generale è

$$x = e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} \left[ \int \frac{y}{n} e^{\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} dy + c \right];$$

ma l'integrazione per parti insegna essere

$$\int \frac{y}{n} e^{\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} dy = \frac{1}{\operatorname{tg} \lambda} y e^{\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \lambda} e^{\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}}$$

onde

$$(3) \quad x = \frac{y}{\operatorname{tg} \lambda} - \frac{n}{\operatorname{tg}^2 \lambda} + c e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}}$$

Questa è l'equazione generale delle curve di Debeaune; nel caso speciale  $\lambda = \pi/4$  essa si semplifica e diviene

$$(3') \quad x = y - n + c e^{-\frac{y}{n}};$$

in ogni caso le curve di Debeaune sono trascendenti. La (2) mostra poi che la tangente nel punto  $(x, y)$  ha per equazione

$$n(X - x) = (Y - y)(y - x \operatorname{tg} \lambda);$$

e da questa, supponendo dati  $X$  e  $Y$ , si deduce che i punti di contatto delle tangenti che si possono condurre ad una curva di Debeaune da un punto qualunque del suo piano stanno sopra un'iperbole passante per quel punto; ciò dimostra che qualunque curva di Debeaune è pналgebraica e fa parte di un sistema di caratteristiche 1, 1.

A risolvere il problema di Debeaune si provò, e non inutil-

mente, Leibniz<sup>1)</sup>; egli però non pubblicò la soluzione di cui era in possesso. La prima pubblica soluzione del problema si legge nell'articolo intitolato *Solution du problème que Monsieur De Beaufeu proposa autrefois à Mr. Descartes, et que l'on trouve dans le 79<sup>a</sup> de ses Lettres, Tom. 3. Par Mr. G.\*\*\** ed è pubblicato nel *Journal des Savans* del 1692. La paternità di esso fu rivendicata tanto dal marchese de l'Hôpital<sup>2)</sup>, quanto da Giovanni Bernoulli<sup>3)</sup>; la verità è che a quella soluzione collaborarono entrambi questi geometri<sup>4)</sup>. Va rilevato che (come si apprende dall'articolo precitato) essi trovarono della curva risoltrice un asintoto parallelo alla retta  $EF$ ; ed infatti la curva (3) ha per asintoto la retta di equazione

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg} \lambda} - \frac{n}{\operatorname{tg}^2 \lambda},$$

mentre della (3') è asintoto la retta

$$x = y - n$$

effettivamente parallela alla retta  $EF$ . Nello stesso articolo sono risolti problemi concernenti la quadratura delle curve in questione e la cubatura dei solidi che esse generano rotando attorno all'asse delle  $x$ , con l'osservazione che la loro costruzione è immediata quando siasi costruita la curva (logaritmica) rappresentata dall'equazione

$x = c e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}}$ . Riguardo alla rettificazione è detto: « mais comme on a besoin d'une adresse particulière pour rectifier cette courbe, en supposant la quadrature de l'hyperbole, je propose ce problème aux géomètres en leur assurant qu'il mérite leur recherche »; non sappiamo se tale esortazione abbia avuto il desiderato effetto; quello che è certo è che la questione segnalata non presenta oggi

<sup>1)</sup> « Hanc curvam — egli scriveva a OLDENBURG in data 27 agosto 1676 — nec Cartesius nec Beaufeu nec quisquam alius (quoad sciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, coepi quarere, statim certa Analysis solvi » (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. I, p. 121). Il metodo a cui allude il LEIBNIZ risulta da ciò che egli scrisse a G. MANFREDI il 10 agosto 1708 (v. G. LORLA, *Abhand. zur Gesch. der Mathematik*, T. IX, 1899, p. 274) riguardo all'integrazione delle equazioni differenziali lineari.

<sup>2)</sup> V. le lettere scritte da questo geometra ad HUYGENS il 10 settembre 1692 ed il 12 febbraio 1693 (*Oeuvres de Huygens*, X, La Haye 1905, S. 312 e 391) ed a LEIBNIZ il 26 aprile 1693 (*Leibniz ed. Gerhardt*, II, S. 234). Della questione si occupò anche HUYGENS (v. *Oeuvres*, T. X, p. 460, 500, 537 e 550; inoltre l'articolo C. H. Z. [cioè HUYGENS], *De problemata bernoulliana in Actis Lipsiensibus hujus anni proposito*, Acta erud. Ottobre 1693).

<sup>3)</sup> *Joh. Bernoulli Opera omnia*, I, 1642, S. 63.

<sup>4)</sup> Lettera di DE L'HÔPITAL ad HUYGENS del 10 agosto 1693 (*Oeuvres de Huygens*, X, S. 484).

alcuna difficoltà; essendo infatti

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \lambda} - \frac{2}{n} e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} + \frac{c^2 \operatorname{tg}^2 \lambda}{n^2} e^{-\frac{2y \operatorname{tg} \lambda}{n}}},$$

basta porre  $e^{-\frac{y \operatorname{tg} \lambda}{n}} = \eta$  per ottenere  $ds$  espresso sotto la forma  $d\eta \sqrt{a + b\eta + c\eta^2}/n$ , espressione facilmente integrabile.

**238.** In processo di tempo il problema di Debeaune occupò varie volte Giovanni Bernoulli<sup>1)</sup> e suo fratello Giacomo lo generalizzò grandemente enunciandolo come segue: «Data una curva qualunque trovarne una seconda tale che in un suo punto qualunque l'ordinata stia alla sottangente come una costante data  $n$  sta alla somma od alla differenza delle ordinate corrispondenti della curva data e della cercata, oppure tale che il primo dei suddetti rapporti eguagli il reciproco del secondo»<sup>2)</sup>. Questi problemi si traducono — se  $y = f(x)$  è l'equazione della curva data — nelle due equazioni

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{n}{f(x) \pm y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x) \pm y}{n};$$

la prima non appartiene ad alcun tipo che si sappia integrare in termini finiti, tranne quando  $f$  sia funzione lineare di  $x$ , nella quale ipotesi si ricade nel primitivo problema di Debeaune; la seconda, se si considera  $x$  come funzione di  $y$ , è un'equazione differenziale lineare che integrata dà

$$xy e^{\frac{x}{n}} + \int e^{\frac{x}{n}} f(x) dx + c = 0,$$

ove la quadratura è effettuabile o non secondo la natura della funzione  $f(x)$ <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> V. l'articolo, scritto con la cooperazione del Marchese DE L'HÔPITAL, *Solution du problème que Monsieur De Beaune proposa autrefois à Mr. Des Cartes et que l'on trouve dans la 79<sup>a</sup> de ses lettres* (Journal des Savants, 1692; Joh. Bernoulli Opera, T. I, p. 62-63); inoltre *Solutio problematis Cartesio propositi a Dn. De Beaune* (Acta erud. Maggio 1693; Opera, T. I, p. 65-66), *Demonstratio suae constructionis curvae Beaunianae* (Acta erud., febr. 1696; Opera, T. I, p. 145-148) e la X delle *Lectiones mathematicae* (Opera, T. I, p. 423).

<sup>2)</sup> *Problema Beauniani universalis conceptus* (Acta erud. Juli 1696; Jacobi Bernoulli, Opera, T. II, p. 731-799); *Addenda ad constructionem problematis Beauniani* (Acta erud. Sept. 1697; Opera p. 782-785).

<sup>3)</sup> È eseguibile ad es. se  $f(x)$  è un polinomio intero in  $x$ , oppure è eguale a  $e^{ax}$ , ecc.

Un'altra generalizzazione dello stesso problema<sup>1)</sup> conduce alla equazione differenziale

$$\frac{y}{y \, dx/dy} = \frac{n}{(Fy - x \operatorname{tg} \lambda)},$$

$F$  essendo una funzione data. Ponendo  $y - x \operatorname{tg} \lambda = z$  questa diviene

$$\operatorname{tg} \lambda + \frac{dz}{dx} = \frac{n}{F(z)}$$

e dà

$$x = \int \frac{dz}{\frac{n}{F(z)} - \operatorname{tg} \lambda},$$

cosicchè la questione è ridotta alle quadrature.

Gli studi fatti da Giovanni Bernoulli lo condussero poi a formulare un altro problema analogo e a proporlo ai matematici del suo tempo<sup>2)</sup>. È il seguente: «Trovare una curva in cui la sottotangente stia in un dato rapporto ( $m$ ) alla lunghezza della tangente». Esso si traduce nella seguente equazione differenziale:

$$(4) \quad x \, dy - y \, dx = m y \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

essendo questa omogenea la sua integrazione è riducibile a quadratura, le quali anzi in tal caso sono effettuabili.

Il relativo calcolo non è breve a cagione dei radicali che si presentano; per evitarli Hermann suggerì un artificio di calcolo non privo d'interesse<sup>3)</sup>; egli, cioè, propose di porre:

$$(5) \quad y = \xi^2 - \eta^2,$$

$$(6) \quad -y \frac{dx}{dy} = 2 \xi \eta,$$

$\xi$  e  $\eta$  essendo due nuove variabili; sostituendo questi valori nella (4) si ottiene

$$(7) \quad x = m(\xi^2 + \eta^2) - 2 \xi \eta.$$

<sup>1)</sup> V. RICCATI et H. SALADINI, *Institutiones analyticae*, T. II (Bomoniae 1767), p. 500.

<sup>2)</sup> *Problema ab eruditis solvendum* (Acta Erud., Mai 1693). Vedine parecchie soluzioni nell'articolo *Ad problem in Actis Eruditorum a. 1693, mense Majo propositum* (Leibniz ed. Gerhardt, T. V, p. 288-294).

<sup>3)</sup> Lettera a LEIBNIZ in data 28 ottobre 1705 (Leibniz ed. Gerhardt, T. IV, p. 286-7).

In forza delle (5) (7) la (6) diviene:

$$\frac{\xi d\xi - \eta d\eta}{\xi^2 - \eta^2} + \frac{m(\xi d\xi + \eta d\eta) - (\xi d\eta + \eta d\xi)}{2\xi\eta} = 0$$

o anche

$$\frac{\eta d\xi - \xi d\eta}{\xi^2 - \eta^2} = m \frac{\xi d\xi + \eta d\eta}{\xi^2 - \eta^2}$$

ossia

$$\frac{d\xi - d\eta}{\xi - \eta} - \frac{d\xi + d\eta}{\xi + \eta} = m \frac{2(\xi d\xi + \eta d\eta)}{\xi^2 + \eta^2}$$

L'integrazione è ora eseguibile e si trova

$$(8) \quad \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta} = \left[ \frac{\xi^2 + \eta^2}{a} \right]^m,$$

ove  $a$  è la costante d'integrazione. L'equazione cartesiana della curva altro non è che il risultato dell'eliminazione di  $\xi, \eta$  fra le equazioni (5) (7) (8). Se, per es.,  $m = 1$  le (5) (7) (8) divengono:

$$y = (\xi + \eta)(\xi - \eta), \quad x = (\xi - \eta)^2, \quad \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{a};$$

da esse si deduce

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{a}, \quad y = \xi^2 - \eta^2$$

onde

$$\xi = \sqrt{\frac{ax + y^2}{2y}}, \quad \eta = \sqrt{\frac{ax - y^2}{2y}};$$

e per essere  $\xi - \eta = \sqrt{x}$  si conclude che

$$\sqrt{ax + y^2} - \sqrt{ax - y^2} = \sqrt{2xy}$$

è l'equazione della curva cercata; razionalizzando se ne trae

$$y(x^2 + y^2) = 2ax^2$$

che rappresenta (Vol. I, p. 41) una cissoide di Diocle.

Le curve ora ottenute sono, al pari di quelle di Debeaune, integrali di equazioni differenziali del primo ordine; da questo

punto di vista si avvicinano ad altre che sono definite da proprietà dell'arco<sup>1)</sup>: su queste non ci arresteremo non essendo dotate di importanti proprietà geometriche, e ci volgiamo alle curve nella cui definizione entra la curvatura.

<sup>1)</sup> V. fra l'altre, le memorie seguenti: N. FUSS, *Exercitatio analytico-geometrica circa lineam curvam singulari proprietate praeditam* (Acta Petrop. pro anno MDCCLXXX, Pars II, 1784) e *Disquisitio analytico geometrica de variis specibus linearum curvarum singulari proprietate praeditarum* (Id. pro anno MDCCLXXXI, Pars I, Petrop. 1784); A. VALDE, *Ueber die Curven, deren Bogen der Tangenten des Leitstrahlwinkels proportional ist, und die damit verwandten Curvenschaaren* (Archiv, 2<sup>a</sup> Serie, T. XIV, 1895).

## CAPITOLO XIV

## Le curve di Ribaucour.

239. A Giovanni Bernoulli dobbiamo l'enunciato e la prima soluzione di un altro importante problema, cioè del seguente: «Sopra una data retta  $AG$  come asse e pel punto  $A$  della stessa condurre una curva tale che il raggio di curvatura in un suo punto qualunque  $B$  sia diviso dall'asse in un dato rapporto e determinare le traiettorie ortogonali delle curve soddisfacenti a questa condizione»<sup>1)</sup>. Proposto poi da Leibniz ai matematici Inglesi, attrasse l'attenzione di molti scienziati, specialmente a cagione della parte di esso che concerne le traiettorie ortogonali<sup>2)</sup>; oggi esso è uno degli esempi classici nei trattati sulle equazioni differenziali e le loro applicazioni alla geometria; le curve che lo risolvono vennero incontrate dal Ribaucour nel corso delle sue ricerche sulle superficie di area minima<sup>3)</sup>, onde vennero chiamate *linee di Ribaucour*: noi pure ci serviremo di questo nome per non introdurne uno nuovo, ma non possiamo tacere che sarebbe stato assai più ragionevole e giusto quello di *linee di Bernoulli*.

Assunta l'ascissa come variabile indipendente, l'equazione differenziale del problema di Bernoulli è:

$$\frac{\left\{ 1 + \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 \right\}^{3/2}}{d^2 y} = \frac{1}{n} y \left\{ 1 + \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 \right\}^{1/2},$$

<sup>1)</sup> V. la lettera scritta a LEIBNIZ l'11 marzo 1716 (Leibniz ed. Gerhardt, T. III, p. 958).

<sup>2)</sup> Cfr. *Joh. Bernoulli Opera*, T. II, p. 281 e seg.

<sup>3)</sup> *Etude sur les élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle*, §§ 123-192 (Mém. cour. par l'Acad. de Belgique, T. XLIV, 1880).

o più semplicemente

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{n}{y} \left\{ 1 + \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 \right\}$$

Applicando un metodo generale sostituiremo queste equazioni con le due seguenti:

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad , \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{n}{y} (1 + y'^2).$$

Eliminando  $dx$  risulta

$$\frac{y' dy'}{1 + y'^2} = n \frac{dy}{y}$$

che s'integra subito e dà

$$(1) \quad y' = \sqrt{\left[ \frac{y}{c} \right]^{2n} - 1}$$

Una nuova integrazione dà — supposto che si prenda per origine il punto da cui dipartesi la curva —

$$(2) \quad x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left[ \frac{y}{c} \right]^{2n} - 1}},$$

risultato già in sostanza ottenuto dal proponente della questione che ci occupa<sup>1)</sup>. Dalla teoria dei differenziali binomi risulta che la quadratura indicata è eseguibile se  $1/2n = k$  oppure  $1/2n - 1/2 = k$ , ove  $k$  è intero, cioè se  $n$  ha la forma  $1/2k + 1$  o  $1/2k$ , cioè  $1/h$  ove  $h$  è un intero qualunque. Porremo per comodità:

$$n = \frac{1}{m + 1}$$

<sup>1)</sup> Le stesse linee sono caso particolare delle «curve di CESÀRO» caratterizzate dalla proprietà che la polare di uno qualunque dei loro punti rispetto a un cerchio fisso divide in un dato rapporto il corrispondente raggio di curvatura. R. GOORMAGHTIGH fece su di esse ricerche metodiche (v. *l'Etude géométrique des courbes de Cesàro*, Mathésis, T. XL, 1926), dopo di avere studiate (*Sur une classe de courbes planes remarquables*, Nouv. Ann. de math., IV Ser., T. XIX, 1919) quelle più generali di equazione intrinseca

$$s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left[ \frac{\rho}{a} \right]^{2m\lambda} - 1}}.$$

ove  $m$  è un nuovo intero, e avremo invece della (2)

$$dx = \frac{\frac{1}{y^{m+1}} dy}{\sqrt{\frac{2}{c^{m+1}} - y^{m+1}}};$$

ossia, se si pone

$$\frac{1}{y^{m+1}} = \eta, \quad \frac{1}{c^{m+1}} = \gamma,$$

$$dx = \frac{(m+1) \eta^{m+1} d\eta}{\sqrt{\gamma^2 - \eta^2}}$$

Ponendo da ultimo  $\eta = \gamma \operatorname{sen} \varphi$  si vede che per rappresentare le curve cercate può servire la seguente coppia di equazioni:

$$(4) \quad x = (m+1)c \int_0^\varphi \operatorname{sen}^{m+1} \varphi d\varphi, \quad y = c \operatorname{sen}^{m+1} \varphi,$$

le quali confermano che, quando  $m$  è intero, la quadratura indicata è effettuabile.

Prima di iniziare lo studio delle curve rappresentate dalle equazioni (4), consideriamo alcuni casi particolari corrispondenti a valori speciali del numero  $m$ :

1°)  $m = 0$ . Le (4) divengono

$$x = -c \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sen} \varphi$$

e rappresentano il *circolo*  $x^2 + y^2 = c^2$ .

2°)  $m = 1$ . Le stesse danno

$$x = 2c \int_0^\varphi \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi, \quad y = c \operatorname{sen}^2 \varphi$$

ossia

$$x = c \int_0^\varphi (1 - \cos 2\varphi) d\varphi, \quad y = \frac{c}{2} (1 - \cos 2\varphi)$$

o finalmente

$$x = \frac{c}{2} (2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi), \quad y = \frac{c}{2} (1 - \cos 2\varphi),$$

che rappresentano (v. p. 78) una *cicloide ordinaria*.

3°)  $m = -2$ . Dalle (4) traesi:

$$x = -c \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}, \quad y = \frac{c}{\operatorname{sen} \varphi}$$

ossia

$$x = -c \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi, \quad y = \frac{c}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Ora la prima dà:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = e^{-\frac{x}{c}}, \quad \cot \frac{1}{2} \varphi = e^{\frac{x}{c}}, \quad e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2}{\operatorname{sen} \varphi},$$

onde tenendo conto della seconda

$$y = \frac{c}{2} \left[ e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right],$$

che vedremo appartenere ad una *catenaria*.

4°)  $m = -3$ . Le (4) si mutano in:

$$x = -2c \int \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} = 2c \cot \varphi, \quad y = \frac{c}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$$

donde eliminando  $\varphi$

$$x^2 = 2c(y - c),$$

equazione di una *parabola*.

Queste quattro speciali curve servono di tipo alle quattro categorie in cui (come notò Giovanni Bernoulli) si ripartiscono le curve in esame secondochè  $m$  è pari o dispari, positivo o negativo. Le curve componenti ciascuna di queste classi godono di prerogative speciali, come ora mostreremo:

I.  $m + 1 =$  numero positivo dispari. Eseguendo la quadratura indicata, le equazioni (4) divengono:

$$\frac{x}{c} = -\cos \varphi \left\{ \operatorname{sen}^m \varphi + \sum_{k=1}^{k=m/2} \frac{m(m-2)\dots(m-2k+2)}{(m-1)(m-3)\dots(m-2k+1)} \operatorname{sen}^{m-2k} \varphi \right\},$$

$$\frac{y}{c} = \operatorname{sen}^{m+1} \varphi.$$

Introducendo il parametro  $\tau = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$  si vede che queste curve sono razionali d'ordine  $2(m+1)$ , simmetriche rispetto all'asse delle  $x$  ed aventi i punti ciclici del piano per punti  $(m+1)$ pli; per  $m=0$  si mutano in cerchi, onde in generale possono — come fece Ribaucour — designarsi col nome di *cerchi di grado superiore*.

II.  $m+1 =$  numero positivo pari. Le (4) pongono:

$$\frac{x}{c} = -\cos \varphi \left\{ \operatorname{sen}^m \varphi + \sum_{k=1}^{(m-1)/2} \frac{m(m-2)\dots(m-2k+2)}{(m-1)(m-3)\dots(m-2k+1)} \operatorname{sen}^{m-2k} \varphi \right\} + \frac{1 \cdot 3 \dots m}{2 \cdot 4 \dots (m+1)} \varphi, \quad \frac{y}{c} = \operatorname{sen}^{m+1} \varphi,$$

e queste rappresentano delle curve trascendenti costituite da infinite onde cicloïdiformi; per  $m=1$  si ritrova appunto la cicloïde ordinaria.

III.  $m+1 =$  numero negativo dispari. Le curve corrispondenti sono rappresentate come segue:

$$\frac{x}{(m+1)c} = \frac{\cos \varphi}{m+2} \left\{ \operatorname{sen}^{m+2} \varphi + \sum_{k=1}^{-(m/2)-1} \frac{(m+3)(m+5)\dots(m+2k-1)}{(m+4)(m+6)\dots(m+2k)} \operatorname{sen}^{m+2k} \varphi \right\} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (m+2)} \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}; \quad \frac{y}{c} = \operatorname{sen}^{m+1} \varphi.$$

Anche queste sono trascendenti; hanno per forma tipica la catenaria.

IV.  $m+1 =$  numero negativo pari. In tal caso le (4) danno:

$$\frac{x}{(m+1)c} = \frac{\cot \varphi}{m+2} \left\{ \operatorname{sen}^{m+3} \varphi + \sum_{k=1}^{-(m+1)/2} \frac{m+3}{(m+4)(m+6)\dots(m+2k)} \operatorname{sen}^{m+2k+1} \varphi \right\},$$

$$\frac{y}{c} = \operatorname{sen}^{m+1} \varphi.$$

e rappresentano delle curve razionali d'ordine  $-(m+1)$ , le quali, avendo la parabola per forma tipica, possono, come propose il Ribaucour, indicarsi col nome di *parabole di grado superiore*.

240. Riprendiamo le equazioni (4) per dedurne la seguente espressione dell'arco:

$$(5) \quad s = (m+1)c \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}^m \varphi \, d\varphi.$$

Ne viene che, se  $m$  è positivo e si chiama  $L_m$  la lunghezza dell'arco della corrispondente curva compreso fra i punti di parametri  $\varphi=0$  e  $\varphi=\pi/2$ , si ha

$$(6) \quad L_m = \begin{cases} (m+1)c \frac{1 \cdot 3 \dots (m-1)}{2 \cdot 4 \dots m} \frac{\pi}{2} & \text{se } m \text{ è pari} \\ (m+1)c \frac{2 \cdot 4 \dots m}{3 \cdot 5 \dots m} & \text{se } m \text{ è dispari;} \end{cases}$$

in ogni caso

$$\frac{L_m}{L_{m-2}} = \frac{m+1}{m},$$

relazione notevole scoperta da E. Dubois<sup>1)</sup>. Le stesse equazioni (4) danno, supposto sempre  $m$  positivo,

$$\int y \, dx = (m+1)c^2 \int \operatorname{sen}^{2(m+1)} \varphi \cdot d\varphi$$

onde, integrando fra  $\varphi=0$  e  $\varphi=\pi/2$  e chiamando  $A_m$  l'area risultante,

$$(7) \quad A_m = (m+1)c^2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m+2)} \frac{\pi}{2},$$

onde

$$A_m = \frac{2m+1}{2m} A_{m-1},$$

altra relazione elegante dovuta al Dubois.

<sup>1)</sup> Sur une famille de courbes cycloïdales (Nouv. Corr. Math., T. VI, 1880).

Come espressione del raggio di curvatura  $R$  delle linee di Ribaucour si trova in generale

$$(8) \quad R = -(m+1)c \operatorname{sen}^m \varphi.$$

Eliminando  $\varphi$  tra le (5) e (8) si ottiene

$$(9) \quad s = -\frac{1}{m} \int \frac{dR}{\sqrt{\left[\frac{R}{(m+1)c}\right]^{-2/n} - 1}}$$

che è l'equazione intrinseca delle curve in questione. Ponendo

$$(m+1)c = a, \quad m = \frac{1-n}{1+n}$$

questa assume la seguente forma più comoda.

$$(9') \quad s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left[\frac{R}{b}\right]^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}} \quad ^1).$$

Paragonando questa all'equazione intrinseca delle spirali sinusoidi (Vol. I, p. 555)

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left[\frac{R}{b}\right]^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}$$

vedremo che queste e le linee di Ribaucour rientrano nella classe generale di curve aventi la seguente equazione intrinseca:

$$s = a \int \frac{dR}{\sqrt{\left[\frac{R}{b}\right]^m - 1}}$$

Se  $R_1$  e  $s_1$  sono il raggio di curvatura e l'arco dell'evoluta di questa, essendo

$$R_1 = R \frac{dR}{ds}, \quad s_1 = R$$

<sup>1)</sup> CESÀRO, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896), p. 49.

si trova

$$R_1 = \frac{s_1}{a} \sqrt{\left[\frac{s_1}{b}\right]^m - 1}$$

come equazione intrinseca dell'evoluta; ora, vedremo che questa è l'equazione intrinseca delle curve in cui l'arco è proporzionale ad una potenza dell'ascissa; onde si conclude: *Le spirali sinusoidi e le linee di Ribaucour appartengono alla classe costituita dalle evolventi delle curve tali che l'ascissa è proporzionale ad una potenza dell'arco* <sup>1)</sup>.

Sono notevoli le linee di Ribaucour in cui  $m$  è intero positivo; esse si possono considerare come speciali *inviluppi trocoidali*. Si consideri infatti un cerchio  $C_0$ , un suo diametro  $d$  ed una retta fissa  $r$ ; se  $C_0$  rotola senza scorrimento sopra  $r$ , il diametro  $d$  invilupperà una cicloide ordinaria  $C_1$ ; teorema interessante che Chasles scoperse fin dal 1837 <sup>2)</sup> e che il Todhunter ritrovò assai più tardi <sup>3)</sup>. Si faccia ora ruzzolare la cicloide  $C_1$  sulla retta  $r$ ; la sua base invilupperà una nuova curva  $C_2$ . Da questa nascerà similmente una curva  $C_3$  e così via. L' $m^{\text{ma}}$  di queste curve sarà rappresentata dalle equazioni (4). Questo fatto notevole venne esposto pubblicamente per la prima volta da N. Nicolaïdes <sup>4)</sup> e poi da E. Dubois <sup>4)</sup>; ma era stato osservato sin dal 1886 da Mannheim e Ribaucour, i quali

<sup>1)</sup> CESÀRO, *Sur une note de géométrie infinitésimale* (Nouv. Ann., 3<sup>a</sup> Serie, T. XIII, 1894).

<sup>2)</sup> *Aperçu historique*, 2<sup>a</sup> ed. (Paris 1875), p. 69. Questo teorema si dimostra facilmente riferendosi alla fig. 13 e tenendo le notazioni del n. 217. Infatti si vede agevolmente che l'equazione del diametro  $CO$  è

$$x - y \cot \phi = r(\phi - \cot \phi)$$

ossia

$$x \operatorname{sen} \phi - y \cos \phi = r(\phi \operatorname{sen} \phi - \cos \phi).$$

Ora differenziando questa si ottiene:

$$x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi = r(2 \operatorname{sen} \phi + \phi \cos \phi),$$

equazione che combinata con la precedente dà:

$$x = r(2\phi + \operatorname{sen} 2\phi)/2,$$

$$y = r(3 - \cos 2\phi)/2.$$

E se si pone

$$\pi/2 - x = x_1, \quad 2r - y = y_1, \quad \pi - 2\phi = \phi_1$$

queste si mutano in

$$x_1 = r(\phi_1 - \operatorname{sen} \phi_1)/2,$$

$$y_1 = r(1 - \cos \phi_1)/2,$$

che sono le equazioni canoniche della cicloide ordinaria, generata dal cerchio di raggio  $r/2$ .

<sup>3)</sup> Nouv. Corr. math. Question 203 (risolta T. IV, 1878, p. 69). Cfr. BESANT, *Notes on roulettes and glissettes*, 2<sup>a</sup> ed. (Cambridge 1890), p. 34.

<sup>4)</sup> *Analectes ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques*, IV Livraison (Athènes 1871), p. 103 e seg.

scopersero un procedimento per ottenere per via ricorrente tutte le curve in discorso <sup>1)</sup>. Le speciali linee di Ribaucour ora considerate fanno parte ciascuna di sistemi le cui caratteristiche sono  $2(m+1)$  e  $2$ ; onde i punti di contatto delle tangenti condotte da una di essa da un punto arbitrario del piano stanno sopra una curva di ordine  $2(m+2)$  di cui quel punto è multiplo secondo  $2(m+1)$ .

Le linee di Ribaucour sono notevoli non soltanto per le proprietà di cui godono <sup>2)</sup>, ma anche perchè s'incontrano risolvendo certi problemi di meccanica; valga a provarlo l'esempio seguente: Giovanni Bernoulli, due secoli or sono, propose la seguente questione <sup>3)</sup>: « In un piano verticale trovare una curva tale che un corpo che la percorre discendendo liberamente in forza del suo peso, la prema sempre in ciascuno dei suoi punti con una forza eguale al suo peso assoluto ». È chiaro che il punto mobile dev'essere soggetto a qualche altra forza oltre la gravità, ch'è altrimenti l'unica curva soddisfacente al quesito sarebbe una retta orizzontale. Ora se la legge con cui varia la pressione alla quale il mobile è sottoposto è la medesima per tutti i punti della curva, questa, servendosi della nomenclatura di B. Peirce <sup>4)</sup>, si chiama *baritropa*, se invece la pressione è costante si chiama *tautobaride*. Il problema del Bernoulli, non appena proposto e poi in seguito, attirò l'attenzione di geometri di alta rinomanza quali il Marchese de l'Hôpital, Varignon ed Eulero; il P. Jullien <sup>5)</sup> e C. H. Müller <sup>6)</sup> hanno esposti, compendiandoli, i risultati così ottenuti, i quali appartengono meno alla geometria che alla meccanica. Quest'ultimo ha poi specialmente trattato il problema seguente: « Trovare le curve situate in piani verticali su cui un punto pesante, soggetto ad una certa forza, si muova in modo da conservarsi costante ( $n$ ) il rapporto tra la pressione dovuta a quella forza e la pressione proveniente dalla gravità ». L'equazione differenziale delle curve cercate si trova essere

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{k(v_0 + 2gy)^{1/n} - 1}};$$

le curve stesse sono dunque linee di Ribaucour, come erasi annunciato.

<sup>1)</sup> Nouv. Corr. Math., T. VI, 1880, p. 224-225. V. anche F. MORLEY, *On adjustable cycloidal and trochoidal curves* (Amer. Journ., T. XVI, 1894).

<sup>2)</sup> V. L. BRAUDE, Rend. Circ. mat. di Palermo, T. XXVI, 1913, p. 27; E. TURRIÈRE, Ann. Sc. Pol. di Porto, T. VIII, 1913, p. 242-8; Enseign. mathém., T. XV, 1913; Nouv. Ann. de math., IV Ser., T. XIII, 1913; ecc.

<sup>3)</sup> Acta Erud., Suppl. T. II, p. 291; Joh. Bernoulli Opera, T. I, p. 141.

<sup>4)</sup> Physical and celestial Mechanics, p. 370.

<sup>5)</sup> Problèmes de mécanique rationnelle, T. I, p. 405.

<sup>6)</sup> Ueber barytrope und tautobaryde Curven (Diss., Marburg 1880).

**241.** Il problema risolto dalle curve di Ribaucour presenta un'indiscutibile analogia col seguente trattato verso la fine del secolo XVIII da un membro dell'Accademia di Pietroburgo <sup>1)</sup>: « Trovare una curva tale che sia costante ( $m$ ) il rapporto del raggio di curvatura  $R$  alla distanza dell'origine delle coordinate dal punto d'incontro della tangente e dell'asse  $Ox$  ». Esso si risolve abbastanza facilmente scegliendo come variabile indipendente l'angolo  $\varphi$  formato dalla normale coll'asse delle  $x$ ; detto al solito  $s$  l'arco della curva si ha allora:

$$dx = ds \cdot \sin \varphi, \quad dy = ds \cdot \cos \varphi, \quad \text{sunnormale} = x + y \cot \varphi,$$

$$R = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{dx}{\sin \varphi \cdot d\varphi},$$

onde la condizione del problema dà

$$\frac{dx}{\sin \varphi \cdot d\varphi} = m(x + y \cot \varphi)$$

ossia

$$(1) \quad dx = m(x \sin \varphi + y \cos \varphi) d\varphi.$$

Questa espressione è integrabile, onde

$$(2) \quad x + a = m(y \sin \varphi - x \cos \varphi),$$

$a$  essendo la costante d'integrazione.

Eliminando  $y$  fra le (1) (2) si ottiene

$$dx \sin \varphi - (x + a) \cos \varphi d\varphi = m x d\varphi$$

ossia

$$(3) \quad dx - x \frac{m + \cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = a \cot \varphi d\varphi$$

Pongasi ora

$$(4) \quad \frac{dz}{z} = - \frac{m + \cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi$$

e si avrà

$$\log \frac{1}{z} = m \log \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} + \log \sin \varphi$$

cioè

$$(5) \quad z = \frac{(1 + \cos \varphi)^m}{\sin^{m+1} \varphi}$$

<sup>1)</sup> M. PLATZMANN, *Solutio problematis ex methodo tangentium inversa* (Acta Acad. Petrop. pro anno MDCLXXXI, Pars II, Petrop. 1785).

Ma, grazie alla (4), la (3) diviene:

$$d x + x \frac{d z}{z} = a \cot \varphi d \varphi$$

onde

$$x z = a \int z \cot \varphi d \varphi$$

cioè per la (5)

$$(6) \quad x \frac{(1 + \cos \varphi)^m}{\operatorname{sen}^{m+1} \varphi} = a \int \frac{(1 + \cos \varphi)^m \cos \varphi}{\operatorname{sen}^{m+2} \varphi} d \varphi = \\ = a \int \frac{\cos \varphi \operatorname{sen}^{m-2} \varphi}{(1 - \cos \varphi)^m} d \varphi$$

Supposto  $m \neq 1$ , integrando si ottiene, dette  $b$  la costante d'integrazione,

$$\frac{x (1 + \cos \varphi)^m}{a \operatorname{sen}^{m+1} \varphi} = \frac{1}{2(m-1)} \frac{\operatorname{sen}^{m-1} \varphi}{(1 - \cos \varphi)^{m-1}} - \\ - \frac{1}{2(m+1)} \frac{\operatorname{sen}^{m+1} \varphi}{(1 - \cos \varphi)^{m+1}} + b$$

o, indicando con  $c$  la costante arbitraria  $ab$ , e poi applicando la (2)

$$(7) \quad x = c \frac{\operatorname{sen}^{m+1} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} + a \frac{1 - m \cos \varphi}{m^2 - 1}; \\ y = c \frac{(1 + m \cos \varphi) \operatorname{sen}^m \varphi}{(1 + \cos \varphi)^m} + \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{m^2 - 1}.$$

Tale è la rappresentazione analitica delle curve cercate quando  $m \neq 1$ ; è chiaro che tali curve sono algebriche o non secondochè  $m$  è razionale o non; se  $m$  è intero esse sono di più razionali.

Nel caso escluso  $m = 1$  la (6) diviene:

$$\frac{x}{a} \frac{1 + \cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} = \int \frac{\cos \varphi d \varphi}{(1 - \cos \varphi) \operatorname{sen} \varphi} = \\ = \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \cos \varphi) - (1 - \cos \varphi)}{(1 - \cos \varphi) \operatorname{sen} \varphi} d \varphi = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen} \varphi d \varphi}{1 - \cos \varphi} - \\ - \frac{1}{2} \int \frac{d \varphi}{\operatorname{sen} \varphi};$$

integrando, indicando con  $c/2a$  la costante d'integrazione e poi applicando la (2) si conclude:

$$(8) \quad \begin{cases} 2x + a = c(1 - \cos \varphi) - a(1 - \cos \varphi) \log \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \cos \varphi}, \\ 2y = c \operatorname{sen} \varphi + a(1 - \cos \varphi) - a \operatorname{sen} \varphi \log \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \cos \varphi}. \end{cases}$$

Queste equazioni rappresentano la curva cercata nel caso ora considerato; essa è in generale trascendente. Supponendo in particolare  $a = 0$  si ottiene

$$x = c(1 - \cos \varphi), \quad y = c \operatorname{sen} \varphi;$$

eliminando  $\varphi$  se ne trae

$$x^2 + y^2 - cx = 0,$$

equazione di un cerchio; che questo dovesse trovarsi fra le curve cercate era cosa da prevedersi, onde la conclusione precedente non è che una verifica di calcolo. Similmente si procede nel caso  $m = -1$ ; le curve risultanti sono tutte trascendenti.

Notiamo da ultimo che se nel problema di Bernoulli (p. 156) si sostituisce al rapporto, il prodotto del raggio di curvatura per la corrispondente normale, si ottiene una nuova classe di curve, dipendenti da funzioni ellittiche, la cui determinazione fu fatta da G. Scheffers<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Zusammenhang zwischen der Abwicklung eines Kreiscylinders und den Rotationsflächen konstanter Krümmung (Arch. Math. Phys., III Ser., T. VI, 1903); Einführung in die Theorie der Kurven, III ed. (Berlin, 1923), p. 137 e segg.

## CAPITOLO XV

## La Spirale di Norwich o di Sturm, e la Curva di Eulero.

242. Un problema assai generale risoluto per la prima volta da Jacopo Riccati è il seguente: « Determinare una curva conoscendo l'espressione del raggio di curvatura in un punto qualunque in funzione del corrispondente raggio vettore »<sup>1)</sup>; esso conduce ad un'equazione differenziale di second'ordine integrabile per quadrature col seguente procedimento:

Dette al solito  $\varrho, \omega$  le coordinate polari e  $R = \varphi(\varrho)$  il raggio di curvatura avremo l'equazione:

$$(1) \quad \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{3/2}}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''} = \varphi(\varrho)$$

Si ponga

$$\varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega} = p,$$

e si avrà

$$\varrho'' = \frac{d^2\varrho}{d\omega^2} = \frac{d\varrho'}{d\omega} = \frac{d\varrho'}{d\varrho} \frac{d\varrho}{d\omega} = p \frac{dp}{d\varrho}$$

onde la (1) diviene:

$$(2) \quad \varphi(\varrho) = \frac{(\varrho^2 + p^2)^{3/2}}{\varrho^2 + 2p^2 - \varrho p \frac{dp}{d\varrho}}$$

Integrando quest'equazione si otterrà  $p$  in funzione di  $\varrho$ , e

<sup>1)</sup> Vedi *Soluzione generale del problema inverso intorno a' raggi osculatori* (Giorn. de' Letterati d'Italia, T. XI, 1712); cfr. N. FUSS, *Solutio problematis ex methodo tangentium inversa* (Nova Acta Petrop., T. IV, 1788).

quindi, per le posizioni fatte

$$(3) \quad \omega + \alpha = \int \frac{d\varrho}{p}$$

Ora per integrare la (2) poniamo:

$$\varrho^2 = x, \quad \varrho^2 + p^2 = y, \quad \varphi(\varrho) = \varphi(\sqrt{x}) = f(x)$$

e potremo scriverla come segue

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{2}{\sqrt{y}} - \frac{x}{\sqrt{y^3}} \frac{dy}{dx}$$

cioè

$$\frac{1}{f(x)} = 2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{x}{\sqrt{y}} \right]$$

donde

$$\frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{f(x)}$$

Riponendo in luogo di  $x$  e  $y$  i loro valori si trova

$$\frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2 + p^2}} = \int \frac{\varrho d\varrho}{\varphi(\varrho)},$$

da cui, ponendo

$$\int \frac{\varrho d\varrho}{\varphi(\varrho)} = \psi(\varrho) - c,$$

$$p = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - [\psi(\varrho) - c]^2}}{\psi(\varrho) - c}.$$

Sostituendo nella (3) a  $p$  questo valore si conclude

$$(4) \quad \omega + \alpha = \int \frac{\psi(\varrho) - c}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - [\psi(\varrho) - c]^2}} d\varrho:$$

è questa l'equazione polare della curva<sup>1)</sup>. Se ne deduce che

<sup>1)</sup> La (4) trovasi senza dimostrazione nel T. II, p. 340 della 2<sup>a</sup> ed. (Leipzig, 1874) dell'*Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis* dello SCHLÖMILCH.

$$(5) \quad s = \int \frac{R \cdot dR}{\sqrt{R^2 - \{\psi(R) - c\}^2}}$$

ne è l'equazione intrinseca. Applicando le formole che legano gli elementi  $R$  e  $s$  di una curva agli elementi analoghi della sua evoluta, cioè le formole

$$R_1 = R \frac{dR}{ds} \cdot s_1 = R$$

si trova

$$(6) \quad R_1 = \sqrt{s_1^2 - [\psi(s_1) - c]^2}$$

come equazione intrinseca della evoluta della (1).

Più di un secolo dopo Riccati, un caso speciale — il più semplice — di questo problema attrasse l'attenzione dei matematici: è quello in cui il raggio di curvatura sia eguale al raggio vettore. Ne trattò C. Sturm nel 1857 in una nota al suo *Cours d'analyse*<sup>1)</sup>, donde il nome di *spirale di Sturm* data da taluno alla curva<sup>2)</sup>; undici anni dopo se ne occuparono J. Sylvester, durante il Congresso tenuto a Norwich nel 1868 dalla British Association for the Advancement of Science, donde il nome di *spirale di Norwich* dato alla curva<sup>3)</sup>; l'anno dopo la stessa diede materia ad una nota di O. Schlömilch<sup>4)</sup>. L'equazione polare della nuova spirale si ottiene dalla (4) supponendo  $\varphi(\varrho) = \varrho$  e quindi anche  $\psi(\varrho) = \varrho$ ; è pertanto

$$\omega + a = \int \frac{(\varrho - c) d\varrho}{\varrho \sqrt{2c\varrho - \varrho^2}};$$

eseguendo l'integrazione indicata se ne deduce

$$(7) \quad \omega + a = \sqrt{\frac{2\varrho - c}{c}} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{2\varrho - c}{c}}$$

o anche, ponendo  $2c = a$ ,

$$(7') \quad \omega + a = \sqrt{\frac{\varrho - a}{a}} + 2 \operatorname{arc} \cos \frac{a}{\varrho};$$

<sup>1)</sup> Cfr. 6ª ed. (Paris, 1880), T. II, p. 106.

<sup>2)</sup> NICOLAÏDES, *Analectes ou Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques*, p. 136 (Athènes, 1872).

<sup>3)</sup> *Note on the successive involute to a circle* (Phil. Mag., 4ª Serie, T. 36, 1868); *Outline trace of the Theory of reducible Cycloides* (Proc. of the L. M. Soc., T. II, 1869).

<sup>4)</sup> *Ueber eine Spirale* (Zeitschrift, XIV, 1869).

l'equazione intrinseca è invece

$$(8) \quad s = \frac{R + c}{3} \sqrt{\frac{2R - c}{c}}$$

ossia

$$(8') \quad s = \frac{R + 2a}{3} \sqrt{\frac{R - a}{a}};$$

e l'equazione intrinseca dell'evoluta risulta dalla (6) supponendo  $\psi(s_1) = s_1$ , onde è

$$(9) \quad R_1^2 = 2c s_1 - c^2;$$

scrivendola sotto la forma

$$R_1^2 = 2c(s_1 - c/2)$$

si vede (p. 128) che rappresenta un'evolvente di cerchio: la *spirale di Sturm* è, dunque, l'evolvente dell'evolvente, cioè la *seconda evolvente di un cerchio*.

Osserviamo incidentalmente che la (6') è analoga alla seguente equazione

$$(10) \quad \omega = \frac{\sqrt{\varrho^2 - (a/2)^2}}{a} + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{a/2}{\varrho}$$

che rappresenta una curva la quale s'incontra nella matematica applicata e che, per essere generabile mediante il ruzzolamento di un cerchio, venne dal Sylvester chiamata *convoluta del cerchio*<sup>1)</sup>.

**243.** Se le coordinate polari  $\varrho, \omega$  di una curva piana si suppongono funzioni di una variabile indipendente  $t$ , e se ne indicano con  $s$  l'arco e con  $R$  il raggio di curvatura si ha:

$$(11) \quad R = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\varrho^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3 + 2 \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 \frac{d\omega}{dt} - \varrho \frac{d^2\varrho}{dt^2} \frac{d\omega}{dt} + \varrho \frac{d\varrho}{dt} \frac{d^2\omega}{dt^2}}$$

Supposto in particolare che come variabile  $t$  si prenda il raggio

<sup>1)</sup> Va notato che il BARROW aveva già usato nelle sue *Lectiones geometriae* il termine *convolute*, ma in altro significato: vedi *The mathem. Works of J. Barrow, ed. Whewell* (Cambridge 1860), p. 295-297.

vettore  $\rho$  si ha :

$$(12) \quad R = \frac{\left\{ \left[ \rho \frac{d\omega}{d\rho} \right]^2 + 1 \right\}^{3/2}}{\rho \left[ \left( \frac{d\omega}{d\rho} \right)^3 + 2 \frac{d\omega}{d\rho} + \rho \frac{d^2\omega}{d\rho^2} \right]}.$$

Ora se si chiama  $\mu$  l'angolo della tangente col raggio vettore e  $p$  la lunghezza della perpendicolare abbassata dall'origine sulla tangente si ha :

$$(13) \quad \operatorname{tg} \mu = \rho \frac{d\omega}{d\rho}, \quad p = \rho \operatorname{sen} \mu$$

e quindi:

$$p = \frac{\rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}}{\sqrt{\left[ \left( \rho \frac{d\omega}{d\rho} \right)^2 + 1 \right]}}, \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{2\rho \frac{d\omega}{d\rho} + \rho^2 \frac{d^2\omega}{d\rho^2} + \rho^3 \left( \frac{d\omega}{d\rho} \right)^3}{\left\{ \left[ \left( \rho \frac{d\omega}{d\rho} \right)^2 + 1 \right\}^{3/2}}.$$

È per conseguenza

$$(14) \quad R = \rho \frac{d\rho}{dp}.$$

Di questa elegantissima espressione Eulero si è servito — in una memoria presentata all'Accademia di Pietroburgo il 20 agosto 1781 <sup>1)</sup> — per risolvere la questione — di cui nel n. prec. esponemmo la soluzione di Riccati — di trovare una curva il cui raggio di curvatura in un punto qualunque sia una data funzione della distanza di quel punto da un punto fisso. Preso per polo questo punto sarà  $R$  una funzione data di  $\rho$

$$R = f(\rho)$$

onde la (14) darà

$$(15) \quad p = \int \frac{\rho d\rho}{f(\rho)}.$$

<sup>1)</sup> De curvis quarum radii osculi tenent rationem duplicata distantiae a puncto fixo, earumque mirabilibus proprietatibus (Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, T. IX, 1824).

D'altra parte, essendo  $\mu$  l'angolo opposto al cateto  $p$  di un triangolo rettangolo avente per ipotenusa  $\rho$  si ha

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{p}{\sqrt{\rho^2 - p^2}}$$

onde per la (13, 1<sup>a</sup>)

$$\rho \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{p}{\sqrt{\rho^2 - p^2}}.$$

Surrogando qui  $p$  col suo valore dato dalla (15) con una quadratura si otterrà

$$(16) \quad \omega = \int \frac{p d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - p^2}};$$

e questa è l'equazione generale delle curve richieste.

Nel caso semplicissimo in cui sia  $f(\rho) = \rho/\mu$  la (15) dà  $p = \mu\rho + c$ ,  $c$  essendo una costante; la (16) diviene quindi

$$\omega = \int \frac{(\mu\rho + c) d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - (\mu\rho + c)^2}},$$

e la quadratura è eseguibile elementarmente <sup>1)</sup>; se in particolare si suppone  $c = 0$  si ha

$$\omega = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \int \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \log \frac{\rho}{a}$$

ossia

$$\rho = a e^{\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \omega},$$

onde la curva richiesta non è che una spirale logaritmica.

Più complicato è il caso corrispondente all'ipotesi  $f(\rho) = \rho^2/a$  su cui si è intrattenuto Eulero; in tal caso le equazioni (15) (16)

<sup>1)</sup> E. WÖLFING ha mostrato (v. la nota *Ueber eine besondere Klasse transzendenter Kurven*, Arch. Math. Phys., III Ser., T. IV, 1902) che le curve ottenute sono evolventi di curve cicliche e le chiamò *linee di Mannheim*.

divengono :

$$p = a \int \frac{d \varrho}{\varrho} = a \log \frac{\varrho}{c}$$

$$(17) \quad \omega = \int \frac{a \log \varrho/c \cdot d \varrho}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - (a \log \varrho/c)^2}}.$$

Benchè questa quadratura non sia eseguibile, Eulero ha insegnato il modo di discutere ne' suoi minuti particolari la curva ottenuta; noi non ne seguiremo l'esempio e ci limiteremo a segnalare una proprietà che possiede la curva di Eulero.

Dalla (17) deducesi :

$$(8) \quad \frac{d \omega}{d \varrho} = \frac{a \log \varrho/c}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - (a \log \varrho/c)^2}}, \quad \frac{d s}{d \varrho} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - (a \log \varrho/c)^2}}$$

onde

$$d s - a d \omega = d \sqrt{\varrho^2 - (a \log \varrho/c)^2}$$

e integrando

$$s = a \omega + \sqrt{\varrho^2 - (a \log \varrho/c)^2} + \text{cost.}$$

Ora  $\sqrt{\varrho^2 - (a \log \varrho/c)^2}$  misura la proiezione  $q$  del raggio vettore sulla tangente, dunque

$$s = a \omega + q + \text{cost.},$$

relazione elegante che è facile enunciare a parole.

Osserviamo finalmente che, essendo per ipotesi  $\varrho = \sqrt{a R}$ , posto  $b = c^2/a$ , la (8) diviene :

$$s = \sqrt{a} \int \frac{d R}{\sqrt{4 R - a (\log R/b)^2}}$$

e questa è l'equazione intrinseca della curva.

**244.** Le formole esposte nel numero precedente sono quelle che si devono invocare di regola ogni qualvolta si tratti di studiare le curve definite da una relazione fra il raggio di curvatura  $R$  e la

distanza  $p$  della corrispondente tangente da un punto fisso. Supponiamo, ad esempio, che tale relazione sia la seguente

$$(17) \quad R = k p^n,$$

ove  $k, n$  sono costanti date. Grazie alla (14) questa può scriversi

$$\varrho d \varrho = k p^n d p$$

che integrata diviene

$$(18) \quad \varrho^2 = \frac{2 k}{n+1} p^{n+1} - c,$$

e questa serve a rappresentare tutte le curve in questione. Le loro evolute godono di un'elegante proprietà che ora stabiliremo<sup>1)</sup>. Notiamo perciò che dalle relazioni che legano gli elementi intrinseci  $R, s$  di una curva a quelli della sua evoluta risulta che

$$R_1 = \frac{R d R}{d s}.$$

Ora dalla (16) si deduce successivamente :

$$\varrho d \omega = \frac{p d \varrho}{\sqrt{\varrho^2 - p^2}}, \quad d s^2 = d \varrho^2 + \varrho^2 d \omega^2 = \frac{\varrho^2 d \varrho^2}{\varrho^2 - p^2}, \quad d s = \frac{\varrho d \varrho}{\sqrt{\varrho^2 - p^2}};$$

per ciò e per le (17) si conclude

$$R_1 = n k p^{n-1} \sqrt{\varrho^2 - p^2}.$$

Ma se pel centro di curvatura  $C$  in un punto qualunque  $P$  della curva considerata si conduce la parallela alla tangente e se ne determina la intersezione  $D$  col raggio vettore  $OP$  si ha

$$C D = R \cot \mu;$$

sostituendo a  $R$  il suo valore  $k p^n$  e a  $\cot \mu$  la sua espressione  $\frac{\sqrt{\varrho^2 - p^2}}{p}$  si può scrivere

$$C D = k p^{n-1} \sqrt{\varrho^2 - p^2}.$$

<sup>1)</sup> Essa forma oggetto della Question 493 delle *Nouv. Ann. de Math.*; una soluzione di essa, differente da quella esposta nel testo, si legge nel T. I (1862) della 2<sup>a</sup> Serie di quel periodico (p. 321-22), ed appartiene a G. SACCHI.

Dunque

$$R_1 = n \cdot C D,$$

relazione che esprime l'annunciata proprietà e che insegna a costruire i raggi di curvatura delle evolute di tutte le curve determinate della equazione (17).

Aggiungiamo che fra queste si trovano molte curve a noi già note; lo si vede applicando appunto le formole (15) (16) dopo di avere osservato che eliminando  $p$  fra le (17) (18) si ottiene

$$R = k \left[ \frac{n+1}{2k} \varrho^2 + c \right]^{\frac{n}{n+1}}$$

onde attualmente in quelle formole si deve supporre

$$f(\varrho) = k \left[ \frac{n+1}{2k} \varrho^2 + c \right]^{\frac{n}{n+1}}$$

Per  $n = 0$  questa rappresenta una circonferenza.

Supponiamo  $n = 1$  e  $k \neq 1$ ; otterremo successivamente

$$f(\varrho) = \sqrt{k} \sqrt{\varrho^2 + c}, \quad p = \frac{\sqrt{\varrho^2 + c}}{\sqrt{k}}, \quad \omega = \int \frac{\sqrt{\varrho^2 + c} d\varrho}{\varrho \sqrt{(k-1)\varrho^2 - c}};$$

ricordando l'equazione (14) a pag. 110 si vede che, facendo in essa

$$c = -\frac{a^2}{n^2}, \quad k = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2},$$

l'equazione ottenuta rappresenta un'epicicloide od ipocicloide. Nel caso escluso  $k = 1$  si ha invece

$$\sqrt{-c} \omega = \int \frac{\sqrt{\varrho^2 + c} d\varrho}{\varrho} = \sqrt{\varrho^2 + c} + \sqrt{-c} \arcsin \frac{\sqrt{-c}}{\varrho};$$

facendo ivi  $c = -a^2$  si vede (v. p. 127) che la curva rappresentata è una evolvente di circolo.

Parecchie altre curve si ottengono supponendo  $c = 0$  e attribuendo a  $n$  vari valori, come accenneremo brevemente.

$$1^\circ \quad n = 1, \quad f(\varrho) = \frac{\varrho}{\sqrt{k}}, \quad p = \frac{\varrho}{\sqrt{k}},$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{k-1}} \log \frac{\varrho}{\varrho_0}; \quad \varrho = \varrho_0 e^{\sqrt{k-1}\omega}; \quad \text{spirale logaritmica.}$$

$$2^\circ \quad n = 3, \quad f(\varrho) = \sqrt{\frac{8\varrho^3}{k}}, \quad p = \sqrt{\frac{k\varrho}{2}},$$

$$\omega = 2 \arcsin \frac{\sqrt{\varrho - k/2}}{\sqrt{k/2}}, \quad \varrho = \frac{k}{1 + \cos \omega}; \quad \text{parabola.}$$

$$3^\circ \quad n = \frac{1}{3}, \quad f(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{3}} k \varrho, \quad p = \sqrt{\frac{2\varrho^3}{k}},$$

$$\omega = \arcsin \frac{4\varrho - k}{k}, \quad \varrho = \frac{k}{4} (1 + \sin \omega); \quad \text{cardioide.}$$

$$4^\circ \quad n = -\frac{1}{3}, \quad f(\varrho) = \frac{3k^2}{\varrho}, \quad p = \frac{\varrho^3}{9k^2},$$

$$\omega = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\varrho^2}{9k^2}, \quad \varrho^2 = 9k^2 \sin 2\omega; \quad \text{lemniscata di Bernoulli.}$$

$$5^\circ \quad n = -3, \quad f(\varrho) = -\frac{\varrho^3}{k^2}, \quad p = \frac{k^2}{\varrho},$$

$$\omega = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{k^2}{\varrho^2}, \quad xy + \frac{k^2}{2} = 0; \quad \text{iperbole equilatera.}$$

Lasciamo al lettore di verificare che, quando  $c \neq 0$ , supposto  $n = -3$  la curva corrispondente è una conica a centro.

## CAPITOLO XVI

## Curve trigonometriche e Curve ipertrigonometriche.

245. Chiameremo *curve trigonometriche* quelle rappresentate dalle equazioni :

$$(1) \quad y = b \operatorname{sen} \frac{x}{a}, \quad (2) \quad y = b \operatorname{tg} \frac{x}{a}, \quad (3) \quad y = b \operatorname{sec} \frac{x}{a}$$

$$(4) \quad y = b \operatorname{cos} \frac{x}{a}, \quad (5) \quad y = b \operatorname{cot} \frac{x}{a}, \quad (6) \quad y = b \operatorname{cosec} \frac{x}{a}$$

ove  $a$  e  $b$  sono costanti che possono sempre supporre positive<sup>1)</sup>. Siccome ponendo  $x = \pi a/2 - x'$  si passa dalle tre prime ordinatamente alle altre, così basta studiare direttamente quelle. Esse servono a rappresentare geometricamente, quando  $a = b = 1$ , le ordinarie funzioni trigonometriche; in tal caso possono dirsi *curve trigonometriche propriamente dette*; e poichè possono scriversi anche come segue

$$x = a \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{y}{b}, \quad x = a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{b}, \quad x = a \operatorname{arc} \operatorname{sec} \frac{y}{b}$$

$$x = a \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{y}{b}, \quad x = a \operatorname{arc} \operatorname{cot} \frac{y}{b}, \quad x = a \operatorname{arc} \operatorname{cosec} \frac{y}{b}$$

<sup>1)</sup> Sono analoghe ad esse quelle rappresentate dalle equazioni

$$y = b \operatorname{sn}(x/a), \quad y = b \operatorname{cn}(x/a), \quad y = b \operatorname{dn}(x/a),$$

atte a rappresentare geometricamente le tre funzioni ellittiche di JACOBI; pure analoga è la curva  $|\operatorname{sen}(x + iy)| = c$  studiata da F. GOMES TEIXEIRA (*Obras*, T. V, p. 36).

servono anche a rappresentare in modo analogo le funzioni trigonometriche inverse. Variando la costante  $b$  si ottengono curve fra loro simili, differenti cioè solo per la grandezza; variando  $a$  si ottengono invece curve fra loro affini.

Curve le cui equazioni rientrano nel tipo (1) vennero da noi già incontrate: sono la compagna della cicloide (p. 85)<sup>1)</sup>, la quadratrice di Tschirnhausen (p. 20) e la curva di Ozanam (p. 21). Le semplici relazioni geometriche che intercedono fra le  $\infty^2$  curve nascenti dalla (1) al variare delle costanti  $a, b$  permette di considerarle come identiche ad una stessa: è questa la linea che Leibniz chiama *linea sinum*<sup>2)</sup> e che oggi dicesi *Sinusoida*<sup>3)</sup>, mentre la (4) si chiama *Cosinusoida*. Essa può ottenersi svolgendo su un piano un cilindro circolare retto; chè ogni sua sezione piana diviene una sinusoida<sup>4)</sup>. S'incontra pure nella teoria matematica del suono ove è chiamata *Curva armonica*<sup>5)</sup>; e venne a torto identificata colla forma assunta da una corda vibrante<sup>6)</sup>; alcuni esteti la considerarono come *linea della bellezza*<sup>7)</sup>. Si conoscono strumenti per descriverla di moto continuo<sup>8)</sup> e ne furono anche determinati i fuochi<sup>9)</sup>.

Si considerino simultaneamente le curve  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ; nei punti ad esse comuni si ha  $\operatorname{sen} x = \cos^2 x$ . Ora per la prima il coefficiente direttivo della tangente è dato da  $-\operatorname{sen} x$ , mentre per la seconda  $\frac{1}{\cos^2 x}$ ; nei punti ad esse comuni il loro prodotto vale  $-1$ ; perciò le due curve si tagliano ortogonalmente in tutti i punti comuni<sup>10)</sup>.

Indicando con  $X, Y$  le coordinate correnti, l'equazione della tangente nel punto  $(x, y)$  della curva (1) è

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{a};$$

<sup>1)</sup> «Et Gallorum socia Cycloidis est ea Curva quae (mihi) terminat Figuram Sinuum rectorum»; così il WALLIS in una lettera a LEIBNIZ del 6 aprile 1697 (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. IV, p. 18).

<sup>2)</sup> Lettera a HUYGENS del 4/14 settembre 1694 (op. cit., T. II, p. 195).

<sup>3)</sup> BELIDOR, *La science des ingénieurs* (Paris 1729).

<sup>4)</sup> G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, 2ª ed. (Milano, 1914), p. 133.

<sup>5)</sup> Lord RAYLEIGH, *The Theory of Sound*, T. I (2ª ed., London 1894), pag. 21.

<sup>6)</sup> M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, T. III (Leipzig 1899), p. 872.

<sup>7)</sup> Vedi *The analysis of beauty* (1753) del pittore W. HOGARTH.

<sup>8)</sup> A. STANLEY MACKENZIE, *An instrument for drawing a sine curve* (*Physical Review*, Vol. XV, 1902); G. PUPPO, *Sul tracciamento di qualche curva trascendente per moto continuo* (Il Politecnico, 1927).

<sup>9)</sup> L. ROTH, in *Arch. Math. Phys.*, III Ser., T. XXV, p. 338.

<sup>10)</sup> Proposizione comunicata all'autore dal prof. K. CARDA, con lettera datata da Praga, 21 aprile 1928.

razionalizzando si vede che: i punti di contatto delle tangenti che si possono condurre ad una sinusoidale da un punto qualunque del suo piano appartengono ad una curva del quart'ordine di cui quel punto è doppio; onde qualunque sinusoidale è una curva panalgebrica e fa parte di un sistema con le caratteristiche 2 e 2<sup>1</sup>).

Facendo ruotare di un angolo costante  $\alpha$  le ordinate d'una sinusoidale si ottiene la curva, detta *sinusoidale obliqua*, di equazione

$$x = a \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left[ \frac{y}{b \operatorname{sen} \alpha} \right] + y \cot \alpha^2$$

La curva rappresentata dall'equazione (2) è chiamata *Tangentoide*<sup>3</sup>) e *Cotangentoide* quella rappresentata dalla (5). L'equazione della tangente alla prima nel punto  $(x, y)$  ha per equazione

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{b^2 + y^2}{ab}$$

donde è facile dedurre una semplice espressione della sotttangente e quindi una costruzione della tangente<sup>4</sup>); l'equazione stessa mostra che i punti di contatto delle tangenti condotte ad una tangentoide da un punto qualunque del suo piano stanno sopra una cubica passante per quel punto; ogni tangentoide fa quindi parte di un sistema le cui caratteristiche sono 1 e 2. L'area che è compresa fra la curva gli assi coordinati e l'ordinata relativa alla ascissa  $x$  è espressa da  $ab \log \sec x/a$ ; mentre il volume generato dalla rotazione di questa area attorno a  $Ox$  è dato da  $\pi b^2 (a \operatorname{tg} x/a - x)$ : sono questi teoremi stabiliti da Cotes e che è facile verificare<sup>5</sup>).

Finalmente le curve rappresentate dalle equazioni (3) e (6) si chiamano risp. *Secantoide*<sup>6</sup>) e *Cosecantoide*. La tangente alla prima nel punto  $(x, y)$  ha per equazione

<sup>1</sup>) La rettificazione della sinusoidale dipende da integrali ellittici: cfr. F. GOMES TEIXEIRA. *Nota sull'applicazione del teorema di Fagnano agli archi della lumaca di Pascal e della sinusoidale* (Period. Matem., III Ser., T. XIX, 1903).

<sup>2</sup>) FAA DI BRUNO, *Mémoire sur les colonnes torses* (Paris 1850), p. 5. Ivi (p. 10) è anche considerata la *scolioide* (da  $\sigma\kappa\omicron\lambda\omicron\varsigma$  = tortuoso) di equazione polare

$$\operatorname{tg}(\omega - \beta) = \operatorname{tg} \alpha \left[ \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} \cdot \log \frac{g \cos \alpha}{\rho \cos(\omega - \beta)} \right]$$

<sup>3</sup>) « Figure des tangentes » è chiamata in STONE, *Analyse des infiniment petits*, trad. RONDET (Paris 1735), p. 56.

<sup>4</sup>) BARROW, *Lectures mathematicae* (Londini 1670); v. *The mathem. Works of Is. Barrow*, ed. Whewell (Cambridge 1860), p. 250.

<sup>5</sup>) *Harmonia mensurarum* (Cambridge 1722), p. 78 e 81.

<sup>6</sup>) « Figures des secantes », secondo STONE-RONDET.

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{y \sqrt{y^2 - b^2}}{b}$$

se ne deduce: i punti di contatto delle tangenti condotte ad una secantoide da un punto qualunque del suo piano appartengono ad una curva del sest'ordine avente quel punto per doppio; ogni tangentoide fa quindi parte di un sistema le cui caratteristiche sono 2 e 2. L'area limitata dalla secantoide, dagli assi e dall'ordinata relativa alla ascissa  $x$  è espressa da  $ab \log (\sec x/a + \operatorname{tg} x/a) = ab \log \cot (\pi/4 - x/2a)$ : lo trovò Cotes<sup>1</sup>) e si può dimostrarlo con facili integrazioni.

**246.** Crediamo superfluo arrestarci ulteriormente sopra queste curve le cui proprietà non sono molto rilevanti e chiuderemo questo Capitolo facendo menzione di alcune curve che, rappresentando delle funzioni composte con funzioni trigonometriche, possono ritenersi costituire una nuova classe di linee, le *curve ipertrigonometriche*.

La più antica ha per equazione

$$y = b \sqrt{\cos \frac{x}{a}}$$

Fermat insegnò a trovarne la tangente<sup>2</sup>). Segue poi quella di equazione

$$\cos m y = k \cos m x^3);$$

indi quella rappresentata dalla

$$a \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} m y = b \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} n x + e^4);$$

e finalmente quella avente per equazione

$$y = a \operatorname{sen} \operatorname{sen} x$$

<sup>1</sup>) *Harmonia mensurarum*, p. 78.

<sup>2</sup>) Lettera al P. MERSENNE del 22 ottobre 1638 (*Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 172). Il nome di *ovale di Fermat* con cui viene talora designata è appropriato in quanto si tratta di una curva chiusa simmetrica rispetto agli assi coordinati; bisogna però tenere presente che è costituita, non da una, ma da infinite ovali.

<sup>3</sup>) HÜLSEN, *Ueber die Curve: \cos m y = k \cos m x* (Progr. Naumburg, 1859).

<sup>4</sup>) A. NEWTON and A. W. PHILIPPS, *On the transcendental curves whose equation is \sin y \sin m y = a \sin x \sin n x + b* (Trans. of the Connecticut Academy, T. III, 1875).

che è chiamata *curva dei seni duplicati*<sup>1)</sup>. Più semplici sono le curve

$$y = a \operatorname{sen}^n x$$

che P. Mansion<sup>2)</sup> chiamò *sinusoidi pari* o *dispari* secondochè  $n$  è pari o dispari; esse hanno forme differenti, a seconda del segno e del valore di  $n$ ; notisi che essendo  $\operatorname{sen}^n x$  per  $n$  dispari esprimibile linearmente in funzione di  $\operatorname{sen} x$ ,  $\operatorname{sen} 3x$ , ...,  $\operatorname{sen} nx$  le dette curve rientrano nella più vasta categoria di curve di equazione

$$y = a_1 \operatorname{sen} m_1 x + a_2 \operatorname{sen} m_2 x + \dots$$

le quali danno la rappresentazione grafica delle funzioni definite da serie di Fourier.

Sotto il nome di *albero* fu considerata la curva

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{r}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2a} + 1 \quad (3)$$

e furono investigate anche le curve integrali dell'equazione differenziale

$$\operatorname{sen} x \cdot dx = \operatorname{sen} y \cdot dy \quad (4)$$

Innumerevoli altre analoghe si potrebbero immaginare; ma soltanto alcune presentano qualche interesse e possiedono una effettiva importanza. Fra queste si trova la *lemniscatrice* di E. Oekingshaus<sup>5)</sup>, definita dall'equazione

$$\operatorname{sen} i y = i \cos x. \quad (7)$$

Che in questa gl'immaginari non entrino che in apparenza si vede scrivendola come segue:

$$y = \log (\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}). \quad (7')$$

<sup>1)</sup> E. SANG, *On the curve of second sines and its variations* (Edinburgh Proc., T. VIII, 1874).

<sup>2)</sup> Aires des sinusoides et formule de Wallis (Mathésis, II Ser., T. X, 1900).

<sup>3)</sup> J. DE VARGAS Y AGUIRRE, *Catalogo general de curvas* (Mem. Acad. Madrid, T. XXVI, 1908, p. 73).

<sup>4)</sup> F. FRANKLIN, *On some applications of circular coordinates* (Amer. Journ. of Math., T. XII, 1890).

<sup>5)</sup> V. la memoria *Die Lemniskate* (Archiv, 2<sup>a</sup> Serie, T. VII e VIII, 1889).

Si deduce da questa:

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 \cos x}{\sqrt{(1 + \cos^2 x)^3}};$$

onde tutti i punti di coordinate

$$x = k\pi, \quad y = \log(\sqrt{2} \pm 1)$$

sono punti di culminazione, mentre i punti

$$x = (2k + 1)\pi/2, \quad y = 0$$

sono flessi. Detti poi al solito  $s$  l'arco e  $R$  il raggio di curvatura dalle (8) si deduce

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}, \quad R = \frac{\sqrt{2}}{\cos x}$$

donde eliminando  $x$

$$(9) \quad s = 2 \int \frac{dR}{\sqrt{R^2 - 4}},$$

che è l'equazione intrinseca della lemniscatrice. Chiamando  $s_1$  e  $R_1$  l'arco ed il raggio di curvatura dell'evoluta, essendo

$$s_1 = R, \quad R_1 = R \frac{dR}{ds}$$

si ottiene

$$R_1 = \frac{s_1}{4} \sqrt{s_1^4 - 4}.$$

Ricordando quanto si vide a p. 163, si conclude che, al pari delle spirali sinusoidi e delle linee di Ribaucour, la *lemniscatrice* è l'evolvente di una curva in cui l'ascissa è proporzionale ad una potenza dell'arco.

CAPITOLO XVII

La Logaritmica, la Curva ipergeometrica e la Linea di Wallis.

247. L'equazione

$$(1) \quad y = b \log_B \frac{x}{a}$$

rappresenta, al variare delle costanti  $a, b, B, \infty^3$  curve, una qualunque delle quali è chiamata *logaritmica* o *logistica*; scrivendo la (1) come segue

$$(2) \quad x = a B^{y/b}$$

si vede essere altrettanto giustificato il nome di *curva esponenziale* adoperato da Leibniz ed altri<sup>1)</sup>. Scoperti i logaritmi, quando fu nota la rappresentazione grafica di qualunque funzione, il concepire la logaritmica doveva essere cosa naturale ed agevole: niuna meraviglia quindi se incerte siano le origini di tali curve. Il Cantor osserva a questo proposito che Huygens, il quale enunciò pubblicamente le più belle proprietà di questa curva<sup>2)</sup>, ne parla come di una linea già nota<sup>3)</sup>; e infatti il Montucla ne rilevò<sup>4)</sup> la presenza

<sup>1)</sup> Questo nome potrebbe evidentemente attribuirsi anche alla curva di equazione

$$y = c e^{ha},$$

ove  $a$  designa l'angolo formato dalla tangente alla curva con l'asse delle  $x$ ; essa gode di varie proprietà geometriche e meccaniche, come può vedersi nella nota di E. COLLIGNON, *Problème de géométrie* (Ass. fr. avanc. Sciences, T. XXXII, 1904).

<sup>2)</sup> V. la memoria *De la cause de le pesanteur* letta all'Accademia di Parigi il 28 agosto 1669, pubblicata nel 1690 in appendice al *Traité de la lumière*.

<sup>3)</sup> *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, T. III (Leipzig 1899), pag. 223.

<sup>4)</sup> *Histoire des Mathématiques*, Nouv. éd., T. II, p. 85.

nell'opera di G. Gregory (*Geometriae pars universalis*, Venetiae 1667). Torricelli ne parlò in una lettera scritta a Bonaventura Cavalieri il 15 ag. 1647<sup>1)</sup> — ove è citata la memoria *De Hemhyperbola logaritmica* pubblicata ai giorni nostri<sup>2)</sup> — e finalmente essa risolve uno dei problemi proposti da Debeaune a Descartes sino dal 1638<sup>3)</sup>. Emerge da ciò che se incerta o molteplice è la paternità della logaritmia, come data della sua nascita può ritenersi il periodo 1635-1650.

Essendo  $B = e^{\log_e B}$  la (2) può scriversi

$$x = a e^{\frac{\log_e B}{b} y},$$

onde si vede che le costanti essenziali nelle (1) (2) sono due sole, epperò si può sempre supporre che sia  $B = e$ . Ammettendo quindi di considerare logaritmi neperiani scriveremo la (1) come segue

$$(3) \quad y = b \log \frac{x}{a}$$

donde

$$(4) \quad x = a e^{y/b}$$

L'equazione (4) dà per  $y = 0, x = a$ , perciò la curva considerata passa sempre pel punto  $A(a, 0)$ ; la stessa prova che si ha  $x = 0$  per  $y = \pm \infty$  secondochè è  $b \geq 0$ ; e poichè la stessa dà  $y' = b/x, y'' = -b/x^2, yy'' = -by/x^2$  così si vede che la curva è convessa (concava) verso  $Ox$  quando  $b$  e  $y$  hanno segni opposti (eguali); a seconda del segno di  $b$  si hanno in conseguenza due differenti casi di figura<sup>4)</sup>. Si noti ora che, supposto

$$\frac{y}{b} = \frac{2h+1}{2k},$$

ove  $h$  e  $k$  sono numeri interi e questa frazione si suppone irriducibile, la (4) dà

<sup>1)</sup> *Opere di E. Torricelli* (Faenza, 1913), T. III, p. 467.

<sup>2)</sup> G. LORIA, *Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica* (Bibl. mathem., 3ª Serie, T. I, 1900); *Opere di E. Torricelli* (Faenza, 1919), T. I, 2ª Parte, p. 335-47.

<sup>3)</sup> Cfr. una nota di P. TANNERY nell'*Intermédiaire*, T. VII, 1900, pagine 94-95, riferentesi alla lettera scritta da DESCARTES a DEBEAUNE il 20 febbraio 1639 (*Oeuvres di Descartes*, T. II, p. 513).

<sup>4)</sup> La distinzione di questi due casi è generalmente trascurata; donde la necessità di modificare quanto è asserito nell'*Analyt. Geom. der hoheren ebenen Kurven* di SALMON-FIEDLER (Leipzig, 1873).

$$X = \pm a \sqrt[2k]{e^{2h+1}};$$

ora siccome si ammette in generale che alla curva  $f(x, y) = 0$  appartengono tutti i punti le cui coordinate annullano la funzione  $f(x, y)$  così si concluderà che la *logaritmica*, oltre un ramo continuo, contiene una serie discontinua di punti succedentisi a distanze che possono rendersi minori di ogni numero dato, cioè un ramo punteggiato discontinuo simmetrico del precedente rispetto a  $Oy$ : « unde videtur curva Logarithmica habere sua comparemtem ut ex. gr. Hyperbola »<sup>1)</sup>.

Dalla (4) si deduce essere

$$(5) \quad \frac{Y - y}{X - x} = \frac{b}{x}$$

l'equazione della tangente nel punto  $(x, y)$ ; essa prova intanto (facendo  $X = 0$ ) che nella *logaritmica* la *suttangente relativa all'asse delle y* è costante ( $= -b$ ): è una prerogativa caratteristica della curva in questione (lo si dimostra con tutta facilità) che avvertirono prima E. Torricelli e poi Huygens<sup>2)</sup>. La (5), in cui si considerino  $X$  e  $Y$  come dati, mostra che i punti di contatto delle tangenti che si possono condurre ad una *logaritmica* da un punto qualunque del suo piano stanno sopra una conica passante per quel punto; per conseguenza qualunque *logaritmica* è una curva *panalgebrica* e fa parte di un sistema le cui caratteristiche sono 1 e 1.

Si consideri un triedro trirettangolo  $Ox, Oy, Oz$ , si conduca per  $Ox$  un piano arbitrario nel quale si fissi un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $x_1, y_1$  di cui lo stesso  $Ox$  sia l'asse delle ascisse. Se  $x, y$  sono le coordinate del punto  $P$  che nel piano  $\sigma$  ha per coordinate  $x_1, y_1$  si ha

<sup>1)</sup> Così scriveva Giov. BERNOULLI a LEIBNIZ addì 25 maggio 1712 (*Leibniz Math. Schriften*, T. III, p. 887) a proposito della celebre questione dell'esistenza dei logaritmi dei numeri negativi. Sullo stesso argomento si veda: VINCENT, *Considérations nouvelles sur la nature des courbes logarithmiques et exponentielles* (Ann. de math., T. XIV, 1824, e XVI, 1826); STEIN, *Dissertation sur la théorie des logarithmes* (Id.); W. HEYMANN, *Die Logarithmen negativer Zahlen bei der Anflösung transscendenter Gleichungen* (Zeitschr. math. Unters., T. XXXII, 1901). Contro il modo di vedere adottato nel testo insorse E. WÖLFFING (Württemberg. Mitth., II Ser., T. VI, 1904, p. 34) facendo valere il fatto che la funzione esponenziale è uniforme per tutti i valori della variabile e sostenendo la necessità di distinguere la funzione  $e^{\frac{2k}{2h+1}}$  dalla  $\sqrt[2k]{e^{2h+1}}$ .

<sup>2)</sup> I teoremi semplicemente enunciati da HUYGENS vennero dimostrati per la prima volta da GUIDO GRANDI nel 1701 (v. l'opuscolo *Geometrica demonstratio theorematum Hugenianorum circa logisticam seu logarithmicam*, Florentiae).

$$x = x_1, y = \frac{y_1}{\cos \alpha}$$

$\alpha$  essendo l'angolo fatto dal piano  $\sigma$  col piano  $xy$ .

In detto piano  $\sigma$  si considerino le curve di equazioni

$$\frac{x_1}{a} = \log \frac{y_1}{b}, \quad \frac{y_1}{b} = \log \frac{x_1}{a};$$

esse si proietteranno ortogonalmente sul piano  $xy$  nelle altre

$$\frac{x}{a} = \log \frac{y}{b} - \log \cos \alpha, \quad \frac{y}{b \cos \alpha} = \log \frac{x}{a \cos \alpha} + \log \cos \alpha.$$

Di queste equazioni la prima rappresenta una curva eguale alla curva obbiettiva, mentre la seconda rappresenta una curva ad essa affine. Si conclude quindi: *La proiezione ortogonale di una logaritmica su un piano passante*  $\left. \begin{array}{l} \text{per una retta normale all'asintoto} \\ \text{per l'asintoto} \end{array} \right\}$  è

*una curva*  $\left. \begin{array}{l} \text{eguale} \\ \text{affine} \end{array} \right\}$  *alla curva obbiettiva*<sup>1)</sup>.

La curva considerata si accosta indefinitamente alla parte negativa dell'asse delle  $y$ , il quale è un asintoto della curva. Riuscendo più comodo supporre che l'avvicinamento asintotico accada verso la direzione positiva dell'asse delle  $x$  surrogheremo la (4) con la equazione equivalente

$$(6) \quad y = b e^{-\frac{x}{a}};$$

allora risulta costante ( $= a$ ) la *suttangente relativa all'asse delle x*. Si deduce poi:

$$\int_{x_0}^x y dx = b \int_{x_0}^x e^{-\frac{x}{a}} dx = a(y_0 - Y);$$

onde nella *logaritmica* le aree comprese fra la curva, l'asintoto e due ordinate stanno fra loro come le differenze di queste ordinate, essendo esse misurate dai prodotti di queste differenze per la *suttangente*<sup>2)</sup>. Supposto in particolare  $X = \infty$  sarà  $Y = 0$  e il secondo membro dell'equazione precedente diverrà  $ay_0$  dunque: *l'area illimitata compresa fra una ordinata, la curva e l'asintoto è la metà del rettangolo avente per lati quell'ordinata e la suttangente*.

<sup>1)</sup> Proposizione comunicata all'autore dal sig. J. FINSTERBUSCH.

<sup>2)</sup> V. anche CRAIG, *The quadrature of logarithmic curve* (Phil. Trans., n. 245, 1698).

Questi eleganti teoremi di quadratura appartengono a Torricelli e Huygens; i quali poi si occuparono di questioni concernenti la cubatura, ottenendo dei risultati che meritano di essere ricordati.

L'area compresa fra l'ordinata relativa all'ascissa  $x$ , la curva e l'asintoto, ruotando attorno a questo, genera un volume

$$= \pi \int_x^{\infty} b^2 e^{-\frac{2x}{a}} dx = -\frac{\pi ab^2}{2} \left[ e^{-\frac{2x}{a}} \right]_x^{\infty} = \frac{\pi ab^2}{2} e^{-\frac{2x}{a}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \pi ay^2,$$

cioè un volume equivalente a  $\frac{3}{2}$  di quello del cono avente per altezza la sottangente e per base il cerchio di cui quella ordinata è il raggio. Supponendo che la stessa area ruoti attorno all'ordinata considerata, il volume generato ha un'altra espressione; presa infatti quell'ordinata per asse delle  $y$  si vede che quel volume è

$$= \pi \int_{y=0}^{y=b} x^2 dy = -\frac{b\pi}{a} \int_{x=\infty}^{x=0} x^2 e^{-\frac{x}{a}} dx = \\ = b\pi \left[ (x^2 + 2ax + 2a^2) e^{-\frac{x}{a}} \right]_{\infty}^0 = 6 \cdot \frac{1}{3} \pi a^2 b,$$

onde equivale a sei volte il cono avente per altezza l'ordinata e per base il cerchio di cui la sottangente è il raggio.

Dai due teoremi precedenti, con una duplice applicazione del teorema di Pappo-Guldin, si deduce che la porzione di piano limitata dalla curva, dell'asintoto e da un'ordinata ha per centro di gravità un punto che dista dall'asintoto di una lunghezza eguale alla quarta parte dell'ordinata e dall'ordinata di una lunghezza eguale alla sottangente.

