

GINO LORIA

Professore nell'Università di Genova

CURVE PIANE SPECIALI

ALGEBRICHE E TRASCENDENTI

TEORIA E STORIA

VOLUME I. - CURVE ALGEBRICHE

con 122 figure illustrative intercalate nel testo

PRIMA EDIZIONE ITALIANA



ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO

1930

CURVE PIANE SPECIALI
ALGEBRICHE E TRASCENDENTI

R. Conti
1943

GINO LORIA
Professore nell'Università di Genova

CURVE PIANE SPECIALI

ALGEBRICHE E TRASCENDENTI

TEORIA E STORIA

VOL. I. - CURVE ALGEBRICHE
con 122 figure illustrative intercalate nel testo



ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO
1930

PROPRIETÀ RISERVATA

STAB. TIPOGRAFICO STUCCHI, CERETTI (Soc. An.) - VIA S. DAMIANO, 16
(Printed in Italy)

PREFAZIONE

Alla formazione della variopinta schiera di curve particolari, algebriche e trascendenti oggi note contribuirono pressochè tutti i matematici che si seguirono dall'epoca greca sino ai nostri giorni, gli uni sospinti dal desiderio di accrescere il numero delle figure geometriche meritevoli di studio, gli altri da quello di interpretare geometricamente qualche formola di analisi, alcuni animati dalla speranza di risolvere certi problemi geometrici sinora ribelli, altri guidati da applicazioni meccaniche o fisiche. Le conseguenti ricerche sono, non soltanto diverse per aspetto e natura, ma anche disperse nelle opere più svariate, dalle imponenti memorie pubblicate da grandi Accademie ai modesti articoli di giornali destinati agli studenti, dai libri ormai ascritti fra i classici delle scienze esatte agli opuscoli fatalmente destinati a una limitata notorietà, quali sono le Inauguraldissertationen, le Habilitationsschriften e le Programmabhandlungen. Le innumerevoli circostanze in cui si vede una stessa curva scoperta più volte, una stessa proposizione trovata di differenti autori, uno stesso problema trattato più volte come nuovo, resero manifesta la necessità di porre un termine a tale deplorabile sciupio di lavoro, fece sentire vivamente il bisogno di coordinare l'immenso materiale esistente, fece chiedere da molte parti un'opera nella quale di tutte le curve conosciute fossero esposte le definizioni e le proprietà fondamentali.

È merito della R. Accademia delle Scienze di Madrid di aver per prima espresso pubblicamente siffatto desiderio e di avere contribuito a soddisfarlo proponendo come tema pel concorso annuale scadente il 31 Dicembre 1894 la compilazione di un « catalogo ordinato di tutte le curve di qualunque specie che riceverono un nome particolare, con brevi indicazioni riguardo a la loro forma, le loro equazioni, le loro proprietà ed i loro inventori ». Non avendo quell'Accademia ottenuta la desiderata risposta, essa ripropose lo stesso tema pel concorso scadente il 31 Dicembre 1897. Nel frattempo un illustre matematico francese, Hâton de la Goupillièrre, proponeva un argomento analogo come soggetto di ricerca in L'intermédiaire des mathématiciens¹).

¹) T. I, 1894, p. 37.

Gli è a questi pubblici ed autorevoli inviti di occuparsi metodicamente delle curve speciali esistenti che deve la vita l'opera presente; la quale riscosse dalla R. Accademia di Madrid la più lusinghiera e completa approvazione quando — sotto forma diversa da quelle che essa attualmente riveste¹⁾ — venne, sul finire del 1897, sottoposta all'illuminato giudizio di quel grande sodalizio scientifico²⁾.

L'esecuzione di un lavoro quale è quello di cui da tante parti lamentavasi la mancanza, offre non poche nè lievi difficoltà, dovendosi anzitutto delineare con cura i confini, dovendosi poi adunare con scrupolosa diligenza il materiale da sfruttare, dovendosi da ultimo scegliere il metodo per distribuire in buon ordine la materia.

Riguardo alla questione quali dovessero essere le curve da considerare, io l'ho risolta escludendo: 1° le linee composte di parti eterogenee, quindi non rappresentabili mediante una equazione unica, perchè esse appartengono all'architettura, alla fisica o a discipline applicate, non già alle matematiche pure; 2° le linee a doppia curvatura, perchè è noto essere esse enti geometrici di natura totalmente differente dalle curve piane: la trattazione di esse è quindi riservata ad un'esposizione della geometria comparata delle curve sghembe³⁾ analoga al presente saggio di geometria comparata delle curve piane. Per converso ho incluse tutte le curve piane algebriche e trascendenti che già ricevettero un nome speciale, non che le altre le quali, benchè tuttora anonime, meritano un posto stabile nella scienza.

Riguardo al materiale da utilizzare, io ho ricorso, posso dire, a tutta la letteratura matematica a me accessibile, essendomi convinto per esperienza, come in ben poche, e forse in nessuno dei rami della matematica, manchino investigazioni sopra curve speciali. Ma il non avere io esclusa a priori alcuna categoria di opere matematiche, non implica che a me non ne sia sfuggita alcuna d'importante; e per le mancanze inevitabili quanto involontarie da me commesse, invoco sin d'ora l'indulgenza delle persone competenti ed ho fiducia che essa non mi verrà negata da chiunque abbia un'idea, anche soltanto approssimativa, della odierna ricchezza della scienza matematica. Va ancora qui osservato che per ciascuna curva io mi limitai a rintracciare (per quanto ciò fu possibile) le origini e a dimostrare le più salienti prerogative, senza volere enumerare tutti i teoremi e tutti i lavori relativi;

¹⁾ In particolare, nella preparazione per la stampa si è tenuto conto, nei limiti del possibile, delle pubblicazioni, veramente numerosissime, di cui le curve piane furono oggetto in quest'ultimo trentennio; perciò la presente edizione italiana contiene miglioramenti e aggiunte anche rispetto alle due tedesche di quest'opera (1902 e 1910-11).

²⁾ Veggasi: *Anuario de la Real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales*, 1900 (Madrid), p. 141-153 e 299-322; oppure *El Progreso matemático*, 1900, p. 201-219.

³⁾ Un primo tentativo in tale senso è rappresentato dall'opera dell'autore, *Curve sghembe speciali, algebriche e trascendenti* (Bologna, Zanichelli, 1925), naturale proseguimento della presente.

dal redigere siffatti elenchi io fui sconsigliato dalla mole enorme che avrebbe assunto il mio lavoro e dalla speranza che altri si accinga a comporre una completa bibliografia delle curve piane, di cui già esistono ottimi saggi¹⁾.

Finalmente riguardo all'ordinamento della materia io ho creduto seguire un procedimento misto. Nella divisione di tutta l'opera in sette Libri io mi sono ispirato alla natura delle curve studiate, trattando, cioè, prima delle curve algebriche di ordini determinati (Libri I-IV) e poi di quelle di ordine qualsivoglia (Libro V); sono quindi passato alle curve trascendenti (Libro VI), per trattare da ultimo (Libro VII) di certe leggi di derivazione di curve da altre curve, le quali sono applicabili a qualsiasi linea geometrica. Invece nell'ordinamento dei Capitoli di ogni singolo Libro, elessi come principale criterio l'ordine storico, ma me ne staccai per far conoscere, dopo ogni singola curva, tutte quelle che in processo di tempo vennero da essa dedotte coll'aiuto di uno di quei processi generalizzatori alla cui fecondità l'odierna geometria è principalmente debitrice della sua ricchezza²⁾.

La forma di esposizione da me adottata ha un'impronta essenzialmente algebrica e venne da me prescelta anzitutto per somministrare ai giovani lettori una prova indiscutibile delle inesauribili risorse che offre oggi la geometria analitica a chiunque possieda il segreto del suo mirabile meccanismo, e poi perchè la pura geometria non può attualmente fornire una base di pari ampiezza e vastità a chi intende indagare le verità matematiche. Sopra i miglioramenti di forma e le aggiunte sostanziali arrecati dall'autore a quanto già si sapeva sull'argomento, il giudizio spetta al lettore intelligente; il quale se talora fosse tentato a biasimare l'ordine e la scelta delle materie ricordi essere « res ardua, vetustis novitatem dare, novis auctoritatem, obsoletis nitorem, obscuris lucem, fastidiis gratiam, dubiis fidem, omnibus vero naturam et naturae suae omnia »³⁾.

Alla Casa Editrice Hoepli, tanto benemerita della cultura italiana, i miei più vivi ringraziamenti per avere assunta la presente pubblicazione e averne fatta un'edizione degna della sua fama.

Genova, Autunno 1929.

PROF. GINO LORIA.

¹⁾ H. BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar le Duc, 1897 e 1899); E. WÖLFFING, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre der cyklischen Kurven* (Bibl. mathem., T. II, della 3ª Serie, 1901); H. BROCARD e T. LEMOYNE, *Courbes géométriques remarquables*, T. I (Paris, 1919).

²⁾ Maggiori particolari sulla materia trattata e l'ordinamento apprenderà il lettore dall'Indice.

³⁾ PLINIO, Prefazione alla sua *Historia naturalis*.

INDICE

Prefazione	p. v-vii
Indice	» VIII-xvi

LIBRO I.

LUOGHI PIANI E LUOGHI SOLIDI.

- CAP. I. La linea retta.** — 1. Esordio — 2. Vari modi per definire una retta — 3. La retta nella geometria metrica. Geometria della riga e geometria della riga e squadra. Geometria della retta. Osservazioni sopra le rette particolari che incontransi in teorie speciali p. 1-4
- CAP. II. La circonferenza.** — 4. La circonferenza nota agli antichi Egiziani — 5. La circonferenza nella geometria greca. La geometria del compasso — 6. Rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio — 7. Il circolo nel sistema geometrico di Bolyai. I punti ciclici del piano. La geometria dello spazio cerchiato p. 5-8
- CAP. III. Le sezioni coniche.** — 8. Le coniche nell'antica geometria greca. 9. Continuazione: Apollonio e Sereno — 10. Le coniche come traiettorie degli astri e come curve rappresentabili in coordinate cartesiane mediante un'equazione di secondo grado. Il problema della rettificazione delle coniche; funzioni ellittiche e ellisse di Fagnano — 11. Le coniche nella geometria proiettiva sintetica. Legame fra la geometria della retta nello spazio e lo studio del sistema delle coniche di un piano. Ampiezza delle attuali conoscenze su queste curve p. 9-18

LIBRO II.

CURVE DEL TERZ'ORDINE.

- CAP. I. Classificazione.** — 12. Origini della teoria generale delle cubiche piane — 13. Forma canonica a cui può ridursi l'equazione di una curva piana del terzo ordine. Rappresentazione parametrica mediante funzioni ellittiche — 14. Teoremi di Newton e di Chasles sui tipi delle cubiche piane — 15. Classificazione di Newton perfezionata dai suoi commentatori — 16. Nomenclatura proposta da F. W. Newman — 17. Cenni intorno ad alcune cubiche speciali esenti da punti singolari p. 19-25

- CAP. II. Cubiche razionali in generale.** — 18. Rappresentazione parametrica generale. Applicazioni — 19. Rappresentazioni parametriche speciali alle cubiche con punto doppio, cuspidi e punto isolato. Applicazioni alla ricerca dei poligoni di Steiner — 20. Ricerche sulla rettificazione delle cubiche piane p. 26-33
- CAP. III. Cubiche circolari in generale.** — 21. Equazione generale delle cubiche circolari in coordinate cartesiane ortogonali. Fuochi. Metodi di generazione — 22. Considerazioni sopra alcune cubiche circolari speciali: curva focale; curve simmetriche; curve razionali. p. 34-38
- CAP. IV. La cissoide di Diocle.** — 23. Diocle e l'invenzione della cissoide — 24. Rappresentazione dei punti di una cissoide mediante funzioni trigonometriche. Descrizione della cissoide ideata da Newton. Vari metodi per generare una cissoide — 25. Rappresentazione delle coordinate dei punti di una cissoide in funzione razionale di un parametro. Applicazioni — 26. Altra rappresentazione parametrica della cissoide; applicazioni alla sua quadratura e alla cubatura di solidi che essa genera rotando — 27. Rettificazione; teorema di P. Fuss..... p. 39-51
- CAP. V. Generalizzazioni della cissoide.** — 28. La cissoide obliqua. Equazioni polare e cartesiana. Detta curva è l'inversa di una parabola — 29. Curve cissoidali. Cissoidi generali; costruzione delle tangenti; ordine nel caso in cui le basi siano curve algebriche. Una speciale cubica cissoidale — 30. L'ofuride; definizioni, proprietà, equazioni p. 52-58
- CAP. VI. La parabola cartesiana.** — 31. Definizione di una speciale trasformazione piana. Sua applicazione alla definizione della parabola cartesiana p. 59-60
- CAP. VII. La foglia di Descartes.** — 32. Definizione e storia di questa curva — 33. Trasformazione dell'equazione della foglia; conseguenti costruzioni della stessa — 34. Equazione polare della foglia. Sua rappresentazione parametrica. Generalizzazione della foglia..... p. 54-58
- CAP. VIII. La focale di Quetelet o strofoide obliqua, la logociclica del Booth o strofoide retta.** — 35. Definizione stereometrica di una categoria di curve — 36. Vari scopritori di essa; differenti nomi dati a tali curve — 37. Differenti equazioni delle strofoidi obliqua e retta. Proprietà di tutte le strofoidi — 36. Studio particolare della strofoide retta — 39. Svariate questioni geometriche in cui interviene la strofoide p. 69-80
- CAP. IX. Generalizzazioni della strofoide.** — 40. Le panstrofoidi. 41. Luogo dei piedi delle normali condotte da un punto di un piano a tutti i cerchi di un fascio. Altre generalizzazioni della strofoide. Le strofoidi generali p. 81-86
- CAP. X. La conoide slusiana.** — 42. Definizione e equazioni polare e cartesiana della curva — 43. Rappresentazione parametrica; conseguenze p. 87-90
- CAP. XI. Le cubiche razionali tangenti alla retta all'infinito, in particolare la cubica di Rolle.** — 44. Definizioni e equazioni. p. 91-99

- CAP. XII. Versiera, visiera e pseudoversiera.** — 45. Definizione, costruzione, equazione della versiera. Rappresentazione parametrica, quadratura, cubatura. Generalizzazione. La visiera di Peano e le sue proprietà — 46. La pseudo-versiera; sua genesi secondo G. de Longchamps. Sua presenza in scritti di Leibniz, J. Gregory e Ozanam. p. 93-99
- CAP. XIII. Le trisettrici del Maclaurin, del Catalan e del Longchamps.** — 47. Definizione e varie equazioni della trisettrice del Maclaurin; generalizzazione di essa secondo Cramer — 48. La trasformazione di Maclaurin. Applicazione di essa alla generazione di varie cubiche — 49. Prima podaria negativa di una parabola rispetto ad un suo fuoco come polo; secondo Catalan è una trisettrice; sua equazione — 50. La trisettrice del Longchamps; equazione di essa. Un'altra trisettrice p. 100-112
- CAP. XIV. La cubica duplicatrice e la foglia parabolica.** — 51. Definizione e equazione della cubica duplicatrice — 52. La foglia parabolica, retta o obliqua. Nota sopra altre cubiche considerate e denominate dal Longchamps. Cenni intorno ad altre cubiche particolari anonime p. 113-118

LIBRO III.

CURVE DEL QUART'ORDINE.

- CAP. I. Generalità. Classificazione.** — 53. Notizie sullo stato attuale della teoria delle curve del IV ordine. Forme invariantive di una forma binaria biquadratica. Classificazioni proposte da Euler e Cramer per le quartiche piane. Classificazione moderna. Classificazione topologica. 54. Quartiche piane speciali benchè esenti da punti singolari: quartiche di Clebsch, Geiser, Caporali, sezioni piane della superficie di Weddle; quartiche autocorrispondenti in un'omologia armonica, in particolare la quartica di Klein; curva di Wälsch-Humbert; quartiche trasformate in se stesse da una o più proiettività..... p. 119-128
- CAP. II. Quartiche razionali in generale.** — 55. Generazione proiettiva di una quartica razionale. Modo di dedurre una tal curva da una conica. Equazione risultante — 56. Rappresentazione parametrica di una quartica razionale; applicazioni — 57. Due quartiche razionali connesse alla teoria delle coniche — 58. Le quartiche con punto triplo; esempi, in particolare la scifoide..... p. 129-137
- CAP. III. Quartiche ellittiche in generale e quartiche bicircolari.** — 59. Le quartiche ellittiche come proiezioni di quartiche gobbe di prima specie. Rappresentazione parametrica mediante le funzioni ellittiche jacobiane. Applicazioni — 60. Quartiche bicircolari; loro proprietà; le dette curve come involuipi di cerchi — 61. Le quartiche bicircolari nello « spazio di cerchi » del piano — 62. Speciali quartiche bicircolari notevoli p. 138-148
- CAP. IV. Le spiriche di Perseo.** — 63. Le sezioni prodotte in un toro da piani paralleli all'asse. Loro equazioni; forme che possono assumere — 64. Delineazione col metodo della geometria descrittiva e genesi indicatane da R. de Sluse e dal Siebeck — 65. Le spiriche come isottiche di coniche. Loro presenza nella rappresentazione geometrica delle funzioni di una variabile complessa — 66. Le spiriche con punto doppio o lemniscate di Booth; loro proprietà..... p. 149-162

- CAP. V. **La concoide di Nicomede.** — 67. Notizia storica ed equazioni, polare e cartesiana, della concoide — 68. Costruzione delle normali, determinazione dei flessi; quadratura. Applicazione della concoide. p. 163-170
- CAP. VI. **Generalizzazioni della concoide di Nicomede, in particolare le conoidi a base circolare.** — 69. Cenno su una curva ideata dal Jerabek. Le conoidi a base qualunque e le curve conoidali. Teorema sull'area di una concoide a base qualunque; ordine della curva nel caso in cui la base sia una curva algebrica — 70. Le conoidi a base circolare, in particolare le lumache di Pascal; equazioni polare e cartesiana. Flessi e rettificazione — 71. Le coordinate dei punti di una lumaca in funzione razionale di un parametro. La lumaca come curva inversa di una conica. Altra quartica con due cuspidi e un punto doppio (« the cooked hat »)..... p. 171-182
- CAP. VII. **Le quartiche tricuspide.** — 72. La cardiode. Investigazione delle sue proprietà mediante una rappresentazione parametrica. Le cardioidi stellate di E. Cesàro — 73. L'ipocicloide tricuspide come involuppo delle rette di Wallace dei punti della circonferenza circoscritta a un dato triangolo. Rappresentazione analitica che ne risulta. Altre equazioni — 74. Teoremi sull'ipocicloide tricuspide. Rettificazione, quadratura, curvatura, equazione intrinseca. Cenno sulle quartiche tricuspide in generale p. 183-197
- CAP. VIII. **Quartiche podarie dell'ipocicloide tricuspide.** — 75. Una nuova genesi dell'ipocicloide tricuspide come involuppo. Podaria rispetto alla stessa curva di un punto del cerchio tritangente: il trifoglio obliquo; sua equazione e sue proprietà — 76. Il trifoglio retto e la foglia doppia retta. La foglia doppia obliqua. Altre curve congeneri — 77. Podaria di un ipocicloide tricuspide rispetto a un punto di una tangente cuspidale. Sua equazione e suoi casi particolari p. 198-206
- CAP. IX. **Le ovali di Cartesio.** — 78. Definizione data da Cartesio per certe ovali utili nello studio matematico della luce. Altra definizione e costruzione delle normali — 79. Equazione di dette linee. Costruzioni indicate da Chasles e genesi stereometriche delle stesse. I fuochi delle ovali di Cartesio — 80. Altre proprietà delle stesse. Le curve cartesiane p. 207-217
- CAP. X. **Quartiche poligonali simmetriche.** — 81. Equazione di definizione delle curve da studiare. Loro costruzione e loro quadratura. Cenno intorno ad una di esse considerata da Giacomo Bernoulli — 83. Le parabole virtuali di G. di S. Vincenzo; costruzioni relative — 84. Parabole virtuali che s'incontrano nel carteggio fra Huygens e Leibniz o che furono considerate da Cramer (in particolare il doppio cuore e la bisaccia). Altre curve analoghe di origine più recente. p. 218-232
- CAP. XI. **Quartiche razionali con un punto di contatto di due rami.** 85. Un problema proposto da G. von Gutschoven. La curva kappa che lo risolve; formole relative e costruzioni che ne derivano. Generalizzazione della curva kappa; i nodi — 86. La concoide di Kùlp. La curva di Jerabek — 87. Le « quartiques pyriformes » e l'« apienne ». p. 233-243
- CAP. XII. **Le concali.** — 88. Definizione delle concali. Loro equazione e loro traiettorie ortogonali. Le cissoidi biquadratiche; definizioni e proprietà p. 244-247

- CAP. XIII. **La curva cassiniana.** — 90. Origine e vari nomi della curva in discorso. Equazione cartesiana e contegno all'infinito di essa — 91. Teorema di Wangerin. Altre costruzioni della curva — 92. Tangenti, normali, curvatura, quadratura e rettificazione..... p. 248-255
- CAP. XIV. **Quartiche con tre nodi d'inflessione.** — 93. Notizie storiche sulla lemniscata di Bernoulli. Sua equazione — 94. Sue proprietà; equazioni polare e applicazioni della stessa; quadratura, curvatura, equazione intrinseca — 95. Rappresentazione in funzione razionale di un parametro; applicazioni — 96. Rappresentazione parametrica mediante funzioni iperboliche. Proprietà meccanica della lemniscata — 97. Altre curve con tre nodi d'inflessione; la Kohlenspitzkurve e la Kreuzkurve. La curva clepsidrica p. 256-269
- CAP. XV. **La Muschellini e la Trisecante.** — 98. Costruzione, classificazione e equazione della Muschellini di A. Dürer. Teoremi relativi. 99. La trisecante di P. Delanges. Equazioni e proprietà. p. 270-276
- CAP. XVI. **Quartiche derivabili da una conica.** — 100. Luogo dei punti medi delle curve di data lunghezza; la curva dei parametri di una data ellisse; linee isogone e linee di livello; la prunode; altre quartiche derivate da una conica secondo Steiner p. 277-280

LIBRO IV.

CURVE ALGEBRICHE PARTICOLARI DI UN ORDINE
DETERMINATO SUPERIORE A QUATTRO.

- CAP. I. **Curve di quinto ordine.** — 101. Proprietà generali; ricerche di Steiner e Morley. Classificazione in base al numero dei punti singolari. 102. Quintiche di genere $p=0$. 103. Quintiche di genere $p=1$. 104. Quintiche di genere $p=3$. Quintiche che ammettono un gruppo di trasformazioni lineari in sé p. 281-294
- CAP. II. **Curve di sesto ordine.** — § 1. *Generalità.* 105. Sguardo generale su alcune classi di sestiche speciali — § 2. *Sestiche collegate alle normali di una conica.* 106. Definizioni, equazioni, proprietà delle principali categorie di siffatte curve — § 3. *Sestiche focali.* 107. Luogo dei fuochi delle coniche di un fascio. Altri analoghi luoghi geometrici — § 4. *Altre curve di sesto ordine collegate alla teoria delle sezioni coniche.* 108. Definizioni ed equazioni p. 295-310
- CAP. III. **Curve di sesto ordine (continuazione).** — § 5. *Asteroidi e scarabei.* 109. Olistoidi e involuppi olistoidali. Caso particolare dell'asteroide obliquo o retto. Cenno sull'asteroide proiettivo. Studio particolareggiato dell'asteroide retto — 110. L'asteroide generale dell'Amseder — 111. Lo scarabeo come podaria dell'asteroide regolare; casi particolari — § 6. *La curva di Watt e le sue analoghe.* 112. Definizione della curva di Watt; costruzione e equazione — 113. Metodo di Darboux per trovare le espressioni delle coordinate di un punto qualunque della curva di Watt in funzione ellittica di un parametro — 114. Curve collegate alla curva di Watt. Altre curve analoghe utili in cinematica. p. 312-329
- CAP. IV. **Curve di sesto ordine (continuazione).** — § 7. *La nefroide e l'atritaloide.* 115. La nefroide. Sue applicazioni alla divisione d'un an-

golo in parti eguali - 118. L'atrifitaloide; sua origine e sue proprietà. 117. Una sestica che incontrasi in astronomia - § 8. *La cranioide e la capricornoide*. 118. La cranioide e il suo intervento nella teoria delle ombre. La capricornoide di Poncelet come caso speciale della cranioide - § 9. *Altre sestiche notevoli*. 119. La cornoide. Prima podaria negativa rispetto alla foglia doppia. Le caffèoidi..... p. 330-340

CAP. V. **Curve speciali di ordine determinato superiore a sei.** - § 1. *Curve d'ordine pari*. 120. Curve collegate alla teoria delle coniche. 121. Curva d'ordine 8 che s'incontra in astronomia. Il « trifolium pratense » - 122. La curva equipotenziale e le curve di livello. Curva generatrice del solido dotato di simmetria cinetica - § 2. *Curve d'ordine dispari*. 123. Cenni su alcune curve di 17° o 15° ordine. Una classe di curve provenienti dalla teoria delle funzioni lemniscatiche. p. 341-350

LIBRO V.

CURVE ALGEBRICHE PARTICOLARI
DI ORDINE QUALUNQUE.

CAP. I. **Generalità.** - 124. Ripartizione in varie classi delle curve da studiare. Le curve di Hermite e le curve modulari - 125. Osservazioni sulla ricerca della rappresentazione parametrica di certe curve razionali p. 351-355

CAP. II. **Le parabole di ordine qualunque.** - 126. Definizioni. Note storiche. Tutte le parabole sono curve razionali - 127. Teoremi relativi a tangenti, quadratura, cubatura e rettificazione delle parabole - 128. Le curve polari reciproche delle parabole sono curve della stessa specie. Costruzioni. Le curve paraboliche - 129. Speciali parabole notevoli; in particolare le parabole rettificabili e quelle che hanno coppie di archi a differenza rettificabile..... p. 356-369

CAP. III. **Le iperboli di ordine qualunque.** - 130. Definizioni. Analogie fra iperboli e parabole. Non esiste alcuna iperbole rettificabile. 131. Costruzioni. Curve iperboliche p. 370-375

CAP. IV. **Le perle.** - 132. Definizioni. Tangenti, quadratura e cubatura. 133. Osservazioni storiche sopra alcune perle di terzo e quarto ordine p. 376-383

CAP. V. **Curve di Lamé e Curve triangolari simmetriche.** - 134. Equazione generale delle curve di Lamé. Loro proprietà di simmetria. 135. Ordine di una curva di Lamé d'indice razionale. Numero delle specie di una curva di Lamé di dato ordine - 136. Equazione tangenziale di una curva di Lamé. Sua classe nel caso che l'indice sia razionale. 137. Osservazioni generali sulla forma di una curva di Lamé - 138. Enumerazione e descrizione delle nove forme sotto cui può presentarsi una curva di Lamé d'indice razionale - 139. Teoremi relativi alle curve di Lamé. Formola di quadratura - 140. Genesi delle curve triangolari simmetriche. Loro polari reciproche. Conseguenze - 141. Proprietà delle curve in discorso - 142. Ordine, classe, e genere di una curva simmetrica rispetto a un triangolo. Le curve binomie come forme limiti delle curve di Lamé p. 384-407

CAP. VI. **Le linee polizomali.** - 143. Definizioni; ricerche di Cayley; teoremi che ne risultarono - 144. Caso di scomposizione di una curva polizomale in altre d'ordine inferiore..... p. 408-411

CAP. VII. **Curve di Darboux ed Equilatero di P. Serret.** - 145. Estensione di una proprietà caratteristica della parabola. Equazione generale delle curve risultanti; proprietà di queste - 146. Un'altra considerazione che conduce alle stesse curve di Darboux di prima specie. 147. Estensione di una proprietà caratteristica del cerchio; genesi delle curve di Darboux di seconda specie - 148. Le equilatero di P. Serret; definizioni ed equazioni..... p. 412-418

CAP. VIII. **Le Rodonee di G. Grandi.** - 149. Loro definizione mediante un'equazione polare. Alcune loro proprietà di forma. Quadratura e rettificazione - 150. Ordine di una rodenea a indice razionale. Suoi punti doppi - 151. Numero delle specie distinte di una rodenea di dato ordine. Cenni intorno ad alcune rodonee notevoli. Concoidi delle rodonee. Le rodonee come curve di oscillazione. Una classe di curve più generali delle rodonee - 152. Le curve inverse delle rodonee o spighe..... p. 419-431

CAP. IX. **Le foglie geometriche.** - 153. Le ricerche di Habenicht. Equazioni di alcune curve da lui considerate p. 432-435

CAP. X. **Le ovali e le orbiformi.** - 154. Costruzione data dal Münger per infinite ovali. Costruzione speciale ad un'ovale di 6° ordine - 155. Ricerche di Eulero sulle curve di forma assegnata. Le curve triangolari e le loro evolventi; le orbiformi - 156. Rappresentazione analitica delle orbiformi e delle curve triangolari p. 436-445

CAP. XI. **Moltiplicatrici e mediatrici.** - 157. Particolarizzazione della costruzione del Münger. Costruzioni di tutte le curve $\rho = a \cos^m \omega$. 158. La campila di Eudosso secondo P. Tannery. Curva più generale considerata da B. Tortolini - 159. Le curve moltiplicatrici o mediatrici di Clairaut p. 446-455

CAP. XII. **Curve settrici.** - 160. Generalità sulle curve settrici. I. Le cicloidi anomali di T. Geva - 161. II. Settrici di Plateau. Equazioni e proprietà - 162-163. Cenni sopra altre settrici che possono considerarsi come casi particolari di quelle di Plateau - 164. III. Settrici di Hesse. IV. Settrici di Burali-Forti - 165. V. Settrici di van Griuten. VI. Settrici di Oekinghaus - 166. VII. Settrici di Kempe - 168. VIII. Le poliodi. IX. Settrici di E. Lampe. Loro equazioni, proprietà e casi particolari p. 456-484

CAP. XIII. **Curve dotate di centri o di assi di simmetria.** - 168. Definizione di centro; curve dotate di centro, loro equazione cartesiana, loro proprietà e loro intervento nella teoria generale delle curve algebriche - 169. Definizione di diametro; equazione di una curva avente un diametro. Teorema di Mannheim. Curve dotate di parecchi diametri. 170. Continuazione - 171. Una classe di curve dotate di parecchi assi di simmetria; le poligasteroidi. Equazioni e teoremi relativi. p. 485-500

CAP. XIV. **Curve autopolari. Curve anallgmatiche. Curve di direzione.** - 172. Metodo di Appell per trovare l'equazione di una curva autopolare - 173. Curve anallgmatiche loro genesi come involuppo di cerchi; teoremi che ne risultano - 174. Ricerche di Piquet; le curve isotrope - 175. Queste sono casi speciali delle curve potenziate di F. P. Ruffini - 176. Le curve di direzione di E. Laguerre..... p. 501-512

CAP. XV. **Geometria dei polinomi.** — 177. Genesi delle curve rizziche. Loro proprietà — 178. Le iperboli irregolari e regolari di ordine qualunque. Le lemniscate di ordine superiore. Altre curve analoghe più generali — 179. Le stelloidi — 180. Altre proprietà delle stelloidi. Cenni intorno ad altre classi di curve dedotte dalla rappresentazione dei numeri complessi p. 513-527

CAP. XVI. **Generalità sulla ricerca delle curve algebriche la cui rettificazione dipende da funzioni prestabilite. Curve rettificabili mediante archi di parabola, circolo o iperbole.** — 181. Enunciato del problema. Generalità per la risoluzione secondo Eulero — 182. Curve rettificabili mediante archi di parabola. Curve rettificabili mediante archi di circolo. Curve rettificabili mediante archi di iperbole p. 528-535

CAP. XVII. **Curve algebriche rettificabili mediante archi d'ellisse. Le curve di Serret.** — 183. Ricerche di Eulero sopra le curve rettificabili mediante archi di ellisse — 184. Ricerche del Serret sopra lo stesso argomento. Proprietà di una classe di curve da lui scoperte. p. 536-543

CAP. XVIII. **Curve algebriche rettificabili mediante archi di lemniscata. Le spirali sinusoidi.** — 185. Ricerche di Eulero e risultati che esse diedero — 186. Richiamo di alcune formule della teoria degli integrali euleriani. Applicazione alla lemniscata e ad altre curve più generali — 187. Queste erano anteriormente note e si chiamano oggi spirali sinusoidi. Loro proprietà — 188. Continuazione — 189. Classificazione topologica delle spirali sinusoidi — 190. Continuazione. Spirali sinusoidi che sono curve settrici p. 544-562

CAP. XIX. **Le curve di Lissajous.** — 191. Definizioni e rappresentazione parametrica di queste curve. Loro singolarità nel caso in cui sono algebriche. Altri teoremi relativi p. 563-566

Indice dei nomi p. 567

ERRATA. — p. 96 si tolga il n. 45; a p. 165 si aggiunga il n. 68 in principio della linea 14^a dall'alto.

LIBRO I.

LUOGHI PIANI E LUOGHI SOLIDI.

CAPITOLO PRIMO

La linea retta.

1. Mentre, come vedremo, è possibile indicare chi per primo concepì e studiò il maggior numero delle linee che oggi fanno parte del patrimonio geometrico, il problema storico che consiste nel determinare chi abbia cominciato ad occuparsi della più semplice fra esse — *la retta* — deve dichiararsi irrisolvibile. Sono tanto numerosi ed impressionanti i fenomeni naturali in cui questa linea interviene (basti ricordare la caduta dei gravi e la propagazione della luce in un mezzo omogeneo) che, per sorprendere la prima apparizione di essa, sarebbe necessario, non soltanto di risalire il corso di migliaia d'anni, ma anche invadere il dominio della zoologia, del momento che tutto induce a credere come agli animali più intelligenti non siano sfuggite le più evidenti qualità della linea retta. Poichè adunque la prima radice della geometria della retta sembra destinata a rimanere eternamente celata, forza ci è limitarci ad additare la presenza di quella linea nelle più antiche opere matematiche superstiti.