La rettificazione della logaritmica può effettuarsi mediante logaritmi: lo osservò il Marchese de l'Hôpital in due lettere dirette a C. Huygens il 26 giugno e il 10 settembre 1692<sup>1)</sup>; il calcolo relativo fu eseguito, poco dopo e indipendentemente dal geometra francese, da Huygens<sup>2)</sup>; lo si trova anche nell'*Harmonia mensurarum* del Côtés (insieme al calcolo del volume generato dalla rotazione della curva attorno all'asintoto): il risultato che così si ottiene può porsi sotto forma notevolmente elegante introducendo funzioni iperbo-

<sup>1)</sup> *Oeuvres de Huygens*, T. X (La Haye, 1905, p. 305 e 307; v. anche la lettera del 14 dicembre 1692 con cui s'inizia il carteggio tra l'HÔPITAL e LEIBNIZ (Math. Schriften, T. II, p. 216). Riguardo ad altre questioni congeneri trattate da HUYGENS e DE L'HÔPITAL, v. la nota di G. LORIA, *Curve speciali nel carteggio di C. Huygens* (Bibl. mathem., III Ser., T. VII, anno 1906).

<sup>2)</sup> *Construction d'un problème de géométrie: Trouver une ligne droite égale à une portion donnée de ligne logarithmique* (Hist. des Ouvrages des Savants, Février 1693).

liche<sup>1)</sup>. Senza arrestarci a questi particolari, dimostreremo una proposizione notevole concernente la rettificazione della logaritmica.

Detto al solito  $s$  l'arco della curva (6) si trova:

$$ds = \frac{dx}{a} \sqrt{a^2 + b^2 e^{-\frac{2x}{a}}}$$

onde

$$(7) \quad a(s-x) = \int dx \left[ \sqrt{a^2 + b^2 e^{-\frac{2x}{a}}} - a \right].$$

Per effettuare l'integrazione porremo

$$(8) \quad \sqrt{a^2 + b^2 e^{-\frac{2x}{a}}} - a = z$$

ed otterremo

$$(x-s) = \int \frac{a+z}{2a+z} dz = z - a \log(2a+z) + \text{cost.}$$

S'integri ora fra  $x=0$  e  $x=\infty$ ; cioè [in forza della (8)] fra  $z = \sqrt{a^2 + b^2} - a$  e  $z=0$  e si otterrà

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x-s) = \sqrt{a^2 + b^2} - a + a \log \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2} + a}$$

onde la differenza fra un arco di logaritmica e la propria proiezione sull'asintoto tende verso un limite finito quando un estremo dell'arco si accosta indefinitamente all'asintoto. Nel caso speciale  $a=b=1$  la (9) dà

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-s) = \left[ \sqrt{2} - 1 + \log \frac{2}{\sqrt{2}+1} \right]$$

come trovò Paolo Fuss<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> BARSOTTI, *Determinazione del centro di gravità di alcune linee piane coll'uso delle funzioni iperboliche* (Annali di Tortolini, T. II). Cfr. GÜNTHER, *Die Theorie der gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen* (Halle a. S., 1881), p. 241.

<sup>2)</sup> P. FUSS, *Quartum differat longitudo arcus curvae ab asymptota, utraque in infinitum usque protensa inquiritur* (Mém. de St.-Petersbourg, T. IX, anno 1824). Lo stesso risultato sembra essere stato ottenuto prima da GIOVANNI ALBERTO primogenito di LEONARDO EULERO: v. gli *Adversaria mathematica* pubblicati nel T. I di L. EULERO, *Opera postuma mathematica et physica* (Petropoli, 1862).

Osserviamo finalmente che la curva si può costruire per punti facilmente; giacchè, se si pone nelle (6) successivamente  $x = x_1, 2x_1, \dots, nx_1, \dots$  e si chiamano  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  i corrispondenti valori di  $y$  si ottiene:

$$y_1 = b e^{-\frac{x_1}{a}}, \dots, y_{n-1} = b e^{-\frac{(n-1)x_1}{a}}, y_n = b e^{-\frac{nx_1}{a}};$$

se ne trae

$$y_n = \frac{y_1 y_{n-1}}{b},$$

onde conosciuto il punto  $(x_1, y_1)$  gli altri si possono costruire mediante triangoli simili.

Costruita la logaritmica si può dedurre un metodo per descrivere altre curve; per es. l'equazione (3) con cui a p. 150 rappresentammo le curve di Debeaune fa vedere che queste possono costruirsi addizionando le ordinate analoghe di una retta e di una curva esponenziale. Analogamente si può ottenere la curva le cui ordinate rappresentano i numeri figurati<sup>1)</sup>: ritenendo, infatti, che nella formola

$$\frac{m^{n+p} - m^{p-1}}{(m-1)^{p+1}} a - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n(n+1)\dots(n+i-1)}{i!} \frac{m^{p-1} a}{(m-1)^{p-i+1}}$$

siano costanti  $a, m, p$  e che  $n$  varii si ottiene la curva

$$y = \frac{m^{x+p} - m^{p-1}}{(m-1)^{p+1}} a - \sum_{i=1}^{i=p} \frac{x(x+1)\dots(x+i-1)}{i!} \frac{m^{p-1} a}{(m-1)^{p-i+1}}$$

alla quale può evidentemente giungersi addizionando le ordinate omologhe di una logaritmica e di una curva parabolica.

**248.** Come le curve trigonometriche condussero a considerare le curve ipertrigonometriche, così dalla curva logaritmica si fu condotti a considerarne altre analoghe, ma più complicate. Tali sono

<sup>1)</sup> Il problema di trovare la curva le cui ordinate sono i numeri triangolari venne proposto nei *Mémoires de Trevoux* dei mesi di Settembre-Ottobre 1701 e tosto risoluto dal CARRÉ (*Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Année MDCCCI) e poi generalizzato da FONTENELLE (*Éléments de la géométrie de l'infini*, Paris 1727, Sect. VII, Prop. II) a tutti i numeri poligonalari. La questione generale enunciata nel testo venne trattata da GIROLAMO e GIUSEPPE RINALDIS nel *Saggio di una nuova teoria dei numeri figurati* (Raccolta di opuscoli scientifici e filologici, T. XXXVIII, 1748; cfr. G. LORIA, *Abh. zur Geschichte der Mathem.*, IX Heft, 1899, p. 265).

quelle rappresentate dalle equazioni

$$y = b e^{a/x}, \quad y^2 = x^2 \log a^2/x^2$$

che O. Schlömilch ha considerate chiamando la prima *logaritmica inversa* e la seconda *lemniscata logaritmica*<sup>1)</sup>; tale la curva

$$y = x^x$$

che Maria Gaetana Agnesi insegnò a costruire mediante la logaritmica<sup>2)</sup>, quella di equazione

$$y = \sqrt[x]{x}$$

offrente un nuovo esempio di curva con rami punteggiati<sup>3)</sup> e quelle rappresentate come segue:

$$xy \sqrt{-2 \log x} = 1^4), \quad xy = e^x, \quad y = e^{e^x}, \quad x^y = e^y, \quad y = \log \frac{1+x}{1-x}^6)$$

tali ancora la *curva campaniforme* definita da Gregorio Fontana<sup>7)</sup>, con scopi analitici mediante l'equazione

$$y = (-\log x)^{\frac{1}{2}},$$

e quella rappresentata dalla equazione

$$y^x = x^y$$

e su cui non sdegnò arrestarsi Eulero<sup>8)</sup>; tali la *visoria*

<sup>1)</sup> *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, I Th., 5. Aufl. (Leipzig, 1904), p. 117-8.

<sup>2)</sup> *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù*, T. II (Milano 1748), p. 839.

<sup>3)</sup> HESSEL, *Ueber das merkwürdige Beispiel einer zum Theil punktiert gebildeten Curve, das der Gleichung entspricht*  $y = \sqrt[x]{x}$  (Archiv., T. XIV, 1850); H. SCHEFFLER, *Ueber die durch die Gleichung*  $y = \sqrt[x]{x}$  *dargestellten Curven* (Id., T. XVI, 1851).

<sup>4)</sup> G. GRANDI, *De infinitis infinitorum et infinite parvus* (Pisis, 1710).

<sup>5)</sup> *Mém. Acad. de Turin* 1805-08.

<sup>6)</sup> KLEYER-HAAS, *Differenti abrechnung*, III Th. (Stuttgart 1894), p. 116.

<sup>7)</sup> *Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale ed il nulla immaginario* (Mem. della Soc. Italiana, T. VIII, 1799).

<sup>8)</sup> V. il Cap. XXI della 2ª Parte dell'*Introductio in Analysis infinitorum* (Lausannae 1748); ivi la curva è studiata mediante la seguente rappresentazione parametrica:  $x = (1 + 1/t)^t, y = (1 + 1/t)^{t+1}$ ; notisi che della curva in questione si stacca la retta  $x = y$ .

$$y = \frac{q}{p} x + \frac{b x}{a} \log \frac{2x - a}{2p - a} \quad ^1),$$

la curva di probabilità

$$y = e^{-mx^2} \quad (m > 0) \quad ^2),$$

la *logaritmica di addizione*, determinata dalle equazioni

$$x = \log t, \quad y = l \log(1 + 1/t)$$

e molto utile in questioni di matematica applicata <sup>3)</sup>, e la *curva dei seni logaritmici* rappresentata dalla equazione

$$y = \log \sqrt{1 - x^2},$$

di cui venne determinata l'evoluta <sup>4)</sup>. L'abbondanza di materia ci vieta di arrestarci sopra queste curve.

Altrettanto faremo riguardo alla *curva ipergeometrica* definita dall'equazione  $y = x!$  a cui Eulero dedicò una delle sue memorie <sup>5)</sup>, e che non è da confondersi con quelle, designata col medesimo nome, con cui Multedo <sup>6)</sup> illustrò geometricamente la teoria delle funzioni fattoriali di Kramp e Vandermonde <sup>7)</sup>; potendo la curva di Eulero determinarsi coll'equazione  $y = \Gamma(x + 1)$ , dà una rappresentazione geometrica degli integrali Euleriani di seconda specie <sup>8)</sup>.

<sup>1)</sup> E. SAAVEDRA (*Ann. de la construct. y de la industria*, Madrid 1886, p. 329-332) la incontrò risolvendo il seguente problema: « Determinare la forma e la grandezza dei posti degli spettatori in un anfiteatro affinché tutti questi possano scorgere chiaramente un punto determinato della sala ». Alcune proprietà di essa furono dimostrate da F. GOMES TEIXEIRA (*Obras*, T. V, p. 10-11).

<sup>2)</sup> C. BURALI-FORTI. *Sulla curva delle probabilità* (Atti Accad. Torino, T. XLI, 1906); il caso particolare  $y = e^{-x^2}$  come l'analoga curva  $y = e^{-x^n}$  s'incontrano fra le *curve d'errore* (K. SCHWERING, *Lehrbuch der kleinsten Quadrate*, Freiburg 1909, p. 70).

<sup>3)</sup> R. MEHMKE, *Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer unbekanntem numerisch aufzulösen* (Civilingenieur, 2<sup>a</sup> Reihe, T. 35, 1889) e *Leitfaden zum graphischen Rechnen*, II ed. (Leipzig und Wien 1924), p. 27, 30 e 33; inoltre M. D'OCAGNE, *Traité de nomographie* (Paris 1899), pag. 384.

<sup>4)</sup> L. G. BARBOUR, *Evolute to the curve of logarithmic sines* (The Analyst, T. IV, 1877).

<sup>5)</sup> *De curva hypergeometrica hac aequatione expressa y = 1, 2, ... x* (Novi Comment. Petrop., T. XIII, 1769).

<sup>6)</sup> *Memoria sulle curve hypergeometriche* (Mem. dell'Accademia di Genova, Vol. III, 1814).

<sup>7)</sup> V. ad es. l'articolo *Factorielle* nel *Dictionnaire des Sciences mathématiques* del MONTFERRIER.

<sup>8)</sup> SERRET, *Calcul intégral*, 2<sup>a</sup> ed. (Paris 1880), p. 165 e segg.

Da questo punto di vista essa si avvicina ad una linea di cui è spesso parola nel carteggio scientifico di Huygens <sup>1)</sup>, ove è designata col nome di *linea di Wallis* <sup>2)</sup>; è una curva di cui venivano allora assegnati alcuni punti, ma di cui indarno si cercò la equazione. Questa può trovarsi come segue.

La curva in questione è determinata dal fatto che i punti di essa aventi per ascisse i numeri 1, 2, 3, 4, ... hanno per ordinate risp. i numeri

$$1, \frac{2 \cdot 3}{1}, \frac{2 \cdot 3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 5}{2}, \frac{2 \cdot 3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 7}{3}, \dots$$

Prescindendo dai primi due valori si può dire che la linea di Wallis passa per i punti aventi le seguenti coordinate:

$$x = \xi + 1, \quad y = \frac{2 \cdot 3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2(2\xi + 1)}{\xi} = \frac{2^\xi \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2\xi + 1)}{\xi!}$$

per  $\xi$  intero e  $\geq 1$ .

Ora, essendo

$$(2\xi + 1)! = 3 \cdot 5 \cdot \dots (2\xi + 1) \cdot 2^\xi \cdot \xi!,$$

si può scrivere

$$y = \frac{(2\xi + 1)!}{(\xi!)^2},$$

o, introducendo la funzione  $\Gamma$  (integrale euleriana di II specie) avremo

$$y = \frac{\Gamma(2\xi + 2)}{\Gamma^2(\xi + 1)},$$

cioè, per essere  $\xi + 1 = x$ ,

$$y = \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma^2(x)}.$$

Questa è l'equazione cercata: essa vale per tutti i valori positivi di  $x$ ; siccome è in generale

<sup>1)</sup> V. i passi segnati sotto la rubrica « courbe de Wallis » nel T. I delle *Oeuvres complètes de C. Huygens*; specialmente v. pag. 210.

<sup>2)</sup> Nome giustificato dall'essere tale curva considerata nella prop. 192 dell'*Arithmetica infinitorum* (1655).

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

così si può anche scrivere

$$y = \frac{1}{B(x, x)},$$

dunque la linea di Wallis può venire utilizzata nella rappresentazione geometrica degli integrali euleriani di I specie.

## CAPITOLO XVIII

### Le Curve straordinarie.

**249.** Il concetto di rappresentare graficamente una funzione condusse a molte nuove curve, di cui le più cospicue vennero definite nei due Capitoli precedenti, curve le quali, per quanto varie di struttura, pure corrispondono all'idea generale di curva che tutti possiedono. Col progredire dell'analisi matematica il concetto di funzione venne gradatamente allargato e modificato; si scopersero così delle funzioni dotate di proprietà inattese e dalla loro rappresentazione geometrica si fu condotti a considerare delle curve aventi caratteri in aperto contrasto con quelli che si ritenevano proprietà generale delle curve. L'importanza principale che possiedono per geometra siffatte *curve straordinarie* è che esse resero manifesta la necessità di introdurre certe restrizioni negli enunciati di alcuni teoremi; le più notevoli fra le curve meritano quindi almeno un cenno in un'opera geometrica quale è la presente <sup>1)</sup>.

I. La più antica e più celebre è quella rappresentata dalla equazione

$$(1) \quad y = \sum_{a=0}^{n=\infty} b^a \cos \pi (a^n x),$$

ove  $a$  è un intero pari  $> 1$  e  $b$  è una quantità reale positiva  $< 1$ . Si può dimostrare che il secondo membro è una funzione di  $x$  sempre continua, ma che, se il prodotto  $ab$  supera un certo limite, non ha

<sup>1)</sup> Queste osservazioni generali sulle curve straordinarie ci offrono l'occasione per notare che il PLATEAU ha suggerito un procedimento per trovare le equazioni di infinite curve con punti salienti o con le singolarità da lui dette « punti di sdoppiamento ». Vedi al proposito: J. PLATEAU, *Quelques exemples de discontinuité en analyse* (Bull. Acad. Belgique, II Ser., T. XLIII, 1877); P. MANSION, *Sur les points de dedoublement de M. Plateau* (Bull. Sc. math. astr., II Ser., T. II, 1878) e *Sur les nouveaux points singuliers des courbes planes* (Mathesis, T. III, 1883); VOGEL, *Note über die Diskontinuitäten bei Kurven* (Zeitschr. Math. Phys., T. XXVI, 1881).

in alcun punto una derivata determinata. È questo un fatto analitico di straordinaria importanza, segnalando il quale Weierstrass <sup>1)</sup> fuggò l'antico preconcetto che ogni funzione continua possedesse una derivata. La curva di Weierstrass rappresentata dall'equazione (1), benchè continua, non ammette quindi tangente determinata in alcun suo punto; come ciò possa accadere venne chiarito da Chr. Wiener <sup>2)</sup>, dalle cui indagini risulta che quella linea compie infinite oscillazioni in ogni intervallo finito.

II. Questo esempio di curva continua priva generalmente di tangente non soddisfa pienamente lo spirito dal punto di vista geometrico perchè della forma della curva di Weierstrass non è possibile formarsi un concetto nemmeno approssimato. Da tale inconveniente è esente un'altra curva di recente immaginata da H. von Koch <sup>3)</sup> e di cui ora spiegheremo la genesi ed enunceremo le più cospicue proprietà.

Sia (fig. 27)  $AB$  un segmento rettilineo appartenente ad un piano  $\pi$ . Dividiamolo in tre parti eguali nei punti  $C$ ,  $E$  e costruiamo sul segmento  $CE$  nel piano  $\pi$  il triangolo equilatero  $CDE$ . Per togliere ogni ambiguità supporremo:

- 1° che sulla retta  $AB$  il senso positivo sia  $A \dots B$ ;
- 2° che come regione positiva del piano  $\pi$  si assuma sempre quella chè sta a sinistra d'un osservatore percorrente nel senso positivo una retta di quel piano;
- 3° che il triangolo  $CDE$  si trovi nella regione positiva del dato piano.

Chiameremo operazione  $\Omega$  quello che conduce dal segmento  $AB$  alla spezzata  $ACDEB$ . Si immagini ora di effettuare la operazione  $\Omega$  sopra ciascuno dei 4 segmenti  $AC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EB$ . Si otterrà così una nuova spezzata di  $4^2$  lati e  $4^2 + 1$  vertici; operando

<sup>1)</sup> P. DU BOIS-REYMOND, *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente* (G. di Crelle, T. LXXIX, 1874), p. 29.

<sup>2)</sup> *Geometrische und analytische Untersuchungen der Weierstrass'schen Function* (Id., T. XC, 1881); T. BRODEN, *Ueber die elementare Konstruktion sogenannter Kurven ohne Tangente* (Arkiv f. Math., Astr. og. Phys., T. II, anno 1905).

<sup>3)</sup> *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire* (Arkiv f. Math., Astr. och Fys., I, 1904, p. 681-702) e *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes* (Acta math., XXX, 1906, 145-174). Si veggano inoltre: E. CESÀRO, *Remarques sur le courbe de von Koch* (Napoli Mem., II Ser., XII, 1905) e *Fonctions continues sans dérivée* (Arch. Math. Phys., III Ser., X, 1906); A. BROGLIO, *Studio analitico della curva del sig. Helse von Koch* (Giorn. di Matem., T. XLIV, 1906); A. SELLERIO, *Le curve limiti di poligonali che si deformano con legge assegnata* (Rend. Circ. Mat. Palermo, T. XXVIII, 1909); K. KNOPP, *Einheitliche Erzeugung und Darstellung der Kurven von Peano, Osgood und von Koch* (Arch. Math. Phys., III Ser., T. XXVI, 1917); F. APT, *Die Tangentlosigkeit der von Kochsche Kurve* (Mathem. Zeitschr., T. XIII, 1922).

similmente su di essa se ne otterrà una terza di  $4^3$  lati e  $4^3 + 1$  vertici. Ora continuando così indefinitamente si giunge ad una serie continua di punti, formanti appunto la curva di von Koch.

Tale curva, oltre a non possedere alcuna tangente, gode della singolare proprietà che l'arco di essa intercetto fra due punti qualunque ha lunghezza infinita; invece l'area compresa fra quell'arco e la relativa corda è finita; essa inoltre è in tutte le sue parti simile a sè stessa. Di essa si conoscono varie rappresentazioni analitiche,

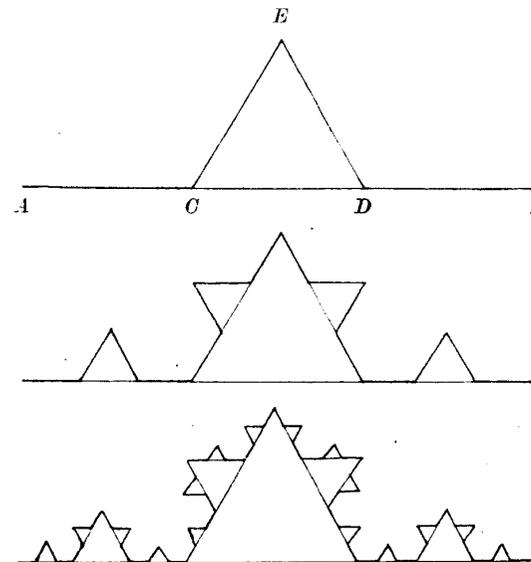


Fig. 27. — Costruzione della curva di von Koch.

cioè la ordinaria equazione cartesiana, diverse rappresentazioni parametriche, tutte col mezzo di funzioni analitiche.

III. La stessa proprietà, di non avere determinata tangente, è posseduta dalla così detta *Curva H* di Boltzmann <sup>1)</sup>, la quale però essendo definita empiricamente e non possedendo finora una rappresentazione analitica, non entra nel campo che noi andiamo esplorando.

IV. G. Peano ha insegnato <sup>2)</sup> a costruire due funzioni uni-

<sup>1)</sup> L. BOLTZMANN, *Ueber die sogenannte H-Curve* (Math. Ann., T. L, 1898).

<sup>2)</sup> *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane* (Id., T. XXXVI, 1890).

formi e continue  $\varphi, \psi$  di una variabile reale  $t$ , tali che quando  $t$  varia nell'intervallo  $(0 \dots 1)$ ,  $\varphi$  e  $\psi$  prendono tutte le coppie di valori appartenenti al medesimo intervallo; le equazioni  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  rappresentano quindi una curva che passa per tutti i punti di un quadrato, cioè ricopre tutto questo.

La si può costruire come segue<sup>1)</sup>: Sia dato (fig. 28) un quadrato, lo si divide in quattro quadrati eguali mediante due parallele ai lati e se ne congiungano i centri in modo da formare un quadrato traforato in  $A$ . Si segnino i centri dei nuovi quadrati congiungendone i centri come indica la figura, in modo da ottenere una nuova linea poligonale aperta in  $A$ . Si operi similmente sui

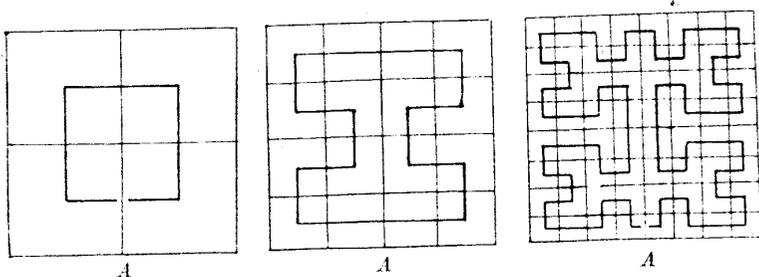


Fig. 28. — Costruzione della curva di Peano.

sedici quadrati risultanti nel modo che risulta dall'ispezione della figura. Continuando indefinitamente si giungerà ad una linea spezzata che appunto ricopre il dato quadrato.

V. Finalmente il Gravé<sup>2)</sup> diede il nome di *linee poligonali* a quelle rappresentate dall'equazione  $y = \int_0^x f(x) dx$ , ove  $f(x)$  è una certa funzione aritmetica la quale per infiniti valori di  $x$  non possiede derivata, mentre per gli altri l'ha nulla; tali linee constano di infinite porzioni rettilinee; esse hanno in ogni punto una tangente determinata, variabile da punto a punto, ma per esse cessa l'ordinario concetto di curvatura.

<sup>1)</sup> D. HILBERT, *Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück* (Id. T. XXXVIII, 1891).

<sup>2)</sup> *Sur les lignes composées de parties rectilignes* (C. R. T. CXXVII, 1898).

## CAPITOLO XIX

### Le Curve W di Klein e Lie.

**250.** Ritorniamo in un dominio prettamente geometrico consacrando il presente Capitolo ed il seguente a curve che hanno la loro origine nella teoria delle corrispondenze e delle rappresentazioni.

Consideriamo una trasformazione proiettiva  $T$  avente tre punti uniti distinti  $A_0, A_1, A_2$ <sup>1)</sup>. Essa può intendersi definita dalle equazioni

$$(1) \quad \varrho x_0' = a_0 x_0, \quad \varrho x_1' = a_1 x_1, \quad \varrho x_2' = a_2 x_2,$$

$\varrho$  essendo un fattore di proporzionalità. Ponendo

$$\frac{x_1}{x_0} = x, \quad \frac{x_2}{x_0} = y, \quad \frac{x_1'}{x_0'} = x', \quad \frac{x_2'}{x_0'} = y', \quad \frac{a_1}{a_0} = a, \quad \frac{a_2}{a_0} = b$$

queste tre equazioni possono sostituirsi con le seguenti:

$$(2) \quad x' = a x, \quad y' = b y.$$

Sia  $P'(x', y')$  il punto trasformato di  $P(x, y)$ . Applicando ad esso nuovamente la trasformazione  $T$  si ottiene il punto  $P''(x'', y'')$  le cui coordinate sono

$$x'' = a^2 x, \quad y'' = b^2 y.$$

Operando similmente sopra  $P''$  e così continuando, dopo  $n$  operazioni si giungerà al punto  $P^{(n)}$  le cui coordinate sono

$$(3) \quad x^{(n)} = a^n x, \quad y^{(n)} = b^n y.$$

<sup>1)</sup> I casi in cui i punti fondamentali non sono tutti distinti si tratterebbero analogamente; essi non conducono però a nuove curve come l'ipotesi generale.

Quando  $T$  è una trasformazione infinitesima, i punti  $P, P', P'', \dots, P^{(n)}, \dots$  si succedono a distanze infinitesime, costituiscono cioè una linea; è una traiettoria del gruppo monomio di trasformazioni generato dalla trasformazione infinitesima  $T$ , onde è trasformata in se stessa da tutte le trasformazioni di quel gruppo<sup>1)</sup>. Seguendo l'esempio di F. Klein e S. Lie<sup>2)</sup>, che per primi la studiarono a fondo, la chiameremo *curva W* (iniziale questa della parola *Wurf*), e  $A_0 A_1 A_2$  il *triangolo fondamentale*. Per trovarne l'equazione osserviamo che, nelle attuali ipotesi, le costanti  $a, b$  devono differire dall'unità di quantità infinitesimo, onde  $\log a$  e  $\log b$  saranno esse stesse infinitesime dello stesso ordine. Ora essendo

$$a^n = e^{n \log a} = 1 + n \log a + \dots, \quad b^n = e^{n \log b} = 1 + n \log b + \dots$$

le (3) si possono scrivere:

$$x^{(n)} - x = (n \log a + \dots) x, \quad y^{(n)} - y = (n \log b + \dots) y$$

e per le fatte ipotesi è lecito porre:

$$x^{(n)} - x = dx, \quad y^{(n)} - y = dy, \quad n \log a = \alpha \cdot d\lambda, \quad n \log b = \beta \cdot d\lambda,$$

$\alpha$  e  $\beta$  essendo quantità finite. Trascurando gli infinitesimi di grado superiore avremo pertanto:

$$dx = x \cdot \alpha d\lambda, \quad dy = y \cdot \beta d\lambda$$

donde

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{\beta y};$$

questa è l'equazione differenziale delle curve  $W$ . Integrandola si

<sup>1)</sup> Usiamo qui concetti e denominazioni della teoria dei gruppi di LIE, essendo gli uni e le altre ormai nel dominio universale.

<sup>2)</sup> V. la memoria *Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von unendlich vieler vertauschbaren Transformationen in sich übergehen* (Math. Ann., T. IV, 1871). Le curve  $W$  si trovano già in JACOBI (Journ. f. Math., T. XXIV, 1842, p. 1-4), nello scritto di G. BATTAGLINI, *Sulle involuzioni dei diversi ordini nei sistemi di seconda specie* (Atti dell'Accademia di Napoli, T. II, 1865) e nella memoria di A. CLEBSCH e P. GORDAN, *Ueber biternären Formen mit contragredienten Variablen* (Math. Ann., T. I, 1868). Per un'esposizione recente delle proprietà delle stesse linee v. R. ARANJO, *Las curvas W* (Pubbl. del Laboratorio y Seminario mat., T. III, Madrid 1919); curve ad esse collegate sono considerate nella nota di W. A. VERLUYS, *On satellite-points on Curves given by the equations*  $x = a t^p, y = b t^q$  (Proc. Acad. Amsterdam, T. XX, 1928).

ottiene:

$$\frac{\log x - \log \xi}{\alpha} = \frac{\log y - \log \eta}{\beta}$$

$\xi, \eta$  essendo le coordinate del punto da cui si suppone dipartirsi la curva; o anche

$$(4) \quad \left[ \frac{x}{\xi} \right]^\beta = \left[ \frac{y}{\eta} \right]^\alpha$$

Riscrivendo al posto di  $x$  e  $y$  i loro valori e ponendo per maggiore simmetria

$$-a = c_1, \quad \beta = c_2, \quad a - \beta = c_0,$$

onde

$$(5) \quad c_0 + c_1 + c_2 = 0$$

la (4) diviene

$$(6) \quad x_0^{c_0} x_1^{c_1} x_2^{c_2} = \text{cost.},$$

e, al pari della (4), può assumersi come equazione generale delle curve  $W$ .

Quando il lato  $A_2 A_3$  del triangolo di riferimento sta all'infinito (caso a cui si può sempre ridursi per proiezione)  $x$  e  $y$  sono ordinarie coordinate cartesiane e, in forza della (4), le curve  $W$  divengono parabole, ordinarie o interscendenti secondo che gli esponenti  $\alpha, \beta$  sono razionali od irrazionali; e siccome a quella posizione speciale si può sempre ridursi per proiezione, così ogni curva  $W$  è proiezione di una parabola o iperbole in generale interscendente. Differenziando la (4) si ottiene

$$\frac{\beta x \beta^{-1} dx}{\xi \beta} = \frac{\alpha y \alpha^{-1} dy}{\eta \alpha},$$

ossia, per la (4) stessa si ritrova

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta y}{\alpha x};$$

l'equazione della tangente è quindi

$$(7) \quad \frac{Y - y}{X - x} = \frac{\gamma y}{\alpha x}.$$

Ne trarremo varie conseguenze. Supponendo date  $X, Y$ , essa prova che in una parabola o iperbole interscendente i punti di contatto delle tangenti che si possono condurre da un punto arbitrario del piano stanno su una conica passante per quel punto; essendo questa una proprietà proiettiva, si conserverà per proiezione, onde potremo dedurne in generale che ogni curva  $W$  è panalgebrica e fa parte di un sistema avente per caratteristiche  $1$  e  $1^1$ ; si potrebbe dimostrare facilmente che esse sono le più generali curve dotate di tale proprietà<sup>2)</sup>. Indicheremo con  $P$  il punto  $(x, y)$ , con  $S, T$  le intersezioni della relativa tangente con gli assi coordinati e con  $I_\infty$  il punto all'infinito di essa: indicando con accenti le proiezioni fatte su  $Ox$  dal punto all'infinito di  $Oy$  otterremo:

$$(PST I_\infty) = (P'SOI'_\infty) = \left[ x, \frac{\alpha - \beta}{\alpha} x, 0, \infty \right] = \frac{\alpha - \beta}{\beta}$$

onde il birapporto  $(PST I_\infty)$  è costante, generalizzando mediante proiezione questa proprietà a tutte le curve  $W$  si può dire: Per qualunque curva  $W$  è costante il birapporto di un punto qualunque della curva con le intersezioni della relativa tangente con i lati del triangolo fondamentale: questo teorema dà ragione del nome curve anarmoniche dato da Halphen alle curve di cui ci occupiamo: di esso sussiste il correlativo, perchè si vede facilmente che l'equazione tangenziale delle curve  $W$  ha la stessa forma dell'equazione locale.

<sup>1)</sup> FURET. Sur quelques propriétés des systèmes de courbes ( $\mu = 1, \nu = 1$ ) e Interpretation géométrique de l'équation  $L(x dy - y dx) - M dy - N dx = 0$ , dans laquelle  $L, M, N$  désignent des fonctions linéaires de  $x, y$  (C. R., T. LXXVIII, 1874).

<sup>2)</sup> Diciamo facilmente perchè un sistema di caratteristiche  $1$  e  $1$  può definirsi (v. n. 193) mediante una equazione differenziale del tipo  $L(x dy - y dx) - M dy + N dx = 0$ , ove  $L, M, N$  sono funzioni lineari delle coordinate; e questa è integrabile con un metodo ormai classico dovuto a JACOBI (G. di Crelle, T. XXIV; v. p. es. BOOLE, Differential Equations, 4<sup>a</sup> ed., 1877, p. 85). — La ricerca analoga dei sistemi le cui caratteristiche sono  $1$  e  $2$  equivale similmente all'integrazione della equazione differenziale

$$A p^2 + B p a + C a^2 + D p + E a + F = 0$$

ove

$$p = dy/dx \quad e \quad a = y - px$$

e  $A, \dots, F$  sono funzioni lineari delle coordinate  $x, y$ . Essa venne fatta da A. LEGOUX (Etude analytique et géométrique d'une famille de courbes représentée par une équation différentielle du premier ordre, Thèse, Paris, 1878) e condusse alla scoperta delle curve rappresentate dall'equazione

$$\frac{x^2}{2} = C \frac{(x+a)^{n+1}}{(y-a)^{n-1}} + \frac{(y+na)^2}{2(n-1)a^2},$$

le quali sono algebriche o trascendenti secondochè  $n$  è razionale o non.

**251.** Fra le curve  $W$  una speciale notevole ci è nota; la spirale logaritmica [v. p. 67, equazione (7)]. In tal caso due dei vertici del triangolo fondamentale stanno nei punti ciclici del piano e le trasformazioni proiettive considerate sono rotazioni attorno al terzo vertice. Questa osservazione<sup>1)</sup> serve a spiegare come quella curva possa riprodursi in forza di un così grande numero di trasformazioni e può essere utilizzata a scoprire nuove proprietà di essa.

Fra le stesse curve  $W$  se ne trova un'altra nuova che venne giudicata meritevole di studio e che ricevette un nome speciale: è quella che in coordinate baricentriche è rappresentata dalle equaz.

$$(8) \quad \frac{x_0}{a_0^\lambda} = \frac{x_1}{a_1^\lambda} = \frac{x_2}{a_2^\lambda}$$

ove  $\lambda$  è un parametro e  $a_0, a_1, a_2$  sono le lunghezze dei lati del triangolo fondamentale; secondo la proposta di G. de Longchamps la si chiama *potenziale triangolare*<sup>2)</sup>. Per dimostrare che essa è una curva  $W$ , supponiamo, per fissare le idee  $a_0 > a_1 > a_2$  e poniamo:

$$\log \frac{a_1}{a_2} = c_0, \quad \log \frac{a_2}{a_0} = c_1, \quad \log \frac{a_0}{a_1} = c_2$$

onde fra le costanti  $c$  sussiste ancora la relazione (5). Dalle (8) si trae:

$$(8') \quad \log \left[ \frac{x_1}{x_0} \right] = -\lambda c_2, \quad \log \left[ \frac{x_2}{x_0} \right] = \lambda c_1$$

onde eliminando  $\lambda$

$$c_1 \log \left[ \frac{x_1}{x_0} \right] + c_2 \log \left[ \frac{x_2}{x_0} \right] = 0$$

ossia

$$(9) \quad x_1^{c_1} x_2^{c_2} = x_0^{c_1+c_2}$$

o, per la (5),

$$(9') \quad x_0^{c_0} x_1^{c_1} x_2^{c_2} = 1;$$

essendo quest'equazione del tipo (6) resta dimostrata la proposi-

<sup>1)</sup> Fatta per la prima volta ed ampiamente sviluppata nella succitata memoria di KLEIN e LIE.

<sup>2)</sup> V. l'articolo Sur la potentielle triangulaire (Mathesis, T. VI, 1886).

zione enunciata. Scrivendo la (9) come segue

$$x_1^{c_1/c_2} x_2 = x_0^{1+c_1/c_2},$$

si vede che affinché la potenziale triangolare sia una curva algebrica è sufficiente che risulti razionale uno dei mutui rapporti fra le costanti  $c$ . In generale le (8) o (8') mostrano che la potenziale triangolare passa per molti punti notevoli del triangolo fondamentale; supponendo infatti  $\lambda = 0$  si ottiene il baricentro di questo, per  $\lambda = 1$  il centro del cerchio in esso inscritto, per  $\lambda = 2$  il punto di Lemoine, ecc. Si osservi poi che, dall'essere  $a_0 > a_1 > a_2$ , si deduce:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{x_2}{x_0} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{a_2}{a_0} \right)^\lambda = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{x_1}{x_0} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{a_1}{a_0} \right)^\lambda = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{x_0}{x_2} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \left( \frac{a_2}{a_0} \right)^\lambda = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{x_1}{x_2} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^\lambda = 0;$$

ciò prova che la potenziale triangolare passa per due vertici del triangolo fondamentale che sono opposti ai lati di lunghezza massima e minima. Essa tocca in quei punti il lato di lunghezza media<sup>1)</sup>. Queste proprietà sono sufficienti a mettere in evidenza l'importanza della curva definita, nella moderna geometria del triangolo.

**252.** Una categoria notevole di curve  $W$  è composta delle linee che, in coordinate ortogonali è rappresentata dall'equazione

$$(10) \quad x^\lambda y^\mu = a$$

con la condizione

$$(11) \quad \lambda + \mu = 1;$$

esse hanno per asintoti gli assi coordinati e vennero chiamate *Curve politropiche*. Ne stabiliremo alcune proprietà<sup>2)</sup>. La equazione generale della tangente essendo

$$Y - y + \frac{\lambda y}{\mu x} (X - x) = 0$$

l'angolo  $\tau$  fatto da essa con  $Ox$  è determinato dalla relazione

<sup>1)</sup> CESÀRO, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896), p. 104-106.

<sup>2)</sup> F. KOSCH, *Normale und Krümmungsmittelpunkt der polytropischen Kurven* (Zeitschrift, T. XLV, 1900, p. 161-166).

$$(12) \quad \operatorname{tg} \tau = - \frac{\lambda y}{\mu x}.$$

Siano  $A_1$  e  $A_2$  (fig. 29) le intersezioni della tangente con gli assi coordinati; si trova subito

$$(13) \quad O A_1 = \frac{x}{\lambda}, \quad O A_2 = \frac{y}{\mu};$$

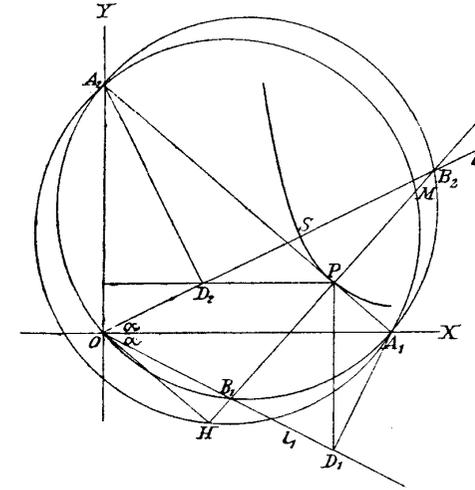


Fig. 29.

e poichè grazie alla (11) si può porre

$$(14) \quad \lambda = \cos^2 \alpha, \quad \mu = \sin^2 \alpha$$

si ha pure

$$(15) \quad O A_1 = \frac{x}{\cos^2 \alpha}, \quad O A_2 = \frac{y}{\sin^2 \alpha}$$

e quindi, se si chiama  $t$  il segmento  $A_1 A_2$ ,

$$(16) \quad t^2 = \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = \frac{x^2}{\cos^4 \alpha} + \frac{y^2}{\sin^4 \alpha}.$$

Se  $P$  è il punto di contatto della tangente  $A_1 A_2$  si trova subito :

$$P A_1 = \frac{y}{\sin \tau}, \quad P A_2 = -\frac{x}{\cos \tau} \quad \text{onde} \quad \frac{P A_1}{P A_2} = \frac{\lambda}{\mu};$$

se ne deduce

$$(17) \quad P A_1 = \mu t, \quad P A_2 = \lambda t.$$

Descriviamo ora il cerchio circoscritto al triangolo  $O A_1 A_2$ , ed in esso segniamo la corda  $B_1 B_2$  passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $A_1 A_2$ . Avremo  $\overline{P B_1}^2 = \overline{P B_2}^2 = \overline{P A_1} \cdot \overline{P A_2}$  onde, per la (17),

$$(18) \quad \overline{P B_1} = \overline{P B_2} = t \sqrt{\lambda \mu}.$$

Condotte poi le rette  $O B_1$  e  $O B_2$  avremo :

$$\operatorname{tg} B_1 A_2 P = \operatorname{tg} B_2 A_2 P = \frac{P B_1}{P A_1} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} = \operatorname{tg} \alpha;$$

ora  $\operatorname{ang} B_1 A_2 P = \operatorname{ang} B_1 A_2 A_1 = \operatorname{ang} B_1 O A_1$ , e  $\operatorname{ang} B_2 A_2 P = \operatorname{ang} B_2 A_2 A_1 = \operatorname{ang} B_2 O A_1$ , dunque

$$\operatorname{ang} B_1 O A_1 = \operatorname{ang} A_1 O B_2 = \alpha,$$

epperò le rette  $O B_1 = l_1$ ,  $O B_2 = l_2$  sono indipendenti dal punto  $P$  della curva. Si chiamano *assi* della curva politropica; con tale denominazione si può riassumere quanto sopra si disse nelle proposizioni seguenti: 1. *La porzione di una normale ad una curva politropica compresa fra gli assi è bisecata dalla curva*; 2. *Il triangolo avente per lati una tangente ed i due asintoti ed il triangolo avente per lati la corrispondente normale e gli assi sono inscritti nel medesimo triangolo.*

Chiameremo *vertice della curva* il punto  $S$  in cui essa è tagliata dall'asse  $l_2$ . Siccome l'equazione di questo è  $y/x = \operatorname{tg} \alpha$ , per tale punto si ha applicando la (12)  $\operatorname{tg} \tau = -\cot \alpha = \operatorname{tg} (\pi/2 + \alpha)$ , onde la curva sega quell'asse ortogonalmente.

Dal punto  $P$  si abbassino le perpendicolari agli asintoti sinchè taglino gli assi risp. in  $D_1$  e  $D_2$ ; è facile vedere che le perpendicolari condotte a questi punti agli assi tagliano gli asintoti risp. in  $A_1$  e  $A_2$ ; e si ha :

$$(19) \quad O B_1 = \frac{x}{\cos \alpha} - \frac{y}{\sin \alpha} = O D_1 - O D_2,$$

$$O B_2 = \frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = O D_1 + O D_2.$$

Per il raggio di curvatura  $R$  nel punto  $(x, y)$  si trova poi agevolmente il valore

$$R = \frac{\lambda^2 \mu^2 t^3}{xy}.$$

Ora per le (13) (17) questa può scriversi

$$R = \frac{\overline{P A_1} \cdot \overline{P A_2} \cdot t}{O A_1 \cdot O A_2};$$

ma se si conduce  $O H$  perpendicolare a  $B_1 B_2$  si vede che l'area del triangolo  $O A_1 A_2$  è data tanto da  $\frac{1}{2} \overline{O A_1} \cdot \overline{O A_2}$  quanto da  $\frac{1}{2} \overline{P H} \cdot t$ ; in conseguenza

$$R = \frac{\overline{P A_1} \cdot \overline{P A_2}}{P H}.$$

E questa prova che *la circonferenza circoscritta al triangolo  $H A_1 A_2$  passa pel centro di curvatura relativo al punto  $P$* ; nulla di più facile quindi del costruire questo centro di curvatura<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Per altra costruzione v. F. DINGELDEY, *Konstruktion des Krümmungsradius bei Kurven mit der Gleichung  $y = c x^n$  (polytropischen Kurven)* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. LIV, 1906, p. 87-91).

CAPITOLO XX

Le Linee di Mercatore o di Sumner.

253. Sopra una sfera di raggio 1 sia fissato (v. fig. 30) un sistema di ordinarie coordinate geografiche; indicheremo con  $\theta$  la latitudine e con  $\xi$  la longitudine di un punto qualunque  $P$  della superficie. Lungo il circolo massimo assunto come equatore immagineremo un cilindro tangente alla sfera; come coordinate di un punto qualunque  $M$  di esso sono servite la longitudine  $\xi$  e la distanza di  $M$  dall'equatore. Stabiliremo una relazione univoca fra la sfera ed il cilindro facendo corrispondere due punti  $P(\xi, \theta)$ ,  $M(\xi, \eta)$  tali che sia

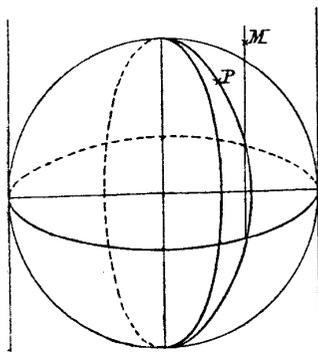


Fig. 30.

$$(1) \quad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{senh} \eta$$

ossia

$$(1') \quad \frac{1}{\cos \theta} = \cosh \eta, \quad \operatorname{sen} \theta = \operatorname{tgh} \eta.$$

Immaginando ora di tagliare il cilindro (che ora è opportuno considerare come una superficie di Riemann a più strati) lungo una sua generatrice e poi svolgendolo sopra un piano nasce fra piano e sfera una corrispondenza univoca: è l'ordinaria rappresentazione (cilindrica) di Mercatore. Cerchiamo che cosa corrisponda sul piano alla sezione prodotta nella sfera da un piano arbitrario

$$\alpha + \beta z = \gamma x + \delta y.$$

Essendo pei punti della sfera

$$x = \cos \theta \cos \xi, \quad y = \cos \theta \operatorname{sen} \xi, \quad z = \operatorname{sen} \theta$$

quella sezione può intendersi rappresentata dall'equazione

$$\alpha + \beta \operatorname{sen} \theta = \cos \theta (\gamma \cos \xi + \delta \operatorname{sen} \xi);$$

onde la curva che le corrisponde nel piano, grazie alle (1) (1') è rappresentata dall'equazione

$$\alpha + \beta \operatorname{tgh} \eta = \frac{1}{\cosh \eta} (\gamma \cos \xi + \delta \operatorname{sen} \xi)$$

ossia

$$(2) \quad \alpha \cosh \eta + \beta \operatorname{senh} \eta = \gamma \cos \xi + \delta \operatorname{sen} \xi.$$

Le curve così ottenute furono chiamate dall'Holz Müller<sup>1)</sup> curve di Mercatore e dal Greenhill linee di Sumner<sup>2)</sup> (in memoria del capitano marittimo americano che per primo ne mostrò l'uso nella navigazione).

L'equazione (2) può ridursi a varie forme più semplici a seconda dei valori delle costanti che entrano in essa, secondochè cioè  $\alpha^2 \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \beta^2$ <sup>3)</sup>.

1° Caso.  $\alpha^2 > \beta^2$ . Si può porre:

$$\alpha = r_0 \cos \eta_0, \quad \beta = -r_0 \operatorname{sen} \eta_0,$$

onde

$$r_0 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2};$$

si ponga inoltre

$$\gamma = \varrho_0 \cos \xi_0, \quad \delta = \varrho_0 \operatorname{sen} \xi_0,$$

onde

$$\varrho_0 = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2};$$

la (2) diviene quindi:

$$r_0 \cosh (\eta - \eta_0) = \varrho_0 \cos (\xi - \xi_0)$$

<sup>1)</sup> Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften etc. (Leipzig 1882), p. 242.

<sup>2)</sup> Sumner Lines on Mercator's chart (Messenger, T. XVI, 1887); Sumner Lines on Mercator and stereographic chart (Id., T. XXV, 1890) e Application of elliptic functions, p. 89-92.

<sup>3)</sup> H. E. TIMERDING, Ueber die Mercator'sche Projection (Zeitschrift, T. XLIII, 1898).

o, ponendo  $\varrho_0/r_0 = m$

$$\cosh(\eta - \eta_0) = m \cos(\xi - \xi_0).$$

Con una semplice traslazione di assi questa si semplifica e diviene

$$(3) \quad \cosh \eta = m \cos \xi.$$

Riguardo alla costante  $m$  va fatta un'osservazione. Affinchè il piano considerato seghi realmente la sfera deve essere

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}} < 1 \quad \text{ossia} \quad \gamma^2 + \delta^2 > \alpha^2 - \beta^2;$$

quando  $\alpha^2 < \beta^2$  questa condizione è sempre soddisfatta; ma quando, come si suppone,  $\alpha^2 > \beta^2$  essa traducesi nell'altra

$$\varrho_0^2 > r_0^2 \quad \text{cioè} \quad |m| > 1;$$

dunque la (3) rappresenterà una linea di Sumner reale purchè la costante  $m$  sia in valore assoluto maggiore di 1.

2° Caso.  $\alpha^2 < \beta^2$ . Porremo

$$\alpha = -r_0 \operatorname{senh} \eta_0, \quad \beta = r_0 \cosh \eta_0,$$

quindi

$$r_0 = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2},$$

inoltre

$$\gamma = -\varrho_1 \operatorname{sen} \xi_0, \quad \delta = \varrho_0 \cos \xi_0;$$

la (2) diverrà:

$$r_0 \operatorname{senh}(\eta - \eta_0) = \varrho_0 \operatorname{sen}(\xi - \xi_0).$$

E con una traslazione di assi assume la forma

$$(4) \quad \operatorname{senh} \eta = n \operatorname{sen} \xi.$$

3° Caso.  $\alpha^2 = \beta^2$ . Indicando con  $\varepsilon$  l'unità positiva o negativa potremo scrivere  $\beta = \varepsilon \alpha$ ; onde ponendo  $\gamma = \varrho_0 \cos \xi_0$ ,  $\delta = \varrho_0 \operatorname{sen} \xi_0$  la (2) diverrà:

$$\alpha (\cosh \eta + \varepsilon \operatorname{senh} \eta) = \varrho_0 \cos(\xi - \xi_0)$$

che ha la forma

$$e^{\varepsilon \eta} = p \cos(\xi - \xi_0);$$

e questa, con una traslazione di assi si semplifica, divenendo

$$(5) \quad \eta = \varepsilon \log \cos \xi.$$

Si hanno così tre tipi di linee di Sumner; le (3) (4) (5) possono assumersi come loro equazioni canoniche.

Le curve del primo tipo sono periodiche, constano cioè di infinite parti congruenti, una qualunque delle quali si ottiene facendo variare  $\xi$  da  $-\pi$  a  $+\pi$ ; sono simmetriche rispetto all'asse delle  $\xi$  ed alle rette  $\xi = 2k\pi$  ( $k$  intero); tagliano ciascun asse in infiniti punti reali, le relative tangenti sono parallele all'altro asse; non hanno flessi e constano di infinite ovali congruenti. Le curve del secondo tipo sono pure periodiche e possiedono infiniti centri (i punti  $\xi = k\pi$ ,  $\eta = 0$ ) i quali sono flessi; per  $\xi$  compreso fra  $2k\pi$  e  $(2k+1)\pi$  si ha un ramo posto al disopra all'asse delle  $\xi$ , mentre per  $\xi$  compreso fra  $(2k-1)\pi$  e  $2k\pi$  se ne ha uno posto al disotto; i punti di ascisse  $(2k+1)\pi/2$  sono punti di culminazione. Finalmente anche le curve del terzo tipo sono periodiche; sono esenti da flessi, ma hanno infiniti asintoti (le rette  $\xi = k\pi/2$ ) e infiniti assi di simmetria, il primo dei quali è l'asse delle ordinate.

La rettificazione delle linee di Sumner dei due primi tipi esige funzioni ellittiche; mentre per quelle del terzo può eseguirsi elementarmente. Si trova infatti mediante la (5)  $ds = \frac{d\xi}{\cos \xi}$  onde  $s = \log \cotg \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{\xi}{2} \right]$ ; notando poi che  $\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = -\frac{\varepsilon}{\cos^2 \xi}$  si giunge alla seguente espressione del raggio di curvatura:  $R = -\frac{\varepsilon}{\cos \xi}$ . Eliminando  $\xi$  col mezzo di questa dall'espressione di  $ds$  si trova

$$ds = \frac{R dR}{\sqrt{R^2 - 1}} \quad \text{e quindi} \quad s + c = \sqrt{R^2 - 1},$$

che è l'equazione intrinseca della curva.

Le curve ora studiate essendo rappresentate da un'equazione omogenea di 1° grado fra  $\cos \xi$ ,  $\operatorname{sen} \xi$ ,  $\cosh \eta$ ,  $\operatorname{senh} \eta$  si possono chiamare linee di Sumner di primo ordine; analogamente si potrebbero considerare quelle di ordine superiore, ma non hanno raggiunto finora notevole importanza.

Poichè le superficie pseudosferiche presentano una spiccata analogia con le sferiche, su cui stanno le linee testè esaminate, os-

serveremo che le loro linee di curvatura hanno per proiezioni ortogonali curve rappresentabili con le seguenti equazioni:

$$x = \frac{R \sqrt{a^2 - 1}}{a (a \cosh v + 1)} \left[ \sqrt{a^2 - 1} \cosh v \cdot \operatorname{sen} \frac{v}{\sqrt{a^2 - 1}} - \operatorname{senh} v \cdot \cos \frac{v}{\sqrt{a^2 - 1}} \right]$$

$$y = \frac{R \sqrt{a^2 - 1}}{a (a \cosh v + 1)} \left[ \sqrt{a^2 - 1} \cosh v \cdot \cos \frac{v}{\sqrt{a^2 - 1}} + \operatorname{senh} v \cdot \operatorname{sen} \frac{v}{\sqrt{a^2 - 1}} \right]$$

per l'arco  $s$  e il raggio di curvatura  $r$  si trovano le seguenti equazioni:

$$s = \frac{R}{a} \log \frac{a \cosh v + 1}{a + 1}, \quad r = \frac{R \sqrt{a^2 - 1} \operatorname{senh} v}{a (a + \cosh v)},$$

mentre l'evoluta ha la seguente equazione polare

$$\rho = \frac{R (a^2 - 1)}{a [a + \cosh (\omega \sqrt{a^2 - 1})]} \quad {}^1).$$

<sup>1)</sup> A. FORTI, *Saggio di nuove applicazioni delle funzioni iperboliche* (Rivista scientifico-industriale, T. XXV, Firenze 1883), p. 259-263.

## CAPITOLO XXI

### Le Trattrici.

**254.** Le curve trascendenti di cui dobbiamo ancora occuparci vennero concepite nel corso dello studio matematico dei fenomeni naturali, appartengono quindi alla grande categoria delle *curve fisico-matematiche*, di cui fanno parte alcune curve, algebriche o non, che già conosciamo: tali sono la parabola semicubica, considerata come curva *descensus aequabilis* (Vol. I, p. 365), le linee di Lissajous (id., p. 563), la cicloide, considerata come curva tautocrona o brachistocrona (questo Vol., p. 93), e le curve di Ribaucour, considerate come risoltrici un caso speciale di un problema del Bernoulli (id., p. 164) ecc. Nel trattare delle seguenti curve non entreremo in minuti particolari concernenti le questioni fisiche a cui esse debbono la vita, ma restringeremo le nostre considerazioni alle proprietà geometriche di cui esse godono.

Claudio Perrault, dotto medico vissuto a Parigi dal 1613 al 1688, propose a parecchi matematici e da ultimo a Leibniz la ricerca della curva descritta in un piano orizzontale da un punto pesante attaccato all'estremo di un filo teso, di cui l'altro estremo percorre una retta situata in quel piano. Leibniz non tardò a riconoscere che la curva cercata è caratterizzata dalla proprietà che per essa è costante il segmento di ogni tangente compreso fra il punto di contatto e l'intersezione con una retta fissa <sup>1)</sup>. Huygens si occupò egli pure della stessa curva <sup>2)</sup>, la generalizzò e diede il nome di *trac-*

<sup>1)</sup> *Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione* (Acta erud., 1693; Leibniz ed. Gerhardt, T. V, p. 294 e seg.). Cfr. anche una lettera a HUYGENS del 1-11 ottobre 1693 (Leibniz ed. Gerhardt, T. II, p. 164).

<sup>2)</sup> V. una lettera diretta a BASNAGE DE BEAUVAL inserita nell'*Histoire des ouvrages des savants* (Dic. 1692-Febbr. 1893) e riprodotta in *Oeuvres de Huygens*, T. X, p. 407-17.

toria alla curva che lo risolve <sup>1)</sup>; questo nome è tuttora adoperato, ma è più generalmente usato quello di *trattrice*, a cui noi accordiamo la preferenza; altri usa i nomi di *traiettoria di Huygens* o di *spirale trattrice*, mentre il Ribaucour propose quello di *atyoide* <sup>2)</sup>.

Se per la trattrice e la spirale logaritmica noi adottiamo le definizioni seguenti:

La trattrice è il luogo di un punto tale che il segmento della tangente in un suo punto qualunque compreso fra il punto di contatto e l'intersezione con una retta fissa ha lunghezza costante

La spirale logaritmica è l'inviluppo di una retta tale che l'angolo da essa formato con la retta congiungente il suo punto di contatto ad un punto fisso ha grandezza costante,

si vede che queste due curve possono, da un certo punto di vista, considerarsi per correlative <sup>3)</sup>.

Aumentando o diminuendo in un dato rapporto costante le ordinate (perpendicolari alla retta fissa) di una trattrice si ottengono le *trattrici allungate ed accorciate* che s'incontrano in questioni di geometria infinitesimale.

L'equazione della trattrice si ottiene agevolmente scegliendo come asse delle  $x$  la retta fissa; in tal caso essa è « la curva per cui è costante la lunghezza della tangente », onde la sua equazione differenziale è la seguente:

$$(1) \quad y^2 + y^2 \left[ \frac{dx}{dy} \right]^2 = a^2;$$

separando le variabili questa si riduce alle quadrature e dà

$$x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2} \cdot dy}{y}.$$

Per effettuare la quadratura indicata conviene porre  $y = a \sin \omega$ ; si ha così:

$$x = a \int \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega} d\omega = a \left[ \int \frac{d\omega}{\sin \omega} - \int \sin \omega d\omega \right].$$

<sup>1)</sup> V. una lettera a LEIBNIZ del 17 settembre 1693 (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. II, p. 161).

<sup>2)</sup> *Etude sur les classoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle* (Mem. cour. par l'Acad. de Belgique, T. XLIV, 1880).

<sup>3)</sup> CESÀRO, *Sur la trattrice* (Mathesis, T. II, 1881).

Supponendo quindi che la curva parte dal punto  $A(0, a)$  dovrà aversi  $x = 0$  per  $\omega = \pi/2$  e quindi per rappresentare la trattrice servono le due equazioni:

$$(2) \quad x = a \log \operatorname{tg} \omega/2 + a \cos \omega, \quad y = a \sin \omega.$$

Siccome cambiando ivi  $\omega$  in  $\pi - \omega$ ,  $x$  non fa che mutare segno e  $y$  conservarsi inalterato, così la trattrice è simmetrica rispetto all'asse delle  $y$ ;  $A$  ne è una cuspide con l'asse delle  $y$  per corrispondente tangente. L'equazione ordinaria di essa è il risultato dell'eliminazione di  $\omega$  fra le (2), onde è

$$(3) \quad x = a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} \quad 1)$$

ovvero

$$y e^{\frac{x - \sqrt{a^2 - y^2}}{a}} = a - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Emerge da queste che (l'asse delle  $x$ , cioè) la retta fissa è asintoto della trattrice. Si dimostra poi che l'inviluppo delle  $\infty^1$  rette rappresentate dall'equazione  $x + \sinh(\delta/a) = \delta$  al variare di  $\delta$  è una trattrice <sup>2)</sup>. Invece l'equazione differenziale (1) mostra che

$$(4) \quad \frac{X - x}{Y - y} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

<sup>1)</sup> SALMON-FIEDLER, *Hohere ebene Kurven*, II ed. (Leipzig 1882); KLEJER-HAAS, *Differentialrechnung*, T. III (Stuttgart, 1894), p. 64-65; ivi i radicali sono presi con entrambi i segni, sistema questo approvato da W. HEYMANN (v. la memoria già citata *Ein Rollen problem. Die Kurven T und N*, Chemnitz 1915). L'equazione

$$x = \pm \sqrt{a^2 - y^2} + a \log \frac{y}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}$$

si trova, forse per la prima volta, in una memoria di Lord BROUGHAM pubblicata nelle *Philos. Transactions*. (London 1798); essa prova che la trattrice è caso particolare di una classe di curve definite da J. DURAN LORIGA (*Intermédiaire*, T. IV, 1897) mediante l'equazione

$$x = -\frac{y}{2} \cos \theta \pm \left[ \frac{c}{q} \sqrt{y^2 - y^2} - a \log \frac{q + \sqrt{q^2 - y^2}}{y} \right]$$

essendo

$$q^2 = \frac{4c^2}{4 - \cos^2 \theta};$$

la trattrice corrisponde all'ipotesi  $\theta = \pi/2$ .

<sup>2)</sup> E. BELTRAMI, *Teorema di geometria pseudosferica* (Giorn. di Matem., T. X, 1872, oppure *Opere matematiche*, T. II, p. 392).

è l'equazione della tangente nel punto  $(x, y)$ . Supponendo in questa date  $X$  e  $Y$  ed elevando a quadrato si deduce che i punti di contatto delle tangenti condotte ad una trattrice da un punto qualunque del suo piano stanno in generale sopra una curva del quart'ordine passante due volte per quel punto; se però quel punto è preso sull'asintoto, questa quartica si decompone nell'asintoto stesso contato due volte ed in un cerchio di raggio  $a$ . Come corollario del teorema precedente si ottiene: qualunque trattrice è una curva panalgebrica facendo parte di un sistema con le caratteristiche 2 e 2.

Una semplice applicazione di formole notissime mostra che l'area compresa fra la trattrice ed il proprio asintoto è espressa da  $\pi a^2/2$  mentre il volume e la superficie che essa genera rotando attorno a questo sono date risp. da  $2/3 \pi a^3$  e  $4 \pi a^2$  cioè: *Il volume generato dalla rotazione della trattrice attorno al proprio asintoto ha la stessa superficie e metà volume della sfera il cui raggio è eguale alla lunghezza costante della tangente.*

Più importanti sono le conseguenze a cui guida la rettificazione della curva. La (1) dà infatti

$$\frac{ds}{dy} = \frac{a}{y}$$

onde

$$(7) \quad s = a \log \frac{a}{y}$$

facendo cominciare gli archi dal punto  $A$  ( $x = 0, y = a$ ) in cui la curva taglia  $Oy$ . Ora le (7) e (3<sup>a</sup>, 1<sup>a</sup>) si possono anche scrivere:

$$(7') \quad s = -a \log \operatorname{sen} \omega,$$

$$(3') \quad x = a \log (1 - \cos \omega) - a \log \operatorname{sen} \omega + a \cos \omega,$$

onde

$$s - x = -a \cos \omega - a \log (1 - \cos \omega).$$

Ora supponendo qui  $\omega = \pi$ , si ha  $x = \infty$  onde (8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (s - x) = a(1 - \log 2)$ ; essendo la curva simmetrica rispetto a  $Oy$ , questa relazione esprime il seguente teorema di Beltrami<sup>2)</sup>: *La differenza tra la lunghezza (infinita) della trattrice caratterizzata dalla costante  $a$  e quella (parimente infinita) del suo asintoto è finita e eguale a*

$$2a(1 - \log 2).$$

<sup>1)</sup> HUYGENS, *Oeuvres complètes*, T. X, p. 418-21.

<sup>2)</sup> *Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione* (Annali di Matem., T. VI, 1864, p. 275; *Opere matematiche*, T. I, p. 204).

**255.** Detto ora  $R$  il raggio di curvatura della trattrice si trova facilmente, mediante le (3),

$$(8) \quad R = a \cot \omega,$$

ed eliminando  $\omega$  fra le equazioni (7') (8) si conclude essere

$$(9) \quad R = a \sqrt{\frac{2s}{e^a} - 1},$$

l'equazione intrinseca della trattrice. Indicando al solito con  $s_1$  e  $R_1$  l'arco ed il raggio di curvatura dell'evolvente e servendosi delle formole

$$s_1 = R, \quad R_1 = R \frac{dR}{ds},$$

si ottiene

$$s_1 = a \sqrt{\frac{2s}{e^a} - 1}, \quad R_1 = a e^{\frac{2s}{a}}$$

donde eliminando  $s$

$$(10) \quad R_1 = \frac{s_1^2}{a} + a;$$

ora, essendo questa l'equazione intrinseca della prima curva a cui è dedicato il Capitolo seguente, si conclude che *la trattrice è l'evolvente di una catenaria.*

L'equazione (9) induce a considerare delle curve più generali, quelle cioè rappresentate da equazioni della forma

$$(11) \quad R = b \sqrt{\frac{2s}{e^a} - 1};$$

sono le *pseudotrattrici* di Cesàro<sup>1)</sup>; le loro evolvente hanno un'equazione intrinseca a cui si giunge con un calcolo analogo al precedente: è questa

$$(12) \quad R_1^2 = \frac{s_1^2}{a} + c$$

ove  $ac = b^2$ ; sono le curve dette *pseudocatenarie*, che incontreremo nel Capitolo seguente.

<sup>1)</sup> *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli, 1896), p. 18.

Di più antica data è un'altra generalizzazione della trattrice di cui va qui fatto cenno. Si chiama, secondo la proposta di V. Riccati<sup>1)</sup>, *sintratrice* il luogo dei punti  $P$  che dividono in un dato rapporto le tangenti  $MT$  di una trattrice. Per trovarne l'equazione indichiamo con  $x, y$  e  $x', y'$  le coordinate di  $M$  e  $P$  e poniamo  $MP = h$ ,  $PT = k$ , onde  $h + k = a$ . Avremo

$$\frac{y}{y'} = \frac{a}{k}, \quad \frac{y - y'}{x - x'} = \frac{dy}{dx};$$

combinando queste con la (1) si trova

$$y = \frac{a y'}{k}, \quad x = x' + \frac{h}{k} \sqrt{k^2 - y'^2},$$

e sostituendo questi valori nella (3):

$$(13) \quad x' - \sqrt{k^2 - y'^2} = a \log \frac{k - \sqrt{k^2 - y'^2}}{y'};$$

questa è l'equazione della sintratrice; per  $k = a$  coincide con la (3) come potevasi prevedere; invece delle (13) possono servire le due equazioni

$$(14) \quad x' = k \cos \omega + a \log \operatorname{tg} \omega/2, \quad y' = k \operatorname{sen} \omega.$$

Assai più naturale e vasta è la generalizzazione della trattrice che nasce sostituendo alla retta fissa una curva qualsivoglia; si giunge così al concetto di *tratrice di una curva qualunque* (che incontrasi già in Huygens e Leibniz)<sup>2)</sup> e ad una notevole relazione fra due curve, che può enunciarsi così: Se su tutte le tangenti di una curva  $\Gamma$  si portano a partire dai rispettivi punti di contatto delle lunghezze costanti, il luogo dei loro estremi è una nuova curva  $E$  che si dice *curva equitangenziale* di  $\Gamma$ <sup>3)</sup>, mentre  $\Gamma$  è la *tratrice* di  $E$

<sup>1)</sup> De natura et proprietatibus quarundam curvarum, quae simul cum tractoria generantur, quaeque proinde syntrectoria nominabuntur (Comment. Accad. Bonon., T. III, 1755).

<sup>2)</sup> Cfr. A. POULAIN, Les aires des tractrices et le stang-planimètre (Journ. de math. spéc., 4<sup>a</sup> Serie, T. IV, 1895).

<sup>3)</sup> BROCARD, Notes de bibliographie des courbes géométriques (Bar-le-Duc 1899), Partie complémentaire, p. 58. Supposto ad es. che  $L$  sia una conica,  $E$  è una curva di 8<sup>o</sup> ordine che A. SCHRADER ha studiato nella memoria Ueber den Ort der Endpunkte, die man erhält, wenn man auf jede Tangente eines Kegelschnittes nach beiden Seiten hin von Berührungspunkte eine konstante Strecke abträgt (Programm. Padeborn, 1904). In generale le equitangenziali furono investigate dall'Aoust nella sua Analyse infinitésimale des courbes planes (Paris 1873); esse furono considerate anche da G. SCHEFFERS, che le chiamò tangenziali, avendo usato il nome da noi preferito in altro senso; v. la memoria Isogonalkurven, Aequitangentialkurven und komplexe Zahlen (Math. Annalen, T. LX, 1905).

(e se ne chiama *base*); siffatte coppie di curve s'incontrano in questioni di matematica applicata<sup>1)</sup>.

Data che sia la curva  $\Gamma$ , l'equitangenziale  $\Gamma$  si determina con semplici differenziazioni: infatti se  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  sono le espressioni delle coordinate di punto di  $\Gamma$  in funzione dell'arco, e  $l$  è la lunghezza costante, le coordinate  $X, Y$  del punto corrispondente di  $E$  saranno

$$X = x + l \frac{dx}{ds}, \quad Y = y + l \frac{dy}{ds}$$

Chiamando quindi  $S$  l'arco di  $E$  e notando che il raggio  $R$  di curvatura di  $\Gamma$  è determinato dall'equazione

$$\frac{1}{R} = \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2}$$

si deduce

$$(15) \quad \left[ \frac{dS}{ds} \right]^2 = 1 + \frac{l^2}{R^2},$$

notevole relazione fra  $\Gamma$  e  $E$ . Un'altra può enunciarsi come segue: La normale nel punto  $P$  della curva  $E$  equitangenziale di  $\Gamma$  che corrisponde al punto  $M$  di questa, passa pel centro di curvatura di  $\Gamma$  relativo a  $M$ . Per dimostrare questo teorema notiamo che le coordinate di questo centro di curvatura sono

$$x_0 = x + R \frac{dy}{ds}, \quad y_0 = y - R \frac{dx}{ds},$$

mentre — se  $\xi, \eta$  sono coordinate correnti — l'equazione della normale in  $M$  alla curva  $E$  è

$$(\xi - X) \frac{dX}{ds} + (\eta - Y) \frac{dY}{ds} = 0;$$

ora ponendo nel primo membro di questa equazione invece di  $X$  e  $Y$  i loro valori e poi  $\xi = x_0$ ,  $\eta = y_0$  si ottiene per risultato

$$l \left[ R \left[ \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right] - 1 \right] = 0,$$

conformemente all'enunciato. L'importanza di questa proposizione

<sup>1)</sup> C. BOURLET, Nouveau traité des bicycles et des bicyclettes (2<sup>a</sup> ed., Paris 1898); L. KLERITJ, Traktoriograph und Construction der transzendenten Zahlen « $\pi$ » und « $e$ » sowie Construction des  $n$ -seitigen dem Kreise ein geschriebenen regelmässigen Polygone (Dingler's Polyth. Journal, T. 305, 1897).

sta in ciò che permette di costruire il centro di curvatura in un punto qualunque di  $\Gamma$  quando si sappiano costruire le normali alle due curve  $\Gamma, E$ ; da essa in particolare si deduce che per costruire il centro di curvatura in un punto  $M$  della trattrice ordinaria avente per base la retta  $Ox$ , basta trovare la intersezione della normale in  $M$  a quella curva con la perpendicolare condotta alla base nel suo punto d'intersezione con la tangente in  $M$  alla trattrice. Similmente per costruire il centro di curvatura in un punto  $M$  della trattrice avente per base un cerchio basta trovare la intersezione della normale in  $M$  a quella curva col raggio della base che va al punto di questa che corrisponde a  $M$ .

Quando invece sia data la curva (base)  $E$  la ricerca della trattrice esige in generale la integrazione di equazioni differenziali o almeno delle quadrature. I calcoli relativi possono eseguirsi completamente, non soltanto quando  $E$  sia una retta (v. sopra), ma anche quando sia una circonferenza<sup>1)</sup>: gli è quanto ci apprestiamo a dimostrare nel n. seguente.

**256.** La curva base sia il cerchio di centro  $O$  e raggio  $a$ ;  $l$  sia il segmento costante. Chiameremo  $x, y$  le coordinate di un punto qualunque  $M$  (fig. 31) e  $s$  l'arco della trattrice. Porremo per brevità:

$$a^2 - l^2 = n^2, \quad \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{ds}{dx} = s' \quad \text{onde} \quad 1 + y'^2 = s'^2.$$

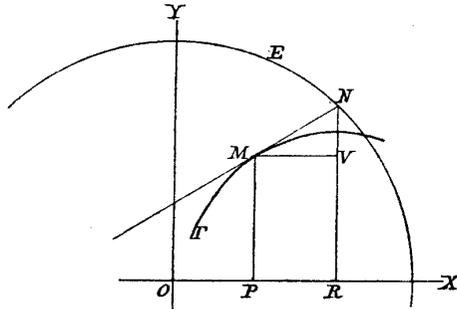


Fig. 31.

Sia  $N$  il punto del cerchio che corrisponde a  $M$ ; condotte  $MP$  e  $NR$  perpendicolari a  $Ox$  e  $MV$  a questa parallela, avremo:

<sup>1)</sup> V. RICCATI, *Deusu motus tractorii in constructio aeq. diff.* (Bononiae 1752). La sostanza di questo opuscolo è riprodotta nel T. II (Bononiae 1767, p. 270-487) delle *Institutiones analyticae* a V. RICCATI et H. SALADINO collectae.

$$OR = OP + PR = x + \frac{l}{s'}, \quad RN = MP + VN = y + \frac{r y'}{s'};$$

e siccome  $N$  appartiene al dato circolo così  $OR^2 + RN^2 = a^2$ ; dunque

$$\left(x + \frac{l}{s'}\right)^2 + \left(y + \frac{l y'}{s'}\right)^2 = a^2$$

ovvero

$$(16) \quad x^2 + y^2 + \frac{2s}{s'}(x + y y') = n^2.$$

Questa è l'equazione differenziale della trattrice; essa intanto conduce alla rettificazione di questa. Scriviamola, infatti, come segue:

$$s' = -l \frac{2x + 2y y'}{x^2 + y^2 - n^2} = -l \frac{d}{dx} \log(x^2 + y^2 - n^2)$$

e troveremo

$$(17) \quad s = c - l \log(x^2 + y^2 - n^2).$$

Introducendo ora coordinate polari  $\rho, \omega$  la (16) diviene:

$$\rho^2 + \frac{2l \rho \cdot d\rho}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}} = n^2$$

ovvero

$$(18) \quad d\omega = \frac{d\rho \cdot \sqrt{2(a^2 - l^2)\rho^2 - \rho^4 - n^4}}{\rho(\rho^2 - n^2)}$$

e così si è ottenuta la separazione delle variabili. Per proseguire nel calcolo porremo:

$$(19) \quad \rho^2 = a^2 + l^2 + 2al \cos \mu$$

e così trasformeremo l'equazione precedente in quest'altra:

$$d\omega = -d\mu \frac{a^2 l \cos \mu}{(a^2 + l^2 + 2al \cos \mu)(l + a \cos \mu)}$$

ovvero

$$(20) \quad d\omega = \frac{1}{2} d\mu - \frac{l}{a} \frac{d\mu}{\frac{l}{a} + \cos \mu} - \frac{n^2}{4al} \frac{d\mu}{\frac{a^2 + l^2}{2al} + \cos \mu}.$$

E se poniamo  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \mu = \theta$  la (19) diverrà

$$(21) \quad \rho = \sqrt{a^2 + l^2 + 2al \frac{1 - \theta^2}{1 + \theta^2}}$$

mentre la (20) si muterà in :

$$d\omega = \frac{d\theta}{1 + \theta^2} - n^2 \frac{d\theta}{(a+l)^2 + (a-l)^2 \theta^2} - 2l \frac{d\theta}{(a+l) - (a-l)\theta^2}$$

Le quadrature indicate nel secondo membro danno risultati differenti secondochè  $a \gtrless l$  e in corrispondenza si ottengono le espressioni seguenti:

$$(22) \quad \omega = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \theta - \theta + A, \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2l\theta}{(a+l) + (a-l)\theta^2} - \frac{2l}{n} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{l-a}{l+a}} \theta + B, \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2l\theta}{(a+l) + (a-l)\theta^2} - \frac{l}{n} \log \frac{a+l+n\theta}{a+l-n\theta} + C, \end{cases}$$

ove  $A, B, C$  sono le costanti arbitrarie introdotte dalla integrazione e che si possono sempre supporre nulle.

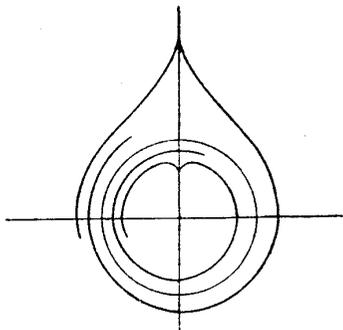


Fig. 32. — Trattrice del cerchio.

$A, B, C$  essa è simmetrica rispetto all'asse polare (perchè cambiando il segno di  $\theta$ ,  $\omega$  fa altrettanto, mentre  $\rho$  resta inalterato); la (22, 3<sup>a</sup>) mostra che se  $\theta^2 = \frac{a+l}{a-l}$  si ha  $\rho = \sqrt{a^2 - l^2}$  e  $\omega = \infty$ , onde il cerchio di centro  $O$  e raggio  $n$  è asintotico della curva (v. fig. 32); ecc. ecc. Osserviamo anche che, nel caso  $l = a$ ,  $A = 0$  si trova come equazione polare della trattrice

$$\omega = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{4a^2 - \rho^2}}{\rho} - \frac{\sqrt{4a^2 - \rho^2}}{\rho}$$

A. Bordoni, a cui è dovuto il calcolo testè esposto <sup>1)</sup>, ha altresì scoperte alcune considerazioni semplicissime le quali, in modo veramente inaspettato, somministrano un'equazione differenziale facilmente integrabile della evolvente della trattrice considerata; le esporremo con la massima concisione possibile.

Siano  $t, u$  le coordinate del punto dell'evolvente che corrisponde al punto  $x, y$  della trattrice; supporremo tutte queste quantità funzioni di una medesima variabile indipendente. Avremo

$$(23) \quad t = x - \frac{s'^2 y'}{y''}, \quad u = y + \frac{s'^2}{y''}$$

Eliminando  $x$  e  $y$  fra queste equazioni e la (16) — differenziata se occorre — si otterrà l'equazione differenziale della evolvente. Ora differenziando la (16) si trova:

$$(x + y y' + l s') s'^3 = l (x y' - y) y'';$$

in questa e nella (23, 1<sup>a</sup>) si sostituisca il valore  $y'' = \frac{s'^2}{u - y}$  dato dalla (23, 1<sup>a</sup>) e si giungerà alle equazioni:

$$(x + y y' + l s') s' (u - y) = l (x y' - y), \quad t + u y' - x - y y' = 0.$$

ovvero

$$x = t + y' \frac{u y' - t}{u y' + t}, \quad y = u + \frac{l}{s'} \frac{t - u y'}{t + u y'}$$

Sostituendo nella (16) a  $x$  e  $y$  questi valori si ottiene:

$$t^2 + u^2 + 2l s' \frac{t^2 + u^2}{t + u y'} + l^2 \left[ \frac{u + t y'}{t + u y'} \right]^2 = n^2.$$

Ma è noto dalla teoria delle evolte che

$$y' = - \frac{t'}{u'}$$

<sup>1)</sup> Vedi la memoria *Sul nuovo tornio immaginato dal Sig. Carlo Parea* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, T. XVIII, 1820).

onde (detto  $\sigma'$  l'arco dell'evolvente)

$$t + u y' = \frac{t u' - t' u}{u'}, \quad t y' - u = -\frac{t t' + u u'}{u'}, \quad s' = \frac{\sqrt{t'^2 + u'^2}}{u'} = \frac{\sigma'}{u'}$$

e la precedente diviene:

$$(24) \quad t^2 + u^2 + 2 l \sigma' \frac{t^2 + u^2}{t u' - t' u} + l^2 \left[ \frac{t t' + u u'}{t u' - t' u} \right]^2 = n^2.$$

E questa è l'equazione differenziale dell'evolvente. Per integrarle introdurremo le coordinate polari  $\rho, \omega$  e così la trasformeremo in quest'altra:

$$\rho^2 - 2 l \frac{\sigma'}{\omega'} + l^2 \frac{\rho'^2}{\rho^2 \omega'^2} = n^2,$$

ovvero

$$\left[ \rho - \frac{l \sigma'}{\rho \omega'} \right]^2 = n^2.$$

Scrivendo  $\varepsilon$  invece di  $\pm 1$  ne trarremo

$$\rho - \frac{l \sigma'}{\rho \omega'} = \varepsilon n$$

e quindi

$$(\rho - \varepsilon n)^2 = \frac{l^2 \sigma'^2}{\rho^2 \omega'^2} = l^2 \left[ 1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2 \omega'^2} \right]$$

ossia

$$\sqrt{(\rho - \varepsilon n)^2 - l^2} = \frac{l \rho'}{\rho \omega'}$$

o finalmente

$$(25) \quad d\omega = \frac{l \cdot d\rho}{\rho \sqrt{(\rho - \varepsilon n)^2 - l^2}},$$

e così le variabili risultano separate. Ponendo

$$(26) \quad \rho - 2 n = l z$$

essa diviene

$$d\omega = \frac{l \cdot dz}{(\varepsilon n + l z) \sqrt{z^2 - 1}};$$

e, ponendo

$$(27) \quad \sqrt{z^2 - 1} = z - u$$

$$d\omega = \frac{-2 du}{u^2 + 2 \varepsilon \frac{n}{l} u + 1},$$

onde

$$(28) \quad \omega = \int \frac{-2 du}{u^2 + 2 \varepsilon \frac{n}{l} u + 1}.$$

Eliminando poi  $z$  fra le (26) e (27) si ottiene:

$$(29) \quad \rho = \varepsilon a + \frac{l}{2} \left[ u + \frac{1}{u} \right];$$

siccome le (28) e (29) danno  $\omega$  e  $\rho$  in funzione della variabile indipendente  $u$ , così porgono la cercata rappresentazione analitica della curva; possiamo aggiungere che la quadratura indicata nella (28) è eseguibile e dà i seguenti risultati:

$$(36) \quad \omega = \begin{cases} D - \frac{2}{n - \varepsilon} & \text{se } n = l \\ E + \frac{l}{\sqrt{l^2 - n^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon a + l u}{\sqrt{l^2 - n^2}} & \text{se } n < l \\ F + \frac{l}{2 n} \log \frac{\varepsilon n + l n - n}{\varepsilon n + l n + n} & \text{se } n > l; \end{cases}$$

ove  $D, E, F$  sono le costanti introdotte dall'integrazione e converrà di regola supporle nulle. Col mezzo della trovata rappresentazione analitica si potrà giungere a conoscere tutte le proprietà della curva (la fig. 33, p. 226 ne dà la rappresentazione grafica nel terzo dei casi suddetti); lasciamo al lettore tale investigazione.

**257.** Il nome di *trattrice del cerchio* è stato dato di recente da F. Morley ad una curva a cui guida la considerazione di un no-

tissimo strumento d'integrazione <sup>1)</sup>. Tale curva si può definire come traiettoria ortogonale degli  $\infty'$  cerchi di dato raggio ( $b$ ) i cui centri stanno sopra una circonferenza data (di centro  $O$  e raggio  $a$ ); essa è quindi anallagmatica rispetto a qualunque inversione di centro  $O$ ; nel caso speciale  $a = b$ , è l'inversa d'un'evolvente di circolo. Per trovarne la rappresentazione analitica si osservi che gli  $\infty'$  circoli di cui sopra hanno per equazione generale

$$(31) \quad (x - a \cos \varphi)^2 + (y - a \sin \varphi)^2 = b^2$$

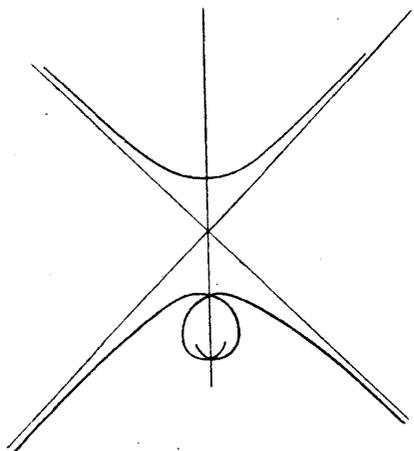


Fig. 33. — Evolvente della trattrice del cerchio.

ossia

$$x^2 + y^2 - 2ax \cos \varphi - 2by \sin \varphi + a^2 - b^2 = 0$$

Differenziando si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - a \cos \varphi}{y - b \sin \varphi},$$

onde l'equazione differenziale delle traiettorie ortogonali di quel sistema di circoli è

<sup>1)</sup> V. la nota *The «no rolling» curves of Anasler's planimeters* (Annals of Mathem., II Ser., I, 1899); cfr. F. GOMES TEIXEIRA, *Sobre algumas propriedades de duas curvas notáveis* (Jorn. Sc. math. phys. e nat., II Ser., VII, 1909).

$$(32) \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x - a \cos \varphi}{y - b \sin \varphi},$$

da cui  $\varphi$  si deve eliminare tenendo conto dell'equazione (31).

Ora la (32) dà, quando si ricordi la (31),

$$\frac{dx}{x - a \cos \varphi} = \frac{dy}{y - b \sin \varphi} = \frac{ds}{b},$$

$s$  essendo al solito l'arco della curva cercata; per ciò

$$\frac{b dx}{ds} - x = -a \cos \varphi, \quad \frac{b dy}{ds} - y = -b \sin \varphi,$$

onde, quadrando e sommando

$$b^2 + x^2 + y^2 - \frac{2b(x dx + y dy)}{ds} = a^2,$$

ossia, ponendo  $x^2 + y^2 = \rho^2$ ,

$$\rho^2 + b^2 - a^2 - \frac{2b\rho \cdot d\rho}{ds} = 0.$$

Se ne deduce

$$ds^2 = \frac{4b^2 \rho^2 \cdot d\rho^2}{(\rho^2 - a^2 + b^2)^2},$$

ossia (introducendo coordinate polari)

$$\rho \cdot d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 = \frac{4b^2 \rho^2 \cdot d\rho^2}{(\rho^2 - a^2 + b^2)^2}$$

onde

$$(33) \quad \omega = \int \frac{\sqrt{4b^2 \rho^2 - (\rho^2 - a^2 + b^2)^2}}{\rho(\rho^2 - a^2 + b^2)} d\rho$$

e questa è l'equazione polare della curva. L'integrazione indicata è in generale eseguibile soltanto introducendo funzioni ellittiche; ma si può effettuare elementarmente nel caso  $a = b$ ; infatti la (33) diviene in tale ipotesi

$$\omega = \int \frac{\sqrt{4a^2 - \rho^2}}{\rho^2} d\rho$$

e dà

$$\omega = \arccos \frac{\rho}{2a} - \frac{\sqrt{4a^2 - \rho^2}}{\rho}$$

la quale rappresenta la curva riversa d'una evolvente di circolo.

Nel caso generale la (33) prova che la trattrice del cerchio è una curva panalgebraica; lasciamo al lettore di ottenere l'equazione della curva (di 8° ordine) su cui stanno i punti di contatto delle tangenti condotte alla curva da un punto qualunque del piano. Notiamo piuttosto che i punti di contatto delle tangenti formanti con l'asse polare l'angolo  $\alpha$  stanno sulla curva di equazione

$$\frac{\sqrt{4b^2\rho^2 - (\rho^2 - a^2 + b^2)}}{\rho(\rho^2 - a^2 + b^2)} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega);$$

ora se si passa a coordinate cartesiane si trova che tale equazione si spezza nelle due

$$(x \pm b \cos \alpha)^2 + (y \pm b \sin \alpha)^2 = a^2,$$

che rappresentano quei due cerchi del sistema dato i cui centri sono gli estremi del diametro d'inclinazione  $\alpha$  del cerchio di centro  $O$  e raggio  $b$ .

Il Morley ha osservato che la curva si presenta sotto forma differente secondochè  $a \geq b$ ; nella prima ipotesi essa ha un cerchio asintotico di centro  $O$  e raggio  $\sqrt{a^2 - b^2}$ ; se  $a = b$  si ha invece un punto asintotico  $O$ ; se finalmente  $a < b$  la curva ammette  $\infty'$  cuspidi distribuite regolarmente sulle periferie dei cerchi di centro  $O$  e raggi  $b \pm a$  e tali che la distanza angolare fra due cuspidi consecutive sia  $\frac{\pi b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ .

Il fatto (v. N. 259) che l'evolvente dell'ordinaria trattrice è una curva nota — la catenaria — ha guidato il Morley a cercare quale sia l'evolvente della trattrice del cerchio; egli trovò come equazione polare di tale curva

$$\omega = \int \frac{b d\psi}{b + a \cos \psi} \text{ ove } \psi = \arccos \frac{b}{\rho - a}.$$

Tale integrazione è sempre eseguibile elementarmente; nel caso  $b > a$  conduce alla seguente equazione polare della evolvente:

$$\rho = \frac{a^2 - b^2}{a - b \cos \frac{b\omega}{\sqrt{b^2 - a^2}}}$$

la quale, come sappiamo (Vol. I, p. 497) quando  $\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} = n$ , numero intero positivo, rappresenta una curva a  $n$  ventri.

**258.** Vedemmo (p. 214) che, preso per asse delle  $x$  la base della trattrice ordinaria, questa può definirsi come la curva per cui la tangente ha lunghezza costante. Quest'osservazione fa nascere spontaneamente la domanda: Quali curve godono l'analogia propria in un sistema polare? Sono evidentemente le curve integrali della seguente equazione differenziale:

$$(31) \quad \rho \sqrt{1 + \left[ \rho \frac{d\omega}{d\rho} \right]^2} = a.$$

Scrivendo questa come segue

$$ds = a \frac{d\rho}{\rho}$$

e poi integrando si ottiene

$$(32) \quad s - s_0 = a \log \frac{\rho}{\rho_0},$$

dove emerge che le curve cercate godono della proprietà che un loro arco qualunque è proporzionale al logaritmo del rapporto dei raggi vettori dei punti estremi. Applicando la definizione di questa curva e le considerazioni esposte in principio di questo Libro si dimostra senza difficoltà che si è in presenza di una curva panalgebraica facente parte di un sistema di caratteristiche 2 e 4. Se poi si tiene presente che i flessi di una curva definita in coordinate polari sono determinati dall'equazione

$$\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\rho^2} \left[ \frac{1}{\rho} \right] = 0$$

e che nel caso nostro

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \left[ \frac{1}{\rho} \right] = - \frac{\rho^3}{(a^2 + \rho^2)^2}$$

si vede che la circonferenza  $\rho^2 = \frac{1}{2} a^2$  sega la data curva nei suoi punti d'inflessione.

Dalla (31) si trae poi

$$d\omega = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{\varrho^2} d\varrho;$$

ora, se si pone  $\varrho = a \cos \theta$ , si ha

$$d\omega = d\theta - \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

onde

$$\omega = \theta - \operatorname{tg} \theta + c$$

ossia, poichè  $\theta = \arccos \varrho/a$ ,

$$\omega = \arccos \frac{\varrho}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{\varrho} + c.$$

Prendendo come nuova anomalia quantità  $c - \omega$  potremo ritenere che

$$(33) \quad \omega = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{\varrho} - \arccos \frac{\varrho}{a}$$

sia l'equazione polare della curva domandata. Essendo poi

$$\arccos \frac{\varrho}{a} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varrho}{a},$$

facendo compiere una rotazione di ampiezza  $\pi/2$  all'asse polare si può surrogare la (33) con la seguente

$$(33') \quad \omega = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{\varrho} - \arcsin \frac{\varrho}{a}.$$

R. Cotes che per primo considerò la curva ora determinata la chiamò <sup>1)</sup> *complicata tractrix*; il Giard <sup>2)</sup> ed il Neuberger <sup>3)</sup> per esprimerne la connessione di essa con le coordinate polari la chiamarono *tractrix polare*; O. Schömilch diede la preferenza al nome di *tractrix del cerchio* <sup>4)</sup>, benchè esso spetti alla tractrix a base circolare studiata nel n. 256.

<sup>1)</sup> *Harmonia mensurarum* (Cantabridgiae, 1722), p. 84.

<sup>2)</sup> *Courbe dont la tangente polaire est constante* (Nouv. Ann., 2<sup>a</sup> Serie, T. I, 1862).

<sup>3)</sup> Nouv. Corr. math., T. VI, 1880, p. 409-410.

<sup>4)</sup> *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, I Th. (5. Aufl., 1904), p. 124. Il BROCARD (*Notes etc.*, p. 276) usa il nome equivalente di *tractrix circulaire*.

Fra la *complicata tractrix* e due curve a noi note sussistono relazioni notevoli rilevate da Cotes <sup>1)</sup> e Neuberger <sup>2)</sup>, colla dimostrazione delle quali chiuderemo questo Capitolo.

a) Si esegua sulla curva (33) la trasformazione per raggi vettori reciproci determinata dalle formole:  $\omega_1 = \omega$ ,  $\varrho_1 = a^2/\varrho$  e si otterrà quella rappresentata dall'equazione

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\varrho_1^2 - a^2}}{a} - \arccos \frac{a}{\varrho_1}.$$

Ricordando l'equazione (25) p. 127 si conclude: *Se si prende per centro di una trasformazione per raggi vettori reciproci il centro di un circolo, ogni evolvente di questo mutasi in una complicata tractrix.*

b) Si consideri la spirale iperbolica  $\varrho\omega = a$ . Dal polo  $O$  si abbassi la perpendicolare sulla tangente nel punto  $M(\varrho, \omega)$ ; ne sia  $T(\varrho_1, \omega_1)$  il piede. Detto  $\mu$  l'angolo  $OMT$  si avrà:

$$\omega_1 - \omega = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \varrho_1 = \varrho \operatorname{sen} \mu$$

e siccome

$$\operatorname{sen} \mu = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \quad \cos \mu = -\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}},$$

così

$$\operatorname{sen}(\omega_1 - \omega) = \cos \mu = -\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \quad \varrho_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

ossia

$$\omega_1 - \omega = -\arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \quad \omega = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho_1^2}}{\varrho_1}$$

donde eliminando  $\omega$

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho_1^2}}{\varrho_1} - \arcsin \frac{\varrho_1}{a}.$$

In virtù della (33') questa equazione dice: *la podaria di una spirale iperbolica rispetto al polo è una complicata tractrix* <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> *Harmonia mensurarum* (Cantabridgiae, 1722), p. 84.

<sup>2)</sup> Nouv. Corr. math., T. VI, 1880, p. 409-410.

<sup>3)</sup> Per altre proprietà v. F. BALITRAND, *Sur la spirale tractrix et sur une courbe associée* (Nouv. Ann. de math., IV Ser., T. XV, 1915).

CAPITOLO XXII

Le Catenarie.

259. Nella seconda e nella quarta delle *Giornate* in cui è divisa la celebre opera di Galileo *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (la cui prefazione è datata 6 marzo 1638) è osservato<sup>1)</sup> che una fune o catena omogenea pesante sospesa coi due estremi a due punti posti alla medesima altezza si dispone secondo una curva avente la forma di una parabola. Che questa curva non fosse una parabola venne messo in chiaro con calcoli ed esperienze da Joachim Jungius nel 1669 col noto lavoro intitolato *Geometria empyrica*; restava però così sempre da decidere quale fosse la curva secondo cui disponevasi la fune; la ricerca di essa venne pubblicamente proposta nel maggio 1690 da Giacomo Bernoulli col mezzo degli *Acta Eruditorum*<sup>2)</sup>. Tre geometri di primo ordine risolverono quasi contemporaneamente l'interessante questione, cioè Huygens<sup>3)</sup>, Leibniz<sup>4)</sup> e Giovanni Bernoulli<sup>5)</sup>; al nobile certame presero parte anche il propositore della questione<sup>6)</sup> e l'Hermann<sup>7)</sup>; Davide Gregory<sup>8)</sup> si occupò poi per primo di com-

<sup>1)</sup> *Opere di Galileo Galilei*. T. VIII (Firenze, 1898).

<sup>2)</sup> V. anche *Jac. Bernoulli Opera*. T. I. p. 246.

<sup>3)</sup> *Acta erud.* 1691 (articolo riprodotto in *Leibniz ed. Gerhardt*. T. V. p. 248). Cfr. una lettera di HUYGENS a LEIBNIZ del 4 settembre 1691 (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. II, p. 102) e l'articolo di D. J. KORTEVEG. *La solution de Christiaan Huygens du problème de la chaînette* (Bibl. math., 3<sup>a</sup> Serie. T. I).

<sup>4)</sup> *Acta erud.*, 1691, 1692, 1699; *Journal des Savants*, 1692; *Giornale dei Letterati*, 1692; *Leibniz ed. Gerhardt*, T. V. p. 243, 255, 258, 263 e 366.

<sup>5)</sup> *Acta erud.*, 1691; inoltre *Joh. Bernoulli Opera*, T. I. p. 48 e *Leibniz ed. Gerhardt*, T. V. p. 248. Veggansi anche la XXVI e la XXVII delle *Lectiones mathematicae* (*Joh. Bernoulli Opera*, T. III, p. 491); le tre lezioni successive generalizzano il problema trattando ai casi in cui la fune non è omogenea.

<sup>6)</sup> V. l'ultima parte dello *Specimen alterum calculum differentiali* (*Acta erud.* Junii 1691; *Jac. Bernoulli Opera*, p. 449-453).

<sup>7)</sup> *Phoronomia*, Lib. I, Cap. III, Append. v 5 (Amstelod 1716); alcuni errori ivi commessi vennero corretti da GIOVANNI BERNOULLI nell'articolo *Solutio problematis catenarii generaliter concepti* (*Opera*, T. IV, p. 234-241).

<sup>8)</sup> *The properties of the Catenarian, or curve line formed by a heavy and*

porre una trattazione metodica delle proprietà della curva domandata.

Alcune semplici considerazioni meccaniche<sup>1)</sup> provano che la curva funicolare o catenaria<sup>2)</sup> è caratterizzata geometricamente dalla seguente proprietà: un suo arco qualunque contato a partire dal punto più basso è proporzionale alla tangente trigonometrica dell'angolo fatto con un'orizzontale dalla tangente nell'estremo di quell'arco. Emerge da ciò che l'equazione differenziale della curva è:

$$(1) \quad s = c \frac{dy}{dx}, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} dx = \dots$$

c essendo una costante. Eliminando  $dy$  mediante la nota relazione  $dx^2 + dy^2 = ds^2$  si ottiene

$$(2) \quad dx = c \frac{ds}{\sqrt{s^2 + c^2}}$$

onde integrando

$$\frac{x}{c} = \log \frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}$$

ovvero

$$e^{\frac{x}{c}} = \frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}$$

Se ne trae

$$e^{-\frac{x}{c}} = \frac{-s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}$$

onde

$$(3) \quad e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2\sqrt{s^2 + c^2}}{c}, \quad e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} = \frac{2s}{c}$$

D'altronde le (1) (2) danno

$$dy = \frac{s ds}{\sqrt{s^2 + c^2}}$$

*fleible chain, hanging freely from two point of suspension* (Phil. Trans., n. 231, 1697). Cfr. anche *L'Answer to the animadversions concerning the Catenary* (Id., n. 259, 1699) provocata dall'anonima *Animadversio ad Davidis Gregorii schediasma de catenarii* (*Acta Erud.*, Febr. 1699).

<sup>1)</sup> V. per es. SCHELL, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, T. II (Leipzig 1880), p. 94-95.

<sup>2)</sup> Nome suggerito da HUYGENS nella lettera a LEIBNIZ del 18 novembre 1690 (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. II, p. 56).

*Handwritten notes:*  
 $1+y'^2 = c^2 \frac{ds^2}{dx^2}$   
 $e^{\frac{x}{c}} = \frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}$   
 $\log \frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c} = \frac{x}{c}$   
 $\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c} = e^{\frac{x}{c}}$   
 $\sqrt{s^2 + c^2} = c(e^{\frac{x}{c}} - \frac{s}{c})$   
 $s^2 + c^2 = c^2(e^{\frac{x}{c}} - \frac{s}{c})^2$   
 $s^2 + c^2 = c^2(e^{\frac{x}{c}} - \frac{s}{c})^2$   
 $s^2 + c^2 = c^2(e^{\frac{x}{c}} - \frac{s}{c})^2$

quindi, integrando,

$$y = \sqrt{s^2 + c^2}$$

e per la (3, 1<sup>a</sup>)

$$(4) \quad y = \frac{c}{2} \left[ e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right].$$

Questa è l'equazione cercata della catenaria. Usando funzioni iperboliche <sup>1)</sup> si può anche scriverla come segue:

$$(4') \quad y = c \cosh x/c.$$

Effettuando la trasformazione omografica immaginaria rappresentata dall'equazioni  $x = i\xi$ ,  $y = i\eta$  si passa dalla curva rappresentata dall'equazione (4) o (4') alla seguente

$$\eta = c \cos x/c;$$

perciò la catenaria può considerarsi come una trasformazione omografica della sinusoidale. Ciò abilita a dedurre da proposizioni dimostrate nel n. 245 le seguenti: i punti di contatto delle tangenti che si possono condurre ad una catenaria da un punto qualunque del suo piano appartengono ad una curva del quart'ordine di cui quel punto è doppio; onde qualunque catenaria è una curva panalgebraica e fa parte di un sistema con le caratteristiche 2 e 2.

Notiamo ora che le equazioni (1) e (3, II) danno:

$$(5) \quad s = c \sinh x/c$$

$$(6) \quad dy/dx = \sinh x/c;$$

detta poi  $A$  l'area compresa fra gli assi coordinati, un arco di curva ed un'ordinata, si trova

$$(7) \quad A = \int_0^x y dx = c^2 \sinh^2 x/c = cs;$$

e se si chiama  $R$  il raggio di curvatura ed  $N$  la lunghezza della normale si ottiene

$$(8) \quad R = N = c \cosh^2 x/c;$$

<sup>1)</sup> LAISANT, *Essai sur les fonctions hyperboliques* (Paris, 1874), p. 49; GÜNTHER, *Die Lehre der gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen* (Halle a. S. 1881), p. 249.

eliminando poi  $x$  fra le (5) (8) si ottiene

$$(9) \quad R = s^2/c + c$$

che è l'equazione intrinseca della catenaria. Le formole trovate esprimono simbolicamente delle proprietà della catenaria che si possono enunciare a parole come segue: 1° Nella catenaria l'area compresa fra la verticale passante pel punto più basso (vertice della curva), una sua parallela, l'asse delle ascisse e un arco della curva è proporzionale a quest'arco <sup>1)</sup>. 2° Nella catenaria il raggio di curvatura è eguale alla normale. 3° Se una catenaria ruzzola sopra una retta, il luogo dei centri di curvatura di essa nei successivi punti di contatto è una parabola <sup>2)</sup>. Da ciò si trae una semplicissima costruzione del centro di curvatura.

Le stesse formole guidano facilmente ad altre conseguenze. Chiamiamo  $V$  il vertice,  $A_1(x_1, y_1)$  e  $A_2(x_2, y_2)$  due punti della catenaria in cui le tangenti siano fra loro perpendicolari. In forza della (6) sarà

$$(10) \quad \sinh \frac{x_1}{c} \sinh \frac{x_2}{c} + 1 = 0$$

o se si vuole

$$(11) \quad \frac{1}{\cosh^2 x_1/c} + \frac{1}{\cosh^2 x_2/c} = 1;$$

detti quindi  $s_1$  e  $s_2$  gli archi  $VA_1$  e  $VA_2$ , e  $R_1$  e  $R_2$  i raggi di curvatura in  $A_1$  e  $A_2$ , applicando le (5) (8) si trova:

$$VA_1 \cdot VA_2 = -c^2, \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{c}.$$

Dunque: Se un angolo retto  $A_1AA_2$  involupa una catenaria è costante il prodotto delle lunghezze degli archi compresi tra il vertice della curva ed i punti di contatto, ed è pure costante la somma delle curvature della catenaria in questi punti <sup>3)</sup>.

Detti  $s_1$  l'arco e  $R_1$  il raggio di curvatura dell'evolvente della

<sup>1)</sup> Per una dimostrazione geometrica di questo teorema ed altri analoghi si ricorre a WASTEELS, *Aires et volumes relatives à la chaînette* (Mathesis, 2<sup>a</sup> Serie, T. VI, 1896).

<sup>2)</sup> MANNHEIM, *Recherches géométriques relatives au lieu des positions successives des centres de courbure d'une courbe qui roule sur une droite* (G. di Liouville, 2<sup>a</sup> Serie, T. IV, 1859, p. 103).

<sup>3)</sup> Veggansi due note una di C. RABUT, l'altra firmata col pseudonimo R.-CH. WEITZ, nel T. II dell'*Intermédiaire*, p. 115 e 358.

catenaria, sussisteranno le relazioni  $s_1 = R$  e  $R_1 = R \, dR/ds$ . Eliminando  $R$  e  $s$  fra queste e la (9) si ottiene

$$(12) \quad R_1 = 2s_1 \sqrt{s_1/c - 1};$$

è l'equazione intrinseca dell'evoluta della catenaria.

Ricordiamo finalmente che (p. 217) l'evolvente di una catenaria è una *trattrice*.

Le relazioni stabilite guidano con pari facilità a trovare l'equazione cartesiana dell'evoluta stessa; diamo soltanto il risultato di questo calcolo:

$$(12') \quad x = \frac{y \sqrt{y^2 - 4c^2}}{4c} + c \log \frac{y - \sqrt{y^2 - 4c^2}}{2c}$$

Il problema della catenaria suggerì a Giacomo Bernoulli lo studio di altre curve che si presentano in natura ed anzitutto quello della curva di profilo della forma secondo cui si presenta una vela gonfiata dal vento quando si prescinde dalla gravità. Egli riuscì a rappresentare la curva cercata (detta *velaria*) mediante una equazione differenziale; non riuscendo ad integrarla si rivolse per aiuto al fratello Giovanni, chiedendogli almeno una costruzione per punti della curva; più tardi arrivò a porre quell'equazione differenziale sotto la forma semplicissima  $ds \cdot d^2x = dy^3$ , che portò pure a conoscenza del fratello. E questi, non soltanto scoprì un procedimento per stabilire quella equazione differenziale, ma giunse a concludere che « la courbe de la voile est la même que la courbe de la chaîne »; la *velaria* è dunque identica alla *catenaria* <sup>1)</sup>.

Aggiungiamo che fu costruito uno strumento per delineare una catenaria <sup>2)</sup> e che questa stessa curva si ottiene risolvendo il seguente problema proposto da Eulero nel 1744: « Dati in un piano due punti, condurre per essi una curva tale che rotando attorno ad un asse posto in quel piano generi la più piccola superficie » <sup>3)</sup>.

**260.** Le equazioni, intrinseca e cartesiana, della catenaria hanno portato a concepire delle curve più generali. La prima conduce alle curve aventi per equazione intrinseca

<sup>1)</sup> *Journal des Savants* del 28 aprile 1692 (*Joh. Bernoulli* Opera, T. I, pagine 59-61); cfr. la XLVIII delle *Lectiones mathematicae*, Opera, T. I, pagine 510-515; inoltre *Jac. Bernoulli* Opera, p. 481-490 e 639-663.

<sup>2)</sup> R. SCHIMMACK, *Ein kinematisches Princip und seine Anwendung zu einem Katenograph* (*Zeitschr. Math. Phys.*, T. LII, 1905), lavoro ove sono indicati dei procedimenti per tracciare altre curve (p. e. le linee di RIBAUCOUR).

<sup>3)</sup> KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung* (Braunschweig 1900), pag. 25.

$$(13) \quad cR = s^2 + a^2, \quad R = a + s^2/b;$$

sono risp. le *alisoidi* <sup>1)</sup> e le *pseudocatenarie* di E. Cesàro <sup>2)</sup>, mentre la (4) o (4') conduce a considerare le curve di equazione cartesiana

$$(14) \quad y = r \frac{c}{2} \left[ e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right] \quad \text{ossia} \quad y = r c \cosh \frac{x}{c},$$

ove  $r$  è un numero qualunque dato; sono le « linee a volta » (*Gewölb-linien*) di O. Schlömilch <sup>3)</sup>. Dalle (14) si trae:

$$\frac{dy}{dx} = r \sinh \frac{x}{c}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r}{c} \cosh \frac{x}{c},$$

perciò le curve in questione sono esenti da flessi. Poi

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + r^2 \sinh^2 \frac{x}{c}}$$

onde

$$R = \frac{c}{r} \frac{(1 + r^2 \sinh^2 x/c)^{3/2}}{\cosh x/c}.$$

Col mezzo di questa formola noi possiamo trovare i valori di  $x$  che fanno prendere ad  $R$  i suoi valori massimi o minimi; basta per ciò eguagliare a 0 il valore di  $dR/dx$ . Esclusa la soluzione che si ottiene ponendo  $\sinh x/c = 0$ , resta l'equazione

$$2 r^2 \sinh^2 \frac{x}{c} = 1 - 3 r^2.$$

Affinchè questa abbia radici reali dev'essere  $r < \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Soddi-

sfatta questa condizione, si hanno due punti simmetrici rispetto a  $Oy$  in cui la curva corrispondente presenta la curvatura massima; questi punti sembrano quasi nasi della curva; donde il nome di *catenarie a due nasi* che ricevette la curva da coloro che ne avvertirono l'esistenza e si servirono di essa in questioni di matematica applicata <sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> *Nouv. Ann. de math.*, III Ser., T. V, 1886, p. 75.

<sup>2)</sup> *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896), p. 17.

<sup>3)</sup> *Uebungsbuch zum Studium der höhere Analysis*, I Th. (5. Aufl., Leipzig 1904), p. 116.

<sup>4)</sup> T. ALEXANDER e A. W. THOMSON, *Two-Nased Catenaries and their application to the design of segmental arches* (*Trans. R. Irish Acad.*, Volume XXIX, Part 3, 1888).

Le linee a volta sono curve particolari integrali dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{y}{c^2},$$

il cui integrale generale è

$$(15) \quad y = p e^{\frac{x}{c}} + q e^{-\frac{x}{c}},$$

$p$  e  $q$  essendo costanti arbitrarie. Le curve rappresentate dalla (15) trovano applicazioni pratiche e vennero chiamate da Heinzerling <sup>1)</sup> *clinoidi* e da lui distinte in *catalinoidi* ed *anaclinoidi*; si trovano fra esse — oltre alla logaritmica — le curve

$$(16) \quad y = \frac{k}{2} \left[ e^{\frac{x}{c}} \pm e^{-\frac{x}{c}} \right],$$

che vennero chiamate <sup>2)</sup> risp. *menoclinoide* e *trepsclinoide*; la prima è una linea a volta.

**261.** Assomiglia al problema risolto dalla catenaria quello che consiste nella ricerca della forma assunta da una catena pesante perfettamente flessibile il cui spessore varia proporzionalmente alla tensione; siffatta catena offre evidentemente in tutti i suoi punti la medesima probabilità di rottura; la forma da essa assunta chiamasi seguendo Davies Gilbert <sup>3)</sup> *catenaria di eguale resistenza*; questa curva è rappresentata dall'equazione

$$(17) \quad e^{\frac{y}{a}} \cos \frac{x}{a} = 1;$$

lo ha dimostrato il Coriolis <sup>4)</sup>.

La curva passa per l'origine e tocca ivi l'asse delle  $x$ . Grazie

<sup>1)</sup> Zeitschrift für Bauwesen, 1869 e 1872.

<sup>2)</sup> G. EMERY, Sulla condizione di scambievolezza e sui casi d'identità fra curve rappresentanti distribuzione continua di forze parallele e curve funcolari corrispondenti, con particolare disquisizione sulle clinoidi (Atti R. Accad. Torino, T. 22, anno 1897).

<sup>3)</sup> Philos. Trans., London 1826, Part III, p. 202.

<sup>4)</sup> Note sur la chaînette d'égale résistance (G. di Liouville, T. I, 1836); cfr. SCHELL, op. cit., T. II, p. 102. Sei anni prima di CORIOLIS, considerazioni di altro genere avevano guidato il GUDERMANN (v. §§ 82-88 della citata memoria) alla stessa curva, a cui egli diede il nome di *longitudinale*. ALLEGRET ha poi osservato (Ann. Ec. Norm. Sup., II Ser., T. II, 1873, p. 157) che LEGENDRE la incontrò fra le curve il cui arco è esprimibile per logaritmi (Traité des fonctions elliptiques, T. I, p. 40).

alla periodicità della funzione *cos* essa consta di infinite parti fra loro congruenti, la prima delle quali si ottiene facendo variare  $x$  fra 0 e  $2\pi$ ; la curva è simmetrica rispetto alla retta  $x = 2k\pi a$  ( $k$  intero). Detto  $\tau$  l'angolo della tangente con  $Ox$ , dalla (17) deducesi

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{d y}{d x} = \operatorname{tg} \frac{x}{a}$$

epperò

$$(18) \quad \tau = \frac{x}{a};$$

quindi tutti i punti di ascisse  $x = k\pi a$  sono di culminazione. Si ha ancora

$$\frac{d s}{d x} = \frac{1}{\cos x/a},$$

onde, computando gli archi dall'origine delle coordinate,

$$(19) \quad s = a \log \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2a} \right].$$

Inoltre si trova come espressione del raggio di curvatura:

$$(20) \quad R = \frac{a}{\cos x/a};$$

combinando questa con la (18) si ottiene  $R \cos \tau = a$ , che dice: *nella catenaria di eguale resistenza è costante la proiezione del raggio di curvatura sulla normale nella origine*; donde un metodo per costruire il centro di curvatura.

Ora la (19) dà:

$$e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} = \frac{2}{\cos x/a},$$

quindi per la (20)

$$(21) \quad R = \frac{a}{2} \left[ e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right] <sup>1)</sup>$$

o, se meglio piace,

$$(21') \quad R = a \cosh s/a.$$

<sup>1)</sup> G. M. MINCHIN, Treatise on Statics (Oxford 1877).

Questa è l'equazione intrinseca della catenaria di eguale resistenza; ne è evidente l'analogia con l'equazione cartesiana della catenaria ordinaria; si deduce da essa che: *se una catenaria di eguale resistenza ruozzola sopra di una retta, il luogo dei centri di curvatura nei successivi punti di contatto è un'ordinaria catenaria.*

Il semplice esame dell'equazione (21) conduce a considerare le curve più generali rappresentate dall'equazione

$$(22) \quad R = \frac{a}{2k} \left[ e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right]$$

ove  $k$  è un intero arbitrario <sup>1)</sup>. Esse godono di proprietà analoghe alla catenaria di egual resistenza. Per mostrarlo indicando con  $\omega$  l'angolo della tangente con una retta fissa avremo  $R = ds/d\omega$ , onde posto

$$s = f(\omega) \text{ verrà } R = f'(\omega)$$

e la (22) darà

$$f'(\omega) = \frac{a}{2k} \left[ e^{\frac{f}{a}} + e^{-\frac{f}{a}} \right]$$

onde

$$\frac{\omega}{2k} = \int \frac{df/a}{e^{f/a} + e^{-f/a}}$$

Per eseguire questa quadratura porremo  $f/a = ix$  ed otterremo

$$\frac{\omega}{k} = i \int \frac{dx}{\cos x} = i \log \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right]$$

onde

$$\operatorname{sen} \frac{\omega}{k} = \frac{e^{2f/a} - 1}{e^{2f/a} + 1}$$

da cui  $f(\omega)$  cioè

$$s = a \log \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2k} \right]$$

Per conseguenza

$$R = \frac{a}{k} \frac{1}{\cos \omega/k}$$

<sup>1)</sup> CIFARELLI, *Sopra una classe di curve intrinsecamente analoghe alla catenaria di eguale resistenza* (G. di Matematiche, T. XXXVI, 1898).

relazioni che comprendono le (19) e (20) come casi speciali. Le coordinate cartesiane si trovano espresse come segue in funzione di  $\omega$ :

$$x = \frac{a}{k} \int \frac{\cos \omega \cdot d\omega}{\cos \omega/k}, \quad y = \frac{a}{k} \int \frac{\operatorname{sen} \omega \cdot d\omega}{\cos \omega/k},$$

e questi integrali si potranno esprimere in termini finiti quando  $k$  sia razionale.

CAPITOLO XXIII

**La Curva elastica piana (Lintearia), l'Isocrona paracentrica e la Curva meridiana del solido di minima resistenza.**

**262.** Un'asta rettilinea uniforme ed elastica termina con due segmenti rettilinei non elastici i quali vengono collocati sopra una stessa orizzontale e sui quali vengono esercitate forze determinate; l'asta prende in conseguenza una certa forma d'equilibrio che chiamasi *curva elastica*. Anche questa curva venne a torto assimilata da Galileo ad una parabola; ma Giacomo Bernoulli<sup>1)</sup> dimostrò falsa siffatta identificazione e giunse a caratterizzare geometricamente la curva cercata; egli di più scoperse essere dessa il profilo secondo cui si conforma una tela perfettamente flessibile, fissata orizzontalmente pei due estremi e caricata di un fluido pesante: donde il nome di *lintearia* che venne e viene ancora da taluno dato alla curva elastica. In seguito anche Giovanni Bernoulli si occupò della curva elastica<sup>2)</sup> e suo nipote Daniele rilevò che questa curva soddisfa alla condizione di rendere minimo  $\int ds/R^2$ , essendo al solito  $s$  l'arco e  $R$  il raggio di curvatura; questa osservazione spinse Eulero a « cercare fra le curve che passano per due dati punti e toccano ivi due date rette quelle che rendono minimo  $\int ds/R^2$ »: questo problema trovasi completamente risoluto nella celebre opera intitolata *Methodus inveniendi lineas curvas maxima minimae proprietate gaudentes* (Lausannae et Geneve, 1744), la cui appendice I è consacrata alla

<sup>1)</sup> V. l'importante memoria intitolata: *Curvatura laminae elasticae. Ejus identitatem cum curvatura linteae a pondere inclusi fluidi expanso* (Acta Erud. Jun., 1694; Jac. Bernoulli Opera, p. 639); inoltre le *Explicationes, annotationes et additiones* (Acta Erud., Dic. 1695; Opera, p. 663); finalmente il lavoro *Veritable hypothèse de la résistance des solides avec la démonstration de la courbure des corps qui font les ressorts* (Mem. de Paris, NDCCV; Opera, pag. 976).

<sup>2)</sup> *Solutio problematis curvaturae laminae elasticae a pondere appresso curvatae* (Joh. Bernoulli Opera, T. IV, p. 242).

teoria ed alla classificazione, in nove tipi, delle curve elastiche<sup>1)</sup>; quel celebre geometra ha poi osservato che fra tutte le curve piane aventi il medesimo perimetro e comprendenti la medesima area l'elastica è quella che ruotando attorno ad un asse situato nel suo piano genera il volume massimo o minimo<sup>2)</sup>.

Mediante considerazioni meccaniche che sono estranee al nostro tema<sup>3)</sup> si dimostra che « nella curva elastica la curvatura è proporzionale alla differenza fra una costante e l'ascissa »; la sua equazione differenziale è dunque del seguente tipo:

$$(1) \quad c^2 \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 \right\}^{3/2}} = a - x.$$

Questa è suscettibile di una prima integrazione, mediante la quale si ottiene

$$2 c^2 \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2}} = 2 a x - x^2,$$

supponendo che per  $x = 0$  sia  $\frac{dy}{dx} = 0$ . Scrivendo questa come segue

$$(2) \quad dy = \frac{2 a x - x^2}{\sqrt{4 c^4 - (2 a x - x^2)^2}} dx,$$

si vede che il processo d'integrazione si arresta se non si adoperano integrali ellittici: fatto questo che venne notato tanto da Giacomo Bernoulli quanto dal Maclaurin<sup>4)</sup>. Ma intanto le (1) (2) conducono

<sup>1)</sup> V. anche *De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione*  $y = \int \frac{x x dx}{\sqrt{1-x}}$  contentae (Acta Pet., p. 1782; Opera omnia, I Ser., T. XXI, pag. 91).

<sup>2)</sup> Cfr. LACROIX, *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, T. II (Paris 1798), p. 713-714.

<sup>3)</sup> V. per es. POISSON, *Traité de mécanique*, T. I (2<sup>a</sup> ed., Paris 1833), pag. 598.

<sup>4)</sup> *Treatise on Fluxions* (Edinburgh 1742), n. 927. Si veda anche HALPHEN, *Sur une courbe elastique* (Journ. Ecole Polyt. 54<sup>e</sup> Cah. 1884 e *Traité des fonctions elliptiques*, T. II, 1888).

a qualche conclusione: infatti la (2) mostra che l'equazione della tangente nel punto  $(x, y)$  ha per equazione

$$(3) \quad \frac{Y - y}{X - x} = \frac{2ax - x^2}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}},$$

donde emerge che i punti di contatto delle tangenti condotte da un punto ad una curva elastica appartengono ad una curva del sesto ordine avente quel punto per punto doppio; onde ogni curva elastica è una curva panalgebrica, facente parte di un sistema di caratteristiche 2 e 4; le sue tangenti che formano con  $Ox$  un dato angolo  $\alpha$  hanno i loro punti di contatto distribuiti sulla cubica di equazione

$$y^3 = a^2(y - x \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Le (1) (2) danno poi

$$(4) \quad s = \int \frac{2c^2 dx}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}}, \quad R = \frac{c^2}{a - x},$$

donde, eliminando  $x$ ,

$$(5) \quad s = \int \frac{2c^4 dR}{\sqrt{4c^4 \cdot R^4 - (a^2 R^2 - c^4)^2}},$$

che è l'equazione intrinseca della curva. Nel caso speciale  $a = 0$  questa diviene

$$s = 2 \int \frac{dR}{\sqrt{\left[\frac{R}{(c/\sqrt{2})}\right]^4 - 1}},$$

epperò (v. p. 162) rappresenta una linea di Ribaucour. Un altro caso particolare notevole, si ha supponendo  $a$  e  $c$  legate dalla relazione  $a^4 = 4c^4$ ; la (2) diviene allora

$$dy = \frac{2ax - x^2}{(x - a)\sqrt{a^2 + 2ax - x^2}} dx$$

onde  $y$  può esprimersi mediante funzioni elementari di  $x$ . Nel caso generale la (2) dà  $y$  mediante funzioni ellittiche; i risultati assumono

aspetti differenti a norma della grandezza relativa di  $a$  e  $c$ ; in corrispondenza si hanno altrettante forme diverse della curva elastica<sup>1)</sup>.

**263.** Un'altra antica questione conducente a funzioni ellittiche venne proposta da Leibniz nel 1687: è la ricerca di una curva lungo la quale un punto pesante cadente da una data altezza si avvicina od allontana da un punto fisso in modo che le sue distanze da questo siano proporzionali al tempo. Tale curva venne da Leibniz stesso chiamata *isocrona paracentrica* (da *παρά* = vicino, *κεντρον* = centro)<sup>2)</sup> e venne determinata da lui<sup>3)</sup> e dai due Bernoulli Giacomo<sup>4)</sup> e Giovanni<sup>5)</sup>: Geometricamente è definita dall'equazione differenziale

$$(5) \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = a \frac{dy}{\sqrt{a^2 y - y^3}},$$

donde è facile dedurre che essa fa parte di un sistema con le caratteristiche 2 e 3. Indicando con  $dt$  il valore comune dei due membri della (5), scegliendo convenientemente le costanti d'integrazione e ricorrendo alla nota funzione ellittica di Weierstrass, si ottiene

$$(6) \quad x = \frac{t^2}{4}, \quad y = p \left[ \frac{t}{a} \right],$$

e questa è la rappresentazione parametrica della curva<sup>6)</sup>.

Ad un'altra curva condusse la soluzione del più antico problema sul calcolo delle variazioni. Esso enunciarsi come segue: *Trovare la curva piana passante per due punti dati e che rotando intorno ad un asse posto nel suo piano generi il solido che, muovendosi in un liquido nella direzione del proprio asse, incontra la più piccola resistenza.* Newton asserì nei *Principia* (Lib. II, Sect. VII, Prop. 34) che la equazione differenziale della curva che risolve tale questione è la seguente:

<sup>1)</sup> SCHELL, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, T. II (2ª ed., Leipzig 1880), p. 119-162; GREENHILL, *Applications of elliptic functions* (London 1892), p. 87-89.

<sup>2)</sup> Lettera di LEIBNIZ a HUYGENS del 1/11 ottobre 1693 (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. II, p. 164).

<sup>3)</sup> *Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica* (Acta erud., 1694; Leibniz ed. Gerhardt, T. V, p. 309).

<sup>4)</sup> Acta Erud. Juni e Sept. 1694 (*Jac. Bernoulli Opera*, T. I, p. 601-612).

<sup>5)</sup> Acta Erud. Octob. 1694 (*Joh. Bernoulli Opera*, T. I, p. 119-122).

<sup>6)</sup> *Lectiones mathematicae*, XXIV (Opera, T. III, p. 486).

<sup>7)</sup> Una minuta discussione, accompagnata da varie figure, trovasi nella nota di L. CRUJNS, *Paracentrische Isochronen* (Nieuw Arch. v. Wisk., II Ser., T. XIII, 1919).

$$(7) \quad y = a \frac{(1 + y'^2)^2}{y'^3};$$

si può verificarlo applicando il calcolo delle variazioni dopo di avere osservato che quella curva deve rendere minimo  $\int \frac{y \, dy^3}{dx^2 + dy^2}$ .

La (7) mostra che la curva in questione fa parte di un sistema con le caratteristiche 4 e 1. La stessa equazione conduce ad una rappresentazione analitica della curva. Essendo infatti  $y' = dy/dx$  si ha

$$dx = \frac{dy}{y'} \quad \text{onde integrando per parti} \quad x = \frac{y}{y'} + \int \frac{y \, dy'}{y'^2};$$

sostituendo a  $y$  il suo valore (7) si deduce:

$$x = a \frac{(1 + y'^2)^2}{y'^4} + a \int \frac{(1 + y'^2)^2}{y'^5} dy'$$

cioè

$$(8) \quad x = a \left[ \frac{3}{4 y'^4} + \frac{1}{y'^2} + \log y' \right] + c$$

e questa equazione assieme alla (7), dando  $x$  e  $y$  in funzione di  $y'$ , considerata come parametro, rappresenta la curva <sup>1)</sup>. Questa ha per cuspidi il punto corrispondente al valore  $\sqrt{3}$  di  $y'$ .

Dopo Newton, si occuparono del problema del solido di minima resistenza il Marchese de l'Hôpital <sup>2)</sup>, Giovanni Bernoulli <sup>3)</sup>, Silva-bella <sup>4)</sup> e Legendre <sup>5)</sup>, il quale ultimo osservò che della curva ottenuta sono curve asintotiche le due rappresentate dalle equazioni:

$$y^4 = \frac{64}{27} a x^3, \quad x - c = a \log \frac{y}{a} \quad ^6).$$

<sup>1)</sup> Cfr. LACROIX, op. cit., T. II, p. 698-700.

<sup>2)</sup> Acta Erud. Aug., 1699.

<sup>3)</sup> Id., Nov. 1699.

<sup>4)</sup> Du solide de moindre résistance (Mém. prés. par div. sav., T. III, Paris 1760).

<sup>5)</sup> Sur la manière de distinguer les maxima des minima dans le calcul des variations (Mém. de Paris, 1786), § VI.

<sup>6)</sup> Per ulteriori particolari si ricorra alle memorie di V. ARMANINI (Sulla superficie di minima resistenza, Annali di Matem., 3<sup>a</sup> Serie, T. IV, anno 1900) e A. R. FORSYTH (Newton's Problem of the solid of least resistance nel volume commemorativo Isaac Newton, 1642-1727, London 1927).

## CAPITOLO XXIV

### L'Erpolodia, in particolare la Spirale di Poincot.

**264.** Come è noto il Poincot, nella sua *Théorie nouvelle de la rotation des corps* <sup>1)</sup>, è riuscito a rappresentare il moto di un solido nello spazio mediante il ruzzolamento sopra un piano di un'ellissoide col centro fisso. Durante siffatto moto il punto di contatto descrive una curva sopra l'ellissoide ed una sul piano; ad entrambe diede il nome di *polodia* (via del polo da *πόλος* e *ὁδός*) la prima relativa, la seconda assoluta, aggiungendo che volendo designarle in un modo che ne ricordasse la forma si poteva chiamare *erpolodia* (da *ἔρπο* = serpeggiare) la curva piana, riservando il nome di *polodia* alla curva nello spazio. Questi nomi sono ancora generalmente in uso.

Se  $a, b, c$  sono i semiassi dell'ellissoide e  $h$  la distanza del suo centro dal piano considerato, e si pone:

$$\alpha^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2 c^2}{h^2}, \quad \beta^2 = c^2 + a^2 - \frac{c^2 a^2}{h^2}, \quad \gamma^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{h^2}$$

$$P = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad Q = \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 + \alpha^2 \beta^2, \quad R = \alpha^3 \beta^2 \gamma^2$$

$$\Delta = h^6 - P h^4 + Q h^2 - R;$$

se inoltre si indicano con  $\Delta'$  e  $\Delta''$  le derivate di  $\Delta$  rispetto a  $h^2$ , l'equazione differenziale dell'erpoloide si può scrivere

$$(1) \quad d\omega = \frac{d\rho}{i\rho} \frac{h\rho^2 + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\rho^6 + \Delta''\rho^4 + \Delta'\rho^2 + \Delta}}$$

o anche, ponendo  $\rho^2 = v$ ,

<sup>1)</sup> G. di Liouville, T. XVI, 1851.

$$(1') \quad d\omega = \frac{dv}{2iv} \frac{hv + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{v^3 + \Delta'v^2 + \Delta'v + \Delta}};$$

qui le variabili sono separate, ma per ottenere l'integrale si devono adoperare integrali ellittici <sup>1)</sup>. Vi è un caso però in cui l'integrazione può effettuarsi elementarmente, quando cioè  $h = b$ ; in tale ipotesi la (1) diviene

$$d\omega = b \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\beta^2 - b^2 - \rho^2}}.$$

Posto per brevità  $\sqrt{\beta^2 - b^2} = n^2$  e integrando si trova

$$\omega = \frac{b}{n} \log \frac{\rho}{n + \sqrt{n^2 - \rho^2}},$$

avendo supposto che per  $\rho = n$  risulti  $\omega = 0$ . Scrivendo questa nei due modi seguenti

$$e^{\frac{n\omega}{b}} = \frac{\rho}{n + \sqrt{n^2 - \rho^2}}, \quad e^{-\frac{n\omega}{b}} = \frac{\rho}{n - \sqrt{n^2 - \rho^2}}$$

si ottiene

$$\frac{n\omega}{e^{\frac{n\omega}{b}} + e^{-\frac{n\omega}{b}}} = \frac{2n}{\rho}$$

donde

$$(2) \quad \frac{\frac{n\omega}{e^{\frac{n\omega}{b}} + e^{-\frac{n\omega}{b}}}}{2} = n$$

ovvero

$$(2') \quad \rho \cosh(n\omega/b) = n.$$

Alla curva così rappresentata (che Poincot considerava come una doppia spirale) <sup>2)</sup> si dà il nome di *spirale di Poincot*.

<sup>1)</sup> Le singolarità dell'erpolodia — in particolare la dimostrazione dell'essere essa esente da flessi e cuspidi, contrariamente all'opinione del POINOT — vennero studiate da W. HESS (*Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariablen Ebene*, Diss. München, 1880) e poi da DE SPARRE (C. R., T. XCIX, 1884), MANNHEIM (Id., T. C, 1885), ST. GERMAIN (Ivi), FRANKE (Ivi) e RESAL (Journal de l'Ec. pol., LV cahier, 1885).

<sup>2)</sup> Mem. cit. pag. 301.

Osserviamo che essendo, in forza della (2'),

$$\frac{d\rho}{d\omega} = -\frac{n^2 \sinh(n\omega/b)}{b \cosh^2(n\omega/b)},$$

la sunnormale e la sottangente sono espresse risp. come segue

$$S_n = -\frac{\rho^2}{b} \sinh(n\omega/b), \quad S_t = -b : \sinh(n\omega/b)$$

onde non sussistono le relazioni  $S_n' = S_t = -\rho$  come era stato creduto <sup>1)</sup>. Un facile calcolo mostra che la proiezione ortogonale di una lossodromica sopra l'equatore della corrispondente sfera è una spirale di Poincot <sup>2)</sup>.

Eseguendo su una spirale di Poincot una opportuna trasformazione per raggi vettori reciproci avente per centro il polo, si ottiene una curva avente un'equazione del seguente tipo

$$\rho = b \cosh(\omega/a)$$

che venne incontrata da Giovanni Bernoulli in una questione di fisica matematica <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> A. CABREIRA, *Sur la géométrie des courbes transcendentes*, traduit du Portugais (Lisbonne, 1896), pag. 32-33.

<sup>2)</sup> H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig 1908), pag. 264; F. GOMES TEIXEIRA, *Obras citate*, T. V, pag. 354.

<sup>3)</sup> *De curva quam describit corpus inclusus in tubo circulante* (Joh. Bernoulli Opere, T. IV, pag. 248-252). Cfr. una lettera scritta dal BERNOULLI ad EULERO il 27 agosto 1742 ed inserita nel T. II (St. Pétersbourg, 1843, pag. 79) della *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème Siècle*.

CAPITOLO XXV

Altre Curve fisico-matematiche.

**265.** Più di un secolo fa fu determinata la curva piana su cui i raggi uscenti da un punto luminoso, dopo due riflessioni ritornano al punto di partenza <sup>1)</sup>.

Se fra due punti  $M_1, M_2$  di una curva piana si fa passare una corrente elettrica di intensità 1, essa esercita sopra un punto  $O$  del piano della curva, ove sia deposta l'unità di massa magnetica, una azione la cui direzione è normale al piano della corrente e la cui intensità è espressa da  $\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{\rho}$ ,  $\rho$  e  $\omega$  essendo le ordinarie coordinate polari aventi  $O$  per polo. Si cerchi ora fra le curve di data lunghezza  $l$  passanti per  $M_1, M_2$  quella a cui corrisponde un'azione sopra  $O$  massima o minima. Bisognerà per ciò rendere massimo o minimo l'integrale prima scritto; applicando il calcolo delle variazioni si perviene alla seguente equazione differenziale della curva domandata:

$$(1) \quad -\frac{k}{\rho^3} = \frac{\rho^2 \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} - 2 \left[ \frac{d\rho}{d\omega} \right]^2 - \rho^2}{\left[ \rho^2 + \left[ \frac{d\rho}{d\omega} \right]^2 \right]^{3/2}},$$

ove  $h$  è una costante. Ma, detto  $R$  il raggio di curvatura, il secondo membro vale  $-1/R$  onde si può scrivere

$$(2) \quad \rho^3 = kR,$$

dunque: la curva di azione elettromagnetica massima o minima sopra

<sup>1)</sup> VERNIER, *Solution d'un problème de géométrie, dependant des équations aux différences mêlées* (Ann. de Math., T. XIII, 1822-23).

un dato punto è tale che il raggio di curvatura in un suo punto qualunque è proporzionale al cubo del corrispondente raggio vettore uscente dal punto fisso. Emil Weyr, che ha stabilita questa elegante proposizione, ha anche integrato l'equazione (1) ottenendo come risultato

$$(3) \quad \omega = a + \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\frac{\rho^4}{b\rho - k} - 1}} \quad ^1);$$

il lettore potrà verificarlo applicando le formole, da noi già stabilite, che rappresentano una curva determinata da una relazione fra il raggio di curvatura ed il raggio vettore.

La curva così ottenuta può chiamarsi *curva elettromagnetica* di E. Weyr. Essa non ha nulla di comune con le *curve magnetiche* dell'Aoust, le quali, in coordinate bipolari, hanno la seguente rappresentazione analitica:

$$\int \frac{d\rho_1}{\cos^m \rho_1} + \int \frac{d\rho_2}{\cos^m \rho_2} = \text{cost.},$$

ove  $m$  è un numero dato <sup>2)</sup>.

**266.** In una speciale questione di ottica s'incontra <sup>3)</sup> la curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione

$$(4) \quad \text{sen}(\rho^2) \cdot \text{sen} 2\omega = \text{cost.}$$

Fra i vari istrumenti che vennero ideati per eseguire mecca-

<sup>1)</sup> Ueber die Curve der grössten und kleinsten electromagnetischen Wirkung (Prager Ber., 1869).

<sup>2)</sup> *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873), pag. 402-405. Nella stessa opera (pag. 405-407) sono considerate le *curve d'equilibrio*, caratterizzate dalla proprietà che un corpo, sotto l'impero di date forze, resti in equilibrio in un punto qualunque di una fra esse. Va ancora notato che il nome di *curva magnetica* è dato dal TAIT (*Éléments de la théorie des quaternions*, trad. Plarr, T. II, 1884, pag. 234) al luogo di un punto  $P$  tale che, se  $A_1$  e  $A_2$  sono punti fissi, si abbia  $\cos O A_1 P \pm \cos O A_2 P = \text{cost.}$ ; tale curva è algebrica, perchè, se si prende per asse delle  $x$  la retta  $A_1 A_2$  e per origine il punto medio del segmento  $A_1 A_2$ , si trova come equazione di essa:

$$\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} \pm \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} = \text{cost.};$$

v. anche HOLZMÜLLER, *Ingenieurmathematik*, T. II (Leipzig, 1898), p. 121. <sup>3)</sup> SPURGE, *On the curve of constant intensity of homogenous polarized light seen in a uniaxial crystal cut at right angles to the optic axes* (Trans. of the phil. Soc. of Cambridge, T. XV, 1884).

nicamente le quadrature, uno ve n'è che il Seeweg ha ideato e il Reitz ha perfezionato <sup>1)</sup>, e di cui H. Schubert ha studiata la teoria <sup>2)</sup>. In questa s'incontra come curva funicolare una nuova spirale rappresentata analiticamente mediante le due equazioni:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} lx &= \frac{\cos \varphi \left\{ \frac{3}{2} k \varphi \sqrt{\varphi} \sqrt{l^2 - \frac{3}{2} k \varphi} + \frac{1}{2} l^2 \sqrt{\frac{3}{2} k} \right\} + \sin \varphi \cdot \sqrt{\frac{3}{2} k} \cdot \varphi \left[ l^2 - \frac{3}{2} k \varphi \right]}{\sqrt{\varphi} \sqrt{l^2 - \frac{3}{2} k \varphi} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} k}} \\ ly &= \frac{\sin \varphi \left\{ \frac{3}{2} k \varphi \sqrt{\varphi} \sqrt{l^2 - \frac{3}{2} k \varphi} + \frac{1}{2} l^2 \sqrt{\frac{3}{2} k} \right\} + \cos \varphi \cdot \sqrt{\frac{3}{2} k} \cdot \varphi \left[ l^2 - \frac{3}{2} k \varphi \right]}{\sqrt{\varphi} \sqrt{l^2 - \frac{3}{2} k \varphi} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} k}} \end{aligned} \right.$$

ove  $l, k$  sono costanti e  $\varphi$  un parametro; lo Schubert ha notato che essa è suscettibile di una rappresentazione analitica più semplice in coordinate tangenziali; detti infatti  $\xi, \eta$  i segmenti che una retta qualunque tagli sopra gli assi coordinati, si trova:

$$\frac{l}{\xi} = \frac{\cos \varphi \cdot \sqrt{\frac{3}{2} k \varphi} + \sin \varphi \cdot \sqrt{l^2 - \frac{3}{2} k \varphi}}{\sqrt{\frac{3}{2} k \varphi}},$$

$$\frac{l}{\eta} = \frac{\sin \varphi \cdot \sqrt{\frac{3}{2} k \varphi} - \cos \varphi \cdot \sqrt{l^2 - \frac{3}{2} k \varphi}}{\sqrt{\frac{3}{2} k \varphi}}.$$

In questioni d'idrodinamica <sup>3)</sup> s'incontra la curva di equazione

$$y = \frac{4a}{\left( e^{\frac{x}{2b}} + e^{-\frac{x}{2b}} \right)^2} \quad \text{ossia} \quad y = \frac{a}{\cosh^2 \frac{x}{2b}},$$

la quale porta il nome di *onda solitaria*.

<sup>1)</sup> REITZ, *Mittheilung über seinen verbesserten Seewegintegrator* (Hamb. Mittheilungen, 1879).

<sup>2)</sup> *Construction der Fadencurve des verbesserten Seewegintegrator* (Ivi); W. VON DYCK, *Katalog mathem. Modelle etc.* (München 1892, pag. 224).

<sup>3)</sup> LAMB, *Hydrodynamics*, III ed. (Cambridge, 1906), pag. 400.

Il Galton ne' suoi studi sull'applicazione dell'analisi alla teoria dell'evoluzione considerò delle curve particolari <sup>1)</sup>; sono quelle rappresentate da equazioni dei seguenti tipi:

$$(6) \quad y = y_0 \left[ 1 + \frac{x}{a_1} \right]^{m_1} \left[ 1 - \frac{x}{a_2} \right]^{m_2}$$

$$(7) \quad y = y_0 \left[ 1 + \frac{x}{a} \right]^n \cdot e^{-\frac{x}{a}}$$

$$(8) \quad x = a \operatorname{tg} \theta, \quad y = y_0 \cos^{2m} \theta \cdot e^{n\theta}$$

$$(9) \quad x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt, \quad y = y_0 e^{-\frac{t^2}{2\epsilon^2}}.$$

Tutte le curve del primo tipo sono curve algebriche se i numeri  $m_1$  e  $m_2$  sono razionali essendo speciali curve paraboliche (Vol. I, p. 363); tutte le altre sono trascendenti; ogni curva della forma (9) venne detta dal Galton *Ogive*. L'importanza di esse dal punto di vista matematico non è tale da farci arrestare sopra di esse <sup>2)</sup>.

Le curve di frequenza del Pearson sono integrali di equazioni differenziali del tipo

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{x+a}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2} \quad ^3)$$

onde sono panalgebriche.

Sono legate a questioni biologiche le curve studiate da C. E. Wasteels nelle note *Over binomiale curven* e *Over verzamelcurven* <sup>4)</sup>.

Finalmente la curva

$$x = \frac{a}{4} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

s'incontra in questioni di capillarità <sup>5)</sup>.

<sup>1)</sup> Notizie minute, con una completa bibliografia dell'argomento, si troveranno nel recente lavoro di G. DUNCKER, *Die Methode der Variationsstatistik* (Leipzig 1899).

<sup>2)</sup> Altre curve fisico-matematiche sono indicate in ZORETTI, *Leçons sur les mathém. générales* (Paris 1914), pag. 325-7.

<sup>3)</sup> Cfr. AMOROSO e BOMPIANI, *Esercizi di geom. analitica e proiettiva* (Pavia 1917), pag. 613.

<sup>4)</sup> Handeling von het Vlam. natur-en geneeskundig congress, 1899.

<sup>5)</sup> BEERS, *Einleitung in die Theorie der Elasticitäts und Capillarität* (Leipzig 1869), pag. 121.

## LIBRO VII.

## CURVE DEDOTTE DA ALTRE.

## CAPITOLO I

## Il metodo del mutamento delle coordinate.

**267.** Per accrescere di qualche nuovo elemento il catalogo, già tanto ricco, delle curve particolari, un procedimento estremamente fecondo consiste nell'applicare a curve conosciute i metodi di trasformazione, che possono considerarsi come la caratteristica più spiccata ed importante della moderna geometria; i risultati che così si ottengono non hanno di regola notevole importanza onde non entreranno che eccezionalmente nella nostra esposizione, unicamente cioè quando o le trasformazioni adoperate possiedono prerogative utili<sup>1)</sup> o le curve a cui si giunge abbiano un'indiscutibile importanza. Si conoscono poi altre costruzioni, mediante le quali ad ogni punto o tangente di una curva viene associato un determinato punto od una determinata retta; applicandone una a tutti i punti di una curva  $\Gamma_0$  se ne ottiene una seconda  $\Gamma_1$ , generalmente differente da  $\Gamma_0$ , e la cui considerazione talvolta getta qualche luce sulla natura intima di  $\Gamma_0$ : esempi di siffatte deduzioni sono offerti dalle curve cissoidali (Vol. I, p. 54), dalle curve strofoidali (Id., p. 85)

<sup>1)</sup> Alludiamo qui ai casi in cui le trasformazioni usate servono a costruire tangenti, normali o raggi di curvatura delle nuove figure; così p. es. le due trasformazioni (quadratiche)

$$x' = x, \quad y' = \frac{py}{x}$$

$$x' = x, \quad y' = b + \frac{y(x-a)^2}{x},$$

le quali sono di facile costruzione, conducono a curve le cui tangenti possono costruirsi elegantemente (J. MASSAU, *Cours de mécanique de l'Un. de Gand*, III Ed., litogr. 1891), pag. 370 e 373.

e dalle curve conoidali (Id., p. 172)<sup>1)</sup>. Alla curva  $\Gamma_1$  si può applicare la stessa costruzione; si giunge così in generale a una terza curva  $\Gamma_2$  distinta da  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_0$ . Proseguendo in tal modo si ottiene la serie, illimitata o rientrante, di curve  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \dots$ . Non basta: si può inoltre cercare una curva  $\Gamma_{-1}$  tale che applicando ad essa quella costruzione si ottenga  $\Gamma_0$ ; poi una  $\Gamma_{-2}$  che conduca similmente a  $\Gamma_{-1}$ ; e così via; in conseguenza resta determinata una seconda serie di curve, illimitata o rientrante:  $\Gamma_0, \Gamma_{-1}, \Gamma_{-2}, \dots$ . Tutte le curve  $\Gamma_{\pm n}$  si diranno in generale *curve dedotte da  $\Gamma_0$* , *positive* quelle a indice positivo, *negative* le altre. Un esempio semplicissimo (di cui ci limitiamo a fare una menzione fugace) è offerto dal metodo che consiste nel far corrispondere ad ogni punto di una curva l'estremo della corrispondente sottangente o sunnormale polare. Per ogni costruzione, mediante cui da una curva  $\Gamma$  si ottengono delle curve derivate, si presenta la questione se la serie da queste costituita sia in generale illimitata o rientrante, e, quando sussista il secondo caso, come scegliere la curva  $\Gamma_0$  affinché una certa sua derivata  $\Gamma_{\pm n}$  coincida con la curva di partenza. Gran parte del presente Libro sarà dedicata a descrivere le più importanti conclusioni a cui giurarono le considerazioni del genere ora indicato<sup>2)</sup>. Ma prima è opportuno far cenno di un procedimento, di natura diversa da quelli testè indicati, il quale ha condotto alla scoperta di nuove curve ed il cui concetto fondamentale è dovuto a Varignon<sup>3)</sup> e si può presentare sotto numerosi aspetti.

**268.** Seguendo il geometra testè nominato consideriamo una curva arbitraria  $\Gamma$  (*courbe génératrice*), rappresentata in coordinate

<sup>1)</sup> Il più antico esempio di questo tipo di trasformazioni fu offerto da FERMAT (cfr. una nota dell'autore in *Bibl. mathem.*, III Ser., T. VI, 1905, pag. 343-6) il quale trasformò una curva  $\Gamma_0$  in altra  $\Gamma_1$  facendo corrispondere al punto  $P_0(x, y)$  della prima il punto  $P_1(x, s)$  della seconda,  $s$  essendo l'arco di  $\Gamma_0$  compreso fra un'origine fissa e il punto  $P_0$ .

<sup>2)</sup> Abbiamo escluso dal nostro studio l'Hessiana, la Steineriana, ecc. la cui considerazione appartiene alla teoria generale delle curve algebriche. Altrettanto facemmo, e per la stessa ragione, per la curva luogo dei centri delle coniche aventi con una data curva un contatto del quint'ordine; è la così detta *curva di aberrazione*; se la curva data è algebrica, algebrica ne sarà pure la curva di aberrazione e le sue caratteristiche vennero determinate da W. BOUWMANN nell'articolo *Die Plücker'sschen Zahlen der Abweichungscurve* (Math. Ann., T. XLIX, 1897). Va notato che il nome di curva d'aberrazione viene dato in astronomia alla traiettoria apparente di un punto fisso, osservato da un individuo moventesi con una legge determinata (SANTINI, *Elementi di astronomia*, T. II, pag. 132; G. SACCHI, *Sulla geometria analitica delle linee piane*, Pavia 1854, pag. 103).

<sup>3)</sup> V. l'estesa memoria intitolata *Nouvelle formation de spirales, beaucoup plus différentes entre elles de ce qu'on peut imaginer d'autres courbes quelconques à l'infini; avec les touchantes, les quadratures, les déroulements, et la longueur de quelques unes de ces spirales, qu'on donne seulement ici pour exemple de cette formation générale* (Mém. de Paris, année MDCCIV, Paris 1722).

cartesiane ortogonali dall'equazione

$$(1) \quad f(x, y) = 0,$$

ed un cerchio  $K$  di centro  $O$  e raggio (*cerche de révolution*). Sia  $PM$  (fig. 34) l'ordinata di un punto qualunque  $P$  di  $\Gamma$  e sia  $MP'$  un arco tale del cerchio di centro  $O$  e raggio  $OM$  che, dette  $A$  e  $L$

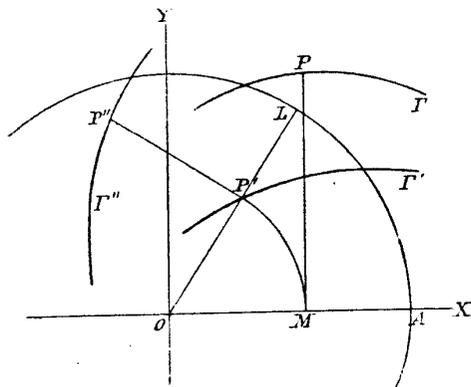


Fig. 34.

gli estremi dei raggi del cerchio di rivoluzione diretti ai punti  $M$  e  $P'$ , sussista la proporzione:

$$\frac{\text{periferia cerchio di rivoluzione}}{\text{arc } A L} = \frac{\text{una lunghezza data}}{P M}$$

Detto  $a$  il raggio del cerchio di rivoluzione,  $2\pi l$  la lunghezza data,  $x$  e  $y$  le coordinate cartesiane di  $P$ ,  $\rho$  e  $\omega$  quelle polari di  $P'$  la proporzione precedente diviene:

$$\frac{2\pi a}{a\omega} = \frac{2\pi l}{y}$$

onde fra le coordinate di quei due punti sussistono le relazioni seguenti:

$$(2) \quad x = \rho, \quad y = l\omega,$$

in cui non c'è più traccia del raggio  $a$  del circolo di rivoluzione.

Per conseguenza, se il punto  $P$  descrive la curva (1),  $P'$  percorrerà la curva che, in coordinate polari, è rappresentata come segue:

$$(3) \quad f(\rho, l\omega) = 0.$$

« Cette spirale (avverte Varignon) s'appellera *parabolique, hyperbolique, logarithmique, circulaire*, etc. selon que la courbe génératrice sera une *parabole, une hyperbole, une logarithmique, un cercle*, etc. ».

Si ha così un metodo semplicissimo per ricavare una curva rappresentata da un'equazione cartesiana un'altra rappresentata in coordinate polari o viceversa; potendosi supporre  $l=1$  il metodo, ridotto alla sua più semplice espressione, consiste nel *surrigare, nell'equazione della curva data, le coordinate dell'una specie con quelle dell'altra*. Questo procedimento abilita anche a dedurre dalle proprietà di una curva, quelle della trasformata; se ad es. la curva (1) passa per l'origine delle coordinate, la (3) passerà pel polo; se quella ha per asintoto l'asse delle  $y$ , questa avrà per punto asintotico il polo; ecc. Se la curva primitiva è determinata, invece che dalla equazione in termini finiti, da un'equazione differenziale

$$F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \dots) = 0$$

la trasformata sarà una curva integrale della equazione differenziale

$$F(\rho, l\omega, d\rho, ld\omega, d^2\rho, ld^2\omega, \dots) = 0.$$

Applicando questo procedimento ad alcune curve note, Varignon dedusse i seguenti risultati:

1° Dalle parabole  $x^m = a^{m-1}y$  (Vol. I, p. 357) le spirali di Fermat (v. p. 43).

2° Dalle iperboli  $x^m y = a^{m+1}$  (Vol. I, p. 371) le spirali iperboliche  $\rho^m \omega = a^{m+1}/l$ , la più semplice delle quali (quella cioè che corrisponde all'ipotesi  $m=1$ ) è l'ordinaria spirale iperbolica (v. p. 55), concepita poco dopo (1710) da Giovanni Bernoulli, indipendentemente dal Varignon.

3° Dalle parabole  $(a+x)^m = p^{m-1}y$  nasce la spirale  $(a+\rho)^m = p^{m-1}l\omega$ , che per  $m=1$  è un'ordinaria spirale di Archimede (p. 42) e per  $m=2$  si identifica alla spirale parabolica di Bernoulli (p. 49).

4° Dal cerchio  $x^2 + y^2 = 2rx$  deriva la spirale  $\rho^2 + l^2\omega^2 = 2r\rho$ .

5° Dalla logaritmica (p. 184)  $x^{-h} = e^y$  si deduce la spirale logaritmica (p. 61)  $\rho = e^{-\frac{l}{h}\omega}$ , di cui Varignon parla come di linea notissima ai suoi tempi.

6° Invece dalla logaritmica  $y^{-h} = e^x$  si ottiene la nuova

spirale logaritmica (di Varignon) rappresentata dall'equazione

$$l \omega = e^{-\frac{\rho}{h}} \quad (1).$$

Similmente dalle linee a volta (p. 237)  $x = b \cosh y/c$  nasce la curva di Bernoulli (p. 249)  $\rho = b \cosh l\omega/c$  e dall'ellisse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  nasce la curva  $\rho^2/a^2 + l^2\omega^2/b^2 = 1$ , che si presenta sotto varie forme a norma del valore di  $l$ .

Queste applicazioni potrebbero moltiplicarsi indefinitamente, ma quelle esposte sono sufficienti a illustrare completamente il metodo di Varignon<sup>2)</sup>; prima di lasciarlo faremo due osservazioni.

La prima è che la trasformazione di Varignon offre una spiccata analogia con quella determinata dalle formole  $x = \rho \omega$ ,  $y = \rho$  applicata da R. de Sluse nel suo *Mesolabum* (1668) e da Newton nel suo *Methodus fluxionum* (1671, pubblicato dal Colson nel 1734)<sup>3)</sup>; la sua importanza deriva dal fatto che, essendo

$$\int y \, dx = \frac{1}{2} \rho^2 \omega - \frac{1}{2} \int \rho^2 \, d\omega$$

essa muta una curva quadrabile in altra dotata dalla stessa proprietà.

L'altra consiste in ciò che la detta trasformazione è suscettibile di un'elegante costruzione stereometrica. Si consideri, infatti, la superficie elicoide avente per curva meridiana nel piano  $xz$  la curva  $\Gamma$  di equazione  $f(x, z) = 0$ ; se  $h$  è il passo ridotto comune a tutte

<sup>1)</sup> Cfr. T. OLIVIER, *Cours de géométrie descriptive* (II éd., Paris 1854), pag. 307. Dobbiamo rilevare che l'OLIVIER ha creduto (pag. 293) che dalle linee trigonometriche si deducessero col detto procedimento delle nuove spirali mentre le linee  $\rho = a \sin \omega$  e  $\rho = a \cos \omega$  sono circonferenze, le  $\rho = a \operatorname{tg} \omega$  e  $\rho = a \operatorname{cotg} \omega$  sono curve kappa, (Vol. I, p. 233) le  $\rho = a \sec \omega$  e  $\rho = a \operatorname{cosec} \omega$  sono rette e la  $\rho = a \sin \operatorname{ver} \omega$  è una lumaca di Pascal.

<sup>2)</sup> Questo geometra ha segnalato al termine della sua memoria un altro metodo per trasformare una curva in altra. Eseguita la costruzione precedente (v. fig. 34) si elevi  $P'P''$  perpendicolare a  $OP'$  e si prenda  $P'P''$  eguale all'ordinata  $\eta$  della curva  $F(x, \eta) = 0$ ; il luogo del punto  $P''$  sarà la trasformata  $\Gamma''$  di  $\Gamma$ . Per ottenerne l'equazione indichiamo con  $\rho'$ ,  $\omega'$  le coordinate polari di  $P''$  e con  $\psi$  l'angolo  $P''OP'$ : verrà

$$\omega' = \omega + \psi = \omega + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{x} = \frac{y}{l} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{x}, \quad \rho'^2 = x^2 + \eta^2;$$

dunque l'equazione di  $\Gamma''$  altro non è che il risultato dell'eliminazione di  $x$ ,  $y$ ,  $\eta$  fra le quattro equazioni:

$$f(x, \eta) = 0, \quad F(x, y) = 0, \quad \omega' = \frac{y}{l} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\eta}{x}, \quad \rho'^2 = x^2 + \eta^2.$$

eliminazione che può effettuarsi soltanto per speciali funzioni  $f$  e  $F$ .

<sup>3)</sup> Cfr. *Intermédiaire*, T. XV, 1908, pag. 219 e XVI, 1909, pag. 158.

le eliche di detta superficie, quella fra tali curve che passa pel punto  $(x_1, z_1)$  di  $\Gamma$  avrà per rappresentazione parametrica

$$x = x_1 \cos u, \quad y = y_1 \sin u, \quad z = z_1 + h u;$$

eliminando  $x_1, z_1, u$  fra queste e l'equazione  $f(x, z) = 0$  si ottiene la seguente equazione dell'elicoide:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z - h \operatorname{arc} \operatorname{tg} y/x) = 0.$$

Ora la sezione  $\Sigma$  di tale superficie col piano  $xy$  ha per equazione

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, -h \operatorname{arc} \operatorname{tg} y/x) = 0$$

cioè, introducendo le coordinate polari  $\rho, \omega$ ,  $f(\rho, -h \omega) = 0$ , onde la curva  $\Sigma'$  nasce dalla  $\Gamma$  appunto applicando una trasformazione di Varignon.

**269.** Col procedere del tempo e col progredire della scienza l'idea fondamentale di essa venne applicata ad altri sistemi di coordinate<sup>1)</sup>, come lo provano anzitutto molti passi delle opere di A. Peters e C. C. F. Krause che più volte citammo; gli è in tal modo che il secondo di questi geometri pervenne alle due *parabolas originarias*, una delle quali, come vedemmo, è la clotoide (p. 72), mentre l'altra non differisce dall'ordinaria evolvente di circolo (p. 128), gli è pure in questo modo che il medesimo geometra, partendo dall'iperbola e dalla spirale iperbolica, giunse a concepire la curva caratterizzata dalla proprietà

$$s \varepsilon = a,$$

ove  $s$  è l'arco e  $\varepsilon$  è l'angolo di contingenza: essendo in tal curva  $\varepsilon$  inversamente proporzionale a  $s$ , il Krause propose di chiamarla *curva reciproca* o meglio *curva antiloga*<sup>2)</sup>. Poichè in tal caso è  $\varepsilon = a/s$ , si ha

<sup>1)</sup> Così, se nell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

si sostituisce ad  $y$  il raggio vettore  $\sqrt{x^2 + y^2}$  si ottiene una curva di quarto ordine, mentre se si sostituiscono a  $x$  e  $y$  le coordinate bipolari se ne ottiene una di ottavo; entrambe s'incontrano nella Diss. di K. NITZ, *Anwendung der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal* (Königsberg, 1905).

<sup>2)</sup> *Novae theoriae linearum curvarum etc.* (Monachii, 1835), pag. 88.

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = -\frac{a}{s^2};$$

ma, detto  $R$  il raggio di curvatura, si ha  $1/R = d\varepsilon/ds$ ; dunque l'equazione intrinseca dell'antilogica è

$$aR + s^2 = 0.$$

Aggiungiamo che, chiamando  $s_{-1}$  e  $s_{+1}$  gli archi dell'evolvente e dell'evolvente dell'antilogica, essendo in generale  $s_{-1} = d\varepsilon/ds$  e  $s_{+1} = \int \varepsilon ds$ , nel caso attuale si ha:

$$s_{-1} = -a/\varepsilon^2, \quad s_{+1} = a \log \varepsilon;$$

e siccome per quelle tre curve l'angolo di contingenza è lo stesso, così quell'evolvente e quell'evolvente possono rappresentarsi risp. così

$$s_{-1} \varepsilon^2 + a = 0, \quad s_{+1} = a \log \varepsilon,$$

la seconda delle quali è denominata dal Krause *spiralem logarithmicam (seu logisticam) angularem*<sup>1)</sup>.

Percorrendo poi le *Lezioni di geometria intrinseca* del Cesàro si vede che molte curve definite da un'equazione intrinseca

$$f(R, s) = 0$$

si ottennero dalle curve di equazione cartesiana  $f(x, y) = 0$  sostituendo a  $x, y$  risp.  $R$  e  $s$ ; Mannheim osservò che quella è il luogo delle posizioni assunte dal centro di curvatura in un punto di questa quando essa ruzzola senza scorrimento su una retta; perciò la  $f(R, s) = 0$  fu detta *curva di Mannheim* della  $f(x, y) = 0$ <sup>2)</sup>.

Un'altra applicazione del medesimo concetto porta a sostituire in un'equazione  $f(x, y) = 0$  alle coordinate cartesiane le coordinate di una retta (sia le plückeriane, sia quelle di Unverzagt-Schweering<sup>3)</sup>); esso ha portato ad associare a una curva di dato ordine una di egual classe, mentre non fu peranco sfruttato per lo studio delle curve trascendenti.

**270.** Un'altra applicazione del « metodo del mutamento delle coordinate » venne fatta da B. Tortolieri<sup>4)</sup> e poco dopo da M. Can-

<sup>1)</sup> Id., pag. 96.

<sup>2)</sup> E. WÖLFFING, Zeitschr. Math. Phys., T. XLIV, 1899, pag. 140.

<sup>3)</sup> F. RUDIO, Abhand. zur Gesch. der Mathem., T. IX, 1899.

<sup>4)</sup> *Mémoire sur quelques applications de la méthode inverse des tangentes* (G. di Crelle, XXVI, 1843).

tor<sup>1)</sup>, i quali, servendosi per determinare i punti di una curva dell'ascissa  $x$  e dell'arco  $s$  contato da un'origine fissa, dedussero dalle curve

$$f(x, y) = 0 \quad \text{o} \quad y = f(x)$$

rappresentate in coordinate cartesiane, quelle che soddisfanno alla relazione

$$(4) \quad f(x, s) = 0 \quad \text{o} \quad (4') \quad s = f(x).$$

Si può risalire dalla (4') all'equazione cartesiana della curva corrispondente; differenziando, infatti, la (4') si ottiene

$$ds = f'(x) dx$$

o sostituendo a  $ds$  il suo valore

$$dx^2 + dy^2 = f'^2(x) dx^2$$

donde

$$(5) \quad y = \int \sqrt{f'^2(x) - 1} dx;$$

la determinazione dell'equazione cartesiana della curva esige quindi una quadratura.

Risulta dalla (5) che l'equazione della tangente alla corrispondente curva è

$$\frac{Y - y}{X - x} = \sqrt{f'^2(x) - 1},$$

onde la curva trasformata è panalgebraica ogniqualvolta  $f(x)$  sarà una funzione a derivata algebrica. La determinazione del raggio di curvatura  $R$  della curva trasformata non esige che differenziazioni: notiamo infatti che differenziando rispetto a  $x$  l'identità

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

si trova

$$\frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ds}{dx} \frac{d^2s}{dx^2};$$

e applicando le (4') e (5)

$$\sqrt{f'^2(x) - 1} \frac{d^2y}{dx^2} = f'(x) f''(x);$$

<sup>1)</sup> *Ueber ein weniger gebräuchliches Coordinatensystem* (Diss., Frankfurt a. M. 1851).

ricordando ora che

$$R = \frac{(ds/dx)^3}{d^2y/dx^2}$$

si conclude

$$(6) \quad R = \frac{f'^2(x) \sqrt{f'^2(x) - 1}}{f''(x)}$$

Eliminando poi  $x$  fra le (4') (6) si troverà l'equazione intrinseca della curva.