2. Tutti hanno un'idea più o meno precisa della retta; ma il definire matematicamente tale figura, introducendo tutto quello che è strettamente necessario, nulla che sia superfluo, è una questione così ardua che, malgrado gli sforzi di molti valentuomini, attende ancora una soluzione accettabile per consenso universale. Siffatta questione si sarà affacciata a Pitagora quando egli avvertì la necessità di porre definizioni precise a fondamento di qualsivoglia sistema scientifico degno di tale nome; ma le necessità di una soluzione sarà divenuta palese quando, per merito di Aristotele, la logica deduttiva conseguì quell'assetto che per lungo volgere di secoli era destinata a serbare. Le definizioni che presumibilmente suggerirono i primi espositori della geometria — Ippocrate da Chio, Leone, Teudio di Magnesia — non arrivarono

sino a noi, almeno con un marchio di fabbrica; quanto a quella che propose o adottò Euclide, essa non può, per verun conto dirsi soddisfacente e utile¹⁾. Infatti, come tutti sanno, essa suona così: « la linea retta è quella che giace egualmente rispetto a tutti i propri punti » (*Elementi*, Lib. I, def. IV); ora chi mai, essendo privo della nozione di linea retta, potrebbe, col mezzo di queste parole, formarsene un concetto? E qual matematico potrebbe erigere sopra di essa un solido edificio geometrico? Di quest'imperfezione si avvide indubbiamente il celebre Alessandrino, giacchè provò il bisogno di completare quella definizione ponendo, fra le *Nozioni comuni* con cui si apre il I Libro degli *Elementi*, la proposizione « due rette non possono racchiudere uno spazio », la quale afferma esistere una sola retta passante per due punti; è nota ed evidente la straordinaria importanza di quest'aggiunta che, opportunamente combinata con l'affermazione correlativa, permette di arrivare alle più eccelse vette della geometria proiettiva. Ciò non ostante l'opera di Euclide non può giudicarsi in quel punto perfetta e sarebbe di sommo interesse il conoscere se e in qual senso la modificò Apollonio Pegeo, nella revisione a cui egli sottopose gli *Elementi* redatti dal suo predecessore nell'aspro cammino della scienza; ma sgraziatamente ci mancano informazioni in proposito. Ad un altro sommo geometra del periodo aureo della geometria greca si è creduto di attribuire — seguendo il cattivo esempio di Proclo — una nuova definizione della retta, cioè ad Archimede; ma la proposizione « la retta segna il minimo cammino tra due punti » da lui enunciata nell'esordio del I de' suoi celebri libri *Sopra la sfera ed il cilindro* è presentato come assioma o postulato che dir si voglia; d'altronde, come mai potrebbesi ammettere essere sfuggito a quel celebre geometra che, sintantochè non siasi definita la distanza, indipendentemente dal concetto di retta, quella pretesa definizione si avvolge in un circolo vizioso?

Di altri tentativi fatti dagli antichi per definire la retta non è giunta notizia sino a noi; descrivere quelli che vennero fatti allo stesso scopo dal Rinascimento in poi, equivarrebbe a segnalare la maggior parte delle trasfigurazioni subite dalla geometria elementare, tema questo « di poema degnissimo e di storia », ma che esorbita dai limiti imposti al presente scritto. Ci restringeremo quindi a notare come oggi, all'antico sistema di definire la retta con poche parole — di necessità insufficienti allo scopo — siasi sostituito quello di non definirla affatto, enumerando tutte le prerogative che si attribuiscono alla figura geometrica a cui si dà il nome di linea retta. Chi adotta siffatto modo di procedere incontra una gravis-

¹⁾ « Haec definitio », nota a ragione il LEIBNIZ, « nullius momenti est, neque uspiam ab Euclide in demonstrando adhibetur, neque satis intelligitur » (*Leibnizens math. Schriften*, ed. Gerhardt, T. V, Halle 1858, p. 185).

sima difficoltà, quella cioè di determinare quale sia il numero minimo di proprietà della retta che è d'uopo includere nella definizione, per poterne col ragionamento dedurne tutte le altre.

3. La retta rappresenta una parte importantissima non soltanto nella geometria di posizione, ma eziando in quella di misura, perchè è costume di paragonare ad un segmento rettilineo qualunque arco di curva e perchè un segmento rettilineo è il nocciolo di tutto il nostro sistema di misure per le aree ed i volumi.

Congiungere due punti mediante una retta e prolungare in entrambi i sensi un segmento rettilineo sono operazioni che — dietro proposta di Euclide (*Elementi*, Lib. I, post. 1° e 2°) — sono consentite al geometra; l'una e l'altra si eseguono in pratica mediante uno strumento — la *riga* — ed il complesso dei problemi che si possono sciogliere col mezzo di esso forma uno speciale ramo della geometria, che, in principio del secolo XIX, venne molto coltivato, specialmente in Francia, ove veniva designato appunto col nome di *Géométrie de la règle*. Va notato che, supposto tracciato in un piano un circolo di dato centro, col solo aiuto della riga si possono risolvere tutti i problemi di 2° grado: è un'osservazione del Poncelet¹⁾ che lo Steiner ha magistralmente svolta²⁾; tracciata invece una qualunque curva del terzo ordine, si possono sciogliere analogamente tutti i problemi di 3° e di 4° grado³⁾; probabilmente similmente accade nei problemi dei gradi superiori.

Dalla nozione di retta trae origine, oltre la *riga*, un secondo usitatissimo strumento: la *squadra*; tutte le costruzioni effettuabili in pratica col solo impiego di riga e squadra vennero recentemente ascritte ad una nuova diramazione della geometria, alla quale G. de Longchamps consacrò un'opera speciale — *l'Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris, 1890) — che avremo occasione di citare più volte in seguito⁴⁾.

In principio del secolo XIX il valore della retta crebbe a dismisura quando, scoperto il principio di dualità nel piano, si avvertì essere dessa capace di fungere quale elemento generatore di tutte le figure piane; che dire poi dell'importanza che acquistò allorquando,

¹⁾ *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822), nn. 351-357.

²⁾ *Die geometrische Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linien und eines festen Kreises* (Berlin, 1833).

³⁾ F. LONDON, *Die geometrischen Constructionen dritter und vierter Ordnung ausgeführt mittelst der geraden Linien und eines festen Curve dritter Ordnung* (Zeitschrift, T. XLII, 1896). Per altre proposizioni analoghe rinviamo il lettore all'articolo di T. KUBOTA, *Geschichtliches über geometrische Konstruktionen* (Jahresber. d. deutsch. Math. Vereinigung, T. XXXVII, 1928).

⁴⁾ Dalla retta trae origine un terzo strumento, la *riga a due orli*, che di recente fu metodicamente introdotto nella geometria.

verso il 1865, il Plücker la considerò come elemento delle figure a tre dimensioni e su di essa fondò una nuova geometria dello spazio?

Tutte le rette dello spazio sono fra loro identiche, onde, considerate isolatamente, non ammettono distribuzioni in categorie; tuttavia in certe teorie s'incontrano rette notevoli a cui si diedero nomi speciali: così nella teoria delle coniche si trovano *rette di Pascal*, *di Steiner*, *Plücker*, ecc., mentre nella moderna geometria del triangolo s'incontrano la *retta di Eulero*, la *retta di Simson* o *Wallace*, ecc.: sopra distinzioni di tale specie non ci arresteremo, nè ora nè nelle venture circostanze analoghe.

CAPITOLO II

La circonferenza.

4. Non meno difficile dell'assegnare l'origine del concetto di linea retta è l'indicare a chi spetti la scoperta della circonferenza, chè dall'idea di distanza tosto si assurge a concepire l'insieme dei punti equidistanti da un punto fisso; d'altra parte — per citare qualche fatto immune da qualsiasi ingrediente ipotetico — la costruzione dei più antichi edifici (Egiziani, Babilonesi, Etruschi, ecc.) esistenti tuttora esige l'uso del compasso; essi poi recano per la maggior parte, disegnati sulle pareti delle figure che presuppongono l'impiego di tale strumento e le semplicissime nozioni geometriche sul quale esso si fonda.

Scendendo da queste generalità un po' vaghe a qualche notizia concreta, avvertiremo che nel celebre *Manuale del calcolatore*, composto, Egitto non meno di diciassette e forse venti secoli a. C.¹⁾, si legge una soluzione del problema della quadratura del circolo, la quale conduce ad un valore del rapporto π della circonferenza al diametro abbastanza approssimato, cioè

$$\pi = \left[\frac{16}{9} \right]^2 = 3,1604 \dots$$

Del medesimo problema si occuparono i Greci non appena usciti dalla barbarie; lo provarono i conati di risoluzione dovuti ad Ippocrate da Chio, Antifonte e Brisone.

5. Che poi il circolo sia stato considerato nell'antichità anche indipendentemente dalla questione di misurarlo, risulta dall'attribuzione ad uno dei sette saggi della Grecia — Talete — la scoperta della proprietà che possiede ogni cerchio e la sua periferia di essere bisecati da qualsiasi diametro, ed a Pitagora l'osservazione che il

¹⁾ A. EISENLOHR, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (*Papyrus Rhind des British Museum*) (Leipzig 1877, 2^a ed. 1891).

circolo è la più perfetta delle figure piane, come la sfera lo è delle figure solide¹⁾; si aggiunga che in un brano di geometria proveniente da Ippocrate da Chio e che si considera per il più antico documento geometrico esistente, si leggono enunciati in parte ed in parte dimostrati non pochi teoremi spettanti al circolo ed alle sue parti. Queste proposizioni vennero certamente inserite nei primi trattati di geometria — uno dei quali reca appunto la firma d'Ippocrate (ved. n. 2) —; esse vennero popolarizzate, assieme ad altre, dagli *Elementi* di Euclide, il III Libro dei quali tratta esclusivamente della circonferenza, mentre il IV concerne i poligoni regolari inscritti e circoscritti e parte del XII il paragone delle aree di due circoli. Altre proprietà della circonferenza (e della retta) vennero adunate da Apollonio Pergeo nell'opera — sgraziatamente perduta — sopra i *Luoghi piani*; nella quale quella linea (e così la retta) veniva considerata come luogo dei punti soddisfacenti a certe condizioni comuni; altre proposizioni analoghe s'incontrano percorrendo l'ammirabile *Collezione matematica* scritta più tardi da Pappo Alessandrino.

L'indicata riunione della retta con la circonferenza sotto il concetto generale di «luoghi piani»²⁾ non è il solo punto di contatto che gli antichi stabilirono fra quelle due linee; è notorio infatti che Euclide — oltre alle due operazioni pratiche che segnalammo nel n. 3 — consentì al geometra di descrivere qualsivoglia cerchio di dato centro e dato raggio (*Elementi*, Lib. I, post. 3°): in conseguenza si considerò lecito l'uso del compasso, come quello della riga, anzi si ritenne accettabile la soluzione di un problema di geometria soltanto quando potesse eseguirsi mediante questi due strumenti. E poichè in pratica è agevole il tracciare esattamente una circonferenza, mentre è difficilissimo il delineare una retta, così vi fu chi credette prezzo dell'opera il congegnare un sistema di costruzioni geometriche esigenti il solo uso del compasso;orse così la *Geometria del compasso*, che ebbe in Lorenzo Mascheroni il più eminente cultore³⁾.

6. La facilità di concepire e tracciare la circonferenza fece sorgere la fallace speranza di misurare la sua lunghezza, nonché la superficie che essa racchiude. Alle antichissime origini di tali questioni — interessanti tanto la teoria quanto la pratica — ab-

¹⁾ PITAGORA ammirava senza dubbio nel cerchio e nella sfera la perfetta regolarità di forma; invece il MONTUCLA (*Histoire des Mathématiques*, T. I, della 2ª ed., p. 113) credette leggere nelle parole con cui Diogene Laerzio rese conto dell'osservazione fatta dal filosofo di Samo, un primo cenno della teoria degli isoperimetri.

²⁾ «Luoghi solidi» sono invece le coniche e «Luoghi lineari» tutte le altre linee.

³⁾ Veggasi l'opera *La geometria del compasso* (Pavia 1797).

biamo già fatto allusione antecedentemente; ora aggiungiamo che i primi contributi importanti alla loro soluzione sono dovuti ad Archimède, il quale dimostrò esistere fra di esse una così stretta parentela che, sciolta una, l'altra lo è pure, e trasformò le puerili argomentazioni di Antifonte e Brisone in un metodo per calcolare, con qualsivoglia approssimazione, il valore del rapporto di un'arbitraria circonferenza al proprio diametro. Altre osservazioni importanti sullo stesso tema vennero fatte dal celebre matematico olandese Huygens e poi dell'eminente geometra tedesco Lambert; questi riuscì a dimostrare l'irrazionalità di π e così stimolò il Legendre ad istituire delle ulteriori indagini¹⁾, che lo guidarono a concludere che anche π^2 è irrazionale. Anzi l'ultimo degli scienziati succitati soggiungeva: «Il est même probable que le nombre π n'est pas même compris dans les irrationnelles algébriques, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être la racine d'une équation algébrique d'un nombre fini de termes dont les coefficients sont rationnels». Che tale congettura sia conforme al vero venne dimostrato nel 1882 da F. Lindemann²⁾, al quale spetta il merito altissimo ed incontrastato di avere definitivamente risolta una questione che fece versare fiumi d'inchiostro, diede luogo a polemiche lunghe e vivaci e condusse al naufragio di molte reputazioni che credevansi assodate; il teorema di Lindemann autorizza poi a giudicare errata, anche senza previo esame, qualunque quadratura del cerchio o rettificazione della circonferenza eseguita mediante linee algebriche, in particolare effettuabile con riga e compasso.

7. La facilità del definire la circonferenza, in così stridente contrasto con la difficoltà del definire la retta (cf. n. 2) fece sorgere la speranza di potere generare la retta partendo dalla circonferenza. È questa una geniale idea, il cui germe si trova nell'appendice ad una lettera che Leibniz diresse ad Huygens addì 8 Settembre 1679³⁾; è un'idea che fu svolta assai più tardi da Giovanni Bolyai, il quale ne fece la piattaforma di quel sistema geometrico che tramanderà il suo nome, circondato di gloria, alla più remota posterità.

Vano sarebbe il tentativo di enumerare tutte le investigazioni di matematica pura ed applicata⁴⁾ in cui interviene la circonferenza, o di presentare un elenco prossimo alla perfezione delle qualità che vennero in essa ravvisate. Soltanto vogliamo notare una

¹⁾ Queste, assieme alle precedenti dei tre geometri succitati, trovansi nell'opuscolo di F. RUDIO, *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung* (Leipzig 1892).

²⁾ *Ueber die Zahl π* (Math. Ann., T. XX, 1882); cfr. F. KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementarmathematik* (Leipzig 1895).

³⁾ LEIBNIZ, *Math. Schriften*, ed. Gerhardt, T. II (Berlin 1850), p. 20-25.

⁴⁾ POPPE, *Ausführliche Geschichte der Anwendungen aller kurven Linien* (Nürberg 1802), p. 1-98, 130-194.

proprietà descrittiva ed una proprietà metrica: consiste la prima nel passaggio di tutte le circonferenze del piano per due punti immaginari all'infinito — i punti ciclici del piano, —; consiste la seconda nell'essere la circonferenza minima fra le linee che racchiudono la medesima area.

E chiuderemo questo Capitolo notando come si è di recente ravvistata la possibilità di assumere il cerchio come elemento dello spazio; venne così costituita la « geometria dello spazio cerchiato » in certo modo analoga a quella eretta dal Plücker sulla considerazione della retta.

CAPITOLO III

Le sezioni coniche.

8. La scoperta delle sezioni coniche viene da Proclo attribuita a Menecmo, discepolo di Eudosso da Cnido e forse maestro di Alessandro il Macedone: donde la ragione del nome « triade di Menecmo » che s'incontra in alcune opere antiche nel senso di « sezioni piane del cono circolare retto ». Della parabola e dell'iperbola Menecmo conobbe le proprietà fondamentali che si esprimono in coordinate cartesiane mediante le equazioni

$$y^2 = 2px, \quad xy = k^2$$

e seppe abilmente sfruttarle nel risolvere, in due modi differenti ed entrambi semplici ed eleganti, il problema della duplicazione del cubo (« problema di Delo »); ma sarebbe audacia, che nulla giustificerebbe, l'affermare che Menecmo conoscesse le proprietà caratteristiche degli asintoti. Viene poi accertato che egli ottenesse le tre forme principali che può presentare una conica, segnando un cono retto con un piano perpendicolare ad una generatrice; in conseguenza la curva sezione ha nessuno, uno o due punti all'infinito secondochè l'apertura del cono è minore, eguale o maggiore di un angolo retto. Ma in qual modo egli eseguisse il tracciato delle coniche¹⁾, indispensabile per tradurre in atto le soluzioni da lui immaginate pel problema deliaco, è questione insoluta, anzi oggi insolubile, perchè delle opere di Menecmo non si è serbato alcun vestigio. Egual sorte toccò agli scritti di Aristeo, geometra imperfettamente noto che scrisse cinque libri *Sui luoghi solidi* e forse altrettanti *Su le sezioni del cono* ed al quale si attribuiscono i nomi di « sezione del

¹⁾ Tale questione, che tanto interessa la pratica, viste le innumerevoli applicazioni delle curve del 2° ordine (v. POPPE, *op. cit.*, p. 99-110 e 194-209) ha ricevuto in processo di tempo molte soluzioni, di cui il BRAUNMÜHL rese conto nel lavoro *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zur Ende des achtzehnten Jahrhunderts* (Katalog mathem. und mathematisch-physik. Modelle etc., München 1892).

cono acutangolo», «sezione del cono rettangolo» e «sezione del cono ottusangolo» per indicare le curve che, seguendo Apollonio, chiamansi oggi rispettivamente ellisse, parabola ed iperbole.

Se la fama non mente a tali scritti di Aristeo avrebbe attinto a larga mano Euclide nel redigere un proprio trattato sulle curve di cui ci occupiamo. Esso è perduto, lo era anzi sin dal VI Sec. dell'E. v. ed è persino dubbio se esistesse a tempi di Pappo; tuttavia varie circostanze inducono a credere che il sommo Alessandrino considerasse a parte ciascuna delle coniche, caratterizzandole mediante quella proprietà che noi esprimiamo con la notissima equazione cartesiana

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

che inoltre egli ne conoscesse gli asintoti e l'applicazione al problema di Delo e che avesse almeno iniziate le indagini sulla similitudine delle coniche e di loro segmenti.

Si è creduto anche di dovere attribuire ad Archimede una esposizione metodica delle coniche e si giunse perfino ad affermare che Apollonio così spudoratamente lo saccheggiò da meritare l'epiteto di plagiatario. Ma, benchè le vaste e profonde cognizioni che il Siracusano possedeva sopra le linee in questione accertino che egli sarebbe stato in grado di redigerlo, pure nulla autorizza ad affermare che egli l'abbia effettivamente scritta. Ciò non ostante la teoria delle coniche deve ad Archimede almeno due memorabili progressi; uno consiste nella quadratura, da lui in due modi effettuata, di un segmento parabolico — primo esempio di misura esatta di un'area non tutta limitata da rette od archi circolari —, l'altra è l'affinità da lui avvertita fra un'ellisse ed il circolo descritto sul suo asse maggiore come diametro e l'applicazione di tale relazione alla quadratura di quella curva: per ciò si può dire che Archimede venne a capo di tutti quei casi di quadratura delle sezioni coniche che si possono trattare algebricamente, la determinazione dell'area dell'iperbole esigendo logaritmi.

9. Tutti questi cultori della teoria delle coniche — eccezion fatta al più per Archimede — appartengono alla preistoria di queste curve; la vera storia si apre con Apollonio Pergeo, al quale dobbiamo una *instauratio ab imis fundamentis* di tutta quella disciplina ed un'ottima esposizione della stessa, che, per lungo volgere di secoli, venne ascritta fra i classici delle scienze esatte e che oggi ancora, dopo due mila anni, ispira ammirazione e merita assiduo studio. Secondo taluni l'innovazione arrecata dal geometra di Perga consisterebbe nell'avere egli avvertita l'esistenza in qualunque cono retto di sezioni piane di tutte tre le specie; ma, siccome sembra inammissibile che siffatta osservazione sia sfuggita totalmente ai geometri anteriori, così è più verosimile ammettere che il cambiamento da

lui proposto sia stato piuttosto d'indole metodologico e consistesse nello scegliere come punto di partenza quella definizione universale delle coniche che guida a tutte le forme di cui queste sono capaci. Ammesso ciò, riesce evidente il perchè egli sia stato costretto ad abbandonare l'antica nomenclatura di Aristeo (ved. n. 8) e proporre una nuova, che è tuttora in uso.

Spento Apollonio, comincia la decadenza della geometria greca; nessuna meraviglia, dunque, se, dopo di lui la teoria delle coniche rimase stazionaria. Come unico progresso si può additare un passo della *Collezione matematica*, che prepara lo studio delle coniche come luoghi dei punti le cui distanze da un punto fisso e da una retta fissa serbano un rapporto costante; quanto ad un noto opuscolo di Sereno (di Antissa od Antinopoli) ove è dimostrato essere ellittiche le sezioni prodotte da piani in un cilindro, esso va ricordato soltanto come modesto complemento alla grande opera apolloniana.

10. Anche nell'epoca che seguì da presso il Rinascimento, la teoria di cui stiamo seguendo lo sviluppo, rimase pressochè nello stato in cui lasciolla Apollonio; ma, più tardi, due ritrovati, entrambi straordinariamente importanti, vennero ad infonderle vita novella e rimetterla di moda; sono: la scoperta fatta di Keplero che le traiettorie descritte dagli astri del nostro sistema planetario altro non sono che ellissi aventi per fuoco il sole; e l'invenzione della geometria analitica, la quale portò a concludere che, nel metodo cartesiano, tutte le sezioni coniche sono rappresentabili mediante equazioni di secondo grado fra le coordinate di un punto, a differenza delle rette che lo sono mediante equazioni del primo; da allora in poi le coniche vennero riguardate piuttosto come «curve del secondo ordine» che come luoghi solidi, al pari delle rette che vennero di preferenza considerate come «linee del primo ordine»¹⁾.

È noto che l'invenzione delle coordinate distolse molti dei contemporanei e degli immediati successori di Descartes e Fermat dalle ricerche di geometria pura; tanta era la singolare malleabilità e l'ammirabile potenza del nuovo strumento. Ciò non ostante, anche in quest'epoca la geometria intesa nel senso degli antichi non mancò di valorosi cultori, per opera dei quali la teoria delle sezioni coniche si allietò di perfezionamenti degni di nota. Ricordisi, infatti, che Desagues introdusse in tale disciplina i fecondi concetti di proiezione ed involuzione, giungendo così a stabilire nuove proposizioni importanti; che Pascal scopersse la celebre relazione esi-

¹⁾ Essendo le coniche curve del 2° ordine, il BELLAVITIS le chiamò *dittome*, essendo della 2ª classe *diatomene*; analogamente egli designò con *n-tome* le curve d'ordine *n* e con *n-tomene* quelle di classe *n*; tale nomenclatura non venne adottata e cadde ben presto in dimenticanza. Nella scuola del CAYLEY invece le curve di 3° ordine sono chiamate *tertians*, quelle del 4° *quartians*, ecc.

stente fra sei punti quali si vogliono di una conica e la pose a fondamento di una trattazione metodica delle curve del second'ordine¹⁾; e che il de la Hire applicò largamente le nozioni di polo e polare; in particolare, considerando la polare di un fuoco, arrivò al concetto di direttrice. E sarebbe ingiustizia il condannare all'oblio la « generazione organica delle coniche » scoperta dal Newton — modello e germe di tanti studi congeneri! — e le eleganti costruzioni che quel sommo ha indicate per le coniche soggette a cinque condizioni. Vanno ancora citati nomi del Mydorge e del Boscovich, nonchè i lavori del Conte di Fagnano e di Eulero intorno alla rettificazione dell'ellisse, i quali, validamente proseguiti e convenientemente allargati, produssero un nuovo ramo di analisi, cioè la teoria delle funzioni ellittiche; a noi importa specialmente notare come negli scritti del grande matematico italiano ora ricordato s'incentri²⁾ la curva rappresentabile in coordinate cartesiane ortogonali mediante l'equazione

$$x^2 + 2y^2 = a^2 :$$

è costume d'indicarla col nome di *ellisse di Fagnano* o anche *ellisse equilatera*³⁾.

11. Nuovi metodi e nuovi teoremi relativi alla teoria di cui stiamo segnalando le fasi di sviluppo sono dovuti ai geometri del principio del Sec. XIX. Primo va nominato il Brianchon, il quale legò il proprio nome alla proposizione correlativa di quella di Pascal, e, in collaborazione con Poncelet, studiò quella speciale sezione conica che disimpegna, rispetto all'iperbole, una parte analoga a quella rappresentata dal circolo rispetto all'ellisse, cioè l'*iperbole equilatera*

¹⁾ Il lavoro di PASCAL a cui alludesi qui andò perduto; il solo preambolo, copiato da LEIBNIZ, si è salvato e venne pubblicato dal GERHARDT (*Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, I Bd., Berlin 1899); ivi è adoperato il vocabolo *autbola* per indicare una conica chiusa (ellisse o circolo).

²⁾ Metodo per misurare gli archi di quella ellisse conica, il cui asse maggiore è medio proporzionale tra l'asse minore, e il doppio del medesimo asse minore (Produzioni matematiche, T. II, Pesaro 1750).

³⁾ Cfr. F. J. STUDNICKA, *Ueber die charakteristischen Eigenschaften der sogenannten gleichseitigen Ellipse* (Pragee Ber., 1901). Altra speciale ellisse è quella di equazione

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = a^2$$

la quale gode la proprietà che un estremo dell'asse focale forma un triangolo equilatero con gli estremi dell'asse minore: v. M. D'OCAGNE, *Cours de géométrie*, T. I (Paris 1917), p. 117 e 122. Un'altra conica speciale, non reale, s'incontra nella nota di E. V. HUNTINGTON e J. K. WHITTEMORE dal titolo *Some curious properties of conic touching the line infinity at one of the circular points* (Bull. Amer. math. Society, T. VIII, 1901).

o *iperbole ortogonale*¹⁾. Inoltre, il Poncelet stesso, applicando i metodi di cui è l'inventore, considerò le coniche come curve omologiche del circolo e mise in luce tutta la fecondità di siffatto concetto. Poco dopo, J. Steiner in Germania e M. Chasles in Francia, rimisero in circolazione l'antico concetto di rapporto anarmonico e dimostrarono così la possibilità di concepire le curve del second'ordine come prodotti di forme fondamentali di prima specie in corrispondenza proiettiva. E lo Staudt, non soltanto insegnò a depurare tale definizione da qualsiasi ingrediente metrico, ma a definire in un modo uniforme le coniche reali e le immaginarie, riguardando le une e le altre come curve *unite* di polarità piane.

Nel frattempo gli analisti applicavano alla triade di Menecmo tutti i metodi di coordinate che venivano di mano in mano inventati, in particolare i procedimenti caratteristici della geometria intrinseca²⁾; inoltre veniva ravvisata una relazione fra la geometria delle rette dello spazio e la totalità delle coniche di un piano soddisfacenti ad una certa condizione³⁾; finalmente si gettavano le basi di una geometria dello spazio avente la conica per proprio elemento fondamentale.

Questi sono forse tutti i nuovi orizzonti che la geometria moderna apersero dinanzi alla teoria delle coniche; ma come mai potremmo illuderci di porgere un'idea di tutte le prerogative — fra cui trovansi *persino* delle « social properties »⁴⁾ — che vennero rilevate in quelle celebri curve? Una semplice raccolta degli enunciati delle proposizioni che vi si riferiscono riempirebbe parecchi poderosi volumi⁵⁾; noi dobbiamo pertanto vietarci di intraprendere un lavoro, non privo di interesse, ma che farebbe deviare il presente scritto dal cammino che gli venne assegnato. D'altronde, tanto numerosi e pregevoli sono i trattati analitici e sintetici sulla teoria a cui è consacrato il presente Capitolo, che nulla è più agevole del formarsi un'idea dello stato in cui venti secoli di lavoro pressochè ininterrotto portarono una delle più belle discipline che annoveri la geometria.

¹⁾ È la curva che O. TERQUEM propose ai propri connazionali di chiamare brevemente *Hypercle* (Nouv. Ann., T. X, 1851, p. 127).

²⁾ E. CESÀRO, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896), p. 38-39; PIRONDINI, *Sur la conique osculatrice des lignes planes* (Journ. di Teixeira, T. XI, 1894). Al lettore desideroso di ragguagli sulle origini, le fasi di sviluppo e lo stato attuale di questo ramo della geometria va consigliato lo studio del *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre der natürlichen Koordinaten* (Bibl. mathem., 3ª Serie, T. I, 1900, p. 142-159) di E. WÖLFFLING).

³⁾ V. una lettera di L. CREMONA a E. BELTRAMI inserita nel Vol. X (1872) del Giorn. di matem.

⁴⁾ Cfr. la curiosa opera *The romance of mathematics* di cui parla « Nature », May, 8, 1888.

⁵⁾ In generale si veda l'articolo di F. DINGELDEY, *Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme* nel T. III dell'*Encyklop. d. mathem. Wiss.* Riguardo alle applicazioni pratiche, v. POPPE, *op. cit.*, p. 99-110 e 194-209.

LIBRO II.

CURVE DEL TERZ' ORDINE.

CAPITOLO PRIMO

Classificazione.

12. Nel mentre andavasi perfezionando la teoria delle sezioni coniche, si adunavano, quasi inconsciamente, i materiali per la dottrina delle curve d'ordine superiore, fra i quali occupano un posto cospicuo le antiche investigazioni concernenti alcune cubiche speciali di cui terremo parola nel presente Libro. Ma la teoria generale delle curve di un ordine determinato, in particolare quella delle curve del terz'ordine, non poteva sorgere, nè sorse, se non dopo di essere giunti in possesso delle nozioni di « ordine di una curva » e di « curva generale nel proprio ordine », cioè dopo l'invenzione del metodo cartesiano, del quale quelle nozioni sono un portato naturale. Conferma questo modo di vedere il fatto che, se nel 1637 può dirsi nata la geometria analitica¹⁾, meno di trent'anni dopo Newton²⁾, eseguendo la classificazione delle cubiche piane, gettava i fondamenti per uno studio metodico di queste curve. Tale studio venne di poi validamente continuato e fu fecondo di tali e tanti risultati che le curve suddette vanno annoverate fra le figure geometriche la cui conoscenza è pressochè perfetta³⁾.

Come cardini della loro teoria si possono considerare: 1° i vari metodi per costruirle geometricamente, fra cui meritano un posto cospicuo quelli di H. Grassmann, che furono studiati da vari autori⁴⁾

¹⁾ Perchè nel 1637 venne pubblicata la *Géométrie* di Descartes.

²⁾ Cfr. la memoria di W. W. ROUSE BALL, *On Newton classification of cubic curves* (Proc. of the Lond. Math. Soc., T. XXII, 1891), a cui ricorremo più volte nel redigere il presente Capitolo.

³⁾ Si veggano, oltre alle opere di PLÜCKER, SALMON, CREMONA e CLEBSCH-LINDEMANN sulle curve piane in generale, le opere speciali quali: DURÈGE, *Die ebenen Curven dritter Ordnung* (Leipzig, 1871), SCHRÖTER, *Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung* (Leipzig 1888), ecc.

⁴⁾ F. KÖLMEL, *Die Grassmann'sche Erzeugungsweise von ebenen Kurven dritter Ordnung* (Diss. Tübingen, 1886); H. FRITZ, *Ueber die erste Grass-*

e svolti ulteriormente; 2° le proposizioni riflettenti la configurazione dei flessi di una di esse¹⁾ 3° il « teorema del Salmon »²⁾ affermande la costanza del birapporto delle quattro tangenti che si possono condurre ad una cubica esente da punti singolari di un punto qualunque di essa: il valore di detto rapporto è un numero invariante per trasformazioni proiettive della curva, è anzi l'unico invariante assoluto che la curva possiede³⁾.

13. Fra le proposizioni del secondo dei gruppi testè enumerati fissiamo la nostra attenzione sopra quella che dice: « una cubica reale⁴⁾ possiede almeno un flesso reale ». In virtù di essa noi potremo prendere come un vertice (A_3) del triangolo fondamentale di un sistema di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3), a cui riferiamo una cubica reale Γ , il flesso reale che essa possiede e la relativa tangente come uno dei lati (a_2) del triangolo suddetto uscenti da A_3 . L'equazione della curva assume in conseguenza la seguente forma:

$$x_3^3 = x_2 \{ a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_2 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 \}$$

$(a_{ik} = a_{ki})$

ossia, supposto $a_{33} \neq 0$,

$$a_{33} x_1^3 = x_2 \{ (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) x_1^2 + (a_{22} a_{33} - a_{23}^2) x_2^2 + (a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3)^2 + 2 (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{23}) x_1 x_2 \}.$$

Facendo quindi il cambiamento di coordinate determinato dalla formola

$$a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 = x'_3$$

potremo scrivere

$$x_2 x_3^2 = a_{33} x_1^3 + (a_{13}^2 - a_{11} a_{33}) x_1^2 x_2 + 2 (a_{13} a_{23} - a_{12} a_{33}) x_1 x_2^2 + (a_{23}^2 - a_{22} a_{33}) x_2^3.$$

mann'sche Erzeugungsweise von ebenen Kurven dritter Ordnung (Progr. Darmstadt, 1889); K. SCHMIDT, *Untersuchungen über Kurven dritter Ordnung in Anschluss an eine Grassmann'sche Erzeugungsweise* (Diss. Giessen, 1908).

¹⁾ Cfr. H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, II Bd. (II Anfl., Braunschweig 1889), p. 390 e segg.

²⁾ *Théorèmes sur les courbes du troisième degré* (G. di Crelle, T. XLII, 1851).

³⁾ Giova anche osservare che i fondamenti per una trattazione metodica delle proprietà metriche delle cubiche piane furono posti da J. THOMAE nella memoria *Ueber orthogonale Invarianten der Curven dritter Ordnung* (Leipzig. Ber., T. LI, 1899, p. 314-353).

⁴⁾ Chiamiamo in genere reale una curva rappresentata da un'equazione a coefficienti reali, quantunque, se è d'ordine pari, essa possa essere costituita tutta di punti immaginari.

Cambiando, per semplificare, le notazioni, vediamo pertanto che, scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, l'equazione di qualunque cubica reale si può ridurre alla forma seguente:

$$(1) \quad x_2 x_3^2 = a_0 x_1^3 + 3 a_1 x_1^2 x_2 + 3 a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

Se ora si proietta all'infinito il lato a_2 del triangolo fondamentale e quindi si pone $x_1 = x$, $x_2 = 1$, $x_3 = y$, si trasforma la (1) in quest'altra

$$(2) \quad y^2 = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3,$$

le quale rappresenta le curve chiamate *parabole divergenti*; proiettando invece all'infinito il lato a_3 e facendo in conseguenza $x_1 = x$, $x_2 = y_1$, $x_3 = 1$, si ottiene

$$(3) \quad y = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Ritorniamo nel n. seg. su queste equazioni, ma intanto osserviamo che la (1) è suscettibile di ulteriori trasformazioni; scegliendo infatti convenientemente il vertice A_2 ed il punto unità del sistema di riferimento, essa è riducibile alla seguente

$$(4) \quad x_2 x_3^2 - x_1 (x_2 - x_1) (k^2 x_2 - x_1) = 0;$$

le tangenti condotte a questa curva dal punto A_3 hanno per equazioni:

$$x_2 = 0, x_1 = 0, x_2 - x_1 = 0, k^2 x_2 - x_1 = 0;$$

onde il birapporto che esse formano è k^2 ; questo è dunque l'invariante assoluto della curva. Ora, chiamando ρ un fattore di proporzionalità e λ un parametro, la (4) è identicamente soddisfatta col porre

$$\rho x_1 = \lambda, \rho x_2 = \lambda^3, \rho x_3 = \sqrt{(1 - \lambda^2)(1 - k^2 \lambda^2)};$$

ma se si pone

$$\lambda = sn u$$

e si suppone che il modulo di questa funzione ellittica sia k , mentre K e K' abbiano gli ordinari significati, si ha pure

$$(5) \quad \rho x_1 = sn u, \rho x_2 = sn^3 u, \rho x_3 = cn u \cdot dn u.$$

Queste equazioni costituiscono la rappresentazione parametrica di

una cubica mediante funzioni ellittiche Jacobiane¹⁾; in corrispondenza la condizione di collinearità di tre punti è

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{4K, 2iK'}$$

All'analogia rappresentazione mediante funzioni ellittiche di Weierstrass si giunge servendosi dalla (2); infatti con un semplice spostamento dell'origine essa mutasi in quest'altra

$$(6) \quad y^2 = a_0 x^3 + 3 a_2 x + a_3;$$

ora, se si considera una funzione p che sia legata alla propria derivata p' mediante la relazione

$$p'^2 = 4 p^3 z + \frac{3 a_2}{\sqrt{\frac{a_0}{4}}} p z + a_3$$

e si pone

$$(7) \quad x = \sqrt[3]{\frac{4}{a_0}} p z, y = p' z,$$

la (6) sarà identicamente soddisfatta; onde le (7) somministrano la rappresentazione parametrica della curva (6). Assoggettando quest'ultima ad una trasformazione proiettiva arbitraria, si conclude che qualunque cubica piana può rappresentarsi col mezzo di equazioni della seguente forma:

$$(8) \quad \rho x_i = a_i p z + b_i p' z + c_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

allora la collinearità di tre punti è caratterizzata dall'analogo congruenza

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0^2).$$

14. Le formole (2) e (3) del n. prec. porgono anche la risposta alle seguenti importantissime questioni: per le curve del terz'ordine accade, come per quelle del secondo, che tutte possano dedursi da una di esse mediante proiezione? E, in caso negativo, quali sono i tipi fondamentali da cui, per proiezione, possono ricavarsi le forme di tutte quelle curve? Per rispondere ripigliamo la (2) e scriviamola come segue:

¹⁾ A. HARNACK, *Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie des Curven dritten Grades* (Math. Ann., T. IX, 1876).

²⁾ HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, T. II (Paris, 1888), cap. XI.

$$(2') \quad y^2 = a_0 (x - a_1) (x - a_2) (x - a_3),$$

dopo di avere notato che a_0 si può sempre supporre positivo ed inoltre le notazioni scelte in modo che, quando a_1, a_2, a_3 sono reali, si abbia $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Ora è chiaro che l'equazione (2'), a norma della natura e della grandezza relativa delle a_1, a_2, a_3 , può presentare i seguenti cinque casi e questi soltanto:

I. a_1, a_2, a_3 reali e disuguali. Si seguino sull'asse delle x i punti A_1, A_2, A_3 aventi per ascisse i numeri a_1, a_2, a_3 ; e si osservi che per ottenere punti reali della curva bisogna supporre che sia $a_1 \leq x \leq a_2$ oppure $x \geq a_3$; è facile dedurre da ciò che la curva consta di un'ovale passante per i punti A_1 e A_2 e di un ramo infinito passante per A_3 ; essa è chiamata da Newton ¹⁾ *parabola campaniformis cum ovali, complex* dal Cayley ²⁾.

II. a_1 reale, a_2 e a_3 immaginari coniugati. Scritta in tal caso la (2') come segue

$$y^2 = a_0 (x - a_1) \{ (x - p)^2 + q^2 \},$$

vedremo che si ottengono punti reali della curva solo supponendo $x \geq a_1$; si può trarre da ciò la conseguenza che la curva consta di un solo ramo infinito; è la *parabola pura* di Newton ³⁾, la curva *simplex* del Cayley.

Questa curva come la precedente, è priva di punti singolari; le ipotesi I e II danno anzi le forme tipiche fondamentali delle cubiche piane prive di punti singolari. Data una cubica mediante la sua equazione in coordinate omogenee o cartesiane, per riconoscere se sia della forma I e della II basta calcolarne l'invariante assoluto; se esso risulta reale la curva è una *complex*, se è immaginario è una *simplex*; p. es. è una *complex* ogni cubica armonica, è invece una *simplex* ogni cubica equiarmonica ⁴⁾. Per lo studio delle due curve I e II è utilissimo in molti casi l'impiego della seguente equazione canonica

$$(9) \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6k x_1 x_2 x_3 = 0,$$

¹⁾ *Enumeratio linearum tertii ordinis* (Londini 1706); ristampato in I. NEWTONII *Opusculæ mathematica, philosophica et philologica* (Lausanne et Genevæ, MDCCXLIV), T. I.

²⁾ Veggansi gli scritti *On the inflexions of the cubical divergent parabolas* (Quart. Journ., T. VI, 1864), *On the classification of cubic curves* (Cambridge Trans., Vol. XI, Pars I, 1866) e *On the cubical divergent parabolas* (Quart. Journ., T. IX, 1868), ristampati nei Volumi V e VI di *The collected Papers of A. Cayley* (Cambridge 1892-93).

³⁾ H. MURDOCH (*Newton genesis curvarum per umbras*, Londini 1746) ha distinte tre specie di parabole, due delle quali chiamate *ampullate* e *campaniformi*.

⁴⁾ Queste importanti osservazioni, colleganti la forma di una cubica al valore del suo invariante assoluto, appartengono al CREMONA (v. le *Considerazioni sulle curve piane del terzo ordine*, Giorn. di Mat., T. II, 1864).

che si ottiene assumendo come triangolo fondamentale quello dei triangoli sizigetici che è reale ¹⁾.

III. $a_1 = a_2$ e a_3 reali; la (2') diviene in tal caso

$$y^2 = a_0 (x - a_2)^2 (x - a_3)$$

e prova che il punto $A_2 (a_2, 0)$ è un punto isolato della curva, la quale contiene poi infiniti punti reali corrispondenti a valori di $x \geq a_3$ ed è chiamata *parabola punctata* da Newton, *acnodal* dal Cayley.

IV. a_1 e $a_2 = a_3$ reali; dall'equazione della curva

$$y^2 = a_0 (x - a_1) (x - a_2)^2$$

emerge che il punto $A_2 (a_2, 0)$ è un punto doppio della curva, di cui tutti i punti reali si ottengono per $x \geq a_1$: è detta la *parabola nodata* del Newton, la *crunodal* del Cayley.

V. Se finalmente i tre numeri a_1, a_2, a_3 sono reali ed eguali fra loro, la (2') può scriversi

$$y^2 = a_0 (x - a)^3;$$

la curva corrispondente ha una cupide e quindi è chiamata *parabola cuspidata* da Newton, *cuspidal* dal Cayley.

Dalla discussione testè compendiate si trae la celebre proposizione chiamata dal suo scopritore, Newton, «genesis curvarum per umbras», che risponde alle domande fatte in principio di questo numero e si enuncia così: *Qualunque cubica piana può venire proiettata in una delle cinque parabole divergenti* ²⁾.

A questo teorema ne fa riscontro un altro non meno notevole. Per stabilirlo ricorriamo all'equazione (3) e notiamo che essa rappresenta una curva avente per centro l'origine, perchè non si altera cambiando i segni di entrambe le coordinate; ora scrivendola sotto la forma

$$(3') \quad y = a_0 (x - a_1 y) (x - a_2 y) (x - a_3 y)$$

¹⁾ Servendosi di questa equazione si può ottenere un'altra rappresentazione parametrica delle cubiche piane: v. H. SIEVERT, *Die Parameterdarstellung der Kurven 3. Ordnung durch Thetafunktionen* (Progr. Beyreuth. 1905-06).

²⁾ Quest'importante proposizione costituisce il fondamento delle ricerche di F. KÖLMEL, *Ableitung der verschiedenen Kurven dritter Ordnung durch Projektion und Klassifikation derselben* (Progr. Ettenheim 1894, Mosbach 1895, Baden-Baden 1904). Tema analogo hanno le memorie di H. WIENER, *Die Eintheilung der ebenen Kurven und Kegel dritten Ordnung in 13 Gattungen* (Halle a. S. 1901) e dell'EMCH, *Newton's five Types of plane cubics obtained by Steinerian transformations* (Colorado Studies, T. I, 1904).

si vede che essa si presta ad una discussione perfettamente analoga a quella fatta sulla (2'), onde le curve corrispondenti si distribuiscono in cinque categorie; da ciò si trae il seguente teorema di Chasles¹⁾: *Qualunque curva piana del terz'ordine si può proiettare in una delle cinque cubiche dotate di centro*²⁾.

Similmente dimostrasi che ogni cubica piana esente da punti singolari si può proiettare in altra che sia simmetrica rispetto a un triangolo equilatero³⁾.

15. Alla ripartizione di tutte le cubiche piane in cinque categorie non si è arrestato Newton; considerando il modo in cui si comportano all'infinito, egli stabilì l'esistenza di 72 specie, a cui altre 6 vennero aggiunte poi. Per denominarle egli adoperò una nomenclatura particolare la cui essenza emerge dalle seguenti parole di lui: «Enumerando curvas horum casuum *hyperbolam* vocabitur *inscriptam*, quae tota iacet in asymptotón angulo ad instar hyperbolae conicae; *circumscripam*, quae asymptotos secat, et partes abscissa in sinu suo amplectitur; *ambigenam*, quae uno crure infinito inscribitur et altero circumscribitur; *convergentem*, cujus crura concavitate sua se invicem respiciunt et in plagam eandem diriguntur; *divergentem* cujus crura convexitatae sua se invicem respiciunt et in plagam contrarias diriguntur; *cruris contrariis praeditam*, cujus crura in partes contrarias convexa sunt, et in plagas contrarias infinita; *conchoidalem*, quae vertice concava et cruris divergentibus ad asymptoton applicatur; *anguineam*, quae flexibus contrariis asymptoton secat et utriusque in crura contraria producit; *cruciformem*, quae conjugatam decussat; *nodatam* quae se ipsa decussat in orbem redeundo; *cuspidatam*, cujus partes duae in angulo contactus concurrunt et ibi terminatur; *punctatam*, quae conjugatam habet infinite parvam, id est punctum; et *puram* quae, per impossibilitate duarum radicum, ovali, nodo cuspidate et puncto conjugato privatur. Eodem sensu *parabolam* quoque *convergentem*, *divergentem*, *cruris contrariis praeditam*, *cruciformem*, *nodatam*, *cuspidatam*, *punctatam* et *puram* nominabimus». Inoltre Newton chiama *iperbolismo* di una data linea, la curva che si ottiene dall'equazione cartesiana di quella mediante la trasformazione

$$x' = x, y' = m \frac{y^4}{x}$$

¹⁾ V. la Nota XX dell'*Apercu historique etc.* (1837).

²⁾ In conseguenza le curve di 3° ordine a centro sono dette da F. GOMES TEIXEIRA «cubiche di Chasles»: v. *Obras sobre mathematicas*, T. IV (Coimbra 1908), p. 143.

³⁾ CLIFFORD, *On triangular symmetry* (Math. Papers, London 1882, p. 412-414).

⁴⁾ Cfr. la nota di F. GOMES TEIXEIRA, *Sobre os hyperbolismos das co-*

Degli altri nomi da lui usati il significato emerge dalla seguente tabella che riassume la sua classificazione: alla quale classificazione il grande geometra arriva riducendo, mediante opportune trasformazioni di coordinate, le equazioni cartesiane di tutte le cubiche a quattro forme canoniche, esse pure indicate nelle seguente tabella; nell'ultima colonna della quale abbiamo indicato il numero delle specie di ogni genere, tenendo separati i numeri delle specie aggiunte dai commentatori posteriori:

I. $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$		
$a > 0$	iperbole ridondanti od iperboliche	adiametri 9 specie
		monodiametri 12+2 »
		tridiametri 2+2 »
		ad asintoti concorrenti 9 »
$a > 0$	iperbole difettive od ellittiche	adiametri 6 »
		monodiametri 7 »
$a = 0$	$b \neq 0$, iperbole paraboliche	adiametri 7 »
		monodiametri 4+2 »
		$b = 0$, iperbolismi di coniche
centrali { $c < 0$, » di ellisse... 3 »		
$c = 0$, » di parabole... 2 »		
II. $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Tridente ¹⁾ 1 »	
III. $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + y$	Parabole divergenti 5 »	
IV. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Parabola cubica o di Wallis ²⁾ 1 »	

16. La classificazione newtoniana subì in processo di tempo delle trasformazioni ed ebbe dei miglioramenti, ma la nomenclatura ivi adoperata non è peranco scomparsa dalla letteratura matematica. Ma una sessantina d'anni fa un compatriota di Newton, F. W. Newman, ritenne consigliabile arrearvi una modificazione radicale, coll'introdurre nomi presi a prestito dalla botanica, dall'architettura e dalla vita comune⁴⁾. Le sue proposte vennero accolte con indifferenza e ben presto caddero in completa dimenticanza; se noi qui le togliamo dal sepolcro in cui giacciono gli è, non già colla speranza di infondere loro nuova vita, ma perchè vi siamo costretti dalla tirannia del tema che trattiamo. Ci limiteremo però

nica (Porto Annès, T. II, 1907). Giova osservare che il nome di *iperbolismo centrale*, venne introdotto dal CAYLEY per indicare l'iperbolismo di una conica a centro.

¹⁾ Cfr. F. GOMES TEIXEIRA, *Obras citate*, T. IV, p. 103.

²⁾ F. SIBIRANI, *Alcune proprietà metriche della cubica del Wallis* (Per. matem., T. XXI, 1906).

⁴⁾ Veggasi la nota *On curves of the third degree, here called «Tertians»* (Brit. Ass. Reports; Exeter, 1869).

a presentare qui l'elenco dei nuovi nomi accompagnati dalle equazioni cartesiane delle curve corrispondenti.

1. $ay^3 = x^2$ Staffile
2. $y^2 = ax^{\frac{1}{2}} + bx^2 + cx + d$ Calice
3. $c = d = 0$ Giglio.
4. $\left. \begin{matrix} ay^2 = x^3 + cx + d \\ c > 0, d > 0 \end{matrix} \right\}$ Tulipano
5. $\left. \begin{matrix} c = 0, d > 0 \end{matrix} \right\}$ Giacinto
6. $\left. \begin{matrix} c = 0, d < 0 \end{matrix} \right\}$ Convolvolo
7. $\left. \begin{matrix} c > 0, c > b \end{matrix} \right\}$ Garofano
8. $\left. \begin{matrix} ay^2 = x^3 - 3b^2x + 2c^3 \\ c = b \end{matrix} \right\}$ Fuxia o calice nodato
9. $\left. \begin{matrix} c = -b \\ c < b \end{matrix} \right\}$ Antifuxia o calice clavato¹⁾
10. $c < b$ Bulbo
11. $xy^2 = a^3$ Palma
12. $xy^2 = 3b^2(a-x)$ Arco²⁾
13. $x(y^2 + b^2) = aby$ Arco curvato
14. $x(y^2 - b^2) = aby$ Pilastro
15. $x(y^2 - b^2) = ab^2$ Archivolto o Tunnel
16. $xy^2 = mx^2 + ux + p, m > 0$ Vaso
17. $\left. \begin{matrix} xy^2 = m((x+b)^2 + c^2) \\ seb > 0 \end{matrix} \right\}$ $\left. \begin{matrix} c \neq 0 \\ c = 0 \end{matrix} \right\}$ Urna
Urna clavata
18. $\left. \begin{matrix} seb < 0 \\ c \neq 0 \\ c = 0 \end{matrix} \right\}$ Tazza
Tazza clavata
19. $\left. \begin{matrix} \mu^2 xy^2 = (a-x)^3 \\ a > b \\ a < b \end{matrix} \right\}$ Piramide
Cirro
Tumulo sopra-clavato
20. $\left. \begin{matrix} \mu^2 xy^2 = (a-x)(b-x)^2 \\ a > \delta b \\ a = \delta b \end{matrix} \right\}$ Tumulo sotto-clavato
Capito (testa grande)
Elmo
21. $\left. \begin{matrix} \mu^2 xy^2 = -x^3 + 3bx^2 + 3cx + d \\ d > b^3 \\ d = b^3 \\ d < b^3 \end{matrix} \right\}$ Tumulo
Cippo
Sfinge
22. $\mu^2 xy^2 = (m-x)(u-x)(p-x)$ Monte e luna
23. $\left. \begin{matrix} \mu^2 xy^2 = (m-x)(u+x)(p+x) \\ d > b^3 \\ d = b^3 \\ d < b^3 \end{matrix} \right\}$ Monte e palude
Orologio e pendolo
Campana e martello
24. $e^2 = a^2 by^2 \omega \pm b^2$ Cornuto
25. $e^2 \cos 2\theta = a^2 by^2 \theta \pm b^2$ Farfalla
26. $\left. \begin{matrix} \mu^2 xy^2 = x(x-a)^2 + b \\ a \neq 0 \\ a = 0 \end{matrix} \right\}$ Triuga o Triga
Triuga stellata
27. $\mu^2 xy^2 = (x-u)^3$ Gru
28. $\mu^2 xy^2 = (x-m)^2(x-u)$ Gru e sacco
29. $\mu^2 xy^2 = (x-m)(x-u)(x-p)$ Bilancino e carro

¹⁾ Da *clavus* = chiodo, preso nel senso di punto isolato.

²⁾ Nel significato di arma.

41. $\mu^2 xy^2 = (x-m)(x+u)x + p$ Trofeo
42. $\mu^2 xy^2 = (x-m)(x+u)^2$ Vaso di fiori nodato.

Fra le curve ora enumerate alcune sono suscettibili di quadratura indefinita algebrica: tali sono alcune di quelle che portano i numeri 22-26, 39 e 42 ed in generale tutte quelle che si possono rappresentare con equazioni del seguente tipo

$$y = \frac{ax}{3m} \sqrt{\frac{x+3m}{x-m}};$$

siffatte curve sono chiamate dal Marie, che primo le considerò¹⁾, *trèfles*.

17. Lasciamo al lettore di giudicare l'opportunità e bontà della nomenclatura newmaniana, ed osserviamo che tutte le cubiche di cui ci dovremo occupare sono dotate di punti multipli, o passano per punti ciclici, oppure godono di entrambe queste prerogative; onde noi giudichiamo opportuno di esporre nei due Capitoli seguenti le proprietà più cospicue delle *cubiche razionali* e delle *cubiche circolari*²⁾. Prima però vogliamo fare menzione di due particolari curve del terzo ordine notevoli benchè non appartengono nè all'una nè all'altra delle categorie testè segnalate.

La prima appartiene alla classe delle *curve fisico-matematiche* giacchè risolve il seguente problema di meccanica: «Dati sopra una retta orizzontale due punti *A, B*, trovare una curva *Γ* tale che, dettone *P* un punto qualunque, la somma dei tempi di discesa ed ascensione di un punto pesante sopra le due rette *AP, PB* sia costante». Presi come assi la retta *AB* e quella che biseca ad angolo retto il segmento *AB = 2a*, si trova come equazione della curva *Γ* la seguente:

$$\sqrt{\frac{x^2 + (a-y)^2}{gx}} + \sqrt{\frac{x^2 + (a+y)^2}{gx}} = \text{cost.}$$

ma questa è circolare!

N. Fuss, che ha stabilito questa equazione³⁾, ha notato che

¹⁾ *Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie* (Nouv. Ann., 3^a Serie, T. XI, 1892).

²⁾ Si sono considerate anche le *cubiche ortiche*, che sono apolari rispetto ai due punti ciclici del piano; rispetto a una tale curva tutte le coniche polari sono iperboli equilateri: v. C. E. Brooks, *A note on the orthic cubic curves* (J. Hopkins Univ. Circulars, 1904).

³⁾ *De descensu gravium super arcuum lemniscatae* (Mem. de Pétersbourg, T. IX, 1824).

la curva da essa rappresentata, offre molta analogia di forma con conoide di Nicomede (v. n. 66).

La seconda è il luogo dei punti le cui distanze da tre rette date formano un prodotto costante; la sua equazione è quindi:

$$(x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1)(x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2) \\ (x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3) = a^3.$$

La curva ha tre punti reali all'infinito e fu chiamata da G. Korneck, che se ne è occupato¹⁾, *iperbole cubica*: essa si presenta anche come luogo dei centri delle coniche di data area tangenti a tre rette date; notiamo per incidenza che il luogo analogo per le coniche di data area passanti per tre punti dati è del sesto ordine.

Supponiamo in particolare che si parta dal triangolo isoscele rettangolo avente per lati gli assi coordinati e la retta $x + y - p = 0$; la curva risultante ha allora per equazione

$$xy(x + y - p) = a^3;$$

ora se noi facciamo tendere p a 0 si arriva alla curva studiata da J. Alvera nella sua Diss. di laurea (Rostock, 1873); la corrispondente Hessiana consta nella retta all'infinito e della coppia di rette immaginarie coniugate rappresentate dall'equazione

$$x^2 + xy + y^2 = 0$$

I tre asintoti della curva concorrono in un punto (l'origine), proprietà condivisa dalle cubiche di cui tutte le coniche polari sono circoli; degli asintoti di una tale curva uno solo è reale e detti α, β gli angoli che esso fa con gli altri due, sussiste la relazione

$$\cot(\alpha - \beta) = \cot \alpha - \cot \beta^2)$$

Parecchie cubiche sono collegate a un triangolo, ma noi non ci arrestiamo su di esse, perchè sono esenti da speciali prerogative³⁾. Notiamo piuttosto che una coppia di triangoli ABC, XYZ si-

¹⁾ Eine mathematische Abhandlung über den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kegelschnitten, von denen 3 Tangenten oder 3 Punkten nebst der Fläche gegeben ist (Progr. Ort., 1868). V. anche E. CZUBER, Ueber einen geometrischen Ort und eine damit zusammenhängende Fläche (Monatshefte Math. Phys., T. III, 1892).

²⁾ M. STUYVAERT, Point remarquable dans le plan d'une cubique (Nouv. Ann. de mathém., 3^e Ser., T. XVIII, 1899).

³⁾ J. NEUBERG, Sur les cubiques de Darboux, de Lemoine et de Thomson (Ann. Soc. sc. de Bruxelles, T. XLIV, 1924-25); DEAUX, Sur les cubiques de Darboux et de Lucas (Mathésis, T. XXXVIII, 1924).

tuati nello stesso piano dà luogo a una notevole cubica, come ora diremo: Si consideri il luogo di un punto M tale che i tre punti $MX \cdot BC, MY \cdot CA, MZ \cdot AB$ siano in linea retta; godranno allora della stessa proprietà i punti $MA \cdot YZ, MB \cdot ZX, MC \cdot XY$, e il luogo di M sarà una curva di terz'ordine¹⁾. Assunto infatti per fondamentale il triangolo ABC , come equazione del luogo di M definito alla prima maniera si trae (dette x_i, y_i, z_i le coordinate di X, Y, Z e α, β, γ le coordinate correnti):

$$(\gamma x_1 - \alpha x_2)(\alpha y_2 - \beta y_1)(\beta z_3 - j z_2) = \\ (\alpha x_2 - \beta x_1)(\beta y_3 - j y_2)(j z_1 - \alpha z_3);$$

ora a questa forma si può ridurre l'equazione del luogo del punto M definito nella seconda maniera.

¹⁾ H. BATEMAN, A cubic curve connected with two triangles (Bull. Amer. math. Society, T. XXXIII, 1927).

non si sono singolarità finite

$$f_x = y(2x + y - pz) = 0$$

$$f_y = x(2y + x - pz) = 0$$

$$f_z = -pxy - 3a^3z^2 = 0$$

non ha soluz. di $(\infty, \infty, \frac{3}{p})$ e questa non soddisfa $f=0$

CAPITOLO II

Cubiche razionali in generale.

18. Tre delle parabole divergenti descritte nel n. 14 sono dotate ciascuna di un punto doppio; segandone una con le rette del fascio avente per centro il relativo punto singolare nasce una corrispondenza univoca tra i punti della curva ed i valori di un parametro, la quale mostra essere la curva stessa razionale. Proiettando in modo arbitrario tale curva si arriva alle formole seguenti:

$$(1) \quad \varrho x_i = a_{i0} \lambda^3 + a_{i1} \lambda^2 + a_{i2} \lambda + a_{i3} \quad (i = 1, 2, 3),$$

(ϱ essendo un fattore di proporzionalità e λ il parametro), le quali quali porgono la rappresentazione parametrica comune a tutte le ∞^8 cubiche razionali esistenti nel piano¹⁾. Ne deduciamo che affinché i tre punti (α), (β), (γ) siano in linea retta²⁾ è necessario e sufficiente che sia nullo il prodotto delle due matrici:

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^3 & \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^3 & \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix},$$

cioè che sia abbia

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 & -(\alpha + \beta + \gamma) & \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta & -\alpha\beta\gamma \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

o anche, indicando con k_0, k_1, k_2, k_3 i determinanti che si otten-

¹⁾ Riguardo a quanto segue si veda: IGEL, *Ueber ebene Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt* (Math. Ann., T. VI, 1873).

²⁾ Indichiamo in genere, qui ed in seguito, con (λ) il punto della curva corrispondente al valore λ del parametro.

gono dalla matrice

$$\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

sopprimendovi successivamente le verticali 1^a, 2^a, 3^a, 4^a,

$$(2') \quad k_0 + k_1(\alpha + \beta + \gamma) + k_2(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) + k_3\alpha\beta\gamma = 0$$

Supponendo fra loro eguali α, β, γ la (2) o (2') si trasforma un'equazione le cui radici determinano i tre flessi che la curva possiede; le equazioni così risultanti sono:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1 - 3\omega & 3\omega^2 - \omega^3 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$(3') \quad k_0 + 3k_1\omega + 3k_2\omega^2 + k_3\omega^3 = 0$$

Servendosi delle (2) o (2') è facilissimo dedurre da queste equazioni che i tre flessi della curva sono in linea retta; ne sono reali uno o tre secondochè è positivo o negativo il discriminante

$$(4) \quad D = (k_0 k_3 - k_1 k_2)^2 - 4(k_1 k_3 - k_2^2)(k_0 k_2 - k_1^2)$$

della (3').

Ad un punto doppio della curva corrispondono due valori di δ_1, δ_2 del parametro; essi sono tali che, preso un punto qualunque (λ) sulla curva, è soddisfatta per identità, rispetto a λ , la condizione di collinearità dei tre punti (δ_1), (δ_2), (λ); la (2') dà quindi

$$k_0 + k_1(\delta_1 + \delta_2) + k_2\delta_1\delta_2 = 0, \quad k_1 + k_2(\delta_1 + \delta_2) + k_3\delta_1\delta_2 = 0;$$

se ne deduce che δ_1 e δ_2 sono radici dell'equazione

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 1 - \delta & \delta^2 \\ k_0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = 0$$

Il discriminante di questa equazione è ancora D , onde il punto doppio della curva è un nodo od un punto isolato secondochè D è negativo o positivo. Questo fatto, combinato con altro sopra rilevato porta a concludere che una cubica razionale possiede uno o tre flessi reali secondochè ha un nodo od un punto isolato. Nel caso di una cubica cuspidata è $D = 0$ e si ha un solo flesso sempre reale.

Si deduce dalla (1) che la congiungente i due punti (λ) e (μ) ha per equazione

$$(6) \quad \begin{vmatrix} x_1 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 3 & -(\lambda + \mu) & \lambda\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda + \mu) & 3\lambda\mu \end{vmatrix} = 0;$$

in particolare, facendo $\mu = \lambda$ si conclude che l'equazione della tangente nel punto (λ) è rappresentata come segue:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 3 & -2\lambda & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\lambda & 3\lambda^2 \end{vmatrix} = 0;$$

emerge da ciò che la curva considerata è in generale della quarta classe¹⁾.

19. L'equazione della curva di cui trattiamo si otterrebbe eliminando λ fra le equazioni (1); non eseguiremo questo calcolo²⁾ e preferiamo segnalare le forme canoniche semplicissime a cui è riducibile l'equazione di una cubica razionale secondochè ha un nodo, una cuspidè od un punto isolato.

a) Nel primo caso, preso per vertice A_3 del triangolo fondamentale il punto singolare della curva, questa è rappresentabile con la seguente equazione:

$$(8) \quad m x_1 x_2 x_3 = c_0 x_1^3 + c_1 x_1^2 x_2 + c_2 x_1 x_2^2 + c_3 x_2^3 \quad ^3);$$

posto quindi $x_2 = \lambda x_1$, si conclude:

$$\varrho x_1 = m \lambda, \quad \varrho x_2 = m \lambda^2, \quad \varrho x_3 = c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda^3;$$

epperò la condizione di collinearità di tre punti (α) , (β) , (γ) è

$$(9) \quad \alpha \beta \gamma = k,$$

¹⁾ Per altre applicazioni della stessa rappresentazione parametrica v. T. W. MOORE, *Notes on the rational plane cubic curve* (Bull. Amer. Math. Soc., T. XXXII, 1926).

²⁾ EM. WEYR, *Zur Geometrie der Curven 3. Ordnung* (Zeitschrift, T. XV 1870).

³⁾ SALMON, *Analytische Geometrie des höheren ebenen Curven*, deutsch von FIEDLER (Leipzig 1873), p. 226.

avendo posto per brevità

$$k = -\frac{c_2}{c_0}.$$

Con una scelta opportuna del parametro la rappresentazione trovata si può semplificare come segue:

$$\varrho x_1 = 3 t^2, \quad \varrho x_2 = 3 t, \quad \varrho x_3 = t^2 + 1^1).$$

Se inoltre la curva è simmetrica rispetto a una retta, assunta questa come asse delle ascisse, l'equazione cartesiana della curva assume l'aspetto seguente

$$x(x^2 + k y^2) = a x^2 + b y^2,$$

che include anche il caso in cui la curva abbia l'origine per punto isolato (allora a e b hanno egual segno, mentre se è doppio sono di segni differenti); si è proposto di chiamarle *cubiche ellittiche*, *iperboliche* o *paraboliche*, secondochè $k \gtrless 0$ ²⁾.

Giova qui notare che se una cubica ha un punto doppio all'infinito la sua equazione cartesiana può scriversi sotto la forma

$$x^2 y + a b y - a^2 x = 0,$$

ove a e b devono avere segni contrari; altrimenti all'infinito si avrebbe un punto isolato, sarebbe cioè un'*anguinea* o *serpentino* di Newton³⁾.

b) Se invece la curva ha una cuspidè la sua equazione omogenea è riducibile alla forma

$$(10) \quad x_1 x_2^3 = x_2^3 \quad ^4),$$

donde

$$\varrho x_1 = \lambda^3, \quad \varrho x_2 = \lambda, \quad \varrho x_3 = 1$$

e, in luogo della (9), si ottiene la seguente condizione di collinearità

$$(11) \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

c) Se finalmente la curva ha un punto isolato, la sua equa-

¹⁾ Essa trovasi, fra l'altro, applicata nella nota di R. M. WINGER, *Involutions on the rational cubic* (Bull. Amer. Math. Soc., T. XXV, 1918).

²⁾ E. BARISIEN, *Intern. des math.*, T. VII, 1900, p. 79-80.

³⁾ F. GOMES TEIXEIRA, *Obras cit.*, T. IV, p. 97.

⁴⁾ SALMON, *Analytische Geometrie des höheren ebenen Curven*, deutsch von FIEDLER (Leipzig 1873), p. 225.

la sua Hessiana¹⁾; e finiremo accennando al problema della rettificazione delle cubiche razionali.

È questo un problema che in generale dipende da integrali iperellittici di genere 3, ma in casi particolari si semplifica. Così vedremo che la cissode retta (Cap. 4 di questo Libro) e la parabola semicubica (Lib. V, Cap. II) sono rettificabili elementarmente; così il Salmon, tre quarti di secolo fa²⁾, ed il de Longchamps più recentemente³⁾ notarono che bastano gli integrali ellittici per rettificare tutte le cubiche razionali circolari; così finalmente il Darboux trovò⁴⁾ che le linee di curvatura delle superficie di area minima dell'Enneper sono cubiche rettificabili algebricamente⁵⁾. Finalmente il Raffy⁶⁾ si è proposto ed ha risolto il problema di determinare tutte le cubiche razionali la cui rettificazione può farsi mediante funzioni di genere inferiore a 3; e, col mezzo di un'analisi esauriente, che a noi è vietato di riprodurre, è giunto al seguente teorema:

« Fra le cubiche razionali sono rettificabili:

I. *Algebricamente*: le curve chiamate dal Raffy *caustiche-podarie*, cioè le curve che sono o podarie negative delle parabole rispetto al fuoco o caustiche delle stesse curve nell'ipotesi che i raggi luminosi siano perpendicolari all'asse (cfr. n. 49);

II. *Mediante integrali circolari* (cioè della forma

$$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

f essendo simbolo di una funzione razionale) *a)* quelle che in coordinate cartesiane ortogonali ammettono la seguente rappresentazione parametrica

$$x = a \frac{\lambda^3 - 3\lambda}{\lambda - c}, \quad y = a \frac{3\lambda^2 - 1}{\lambda - c},$$

b) le parabole semicubiche rette o oblique (v. n. 119) *c)* le cissoidi rette o oblique (v. n. 23);

III. *Mediante funzioni di genere 1*, quelle che possiedono una delle seguenti singolarità: *a)* due punti d'inflessione a tangente isotropa⁷⁾ *b)* una cuspidale a distanza finita e un contatto con la

¹⁾ DINGELDEY, *Zur Construction der Hesse'schen Curve der rationalen Curven dritter Ordnung* (Math. Ann., T. XXVIII, 1887).

²⁾ *Higher plane Curves* (Dublin 1852), p. 267.

³⁾ *Sur la rectification de quelques courbes remarquables* (Mathesis, T. VII, 1887).

⁴⁾ *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, T. I (Paris 1887), p. 318.

⁵⁾ Una qualunque di tali curve è una *caustica-podaria* nel senso adoperato dal Raffy (v. più sotto).

⁶⁾ V. la memoria *Sur la rectification des cubiques planes unicursales* (Ann. Ec. norm., III Serie, T. VI, 1889).

⁷⁾ Si chiama *isotropa* una retta passante per un punto ciclico del piano.

retta all'infinito, *c)* una cuspidale o un flesso all'infinito, *d)* passaggio per punti ciclici;

IV. *Mediante funzioni di genere 2*, quelle che hanno *a)* una cuspidale al finito, oppure *b)* un semplice contatto con la retta all'infinito o finalmente *c)* un punto doppio all'infinito ».

Ricordando le varie parti di questa proposizione, il lettore è in grado di determinare la natura analitica delle funzioni da cui dipende la rettificazione di tutte le curve di cui ci occuperemo in questo Libro.

Osserviamo infine che le curve a cui è dedicato il presente Cap. possono anche investigarsi con i metodi propri della geometria proiettiva¹⁾.