Applicando questo metodo alla conica

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si ottiene la curva

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{s^2}{b^2} = 1,$$

nella cui equazione cartesiana entrano in generale integrali ellittici. Anche senza farne uso si può, nel caso in cui si scelga il segno —, dimostrare una proprietà della curva: essendo infatti in tal caso

$$\frac{s^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1,$$

$s$  e  $x$  tendono contemporaneamente ad infinito, onde la curva si estende sino al punto all'infinito di  $Ox$ ; l'equazione precedente dà poi

$$s - x = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - x.$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{bx}{a \sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right] = \frac{b-a}{a};$$

la differenza fra la curva e l'asintoto è quindi finita.

Nel caso speciale  $b = a$  si può ottenere in termini finiti l'equazione della curva. Pongasi infatti

$$\frac{dx}{ds} = \sin \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \alpha;$$

essendo  $x^2 - s^2 = a^2$ , si ha

$$\frac{dx}{ds} = \frac{s}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

onde

$$x = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad s = a \operatorname{tg} \alpha, \quad dy = a \frac{d\alpha}{\cos \alpha},$$

$$y = a \log \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right];$$

la prima e l'ultima di queste equazioni porgono la rappresentazione parametrica della curva trasformata; si deduce da esse

$$\cos \alpha = \frac{a}{x}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}, \quad e^{y/a} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha},$$

onde eliminando  $\alpha$ :

$$e^{y/a} = \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a};$$

per conseguenza

$$e^{-y/a} = \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

e

$$x = \frac{a}{2} (e^{y/a} + e^{-y/a}),$$

onde la curva trasformata è una *catenaria*. Alla medesima curva si giunge trasformando analogamente la curva

$$s = a \operatorname{senh} x/a;$$

lo prova una semplice applicazione dell'equazione (5). Per vedere invece in che cosa si muti la logaritmica rappresentata dall'equazione

$$s = a \log a/x^1)$$

serviamoci della (6); otterremo

$$R = a \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1},$$

<sup>1)</sup> Il caso più generale in cui si abbia  $s = a \log x/b$  si riduce al precedente cambiando l'origine ed il senso positivo degli archi.

che combinata con la precedente guida all'equazione intrinseca della curva trasformata

$$R = a \sqrt{\frac{2s}{e^{\frac{2s}{a}} - 1}};$$

questa curva è dunque (v. p. 217) una *trattrice*.

**271.** A risultati più generali ed importanti conduce l'applicazione della trasformazione definita nel numero precedente alle parabole

$$y^{m+n} = p^m x^n,$$

ove  $m$  e  $n$  si suppongono interi positivi; essa guida alle curve godenti della proprietà espressa dall'equazione

$$(7) \quad s^{m+n} = p^m x^n.$$

Scrivendo questa come segue

$$x = p^{-\frac{m}{n}} \frac{s^{\frac{m+n}{n}}}{s^{\frac{n}{n}}}$$

si vede che le curve trasformate possono definirsi dicendo che per esse l'ascissa è proporzionale ad una potenza dell'arco. Esse vennero studiate per la prima volta da C. R. Fleischer<sup>1)</sup>, poi da B. Tortolini e M. Cantor nei lavori sopracitati e di recente da C. Nies<sup>2)</sup> e R. Müller<sup>3)</sup>. Troviamone anzitutto l'equazione intrinseca; essendo

nel caso attuale  $f(x) = s = p^{\frac{m}{m+n}} \frac{n}{x^{\frac{n}{m+n}}}$ , ponendo per brevità

$$p^{\frac{m}{m+n}} = a, \quad \frac{n}{m+n} = \mu,$$

e applicando la (6) si trova

$$R = \frac{\mu}{\mu-1} a x^\mu \sqrt{\mu^2 a^2 x^{2(\mu-1)} - 1};$$

<sup>1)</sup> Von den Curven, bei welchen  $y^{m+n} = p^m x^n$  ist (Progr., Grimma 1849).

<sup>2)</sup> Untersuchungen über Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist (Progr. Darmstadt, 1887).

<sup>3)</sup> Ueber die Kurven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist (Progr. Berlin 1889); ivi è fatta una notevole applicazione di una speciale funzione  $p$  di WEIERSTRASS.

e per essere  $s = a x^\mu$ ,

$$(8) \quad R = \frac{\mu}{\mu-1} a \sqrt{\mu^2 a^2 \left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{2(\mu-1)}{\mu}} - 1}$$

che è l'equazione intrinseca della curva trasformata. L'equazione (5) nel caso attuale dà:

$$(9) \quad y = \int dx \sqrt{\left(\frac{n}{m+n}\right)^2 p^{\frac{2n}{m+n}} x^{-\frac{2m}{m+n}} - 1},$$

onde la determinazione dell'equazione della curva dipende dall'integrazione di un differenziale binomio. Ora questo è integrabile se è intero l'uno o l'altro dei numeri

$$\frac{m+n}{2m}, \quad \frac{n}{2m}.$$

Poniamo, quindi,

$$\frac{m+n}{2m} = q, \quad \frac{n}{2m} = r;$$

la (7) diverrà in corrispondenza

$$s^{2q} = p x^{2q-1}, \quad s^{2r+1} = p x^{2r}$$

equazioni che potremo compendiare in questa unica

$$(10) \quad s^k = p x^{k-1},$$

ove  $k$  è un numero intero positivo. Le curve corrispondenti fanno parte di sistemi aventi per caratteristiche  $2k$  e  $2$ ; lo si deduce dal fatto che, ponendo per brevità

$$p = \left(\frac{k}{k-1}\right)^k a,$$

si ha

$$(9') \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\{a^{2/k} - x^{2/k}\}^{1/2}}{x^{1/k}};$$

notiamo che i punti di contatto delle tangenti della curva che fanno con  $Ox$  l'angolo  $\alpha$  stanno sulle rette

$$x = \pm a^{1/k} \cos \alpha$$

e che, con queste notazioni, si ha:

$$(8') \quad R = k a^{1/k} x^{k-2/k} \sqrt{a^{2/k} - x^{2/k}}.$$

Il minimo valore di  $k$  è 2: in tal caso si ha

$$s^2 = p x, \quad p = 4 a, \quad R = 2 a^{1/2} \sqrt{a - x},$$

donde, eliminando  $p$  e  $x$

$$R^2 + s^2 = 4 a^2,$$

che rappresenta una *cicloide* (v. p. 90). Per il successivo valore di  $k$ , cioè  $k = 3$ , si ha

$$s^3 = p x^2, \quad p = \frac{27}{8} a, \quad R = 3 a^{1/3} x^{1/3} \sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}$$

donde eliminando  $x$  e  $p$  si trova

$$R^2 + 4 \left[ s - \frac{3 a}{4} \right]^2 = \left[ \frac{3 a}{2} \right]^2,$$

che appartiene ad un *asteroide regolare* (v. p. 125).

Qualunque sia l'intero  $k$  si giunge ad una comoda rappresentazione analitica della curva ponendo

$$(11) \quad x = a \operatorname{sen}^k \varphi;$$

infatti la (9') dà in conseguenza

$$d y = k a \operatorname{sen}^{k-2} \varphi \cos^2 \varphi d \varphi$$

onde

$$y = k a \left( \int \operatorname{sen}^{k-2} \varphi \cdot d \varphi - \int \operatorname{sen}^k \varphi \cdot d \varphi \right);$$

le due integrazioni indicate si possono effettuare mediante un procedimento noto <sup>1)</sup> e danno

$$(12) \quad y = \begin{cases} a \cos \varphi \left\{ \operatorname{sen}^{k-1} \varphi - \sum_{r=1}^{\frac{k-2}{2}} \frac{(k-3)(k-5)\dots(k-2r+1)}{(k-2)(k-4)\dots(k-2r)} \operatorname{sen}^{k-2r-1} \varphi \right\} + \\ \quad + \frac{(k-3)(k-5)\dots 3 \cdot 1}{(k-2)(k-4)\dots 4 \cdot 2} \varphi \text{ se } k \text{ è pari} \\ a \cos \varphi \left\{ \operatorname{sen}^{k-1} \varphi - \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \frac{(k-3)(k-5)\dots(k-2r+1)}{(k-2)(k-4)\dots(k-2r)} \operatorname{sen}^{k-2r-1} \varphi \right\} \\ \quad \text{se } k \text{ è dispari;} \end{cases}$$

<sup>1)</sup> V. le formole date dal SERRET nel suo *Cours de Calcul intégral* (II éd., Paris 1880), pag. 78.

le (11) (12) porgono la rappresentazione voluta della curva, la quale per  $k$  pari è trascendente, per  $k$  dispari algebrica.

Analoga all'equazione (7) donde partimmo è quella nascente dal mutare il segno di  $m$ ; è la seguente

$$(13) \quad s^{n-m} = p^{-m} x^n.$$

Se ne deduce

$$y = \int d x \sqrt{\left[ \frac{n}{n-m} \right]^2 p^{\frac{2m}{n-m}} x^{\frac{2m}{n-m}} - 1};$$

l'integrazione è effettuabile se i numeri  $m, n$  sono tali che risulti intero uno dei due numeri

$$\frac{n-m}{2m} = q, \quad \frac{n}{2m} = r;$$

in corrispondenza si ha

$$n = (2q + 1)m, \quad \text{oppure} \quad n = 2mr$$

e la (13) assume una delle forme seguenti

$$s^{2q} = p^{-1} x^{2q+1}, \quad s^{2r-1} = p^{-1} x^{2r}$$

che si compendia nella seguente

$$(14) \quad s^k = p^{-1} x^{k+1}$$

Notando che questa si trae dalla (10) mutando il segno di  $k$  riesce evidente che per le nuove curve sussisteranno le formole che nascono dalle (8') (9') mediante lo stesso cambiamento. Perciò esiste una rappresentazione analitica analoga a quella data dalle (11) e (12), come il lettore verificherà agevolmente. Anche ogni curva della nuova specie in generale fa parte di un sistema con le caratteristiche  $2k$  e  $2$ . Preseindendo dal valore  $k = 0$  (che dà la linea retta), il minimo valore che si può attribuire a  $k$  è  $k = 1$ . La (14) allora diviene  $x^2 = ps$  e la (6) dà

$$R = \frac{2 x^2 \sqrt{4 x^2 - p^2}}{p^2};$$

eliminando  $x$  si ottiene

$$R = 2 s \sqrt{\left[ \frac{s}{(p/2)} \right]^2 - 1}$$

come equazione intrinseca della curva in questione; ricordando la equazione (12) a p. 236 potremo concludere che la curva stessa è l'*evoluta di una catenaria*. Il valore seguente di  $k$  è  $k = 2$ ; si ha in tale ipotesi  $x^3 = ps^2$ ; la (5) dà

$$y = \int dx \sqrt{\frac{9x}{4p} - 1}$$

onde integrando

$$\left[ \frac{27}{8} \frac{y+c}{p} \right]^2 = \left[ \frac{9x}{4p} - 1 \right]^3,$$

che rappresenta una *parabola semicubica*.

Riassumendo si vede che nella classe di curve in cui l'ascissa è eguale o proporzionale ad una potenza dell'arco si trovano (senza contare la retta) quattro linee a noi già note; due sono algebriche, cioè la parabola semicubica e l'asteroide regolare, e due trascendenti cioè la cicloide e l'evoluta della catenaria. Come caso limite se ne trova poi una quinta di cui va fatta menzione: per scoprire quale sia, nell'equazione  $s = ax^\mu$  facciamo  $a = \alpha/\mu$ ,  $\alpha$  essendo una nuova costante; allora potremo scrivere

$$s = \alpha \frac{x^\mu}{\mu} = \alpha \frac{\epsilon^\mu \log x}{\mu} = \alpha \log x - \frac{\alpha \mu}{2} (\log x)^2 + \dots;$$

se quindi  $\mu$  tende a 0 al limite si ha

$$s = \alpha \log x,$$

che rappresenta (v. p. 216) una *trattrice*.

**272.** Le linee di cui ci stiamo occupando godono di altre proprietà che le fecero incontrare da chi si propose di risolvere certe questioni meccaniche e geometriche, come ora esporremo.

*Problema I.* Trovare una linea tale che l'ordinata del centro di gravità di un suo arco sia proporzionale ad una potenza positiva qualunque di quest'arco.

*Soluzione.* Dette  $x_g$  e  $y_g$  le coordinate del baricentro dell'arco  $s$  si ha notoriamente

$$(15) \quad s x_g = \int x ds, \quad s y_g = \int y ds$$

onde, per le condizioni del problema,

$$\frac{\int y ds}{s} = k s^\mu$$

$$\text{cioè} \quad \int y ds = k s^{\mu+1},$$

$$\text{e differenziando} \quad y = (\mu + 1) k s^\mu,$$

equazione che non differisce in sostanza da quella che caratterizza le curve precedenti.

*Problema II.* Trovare una linea tale che l'ordinata del centro di gravità di un suo arco sia proporzionale all'ordinata estrema dell'arco.

*Soluzione.* Scrivendo la (15, 2<sup>a</sup>) come segue

$$s y_g = \int_0^s y ds,$$

avremo (poichè  $y_g = k y$ )

$$k s y = \int_0^s y ds$$

onde differenziando

$$k (s dy + y ds) = y ds$$

cioè

$$\frac{1-k}{k} \frac{ds}{s} = \frac{dy}{y};$$

e integrando

$$y = a s^{\frac{1-k}{k}};$$

ciò prova che le linee cercate non differiscono da quelle in cui l'arco è proporzionale ad una potenza di una fra le coordinate cartesiane.

Haton de la Goupillière<sup>1)</sup>, che ha risolto questi due problemi, propose di chiamare *curve barocentriche* quelle così ottenute<sup>2)</sup>.

*Problema III.* Trovare una curva tale che un arco qualunque di essa eguagli l' $n$ -ma parte della differenza tra le lunghezze delle tangenti negli estremi<sup>3)</sup>.

*Soluzione.* L'equazione del problema è evidentemente la seguente:

$$n \int_{x_0}^x \sqrt{dx^2 + dy^2} = \left| \frac{y \sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{dy/dx} \right|_{x_0}^x;$$

<sup>1)</sup> *Recherches sur les centres de gravité* (Journ. de l'Ec. pol., Cahier XLIII, 1870).

<sup>2)</sup> Questo nome era stato usato prima in altro senso dal MAUPERTUIS (*Discours sur la figure des astres*, 1742).

<sup>3)</sup> O. WERTH, *Ueber eine Classe von Curven, welche die Eigenschaft haben, dass ein Vielfaches der Bogenlänge gleich ist der Differenz der Tangenten* (Programm, Celle 1874).

ponendo per brevità  $\frac{dy}{dx} = p$  e differenziando si ottiene

$$n \sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+p^2} - \frac{y dp/dx}{p^2 \sqrt{1+p^2}}$$

ossia

$$(1-n)p^2(1+p^2) = y \frac{dp}{dx}$$

Ma  $\frac{dp}{dx} = \frac{p \cdot dp}{dy}$  onde

$$(1-n) \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} - \frac{p \cdot dp}{1+p^2}$$

Integrando si trova:

$$y^{1-n} = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

$a$  essendo la costante d'integrazione. Ma è

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dy/dx}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}} = \frac{dy}{ds}$$

onde

$$ds = a y^{n-1} dy$$

e

$$s = a/n y^n.$$

Le curve domandate non differiscono dunque da quelle a cui è consacrata la maggior parte del presente Capitolo.

**273.** Un'ultima metamorfosi del concetto di Varignon è di origine ancora più recente e va qui menzionata. Osserviamo anzitutto che i primi geometri che applicarono il concetto di coordinate se ne servirono spesso, non nel senso ristretto che trovasi in Descartes, ma in quello ben più ampio che si apprende dalle opere di Leibniz. Lo prova fra l'altro, un opuscolo di G. Manfredi<sup>1)</sup> ove come coordinate di un punto qualunque del piano si assumono la distanza  $n$  da una data curva  $K$  e l'arco compreso fra il piede della corrispondente normale ed un punto fisso di quella curva. Per fare assumere a siffatto sistema tutta la precisione desiderabile basta fissare sopra

<sup>1)</sup> *De constructione aequationum differentialium primi gradus* (Bononiae 1707).

$K$  un senso positivo; allora sarà determinato il senso positivo sopra ogni tangente e quindi sopra ogni normale, se si conviene che la normale positiva sia disposta rispetto alla tangente positiva come la direzione positiva di  $Oy$  è rispetto alla direzione positiva di  $Ox$ ; tutti e soli i punti della parte positiva della normale avranno positiva la coordinata  $n$ .

Fatto ciò, si consideri un punto  $P$  di una curva qualunque  $\Gamma$ , e se ne indichino con  $s, n$  le coordinate rispetto alla curva  $K$ . Preso poi un sistema di assi cartesiani ortogonali si consideri il punto  $P_1$  di coordinate

$$x = s, y = n;$$

il luogo del punto  $P_1$  è una curva  $\Gamma_1$  che si chiama *immagine di  $\Gamma$  rispetto a  $K$* <sup>1)</sup>. Così ogni curva  $\Gamma$  si trasforma in altra. Affinchè la nuova curva sia algebrica è necessario che la curva di partenza sia rettificabile algebricamente, cioè sia l'evolvente di una curva algebrica. G. de Longchamps ha indicato un procedimento per costruire la tangente a  $\Gamma_1$  conoscendosi la costruzione della tangente a  $\Gamma$ <sup>2)</sup>.

Chiuderemo il presente Capitolo notando che a E. Köstlin<sup>3)</sup> si deve l'osservazione che, partendo dall'equazione  $f(s, \varepsilon) = 0$  (cfr. pag. 73) si può eseguire il mutamento di coordinate surrogando  $s$  con  $w$  e  $\varepsilon$  con  $\text{tg } v$  ove  $w$  e  $v$  sono le coordinate che compaiono nell'equazione della retta  $x + vq = w$ ; così si giunse a una nuova classe di curve dette *arcuidi*; p. es. dalla spirale logaritmica si ottenne una nuova curva detta *logaritmoide*.

<sup>1)</sup> M. PETROVICH, *Sur un système de coordonnées semi-curvilignes* (Prag. Ber., 1898).

<sup>2)</sup> *Les courbes images et les courbes symétriques* (Nouv. Ann., 3. Série, T. XVIII, 1899).

<sup>3)</sup> *Ueber eine Deutung der Gleichung, die zwischen dem Bogen und dem Neigungswinkel der Tangente im Endpunkte des Bogens einer ebene Kurve besteht* (Diss. Tübingen 1907); cfr. H. WIELEITNER, *Ueber eine Verallgemeinerung des Begriffes der Mannheimschen Kurve* (Württemberg. Matth., II Ser., T. IX, 1907).

F. L. THIEME ha anche proposto di associare alla curva  $x = f(y)$  la curva  $x = f[y(\cos \alpha + i \sin \alpha)]$   $\alpha$  essendo un dato angolo; risulta così la *curva laterale*, la cui importanza è limitata ai casi in cui essa risulti reale; per  $\phi = \pi/2$  dalla parabola  $y^2 + px = 0$  nasce l'altra  $y^2 = px$ ; v. la memoria *Grenzwertrechnung nebst Grundzüge der Theorie der Lateralkurven* (Arch. Math. Phys., T. LVIII, 1876).

## CAPITOLO II

## Le Curve d'inseguimento o di caccia.

274. « Un punto  $A(x', y')$  descriva la curva rappresentata dalla equazione

$$(1) \quad f(x', y') = 0$$

con velocità costante: trovare il luogo delle posizioni occupate da un altro punto  $B(x, y)$  che si muove con velocità costante *inseguendo A*. La curva cercata si chiama ordinariamente *curva d'inseguimento* (o di caccia)<sup>1)</sup> e da alcuni francesi *courbe du chien*; siccome essa otterrebbe anche supponendo che  $B$  si muovesse *fuggendo* da  $A$  così è pure usato legittimamente il nome di *curva di fuga*.

Il problema testè enunciato viene fatto risalire a Leonardo da Vinci da chi interpreta nel modo suggerito da S. Günther<sup>2)</sup> un passo delle opere del grande pittore italiano; indipendentemente da lui la questione fu incontrata dal Bouguer e da lui risolta<sup>3)</sup>; se ne attribuisce il merito a Dubois-Aymé (che al principio del sec. XIX fu direttore della Dogana di Foligno) da coloro che adottano il modo di vedere di O. Tequem<sup>4)</sup>. Come possa sciogliersi si vede osservando che, in ogni punto della cercata traiettoria del punto  $B$ , la relativa tangente deve contenere la corrispondente

<sup>1)</sup> Nel Sec. XVIII il nome di *courbe de poursuite* era sinonimo di *trattrice*: v. CANTOR, *Vorlesungen*, T. III (Leipzig 1898), pag. 760.

<sup>2)</sup> *Studien zur Geschichte der math. und phys. Geographie* (Halle 1878): cfr. una nota del BROCARD in *Nouv. Corr. Math.*, T. 41, 1880, pag. 211-213.

<sup>3)</sup> *Sur de nouvelles courbes, auxquelles on peut donner le nom de lignes de pour suite* (Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1732); v. anche MAUPERTUIS, *Solution d'un problème de géométrie* (Ivi).

<sup>4)</sup> *Nouv. Ann. de Math.*, T. VIII, 1849, pag. 91-93. M. D'OCAGNE (*Bull. Soc. Math. France*, T. XI, 1884, pag. 134) e L. BURMESTER (*Lehrbuch der Kinematik*, Leipzig 1886, pag. 63) hanno indicato costruzioni per centri di curvatura delle curve in questione.

posizione di  $A$ ; donde intanto la relazione

$$(2) \quad (y' - y) = (x' - x) \cdot dy/dx.$$

D'altronde, detto  $n$  il rapporto delle velocità dei due moti uniformi considerati, si ha

$$\sqrt{dx'^2 + dy'^2} = n \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ossia

$$(3) \quad \sqrt{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dy}\right)^2} = n \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Dalle (1) e (2) e dalle loro derivate si trarranno  $x'$ ,  $y'$ ,  $dx'/dx$ ,  $dy'/dx$  in funzione di  $x$ ,  $y$ ,  $dy/dx$ ,  $d^2y/dx^2$ ; sostituendo questi valori nella (3) si ottiene un'equazione della forma

$$(4) \quad F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right] = 0,$$

ed all'integrazione di quest'equazione è ridotta la ricerca delle curve d'inseguimento della curva (1)<sup>1)</sup>.

L'integrazione è completamente effettuabile nel caso in cui la traiettoria del punto  $A$  sia rettilinea. Presala, infatti, come asse delle  $y$ , le (1) (2) diverranno:

$$x' = 0, \quad y' = y - x \, dy/dx,$$

e daranno

$$\frac{dx'}{dx} = 0, \quad \frac{dy'}{dy} = -x \frac{d^2y}{dx^2};$$

la (3) diverrà pertanto:

$$-x \frac{d^2y}{dx^2} = n \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Per integrare quest'equazione non vi è che da ricorrere al procedimento classico ponendo  $dy/dx = p$ . Si ha quindi:

$$-x \frac{dp}{dx} = n \sqrt{1 + p^2} \quad \text{ossia} \quad n \frac{dx}{x} = - \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

<sup>1)</sup> V. gli articoli di TH. DE ST. LAURENT, C. STURM e QUERRET nel T. XII delle Ann. de math. (1822-23).

Integrando si ottiene:

$$c x^n = \frac{1}{p + \sqrt{1+p^2}},$$

$c$  essendo la costante d'integrazione.

Se ne deduca:

$$p + \sqrt{1+p^2} = c^{-1} x^{-n}, \quad p - \sqrt{1+p^2} = -c x^n,$$

e si avrà

$$2p = c^{-1} x^{-n} - c x^n.$$

Surrogando  $p$  col suo valore si trova

$$2 dy = c^{-1} x^{-n} dx - c x^n dx;$$

ed integrando

$$(5) \quad 2(y - y_0) = \begin{cases} \frac{x^{-n+1}}{2(-n+1)} - \frac{c}{n+1} x^{n+1} & \text{se } n \neq 1 \\ \frac{1}{c} \log x - \frac{c x^2}{2} & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni della curva d'inseguimento della retta, secondochè i punti  $A$  e  $B$  si muovono con velocità diseguali od eguali; nella seconda ipotesi la curva è trascendente; mentre nella prima è algebrica od interscendente secondo che  $n$  è razionale o non; in particolare, se  $n$  è intero è una curva di un tipo studiato dal Maclaurin (v. Vol. I, p. 375) <sup>1)</sup>.

V. Nobile <sup>2)</sup> ha applicati i metodi della geometria intrinseca allo studio delle curve in discorso.

Se la traiettoria del punto  $A$  fosse circolare, quella del punto  $B$  sarebbe una curva integrale dell'equazione:

$$(6) \quad \frac{\omega}{b} \frac{\{1 + (dy/dx)^2\}^{3/2}}{d^2 y/dx^2} = 1 - \frac{a + y \, dy/dx}{\sqrt{a^2[1 + (dy/dx)^2] - (y - x \, dy/dx)^2}},$$

ove  $\omega$  è la velocità angolare di  $A$ ,  $b$  la velocità di  $B$  e  $a$  il raggio

<sup>1)</sup> Inesattamente dunque nell'*Anal. Geom. der hoheren ebenen Curven* di SALMON-FIEDLER (Leipzig, 1873) è asserito: « Die Curve ist daher algebraisch, den Fall  $n=1$  ausgenommen ».

<sup>2)</sup> *Studio intrinseco delle curve di caccia* (Rend. Circ. mat. Palermo, T. XX, 1905) e *Sul problema delle curve di caccia* (Giorn. di matem., T. 46, 1908).

del circolo dato <sup>1)</sup>; quest'equazione differenziale non venne peranco integrata.

L. Dunoyer <sup>2)</sup> ha ridotto lo stesso problema all'integrazione di una equazione della forma

$$\frac{dx}{y(x^2 - 1)} = \frac{dy}{(y - \omega)(2xy - \omega x + cy - cx)}$$

e ha applicato i metodi del Poincaré allo studio delle relative curve integrali.

**275.** Non ci arresteremo ad esporre le varie generalizzazioni che subì il concetto di curva d'inseguimento, specialmente per opera di C. Sturm <sup>3)</sup> e E. Cesàro <sup>4)</sup>; ma invece crediamo opportuno far conoscere un problema di geometria risolto dalle curve d'inseguimento della retta, perchè ciò ne darà occasione di far conoscere una nuova rappresentazione analitica ed alcune proprietà delle curve stesse. Ecco il problema di cui si tratta:

« Trovare una curva  $\Gamma$  tale che due sue tangenti qualunque intercettino sopra una data retta un segmento avente un rapporto assegnato coll'arco limitato dai punti di contatto di quelle tangenti » <sup>5)</sup>.

Siano (fig. 35)  $t$  e  $t'$  due tangenti qualunque della curva cercata,  $P$  e  $P'$  i punti di contatto,  $I$  e  $I'$  le intersezioni con la retta data  $r$ . Essendo per ipotesi  $\frac{\text{arc } PP'}{II'} = \text{cost.}$ , se il punto  $I$  descrive con moto uniforme la retta  $r$ , il punto  $P$  farà altrettanto sopra la curva  $\Gamma$  e la tangente in un punto qualunque  $P$  di  $\Gamma$ ; ciò basta a provare che  $\Gamma$  è una curva d'inseguimento della retta  $r$ .

La nuova definizione così risultante delle linee di cui ci occu-

<sup>1)</sup> V. una Questione proposta dal BROCARD nel 1877 in *Nouv. Corresp. Math.* e nuovamente nel 1883 in *Mathésis*, e risolta nel 1886 da KULHOFF (*Mathésis*, T. VI, 1886).

<sup>2)</sup> *Sur les courbes de poursuite d'un cercle* (Nouv. Ann. de math., IV Ser., T. VI, 1906). Per altra soluzione in un caso particolare vedi la nota di F. MORLEY, *A curve of pursuit* (Amer. math. Monthly, T. XXVIII, 1921). Lo stesso autore ha esteso notevolmente il concetto di curva di caccia nella memoria *The curve of ambience* (Amer. Journ. of Math., T. XLVI, 1924).

<sup>3)</sup> *Extension du problème des courbes de poursuite* (Ann. de Math., T. 13, 1822-23).

<sup>4)</sup> *Propriétés d'une courbe de poursuite* (Nouv. Ann. de Math., 3e Sér., T. II, 1883); *Sur les lignes de poursuite* (Id., T. V, 1886) e *Les lignes barycentriques* (Ivi).

<sup>5)</sup> Per ciò che segue vedi: F. GAUSS, *Ueber Kurven, welche die Eigenschaft haben, dass zwei Tangenten aus einer gegebenen Geraden einer Strecke ausschneiden, welche von den Berührungspunkten bezunzten Bogen in einer gegebenen Verhältniss stehen* (Progr. Bunzlan, 1890).

piano conduce agevolmente alla loro rappresentazione analitica. Chiamiamo infatti  $P_0$  un punto fisso di  $\Gamma$ ,  $t_0$  la relativa tangente e  $I_0$  il punto  $t_0 r$ ; poniamo  $P_0 P = s$ ,  $I_0 I = e$  e designamo con  $n$  il valore costante del rapporto  $\frac{\text{arc } P P'}{I I'}$ ; sarà  $s = n e$ . Considerando analogamente un altro punto  $P'$  di  $\Gamma$  avremo  $s' = n e'$  onde  $s - s' = n(e - e')$ . Ciò prova che, senza diminuire la generalità della questione, si può supporre che nell'enunciato del problema una delle

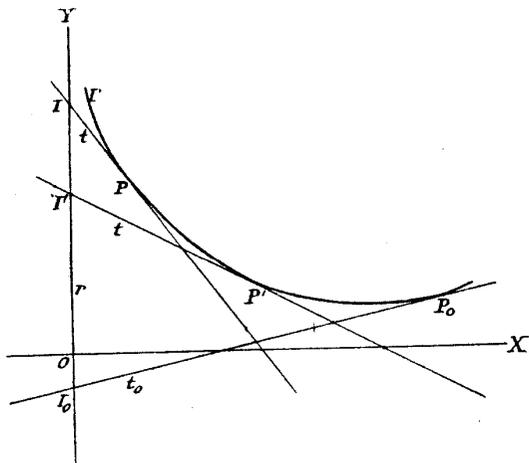


Fig. 35.

due tangenti sia fissa; giacchè si è testè dimostrato che in conseguenza la corrispondente proprietà sussisterà in generale. Quella tangente fissa verrà detta *origine delle tangenti* ed il suo punto di contatto *origine degli archi*.

Prenderemo la retta  $r$  come asse delle  $y$  e chiameremo con  $\tau$  l'angolo formato dalla direzione positiva della tangente a  $\Gamma$  con  $Ox$ . Avremo

$$(7) \quad \frac{dx}{\cos \tau} = \frac{dy}{\sin \tau} = ds,$$

e

$$\frac{Y - y}{X - x} = \text{tg } \tau$$

sarà l'equazione della tangente nel punto  $(x, y)$ , supposte  $X, Y$  coor-

dinate correnti. Facendo ivi  $X = 0$  si trova

$$OI = y - x \text{tg } \tau,$$

onde, supposto  $OI_0 = d$ ,

$$II_0 = y - x \text{tg } \tau - d.$$

Ma  $PP_0 = n \cdot II_0$ , onde

$$y - x \text{tg } \tau - d = \frac{1}{n} s.$$

Differenziando e poi applicando le (7) si ottiene

$$-x \frac{d\tau}{\cos^2 \tau} = \frac{1}{n} \frac{dx}{\cos \tau}$$

ossia

$$\frac{dx}{x} = -n \frac{d\tau}{\cos \tau}$$

Integrando si trova:

$$\log x = -n \log \text{tg} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2} \right] + c;$$

facendo ivi

$$(8) \quad \frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2} = \varphi$$

e supponendo che per  $x = 0$  si abbia  $\varphi = \beta$ , si conclude

$$x = c \left[ \frac{\text{tg } \varphi}{\text{tg } \beta} \right]^n$$

che potremo scrivere

$$(9) \quad x = a \text{tg}^n \varphi$$

purchè poniamo  $a = c \cot^n \beta$ . Ora le (7) ci danno in forza della (8)

$$dy = dx \text{tg } \tau = dx \cdot \cot 2\varphi = \frac{1 - \text{tg}^2 \varphi}{2 \text{tg } \varphi} dx;$$

ma dalla (9) traesi

$$dx = n a \text{tg}^{n-1} \varphi \cdot d \text{tg } \varphi$$

dunque

$$d y = \frac{n a}{2} \left\{ \operatorname{tg}^{n-2} \varphi - \operatorname{tg}^n \varphi \right\} \cdot d \operatorname{tg} \varphi$$

Supposto ora  $n \neq 1$  e integrando si conclude

$$(10) \quad 2 y = n a \left\{ \frac{n}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} \varphi - \frac{n}{n+1} \operatorname{tg}^{n+1} \varphi \right\},$$

avendo ammesso che a  $\varphi = 0$  corrisponde  $y = 0$ . Per  $n = 1$  invece l'equazione precedente dà in modo analogo

$$(11) \quad 2 y = a \left\{ \log \operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right\}.$$

La (10) o la (11) associata alla (9) dà la rappresentazione analitica della curva secondo che  $n \neq 1$  o  $n = 1$ . Eliminando  $\varphi$  si ottengono nei due casi le equazioni seguenti:

$$(12) \quad 2 y = \begin{cases} a \left[ \frac{n}{n-1} \left( \frac{x}{a} \right)^{\frac{n-1}{n}} - \frac{n}{n+1} \left( \frac{x}{a} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \\ a \left[ \log \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right], \end{cases}$$

di cui il lettore avvertirà la identità sostanziale con le equazioni (5).

Si chiamino ora  $S_y$  e  $S'_y$  la sottangente e la sunnormale relative all'asse delle  $y$ ,  $T_y$  e  $N_y$  le lunghezze delle corrispondenti tangente e normale. In forza della (8), essendo  $dy/dx = \operatorname{tg} \tau = \cot 2 \varphi$  si ottengono le seguenti espressioni semplicissime:

$$(13) \quad \begin{cases} S_y = -x \frac{d y}{d x} = -\frac{x}{\operatorname{tg} 2 \varphi}, & S'_y = x \frac{d x}{d y} = x \operatorname{tg} 2 \varphi \\ T_y = x \frac{d s}{d x} = \frac{x}{\operatorname{sen} 2 \varphi}, & N_y = x \frac{d s}{d y} = \frac{x}{\cos 2 \varphi}; \end{cases}$$

si ha pure

$$1 + \left( \frac{d y}{d x} \right)^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 2 \varphi}, \quad \left\{ 1 + \left( \frac{d y}{d x} \right)^2 \right\}^{1/2} = \frac{d s}{d x}$$

onde

$$\left[ 1 + \left( \frac{d y}{d x} \right)^2 \right]^{3/2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 2 \varphi} \frac{d s}{d x};$$

inoltre

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d \cot 2 \varphi}{d x} = -\frac{2}{\operatorname{sen}^2 2 \varphi} \frac{d \varphi}{d x}$$

dunque, detto  $R$  il raggio di curvatura,

$$R = \frac{1}{2} \frac{d s}{d \varphi}.$$

Ma, dalle

$$d x = n a \operatorname{tg}^{n-1} \varphi \cdot d \operatorname{tg} \varphi,$$

$$d y = \frac{n a}{2} (\operatorname{tg}^{n-2} \varphi - \operatorname{tg}^n \varphi) d \varphi$$

si trae

$$(14) \quad \frac{d s}{d \operatorname{tg} \varphi} = \frac{n a}{2} (\operatorname{tg}^{n-2} \varphi + \operatorname{tg}^n \varphi)$$

onde

$$(15) \quad R = \frac{n a \operatorname{tg}^n \varphi}{\operatorname{sen}^2 2 \varphi}$$

o anche

$$(15') \quad R = \frac{n a}{4} \operatorname{tg}^{n-2} \varphi \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2.$$

Integrando la (14) si trova:

$$s = \begin{cases} \frac{a}{2} \left[ \frac{n}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} \varphi + \frac{n}{n+1} \operatorname{tg}^{n+1} \varphi \right] + \text{cost.} & \text{se } n \neq 1 \\ \frac{a}{4} (\log \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi) & \text{se } n = 1; \end{cases}$$

queste danno la rettificazione della curva. Eliminando  $\operatorname{tg} \varphi$  fra esse e la (15') si otterrebbe l'equazione intrinseca della stessa. Si ha anche

$$\begin{aligned} \int x d y &= \frac{n a^2}{2} \int (\operatorname{tg}^{2n-2} \varphi - \operatorname{tg}^{2n} \varphi) d \operatorname{tg} \varphi = \\ &= \frac{n a^2}{2} \left[ \frac{\operatorname{tg}^{2n-1} \varphi}{2n-1} - \frac{\operatorname{tg}^{2n+1} \varphi}{2n+1} \right] + \text{cost.}; \end{aligned}$$

questa formola di quadratura suppone naturalmente  $n \neq \pm \frac{1}{2}$ ; le modificazioni relative a queste ipotesi speciali si assegnano con tutta facilità, onde lasciamo al lettore di trovarle. Altrettanto facciamo riguardo al calcolo del volume generato dalla rotazione della

curva attorno a  $Oy$ . E finiremo notando alcune proprietà della più semplice fra le curve rappresentate dall'equazione (12, 1<sup>a</sup>), quella cioè che corrisponde all'ipotesi  $n = 2$ . L'equazione citata diviene allora:

$$y = a \left[ 1 - \frac{x}{3a} \right] \sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Essa rappresenta una cubica simmetrica rispetto a  $Ox$ , passante per l'origine, avente per punto doppio quello di coordinate  $x = 3a$ ,  $y = 0$ , ove la curva ha per tangenti due rette formanti con  $Ox$  angoli eguali a  $\pi/6$ ; i punti  $x = 2$ ,  $y = \pm 2a/3$  sono punti di culminazione ed il punto all'infinito di  $Oy$  è un flesso, con la retta all'infinito per corrispondente tangente. Fatto il cambiamento di coordinate rappresentato dalle formole

$$\xi = \frac{p}{2} - x, \quad \eta = y \quad \text{ove} \quad p = \frac{2a}{3}$$

le equazioni (9) e (10) danno

$$\xi = \frac{p}{2} \frac{\cos 3\varphi}{\cos^3 \varphi}, \quad \eta = \frac{p}{2} \frac{\sin 3\varphi}{\cos^3 \varphi},$$

onde

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} 3\varphi, \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a}{2} \frac{1}{\cos^3 \varphi};$$

introducendo ora coordinate polari si ha

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \omega, \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \rho$$

quindi

$$\omega = 3\varphi, \quad \rho = \frac{p}{2} \frac{1}{\cos^3 \varphi}$$

ed eliminando  $\varphi$

$$\rho = \frac{p}{2} \frac{1}{\cos^3 \omega/3}$$

ossia

$$\rho^{-1/3} = \left[ \frac{p}{2} \right]^{-1/3} \cos \left[ -\frac{1}{3} \right] \omega.$$

La curva in questione è dunque una trisettrice di Catalan (Vol. I, p. 109).

<sup>1)</sup> Vedi SCHLÖMILCH, *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, II Th. (II Aufl., Leipzig 1874), p. 338, Esercizio 18.

### CAPITOLO III

#### Evolute ed Evolventi.

**276.** Tutte le normali ad una curva  $\Gamma$  sono tangenti ad una seconda curva  $\Gamma_1$ , la quale è il luogo dei centri di curvatura della curva  $\Gamma$ ; è la curva che Huygens ha per primo considerato nella III Parte della famosa sua opera *Horologium oscillatorium*, la cui prima redazione venne compiuta il 5 febbraio 1665; è la curva che si chiama *evoluta* di  $\Gamma$ , mentre questa, inversamente, si chiama *evolvente* (o *involuta*) di  $\Gamma_1$ . Ogni curva ha una determinata evoluta, mentre ha infinite evolventi.

Se s'immagina di stendere un filo sulla curva  $\Gamma_1$  fissandone un estremo a un punto qualunque della stessa, ogni altro suo punto descrive una delle  $\infty'$  evolventi di  $\Gamma_1$ , donde la ragione dell'esposta nomenclatura. I punti d'intersezione di una curva con la sua evoluta sono cuspidi della prima.

Supposto che  $\Gamma$  sia una curva algebrica d'ordine  $n$  e che

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

ne sia l'equazione, per ottenere l'equazione della sua evoluta, giova considerare questa come involuppo delle normali di  $\Gamma$ , cioè delle  $\infty'$  rette di equazione

$$(2) \quad \frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$X$  e  $Y$  essendo al solito coordinate correnti; detta equazione si ottiene pertanto eliminando  $x$ ,  $y$ ,  $\lambda$  fra la (1) e le derivate rispetto a  $x$  e  $y$  della funzione

$$(X-x) \frac{\partial f}{\partial y} - (Y-y) \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda f(x, y)$$

eguagliate a 0. Tali nuove equazioni sono:

$$(X-x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (Y-y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$(X-x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - (Y-y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Eliminando  $\lambda$  si trova:

$$(3) \quad (X-x) \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial x} \right\} -$$

$$- (Y-y) \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right\} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2.$$

L'equazione dell'evoluta si otterrà eliminando  $x$  e  $y$  fra le (1), (2), (3). Ora la (2) può sostituirsi con le due

$$(4) \quad X = x + \varrho \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y = y + \varrho \frac{\partial f}{\partial y};$$

$\varrho$  si otterrà dalla (3) e ha il seguente valore

$$(5) \quad \varrho = \frac{\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2}{\Delta} \quad \text{ove } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

Ciò prova che le (4) rappresentano l'evoluta delle (1) quando  $\varrho$  abbia questo valore e  $x, y$  soddisfino l'equazione (1).

Per ottenere l'espressione dell'ordine  $n_1$  dell'evoluta  $\Gamma_1$  in funzione di quello  $n$  della data curva  $\Gamma$ , cerchiamo il numero dei punti comuni a  $\Gamma_1$  e a una retta arbitraria

$$(6) \quad AX + BY + C = 0.$$

Sostituendo qui i valori (4) si trova

$$(7) \quad (Ax + By + C - \Delta) + \left[ A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} \right] \left[ \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right] = 0;$$

$n_1$  è quindi il numero dei punti delle intersezioni delle curve (1) e (7) che non cedono in punti multipli della prima. Ora essendo la (7) dell'ordine  $3(n-1)$  si vede che, se  $\Gamma$  non ha punti multipli, si ha  $n_1 = 3n(n-1)$ . Se invece l'origine  $O$  è un punto doppio di  $\Gamma$ , la (7) ha ivi pure un punto doppio con le stesse tangenti; ma se l'origine è una cuspidale, la (7) ha ivi un punto triplo con due tangenti coincidenti con la tangente cuspidale; nel primo caso  $O$  assorbe 6 intersezioni delle due curve e nel secondo 8. Emerge da ciò che, se la data curva ha  $d$  punti doppi e  $k$  cuspidi, si avrà

$$n_1 = 3n(n-1) - 6d - 8k.$$

Ora, se  $\alpha$  è il numero dei flessi di  $\Gamma$ , in virtù di una delle formole di Plücker si ha

$$\alpha = 3n(n-2) - 6d - 8k;$$

perciò

$$n_1 - \alpha = 3n \quad \text{ossia} \quad n_1 = 3n + \alpha.$$

Dunque: l'ordine dell'evoluta di una curva algebrica è in generale espresso dal triplo dell'ordine di questa aumentata del numero dei suoi flessi. Per determinarne la classe  $v_1$  basta trovare quante normali della data passino per un punto arbitrario  $(X, Y)$  cioè quante soluzioni non fisse abbiano le equazioni (1), (2). A tale scopo notiamo che la (2), nelle coordinate  $x, y$  rappresenta una curva di ordine  $n$  la quale passa per ogni punto doppio della data e così per ogni cuspidale, toccando ivi la corrispondente tangente. Ciò prova che si ha

$$v_1 = n^2 - 2d - 3k;$$

ora siccome

$$v = n(n-1) - 2d - 3k$$

si conclude

$$v_1 = n + v.$$

Dunque: la classe dell'evoluta di una curva algebrica è in generale espressa dalla somma dell'ordine di questa accresciuta della sua classe. Se poi si nota che la curva data e la sua evoluta sono dello stesso genere, si vede che si hanno elementi sufficienti per calcolare tutte le caratteristiche plückeriane dell'evoluta; si ha p. es. la seguente relazione fra i numeri  $k, k_1$  delle cuspidi delle due curve:

$$k_1 = k + 3n + 2\alpha^1.$$

<sup>1</sup> Sullo stesso argomento v. A. B. BASSET, *On parallel Curves and Evolutes* (Quart. Journ. of Math., T. XLVIII, 1917).

I numeri trovati subiscono modificazioni quando la data curva abbia speciali relazioni con gli elementi all'infinito<sup>1)</sup>; non potendo dilungarci più oltre su questo argomento, rinviando il lettore ai lavori relativi di Clebsch<sup>2)</sup>, Cayley<sup>3)</sup> e Halphen<sup>4)</sup>, osservando con quest'ultimo, che, almeno a partire da un certo posto, gli ordini e le classi delle evolute successive di una curva algebrica formano due progressioni aritmetiche con la stessa differenza.

**277.** Il processo che conduce da  $\Gamma$  a  $\Gamma_1$  è del genere di quelli di cui parliamo nell'esordio del presente Libro, onde si può considerare una serie di curve, infinita in due sensi, tale che ogni suo elemento sia evoluta di quello che lo precede ed evolvente di quello che lo segue. La rappresentazione analitica delle curve di siffatta serie riesce molto espressiva se si fa uso di coordinate intrinseche. Siano infatti  $s$  e  $R$  l'arco ed il raggio di curvatura della curva  $\Gamma$ ,  $s_1$  e  $R_1$  gli elementi analoghi di  $\Gamma_1$ ,  $\varepsilon$  e  $\varepsilon_1$  i relativi angoli di contingenza. Per definizione si ha:

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{R}, \quad \frac{d\varepsilon_1}{ds_1} = \frac{1}{R_1};$$

ma evidentemente

$$ds_1 = dR, \quad d\varepsilon_1 = d\varepsilon$$

onde

$$\frac{ds}{R} = \frac{dR}{R_1};$$

si conclude quindi

$$(8) \quad R_1 = R \frac{dR}{ds}, \quad s_1 = R + c,$$

$c$  essendo una costante che può sempre supporre nulla scegliendo convenientemente l'origine degli archi sull'evoluta.

Eliminando, mediante le (8),  $R$  e  $s$  dall'equazione intrinseca  $f(R, s) = 0$  di  $\Gamma$  si otterrà l'equazione intrinseca di  $\Gamma_1$ . Viceversa

<sup>1)</sup> SALMON-FIEDLER, *Höhere ebene Kurven*, II ed. (Leipzig 1882), p. 119.

<sup>2)</sup> *Ueber die Singularitäten algebraischer Curven* (G. di Crelle, T. LXIV, 1864).

<sup>3)</sup> *On the theory of the evolute* (Phil. Mag., T. XXIX, 1865; Mathem. Papers, T. V, p. 473).

<sup>4)</sup> V. gli ultimi due paragrafi del *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes* presentato all'Istituto di Francia nell'Aprile 1874 e pubblicato nel T. XXVI (1879) dei *Mém. prés. par divers savants etc.*

dalle (8) — in cui si sia fatto  $c = 0$  — si trae

$$(9) \quad R = s_1, \quad s = \int \frac{s_1 ds_1}{R_1},$$

e da queste si potrà dedurre, con un'eliminazione, l'equazione generale delle evolventi di una data curva.

Faremo subito un'applicazione di queste formole. Supponiamo che la curva  $\Gamma_1$  sia il cerchio di raggio  $a$ . Essendo dunque  $R_1 = a$  la (9, 2<sup>a</sup>) dà  $s = s_1^2/2a$ ; ma  $s_1 = R$  onde l'equazione intrinseca di  $\Gamma$ , cioè dell'evolvente del circolo di raggio  $a$  è

$$R^2 = 2as,$$

conformemente ad un risultato già stabilito (p. 128). Per trovare l'equazione intrinseca della seconda evolvente dello stesso circolo supporremo quindi  $R_1^2 = 2as_1$ ; la (2, 2<sup>a</sup>) darà

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int \sqrt{s_1} ds_1 = \frac{2\sqrt{s_1^3}}{3\sqrt{2a}},$$

o, per essere  $s_1 = R$ ,

$$R^3 = \frac{3^2}{2} a s^2,$$

e questa è l'equazione intrinseca della spirale di Sturm o di Norwich (v. p. 170). Similmente si otterrebbe l'equazione intrinseca della terza evolvente del circolo, della quarta ecc.; l'ispezione dei risultati così ottenuti induce a supporre che l'equazione intrinseca della  $(n-1)$ ma sia

$$(10) \quad R^n = \frac{n^{n-1} a}{(n-1)^n} s^{n-1};$$

lo dimostreremo coll'induzione completa, servendosi delle (1). Supponendo dunque

$$R_1^n = k s_1^{n-1},$$

ove, per brevità, si è posto

$$k = \frac{n^{n-1} a}{(n-1)!}$$

dalla (2, 2<sup>a</sup>) dedurremo

$$s = \frac{1}{k^{1/n}} \int s_1^{1/n} ds_1 = \frac{s_1^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n} k^{1/n}}$$

o, per essere  $s_1 = R$ ,

$$R^{n+1} = \left[ \frac{n+1}{n} \right]^n k s^n;$$

riponendo qui in luogo di  $k$  il suo valore si conclude

$$R^{n+1} = \frac{(n+1)^n a}{n^n} s^n.$$

Siccome questa nasce dalla (3) cambiando  $n$  in  $n+1$ , la stessa (3) risulta dimostrata in generale. Notiamo che siccome tutte le normali di un cerchio passano pel medesimo punto (il centro) così si può dire che il cerchio è l'evolvente del punto, e quindi che la (3) rappresenta l' $n^{\text{ma}}$  evolvente del punto.

La notevole classe di curve rappresentata dall'equazione (10) venne considerata dal Whewell nei primi suoi studi sopra la geometria intrinseca <sup>1)</sup> e molto più tardi dal Sylvester <sup>2)</sup>, il quale, dietro consiglio del Cayley, ne chiamò ogni elemento col nome di *Cyclode*; indipendentemente dai geometri inglesi ora citati se ne occuparono H. Onnen <sup>3)</sup> e E. Cesàro <sup>4)</sup>.

Le stesse curve sono suscettibili di un'altra rappresentazione analitica che si ottiene come segue <sup>5)</sup>: essendo in generale come vedemmo

$$R = \frac{ds}{d\varepsilon}, \quad ds_1 = dR, \quad d\varepsilon_1 = d\varepsilon, \quad R_1 = \frac{ds_1}{d\varepsilon_1}$$

si ha

$$R_1 = \frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{d^2s}{d\varepsilon^2};$$

<sup>1)</sup> *On the intrinsic equation of a curve and its application* (Trans. of the Cambr. phil. Soc., T. VIII, 1849, e IX, 1851).

<sup>2)</sup> *Note on the successive involute to a circle* (Phil. Mag., IV Serie, T. 36, 1868) e *Outline on the theory of reducible Cycloides* (Proc. of the Lod. math. Soc., T. II, 1869).

<sup>3)</sup> *Discussion d'un système de spirales d'après leurs équations essentielles* (Arch. néerland., T. X, 1873).

<sup>4)</sup> *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896), p. 33; ivi però, invece, delle (3), è scritto erroneamente  $R^{n+1} = \frac{n!}{n^n} a s^{n-1}$ .

<sup>5)</sup> W. J. CURRAN SHARP, *On the successive evolutes of a curve* (Messenger, T. IX, 1880).

similmente si trova per la seconda evoluta

$$R_2 = \frac{d^2R}{d\varepsilon^2}$$

e così via, in generale per la  $n^{\text{ma}}$

$$(11) \quad R_n = \frac{d^{n+1}s}{d\varepsilon^{n+1}};$$

ora, se questa  $n^{\text{ma}}$  evoluta è un punto, si ha  $R_n = 0$  onde integrando

$$(12) \quad s = a_0 \varepsilon^n + a_1 \varepsilon^{n-1} + \dots + a_{n-1} \varepsilon + a_n,$$

ove le  $a$  sono costanti arbitrarie, e questa rappresenta l' $n^{\text{ma}}$  evolvente del punto o la  $n-1^{\text{ma}}$  evolvente del cerchio. Notiamo che se fosse  $R_n = f(\varepsilon)$  si avrebbe per determinare la curva primitiva l'equazione differenziale lineare

$$(13) \quad \frac{d^{n+1}}{d\varepsilon^{n+1}} = f(\varepsilon);$$

ora indicando con  $S$  la soluzione generale e con  $S_0$  una particolare si ha

$$S = S_0 + a_0 \varepsilon^n + a_1 \varepsilon^{n-1} + \dots + a_n,$$

ove le  $a$  sono le costanti d'integrazione; ossia per la (4)

$$S - S_0 = s;$$

ciò prova che la differenza fra gli archi di due particolari  $n^{\text{me}}$  evolventi di una curva eguaglia l'arco di una  $(n-1)^{\text{ma}}$  evolvente di cerchio.

**278.** La considerazione dei raggi di curvatura successivi di una curva ha guidato il Timmermans <sup>1)</sup> alla scoperta di un punto notevole annesso ad ogni curva piana. Per ottenerlo partiamo dalle note relazioni

$$(14) \quad dx = \cos \tau \cdot ds, \quad dy = \sin \tau \cdot ds,$$

<sup>1)</sup> *Essai sur une nouvelle théorie des courbes déduites de la considération de leurs rayons de courbure* (Mém. de la Société de Lille, T. VI, 1828-29). Cfr. *Note sur une propriété des courbes planes d'après M. Timmermans par un Abonné* (Nouv. Ann., 2<sup>a</sup> Serie, T. II, 1863).

che legano le coordinate cartesiane ortogonali di un punto della curva all'arco  $s$  ed all'angolo  $\tau$  che la tangente forma coll'asse delle  $x$ . Ora se  $\varepsilon$  è l'angolo formato con quest'asse dalla normale si ha:  $\tau + \varepsilon = \pi/2$  onde  $d\varepsilon = -d\tau$ , e si vede che la formola  $R_1 = ds/d\varepsilon$  equivale all'altra  $ds = -R_1 d\tau$ , in virtù della quale le (1) divengono

$$(15) \quad dx = -R_1 \cos \tau \cdot d\tau, \quad dy = -R_1 \sin \tau \cdot d\tau$$

Osserviamo anche che le formole

$$R_{n+1} = \frac{d s_n}{d \varepsilon_n}, \quad d R_n = d s_n$$

danno in generale

$$d R_n = -d R_{n+1} \cdot d \tau.$$

Ciò posto, applicando l'integrazione per parti alla prima delle (2) e servendosi delle relazioni ora citate, si deduce:

$$\begin{aligned} x &= \text{cost.} - \int R_1 \cos \tau d\tau = \text{cost.} - R_1 \sin \tau - \int R_2 \sin \tau \cdot d\tau \\ &= \text{cost.} - R_1 \sin \tau + R_2 \cos \tau + \int R_3 \cos \tau d\tau = \dots \end{aligned}$$

cioè

$$x = \text{cost.} + (R_2 - R_4 + R_6 - \dots) \cos \tau - (R_1 - R_3 + R_5 - \dots) \sin \tau$$

Se si prende per limite inferiore dell'integrazione il punto in cui  $\tau = \pi/2$  e si indica in genere con  $r_i$  il valore di  $R_i$  in quel punto, si conclude:

$$x = (R_2 - R_4 + R_6 + \dots) \cos \tau - (R_1 - R_3 + R_5 - \dots) \sin \tau + (r_1 - r_3 + r_5 - \dots).$$

Tutte queste serie in parentesi contengono un numero infinito di termini; se si suppongono assolutamente convergenti se ne potrà considerare la somma; ponendo quindi

$$\begin{aligned} R_2 - R_4 + R_6 - R_8 + \dots &= S_p, \quad R_1 - R_3 + R_5 - R_7 + \dots = S_d \\ r_2 - r_4 + r_6 - r_8 + \dots &= s_p, \quad r_1 - r_3 + r_5 - r_7 + \dots = s_d \end{aligned}$$

si otterrà

$$\left. \begin{aligned} x &= S_p \cos \tau - S_d \sin \tau + s_d \\ y &= S_p \sin \tau + S_d \cos \tau - s_p \end{aligned} \right\} (16)$$

Similmente si trova

Ora le equazioni della tangente e della normale alla curva considerata nel punto  $(x, y)$  essendo

$$X \sin \tau - Y \cos \tau - (x \sin \tau - y \cos \tau) = 0,$$

$$X \cos \tau + Y \sin \tau - (x \cos \tau + y \sin \tau) = 0,$$

grazie ai valori (3) si può scrivere

$$(X - s_d) \sin \tau - (Y + s_p) \cos \tau + S_d = 0,$$

$$(X - s_d) \cos \tau + (Y + s_p) \sin \tau - S_p = 0.$$

Queste equazioni provano che il punto  $P(s_d, -s_p)$  ha dalle tangente e normale considerate distanze espresse risp. da  $S_d$  e  $S_p$ ; e così rimane stabilito il seguente

**TEOREMA.** *In un punto qualunque M di una curva piana siano costruiti i raggi di curvatura successivi  $R_1 R_2 R_3 \dots$ ; esiste nel piano della curva un punto tale che se si abbassano da esso le perpendicolari alla tangente ed alla normale in M alla curva, le loro lunghezze sono espresse la prima da  $R_1 - R_3 + R_5 - \dots$  e la seconda da  $R_2 - R_4 + R_6 - \dots$ , purchè queste serie infinite siano entrambe assolutamente convergenti. Questo punto, quando è determinato, è situato a distanza finita e porta il nome di polo della curva.*

**279.** Lo studio delle evolute ed evolventi successive si può anche fare comodamente con un altro metodo la cui prima invenzione appartiene a W. P. Hiern<sup>1)</sup>, ma che venne poi popolarizzata a partire dal 1869 da J. A. Serret mediante il suo *Cours de Calcul différentiel et intégral*<sup>2)</sup>, e quindi svolto ed applicato da altri<sup>3)</sup>; ecco in che cosa consiste:

Sia  $\tau$  l'angolo fatto da una tangente alla curva  $\Gamma$  con l'asse delle  $x$ ; la distanza dell'origine da quella tangente sarà una determinata funzione  $f(\tau)$  di  $\tau$ , onde la tangente stessa si potrà rappresentare coll'equazione (equazione magica della retta)

$$(17) \quad U \equiv y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = 0.$$

Data, o fissata ad arbitrio la funzione  $f$ , facendo variare  $\tau$  da  $-\infty$  a  $+\infty$  la (6) rappresenterà le infinite tangenti della corri-

<sup>1)</sup> On the magical equation to the tangent of a curve (Quart. Journ., T. VI, 1864).

<sup>2)</sup> V. T. I, p. 310 e seg. della 2ª ed. (Paris 1879).

<sup>3)</sup> NICOLAÏDES, *Analectes on Mémoires et Notes sur les diverses parties des mathématiques*, VII Livraison (Athènes 1872); MANSION, *Nouv. Corr. Math.*, T. I, 1874-75.

spondente curva  $\Gamma$ , onde si può ritenere che questa sia rappresentata dalla (6) stessa; variando  $f$  nasceranno così tutte le curve del piano. Per ottenere l'equazione locale di  $\Gamma$  basterà combinare la (6) con la sua derivata rispetto a  $\tau$ , cioè (se  $D$  indica l'operazione di differenziazione rispetto a  $\tau$ ) con la seguente:

$$(18) \quad D U \equiv -y \operatorname{sen} \tau - x \cos \tau - f'(\tau) = 0.$$

L'equazione  $D U = 0$  rappresenta una retta che passa pel punto di contatto della retta  $U = 0$  col proprio involuppo ed è perpendicolare a questa retta, cioè una retta normale a  $\Gamma$ . Ciò prova che nello stesso modo che  $U = 0$  rappresenta la curva  $\Gamma$ , l'equazione  $D U = 0$  rappresenta la curva  $\Gamma_1$  evoluta di  $\Gamma$ ; e la rappresentazione consueta di  $\Gamma_1$  si otterrà associando la (7) alla sua derivata rispetto a  $\tau$ , cioè all'equazione

$$(19) \quad D^2 U \equiv -y \cos \tau + x \operatorname{sen} \tau - f''(\tau) = 0.$$

Invece per rappresentare una curva  $\Gamma_{-1}$  evolvente di  $\Gamma$  si moltiplichino la (17) per  $d\tau$  e s'integrino; indicando con  $D^{-1}$  l'operazione inversa di  $D$  il risultato potrà scriversi come segue:

$$(20) \quad D^{-1} U \equiv y \operatorname{sen} \tau + x \cos \tau - \int f(\tau) d\tau = 0;$$

al variare della costante d'integrazione quest'equazione rappresenta le  $\infty'$  evolventi di  $\Gamma$ ; sono curve aventi le medesime normali e di cui tratteremo nel Capitolo seguente. Intanto, generalizzando il metodo ed i risultati precedenti, si vede che, scrivendo  $D^0 U$  invece di  $U$ , la curva  $\Gamma_m$ , evoluta  $m^{\text{ma}}$  di  $\Gamma$ , è determinata dalle due equazioni

$$(21) \quad D^m U = 0, \quad D^{m+1} U = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

mentre la curva  $\Gamma_{-m}$ , evolvente  $m^{\text{a}}$  di  $\Gamma$  lo è invece dalle equazioni

$$(22) \quad D^{-m+1} U = 0, \quad D^{-m} U = 0 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Emerge dalle equazioni (17) e (19) che le distanze dall'origine di due tangenti corrispondenti di  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono risp.  $f(\tau)$  e  $-f''(\tau)$ ; queste due tangenti sono parallele e la loro distanza è data da  $f(\tau) + f''(\tau)$ ; ma questa distanza è il raggio di curvatura  $R$  di  $\Gamma$ , dunque

$$(23) \quad R = f(\tau) + f''(\tau).$$

o se si vuole, usando una scrittura di significato evidente,

$$(23') \quad R = (D^0 + D^2) f(\tau);$$

da queste si può dedurre che nel punto  $(\tau)$  la curva è concava o convessa verso l'origine secondo il prodotto  $R \cdot f(\tau)$  è *negativo* o *positivo*<sup>1)</sup>.

Ragionando similmente sulle equazioni (21) e (22) si vede che il raggio di curvatura  $R_{\pm m}$  della curva  $\Gamma_{\pm m}$  è dato dalla relazione

$$(24) \quad R_{\pm m} = (D^{\pm m} + D^{\pm m+2}) f(\tau),$$

qualunque sia l'intero  $m$ .

Di natura analoga alle considerazioni ora svolte sono le seguenti che guidano alla *determinazione delle curve che sono simili alle loro  $n^{\text{mo}}$  evolute*.

**280.** Per una curva  $\Gamma$  si chiami  $R$  il raggio di curvatura in un punto e  $\tau$  l'angolo che la corrispondente normale forma con una retta fissa, che potremo supporre essere l'asse delle  $x$ ,  $d\tau$  sarà l'angolo di contingenza e quindi

$$(25) \quad R = \frac{ds}{d\tau}.$$

Se si conosce l'espressione  $f(\tau)$  di  $R$  in funzione di  $\tau$ ,  $\Gamma$  è determinata a meno di una traslazione; infatti dalle equazioni

$$R = f(\tau), \quad dx = \cos \tau \cdot ds, \quad dy = -\operatorname{sen} \tau \cdot ds$$

si trae

$$dx = f(\tau) \cdot \cos \tau d\tau, \quad dy = -f(\tau) \cdot \operatorname{sen} \tau d\tau$$

onde

$$(26) \quad x = \alpha + \int f(\tau) \cdot \cos \tau d\tau, \quad y = \beta - \int f(\tau) \cdot \operatorname{sen} \tau d\tau,$$

ove  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti arbitrarie; e queste dimostrano l'asserto. Insieme alla  $\Gamma$  consideriamo la curva  $\Gamma'$  determinata dalla relazione  $R = l f(\tau + \lambda)$ ,  $l$  e  $\lambda$  essendo costanti qualunque; sussisteranno le equazioni seguenti, analoghe alle (26)

$$x' = \alpha' + l \int f(\tau + \lambda) \cos \tau d\tau, \quad y' = \beta' - l \int f(\tau + \lambda) \operatorname{sen} \tau d\tau;$$

<sup>1)</sup> GRANE, *Ueber Curven mit gleichartigen successiven Developpoiden* (Diss. Lund. 1894).

o, ponendo  $\tau + \lambda = \tau'$ ,

$$x' = \alpha' + l \int f(\tau') \cos(\tau' - \lambda) d\tau', \quad y' = \beta' - l \int f(\tau') \sin(\tau' - \lambda) d\tau'$$

e finalmente applicando le (26)

$$\frac{x' - \alpha'}{l} = (x - \alpha) \cos \lambda - (y - \beta) \sin \lambda,$$

$$\frac{y' - \beta'}{l} = (x - \alpha) \sin \lambda + (y - \beta) \cos \lambda.$$

Queste relazioni dimostrano che  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  si ottengono una dall'altra mediante una similitudine accompagnata da un movimento del piano; prescindendo da questo potremo dire che le relazioni  $R = f(\tau)$  e  $R = l f(\tau + \lambda)$  appartengono a due curve direttamente simili, in particolare a due curve direttamente eguali se  $l = 1$ . Similmente si dimostra che le relazioni  $R = f(\tau)$ ,  $R = l f(\lambda - \tau)$  determinano due curve inversamente simili, in particolare due curve inversamente eguali supposto  $l = 1$ .

Premesse queste osservazioni indichiamo con  $R_k, s_k, \tau_k$  le quantità analoghe alle  $R, s, \tau$  relative alla curva  $\Gamma_k$  che è  $k$ -ma evoluta di  $\Gamma$ . Avremo:

$$\tau_1 = \tau + \frac{\pi}{2}, \quad \tau_2 = \tau_1 + \frac{\pi}{2}, \quad \dots, \quad \tau_n = \tau_{n-1} + \frac{\pi}{2},$$

onde

$$d\tau = d\tau_1 = \dots = d\tau_n, \quad \tau_n = \tau + n \frac{\pi}{2};$$

inoltre

$$ds_1 = dR, \quad ds_2 = dR_1, \quad \dots, \quad ds_n = dR_{n-1},$$

$$R_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1}, \quad R_2 = \frac{ds_2}{d\tau_2}, \quad \dots, \quad R_n = \frac{ds_n}{d\tau_n};$$

perciò

$$R_1 = \frac{dR}{d\tau}, \quad R_2 = \frac{dR_1}{d\tau}, \quad \dots, \quad R_n = \frac{dR_{n-1}}{d\tau},$$

epperò

$$R_n = \frac{d^n R}{d\tau^n}$$

Ciò prova che se  $R = f(\tau)$  è l'equazione che determina la curva

$\Gamma$ , per  $\Gamma_n$  si avrà  $R_n = f^{(n)}(\tau)$  ovvero

$$R_n = f^{(n)} \left[ \tau_n - n \frac{\pi}{2} \right]$$

Emerge da ciò che, se  $\Gamma$  e  $\Gamma_n$  sono fra loro simili direttamente od inversamente, la funzione  $f$  soddisferà all'equazione:

$$f^{(n)} \left[ \tau_n - n \frac{\pi}{n} \right] = l f(\lambda \pm \tau_n)$$

o anche, introducendo due nuove costanti,

$$f^{(n)}(\tau) = k f(\alpha \pm \tau).$$

Questa è l'equazione differenziale del problema: per integrarla fa mestieri distinguere il caso in cui sussista il segno + dall'altro. In quest'ultimo caso, quando cioè sia

$$(27) \quad f^{(n)}(\tau) = k f(\alpha - \tau)$$

differenziando  $n$  volte si ottiene

$$f^{(2n)}(\tau) = (-1)^n k f^{(n)}(\alpha - \tau);$$

ma l'equazione precedente dà

$$f^{(n)}(\alpha - \tau) = k f(\tau)$$

dunque

$$f^{(2n)}(\tau) = (-1)^n k^2 f(\tau).$$

La funzione  $f$  soddisfa quindi ad un'equazione differenziale lineare d'ordine  $2n$  a coefficienti costanti;  $f$  sarà quindi la somma di  $2n$  termini della forma  $A e^{m\tau}$ ,  $m$  essendo radice dell'equazione caratteristica  $m^{2n} = (-1)^n k^2$  e  $A$  costante; di queste  $2n$  costanti  $n$  soltanto sono arbitrarie, le altre si determineranno ricorrendo alla equazione primitiva (27).

Nel caso invece in cui si abbia

$$(28) \quad f^{(n)}(\tau) = k f(\alpha + \tau),$$

posto  $f(\tau) = \Sigma A e^{m\tau}$ , si vede che ogni termine di questa somma deve soddisfare questa equazione;  $A$  è arbitrario, mentre  $m$  è radice dell'equazione  $m^n = k e^{m\alpha}$ . Ora siccome questa equazione può avere  $0, 1, 2, 3$  o radici reali ed infinite complesse, così una funzione  $f$

soddisfacente la (28) conterrà un numero finito (0, 1, 2 o 3) termini del tipo  $A e^{m\tau}$  e infiniti del tipo  $B e^{\beta\tau} \operatorname{sen}(\gamma\tau + \delta)$ ; nel caso poi che quell'equazione in  $m$  abbia due radici eguali ci saranno anche termini della forma  $e^{m\tau} (A_0 + A_1 \tau)$ .

Il problema potendosi ritenere così risolto almeno nelle sue linee generali<sup>1)</sup>, applicheremo i risultati ottenuti ad alcuni casi speciali:

I. Sia  $R = a e^{a\tau}$ . Essendo  $f(\tau) = a e^{a\tau}$  sarà  $f^{(n)}(\tau) = a^n e^{a\tau}$ ; scelto quindi un numero  $\kappa$  tale che sia  $a^n = e^{a\kappa}$  potremo scrivere  $f^{(n)}(\tau) = a e^{a(n+\tau)} = f(\kappa + \tau)$ , onde la curva è eguale a tutte le sue evolute; se invece si sceglie  $\kappa$  per modo che risulti  $a^n = a e^{a\kappa}$ , si avrà  $f^{(n)}(\tau) = a^2 e^{a(\kappa+\tau)} = a f(\kappa + \tau)$ , onde la stessa curva è anche simile a tutte le sue evolute. Per vedere di quale curva si tratti notiamo che essendo

$$R = \frac{d s}{d \tau} = a e^{a\tau}, \text{ si ha } s + c = \frac{a}{a} e^{a\tau}$$

e quindi  $R = a(s + c)$ , che è l'equazione intrinseca di una spirale logaritmica (v. p. 65).

II. Sia  $R = B(\operatorname{sen} \beta\tau + \beta')$ . Si può supporre  $\beta' = 0$  onde  $f(\tau) = B \operatorname{sen} \beta\tau$ ,  $f^{(n)}(\tau) = \beta^n B \operatorname{sen}(\beta\tau + n\pi/2) = \beta^n f(\tau + n\pi/2\beta)$  onde la curva è simile a tutte le sue evolute. Si ha:

$$\frac{d s}{d \tau} = B \operatorname{sen} \beta\tau \text{ onde } s = -\frac{B}{\beta} \cos \beta\tau;$$

essendo pertanto

$$\operatorname{sen} \beta\tau = \frac{R}{B}, \quad \cos \beta\tau = -\frac{\beta s}{B}$$

si conclude che l'equazione intrinseca della curva è  $R^2 + \beta^2 s^2 = B^2$ , la curva stessa è dunque in generale una epicicloide (p. 114), ma è una cicloide quando  $\beta = 1$  (p. 90).

<sup>1)</sup> Questo problema fu risolto per primo da EULERO (*Investigatio curvarum quae evolutas suas similes producunt*, Comment. Petrop., T. XII, 1750; *Investigatio curvarum quae similes sint suis evolutis vel primis, vel secundis, vel tertiis, vel adeo ordinis cujuscumque*, Nova Acta Petrop., T. I, 1787) con un concetto non sostanzialmente diverso da quello usato nel testo; la forma qui adottata si trova nella memoria di PUISEUX, *Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes* (Journ. de Math., T. IX, 1844). Il metodo di risoluzione tenuto dal SALMON nella prima edizione (1852) delle sue *Higher curves* ritrovasi nella nota di P. FRANKLIN, *On curves whose evolutas are similar curves* (Amer. math. Monthly, T. XXVIII, 1921). Per le curve di equazione intrinseca della forma  $aR^n + bs^m = c$  il problema era stato trattato in una nota dallo stesso titolo (Id., T. XXV, 1920) di G. K. LIGHT e aveva condotto a curve cicloidalì e alla spirale logaritmica.

III. Sia  $R = A [e^{m\tau} \pm e^{m(n-\tau)}]$ . Essendo in tal caso

$$\frac{d s}{d \tau} = A [e^{m\tau} \pm e^{m(n-\tau)}] \text{ si ha } s = A \left[ \frac{e^{m\tau}}{m} \mp \frac{e^{m(n-\tau)}}{m} \right].$$

Le due equazioni

$$e^{m\tau} \pm e^{m(n-\tau)} = R/A, \quad e^{m\tau} \pm e^{m(n-\tau)} = ms/A$$

danno

$$R^2 - m^2 s^2 = A^2 e^{2m\tau},$$

equazione intrinseca di una pseudocicloide (p. 135).

IV. Finalmente l'equazione  $R = A e^{m\tau} \operatorname{sen} n\tau$  appartiene a una curva più generale della spirale logaritmica e degli epicicloidi, ma che divide con queste curve la proprietà di essere simile a tutte le sue evolute; per quanto ci consta non fu ancora studiata.

Le curve che sono simili alle loro evolute d'ordine pari si incontrano risolvendo la seguente questione<sup>1)</sup>: Determinare una curva  $\Gamma$  tale che per ogni suo punto  $M$  i corrispondenti punti  $C_2$  e  $C_4$  della seconda e quarta evoluta stiano sopra una retta passante per  $M$ . Ove ciò accada su questa retta staranno anche gli analoghi punti  $C_6, C_8, \dots$  mentre i punti  $C_1, C_3, \dots$  si troveranno sopra una seconda retta passante per  $M$  e formante con la suddetta angolo costante; tutte le evolute di ordine pari di  $\Gamma$  saranno fra loro simili e altrettanto accadrà per quelle d'ordine dispari; e l'equazione intrinseca di  $\Gamma$  avrà una delle forme:

$$R^2 = 4 ab + (ms + k)^2,$$

$$R^2 = a^2 - (ms + k)^2.$$

La considerazione dei centri di curvatura successivi dà luogo, oltrechè alle evolute, ad altre curve. Infatti HATON de la Goupillière ha stabilito delle formole che danno le coordinate del punto  $C_k$  che corrisponde al punto  $M$  di  $\Gamma$  nella  $k$ -ma evoluta rispetto alla tangente ed alla normale in  $M$  assunti come assi cartesiani; se fra quelle due formole si elimina  $k$  si otterrà una curva su cui si trovano tutti gli infiniti punti  $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots$ : è una delle nuove curve annunciate<sup>2)</sup>; nel caso in cui si parta da una spirale logaritmica si giunge a una curva della stessa specie. Un'altra è il luogo

<sup>1)</sup> PIRONDINI, *Alcune questioni sulle evolute successive di una linea piana* (Rend. dell'Acc. di Napoli, 2ª Serie, T. V, 1891).

<sup>2)</sup> HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Des centres de courbure successifs* (G. di Liouville, 2ª Serie, T. IV, 1857 o *Mémoires divers*, 11 éd., Paris 1909, p. 33).

del baricentro del gruppo  $C_1 C_2 \dots C_k$  al variare del punto  $M$  a cui esso corrisponde <sup>1)</sup>).

Notiamo finalmente che le evolute successive di una curva tendono ad una forma limite che fu determinata da Giovanni Bernoulli: è una cicloide <sup>2)</sup>).

<sup>1)</sup> V. la nota dello stesso autore, *Centre des moyennes distances des centres de courbure successifs* (C. R., 21 novembre 1892 o *Mém. diverses*, p. 45).

<sup>2)</sup> J. BERNOULLI, *Opera omnia*, T. IV (Lausanne et Genevae, 1742, p. 980 e segg.). V. anche POISSON (Journ. Ec. Polyt., 18 Cah. 1820; ivi è citata una memoria inedita di LAGRANGE esistente nella Biblioteca dell'Istituto di Francia) e H. BURCKHARDT, *Encyklop. der math. Wiss.*, II Bd., I Tl., II Hälfte, Leipzig 1904-1916, p. 1353-4).

## CAPITOLO IV

### Generalizzazioni delle Evolute e delle Evolventi.

**281.** La relazione fra due curve che si esprime dicendo che una è l'evoluta dell'altra o questa una evolvente della prima, potendosi considerare da parecchi differenti punti di vista, si può generalizzare in vari modi ed in vari modi venne effettivamente generalizzata: faremo cenno dei principali.

I. Se si considera l'evoluta di una curva  $\Gamma$  come l'inviluppo delle normali si è naturalmente condotti a considerare l'inviluppo  $\Gamma_a$  delle rette che tagliano  $\Gamma$  sotto angolo costante  $\alpha$  <sup>1)</sup>. Che siffatta generalizzazione dell'evoluta si presenti spontaneamente è storicamente provato dall'essere stata essa compiuta poco dopo la pubblicazione dell'*Horologium oscillatorium*: giacchè portano la data 1709 due memorie in cui il celebre fisico Reaumur gettò i fondamenti per lo studio di quegli inviluppi, stabilendo un teorema che è tuttora il pernio della loro teoria <sup>2)</sup>. Gli inviluppi stessi riceverono, alla loro nascita, il nome di « développées imparfaites » <sup>3)</sup>, altri si servì di quello di « développées obliques » <sup>4)</sup>; ma quello più adoperato è il nome *sviluppidi*, o *evolutoidi*, suggerito da Lancret in una delle sue memorie <sup>5)</sup>.

<sup>1)</sup> *Esempio*:  $\Gamma$  sia una spirale logaritmica, cioè una traiettoria obliqua di un fascio di raggi. Le rette secanti sotto un dato angolo  $\Gamma$ , segheranno sotto angolo costante anche i raggi di questo fascio, epperò invilupperanno una seconda spirale logaritmica.

<sup>2)</sup> *Méthode générale pour déterminer le point d'intersection de deux lignes infiniment proches qui rencontrent une courbe donnée vers le meme côté sous des angles égaux, moindres ou plus grands qu'un droit* (Mém. de l'Acad. des Sciences, MDCCIX). *Formules générales pour déterminer le point d'intersection de deux lignes droites infiniment proches, qui rencontrent une courbe quelconque vers le meme côté sous des angles égaux* (Ivi).

<sup>3)</sup> FONTENELLE, *Histoire de l'Acad. des Sciences*, année MDCCIX, p. 65.

<sup>4)</sup> Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873), p. 77.

<sup>5)</sup> *Mémoire sur les développées des courbes planes* (Mém. des Sav. Étr., T. II, 1811).

Il teorema di Reaumur testè citato si può dimostrare nel seguente modo: Sia  $f(\xi, \eta) = 0$  l'equazione di una curva  $\Gamma$ ; una retta che incontri questa sotto l'angolo  $\alpha$  ha per equazione

$$(1) \quad (x - \xi) \left[ 1 - \frac{d\eta}{d\xi} \operatorname{tg} \alpha \right] + (y - \eta) \left[ \operatorname{tg} \alpha + \frac{d\eta}{d\xi} \right] = 0;$$

la sviluppoide d'angolo  $\alpha$  non è che l'involuppo di questa retta. Ora differenziando rispetto a  $\xi$  la (1) si ottiene:

$$(2) \quad -(x - \xi) \operatorname{tg} \alpha + y - \eta = \frac{1 + \left[ \frac{d\eta}{d\xi} \right]^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}$$

Combinando la (1) con la (2) si trova:

$$(3) \quad x - \xi = \cos^2 \alpha \frac{1 + \left[ \frac{d\eta}{d\xi} \right]^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}} \left[ \operatorname{tg} \alpha + \frac{d\eta}{d\xi} \right],$$

$$y - \eta = \cos^2 \alpha \frac{1 + \left[ \frac{d\eta}{d\xi} \right]^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}};$$

e queste equazioni dànno le coordinate di un punto qualunque  $P(x, y)$  della sviluppoide  $\Gamma_\alpha$  mediante le coordinate del punto corrispondente  $M(\xi, \eta)$  della curva  $\Gamma$ . Ora da esse si trae:

$$\overline{x - \xi^2} + \overline{y - \eta^2} = \cos^2 \alpha \frac{\left\{ 1 + \left[ \frac{d\eta}{d\xi} \right]^2 \right\}^{3/2}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}};$$

detto quindi  $R$  il raggio di curvatura di  $\Gamma$  in  $M$  se ne deduce

$$PM = R \cos \alpha$$

e questa dice: *Se C è il centro di curvatura nel punto M della curva  $\Gamma$ ,*

proiettandolo sulla obliqua di angolo  $\alpha$  relativa allo stesso punto M, si otterrà il punto di contatto di quell'obliqua col proprio involuppo. È questo il teorema di Reaumur; esso conduce ad una semplicissima costruzione per punti di qualsivoglia sviluppoide.

Se la curva data è un'ellisse, la sviluppoide è una curva parallela a un astroide<sup>1)</sup>.