¹⁾ V. p. es. K. ZAHRADNIK, *Konstruktion des rationalen Kurven dritter Ordnung resp. Klasse mittelst der kollinear incidenten Elemente* (Wiener Sitzber., T. 117, 1908; è ivi applicata la corrispondenza che nasce associando a ogni punto del piano la retta che lo unisce a quello che gli corrisponde in una data proiettività); C. SERVAIS, *Sur les cubiques unicursales* (Annales de l'École Normale Supérieure, Porto, T. XIV, 1920).

CAPITOLO III

Cubiche circolari in generale ¹⁾.

21. Una cubica circolare, o *cataspirica* ²⁾, è determinata da sette o da sei punti a distanza finita secondochè il suo genere è 1 o 0. Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali la sua equazione è sempre riducibile alla forma

$$(1) \quad (ax + \beta y)(x^2 + y^2) + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + fy + c = 0.$$

Oltre ai punti ciclici, la curva possiede all'infinito un punto sempre reale, cioè il punto all'infinito della retta $ax + \beta y = 0$; se, quindi, si sceglie l'asse delle x parallelo a questa retta, la (1) si semplifica divenendo

$$(2) \quad y(x^2 + y^2) + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

In ogni punto ciclico la curva che studiamo ammette una determinata tangente; le due rette così ottenute sono immaginarie coniugate e si tagliano in un punto reale, il fuoco straordinario o *centro della curva*, le cui coordinate sono

$$(3) \quad x = h, \quad y = \frac{a - b}{2}.$$

Assunto questo punto per nuova origine e ritenendo le direzioni degli assi, la (2) assume la forma

¹⁾ Cfr. C. A. BJERKNES, *Sur une certaine classe de courbes de troisième ordre, rapportées à lignes droites, qui dépendent de paramètres donnés* (G. di Crelle, T. LV, 1858); J. CASEY, *On bicircular quartics*, art. 90-115 (Irish. Trans., T. XXIV, 1869); F. FRICKE, *Ueber ebene Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginäre Kreispunkte gehen* (Diss. Jena, 1898).

²⁾ Nome usato dal LAGUERRE nella nota *Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés* (Nouv. Ann., 2^a serie, T. XVIII, 1879) per ricordare che una cubica circolare può considerarsi come una spirica (v. Lib. III, Cap. IV) con un fuoco singolare all'infinito.

$$(4) \quad (y + a)(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Da ogni punto ciclico si possono condurre quattro rette tangenti *altrove* una cubica circolare di genere 1: nascono così due *fasci* di quattro raggi ciascuno, che sono proiettivi in virtù del teorema di Salmon ricordato nel n. 12; osservando anzi che la proiettività si può stabilire in quattro modi differenti, che inoltre ogni tangente condotta da uno dei punti ciclici taglia tutte quelle condotte dall'altro in punti che sono fuochi della curva, si vede che *i sedici fuochi di una cubica circolare* (dei quali quattro soltanto sono reali) *giacciono quattro a quattro sopra quattro* (coniche passanti per punti ciclici, cioè) *circoli*; proposizione notevole ordinariamente chiamata « teorema dell'Hart » ¹⁾. Per una curva circolare razionale i fuochi ordinari sono 4, se essa possiede un nodo od un punto isolato, 1 solo se ha una cuspid.

Qualsiviglia parallela all'asse delle x taglia la curva (4) in due punti a distanza finita, le cui ascisse si ottengono risolvendo rispetto a x la corrispondente equazione; ma se si prende $y = -a$ una radice x della (4) diviene infinita, onde l'equazione

$$(5) \quad y + a = 0$$

rappresenta l'asintoto della curva (4). Questo asintoto sega ulteriormente la curva nel punto A di coordinate

$$(6) \quad x = \frac{2af - c}{2g}, \quad y = -a,$$

detto *punto principale* della curva; si chiama poi *mediana* ²⁾ della stessa la retta condotta pel punto M , centro del segmento FA , parallelamente all'asintoto; ne è quindi equazione la seguente

$$(7) \quad y + \frac{x}{2} = 0.$$

Si noti ora che la (4) può considerarsi come risultante dall'eliminazione di r^2 fra le equazioni.

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (y + a)(r^2 + 2f) + 2g \left[x - \frac{2af - c}{2g} \right] = 0;$$

¹⁾ SALMON, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven*, deutsch von FIEDLER (Leipzig 1873), p. 177; v. anche M. DISTEL, *Die Metrik der circularen Curven dritter Ordnung in Zusammenhang mit geometrischen Lehrsätze Jakob Steiners* (Zürich Ges., T. XXXVIII, 1891).

²⁾ R. DÖLLE, nella Diss. *Orthogonale Invariante der Circularkurven 3. Ordnung* (Jena 1903), la chiama « orthische Gerade ».

e questo fatto debitamente interpretato esprime il seguente teorema dello Ozuber¹⁾: *Qualunque cubica circolare è generabile mediante un fascio di raggi ed un fascio proiettivo di cerchi concentrici; il centro del fascio di raggi è il punto principale ed il centro comune a tutti i cerchi generatori è il fuoco straordinario della curva. Se ne trae come corollario il seguente teorema dell'Eckardt²⁾: Ogni retta condotta pel punto principale di una cubica circolare taglia ulteriormente la curva in due punti equidistanti dal fuoco straordinario.*

22. È notevole il caso in cui la cubica passi pel suo fuoco straordinario, ossia, ciò che è lo stesso, che i punti ciclici siano coniugati. Esso venne studiato dallo Schröter³⁾ e dal Durège⁴⁾ eccitati dall'osservazione del Salmon⁵⁾ che tale curva è il luogo dei fuochi delle coniche di una schiera; donde il nome di *curva focale* che essa porta in geometria, mentre in cinematica, dove rappresenta una parte importante, si chiama *curva dei punti circolari*⁶⁾. Nel caso attuale bisogna supporre che nelle equazioni precedenti sia $c = 0$; le (4) e (5) divengono quindi

$$(4') \quad y(x^2 + y^2 + ay + 2f) + x(ax + 2g) = 0,$$

$$(5') \quad x = \frac{af}{g}, \quad y = -a;$$

ora la (4') risulta eliminando λ fra le equazioni

$$x = \lambda y, \quad \left[x + \frac{a\lambda}{2} \right]^2 + \left[y + \frac{a}{2} \right]^2 = \frac{1 + \lambda^2}{4} a^2 - 2g\lambda - 2f,$$

¹⁾ Die Curven 3. und 4. Ordnung, welche durch die unendlich ferne Kreispunkte gehen (Zeitschrift, T. XXXII, 1887).

²⁾ Cfr. DURÈGE, Ueber eine leichte Construction der Curve 3. Ordnung, welche durch die imaginäre Kreispunkte geht (Zeitschrift, T. XIV, 1869). La costruzione delle cubiche circolari fu studiata anche recentemente, come appare dai seguenti articoli: F. GOMES TEIXEIRA, Sur une manière de construire les cubiques circulaires (Nouv. Ann. de math., IV Ser., T. 16, 1916, oppure Annaes Acad. pol. Porto, T. XIII, 1918); F. BALITRAND, Notes sur les cubiques circulaires (Nouv. Ann. de math., IV Ser., T. 18, 1918); R. M. MATHEWS, A general construction for circular cubics (Amer. math. Monthly, T. 19, 1922; è ivi sfruttata la generabilità di una cubica mediante due fasci proiettivi di rette e di coniche).

³⁾ Ueber eine besondere Curve 3. Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve 3. Ordnung (Math. Ann., T. V, 1872).

⁴⁾ Ueber die Curve 3. Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet (Math. Ann., T. V, 1872).

⁵⁾ Analytische Geometrie der Kegelschnitte, deutsch von FIEDLER, 2 Aufl., p. 355 e 397.

⁶⁾ Cfr. R. MÜLLER, Construction der Focalcurve aus sechs gegebenen Punkten (Zeitschrift, T. XL, 1895).

dunque si conclude: *Qualunque cubica circolare contenente il proprio fuoco straordinario è generabile mediante un fascio di raggi, avente per centro il fuoco stesso, ed un fascio proiettivo di cerchi, essendo il centro di ogni circolo del fascio situato sopra il raggio corrispondente e sulla mediana della curva.*

Un'altra classe importante di cubiche circolari è quella costituita da curve simmetriche rispetto ad un asse; presolo come asse delle x ed assunta per origine il punto reale in cui esso incontra la curva, come equazione generale di questa si può assumere la seguente:

$$(8) \quad x(x^2 + y^2) + ax^2 + by^2 + cx = 0; \quad \text{cioè } \text{fig. } 23 \text{ (curva del Fuoss)}$$

passando a coordinate polari si ottiene l'altra

$$\rho^2 + \rho \frac{a \cos^2 \omega + b \sin^2 \omega}{\cos \omega} + c = 0;$$

se quindi chiamiamo ρ_1, ρ_2 le radici di quest'equazione avremo $\rho_1 \rho_2 = c$, perciò la curva (8) è trasformata in sé stessa da un'inversione avente per centro l'origine e c per potenza¹⁾. Altre due analoghe inversioni esistono quando la curva è segata dall'asse di simmetria in tre punti reali²⁾. — Fra le curve di detta specie trovasi anche quella di equazione

$$x^3 - 6px^2 + xy^2 + p^2x - 4p^3 = 0,$$

di cui il Varignon ha insegnata la costruzione col mezzo di due iperboli³⁾; di più ne propose al Rolle la ricerca dei flessi nel corso della celebre disputa che ebbe luogo fra quei due matematici riguardo al valore del metodo infinitesimale; il Varignon la chiama *concoide* grazie alla somiglianza di forma che essa presenta con la concoide di Nicomede (v. Lib. III Cap. V).

Una terza classe è costituita dalle curve circolari e razionali. Scelti due assi ortogonali aventi come origine il punto doppio della curva si ha per rappresentare questa la seguente equazione:

$$(x^2 + y^2)(\alpha x + \beta y) + ax^2 + 2hxy + by^2 = 0,$$

che guida a questa rappresentazione parametrica:

¹⁾ Da questo fatto si deduce che le tangenti alla curva in due punti posti in una retta passante per l'origine, formano angoli eguali con questa retta.

²⁾ Per altre proprietà v. W. GAEDEKE, Ueber das Zentrum der mittleren Erzeugungen gewisser Punktquadrupel auf den rationalen zirkulären Kurven 3. Ordnung mit Symmetrieaxe (Sitzber. Berl. math. Ges., 1916).

³⁾ V. una lettera scritta a LEIBNIZ il 23 maggio 1702 e pubblicata in Leibniz ed. Gerhardt, T. IV (Halle 1859), p. 101.

$$x = -\frac{a + 2h\lambda + b\lambda^2}{(1 + \lambda^2)(\alpha + \beta\lambda)}, y = -\lambda \frac{a + 2h\lambda + b\lambda^2}{(1 + \lambda^2)(\alpha + \beta\lambda)}$$

Si deduce da essa che un cerchio qualunque passante per l'origine, cioè rappresentato da un'equazione del seguente tipo

$$x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y = 0$$

taglia la curva ancora in due punti che sono determinati dall'equazione

$$(a + 2\alpha\xi) + 2\lambda(h + \beta\xi + \alpha\eta) + (b + 2b\eta)\lambda^2 = 0;$$

ora affinché quei due punti coincidano dev'essere

$$(\beta\xi - \alpha\eta)^2 + 2(h\beta - b\alpha)\xi + 2(h\alpha - a\beta)\eta + (h^2 - a b) = 0,$$

e quest'equazione in ξ, η rappresenta una parabola; dunque, chiamando *Paraevoluta* di una cubica razionale circolare il luogo dei centri dei cerchi che passano pel suo punto doppio e la toccano altrove, si conclude: *La paraevoluta di una cubica circolare razionale è una parabola*¹⁾.

Una notevole cubica circolare s'incontra nella geometria del triangolo²⁾.

Della medesima specie è il luogo dei punti P tali che si abbia $P\bar{O}^2 = P U \cdot P V$, O, U, V essendo punti in linea retta³⁾.

¹⁾ Questo teorema pel caso speciale delle cissoide si trova in M. SIMON, *Analytische Geometrie* (Leipzig 1900), p. 283.

²⁾ T. W. MOORE e J. H. NEELY, *The circular cubic on twenty-one points of a triangle* (Amer. math. Monthly, T. 32, 1925); B. H. BROWN, *Note on the preceding paper* (Ivi); F. MORLEY, *Note on Neuberg's cubic curve* (Ivi); O. M. THALBERG, *Application of the theorem of residuation to the 21-point cubic* (Ivi).

³⁾ T. ONO, *Sur une courbe du troisième ordre* (Tohoku Math. Journ., T. IV, 1913).

CAPITOLO IV

La cissoide di Diocle.

23. I problemi della quadratura del circolo, della duplicazione del cubo e della divisione di un angolo in parti eguali costituirono per molti secoli lo scopo degli sforzi di tutti i più eminenti geometri; molti dei quali, vedendo essere i luoghi piani e solidi impotenti a risolverli, tentarono di vincere le difficoltà che si opponevano al raggiungimento della soluzione adoperando altre curve di genesi più complicata; ebbero così origine numerose classi di curve che chiameremo risp. *quadratrici, duplicatrici e settrici*. Nella seconda troviamo, oltre le sezioni coniche, la notevole curva a cui è consacrato il presente Capitolo. Essa venne ideata da un certo Diocle geometra imperfettamente noto, posteriore certamente ad Archimede e vissuto presumibilmente fra il 250 ed il 100 a. C.¹⁾; in qual modo egli se ne servisse per raddoppiare un cubo si apprende dalle postille di Eutocio Ascalonita al II dei Libri di Archimede *Sopra la sfera ed il cilindro*²⁾.

Per esporre la generazione della linea dioclea, consideriamo (fig. 1) un circolo di centro O e due suoi diametri AB, CD fra loro perpendicolari; si prendano poi sulla periferia del circolo due archi AE, AG fra loro uguali e si conduca da G la parallela al diametro AB , essa taglierà CE in un punto M della curva di Diocle. Il luogo del punto M — di cui vedremo la somiglianza di forma con la foglia di edera —, non è designato da Eutocio con alcun nome speciale; che esso sia lo stesso che Proclo e Pappo chiamano *cissoide* (*νισσοειδής γραμμή* da *ήνισσος* = edera) è estremamente probabile, ma non matematicamente certo, non esistendo alcun antico documento nel quale al nome di cissoide trovisi associato quello di Proclo; tuttavia il luogo del punto M è da tutti chiamato *Cissoide di Diocle*. Notiamo che se la retta CE taglia in F la retta d tangente in D al dato circolo, i due segmenti CE, MF risultano eguali e dello stesso senso, onde la cissoide si può costruire più semplicemente

¹⁾ G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia* (Milano 1914), p. 410.

²⁾ Archimede ed Heiberg, T. III (Lipsiae 1881), p. 81 e seg.

portando su ogni retta CF uscente di C il segmento FM eguale e di senso contrario a CE ; se invece si portasse sulla stessa retta il segmento FM' eguale e dello stesso senso di CE si otterrebbe una nuova curva chiamata *compagna*¹⁾ o *gemella*²⁾ della *cissoide*.

La *cissoide* di Diocle è simmetrica rispetto al diametro CD del circolo generatore e contiene gli estremi A, B del diametro perpendicolare. Benchè essa si estenda all'infinito, gli antichi non ne consideravano che i due archi, interni al circolo O , che partono da C per arrivare dai punti A, B ; questi archi, assieme alla semiperiferia ADB , limitano una regione di piano la cui forma (v. fig. 1) ricorda una foglia di edera, donde la spiegazione del nome di *cissoide*. L'esistenza dei rami infiniti sembra sia stata avvertita soltanto verso la metà del Sec. XVII; infatti il Roberval, in una lettera diretta a Fermat addì 4 Agosto 1640, parlando « delle cissoidi »³⁾, avverte che « ces deux lignes courbes sont infinies de leur nature et ont des asymptotes parallèles entre elles, ce qu'on m'a

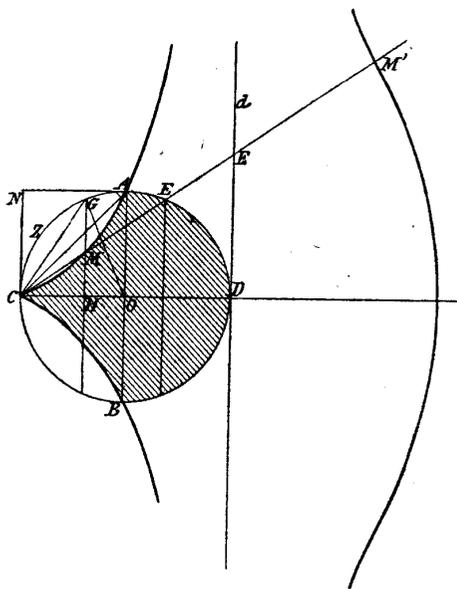


Fig. 1. — Cissoide di Diocle.

assuré avoir été déjà démontré par un auteur dont on ne m'a pas pu dire le nom »⁴⁾. Indipendentemente da questo ignoto, i rami infiniti della *cissoide* vennero segnalati da R. de Sluse; in conseguenza l'Huygens⁵⁾ propose si chiamasse *cissoide slusiana* la curva completa; ma, quantunque tal nome abbia riscossa l'approvazione

¹⁾ G. BELLACCHI, *Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche* (Firenze 1894), p. 136.

²⁾ E. N. BARISIEN, *Mathésis*, T. 39, 1925, p. 214.

³⁾ Per intendere il seguente passo è necessario sapere che il ROBERVAL considerava, assieme alla *cissoide*, la curva simmetrica rispetto alla cuspide.

⁴⁾ *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 201.

⁵⁾ V. la lettera a R. DE SLUSE, in data 5 aprile 1658, inserita nel T. II, p. 164 delle *Oeuvres de Huygens*.

del principale interessato¹⁾, non venne adottata e si seguì a chiamare *cissoide* di Diocle il luogo di tutti i punti M dianzi definiti; intesa in questo senso la curva ha la retta d per asintoto d'inflessione.

24. Prendiamo ora C per polo di un sistema di coordinate polari ρ, ω e CD per asse polare; detto r il raggio del dato circolo si otterrà:

$$\rho = CM = EF = CF - CE = \frac{2r}{\cos \omega} - 2r \cos \omega,$$

onde l'equazione polare della *cissoide* è

$$(1) \quad \rho = \frac{2r \operatorname{sen}^2 \omega}{\cos \omega}$$

Passando a coordinate cartesiane si ottiene

$$(2) \quad x(x^2 + y^2) = 2ry^2,$$

donde emerge che la *cissoide* è una cubica avente C per cuspide e CD per corrispondente tangente; essa è di terza classe. Scrivendo la (2) come segue

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

si pone in evidenza essere la retta d un asintoto d'inflessione. Se, invece, consideriamo la *compagna* della *cissoide*, avremo:

$$\rho = CM' = CF + FM' = CF + CE = \frac{2r}{\cos \omega} + 2r \cos \omega,$$

onde le equazioni polare e cartesiana della curva sono:

$$\rho = \frac{2r(1 + \cos^2 \omega)}{\cos \omega}, \quad y^2 = \frac{x^3 - 4rx^2}{2r - x};$$

la curva stessa è dunque essa pure una cubica circolare, simmetrica rispetto a CD ed avente C per punto isolato.

Il metodo di generazione che indicammo per la *cissoide* non si presta a descrivere la curva con moto continuo; di un siffatto metodo

¹⁾ V. la risposta del DE SLUSE, scritta addì 17 april 1658 ed inserita a p. 168 del volume citato nella nota precedente.

aveva bisogno Newton per ottenere che la cissoide venisse ascritta, come la retta ed il circolo (v. n. 5), fra le curve adoperabili nella soluzione di qualunque problema; e ne scoperse uno notevole, quello che si apprende dal seguente teorema¹⁾: « Un angolo retto (fig. 2) $F G H$ abbia il lato $F G$ di data lunghezza; se il punto F descrive una retta fissa r ed il lato $G H$ passa costantemente per un punto fisso E , che disti da r della lunghezza $F G$, il punto medio M del lato $F G$ descriverà una cissoide »²⁾.

Per dimostrarlo osserviamo che i due triangoli $E F G$, $E F O$ avendo l'ipotenusa comune ed eguali i cateti $E O$, $F G$ sono eguali, onde in particolare $\text{ang } F E O = \text{ang } G F E$. Se, quindi, $E O$ e $F G$

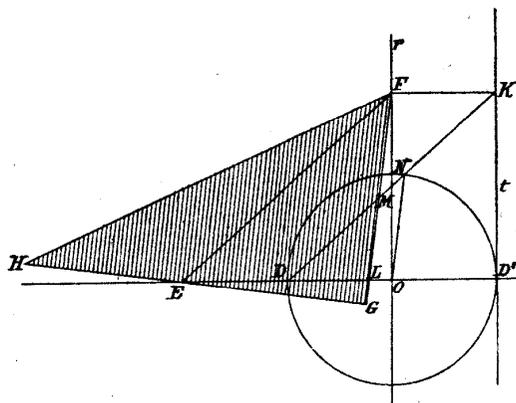


Fig. 2.

si tagliano in L , il triangolo $L E F$ risulta isoscele; e poichè $E D$ ($= \frac{1}{2} E O$) è eguale a $F M$ ($= \frac{1}{2} F G$), $D M$ è parallela a $E F$. Sia K l'intersezione della retta $D M$ con la parallela condotta dal punto F alla retta $E O$; si descriva il cerchio Δ di centro O e raggio $O D$ e se ne segni la tangente t nell'altro estremo D' del diametro $O D$; è chiaro che il punto K si troverà sulla retta t . Segnamo anche la intersezione N della retta $D M K$ con la periferia di quel cerchio, nonchè il raggio $O N$. I due triangoli $D O N$, $M F K$ risultano evidentemente isosceli ed eguali, onde, in particolare, $D N = M K$ e quindi $D M = N K$; ciò prova, che il luogo del punto M è appunto la cissoide ottenuta dal cerchio Δ e dalla tangente t .

¹⁾ *Arithmétique universelle*, trad. BÉAUDEUX (Paris 1802), T. II, p. 83.

²⁾ Una dimostrazione analitica di questo teorema leggesi in MAGNUS, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie* (Berlin 1833), p. 279.

Più importanti dal punto di vista teorico sono alcuni metodi di derivazione della cissoide dalla parabola di cui vogliamo far qui cenno.

a) Si consideri la parabola

$$y^2 = 2 p x;$$

$$p x - \eta y + \frac{\eta^2}{2} = 0$$

è l'equazione generale delle sue tangenti. La perpendicolare calata dall'origine sulla retta così rappresentata ha per equazione $\eta x + p y = 0$; onde il luogo dei piedi di tutte le analoghe perpendicolari ha per equazione il risultato dell'eliminazione di η fra le due equazioni ultime scritte, cioè $x(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} p y^2 = 0$. Paragonando questa equazione con la (2) si conclude: *la podaria del vertice di una parabola è una cissoide di Diocle*.

b) Osserviamo poi che il punto simmetrico dell'origine rispetto alla retta $p x - \eta y + \frac{\eta^2}{2} = 0$ ha per coordinato

$$x = -\frac{p \eta^2}{(p^2 + \eta^2)} \quad y = \frac{\eta^3}{(p^2 + \eta^2)};$$

eliminando η si trova $x(x^2 + y^2) + p y^2 = 0$; dunque: *il luogo dei punti simmetrici del vertice di una parabola rispetto alle tangenti della stessa è una cissoide di Diocle*¹⁾.

c) Siccome il punto simmetrico del vertice della data parabola rispetto ad una tangente è il vertice di una parabola eguale alla data e che ruzzola su questa, così si conclude: *Se una parabola ruzzola su una parabola eguale toccandola sempre esternamente, il vertice di essa descrive una cissoide*.

d) Se si effettua sulla parabola $y^2 = 2 p x$ la trasformazione per raggi vettori reciproci di centro O e potenza k^2 si arriva alla cissoide avente per equazione

$$x(x^2 + y^2) = \frac{k^2}{2 p} y^2.$$

La medesima trasformazione eseguita sulle due coniche a centro rappresentate dalle equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{x}{a} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0$$

¹⁾ MIRMAN, *Sur la cissoide de Dioclès* (Nouv. Ann., III Série, T. IV, 1885).

dà le due cubiche $k^3 (b^2 x^2 \pm a^2 y^2) = 2 a b^2 (x^2 + y^2) x$, entrambe circolari, razionali e simmetriche rispetto a Ox ; quella dedotta dall'ellisse ha nell'origine un punto isolato, mentre quella dedotta dall'iperbola ha ivi un nodo; adottando la nomenclatura del Neuberger¹⁾, la prima si chiama *ipercissoide* o *cissoide acnodale* e l'altra *ipocissoide* o *cissoide crunodale*: il nome di *cissoide cuspidale* è poi sinonimo di *cissoide di Diocle*.

25. Essendo la cissoide una curva razionale, le coordinate dei suoi punti potranno esprimersi in funzione razionale di un parametro. Ed infatti combinando la (2) con l'equazione $x = \lambda y$ si ottiene:

$$(3) \quad x = \frac{2r}{1 + \lambda^2}, \quad y = \frac{2r}{\lambda(1 + \lambda^2)}$$

Se ne deduce come condizione di collinearità di tre punti (α) , (β) , (γ)

$$(4) \quad \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

e come condizione di conciclicità di quattro punti (α) , (β) , (γ) , (δ)

$$(5) \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0;$$

se ne trae pure che la corda (α) (β) ha per equazione

$$(6) \quad (1 + \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)x - \alpha\beta(\alpha + \beta)y - 2r = 0,$$

in particolare che

$$(7) \quad (1 + 3\alpha^2)x - 2\alpha^2y - 2r = 0$$

è l'equazione della tangente in (α) ; quindi l'equazione della corrispondente normale è

$$(8) \quad 2\alpha^4x + (1 + 3\alpha^2)\alpha y - 2r(1 + 2\alpha^2) = 0$$

Dalla (7) si può trarre una costruzione della tangente alla cissoide; essa, infatti, dà come espressione della sottangente

$$\frac{4\alpha^2r}{(1 + \alpha^2)(1 + 3\alpha^2)} = \frac{x(2r - x)}{3r - x},$$

¹⁾ Sur quelques systèmes de tiges articulés (Liège 1886), p. 33.

²⁾ K. ZAHRADNIK, Theorie der Cissoide auf Grundlage eines rationalen Parameters (Prager Ber. 1873).

onde la sottangente stessa può ottenersi con la costruzione di una quarta proporzionale¹⁾.

Cercando invece l'involuppo delle rette rappresentate dalla (8) si trova la seguente equazione (ove $a = 2r$)

$$y^4 + \frac{32}{3} a^2 y^2 + \frac{512}{27} a^3 x = 0,$$

che rappresenta l'evoluto della cissoide²⁾.

Determinando il polo della retta (7) rispetto al circolo $x^2 + y^2 = R^2$, si trova il punto di coordinate

$$x = \frac{R^2}{2r}(1 + 3\alpha^2), \quad y = \frac{R^2}{r}\alpha^2,$$

il cui luogo ha per equazione

$$\left(x - \frac{R^2}{2r}\right)^3 = \frac{27R^2}{8r}y^2;$$

il luogo stesso è (n. 119) dunque una parabola semicubica; si vede perciò che: *La figura polare reciproca di una cissoide rispetto ad un circolo col centro nella cuspidale è una parabola semicubica*³⁾.

Come altra applicazione delle (3) cercheremo l'involuppo delle corde che la cissoide ha comuni con i suoi circoli osculatori. Osserviamo perciò che la (5) prova come il cerchio osculatore alla cissoide nel punto (α) la seghi nuovamente nel punto (-3α) ; ora le congiungenti questi due punti ha per equazione

$$(1 + 7\alpha^2)x - 6\alpha^2y - 2r = 0;$$

differenziandola rispetto a x si ottiene $\alpha = \frac{7x}{9y}$, onde eliminando α si trova:

$$y^2 = \frac{7^3}{3^5} \frac{x^3}{2r - x},$$

equazione che prova la proposizione seguente: *L'involuppo delle*

¹⁾ Questa costruzione fu data da FERMAT come applicazione del suo metodo dei massimi e minimi (*Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 159 e T. III, p. 141); un altro procedimento appartiene a ROBERVAL; v. le *Observations sur la composition des mouvements et sur les touchantes des lignes courbes* (Mém. de l'Acad. des Sciences, T. VI, Paris 1730).

²⁾ SALMON-FIEDLER, *Ebene Curven*, p. 97.

³⁾ Osservazione fatta dal JUEL in *Tidsskrift*, 1873.

corde comuni ad una cissoide ed ai suoi cerchi osculatori è una cissoide affine alla data¹⁾.

Due punti della cissoide corrispondenti a due valori quali λ e $-\frac{1}{\lambda}$ sono proiettati dalla cuspidale secondo due rette fra loro perpendicolari. Ora dalla (7) risulta che i parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dei punti di contatto delle tangenti condotte alla cissoide del punto (ξ, η) sono radici dell'equazione

$$2 \lambda^3 \eta - 3 \lambda^2 \xi + (\xi - 2r) = 0;$$

questa mostra essere

$$\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$

o anche

$$\left[-\frac{1}{\lambda_1} \right] + \left[-\frac{1}{\lambda_2} \right] + \left[-\frac{1}{\lambda_3} \right] = 0;$$

la quale relazione, avuto riguardo alla (4), prova il seguente teorema:

Se da un punto arbitrario P del piano si conducono le tangenti a una cissoide, se si uniscono i punti di contatto alla cuspidale e da questa si conducono le perpendicolari alle congiungenti, si ottengono tre punti della curva situati in una linea retta p . L'equazione di questa è

$$(r - 2\xi)x + \eta y + r(\xi - 2r) = 0$$

onde P e p si corrispondono in una correlazione²⁾.

26. Ad un'altra e non meno utile rappresentazione parametrica si giunge combinando l'equazione polare (1) della curva con quelle che legano le coordinate cartesiane alle polari; infatti si ottengono così le due nuove equazioni

$$(9) \quad x = 2r \operatorname{sen}^2 \omega, \quad y = 2r \frac{3 \operatorname{sen}^3 \omega}{\operatorname{sen} \omega};$$

ne faremo ora qualche applicazione.

Chiamiamo S l'area del triangolo mistilineo limitato dal diametro CD (fig. 1), dall'asintoto e dalla cissoide; è chiaro che si avrà:

¹⁾ K. ZAHRADNIK, *Beiträge zur Theorie der Cissoide* (Archiv, T. LVI, 1876) e *Eigenschaften gewissen Punkttupel auf der Cissoide* (Id., II Ser., T. VI, 1888).

²⁾ W. GAEDKE, *Beiträge zur Theorie der Kissoide* (Arch. f. Math. u. Phys., III Ser., T. XXVI, 1917).

$$S = \int_{x=0}^{x=2r} y \cdot dx = 8r^2 \int_{\omega=0}^{\omega=\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \omega \cdot d\omega = 8r^2 \frac{1 \cdot 3 \pi}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{2} 3\pi r^2.$$

Ma S è la metà dell'area compresa tra la cissoide ed il proprio asintoto, quindi si può concludere: l'area della porzione di piano compresa fra la cissoide ed il suo asintoto eguaglia il triplo del cerchio generatore¹⁾.

Consideriamo ora il triangolo mistilineo avente per i lati i raggi OA, OC e l'arco AMC di cissoide; la sua area è

$$= 8r^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^4 \omega d\omega;$$

integrando per parti si ottiene successivamente:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 \omega \cdot d\omega &= -\frac{\operatorname{sen}^3 \omega \cos \omega}{4} + \\ &+ \frac{3}{4} \int \operatorname{sen}^2 \omega d\omega = -\frac{\operatorname{sen}^3 \omega \cos \omega}{4} - \frac{3 \operatorname{sen} \omega \cos \omega}{8} + \\ &+ \frac{3\omega}{8} = \frac{3\omega}{8} - \frac{3 \operatorname{sen} 2\omega}{16} - \frac{\operatorname{sen}^2 \omega \cdot \operatorname{sen} 2\omega}{8} \end{aligned}$$

dunque

$$\text{area } COAMC = \frac{3\pi r^2}{4} - 2r^2.$$

Per interpretare questo risultato conduciamo le tangenti in A e C al cerchio generatore e determiniamone la intersezione N ; in virtù della relazione precedente si avrà

$$\text{area } CMANC = r^2 - \left[\frac{3\pi r^2}{4} - 2r^2 \right] = 3 \left[r^2 - \frac{\pi r^2}{4} \right];$$

¹⁾ Questa bella proposizione fu comunicata (nel Dicembre 1661?) dal FERMAT al CARCAVY (v. *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 154), il quale la trasmise il 1° gennaio 1662 ad HUYGENS (*Oeuvres de Huygens*, T. IV, p. 2-6), assieme ad un foglio contenente la dimostrazione datane dal FERMAT stesso (*Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 285 e T. III, p. 283). In calce a tale foglio HUYGENS appose la seguente postilla: « J'ai démontré cette proposition 4 (ans) auparavant »; tale asserzione è comprovata da un abbozzo di lettera scritta dal grande geometra olandese nell'aprile del 1658 (*Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 170-173), l'essenza della quale venne pubblicata l'anno appresso dal WALLIS in *Tractatus duo de cycloide et cissoide etc.* (Oxoniae 1659). La priorità di HUYGENS rispetto a FERMAT ci sembra pertanto indiscutibile.

ma $r^2 - \frac{\pi r^2}{4}$ misura l'area del triangolo mistilineo $CZANC$, dunque

$$\text{area } CMANC = 3 \text{ aree } CZANC,$$

relazione elegantissima scoperta da Huygens¹⁾.

Più generalmente si consideri il triangolo formato da un arco CM di cissoide e le coordinate CH , HM del suo estremo; il calcolo fatto dianzi prova che la sua area è data

$$3 \left(\frac{1}{2} r^2 \omega - r^2 \sin 2\omega \right) - r^2 \sin^2 \omega \cdot \sin 2\omega;$$

ora se si conduce la retta CG , si vede che la quantità entro parentesi altro non è che l'area del segmento circolare $CZGC$, invece la quantità $r^2 \sin^2 \omega \cdot \sin 2\omega$ misura l'area del triangolo CHM ; si conclude pertanto

$$\text{area } CHMC = 3 \text{ segmento } CZGC - \text{triangolo } CHM,$$

relazione di notevole generalità scoperta da Giovanni Bernoulli²⁾.

Applicando formole note e scrivendo per brevità a in luogo di $2r$, otterremo l'espressione seguente del volume V generato dalla rotazione attorno alla tangente C dell'area compresa fra la cissoide ed il proprio asintoto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V &= \pi \int_{y=0}^{y=\infty} (a^2 - x^2) dy = \pi a^3 \int_{\omega=0}^{\omega=\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 \omega + \sin^4 \omega - \\ &- 2 \sin^6 \omega) d\omega = \pi a^3 \left\{ 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} - 2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2} \right\} = \\ &= \pi a^3 \cdot \frac{5\pi}{8}, \end{aligned}$$

ovvero, riscrivendo $2r$ per a ,

$$V = 2 \cdot 5 \pi^2 r^3;$$

d'altronde, se si chiama \bar{V} il volume generato dalla rotazione attorno stessa tangente del dato circolo si ha:

$$\bar{V} = \pi r^2 \cdot 2\pi r = 2\pi^2 \cdot r^3;$$

¹⁾ Lettera al WALLIS del 6 settembre 1658 (*Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 212).

²⁾ *Remarques sur le livre intitulé Analyse des infiniment petits etc. par M. Stone in Joh. Bernoulli Opera*, T. IV, p. 175-6. Un'altra interpretazione della formola generale di quadratura si trova nell'*Analytische Geometrie von M. SIMON* (Leipzig 1900), p. 286.

dunque $V = 5 \bar{V}$,

eguaglianza segnalata pure da Huygens¹⁾ e che si esprime agevolmente a parole.

Sia ora x_g l'ascissa del centro di gravità dell'intera cissoide; grazie al teorema di Pappo-Guldin si ha: $2\pi x_g \cdot 2S = V$; sostituendo i valori trovati per S e V se ne trae $3x_g = 5r$ ovvero

$$\frac{x/g}{2r - x/g} = \frac{5}{1};$$

ciò prova che il centro di gravità della cissoide divide il diametro CD in due parti di cui quella attigua alla cuspidè è quintupla dell'altra¹⁾.

Sia similmente U il volume generato dalla rotazione della cissoide attorno al proprio asintoto; servendosi delle formole precedenti si trova:

$$U = 2S \cdot 2\pi(2r - x_g) = 3\pi r^2 \cdot 2\pi \cdot \left[2r - \frac{5r}{3} \right] = 2\pi^2 r^2 = 2\pi r \cdot r^2;$$

dunque: Il volume generato dalla rotazione della cissoide attorno al suo asintoto eguaglia quello dell'anello generato dalla corrispondente rotazione del dato circolo; è questa una bella proposizione di R. de Sluse che attrasse di recente l'attenzione di alcuni geometri²⁾.

27. Altri volumi analoghi vennero calcolati dal de Moivre³⁾; il quale si è anche occupato di calcolare l'area descritta dalla rotazione della cissoide attorno alla propria tangente cuspidale; Giovanni Bernoulli ne seguì l'esempio⁴⁾; noi non faremo altrettanto e chiuderemo questo paragrafo trattando l'ultimo dei problemi metrici fondamentali concernenti la cissoide, cioè la rettificazione di essa.

Dalla (2) si trae, come espressione dell'arco s della cissoide contato dalla cuspidè, la seguente:

$$s = r \int_0^x \frac{1}{2r - x} \sqrt{\frac{8r - 3x}{2r - x}} dx;$$

per effettuare questa quadratura si ponga

¹⁾ V. le lettere di HUYGENS a R. DE SLUSE del 5 aprile 1658 ed al WALLIS del 6 settembre 1658 (*Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 163 e 212).

²⁾ V. gli articoli di P. GILBERT, MASSAU e LE PAIGE sul teorema di DE SLUSE in *Mathésis*, T. VI, 1886.

³⁾ *Harmonia mensurarum* (Cantabridgiae 1722), p. 90-92.

⁴⁾ V. le *Remarques* succitate, p. 178-179.

$$(10) \quad 2r = a, \quad z^2 = \frac{4a - x}{a - x}; \quad x = a \frac{z^2 - 4}{z^2 - 3};$$

e si otterrà:
$$s = a \int_2^z \left[1 + \frac{3}{z^2 - 3} \right] dz =$$

$$= a \int_2^z \left\{ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{z - \sqrt{3}} - \frac{1}{z + \sqrt{3}} \right) \right\} dz$$

cioè

$$(11) \quad s = a(z - 2) + \frac{a\sqrt{3}}{2} \log \frac{(z - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(z + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$$

Newton ha indicata una costruzione geometrica di s^1 ; non ci arresteremo a riferirla ed invece applicheremo la (11) a dimostrare un notevole teorema dovuto a Paolo Fuss ²). Notiamo perciò che, combinando la (2) con le (10) si trova

$$y = a \frac{(z^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}{z^2 - 3},$$

onde la (11) dà:

$$\frac{s - y}{a} = z - 2 - \frac{(z^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}{z^2 - 3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{(z - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{(z + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})};$$

ora sviluppando in serie si trova:

$$z - 2 - \frac{(z^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}{z^2 - 3} = z - 2 - \left[z^3 - 6z + \frac{z}{6} + \dots \right]$$

$$\left[\frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^4} + \dots \right] = -2 + \text{termini con pot. neg. di } z;$$

quindi

¹) V. una lettera destinata a LEIBNIZ e copiata dall'OLDENBURG il 4 novembre 1676 (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. I, 1848, p. 131).

²) V. l'ultima delle questioni trattate nella memoria *Quantum differat longitudo arcus curvae ab asymptota, utraque in infinitum usque protensa inquiratur* (Mem. de Pétersbourg, T. IX, 1824).

$$\frac{s - y}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{z}\right)(2 + \sqrt{3})}{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{z}\right)(2 - \sqrt{3})} - 2 + \text{termini con pot. neg. di } z.$$

Facendo ora tendere x a ∞ , lo stesso accadrà di z e si avrà

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (s - y) = a\sqrt{3} \log(2 + \sqrt{3}) - 2a;$$

dunque la differenza tra la lunghezza della cissoide e l'asintoto è una quantità finita, cioè il doppio di

$$a\sqrt{3} \log(2 + \sqrt{3}) - 2a.$$

CAPITOLO V

Generalizzazioni della cissoide di Diocle.

28. La genesi della cissoide dioclea si presta a molteplici generalizzazioni, alcune delle quali non sono prive di interesse.

Anzitutto si può supporre che i due punti C, D non siano gli estremi di un diametro, ma sibbene quelli di una corda. Ritenendo in tal caso tutte le notazioni usate nel Capitolo precedente, chiamando inoltre α l'angolo del raggio CO con la corda CD e prendendo ancora C per polo e CA per asse polare si trova (fig. 3).

$$\rho = CM = EF = CF - CE = \frac{2r \cos^2 \alpha}{\cos(\omega + \alpha)} - 2r \cos(\omega - \alpha)$$

ossia riducendo

$$(1) \quad \rho = \frac{2r \sin^2 \omega}{\cos(\omega + \alpha)}$$

La curva rappresentata da quest'equazione è più generale di quella rappresentata dalla (1) del n. 24 e si riduce a questa quando $\alpha = 0$; si chiama *cissoide obliqua* per distinguerla dalla cissoide di Diocle, che spesso vien detta *cissoide retta*. Passando a coordinate cartesiane la (1) si muta nella seguente

$$(2) \quad (x^2 + y^2)(x \cos \alpha - y \sin \alpha) = 2r y^2,$$

dalla quale è facile dedurre che la curva così rappresentata ha C per cuspidi, con CD per corrispondente tangente, passa inoltre per punti ciclici del piano. Essa ha un asintoto perpendicolare alla retta DO e posto dalla cuspidi alla distanza $2r \cos^2 \alpha$.

La cissoide obliqua ha minore importanza di quella di Diocle; tuttavia la s'incontra in parecchie occasioni: valga a mostrarlo il seguente esempio:

$$v^2 = 2pu$$

sia l'equazione di una parabola riferita ad un sistema di assi ineli-

nati secondo l'angolo α ; posto $x = u + v \cos \alpha$, $y = v \sin \alpha$: ossia $u = x - y \cot \alpha$, $v = \frac{y}{\sin \alpha}$ otterremo

$$y^2 = 2p \sin \alpha (x \cos \alpha - y \sin \alpha)$$

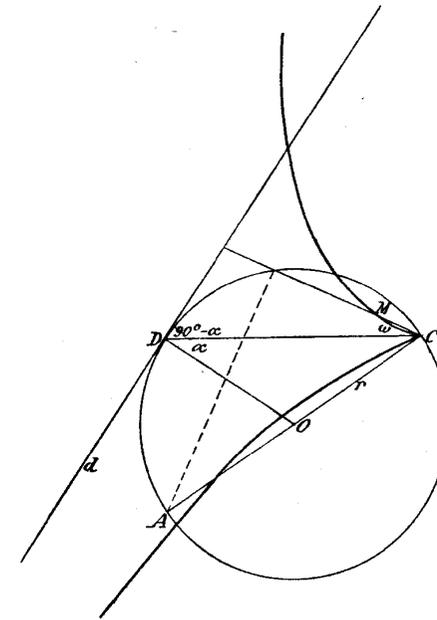


Fig. 3. — Cissoide obliqua.

come equazione della parabola considerata in coordinate ortogonali; operando la trasformazione stabilita dalla formola

$$x = \frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2}$$

otterremo la curva rappresentata dall'equazione

$$(x'^2 + y'^2)(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) = \frac{k^2}{2p \sin \alpha} y'^2,$$

la quale, paragonata con la (2), porta a concludere la seguente pro-

posizione: per qualunque inversione avente il polo sopra una parabola, questa curva si trasforma in una cissoide obliqua.

29. Con maggior generalità la costruzione della curva di Diocle si può estendere nel seguente modo: « Data una conica Γ , un punto C di essa ed una retta d del suo piano, si conduce per C una retta arbitraria r a segare nuovamente la conica in E e la retta d in F ; si porta su r il segmento CM eguale e dello stesso senso di EF ; il luogo del punto M è una curva cissoideale¹⁾. È facile vedere che le curve così ottenute sono cubiche aventi il punto fisso per punto doppio; anzi è notevole il fatto che tutte le cubiche razionali si possano costruire con siffatto procedimento, ad eccezione di quelle di cui la retta all'infinito è tangente d'inflessione²⁾. Si ha così un metodo utilissimo per studiare le proprietà di tutte le cubiche razionali, escluse quelle testè indicate³⁾.

Spingendo ulteriormente il processo di generalizzazione si arriva alla seguente estesissima classe di curve: « Date in un piano due curve Γ_1 e Γ_2 ed un punto fisso O , si conduce per questo una trasversale arbitraria a tagliare quelle curve rispett. in P_1 e P_2 , e sulla trasversale si determina un punto P tale che sia $OP = OP_1 \pm OP_2$; il luogo Γ del punto P è una cissoide generale⁴⁾. Quando si conoscono le equazioni polari $\rho_1 = f_1(\omega)$, $\rho_2 = f_2(\omega)$ delle curve Γ_1 , Γ_2 si trova subito quella di Γ , che è $\rho = f_1(\omega) \pm f_2(\omega)$. Ora se si chiamano $s_n, s_n^{(1)}, s_n^{(2)}$ le sunnormali polari di $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ si ha

$$s_n = \frac{d\rho}{d\omega}, \quad s_n^{(1)} = \frac{d\rho_1}{d\omega}, \quad s_n^{(2)} = \frac{d\rho_2}{d\omega},$$

onde $s_n = s_n^{(1)} \pm s_n^{(2)}$; se ne deduce che, se si sanno costruire le tangenti alle curve Γ_1, Γ_2 , si conosceranno subito $s_n^{(1)}$ e $s_n^{(2)}$, quindi anche s_n , epperò si sarà in grado di costruire le tangenti in tutti i punti della curva Γ ⁵⁾. Applicando questo concetto, non solo

¹⁾ K. ZAHRADNIK, *Cissoidalcurven* (Archiv, T. LVI, 1874); cfr. C. A. NELSON, *Note on rational plane cubics* (Bull. Amer. Math. Soc., T. XXXII, 1926).

²⁾ G. DE LONGCHAMPS, *Sur les cubiques unicursales* (Nouvelle Correspondance mathématique, T. IV, 1878; oppure Progrés, T. I, 1891); K. ZAHRADNIK, *Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen* (Prager Ber., 1906).

³⁾ G. STINER, *Metrische Eigenschaften der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte* (Monatshefte, T. IV, 1893).

⁴⁾ L. C. SCHULZ VON STRASSANICKY, *Ueber die Zissoide der Kurven* (Baumgartners Zeitschr. f. Phys. u. Math., T. 8, 1830); G. DE LONGCHAMPS, *Ass. fr.* 1885; PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino 1887), p. 85-86; Alcune questioni relative alle curve in questione sono trattate nella nota di F. GOMES TEIXEIRA, *Sur une propriété de le strophoïde et sur les cubiques qui coincident avec leurs cissoïdales* (Nouv. Ann. de math., IV Ser., T. 6, 1906).

⁵⁾ PEANO, Ivi.

si è in grado di costruire la tangente alla cissoide di Diocle con un metodo diverso da quello suggerito da Fermat (v. n. 25), ma si possono tracciare le tangenti alla cissoide obliqua ed a tutte le curve cissoideali. Si dimostra agevolmente che, se Γ_1 e Γ_2 sono curve algebriche degli ordini n_1 e n_2 , passanti per O risp. k_1 e k_2 volte e aventi all'infinito k punti comuni, Γ sarà una curva pure algebrica dell'ordine

$$2n_1n_2 - (n_1k_2 + n_2k_1 + k)^2$$

Va notato che nella costruzione esposta dalle cissoidi generali, le curve Γ_1 e Γ_2 possono coincidere; nasce allora la costruzione seguente: « Data una curva Δ ed un punto O del suo piano, si chiamino P_1, P_2 due delle intersezioni della curva con una trasversale r condotta da O e si prenda sopra questa un punto P tale che sia $OP = OP_1 \pm OP_2$;

il luogo del punto P è una cissoide²⁾. Così se Δ è un cerchio di raggio a il cui centro C dista da O della lunghezza b , la cissoide ha per equazione polare (O essendo il polo OC l'asse polare)

$\rho = 2\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \omega}$; la curva è, come vedremo, in generale una lemniscata del Booth (Lib. III, Cap. IV), e se $b = a\sqrt{2}$ una lemniscata di Bernoulli (Lib. III, Cap. XIV); sin d'ora abbiamo voluto rilevare di entrambe questa notevole generazione.

Fra le cissoidi da ultimo definite in generale si trova una cubica circolare simmetrica che a prima vista non sembra appartenere a tale categoria³⁾; eccone la genesi: « Dato un cerchio (fig. 4), di

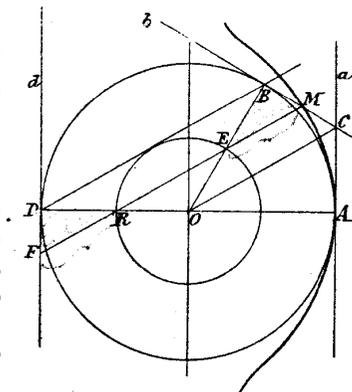


Fig. 4.

¹⁾ H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig 1908), p. 3.

²⁾ Si consideri, ad esempio, l'ellisse che in assi ortogonali ha per equazione

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2ab(bx + ay) + a^2b^2 = 0;$$

essa ha per centro il punto (a, b) ed è tangente agli assi coordinati; la cissoide di essa rispetto all'origine ha per equazione

$$(b^2x^2 + a^2y^2) - 8a^2b^2xy = 0$$

che, per $a = b$, rappresenta una lemniscata (v. Lib. III, Cap. 14); cfr. G. USAI, *Una generalizzazione della lemniscata di Bernoulli* (Giorn. di mat., T. LVI, 1918).

³⁾ JERABEK, *Sur une cubique circulaire* (Mathésis, II Série, T. VIII, 1898).

centro O e raggio r , ad una sua tangente fissa a , si consideri una sua tangente mobile, della quale B sia il punto di contatto e C la intersezione con a ; il luogo del punto medio M del segmento BC è la curva in questione». Presa O per origine e per asse delle x la perpendicolare OA calata da O su a , come coordinate di B si possono prendere risp. $r \cos \omega$, $r \sin \omega$; l'equazione della tangente b è quindi $x \cos \omega + y \sin \omega - r = 0$ e le coordinate di C sono

$$x = r, y = r \frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega};$$

perciò quelle di M sono espresse come segue:

$$(3) \quad x = \frac{r}{2} (1 + \cos \omega), y = \frac{r}{2} \left(\sin \omega + \frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega} \right).$$

Questa rappresentazione parametrica della curva, ne dimostra intanto la razionalità; eliminando ω si conclude

$$(4) \quad 4x(x^2 + y^2) = r^2(r + 3x);$$

la curva stessa è dunque una cubica circolare simmetrica avente per punto isolato il punto $R \left(-\frac{r}{2}, 0 \right)$, per fuoco O e per asintoto d'inflessione l'asse delle y . Per dimostrare essere dessa una cissoide, indichiamo con D il punto diametralmente opposto a A e con d la relativa tangente. Condotte OC, BD , esse sono parallele come perpendicolari entrambe a AB ; guidata per M la parallela ad entrambe essa passerà per i punti E, R centri risp. dei segmenti OB, OD e taglierà d in un punto F ; i due triangoli rettangoli DFR, BEM risultano eguali, onde $RF = ME$ epperò $RM = EF$. Per conseguenza il luogo del punto M è la cissoide che nasce prendendo R per punto fisso e per curve fondamentali la retta d ed il cerchio di centro O e raggio $\frac{r}{2}$. Notiamo anche, senza però dimostrarlo, che la curva ora segnalata si ottiene anche assoggettando un cerchio ad una opportuna trasformazione quadratica¹⁾.

30. Ad un'altra cubica, che è un'effettiva generalizzazione della cissoide di Diole si perviene con la seguente costruzione: Dato un angolo retto OBC (fig. 5), sui cui lati sono segnati i punti O, C , si conduce da C una trasversale arbitraria a tagliare il lato BO in D ; da D si conduce la perpendicolare a DC e si proietta su essa in M il

¹⁾ RETALI, *Sur une cubique circulaire* (Mathesis, II Série, T. IX, 1899).

punto O ; il luogo di M è una curva che, per la sua forma serpentina, fu chiamata *ofuride* da ($\delta \delta \rho \iota \varsigma = \text{serpe}$, $\eta \text{ οὐρά} = \text{coda}$)¹⁾. Preso per polo O e per asse polare la perpendicolare al lato OB del dato angolo, posto poi $OB = b$, $BC = c$ avremo

$$BD = c \operatorname{tg} \omega, OD = b - c \operatorname{tg} \omega, OM = OD \operatorname{sen} \omega;$$

onde l'equazione polare della ofuride è

$$(5) \quad \rho = b \operatorname{sen} \omega - c \frac{\operatorname{sen}^2 \omega}{\cos \omega};$$

la sua equazione cartesiana è quindi

$$(6) \quad x(x^2 + y^2) = y(bx - cy)$$

L'ofuride è quindi una cubica circolare avente O per punto doppio; le relative tangenti sono la retta OC e la parallela condotta da O a BC e i raggi di curvatura in O dei due rami ivi incrociati sono espressi come segue:

$$\frac{b}{2}, \frac{c \sqrt{b^2 + c^2}}{b}$$

Facendo nella (6) $b = 0$ si ottiene l'equazione di una cissoide di Diole: resta così dimostrato che di questa l'ofuride è una estensione.

Alla stessa conclusione si giunge osservando che la curva rappresentata dalla (6) è la podaria rispetto alla parabola $y^2 = 4cx$ del punto $(0, -b)$; dunque la podaria di una parabola rispetto ad un punto della tangente al vertice è in generale una ofuride, in particolare (v. n. 24) è una cissoide se quel punto è il vertice³⁾. Dalla (6)

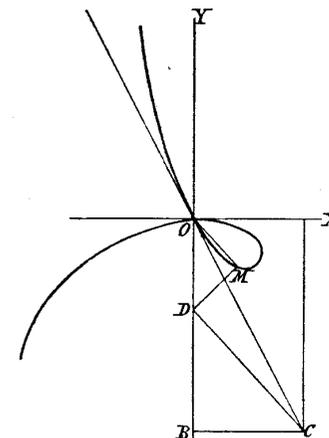


Fig. 5. — L'Ofuride.

¹⁾ ULHORN, *Entdeckungen in der höheren Geometrie* (Oldenburg, 1809) p. 12; BLASEL, *Die Cissoide und eine ihr verwandte Curve* (Pr. Neisse, 1881).

²⁾ Questo risultato, al pari di tutti quelli che incontreremo, relativi alle curvature in un punto multiplo sono tratti dalla nota dell'autore *Sur la courbure d'un ligne plane dans un point quelconque* (Annaes Acad. pol. Porto, T. 2, 1907).

³⁾ Da questo punto di vista l'ofuride venne considerata dal MATHIESSEN (*Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*, Leipzig 1878, p. 940-941), nel corso della sua illustrazione al metodo di PLATONE (v. G. LORIA, *Scienze esatte*, p. 124) per risolvere il problema di Delo.

si trae la seguente rappresentazione parametrica:

$$x = \frac{b\lambda - c\lambda^2}{1 + \lambda^2}, \quad y = \frac{b\lambda^2 - c\lambda^3}{1 + \lambda^2};$$

i parametri dei tre flessi della curva (di cui uno solo è reale) sono radici dell'equazione

$$bc\omega^3 + 3c^2\omega^2 - 3bc\omega + b^2 = 0;$$

i flessi stessi stanno sulla retta

$$3cx + by + b^2 = 0;$$

ecc., ecc.¹⁾.

¹⁾ La costruzione esposta per l'ofuride, quella che incontreremo per la trisettrice di Maclaurin (v. n. 47) ed altre analoghe hanno suggerito a R. HEGER (*Zur Konstruktion von Kurven 3. Ordnung*, Abh. Gesell. Isis, 1909) il seguente procedimento generale: « Di un angolo AQP di grandezza costante un lato AQ passa per un punto fisso A mentre il suo vertice Q descrive una retta g . Per un altro punto fisso O si conduce la parallela alla retta AQ e se ne determina l'intersezione P con l'altro lato dell'angolo mobile; il luogo geometrico del punto P è una cubica razionale circolare ». Ogni tale curva può generarsi in infiniti modi col metodo indicato. La retta g è parallela all'asintoto reale della curva e A appartiene a un determinato circolo. Nella citata memoria dell'HEGER si trovano altre costruzioni per le cubiche razionali.

CAPITOLO VI

La parabola cartesiana.

31. Descartes, per addurre un esempio generale di curve a cui sono applicabili i metodi di cui egli è l'inventore, ha considerate le linee generate nel seguente modo¹⁾: « In un piano sia data una curva Γ ed un punto A ad essa invariabilmente connesso, inoltre un punto fisso F ; si suppone che la curva sia dotata di un moto di traslazione e si determinano, per ogni sua posizione le intersezioni con la corrispondente posizione della retta FA ; il luogo dei punti ottenuti è una delle curve di Cartesio ». Questa costruzione, essendo evidentemente applicabile qualunque sia la linea Γ , è uno speciale metodo di trasformazione delle figure piane; per tradurlo in formole prendiamo per asse delle x la retta descritta dal punto A durante l'ipotetico movimento e per asse delle y la perpendicolare calata su essa dal punto F . Allora se $y = f(x)$ è l'equazione della curva Γ nella sua posizione iniziale, y_0 l'ordinata di F e l l'ascissa originaria di A , saranno

$$y = f(x + a), \quad \frac{x}{a + l} + \frac{y}{y_0} = 1$$

le equazioni di Γ e FA in una fase qualunque del movimento; eliminando a , si ottiene

$$y = f\left(x - l + \frac{xy_0}{y_0 - y}\right)$$

come equazione della curva trasformata.

Se Γ è una retta, la curva ottenuta può intendersi generata dalle intersezioni degli elementi corrispondenti di un fascio di raggi e di un fascio proiettivo di raggi paralleli; è un'iperbole. Se Γ è un cerchio, la curva generata è una conoide di Nicomede

¹⁾ *La géométrie de René Descartes*. Nouv. éd., Paris 1886, p. 18.

(Lib. III, Cap. V). Se finalmente Γ è una parabola, nasce una curva, segnalata in particolare da Descartes¹⁾ e perciò chiamata *parabola cartesiana*²⁾; altri la chiama *tridente di Cartesio*³⁾; altri finalmente, per ricordare essere la curva composta di due tratti distinti, ne chiama le parti *concoide paraboliche*⁴⁾ o ciascuna *compagna della paraboloide di Cartesio*⁵⁾. Se

$$y^2 = 2 p x$$

è l'equazione della parabola generatrice, quella della parabola cartesiana nascerà eliminando a tra le equazioni

$$y^2 = 2 p (x + a), \quad \frac{x}{a + l} + \frac{y}{y_0} = 1,$$

onde è
$$\frac{y^2 (y - y_0)}{2 p} - (x - l) (y - y_0) + x y_0 = 0$$

La parabola di Cartesio è dunque una cubica passante nel punto fisso F ; essa ha per punto doppio il punto all'infinito dell'asse delle x ⁶⁾; le relative tangenti sono quest'asse e la retta all'infinito; la curva possiede inoltre un flesso; ecc. Roberval insegnò a trovarne le tangenti⁷⁾.

La parabola cartesiana, fra le speciali curve del terz'ordine, segue per antichità alla cissoide di Diocle; essa però è molto meno importante e meno nota di questa.

¹⁾ Id., p. 19.

²⁾ Questo nome si trova già nell'*Enumeratio linearum tertii ordinis* di NEWTON.

³⁾ BELLAVITIS, *Sulla classificazione delle curve del terz'ordine* (Mem. della Soc. It. delle Scienze, T. XXV, parte II, p. 24, 1851); BELLACCHI, *Lezioni ed esercizi di algebra complementare*, fasc. I (Firenze 1898), p. 43, ove sono segnalate alcune curve più generali.

⁴⁾ DE L'HOPITAL, *Sections coniques* (Paris 1720), p. 329; M. G. AGNESI, *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù* (Milano 1748), T. I, p. 209; MONTUELA, *Histoire des Mathématiques*, T. II della *Nouv. éd.*, p. 144.

⁵⁾ DE L'HOPITAL, *Analyse des infiniment petits* (Paris 1705), p. 23; M. G. AGNESI, *op. cit.*, T. II, p. 506.

⁶⁾ La curva in discorso appartiene pertanto alla classe di curve studiate nei due seguenti lavori: A. GREINER, *Ueber orthogonale Invariante der Kurven 3. Ordnung mit unendlich fernen Doppelpunkte und ihre geometrische Bedeutung* (Diss. Jena, 1902); J. THOMAE, *Ueber orthogonale Invariante und Kovariante bei Kurven 3. Ordnung mit unendlich fernen Doppelpunkte* (Leipziger Ber., T. 55, 1903).

⁷⁾ *Observations sur la composition des mouvements etc.* (Mem. de l'Acad. royale des Sciences, T. VI, Paris, 1730); ivi si trova il nome di « parabole de M. des Cartes ».

CAPITOLO VII

La foglia di Descartes.

32. Uno dei più immediati ed importanti corollari della definizione di coordinate e del concetto di equazione di un luogo geometrico è la possibilità di introdurre nella geometria delle curve di cui si ignora la costruzione per punti o per moto continuo. Una delle linee più antiche — antica quanto lo è la geometria analitica — è caratterizzata dalla seguente proprietà: « per ogni punto della curva in questione la somma dei cubi delle coordinate cartesiane ortogonali è eguale al parallelepipedo rettangolo avente per spigoli le coordinate stesse ed una lunghezza data ». La curva di cui si tratta, se si chiama $3a$ questa lunghezza, ha per equazione

$$(1) \quad x^3 + y^3 = 3 a x y.$$

Una facile discussione prova che essa ha nell'origine un nodo, con gli assi coordinati per corrispondenti tangenti; nell'angolo formato dalle direzioni positive di queste rette la curva ha l'aspetto di una foglia simmetrica rispetto alla bisettrice dell'angolo delle rette stesse; la lunghezza della foglia è $\frac{3a}{\sqrt{2}}$. Nei due angoli adiacenti a quello ora nominato la curva possiede due rami infiniti, fra loro simmetrici rispetto a quella bisettrice ed accostantisi asintoticamente alla retta $x + y + a = 0$, al di là della quale non si trova alcun punto reale della curva. I due rami di curva incrociati in O hanno ivi per comune curvatura $\frac{8\sqrt{2}}{3a}$.

A queste conclusioni non erano in grado di giungere i primi cultori della geometria analitica, i quali non avevano peranco stabilite le convenzioni fondamentali sui segni delle coordinate e, pel terrore dell'infinito, escludevano i valori non finiti delle coordinate. In conseguenza ad essi sfuggì la presenza dei due rami infiniti della curva (1), ma, per compenso, aggregarono alla foglia, che fa parte della curva, quelle che le sono simmetriche rispetto

agli assi ed all'origine. Nacque così, un gruppo di quattro foglie di gelsomino, ovvero un gruppo di quattro cappii, il cui insieme rammenta un nodo di cravatta; donde la spiegazione dei nomi *fleur de jasmier* e di *galand* con cui il Roberval indicò la curva di cui si tratta e che altri adoperò in seguito. Ma, per ragioni evidenti, nè all'uno nè all'altro di tali nomi si accorda oggi la preferenza; e si chiama la curva *foglia di Descartes* (*folium Cartesii*) in memoria del geometra che primo ne ha parlato.

Chi è il primo che adoperò questo appellativo? Tale domanda venne rivolta in due occasioni¹⁾ e sotto forme differenti di P. Tannery, senza ricevere una definitiva risposta²⁾. Per rendere ragione di questo fatto, che indubbiamente sorprenderà il lettore, osserviamo che il più antico cenno della curva (1) s'incontra in una lettera diretta da Descartes nel Gennaio 1638 al P. Mersenne, perchè a Fermat la comunicasse³⁾; ivi leggesi la definizione a parole che riferimmo in principio di questo n., come riferentesi ad una curva a cui non è applicabile il metodo delle tangenti del celebre senatore tolosano; la curva non è indicata con alcun nome e la definizione è accompagnata da una figura dimostrante che la forma della curva era ignota a Descartes. Sette mesi dopo questo grande geometra fece conoscere (23 Agosto 1638) la costruzione della tangente della curva, parallela all'asse di simmetria, deducendone « la plus grande largeur de la feuille »⁴⁾. « Soit $A C K F A$, egli comincia⁵⁾, l'une des feuilles de cette courbe dont l'essieu est $A H$ et le plus grand diamètre de la feuille est $A K$ »; e queste parole — fra cui s'incontra per la prima volta la parola *feuille* — mostra che, benchè Descartes altezzosamente asserisse che la forma della curva « se voit à l'oeil sans aucun esprit ni science »⁶⁾, la forma stessa eragli in realtà tuttora ignota: fatto notevole se si riflette che la *Géométrie* era stata pubblicata l'anno prima di quello in cui venivano scritte queste parole. Il nome di « foglia di Cartesio » non si trova in Roberval, il quale in una lettera a Fermat del 1° Giugno 1638⁷⁾ adopera la dicitura « sa (cioè di Descartes) figure qui est une espèce d'ovale »; ma in una lettera scritta da Huygens à Leibniz addì 17 Settembre 1693 s'incontra la frase « la feuille de

¹⁾ *Intermédiaire*, T. III, 1896, p. 85, e T. IV, 1897, p. 125.

²⁾ *Id.*, T. IV, 1897, p. 19 e 237; T. V, 1878, p. 128.

³⁾ *Oeuvres de Descartes*, ed. Tannery e Henry, T. I (Paris 1897), p. 490.

⁴⁾ *Id.*, T. II (1897), p. 316.

⁵⁾ *Id.*, p. 313.

⁶⁾ *Id.*, p. 317. La stessa idea ritrovasi sott'altra forma nella lettera al P. MERSENNE del 27 luglio 1638, ove sta scritto: « Et M. Roberval me semble aussy vaiu avec son Galand qu'une femme qu'attache un ruban à ses cheveux, afin de paroître plus belle; car il n'a eu besoin d'aucune industrie pour trouver la figure de cette ligne dont je lui avais envoyé la définition ». Vol. cit., p. 274.

⁷⁾ *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 150-151.

Mr. des Cartes ou de Roberval »¹⁾; ma a questa nomenclatura non si attenne il sommo olandese, giacchè nella più antica lettera del 12 Gennaio 1693, pure diretta a Leibniz, egli adopera questa perifrasi: « la courbe dont l'équation est $x^3 + y^3 = nxy$ que M. Descartes reporte dans sa lettre 65.e du 3.e vol. et qu'il a considéré aussi bien que M. Hudde »²⁾; altrove egli preferisce non attribuirle alcun nome³⁾. Invece il nome derivato alla curva dalla sua pretesa somiglianza con un nastro venne adoperato da Descartes⁴⁾ e Fermat⁵⁾, da Leibniz⁶⁾ e dal Barrow⁷⁾; senza attribuirle un nome la considerarono: lo Schooten — che nel V Libro delle sue *Exercitationum mathematicarum* (Leyde, 1657)⁸⁾ ne espose una costruzione dovuta all'Hudde, sopra una figura ove la curva è rappresentata come formata dalla sola foglia —, il marchese de l'Hôpital, nella sua *Analyse des infiniments petits* (Paris, 1696)⁹⁾, e Giovanni Bernoulli, nelle *Lectiones mathematicae* tenute negli anni 1691-1692¹⁰⁾.

L'appellativo di foglia si presenta nel Secolo XVIII; così nell'*Histoire de l'Académie des Sciences*, 1706, pag. 94, s'incontra la seguente notizia, che probabilmente concerne la curva di cui si tratta: « Monsieur Carré a donné en trois manières différentes la quadrature d'une courbe appelé *Folium* ou *Feuille* à cause de son contour »; così il de Moivre chiama « the Foliate »¹¹⁾ la curva (1); e più tardi il Bragelogne¹²⁾ ed il Cramer¹³⁾ dicono che « la partie finie d'une courbe qui renferme un espace s'appelle feuille ». Finalmente il d'Alembert, dedicando al « folium de Descartes » un articolo speciale dell'*Encyclopédie méthodique*, ha indubbiamente contribuito a diffondere l'uso in tutto il mondo civile di un nome le cui radici si trovano per fermo nelle lettere di Descartes (23 Agosto 1638) ed Huygens (17 Settembre 1693) antecedentemente citate¹⁴⁾.

Riguardo poi all'epoca in cui venne determinata esattamente la forma della curva due cose vanno notate: la prima è che Huygens

¹⁾ *Leibniz ed. Gerhardt*, T. II, Berlin 1850, p. 161.

²⁾ *Ivi*, p. 153.

³⁾ *Oeuvres de Huygens*, T. IV, p. 238, 312 e 315.

⁴⁾ Vol. cit., p. 33.

⁵⁾ *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 169.

⁶⁾ Lettera a HUYGENS del 10-20 marzo 1693 ove è parola « de la galande de Mr. de Roberval ». *Leibniz ed. Gerhardt*, T. II, p. 158.

⁷⁾ *Lectiones geometricae* (Londini, 1670).

⁸⁾ Da ciò il nome di curva *Schooteenii* adoperato da FERMAT ed altri.

⁹⁾ *II ed.* (Paris 1705), p. 15 e 42.

¹⁰⁾ *Joh. Bernoulli Opera*, T. III, p. 403.

¹¹⁾ *A ready description and quadrature of a curve of the third order resembling that commonly called the Foliate* (Phil. Trans., n. 345).