**282.** Nella teoria delle sviluppoidi trova un'applicazione assai elegante l'equazione magica che già sfruttammo nella teoria delle evolute (v. p. 289)<sup>2)</sup>. Supponiamo, infatti, che la curva  $\Gamma$  sia l'involuppo delle  $\infty'$  rette che, al variare di  $\tau$ , sono rappresentate dalla equazione

$$T \equiv y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = 0;$$

l'equazione locale di  $\Gamma$  nascerà combinando quest'equazione con la sua derivata rispetto a  $\tau$ , che è

$$T' \equiv -y \sin \tau - x \cos \tau - f'(\tau) = 0.$$

Ora se si considera l'equazione

$$U \equiv T \cos \alpha + T' \sin \alpha = 0$$

si avrà la rappresentazione analitica della retta condotta pel punto di contatto della  $T = 0$  e formante con questa l'angolo  $\alpha$ ; l'involuppo della retta  $U = 0$  è pertanto la sviluppoide  $\Gamma_\alpha$  d'angolo  $\alpha$  della curva  $\Gamma$ . Similmente la retta

$$V \equiv U \cos \beta + U' \sin \beta = 0$$

involupperà la sviluppoide d'angolo  $\beta$  della curva  $\Gamma_\alpha$ ; potremo per analogia indicarla con  $\Gamma_{\alpha, \beta}$ . Osserviamo che sostituendo in quest'ultima a  $U$  il suo valore essa diviene

$$V \equiv T \cos \alpha \cos \beta + T' \sin(\alpha + \beta) + T'' \sin \alpha \sin \beta = 0;$$

la funzione  $V$  è in conseguenza simmetrica in  $\alpha, \beta$ ; ciò prova che alla curva  $\Gamma_{\alpha, \beta}$  si sarebbe giunti anche cercando la sviluppoide di angolo  $\alpha$  della sviluppoide  $\Gamma_\beta$ . Questo fatto importante (che è designato per solito col nome di *teorema di Lancret*) può esprimersi dicendo che le due sviluppoidi  $\Gamma_{\alpha, \beta}$  e  $\Gamma_{\beta, \alpha}$  coincidono; se quindi si

<sup>1)</sup> F. GOMES TEIXEIRA. *Sur les développées de l'ellipse* (Nouv. Ann. de math., IV Ser., T. XIII, 1913).

<sup>2)</sup> MANSION, *Principes de la théorie des développées des courbes planes* (Nouv. Corr. Math., T. V, 1879).

designa col simbolo  $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\dots}$  la curva che nasce costruendo la sviluppoide  $\Gamma_\alpha$  d'angolo  $\alpha$  di  $\Gamma$ , poi la sviluppoide  $\Gamma_{\alpha,\beta}$  d'angolo  $\beta$  di  $\Gamma_\alpha$ , poi la sviluppoide  $\Gamma_{\alpha,\beta,\gamma}$  d'angolo  $\gamma$  di  $\Gamma_{\alpha,\beta}$ , e così via, si vedrà che è lecito di permutare comunque gli angoli  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$  senza alterare la curva risultante.

L'equazione  $U = 0$  scritta esplicitamente si presenta sotto la forma seguente

$$y \cos(\tau + \alpha) - x \sin(\tau + \alpha) = \cos \alpha f(\tau) + \sin \alpha f'(\tau),$$

ovvero, ponendo  $\tau + \alpha = \theta$ ,

$$\cos \alpha \cdot f(\theta - \alpha) + \sin \alpha f'(\theta - \alpha) = F(\theta),$$

essendo

$$F(\theta) = y \cos \theta - x \sin \theta.$$

Se quindi si chiama  $R_\alpha$  il raggio di curvatura di  $\Gamma_\alpha$  (come s'indicò con  $R$  quello di  $\Gamma$ ) e si applicano alcuni dei risultati esposti nel n. 279, si ottiene

$$R_\alpha = F(\theta) + F''(\theta) = \cos \alpha f(\theta - \alpha) + \sin \alpha f'(\theta - \alpha) + \cos \alpha f''(\theta - \alpha) + \sin \alpha f'''(\theta - \alpha)$$

$$= \cos \alpha [f(\tau) + f''(\tau)] + \sin \alpha \frac{d}{d\tau} [f(\tau) + f''(\tau)];$$

ora  $f(\tau) + f''(\tau) = R$ , dunque

$$(4) \quad R_\alpha = R \cos \alpha + \frac{dR}{d\tau} \sin \alpha.$$

Questa elegante relazione va sotto il nome di *formola di Habich*<sup>1)</sup>; volendo mettere in evidenza l'angolo fatto dalle tangenti della sviluppoide, non con le tangenti, ma con le normali della curva data, bisogna e basta cambiare nella precedente  $\alpha$  in  $\pi/2 - \alpha$ , essa viene quindi

$$(4') \quad R_\alpha = R \sin \alpha + \frac{dR}{d\tau} \cos \alpha.$$

La formola di Habich abilita a trovare l'equazione intrinseca di  $\Gamma_\alpha$  conoscendo quella di  $\Gamma$ ; si osservi infatti che gli angoli di contingenza per  $\Gamma$  e per  $\Gamma_\alpha$  sono eguali, onde

$$d\tau = d\tau_\alpha;$$

<sup>1)</sup> *Les Mondes*, T. XIX, 1869, p. 33.

essendo in generale poi

$$R = \frac{ds}{d\tau}, \quad R_\alpha = \frac{ds_\alpha}{d\tau_\alpha}$$

si hanno tre relazioni le quali, insieme alla (4) ed all'equazione di  $\Gamma$ , formano un sistema da cui si potranno eliminare  $R, s, \tau, \tau_\alpha$  e ottenere quindi la cercata equazione fra  $R_\alpha$  e  $s_\alpha$ .

Applichiamo questo procedimento all'epicloide di equazione intrinseca

$$(5) \quad R^2 + \mu^2 s^2 = c^2.$$

Scrivendo questa come segue

$$\left[ \frac{ds}{d\tau} \right]^2 + \mu^2 s^2 = c^2$$

ne trarremo

$$d\tau = \frac{ds}{\sqrt{c^2 - \mu^2 s^2}}$$

onde integrando

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{\mu} \arcsin \frac{\mu s}{c}$$

ossia, poichè  $\tau_\alpha = \tau + \text{cost.}$ ,

$$(6) \quad s = \frac{c}{\mu} \sin \mu (\tau_\alpha - \tau'_0)$$

$\tau'_0$  essendo una nuova costante. Ora la (4) può scriversi

$$R_\alpha = \frac{ds}{d\tau_\alpha} \cos \alpha + \frac{d^2 s}{d\tau_\alpha^2} \sin \alpha$$

onde applicando la (6)

$$R_\alpha = c \left\{ \cos \alpha \cos \mu (\tau_\alpha - \tau'_0) - \mu \sin \alpha \sin \mu (\tau_\alpha - \tau'_0) \right\}.$$

Essendo poi  $ds_\alpha = R_\alpha \cdot d\tau_\alpha$ , una nuova integrazione con scelta opportuna della costante arbitraria, dà

$$\mu s_\alpha = c \left\{ \cos \alpha \sin \mu (\tau_\alpha - \tau'_0) + \mu \sin \alpha \cos \mu (\tau_\alpha - \tau'_0) \right\}.$$

Quadrando e sommando le ultime due equazioni scritte si ottiene:

$$(7) \quad R^2_a + \mu^2 s^2_a = c^2 (\cos^2 \alpha + \mu^2 \sin^2 \alpha);$$

questa è l'equazione intrinseca della sviluppoida d'angolo  $\alpha$  dell'epicicloide considerata; confrontandola con la (5) si deduce che tutte le sviluppoidi di una epicicloide sono curve ad essa simili<sup>1)</sup>. Se in particolare  $\mu = 1$ , la (5) rappresenta una ordinaria cicloide, la (7) diviene  $R^2_a + s^2_a = c^2$ , epperò tutte le sviluppoidi di una cicloide sono curve ad essa eguali<sup>1)</sup>. Similmente dimostrasi che ogni pseudo-cicloide è simile a tutte le sue sviluppoidi d'ordine pari.

Se nella relazione (4') si suppone dato  $R$  in funzione di  $\tau$  ( $= \tau_a + \text{cost.}$ ), essa sarà un'equazione fra  $R_a$  e  $\tau_a$ , cioè l'equazione intrinseca di  $\Gamma_a$ . Se invece<sup>2)</sup> si suppone in essa dato  $R_a$  in funzione di  $\tau_a$ , essa si presenterà come un'equazione differenziale fra  $R$  e  $\tau$ , integrando la quale si otterrà una curva  $\Gamma$  di cui  $\Gamma_a$  è sviluppoida d'angolo  $\alpha$ , curva che chiameremo *sviluppoide d'angolo  $\alpha$  inversa* rispetto alla  $\Gamma_a$  considerata come curva di partenza e indicheremo col simbolo  $\bar{\Gamma}_a$ . Ora la (1) è in  $R$  un'equazione lineare a coefficienti costanti, può quindi integrarsi e dà:

$$(8) \quad R = \frac{e^{-\tau \text{tg} \alpha}}{\cos \alpha} \int_{\lambda}^{\tau} R_a e^{\tau \text{tg} \alpha} d\tau,$$

ove  $\lambda$  è la costante introdotta dall'integrazione; variandola si otterranno le infinite sviluppoidi inverse. È opportuno scrivere la (8) un po' diversamente cambiando, per ragioni facili a comprendersi  $R$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $R_a$  risp. in  $\bar{R}_{a_1}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $R$ ; si avrà così:

$$\bar{R}_{a_1} = \frac{e^{-\tau \text{tg} \alpha_1}}{\cos \alpha_1} \int_{\lambda_1}^{\tau} R e^{\tau \text{tg} \alpha_1} d\tau.$$

Similmente l'equazione intrinseca generale delle sviluppoidi  $\bar{\Gamma}_{a_1, a_2}$  d'angolo  $\alpha_2$  di  $\bar{\Gamma}_{a_1}$  sarà

$$\bar{R}_{a_1, a_2} = \frac{e^{-\tau \text{tg} \alpha_2}}{\cos \alpha_2} \int_{\lambda_2}^{\tau} \bar{R}_{a_1} e^{\tau \text{tg} \alpha_2} d\tau$$

ossia per la precedente

$$\bar{R}_{a_1, a_2} = \frac{e^{-\tau \text{tg} \alpha_2}}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} \int_{\lambda_2}^{\tau} \bar{R}_{a_1} e^{\tau(\text{tg} \alpha_2 - \text{tg} \alpha_1)} d\tau \int_{\lambda_1}^{\tau} R e^{\tau \text{tg} \alpha_1} d\tau.$$

<sup>1)</sup> V. le Questioni 799 e 800 proposte dal FURET nelle *Nouv. Ann. de Math.* e risolte ivi dal ROUQUET nel 1867 e poi dal FURET nel 1880.

<sup>2)</sup> V. la memoria di HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Recherches sur les développoides des divers ordres* (Ann. de la Soc. Sc. de Bruxelles, T. II, 1877).

Così proseguendo si arriva a concludere che le sviluppoidi inverse  $\bar{\Gamma}_{a_1, a_2, \dots, a_n}$  hanno per equazione intrinseca generale

$$(9) \quad \bar{R}_{a_1, a_2, \dots, a_n} = \frac{e^{-\tau \text{tg} \alpha_n}}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \dots \cos \alpha_n} \int_{\lambda_n}^{\tau} e^{\tau(\text{tg} \alpha_n - \text{tg} \alpha_{n-1})} d\tau \int_{\lambda_{n-1}}^{\tau} e^{\tau(\text{tg} \alpha_{n-1} - \text{tg} \alpha_{n-2})} d\tau \dots \int_{\lambda_1}^{\tau} R e^{\tau \text{tg} \alpha_1} d\tau.$$

Se in particolare  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$  si può scrivere

$$(9') \quad \bar{R}_a^{(n)} = \frac{e^{-\tau \text{tg} \alpha}}{\cos^n \alpha} \int_{\lambda_n}^{\tau} d\tau \int_{\lambda_{n-1}}^{\tau} d\tau \dots \int_{\lambda_1}^{\tau} R e^{\tau \text{tg} \alpha} d\tau;$$

e se di più  $\alpha = 0$

$$\bar{R}^{(n)} = \int_{\lambda_n}^{\tau} \int_{\lambda_{n-1}}^{\tau} \dots \int_{\lambda_1}^{\tau} R d\tau^n,$$

risultato che in sostanza è già stato stabilito nel Capitolo precedente.

La formola generale (9) è analoga ad altra concernente le sviluppoidi dirette e che si ottiene come segue. Riprendiamo, infatti, la formola (4'), scrivendola come segue

$$R_{\beta_1} = R \sin \beta_1 + \frac{dR}{d\tau} \cos \beta_1,$$

ovvero

$$R_{\beta_1} = e^{-\tau \text{tg} \beta_1} \cos \beta_1 \frac{d}{d\tau} (R e^{\tau \text{tg} \beta_1});$$

è l'equazione intrinseca della sviluppoida  $\Gamma_{\beta_1}$  di  $\Gamma$ . Perciò

$$R_{\beta_1, \beta_2} = e^{-\tau \text{tg} \beta_2} \cos \beta_2 \frac{d}{d\tau} (R_{\beta_1} e^{\tau \text{tg} \beta_2})$$

rappresenterà la sviluppabile  $\Gamma_{\beta_1, \beta_2}$  d'angolo  $\beta_2$  di  $\Gamma_{\beta_1}$ : combinando questa con la precedente si ottiene:

$$R_{\beta_1, \beta_2} = \cos \beta_1 \cos \beta_2 e^{-\tau \text{tg} \beta_2} \frac{d}{d\tau} (e^{\tau(\text{tg} \beta_2 - \text{tg} \beta_1)} \frac{d}{d\tau} (R e^{\tau \text{tg} \beta_1}))$$

Così continuando si ottiene come equazione intrinseca di  $\Gamma_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}$  la seguente:

$$(10) \quad R_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n} = \cos \beta_1 \cos \beta_2 \dots \cos \beta_n e^{-\tau \operatorname{tg} \beta_n} \frac{d}{d\tau} (e^{\tau(\operatorname{tg} \beta_n - \operatorname{tg} \beta_{n-1})} \frac{d}{d\tau} (e^{\tau(\operatorname{tg} \beta_{n-1} - \operatorname{tg} \beta_{n-2})} \frac{d}{d\tau} (\dots \frac{d}{d\tau} (e^{\tau(\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1)} \frac{d}{d\tau} (R e^{\tau \operatorname{tg} \beta_1})))));$$

è questa la formola annunciata. Se in particolare  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta$  essa diviene

$$(10') \quad R^{(n)} = \cos^n \beta e^{-\tau \operatorname{tg} \beta} \frac{d^n}{d\tau^n} (R e^{\tau \operatorname{tg} \beta}),$$

e se di più  $\beta = 0$

$$R^{(n)} = \frac{d^n R}{d\tau^n};$$

risultato che incontrammo già nel Capitolo precedente (p. 292).

La formola (10) è di forma elegante, ma riesce di mediocre utilità pratica; nelle applicazioni è assai meglio ricorrere a quella che si stabilisce col seguente procedimento. Dalle due relazioni

$$R_{\beta_1} = R \operatorname{sen} \beta_1 + \frac{dR}{d\tau} \cos \beta_1, \quad R_{\beta_1, \beta_2} = R_{\beta_1} \operatorname{sen} \beta_2 + \frac{dR_{\beta_1}}{d\tau} \cos \beta_2$$

eliminando  $R_{\beta_1}$  si ottiene:

$$R_{\beta_1, \beta_2} = \cos \beta_1 \cos \beta_2 \left\{ \frac{d^2 R}{d\tau^2} + (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) \frac{dR}{d\tau} + R \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \beta_2 \right\}.$$

Sostituendo questo valore nella

$$R_{\beta_1, \beta_2, \beta_3} = R_{\beta_1, \beta_2} \operatorname{sen} \beta_3 + \frac{dR_{\beta_1, \beta_2}}{d\tau} \cos \beta_3$$

e così proseguendo si finisce per ottenere:

$$(11) \quad R_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n} = \cos \beta_1 \cos \beta_2 \dots \cos \beta_n \left\{ \frac{d^n R}{d\tau^n} + S_1 \frac{d^{n-1} R}{d\tau^{n-1}} + \dots + S_{n-1} \frac{dR}{d\tau} + S_n R \right\},$$

ove  $S_1, S_2, \dots, S_n$  rappresentano rispettivamente la somma delle quantità  $\operatorname{tg} \beta_1, \operatorname{tg} \beta_2, \dots, \operatorname{tg} \beta_n$ , la somma dei loro prodotti binari, ..., finalmente il prodotto di tutte. In particolare se  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta$

la (11) diviene

$$(11') \quad R_{\beta}^{(n)} = \cos^n \beta \left\{ \frac{d^n R}{d\tau^n} + \binom{n}{1} \operatorname{tg} \beta \frac{d^{n-1} R}{d\tau^{n-1}} + \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 \beta \frac{d^{n-2} R}{d\tau^{n-2}} + \dots + \binom{n}{1} \operatorname{tg}^{n-1} \beta \frac{dR}{d\tau} + \operatorname{tg}^n \beta \cdot R \right\}.$$

Per mostrare l'uso della (11) risolviamo il problema di « trovare l' $n$ -ma sviluppoide inversa di un punto, essendo  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  gli angoli dati. In tal caso  $R_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n} = 0$  e la (11) dà, per determinare  $R$  in funzione di  $\tau$ , la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\frac{d^n R}{d\tau^n} + S_1 \frac{d^{n-1} R}{d\tau^{n-1}} + \dots + S_{n-1} \frac{dR}{d\tau} + S_n R = 0;$$

la corrispondente equazione caratteristica, avendo per radici  $-\operatorname{tg} \beta_1, -\operatorname{tg} \beta_2, \dots, -\operatorname{tg} \beta_n$ , se le  $\beta$  sono tutte differenti, le curve cercate hanno la seguente equazione intrinseca:

$$(12) \quad R = \sum_{k=1}^{k=n} C_k e^{-\tau \operatorname{tg} \beta_k},$$

le  $C$  essendo costanti arbitrarie. Se invece  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta$  si giunge alle curve:

$$(12') \quad R = \sum_{k=0}^{k=n-1} C_k \tau^k \cdot e^{-\tau \operatorname{tg} \beta}.$$

Come altra applicazione cerchiamo una curva  $\Gamma$  tale che la sua  $n$ -ma sviluppoide sia una curva ad essa simile, nell'ipotesi che sia  $\beta_1 = \dots = \beta_n = \beta$  e che nella supposta similitudine ad un punto qualunque di  $\Gamma$  corrisponde precisamente il punto che si ottiene applicando  $n$  volte di seguito il teorema di Reaumur. Essendo in tal caso  $R^{(n)} = \mu R$  la (10') diviene

$$\frac{d^n}{d\tau^n} (R e^{\tau \operatorname{tg} \beta}) - \frac{\mu}{\cos^n \beta} (R e^{\tau \operatorname{tg} \beta}) = 0;$$

è questa un'equazione lineare a coefficienti costanti in  $R e^{\tau \operatorname{tg} \beta}$ , ed essendo  $\omega^n = \frac{\mu}{\cos^n \beta}$  la sua equazione caratteristica, si ottiene come equazione intrinseca generale delle curve cercate:

$$R = e^{-\tau \operatorname{tg} \beta} \sum_{k=1}^{k=n} C_k e^{\tau \frac{\sqrt{\mu}}{\cos \beta} e^{\frac{2ki\pi}{n}}},$$

ove  $\sqrt[n]{\mu}$  rappresenta l' $n^{\text{ma}}$  radice aritmetica del numero  $\mu$ . Analogamente si può risolvere il problema generale, cioè quando gli angoli  $\beta_1, \dots, \beta_n$  siano fra loro differenti, come il lettore potrà apprendere dalla memoria di Hâton de la Goupillière che citammo più sopra (p. 302).

**283.** Un altro modo di trattare la teoria che ci occupa è il seguente <sup>1)</sup>.

Sia data una curva  $c$ ; determiniamo una curva  $\gamma$  che sia traiettoria d'angolo  $\lambda$  di tutte le rette  $t$  tangenti di  $c$ ; allora viceversa  $c$  è l'involuppo delle oblique d'angolo  $\lambda$  della curva  $\gamma$ , cioè la *sviluppoide d'angolo  $\lambda$*  di  $\gamma$ , epperò  $\gamma$  è la *sviluppoide inversa* relativa allo stesso angolo  $\lambda$ . Dato  $\lambda$ , esistono infinite sviluppoidi inverse di  $c$ ; per ogni punto  $M$  del piano ne passano tante quante sono le tangenti che si possono condurre da esso alla curva  $c$ . Per esprimere analiticamente la relazione che esiste fra le due curve  $c$  e  $\gamma$  chiamiamo  $x, y$  le coordinate di un punto qualunque  $C$  di  $c$ ;  $\xi, \eta$  quelle del corrispondente punto  $\Gamma$  di  $\gamma$ ;  $x$  e  $y$  si suppongano espresse in funzione dell'arco  $s$  e si cerchino le analoghe espressioni di  $\xi, \eta$ . Osserviamo perciò anzitutto che, detto  $R$  il raggio di curvatura della linea  $c$  si ha:

$$(13) \quad \frac{1}{R} = \left| \begin{array}{cc} \frac{d^2 x}{d s^2} & \frac{d^2 y}{d s^2} \\ \frac{d x}{d s} & \frac{d y}{d s} \end{array} \right|;$$

inoltre, posto per brevità  $\tau = \operatorname{tg} \lambda$ ,

$$(14) \quad \tau = \frac{1}{\frac{d \xi}{d s} \frac{d x}{d s} + \frac{d y}{d s} \frac{d \eta}{d s}} \left| \begin{array}{cc} \frac{d \xi}{d s} & \frac{d \eta}{d s} \\ \frac{d x}{d s} & \frac{d y}{d s} \end{array} \right|$$

Chiamiamo ora  $\rho$  la lunghezza del segmento  $C\Gamma$  compreso fra due punti corrispondenti di  $c$  e  $\gamma$ ;  $\rho$  sarà funzione di  $s$  e si potrà scrivere

$$(15) \quad \xi = x + \rho \frac{d x}{d s}, \quad \eta = y + \rho \frac{d y}{d s},$$

e la determinazione della curva  $\gamma$  è ridotta alla ricerca della funzione  $\rho$ .

<sup>1)</sup> Venne suggerito all'autore dalle Diss. di H. HERWIG, *Ueber Traiectorien zu den Tangenten ebenen Curven* (Göttingen, 1867).

Ora, differenziando le (15), si ottiene

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \xi}{d s} = \frac{d x}{d s} + \frac{d \rho}{d s} \frac{d x}{d s} + \rho \frac{d^2 x}{d s^2}, \\ \frac{d \eta}{d s} = \frac{d y}{d s} + \frac{d \rho}{d s} \frac{d y}{d s} + \rho \frac{d^2 y}{d s^2}; \end{array} \right.$$

sostituendo questi valori nella (14) e tenendo conto della (13), nonché delle identità

$$\left[ \frac{d x}{d s} \right]^2 + \left[ \frac{d y}{d s} \right]^2 = 1, \quad \frac{d x}{d s} \frac{d^2 x}{d s^2} + \frac{d y}{d s} \frac{d^2 y}{d s^2} = 0,$$

si trova

$$\tau = \frac{\rho/R}{1 + d\rho/ds}.$$

ovvero

$$(17) \quad \rho - \tau R \frac{d \rho}{d s} - \tau R = 0.$$

Questa è un'equazione differenziale lineare in  $\rho$  che dà

$$(18) \quad \rho = e^{\frac{1}{\tau} \int \frac{ds}{R}} \left( a - \int e^{-\frac{1}{\tau} \int \frac{ds}{R}} ds \right),$$

$a$  essendo la costante d'integrazione. Sostituendo questo valore nelle (15) si ottiene la rappresentazione analitica cercata di tutte le sviluppoidi inverse d'angolo  $\lambda$  della curva  $c$ . La costante  $a$  si determina conoscendo il punto della curva  $c$  da cui si diparte la curva  $\gamma$ , cioè il valore di  $s$  che rende  $\rho = 0$ .

Se ad es. come curva  $c$  si prende la circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$ , si ha  $R = 1$  e le (15) divengono:

$$\xi = \cos s - \operatorname{sen} s (\tau + a e^{s/\tau}), \quad \eta = \operatorname{sen} s + \cos s (\tau + a e^{s/\tau})$$

e rappresentano tutte le sviluppoidi di inverse d'angolo  $\lambda$  del cerchio considerato.

Va notato che le formole precedenti non valgono per  $\tau = \pi/2$ ; ma in tal caso la (14) è surrogata dalla seguente relazione

$$\frac{d x}{d s} \frac{d \xi}{d s} + \frac{d y}{d s} \frac{d \eta}{d s} = 0;$$

sostituendo in questa i valori (16) si ottiene  $1 + d\rho/ds = 0$  onde

$\rho = a - s$  e quindi

$$\xi = x + (a - s) \frac{dx}{ds}, \quad \eta = y + (a - s) \frac{dy}{ds}.$$

Nel caso particolare della circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  queste divengono

$$\xi = \cos s - (a - s) \sin s, \quad \eta = \sin s + (a - s) \cos s,$$

che sono le equazioni note delle evolventi di circolo (p. 127).

Prima di passare ad altro argomento notiamo che E. Beltrami ha dato al vocabolo sviluppoide un significato estremamente ampio<sup>1)</sup>, chiamando sviluppoide di una linea un'altra linea tale che ogni sua tangente sia segata dalla prima sotto un angolo che è una funzione nota delle coordinate del punto d'intersezione; se quell'angolo è costante si ricade nelle sviluppoide ordinarie.

**284.** II. T. Olivier ha considerate<sup>2)</sup> certe speciali linee piane che egli chiamò *evolventi di circolo imperfette* e per le quali insegnò una costruzione stereometrica della tangente. La definizione da lui proposta si può estendere a qualunque linea piana e conduce a una nuova generalizzazione delle evolventi<sup>3)</sup>. Sia  $\Gamma$  una curva data, su cui sia fissato un senso positivo,  $O$  un suo punto fisso e  $\mu$  un numero reale, positivo o negativo, pure dato; preso un punto qualunque  $M$  di  $\Gamma$  si segni la corrispondente tangente  $t$  e si determini su di essa un punto  $M_0$  tale che sia

$$\frac{MM_0}{\text{arc } OM} = \mu$$

(onde  $M_0$  cadrà nella porzione positiva di  $t$  o nella negativa secondo che  $\mu$  è positivo o negativo). Il luogo geometrico  $\Gamma_0$  di  $M_0$  è un'evolvente ordinaria (o perfetta) se  $\mu = 1$ , mentre se  $\mu \neq 1$  si dirà *evolvente imperfetta*, e precisamente *allungata* se  $|\mu| > 1$  e *accorciata* se  $|\mu| < 1$ .

Supposto al solito date le coordinate  $x, y$  di  $M$  in funzione dell'arco  $s$ , le coordinate  $x_0, y_0$  di  $M_0$  saranno evidentemente date dalle formole seguenti:

$$(19) \quad x_0 = x + \mu s \frac{dx}{ds}, \quad y_0 = y + \mu s \frac{dy}{ds}.$$

<sup>1)</sup> Sulla teoria delle sviluppoide e delle sviluppani (Annali di Matem., T. IV, 1861; Opere matematiche, T. I, Milano 1902).

<sup>2)</sup> Développements de géométrie descriptive (Paris, 1843).

<sup>3)</sup> D. LEVI, Sulle evolventi allungate ed accorciate delle linee piane (Atti dell'Acc. di Torino, T. IV, 1868-69).

Possiamo dedurne una elegante costruzione della normale in un punto qualunque  $M_0$  di  $\Gamma_0$ ; notiamo infatti che le normali  $n, n_0$  in  $M, M_0$  alle curve  $\Gamma, \Gamma_0$  hanno risp. per equazioni:

$$(20) \quad (X - x) \frac{dx}{ds} + (Y - y) \frac{dy}{ds} = 0$$

$$(21) \quad \left[ X - x - \mu s \frac{dx}{ds} \right] \left[ \frac{dx}{ds} + \mu s \frac{d^2x}{ds^2} \right] + \left[ Y - y - \mu s \frac{dy}{ds} \right] \left[ \frac{dy}{ds} + \mu s \frac{d^2y}{ds^2} \right] = 0;$$

combinandole fra loro otterremo le coordinate  $X, Y$  del punto  $N$  in cui tagliansi le rette che esse rappresentano. Ora, tenendo conto della (20) la (21) diviene

$$(X - x) \frac{d^2x}{ds^2} + (Y - y) \frac{d^2y}{ds^2} = 1 + \mu,$$

e questa con le (13) e (20) conduce a:

$$(X - x) = (1 + \mu) R \frac{dy}{ds}, \quad Y - y = - (1 + \mu) R \frac{dx}{ds}$$

donde

$$\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2} = MN = (1 + \mu) R.$$

Segnato pertanto il centro di curvatura  $C$  della curva  $\Gamma$  in  $M$  si ha

$$\frac{MN}{MC} = 1 + \mu \quad \text{e quindi} \quad \frac{NC}{MC} = \mu;$$

mediante questa relazione, quando si sappiano eseguire tutte le costruzioni relative alla curva  $\Gamma$ , si potrà determinare il punto  $N$  e quindi la normale  $n_0$  della curva  $\Gamma_0$ .

Supponiamo ad es. che  $\Gamma$  sia la circonferenza  $x^2 + y^2 = r^2$ . Essendo  $x = r \cos s/r, y = r \sin s/r$ , le (19) danno

$$x_0 = r \cos \frac{s}{r} - \mu s \sin \frac{s}{r}, \quad y_0 = r \sin \frac{s}{r} + \mu s \cos \frac{s}{r};$$

o, ponendo  $s/r = \omega$ ,

$$x_0 = r \cos \omega - \mu r \omega \sin \omega, \quad y_0 = r \sin \omega + \mu r \omega \cos \omega.$$

Differenziando si ottiene:

$$\frac{dx_0}{d\omega} = -y - \mu r \sin \omega \quad \frac{dy_0}{d\omega} = x + \mu r \cos \omega$$

$$\frac{d^2 x_0}{d\omega^2} = -x - 2\mu r \cos \omega, \quad \frac{d^2 y_0}{d\omega^2} = -y - 2\mu r \sin \omega;$$

detti quindi  $s_0$  e  $R_0$  l'arco ed il raggio di curvatura della nuova curva si trova:

$$\left[ \frac{ds_0}{d\omega} \right]^2 = r^2 [1 + \mu^2 + \mu^2 \omega^2], \quad R_0 = \frac{r [1 + \mu^2 + \mu^2 \omega^2]^{3/2}}{\mu^2 \omega^2 + (1 + \mu)(1 + 2\mu)};$$

ovvero, ponendo  $\mu r = a$ ,  $(1 + \mu)r = k$ ,

$$\frac{ds_0}{d\omega} = r \sqrt{k^2 + a^2 \omega^2}, \quad R_0 = \frac{[k^2 + a^2 \omega^2]^{3/2}}{a^2 \omega^2 + k^2 + ak};$$

ora, paragonando queste equazioni a quelle segnate (28) e (30) a pagg. 127-8, vedremo che le nuove non differiscono che per le notazioni usate dalle antiche; dunque per un circolo le evolventi allungate di Olivier non differiscono da quelle anteriormente designate con tal nome; di queste resta per tal maniera stabilita un nuovo metodo di generazione.

**285.** III. Avvolto ad una curva un filo pieghevole inestendibile e fissato un capo ad un punto di quella, se per l'altro estremo esso si tenga continuamente teso nella direzione della tangente, l'estremo stesso descriverà una delle ordinarie evolventi di quella curva. Ben diversa riuscirebbe la linea generata dal filo se, obbligatone arbitrariamente il primo capo, se ne tenessero tese le due parti svolgendolo continuamente sopra la curva. Nasce così il seguente

*Problema.* Supposto (fig. 36) un filo avvolto e fermato per un capo  $F$  ad una linea  $A$  e fissato ad un punto  $O$  del piano di essa per l'altro capo, trovare la linea  $\Gamma$  descritta da uno stilo  $M$  che si muove con la condizione di tenere tese le due parti del filo<sup>1)</sup>.

*Soluzione.* Si consideri una posizione qualunque  $M$  dello stilo; siano  $MO$  e  $MP$  le due porzioni rettilinee del filo; le lunghezze di

<sup>1)</sup> Questa questione e la sua soluzione si trovano nelle memorie di PIETRO MAGGI, *Intorno ad una maniera più generale d'evolventi ed evolventi, ed intorno un sistema di rette nello spazio* (Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, vol. VIII, 1838, e IX, 1839).

queste due parti assieme all'arco  $FP = s$ , costituiscono la lunghezza totale del filo, dunque

$$\overline{OM} + \overline{MP} + s = l;$$

presa adunque per origine  $O$  e dette  $x, y$  le coordinate di  $P$ , e  $X, Y$  quelle di  $M$  avremo:

$$(22) \quad \sqrt{X^2 + Y^2} + \sqrt{X - x^2 + Y - y^2} = l - s.$$

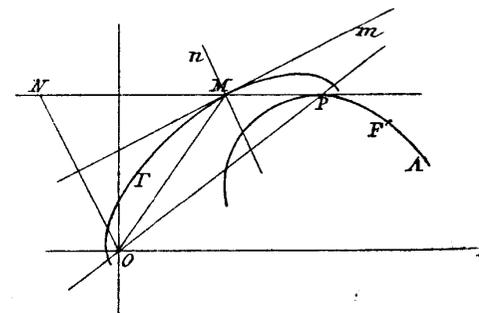


Fig. 36.

Essendo poi la retta  $MP$  tangente alla linea  $A$  nel punto  $P$ , avremo

$$(23) \quad \frac{Y - y}{X - x} = y'$$

ove la derivata  $y'$  di  $y$  rispetto a  $x$  si calcolerà mediante l'equazione nota di  $A$ . Ora dalle (22), (23) si potranno dedurre  $X, Y$  in funzione di  $x, y$ ; ed infatti, ponendo per brevità  $(l - s)^2 - (x^2 + y^2) = \mu$ , si trova

$$(24) \quad X = x - \frac{\mu}{\mu'}, \quad Y = y - \frac{\mu}{\mu'} y'$$

e queste serviranno a determinare la curva  $\Gamma$  quando si conosca la linea  $A$ . Prima di trarre qualche conseguenza dalle (24), notiamo che se sul prolungamento di  $MP$  si prende  $MN = MO$  si avrà  $PN = PM + MN = PM + MO = l - s$ , onde le coordinate del punto  $N$  saranno

$$x + (l - s) \frac{dx}{ds}, \quad y + (l - s) \frac{dy}{ds}$$

ossia

$$x + \frac{l-s}{s'}, y + (l-s) \frac{y'}{s'}$$

per conseguenza l'equazione della retta  $ON$  è:

$$(25) \quad \frac{Y}{X} = \frac{y + (l-s) y'/s'}{x + (l-s) x'/s'}$$

Ciò posto, cerchiamo la tangente nel punto  $M$  alla curva  $\Gamma$ ; basterà determinarne il coefficiente angolare; ora le (24) ci danno

$$X' = \frac{\mu \mu''}{\mu'^2}, Y' = \frac{\mu}{\mu'^2} (\mu'' y' - \mu' y'')$$

onde

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{\mu'' y' - \mu' y''}{\mu''}$$

o, riponendo in luogo di  $\mu$  il suo valore,

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{x + (l-s) s/s'}{y + (l-s) y'/s'}$$

Il secondo membro di questa relazione essendo inverso ed opposto al coefficiente angolare della retta  $ON$  rappresentata dalla equazione (25), si deduce che la retta  $m$  tangente in  $M$  alla curva  $\Gamma$  altro non è che la perpendicolare calata dal punto  $M$  sulla retta  $ON$ ; quella tangente è dunque altezza del triangolo  $MNO$ , e, essendo questo isoscele, è anche la bisettrice dell'angolo  $NMO$ ; ciò prova che la tangente stessa fa angoli eguali con le due parti  $PM$  e  $MO$  del filo generatore: donde un metodo semplicissimo per tracciarla.

Siccome  $OM$  e  $MP$  formano angoli eguali con la retta  $m$  tangente in  $M$  alla curva  $\Gamma$ , così quelle rette saranno eziandio egualmente inclinate alla retta  $n$  normale in  $M$  alla stessa  $\Gamma$ . Siccome la seconda di quelle rette è tangente alla linea  $A$  così, se immaginiamo che  $O$  sia un punto luminoso e  $\Gamma$  uno specchio,  $A$  sarà l'involuppo dei raggi riflessi; in altri termini  $A$  è la caustica per riflessione o catacaustica di  $\Gamma$ , onde viceversa  $\Gamma$  è la curva anticatacaustica di  $A$ , il punto fisso  $O$  essendo la fonte di luce.

Si costruisca l'ellisse  $E$  avente per fuochi i punti  $O, P$  e passante per  $M$ ;  $m$  ne è la tangente in  $M$ ; onde le due curve  $\Gamma, E$  si toccano in  $M$ . Perciò  $\Gamma$  è l'involuppo delle ellissi analoghe alla  $E$ ; una qualunque delle quali ha per fuochi il punto  $O$  e un punto qualunque  $P$  di  $A$  e per asse maggiore la differenza fra la lunghezza totale  $l$

del filo generatore e la lunghezza dell'arco della linea data  $A$  compreso fra  $P$  ed il punto fisso  $F$ . Questo modo di considerare la curva  $\Gamma$  ha suggerito di chiamarla *evolvente ellittica* di  $A$ , e quindi di indicare questa col nome di *evoluta ellittica* di quella.

Applicando la prima delle proposizioni precedenti, si può dimostrare che l'evoluta ellittica di una spirale logaritmica di polo  $O$  è un'altra spirale logaritmica: basta per ciò considerare tale curva come traiettoria obliqua di un fascio di raggi.

**286. IV.** Si consideri ancora l'evoluta come involuppo delle normali di una curva; si immagini l'involuppo analogo in una determinazione metrica in cui l'assoluto consti di due punti qualsivogliano: si otterrà così la curva che il Salmon ha chiamato *quasi-evoluta*<sup>1)</sup>. Si supponga poi, con maggiore generalità, di considerare le normali in una metrica proiettiva qualunque e poi di trasformare per dualità. Si giunge così alla seguente costruzione: Date ad arbitrio una curva  $\Gamma$  e nel suo piano una conica  $K$ , ad ogni punto  $M$  di  $\Gamma$ , si fa corrispondere il punto  $M'$  in cui la tangente in  $M$  a  $\Gamma$  è segata dalla polare di  $M$  rispetto a  $K$ ; il luogo  $\Gamma'$  dei punti  $M'$  può chiamarsi *evoluta di Halphen*, dal nome del geometra che per primo la considerò<sup>2)</sup>. Operando su  $\Gamma'$  come fecesi sopra  $\Gamma$  si otterrà una curva  $\Gamma''$ , quindi una terza  $\Gamma'''$  e così via; ora per questa serie di curve, come per la serie delle evolute (v. p. 284), accade che, a partire da un certo elemento, i loro ordini e le loro classi formano due progressioni aritmetiche equidifferenti.

Se, per non moltiplicare le notazioni, si indicano con  $\Gamma = 0$ ,  $K = 0$  le equazioni in coordinate omogenee  $x_1, x_2, x_3$  delle curve  $\Gamma$  e  $K$ , le due rette che servono a costruire  $M'$  hanno per equazioni:

$$\Gamma_1 X_1 + \Gamma_2 X_2 + \Gamma_3 X_3 = 0, \quad K_1 X_1 + K_2 X_2 + K_3 X_3 = 0,$$

ove  $X_1, X_2, X_3$  sono coordinate correnti e  $\Gamma_1, \dots, K_1, \dots$  i valori delle derivate di  $\Gamma$  e  $K$  nel punto  $M (x_1, x_2, x_3)$ . Le coordinate del punto  $M'$  sono dunque date dalle relazioni:

$$(25) \quad x_1', x_2', x_3' \equiv \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix}$$

Si noti ora che essendo

$$x_1 \Gamma_1 + x_2 \Gamma_2 + x_3 \Gamma_3 = 0, \quad d x_1 \cdot \Gamma_1 + d x_2 \cdot \Gamma_2 + d x_3 \cdot \Gamma_3 = 0$$

<sup>1)</sup> *Analytische Geom. der höheren ebenen Curven*, deutsch von FIEDLER (Leipzig 1873), p. 104.

<sup>2)</sup> V. la memoria *Sur une série de courbes analogues aux développées* (G. di Liouville, 3<sup>a</sup> Serie, T. II, 1876).

si ha

$$F_1, F_2, F_3 \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix};$$

ed essendo

$$x_1 K_1 + x_2 K_2 + x_3 K_3 = 0, \quad d x_1 \cdot K_1 + d x_2 \cdot K_2 + d x_3 \cdot K_3 = 0$$

sussistono le relazioni

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ K_2 & K_3 \end{vmatrix} = F_1 \begin{vmatrix} 2 K & d K \\ x_1 & d x_1 \end{vmatrix}$$

e le due analoghe. Per conseguenza alle (25) potranno sostituirsi le seguenti

$$\frac{x_1'}{x_1 \cdot d K - 2 d x_1 \cdot K} = \frac{x_2'}{x_2 \cdot d K - 2 d x_2 \cdot K} = \frac{x_3'}{x_3 \cdot d K - 2 d x_3 \cdot K},$$

che in pratica sono in generale più comode.

V. Lo stesso geometra ha considerata<sup>1)</sup> un'altra classe di curve aventi con le evolute una relazione strettissima e di cui ora esporremo la definizione ed alcune proprietà.

Si consideri l'evoluta di una curva  $\Gamma$  come l'involuppo delle rette ognuna delle quali congiunge un punto  $P$  di  $\Gamma$  al polo  $T$  della corrispondente tangente  $t$  rispetto ad una conica fissa; ad essa corrisponderà per dualità il luogo  $\Gamma_1$  dei punti  $P_1$  ciascuno dei quali è l'intersezione di una tangente  $t$  di  $\Gamma$  con la polare  $p$  del relativo punto di contatto  $P$  rispetto ad una conica  $K$ .

Se in particolare questa si riduce ad un cerchio (di centro  $O$ ) e raggio nullo,  $P_1$  altro non è che l'intersezione di  $t$  con la perpendicolare condotta dal punto  $O$  al raggio vettore  $OP$ ;  $\Gamma_1$  si chiama allora la *tangenziale* di  $\Gamma$  rispetto a  $O$ .

Detto  $\varrho, \omega$  le coordinate polari di  $P$  in un sistema avente per polo  $O$  e  $\varrho_1, \omega_1$  quelle di  $P_1$ , detto poi  $\mu$  l'angolo della tangente in  $P$  a  $\Gamma$  col raggio vettore  $OP$ , si ha

$$\varrho_1 = \varrho \operatorname{tg} \mu;$$

ma è noto essere

$$\operatorname{tg} \mu = \varrho : \frac{d \varrho}{d \omega},$$

<sup>1)</sup> HALPHEN, *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Appendice ou Traité des courbes planes de G. Salmon* (Paris 1883), p. 29.

onde

$$\varrho_1 = \varrho^2 : \frac{d \varrho}{d \omega}$$

ovvero

$$\frac{1}{\varrho_1} = - \frac{d}{d \omega} \left[ \frac{1}{\varrho} \right];$$

inoltre

$$\omega_1 = \omega + \pi/2.$$

Queste due equazioni servono a trovare l'equazione di  $\Gamma_1$  quando si conosca quella di  $\Gamma$ . Se per es.  $\Gamma$  è la spiga (Vol. I, p. 431) di equazione

$$a/\varrho = \cos \mu \omega,$$

si avrà come equazione della tangenziale

$$a/\varrho_1 = \operatorname{sen} \mu \omega = \operatorname{sen} \mu (\omega_1 - \pi/2),$$

onde la tangenziale stessa è una curva identica alla proposta.

Quando  $\Gamma$  è una curva algebrica (dell'ordine  $n$ ) determinata dalla sua equazione

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

è facile trovare l'ordine  $n_1$  di  $\Gamma_1$ . Dette infatti  $\alpha, \beta$  le coordinate del punto fisso  $O$ , la equazione di  $\Gamma_1$  nasce eliminando  $x, y$  fra l'equazione precedente e queste altre:

$$(2) \quad (X - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$(3) \quad (X - \alpha)(x - \alpha) + (Y - \alpha)(y - \alpha) = 0.$$

I punti della curva posti su una data retta  $Ax + By + C = 0$  si determineranno trovando le coppie di valori di  $X, Y$  che soddisfanno alle equazioni scritte ed alla seguente:

$$(4) \quad AX + BY + C = 0.$$

Per trovarne il numero osserviamo che, se si eliminano  $X$  e  $Y$  fra le equazioni (2), (3) e (4), si ottiene

$$(5) \quad (Ax + By + C) \left[ (y - \beta) \frac{\partial f}{\partial x} - (x - \alpha) \frac{\partial f}{\partial y} \right] + \\ + [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] \left[ A \frac{\partial f}{\partial y} - B \frac{\partial f}{\partial x} \right] = 0;$$

il numero delle coppie  $X, Y$  cercate eguaglia quindi il numero delle intersezioni variabili delle due curve (1) (5). Questo numero è in generale  $n(n+1)$ . Ma se, p. es., l'origine è un punto multiplo secondo  $r$  per  $\Gamma$ , è generalmente multiplo secondo  $r-1$  per la curva (5), onde produce una diminuzione di  $r(r-1)$  nell'ordine  $n_1$  di  $\Gamma_1$ , tranne quando quel punto multiplo si trova in  $O$  chè allora esso è di eguale molteplicità per la curva (5), sicchè la diminuzione sale a  $r^2$ . Così un punto doppio di  $\Gamma$  produce di regola la diminuzione di 2 unità se le corrispondenti tangenti sono distinte, ma se coincidono essa sale a 3. Tutto ciò prova che, se  $\Gamma_1$  ha, oltre al punto  $r$ -plo  $O$ ,  $d$  punti doppi e  $k$  cuspidi, si ha

$$n_1 = n(n+1) - r^2 - 2d - 3k.$$

Per scrivere più semplicemente questa relazione si noti che, detta  $\nu$  la classe di  $\Gamma$ , si ha

$$\nu = n(n-1) - r(r-1) - 2d - 3k,$$

onde, sottraendo membro a membro

$$n_1 - \nu = 2n - r;$$

se ne deduce

$$n_1 = \nu + 2n - r,$$

e questa è la formola cercata.

**287. VI.** Un'altra generalizzazione delle evolute è la seguente<sup>1)</sup>.

Si porti sulla normale a una data curva  $\Gamma$  in un suo punto arbitrario  $P$  il segmento  $PQ = \mu R$  nel senso da  $P$  verso il corrispondente centro di curvatura  $C$  o nel senso opposto secondo che  $\mu$  è positivo o negativo,  $R$  essendo il relativo raggio di curvatura e  $\mu$  un numero dato. Il luogo del punto  $Q$  è una nuova curva  $\Delta$  che può dirsi *Panevoluta* di  $\Gamma$  essendo essa più generale dell'evoluta.

Fra gli archi corrispondenti  $s$  e  $s_1$  di  $\Gamma$  e  $\Delta$  passa la relazione  $ds_1/ds = 1 - \mu$ . Se  $y = f(x)$  è l'equazione di  $\Gamma$ , le coordinate generiche del centro di curvatura sono notoriamente

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad \eta = y + \frac{y'(1+y'^2)^{3/2}}{y''};$$

se  $\xi_1$  e  $\eta_1$  sono le coordinate del punto corrispondente della panevoluta, si hanno le relazioni

$$\xi_1 = \frac{\lambda x + \xi}{1 + \lambda}, \quad \eta_1 = \frac{\lambda y + \eta}{1 + \lambda}$$

<sup>1)</sup> Da una comunicazione epistolare del Dott. L. BRAUDE.

ove

$$\lambda = \frac{(1-\mu)}{\mu}.$$

P. es. la panevoluta della parabola  $y = x^2$  è la cubica con punto doppio avente la seguente rappresentazione parametrica:

$$\xi_1 = \frac{x(\lambda - 4x^2)}{1 + \lambda}, \quad \eta_1 = \frac{1 + 2x^2(\lambda + 3)}{2(1 + \lambda)};$$

ma nel caso  $\lambda = -3$  si ottiene invece la direttrice della parabola, donde segue: Il raggio di curvatura in un punto della parabola è il doppio del segmento di normale compreso fra la curva e la direttrice. Se invece  $\Gamma$  è un'ellisse nascono come panevolute curve di 6° ordine di forme svariate, però analoghe alle curve parallele. Analogamente per l'iperbole; ma, se questa è equilatera,  $R$  risulta eguale alla metà del segmento di normale intercetta dalla curva, proprietà analoga a una notissima del cerchio. Se  $\Gamma$  è l'asteroide  $x = \cos^3 \varphi$ ,  $y = \sin^3 \varphi$  si ottiene

$$\xi_1 = \frac{(\lambda - 2) \cos^3 \varphi + 3 \cos \varphi}{1 + \lambda}, \quad \eta_1 = \frac{(\lambda - 2) \sin^3 \varphi + 3 \sin \varphi}{1 + \lambda},$$

formole che rappresentano una sestica razionale; ma se  $\lambda = 2$  (cioè quando  $R$  viene diviso nel rapporto 1/2) e così se  $\lambda = -2$  (cioè se  $R$  viene raddoppiato oltre  $P$  senso  $CP$ ) si ottiene il cerchio circoscritto; finalmente per  $\lambda = -4$  (cioè se si porta il segmento  $R/3$  nel senso negativo) si arriva alla rosa a quattro foglie.

L'ordinaria cicloide conduce alle seguenti curve trascendenti

$$\xi_1 = a \left[ \varphi - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \sin \varphi \right], \quad \eta_1 = a (1 - \cos \varphi) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1};$$

se  $-1 < \lambda > 0$  tali curve sono nodate, mentre se  $\lambda = 1$  si ottiene l'asse delle  $x$ , il che prova che l'asse delle  $x$  (retta su cui ruotola il cerchio generatore della cicloide) biseca i raggi di curvatura. Finalmente (cfr. p. 66) tutte le panevolute della spirale logaritmica sono curve della stessa specie<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Altre specie di linee considerate come estensioni delle evolute sono studiate nei seguenti lavori: C. MICHEL, *Développées et développante aéro-laires* (Nouv. Ann. Math., IV Ser., T. XVII, 1917); R. GOORMAGHTIGH, *Correspondance* (Id., T. XVIII, 1918); J. L. WALSH, *Generalization of evolutes* (Rend. Circ. Mat. Palermo, T. XLVIII, 1924).

## CAPITOLO V

## Le Curve parallele.

**288.** Ritenendo le notazioni introdotte a p. 289 e ricordando le considerazioni ivi svolte, riconosceremo facilmente che l'equazione

$$(1) \quad y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = c$$

rappresenta, al variare della costante  $c$ ,  $\infty^1$  curve aventi le stesse normali della curva  $\Gamma$  rappresentata dall'equazione

$$y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = 0.$$

Adottando l'espressiva denominazione proposta da Leibniz<sup>1)</sup>, le chiameremo *curve parallele* a  $\Gamma^2$ . È evidente che ogni curva parallela a  $\Gamma$  può considerarsi come l'involuppo di un cerchio di raggio costante il cui centro percorre questa curva<sup>3)</sup>; la ricerca delle curve parallele ad una data è dunque caso particolare del problema degli involuppi, onde può risolversi mediante differenziazioni ed eliminazioni. Se a tutte le curve di un piano si fanno corrispondere le curve parallele distanti di una data lunghezza, si ottiene una speciale trasformazione di contatto, che Lie chiamò *dilatazione*<sup>4)</sup>; in essa a punti corrispondono cerchi ed a rette corrispondono rette.

<sup>1)</sup> *Generalia de natura linearum, anguloque contactus et osculi, provolutionibus, alioque cognatis, et eorum usibus nonnullis* (Acta Erud., 1692, Leibniz ed. Gerhardt, T. V, p. 280). Un cenno del concetto di curve parallele trovasi già in DÜRER (1525): cfr. S. GÜNTHER, *Geschichte des math. Unterrichts* ecc. (Berlin 1889), p. 362.

<sup>2)</sup> Altri preferisce il nome *curve equidistanti*.

<sup>3)</sup> Da questa definizione si può dedurre la seguente proposizione: Se si sottopone una curva  $\Gamma$  a un movimento di traslazione facendo percorrere un suo punto una circonferenza, l'involuppo delle posizioni da essa assunte è una curva parallela a  $\Gamma$  (S. ROBERTS, *On the order and singularities of the parallel of an algebraic curve*, Proc. Lond. Math. Soc., T. III, 1869-71). La curva parallela a  $\Gamma$  si può anche immaginare come luogo delle posizioni del centro di un cerchio di raggio costante che ruzzola sopra  $\Gamma$ .

<sup>4)</sup> *Geometrie der Berührungstransformationen*, T. I (Leipzig 1896), p. 14.

Se  $\Gamma$  è una curva algebrica, algebriche saranno tutte le curve ad essa parallele; dette  $n$  e  $\nu$  l'ordine e la classe di  $\Gamma$ ,  $d$  e  $\delta$  i numeri dei suoi punti doppi e delle sue tangenti doppie,  $\kappa$  e  $k$  i numeri dei suoi flessi e delle sue cuspidi, e indicando con le stesse lettere accentuate le analoghe caratteristiche per la curva  $\Gamma'$ , si vede facilmente che in generale

$$\nu' = 2\nu, \delta' = 2\delta, \kappa' = 2\kappa,$$

donde applicando le formole di Plücker si dedurranno i valori delle altre quantità  $n'$ ,  $d'$ ,  $k'$  (p. es.  $n' = 2(n + \nu)$ ). Ma questi numeri subiscono delle modificazioni<sup>1)</sup> se  $\Gamma$  passa ( $f$  volte) pei punti ciclici e tocca ( $g$  volte) la retta all'infinito; infatti in tal caso si trova:

$$n' = 2n + 2\nu - 2f - 2g; \nu' = 2\nu; \delta' = 2\delta + 2g;$$

$$k' = 6\nu + 2k - 6f - 6g; f' = 2\nu - 2g; g' = 2g.$$

È notevole che supposto  $\nu = f + g$  queste formole divengono

$$n' = 2n; \nu' = 2\nu; \kappa' = 2\kappa;$$

$$g' = 2g; d' = n^2 + 2d; \delta' = \nu^2 + 2\delta;$$

dall'esame delle quali il Cayley fu indotto a congetturare che (come accade se  $\Gamma$  è un cerchio) la curva  $\Gamma'$  si spezzasse in due aventi le stesse caratteristiche di  $\Gamma$ ; ricerche recenti hanno mostrata l'infondatezza di tale congettura<sup>2)</sup> e E. KÖSTLIN<sup>3)</sup> osservò che le curve algebriche, le cui conoidi rispetto a un punto  $O$  si spezzano sono polari reciproche, rispetto a un circolo di centro  $O$ , di curve le cui parallele si spezzano: sono *curve di direzione* di Laguerre (Vol. I, p. 510).

Tra le lunghezze di due archi corrispondenti in due curve parallele esiste una relazione semplicissima che A. L. Crelle ha dimostrata col calcolo<sup>4)</sup>, e che si può stabilire con un semplice ragionamento geometrico, il quale conduce in pari tempo ad una

<sup>1)</sup> V. la già citata memoria del CAYLEY, *On Evolutes and parallel Curves* (Quart. Journ., T. XI, 1871; Math. Papers, T. VIII, p. 31); ivi sono anche considerate le curve parallele in una metrica proiettiva qualunque.

<sup>2)</sup> A. FERRARI, *Intorno allo spezzamento delle linee parallele alle curve piane algebriche* (Rend. Acc. Lincei, V Ser., T. XIV, 1905). V. anche H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig 1908), p. 116.

<sup>3)</sup> *Ueber die ebenen algebraischen Kurven, deren Konchoiden zerfallen* (Württemberg. Mitt., II Ser., T. X, 1908).

<sup>4)</sup> *Mémoire sur le parallélisme des courbes et surfaces courbes* (Ann. di Gergonne, T. XII, 1821); cfr. MAGNUS, *Sammlung von Aufg. und Lehrsätze aus der anal. Geometrie der Ebene* (Berlin 1833), p. 339.

formola di quadratura dovuta al medesimo scienziato. Consideriamo (fig. 37), infatti, due punti consecutivi  $M$  e  $N$  della curva  $\Gamma$  ed i punti  $M'$  e  $N'$  ad essi corrispondenti sulla curva  $\Gamma'$  parallela a  $\Gamma$ . Le rette  $MM'$  e  $NN'$  saranno normali tanto a  $\Gamma$  quanto a  $\Gamma'$ .

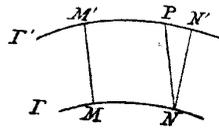


Fig. 37.

Poniamo  $MN = ds$ ,  $M'N' = ds'$ , area  $MN'N'M' = dA$ ; indichiamo poi con  $\nu$  l'angolo della normale  $MM'$  con una retta fissa e con  $\nu + d\nu$  l'angolo analogo relativo alla retta  $NN'$ . Condotta  $NP$  parallela a  $MM'$  sarà  $\text{ang. } PN'N' = d\nu$ , il quadrilatero  $M'NMP$  potrà considerarsi come un rettangolo e  $PN'$  potrà assimilarsi ad un arco di cerchio col centro in  $N$ . Perciò, se  $a$  è la

distanza delle due curve parallele, si avrà

$$PN' = M'N' - MN = ds' - ds = a d\nu;$$

$$dA = \text{area } MN'N'M' = \text{rettangolo } MNP M' + \text{settore } PN'N' = \\ = a ds + \frac{1}{2} a^2 d\nu;$$

integrando si ottiene

$$(2) \quad s' = s + a\nu + \text{cost.}; \quad A = as + \frac{1}{2} a^2 \nu + \text{cost.};$$

sono queste le relazioni cercate; la prima dà un arco della curva  $\Gamma'$  parallela a  $\Gamma$  come somma dell'arco corrispondente di questa e di un arco di cerchio; la seconda invece serve alla determinazione dell'area del quadrilatero curvilineo limitato da due archi corrispondenti di  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  e dalle comuni normali negli estremi.

Quando si conosce l'equazione intrinseca di una curva  $\Gamma$  è facile trovare quella di una curva  $\Gamma'$  ad essa parallela; infatti, siccome  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  hanno la stessa evoluta, così, applicando le formole (8) a p. 284 si ottengono le seguenti:

$$R \frac{dR}{ds} = R' \frac{dR'}{ds'}, \quad R + c = R' + c';$$

posto quindi per brevità  $c - c' = a$  otterremo  $R' = R + a$  onde la prima di queste equazioni diviene

$$R \frac{dR}{ds} = (R + a) \frac{dR}{ds} \frac{ds}{ds'}$$

ossia

$$\frac{ds'}{ds} = 1 + \frac{a}{R};$$

emerge da ciò che, come rappresentazione intrinseca di  $\Gamma'$  si può considerare la seguente coppia di equazioni:

$$(2) \quad R' = R + a, \quad s' = s + a \int ds/R.$$

**289.** La curva parallela ad una retta essendo costituita da una coppia di rette e la curva parallela ad una circonferenza da una coppia di circonferenze, le prime curve che presumibilmente possono condurre, con le loro parallele, a nuove linee sono le coniche. Consideriamo ad es. l'ellisse di equazione

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

ogni curva ad essa parallela, potendosi considerare come il contorno apparente di un toro proiettato da un punto situato all'infinito sopra un piano qualunque, venne chiamata *toroide*<sup>1)</sup>. Dalla definizione della toroide emerge subito che essa consta di due linee chiuse, una interna e l'altra esterna all'ellisse fondamentale; non ha mai flessi, ma il ramo interno può avere delle cuspidi: ciò risulta dal fatto che in due punti corrispondenti dell'ellisse e della toroide i raggi di curvatura differiscono per una costante. Per trovare l'equazione della toroide consideriamo uno qualunque dei cerchi di cui essa è l'inviluppo: sarà rappresentato dall'equazione

$$(4) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

$\alpha$  e  $\beta$  soddisfacendo alla condizione

$$(5) \quad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

L'equazione cercata si otterrà combinando queste equazioni con le derivate rispetto a  $\alpha$  e  $\beta$  dell'equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 + \lambda \left\{ \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 \right\} = 0.$$

Ora queste derivate essendo

$$x - \alpha = \frac{\lambda \alpha}{a^2}, \quad y - \beta = \frac{\lambda \beta}{b^2}$$

<sup>1)</sup> E. CATALAN, *Sur la toroïde* (Nouv. Ann., T. III, 1843); ove è attribuita a FLEUR ST. DÉNIS la scoperta del legame fra il toro e la curva parallela ad un'ellisse ed è fatto risalire a questo legame la scelta del nome per la curva di cui ci occupiamo.

si ha

$$\alpha = \frac{a^2 x}{\lambda + a^2}, \quad \beta = \frac{b^2 y}{\lambda + b^2}.$$

Sostituendo questi valori nelle (4) e (5) si ottengono le altre:

$$(5') \quad \frac{a^2 x^2}{(\lambda + a^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(\lambda + b^2)^2} = 1, \quad \frac{\lambda^2 x^2}{(\lambda + a^2)^2} + \frac{\lambda^2 y^2}{(\lambda + b^2)^2} - r^2 = 0,$$

la ricerca dell'equazione della toroide è ridotta all'eliminazione di  $\lambda$  fra queste equazioni<sup>1)</sup>: tale calcolo venne eseguito dal Catalan e dal Cayley<sup>2)</sup>, e condusse al risultato seguente:

$$6) \quad (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - r^2)^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 r^2 - b^2 r^2 - a^2 b^2)^2 + \\ + 4 a^2 b^2 r^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - r^2)^3 - 27 a^4 b^4 r^4 + \\ + 18 a^2 b^2 r^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - r^2) (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 r^2 - \\ - b^2 r^2 - a^2 b^2) + \\ + 4 (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 r^2 - b^2 r^2 - a^2 b^2)^3 = 0;$$

la toroide è pertanto una curva dell'ottavo ordine, simmetrica rispetto agli assi della data ellisse.

L'equazione (6) è tanto complicata che è malagevole servirsene per lo studio della toroide. Meglio è invece risolvere rispetto a  $x$  e  $y$  le equazioni (5')<sup>3)</sup>, oppure adoperare la rappresentazione analitica che si ottiene come segue: Siano  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P(x, y)$  due punti corrispondenti della toroide e dell'ellisse, il segmento  $PP_1$  essendo di lunghezza  $r$  e normale all'ellisse sussisteranno le relazioni:

$$\frac{x - x_1}{b^2 x_1} = \frac{y - y_1}{a^2 y_1}, \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

donde

$$(7) \quad x = x_1 \pm \frac{b^2 r x_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}}, \quad y = y_1 \pm \frac{a^2 r y_1}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}};$$

prendendo il segno + si otterrà l'arco esterno, prendendo il segno — l'interno. Bisogna ricordare che  $x_1$  e  $y_1$  sono legati dalla relazione

<sup>1)</sup> Cfr. CAUCHY, *Notes sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes et à la réctification des surfaces* (C. R., T. XIII, 1841).

<sup>2)</sup> *Sur la courbe parallèle à l'ellipse* (Ann. di Matem., T. XIII, 1860).

<sup>3)</sup> Si ottiene così la seguente coppia di equazioni:

$$x = \frac{\lambda + a^2}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda^2 - b^2 r^2}{a^2 - b^2}}, \quad y = \frac{\lambda + b^2}{\lambda} \sqrt{\frac{a^2 r^2 - \lambda^2}{a^2 - b^2}}.$$

$x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 = 1$ ; ciò abilita a porre  $x_1 = a \cos \omega$ ,  $y_1 = b \sin \omega$ , e scrivere quindi

$$(8) \quad x = a \cos \omega \pm \frac{b r \cos \omega}{\sqrt{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}}, \\ y = a \sin \omega \pm \frac{a r \sin \omega}{\sqrt{a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega}}.$$

Servendosi di una di queste rappresentazioni parametriche si può dimostrare che la toroide ha a distanza finita quattro punti doppi, due dei quali sono sempre immaginari; essa ha poi dodici cuspidi, otto delle quali sono sempre immaginarie; finalmente all'infinito essa ha quattro punti doppi. Se ne deduce che la toroide è del genere 1 e di classe 4 ed è fornita di due tangenti doppie: queste coincidono con la retta all'infinito; è ciò che si vede cercando l'equazione tangenziale della toroide. Allo scopo di trovare questa equazione servono le equazioni che nascono dal risolvere rispetto a  $x, y$  le equazioni (5'). Esse danno infatti come equazione della tangente nel punto ( $\lambda$ ):

$$x \sqrt{a^2 r^2 - \lambda^2} + y \sqrt{\lambda^2 - b^2 r^2} = (\lambda + r^2) \sqrt{a^2 - b^2}$$

onde le coordinate  $u, v$  di quella tangente sono:

$$u = \frac{\sqrt{a^2 r^2 - \lambda^2}}{(\lambda + r^2) \sqrt{a^2 - b^2}}, \quad v = \frac{\sqrt{\lambda^2 - b^2 r^2}}{(\lambda + r^2) \sqrt{a^2 - b^2}};$$

eliminando  $\lambda$  se ne trae:

$$(9) \quad [(a^2 - r^2) v^2 + (b^2 - r^2) u^2 - 1]^2 = 4 r^2 (u^2 + v^2),$$

che è l'equazione tangenziale della toroide.

Applicando alla toroide i teoremi di Crelle concernenti la rettificazione e la quadratura di due curve parallele (p. 319), si vede che: *la differenza fra le lunghezze della toroide esterna e dell'interna è eguale a  $4\pi r$ , se  $2r$  è la distanza fra le due, mentre l'area che esse limitano equivale al rettangolo avente per base il contorno della data ellisse e per altezza  $2r$* <sup>1)</sup>.

Cambiando nelle formole (6) e (7) il segno si ottiene la rappresentazione analitica della curva parallela all'iperbole; analoghe rappresentazioni analitiche ha la curva (di sest'ordine) parallela alla

<sup>1)</sup> DIENGER, *Ueber die Rectification und Quadratur der Toroide* (Archiv, T. IX, 1847).

parabola. Lasciamo al lettore di eseguire i calcoli relativi, e notiamo che le curve parallele alle coniche possono studiarsi comodamente mediante coordinate tangenziali<sup>1)</sup>, determinandone cioè ogni tangente con i segmenti che essa determina sopra due rette parallele a partire da due punti dati sulle medesime<sup>2)</sup>.

**290.** Una classe di curve per cui è agevole la ricerca delle curve parallele è quella costituita dalle epicicloidi<sup>3)</sup>. Servendosi infatti delle equazioni (4 e) a pag. 103 si vede che la curva parallela alla epicicloide rappresentata da quell'equazione per  $h = r$  è l'involuppo del circolo:

$$\left[ x - \frac{n+1}{n} r \cos n \varphi + r \cos (n+1) \varphi \right]^2 + \left[ y - \frac{n+1}{n} r \sin n \varphi + r \sin (n+1) \varphi \right]^2 = l^2;$$

combinando quest'equazione con la sua derivata rispetto a  $\varphi$  si ottiene

$$(9) \quad \begin{cases} x = \frac{n+1}{n} r \cos n \varphi - r \cos (n+1) \varphi \pm l \sin \frac{2n+1}{2} \varphi \\ y = \frac{n+1}{n} r \sin n \varphi - r \sin (n+1) \varphi \pm l \cos \frac{2n+1}{2} \varphi, \end{cases}$$

che rappresenta la curva in questione.

Allo stesso risultato si perviene osservando che la normale nel punto  $(\varphi)$  alla curva

$$\frac{x}{r} = \frac{n+1}{n} \cos n \varphi - \cos (n+1) \varphi,$$

<sup>1)</sup> SCHERING, *Die Parallelcurve der Ellipse als Curve vom Rang Eins, unter Anwendung eines neuen Liniencoordinatensystems* (Pr. Brilon, 1878) e *Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten* (Leipzig 1884).

<sup>2)</sup> Altre proprietà delle curve in questione si trovano esposte nella memoria di F. GOMES TEIXEIRA, *Sur les courbes parallèles à l'ellipse* (Belgique Mém., T. LVIII, 1898). P. es. si dimostra che la curva parallela all'ellisse considerata consta di due rami ciascuno dei quali ha, a distanza finita, quattro punti doppi, di cui due sempre immaginari, mentre gli altri due sono pure immaginari quando  $b < r < s$ ; quando  $r > a^2/b$  o  $< b^2/a$  sono punti isolati; la curva ha in totale 12 cuspidi, di cui otto sempre immaginari; donde una conferma dell'essere la curva di classe 4 e genere 1.

<sup>3)</sup> V. un articolo di AUDIBERT nel T. III, 1896, dell'*Intermédiaire*, pp. 72-73.

$$\frac{y}{r} = \frac{n+1}{n} \sin n \varphi - \sin (n+1) \varphi$$

ha per equazione

$$\frac{x - r \left\{ \frac{n+1}{n} \cos n \varphi - \cos (n+1) \varphi \right\}}{\cos n \varphi - \cos (n+1) \varphi} = \frac{y - r \left\{ \frac{n+1}{n} \sin n \varphi - \sin (n+1) \varphi \right\}}{\sin n \varphi - \sin (n+1) \varphi}.$$

Introducendo variabili complesse le equazioni (9) possono sostituirsi con la seguente:

$$(9') \quad z = \frac{n+1}{n} a e^{ni\varphi} r e^{(n+1)i\varphi} \pm l e^{\frac{2n+1}{2}i\varphi},$$

ricordando una considerazione segnalata nella nota 2) a p. 109 vedremo emergere da ciò che: *Le curve parallele a un'ordinaria epicycloide sono curve di Eichler, dette anche cicloidi di secondo ordine.*

Uno speciale interesse presenta il caso in cui si tratti di un'epicycloide quadricuspide o asteroide regolare<sup>1)</sup> (v. fig. 38): esso guida ad una conseguenza importante, per stabilire la quale premetteremo le osservazioni seguenti:

Siano date due rette concorrenti qualsivogliano; esse potranno sempre rappresentarsi con equazioni della forma:

$$y = \pm x \operatorname{tg} \alpha;$$

sia poi

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

<sup>1)</sup> G. LORIA, *Les courbes parallèles aux astéroïdes sont elles toujours des astéroïdes?* (Mathésis, II Ser., T. X, 1910); cfr. la seguente *Note sur l'astroïde et ses courbes parallèles* di J. NEUBERG, ove sono segnalati alcuni lavori precedenti sullo stesso tema di MANNHEIM e D'OCAGNE.

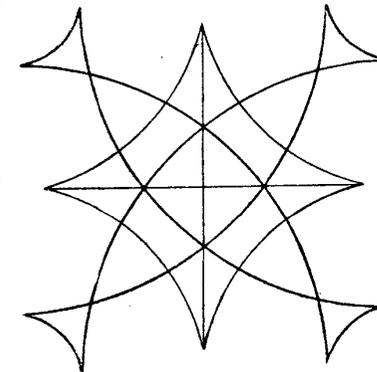


Fig. 38. — Curva parallela a uno asteroide regolare.

l'equazione di una qualunque delle rette su cui le due date staccano un segmento di lunghezza  $l$ : si trova facilmente

$$p = \frac{l \cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha)}{\sin 2\alpha}$$

onde l'asteroide (non regolare) involupato dalle rette ora definite può intendersi determinato dall'equazione magica seguente

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{l \cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha)}{\sin 2\alpha}$$

o dall'altra equivalente

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} (\cos 2\varphi + \cos 2\alpha)$$

Differenziando questa si ottiene

$$(*) \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = \frac{l}{\sin 2\alpha} \sin 2\varphi,$$

equazione che, combinata con la precedente, dà

$$(10) \quad \begin{cases} x = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} \left[ \frac{3}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos 3\varphi + \cos 2\alpha \cos \varphi \right] \\ y = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} \left[ -\frac{3}{2} \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 3\varphi + \cos 2\alpha \sin \varphi \right] \end{cases}$$

Da questa rappresentazione parametrica dell'asteroide si ottiene il seguente valore per la derivata del suo arco:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} (\cos 2\alpha - 3 \cos 2\varphi)$$

donde integrando

$$(11) \quad s = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} \left[ \varphi \cos 2\alpha - \frac{3}{2} \sin 2\varphi \right] + \text{cost.}$$

Differenziando nuovamente la (\*) si ottiene

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{2l}{\sin 2\alpha} \cos 2\varphi$$

onde il raggio di curvatura  $R$  dell'asteroide è dato da

$$(12) \quad R = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} (\cos 2\alpha - 3 \cos 2\varphi).$$

Ponendo poi  $2\varphi = \omega + \pi/2$  e scegliendo convenientemente la origine ed il senso positivo sull'asteroide si possono surrogare le (11), (12) con le due equazioni

$$(13) \quad \begin{cases} R = \frac{l}{2 \sin 2\alpha} (3 \sin \omega + \cos 2\alpha), \\ s = \frac{l}{4 \sin 2\alpha} (3 \cos \omega - \omega \cos 2\alpha); \end{cases}$$

siccome queste danno  $R$  e  $s$  in funzione della variabile indipendente  $\omega$  così il sistema che esse formano equivale all'equazione intrinseca dell'asteroide [equazione che otterrebbe eliminando  $\omega$  fra le (13)].

Notiamo ora che le (13) sono della seguente forma:

$$(14) \quad R = k \sin \omega + a, \quad s = \frac{1}{2} (k \cos \omega - a \omega)$$

onde nasce la questione se due equazioni del tipo (14) rappresentino sempre un asteroide. Per risolverla si osservi che le equazioni (14) si identificano alle (13) ponendo

$$k = \frac{3l}{2 \sin 2\alpha}, \quad a = \frac{l}{2 \operatorname{tg} 2\alpha};$$

da queste traesi

$$\cos 2\alpha = \frac{3a}{k}, \quad l = \frac{2\sqrt{k^2 - 9a^2}}{3},$$

e queste equazioni daranno per  $a$  e  $l$  dei valori reali purchè sia

$$(15) \quad |k| < 3|a|.$$

Concludiamo quindi che le equazioni (14) rappresentano un asteroide purchè le costanti  $a, k$  soddisfino le condizioni (15). Ove ciò non accada le (14) rappresentano una curva non più generabile con costruzioni reali al modo di un asteroide; essa può chiamarsi *para-asteroide* e può realmente costruirsi col procedimento che ora passiamo ad esporre.

Consideriamo l'asteroide regolare rappresentato dalle equazioni [cfr. equazioni (13)]

$$R = \frac{3l}{2} \operatorname{sen} \omega, \quad s = \frac{3l}{4} \cos \omega;$$

servendosi delle (2) si vede che la curva ad esso parallela ha per equazioni

$$(16) \quad R = \frac{3l}{2} \operatorname{sen} \omega + a, \quad s = \frac{3l}{4} \cos \omega - \frac{a}{2}.$$

Dunque la curva parallela ad un asteroide regolare è in generale un para-asteroide. Applicando la (15) si vede che soltanto quando sia

$$a > l/2$$

essa è un asteroide. Resta così dimostrata la necessità di restringere la portata di una proposizione esposta dal Salmon<sup>1)</sup>, il che d'altronde appare evidente esaminando attentamente il ragionamento adoperato per stabilirla. Aggiungasi che il paragone delle equazioni (14) e (16) mostra che qualunque para-asteroide od asteroide è una curva parallela ad un asteroide regolare; siccome poi ogni curva parallela ad una curva parallela a  $\Gamma$  è pure parallela a  $\Gamma$ , così tutte le curve parallele ad un para-asteroide o ad un asteroide sono para-asteroidi od asteroidi.

**291.** Chiuderemo il presente Capitolo stabilendo una proposizione che collega alla teoria delle curve parallele la considerazione di un certo involuppo<sup>2)</sup>; essa si enuncia come segue:

**TEOREMA.** — L'involuppo dei cerchi i cui centri appartengono ad una data linea  $\Gamma$  non retta e che toccano un cerchio fisso di centro  $O$  e raggio  $r$  è una curva parallela all'analogo involuppo relativo all'ipotesi  $r = 0$ , cioè all'involuppo dei cerchi i cui centri stanno su  $\Gamma$  e che passano pel punto fisso  $O$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che se una curva ha la seguente rappresentazione parametrica

$$x = \varphi(\lambda), \quad y = \psi(\lambda),$$

la curva ad essa parallela alla distanza  $n$  si può rappresentare come segue

$$(20) \quad x = \varphi(\lambda) - \frac{n \psi'(\lambda)}{\sqrt{\varphi'(\lambda)^2 + \psi'(\lambda)^2}}, \quad y = \psi(\lambda) + \frac{n \varphi'(\lambda)}{\sqrt{\varphi'(\lambda)^2 + \psi'(\lambda)^2}}.$$

<sup>1)</sup> SALMON-FIEDLER, *Ebene Curven*, p. 129. V. anche la *Question 1391* proposta da LAGUERRE nelle *Nouv. Ann.* e risolta nel 1883 da M. D'OCAGNE.

<sup>2)</sup> G. LORIA, *Sopra certi involuppi di cerchi* (*Mathem. Annalen*, LXIV, 1907).

Ciò posto, dette  $\xi, \eta$  le espressioni parametriche delle coordinate di un punto qualunque della curva  $\Gamma$ , è evidente che gli  $\infty'$  cerchi considerati nell'enunciato hanno per equazione generale

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (r + \sqrt{\xi^2 + \eta^2})^2$$

o più semplicemente

$$(21) \quad \xi x + \eta y = \frac{x^2 + y^2 - r^2}{2} - r \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Per trovarne l'involuppo differenziamo questa equazione rispetto al parametro  $\lambda$  ed otterremo

$$(22) \quad \xi' x + \eta' y = -r \frac{\xi \xi' + \eta \eta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

L'equazione dell'involuppo si otterrebbe eliminando  $\lambda$  fra queste equazioni; ma tale eliminazione non si può eseguire senza specificare le funzioni  $\xi, \eta$ . Si può invece ottenere la rappresentazione parametrica dell'involuppo risolvendo rispetto a  $x, y$  le equazioni (21) (22); esse, infatti, danno

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{x^2 + y^2 - r^2}{2(\xi \eta' - \xi' \eta)} \eta' - \frac{r \xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ y &= \frac{x^2 + y^2 - r^2}{2(\xi \eta' - \xi' \eta)} \xi' - \frac{r \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \end{aligned} \right.$$

Ma quadrando e sommando queste equazioni si ottiene

$$x^2 + y^2 - r^2 = \frac{(x^2 + y^2 - r^2)^2 (\xi'^2 + \eta'^2)}{4(\xi \eta' - \xi' \eta)^2} - \frac{r(x^2 + y^2 - r^2)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

onde

$$\frac{x^2 + y^2 - r^2}{2(\xi \eta' - \xi' \eta)} = \frac{2(\xi \eta' - \xi' \eta)(r + \sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{(\xi'^2 + \eta'^2) \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

In conseguenza le precedenti espressioni di  $x, y$  divengono:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{2(\xi\eta' - \xi'\eta)}{\xi'^2 + \eta'^2} \eta' - r \frac{2\xi'\eta\eta' - \xi\eta'^2 + \xi\xi'^2}{(\xi'^2 + \eta'^2)\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ y &= \frac{2(\eta\xi' - \eta'\xi)}{\xi'^2 + \eta'^2} \xi' - r \frac{2\eta'\xi\xi' - \eta\xi'^2 + \eta\eta'^2}{(\xi'^2 + \eta'^2)\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}; \end{aligned} \right.$$

tale è la rappresentazione parametrica dell'inviluppo considerato nel teorema. Ora se si pone

$$\varphi(\lambda) = 2 \frac{(\xi\eta' - \xi'\eta)\eta'}{\xi'^2 + \eta'^2}, \quad \psi(\lambda) = 2 \frac{(\eta\xi' - \eta'\xi)\xi'}{\xi'^2 + \eta'^2}$$

si vede che le equazioni (23) sono del tipo (20) per  $n = r$  onde il teorema è dimostrato.

Aggiungiamo che se della curva  $\Gamma$  invece della rappresentazione parametrica si conoscesse l'equazione cartesiana

$$f(\xi, \eta) = 0$$

la rappresentazione parametrica dell'inviluppo anzidetto sarebbe (come dimostra un facile calcolo)

$$(24) \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{r\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + 2 \frac{r + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial f}{\partial \eta}}{\left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right]} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ y &= -\frac{r\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + 2 \frac{r + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial f}{\partial \eta}}{\left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right]} \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{aligned} \right.$$

Applicando il teorema precedente e le formole di Cayley (p. 319) si vede che si possono trovare le caratteristiche plückeriane di quegli inviluppi generali quando si conoscano le caratteristiche relative all'ipotesi  $r = 0$ . Se ad es.  $\Gamma$  è un circolo le caratteristiche generali scaturiscono da quelle notissime della lumaca di Pascal o della cardioide<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> O. LOSEHAND, *Ueber Kurven 12. und 10. Ordnung, die in die Enveloppen theorie auftreten* (Diss. Kiel 1904; oppure Math. Ann., LXIV, 1907).

## CAPITOLO VI

### Le Radiali<sup>1)</sup>.

**292.** Se da un punto fisso  $O$  del piano di una curva  $\Gamma$  si conducono i segmenti equipollenti ai raggi di curvatura di questa si ottiene una nuova curva  $\Gamma_0$  la quale porta il nome di *radiale* della curva data (2). È evidente che variando il punto  $O$ , la curva  $\Gamma_0$  conserva la propria forma, la propria grandezza e la propria orientazione, subendo soltanto uno spostamento nel piano in cui si trova.

Supponiamo che  $\Gamma$  sia una curva algebrica dell'ordine  $n$  avente per equazione razionale

$$(1) \quad f(x, y) = 0,$$

onde  $f$  sarà un polinomio intero in  $x, y$  del grado  $n$ , del quale indicheremo con  $f_1, f_2, f_{11}, f_{12} = f_{21}, f_{22}$  le derivate parziali del 1° e 2° ordine rispetto a  $x, y$ . Da formole note<sup>2)</sup> (v. p. 282) risulta che le proiezioni sopra gli assi coordinati del segmento che va dal punto  $P(x, y)$  della curva  $\Gamma$  al corrispondente centro di curvatura  $C(x_1, y_1)$ , cioè le quantità  $x_1 - x$  e  $y_1 - y$ , sono espresse dai prodotti di  $f_1$  e  $f_2$  per la frazione

$$(f_1^2 + f_2^2) : \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ora, chiamando  $(\alpha, \beta)$  le coordinate del punto fisso  $O$  e  $(x_0, y_0)$

<sup>1)</sup> G. LORIA, *Intorno alle radiali delle curve piane* (Rend. Circ. mat. Palermo, T. XVI, 1902); *La radiale di una curva algebrica* (Period. mat., III Ser., T. XVII, 1902).