¹²⁾ *Mem. de l'Académie des Sciences*, 1730, p. 165.

¹³⁾ *Introduction*, p. 9.

¹⁴⁾ Ai nomi già ricordati va aggiunto quello di *ligne inclinée* con cui la foglia è designata in un manoscritto del Sec. XVII studiato da P. TANNERY (Bull. des Sciences math., II Serie, T. XXIV, 1900, I P., p. 26).

in una lettera scritta al marchese de l'Hôpital il 29 Dicembre 1692 indicò della curva l'andamento generale, nonchè l'asintoto¹⁾; l'altra che, tanto la succitata memoria del de Moivre, quanto le *Lezioni* del Bernoulli sono accompagnate da figure esatte della curva; onde il 1691, o, se si vuol tener conto dell'anno di pubblicazione, il 1715 è un limite superiore per la scoperta della figura della foglia.

33. La lettera scritta da Descartes il 23 Agosto 1638 contiene un altro passo importantissimo; eccolo: « Au reste, puisque je voye qu'il (Roberval) a pris plaisir à considérer la figure de cette ligne, laquelle il nomme un Galand, ou une fleur de Jasmin, ie lui en veux ici donner une autre, qui ne merite pas moins que celle-là les memes noms, et qui est néanmoins beaucoup plus aisée à descrire, en ce que l'invention de tous ses points ne dépend d'aucune équation cubique. Celle-cy donc est telle, qu'ayant pris AK pour l'aissieu de l'une de ces feuilles, et en AK le point N à discrétion, il faut seulement faire que le carré de l'ordonné LN soit au carré du segment AN , comme l'autre segment NK est l'aggregat de tout AK et du triple de AN , et ainsi on aura le point L , c'est-à-dire tous ceux de la courbe, puisque le point N se prend à discrétion. Je pourrais lui donner une infinité d'autres lignes qui ne seroient pas d'une nature plus composée que celle-là, et toutefois qui représentoiraient des fleurs et des galands beaucoup plus doubles et plus beaux; etc. »²⁾ Traducendo in formole questa definizione si vede che la nuova curva ha per equazione

$$(2) \quad \frac{y^2}{x^2} = \frac{l-x}{l+3x};$$

ora osserviamo che, assumendo per assi coordinate le bisettrici degli assi antichi, le formole di trasformazione sono

$$x = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}};$$

in virtù delle quali la (2) diviene

$$\xi^3 + \eta^3 = l\sqrt{2} \xi \eta.$$

Essendo questa della forma (1), la curva di Descartes non differisce dalla foglia. Che ciò fosse noto all'autore del *Discours de la méthode* è dimostrato da una lettera posteriore³⁾ di Descartes

¹⁾ *Oeuvres de Huygens*, T. X (Le Haye, 1905), p. 351.

²⁾ *Oeuvres de Descartes*, ed. Tannery et Henry, T. II, p. 316-7.

³⁾ Vol. cit., p. 316-7.

al P. Mersenne, ove si leggono le seguenti frasi: « J'oublois à vous dire que la nouvelle ligne que je propose au sieur R. (oberval) à la fin de la quatrième page de cette lettre, est toute la même que l'autre, ce que je fais pour me rire de lui s'il ne le reconnoit pas, à cause qu'il dit la connoître comme le cercle ». Ora, l'averè Descartes ravvisata l'identità delle curve rappresentate dalle equazioni (1) (2) è un fatto di somma importanza, come quello che prova che egli era in grado di effettuare, almeno in casi particolari, la trasformazione delle coordinate.

La trasformazione della equazione (1) nella (2) non è semplice oggetto d'interesse storico, perchè può essere utilizzata per costruire la curva. Osserviamo infatti che, se (v. fig. 6) M, M_1 sono due punti

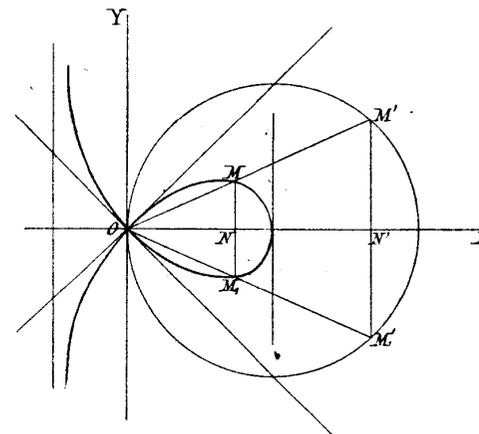


Fig. 6. — Foglia di Descartes.

della curva (2) simmetrici rispetto all'asse della x , la retta MM_1 sarà parallela a Oy e taglierà Ox in un punto N . Descritto adesso un cerchio passante per O e col centro su Ox , si proiettino da O su di esso i punti M, M_1 in M', M_1' ; anche $M'M_1'$ sarà perpendicolare a Ox e descriverà un fascio di raggi (paralleli) proiettivo al fascio analogo generato dalla retta MM_1 . Viceversa: sia data una proiettività fra i punti N, N' di Ox ; condotta da N' la parallela Oy , se ne determinino le intersezioni $M'M_1'$ col cerchio tracciato; proiettandole da O sulla parallela condotta da N a Oy , si otterranno due punti M, M_1 , il cui luogo è, almeno in casi particolari, una foglia di Cartesio. Per dimostrarlo supponiamo che R sia il raggio del cerchio ausiliare e

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

l'equazione della proiettività fra N e N' ; si avrà (dette y, y' le ordinate di M e M')

$$x'(2R - x') = y'^2, \quad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'},$$

onde eliminando x' e y' si ottiene come equazione del luogo dei punti M, M_1

$$\frac{2Rx^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma} = 0$$

ossia

$$(3) \quad (2R\alpha + \beta)x^3 + \beta xy^2 + (2R\gamma + \delta)x^2 + \delta y^2 = 0.$$

Questa equazione è più generale della (2), ma coincide con essa supposto

$$2R\alpha + \beta = \frac{\beta}{3} = \frac{2R\gamma + \delta}{l} = \frac{-\delta}{l};$$

in conseguenza l'equazione della proiettività fra i punti N, N' è rappresentata dall'equazione

$$x' = R \frac{3x + l}{x + l};$$

la proiettività stessa si può quindi ritenere determinata dal fatto che ai valori $x = 0, -l, \infty$ corrispondono i valori $x' = R, \infty, 3R$.

Oltre a questa costruzione diretta della foglia, un'altra venne segnalata da G. de Longchamps¹⁾, ed altre si conoscono fondate sopra speciali trasformazioni geometriche²⁾; di alcune avremo occasione di parlare in seguito (v. n. 47).

34. Dalla (1) si deduce che l'Hessiana della foglia rappresentata da questa equazione è l'altra analoga curva

$$x^3 + y^3 + \frac{3}{2}axy = 0;$$

inoltre la seguente equazione polare della curva

$$\rho = \frac{3a \operatorname{sen} \omega \cdot \cos \omega}{\operatorname{sen}^3 \omega + \cos^3 \omega};$$

questa riesce utilissima in molti casi, ad es. per calcolare l'area

¹⁾ *Essai*, p. 104-105.

²⁾ *Intermédiaire*, T. V, 1898, p. 102-104.

della curva¹⁾; così in particolare si trova che $\frac{3a^2}{2}$ esprime tanto l'area del cappio quanto quella compresa fra i due rami infiniti e l'asintoto²⁾. Invece la rettificazione della curva esige integrali Abeliani (cfr. n. 20).

Dalla stessa equazione (1) si ricava la seguente rappresentazione parametrica:

$$x = \frac{3a\lambda}{1 + \lambda^3}, \quad y = \frac{3a\lambda^2}{1 + \lambda^3};$$

quindi la condizione di collinearità di tre punti $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ è

$$\alpha\beta\gamma + 1 = 0;$$

perciò i tre flessi della curva sono tutti all'infinito ed uno solo è reale. L'equazione della tangente nel punto (λ) è

$$(\lambda^4 - 2\lambda)x - (2\lambda^3 - 1)y + 3a\lambda^2 = 0,$$

onde quella dell'asintoto è ciò che diviene questa facendo $\lambda = -1$,

cioè

$$x + y + a = 0$$

Due punti della foglia corrispondenti ai valori λ e $-\frac{1}{\lambda}$ del parametro sono proiettate dal punto doppio secondo due rette fra loro perpendicolari e sono congiunti dalla retta r di equazione

$$(\lambda^2 + \lambda - 1)y - (\lambda^2 - \lambda - 1)x - 3a\lambda = 0;$$

scrivendo quest'equazione sotto la forma

$$\frac{y - \frac{3a}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{\lambda^2 + \lambda + 1},$$

si vede che detta retta r ruota attorno al punto fisso

¹⁾ JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, T. III, p. 403-5. I particolari del calcolo si trovano elegantemente esposti in SERRET, *Calcul différentiel* (Paris, 1880), p. 235; riguardo alle prime quadrature si veda G. LORIA, *Curve piane speciali nel carteggio di C. Huygens* (Bibl. math., III Ser., T. VII, 1906).

²⁾ Altre eleganti proposizioni congeneri si trovano esposte nella nota di P. MANSION, *Sur certaines courbes carrables algébriquement* (Nouvelle Correspondance mathématique, T. I, 1878).

$$C \left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2} \right);$$

la foglia può quindi generarsi mediante il fascio di centro C e l'involuzione di angoli retti di centro O , figure fra cui esiste la corrispondenza algebrica individuata dall'equazione

$$\mu = \frac{\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda^2 + \lambda + 1}$$

Non ci arresteremo ulteriormente sulla foglia di Cartesio, perchè essa è una curva di pochissimo interesse²⁾, non presentandosi in alcuna questione geometrica (il Bellavitis credeva fosse la curva inversa dell'iperbola equilatera, supposto il polo in un vertice³⁾; ma è facile vedere che ciò non è⁴⁾). Noteremo soltanto che come generalizzazioni di essa si possono considerare sia tutte le curve rappresentate dalla (3), di cui esponemo la generazione, sia tutte quelle rappresentate dall'equazione

$$a y^3 + b x^3 = a b x y + c^3 (x + y)^5).$$

Più ampia ed importante è la generalizzazione che nasce dal considerare le curve di equazione

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (2n + 1) a x^n y^n;$$

attribuendo all'intero n un valore intero arbitrario, si ottiene in corrispondenza una curva razionale d'ordine $2n + 1$ avente nell'origine un punto $2n - 1$ plo e per asintoto la retta $x + y = (-1)^n a$; secondochè n è pari o dispari, la curva si comporta in modi differenti nell'origine.

¹⁾ M. C. BAUDIN, The Amer. math. Monthly, T. XXIII, 1916, p. 90-92.

²⁾ Alcune sue proprietà si leggono nei due seguenti scritti: ERDMANN, *Das Descartes' schen Folium in seiner Verallgemeinerung* (Progr. Münster, 1871); RICHLICKI, *Das Folium von Descartes* (Progr. Wongrowitz, 1884). Della foglia e di altre cubiche (e quartiche) speciali tratta anche l'articolo del GOORMAGHATIGH, *Sur l'affinité imaginaire* (Nouv. Ann. de math., IV Ser., T. 18, 1918).

³⁾ Sulla classificazione delle curve del terzo ordine (Mem. della Soc. It. delle Scienze, T. XXV, Parte II, 1851, p. 23).

⁴⁾ La trasformata è invece una strofoide (MICHEL, *Démonstration élémentaire d'un théorème connu*, Journ. de Math. spéc., IV Ser., T. IV, 1895).

⁵⁾ REICHENBACH, *Diskussion der durch die Gleichung $ay^3 + bx^3 = abxy + c^3(x+y)$ dargestellten krummen Linie* (Münster 1872).

⁶⁾ Di tali curve si parla nelle Questioni 7772 e 7840 dell'*Educ. Times* (v. T. XLIV, 1886, p. 88-90); ma le loro più importanti prerogative, nonché la quadratura, si trovano negli *Elementi di calcolo infinitesimale* di E. CESÀRO (Napoli, 1899, p. 180 e 325).

CAPITOLO VIII

La focale del Quetelet o strofoide obliqua, la logociclica del Booth o strofoide retta.

35. Consideriamo un cono di rotazione di vertice V ; ne sia g' una generatrice e t una tangente perpendicolare a g' . Ogni piano π condotto per t taglia il cono in una conica Γ di cui M_1 e M_2 siano i fuochi, il luogo dei quali, al rotare di π attorno a t , è una certa curva Φ . Siccome M_1 e M_2 si trovano sulla perpendicolare condotta a t dal suo punto di contatto di A , così la curva Φ è situata nel piano condotto da A perpendicolarmente a t , cioè nel piano σ condotto per A e per l'asse del cono. Osserviamo ora, che in forza di un noto teorema di Dandelin e Quetelet, per trovare i fuochi M_1 e M_2 della conica Γ basta determinare i punti di contatto di π con le due sfere inscritte nel dato cono e tangenti a π ; queste due sfere sono tagliate dal piano σ in due cerchi massimi, onde la curva Φ si può costruire, senza uscire dal piano σ , col procedimento seguente: si segnino le generatrici g', g'' del dato cono che appartengono al piano σ , nonchè la traccia A della tangente t ; da A si conduca una trasversale arbitraria e se ne determini la intersezione B con g'' ; si determinino finalmente i due cerchi che toccano le rette g', g'' ed il segmento AB ; i loro punti di contatto con quest'ultimo sono punti della curva Φ . Questa costruzione può notevolmente semplificarsi. Si segni infatti (fig. 7) il punto P dimezzante il segmento $M_1 M_2$ (o AB); il luogo di tutti i punti analoghi è una retta p parallela a g'' ; la retta p passerà pei punti medii H, D dei segmenti AV, AK , supposto K un punto di g'' tale che il triangolo VAK riesca isoscele. Pongasi ora per brevità $VA = a, VB = b, AB = c$; si avrà notoriamente

$$AM_1 = \frac{a - b + c}{2}, \quad BM_1 = \frac{-a + b + c}{2};$$

$$\text{e poichè } AP = \frac{c}{2} \quad \text{sarà} \quad PM_1 = PM_2 = \frac{a - b}{2};$$

ma

$$PD = \frac{1}{2} BK = \frac{a-b}{2}$$

dunque

$$PM_1 = PM_2 = PD$$

Detta, quindi, q la retta AK si conclude: La curva Φ è generabile come segue: dato un angolo $p q$ ed un punto A del suo lato q ,

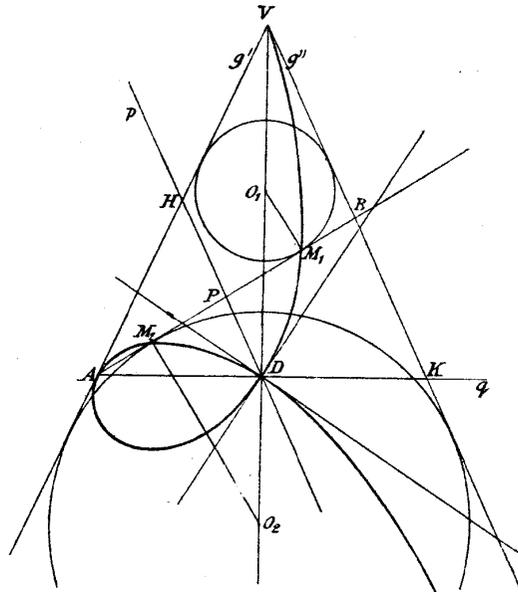


Fig. 7. — Strofoide obliqua.

si conduce per A una retta arbitraria a tagliare p in P ; i punti M_1, M_2 di r che distano da P quanto D appartengono alla curva Φ .

Se invece di un cono si considera un cilindro retto, ragionando come prima si vede che il luogo dei fuochi delle sezioni prodotte in esso da piani π condotti per una tangente t perpendicolare ad una generatrice g' , è una curva tutta situata nel piano σ determinato dall'asse del cilindro e dal punto di contatto A di t ; si vede inoltre che la curva di cui si tratta può costruirsi nel piano σ come segue: date due parallele g', g'' ed un punto A della prima, si conduce una trasversale AB e si determinano i punti di contatto M_1, M_2 di AB con i due cerchi che toccano oltre a questa le rette g', g'' ; essi appar-

tengono a quella curva. Detto P (fig. 8) il punto medio del segmento $M_1 M_2$, il luogo dei punti P sarà la bisettrice della striscia $g' g''$; conducasi da A la retta q perpendicolare a g', g'' ; ne siano D, K le intersezioni con p, g'' ; si chiamino finalmente O_1 e O_2 i centri dei due cerchi suddetti; è chiaro che i due triangoli $P M_1 O_1$ e $P M_2 O_2$ sono entrambi eguali al triangolo $A P D$; se ne deduce in particolare:

$$P M_1 = P M_2 = P D.$$

Dunque, nel caso presente, la curva Φ si può descrivere con lo stesso metodo usato nel caso generale, servendosi come elementi fondamentali del punto A e dell'angolo retto $p q$. È chiaro poi che la medesima costruzione può esprimersi come segue: « Dato un sistema di cerchi tangenti fra loro in un punto D e dato un punto A della loro tangente comune, il luogo degli estremi dei diametri di quei cerchi passanti per A è una curva Φ relativa ad un cilindro »¹⁾.

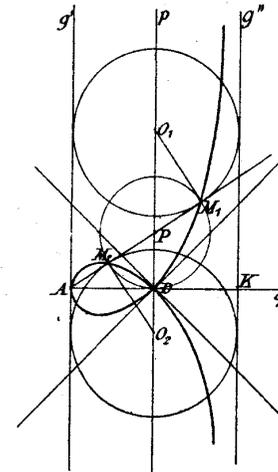


Fig. 8. — Strofoide retta.

36. È verso la metà del sec. XVIII che le curve Φ fecero il loro ingresso nella letteratura matematica, giacchè gli è nel 1757 che venne pubblicato il Vol. IV degli *Instituti Bononiensis Commentarii* contenenti due memorie di Gregorio Casali, intitolate *De conicorum sectionum focus* e dedicate appunto alle curve Φ . Ma la loro nascita risale a circa un secolo prima; infatti, lo attesta il Casali, esse vennero considerate anteriormente da Guido Grandi, in un trattato inedito²⁾, e da Evangelista Torricelli: ciò spiega il nome di *pteroïdes torricellianae*³⁾ adoperato dal Casali per designare le curve Φ . Sarebbe, pertanto, che fosse al grande discepolo di Galileo che dovesse farsi risalire l'invenzione delle curve di cui si tratta; se non che, esistono due lettere a lui dirette nel 1645 ove si legge la definizione planimetrica delle curve Φ relative a cilindri e perfino il nome adoperato dal Casali. Le lettere a cui si allude⁴⁾ fu-

¹⁾ BALITRAND, *Note sur la strophoïde* (Journ. de Math. spéc., III Ser., T. III, 1889).

²⁾ Ivi trovavasi anche l'equazione della curva, a quanto assevera FRANCHINI (*Saggio sulla storia della matematica*, Lucca 1821, p. 226).

³⁾ Da τὸ πτερόν = ala.

⁴⁾ Vennero pubblicate, assieme ad altre, da B. BONCOMPAGNI nel T. VIII del *Bullettino di Bibliografia ecc.* (1875).

rono scritte da Roma al Torricelli da F. de Verdus, che è quel « gentilhomme bourdelois » redattore delle celebri *Observations* del Roberval *sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes*. Di quelle lettere una è datata 19 Maggio 1645, l'altra è di data ignota, ma è anteriore alla precedente e posteriore ad una terza del 15 Marzo 1645. La sostanza di essa è concordante, contenendo entrambe la descrizione d'una linea « che in Francia addimandano Ala o Teroide », dal du Verdus ricevuta « uno di questi ultimi giorni » e l'applicazione alla medesima del metodo delle tangenti che va sotto il nome di Roberval; emerge da ciò che l'invenzione della curva di cui si tratta non appartiene certamente al Torricelli, ma ad un matematico francese, che forse è il Roberval.

Le curve Φ relative al cilindro non sembra siano state subito studiate nè in Francia, ove videro la luce, nè in Italia, ove vennero trapiantate, nè altrove; giacchè nel 1715 A. de Moivre ne ritrovò per suo conto la costruzione piana¹⁾, ne avvertì l'analogia di forma colla foglia di Cartesio e ne determinò la quadratura. Non crediamo di andare errati affermando che gli è a questo lavoro del celebre matematico inglese che si deve l'ingresso di tali curve in opera didascaliche assai diffuse quali le *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* di D. na Maria Gaetana Agnesi (T. I, Milano, 1748, p. 378-380 e 391-392), l'*Analyse des lignes courbes algébriques* del Cramer (Généve 1750, p. 411), e le *Institutiones analyticae* di V. Riccati e G. Saladini (Bononiae 1765, p. 328 del T. I).

La definizione stereometrica delle curve Φ , che il Casali svolse con tanto amore e tanta dottrina, rimase sconosciuta e sepolta nelle memorie dell'Accademia di Bologna, tantochè il Tortolini nel 1860 giudicò necessario richiamare l'attenzione dei dotti sul lavoro del nobile italiano²⁾, spinto a ciò dal fatto che nel 1819 quella stessa definizione era stata ritrovata da A. Quetelet; essa infatti è il nocciolo della *Dissertatio de quibusdam locis geometricis* (Gand), ove le curve Φ sono chiamate *focali*³⁾ o *focali regolari* secondochè si riferiscono a coni o cilindri. La dissertazione del Quetelet fu il punto di partenza delle ricerche del Dandelin (*Memoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique*, Mem. de Belgique, T. II, 1822), di E. Kùlp (*De curva focali regulari*, Mannheim 1823) e di M. Chasles (*Aperçu historique*, Nota IV); mentre gli innumerevoli studii fatti in Francia sopra le curve Φ traggono in gran parte origine da una questione proposta nel 1840 come tema di concorso ai Licei e riproposta nel 1861 all'esame di ammissione alla Scuola

¹⁾ V. la già citata memoria *A ready description and quadrature of a curve of the third order resembling that commonly called the Foliate* (Phil. Trans., n. 345).

²⁾ V. la rivista bibliografica *Sulla curva logociclica* (Ann. di Mat., T. III).

³⁾ Altri adopera il nome di *focales à noeud*.

normale di Parigi¹⁾. Non è compito nostro darne l'indicazione completa; ma dobbiamo notare che i più antichi sono contenuti nella *Note* del Midy *sur le folium de Descartes* (Nouv. Ann. T. III, 1844)²⁾ e che il primo lavoro in cui si trova il nome di *strofoide* (derivato forse³⁾ da δ στρόφος = avvolgimento o torsione) ed oggi generalmente adoperato per indicare le curve Φ è quello intitolato appunto *La strofoide* (Nouv. Ann. T. V, 1846) dovuto al Montucci ed erroneamente attribuito a G. Ritt. Aggiungiamo che la focale regolare o *strofoide retta* (così chiamata per distinguerla dalla più generale *strofoide obliqua*) venne immaginata nuovamente da altri; e cioè: dal Lehms, che per la sua forma, la chiamò *Kukumaiede*⁴⁾, dal Booth, che, per le sue relazioni con i logaritmi ed il circolo, la denominò *logociclica*⁵⁾, e dal Rummer, che, scoprendo in essa molte proprietà collegate alla nozione di gruppo armonico, la designò col nome di *curva armonica*⁶⁾.

37. L'equazione della strofoide obliqua o retta si deduce agevolmente servendosi dell'ultima fra le definizioni esposte nel n. 35. Detto infatti α l'angolo $p q$, presi A per polo e q per asse polare, dal triangolo $A P D$ (posto $A D = a$) si deduce

$$\frac{a}{\text{sen}(\omega + \alpha)} = \frac{A P}{\text{sen} \alpha} = \frac{D P}{\text{sen} \omega}$$

onde

$$A P = \frac{a \text{sen} \alpha}{\text{sen}(\omega + \alpha)}, \quad D P = \frac{a \text{sen} \omega}{\text{sen}(\omega + \alpha)};$$

¹⁾ Eccone l'enunciato: « È data un'infinità di coniche omofocali ed un punto del loro piano; si domanda: 1° Qual'è il luogo geometrico dei punti di contatto delle tangenti condotte da quel punto alle dette curve; 2° Qual'è il luogo geometrico dei piedi delle normali condotte alle stesse curve dal punto dato; 3° Qual'è il luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari calate dal punto dato sopra le sue polari rispetto alle coniche date ».

²⁾ Ivi la curva è definita mediante l'equazione $y = x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ analoga all'equazione $y = x \sqrt{\frac{a-x}{a+3x}}$ della foglia di Cartesio.

³⁾ H. BROCARD e P. TANNERY, *Intermédiaire*, T. IV, 1897, p. 87.

⁴⁾ *Aufgaben aus der höheren Mathematik*, Berlin 1842, p. 120. Il nome *Kukumaiede* era stato dato prima dall'UHLHORN (*Entdeckungen in der höheren Geometrie*, Oldenburg 1809, p. 57) alla curva $[(x+a)^2 + y^2] x^2 = a^2 y^2$ che è per forma somigliante allo strofoide.

⁵⁾ *On the logociclic curve and the geometrical origin of logarithms* (Quart. Journ., T. III, 1860). Cfr. *A treatise on some new geometrical methods*, T. I (London 1877).

⁶⁾ *Neue Sätze über eine krumme Linie, mit vorzugweise geometrische Ableitung* (Heidelberg 1868).

e siccome, per costruzione i raggi vettori ρ dei punti M_1, M_2 valgono $AP \pm DP$, così si conclude che

$$(1) \quad \rho = a \frac{\operatorname{sen} \alpha \pm \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} (\omega + \alpha)}$$

è l'equazione polare della strofoide obliqua¹⁾. Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ questa diviene

$$(2) \quad \rho = a \frac{1 \pm \operatorname{sen} \omega}{\cos \omega} \text{ ovvero anche } \rho = a \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} \pm \frac{\omega}{2} \right],$$

che rappresentano la strofoide retta. Passando a coordinate cartesiane la (1) si trasforma in un'equazione di quarto grado fra le $x \cdot y$ di cui si separa il fattore $x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$; tolto rimane

$$(3) \quad (x^2 + y^2) (x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha - 2a \operatorname{sen} \alpha) + a^2 (x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha) = 0$$

come equazione della strofoide obliqua e quindi

$$(4) \quad (x^2 + y^2) (x - 2a) + a^2 x = 0 \text{ ossia } y = \pm (x - a) \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

come equazione della strofoide retta; di questa è asintoto la retta $x = 2a$. In un caso e nell'altro la strofoide è una cubica circolare passante pel punto A e che, se retta, è simmetrica rispetto alla retta q . Trasportando l'origine nel punto D , ponendo quindi $x - a = x'$ e per abbreviare cot $\alpha = \gamma$, trasformeremo le (3) (4) nelle seguenti.

$$(5) \quad (x' + \gamma y) (x'^2 + y^2) + a (x'^2 + 2\gamma x' y - y^2) = 0$$

$$(6) \quad x' (x'^2 + y^2) + a (x'^2 - y^2) = 0^2,$$

¹⁾ Fra le strofoidi oblique è notevole per certe applicazioni quella in cui $\alpha = \frac{\pi}{3}$; v. l'articolo *Freeth's Nephroid* (Proc. L. M. S., T. X, 1879).

²⁾ Dalla (6) segue che la curva chiamata da J. DE VARGAS Y AQUIRRE (*Catalago general de curvas*, Mem. Acad. Madrid, T. XXVI, 1908, p. 495) foglia di Cornu non è che una strofoide retta. Se poi si pone

$$x' = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}, \quad 2\sqrt{2}a = -3a$$

l'equazione (6) diviene

$$(\xi + \eta) (\xi^2 + \eta^2) = 3a \xi \eta;$$

ciò dimostra che la curva detta da C. REUSCHLE (*Praxis der Krüvendifkussion*, I Tl., Stuttgart 1886, p. 97) foglia circolare essa pure non differisce dalla strofoide retta.

e queste provano che la strofoide, retta od obliqua, ha D per punto doppio e che le due relative tangenti sono tra loro perpendicolari. Assunte queste per nuovi assi l'equazione della curva assume la seguente forma

$$(7) \quad (ax + by) (x^2 + y^2) - cxy = 0.$$

Se invece nella (6) si pone $x' = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, y' = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}$ si ottiene l'altra

$$(8) \quad 2\sqrt{2} a \xi \eta = \frac{\xi^4 - \eta^4}{\xi - \eta}$$

rilevata dal de Moivre per la sua analogia con l'equazione della foglia cartesiana.

Servendosi della (5) si vede che le coordinate del fuoco singolare della strofoide (punto d'intersezione delle tangenti nei punti ciclici) sono:

$$x' = -a, \quad y = 0$$

Combinando invece la (7) con l'equazione $y = \lambda x$ si trova

$$(9) \quad x = \frac{c\lambda}{(a+b\lambda)(1+\lambda^2)}, \quad y = \frac{c\lambda^2}{(a+b\lambda)(1+\lambda^2)},$$

rappresentazione parametrica della curva, utilissima in molte circostanze e di cui mostreremo subito qualche applicazione.

Dalle (9) si deduce che la condizione di collinearità dei tre punti $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ è

$$(10) \quad a + b\alpha\beta\gamma = 0,$$

mentre la condizione di conciclicità dei quattro punti $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$ è

$$(11) \quad a^2 - b^2\alpha\beta\gamma\delta = 0.$$

Si trae da questa che se il cerchio osculatore nel punto (α) taglia la curva in (α_1) si avrà

$$a^2 - b^2\alpha^3\alpha_1 = 0;$$

dato quindi (α_1) restano determinati tre punti $(\alpha') (\alpha'') (\alpha''')$ tali che

$$\alpha' = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2\alpha}}, \quad \alpha'' = \varepsilon \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2\alpha}}, \quad \alpha''' = \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2\alpha}},$$

ε essendo una radice immaginaria di 1; ora, poichè se ne deduce

$$b^2 \alpha \alpha' \alpha'' \alpha''' - a^2 = 0,$$

resta stabilito il teorema seguente: *Per ogni punto della strofoide passano tre cerchi che la osculano altrove; i loro punti di osculazione stanno sopra un circolo passante per quel punto.*

Chiamiamo poi *punto di osculazione* corrispondente ad un punto (α) della strofoide l'intersezione (α') di questa con il cerchio che la oscula in (α); e consideriamo quattro punti conciclici (α) (β) (γ) (δ) nonchè i relativi punti di osculazione (α_1) (β_1) (γ_1) (δ_1); sussisteranno le equazioni:

$$a^2 = b^2 \alpha \beta \gamma \delta, \quad a^2 = b^2 \alpha^2 \alpha_1, \quad a^2 = b^2 \beta^2 \beta_1, \quad a^2 = b^2 \gamma^2 \gamma_1, \quad a^2 = b^2 \delta^2 \delta_1$$

di cui eliminando $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ si trae

$$a^2 = b^2 \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1,$$

equazione che esprime la seguente proposizione: *Se quattro punti di una strofoide appartengono ad un circolo, lo stesso accadrà per corrispondenti punti di osculazione*¹⁾.

38. Quando si voglia limitarsi allo studio alla strofoide retta, è conveniente servirsi della equazione (2). Essa infatti dà come espressione dei raggi vettori di due *punti reciproci* (cioè situati sopra la stessa retta uscente da A):

$$A M_1 = a \frac{1 - \operatorname{sen} \omega}{\cos \omega}, \quad A M_2 = a \frac{1 + \operatorname{sen} \omega}{\cos \omega};$$

se ne trae $A M_1 \cdot A M_2 = a^2$

dunque: *la strofoide retta è mutata in sè stessa da una trasformazione per raggi vettori reciproci di polo A e di potenza a^2 .* Se poi si osserva essere $A P = \frac{a}{\cos \omega}$, si vedrà sussistere l'elegante relazione seguente:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{A M_1} + \frac{1}{A M_2} \right) = \frac{A P}{a^2}.$$

¹⁾ La strofoide, retta o obliqua, si può descrivere di moto continuo con un apparato inventato da V. LEBEAU; v. la memoria di questo *Sur un nouveau curvigraph* e quella di J. NEUBERG, *Sur les lignes tracées par le curvigraph Victor Lebeau* entrambe inserite nelle Mém. de la Soc. dei Liège, III Ser., T. 5, 1904.

Siano S_t e S_u la sottangente e la sunnormale polari della curva; si avrà

$$(12) \quad S_t = a (1 \pm \operatorname{sen} \omega), \quad S_u = a \frac{1 \pm \operatorname{sen} \omega}{\cos^2 \omega}$$

la prima delle quali prova che l'equazione del luogo degli estremi delle sottangenti polari è

$$\rho = a (1 \pm \operatorname{sen} \omega)$$

onde (v. Lib. III, Cap. VII) il luogo stesso è una cardioide; invece il luogo degli estremi delle sunnormali polari ha per equazione

$$\rho = a \frac{1 \pm \operatorname{sen} \omega}{\cos^2 \omega} \quad \text{ossia} \quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{2y}{a} = 1,$$

onde consta di due parabole.

Dette ora S'_t, S''_t le sottangenti polari in due punti coniugati, S'_u, S''_u le corrispondenti sunnormali, avremo per le (12).

$$S'_t + S''_t = 2a, \quad \frac{1}{S'_u} + \frac{1}{S''_u} = \frac{2}{a},$$

relazioni notevoli per semplicità ed eleganza.

La (2) conduce alla seguente nuova rappresentazione parametrica:

$$(13) \quad x = a (1 \pm \cos \omega), \quad y = a \frac{\operatorname{sen} \omega (1 \pm \cos \omega)}{\cos \omega}$$

che può semplificarsi sopprimendo i doppi segni, ritenendo cioè soltanto ad es. gli inferiori; quindi la equazione generale della tangente è:

$$[1 - (1 + \cos^2 \omega) \operatorname{sen} \omega] x + \cos^3 \omega y - a (1 - \operatorname{sen} \omega)^2 = 0^1).$$

Le tangenti in due punti coniugati si tagliano nel punto

$$x = a (1 + \operatorname{sen}^2 \omega), \quad y = a \frac{\operatorname{sen}^3 \omega}{\cos \omega},$$

il luogo del quale ha per equazione

¹⁾ Per la costruzione della tangente col metodo del ROBERVAL, v. A. SAINT-GERMAIN, *Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle* (II éd., Paris 1889), p. 166.

$$g^2 (2a - x) = (x - a)^3,$$

epperò è una cissoide di Diocle. Invece il luogo delle intersezioni delle normali in due punti corrispondenti è una parabola. Dall'equazione della tangente si deduce che, chiamando t_1 e t_2 le lunghezze dei segmenti delle tangenti in due punti coniugati compresi fra i punti di contatto e l'asintoto e h_1 e h_2 le distanze delle tangenti stesse da A , si ha:

$$t_1 = t_2 = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \omega}}{\cos \omega}, \quad h_1 h_2 = a^2 \frac{\cos^2 \omega}{1 + \cos^2 \omega} \quad \text{onde} \quad t_1 t_2 h_1 h_2 = a^4$$

Introducendo le funzioni iperboliche, col porre

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \operatorname{tgh} \frac{u}{2} \quad \text{ossia} \quad \cosh u = \sec \omega, \quad \sinh u = \operatorname{tg} \omega,$$

la (2) si trasforma nella seguente

$$(14) \quad \rho = a (\cosh u \pm \sinh u)$$

che si presta egregiamente a stabilire con uniformità di procedimento ed eleganza di calcoli tutte le proposizioni concernenti la curva di cui trattiamo¹⁾.

39. I raggi di curvatura in O dei due rami della curva (7) incrociati in O valgono rispettivamente

$$\frac{c^2}{2a} \quad \text{e} \quad \frac{c^2}{2b}.$$

In generale il raggio di curvatura in un punto qualunque della strofoide si può costruire elementarmente²⁾.

La quadratura della strofoide retta si può eseguire facilmente mediante la seconda delle equazioni (4); si trova così che l'area del cappio è espressa da $a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$, mentre la superficie compresa tra

i rami infiniti e l'asintoto è data da $a^2 + \frac{\pi a^2}{4}$.

Non è difficile la determinazione del baricentro del solido generato dalla rotazione del cappio attorno al proprio asse di simme-

¹⁾ V. il Cap. III dell'opuscolo di S. GÜNTHER, *Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie* (Leipzig 1882).

²⁾ O. GÜRSCHE, Arch. f. Math. u. Phys., III Ser., T. 13, 1908, pagine 197-202.

tria¹⁾. Invece la rettificazione della strofoide esige integrali ellittici; ed il Booth ha dimostrato che qualunque arco di logociclica è eguale alla somma di un arco d'iperbole equilatera e di un arco di lemniscata, oppure alla somma di un arco di ellisse, di un arco d'iperbole e di una retta²⁾.

Numerosissime sono le questioni geometriche in cui si presenta la strofoide; ad esempio essa è la podaria di una parabola rispetto al punto in cui la direttrice taglia l'asse; inoltre, due punti delle opere di Huygens provano che essa è una curva duplicatrice ed una curva settrice³⁾; fu anche incontrata come luogo dei fuochi di una schiera di coniche bitangenti⁴⁾; inoltre essa è la curva risoltrice di un problema di ottica geometrica⁵⁾; finalmente la s'incontra in questioni di geometria descrittiva⁶⁾.

Numerosissimi sono pure i metodi che vennero indicati per generarla; citiamo ad esempio quello in base a cui la strofoide retta si presenta come cissoide (v. n. 29) di una retta ed un circolo⁷⁾; ricordiamo di passaggio quello in cui la strofoide retta appare come involupola dei circoli i cui centri C stanno sulla parabola di equazione $y^2 = 4a(a - x)$ e i di cui raggi sono espressi da $\sqrt{CO^2 - a^2}$; ed arrestiamoci un istante, finendo, su uno a cui sono collegati i nomi di due grandi geometri.

L. I. Magnus nella sua *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin, 1833) ha trattato (pag. 265) il seguente problema: « Dati tre punti A, B, C trovare il luogo

¹⁾ V. ST. GERMAIN, *op. cit.*, p. 49.

²⁾ Cfr. anche: S. GÜNTHER, *Note sur la logocyclique ou strophoïde* (Mathésis, T. I, 1881); P. MANSION, *Longueur de la bouche de logocyclique ou strophoïde* (Id., T. VI, 1886); E. CESÀRO, *Elementi di calcolo infinitesimale* (Napoli 1899), p. 317.

³⁾ G. LORIA, *La strophoïde est une sectrice et une duplicatrice* (Mathésis, II Ser., T. VIII, 1898). Come trisettrice la strofoide s'incontra senza nome speciale nell'articolo di J. R. BOYMANN, *Discussion einer Curven der dritten Ordnung und Dreitheilung des Winkels mittelst dieser Curve* (Arch. f. Math. u. Phys., T. XV, 1850).

⁴⁾ V. BERGHOFF, *Progr. städt. Gewerbschule Dortmund*, 1889.

⁵⁾ Eccone l'enunciato: Sia dato in un piano un punto luminoso A e un occhio osservante B ; uno specchio rettilineo ruota in quel piano attorno al punto A ; per ogni sua posizione vi è un raggio uscente da A il quale riflettendosi su di esso viene a passare per B ; qual'è il luogo dei punti di incidenza? V. R. NIEMTSCHICK, *Neue Constructionen der auf ebenen und krummen Flächen erscheinende Reflexe und hier bezüglichen Theorien* (Wien. Ber., T. 53, 1866); E. SANG, *On the curves produced by reflexion from a polished revolving straight wire* (Edinburgh Trans., T. XXVIII, Part I, 1877); G. LORIA, *Identité de la strophoïde avec la focale à noeud; son application à l'optique géométrique* (Nouv. Ann., III Ser., T. XVI, 1897).

⁶⁾ LA GOURNERIE, *Traité de géométrie descriptive*, II éd., III Partie, Paris 1885, p. 149-150.

⁷⁾ BELLACCHI, *Lezioni ed esercizi di algebra complementare* (fasc. I, Firenze 1898), p. 44.

di un punto P tale che gli angoli APB , APC risultino fra loro eguali»; di tale luogo il Magnus trova l'equazione e traccia la figura; quella prova e questa conferma essere desso una strofoide in generale obliqua. Ora questo fatto non venne avvertito che casualmente mezzo secolo più tardi: avendo infatti O. Hermes dedicato una memoria allo studio particolareggiato della curva del Magnus¹⁾, P. H. Schoute rilevò poco dopo²⁾ che si trattava della curva a cui deduciamo il presente Cap.; e di più fece notare come il luogo esaminato dal Magnus fosse caso speciale di uno definito da J. Steiner nel 1852 con le seguenti parole: «Dati due segmenti rettilinei fissi, il luogo dei punti da cui essi sono visti sotto angoli eguali o supplementari è costituito da due cubiche, entrambe passanti per le estremità dei due segmenti, pel punto di intersezione delle rette a cui questi appartengono e per due punti da cui i due dati segmenti sono visti sotto angoli eguali. Le due restanti intersezioni delle due curve stanno sulla retta all'infinito»³⁾.

Va ancora notato che il metodo di generazione della strofoide che è incluso nel problema del Magnus, venne ritrovato nel 1893 dal Cazamian, il quale anzi lo sottopose a notevoli trasfigurazioni⁴⁾.

Chiudiamo il presente Cap. rilevando che la strofoide (retta o obliqua) trovata studiata geometricamente (in base alla generazione mediante due fasci di cerchi) nella memoria di Ettore Cavalli, *Una cubica a punto doppio assai speciale* (Rass. di matem. e fis., Anno II, 1922 e, insieme all'ipocicloide tricuspide (v. Lib. III, Cap. VIII), come trasformata dell'iperbole equilatera, nel volume di J. Lemaire intitolato *Étude élémentaire de l'hyperbole équilatère et de quelques courbes dérivées* (Paris, 1927).

¹⁾ *Ueber eine gewisse Curve des dritten Grades* (Giornale di Crelle, T. XCVII, 1884).

²⁾ *Bemerkung anlässlich des Aufsatzes von Herrn O. Hermes* (Id., T. XCIX, 1886).

³⁾ G. di Crelle, T. XLV; oppure *Steiner's Werke*, T. II (Berlin 1884), p. 487.

⁴⁾ *Sur un lieu géométrique et ses applications* (Nouv. Ann., III Ser., T. XII, 1893); cfr. le osservazioni del VALDÈS, *Sur la strophoïde* (Id., T. XIII, 1894).

CAPITOLO IX

Generalizzazioni della strofoide.

40. Parecchie delle proprietà della strofoide retta che dimostrammo od enunciammo nel n. 38 appartengono a una classe di curve più generali che vennero studiate, indipendentemente l'uno dagli altri, da tre autori, cioè C. A. Bretschneider¹⁾, Rosenstock²⁾ e Andreasi³⁾; le chiameremo per brevità *panstrofoidi*⁴⁾ e cominceremo dal darne la seguente definizione: «Si consideri il fascio di cerchi, avente per basi i punti B , C reali od immaginari coniugati, ed il fascio di raggi avente per centro un punto A della retta dei centri dei cerchi del fascio; il luogo dei punti in cui le rette del secondo fascio sono toccate da cerchi del primo è una panstrofoide». Siccome ogni raggio r uscente da A è toccato da due cerchi passanti per B , C così su ogni retta r uscente da A si trovano due punti M_1 , M_2 della panstrofoide; si dicono *punti corrispondenti* della curva. Si chiami L l'intersezione delle rette r e BC ; è chiaro che nel caso speciale in cui B e C coincidono i due segmenti LM_1 e LM_2 risultano entrambi eguali a LB , onde si trova l'ordinaria definizione della strofoide retta.

Per trovare l'equazione delle panstrofoidi prendiamo (fig. 9) la retta BC (che è sempre reale) come asse delle y e come asse delle x il luogo dei centri dei cerchi del fascio. Se $-g$ è l'ascissa del punto A e k (numero reale od immaginario puro) il valore assoluto di $\frac{1}{2}BC$, le equazioni generiche di un cerchio e di un raggio dei dati fasci saranno

$$(1) \quad x^2 - 2cx + y^2 - k^2 = 0,$$

$$(2) \quad y = \lambda(x + g)$$

¹⁾ *Die harmonische Polarcurven* (Archiv, T. L, 1869).

²⁾ *Ueber eine Gruppe ebener Kurven dritter Ordnung* (Progr. Gotha, 1886).

³⁾ *Studio analitico delle tre cubiche cicliche* (Giorn. di Mat., T. XXX, 1892).

⁴⁾ Il BRETSCHNEIDER la chiama *harmonische Schlinge*.

La condizione di contatto essendo

$$(3) \quad c^2 + k^2 = \lambda^2 (g^2 + 2cg - k^2),$$

l'equazione della panstrofoide corrispondente è il risultato dell'eliminazione di c e λ fra le (1) (2) (3); è dunque

$$(4) \quad x(x^2 + y^2) + g(x^2 - y^2) + k^2(x + g) = 0$$

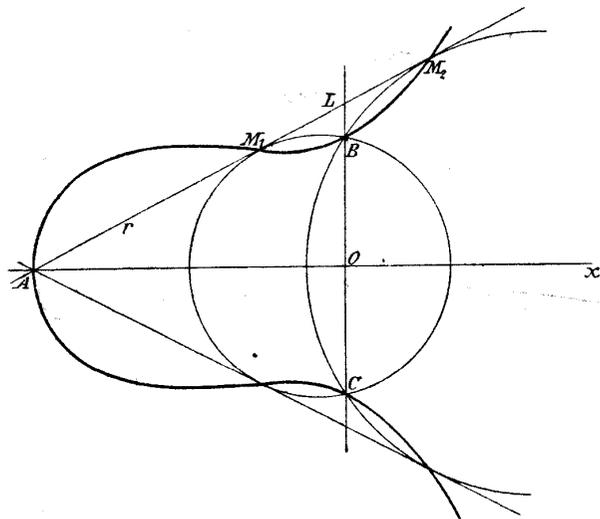


Fig. 9. — Panstrofoide.

La forma di quest'equazione dimostra che le panstrofoide sono cubiche circolari simmetriche rispetto ad un asse; essa conferma che una tale curva (4) passa per i punti A, B, C , nonchè per i punti dell'asse dell'ascisse aventi per ascisse $\pm ik$ (punti reali se B, C sono immaginari e viceversa). Scrivendo la (4) come segue

$$y = \pm \sqrt{\frac{(x+g)(x^2+k^2)}{g-x}}$$

si vede che la retta $x = g$ è un asintoto d'inflessione. Se $k^2 > 0$ la panstrofoide consta di un serpentino, se $k^2 = 0$ ha l'origine per punto doppio, se finalmente $k^2 < 0$ consta di un ovale e di un serpentino. Notiamo anche due casi limiti; per $g = 0$ la curva si

spezza nella retta $x = 0$ e nel cerchio $x^2 + y^2 + k^2 = 0$, mentre per $g = \infty$ si decompone nella retta all'infinito e nell'iperbole $x^2 - y^2 + k^2 = 0$.

Trasportando l'origine nel punto A , la (4) diviene

$$y^2(2g - x) = x(k^2 + g^2 + x^2 - 2gx)$$

onde, passando a coordinate polari,

$$(5) \quad \rho^2 \cos \omega - 2g\rho + (g^2 + k^2) \cos \omega = 0$$

Detti quindi ρ_1, ρ_2 i raggi vettori di due punti corrispondenti M_1, M_2 e L il punto comune alle rette $M_1 M_2$ e BC , si ha:

$$A M_1 = \rho_1 = \frac{g - \sqrt{g^2 \sin^2 \omega - k^2 \cos^2 \omega}}{\cos \omega},$$

$$A M_2 = \rho_2 = \frac{g + \sqrt{g^2 \sin^2 \omega - k^2 \cos^2 \omega}}{\cos \omega}, \quad A L = \frac{g}{\cos \omega}$$

onde

$$L M_2 = A M_2 - A L = \frac{\sqrt{g^2 \sin^2 \omega - k^2 \cos^2 \omega}}{\cos \omega} = A L - A M_1,$$

cioè L è il punto di mezzo del segmento $M_1 M_2$; la retta BC è dunque il luogo dei centri dei segmenti determinati dalle coppie di punti corrispondenti.

Notiamo poi, senza dimostrarlo, che le normali in due punti corrispondenti qualunque si tagliano in un punto, il cui luogo geometrico è la parabola $y^2 + 4gx = 0$, che l'invariante assoluto della curva (v. n. 12) vale $\frac{g-k}{g+k}$ e che la curva ha a distanza finita 8 flessi situati due a due su quattro parallele all'asse delle y , le cui ascisse formano un rapporto equianarmonico.

41. Altra generalizzazione della strofoide è evidentemente il luogo dei piedi delle normali condotte ai cerchi di un fascio da un punto arbitrario del suo piano. Altrettanto dicasi riguardo alla curva definita consegue¹⁾: Dati in un piano due punti O, A ed una retta r , sia M un punto qualunque di questa; condotta la retta OM , si prendono su di essa due punti P, P' tali che sia $\overline{MP} = \overline{MP'} = \overline{MA}$; il luogo dei punti P, P' è sempre una curva del terzo ordine pas-

¹⁾ LAGRANGE, *Sur les cubiques strophoidales* (Nouv. Ann. de Math., III Serie, T. XIX, 1900).

sante pel proprio fuoco singolare; è una strofoide se la retta r passa per A ; in caso diverso è una *cubica strofoideale*, che può in infiniti modi considerarsi come luogo dei fuochi di una schiera di coniche.

Della strofoide retta sono pure estensioni le curve di equazione generale

$$(6) \quad (x + y)(x^2 - 2kxy + y^2) = 2(1 + k)axy^1;$$

facendo ivi infatti $k = 0$ si ottiene l'equazione d'una logocidica; aggiungiamo che per $k = \frac{1}{2}$ si ottiene una foglia di Cartesio.

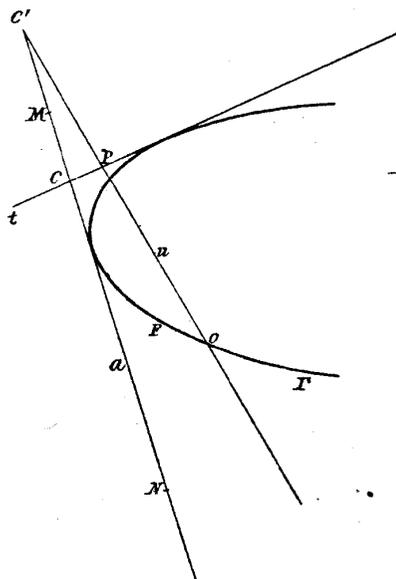


Fig. 10.

Di natura diversa è la generalizzazione contenuta nel seguente problema locale²⁾: « Data (fig. 10) una conica Γ e una sua tangente fissa a con due punti M e N , e dato un terzo punto fisso O di Γ , si consideri una tangente qualunque t della curva e si chiami u la retta che unisce il punto O al conjugato armonico del punto $C \equiv at$ rispetto alla coppia MN ; trovare il luogo del punto $tu \equiv P$. È chiaro che questo luogo è generato mediante una corrispondenza proiettiva stabilita fra il fascio di raggi avente per centro O , e il fascio di tangenti della conica Γ ; il luogo stesso è pertanto una cubica avente O per punto doppio; il Pic-

quet ha notato che è la proiezione della podaria di una parabola rispetto ad un punto della direttrice.

Molto più vaste sono le due generalizzazioni che ci restano da definire.

L'una venne indicata dal Barbarin nella *Revue de mathématiques spéciales*, 1894, ed è in ultima analisi un metodo di derivazione

¹⁾ CESÀRO, *Elementi di calcolo infinitesimale* (Napoli 1899), p. 171; L. BURMESTER (*Lehrbuch der Kinematik*, Leipzig 1888, p. 38) le chiama *zweitzellige Fokalkurven*.

²⁾ PICQUET, *Géométrie analytique* (Paris 1882), p. 552.

da una curva di infinite altre. Egli infatti suppone dati ad arbitrio una curva Γ e due punti O' , O'' nel suo piano; preso un punto qualunque M di Γ , lo si unisce ad O' e si taglia la congiungente col cerchio di centro M e raggio MO'' . Il luogo delle coppie di punti di intersezione è una curva che si dice *strofoideale* di Γ . Il de Longchamps insegnò a costruirne le tangenti¹⁾.

L'altra appartiene a W. W. Johnson²⁾. Il quale ha considerato il luogo dei punti P in cui si tagliano due rette rotanti attorno a due punti fissi A , B per modo che, detti φ , ψ gli angoli di PA e PB con la retta AB ed α un angolo dato, si abbia costantemente

$$(7) \quad n\psi \pm m\varphi = \alpha.$$

I numeri m e n si potrebbero supporre qualsivogliano, ma, volendo ottenere delle curve algebriche, fa mestieri supporli commensurabili, anzi si può supporli interi e primi fra loro. In tale ipotesi chiameremo *strofoide generale* il luogo del punto P e per ottenerne l'equazione prenderemo A per origine e AB per asse delle x in un sistema di coordinate ortogonali; porremo poi:

$$AB = a; (x + iy)^n = X_n + iY_n, (\overline{a - x} + iy)^m = X'_m + iY'_m;$$

$$x + iy = \sigma e^{i\psi}, \overline{a - x} + iy = \rho e^{i\phi};$$

avremo quindi:

$$X_n + iY_n = \sigma^n e^{in\psi}, X'_m + iY'_m = \rho^m e^{i\phi},$$

$$(X_n + iY_n)(X'_m + iY'_m) = \rho^m \sigma^n e^{i(n\psi \pm m\phi)}$$

o, applicando la (7),

$$(8) \quad (X_n + iY_n)(X'_m + iY'_m) = \rho^m \sigma^n e^{i\alpha}$$

ossia

$$(X_n X'_m \mp Y_n Y'_m) + i(Y_n X'_m \mp X_n Y'_m) = \rho^m \sigma^n (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Questa si spezza nelle due

$$X_n X'_m \mp Y_n Y'_m = \rho^m \sigma^n \cos \alpha; Y_n X'_m \pm X_n Y'_m = \rho^m \sigma^n \sin \alpha;$$

¹⁾ *Sur le strophoidales* (Mathesis, II Serie, T. IV, 1894).

²⁾ *The strophoids* (Am. Journ., T. III, 1881). Cfr. *A note on the strophoids* (J. Hopkins, University Circulars, T. II, 1883) ove E. BARNES applica i quaternioni alle curve del JOHNSON; delle stesse tratta l'articolo di J. H. WEAVER, *A generalization of the strophoid* (The Amer. Math. Monthly, T. XXIX, 1922).

eliminando fra queste $\rho^m \sigma^n$ si conclude:

$$(8) \quad (X_n X'_m \mp Y_n Y'_m) \cot \alpha (Y_n X'_m \pm X_n Y'_m) = 0:$$

e questa è l'equazione (di grado $m + n$) delle strofoidi generali. Per $m = 1$, $n = 2$, preso il segno — si ottiene la strofoide obliqua la quale pertanto gode la notevole proprietà espressa dalla relazione $2\psi - \varphi = \alpha$.

La più recente generalizzazione della strofoide a noi nota può esprimersi come segue: Sull'asse delle x di un sistema di coordinate cartesiane di origine O si considerino due punti fissi A e C , il secondo dei quali sia centro d'un cerchio passante per O . Sia P un punto qualunque della periferia di questo cerchio e si porti sulla trasversale AP il segmento PM eguale alla corda OP ; variando P il punto M descrive una curva che, quando C si allontana indefinitamente sull'asse delle x , tende a identificarsi a una strofoide retta¹⁾.

Finiremo notando che anche l'originaria definizione stereometrica della strofoide (n. 35) fu estesa e condusse a nuove curve, ma di quart'ordine²⁾.

¹⁾ F. H. HODGE, *A generalization of the strophoid* (Amer. Mathem. Monthly, Vol. XXXIV, 1927).

²⁾ H. W. NEWSON, *A pair of curves of the fourth degree and their application in the theory of quadrics* (Amer. Journ., T. XIV, 1892).

CAPITOLO X

La concoide slusiana.

42. Fra le particolari cubiche circolari ve n'ha una che sfuggì all'attenzione dei geometri moderni sino al giorno in cui venne pubblicato il carteggio tra R. de Sluse e C. Huygens¹⁾. La chiameremo *concoide slusiana* e la definiremo come segue: Dato un punto O (fig. 11), una retta r ed una costante k^2 , si conduce per O una trasversale arbitraria a tagliare r in M e si porta su OM a partire da M , dalle parte opposta a quella dove sta O , un segmento MP tale che $OM \cdot MP = k^2$; il luogo di P sarà una concoide slusiana²⁾. Preso O per polo e per asse polare la perpendicolare calata da O su r , detta a la distanza fra O e r si avrà

$$OP = \rho, \quad OM = \frac{a}{\cos \omega}, \quad MP = \rho - \frac{a}{\cos \omega}$$

onde l'equazione polare della curva è

$$(1) \quad a(\rho \cos \omega - a) = k^2 \cos^2 \omega.$$

L'equazione cartesiana è invece

$$(2) \quad a(x - a)(x^2 + y^2) = k^2 x^2$$

Se il segmento eguale a $\frac{k^2}{OM}$ si fosse portato da M verso O in $M'P'$ si sarebbe ottenuta la curva

$$(2') \quad a(x - a)(x^2 + y^2) = -k^2 x^2,$$

¹⁾ G. LORIA, *Une courbe oubliée* (Mathésis, II Serie, T. VII, 1897).

²⁾ Lettera del 6 Ottobre 1662 in *Oeuvres de Huygens*, T. IV (La Haye 1891), p. 247. Della curva or definita è fatta menzione dal marchese DE L'HÔPITAL nella sua *Analyse des infiniment petits*, II ed. (Paris 1705), p. 67.

che non ha più la forma di conchiglia, ma che — grazie all'analogia fra le equazioni (2) e (2') — chiameremo ancora concoide slusiana; in altre parole noi ammetteremo la possibilità che nella (2) k^2 sia negativo¹⁾.

Per ottenere una costruzione comoda della curva di cui ci occupiamo consideriamo il luogo dei punti N tali che $OM \cdot ON = k^2$, ove O, M, N sono punti collineari. Questo luogo è il cerchio K passante per l'origine ed avente per centro il punto $C \left(\frac{k^2}{2a}, O \right)$; si avrà allora $ON = MP = P'M$ dunque: « Dato un cerchio K ,

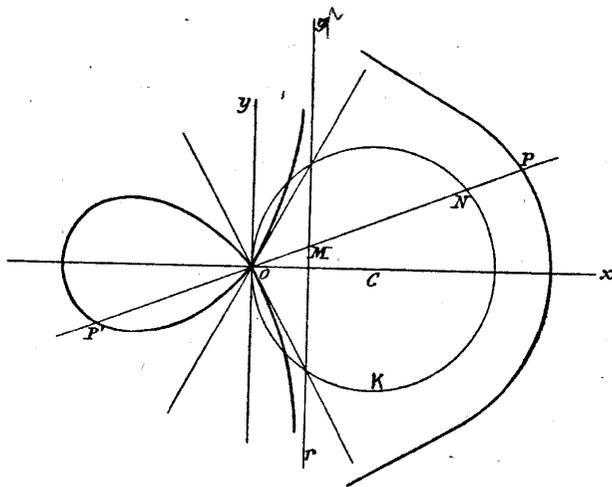


Fig. 11. — Concoide slusiana.

un punto O della sua periferia ed una retta r parallela alla relativa tangente, si conduca una retta arbitraria a tagliare K in N e r in M ; su quella retta si porti a partire da M dalla parte di O (o dall'opposta) il segmento MP (o MP') eguale a ON ; il luogo dei punti P (o P') così ottenuti è una concoide slusiana ».

Di tal curva il punto O è un punto doppio; le relative tangenti, essendo complessivamente rappresentate dall'equazione $(a^2 - k^2)x^2 +$

¹⁾ A queste due specie di curve si giunge cercando le cubiche circolari razionali che sono simmetriche rispetto a un asse; fra esse si trova anche la cissoide di Diocle e la trisettrice di Maclaurin, di cui parleremo poi (v. n. 47); tali curve godono di proprietà che si apprendono dalla nota di W. GAEDCKE, *Ueber das Zentrum der mittleren Entfernungen gewisser Punktquadrupel auf die rationalen zirkularen Kurven 3. Ordnung mit Symmetrieachse* (Sitz. der Berliner math. Gesell., 28 giugno 1916).

+ $a^2 y^2 = 0$, quel punto è un nodo o un punto isolato secondochè $a^2 \leq k^2$; per $k = a$ si ricade nella cissoide di Diocle; se $k > a$ i due rami di curva incrociati in O hanno ivi per comune raggio di curvatura

$$\frac{k \sqrt{k^2 - a^2}}{a} \text{)}.$$

43. Combinando l'equazione (2) con la $y = \lambda x$ si ottiene la seguente rappresentazione parametrica della concoide slusiana:

$$(3) \quad x = a + \frac{k^2}{a(1 + \lambda^2)}, \quad y = a\lambda + \frac{k^2 \lambda}{a(1 + \lambda^2)}$$

Se ne deduce facilmente la seguente condizione di collinearità dei tre punti (α) , (β) , (γ) :

$$(4) \quad \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = \frac{a^2 + k^2}{a^2};$$

per conseguenza la curva ha (oltre ad un flesso all'infinito) due flessi a distanza finita²⁾, i cui parametri valgono $\pm \frac{\sqrt{a^2 + k^2}}{3a}$ e le cui coordinate sono:

$$x = \frac{4a(a^2 + k^2)}{4a^2 + k^2}, \quad y = \pm \frac{4(a^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}(4a^2 + k^2)}$$

¹⁾ Merita di essere notato che le concoide slusiane furono poi incontrate, indipendentemente dal loro primo scopritore. Così nell'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* di G. CRAMER (Genève 1750, p. 441) si trova l'equazione

$$x(x^2 + y^2) = (b - R)x^2 + by^2$$

evidentemente riducibile alla forma (2) o (2'); donde il nome di curva di Cramer datale da H. RIEDER (*Untersuchung eine 2-4-deutigen kinetographischen Verwandtschaft*; Diss. München 1907, p. 31-33), il quale l'ha poi generalizzata in quella rappresentata come segue:

$$(by - ax)(x^2 + y^2) + (ab - aR)x^2 + aby^2 + bRxy = 0.$$

D'altra parte ERNESTO CAVALLI (*Le figure reciproche e la trasformazione quadratica nella cinematica*, § 22; Atti Accad. Napoli, II Ser., IX, 1899) ha considerate le curve

$$(x - a)(x^2 + y^2) + bx^2 = 0$$

e (osservando che per $b = a$ quest'equazione rappresenta una cissoide di Diocle) le ha chiamate *Pericissoidi* o *Ipicissoidi* secondochè $a \geq b$.

²⁾ La determinazione dei flessi è segnalata dallo SLUSE nella lettera del 12 gennaio 1663 (vol. cit., p. 292) come eseguita dall'HUYGENS.

eliminando fra queste k si ottiene l'equazione

$$x(x^2 + y^2) = 4 a y^2$$

che rappresenta una cissoide; dunque resta dimostrato il seguente teorema, scoperto dal de Sluse¹⁾: *il luogo dei flessi di tutte le concoide slusiane aventi comuni il punto doppio e l'asintoto è una cissoide di Diocle, avente per cuspidi quel punto e l'asintoto parallelo a quell'asintoto, ad una distanza quadrupla dal punto singolare.*

Le (3) danno:

$$(5) \quad a^2 (\beta \gamma \delta + \alpha \gamma \delta + \alpha \beta \delta + \alpha \beta \gamma) - (a^2 + k) (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$$

come condizione di conciclicità dei quattro punti (α) (β) (γ) (δ) . Lasciamo al lettore di dedurne che per ogni punto della concoide passano tre cerchi che la osculano altrove; i tre punti di osculazione appartengono ad un circolo passante pel punto di partenza; invece per ogni punto della curva passano due cerchi tangenti la curva in quel punto ed in un altro; ecc. Finiamo dimostrando l'osservazione del Neuberg²⁾ che la concoide slusiana è la podaria di una parabola rispetto ad un punto dell'asse. Infatti la podaria della parabola $y^2 = 2px$ rispetto al punto $(\alpha, 0)$ ha per equazione

$$2x(x - \alpha)^2 + 2(x - \alpha)y^2 + py^2 = 0;$$

posto quindi $x - \alpha = x'$ questa diviene

$$\left(x' + \frac{p}{2}\right)(x'^2 + y^2) = \left(\frac{p}{2} - \alpha\right)x'^2;$$

e poichè questa è della forma (2), l'enunciata proprietà è dimostrata.

¹⁾ V. la prima delle citate lettere di questo geometra.
²⁾ V. una postilla al citato articolo *Une courbe oubliée*.

CAPITOLO XI

Cubiche razionali tangenti alla retta all'infinito; in particolare la cubica di Rolle.

44. Una cubica razionale tangente alla retta all'infinito può sempre rappresentarsi con un'equazione della forma $u_1 v_1^2 + u_2 = 0$, u_1 e v_1 essendo forme lineari e u_2 una forma quadratica in x, y ; per ottenere questo risultato basta assumere come origine il punto singolare che la curva possiede. Riguardo a tali curve sussiste il seguente

Teorema. Data una parabola, un punto O di essa ed una retta r del suo piano, si conduce per O una trasversale arbitraria a tagliare la parabola in O' e la retta in P e si determina su di essa un punto P' tale che i due segmenti OO' , PP' abbiano lo stesso punto medio¹⁾. Il luogo di P' è una cubica avente O per punto doppio e la retta all'infinito per tangente.

Dimostrazione. — La parabola data sia rappresentata dalle equazioni $x = \frac{\lambda^2}{2p}$, $y = \lambda$; la retta r sia la congiungente dei punti (α) (β) , abbia quindi per equazione $2px - (\alpha + \beta)y + \alpha\beta = 0$; il punto O' abbia per parametro λ . Un facile calcolo prova che le coordinate di P' sono

$$x = \frac{\lambda^2}{2p} - \frac{\alpha\beta\lambda}{2p(\alpha + \beta - \lambda)}, \quad y = \lambda - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \lambda};$$

eliminando λ si ottiene

$$(1) \quad \alpha\beta y^2 - 2p(\alpha + \beta)xy + 4p^2 x^2 = 2y^2 \{px - (\alpha + \beta)y\}$$

come equazione del luogo dei punti P' ; con la sua forma essa dimostra il teorema.

¹⁾ P' dicesi *isotomico* di P rispetto alla coppia OO' .

è una curva che s'incontra a pag. 380-381 del T. I delle *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana di D. na Maria Gaetana Agnesi* (Milano 1748), ove essa è designata col nome di « la versiera ». L'equazione della curva — sotto la forma notata qui appresso col numero (2') — si trova già in un passo di Fermat¹⁾, d'onde si apprende essersi questo occupato di quadrarla; ma²⁾ il nome ora riferito s'incontra per la prima volta nelle Note al *Trattato del Galileo del moto naturalmente accelerato* del P. Guido Grandi (Opere di G. Galilei, T. III. Firenze 1718, p. 393) ove si legge che il nome *Versiera* (lat. *Versoria*) deriva dalla parola *sinus versus* e che la curva stessa fu ottenuta per la prima volta dal Grandi nell'opera intitolata *Quadratura circuli et hyperbolae* (Pisa, I ed. 1703; II ed., 1710).

Nell'opera citata dell'Agnesi della versiera non è fatto uno studio completo, ma è avvertito (pag. 391-393) essere essa costruibile agevolmente come segue: « si conduce per l'estremo *A* del dato diametro una trasversale arbitraria che taglia nuovamente la periferia del circolo in *D* ed in *E* la tangente a questo in *C*; le parallele condotte *D*, *E* risp. a tale tangente ed al diametro *AC* si tagliano in un punto *M* della versiera ». Infatti da questa costruzione deducesi $AB : BD = AC : CE$, che coincide con la (1) dal momento che $CE = BM$.

Detto *a* il diametro del dato cerchio e presi *AC* per asse delle *y* e *A* per origine, l'ultima proporzione scritta si può porre sotto la seguente forma

$$\frac{y}{\sqrt{y(a-y)}} = \frac{a}{x}$$

cioè

$$(2) \quad x^2 y = a^2 (a - y) \quad \text{ovvero} \quad (2') \quad y = \frac{a^3 - 3}{a^2 + x^2}$$

¹⁾ V. la memoria *De aequationum localium transmutatione et emendatione* (*Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 279-280 e T. III, p. 233-234).

²⁾ G. VACCA, *Sulla versiera* (Boll. di bibl. e storia, T. IV, 1901).

³⁾ L'equazione (2') si trova già in FERMAT (*Oeuvres* ed. Henry e Tannery, T. I, p. 279 e III, p. 233), il quale ha per primo quadrato la curva. Lo stesso risultato fu poi ottenuto altrimenti dall'HUYGENS (*Oeuvres*, T. X, La Haye, 1905, p. 364-373). Posto $x = y'$, $a - y = x'$ la (2) diviene

$y' = a \sqrt{\frac{x'}{a-x'}}$, equazione adoperata dal MISTEY (*Propriétés de la courbe d'Agnesi*, *Mathésis*, T. VII, 1887); facendo inoltre $a = 2a'$ si ritrova la forma di equazione preferita dal BOOTH (*A treatise on some new geometrical methodo* (London 1873, p. 202-3) per quella che egli chiama « the witch or the curve of Agnesi »). Generalizzando la (2') G. GRANDI (*De infinitis infinitorum ecc.*, Pisis 1710) ha considerate le curve (*m* e *n* essendo numeri interi positivi) di equazione

$$y = \frac{a^{\frac{m}{n}} + 1}{(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}}$$

La versiera è dunque una cubica razionale, avente l'asse delle *x* per asintoto d'inflessione, toccante in *C* il dato cerchio ed avente per punto isolato il punto all'infinito del diametro *AC*. Essa è evidentemente suscettibile dalla seguente rappresentazione parametrica.

$$(3) \quad x = \lambda, \quad y = \frac{a^3}{a^2 + \lambda^2};$$

in corrispondenza si ha come condizione di collinearità dei tre punti (α), (β), (γ)

$$\alpha + \beta + \gamma = a^2,$$

dalla quale risulta che la curva possiede a distanza finita due flessi di coordinate

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{3a}{4}.$$

Dalla (2) si deduce

$$\int y dx = a^3 \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = a^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + \operatorname{cost.}$$

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} y dx = 4\pi \left[\frac{a}{2} \right]^2;$$

perciò l'area compresa fra la versiera ed il proprio asintoto equivale al quadruplo dell'area del cerchio generatore. Dalla stessa (2) si deduce

$$\int y^2 dx = a^6 \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{a^4 x}{a^2 + x^2} + \frac{a^3}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}$$

onde

$$\pi \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} y^2 dx = 2 \cdot \frac{\pi^2 a^3}{4}$$

ciò prova che la versiera ed il circolo generatore, rotando attorno all'asintoto, generano due volumi il primo dei quali è doppio del secondo.