<sup>2)</sup> R. TUCKER, *On radial Curves* (Proc. of the Lond. math. Soc., T. I, 1865). Dalla riferita definizione emerge che la radiale disimpegna rispetto alla curvatura di una curva un ufficio analogo a quello dell'odografo di un movimento (HAMILTON, *Elements of Quaternions*, London 1866. p. 100).

quelle del punto  $P_0$  che corrisponde sopra  $\Gamma_0$  al punto  $P$ , si ha evidentemente  $x_0 - \alpha = x_1 - x$ ,  $y_0 - \alpha = y_1 - y$ , quindi, in forza di ciò che precede,

$$(2) \quad x_0 = \alpha + (f_1^2 + f_2^2) : \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}, \quad y_0 = \beta + (f_1^2 + f_2^2) : \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ad ogni coppia di valori di  $x, y$  soddisfacenti l'equazione (1) queste equazioni danno le coordinate del corrispondente punto della radiale, onde eliminando  $x$  e  $y$  fra le tre equazioni (1) e (2) si giungerebbe all'equazione di questa curva. Tale eliminazione non si è in grado di effettuare in generale; ma, anche senza eseguirla, si può trovare quale sia il grado del risultante, cioè l'ordine della radiale  $\Gamma_0$ . Si consideri infatti una retta arbitraria  $r$  del piano, p. es. quella di equazione

$$Ax + By + C = 0;$$

se  $r$  contiene il punto  $P_0$ , le cui coordinate sono date dalla (2), si avrà

$$(3) \quad (A\alpha + B\beta + C) \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} + (Af_1 + Bf_2)(f_1^2 + f_2^2) = 0.$$

È questa l'equazione di una curva  $\Delta$  in generale dell'ordine  $3(n-1)$  la quale taglia la curva data  $\Gamma$  in  $3n(n-1)$  punti tali che i loro corrispondenti sulla radiale sono gli unici che cadono sopra la retta  $r$  considerata. Ciò autorizza a concludere che la radiale di una curva algebrica dell'ordine  $n$  è una curva algebrica in generale dell'ordine  $3n(n-1)$ . Per es. la radiale di una conica è in generale una curva del 6° ordine, risultato noto, e la radiale di una cubica è al massimo di 18° ordine, mentre era stato ritenuto dal Tucker potesse salire al 128°.

Il numero  $3n(n-1)$ , esprimente l'ordine di  $\Gamma_0$ , soffre notevoli riduzioni per la presenza di punti multipli nella data curva  $\Gamma$ . Per dimostrare e valutare l'influenza sull'ordine di  $\Gamma_0$  di un punto multiplo, supporremo che questo abbia la molteplicità  $p$  e cada nell'origine; in tal caso si potrà scrivere

$$(4) \quad f(x, y) = f^{(p)} + f^{(p+1)} + \dots + f^{(n)},$$

essendo  $p > 1$  e  $f^{(k)}$  ( $k = p, p+1, \dots, n$ ) una forma binaria di grado  $p$  in  $x, y$ ; in tali ipotesi  $f^{(p)} = 0$  rappresenta il gruppo delle tangenti alla curva  $\Gamma$  nell'origine. Sostituendo nella (3) questo valore di  $f$  ed ordinando secondo le potenze ascendenti di  $x, y$  si vede

che il gruppo di termini di grado minimo è dato da

$$(A\alpha + B\beta + C) \begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & f_1^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & f_2^{(p)} \\ f_1^{(p)} & f_2^{(p)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Ora, applicando il teorema di Eulero sopra le funzioni omogenee ed operando ovvie trasformazioni sul determinante precedente, quest'espressione può trasformarsi successivamente come segue:

$$\begin{aligned} & \frac{A\alpha + B\beta + C}{p-1} \begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & x f_{11}^{(p)} + y f_{12}^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & x f_{21}^{(p)} + y f_{22}^{(p)} \\ f_1^{(p)} & f_2^{(p)} & 0 \end{vmatrix} = \\ & = \frac{A\alpha + B\beta + C}{p-1} \begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} & 0 \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} & 0 \\ f_1^{(p)} & f_2^{(p)} & - (x f_1^{(p)} + y f_2^{(p)}) \end{vmatrix} = \\ & = - \frac{p}{p-1} (A\alpha + B\beta + C) f^{(p)} \begin{vmatrix} f_{11}^{(p)} & f_{12}^{(p)} \\ f_{21}^{(p)} & f_{22}^{(p)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Emerge da quest'espressione che l'origine è in generale per la curva ausiliare  $\Delta$  un punto di molteplicità  $p+2$  ( $p-2$ ) =  $3p-4$  e che ivi le tangenti a tale curva sono: 1° le  $p$  tangenti in quel punto alla data curva; 2° le rette costituenti l'Hessiano del gruppo da esse formato. Nel caso generale in cui tutte le tangenti a  $\Gamma$  nell'origine siano rette distinte, in quel punto sono riunite  $p(3p-4) + p = 3p(p-1)$  intersezioni delle due curve  $\Gamma$  e  $\Delta$ , quindi ogni punto  $p$ -plo a tangenti distinte della curva data produce un abbassamento di  $3p(p-1)$  unità nell'ordine della radiale<sup>1</sup>). Più considerevole è la diminuzione prodotta quando si rimuova l'ipotesi che le tangenti siano tutte distinte; per determinarlo in ogni caso basta servirsi del metodo che serve a scoprire il contegno dell'Hessiana in un punto multiplo della curva fondamentale, cioè ricordare: 1° che un elemento  $s$ -plo ( $s > p$ ) di un gruppo appartenente ad una forma di prima specie e grado  $p$  è multiplo secondo  $2(s-1)$  per l'Hessiano del gruppo; 2° che se gli elementi di un gruppo coincidono, il corrispondente Hessiano è indeterminato.

Applicando il risultato precedente nell'ipotesi  $p=2$  si conclude che ogni punto doppio a tangenti distinte produce nella radiale un abbassamento di sei unità.

Se poi la curva data ha una cuspidale nell'origine con l'asse

<sup>1</sup>) Notisi che quest'espressione è vera anche per  $p=1$ , caso sinora escluso.

delle  $x$  per corrispondente tangente, si vede facilmente che la curva ausiliaria avrà nell'origine un punto triplo, nel quale due tangenti coincidono con la tangente cuspidale, onde la risultante diminuzione è di 8 unità. Emerge da ciò che se la data curva ha  $d$  punti doppi e  $k$  cuspidi, l'ordine  $n_r$  della radiale è espresso come segue:

$$n_r = 3n(n-1) - 6d - 8k.$$

Ora se si chiama  $\kappa$  il numero dei flessi della data curva si ha notoriamente

$$\kappa = 3n(n-2) - 6d - 8k,$$

onde

$$n_r - \kappa = 3n$$

ossia

$$n_r = 3\kappa + \kappa;$$

dunque: l'ordine della radiale di una curva algebrica è in generale eguale al triplo del suo ordine aumentato del numero de' suoi flessi. Ciò prova che per una curva algebrica l'evolvente e la radiale sono curve dello stesso ordine.

Se la curva  $\Gamma$  è razionale ed ha i punti singolari ordinari di molteplicità  $p_1, p_2, \dots$ ; si avrà

$$\sum_i \frac{p_i(p_i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

e l'ordine della radiale di  $\Gamma$  sarà:

$$3n(n-1) - \sum_i 3p_i(p_i-1) = 3n(n-1) - 3(n-1)(n-2) = 6(n-1);$$

dunque la radiale di una curva razionale d'ordine  $n$  è in generale dell'ordine  $6(n-1)$ . Questo numero subisce ulteriori riduzioni quando la curva data abbia relazioni speciali con la retta all'infinito; basti a provarlo l'esempio della parabola, la cui radiale non è che del terz'ordine (p. 338).

Osserviamo finendo che, introducendo per l'omogeneità delle formole una terza coordinata  $z$ , l'equazione (3) diviene:

$$(5) \quad \frac{H z^3}{(n-1)^2} (A\alpha + B\beta + C) + (A f_1 + B f_2) (f_1^2 + f_2^2) = 0,$$

$H$  essendo l'Hessiana della forma  $f$ . Se in particolare, supponiamo  $A = 0, B = 0$ , cioè consideriamo come retta  $r$  la retta all'infinito del piano, la (5) si decompone nelle due  $H = 0, a = 0$ : i punti al-

l'infinito della radiale corrispondono quindi ai flessi ed ai punti all'infinito della curva primitiva, cosa che d'altronde potevasi prevedere.

**293.** Da quanto sino ad ora esponemmo si vede come la ricerca delle proprietà della radiale di una curva rappresentata da un'equazione cartesiana porti — anche quando ci si limiti a curve algebriche — ad investigazioni minute, e come la determinazione della sua equazione esiga eliminazioni di regola inesequibili e, anche nei casi più favorevoli, laboriose. Riesce quindi assai utile l'osservazione seguente: Si può in generale, con una serie limitata di operazioni ben definite, trovare l'equazione in coordinate polari della radiale di qualunque curva, della quale si conosca la equazione intrinseca, cioè l'equazione

$$(6) \quad s = \varphi(R)$$

fra il raggio di curvatura  $R$  e l'arco  $s$ . Si ricordi infatti che, detto  $\theta$  l'angolo che la normale in un punto  $P$  della data curva (cioè la retta a cui appartiene il raggio di curvatura in  $P$ ) forma con una retta fissa, p. es. coll'asse delle  $x$ , si ha:

$$R = \frac{ds}{d\theta} \quad \text{ossia} \quad ds = R d\theta.$$

Ora, dall'equazione intrinseca della curva segue

$$ds = \varphi'(R) \cdot dR,$$

onde

$$R \cdot d\theta = \varphi'(R) \cdot dR,$$

ossia

$$\theta = \int \frac{\varphi'(R) \cdot dR}{R}.$$

Indicando ora con  $\varrho, \omega$  le coordinate polari del punto  $P_0$  della radiale corrispondente al punto  $P$  della data curva, e supponendo di prendere sempre come polo l'origine comune a tutti i segmenti generatori della radiale, si ha evidentemente  $\varrho = R, \omega = \theta$ , onde l'equazione polare di questa è

$$(7) \quad \omega = \int \frac{\varphi'(\varrho) d\varrho}{\varrho},$$

riguardo alla quale è da notarsi che la costante d'integrazione non influisce che sull'orientazione della curva che essa rappresenta.

Il raggio di curvatura  $R_0$  della radiale è dato da una formola (segnalata all'autore nel 1902 da E. Cesàro) e che si deduce agevolmente dall'espressione

$$\frac{\left\{ \rho^2 + \left[ \frac{d\rho}{d\omega} \right]^2 \right\}^{3/2}}{\rho^2 + 2 \left[ \frac{d\rho}{d\omega} \right]^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\omega^2}}$$

del raggio di curvatura in coordinate polari. Essendo infatti per la radiale  $\rho = R$ ,  $\omega = \theta$ , si ha

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{dR}{d\theta} = R_1 \quad \text{e} \quad \frac{d^2\rho}{d\omega^2} = \frac{d^2R}{d\theta^2} = R_2$$

(essendo al solito  $R_1$  e  $R_2$  i raggi di curvatura della prima e seconda evoluta); ne viene

$$R_0 = \frac{(R^2 + R_1^2)^{3/2}}{R^2 + 2R_1^2 - 2RR_2}$$

**294.** Applicando l'esposto schema di calcolo ad alcune speciali curve piane si ottengono delle proposizioni stabilenti relazioni tra curve (anche non tutte algebriche) di natura differente: ci sia lecito indicare i più cospicui dei risultati a cui per tal modo si giunge.

I. Si consideri un'epicicloide (ordinaria) qualunque, p. es. quella rappresentata dall'equazione intrinseca

$$(8) \quad \frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1,$$

ossia

$$s = a \sqrt{1 - R^2/b^2}.$$

Differenziando e sostituendo a  $ds$  il suo valore  $R d\theta$  se ne trae:

$$\frac{b}{a} d\theta = - \frac{dR/b}{\sqrt{1 - R^2/b^2}}.$$

L'equazione polare della radiale è quindi:

$$\frac{b\omega}{a} = \arccos \frac{\rho}{b},$$

ossia

$$(9) \quad \rho = b \cos \frac{b\omega}{a}.$$

Siccome quest'equazione rappresenta sempre una rodonea (Vol. I, p. 420), così si conclude: *la radiale di qualunque epicicloide ordinaria è una rodonea*. Quando il rapporto  $b/a$  è razionale, l'una e l'altra di siffatte curve sono algebriche; la seconda è (l. c. p. 424) dell'ordine  $a + b$  se  $a$  e  $b$  sono entrambi numeri dispari, altrimenti è dell'ordine  $2(a + b)$ . Ad es. le radiali di una cardioide, di un'ipocicloide tricuspide e di un'asteroide regolare (curve degli ordini 4, 4, 6) hanno equazioni polari dei seguenti tipi:

$$\rho = b \cos \omega/3, \quad \rho = b \cos 3\omega, \quad \rho = b \cos 2\omega,$$

e sono degli ordini rispettivi 4, 4, 6.

II. Consideriamo con E. Cesàro<sup>1)</sup>, le curve aventi la seguente equazione intrinseca:

$$(10) \quad s = \int \frac{\lambda \cdot dR}{\sqrt{(R/a)^\mu - 1}}.$$

Applicando l'esposto procedimento generale si ottiene:

$$d\theta = \frac{\lambda \cdot dR}{R \sqrt{(R/a)^\mu - 1}}.$$

Ora il secondo membro è un differenziale binomio sempre integrabile; ed infatti, posto

$$(R/a)^\mu - 1 = y^2,$$

si trova

$$d\theta = \frac{2\lambda}{\mu} \frac{dy}{y^2 + 1},$$

onde

$$\theta = \frac{2\lambda}{\mu} \operatorname{arctg} y,$$

avendo supposta nulla la costante d'integrazione. Riponendo per  $y$  il suo valore si conclude essere:

$$(11) \quad \rho = \frac{a}{\cos^{2/\mu} \frac{\mu\omega}{2\lambda}},$$

<sup>1)</sup> Sur une classe de courbes planes remarquables (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3<sup>a</sup> Serie, T. XIX, 1900).

l'equazione polare della radiale cercata. Le curve rappresentate dalla equazione (4) non vennero ancora studiate in generale, almeno per quanto a noi consta; ma, attribuendo alle costanti  $\lambda$ ,  $\mu$  valori speciali, tanto la (10) quanto la (11) possono rappresentare curve note, di cui enumereremo le principali:

a)  $\mu = -2$ ,  $\lambda = 1$ ; la (10) rappresenta una cicloide e la (11), diviene  $\rho = a \cos \omega$ ; dunque la radiale di una cicloide è un circolo contenente il punto fisso donde si spiccano i segmenti generatori.

b)  $\mu = 1$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$ ; la (10) appartiene ad una catenaria e la (11) diviene  $\rho = \frac{a}{\cos^2 \omega}$ ; ricordando ora a quanto già si disse (Vol. I, p. 445) si conclude che la radiale di una catenaria è una campila di Eudosso.

c)  $\mu = 2$ ,  $\lambda = 1$ ; la (10) si muta nell'equazione intrinseca della catenaria di eguale resistenza (p. 239) e la (11) si muta in  $\rho = \frac{a}{\cos \omega}$ , cioè  $x = a$ ; la catenaria di eguale resistenza ha dunque per radiale una linea retta.

d)  $\mu = \frac{2}{3}$ ,  $\lambda = \frac{1}{3}$ ; la (10) rappresenta una parabola e la (11) diviene  $\rho = \frac{a}{\cos^3 \omega}$ , curva di terzo ordine appartenente a una classe a noi nota (Vol. I, p. 447).

e)  $\mu = \frac{4}{3}$ ,  $\lambda = \frac{1}{3}$ ; si ha in tal caso un'iperbole equilatera e la (11) si muta facilmente nell'altra:

$$\rho^2 \cos^3 2\omega = a^2;$$

passando a coordinate cartesiane questa diviene:

$$(x^2 - y^2)^3 = a^2 (x^2 + y^2)^2,$$

equazione che rappresenta una curva di sesto ordine avente nell'origine un punto quadruplo.

III. La curva data sia la trattrice definita dalla seguente equazione intrinseca:

$$(12) \quad R = a \sqrt{\frac{2s}{e^a} - 1}.$$

Scrivendola come segue:

$$\frac{2s}{a} = \log \left[ 1 + \frac{R^2}{a^2} \right],$$

ne otterremo:

$$d\theta = \frac{dR/a}{1 + R^2/a^2}$$

e ne dedurremo essere

$$(13) \quad \rho = a \operatorname{tg} \omega$$

l'equazione della corrispondente radiale. Ora la (16) rappresenta (Vol. I, p. 233) una curva *kappa*; dunque possiamo ritenere che la radiale di una trattrice è una *kappa*<sup>1)</sup>.

IV. L'equazione

$$(14) \quad y^{m+n} = p^m x^n$$

rappresenta, quando il rapporto dei due numeri positivi  $m, n$  è razionale, una parabola d'ordine superiore (Vol. I, p. 858), mentre quando è irrazionale rappresenta una curva *W* di Klein e Lie (p. 201). Nella prima ipotesi  $m$  e  $n$  si possono supporre interi e fra loro primi; in ogni caso l'equazione precedente può surrogarsi con quest'altre:

$$x = p \lambda^{m+n}, \quad y = p \lambda^n,$$

$\lambda$  essendo un parametro arbitrario. Se ne deduce:

$$\frac{ds}{d\lambda} = p \lambda^{n-1} (m+n^2 \lambda^{2m} + n^2)^{1/2}$$

$$R = \frac{p \lambda^{n-m} (m+n^2 \lambda^{2m} + n^2)^{3/2}}{m n (m+n)};$$

in conseguenza la relazione generale

$$ds = R \cdot d\theta$$

diviene, dopo qualche riduzione:

$$\frac{d\theta}{m n (m+n)} = \frac{\lambda^{m-1} d\lambda}{m + n^2 \lambda^{2m} + n^2}.$$

Facendo qui

$$\mu = \frac{m+n}{n} \lambda^m,$$

se ne trae

$$d\theta = \frac{d\mu}{1 + \mu^2},$$

<sup>1)</sup> Il calcolo eseguito e il risultato ottenuto possono adattarsi, con lievi ritocchi, alle pseudotrattrici.

onde

$$\theta = \text{arc tg } \mu,$$

ossia

$$\frac{m+n}{n} \lambda^m = \text{tg } \theta.$$

Eliminando, col mezzo di questa relazione, il parametro  $\lambda$  dal valore di  $R$  e quindi sostituendo  $\varrho$  a  $R$  e  $\omega$  a  $\theta$  si conclude essere

$$(15) \quad \varrho = \frac{p n^2}{m(m+n)} \frac{\left[ \frac{n}{m+n} \text{tg } \theta \right]^{\frac{n-m}{m}}}{\cos^3 \theta}$$

l'equazione polare della radiale della curva considerata. Corrispondentemente la sua equazione cartesiana è

$$\frac{x^3 m}{(x^2 + y^2)^m} = \left[ \frac{p n^2}{m(m+n)} \right]^m \left[ \frac{n}{m+n} \frac{y}{x} \right]^{n-m}.$$

Quando il rapporto  $m/n$  è razionale, quest'equazione rappresenta una curva dell'ordine  $2m+n$  se  $n < m$ ; quando invece  $n > m$  tutta l'equazione è divisibile per  $x^{m-n}$ , e, tolto questo fattore, resta del grado 3  $m$ ; dunque la radiale della parabola rappresentata dalla equazione  $y^{m+n} = p^m x^n$  è una curva dell'ordine eguale al maggiore dei numeri  $2m+n$  e  $3m$ <sup>1)</sup>; ad es. per una parabola semicubica ( $y^3 = p x^2$ ) la radiale è del quarto ordine, mentre è del sesto per una parabola cubica ( $y^3 = p^3 x$ ).

V. Ripetendo un calcolo analogo a quello testè eseguito sopra le iperboli (Vol. I, p. 370) rappresentate dall'equazione:

$$(16) \quad x^m y^n = a^{m+n}$$

si trova come equazione polare della radiale:

$$(17) \quad \varrho = \frac{a}{n(m+n)} \frac{m}{\left[ \frac{m}{n} \text{tg } \omega \right]^{\frac{2m+n}{m+n}} \cos^3 \omega}.$$

Si deduce da questa che, quando  $m, n$  sono numeri interi fra

<sup>1)</sup> Nel caso escluso  $m = n$ , questi due numeri valgono entrambi 1 e si ha la radiale della parabola ordinaria, che è una curva del terz'ordine (v. p. 338).

loro primi la curva corrispondente è algebrica dell'ordine  $3(m+n)$ . Dunque: la radiale dell'iperbole rappresentata dall'equazione  $x^m y^n = a^{m+n}$  è una curva dell'ordine  $3(m+n)$ .

VI. Altri teoremi analoghi si otterrebbero applicando le considerazioni generali esposte alle curve in cui l'arco è proporzionale ad una potenza del raggio di curvatura<sup>1)</sup>.

**295.** Il procedimento indicato per trovare l'equazione della radiale di una curva di cui si conosca l'equazione intrinseca si può invertire e conduce a risolvere il problema inverso delle radiali, cioè a effettuare la ricerca delle curve (che possono chiamarsi antiradiali), le quali possiedono un'assegnata radiale. Sia, infatti, data la curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione:

$$(18) \quad \omega = f(\varrho).$$

Facciasi ivi  $\omega = \theta$ ,  $\varrho = R$  e si differenzi; si otterrà:

$$d\theta = f'(R) \cdot dR.$$

Moltiplicando per  $R$  e ricordando essere  $R d\theta = ds$  se ne dedurrà:

$$(19) \quad s = \int R f'(R) dR;$$

e questa è l'equazione intrinseca dell'antiradiale della curva data.

Si cerchi ad es. l'antiradiale di una retta qualunque del piano, per es. di quella di equazione

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0;$$

trasformando quest'equazione coll'introdurvi coordinate polari si trova:

$$\omega = \alpha + \text{arc cos } p/\varrho;$$

essendo quindi nel caso attuale  $f(\varrho) = \alpha + \text{arc cos } p/\varrho$ , la (1) dà

$$s = \int \frac{p dR}{\sqrt{R^2 - p^2}},$$

<sup>1)</sup> Osservazione di G. PIRONDINI. Le radiali delle curve di DELAUNAY (p. 139) sono studiate nella nota di P. F. RUFFINI, *Intorno alla radiale della linea generata dal fuoco di una conica la quale rotola sopra una retta* (Rend. Acc. Bologna, 1902-03).

onde

$$\frac{s}{p} = \frac{1}{2} \log \frac{R + \sqrt{R^2 - p^2}}{R - \sqrt{R^2 - p^2}},$$

ovvero:

$$R = p \frac{e^{\frac{s}{p}} + e^{-\frac{s}{p}}}{2};$$

e poichè questa compete ad una catenaria di eguale resistenza (p. 239), resta dimostrato che l'antiradiale di una retta qualsivoglia è una catenaria di eguale resistenza.

Fu già studiata l'antiradiale del cerchio <sup>1)</sup>.

Alle radiali fu applicato il calcolo vettoriale <sup>2)</sup> e fu mostrata l'utilità di servirsi per il loro studio della equazione magica della retta <sup>3)</sup>.

*Osservazioni.* I. G. Pirondini <sup>4)</sup> ha suggerita una nuova legge di derivazione di una curva da un'altra; l'analogia delle curve risultanti con la radiale gli suggerì il nome di pseudo-radiali. Ecco in che cosa consiste: Per un punto fisso del piano di una curva  $\Gamma$  si conducono dei raggi vettori  $\rho$  eguali in lunghezza ai corrispondenti raggi di curvatura  $R$  di questa con la condizione che l'arco  $s_1$  della nuova curva  $\Gamma_1$  risulti eguale all'arco  $s$  della  $\Gamma$ . La relazione risultante fra le due curve è scambievolmente.

II. Altro congenere metodo di derivazione è il seguente: Si congiunge un punto fisso  $O$  del piano di una curva  $\Gamma$  con un punto arbitrario  $P$  di questa e si porta su  $OP$  un segmento  $OP^*$  eguale al raggio di curvatura  $R$  di  $\Gamma$  in  $P$ . Il luogo geometrico del punto  $P^*$  è una curva  $\Gamma^*$ . È facile dimostrare che se  $\Gamma$  è algebrica di ordine  $n$   $\Gamma^*$  sarà panalgebrica e in generale dell'ordine  $3n(n-2)$  (così per un'ellisse è dell'8° ordine); ma diviene metà se  $O$  è un centro di simmetria di  $\Gamma$  e viene diminuito di  $2r(3r-2)$  unità se  $O$  è un punto  $r$ -plo di  $\Gamma$ , ecc. Se  $\Gamma$  ha per equazione polare  $\rho = f(\omega)$ , quella di  $\Gamma^*$  sarà

$$\rho = \frac{(f^2 + f'^2)^{3/2}}{f^2 + f'^2 - 2ff'};$$

<sup>1)</sup> C. MINEO, *Le antiradiali del cerchio* (Rend. Circ. mat. Palermo, T. XXIV, 1907).

<sup>2)</sup> C. BURALI-FORTI, *Sulle radiali* (Id., T. XVI, 1902); G. B. SANTANGELO, *Sulle curve di Mannheim, sulle radiali e sopra una generalizzazione di esse* (Id., T. XXIX, 1910).

<sup>3)</sup> P. ERNST, *Die Radiale einer ebene Kurve* (Arch. Math. Phys., III Ser., T. XIV, 1908).

<sup>4)</sup> *Proprietà caratteristiche di alcune linee piane e a doppia curvatura* (Le Matem. pure applic., T. II, 1903).

p. es. alla spirale logaritmica

$$\rho = c e^{\omega \cotg \mu}$$

corrisponde la curva

$$\rho = \frac{c}{\text{sen } \mu} e^{\omega \cdot \cotg \mu}$$

che è identica alla data; così si accresce di uno il numero dei casi di riproduzione di quella notevole curva.

## CAPITOLO VII

Le Caustiche <sup>1)</sup>.

**296.** In un piano sia dato un sistema  $S$  semplicemente infinito di raggi (luminosi) succedentisi con una determinata legge. Potremo supporli o fra loro paralleli o concorrenti in un punto o più generalmente tangenti ad una linea  $A$  o normali ad altra linea  $A'$  (evolvente di  $A$ ). Sia poi data nel medesimo piano una curva  $\Gamma$  capace di riflettere o rifrangere la luce. Allora ogni raggio di  $S$  si trasforma in un raggio appartenente ad un nuovo sistema semplicemente infinito  $S'$  composto di rette tutte tangenti ad un'altra curva  $B$  o normali ad una  $B'$  (evolvente di  $B$ ). La curva  $B$  si dirà *caustica* di  $\Gamma$  e precisamente — per servirsi della nomenclatura in uso, dietro proposta di Giacomo Bernoulli <sup>2)</sup> — *catacaustica* se  $\Gamma$  è una curva riflettente, *diacaustica* se è rifrangente <sup>3)</sup>. Il caso più

<sup>1)</sup> Estese notizie bibliografiche sopra queste curve trovansi nella *Dissertatio mathematica de inveniendis aequationibus causticarum* (Lugd. Batav. 1837) di C. J. MATTHES; inoltre in alcuni articoli, in risposta ad una questione proposta da A. CORNU, nell'*Intermédiaire* (v. T. II, 1895, p. 208 e 321; T. VI, 1899, p. 101).

<sup>2)</sup> V. l'articolo intitolato *Lineae cycloides evolutae, antevolutae, causticae, anticausticae, peri-causticae* (Acta erud. Maggio 1692).

<sup>3)</sup> Oltre a queste il BERNOULLI ha considerate due altre curve, di cui ecco la definizione: Se tutti i raggi del sistema  $S$  passano per un punto  $F$ , sia  $FM$  uno di essi,  $MP$  il raggio riflesso;  $M$  sia il punto d'incidenza e  $P$  quello di contatto di questo con la caustica; se  $P_1$  è il punto del raggio emergente che è simmetrico di  $P$  rispetto a  $M$  e  $P_2$  il punto del raggio incidente che dista da  $M$  quanto  $P$ , il luogo di  $P_1$  è l'*anticaustica* di  $\Gamma$ , mentre il luogo di  $P_2$  è la *pericaustica*. Questa osservazione si collega all'altra che le caustiche non compongono una classe di curve dotate di particolari caratteri geometrici, potendosi qualunque linea (purchè non retta) intendersi ottenuta per riflessione o per rifrazione da altra convenientemente scelta; la ricerca di questa costituisce il « problema inverso delle caustiche »: ad esso è consacrata la memoria di G. W. STRAUCH, *Das umgekehrte Problem der Brennpuncten* (Wiener Denkschriften, vol. XX, 1859).

Le curve ora definite non sono le uniche che debbono la vita all'*Ottica*

comune è quello che il sistema  $S$  sia un fascio di raggi — col centro all'infinito oppure a distanza finita — anzi a questo caso soltanto volgeva il pensiero il Tschirnhausen, il quale — se si prescinde da cenni vaghi fatti da Maurolico <sup>1)</sup> o esistenti nell'*Ottica* del Barrow <sup>2)</sup> — può dirsi il primo che abbia concepite le celebri curve a cui è consacrato il presente Capitolo <sup>3)</sup> « a meno che egli non le abbia apprese nel 1678 da Huygens, che allora trovavasi a Parigi » <sup>4)</sup>.

La più antica traccia sicura di esse esiste in una lettera scritta dal Tschirnhausen a Leibniz il 7 aprile 1681, ove egli chiese a questo se si sia mai occupato della curva che nasce dalle intersezioni dei raggi luminosi (paralleli), dopo che questi abbiano subito una riflessione, aggiungendo che quella è geometrica se lo è questa <sup>5)</sup>. Leibniz, in data 13 maggio del medesimo anno <sup>6)</sup>, rispose confessando di non capir bene la questione propostagli, sembrandogli che le intersezioni dei raggi riflessi, non formassero una curva, ma coprissero tutto il piano. Nella replica, scritta da Parigi addì 27 maggio 1682 <sup>7)</sup>, sono esposte quelle leggi concernenti le caustiche che Tschirnhausen ha pubblicate negli *Acta Eruditorum* del novembre 1682 sotto il titolo *Inventa nova, exhibita Parisiis Societati Regiae Scientiarum*, e delle quali una parte importante si trova dimostrata in una lettera di Leibniz al Tschirnhausen medesimo <sup>8)</sup>. Dopo Leibniz colui

geometrica; citiamo infatti le curve chiamate da LEIBNIZ *Acampte*, *Aclaste* e *Synacampte* (cfr. l'appendice ad una lettera scritta a GIOV. BERNOULLI il 7 gennaio 1764, inserita in LEIBNIZ ed. Gerhardt, T. III, p. 734) e quelle considerate dal MAIRAN (*Quatrième Partie des Recherches physico-mathématiques sur la reflexion des corps*, Mém. de Paris, 1740) e segnalate da FONTENELLE (*Histoire de l'Acad. des Sciences*, MDCCXL, p. 89-102), il quale le chiamò una *courbe refractoire ou anaclastique* e l'altra *courbe réflexoire ou aneuptique*. L'anaclastica di MAIRAN è una quartica somigliante alla conoide di NICOMEDE; la sua equazione è:

$$\frac{m^2 - n^2}{n^2} y^2 = \frac{(a^2 - x^2)(x + b)^2 - a^2 b^2}{x^2}$$

Nello studio di tale curva il MAIRAN si servì di certe curve generatrici da lui chiamate l'una *courbe des sécantes ouvertes en éventail*, l'altra *courbe des sécantes fermées en éventail*; non sono altro che coniche a centro.

<sup>1)</sup> MACRI, *Commemorazione del IV Centenario di Francesco Maurolico* (Messina, MDCCCXCIV), p. 111.

<sup>2)</sup> MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, T. II, della Nouv. éd., p. 389.

<sup>3)</sup> Cfr. il § 9 dell'opera di WEISSENBOHN, *Lebensbeschreibung von E. W. von Tschirnhausen* (Eisenach, 1866).

<sup>4)</sup> M. CANTOR, *Vorles. über Gesch. der Math.* (II Aufl., Leipzig 1905), p. 148.

<sup>5)</sup> LEIBNIZ ed. Gerhardt, T. IV, p. 484.

<sup>6)</sup> Ivi.

<sup>7)</sup> Id., p. 487.

<sup>8)</sup> Id., p. 491.

che coltivò con maggiore successo la teoria delle caustiche è Giovanni Bernoulli<sup>1)</sup>: a lui si deve la considerazione di raggi luminosi concorrenti in un punto proprio, il concetto di diacaustica, la determinazione delle caustiche di curve speciali; a lui si deve se la teoria che ci occupa raggiunse un così alto grado di perfezione che per parecchio tempo i geometri abbandonarono un tema che non prometteva più a loro frutti remuneratori delle fatiche. L'artificio usato da Tschirnhausen, e poi da altri, nel determinare le caustiche per riflessione consiste nel considerare la « lunghezza del raggio riflesso », cioè il segmento  $l$  compreso fra il punto d'incidenza e quello in cui quel raggio tocca la caustica a cui è tangente. Tale lunghezza ha, nel caso in cui i raggi luminosi siano fra loro paralleli un'espressione semplicissima, la quale può ottenersi col seguente breve calcolo.

Sia, in coordinate cartesiane ortogonali,

$$(1) \quad f(\xi, \eta) = 0$$

l'equazione della curva riflettente  $\Gamma$ ; se si suppone che il punto all'infinito dell'asse delle ordinate sia il centro luminoso,  $x - \xi = 0$  sarà l'equazione di un raggio luminoso qualunque,

$$(x - \xi) + (y - \eta) \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

quella della corrispondente normale e quindi

$$(2) \quad (x - \xi) \left[ 1 - \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] + 2(y - \eta) \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

quella del raggio riflesso. La catacaustica, essendo l'involuppo del raggio riflesso, avrà per equazione il risultante della eliminazione di  $\xi, \eta$  fra la (1), la (2) e la derivata di quest'ultima rispetto a  $\xi$ , cioè l'equazione

$$(3) \quad -(x - \xi) \frac{d\eta}{d\xi} + y - \eta = \frac{1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2}{2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2}}$$

Ora risolvendo le equazioni (2) (3) rispetto a  $x - \xi$  e  $y - \eta$  si ot-

<sup>1)</sup> I lavori a cui alludiamo si trovano in *Joh. Bernoulli Opera*, nei passi che è facile rintracciare mediante l'*Index rerum notabiliorum* all'art. *Caustica*. Si conettono ad essi alcuni scritti di GIACOMO BERNOULLI inseriti in *Jac. Bernoulli Opera*, p. 473, 549 e 1077.

tiene:

$$(4) \quad x - \xi = - \frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}, \quad y - \eta = \frac{1 - \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2}{2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2}}$$

che danno le coordinate  $x, y$  di un punto qualunque della caustica in funzione delle coordinate  $\xi, \eta$  del punto di incidenza. Da esse poi si trae:

$$l^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \frac{1}{2} \frac{1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}$$

Osservando ora che, detto  $R$  il raggio di curvatura della curva riflettente nel punto  $(\xi, \eta)$  e  $\tau$  l'angolo di riflessione, si ha:

$$R = \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right\}^{3/2}}{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}, \quad \cos \tau = \frac{1}{\left\{ 1 + \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

si conclude

$$(5) \quad l = \frac{1}{2} R \cos \tau.$$

È questa la relazione a cui sopra alludemmo. Essa fa vedere che per trovare il punto  $P(x, y)$  della caustica che corrisponde al punto  $M(\xi, \eta)$  della curva riflettente basta proiettare sopra il raggio riflesso il centro del segmento  $MC$  compreso fra il punto  $M$  ed il corrispondente centro di curvatura della curva medesima.

**297.** Questa costruzione, applicata a curve speciali notevoli conduce a risultati interessanti: valgano a provarlo i seguenti esempi:

I. La curva riflettente sia il cerchio  $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ . Si consideri (fig. 39) un raggio incidente qualunque  $i \equiv MN$  ed il corrispondente raggio riflesso  $MP \equiv r$ ; si proietti su  $r$  in  $P$  il centro  $Q$  del segmento  $OM$ ;  $P$  sarà un punto della caustica. Ora se  $H$  è il punto medio del segmento  $MN$  si ha evidentemente  $MH = MP$ , dunque la caustica del cerchio si costruisce per punti portando sopra

ogni raggio riflesso a partire dal punto d'incidenza la metà del segmento del raggio incidente compreso fra questo punto ed il diametro del cerchio perpendicolare ai raggi incidenti. La rappresentazione analitica della curva in questione si ottiene facilmente sia traducendo in formole l'ora indicata costruzione, sia servendosi delle equazioni (4)<sup>1)</sup>; posto  $\xi = a \cos \varphi$ ,  $\eta = a \sin \varphi$  si trova, in un modo o nell'altro,

$$x = \frac{a}{4} (3 \cos \varphi + \cos 3 \varphi), \quad y = \frac{a}{4} (3 \sin \varphi + \sin 3 \varphi)$$

e queste equazioni dimostrano che la curva ottenuta è l'epicicloide

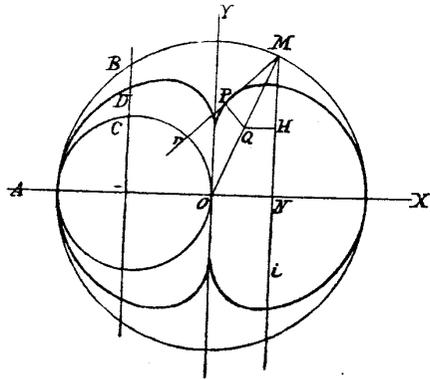


Fig. 39. — Caustica del cerchio.

generato da un punto del cerchio di raggio  $a/4$  ruzzolante esternamente sul cerchio di centro  $O$  e raggio  $a/2$ <sup>2)</sup>.

II. Le formole (4) riconducono ad una curva degna di menzione quando vengano applicate alla parabola rappresentata dal-

<sup>1)</sup> L'equazione tangenziale della caustica in questione trovasi in J. BOOTH, *A treatise on some new geometrical methods*, T. I (London 1873), Cap. XIII.

<sup>2)</sup> Questa elegante conseguenza, nonchè la precedente costruzione per punti della caustica, venne scoperta dal DE LA HIRE ed esposta nella memoria intitolata *Examen de la courbe formée par les rayons réfléchis dans un quart de cercle* (Mém. de l'Acad. des Sciences, depuis 1666 jusqu'à 1699, Paris 1730, p. 294-310). Ivi è inoltre dimostrata erronea la seguente costruzione indicata da TSCHIRNHAUSEN: Descritto il cerchio avente per diametro il raggio  $OA$  del dato cerchio perpendicolare ai raggi luminosi, si consideri sopra ogni ordinata il punto medio del segmento limitato dalle due circonferenze; esso appartiene alla caustica del dato circolo.

l'equazione

$$\eta^2 = 2 p \xi^3;$$

esse infatti danno

$$x = 3 \xi, \quad y = \frac{\eta (3 p - 2 \xi)}{2 p};$$

eliminando  $\xi$  e  $\eta$  si conclude essere

$$54 p y^2 = x (2 x - 2 p)^2$$

l'equazione della caustica cercata. Ma questa si può rappresentare in altro modo capace di metterne in evidenza l'intima natura. Ricaviamo, infatti, dall'equazione precedente le espressioni seguenti della derivata dell'arco e del raggio di curvatura:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2x + 3p}{2\sqrt{6px}}, \quad R = \frac{(2x + 3p)^2}{12p};$$

eliminando  $x$  si deduce che

$$s = -\frac{1}{2} \int \frac{dR}{\sqrt{\left[\frac{R}{3/4p}\right]^{1/2} - 1}}$$

è l'equazione intrinseca della caustica della data parabola. Ora quest'equazione, in forza di quanto esponemmo a p. 555 del Vol. I, rappresenta una spirale senoide d'indice  $-\frac{1}{3}$ ; ne viene che la caustica in esame può rappresentarsi in coordinate polari mediante l'equazione

$$\rho^{-1} = a^{-1} \cos \left(-\frac{1}{3} \omega\right)$$

ossia

$$a = \rho \cos^3 \omega/3;$$

sappiamo (Vol. I, p. 109) che quest'equazione rappresenta una trisettrica di Catalan.

III. Se invece come curva riflettente si prende la cicloide

$$\xi = a \arccos \frac{a - \eta}{a} - \sqrt{2a\eta - \eta^2}$$

<sup>1)</sup> Cfr. N. FUSS, *De novis quibusdam causticis parabolae proprietatibus* (Nova Acta Petrop., T. VIII, 1792).

si trova, come equazioni della caustica

$$\eta = a - \sqrt{a^2 - ay}, \quad \xi = x - \sqrt{a\eta} + \sqrt{a\eta - \eta^2},$$

onde, eliminando  $\xi, \eta$

$$x = \frac{a}{2} \operatorname{arc} \cos \frac{a - 2y}{a} - \sqrt{ay - y^2};$$

la caustica è dunque la cicloide generata dal cerchio avente per diametro il raggio del cerchio generatore la cicloide data, risultato questo dovuto a Giovanni Bernoulli.

IV. Si consideri la logaritmica rappresentata dalla equazione

$$\frac{y}{a} = \log \frac{x}{a}$$

ed un fascio di raggi luminosi paralleli all'asse delle  $x$ .

Il raggio

$$y = k$$

si riflette nella retta di equazione

$$x - a e^{a/k} - \frac{y - k}{2} (e^{a/k} - e^{-a/k}) = 0.$$

Differenziando questa rispetto a  $k$  si ottiene

$$k = y + a$$

onde, eliminando  $k$ , si trova l'equazione

$$x = \frac{a}{2} \left[ e^{\frac{y+a}{2}} + e^{-\frac{y+a}{2}} \right],$$

che rappresenta una catenaria.

Dunque<sup>1)</sup>: La logaritmica  $y = a \log x/a$  ha per catacaustica, quando i raggi luminosi sono paralleli all'asse delle  $x$ , la catenaria

$$y = \frac{a}{2} \left[ e^{\frac{y+a}{2}} + e^{-\frac{y+a}{2}} \right].$$

<sup>1)</sup> Da una comunicazione epistolare del sig. J. FINSTERBUSCH.

V. E. K ostlin ha mostrato che la caustica dell'ipocicloide tricuspide per raggi paralleli   un asteroide regolare di grandezza indipendente dalla direzione dei raggi stessi<sup>1)</sup>.

VI. L'anticaustica della parabola per raggi paralleli   una curva che il Laguerre ha chiamato *iperciclo cubico* (*Oeuvres*, T. II, Paris 1905, p. 600 e 663) e che fu poi studiata da P. de L epiney (*Sur l'hypercycle cubique*, *Math esis*, T. XXXVIII, 1924; cfr. anche la *Question 2354*; rivolta ivi T. XLI, 1927, p. 371).

298. Ritorniamo a considerazioni generali per osservare che la relazione (5)   caso particolare di una che lega la lunghezza  $l$  del raggio incidente a quella  $l'$  del raggio riflesso o rifratto nella ipotesi che la luce emani da un centro a distanza finita; detti  $\mu$  e  $\mu'$  gli angoli d'incidenza e di rifrazione,  $n/n'$  il rapporto costante dei loro seni, tale nuova equazione si scrive

$$(6) \quad n' \left\{ \frac{\cos \mu}{R} \pm \frac{\cos^2 \mu}{l} \right\} = n \left\{ \frac{\cos \mu'}{R} \pm \frac{\cos^2 \mu'}{l'} \right\},$$

ove devesi notare che, nel caso della riflessione,  $n + n' = 0$  e  $\mu + \mu' = 0$ . Essa si trova in sostanza nelle opere di Giovanni Bernoulli, ma sotto questa forma nella *Sammlung von Aufgaben und Lehrsatze aus der analytischen Geometrie* (Berlin, 1833, p. 467) del Magnus. Non la dimostreremo, non vasto essendone il campo di applicabilit ; altrettanto faremo riguardo alla relazione

$$n' \{ l_2 - l_1 \pm s \} = n \{ l_2' - l_1' \pm s' \}$$

che lega l'arco della curva riflettente limitato dai punti distanti per  $l_1$  e  $l_2$  dalla fonte luminosa<sup>2)</sup>. Ed osserviamo piuttosto che un nuovo e potente impulso agli studi sopra le caustiche venne dato nel 1808 dal Malus col suo celebre *M emoire sur l'Optique* (*Journ. de l'Ec. polyt.*, T. VII). Quali ne siano stati i mirabili effetti non   qui il caso di dire perch , concernendo essi in massima parte la distribuzione dei raggi luminosi nello spazio, sono di pertinenza della geometria delle superficie e delle congruenze lineari, non della geometria del piano in cui noi siamo confinati: una sola eccezione va fatta a favore di una proposizione a cui si deve l'introduzione di un concetto nuovo e cos  fondamentale che produsse un cambiamento radicale nella teoria delle caustiche.

Consideriamo a tale scopo la curva  $A'$  a cui suppongonsi normali tutti i raggi incidenti; siano  $\xi', \eta'$  le coordinate di un suo punto

<sup>1)</sup> W rttemberg Mitth., T. VIII, 1907, p. 88.

<sup>2)</sup> MAGNUS, op. cit., p. 543. Nel caso  $n + n' = 0$  la (7) rientra in una equazione di GIOVANNI BERNOULLI.

qualunque e  $x, y$  quelle del punto corrispondente della curva dirimente  $\Gamma$ . Se poi con  $\xi, \eta$  si rappresentano coordinate correnti e si pone per brevità  $p = dy/dx$ , le equazioni del raggio incidente, della normale alla curva dirimente e del raggio emergente saranno risp. delle forme seguenti:

$$\eta - y = k'(\xi - x), \quad \eta - y = -\frac{1}{p}(\xi - x), \quad \eta - y = k'(\xi - x).$$

Siccome il raggio incidente passa pel punto  $(\xi', \eta')$ , così si avrà

$$\eta' - y = k'(\xi' - x),$$

mentre l'equazione

$$\frac{n'(1 + kp)}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{n(1 + k'p)}{\sqrt{1 + k'^2}}$$

esprimerà la legge fondamentale governatrice dei fenomeni di rifrazione. Tenendo conto delle precedenti quest'ultima equazione potrà scriversi:

$$x' \frac{\xi - x + p(\eta - y)}{\sqrt{\xi - x^2 + \eta - y^2}} = n \frac{\xi' - x + p(\eta' - y)}{\sqrt{\xi' - x^2 + \eta' - y}}$$

essa rappresenta il raggio emergente ed è evidentemente soddisfatta dalle coordinate  $\xi, \eta$  di un punto  $N$  tale che si abbia:

$$\frac{n' \sqrt{\xi - x^2 + \eta - y^2}}{n \sqrt{\xi' - x^2 + \eta' - y^2}} = 1, \quad \frac{n^2 \{ \xi - x + p(\eta - y) \}}{n^2 \{ \xi' - x + p(\eta' - y) \}} = 1.$$

Scriviamo queste relazioni come segue:

$$\sqrt{\xi - x^2 + \eta - y^2} = \frac{n^2}{n'^2} (\sqrt{\xi' - x^2 + \eta' - y^2});$$

$$\xi - x + p(\eta - y) = \frac{n^2}{n'^2} (\xi' - x + p(\eta' - y))$$

e vedremo che (essendo  $\xi, \eta$  coordinate correnti) la prima di queste equazioni rappresenta il cerchio  $K$  il cui centro sta nel punto d'incidenza ed il cui raggio è misurato dal prodotto dell'indice di rifrazione  $n/n'$  per la distanza di quel punto dal punto illuminante.

La seconda di quelle equazioni nasce poi dalla prima differenziando rispetto a  $x$ .  $N(\xi, \eta)$  è perciò il punto di contatto del cerchio  $K$  con la curva involupata da tutti i cerchi analoghi; il raggio emergente contiene questo punto  $N$  non meno che il centro  $(x, y)$  di  $K$  onde è normale a questo cerchio e quindi anche a quella curva involupata. Questa è dunque normale a tutti i raggi emergenti, in altri termini è un'evolvente della caustica. Tutto ciò abilita a ritenere dimostrato il seguente

**TEOREMA DI GERGONNE:** *La caustica B di una curva qualunque  $\Gamma$  (riflettente o rifrangente) per raggi tangenti ad una curva A (o normali ad una curva A', evolvente di A) è l'evoluta di una curva B' la quale è l'involuppo degli infiniti cerchi K i cui centri si trovano sopra la curva  $\Gamma$  ed i cui raggi stanno alle distanze di quei centri dai punti corrispondenti della curva A' nel rapporto costante del seno dell'angolo d'incidenza al seno dell'angolo di rifrazione<sup>1)</sup>.*

In forza di questa proposizione la ricerca delle caustiche si spezza in due, cioè nella determinazione dell'involuppo di un cerchio variabile con una determinata legge e in quella dell'evoluta di una data curva, ed entrambe possono effettuarsi sia geometricamente che analiticamente. Le curve B', evolventi delle caustiche B, portano il nome di *caustiche secondarie*, dato loro da Quetelet<sup>2)</sup>.

Applicando il dimostrato teorema di Gergonne si trova che, nel caso della rifrazione, se la curva rifrangente è una retta ed i raggi sono concorrenti la caustica secondaria è un'ellisse e se quella è circolare questa è un ovale di Cartesio<sup>3)</sup>; quindi la caustica per rifrazione di una retta è l'evoluta d'un'ellisse<sup>4)</sup>, mentre quella di una circonferenza è in generale l'evoluta di un'ovale di Cartesio<sup>5)</sup>: se però il punto luminoso appartiene alla circonferenza, la caustica è una cardioide, il che era noto anche a Giovanni Bernoulli.

<sup>1)</sup> GERGONNE, *Sur les caustiques planes* (Ann. de Math., T. XV, 1824-25). Sviluppi e conseguenze di quanto è ivi esposto leggonsi negli articoli di C. STURM, TH. DE ST. LAURENT e LAMBERT pubblicati nei Volumi XVII (1827), XVIII (1828) e XX (1830) dello stesso periodico.

<sup>2)</sup> *Démonstration et développements des principes fondamentaux de la théorie des caustiques secondaires* (Belgique Mém., T. V, 1829). Questa memoria fu punto di partenza per ricerche di LAGUERRE e HUMBERT che sono esposte e completate nel recente lavoro di R. S. DE BEIRES, *Sur les caustiques des courbes planes algébriques et sur les courbes pourvues d'un axe orthoptique* (Ann. Acad. Polyt. Porto, T. XIV, 1921).

<sup>3)</sup> SALMON-FIEDLER, *Ebene Curven*, p. 117-118.

<sup>4)</sup> Questo teorema speciale venne dimostrato dal GERGONNE sin dal 1820 (*De la manière dont les poisson nous voyent et dont nous les voyons*, Ann. de Math., T. XI); una dimostrazione analitica diretta di esso leggesi in SCHLÖMILCH, *Compendium der höheren Analysis* (4. Aufl., Braunschweig 1874), p. 132.

<sup>5)</sup> Anche questa proposizione è di data più antica del teorema di GERGONNE, trovandosi nelle *Recherches d'analyse sur les caustiques planes* di C. STURM (Ann. de Math., T. XV, 1824-25).

Il teorema di Gergonne che stabilisce l'esistenza delle caustiche secondarie segna un punto di culminazione nella teoria delle caustiche ed i lavori posteriori poco aggiunsero di essenziale a quello che dianzi si sapeva. Alcuni autori applicarono alle curve in questione i metodi della geometria intrinseca<sup>1)</sup>; altri le collegano ad un'altra classe di curve, cioè alle podarie<sup>2)</sup>; altri stabilirono una relazione fra le caustiche e la teoria dei movimenti<sup>3)</sup>; altri scoprirono dei teoremi concernenti la loro rettificazione<sup>4)</sup>. Ma i più numerosi sono gli scritti aventi per iscopo la determinazione e lo studio delle caustiche di linee speciali: emerge fra essi il *Memoir upon Caustics* di A. Cayley (Phil. Trans., Vol. CXLVII, 1857, e CXVII, 1867; *Math. Pap.* T. II e V) ove è trattato in modo esauriente il caso in cui la curva considerata sia retta o circolare; nè vanno dimenticati i lavori in cui è determinata la caustica per riflessione di una cardioide<sup>5)</sup> o è dimostrato che tutte le curve aventi per equazioni polari

$$a^n = \rho^n (\cos m \omega)^{\pm 1}$$

hanno catacaustiche rappresentate da equazioni della forma

$$\rho = a \cos^{\pm 2} p \omega \cdot \sin q \omega \text{ } ^6).$$

Assai più estese sono le investigazioni di G. F. Steiner<sup>7)</sup> aventi per intento la risoluzione del problema di determinare le caratteristiche plückeriane della catacaustica di una curva algebrica di cui si suppongono note le caratteristiche; fondandosi sopra le fondamentali considerazioni svolte dal Björling nel lavoro *Ueber entprechenden Singularitäten in algebraischen ebenen Curven* (Nova Acta Reg. Soc. Upsal., 1879) l'autore giunse a risolvere questo problema, non senza fare notevoli applicazioni dei risultati ottenuti a curve speciali: i limiti impostici ci vietano di fare più di un cenno sopra tali investigazioni.

<sup>1)</sup> HABICH, *Sur un système particulier de coordonnées. Application aux caustiques planes* (Ann. di Mat., 2<sup>a</sup> Serie, T. II, 1868-69).

<sup>2)</sup> Cfr. EM. WEYR, *Ueber die Identität der Brennpuncten mit den Fusspunktcurven* (Zeitschrift, T. XIV, 1869).

<sup>3)</sup> G. KOENIGS, *Leçons de cinématique* (Paris 1797), p. 166.

<sup>4)</sup> A. GENOCCHI, *Intorno alla rettificazione e alle proprietà delle caustiche secondarie* (Ann. di Mat., T. VI, 1864).

<sup>5)</sup> A. H. CURTIS, *Geometrical proof that the caustic by reflexion of a cardioid produced by rays proceeding from its cusp is an epicycloid* (Mess., 2<sup>a</sup> Serie, T. XII, 1882).

<sup>6)</sup> Lord MAC LAREN, *On the reflexion-caustics of symmetrical curves* (Edinb. Proc., T. XVII, 1889).

<sup>7)</sup> *Ueber die Katacaustiken algebraischer ebener Curven* (Diss., Lund. 1896).

**299.** Ciò che non possiamo lasciare inosservato è una generalizzazione considerevole che ricevette il concetto di caustica<sup>1)</sup>.

Dati in un piano una curva  $\Gamma$  e un fascio di raggi luminosi fra loro paralleli, si consideri (fig. 40) uno qualunque,  $a$ , di questi; ne sia  $M$  il punto d'incidenza e  $i$  l'angolo che esso forma con la

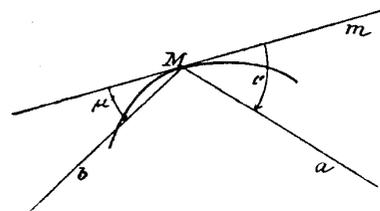


Fig. 40.

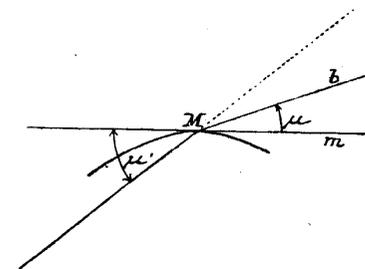


Fig. 41.

tangente  $m$  a  $\Gamma$  in  $M$ ; per  $M$  si conduca una retta  $b$  formante con  $m$  un angolo  $r$  tale che si abbia

$$(7) \quad \frac{i}{r} = \rho.$$

Se  $\rho = +1$  l'involuppo di tutte le rette analoghe alla retta  $b$  è la caustica per riflessione di  $\Gamma$ ; in generale si dirà *Causticoide*; notevoli sono i casi  $\rho = -\frac{1}{2}$  e  $\rho = -2$ ; nel primo caso (fig. 41)  $b$  è bisettrice dell'angolo  $a m$ , mentre nel secondo (fig. 42)  $a$  è bisettrice dell'angolo  $b m$ .

La rappresentazione analitica più comoda delle causticoide si ottiene supponendo la curva  $\Gamma$  determinata mediante l'equazione magica

$$y \cos \tau - x \sin \tau = F(\tau)$$

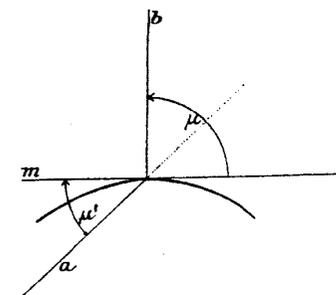


Fig. 42.

di una sua tangente qualunque. Ponendo  $\tau = \theta - \pi/2$  potremo scri-

<sup>1)</sup> GRANE, *Ueber Curven mit gleichartigen successiven Developpoiden* (Diss., Lund 1894).

vere invece

$$x \cos \theta + y \sin \theta = f(\theta);$$

indicheremo poi con

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = 0$$

l'equazione della retta condotta per l'origine parallelamente ai raggi luminosi. L'equazione generale delle rette  $b$  è evidentemente della forma

$$(x - f \cos \theta + f' \sin \theta) \cos \lambda + (y - f \sin \theta - f' \cos \theta) \sin \lambda = 0$$

ossia

$$x \cos \lambda + y \sin \lambda = f(\theta) \cos(\lambda - \theta) + f'(\theta) \sin(\lambda - \theta).$$

Ora, essendo  $i = \theta - \alpha$ ,  $r = \lambda - \theta$ , la (7) diviene

$$\frac{\theta - \alpha}{\lambda - \theta} = \frac{1}{\rho},$$

la quale permette di eliminare  $\theta$  dall'equazione precedente; si ottiene così

$$(8) \quad x \cos \lambda + y \sin \lambda = f \left[ \frac{\lambda - \alpha}{\rho + 1} + \alpha \right] \cos \frac{\rho(\lambda - \alpha)}{\rho + 1} + \\ + f' \left[ \frac{\lambda - \alpha}{\rho + 1} + \alpha \right] \sin \frac{\rho(\lambda - \alpha)}{\rho + 1};$$

e questa essendo l'equazione magica di una tangente qualunque della causticoide può considerarsi come la rappresentazione analitica di questa curva. Supponendo in particolare  $\rho = 1$ ; cambiando  $\lambda$  in  $\theta$  per maggiore comodità, si ottiene

$$x \cos \theta + y \sin \theta = f \left[ \frac{\theta + \alpha}{2} \right] \cos \frac{\theta - \alpha}{2} + f' \left[ \frac{\theta + \alpha}{2} \right] \sin \frac{\theta - \alpha}{2}$$

ovvero

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 2 \frac{d}{d\theta} \left[ f \left[ \frac{\theta + \alpha}{2} \right] \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right];$$

ora quest'equazione nasce differenziando rispetto a  $\theta$  l'equazione

$$x \sin \theta - y \cos \theta = 2 f \left[ \frac{\theta + \alpha}{2} \right] \sin \frac{\theta - \alpha}{2},$$

dunque quest'equazione rappresenta l'evolvente della curva rappresentata dall'equazione precedente, cioè la caustica secondaria della curva  $\Gamma$ : resta così nuovamente stabilito l'esistenza di questa curva ed inoltre determinata una sua comoda rappresentazione analitica.

Supponiamo ad es. che  $\Gamma$  sia un circolo di centro  $O$  e raggio  $a$ ; in tal caso  $f(\theta) = a$  onde la (8) diviene

$$x \cos \lambda + y \sin \lambda = a \cos \frac{\rho(\lambda - \alpha)}{\rho + 1},$$

equazione la quale dice che tutte le causticoide di un circolo sono epicicloidi, algebriche o trascendenti, secondo che  $\rho$  è razionale o non.

## CAPITOLO VIII

## Podarie, Contrapedali, Podoidi e Curve isotele.

**300.** Dato un punto fisso  $P$  ed una curva  $\Gamma$ , lo si proietti su tutte le tangenti di questa; si ottengono così infiniti punti il cui luogo chiamasi curva *podaria* o *pedale* di  $O$  rispetto a  $\Gamma$ ; il concetto di tali curve risale a Maclaurin <sup>1)</sup>, ma il nome con cui le designamo venne proposto da O. Terquem <sup>2)</sup>. Se invece si proietta  $O$  su tutte le normali di  $\Gamma$  si ottiene la curva *podaria* di  $O$  rispetto all'evoluta di  $\Gamma$ ; è una nuova curva detta *antipedale* o *contrapedale* <sup>3)</sup> e che si costruisce per punti conducendo da  $O$  le parallele alle tangenti di  $\Gamma$  e determinandone le intersezioni con le corrispondenti normali. Se di ogni curva del piano si trova la podaria, si giunge a una speciale trasformazione di contatto che il Lie ha chiamato *trasformazione pedale* <sup>4)</sup>; essa può considerarsi come il prodotto di una polarità e di una trasformazione per raggi vettori reciproci <sup>5)</sup>.

Per meglio caratterizzare la natura di tale trasformazione <sup>6)</sup> assumiamo il punto  $O$  come origine di un sistema di coordinate ortogonali e chiamiamo  $\xi, \eta$  le coordinate plückeriane di una retta qualunque  $r$  del piano considerato. Allora si vede subito che il piede  $P$  della perpendicolare calata dal punto  $P$  sulla retta  $r$  ha per coordinate

$$(1) \quad x = -\frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = -\frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

<sup>1)</sup> *Geometria organica* (London 1720), p. 95 e seg.

<sup>2)</sup> *Nouv. Ann.*, T. V, 1848, p. 239.

<sup>3)</sup> CRAIG, *The counter-pedal surface of the ellipsoid*, Amer. Journ., T. IV, 1882.

<sup>4)</sup> S. LIE und G. SCHEFFERS, *Geometrie der Berührungstransformationen*, T. I (Leipzig 1896), p. 17.

<sup>5)</sup> *Id.*, p. 27-29. Antiche e nuove costruzioni per le tangenti di una podaria sono esposte nell'articolo di E. JANISCH, *Tangentenkonstruktionen für Fusspunktcurven* (Arch. Math. Phys., II Ser., T. IX, 1890).

<sup>6)</sup> Per ciò che segue vedi: G. LORIA, *Le trasformazioni pedali ed antipedali nel piano e nello spazio* (Period. di matem., T. XXII, 1907).

Risolvendole si ottiene

$$(2) \quad \xi = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

equazioni che danno le coordinate  $\xi, \eta$  della retta condotta per  $P$  dal punto  $P(x, y)$  alla retta  $OP$ . Le (1) o le (2) danno la rappresentazione analitica della trasformazione pedale e della sua inversa e mostrano che si è in presenza di una *trasformazione birazionale* fra i punti  $P$  e le rette  $r$  del piano. Per meglio caratterizzarla osserviamo che: 1° se il punto  $(x, y)$  descrive la retta  $r$

$$\equiv x + Hy + 1 = 0,$$

la corrispondente retta  $(\xi, \eta)$  inviluppo la conica

$$(3) \quad \equiv \xi + H\eta - (\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

cioè la parabola che ha  $O$  per fuoco e  $r$  per direttrice; 2° se la retta  $(\xi, \eta)$  ruota attorno al punto  $G(X, Y)$  il punto corrispondente descriverà la conica

$$(4) \quad Xx + Yy - (x^2 + y^2) = 0$$

cioè la circonferenza di diametro  $OG$ . I due sistemi omaloidici sono dunque formati l'uno delle parabole col fuoco in  $O$ , l'altro di tutte le circonferenze passanti per  $O$ ; la Jacobiana del primo sistema consta del punto  $O$  e dei punti ciclici del piano  $I, J$ , mentre quella del secondo è costituita dalla retta all'infinito e delle rette  $OI, OJ$ . Servendosi di tali osservazioni e delle note relazioni che legano le caratteristiche plückeriane di due curve che si corrispondono in una corrispondenza quadratica è agevole determinare le proprietà della pedale o dell'antipedale di una curva  $\Gamma$  di cui si conoscono le consuete caratteristiche plückeriane  $(n, \nu; d, \delta; k, \kappa)$ .

Indicando con le stesse lettere accentate le caratteristiche dell'antipedale  $\Gamma'$  si trova che è  $\nu' = 2n$  e che  $\Gamma'$  ha per tangenti  $n$ -ple tanto la retta all'infinito quanto le rette  $OI, OJ$ , ed ha poi  $d$  tangenti doppie e  $k$  tangenti di flesso; applicando ora una delle formole di Plücker si deduce

$$\begin{aligned} n' &= 2n(2n-1) - 2 \left[ 3 \frac{n(n-1)}{2} + d \right] - 3k = \\ &= n^2 + n - (2d + 3k); \end{aligned}$$

ma 
$$v = n(n-1) - (2d + 3k)$$

dunque

$$n' = 2n + \nu.$$

E siccome

$$2d' + 3k' = (2n + \nu)(2n + \nu - 1) - 2d$$

$$2d' + 2k' = (2n + \nu - 1)(2n + \nu - 2) - \nu + 2n - k - 2$$

si conclude

$$k' = 2\nu + k, \quad d' = \frac{(2n + \nu)(2n + \nu - 1)}{2} - n - 3(3\nu + k)$$

e così sono determinati tutti i caratteri dell'antipedale<sup>1)</sup>; lasciamo al lettore di calcolare le modificazioni che subiscono questi risultati quando la curva  $\Gamma$  passa per il polo o per i punti ciclici del piano  $I, J$ .

Si vede similmente che la podaria di una curva di classe  $\nu$  è in generale dell'ordine  $2\nu^2$ , del genere  $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ , ha i punti ciclici

<sup>1)</sup> La stessa questione è trattata più algebricamente nella Diss. di A. ROSÉN, *Om fotpunktkurvers karaktereres* (Lund, 1884).

<sup>2)</sup> Questo risultato si può confermare col seguente calcolo.

Indicheremo con (1)  $f=0$  l'equazione di una curva algebrica d'ordine  $n$ , tanto se si adoperano le coordinate cartesiane  $x, y$  quanto se, per ottenere maggiore simmetria si adoperano coordinate omogenee  $x, y$  e  $z$  ( $=1$ ). Sia  $O(a, \beta)$  il punto dal quale si abbassano le perpendicolari alle tangenti. L'equazione della tangente nel punto  $M(x, y)$  avrà per equazione

$$(2) \quad X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

supposto che  $x, y, z$  soddisfacciano la (1). La perpendicolare abbassata da  $O$  su di essa ha per equazione

$$(3) \quad \frac{X - a}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - \beta}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

onde l'equazione della podaria si otterrà eliminando  $x, y$  fra le equazioni (1) (2) (3). Ora i due membri della (3) valgono entrambi

$$\frac{(X - a) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - \beta) \frac{\partial f}{\partial y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \frac{X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} - \left[a \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y}\right]}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

per punti  $\nu$ -pli; è in generale della classe  $\nu(\nu+1)$  e possiede  $3\nu(\nu-1)$  flessi e  $\nu(\nu-1)(\nu^2+3\nu-6)$  bitangenti. In casi speciali in cui la

cioè, per la (2)

$$\frac{a \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

Ciò prova che le equazioni (2) (3) equivalgono alle seguenti:

$$(4) \quad X = a \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}, \quad Y = \beta \frac{a \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

onde l'equazione della podaria otterrebbe eliminando  $x, y$  fra le (1) (4). Per trovare l'ordine  $n_p$  della podaria combineremo queste equazioni con la seguente

$$(5) \quad AX + BY + C = 0$$

ed otterremo

$$(6) \quad (Aa + B\beta + C) \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right] - \left[ A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} \right] \left[ a \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right] = 0;$$

l'ordine cercato è il numero delle intersezioni variabili con la retta (5) delle due curve rappresentate dalle equazioni (1) e (6); ora la 1<sup>a</sup> è dell'ordine  $n$  e la 2<sup>a</sup> dell'ordine  $2(n-1)$ , onde nel caso più generale  $n_p = 2n(n-1)$ . Per vedere quale diminuzione avvenga per la presenza di un punto doppio o di una cuspid (a distanza finita) supponiamo che  $O$  sia un punto doppio od una cuspid. Nel primo caso scriveremo

$$f = f_2 + \dots$$

e vedremo che nel primo membro della (6) i termini di grado più basso sono

$$(Aa + B\beta + C) \left[ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 \right],$$

onde l'origine è anche un punto doppio della (6) e la diminuzione in  $n_p$  è di 4 unità. Nel secondo caso scriveremo

$$f = y^2 + \dots$$

data curva tocca la retta all'infinito o le rette  $O I$ ,  $O J$  questi risultano si modificano in modo che è facile determinare.

ESEMPLI. — Alcuni furono già incontrati nei Libri precedenti <sup>1)</sup>; ora ne daremo altri.

I. Si consideri l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

la corrispondente antipedale rispetto al centro dicesi *curva di Talbot* <sup>2)</sup>; è di 6° ordine e 4ª classe, ha sei cuspidi e quattro punti doppi ed è bitangente alla retta all'infinito e alle rette  $O I$ ,  $O J$ . Posto per brevità  $a^2 + b^2 = 2 s^2$ ,  $a^2 - b^2 = 2 d^2$  si trova come equazione della curva in questione la seguente:

$$[3 (a^2 x^2 + b^2 y^2) - 4 (s^4 + 3 d^4)]^3 + [9 (s^2 - 3 d^2) a^2 x^2 + 9 (s^2 + 3 d^2) b^2 y^2 - 8 d^2 (s^4 - 9 d^4)]^2 = 0 \quad 3).$$

Cambiando  $b$  in  $i b$  si ottiene la curva analoga relativa alla iperbole, la quale per  $b = a$  diviene la spirale senoide di equazione

$$\rho^{-2/3} = a^{-2/3} \cos \left[ -\frac{2\omega}{3} \right]^4)$$

e vedremo che il primo membro della (6) comincia con:

$$(A a + B b + C) 4 y^4 + \dots;$$

le due curve hanno dunque comune una cuspidi e la relativa tangente; quella cuspidi assorbe quindi 6 intersezioni delle due curve. Emerge da ciò che, se la data curva ha  $d$  punti doppi e  $k$  cuspidi si ha

$$n_p = 2n(n-1) - 4d - 6k.$$

Se ora si ricorda che, detta  $\nu$  la classe della curva data, si ha

$$\nu = n(n-1) - 2d - 3k$$

si conclude

$$n_p = 2\nu;$$

dunque: *L'ordine della podaria di una curva algebrica è in generale eguale al doppio della classe di questa.*

<sup>1)</sup> V. anche W. GAEDCKE, *Ueber die Fusspunktkurven der geraden Kissoide und der semikubischen Parabel* (Arch. Math. Phys., III Ser., T. 28, 1919).

<sup>2)</sup> Dal nome del geometra inglese che dimostrò che la rettificazione di essa dipende da integrali ellittici: v. Ann. de math., T. XIV, 1823-24, p. 380.

<sup>3)</sup> B. TORTOLINI, *Sopra l'equazione di una curva del sest'ordine, che s'incontra in un problema riguardante l'ellissi* (Journ. f. Math., T. XXXIII, 1846); *Inviluppo d'una perpendicolare condotta a un diametro dell'ellisse all'estremità di questo diametro* (Nouv. Ann. de Math., T. V, 1846).

<sup>4)</sup> Ann. de math., T. XII, p. 321, e XIII, p. 115-142.

II. Partendo dalla stessa ellisse si trova che la sua podaria rispetto al punto  $(\alpha, \beta)$  ha per equazione

$$[x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y)]^2 = a^2 (x - \alpha)^2 + b^2 (y - \beta)^2 \quad 1).$$

Casi particolari notevoli si hanno supponendo che il polo cada su un asse o nel centro, nel quale ultimo caso si trova una lemniscata di Booth (Vol. I, p. 160); se poi si suppone che il polo cada sopra una delle tangenti condotte alla data conica da uno dei punti ciclici del piano si giunge ad una interessante cubica immaginaria <sup>2)</sup>.

III. La podaria di una parabola è una cubica circolare, che può essere una conoide slusiana (Vol. I, p. 87), un ofuride (Id. p. 57) o una cissoide (Id. p. 39).

IV. La podaria di un circolo è in generale una lumaca di Pascal (Vol. I, p. 175).

V. Le podarie dell'ipocicloide tricuspide furono studiate nel Cap. VIII, Libro IV; quella di un'ipocicloide quadricuspide è, come osservò L. Braude <sup>3)</sup> la curva di 8° ordine di equazione polare

$$\rho = a \cos \omega \operatorname{sen} \omega - b \cos \omega - c \operatorname{sen} \omega$$

$a$  essendo il raggio del dato cerchio e  $b, c$  le coordinate del polo. Infatti l'equazione di eletta curva si ottiene eliminando  $\varphi$  fra le equazioni

$$\frac{x}{\cos \varphi} + \frac{y}{\operatorname{sen} \varphi} = a, \quad \frac{x-b}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{y-c}{\cos \varphi}$$

onde è

$$(x-b)^2 + (y-c)^2 = \left\{ \frac{a(x-b)(y-c)}{x(x-b) + y(y-c)} \right\}^2;$$

ora se si pone

$$x-b = \rho \cos \omega, \quad y-c = \rho \operatorname{sen} \omega$$

si arriva all'equazione precedente; in particolare si ottiene lo scarabeo (Vol. I, p. 319) o il quadrifoglio.

VI. La podaria dell'origine rispetto alla Kreuzkurve

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$$

<sup>1)</sup> Cfr. S. ROBERTS, *On the Pedals of Conic sections* (Proc. London Math. Soc., T. III, 1869-71).

<sup>2)</sup> W. BLASCHKE, Arch. Math. Phys., III Ser., T. XIV, 1908, p. 163.

<sup>3)</sup> Da una comunicazione privata.

è la curva  $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 27 a^4 x^2 y^2$  che ha quattro cuspidi concicliche e un punto isolato nel centro.

VII. La podaria di una toroide (v. p. 321) è una curva di 8° ordine che fu accuratamente studiata da F. Gomes Teixeira <sup>1)</sup>.

Supposto che  $\Gamma_1$  sia la podaria di  $\Gamma$  rispetto a un polo  $O$ , si può di questo considerare la podaria  $\Gamma_2$  rispetto a  $\Gamma_1$ ; così proseguendo si ottiene una serie illimitata di curve. Per es. della spirale sinusoidale

$$\rho^m \cos m \omega = a^m$$

si ottiene, quando il punto fisso coincide col polo, come  $n$ -ma podaria la curva

$$\rho^{-\frac{m}{m n - 1}} \cos \left[ -\frac{m}{m n - 1} \omega \right] = a^{-\frac{m}{m n - 1}} \quad 2)$$

che è una nuova spirale sinusoidale; p. es. la podaria del centro rispetto a una iperbole equilatera è una lemniscata e la podaria di questa una spirale sinusoidale d'indice  $-\frac{2}{3}$ .

**301.** Quando  $\Gamma$  è una curva chiusa e convessa, e  $P$  sia un punto ad essa interno fra le aree  $A$  e  $A_1$  della podaria e dell'antipedale di  $P$  rispetto a  $\Gamma$  passa una relazione notevole scoperta sin dal 1881 da E. Catalan <sup>3)</sup>, ritrovata nel 1894 da K. Tsuruta <sup>4)</sup>, ed a cui l'anno seguente pervennero alcuni collaboratori di *L'intermédiaire des mathématiciens*, generalizzando delle proposizioni enunciate da E. Barisien <sup>5)</sup>. Per ottenere quella relazione è conveniente di fare uso dell'equazione magica della tangente di  $\Gamma$ ; scrivendola come segue

$$(1) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

ove  $p$  è una data funzione di  $\varphi$ , è chiaro che  $\varphi$  e  $p$  sono le coordinate

<sup>1)</sup> Obras citate, T. IV, p. 368.

<sup>2)</sup> Fra le curve, le cui podarie successive danno luogo a conseguenze notevoli, spicca l'iperbole equilatera; se come punto fisso si assume il centro della curva si ottengono delle linee che, sin dal 1847, vennero da W. ROBERTS considerate come generalizzazioni della lemniscata di BERNOULLI (v. l'articolo *Généralisation d'une propriété de la lemniscate*, G. di Liouville, T. XII, 1847); egli così estese grandemente la proposizione di TALBOT (cfr. C. STURM, *Démonstration de deux théorèmes sur la lemniscate*, Ann. de Math., T. XIV, 1823-24) che dice: « se si moltiplica la differenza che passa tra l'arco infinito dell'iperbole equilatera  $x^2 - y^2 = a^2$  ed il proprio asintoto per la lunghezza del quadrante della lemniscata  $(x^2 + y^2)^2 - 2 a^2 (x^2 - y^2) = 0$  si ottiene  $\pi a^2/4$  ».

<sup>3)</sup> *Mélanges mathématiques* (Mém. de la Soc. de Liège, 2<sup>a</sup> Serie, T. XIII, 1886, p. 230).

<sup>4)</sup> *Counter-pedals* (Id., 2<sup>a</sup> Serie, T. XXIII, 1894).

<sup>5)</sup> *Intermédiaire*, T. II, 1896, p. 107-109 e 344-45.

polari di un punto generico della podaria dell'origine rispetto a  $\Gamma$ ; quindi si ha

$$A = \frac{1}{2} \int p^2 d\varphi$$

l'integrale essendo esteso a tutto il contorno di  $\Gamma$ . Differenziando la (1) si ottiene

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi - p' = 0$$

ovvero

$$x \cos \left[ \frac{\pi}{2} + \varphi \right] + y \sin \left[ \frac{\pi}{2} + \varphi \right] - p' = 0;$$

siccome questa rappresenta una normale della curva  $\Gamma$ , così è evidente che  $\pi/2 + \varphi$  e  $p'$  sono le coordinate polari di un punto qualunque della contropedale. Per conseguenza si ha

$$A_1 = \frac{1}{2} \int p'^2 d\varphi,$$

epperò

$$(2) \quad A - A_1 = \frac{1}{2} \int (p^2 - p'^2) d\varphi.$$

Indicando ora con  $\rho, \omega$  le coordinate di un punto qualunque della curva  $\Gamma$  si vede subito che sussistono le relazioni:

$$p = \rho \cos (\omega - \varphi), \quad p' = \rho \sin (\omega - \varphi)$$

ossia

$$p^2 + p'^2 = \rho^2, \quad \omega - \varphi = \arctg p'/p;$$

se ne deduce

$$d\omega - d\varphi = \frac{p p'' - p'^2}{p^2 + p'^2} d\varphi$$

onde

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{p^2 + p p''}{\rho^2}$$

ossia

$$\rho^2 d\omega = (p^2 + p p'') d\varphi.$$

Detta quindi  $C$  l'area di  $\Gamma$  si ottiene:

$$C = \frac{1}{2} \int (p^2 + p p'') d\varphi,$$

l'integrale essendo sempre esteso a tutta la curva  $\Gamma$ . Ora integrando per parti si ha

$$\int p p'' d\varphi = p p' - \int p'^2 d\varphi;$$

ma la parte integrata si annulla quando l'integrale si estende a tutta la curva chiusa  $\Gamma$ ; dunque

$$(3) \quad C = \frac{1}{2} \int (p^2 - p'^2) d\varphi.$$

Il paragone delle equazioni (2) (3) dà

$$(4) \quad C = A - A_1,$$

relazione che esprime il seguente teorema: *Data una curva  $\Gamma$ , chiusa e convessa dappertutto, ed un punto interno  $P$ , le aree della podaria e della contrapedale di  $P$  rispetto a  $\Gamma$  hanno per differenza l'area della curva  $\Gamma$ . È questa la relazione che volevamo stabilire. Per applicarla ad un esempio supponiamo che  $\Gamma$  sia un'ellisse di semiassi  $a$  e  $b$ , e  $P$  un suo fuoco; allora la podaria è un cerchio di raggio  $a$ , quindi  $A = \pi a^2$ ; inoltre  $C = \pi ab$ ; onde l'area  $A_1$  della contrapedale è espressa da  $\pi a(a - b)$ , la contrapedale è quindi equivalente ad una ellisse avente per semiassi  $a$  e  $a - b$ .*

Le aree delle podarie delle curve convesse e chiuse danno ancora luogo ad altre notevoli proposizioni che J. Steiner ha scoperte<sup>1)</sup>. Per esporle ricordiamo che, seguendo il geometra testè citato, chiamasi *baricentro di curvatura* di una linea  $\Gamma$  il centro di gravità che essa possiede quando la si suppone, di densità, non uniforme, ma proporzionale alla curvatura. Detti quindi  $s$  l'arco e  $R$  il raggio di curvatura della curva  $\Gamma$ , le coordinate  $x_0, y_0$  del suo baricentro di curvatura  $M$  saranno date da

$$x_0 = \frac{\int \frac{x ds}{R}}{\int \frac{ds}{R}}, \quad y_0 = \frac{\int \frac{y ds}{R}}{\int \frac{ds}{R}},$$

le integrazioni essendo estese a tutti i punti di  $\Gamma$ . Introducendo l'angolo di contingenza  $d\tau = ds/R$  (indicando cioè l'angolo  $\tau$  fatto dalla normale con  $Ox$ ), si può scrivere

$$x_0 = \frac{\int x d\tau}{\int d\tau}, \quad y_0 = \frac{\int y d\tau}{\int d\tau};$$

<sup>1)</sup> V. la memoria *Vom Krümmungs-Schwerpunkte ebener Curven* (G. di Crelle, T. XXI, 1838; Ges. Werke, T. II, p. 97); proposizioni più generali leggansi nella memoria di M. PELISEK, *Ueber die Beziehungen zwischen den Bogenlängen der Rollkurven und der Fusspunktcurven* (Bull. intern. Acad. sciences Bohême, 1909).

ma, essendo per ipotesi  $\Gamma$  una curva chiusa,  $\int d\tau = 2\pi$ , onde

$$(5) \quad x_0 = \frac{1}{2\pi} \int x d\tau, \quad y_0 = \frac{1}{2\pi} \int y d\tau.$$

Supponiamo ora che la curva  $\Gamma$  sia rappresentata mediante l'equazione magica della tangente

$$(6) \quad x \cos \tau + y \sin \tau - f(\tau) = 0;$$

combinando questa equazione con la sua derivata

$$-x \sin \tau + y \cos \tau - f'(\tau) = 0$$

si ottiene

$$x = f \cdot \cos \tau - f' \cdot \sin \tau, \quad y = f \cdot \sin \tau + f' \cdot \cos \tau$$

onde le (5) divengono:

$$2\pi x_0 = \int f \cos \tau d\tau - \int f' \sin \tau d\tau$$

$$2\pi y_0 = \int f \sin \tau d\tau + \int f' \cos \tau d\tau.$$

Ma, integrando per parti si trova

$$\int f' \sin \tau d\tau = f \sin \tau - \int f \cos \tau d\tau$$

$$\int f' \cos \tau d\tau = f \cos \tau + \int f \sin \tau d\tau;$$

estendendo l'integrazione a tutta la curva  $\Gamma$ , le parti integranti scompaiono e resta:

$$(7) \quad \pi x_0 = \int f \cos \tau d\tau, \quad \pi y_0 = \int f \sin \tau d\tau.$$

Premesso ciò consideriamo un punto qualunque  $P(\alpha, \beta)$  nel piano della curva  $\Gamma$  determinata dall'equazione (6); siccome la perpendicolare calata dal punto  $P$  sulla retta rappresentata da questa equazione ha per lunghezza  $\alpha \cos \tau + \beta \sin \tau - f(\tau)$  e forma con  $Ox$  l'angolo  $\pi/2 + \tau$ , così la superficie  $S$  della podaria di  $P$  rispetto a  $\Gamma$  è data da:

$$S = \frac{1}{2} \int (\alpha \cos \tau + \beta \sin \tau - f)^2 d\tau$$

l'integrazione essendo al solito estesa a tutti i punti di  $\Gamma$ . Se ne

deduce:

$$2S = \alpha^2 \int \cos^2 \tau \, d\tau + \beta^2 \int \sin^2 \tau \, d\tau + 2\alpha\beta \int \sin \tau \cos \tau \, d\tau - 2\alpha \int f \cos \tau \, d\tau - 2\beta \int f \sin \tau \, d\tau + \int f^2 \, d\tau;$$

ora in generale

$$\int \cos^2 \tau \, d\tau = \frac{1}{2} \left[ \tau + \frac{\sin 2\tau}{2} \right], \quad \int \sin^2 \tau \, d\tau = \frac{1}{2} \left[ \tau - \frac{\sin 2\tau}{2} \right],$$

$$2 \int \sin \tau \cos \tau \, d\tau = - \frac{\cos 2\tau}{2},$$

onde integrando fra  $\tau = \tau_0$  e  $\tau = \tau_0 + 2\pi$  si ottengono risp. i risultati  $\pi \cdot \pi, 0$ . Per ciò ed in forza delle (7) si può scrivere

$$(8) \quad 2S = \pi(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0) + \int f^2 \, d\tau.$$

Da questa notevole formola si traggono varie conseguenze. Scrivendola, infatti, come segue

$$(9) \quad \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \frac{\int f^2 \, d\tau - 2S}{\pi} = 0$$

si vede che: *Data una curva piana chiusa e convessa il luogo dei punti del piano per cui è costante l'area della podaria è un cerchio avente per centro il baricentro di curvatura della curva.* Scriviamo invece la (8) così:

$$(8') \quad S = \pi \frac{(\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^2}{2} + \frac{\int f^2 \, d\tau - \pi(x_0^2 + y_0^2)}{2};$$

ne segue che l'area  $S$  raggiunge il suo valore minimo quando il punto  $P$  coincide col baricentro di curvatura  $M$ ; tale minimo è

$$S_0 = \frac{\int f^2 \, d\tau - \pi(x_0^2 + y_0^2)}{2};$$

onde la (8') diviene

$$S = \frac{\pi}{2} P M^2 + S_0$$

e dice: *L'area della podaria rispetto ad una curva piana chiusa e con-*

vessa di un punto qualunque del suo piano è eguale all'area della podaria del baricentro di curvatura aumentata del semicerchio avente per raggio la distanza di questo da quel punto. — Se, per es., la curva considerata è il cerchio di centro  $C$  e raggio  $r$ , l'area della podaria di un punto qualunque  $P$  (che è una lumaca di Pascal) è eguale all'area del dato cerchio aumentata del semicerchio avente per raggio il segmento  $PC$ ; in particolare se  $P$  sta sulla periferia di quel cerchio l'area della podaria (che è una cardioide) è  $\frac{3}{2}\pi r^2$ .

**302.** Altre formole concernenti le aree delle podarie si stabiliscono agevolmente supponendo che la curva  $\Gamma$  su cui si ragiona sia rappresentata mediante un'equazione

$$\varrho = f(\omega)$$

fra le coordinate polari, il polo essendo il punto fisso. Chiamiamo, infatti, generalmente  $\varrho_m, \omega_m$  le coordinate del punto  $P_m$  dell' $m$ -ma

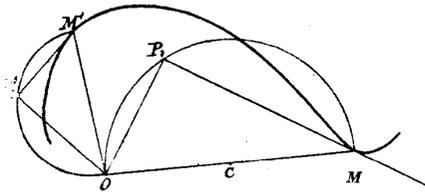


Fig. 43.

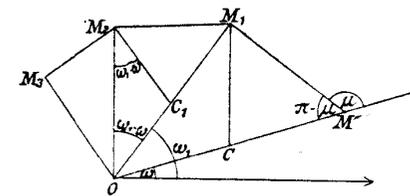


Fig. 44.

podaria  $\Gamma_m$  che corrisponde al punto  $M(\varrho, \omega)$  di  $\Gamma$  e  $U_m$  l'area di tale podaria. L'angolo  $OP_1M$  (v. fig. 43) essendo retto la circonferenza di diametro  $OM$  passerà per  $P_1$ ; considerando similmente una seconda coppia  $M', P_1'$  della curva  $\Gamma$  e della podaria si vedrà che la circonferenza di diametro  $OM'$  passerà per  $P_1'$ . Ora se  $M'$  si avvicina indefinitamente a  $M$ ,  $P_1'$  tenderà a coincidere con  $P_1$  e la retta  $P_1P_1'$  tenderà a coincidere tanto con la tangente in  $P_1$  alla podaria, tanto alla tangente in  $P_1$  al cerchio  $OP_1M$ . Dunque la tangente  $t_1$  in  $P_1$  a  $\Gamma_1$  tocca ivi il cerchio  $OP_1M$ ; per conseguenza la normale in  $P_1$  a  $\Gamma_1$  passa pel punto medio  $C$  del segmento  $OM$  (v. fig. 44)<sup>1)</sup>. Il piede  $P_2$  della perpendicolare abbassato da  $O$  sulla tangente in  $P_1$  al cerchio di diametro  $OM$  appartiene quindi alla seconda podaria  $\Gamma_2$ . Similmente si potrà trovare il punto  $P_3$ , e così via tutti i punti che corrispondono a  $M$  nelle successive podarie. Sia ora  $\mu$  l'angolo fatto dalla tangente in  $M$

<sup>1)</sup> PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino 1887), p. 91. LIE-SCHIFFERS, op. cit., p. 17.

alla curva  $\Gamma$  col relativo raggio vettore. È noto che si ha:

$$(10) \quad \operatorname{tg} \mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega} \quad \text{ossia} \quad \mu = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varrho}{\varrho'},$$

gli accenti indicando sempre derivate rispetto a  $\omega$ . D'altronde dalla semplice ispezione della or citata figura, si deduce

$$\mu = \omega_1 - \omega + \frac{\pi}{2}$$

onde

$$\frac{d\omega_1}{d\omega} = \frac{d\mu}{d\omega} + 1$$

e per la precedente equazione (10)

$$\frac{d\omega_1}{d\omega} = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho^2 + \varrho'^2}$$

D'altronde si ha  $\varrho_1 = \varrho \operatorname{sen} \mu$ , quindi per la (10)

$$(11) \quad \varrho_1 = \frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}}$$

Combinando fra loro le equazioni (10), (11) si ottiene la seguente espressione per la derivata dell'area della prima podaria:

$$\frac{dU_1}{d\omega} = \frac{1}{2} \varrho_1^2 \frac{d\omega_1}{d\omega} = \frac{\varrho^4}{2} \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^2}$$

Si trova similmente:

$$\omega_2 = 2(\omega_1 - \omega) + \omega, \quad \varrho_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \mu$$

ossia in virtù di quanto precede

$$\omega_2 = 2(\mu - \pi/2) + \omega, \quad \varrho_2 = \varrho \operatorname{sen}^2 \mu.$$

Similmente si trova in generale:

$$(12) \quad \omega_m = m(\mu - \pi/2) + \omega, \quad \varrho_m = \varrho \operatorname{sen}^m \mu$$

epperò

$$(13) \quad \frac{dU_m}{d\omega} = \frac{\varrho^2}{2} \left[ \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + \varrho'^2} \right]^m \left\{ m \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{\varrho^2 + \varrho'^2} + 1 \right\},$$

notevole espressione dell'area dell' $m$ -ma podaria<sup>1)</sup>. Lasciamo al lettore di applicarla p. es. alle spirali sinusoidi.

**303.** La considerazione delle antipedali mostra che la serie delle podarie successive di una curva  $\Gamma$  si può proseguire anche in senso inverso, considerando cioè la curva  $\Gamma_{-m}$  di cui  $\Gamma$  è l' $m$ -ma podaria; la si chiama  $m$ -ma podaria negativa; la formula (13) è ad esse applicabile cambiando il segno di  $m$ . In particolare la prima, che più di frequente s'incontra, chiamasi spesso la podaria negativa di  $\Gamma$ <sup>2)</sup>; è chiaro che essa è l'involuppo delle rette condotte dai punti di  $\Gamma$  perpendicolarmente alle rette che li congiungono al punto fisso  $O$ . Da ciò un facile procedimento per ottenere l'equazione della podaria negativa della curva rappresentata dall'equazione

$$\varrho = f(\omega),$$

nell'ipotesi che il polo coincide col punto fisso; giacchè in tali ipotesi

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - f(\omega) = 0$$

è l'equazione generica delle suddette perpendicolari, onde per averne l'involuppo basta eliminare  $\omega$  fra questa equazione e la derivata

$$-x \operatorname{sen} \omega + y \cos \omega - f'(\omega) = 0.$$

Si è anche osservato che il problema analitico della ricerca della podaria negativa di una data non differisce in fondo dalla determinazione della curva parallela. Per dimostrare l'esattezza di questa osservazione, consideriamo una curva arbitraria  $\Gamma$  di equazione  $f(x, y) = 0$  nonchè quella  $\Gamma'$  che si ottiene raddoppiandone le ordinate, la quale evidentemente ha per equazione  $f(x/2, y/2) = 0$ . La curva parallela a  $\Gamma'$  alla distanza  $k$  è l'involuppo del cerchio  $(X-x)^2 + (Y-y)^2 = k^2$ ; ma se si pone  $x = 2\xi, y = 2\eta$  la sua equazione sarà il risultante dell'eliminazione di  $\xi, \eta$  fra le equazioni

$$f(\xi, \eta) = 0, \quad (X-2\xi)^2 + (Y-2\eta)^2 = k^2, \quad \frac{X-2\xi}{\frac{\partial f}{\partial \xi}} = \frac{Y-2\eta}{\frac{\partial f}{\partial \eta}}.$$

Ora l'equazione della prima podaria negativa di  $\Gamma$ , quando

<sup>1)</sup> Per ulteriori sviluppi sopra quest'argomento si ricorra alla nota di E. BARIEN, *Sur les podaires successives d'une courbe* (Nouv. Ann., 3<sup>a</sup> Serie, T. XIV, 1895). E per lo studio di una classe speciale di podarie alla memoria di P. F. RUFFINI, *Delle pedali delle parabole cubiche divergenti* (Bologna Mem., Serie V, vol. V, 1896).

<sup>2)</sup> Un esempio di siffatte curve è offerto dal trisettrice di Catalan (Vol. I, p. 107) che è la podaria negativa di una parabola rispetto al fuoco.

il polo cade nell'origine, si ottiene eliminando  $x, y$  fra le tre equazioni

$$f(x, y) = 0, (X-x)^2 + (Y-2y)^2 = (X^2 + Y^2), \frac{X-2x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-2y}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Paragonando questo sistema al precedente si vede che (pre-scindendo dalle quantità da eliminare) essa nasce da quello mutando  $k$  in  $\sqrt{X^2 + Y^2}$ : si conclude pertanto: *Data una curva  $\Gamma$ , si costruisca la curva  $\Gamma'$  raddoppiandone i raggi vettori uscenti da un punto  $O$ ; trovata che siasi l'equazione della curva parallela a  $\Gamma'$  alla distanza  $k$ , si ottiene quella della podaria negativa rispetto a  $O$  sostituendo nell'equazione trovata  $k$  con  $\sqrt{x^2 + y^2}$ <sup>1)</sup>.*

La definizione come involuppo della podaria negativa di una curva  $\Gamma$  è così semplice che permette di dedurre, con facili ragionamenti geometrici, molte proprietà di quella curva quando  $\Gamma$  si supponga algebrica. Gli è quanto ci apprestiamo a dimostrare<sup>2)</sup>.

Per ricordare che la curva fondamentale è algebrica d'ordine  $n$  la indicheremo con  $\Gamma_n$  mentre con  $\Pi$  ne indicheremo la podaria negativa rispetto al polo  $O$ . Osserviamo anzitutto che ad un punto  $r$ -plo di  $\Gamma_n$  corrisponde una tangente  $r$ -pla di  $\Pi$ , in particolare ad un punto doppio di  $\Gamma_n$  una tangente doppia di  $\Pi$ , ad una cuspidale un flesso.

La podaria  $\Pi$  è in generale di classe  $2n$ ; preso infatti un punto qualunque  $P$  del piano in cui stanno  $\Gamma_n$  e  $\Pi$ , si descriva la circonferenza di diametro  $OP$ ; essa taglia  $\Gamma_n$  in  $2n$  punti ciascuno dei quali è unito a  $P$  mediante una tangente di  $\Pi$ ; si hanno così  $2n$  tangenti di questa passanti per  $P$ , e poichè altre non se ne possono trovare così la proposizione è dimostrata. E dal ragionamento fatto risulta anche che se  $P$  fosse un punto  $k$ -plo di  $\Gamma_n$  e questa passasse  $i$  volte per i punti ciclici del piano la classe di  $\Pi$  scenderebbe a  $2(n-i) - k$ ; se ad es.  $n$  è pari e  $i = k = n/2$  la podaria negativa è di classe  $n/2$ , conclusione evidente per  $n = 2$ .

Sia  $A$  un punto all'infinito di  $\Gamma_n$ , il quale non coincide con un punto ciclico; la perpendicolare condotta da  $A$  a  $PA$  coincide con la retta all'infinito, onde questa è una tangente di  $\Pi$ ; anzi lo è tante volte quanti sono i punti non ciclici che la retta ha all'infinito. Dunque: *Se la curva  $\Gamma_n$  passa  $i$  volte per ciascun punto ciclico, la podaria negativa  $\Pi$  ha la retta all'infinito per tangente  $(n-2i)$ -pla. In tale ipotesi, se  $P$  è un punto  $k$ -plo di  $\Gamma_n$ , la retta che lo unisce*

<sup>1)</sup> Questo teorema fu enunciato da STREBOR (cioè W. ROBERTS) nella nota dal titolo *Théorèmes sur les courbes planes* (Nouv. Ann. de math., T. XIX, 1860).

<sup>2)</sup> AMESSEDER, *Theorie der negativen Fusspunktkurven* (Archiv, T. LXIV, 1879).

ad un punto ciclico taglia nuovamente la curva  $\Gamma_n$  in  $n-k$  i punti  $Q$ ; la perpendicolare condotta da  $Q$  alla retta  $PQ$  coincide notoriamente con la retta stessa; dunque: *La podaria negativa di un punto  $k$ -plo di una curva  $P$  passante  $i$  volte per ciascun punto ciclico ha per tangenti  $(n-k-i)$ -ple le rette che uniscono  $P$  ai punti ciclici del piano.*

Conduciamo per  $O$  un cerchio arbitrario; ne sia  $OP$  il diametro passante per  $O$ ; consideriamo due  $(M_1, M_2)$  delle intersezioni di esso con la data curva.  $PM_1 \equiv t_1$  e  $PM_2 \equiv t_2$  saranno tangenti alla podaria negativa di  $O$ . Immaginiamo ora che quel cerchio si deformi in modo che  $M_1$  e  $M_2$  tendano a confondersi;  $t_2$  si accosterà quindi indefinitamente a  $t_1$  ed il punto  $P$  in cui si tagliano  $t_1$  e  $t_2$  tenderà a confondersi col punto di contatto della retta  $t_1$  col proprio involuppo, cioè con un punto di  $\Pi$ . Preso dunque ad arbitrio un punto  $M$  di  $\Gamma_n$  e descritto il cerchio passante per  $O$  e tangente in  $M$  a  $\Gamma_n$ , il secondo estremo del suo diametro passante per  $O$  sarà un punto  $P$  della podaria negativa di  $\Gamma_n$  rispetto a  $O$  e la retta  $PM$  sarà la relativa tangente. *D'onde una costruzione per punti della podaria negativa.*

Sia  $t$  una tangente condotta da  $O$  a  $\Gamma_n$ ;  $T$  il relativo punto di contatto; la perpendicolare  $n$  condotta da  $T$  a  $t$  sarà una tangente della podaria negativa; costruendone il punto di contatto col procedimento testè indicato si vede che esso cade all'infinito. Dunque *la podaria negativa ha tanti asintoti quante sono le tangenti che possono condursi alla curva fondamentale dal polo*; essi sono le corrispondenti normali della curva fondamentale stessa.

Se  $\Gamma_n$  è una curva generale nel suo ordine e  $O$  non le appartiene, il numero degli asintoti è  $n(n-1)$ ; e siccome in tal caso la retta all'infinito è tangente  $n$ -pla di  $\Pi$  (v. sopra), questa in totale ha  $n(n+1)$  intersezioni con la retta all'infinito: ciò prova che *la podaria negativa di una curva d'ordine  $n$  è in generale d'ordine  $n(n+1)$* . Le diminuzioni che soffre quest'ordine in casi speciali si determinano facilmente con lievi modificazioni del ragionamento che condusse a questo teorema.

Se un cerchio passante per  $O$  tocca  $\Gamma_n$  tanto in  $M$  quanto in  $\bar{M}$ , il punto  $P$  di esso diametralmente opposto a  $O$  è punto di contatto con la podaria negativa  $\Pi$  tanto della retta  $PM$  quanto della retta  $P\bar{M}$ , onde  $P$  è punto doppio di  $\Pi$ . Dunque:  *$\Pi$  ammette tanti punti doppi quanti sono i cerchi passanti per  $O$  e bitangenti a  $\Gamma_n$* . Similmente si vede che *essa ammette tante cuspidi quanti sono i cerchi osculatori di  $\Gamma_n$  che passano per  $P$* . Così se  $\Gamma_n$  è una curva generale non posta in alcuna posizione speciale rispetto a  $P$ ,  $\Pi$  ammette  $4(n-1)(2n-3)$  punti doppi e  $6(n-1)$  cuspidi.

Supponiamo ad es.<sup>1)</sup> che  $\Gamma_n$  sia una conica a centro; allora

<sup>1)</sup> AMESSEDER, *Negative Fusspunktkurve der Kegelschnitte* (Archiv., T. LXIV, 1879).

la podaria negativa  $II$  è in generale una curva di sesto ordine e quarta classe con quattro punti doppi e sei cuspidi; ne sono tangenti doppie la retta all'infinito e le rette che congiungono il punto fisso  $P$  ai punti ciclici del piano. Se, invece,  $\Gamma_n$  è una parabola, la podaria è ancora di quarta classe, ma solo del quinto ordine, e possiede quattro cuspidi; il punto all'infinito dell'asse della parabola ne è un flesso con la retta all'infinito per corrispondente tangente, ecc.<sup>1)</sup>

Si può osservare che il concetto di podaria è suscettibile di estensione supponendo di condurre da un punto fisso le  $\infty'$  rette incontranti le tangenti di una curva sotto angolo costante; nascono così le *podarie oblique*<sup>2)</sup>.

**304.** Se si cerca il luogo dei punti simmetrici di un punto fisso  $O$  rispetto alle tangenti di una curva  $\Gamma$  si ottiene una nuova curva la quale è evidentemente omotetica della podaria di quel punto rispetto alla curva  $\Gamma$ , 2 essendo il rapporto d'omotetia. La si chiama *podoidi* di  $O$  rispetto a  $\Gamma$ <sup>3)</sup>. Se si prende  $O$  per origine e si suppone che

$$f(x, y) = 0$$

sia l'equazione di  $\Gamma$ , quella della tangente nel punto  $(x, y)$  sarà

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

ove  $X, Y$  sono coordinate correnti.

Ora se  $x_1, y_1$  sono le coordinate del corrispondente punto  $II$  della podoidi,

$$X x_1 + Y y_1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = 0$$

sarà l'equazione della retta che biseca ortogonalmente il segmento  $OM$ ; ma questa per ipotesi coincide con quella tangente quindi deve aversi

<sup>1)</sup> Un esempio di speciali curve podarie negative è offerto dalla memoria di RUFFINI intitolata *Delle linee piane algebriche le pedali delle quali possono essere curve che hanno potenza in ogni punto del loro piano* (Bologna Mem., Serie V, T. IV, 1895).

<sup>2)</sup> Per il caso in cui la curva di partenza sia una conica v. P. C. PFÄRTISCH, *Ueber schiefe Fusspunktkurven von Kegelschnitten* (Arch. Math. Phys., III Ser., T. XXVIII, 1920, p. 192-4).

<sup>3)</sup> BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar-le-Duc, 1897), p. 221.

$$\frac{x_1}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{y_1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 \left[ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right]}$$

donde

$$(15) \quad x_1 = \frac{2 \left[ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right] \frac{\partial f}{\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2}}{\frac{\partial f}{\partial x}}, \quad y_1 = \frac{2 \left[ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right] \frac{\partial f}{\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}};$$

e queste equazioni stabiliscono analiticamente la *trasformazione podoidale*. Questa, al pari della trasformazione pedale, fa corrispondere un punto ad ogni tangente di una curva: come tale è analoga a quella che fa corrispondere ad ogni tangente il centro del cerchio in cui essa si muta in forza di una data trasformazione per raggi vettori reciproci. Presa per origine il centro di questa, si supponga che

$$(16) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - f(\varphi) = 0$$

sia l'equazione magica della tangente alla data curva. Se  $k^2$  è la potenza della trasformazione, la retta (16) si muta nel cerchio

$$x^2 + y^2 - \frac{k^2}{f(\varphi)} (x \cos \varphi + y \sin \varphi) = 0;$$

il centro di questo avendo per coordinate

$$(18) \quad x_c = \frac{k^2 \cos \varphi}{2 f(\varphi)}, \quad y_c = \frac{k^2 \sin \varphi}{2 f(\varphi)};$$

questa è la rappresentazione parametrica della così detta *curva d'inversione* della data<sup>1)</sup>.

**305.** Dato un punto fisso  $O$  ed una curva  $\Gamma$ , si può dedurne un'altra curva  $\Delta$ , luogo dei punti equidistanti da  $O$  e  $\Gamma$  epperò chiamata *curva isotela*<sup>2)</sup>. Se  $N$  è un punto di  $\Delta$ , esso si troverà

<sup>1)</sup> R. RAIMONDI, *Sulle curve d'inversione* (G. di Matem., T. XXVI, 1888).

<sup>2)</sup> P. DE LEPINEY, *Sur les courbes isotèles* (Mathésis, III Ser., IX, 1909). Per alcuni casi particolari relativi all'ipotesi che la curva fissa sia di second'ordine vedi: V. RETALI, *Théorèmes* (Mathésis (3), VIII, 1908) e E. N. BARISIEN, *Sur les courbes lieu des points équidistants d'une conique et d'un point fixe* (Id., X, 1910).

sulla normale a  $\Gamma$  in un suo certo punto  $P$  e si avrà  $NP = NO$ . Dette quindi  $X, Y$  le coordinate di  $N$  e  $x, y$  quelle di  $P$  ed assunto  $O$  per origine delle coordinate sussisteranno le relazioni:

$$X - x + y'(Y - y) = 0, \quad (X - x)^2 + (Y - y)^2 = X^2 + Y^2$$

onde

$$X = \frac{x^2 y' - 2xy - y^2 y'}{2(xy' - y)}, \quad Y = \frac{x^2 + 2xy' - y^2}{2(xy' - y)},$$

ossia, se  $f(x, y) = 0$  è l'equazione di  $\Gamma$

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{(x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial x} + 2xy \frac{\partial f}{\partial y}}{2 \left[ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right]} \\ Y = \frac{(y^2 - x^2) \frac{\partial f}{\partial y} + 2xy \frac{\partial f}{\partial x}}{2 \left[ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right]} \end{array} \right.$$

L'equazione della curva isotela  $\Delta$  si otterrebbe eliminando  $x, y$  fra le tre ultime equazioni scritte. Imitando il procedimento tenuto in altre analoghe occasioni si può dimostrare che  $\Delta$  è in generale dell'ordine  $n(n+1)$  ed ha ogni punto  $r$ -plo di  $\Gamma$  la molteplicità  $r(r+1)$ . Si può anche dimostrare che la curva isotela d'una curva  $\Gamma$  rispetto ad un punto  $O$  è omotetica alla polare reciproca dell'inversa di  $\Gamma$  rispetto al polo  $O$ .

## CAPITOLO IX

### Curve isottiche e Curve ortottiche.

**306.** Sia data al solito una curva  $\Gamma$ ; se ne considerino due tangenti formanti un dato angolo  $\alpha$ ; sia  $A$  il loro punto d'incontro; il luogo del punto  $A$  si chiama *curva isottica* di  $\Gamma$ , e quando  $\alpha = \pi/2$  *curva ortottica*<sup>1)</sup>. Se per es.  $\Gamma$  è una conica a centro l'ortottica è una circonferenza, se essa è una parabola questa è una retta; le altre isottiche delle coniche sono invece quartiche a noi già note (v. Vol. I, p. 156).

È facile dimostrare che la tangente in un punto  $A$  della curva isottica di  $\Gamma$  tocca ivi il cerchio circoscritto al triangolo avente per vertici il punto  $A$  ed i punti di contatto di  $\Gamma$  con i lati della corrispondente posizione dell'angolo mobile<sup>2)</sup>.

Se si definisce la curva  $\Gamma$  mediante l'equazione magica della sua tangente

$$(1) \quad y \cos \tau - x \sin \tau - f(\tau) = 0,$$

è chiaro che la curva isottica sarà rappresentata dal sistema costituito dalla equazione (1) e dalla

$$(2) \quad y \cos(\tau + \alpha) - x \sin(\tau + \alpha) - f(\tau + \alpha) = 0;$$

<sup>1)</sup> Di tali curve si occupò JACOBI (v. L. KÖNIGSBERGER, *C. G. Jacobi*, Leipzig 1904, p. 113). I nomi di curva isottica ed ortottica vennero proposti da C. TAYLOR (*Note on a theory of orthoptic and isoptic loci*, Proc. R. S., London, T. XXXVII, 1884; Rep. Brit. As., 1885; Mess., T. XVI, 1886). Pel caso delle coniche il LAQUIÈRE adoperò, per ragioni facili a comprendersi, il nome di *curve parallattiche*, il quale potrebbe anche servire in generale (*Théorie géométrique des courbes anallagmatiques, sections planes de la cyclide*, Nouv. Corr. math., T. VI, 1880). O. ZIMMERMANN (*Ueber die Brennpunkte, die Leitlinien und die Orthogonale einer algebraischer Kurve beliebiger Klasse*, Journ. f. Math., T. CXXVI, 1903) usò il nome di « ortogonale » invece di quello di « curva ortottica ».

<sup>2)</sup> J. BERTRAND, *Calcul différentiel* (Paris, 1864), p. 13 e 84.

deducendone le seguenti

$$(3) \quad \begin{cases} x \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\tau + \alpha) f(\tau) - \operatorname{sen} \tau f(\tau + \alpha), \\ y \operatorname{sen} \alpha = \cos(\tau + \alpha) f(\tau) - \cos \tau f(\tau + \alpha), \end{cases}$$

si otterrà la rappresentazione parametrica della curva isottica. La determinazione delle isottiche (*problema diretto delle curve isottiche*) non esige quindi che operazioni algebriche. Più difficile è il *problema inverso delle curve isottiche*: rientra ad es. come caso speciale di esso la ricerca delle curve che dividono con le coniche la proprietà di avere per curve ortottiche delle circonferenze<sup>1)</sup>.

La considerazione delle curve di cui è parola risale al principio del secolo XVIII, giacchè de l'Hopital<sup>2)</sup> e poi de La Hire<sup>3)</sup> determinarono le curve isottiche delle coniche e della cicloide<sup>4)</sup> e poco dopo Clairant si occupava del problema inverso delle isottiche<sup>5)</sup> e Fontanes di quello diretto<sup>6)</sup>. Chasles, più tardi, scopri<sup>7)</sup> che l'isottica di una epicloide ordinaria è una epicloide allungata od accorciata, estendendo così notevolmente uno dei risultati di La Hire<sup>8)</sup>.

Alla ricerca della curvatura fu applicato il metodo degli assi mobili<sup>9)</sup>.

Se la curva  $\Gamma$  è algebrica, algebriche ne saranno tutte le isottiche, onde nasce il problema di determinare le caratteristiche

<sup>1)</sup> È la Question 1049 delle Nouv. Ann. proposta dal KIEPERT e risolta dal BOURGET (2<sup>a</sup> Serie, vol. XII, 1873, p. 328); cfr. le osservazioni del DOUCET (ivi, p. 571) ed inoltre Nouv. Ann., 2<sup>a</sup> Serie, T. XVIII, 1878, p. 144.

<sup>2)</sup> *Sections coniques* (Paris 1720), p. 266.

<sup>3)</sup> *Construction générale des lieux ou sont les sommets de tous les angles égaux, droits, aigus ou obtus qui sont formés par les touchantes des sections coniques* (Mém. de Paris, MDCCIV). L'isottica di una conica in una metrica proiettiva generale è il luogo dei punti da cui possono condursi a due coniche due coppie di tangenti formanti un dato birapporto; esso venne minutamente studiato dal CAYLEY, *On a locus derived from two conics* (Quart. Journ., T. VIII, 1867; The collect. Papers, T. VI, p. 27).

<sup>4)</sup> *Déscription d'un lieu géométrique, ou sont les sommets des angles égaux formés par deux touchantes d'une cycloïde* (Ivi).

<sup>5)</sup> *Solution de plusieurs problèmes ou il s'agit de trouver des courbes dont la propriété consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une équation donnée* (Mém. de Paris, MDCCXXIV).

<sup>6)</sup> Stesso volume.

<sup>7)</sup> *Aperçu historique* (2<sup>a</sup> ed., Paris 1875), p. 125, nota. Cfr. LOUCHER, *Sur le lieu des sommets des angles constants circonscrits ou normaux à une épicycloïde* (Nouv. Ann., 3<sup>a</sup> Serie, T. XI, 1892).

<sup>8)</sup> Il teorema di CHASLES ammette eccezioni, giacchè (v. Vol. I, p. 184) l'ortottica di una cardioide consta di un cerchio e di una lumaca di PASCAL; cfr. WOLSTENHOLME, Proc. London math. Soc., T. IV, 1873, p. 330 e 418 e O. GÜTSCHKE, Progr. Breslau, 1907, p. 11.

<sup>9)</sup> A. NARASINGA RAO, *The curvature of the orthoptic locus* (Journ. Ind. math. Soc., T. XV, 1923).

plückeriane di queste conoscendo quelle della prima; esso venne considerato da C. Taylor<sup>1)</sup>, e risolto completamente, applicando i metodi del Björling, da A. T. Liungh<sup>2)</sup>.

Il concetto di isottico si può generalizzare<sup>3)</sup>; si può considerare cioè il luogo del vertice d'un angolo di grandezza costante i cui lati toccano due date curve  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$ <sup>4)</sup>. Se queste sono algebriche, algebrico risulterà pure quel luogo<sup>5)</sup> e le sue caratteristiche si potranno ottenere applicando i risultati della ricerca delle caratteristiche plückeriane dell'isottica di una curva; considerando infatti  $\Gamma'$  e  $\Gamma''$  come parti di una curva  $\Gamma$ , l'isottica di  $\Gamma$  conterà dell'isottica di  $\Gamma'$ , dell'isottica di  $\Gamma''$  e dell'isottica mista delle curve  $\Gamma'$  e  $\Gamma''$ ; ora sapendosi determinare le caratteristiche tanto di  $\Gamma$  quanto di  $\Gamma'$  e  $\Gamma''$ , se ne dedurranno subito quelle dell'isottica mista. Se l'angolo costante è retto, la curva ottenuta è chiamata da alcuni *podaria di una delle due curve rispetto all'altra*<sup>6)</sup>. Se, di più, una delle curve date si riduce ad un punto si ricade nella podaria di questa rispetto all'altra: e così resta stabilita una relazione fra le curve ortottiche e le podarie. Detto  $P$  il punto dell'isottica delle due curve  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$  che corrisponde ai punti  $P'$  e  $P''$  di queste, la tangente in  $P$  al cerchio circoscritto al triangolo  $P P' P''$  è la tangente in  $P$  all'isottica considerata<sup>7)</sup>.

**307.** Il problema delle curve ortottiche di due curve (altrettanto potrebbe dirsi riguardo alle isottiche) si può invertire. Date cioè due curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  si può chiederne una terza  $\Gamma_2$  tale che  $\Gamma$  sia la ortottica di  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ;  $\Gamma_2$  è evidentemente l'involuppo del secondo lato di un angolo retto il cui primo lato tocca costantemente  $\Gamma_1$  ed il cui vertice percorre  $\Gamma$ ; la ricerca di  $\Gamma_2$  non offre quindi alcuna difficoltà teorica. Effettuiamola<sup>8)</sup> nel caso in cui  $\Gamma_1$  sia la logarit-

<sup>1)</sup> V. gli scritti citati nella nota (1) a pag. 377.

<sup>2)</sup> V. la Diss. *Ueber isoptische und orthoptische Kurven* (Lund 1895), ove i risultati generali, sono applicati ad alcune classi notevoli, come le parabole d'ordine superiore, le epicloidi, ecc. La stessa questione fu poi trattata da H. HILTON e R. E. COULOMB nella memoria *On orthoptic and isoptic Loci* (Amer. Journ. T. XXXIX, 1917).

<sup>3)</sup> H. G. L. SCHOTTEN, *Ueber Fusspunktskurven* (Progr., Hersfeld, 1887).

<sup>4)</sup> A siffatte curve si riferisce la Question 187 proposta da CHASLES nelle Nouv. Ann. e non ancora risolta.

<sup>5)</sup> P. es. se  $\Gamma'$  e  $\Gamma''$  sono due circonferenze, il luogo di cui trattasi consta di un gruppo di lumache di PASCAL: v. MANNHEIM, *Limagon de Pascal* (Nouv. Ann. de math., T. XV, 1856); il caso di due coniche porta a una curva di 8° ordine, che fu studiata dal PICARDAT nell'articolo *La courbe orthoptique de deux coniques* (Nouv. Ann. de Math., IV Ser., T. XVII, 1917).

<sup>6)</sup> HABICH, *Annali di Matem.*, 2<sup>a</sup> Serie, T. II, 1868-69, p. 141.

<sup>7)</sup> L. THEISINGER, *Untersuchungen über geometrischen Oerter* (Monatshefte Math. Phys., T. XXVII, 1916), memoria che contiene un'estesa trattazione dell'argomento con molteplici applicazioni.

<sup>8)</sup> Le proposizioni seguenti vennero comunicate per lettera all'autore dal sig. J. FINSTERBUSCH.

mica di equazione

$$\frac{y}{a} = \log \frac{x}{a}$$

e  $\Gamma$  sia l'asintoto  $x = 0$ . Essendo

$$Y + a - a \log \frac{x}{a} - \frac{a}{x} X = 0$$

l'equazione generale della tangente alla logaritmica, la curva cercata  $\Gamma_2$  è involupata dalle  $M'$  rette che, al variare di  $x$ , sono rappresentate dall'equazione

$$Y + a - a \log \frac{x}{a} + \frac{a}{a} X = 0.$$

Differenziando rispetto a  $x$  si ottiene

$$x = \frac{a^2}{X},$$

onde la precedente diviene

$$Y + 2a - a \log \frac{a}{X} = 0$$

ossia

$$-\frac{Y + 2a}{a} = \log \frac{X}{a};$$

quest'equazione della curva cercata prova che la stessa è una curva eguale alla data. Le due curve  $\Gamma_1$  (data) e  $\Gamma_2$  (trovata) si corrispondono punto a punto; la retta che congiunge due punti corrispondenti  $P_1$  e  $P_2$  involuppa una catenaria, quella, cioè, di equazione

$$X = \frac{a}{2} \left[ e^{\frac{y+a}{k}} + e^{-\frac{y+a}{k}} \right];$$

lo si dimostra con un semplice calcolo; non meno agevole è il dimostrare che questa curva è anche il luogo geometrico dei punti medi dei segmenti  $P_1 P_2$ .

## CAPITOLO X

### Curve differenziali e Curve integrali. Altre analoghe leggi di deduzione.

308. Data l'equazione

$$(1) \quad y = f(x)$$

di una curva in coordinate cartesiane si può, seguendo l'esempio del Kästner, considerare una nuova curva rappresentata dalla equazione

$$(2) \quad y = f'(x);$$

la si chiama *curva differenziale*<sup>1)</sup> o *curva di derivazione*<sup>2)</sup> della data. Operando sopra le (2) come si fece sulla (1) si otterrà una seconda curva differenziale, quindi una terza, e così via: quest'operazione in generale può proseguirsi indefinitamente; si arresterebbe soltanto quando  $f$  fosse un polinomio intero in  $x$ . Le proprietà delle curve derivate si deducono con tutta facilità di quelle della curva primitiva ricordando le relazioni che legano una funzione alla sua derivata: così, ai punti di culminazione della primitiva corrispondono le intersezioni della derivata con  $Ox$ , ai flessi di quella i punti di culminazione di questa, ecc.

La considerazione delle curve derivate presenta un certo interesse quando  $f(x)$  è una funzione trascendente a derivata algebrica, perchè così si arriva a connettere a una curva trascendente una nuova curva algebrica. Ciò accade in particolare per la cicloide. Infatti, se questa ha per equazione (v. p. 80)

$$y = a \arccos \frac{x-a}{a} + \sqrt{2ax - x^2}$$

<sup>1)</sup> M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, T. III (Leipzig 1899), p. 563.

<sup>2)</sup> E. REHFELD, *Die Derivationscurve der Cycloide* (Diss. Marburg, 1884).

la sua curva derivata sarà

$$y = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

ossia

$$(3) \quad xy^2 - 2ay^2 + x = 0$$

o se si vuole

$$(3') \quad (x - 2a)y^2 + x = 0.$$

È quindi una cubica simmetrica rispetto all'asse delle  $x$  e tutta compresa entro la striscia di piano limitata dalle rette  $x = 0, x = 2a$ ; quest'ultima retta è un asintoto d'inflexione; gli altri due flessi reali sono i punti di coordinate

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

onde la curva ha la forma di un serpentino. La sua Hessiana ha per equazione

$$xy^2 + 4ay^2 + x - 2a = 0;$$

ora se si pone  $2a - x = \xi$  questa diviene

$$(\xi - 6a)y^2 + \xi = 0,$$

che differisce dalla (3') pel solo scambio di  $x$  in  $\xi$  e di  $a$  in  $3a$ . Dunque l'Hessiana della cubica derivata dalla cicloide è una curva ad essa simile: è questa la prerogativa più saliente che essa possiede.

J. Soboska<sup>1)</sup> ha considerate anche curve differenziali in coordinate polari. Se  $\varrho = f(\omega)$  è l'equazione di una curva,  $\varrho' = f'(\omega)$  sarà quella della corrispondente curva differenziale; ora se  $\varrho'$  si immagina portato dal polo in direzione perpendicolare a quella in cui si trova  $\varrho$ , il suo estremo è notoriamente l'estremo della corrispondente sunnormale polare. Si è così condotti a considerare il luogo geometrico  $\Gamma'$  degli estremi delle sunnormali polari di una curva  $\Gamma$ <sup>2)</sup>. La corrispondenza fra i punti  $P(\varrho, \omega)$  di questa ed i punti  $P'(\varrho', \omega')$  di quelle è determinata dalle formole

<sup>1)</sup> Vedi il paragr. II del *Beitrag zur infinitesimalen Geometrie der Integralcurven* (Wiener Ber., 107, 1898).

<sup>2)</sup> Cfr. SCHLÖMILCH, *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, I Bd. (5. Aufl., 1904), p. 139.

$$(1) \quad \varrho' = \frac{d\varrho}{d\omega}, \quad \omega' = \omega + \frac{\pi}{2}$$

Se  $\Gamma$  è una curva algebrica, algebrica sarà pure  $\Gamma'$  e si può cercare quale relazione sussista fra gli ordini delle due curve  $\Gamma$  e  $\Gamma'$ . Si supponga per ciò che di  $\Gamma$  sia data l'equazione in coordinate cartesiane ortogonali

$$(2) \quad f(x, y) = 0$$

e si osservi che per ottenere il punto  $P'(x', y')$  di  $\Gamma'$  corrispondente al punto  $P(x, y)$  basta trovare l'intersezione della tangente a  $\Gamma$  nel punto  $P$  con la perpendicolare condotta da  $O$  a  $OP$ . Ora (indicando con  $X, Y$  coordinate correnti) queste due rette sono rappresentate risp. dalle equazioni

$$X \frac{\partial f}{\partial y} - Y \frac{\partial f}{\partial x} = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Xx + Yy = 0;$$

per ciò si ha:

$$(3) \quad x' = y \frac{x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}}{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}, \quad y' = -x \frac{x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}}{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}$$

E queste formole, per ogni coppia di valori di  $x, y$  soddisfacenti la (1), danno le coordinate  $x', y'$  del punto corrispondente. Per trovare l'ordine di  $\Gamma'$  cerchiamo quanti suoi punti si trovino sopra una retta arbitraria  $r$  del piano

$$Ax + By + C = 0.$$

Dovrà essere

$$Ax' + By' + C = 0$$

ossia per le (3)

$$(Ay - Bx) \left[ x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right] + C \left[ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right] = 0$$

Ora quest'equazione rappresenti in generale una curva dell'ordine  $n + 1$ , la quale taglia la curva data (2) nei punti  $P$  i cui corrispondenti  $P'$  cadono sopra  $r$ . Dunque: Per una curva algebrica d'ordine  $n$ , il luogo degli estremi delle sunnormali polari è in generale

dell'ordine  $n(n+1)$ <sup>1)</sup>. È facile dimostrare che ogni punto  $p$ -plo di  $\Gamma$  abbassa in generale questo ordine di  $p(p-1)$  unità<sup>2)</sup> (onde p. es. per una curva razionale d'ordine  $n$ , esso riducesi semplicemente

$$n(n+1) - (n-1)(n-2) = 2(2n-1);$$

se però il polo è un punto  $p$ -plo l'abbassamento è di  $p^2$  unità.

L'analogia ha condotto anche a considerare il luogo  $\Gamma_1$  degli estremi delle sottangenti polari di una curva  $\Gamma^3$ ). Se  $P(\varrho, \omega)$  e  $P_1(\varrho_1, \omega_1)$  sono due punti corrispondenti delle due curve si ha:

$$(4) \quad \varrho_1 = \varrho^2 : \frac{d\varrho}{d\omega}, \quad \omega_1 = \omega + \frac{\pi}{2}$$

relazioni che permettono di trovare l'equazione polare di  $\Gamma_1$  quando si conosce quella di  $\Gamma$ . Se di  $\Gamma$  fosse invece data l'equazione in coordinate cartesiane ortogonali, p. es. la (2), per trovare quella di  $\Gamma_1$  si dovrebbero applicare le formole seguenti:

$$(5) \quad x_1 = -y \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}}, \quad y_1 = x \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}},$$

le quali si ottengono con un calcolo del tutto analogo a quello che guidò alle formole (3). Dalle (5) si deduce, con un ragionamento simile a quello esposto per ottenere l'ordine del luogo degli estremi delle sunnormali polari, che: *Per una curva algebrica d'ordine  $n$ , il luogo degli estremi delle sottangenti polari è in generale dell'ordine  $n(n+1)$ ; ogni punto  $p$ -plo della curva considerata abbassa in generale quest'ordine di  $p(p-1)$  unità (onde ad es. per una curva razionale diviene  $2(2n-1)$ ), ma se quel punto cade nel polo l'abbassamento sale a  $p^2$  unità<sup>4)</sup>.*

<sup>1)</sup> P. es. per una conica è una curva del 6° ordine: cfr. SCHLÖMILCH, loc. cit., p. 141.

<sup>2)</sup> Per verifica si consideri una curva  $\Gamma$  d'ordine  $n$  composta di due  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  degli ordini  $n_1$  e  $n_2$ . Il luogo degli estremi delle sunnormali polari di  $\Gamma$  risulterà dai due analoghi relativi a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  onde sarà dell'ordine  $n_1(n_1+1) + n_2(n_2+1)$ . Ma l'ordine di questo luogo può ottenersi anche applicando la proposizione ora stabilita, ed è quindi dato da

$$(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1) - 2n_1n_2 = n_1(n_1 + 1) + n_2(n_2 + 1),$$

come prima si è trovato.

<sup>3)</sup> SCHLÖMILCH, Vol. cit., p. 139.

<sup>4)</sup> Per il concetto e le proprietà delle curve integrali inverse e delle curve

**309.** Dalla stessa curva rappresentata dall'equazione (1) se ne possono dedurre infinite altre con un procedimento opposto a quello testè impiegato, deducendone cioè l'equazione

$$(4) \quad y = \int_0^x f(x) dx + c$$

ove  $c$  è una costante arbitraria; al variare di  $c$  le curve rappresentate di quest'equazione si ottengono le une dalle altre per semplice traslazione nella direzione  $Oy$ ; onde basta considerarne una, per es. quella (passante per l'origine) corrispondente all'ipotesi  $c = 0$ . Le nuove curve si chiamano *curve integrali* e presentano qualche interesse per le applicazioni che ricevono nella pratica<sup>1)</sup>. Le loro principali proprietà esprimono geometricamente la dipendenza esistente fra una funzione ed i suoi integrali; così si vede che alle intersezioni della curva data con l'asse delle  $x$  corrispondono i punti di culminazione della curva integrale, mentre ai punti di culminazione della prima corrispondono i flessi della seconda, ecc. Non proseguiremo in questa serie di enunciati e piuttosto stabiliremo un teorema di M. d'Ocagne che insegna a costruire il centro di curvatura di una qualunque curva integrale<sup>2)</sup>. Eccone anzitutto l'enunciato: *Se  $R$  è il raggio di curvatura della curva integrale,  $\sigma$  la sottangente della curva data e  $\theta$  l'angolo della tangente alla curva integrale con l'asse delle  $x$  si ha*

$$(5) \quad \sigma = R \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta.$$

Siano infatti (fig. 45)  $M$  e  $M_1$  due punti corrispondenti della curva data e dell'integrale;  $P$  l'intersezione di  $Ox$  con l'ordinata  $MM_1$  e  $MT$  la tangente in  $M$  alla data curva. Si avrà

$$\frac{PT}{MT} = \sigma = y \frac{dx}{dy}.$$

Ma posto  $M_1P = Y$  si ha  $\frac{dY}{dx} = \operatorname{tg} \theta$ , onde  $\operatorname{tg} \theta = y$  epperò

*integrali rispetto a una data* rimandiamo il lettore al succitato (p. 382) lavoro del SOBOTKA. Senza riferimento a lavori precedenti, le curve luoghi delle estremità della sottotangente e della sottonormale polari sono studiate nell'articolo di E. N. BARISIEN, *Sur les courbes tangentielles et normaliennes* (Mathesis, T. XXXVII, 1923).

<sup>1)</sup> ABDANK-ABAKANOWICZ, *Die Integrativen. Die Integralkurve und ihre Anwendungen, deutsch bearbeitet* von E. BITTERLI (Leipzig 1889).

<sup>2)</sup> Cfr. ABDANK-ABAKANOWICZ, op. cit., p. 160-161; J. MASSAU, *Cours de mécanique de l'Univ. de Gand*, 1891, p. 400.

$$\sigma = \operatorname{tg} \theta \frac{dx}{dy}.$$

Ora se  $dS$  è il differenziale dell'arco della curva integrale si ha notoriamente

$$R = \frac{dS}{d\theta};$$

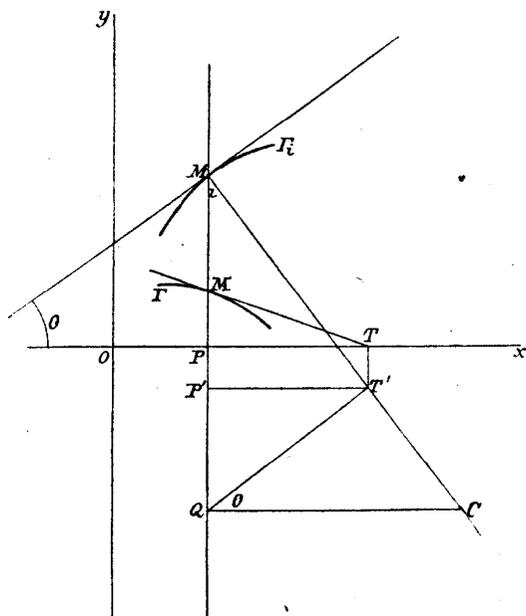


Fig. 45.

ma

$$dS = \frac{dx}{\cos \theta}, \operatorname{tg} \theta = y, \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = dy$$

dunque

$$R = \frac{dx}{\cos \theta} : dy \cos^2 \theta = \frac{dx}{dy} \frac{1}{\cos^3 \theta}.$$

Eliminando  $dx/dy$  fra le due equazioni trovate per esprimere  $\sigma$  e  $R$  si trova appunto la (5). Se ne deduce la costruzione del centro di curvatura  $C$ : la normale in  $M$  alla curva integrale incontra in  $T'$

l'ordinata del punto  $T$ ; la perpendicolare condotta da  $T'$  alla normale segna in  $Q$  l'ordinata del punto  $M$ ; la parallela condotta da  $Q$  all'asse delle  $x$  taglierà la normale nel cercato punto  $C$ . Lasciamo al lettore di provarlo coll'aiuto della (5).

La costruzione di d'Ocagne potrebbe derivarsi anche da una proprietà delle curve integrali che J. Sobotka dimostrò geometricamente<sup>1)</sup> ed a cui si giunge, non meno brevemente, col seguente calcolo.

Supponiamo che la curva  $\Gamma$  di equazione  $y = f(x)$  passi per il punto  $P(a, b)$ ; la corrispondente tangente  $t$  ha per equazione

$$\eta = f(a) + (x - a) f'(a),$$

$x, \eta$  essendo le coordinate correnti sulla tangente stessa. Supponiamo che la curva  $\Gamma$  integrale di  $\Gamma$  passi per il punto  $P(A, B)$ ; la sua equazione sarà

$$(\alpha) \quad Y - B = \int_A^x f(x) dx;$$

costruiamo ora la curva integrale  $T$  di  $t$  con la condizione che essa pure passi per  $P$ ; la sua equazione sarà:

$$H - B = \int_A^x [f(x) + (x - a) f'(a)] dx$$

cioè

$$(\beta) \quad H - B = (x - A) f(a) + \frac{(x - A)^2}{2} f'(a);$$

$T$  è quindi una parabola.

Ora dalle (α) (β) si trae subito che nel punto  $P$  si ha  $Y = H$ ,  $Y' = H'$ ,  $Y'' = H''$ , equazioni le quali provano che le curve  $\Gamma$  e  $T$  non soltanto si toccano nel punto comune  $A$ , ma hanno ivi un contatto di second'ordine. Ciò dimostra che: *Alla tangente  $t$  della curva  $\Gamma$  in un suo punto  $P$  corrisponde come curva integrale una parabola che oscula la curva integrale di  $\Gamma$  nel punto che corrisponde a  $P$ .*

**310.** Presentano una certa analogia con le curve differenziali certe linee che si deducono dalla curva  $y = f(x)$  ponendo  $y$  eguale ad una funzione di  $f'(x)$ <sup>2)</sup>. Faremo cenno delle principali, nonché di alcune nuove curve che vennero ottenute con questo procedimento.

<sup>1)</sup> V. il paragr. I del già citato *Beitrag zur Infinitesimalgeometrie der Integralcurven* (Wiener Ber., 107, 1898).

<sup>2)</sup> Più elementare, ma meno fecondo ed importante è il procedimento che consiste nel dedurre dalla curva di equazione  $y = f(x)$  quella di equa-

I. Oltre alla curva  $\Gamma$  di equazione  $y = f(x)$  si consideri in un piano un punto qualunque fisso  $K$  (che supporremo posto su  $Ox$  e di ascissa  $-k$ ), ed una retta arbitraria  $r$ , che per comodità supporremo coincidere con l'asse delle  $x$ . Si conduce in un punto qualunque  $P$  della curva  $\Gamma$  la tangente a questa curva, da  $K$  la parallela ad essa finchè incontri la retta  $r$  nel punto  $Q$ ; la perpendicolare condotta nel punto  $Q$  alla retta  $r$  taglia in  $P'$  l'ordinata del punto  $P$ . Variando  $P$  su  $\Gamma$ ,  $P'$  descriverà una nuova curva  $\Gamma'$  chiamata da A. Hochheim *curva differenziale* della  $\Gamma^1$ ). Per trovarne l'equazione basta notare che, l'equazione della tangente nel punto  $P(x, y)$  essendo

$$Y = f'(x)(X - x),$$

la parallela condotta ad essa dal punto  $K$  ha per equazione

$$Y = f'(x)(X + k);$$

per conseguenza se si fa  $X = 0$  si ottiene, come valore dell'ordinata comune dei punti  $Q$  e  $P'$   $k f'(x)$ . Ciò dimostra che la curva  $\Gamma'$  ha per equazione

$$(6) \quad y_1 = k f'(x);$$

$\Gamma'$  è pertanto una curva affine alla curva differenziale di  $\Gamma$  secondo il concetto del Kästner. Ripetendo su  $\Gamma'$  la operazione eseguita su  $\Gamma$  e così proseguendo, dopo  $r$  operazioni si otterrà la curva rap-

zione  $y = F(f(x))$ ,  $F$  essendo una nuova funzione data. Per esempio si può dedurre

$$y_1 = \frac{1}{f(x)};$$

un breve calcolo mostra che le sottangenti delle due curve in due punti relativi alla stessa ordinata sono eguali e di segni contrari (W. RULF, *Ueber eine allgemeine Eigenschaft der Curve der reciproke Ordinaten*, Archiv, 2<sup>a</sup> Ser., T. XIII, 1894). Similmente si può dedurre la curva

$$y_1 = f(x)^2;$$

la sottangente in un punto qualunque della nuova curva è la metà della sottangente nel punto corrispondente della data (W. RULF, *Bemerkung zu der aus einer Curve abgeleiteten Curven*, Id.). Nel caso generale, dette  $S$  e  $S_1$  le lunghezze delle sottangenti alle due curve  $y = f(x)$  e  $y = F(f(x))$  in due punti corrispondenti si ha:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{F(f)}{f \cdot F'(f)}.$$

<sup>1)</sup> Ueber die Differentialcurve der Kegelschnitte (Halle, 1874).

presentata dall'equazione:

$$(7) \quad y_r = k^r f^{(r)}(x);$$

è, secondo Hochheim, l' $r$ -ma curva differenziale di  $\Gamma$ .

Se  $\Gamma$  fosse data da un'equazione non risolubile rispetto a  $y$ ,

$$F(x, y) = 0$$

l'equazione della curva differenziale nascerebbe eliminando  $y$  fra questa equazione e la seguente:

$$\frac{\partial F}{\partial y} y_1 + k \frac{\partial F}{\partial x} = 0;$$

se, quindi,  $F$  è una funzione algebrica di grado  $n$  in  $x, y$  la curva derivata è in generale dell'ordine  $2n(n-1)$ . Essa è poi dello stesso genere di  $\Gamma'$ .

Qualunque sia la natura della funzione  $f$  si ha:

$$\int_{x=\alpha}^{x=\beta} y_1 dx = \int_{x=\alpha}^{x=\beta} k f'(x) dx = k \{f(\beta) - f(\alpha)\},$$

onde la curva derivata è sempre quadrabile.

Si supponga, come primo esempio, che  $\Gamma$  sia la parabola

$$y^2 = 2px;$$

l'equazione di  $\Gamma'$  sarà allora

$$y_1 = k \sqrt{\frac{p}{2x}} \quad \text{ossia} \quad 2xy_1^2 = k^2 p.$$

Se ne deduce che  $\Gamma'$  è una cubica simmetrica rispetto a  $Ox$  e posta tutta dalla parte delle  $x$  positive; il punto all'infinito di  $Ox$  è una cuspidè della curva, mentre il punto all'infinito di  $Oy$  è un flesso; l'equazione tangenziale della curva è

$$u^2 v^2 + \frac{8}{27 k^2 p} = 0,$$

il che conferma essere la curva di terza classe.

Se, per fare un'altro esempio, si considera l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ossia} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$\Gamma''$  avrà per equazione

$$y_1 = \pm \frac{k b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

ossia

$$a^2 x^2 y_1^2 - k^2 b^2 x^2 - a^4 y_1^2 = 0$$

epperò (Vol. I, p. 267) sarà una Kohlenspitzkurve. Cambiando il segno di  $b^2$  si vedrà che la curva derivata dell'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ha per equazione

$$a^2 x^2 y_1^2 + k^2 b^2 x^2 - a^4 y_1^2 = 0,$$

onde è una Krenzkurve (Vol. I, p. 268).

**311. II.** I dati essendo gli stessi che nel caso I, si esegua sulla curva  $\Gamma$  la stessa costruzione, solo surrogando la tangente nel punto  $P$  con la relativa normale e supponendo  $(k, 0)$  le coordinate del punto fisso. Con un calcolo analogo a quello eseguito in principio del numero precedente si dimostra che, se il punto  $P$  descrive la curva  $y = f(x)$ ,  $P'$  genererà la curva  $\Gamma''$  di equazione

$$(8) \quad y_1 = \frac{k}{f'(x)}$$

che dicesi<sup>1)</sup> (prima) curva derivata rispetto a  $\Gamma$ ; i suoi punti all'in-

<sup>1)</sup> C. VÖLKER, *Ueber die Relation zwischen einer gegebenen Curve  $y = f(x)$  und eine daraus abgeleiteten Curven  $y = k \frac{dx}{dy} = k/f'(x)$ , mit specieller Anwendung auf die Ellipse* (Diss. Marburg, 1880). Cfr. anche M. AZZARELLI, *Alcuni luoghi geometrici* (Atti dell'Accad. dei Nuovi Lincei, T. XLVI, 1893). Il VÖLKER ha anche studiata (v. la memoria intitolata I. *Die derivierte Kurve des Hyperbel*, II. *Die Lemniskate II Art*, Progr. Berlin, 1884) la curva nascente dall'iperbole mediante la relazione  $y = k/f'(x)$ ; il nome di *lemniscata di seconda specie* fu da lui dato alla curva che nasce come segue: Si consideri la curva  $y = ka/bx \sqrt{a^2 - x^2}$  dedotta dall'ellisse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  e si elimini da essa  $k$  mediante differenziazione; si otterrà la seguente equazione differenziale

$$a^2 y dx + x(a^2 - x^2) dy = 0;$$

le  $\infty'$  traiettorie ortogonali delle corrispondenti linee integrali nascono integrando l'equazione

$$a^2 y \cdot dy - x(a^2 - x^2) dx = 0.$$

finito corrispondono ai punti di culminazione di  $\Gamma$ . Operando similmente sopra  $\Gamma'$  si otterrà la seconda curva derivata; la sua equazione è

$$(9) \quad y_2 = \frac{k}{\frac{d}{dx} \left[ \frac{k}{f'(x)} \right]} = - \frac{f''(x)}{f''(x)},$$

onde  $\Gamma''$  è indipendente da  $k$ ; i suoi punti all'infinito corrispondono ai flessi di  $\Gamma$ . Similmente si potrà considerare una terza curva derivata e così via.

Se  $\Gamma$  fosse determinata da un'equazione della forma

$$F(x, y) = 0$$

l'equazione di  $\Gamma'$  si otterrebbe eliminando  $y$  fra questa equazione e la seguente:

$$y_1 \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

perciò, se  $\Gamma$  è dell'ordine  $n$ ,  $\Gamma'$  sarà dell'ordine  $2n(n-1)$ ; esse poi sono dello stesso genere.

Emerge dalla (8) che affinché  $\Gamma'$  coincida con  $\Gamma$  è necessario e sufficiente che si abbia

$$y = k \frac{dx}{dy}$$

ossia

$$(10) \quad y^2 = 2kx + l;$$

al variare della costante arbitraria  $l$  quest'equazione rappresenterà  $\infty'$  parabole autocorrispondenti. Similmente dalla (9) si desume che  $\Gamma''$  coincide con  $\Gamma$  quando  $y$  soddisfi all'equazione differenziale:

$$-\frac{y'^2}{y''} = y \quad \text{ossia} \quad \frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} = 0.$$

Integrando con la condizione che per  $x=0$  si abbia  $y=0$  si ottiene

$$y = \frac{x \sqrt{2a^2 - x^2}}{a \sqrt{2}}$$

e questa rappresenta una lemniscata di seconda specie.

Eseguendo una prima integrazione se ne trae

$$y y' = a,$$

$a$  essendo una costante: integrando nuovamente se ne deduce

$$(11) \quad y^2 = 2ax + b,$$

equazione rappresentatrice di  $\infty^2$  parabole, ognuna delle quali coincide con la propria seconda derivata. È chiaro che in questa nuova serie di parabole non differisce da quella rappresentata dall'equazione (10).

A due notevoli curve del quarto e del sesto ordine giungesi applicando la legge di derivazione ora definita ad una conica  $\Gamma$  a centro. Sia infatti  $\Gamma$  rappresentata dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ossia} \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

$\Gamma'$  avrà per equazione

$$y = \mp \frac{ak \sqrt{a^2 - x^2}}{bx}$$

ossia

$$(12) \quad b^2 x^2 y^2 + k^2 a^2 x^2 - k^2 a^4 = 0.$$

Essa è quindi una curva razionale di quart'ordine simmetrica (fig. 46) rispetto agli assi coordinati, passante per gli estremi dell'asse focale dell'ellisse data, avente all'infinito di  $Ox$  un punto isolato ed all'infinito di  $Oy$  un punto di contatto di due rami con quell'asse per relativa tangente. La curva non possiede altri punti multipli, ma ne sono flessi i quattro punti di coordinate:

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \pm \frac{ka\sqrt{2}}{b}.$$

La seconda curva derivata ha invece per equazione

$$y = \pm \frac{bx^2 \sqrt{a^2 - x^2}}{a^3}$$

ossia

$$(13) \quad a^6 y^2 + b^2 x^6 - a^2 b^2 x^4 = 0;$$

è una curva razionale del sesto ordine (fig. 47), passante per gli estremi dell'asse focale della data ellisse ed avente nel centro un punto di contatto di due rami con quell'asse per relativo tangente; ne sono punti di culminazione quelli aventi per coordinate

$$x = \pm a \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad y = \pm \frac{2b}{3\sqrt{3}};$$

è tutta interna alla data ellisse, non ha punti reali all'infinito tranne il punto all'infinito di  $Oy$ , che è isolato; ecc.

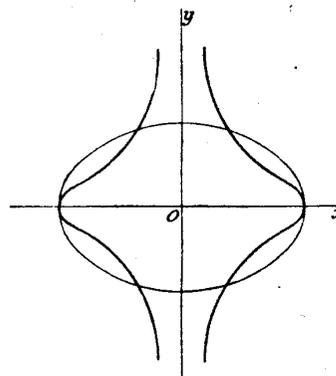


Fig. 46.

Prima curva derivata dell'ellisse.

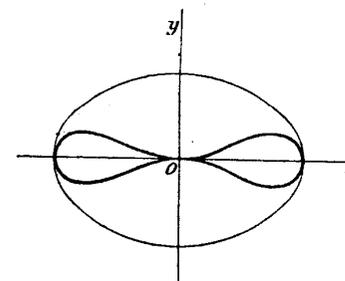


Fig. 47.

Seconda curva derivata dell'ellisse.

**312. III.** Supposto sempre di avere la curva  $\Gamma$  determinata dall'equazione  $y = f(x)$ , di un punto qualunque  $P$  si consideri la ordinata; questa è incontrata risp. in  $P_1$  e  $P_2$  dalle parallele condotte dall'origine risp. alla tangente e la normale in  $P$  a  $\Gamma$ ; al variare di  $P$ ,  $P_1$  e  $P_2$  descriveranno due curve  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  dette la prima curva tangenziale e la seconda curva normale di  $\Gamma$ <sup>1)</sup>. Un breve calcolo mostra che queste due curve hanno risp. per equazioni

$$(14) \quad y_1 = x f'(x), \quad y_2 = -\frac{x}{f'(x)}$$

Applicando queste equazioni, invece che alla curva  $\Gamma$  a quella  $\bar{\Gamma}$

<sup>1)</sup> L. HENKEL, Ueber die aus einer Curve  $y=f(x)$  abgeleiteten Curve  $y_1 = x \, dy/dx = x f'(x)$  (Tangentencurve) und  $y_2 = -x \, dx/dy = -x f'(x)$  (Normalcurve) mit speziellen Anwendung auf die Parabel (Diss. Marburg, 1882).

rappresentata dall'equazione

$$(15) \quad y = - \int \frac{dx}{f'(x)}$$

si vede facilmente che la curva tangenziale della (1) coincide con la curva normale della (15), e viceversa; per ciò le due curve anzidette si chiamano *coniugate*. Notiamo inoltre che integrando per parti si ha

$$\int y_1 dx = \int x f'(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx = x f(x) - \int y dx$$

onde

$$(16) \quad \int_a^b y_1 dx + \int_a^b y dx = b f(b) - a f(a);$$

ciò prova che, se si sa quadrare la curva  $\Gamma$ , si potrà quadrare anche  $\Gamma_1$  e viceversa.

Applicheremo queste due leggi di derivazione alla parabola rappresentata dall'equazione

$$(17) \quad y^2 = 2p(x-a),$$

ove supporremo al solito  $p > 0$ ; osserviamo subito che essa ha per curva coniugata la parabola semicubica di equazione

$$9py^2 = 8(x-a)^3.$$

Servendoci della procedura che guida alla curva tangenziale otterremo anzitutto dalla (17) la curva

$$(18) \quad y_1 = \frac{px}{\sqrt{2p(x-a)}}$$

ossia

$$y_1^2(x-a) = p/2 x^2.$$

La cubica così rappresentata è simmetrica rispetto a  $Ox$ ; l'origine è un punto doppio e precisamente un nodo od un punto isolato secondoche  $\alpha \leq 0$  (v. figg. 48 e 49); i punti reali della curva si ottengono per  $x > \alpha$ . Quando  $\alpha > 0$  i punti di ascisse  $2\alpha$  sono di culminazione (cioè con le tangenti parallele a  $Ox$ ) mentre quelli di ascisse  $4\alpha$  ne sono flessi. In ogni caso la retta  $x = \alpha$  è un asintoto d'inflessione della curva. Nel caso sinora escluso  $\alpha = 0$ , la (18) si decompone nelle due  $x = 0$ ,  $y_1 = \frac{1}{2}y$ , cioè nell'asse delle  $y$  e nella parabola le cui ordinate sono la metà di quelle della data. Appli-

cando la relazione (16) si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_x^b y_1 dx &= b \sqrt{2p(b-a)} - a \sqrt{2p(a-a)} - \int_x^b \sqrt{2p(x-a)} dx = \\ &= \sqrt{2p(b-a)} \frac{b+2a}{3} - \sqrt{2p(a-a)} \frac{a+2a}{3}; \end{aligned}$$

quindi se  $\alpha < 0$  si ha in particolare

$$\int_a^0 y_1 dx = \sqrt{-2p\alpha} \frac{2\alpha}{3},$$

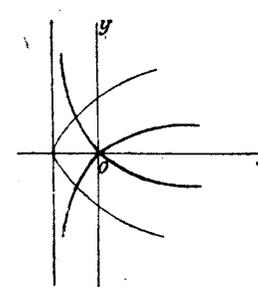


Fig. 48.  
Curva tangenziale della parabola  
con punto doppio.

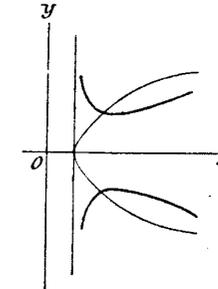


Fig. 49.  
Curva tangenziale della parabola  
con punto isolato.

notevole espressione per l'area compresa tra la curva ed il suo asintoto.

Cercando invece la curva normale della stessa parabola (17) si ottiene la cubica

$$y_2 = x \sqrt{\frac{2(x-a)}{p}} \quad \text{ossia} \quad \frac{p}{2} y^2 + \alpha x^2 - x^3 = 0.$$

Essa pure è una curva simmetrica rispetto all'asse delle  $x$  (fig. 50 e 51); i suoi punti reali si ottengono per  $x > \alpha$ . Nell'origine la curva ha un nodo, una cuspidè od un punto isolato secondoche  $\alpha \leq 0$ ; nel caso intermedio la curva ottenuta altro non è che una parabola semicubica. Se  $\alpha > 0$ , i due punti di ascissa  $2\alpha/3$  sono di culminazione, mentre se  $\alpha < 0$  i due punti di ascissa  $4\alpha/3$  sono punti d'inflessione; in ogni caso il punto all'infinito di  $Oy$  è un flesso, con la retta all'infinito come corrispondente tangente.

**313. IV.** La trasformazione con cui si passa da una curva alla sua curva tangenziale venne recentemente ritrovata da H. Brocard <sup>1)</sup>, che la chiamò *trasformazione pseudo-newtoniana*: applicandola a certe curve trascendenti speciali egli ne dedusse delle curve algebriche, riuscendo così a stabilire dei nuovi legami fra le due grandi categorie in cui si ripartiscono tutte le curve piane; applicandola invece a curve algebriche si ottengono altre curve congeneri aventi con quelle delle relazioni che si trovano esposte in uno speciale lavoro di V. Retali <sup>2)</sup>.

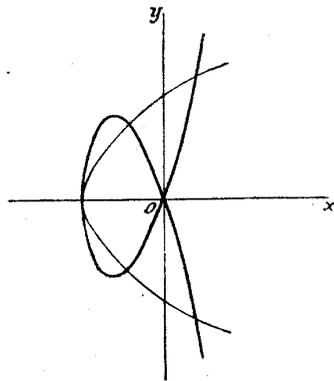


Fig. 50.  
Curva normale della parabola  
con punto doppio.

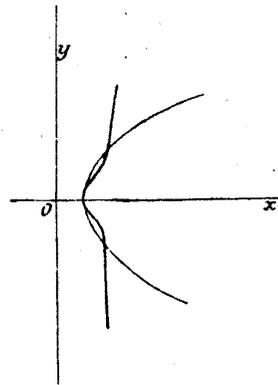


Fig. 51.  
Curva normale della parabola  
con punto isolato.

Ma il Brocard ha immaginato un secondo metodo per dedurre da una curva altre curve e lo ha chiamato *trasformazione robervaliana*; ecco in che consiste: Data al solito la curva  $\Gamma$  rappresentata dall'equazione (1) ed una retta  $r$  qualunque (si può supporla passante per l'origine)

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b},$$

si consideri la tangente in un punto qualunque  $P$  di  $\Gamma$  e se ne determini la intersezione con  $r$ ; la parallela condotta da  $P$  a  $Oy$  tagli in  $P'$  la parallela condotta da  $M$  a  $Ox$ ; il luogo di  $P'$  è la Rober-

<sup>1)</sup> Sur une transformation géométrique (transformation-pseudo-newtonienne) (Belgique Mem., T. LIX, 1899).

<sup>2)</sup> Sur une transformation géométrique (Mém. de la Soc. de Liège, 3<sup>a</sup> S., T. II, 1900).

valliana di  $\Gamma$ . Dette  $X$  e  $Y$  le coordinate correnti, essendo

$$\frac{Y - f(x)}{X - x} = f'(x)$$

l'equazione della tangente in  $P(x, y)$  alla curva  $\Gamma$ , l'ordinata del punto  $M$  in cui questa taglia  $r$  è data da

$$(19) \quad Y = b \frac{x f'(x) - f(x)}{a f'(x) - b}$$

ed è anche l'ordinata di  $P'$ ; l'ascissa di questo è eguale all'ascissa  $x$  di  $P$ , quindi la (19) è l'equazione della curva robervaliana.

La trasformazione robervaliana come la pseudo-newtoniana sono casi speciali di una trasformazione multipla che venne studiata da V. Retali <sup>1)</sup>.

**314. V.** Sopra la tangente in un punto qualunque  $P$  della curva  $\Gamma$  rappresentata in coordinate cartesiane ortogonali dalla equazione  $y = f(x)$ , si segna un punto  $P'$  tale che la striscia di piano limitato dalle ordinate dei punti  $P, P'$  abbia una data larghezza e che inoltre  $PP'$  segni la direzione positiva della tangente. Il luogo del punto  $P'$  è una nuova curva che fu detta essa pure *curva tangenziale* <sup>2)</sup> di  $\Gamma$ . È chiaro che l'equazione di  $\Gamma'$  si otterrà eliminando  $x, y$  fra le tre equazioni

$$x - x' = k, \quad y - y' = (x - x') \frac{dy}{dx}, \quad y = f(x)$$

onde è

$$y' = f(x' + k) - k f'(x' + k) \text{ } ^3).$$

Come curva  $\Gamma$  si assuma la parabola

$$y^2 = p(x - k);$$

$\Gamma'$  avrà allora per equazione

<sup>1)</sup> Sopra una corrispondenza  $(m, n)$  (Rend. dell'Ist. Lombardo, 2<sup>a</sup> S., T. XXXII, 1899).

<sup>2)</sup> HOCHHEIM, *Tangentialcurves der Kegelschnitte* (Zeitschrift, T. XV, 1870). V. anche il già citato (p. 388) opuscolo *Ueber die Differentialcurven der Kegelschnitten*, p. 100 e seg.

<sup>3)</sup> Un'analoga costruzione sulle normali conduce alla curva di equazione

$$y = f(x' + k) + \frac{k}{f'(x' + k)}.$$

$$y' = \frac{\sqrt{p(2x' - k)}}{2\sqrt{x'}}$$

ossia

$$4x'y'^2 = p(2x' - k)^2;$$

la tangenziale di una parabola è pertanto (fig. 52) una cubica simmetrica rispetto all'asse di quella, avente per punto doppio il punto  $(k/2, 0)$ ; il punto all'infinito di  $Oy$  è un flesso con quest'asse per corrispondente tangente; nel punto all'infinito di  $Ox$  la curva è toccata dalla retta all'infinito; ecc.

Applicando la stessa legge di derivazione all'ellisse rappresentata dall'equazione

$$\frac{(x - k - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ossia

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{2a(x - k) - (x - k)^2}$$

si ottiene l'equazione

$$y' = \frac{b}{a} \frac{2ax' - x'^2 - k(a - x')}{\sqrt{2ax' - x'^2}};$$

la curva tangenziale dell'ellisse considerata è pertanto una quartica simmetrica rispetto all'asse delle ascisse (fig. 53) tutta compresa entro la striscia limitata dalle rette  $x' = 0$  e  $x' = 2a$ . Sull'asse delle ascisse essa ha un punto doppio ed un punto isolato, le cui ascisse valgono risp.

$$\frac{2a + k \pm \sqrt{4a^2 + k^2}}{2};$$

un terzo punto doppio è il punto all'infinito dell'asse delle ordinate, le rette  $x' = 0$ ,  $x' = 2a$  ne sono le corrispondenti tangenti. Similmente si vede che la curva tangenziale dell'iperbole

$$\frac{(x - k - a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

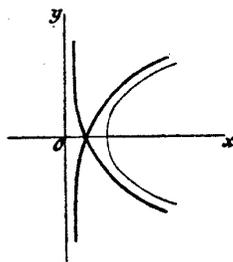


Fig. 52.  
Altra tangenziale  
di una parabola.

ha per equazione

$$y' = \frac{a}{b} \frac{2ax' - x'^2 - k(a - x')}{\sqrt{x'^2 - 2ax'}}$$

è una quartica dotata delle stesse proprietà proiettive di cui è fornita la precedente, ma è di forma molto diversa (fig. 54).

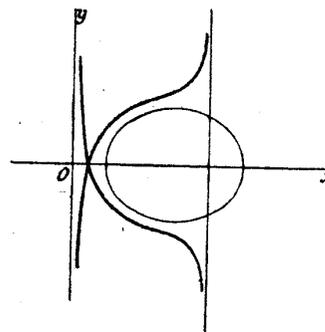


Fig. 53.  
Curva tangenziale dell'ellisse.

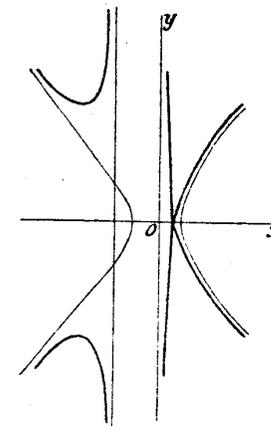


Fig. 54.  
Curva tangenziale dell'iperbole.

**315. VI<sup>1</sup>).** Siano dati due punti fissi  $O, P$  ed una curva  $\Gamma$ ; sia  $M$  un punto qualunque di questa e sia  $M_1$  il punto in cui il raggio vettore  $OM$  è tagliato dalla parallela condotta da  $P$  alla normale in  $M$  a  $\Gamma$ ; variando  $M$  sopra  $\Gamma$  il punto  $M_1$  descriverà una curva  $\Gamma_1$ , che è una di quelle la cui considerazione venne proposta da M. d'Ocagne. Se  $M$  coincide col piede di una delle normali condotte da  $P$ ,  $M_1$  coincide con esso, dunque la curva  $\Gamma_1$  contiene i piedi delle normali condotte da  $P$  a  $\Gamma$ ; invece, se  $M$  coincide col piede di una delle normali condotte da  $O$  a  $\Gamma$ ,  $M_1$  si trova all'infinito; onde  $\Gamma_1$  passa nei punti all'infinito delle normali condotte da  $O$  a  $\Gamma$ . Supposta completamente descritta la curva  $\Gamma_1$  è evidente che si può tracciare la normale in un punto qualunque di  $\Gamma$ ; ma si può anche trovare il corrispondente centro di curvatura. Senza attardarci a dimostrare

<sup>1</sup>) M. D'OCAGNE, *Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales* (Am. J., XI, 1889); nell'*Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne à M. Craig* (Am. J., T. XIV, 1892) è rettificato un punto secondario di questa memoria.

questo notiamo invece come il procedimento indicato somministri due procedimenti, inversi uno dell'altro, per dedurre da una curva altre curve. Per chiarirne la natura chiamiamo  $x, y$  le coordinate di  $M$ , e  $x_1, y_1$  quelle di  $M_1$ , supponendo che  $O$  sia l'origine e  $OP$  l'asse delle  $x$ ; posto  $OP = a$  sussisteranno le equazioni

$$(1) \quad \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a - x_1}{y_1}.$$

Se quindi è data l'equazione  $f(x, y) = 0$  della curva  $\Gamma$  con semplici differenziazioni ed eliminazioni si potrà ottenere quella di  $\Gamma_1$ . Sia invece data l'equazione

$$F(x_1, y_1) = 0$$

di  $\Gamma_1$ ; notando che le (1) danno

$$x_1 = \frac{ax \cdot dx}{x \cdot dx + y \cdot dy}, \quad y_1 = \frac{ay \cdot dx}{x \cdot dx + y \cdot dy}$$

si vedrà che la  $\Gamma$  è una curva integrale della seguente equazione differenziale omogenea

$$f \left[ \frac{ax \, dx}{x \, dx + y \, dy}, \frac{ay \, dx}{x \, dx + y \, dy} \right] = 0,$$

onde la ricerca di  $\Gamma$  può sempre ridursi alle quadrature.

Come esempio supponiamo che  $\Gamma_1$  sia la retta di equazione

$$y_1 = mx_1 + n;$$

$\Gamma$  sarà allora una curva integrale della seguente equazione

$$ay \cdot dx = max \cdot dx + n(x \cdot dx + y \cdot dy).$$

Posto al solito

$$y = tx$$

quest'equazione diviene

$$(2) \quad \frac{dx}{x} + \frac{t \, dt}{t^2 - \frac{a}{n}t + \left[ \frac{ma}{n} + 1 \right]} = 0$$

ove le variabili sono separate. Eseguendo le quadrature indicate si

ottengono risultati differenti a norma della natura delle radici dell'equazione

$$t^2 - \frac{a}{n}t + \left[ \frac{ma}{n} + 1 \right] = 0.$$

1° Caso.

$$t^2 - \frac{a}{n}t + \left[ \frac{ma}{n} + 1 \right] = (t - p)(t - q), \quad p < q.$$

In tali ipotesi:

$$\frac{t}{t^2 - \frac{a}{n}t + \frac{ma}{n} + 1} = \frac{p}{(p - q)(t - p)} - \frac{q}{(p - q)(t - q)}$$

onde integrando la (2) si ottiene:

$$\log x + \frac{p}{p - q} \log(t - p) - \frac{q}{p - q} \log(t - q) = \frac{1}{p - q} \log c$$

ossia

$$x^{p-q} \frac{(t-p)^p}{(t-q)^q} = c$$

e, riponendo invece di  $t$  il suo valore

$$(3) \quad (y - px)^p = c(y - qx)^q;$$

quindi  $\Gamma_1$  è in tal caso una parabola od un'iperbole, algebrica o interscendente secondo che  $p, q$  sono o non entrambi razionali.

2° Caso.

$$t^2 - \frac{a}{n}t + \left[ \frac{ma}{n} + 1 \right] = (t - p)^2.$$

Si ha in tale ipotesi

$$\frac{t}{t^2 - \frac{a}{n}t + \left[ \frac{ma}{n} + 1 \right]} = \frac{p}{(t - p)^2} + \frac{1}{(t - p)}$$

onde, dall'integrazione della (2) nasce

$$\log x - \frac{p}{t - p} + \log(t - p) = \log c$$

ossia

$$x(t-p) = c e^{\frac{p}{t-p}}$$

cioè

$$(4) \quad y - p x = c e^{\frac{px}{y-p}}$$

$\Gamma_1$  è pertanto sempre trascendente.

3° Caso.

$$t^2 - \frac{a}{n} t + \left[ \frac{ma}{n} + 1 \right] = (t + \alpha)^2 + \beta^2.$$

Posto  $t + \alpha = \tau$  si ha in tal caso:

$$\frac{t dt}{(t + \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{(\tau - \alpha) d\tau}{\tau^2 + \beta^2} = \frac{1}{2} \frac{d(\tau^2 + \beta^2)}{\tau^2 + \beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{d\tau/\beta}{1 + (\tau/\beta)^2}$$

onde la (2) dà:

$$\log x + \log \sqrt{\tau^2 + \beta^2} - \alpha/\beta \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau/\beta = \log c$$

ossia

$$x \sqrt{(t + \alpha)^2 + \beta^2} = c e^{\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\tau}{\beta}}$$

o finalmente

$$(5) \quad \sqrt{(y + \alpha x)^2 + \beta^2 x^2} = c e^{\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y + \alpha x}{\beta x}},$$

curva pure trascendente.

Questo esempio è sufficiente a dare a vedere che il passaggio da  $\Gamma_1$  a  $\Gamma$  conduce di regola a curve assai complicate.

La costruzione indicata per la curva  $\Gamma_1$  conduce naturalmente ad un'altra curva  $\Gamma_2$ , generata come segue: I dati essendo gli stessi, al punto  $M$  della curva  $\Gamma$  si fa corrispondere il punto  $M_2$  in cui il raggio vettore  $OM$  è tagliato dalla parallela condotta da  $P$  alla tangente in  $M$  della curva  $\Gamma$ ;  $\Gamma_2$  è il luogo descritto da  $M_2$  quando  $M$  percorre  $\Gamma$ .  $\Gamma_2$  passa evidentemente per i punti di contatto delle tangenti condotte da  $P$  a  $\Gamma$ , e può servire, non solo al tracciamento delle tangenti di  $\Gamma$ , ma anche (benchè meno comodamente della  $\Gamma_1$ ) alla determinazione dei suoi centri di curvatura.

Ritenendo gli stessi assi e le medesime notazioni di prima, si trova che fra le coordinate  $x, y$  e  $x_2, y_2$  dei punti  $M$  e  $M_2$  passano le relazioni seguenti:

$$\frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}, \quad y_2 = (x_2 - a) \frac{dy}{dx}$$

ossia

$$x_2 = \frac{ax \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx}, \quad y_2 = \frac{ay \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx}.$$

Se pertanto  $f(x_2, y_2) = 0$  è l'equazione di  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma$  sarà una curva integrale dell'equazione differenziale omogenea seguente:

$$(6) \quad f \left[ \frac{ax \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx}, \frac{ay \cdot dy}{x \cdot dy - y \cdot dx} \right] = 0.$$

Come curva  $\Gamma_2$  scegliamo ad esempio la retta  $y_2 = m x_2 + n$ ;  $\Gamma$  soddisferà allora all'equazione omogenea

$$ay \cdot dy = m ax \cdot dy + n(x \cdot dy - y \cdot dx).$$

Posto, come si suole sempre,

$$y = tx$$

si ottiene

$$\frac{dx}{x} + \frac{ma + n - at}{at(m-t)} dt = 0$$

ossia

$$\frac{dx}{x} + \frac{ma + n}{ma} \left[ \frac{dt}{t} - \frac{dt}{t-m} \right] + \frac{dt}{t-m} = 0;$$

integriamo ed avremo

$$\log x + \frac{ma + n}{ma} \log \frac{t}{t-m} + \log(t-m) = \log k$$

ossia

$$x \left[ \frac{t}{t-m} \right]^{\frac{ma+n}{ma}} (t-m) = k$$

o finalmente

$$y^{ma+n} = e(y - mx)^n,$$

$c$  e  $k$  essendo cost. arbitrarie; la curva cercata è pertanto una parabola od un'iperbole algebrica od interscendente secondochè i due numeri  $ma + n$  e  $n$  sono o non entrambi razionali.

L'integrazione dell'equazione (6) può effettuarsi anche quando  $\Gamma_2$  sia un cerchio di centro  $O$ . In tal caso  $\Gamma$  può considerarsi come luogo di un punto dirigentesi verso un punto fisso con velocità costante, nel mentre esso è trascinato da una corrente costante in direzione ed intensità; è dunque la curva che sarebbe descritta

da un nuotatore cercante di raggiungere un punto della riva di un fiume; epperò può chiamarsi *curva del nuotatore*. Prima del d'Ocagne era stata considerata dal Collignon<sup>1)</sup>.

**316. VII.** Ad A. Mannheim devesi il seguente procedimento di derivazione di una curva  $\Gamma_1$  da un'altra  $\Gamma$ : « Nel piano della curva  $\Gamma$  siano date due rette  $r, d$ ; la normale in un punto qualunque  $A$  di  $\Gamma$  tagli  $r$  in  $N$ ; da questo si conduca il segmento  $NA_1$  parallelo a  $d$  ed eguale a  $\lambda \cdot NA$ ,  $\lambda$  essendo un numero noto; il luogo del punto  $A_1$  è la curva  $\Gamma_1$  ». Questa risulta in generale simmetrica rispetto a  $r$ , essendo due punti corrispondenti situati sopra una parallela a  $d$ ; se, p. es.,  $\Gamma$  è una retta,  $\Gamma_1$  è una coppia di rette. Ogni intersezione di  $\Gamma$  con  $r$  conduce a un punto doppio di  $\Gamma_1$ . Variando  $\lambda$  si ottengono  $\infty'$  curve  $\Gamma_1$ , le quali si corrispondono due a due in un'affinità di asse  $r$ ; perciò le tangenti a tutte le curve  $\Gamma_1$  nei punti corrispondenti a uno stesso punto di  $\Gamma$  passano per lo stesso punto di questa retta.

Per esprimere in formole la relazione esistente fra  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  scegliamo un sistema cartesiano avente la retta  $r$  per asse delle ascisse; sia  $f(x, y) = 0$  l'equazione di  $\Gamma$  e  $\alpha$  l'angolo di  $d$  con  $r$ . Essendo

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

l'equazione della normale di  $\Gamma$  nel punto  $A(x, y)$ , le coordinate di  $N$  saranno

$$x - y \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} : \frac{\partial f}{\partial y}, 0;$$

perciò è

$$AN = y \frac{\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}};$$

e le coordinate di  $A_1$  sono:

$$x_1 = x - y \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} + \lambda y \frac{\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \cos \alpha,$$

<sup>1)</sup> Ass. franç. avancement des Sciences, 1887.

$$y_1 = \lambda y \frac{\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

ove il radicale si deve prendere con doppio segno; notisi che se  $\Gamma$  è una curva di direzione (Vol. I, p. 510) la funzione

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2}$$

è esprimibile razionalmente in funzione di  $x, y$ , onde, a differenza di quanto accade in generale, le formole precedenti rappresentano due curve distinte, in corrispondenza ai due segni degli ultimi termini.

Supposto  $\Gamma$  algebrica d'ordine  $n$ , algebrica è pure  $\Gamma_1$ , e per calcolarne l'ordine  $n_1$  cerchiamo quanti punti di essa si trovino su una retta arbitraria

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

A tale scopo sostituiamo a  $x_1$  e  $y_1$  i precedenti valori; l'equazione risultante, resa razionale e intera, è:

$$\begin{aligned} & \left[ A \left[ x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \right] + C \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 = \\ & = \lambda^2 y^2 (A \cos \alpha + B \sin \alpha)^2 \left[ \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \right]^2 \right]. \end{aligned}$$

Siccome questa è d'ordine  $2n$ , così taglia la curva data in  $2n^2$  punti; ciò prova che  $\Gamma_1$  è in generale dell'ordine  $2n^2$ ; lasciamo al lettore di determinarne quale modificazione subisca questo numero quando  $\Gamma$  abbia dei punti multipli. Notiamo piuttosto che se si conoscono le espressioni delle coordinate di un punto di  $\Gamma$  in funzione dell'arco, le espressioni di  $x_1$  e  $y_1$  si semplificano divenendo

$$x_1 = x + \frac{yy'}{x'} + \frac{\lambda y \cdot \cos \alpha}{x'}, \quad y_1 = \frac{\lambda y \cdot \sin \alpha}{x'}$$

Nelle attuali ipotesi per costruire la tangente in un punto qualunque  $A_1$  di  $\Gamma_1$  determiniamone l'intersezione  $T$  con l'asse delle  $x$ ; notiamo perciò che la sua equazione è

$$\frac{X - x_1}{x_1'} = \frac{Y - y_1}{y_1'}$$

onde l'ascissa di  $T$  è data da

$$X = \frac{1}{y_1'} \begin{vmatrix} x_1 & x_1' \\ y_1 & y_1' \end{vmatrix};$$

servendosi dei precedenti valori di  $x_1, y_1$  e ricordando le identità  $x'^2 + y'^2 = 1, x'x'' + y'y'' = 0$  si trova

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{(x'y' - x''y)x'} \begin{vmatrix} xx' + yy' & x' + y(x'y'' - x''y') \\ y & x'y' - x''y \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{x'y'} \begin{vmatrix} xx' + yy' & x'^2 + y'^2 \\ y & y' \end{vmatrix} = \frac{1}{y'} \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ora questa è l'espressione dell'ascissa del punto d'intersezione dell'asse delle  $x$  con la tangente alla curva  $\Gamma$  nel punto  $A_1(x, y)$ ; perciò le tangenti alle due curve corrispondenti in due punti omologhi si tagliano sulla retta  $r$ . Ciò prova che *per costruire la tangente alla curva  $\Gamma_1$  nel punto  $A_1$  che corrisponde al punto  $A$  di  $\Gamma$ , basta congiungere  $A_1$  al punto in cui  $r$  è incontrata dalla tangente a  $\Gamma$  in  $A$ <sup>1)</sup>.*

**OSSERVAZIONE FINALE.** La considerazione delle tangenti e delle normali condusse anche alla ricerca delle curve per le quali la lunghezza della tangente o della normale in un punto qualunque è proporzionale a una potenza della corrispondente ordinata<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> A. SUCHARDA, *Deux constructions de la tangente et du centre de courbure d'une certaine courbe* (Bull. intern. Acad. Sciences de Bohême, 1899).

<sup>2)</sup> V. *Jahrbuch über die Fortschritte der Math.*, T. XLVII, 1919-20, p. 975; resoconto su un articolo di M. KISELJAK.

## CAPITOLO XI

### Le Curve opposte successive di una data.

**317.** Detti al solito  $Ox, Oy$  gli assi cartesiani (ortogonali od obliqui), si consideri una retta qualunque  $m$  del piano

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

e se ne determinino le intersezioni  $A, B$  con gli assi. Se  $M(x, y)$  è il centro del segmento  $AB$  si avrà evidentemente

$$x = -\frac{1}{2\xi}, \quad y = -\frac{1}{2\eta},$$

onde, viceversa,

$$\xi = -\frac{1}{2x}, \quad \eta = -\frac{1}{2y};$$

emerge da ciò che fra i punti  $M$  e le rette  $m$  del piano considerato ha luogo una corrispondenza univoca quadratica<sup>1)</sup>. Se il punto  $M$  descrive una retta

$$ax + \beta y + \gamma = 0$$

la retta corrispondente invilupperà la conica

$$a\eta + \beta\xi - 2\gamma\xi\eta = 0,$$

che è una parabola tangente agli assi; mentre se  $m$  ruota attorno ad un punto

$$a\xi + b\eta + c = 0$$

<sup>1)</sup> Come metodo per mutare una determinata curva in un'altra tale corrispondenza fu studiata da G. CARDOSO LAYNES nella nota *Sopra una trasformazione delle curve piane* (Period. Matem., XIX, 1903).

il punto  $M$  descriverà l'altra conica

$$a y + b x - 2 c x y = 0,$$

che è un'iperbole passante per l'origine e pei punti all'infinito degli assi coordinati.

Se  $m$  involupa una curva algebrica d'ordine  $n$  avente  $O$  per punto  $r$ -plo, il punto  $M$  descriverà una curva generalmente dell'ordine  $2n(n-1)$  avente in  $O$  la molteplicità  $2r(r-1)$ .

G. de Longchamps ha indicato un metodo per costruire la tangente in un punto qualunque della curva così trasformata<sup>1)</sup> di una data.

Per es. ad una conica a centro corrisponde in generale una curva di 4° ordine di cui  $O$  è un punto doppio. In particolare, supposti gli assi coordinati ortogonali, se la conica ha i suoi assi di figura situati sopra gli stessi, la curva trasformata è una Kreuzkurve od un Kohlenspitzkurve (Vol. I, p. 267-8).

**318.** Pure birazionale è una trasformazione che ora definiremo: essa è però di 3° grado.

Fissato un sistema di coordinate cartesiane, ortogonali od oblique, quando di un punto  $P$  si conoscono le coordinate  $x, y$  per costruire il punto  $P$  ordinariamente si porta sull'asse delle ascisse il segmento  $OM = x$  e su quello delle ordinate  $ON = y$ ; da  $M$  si conduce poi la parallela al secondo asse e da  $N$  la parallela al primo; esse si taglieranno nel punto  $P$ . Ma la costruzione si può anche eseguire diversamente. Segnati come prima i punti  $M, N$  si descrivano due cerchi uno di centro  $M$  e raggio  $|y|$ , l'altro di centro  $N$  e raggio  $|x|$ ; essi si taglieranno in  $P$ . Ma s'incontreranno anche in un secondo punto  $P_1$  determinato ed unico. In tal modo ad ogni punto  $P$  del piano ne resta univocamente determinato un secondo  $P_1$  che può dirsi *punto opposto* al primo; e quando  $P$  descrive una curva  $\Gamma$ ,  $P_1$  descriverà la *curva opposta* di  $\Gamma$ <sup>2)</sup>. La costruzione del punto  $P_1$  si può presentare sotto forma più conveniente in pratica. Sia infatti (fig. 55)  $\omega$  l'angolo degli assi,  $\alpha$  l'angolo alla base del triangolo  $NPP_1$  e  $\beta$  l'angolo alla base del triangolo  $MPP_1$ . Condotte allora le rette congiungenti a due a due i punti segnati in figura, si potranno facilmente calcolare i valori di tutti gli angoli risultanti; i risultati di siffatto calcolo sono segnati sulla figura stessa; essi mostrano che  $MN$  e  $OP_1$  sono rette fra loro parallele, che  $PP_1$  è perpendicolare ad entrambe e che (cosa questa di secondaria importanza) le rette  $OP_1$  e  $MP$  si tagliano in un punto  $Q$  del cerchio

<sup>1)</sup> Period. Matem., XIX, 1903, p. 241-242.

<sup>2)</sup> K. GLÄNZER, *Die Gegencurve der geraden Linie* (Progr. des Gymn. von Torbach, 1874).

di centro  $M$  e raggio  $MP$ . Emerge da ciò che per dedurre il punto  $P_1$  dal punto  $P$  si può procedere come segue: Si costruisca il parallelogrammo  $OMP_1N$  avente per vertici opposti  $O$  e  $P_1$ , e due lati stesi sopra  $Ox$  e  $Oy$ ; tracciata la diagonale  $MN$ , si conduca ad essa la parallela da  $O$ ; la proiezione ortogonale di  $P$  sopra questa è il punto  $P_1$  opposto di  $P$ . Questa costruzione offre il vantaggio di condurre facilmente alle formole che legano le coordinate  $x, y$  del punto  $P$  a

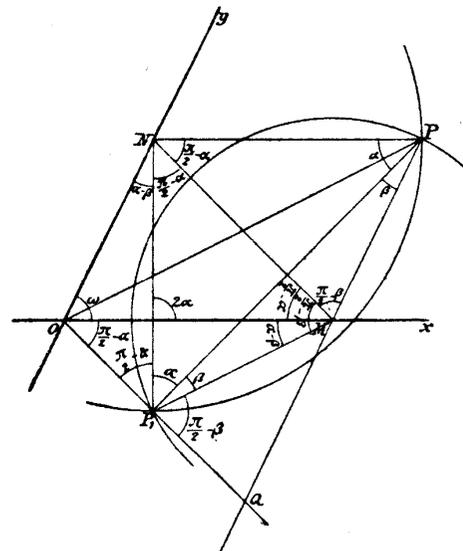


Fig. 55.

quello  $x_1, y_1$  di  $P_1$ . Essendo infatti per ipotesi  $OM = x, ON = y$  sarà

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1$$

l'equazione della retta  $MN$  nelle coordinate correnti  $X, Y$ , e

$$yX + xY = 0$$

quella della parallela condotta da  $O$  a  $MN$ . Mentre la perpendicolare calata da  $P$  su  $MN$  avrà per equazione

$$\frac{X - x}{Y - y} = \frac{y - x \cos \omega}{x - y \cos \omega}$$

Risolvendo rispetto a  $X, Y$  le due ultime equazioni scritte si otterranno le coordinate  $x_1, y_1$  di  $P_1$ , cioè:

$$(1) \quad x_1 = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy \cos \omega + y^2}, \quad y_1 = -y \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy \cos \omega + y^2}.$$

Viceversa si trova

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 \frac{x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 \cos \omega}{x_1^2 - y_1^2}, \\ y = -y_1 \frac{x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 \cos \omega}{x_1^2 - y_1^2}. \end{array} \right.$$

Notiamo che da queste si trae l'utile relazione:

$$(3) \quad \frac{x^2 + y^2 \mp 2xy \cos \omega}{x^2 - y^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2 \pm 2x_1 y_1 \cos \omega}{x_1^2 - y_1^2}.$$

Tanto le equazioni (1) quanto le (2) fanno vedere che la relazione fra i punti  $P$  e  $P_1$  è una trasformazione cremoniana di terzo grado, nella quale alle rette dell'un piano corrispondono le cubiche circolari aventi  $O$  per punto doppio, le corrispondenti tangenti essendo le bisettrici degli angoli degli assi, cioè  $\omega'$  strofoidi: si è dunque in presenza di una speciale trasformazione cubica di De Jonquières, in cui due dei punti fondamentali semplici cadono nei punti ciclici del piano, mentre gli altri due sono infinitamente vicini al punto doppio, in direzioni fra loro perpendicolari.

Posto per brevità

$$x_1^2 - y_1^2 = D, \quad x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 \cos \omega = T,$$

si vede che per la curva  $F$  di equazione

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k(x, y) = 0,$$

ove  $u_k$  è una funzione omogenea di grado  $k$  nelle coordinate, la curva opposta  $F_1$  sarà rappresentata dall'equazione

$$\sum_{k=0}^{k=n} D^{n-k} T^k u_k(x_1, -y_1) = 0;$$

è dunque una curva dell'ordine  $3n$ , avente per punti  $n$ -pli i punti ciclici del piano; di più  $O$  è un punto  $2n$ -plo di cui  $n$  tangenti coincidono in una delle bisettrici dell'angolo degli assi e le altre  $n$  nell'altra.

La curva opposta di una retta è, come si disse, una strofoide; quelle di una conica è in generale una sestica che fu pure studiata dal Glänzer<sup>1)</sup> in generale e in parecchi casi speciali; da tali ricerche risulta che la curva ottenuta si abbassa al quart'ordine quando la conica è un cerchio passante per l'origine, ovvero è una iperbole equilatera col centro nella stessa (nel qual caso si ottiene una lemniscata di Bernoulli) o una parabola passante per l'origine.

La trasformazione considerata non essendo involutoria, applicandola a  $F_1$  si otterrà in generale una curva  $F_2$  diversa da  $F_1$  e  $F$ ; la si chiama *seconda curva opposta* di  $F$ ; da essa nascerà similmente la terza e così via. Ora se  $P_2(x_2, y_2)$  è il punto opposto di  $P_1(x_1, y_1)$  otterremo in forza delle (2):

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \frac{x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2 \cos \omega}{x_2^2 - y_2^2}, \\ y_1 = -y_2 \frac{x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2 \cos \omega}{x_2^2 - y_2^2}. \end{array} \right.$$

e la (3) darà

$$(3') \quad \frac{x_1^2 + y_1^2 \mp 2x_1 y_1 \cos \omega}{x_1^2 - y_1^2} = \frac{x_2^2 + y_2^2 \pm 2x_2 y_2 \cos \omega}{x_2^2 - y_2^2}.$$

Si moltiplichino ora le (2) per le omologhe (2') e si applichi la (3'); si avranno le equazioni

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_2 \frac{(x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 y_2 \cos \omega)(x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2 \cos \omega)}{(x_2^2 - y_2^2)^2}, \\ y = y_2 \frac{(x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 y_2 \cos \omega)(x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2 \cos \omega)}{(x_2^2 - y_2^2)^2}. \end{array} \right.$$

le quali determinano le coordinate del punto  $P_2$  secondo punto opposto di  $P$ . Similmente, considerando il terzo punto opposto  $P_3$  si avranno le equazioni:

$$(2'') \quad x_2 = x_3 \frac{x_3^2 + y_3^2 + 2x_3 y_3 \cos \omega}{x_3^2 - y_3^2}, \quad y_2 = -y_3 \frac{x_3^2 + y_3^2 + 2x_3 y_3 \cos \omega}{x_3^2 - y_3^2}$$

$$(3'') \quad \frac{x_2^2 + y_2^2 \mp 2x_2 y_2 \cos \omega}{x_2^2 - y_2^2} = \frac{x_3^2 + y_3^2 \pm 2x_3 y_3 \cos \omega}{x_3^2 - y_3^2};$$

<sup>1)</sup> Die Gegenkurven der Kegelschnitte (Progr. Hamburg, 1899).

combinandole con le equazioni (4) si conclude :

$$(5) \quad \begin{cases} x = x_3 \frac{(x_3^2 + y_3^2 - 2 x_3 y_3 \cos \omega) (x_3^2 + y_3^2 + 2 x_3 y_3 \cos \omega)^2}{(x_3^2 - y_3^2)^3}, \\ y = -y_3 \frac{(x_3^2 + y_3^2 - 2 x_3 y_3 \cos \omega) (x_3^2 + y_3^2 + 2 x_3 y_3 \cos \omega)^2}{(x_3^2 - y_3^2)^3}, \end{cases}$$

e queste relazioni stabiliscono analiticamente la dipendenza fra il punto  $P$  ed il terzo suo punto opposto. Applicando ancora questo procedimento si vede che fra le coordinate  $x, y$  di un punto  $P$  e quelle  $x_2, y_2$  dell' $r$ -mo punto opposto sussistono le relazioni seguenti:

se  $r$  è *dispari* :

$$\begin{cases} x = x_r \frac{(x_r^2 + y_r^2 + 2 x_r y_r \cos \omega)^{\frac{r+1}{2}} (x_r^2 + y_r^2 - 2 x_r y_r \cos \omega)^{\frac{r-1}{2}}}{(x_r^2 - y_r^2)^r}, \\ y = -y_r \frac{(x_r^2 + y_r^2 - 2 x_r y_r \cos \omega)^{\frac{r+1}{2}} (x_r^2 + y_r^2 + 2 x_r y_r \cos \omega)^{\frac{r-1}{2}}}{(x_r^2 - y_r^2)^r} \end{cases}$$

se  $r$  è *pari* :

$$\begin{cases} x = x_r \frac{(x_r^2 + y_r^2 + 2 x_r y_r \cos \omega)^{r/2} (x_r^2 + y_r^2 - 2 x_r y_r \cos \omega)^{r/2}}{(x_r^2 - y_r^2)^r}, \\ y = y_r \frac{(x_r^2 + y_r^2 - 2 x_r y_r \cos \omega)^{r/2} (x_r^2 + y_r^2 + 2 x_r y_r \cos \omega)^{r/2}}{(x_r^2 - y_r^2)^r}. \end{cases}$$

Tutto ciò dimostra che fra  $P$  e  $P_r$  sussiste una trasformazione cremoniana di grado  $2r + 1$ . Alle rette di uno dei piani corrispondono nell'altro delle curve d'ordine  $2r + 1$  che possono considerarsi come generalizzazioni della strofoide retta (se  $\omega = 90^\circ$ ) od obliqua (se  $\omega \neq 90^\circ$ ).

## CAPITOLO XII

### Curve dedotte da un gruppo di curve.

**319.** Le curve studiate sinora nel presente Libro sono tutte dedotte da una curva unica; la Jacobiana di tre curve mostra la possibilità di dedurre, da un gruppo di curve, una nuova; di altre analoghe leggi di derivazione faremo breve cenno nel presente Capitolo <sup>1)</sup>.

I. Date in coordinate polari  $m$  curve  $\Gamma_k$

$$\rho_k = f_k(\omega) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

e  $n$  coefficienti numerici  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$ , le due equazioni

$$(1) \quad \rho = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k f_k(\omega),$$

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\lambda_k}{f_k(\omega)}$$

rappresentano altre due curve; i secondi membri delle (1) essendo funzioni più generali delle ordinarie medie aritmetica ed armonica delle  $n$  quantità  $f_k$ , possono dirsi medie iperaritmetica ed iperarmonica <sup>2)</sup>; corrispondentemente le curve rappresentate dalle (1) si chiamano risp. *curva iperaritmetica* e *curva iperarmonica* delle proposte rispetto al sistema di coefficienti  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$ . Quando si sappiano costruire le tangenti alle curve date, si saprà fare altrettanto per le curve dedotte. Indichiamo infatti con  $S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(m)}$  le sunnor-

<sup>1)</sup> Altri casi sono segnalati nella nota di F. SIBIRANI, *Sul luogo di un punto univocamente coordinato ad una coppia di punti mobili* (Period. mat., III Ser., T. II, 1905).

<sup>2)</sup> SCHLÖMILCH, *Hyperarithmetische und Hyperharmonische Mittel, nebst geometrische Anwendungen* (Zeitschrift, T. XXXIV, 1839).

mali polari delle curve  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  e con  $S$  quelle della (1); essendo

$$S = \frac{d \varrho}{d \omega}$$

si trova subito la relazione

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k S_n^{(k)},$$

che permette di costruire la normale e quindi la tangente alla (1). Indicando similmente con  $S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(m)}$  le sottangenti polari della curva  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  e con  $S_t$  quella della (2) ed osservando che

$$\frac{1}{S_t} = \frac{d \varrho}{\varrho^2 d \omega} = - \frac{d}{d \omega} \left[ \frac{1}{\varrho} \right]$$

si ottiene

$$\frac{1}{S_t} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\lambda_k}{S_t^{(k)}},$$

mediante la quale si potrà ottenere la sottangente e quindi la tangente della curva (2).

Anche il raggio di curvatura della curva (2) si può costruire elegantemente con un procedimento indicato dal Mannheim<sup>1)</sup>. Scriviamo infatti la (2) sotto la forma

$$u = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k u_k$$

avendo posto

$$\frac{1}{\varrho} = u, \quad \frac{1}{\varrho_k} = u_k.$$

Chiamiamo  $\alpha$  l'angolo che la normale generica della curva risultante forma con l'asse polare e con  $R$  il raggio di curvatura; significati analoghi abbiano le lettere  $\alpha_k, R_k$  per le curve date. Si trova facilmente

$$\cos \alpha = \frac{u}{\sqrt{u^2 + u'^2}}, \quad R = \frac{(u^2 + u'^2)^{3/2}}{u^3 (u + u'')}, \quad u + u'' = \frac{1}{R \cos^3 \alpha},$$

le derivate essendo prese rispetto a  $\omega$  e indicate con accenti. Espressioni analoghe si hanno per  $\alpha_k$  e  $R_k$ . In conseguenza:

<sup>1)</sup> Note de géométrie infinitésimale (Ann. di mat., II Ser., T. I, 1859).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{R_i \cos^2 \alpha_i} &= \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i (u_i + u_i'') = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i u_i'' = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{\varrho_i} + \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{\varrho_i} \right]'' \end{aligned}$$

cioè

$$\frac{1}{R \cos^3 \alpha} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{R_i \cos^3 \alpha_i}$$

relazione notevole che può servire alla costruzione di  $R$ .

II. Date similmente  $m$  curve rappresentate dalle equazioni

$$y = f_k(x)$$

se ne potranno dedurre altre due ponendo

$$(3) \quad y = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k f_k(x),$$

$$(4) \quad \frac{1}{y} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\lambda_k}{f_k(x)}$$

Venne particolarmente considerato il caso in cui le curve date siano due sole e  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ; la curva risultante

$$(5) \quad y = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2}$$

si dice brevemente *curva media*<sup>1)</sup>.  $\Gamma_m$  passa sempre per i punti comuni a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ; se queste sono algebriche,  $\Gamma_m$  è in generale eguale di un ordine eguale al prodotto degli ordini di  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ; ogni ordinata tangente a  $\Gamma_1$  o  $\Gamma_2$  è una bitangente di  $\Gamma_m$ , ecc.

Esempi: a) Se  $\Gamma_2$  è una retta  $\Gamma_m$  è una curva affine a  $\Gamma_1$ . b) Se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono due cerchi fra loro tangenti si ottiene il doppio cuore, considerato a p. 229 del Vol. I. c) Se si hanno due ellissi si ottiene la cosiddetta *curva di Bérard*<sup>2)</sup>. d) Dalle due iperboli

$$y = \frac{a^2}{a \pm x}$$

<sup>1)</sup> BROCARD, Notes de bibliographie des courbes géométriques, Partie complémentaire (Bar-le-Duc, 1899), p. 208.

<sup>2)</sup> Ivi.

nasce la curva

$$y = \frac{a^3}{a^2 - x^2}$$

incontrata da Huygens<sup>1)</sup> e che può chiamarsi *Ipervesiera* perchè nasce da una iperbole equilatera con la stessa costruzione che trasforma il cerchio in una versiera. e) Se le curve date sono le logarit-

miche  $y = a e^{\frac{x}{k}}$ ,  $y = a e^{-\frac{x}{k}}$ , la curva media è la catenaria

$$y = \frac{a}{2} (e^{x/k} + e^{-x/k}).$$

III. Dalle stesse equazioni  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  si può dedurre

$$(6) \quad y = \sqrt{f_1(x) f_2(x)},$$

che rappresenta una curva nuova dedotta dalle date; siccome la (6) dà

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[ \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} \right]$$

così fra le sottangenti delle tre curve passa la relazione

$$S_t = \frac{1}{2} (S_t^{(1)} + S_t^{(2)})$$

che permette di costruire la tangente alla terza quando sappiansi costruire le tangenti alle due prime<sup>2)</sup>.

IV. Date due curve qualsivogliano (una delle quali può ridursi ad un punto) il luogo dei centri dei cerchi tangenti ad entrambe si chiama *curva equidistante* dalle due date<sup>3)</sup>; se ad es. queste sono circonferenze, la curva equidistante è notoriamente una conica.

Più generalmente si può considerare il luogo dei punti le cui distanze da due curve date hanno un dato rapporto<sup>4)</sup>; e così si può

<sup>1)</sup> Lettera a LEIBNIZ del 6 febbraio 1691 (*Oeuvres de Huygens*, T. X, p. 10).

<sup>2)</sup> DE LISLEFERME, *Construction de la tangente à certaines courbes* (*Mathésis*, T. III, 1883). F. DINGELDEY (*Sammlung von Aufg. zur Anwendung der Diff.- und Integralrechnung*, T. I, Leipzig 1910, p. 69) osservò che questa conclusione sussiste anche per le curve  $y = \sqrt{f_1(x) f_2(x) \dots f_k(x)}$  qualunque sia  $k$ .

<sup>3)</sup> FROLOV, *Sur les courbes équidistantes* (*Ass. fr.*, Caen 1894).

<sup>4)</sup> A. MANNHEIM, *Construction du centre de courbure du lieu des points dont les distances à deux courbes données sont dans un rapport constant* (*Ann. di Matem.*, T. I, 1858).

considerare il luogo dei punti tali che abbiano un dato rapporto le lunghezze delle tangenti condotte a due linee sconosciute<sup>1)</sup>.

V. I dati essendo gli stessi, se un segmento  $AB$  lo percorre con i suoi estremi per modo che le tangenti in  $A$  e  $B$  alle curve date formino con  $AB$  un triangolo isoscele, il centro della base descriverà una curva che s'incontra nella matematica applicata; era un tempo chiamata *asse longitudinale*; oggi i matematici francesi, dietro proposta di M. d'Ocagne<sup>2)</sup>, la chiamano *fibre moyenne*<sup>3)</sup>.

Se invece si suppone che i punti  $A, B$  si muovano in modo che gli archi da essi descritti a partire da due origini fissi siano fra loro eguali, il luogo geometrico del centro del segmento  $AB$  è una curva di cui si possono facilmente costruire le tangenti<sup>4)</sup>.

VI. Date due curve  $\Gamma_1, \Gamma_2$  mediante le equazioni

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0$$

il luogo di un punto  $A$  tale che il segmento  $A_1 A_2$  della corrispondente normale intercetto dalle date curve abbia per punto medio  $A$ , dicesi *assoide* delle due date curve<sup>5)</sup>. Se  $x, y; x_1, y_1; x_2, y_2$  sono le coordinate dei punti  $A, A_1, A_2$  si ha

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad (x_1 - x_2) dx + (y_1 - y_2) dy = 0$$

onde l'equazione differenziale dell'assoide nascerà eliminando  $x_1, y_1, x_2, y_2$  fra queste equazioni e le due seguenti:

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \quad f_2(x_2, y_2) = 0.$$

L'eliminazione di  $x_2, y_2$  si opera subito e dà

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \quad f_2(2x - x_1, 2y - y_1) = 0,$$

$$(x - x_1) dx + (y - y_1) dy = 0;$$

ma per fare scomparire anche  $x_1, y_1$  è necessario di conoscere la

<sup>1)</sup> E. LAGUERRE, *Sur le lieu des points tels que les tangentes menées de ces points à deux courbes données soient égales entre elles* (*Bull. Soc. Math. France*, T. V, 1876-77, *Oeuvres de Laguerre*, T. II, p. 450).

<sup>2)</sup> *Cours de géométrie descriptive* (Paris, 1896), p. 275.

<sup>3)</sup> G. DE LONGCHAMPS, *Sur la courbe dite fibre moyenne* (*Journ. de Math. spéc.*, T. XXI, 1897); MANNHEIM (lvi).

<sup>4)</sup> C. A. LAISANT, *Note sur un système de deux courbes planes* (*Bull. Soc. Math. France*, T. XVI, 1887-88).

<sup>5)</sup> RÉSAL, *Axoides de deux lignes planes* (*C. R.*, T. CXX, 1895). Cfr. P. ERNST, *Die Axoidale zweier ebener Kurven* (*Progr. Wien*, 1909).

forma delle funzioni  $f_1, f_2$ . Se per es.  $f_1 = m x_1, f_2 = -m x_2$  si ottengono come assoidi le iperboli  $xy^m = \text{cost.}$  Va notato che nella definizione degli assoidi le due curve date possono identificarsi; p. es. se coincidono coll'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

o colla parabola  $y^2 = 2px$ , come assoide si ottiene una o l'altra delle seguenti curve trascendenti:

$$y = x e^{\frac{a^2}{b^2 x}}, \quad y = c e^{-\frac{x}{p}}.$$

È notevole che « le evolte degli assoidi sono pure assoidi »<sup>1)</sup>.

VII. Se le due curve date sono a normali parallele, l'Aoust ne considerò una terza (che chiamò *risultante*) le cui normali sono parallele alle normali delle due prime e il raggio di curvatura in un punto qualunque della terza è eguale alla somma dei raggi di curvatura nei punti corrispondenti delle due prime<sup>2)</sup>.

VIII. Date due curve algebriche  $\Gamma_m$  e  $\Gamma_n$  degli ordini  $m, n$  ed un punto  $O$  del loro piano, si conduce per  $O$  una retta arbitraria  $r$  a tagliare  $\Gamma_m$ , in  $m$  punti  $A$  e la  $\Gamma_n$  in  $n$  punti  $B$ ; si portano sopra  $r$  a partire da  $O$  tanti segmenti eguali agli  $m n$  segmenti  $AB$ ; il luogo dei loro estremi è una curva chiamata *Settoria*<sup>3)</sup>. Servendosi delle equazioni polari delle due date curve ( $O$  essendo il polo), la ricerca dell'analoga equazione della settoria è una semplice questione di eliminazione.

IX. Siano date tre curve  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ ; una tangente qualunque della prima tagli le altre due in  $M_1$  e  $M_2$ ; il luogo geometrico del centro del segmento  $M_1 M_2$  chiamasi *curva diametrica* di  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ; J. Massau<sup>4)</sup> ha indicate delle costruzioni notevoli per la tangente e il centro di curvatura di detto luogo.

X. Estendendo una considerazione dovuta a Steiner<sup>5)</sup> si può dare la seguente definizione: Date due curve algebriche complanari  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , una tangente della prima tagli la seconda in  $M_1, M_2, \dots$ ; si conducono ivi le tangenti a  $\Gamma_2$  e se ne determina le intersezioni scambievoli; il luogo dei punti ottenuti è una curva alge-

<sup>1)</sup> MANNHEIM, *Une propriété générale des arçoles* (C. R., vol. cit.).

<sup>2)</sup> *Analyse infinitésimale des courbes planes* (Paris 1873), p. 53-56. Cfr. P. ERNST, *Die Aoust Resultatenkurven* (Progr. Wien., 1909).

<sup>3)</sup> O. JEZEK, *Ueber Sectorien* (Prag. Ber., 1882).

<sup>4)</sup> *Cours de mécanique de l'Université de Gand*, III ed., 1891, p. 376 e p. 402.

<sup>5)</sup> *Ges. Werke*, T. II, p. 599.

brica che coincide con quella di Steiner, se  $\Gamma_1$  si riduce a un punto e di cui si determinarono le caratteristiche plückeriane<sup>1)</sup>.

**320.** Si possono anche considerare curve dedotte, non da un gruppo finito, ma da infinite curve: valgano a provare ciò quanto segue.

Dato un sistema di  $\infty'$  curve  $\Gamma$  ed un punto esterno  $C$ , nasce una nuova curva considerando il luogo geometrico dei punti di contatto delle tangenti condotte da questo punto a quelle curve ed un'altra considerando i piedi delle normali uscenti dal medesimo punto  $C$ .

Supponiamo in particolare<sup>2)</sup> che le curve  $\Gamma$  siano le  $\infty'$  posizioni che assume una curva

$$(1) \quad \varrho = F(\omega)$$

quando la si faccia ruotare attorno all'origine e che ad esse si conducono le tangenti dal punto all'infinito dell'asse polare. Se  $x, y$  sono le coordinate di un punto della risultante curva  $\Gamma$  (detta *culminante* perchè è il luogo dei punti di culminazione delle curve  $\Gamma$ ) sussisteranno, oltre la (1), le equazioni

$$(2) \quad x = \varrho \cos(\omega + \alpha), \quad y = \varrho \sin(\omega + \alpha),$$

ove  $\alpha$  va scelto in modo che risulti

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = 0$$

ossia

$$(3) \quad F(\omega) \cos(\omega + \alpha) + F'(\omega) \sin(\omega + \alpha) = 0.$$

Eliminando  $\omega$  mediante la (3) dalle (1) (2) si ottengono equazioni della forma

$$(4) \quad \varrho = f(\alpha)$$

$$(5) \quad x = \varphi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha)$$

di cui le due ultime danno la rappresentazione parametrica della

<sup>1)</sup> H. SISAM, *On some Loci associated with plane Curves* (Amer. Journ. Math., T. XXXI, 1909).

<sup>2)</sup> W. HEYMANN, *Ein Rollenproblem. Die Kurven « T » und « N »* (Abhandl. und Berichte der Technischer Staatslehranstalten in Chemnitz, Heft 5, Januar 1915).

curva  $\Gamma$ . Il problema è così ridotto alla ricerca delle tre funzioni  $f, \varphi, \psi$ ; ora possiamo aggiungere che trovata una, le altre due ne conseguono. Si ha infatti, anzitutto,

$$(6) \quad f^2(\alpha) = \varphi^2(\alpha) + \psi^2(\alpha);$$

essendo poi  $y = \rho \operatorname{sen}(\omega + \alpha) = \psi(\alpha)$  si ha

$$\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha},$$

ma  $\frac{\partial y}{\partial \omega} = 0$  quindi

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} = r \cos(\omega + \alpha) = x = \varphi(\alpha)$$

cioè

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \varphi(\alpha)$$

e

$$(7) \quad \psi(\alpha) = \int \varphi(\alpha) d\alpha;$$

ciò prova che, noto  $\varphi(\alpha)$ , ne segue  $\psi(\alpha)$  e quindi  $f(\alpha)$ . Se, invece, fosse dato  $f(\alpha)$ , la (6) darebbe

$$\left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right)^2 + \psi^2 = f^2$$

dove  $\psi$  e quindi  $\varphi$ . Questo metodo di derivazione, applicato a curve note guida alla scoperta di altre nuove o di relazioni fra linee conosciute.

Per determinare il luogo  $N$  dei piedi delle normali condotte da un punto  $C$  alle infinite posizioni assunte per rotazione dalla curva (1), prendiamo per asse polare la retta  $OC$  ed indichiamo con  $g$  il segmento  $OC$ . Allora per le condizioni del problema, oltre le (1) (2) sussisterà la relazione

$$y - (g - x) \frac{dx}{dy} = 0$$

ossia

$$x \frac{dx}{d\omega} + y \frac{dy}{d\omega} = g \frac{dx}{d\omega};$$

ed essendo  $x^2 + y^2 = \rho^2$  questa può scriversi

$$2g \frac{dx}{d\omega} = \frac{d(\rho^2)}{d\omega}$$

o anche

$$(8) \quad \rho \frac{d\rho}{d\omega} = g \left[ -\rho \operatorname{sen}(\omega + \alpha) + \frac{d\rho}{d\omega} \cos(\omega + \alpha) \right]$$

Eliminando  $\omega$  mediante questa equazione, dalla (1) si ottiene la equazione della cercata curva  $N$ . Rimandiamo al succitato lavoro il lettore desideroso di maggiori particolari al riguardo o di conoscere le molteplici applicazioni a cui danno luogo le considerazioni brevemente da noi schizzate.

Osserviamo, finendo, che anche restando nel campo algebrico e sostituendo un fascio di curve al sistema di curve generate da  $\infty'$  posizioni di una data, si giunge a curve già studiate. Sia infatti

$$f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = 0$$

l'equazione di un fascio di curve d'ordine  $n$ , i punti di contatto delle tangenti condotte alle curve che lo costituiscono da un punto  $(x_0, y_0)$  ha per equazione

$$(x - x_0) \left\{ \varphi \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + (y - y_0) \left\{ \varphi \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} = 0$$

onde è in generale dell'ordine  $2n$ ; lasciamone al lettore lo studio. Similmente il luogo dei piedi delle normali condotte dallo stesso punto alle stesse curve ha per equazione

$$\begin{vmatrix} f & \varphi & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & x - x_0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & y - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

onde è in generale dell'ordine  $2n^2$ .

Si può anche considerare il luogo dei flessi delle curve del fascio, ecc.

<sup>1)</sup> ANNINA AJELLO, *Sul luogo dei piedi delle normali condotte da uno stesso punto alle curve di un fascio* (Rend. Circ. Mat. Palermo, T. XLVI, 1922). Se il fascio è costituito da cerchi, si giunge a una cubica che può considerarsi come una generalizzazione della strofoide.

---

## EPILOGO

---

*L'aspirazione di presentare in ordine logico le ricerche compiute nel corso di venti secoli sopra le curve piane speciali ci ha costretto più volte di abbandonare, nella nostra esposizione, l'ordine cronologico; per rimediare a siffatto inconveniente giudichiamo opportuno dar termine alla nostra opera gettando uno sguardo sulle origini e le varie fasi di sviluppo degli studi sul detto argomento.*

*L'alba della teoria delle curve si perde nella notte dei tempi; la contemplazione del moto delle stelle e l'osservazione della caduta dei gravi, i fenomeni offerti dalla luce (cammino dei raggi luminosi e ombre portate dai solidi), questi e numerosi altri fatti naturali devono avere fatto sorgere, nella mente di chiunque avesse occhi per vedere e cervello per ragionare, il concetto di linea come traiettoria di un punto mobile o come « quid » che è capace di separare una dall'altra due regioni contigue di una medesima superficie. E infatti tutti i monumenti, resti di civiltà per la maggior parte tramontate, portano sulle loro pareti disegni di curve più o meno complicate e, d'altra parte, presuppongono in chi li eresse cognizioni non trascurabili sulle curve piane. Ma noi non tenteremo di determinare quali persone, e neppure quali popoli abbiano la gloria di avere per primi concepito che cosa sia una linea; il grande libro della storia, interrogato al riguardo, rimane inesorabilmente muto. Limitiamoci a constatare che presso tutti gli agglomeramenti umani che raggiunsero un certo grado di civiltà si trovano prove del fatto che non solo si era in possesso delle idee di linea retta e di circolo, ma erano stati fatti tentativi per misurare le loro lunghezze e il contenuto di aree da esse limitate.*

*Un terreno più solido trova colui che intende di determinare l'origine della teoria delle prime linee che furono concepite dopo la retta e la circonferenza (parliamo delle sezioni coniche), giacchè la scoperta della famosa triade viene fatta risalire a Menecmo, precettore di Ales-*

sandro Magno; su di esse Apollonio Pergeo lasciò una trattazione tuttora riguardata classica; la loro importanza si accrebbe quando Keplero le ravvisò nelle traiettorie degli astri e lo studio di esse trovò innumerevoli cultori quando si riconobbero come rappresentabili mediante un'equazione di secondo grado fra le coordinate cartesiane di un punto; oggi si deve riconoscere che duemila anni di assidue e quasi continue ricerche non bastarono a scoprire tutte le mirabili proprietà di cui godono.

Menecmo ottenne queste curve segnando con un piano un cono circolare retto, oppure tracciò queste curve nel piano per trarne il mezzo per risolvere il problema della duplicazione del cubo? La risposta è dubbia. Ma importa notare che, qualunque sia la risposta da darsi a questa domanda, la geometria si sarà, per merito di quel matematico, arricchita di un procedimento per generare curve suscettibili di molteplici applicazioni e svariate generalizzazioni; procedimento che consiste o nel segare con un piano una nota superficie, o nel dedurre da una curva un'altra per proiezione, o finalmente nel tracciare in un piano una curva di cui tutti i punti soddisfano a date condizioni.

Del primo di questi metodi si trova un'applicazione nella stessa epoca in cui visse Apollonio; grazie ad essa la geometria si arricchì di un nuovo gruppo di curve, le spiriche di Perseo; il secondo condusse Newton alla scoperta di cinque curve di III ordine, donde tutte le altre possono dedursi per proiezione e quindi a una completa classificazione di queste interessanti forme geometriche; finalmente nel terzo si ravvisa il germe di uno dei più notevoli capitoli della geometria analitica (costruzione di una linea di cui si conosce l'equazione). Ma questi procedimenti non rivelarono che assai più tardi la loro potenza; chè non furono ad essi che ricorsero gli antichi geometri che resero più vasta la collezione delle linee speciali; essi infatti ricorsero di preferenza a metodi cinematici, il che non deve stupire chè il modo più naturale di concepire una linea è riguardarla come descritta da un punto mobile con una determinata legge. È appunto dalla composizione di due movimenti di una retta, uno di rotazione e l'altro di traslazione, che trae origine la quadratrice inventata, a quanto sembra, dal sofista Ippia d'Elea, contemporaneo di Socrate. Tale curva oggi si presenta come primo elemento di una serie di linee che servono alla quadratura del cerchio; senza parlare delle parabole virtuali, con cui Gregorio di S. Vincenzo s'illuse di avere risolto il secolare problema, ricorderemo fra esse la quadratrice di Tschirnhausen e la coceleide. Per analogia potremo avvicinare a queste una linea congenere, creata per risolvere l'analogo problema per l'iperbole.

Alla nozione di movimento devono la vita anche la spirale inven-

tata da Archimede, circa tre secoli prima dell'E. V. e la concoide concepita circa nello stesso tempo da Nicomede; altrettanto può ripetersi riguardo alle tre cicloidi, che durante il Secolo XVII furono oggetto di così numerose ricerche da presentarsi come le linee allora di moda. Nello stesso secolo l'anzidetta curva di Nicomede diede origine alle concoide a base qualunque, in particolare alla lumaca di Pascal e la cardioide, mentre dalla cicloide si fu condotti a considerare le epicicloidi e, in generale, più le linee generate dal ruzzolamento di una curva sopra altra fissa; la considerazione del movimento ha anche condotto Descartes a concepire la parabola che ne porta il nome, mentre alle deformazioni di un parallelogramma articolato proviene una notevole categoria di linee, di cui la più semplice è la curva di Watt; origine analoga hanno le astroidi e le curve reptorie di Giovanni Bernoulli.

Quantunque la concoide abbia una genesi cinematica, essa fu concepita con lo scopo di risolvere i problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, i quali, insieme a quello della quadratura del cerchio, per secoli costituirono il tormento dei geometri. Da questo punto di vista essa va considerata accanto alla coeva cissoide di Diocle, la cui definizione, convenientemente estesa, portò alle linee cissoideali. Concoide e cissoide appartengono, quindi, alla vasta classe di curve che, appunto per il loro ufficio di risolutive dei succitati problemi, chiamansi mediatrici e settrici.

Trasmigrazioni di popoli, invasioni di barbari, guerre di religione, fenomeni che turbarono l'intero Medio Evo, come pure gli studi umanistici e i vani sforzi per conciliare la parola pagana di Aristotele col verbo della Sacra Scrittura, allontanarono l'umanità dalla serena contemplazione delle verità matematiche, scopo supremo delle meditazioni dei matematici del periodo aureo della scienza greca. Allora il patrimonio geometrico accumulato dai Greci, non soltanto non si allietò di alcun incremento, ma subì deplorabili danni; a mostrarlo basti ricordare che appunto allora andarono perdute opere di primo ordine quali i Porismi di Euclide, i Luoghi piani di Apollonio e sette dei tredici libri costituenti l'Aritmetica di Diofanto, e chi può dire quanti altri, di cui autori e titoli andarono travolti nel gran mare dell'oblio? I resti di questo immane naufragio, raccolti e pietosamente conservati dagli Arabi, trasportati presso di noi dai successori di Maometto o dai negozianti italiani che viaggiarono in Oriente, non appena furono compresi ed apprezzati dai pensatori Europei mostrarono come i germi fecondi deposti da Euclide, Archimede e Apollonio conservassero intatta la loro virtù feconda. Di tale nuovo stato di cose la teoria delle curve non tardò ad avvantaggiarsi; allora Descartes e

*Fermat, applicando la simbolica algebrica a teorie ormai classiche, diedero vita a una nuova branca delle matematiche, il metodo delle coordinate; fu esso che permise, non soltanto di studiare sistematicamente le curve già note, ma di concepire e svolgere una teoria generale di questi importanti enti geometrici.*

*Con la creazione della geometria analitica l'investigazione di una curva si identificò allo studio della funzione che la rappresenta; perciò ogni progresso dell'analisi si riflettè in un perfezionamento della geometria e questa, dal canto suo, quasi a dimostrare la sua gratitudine pei benefici ricevuti, suggerì a quella nuovi problemi. Dalla collaborazione di quelle due discipline traggono origine innumerevoli nuove linee speciali. Ad essa si è, infatti, debitori, della scoperta della foglia di Cartesio, delle parabole ed iperboli di ordine superiore, delle perle slusiane, delle curve di Lamé, delle linee simmetriche rispetto a un triangolo e delle curve polizomali. La rappresentazione grafica delle funzioni portò subito alle linee trigonometriche, poi ad analoghe curve più complicate, inoltre alla curva esponenziale o logaritmica e ad altre analoghe; proseguendo nella stessa via si giunse a linee strane che, benchè continue, non ammettono tangente in alcun punto o ad altre che ricoprono un'intera area, enti geometrici che non si possono concepire che a stento e che inducono il geometra all'angosciosa domanda « che cosa è una linea piana? ». Introdotto poi l'uso metodico delle coordinate polari, ricorrendo ancora alla rappresentazione grafica delle funzioni, si giunse a concepire spirali più elevate della archimedeica, la più notevole delle quali è la spirale logaritmica, scoperta per primo da E. Torricelli, ma le cui mirabili proprietà di riproduzione sono gloria di Giacomo Bernoulli.*

*Descartes e Fermat erano da poco scesi nella tomba che venivano a maturità i metodi infinitesimali che, schizzati da Eudosso ed Archimede, coltivati con ottimi risultati prima nella scuola di Galileo, poi in Olanda, in Francia e in Inghilterra, finirono per condurre alla nobile disciplina a cui sono legati per sempre i nomi di Leibniz e Newton. Ora, poichè questa fu concepita e presentata come un'ausiliare per la ricerca delle proprietà delle curve (cosa indispensabile in un'epoca in cui non si era ancora giunti al concetto generale di funzione) è naturale che frequenti dovevano essere le sue applicazioni alle linee speciali. Fu specialmente il problema della rettificazione, il quale era stato riconosciuto per superiore alle forze degli antichi geometri, che attrasse l'attenzione dei geometri; primo il Torricelli scoperse una curva esattamente rettificabile (la spirale logaritmica); circa nello stesso tempo venne avvertita la identità dei problemi di rettificare una spirale d'Archimede e una parabola e subito Fermat estendeva*

*questo bel risultato alle spirali e alle parabole di grado superiore. Ad esso seguono la scoperta di una curva algebrica rettificabile (la parabola semicubica), la rettificazione delle cicloidi e degli epicicloidi e, nel secolo XVIII, quella, da parte del conte di Fagnano, di parabole che contengono coppie di archi a differenza rettificabile, preludio importante alla teoria delle funzioni ellittiche. Invertendo la questione si arrivò alla ricerca delle curve rettificabili mediante funzioni prestabilite; se queste sono le funzioni circolari si ebbero in conseguenza le curve di Serret, mentre se sono funzioni euleriane si incontrarono le spirali sinusoidi, che il conte di Fagnano aveva studiate un secolo innanzi. A un'altro genere di inversione devono la vita nuove curve; cioè, mentre la geometria analitica insegna a determinare l'aspetto delle curve rappresentate da una data equazione, si propose il problema di determinare le equazioni di curve aventi una forma prestabilita; esso fu il punto di partenza di studi che guidarono alle rodonee di Guido Grandi, al « trifolium pratense » del Brocard, alle foglie geometriche, ecc.*

*Una nuova spinta allo studio delle linee piane si ebbe quando, verso la metà del secolo XVII, si cominciò a ricercare le proprietà meccaniche di curve conosciute o a proporsi la ricerca di curve aventi prestabilite proprietà meccaniche. Allora si avvertirono le più interessanti proprietà dell'ordinaria cicloide, allora si scoperse che la parabola semicubica (l'unica parabola rettificabile) risolve il problema di Leibniz della « curva descensus aequabilis », allora si determinarono l'isocrona paracentrica, la catenaria, la trattrice e la curva elastica. Nè queste sono le uniche curve fisico-matematiche a cui siasi giunti; come tali devono considerarsi le ovali di Cartesio, nate dalla teoria matematica della luce, le ovali di Cassini, pretese traiettorie degli astri, poi le linee isofane, la spirale di Galileo, la catenaria di eguale resistenza, la concospirale, le curve di Lissajous, l'erpolodia, la spirale di Poincot, la curva elettromagnetica di Emilio Weyr, la clotoide ed altre di minor conto.*

*La ricerca di linee le cui tangenti o la cui curvatura godono di proprietà prestabilite, resa possibile con la creazione del calcolo integrale, condusse pure a nuove curve; prime le linee di Debeaune, poi le curve di Ribaucour, la spirale di Norwich e la curva di Eulero. A innumerevoli enti analoghi guidò poi il mutamento delle coordinate, concepito dal Varignon e svolto in varie direzioni dai geometri posteriori.*

*La geometria coltivata secondo i concetti di Descartes e Fermat, concetti che dominarono durante tutto il secolo che seguì la loro morte, presenta gravi inconvenienti, primo fra tutti la necessità di ricorrere costantemente alla considerazione della figura per calcolare, volta per*

volta, le espressioni delle quantità considerate, in base a una opportuna scelta degli assi di riferimento.

I primi tentativi per ovviare a siffatto inconveniente risalgono alla fine del Secolo XVIII e sono dovuti all'influenza di Lagrange. Ne è prova il seguente brano della Prefazione del grande *Traité de calcul différentiel et intégral* (Paris, 1797) di S. F. Lacroix: « *En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au lecteur qu'il existoit une manière d'envisager la géométrie, qu'on pourrait appeler Géométrie analytique, et qui consisteroit à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa Méchanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et du mouvement* ». Questa nuova direzione fu in seguito concordemente adottata e ha finito per condurre all'identificazione della teoria delle curve algebriche con quella delle forme algebriche e portò a una vasta conoscenza delle proprietà di dette curve che non si perdono per proiezione e in pari tempo alla considerazione di curve dotate di proprietà invariantive (quali le curve di Lüroth, di Caporali, di Klein, ecc.) e alla ricerca di quelle che si mutano in se stesse per effetto di una o più trasformazioni proiettive.

La risultante disciplina, oltrechè escludere le curve trascendenti, non è capace di soddisfare un altro desiderio, quello cioè di emancipare dalla costante considerazione degli assi coordinati e in genere dagli elementi di riferimento che entrano in qualunque sistema di geometria analitica, in conseguenza, di indurre ad operare esclusivamente sopra elementi relativi agli enti geometrici considerati. A soddisfare quel desiderio tentò Leibniz di provvedere mediante la sua *Charateristica geometrica*, ma si limitò a pochi cenni rimasti ignoti alla generalità dei matematici sino al giorno in cui fu pubblicato il suo carteggio; essi però non furono sterili, chè H. Grassmann, svolgendoli, giunse al « *calcolo geometrico* » ben noto a chi ne conosce la fondamentale opera dal titolo *Die Ausdehnungslehre*. Allo stesso intento mirarono coloro che si sforzarono di rappresentare una curva mediante equazioni in cui non entrasse alcun elemento estraneo, ma soltanto quantità inerenti alla curva, quali la lunghezza dell'arco e il raggio di curvatura. Le origini di siffatti tentativi risalgono a ben più di un secolo fa, giacchè sin dal 1798 il Lacroix nel II volume del suo già citato *Traité*, dopo avere esposta un'applicazione dell'anzidetta rappresentazione analitica di una curva, osservò: « *cette manière de presenter l'équation d'une courbe, est remarquable en ce qu'elle n'emploie que des quantités absolument inhérents à la courbe proposée et qu'elle ne laisse d'arbitraire que le choix du premier point* ». Nella stessa direzione procedettero poi Whewell e Onnen; ma il matematico a cui questo nuovo

ramo della geometria è debitore di un assetto pienamente soddisfacente è E. Cesàro la cui *Geometria intrinseca* è tuttora e rimarrà sempre opera classica sull'argomento. A questa nuova diramazione della geometria devono la vita molte curve trascendenti, mentre essa ha rivelate nuove proprietà dianzi ignote di linee sconosciute da secoli; nè va taciuto che combinando i nuovi concetti introdotti con quello di mutamento delle coordinate si ottennero intere categorie di nuove figure dianzi sfuggite all'attenzione dei matematici.

Va ancora rilevato che, con la creazione della teoria delle curve panalgebriche, si è mosso il primo passo verso una sistematizzazione delle ricerche sparse sulla teoria delle linee piane che non sono algebriche.

Merita di essere da ultimo notato che fecondissima dal nostro punto di vista fu l'idea di associare ad una curva altra deducibile con una determinata legge (in tal modo si ottennero le evolute e le evolventi, le radiali, le caustiche, ecc.), nonchè quella di applicare alla stessa una delle trasformazioni geometriche che caratterizzano la geometria moderna.

Durante più di un secolo l'attenzione dei geometri fu assorbita dalla ricerca delle proprietà delle figure che non mutano di fronte a una trasformazione proiettiva; è caratteristica dell'odierna ricerca geometrica la considerazione delle trasformazioni birazionali e la ricerca delle corrispondenti proprietà invariantive delle figure; quando avrà raggiunto un sufficiente grado di perfezione e sviluppo condurrà senza dubbio a nuove curve; di esse sarà chiamato a occuparsi colui che vorrà in avvenire proseguire l'opera di cui noi ora scriviamo l'ultima parola.

Genova, Primavera 1930.

ADDIZIONI.

Le costruzioni esposte a pag. 21 sono illustrate dalle seguenti figure:

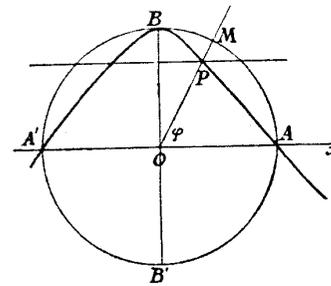


Fig. 2 bis.  
Quadratrice di Tschirnhausen.

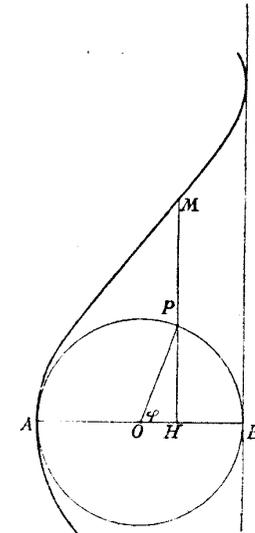


Fig. 2 ter. — Curva di Ozanam.

La curva accennata in fine della pag. 75 ha il seguente aspetto:

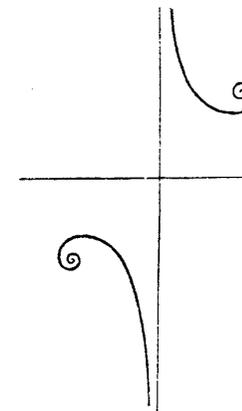


Fig. 12 bis. — Evoluta di una clotoide.

---



---

## INDICE DEI NOMI CITATI

---

### A

- Abdank-Abakanowicz, 385.  
 Adam, 61, 81, 85, 149.  
 Ajello, 421.  
 Agnesi M. G., 191.  
 Alessandri, 47.  
 Alessandro Magno, 423.  
 Alexander, 237.  
 Allé, 65.  
 Allégret, 238.  
 Ameseder, 372, 373.  
 Amodeo, 94.  
 Amoroso, 253.  
 Ampère, 128.  
 Amstein, 79.  
 Andreasi, 81.  
 Angeli (degli), 35, 44.  
 Aoust, 138, 218, 261, 297, 418.  
 Apollonio, 141, 423, 425.  
 Appell, 144.  
 Apt, 196.  
 Aranja, 200.  
 Archimede, 12, 34-42, 43, 45, 46,  
 54, 55, 76, 424, 425, 426.  
 Aristotele, 76, 425.  
 Armanini, 246.  
 Aubry, 68.  
 Audibert, 324.  
 Azout, 39.  
 Azzarelli, 26, 390.

### B

- Baldus, 68.  
 Baliani, 46.  
 Ballitrond, 57, 115-124, 231.  
 Baltzer, 35.  
 Barbour, 199.  
 Barisien, 364, 371, 385.  
 Barrow I., 17, 171, 180.  
 Barrow D. P., 125.  
 Barsotti, 189.  
 Basnage de Beauval, 213.  
 Basset, 283.  
 Battaglini, 200.  
 Beers, 253.  
 Beires, 353.  
 Béliidor, 179.  
 Bellavitis, 11, 108.  
 Bellermand, 105.  
 Beltrami, 25, 215, 216, 308.  
 Bennett, 122.  
 Bérard, 415.  
 Berg (van den), 66.  
 Bernoulli Daniele, 25, 104, 242.  
 Bernoulli Giac., 49, 50, 62, 66, 72,  
 90, 93, 152, 232, 236, 242, 243,  
 423.  
 Bernoulli Giov., 18, 55, 78, 88, 90,  
 92, 93, 145, 151, 152, 153, 156,  
 159, 164, 186, 213, 232, 236, 242,  
 245, 246, 257, 296, 345, 346, 350,  
 351, 353, 425.  
 Bernoulli Nicola, 104.  
 Bertrand, 377.  
 Besant, 138, 139, 163.  
 Biermann, 143.  
 Bitterli, 385.  
 Björling, 354, 378.  
 Blaschke, 363.  
 Blum, 111.  
 Bois-Reymond (du), 196.  
 Böklen, 114, 119.  
 Boltzmann, 196.  
 Bompiani, 253.  
 Boole, 11, 210.  
 Booth, 348, 363.  
 Bordoni, 223.  
 Bossut, 26.  
 Bouguer, 272.

Bouillaud, 86.  
 Bouquet, 35.  
 Bourget, 378.  
 Bourlet, 219.  
 Bouvelles (de), 77.  
 Bouwmann, 255.  
 Braude, 164, 316, 363.  
 Briot, 35.  
 Brisone, 57.  
 Brocard, 1, 20, 28, 52, 93, 139, 218, 230, 272, 275, 374, 375, 390, 415, 427.  
 Broden, 196.  
 Broglio, 196.  
 Brougham, 215.  
 Burali-Forti, 192, 342.  
 Burckhardt, 296.  
 Burg, 42.  
 Burmester L., 40, 272.

## C

Cabreira, 249.  
 Cantor M., 35, 78, 184, 261, 264, 272, 345, 381.  
 Caporali, 428.  
 Caraccioli, 35.  
 Carcavi, 38, 45, 94.  
 Carda, 179.  
 Cardano, 122.  
 Cardoso Laynes, 407.  
 Carpo d'Antiochia, 76.  
 Cartesio: *vedi* Descartes.  
 Carré, 190.  
 Cassini, 427.  
 Caswell, 112.  
 Catalan, 26, 64, 138, 280, 321, 322, 364.  
 Cauchy, 322.  
 Cavalieri, 38, 44, 45, 77, 185.  
 Cayley, 284, 286, 319, 330, 354, 378.  
 Cerljus, 245.  
 Cesàro, 19, 26, 27, 73, 74, 91, 116, 133, 135, 139, 142, 157, 162, 163, 196, 204, 214, 217, 237, 260, 275, 286, 336, 337, 429.  
 Clebsch, 200, 284.  
 Clebsch-Lindemann, 2.  
 Challis, 139.  
 Chasles, 20, 163, 378, 379.  
 Chateau, 109.  
 Cifarelli, 240.  
 Clairaut, 40, 41, 97, 98, 131, 378.  
 Clifford, 36.  
 Colson, 31, 258.  
 Collignon, 184, 404.

Collins, 68.  
 Conone da Samo, 34.  
 Copernico, 122.  
 Coriolis, 238.  
 Cornu, 73, 344.  
 Costa Lobo (da), 71.  
 Côtes, 59, 60, 180, 181, 188, 230, 231.  
 Coulomb, 379.  
 Cournot, 35.  
 Craper, 1, 123.  
 Craig, 187, 358, 399.  
 Crelle, 319, 323.  
 Curtis, 354.  
 Cusa (Cardinale di), 77.  
 Curtze, 122.

## D

Darboux, 6.  
 Davis Gilbert, 238.  
 Debeaune, 149-155, 185, 427.  
 Deaux, 28.  
 Delaunay, 138-144, 341.  
 Desargues, 100.  
 Descartes, 61, 62, 63, 77, 81, 85, 86, 106, 116, 149, 151, 152, 185, 270, 425, 426, 427.  
 Dettonville: *vedi* Pascal B.  
 Diderot, 125.  
 Diels, 76.  
 Dienger, 323.  
 Dieu, 116.  
 Dingeldey, 207, 416.  
 Dinostrato, 13, 15, 22, 31, 40, 76.  
 Diocle, 425.  
 Diofanto, 425.  
 Dittrich, 68.  
 Doucet, 378.  
 Dubois, 1, 161, 163.  
 Dubois-Aymé, 272.  
 Dürer, 99, 318.  
 Duncker, 253.  
 Dunkel, 92.  
 Dunoyer, 275.  
 Duran-Loriga, 215.  
 Durège, 120.  
 Dyck (von), 252.

## E

Eckhardt, 108.  
 Egger, 25.  
 Ehrhorn, 139.  
 Eichler, 109.  
 Ekama, 139.  
 Elgé: *vedi* G. de Longchamps.

Ellis, 85, 92.  
 Emery, 238.  
 Enneper, 50.  
 Ernst, 342, 417.  
 Euclide, 425.  
 Eudosso, 426.  
 Eulero G. A., 189.  
 Eulero L., 11, 35, 92, 94, 104, 136, 164, 172, 173, 174, 191, 192, 236, 242, 249, 294, 527.

## F

Faà di Bruno, 180.  
 Fabri, 59.  
 Fabbri, 64, 77.  
 Fagnano, 427.  
 Falkenburg, 26.  
 Favaro, 68.  
 Fermat, 38, 43, 44, 45, 49, 60, 77, 81, 82, 85, 86, 94, 181, 255, 426, 427.  
 Ferrari, 319.  
 Finsterbusch, 187, 350, 379.  
 Fleischer, 264.  
 Fleur St. Denis, 321.  
 Fontana, 23, 25, 191.  
 Forsyth, 246.  
 Fontanes, 378.  
 Fontenelle, 190, 297, 345.  
 Forti, 212.  
 Fourret, 2, 18, 30, 52, 105, 202, 302.  
 Fourier, 182.  
 François, 108.  
 Franke, 248.  
 Franklin, 182, 294.  
 Frenet, 106.  
 Fresnel, 73.  
 Frolov, 416.  
 Fuss N., 104, 155, 168, 349.  
 Fuss P., 32, 189.  
 F. J., 95.

## G

Gaedeke, 362.  
 Galileo, 45, 48, 64, 77, 93, 232, 427.  
 Galton, 253.  
 Gauss F., 275.  
 Genocchi, 354.  
 Gergonne, 353, 354.  
 Gerhardt, 18, 80, 87, 232, 318.  
 Giamblico, 76.  
 Giannini, 84.  
 Giard, 230.  
 Gildemeister, 105.

Glänzer, 408, 411.  
 Gob, 112.  
 Goldbach, 75.  
 Goornaghtigh, 157, 317.  
 Gordan, 200.  
 Goupillière (de la), 66, 125, 269, 295, 302.  
 Grabau, 70.  
 Grandi, 186, 191, 427.  
 Grane, 291, 355.  
 Grassman, 428.  
 Grave, 197.  
 Greenhill, 144, 209, 245.  
 Gregory D., 232, 233.  
 Gregory G., 185.  
 Gudermann, 238.  
 Guillery, 91.  
 Günther, 40, 77, 95, 99, 234, 272, 318.  
 Gütsche, 378.  
 Guldin, 86.

## H

Habich, 139, 354, 379.  
 Halley, 113.  
 Halphen, 202, 243, 284, 313, 314.  
 Hamilton, 331.  
 Heinzerling, 238.  
 Henkel, 393.  
 Hennig, 105, 113, 116.  
 Henry, 39.  
 Hermann, 55, 153, 232.  
 Herwig, 306.  
 Hess, 248.  
 Hessel, 191.  
 Heymann, 70, 186, 215, 419.  
 Hiern, 289.  
 Hilton, 379.  
 Hochheim, 388, 389, 397.  
 Hoffmann, 42, 52, 61.  
 Hogarth, 179.  
 Holst, 121.  
 Holzmüller, 69, 209, 251.  
 Hôpital (de l'), 17, 87, 93, 151, 164, 188, 246.  
 Houël, 39.  
 Hülson, 181.  
 Hultsch, 13, 34, 40, 43.  
 Humbert, 353.  
 Hutton, 22.  
 Huygens, 39, 40, 43, 44, 45, 78, 80, 84, 86, 87, 90, 91, 92, 94, 96, 97, 106, 123, 151, 179, 184, 186, 188, 193, 213, 214, 216, 218, 232, 233, 245, 281, 345, 416.  
 Hyde, 120.

## I

Ipparco, 99.  
Ippia, 13, 15, 76, 424.

## J

Jacobi, 3, 200, 202, 377.  
Janisch, 42, 358.  
Jerabek, 118.  
Jerek, 418.  
Jones, 22.  
Jonquières (de), 410.  
Juel, 118, 135.  
Jullien, 164.  
Jung, 26.  
Jungius, 232.  
Juredini, 124.

## K

Kästner, 381, 388.  
Keplero, 423.  
Kiepert, 378.  
Kiseljak, 406.  
Klein, 7, 199, 267, 339, 428.  
Klerity, 219.  
Kleyer-Haas, 35, 191, 215.  
Kneser, 92, 236.  
Knopp, 196.  
Koch (von), 196.  
Koenigs, 143, 354.  
Königsberger, 377.  
Kortweg, 232.  
Kosch, 204.  
Köstlin, 94, 271, 319, 351.  
Kramp, 192.  
Krause, 74, 129, 259, 260.  
Kubota, 71.  
Kulhoff, 275.  
Küpper, 84.

## L

Lacour, 144.  
Lacroix, 94, 243, 428.  
La Gournerie, 131.  
Lagrange, 296, 428.  
Laguerre, 319, 328, 351, 353, 417.  
La Hire, 100, 104, 112, 115, 122, 125, 138, 143, 348, 378.  
Laisant, 60, 95, 417.  
Laloubère, 45, 77, 94.  
Lamarle, 139.

Lamb, 252.  
Lambert, 353.  
Lamé, 426.  
Lancrot, 297, 299.  
Lane, 143.  
Laplace, 377.  
Laquière, 377.  
Léautand, 16.  
Legendre, 32, 238, 246.  
Legoux, 202.  
Lehmann, 92.  
Lehmus, 000.  
Leibniz, 1, 18, 25, 46, 49, 78, 80, 85, 87, 90, 93, 100, 151, 153, 156, 179, 184, 186, 188, 213, 214, 218, 232, 233, 245, 270, 318, 345, 416, 426, 427, 428.  
Le Paige, 82, 122.  
Lepiney (de), 351, 375.  
Levi, 308.  
Lie, 199, 207, 318, 339, 358.  
Light, 294, 369.  
Lindelöf, 139.  
Lisleferme, 416.  
Lissajous, 121, 213, 427.  
Ljungh, 378.  
Longchamps (de), 243, 271, 408, 417.  
Lorgna, 23.  
Loria, 2, 13, 43, 45, 47, 64, 151, 179, 185, 188, 190, 325, 328, 331, 358.  
Losehand, 330.  
Loucher, 378.  
Lüroth, 428.

## M

Mackenzie, 179.  
Mac Laeren, 354.  
Maclaurin, 243, 274, 358.  
Macri, 345.  
Maggi, 310.  
Magnus, 35, 319, 351.  
Mainardi, 11, 92.  
Mairan, 345.  
Malfatti, 23.  
Malus, 351.  
Manfredi, 151, 270.  
Mannheim, 65, 90, 97, 114, 115, 128, 129, 163, 173, 235, 248, 260, 325, 342, 379, 404, 416, 417, 418.  
Mansion, 27, 182, 195, 289, 299.  
Maometto, 425.  
Martin, 52.  
Mascheroni, 47.  
Massau, 254, 385, 418.  
Matthes, 344.

## P

Maupertuis, 267, 272.  
Maurolico, 345.  
Mehmke, 192.  
Meissner, 66.  
Menecmo, 423, 424.  
Menelao, 43.  
Mercator, 11, 208, 212.  
Merkelbach, 138.  
Mersenne, 39, 43, 61, 77, 81, 82, 86, 181.  
Meyer A. E., 70.  
Michalitschke, 35.  
Michel, 317.  
Minich, 11.  
Minchin, 238.  
Mineo, 342.  
Miquel, 145.  
Monge, 134.  
Montferrier, 35, 52, 192.  
Montucla, 16, 78, 85, 91, 184, 345.  
Morley, 108, 124, 164, 225, 275.  
Moritz, 109.  
Müller C. H., 164.  
Müller, E., 264.  
Multedo, 192.  
Mylon, 39, 84.

## N

Naumann, 69, 70.  
Neuberg, 84, 108, 131, 230, 231.  
Newton A., 181.  
Newton I., 18, 93, 112, 125, 245, 246, 258, 424, 426.  
Nicolaidis, 163, 170, 289.  
Nicole, 138.  
Nicomede, 99, 345, 425.  
Nies, 264.  
Nitz, 259.  
Nobile, 274.

## O

Ocagne (d'), 112, 192, 272, 325, 328, 385, 487, 399, 403, 417.  
Oekinghaus, 182.  
Ohrtmann, 94.  
Oldenburg, 18, 82, 87, 151.  
Olivier, 58, 68, 91, 308.  
Onnen, 74, 138, 286, 428.  
Opitz, 144.  
Orazio, 60.  
Osgood, 196.  
Otto, 27.  
Ozanam, 21, 179, 429.

## Q

Querret, 273.  
Quetelet, 353.

## R

Rabut, 235.  
Raimondi, 375.  
Ras, 378.  
Rayleigh, 179.  
Rankine, 42.  
Réaumur, 297, 299, 305.  
Reed, 105.  
Rehfeld, 381.  
Reincke, 109.  
Reitz, 252.

- Résal, 17, 417.  
 Retali, 41, 375, 396, 397.  
 Ribaucour, 156, 167, 213, 214, 236, 244, 427.  
 Riccati J., 168, 170, 218.  
 Riccati V., 153, 220.  
 Ricci, 45, 64, 96.  
 Ridolfi, 99, 120, 122, 125.  
 Riemann, 208.  
 Rinaldis (de), 190.  
 Roberts S., 121, 318, 363.  
 Roberts W., 364, 372.  
 Roberval, 16, 39, 77, 78, 82, 86.  
 Roth, 125, 179.  
 Roomer, 100.  
 Rondet, 18, 180.  
 Rosén, 360.  
 Roth, 137.  
 Rouquet, 302.  
 Rudio, 24, 27, 260.  
 Ruffini, 341, 371, 374.  
 Rulf, 42, 53, 388.
- S
- Saavedra, 192.  
 Sacchi, 60, 145, 175, 255.  
 Saladini, 153, 220.  
 Salmon, 294, 314, 328.  
 Salmon-Fiedler, 123, 185, 215, 274, 284, 313, 328, 353.  
 Sang, 79, 182.  
 Santangelo, 342.  
 St. Germain, 86, 94, 248.  
 St. Laurent, 273, 353.  
 S.to Vincentio (G. di), 38, 424.  
 Santini, 255.  
 Saussure (de), 134, 135.  
 Scheffers, 35, 65, 167, 218, 358, 369.  
 Scheffler, 191.  
 Schell, 233, 238, 245.  
 Schering, 108, 324.  
 Schiffner, 131.  
 Schilling, 105, 108.  
 Schimmack, 236.  
 Schlömilch, 60, 70, 105, 169, 170, 191, 230, 237, 280, 353, 382, 384, 413.  
 Schotten, 379.  
 Schoute, 5.  
 Schrader, 218.  
 Schubert, 252.  
 Schwarzband, 109.  
 Schwering, 143, 192, 260.  
 Sédillot, 34, 52.  
 Seeweg, 252.
- Sellerie, 196.  
 Serret J. A., 35, 73, 93, 125, 192, 266, 289, 427.  
 Serre, 122.  
 Shaw, 22.  
 Sharp Curran, 286.  
 Sibirani, 413.  
 Silvabella, 246.  
 Simon, 35.  
 Sisam, 419.  
 Sluse (de), 44, 82, 258.  
 Sobotka, 382, 385, 387.  
 Socrate, 424.  
 Sommerville, 121.  
 Souvey, 35.  
 Sparre (de), 248.  
 Spitzer, 142.  
 Spurge, 251.  
 Stein, 186.  
 Steiner G. F., 354.  
 Steiner J., 366, 418, 419.  
 Stöckly, 25.  
 Stone, 18, 180.  
 Strauch, 344.  
 Strebor *vedi* Roberts W.  
 Sturm C., 9, 35, 138, 144, 170, 171, 272, 275, 285, 353, 364.  
 Sucharda, 406.  
 Summer, 208, 212.  
 Sylvester, 35, 54, 170, 286.
- T
- Tacquet, 122.  
 Tait, 251.  
 Talbot, 362, 364.  
 Tannery, 46, 76, 81, 85, 149, 185.  
 Tarry, 135.  
 Taylor, 377, 378.  
 Teixeira, 178, 180, 192, 226, 249, 299, 324, 364.  
 Terquem, 272, 358.  
 Theisinger, 379.  
 Thieme, 271.  
 Thomson, 237.  
 Timeo, 34.  
 Timerding, 209.  
 Timmermans, 287.  
 Tisserand, 57.  
 Todhunter, 163.  
 Toone Smirneo, 52.  
 Torricelli, 45, 63, 64, 65, 78, 185, 186, 426.  
 Tortolini, 95, 260, 264, 362.  
 Tschirnhausen, 20, 21, 179, 345, 346, 348, 424, 429.

Tsruta, 364.  
 Tucker, 331, 332.  
 Turrière, 164.

## U

Unverzagt, 260.

## V

Valde, 155.  
 Vandermonde, 192.  
 Vargas y Aquirre (de), 182. <sup>3</sup>  
 Varignon, 46, 55, 61, 98, 164, 255, 257, 259, 270, 427.  
 Vassura, 45.  
 Vaumesle, 123.  
 Verduzio, 139.  
 Verluyis, 206.  
 Vernier, 250.  
 Viète, 16.  
 Vietor, 106.  
 Vincent, 186.  
 Vinci (da), 272.  
 Virgilio, 60.  
 Vogel, 195.  
 Völker, 390.

## W

Wallace, 4, 125.  
 Wallis, 44, 77, 80, 84, 85, 86, 179, 193, 194.  
 Walsh, 317.  
 Walter, 82.  
 Waring, 138.  
 Wasteels, 235, 253.  
 Watt, 425.  
 Weierstrass, 196, 245, 264.  
 Weissenborn, 345.  
 Weitz, 235.  
 Werth, 269.  
 Wetzell, 106.  
 Weyer, 51.  
 Weyr, 261, 354, 427.  
 Whewell, 17, 82, 171, 180, 286, 428.  
 Wieleitner, 74, 124, 249, 271, 319.  
 Wiener, C., 105, 115, 196.  
 Wiener H., 40, 112.  
 Withworth, 62.  
 Wölffing, 22, 100, 133, 173, 186, 260.  
 Wolf, 100.  
 Wolstenholme, 108, 124, 378.  
 Wood, 26.  
 Wren, 77, 84.

## Z

Zehme, 116.  
 Zimmermann, 377.