La costruzione indicata per la versiera è suscettibile di immediata generalizzazione, essendo caso specialissimo della seguente: Dati

¹⁾ Un teorema analogo sussiste per tutte le curve aventi equazioni della forma $y(x^2 + a^2) = ar^2$: v. H. WIELEITNER, *Ueber zwei Familien von rationalen Kubiken* (Monatshefte f. Math. u. Phys., T. XVIII, 1907); sono le curve che alcuni chiamano *agnesiane*: v. due articoli dal titolo *Sur les agnésianes* uno di J. NEUBERG (*Mathésis*, III Ser., T. X, 1910), l'altro di R. GOORNAGHTIGH (Id., T. XXXVI, 1922).

un circolo K (di centro C e raggio r), un punto O ed una retta d nel piano del circolo si conduce per O una retta arbitraria a tagliare d in D e K in N . La parallela condotta da N a d taglia la perpendicolare condotta da D a d in un punto M il cui luogo è in generale una curva del quart'ordine. Ma se O si trova sulla periferia di K , questa si decompone nella parallela condotta da O a d ed in una cubica, la quale diviene una versiera se d è tangente a K nell'altro estremo del diametro OC . Se invece OC è parallela alla retta d , la cubica si chiama *serpentino di Newton*¹⁾.

Va notato che se, nel caso generale, si prende per origine O e per asse delle x una parallela a d , fra le coordinate dei punti $N(x, y)$ e $M(x', y')$ sussistono le relazioni $x' = \frac{ax}{y}$, $y' = y$; dunque la versiera, il serpentino e tutte le altre curve ora considerate sono iperbolismi di circoli (v. n. 15).

45. G. Peano nelle sue *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, 1887) ha considerata (p. 87) una curva, simile per forma alla versiera e chiamata da lui *visiera di Agnesi*. Eccone la costruzione: Si consideri ancora il cerchio che serve a costruire la versiera (fig. 12) e si tracci per A una trasversale arbitraria a tagliare in T, U la tangente t a K in C e la periferia del cerchio dato. Il centro N del segmento TU appartiene al luogo in questione. Dette ϱ, ω le coordinate polari di N rispetto al punto A come polo e al diametro AC come asse polare, si avrà:

$$\varrho = AN = \frac{1}{2}(AT + AU) = \frac{a}{2} \left[\frac{1}{\cos \omega} + \cos \omega \right],$$

equazione polare della curva in questione, la quale prova che la versiera non differisce dalla compagna della cissoide (n. 24).

È una cubica circolare avente A per punto isolato e per asintoto la parallela condotta a t dal centro del dato cerchio; è dunque una curva ben distinta dalla versiera ed a cui si può conservare il nome di visiera datole dal Peano. Essa è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica:

$$(5) \quad x = \frac{a}{2} \frac{\lambda^2 + 2}{\lambda^2 + 1}, \quad y = \frac{a}{2} \frac{\lambda^3 + 2\lambda}{\lambda^2 + 1};$$

a questa corrisponde la seguente condizione di collinearità dei tre

¹⁾ BELLACCHI, *Lezioni ed esercizi d'algebra complementare* (Firenze 1898), fasc. I, p. 46. La stessa curva, generata nello stesso modo trovasi studiata in un articolo di G. DE LONGCHAMPS (Journ. de math. spéciales, II Serie. T. IX, 1885, p. 202).

punti $(\alpha), (\beta), (\gamma)$:

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta - 2 = 0;$$

per conseguenza la curva possiede al finito due flessi aventi per coordinate

$$x = \pm \frac{4a}{5} \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad y = \frac{4a}{5}.$$

Preso per asse delle x l'asintoto della versiera, in luogo della (5) si ha la seguente rappresentazione parametrica:

$$(6) \quad x = a \left[\frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\omega + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega \right], \quad y = \frac{a}{2} \cos^2 \omega;$$

se ne deduce

$$\int x dy = -\frac{a^2}{2} \int (2 \operatorname{sen}^2 \omega - \operatorname{sen}^4 \omega) d\omega$$

onde

$$2 \int_{\omega=\frac{\pi}{2}}^{\omega=0} y dx = \frac{5}{4} \pi \left[\frac{a}{2} \right]^2;$$

dunque: l'area compresa fra la visiera ed il proprio asintoto è eguale a $\frac{5}{4}$ dell'area del circolo che serve a costruire la curva.

46. Vi è un altro luogo geometrico che a torto venne identificato con la versiera. Infatti nell'*Essai sur le géométrie de la règle et de l'équerre* par G. de Longchamps (Paris, 1890) si legge (p. 111) la seguente costruzione della « courbe d'Agnesi »: Dati (fig. 12) tre punti A, C, G in linea retta, il secondo dei quali sia centro del segmento limitato dagli altri due, si conduce da questo la retta t perpendicolare a ACG ; poi si traccia per A una retta arbitraria a segare t in H e si abbassa su di essa la perpendicolare GK ; le parallele condotte da H a ACG e da K a t si tagliano in un punto P di cui si cerca il luogo geometrico. A tale scopo osserviamo che il punto K altro non è che l'intersezione della retta condotta da C col cerchio di centro C e raggio CA . Prendiamo poi i soliti assi cartesiani e chiamiamo ω l'angolo della trasversale colla retta ACG ; avremo evidentemente

$$(7) \quad x = a \operatorname{tg} \omega, \quad y = 2a \cos^2 \omega$$

donde, eliminando, ω si ottiene l'equazione cercata di quel luogo

sotto la forma seguente:

$$(8) \quad x^2 y = a^2 (2a - y) \quad \text{ossia} \quad (8') \quad y = \frac{2a^3}{a^2 + x^2}$$

Il luogo stesso è pertanto una cubica, ma non è la versiera; la diremo *pseudo-versiera* e dimostreremo che sta con la versiera in una notevole relazione geometrica. Posto infatti $x = x'$, $y = 2y'$ la (7) diviene

$$x'^2 y' = a (a^2 - y');$$

essendo questa la forma (2) si conclude: *la pseudo-versiera nasce dalla versiera raddoppiando tutte le ordinate di questa perpendicolari all'asintoto* (è dunque affine alla versiera).

La prima apparizione della pseudo-versiera risale ad epoca assai più antica dell'*Essai* del de Longchamps. Giacchè il Leibniz, nelle sue prime ricerche intorno alla quadratura delle curve piane¹⁾, ha suggerito il seguente procedimento per dedurre da una curva Γ un'altra C : date due rette fra loro perpendicolari r, s si conduce da un punto π di Γ la tangente a questa curva sinchè tagli r in T ; poi da T si conduce la parallela a s e da π la parallela a r ; il loro punto d'intersezione p sarà un punto di C . Questa curva è detta « figura resectorum » rispetto a Γ . Per trovare le formole che legano le coordinate ξ, η di π alle coordinate x, y di p prendiamo r per asse delle ascisse e s per asse delle ordinate. Si avrà allora facilmente

$$x = \xi - \eta \frac{d\xi}{d\eta}, \quad y = \eta;$$

e per ottenere l'equazione di C basta eliminare ξ, η fra queste equazioni e l'equazione $f(\xi, \eta) = 0$ di Γ . Sia ad es. Γ un cerchio tangente nell'origine nell'asse delle x ; si potrà prendere

$$\xi = a \cos \omega, \quad \eta = a + a \sin \omega$$

onde

$$d\xi = -a \sin \omega \cdot d\omega, \quad d\eta = a \cos \omega d\omega$$

e le formole generali precedenti daranno

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + \sin \omega}{\cos \omega}, \quad \frac{y}{a} = 1 + \sin \omega.$$

Eliminando ω si ottiene come « figura resectorum » quella di

¹⁾ LEIBNIZ ed. Gerhardt, T. V, p. 100.

equazione

$$(9) \quad y = \frac{2ax^2}{a^2 + x^2} \quad \text{o} \quad 2a - y = \frac{2a^3}{a^2 + x^2};$$

siccome quest'ultima differisce dalla (8') pel solo scambio di y in $2a - y$, così la curva rappresentata è una pseudo-versiera. Avendola Leibniz trovata nello stabilire la celebre formola

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \dots,$$

L'Huygens se ne interessò e gli scrisse in data 7 Novembre 1674¹⁾: « Pour ce qui est de la ligne courbe Anonyme qui sert à Votre démonstration, j'avois envie de la baptiser, en lui donnant quelque nom composé des noms de ceux lignes dont je trouvois qu'elle estoit produite, qui sont le cercle et la cissoïde des anciens²⁾. Mais ayant vu depuis que cette même ligne a esté premièrement mise en avant par J. Gregorius³⁾, je crois qu'il luy faut laisser le droit de la nommer comme il voudra ». Con questa citazione, che fa risalire a J. Gregory la prima invenzione della pseudo-versiera, crediamo bene di chiudere il nostro cenno sopra questa curva, alla quale l'Ozanam diede il nome di *quadratrice geometrica*⁴⁾.

¹⁾ Id., T. II, p. 16-17 oppure *Oeuvres de Huygens*, T. VIII, p. 393-395.

²⁾ Per chiarire quest'asserzione si osservi che la (8) può scriversi

$$x = a \sqrt{\frac{y}{2a - y}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{y(2a - y)} + y \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \right)$$

onde x è la media aritmetica delle ascisse delle due curve $x = \sqrt{y(2a - y)}$,

$x = y \sqrt{\frac{y}{2a - y}}$ che sono le la prima un cerchio e la seconda una cissoide.

³⁾ *Exercitationes geometricae*: a JACOBO GREGORIO Scoto (Londini, 1658).

⁴⁾ *Géométrie pratique* (1684) citata nel *Dictionnaire mathématique* (Amsterdam 1691), p. 108, dello stesso autore. Generazioni stereometriche di questa curva, nonchè della versiera e del serpentino leggonsi nell'articolo di E. JANISCH, *Die Versiera des Agnesi und verwandte Linien als Orthogonalprojektionen von Raumkurven dritter Ordnung* (Arch. Math. Phys., III Ser., T. XII, 1907).

CAPITOLO XIII

Le trisettrici del Maclaurin, del Catalan e del de Longchamps.

47. Dati tre punti in linea retta O, O', O'' (fig. 13) tali che sia $O'' O' = \frac{1}{3} O' O$, si conduce per O' la retta o perpendicolare alla $O'' O' O$ e da O'' una trasversale qualunque a tagliare o in M , poi da M la perpendicolare e da O la parallela a $O'' M$; queste due rette si tagliano in un punto P , il cui luogo si chiama *trisettrice del Maclaurin* in causa dell'applicazione di cui è suscettibile e del geometra che per primo l'ha considerata¹⁾.

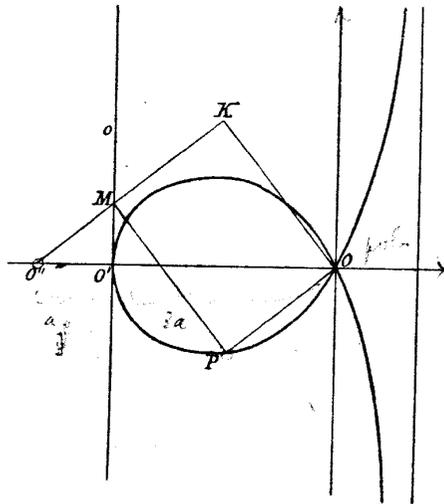


Fig. 13. — Trisettrice di Maclaurin.

Per trovarne l'equazione assumiamo O per polo e $OO'O''$ per asse polare e poniamo $O'O'' = a$ (onde $O'O' = 3a$); se K è il quarto vertice del rettangolo OPM , avremo:

$$O'' M = \frac{a}{\cos \omega},$$

$$O'' K = 4 a \cos \omega,$$

¹⁾ *Treatise of fluxions*, T. I (Edinburgh 1724), p. 260; v. anche della stesso autore *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis* (Londini 1720), p. 33. La costruzione riferita nel testo leggesi nell'*Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* par M. G. DE LONGCHAMPS (Paris 1890), p. 120; un'altra è esposta nella nota di H. BROCARD, *Remarque au sujet de la trisettrice de Maclaurin* (Journ. de Math. spéc., III Serie, T. V, 1891).

$$\rho = OP = MK = O''K - O''M = \frac{a}{\cos \omega} - 4 a \cos \omega;$$

dunque l'equazione polare della trisettrice è

$$(1) \quad \rho = a \frac{1 - 4 \cos^2 \omega}{\cos \omega},$$

epperò l'equazione cartesiana ne è

$$(2) \quad x(x^2 + y^2) = a(y^2 - 3x^2) \quad \text{ossia} \quad (2') \quad y = \pm \sqrt{\frac{3a-x}{a-x}}$$

Se ne deduce che la trisettrice di Maclaurin è una cubica circolare, simmetrica rispetto alla retta $OO'O''$, avente per punto semplice O' e per punto doppio O ; le tangenti in O e l'asse delle x dividono in sei parti eguali lo spazio attorno a O . La retta $x - a = 0$ è l'unico asintoto reale, della curva.

Se s'inverte il senso positivo sull'asse della x l'equazione (2) si muta colla seguente

$$x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2);$$

la curva così rappresentata fu immaginata nel 1831 dal geometra americano Burton per risolvere il problema della trisezione dell'angolo; egli immaginò anche un sistema articolato per descriverla con moto continuo¹⁾.

Ponendo

$$a = \frac{c}{2}, \quad x = x' + \frac{c}{2}$$

la (2') diviene

$$y = \left[x' + \frac{c}{2} \right] \sqrt{\frac{c-x'}{c+x'}}$$

e rappresenta il luogo di un punto tale che, detti A, B i punti di coordinate

$$x = \pm \frac{c}{2}, \quad y = 0$$

si ha

$$3 \widehat{PAB} = \pi - \widehat{PBA}^2;$$

¹⁾ Cfr. G. SCOTT, *On a looped curve of the third degree, which facilitate the trisection of angles, and its mechanical description by continuons motion* (The educ. Times, II Ser., T. IV, 1903).

²⁾ SCHLÖMILCH, *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, II Th. (Leipzig 1874), p. 59.

ciò prova che la trisettrice di Maclaurin è caso particolare, tanto della conoide slusiana, quanto delle strofoidi generali (v. n. 41) e delle settrici dello Schoute (Lib. V, Cap. XII)¹⁾. La curva di cui si tratta è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica

$$(3) \quad x = a \frac{\lambda^2 - 3}{\lambda^2 + 1}, \quad y = a \frac{\lambda(\lambda^2 - 3)}{\lambda^2 + 1},$$

a cui corrisponde la seguente condizione di collinearità dei tre punti (α) , (β) , (γ) .

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + 3 = 0,$$

la quale prova che i punti ciclici del piano sono flessi e che lo è pure l'unico punto reale della curva posto sulla retta all'infinito. Dalla (2) e dalle (3) si può dedurre che la quadratura della trisettrice è effettuabile elementarmente, mentre la sua rettificazione esige integrali ellittici²⁾. E anche facile dimostrare che la trisettrice

¹⁾ Antecipando su quello che vedremo nell'or c. I. si deduce che la trisettrice di Maclaurin può rappresentarsi con una delle due seguenti equazioni polari

$$\rho = 2a \frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}; \quad \rho = 2a \frac{\sin \frac{\omega}{3}}{\sin \frac{2\omega}{3}}$$

La prima coincide in sostanza con la (1) del testo; la seconda invece equivale alla seguente

$$\rho = a : \cos \frac{\omega}{3},$$

la quale è utilissima nelle applicazioni: ad es. essa dà, come valore dell'area di un settore della curva, l'espressione

$$\frac{1}{2} \int_0^\omega \rho^2 d\omega = \frac{a^2}{2} \int_0^\omega \frac{d\omega}{\cos^2 \frac{\omega}{3}} = \frac{3a^2}{2} \int_0^\omega \frac{d \frac{\omega}{3}}{\cos^2 \frac{\omega}{3}} = \frac{3a^2}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{3}.$$

risultato facilmente esprimibile a parole, come rilevò il GODEFROY (Journ. de Math. spéc., II Serie, T. IX, 1885, p. 179). In particolare l'area del cappio è $= 3\sqrt{3}a^2$.

²⁾ G. DE LONGCHAMPS. *Sur la rectification de la trisettrice de Maclaurin au moyen des intégrales elliptiques* (Comptes rendus, T. CIV, 1887). Per la costruzione della tangente ed altre questioni dello stesso genere vedi: V. JERABEK, *Sur la trisettrice de Maclaurin* (Mathésis, II Serie, T. IX, 1899).

di Maclaurin è la podaria di una parabola rispetto al punto dell'asse che dista dalla direttrice quanto il fuoco¹⁾.

G. Cramer ha insegnato²⁾ a costruire una curva più generale della trisettrice di Maclaurin; è quella che risolve il seguente problema locale: « Dati (fig. 14) il cerchio di centro C e raggio r ed un punto O del suo piano, si chiamino A, B gli estremi del diametro OC ; si conduca ad arbitrio da A la corda AM , da O la parallela a AM e da M la perpendicolare ad AB ; luogo del punto P in cui s'incrociano queste due ultime rette ». Presa la retta OC per asse delle x , e dette l la lunghezza del segmento OC e ω l'angolo di OP con OC , avremo

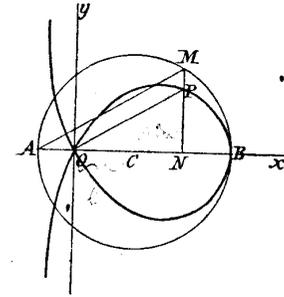


Fig. 14.

$$x = l + r \cos 2\omega, \quad \frac{y}{x} = \cos \omega;$$

eliminando ω si conclude essere

$$(4) \quad x(x^2 + y^2) = (r + l)x^2 - (r - l)y^2$$

l'equazione del luogo definito da Cramer. Mutando la direzione positiva dell'asse delle x questa diviene

$$x(x^2 + y^2) = (r - l)y^2 - (r + l)x^2$$

la quale coincide con la (2) supponendo $r = 2a, l = a$; dunque la costruzione del Cramer è, in particolare, applicabile alla trisettrice del Maclaurin.

48. Ma questa curva è generabile con un altro metodo che rientra in un procedimento generale di trasformazione delle figure che lo Schoute³⁾ ha studiato dandogli il nome di *trasformazione di Maclaurin*; eccone la definizione: « dati in un piano tre punti A, B, C ed una retta f , si faccia corrispondere ad ogni punto Q del piano stesso quel punto Q' della retta CQ tale che le rette QA e BQ' si taglino in un punto R della retta f ». Applicando questo metodo, opportunamente specializzato, ad un circolo si ottengono parecchie curve da noi già incontrate, come risulta da quanto segue:

¹⁾ J. NEUBERG, *La trisettrice de Maclaurin* (Mathésis, III Ser., T. VII, 1907).

²⁾ *Introduction*, p. 441.

³⁾ *Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes* (Archives néerlandaises, T. XX).

In tutti i casi seguenti a) b) c) d) 2) il punto C appartiene alla retta C_∞ e f

ipotesi di Newton

a) Il punto A stia sulla periferia del dato circolo, (fig. 15), B sia il punto all'infinito del corrispondente diametro, f sia il diametro perpendicolare e C ne sia il punto all'infinito; allora la trasformazione del Maclaurin diviene somigliante a quella che adoperammo per generare la versiera (v. la figura) ma è però diversa da questa; la curva ottenuta è di forma simile alla stessa, ma ne è differente (infatti è una pseudo-versiera); lo Schoute, che probabilmente la scambiò con questa, la chiama *curva d'Agnesi*¹⁾.

pag 93

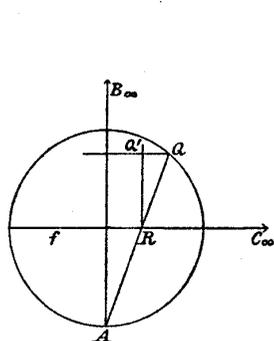


Fig. 15.

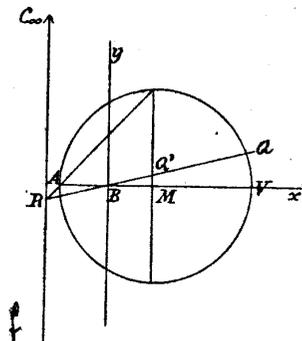


Fig. 16.

b) A stia ancora sulla periferia del dato cerchio (fig. 16) e B nel punto medio del corrispondente raggio A M, f sia perpendicolare a questo raggio e C stia all'infinito di f. Per dedurre l'equazione della curva trasformata prendiamo per origine B e per asse delle x la retta A B; se r è il raggio del dato circolo e x = h l'equazione della retta f, le coordinate di un punto qualunque Q del cerchio si possono scrivere sotto la forma $x = x + r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$. La retta A Q ha quindi per equazione

$$\left(x + \frac{r}{2}\right) \sin \frac{\omega}{2} + y \cos \frac{\omega}{2} = 0$$

e le coordinate di R sono

$$x = h, y = -\left[h + \frac{r}{2}\right] \operatorname{tg} \frac{\omega}{2};$$

se ne deduce

$$\frac{y}{x} = -\frac{2h+r}{2h} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$$



¹⁾ Mem. cit., p. 38 dell'estratto. La versiera otterrebbe supponendo che f fosse la tangente nel punto del circolo opposto a A.

come equazione della retta B R. Poichè l'equazione di C Q è in tal caso $x = \frac{r}{2} + r \cos \omega$, così per ottenere l'equazione del luogo del punto Q' basta eliminare ω fra le due ultime equazioni scritte; essa è dunque

$$(4) \quad y^2 = -\left[\frac{2h+r}{2h}\right]^2 \frac{x - \frac{3r}{2}}{x - \frac{r}{2}} x^2$$

Ricordando ora (cfr. n. 33) che la foglia di Cartesio di equazione $\xi^3 + \eta^3 = 3\alpha \xi \eta$ può rappresentarsi con l'equazione

$$y^2 = -\frac{1}{3} \frac{x - \frac{3\alpha}{\sqrt{2}}}{x + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}} x^2,$$

si vedrà che la (4) sarà una *foglia cartesiana* supposto

$$4h + r(3 + \sqrt{3}) = 0;$$

resta così ottenuta per la detta curva una nuova e semplice costruzione.

c) I punti A, B siano (fig. 17) estremi di un diametro del dato circolo, C stia all'infinito in direzione perpendicolare a A B e all'infinito stia pure f; allora la costruzione generale della trasformazione di Maclaurin si presenta come segue: preso sulla periferia del dato circolo il punto Q si conduca la corda A Q e da Q la perpendicolare ad A B; quest'ultima taglia la parallela condotta da B a A Q nel punto Q' corrispondente a Q. Si noti ora che, se quella parallela taglia la periferia del circolo dato per la seconda volta in Q'' ed in N la tangente a nel punto A, i triangoli rettangoli A N Q'', B Q' Q risulteranno eguali; si avrà in particolare B Q' = Q'' N; ciò basta per asserire che il luogo del punto Q' è una *cissoide di Diocle* avente B per cuspidi e a per asintoto.

ipotesi di Newton generalizzata

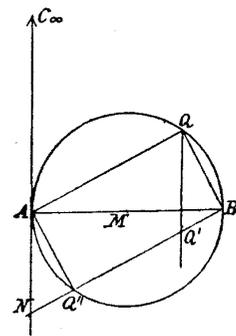


Fig. 17.

d) A sia un punto dato sulla circonferenza da trasformarsi, B ne sia il centro, C il punto all'infinito in direzione perpendicolare

a AB e f sia la retta all'infinito (fig. 18). Per ottenere il punto Q' che corrisponde a Q' si conduce AQ e da B la parallela a questa retta; la retta risultante è tagliata dalla perpendicolare condotta da Q ad AB nel punto Q' corrispondente a Q . Osserviamo che, detto V il secondo estremo del diametro AB , il triangolo AQV è rettangolo in Q , onde anche BQ' sarà perpendicolare a QV ; quindi il triangolo $Q'QV$ è isoscele. Condotta ora NH parallela a QV , essa sarà un'altezza del triangolo NBQ' . Ora $\text{ang. } BNH = \text{ang. } Q'QV$ perchè i loro lati sono paralleli, e $\text{ang. } HNQ' = \text{ang. } Q'VQ$ perchè alterni interni; siccome poi il triangolo $Q'QV$ è isoscele così $\text{ang. } Q'QV = \text{ang. } Q'Q'V$, epperò anche $\text{ang. } BNH = \text{ang. } HNQ'$. Il triangolo NBQ' è pertanto isoscele ed il luogo del punto Q' può costruirsi mediante il punto V e l'angolo retto VBN come indicammo nel n. 35. Il luogo di Q' è dunque in tal caso una *strofoide retta*.

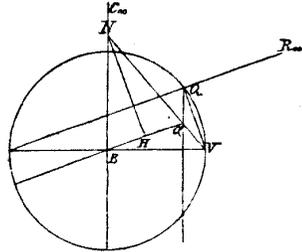


Fig. 18.

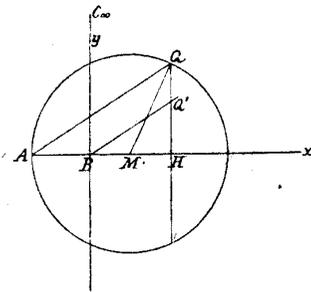


Fig. 19.

e) A sia un punto della data circonferenza, B il punto medio del corrispondente raggio AM , C il punto all'infinito in direzione perpendicolare e f la retta all'infinito (fig. 19). Presi AB come asse delle ascisse e B per origine, come coordinate di Q si possono assumere $x = \frac{r}{2} + r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Detto H il punto comune alle rette $Q'Q'$, AB , considerando i triangoli simili AQH , $BQ'H$ si ottiene

$$Q'H = \left[\frac{r}{2} + r \cos \varphi \right] \frac{r \sin \varphi}{r + r \cos \varphi} = r \frac{(\frac{1}{2} + \cos \varphi)}{1 + \cos \varphi} \sin \varphi,$$

onde il luogo del punto Q' può intendersi rappresentato dalle equazioni:

$$x = \frac{r(1 + 2 \cos \varphi)}{2}, \quad y = \frac{r(1 + 2 \cos \varphi)}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi};$$

introducendo le coordinate polari ρ, ω avremo:

$$\rho = r \frac{1 - 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}, \quad \omega = \text{arc tg } \frac{y}{x} = \text{arc tg } \left[\text{tg } \frac{\varphi}{2} \right] = \frac{\varphi}{2}$$

onde eliminando φ

$$\rho = \frac{r}{2} \frac{1 - 4 \cos^2 \omega}{\cos \omega}$$

Ricordando la (1) si conclude da ciò che il luogo del punto Q' è una *trisettrice di Maclaurin* ¹⁾.

49. Un'altra trisettrice di data più recente trae la propria origine da una proprietà della parabola osservata nel 1832 da E. Catalan ²⁾ e che ora esporremo.

Sia (fig. 20) F il fuoco e FB il raggio vettore di una parabola e BC la normale in B ; si completi il rettangolo $FBD C$ avente per un lato il segmento FB e per diagonale uscente da B quella normale e si consideri il luogo del punto D . Ora immaginando due raggi vettori consecutivi si vede che D è il punto di contatto della retta involupante. L'involuppo è dunque tale che la sua podaria rispetto al polo F è la data parabola; quell'involuppo, cioè il *luogo del punto D*, altro non è che la *prima podaria negativa della parabola rispetto al suo fuoco* (cfr. Libro VII, Cap. 7) ³⁾. Si conduca ora la retta FD e si chiamino G, E le intersezioni della retta BC con

¹⁾ Alla stessa conclusione giungesi più presto osservando che la costruzione indicata in e) è caso speciale di quella di CRAMER riferita nel numero precedente. Nuove relazioni fra la trisettrice di MACLAURIN e altre cubiche di cui già trattammo furono segnalate da A. PESCHKE negli articoli *Zur geraden Strophoide und zur Maclaurinschen Trisektrix* (Arch. f. Math. u. Phys., III Ser., T. 28, 1919) e *Zur Maclaurinschen Trisektrix, zur Kissoide und zur Versiera* (Unterr. Bl. f. Math. u. Naturw., 1920).

²⁾ V. una lettera di questo geometra in *Journ. de math. spéc.*, II Serie, T. IX, 1885, p. 229-233.

³⁾ Siccome questa curva fu considerata da TSCHIRNHAUSEN (Acta erud., 1690, p. 68-73) e dal DE L'HÔPITAL (*Analyse des infiniment petits*, Paris 1696, p. 109-112) così fu chiamata *cubica di Tschirnhausen* (ARCHIBALD, *The cardioide and some related curves*, Diss. Strassburg 1900) e *cubica di de l'Hopital* (CAZAMIAN, *Application de la méthode des polaires réciproques à des théorèmes relatifs aux cubiques unicursales*, Nouv. Ann. de mathém., III Ser., T. XIII, 1894); il nome di *ortogenide* venne suggerito dall'ALLÈGRET (Id., *Question 1266*, risolta dal FAUQUENBERG, III Ser., T. XIV, 1895; cfr. anche id. II Ser., T. V, p. 27). Come luogo dei centri dei cerchi che passano per il centro di una parabola e sono ad essa tangenti, la s'incontra nell'articolo di E. FREUND, *Ueber eine Kurve dritter Ordnung* (Lotos, Nuova Ser., T. XIV, Prog. 1904).

FD e con l'asse AH della parabola; si tracci finalmente BK parallela a AH e si ponga per brevità

$$\text{ang } BFE = \theta, \text{ ang } DFE = \omega$$

Si ha per una nota proprietà della parabola: $\text{ang } FBE = \text{ang } EBK$; d'altra parte $\text{ang } EBK = \text{ang } BEF$ perchè alterni interni, dunque $\text{ang } FEB = \text{ang } FBE$. Il triangolo BEF è perciò isoscele; dunque $\text{ang } FBE = \frac{\pi - \theta}{2}$. Ma è isoscele anche il triangolo

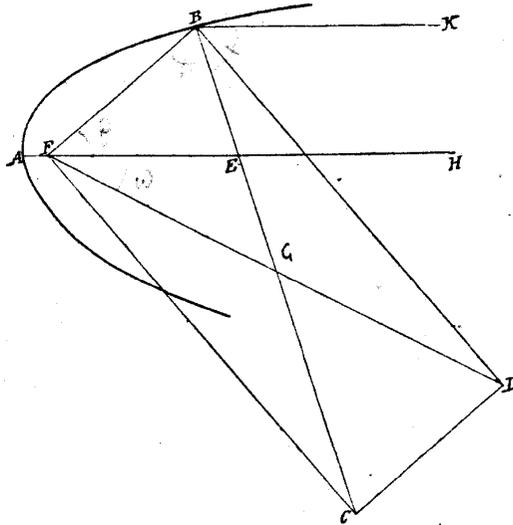


Fig. 20.

BFG , onde $\text{ang } GFB = \text{ang } GBF$ ossia $\theta - \omega = \frac{\pi - \theta}{2}$ o anche $= \frac{\pi - \omega}{3}$; dunque $\text{ang } BFD = \frac{1}{3} \text{ ang } AFD$. Questa relazione rende manifesto che il luogo del punto D può servire come curva trisettrice di un angolo qualunque; disposto infatti quest'angolo col vertice in F e con un lato lungo FA , sia \bar{D} una delle intersezioni dell'altro suo lato con il luogo anzidetto; sia \bar{B} il punto della parabola corrispondente al punto \bar{D} ; l'angolo $F A \bar{D}$ sarà il domandato. Il luogo del punto D merita il nome di *trisettrice del Catalan*. Per trovarne l'equazione supponiamo la data parabola rappresen-

tata dall'equazione polare $\rho = \frac{p}{1 - \cos \omega}$; allora l'equazione della retta BD , il cui inviluppo è la trisettrice del Catalan, sarà $x \cos \omega + y \sin \omega = \frac{p}{1 - \cos \omega}$. Differenziandola avremo $-x \sin \omega + y \cos \omega = -\frac{p \sin \omega}{(1 - \cos \omega)^2}$, donde la seguente rappresentazione parametrica della curva

$$x = p \frac{\cos \omega - \cos 2\omega}{(1 - \cos \omega)^2} = \frac{p}{2} \frac{\sin \frac{3\omega}{2}}{\sin^3 \frac{\omega}{2}}$$

$$y = p \frac{\sin \omega - \sin 2\omega}{(1 - \cos \omega)^2} = -\frac{p}{2} \frac{\cos \frac{3\omega}{2}}{\sin^3 \frac{\omega}{2}}$$

Da queste equazioni seguono queste altre:

$$\frac{4(x^2 + y^2)}{p^2} = \frac{1}{\sin^6 \frac{\omega}{2}}, \quad \frac{x}{y} = -\text{tg} \frac{3\omega}{2}$$

ossia, introducendo le coordinate polari ρ, θ ,

$$\frac{2\rho}{p} = \frac{1}{\sin^3 \frac{\omega}{2}}, \quad \cot \theta = -\text{tg} \frac{3\omega}{2},$$

d'onde, eliminando ω si arriva all'equazione polare della curva

$$(5) \quad \rho^{\frac{1}{3}} \cos \left[\frac{\pi - \theta}{3} \right] = \left[\frac{p}{2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

La corrispondente equazione cartesiana

$$(5') \quad (2p + x)^3 = \frac{27}{2} p (x^2 + y^2).$$

prova che la curva stessa è di terzo ordine, circolare e simmetrica rispetto all'asse della parabola; essa passa una volta pel punto $(-\frac{p}{2}, 0)$ e due pel punto $(4p, 0)$; le tangenti in quest'ultimo fanno con gli assi angoli $= \pm \frac{\pi}{3}$; il punto all'infinito dell'asse è un flesso con la retta all'infinito per corrispondente tangente; i punti $(p, \pm p)$ sono punti di culminazione; ecc.

50. Di origine ancora più recente è un'altra curva che grazie al suo uso, chiamiamo *trisettrice del Longchamps*¹⁾; l'Astor la chiama invece²⁾, poco opportunamente, *trifoglio equilatero*, mentre

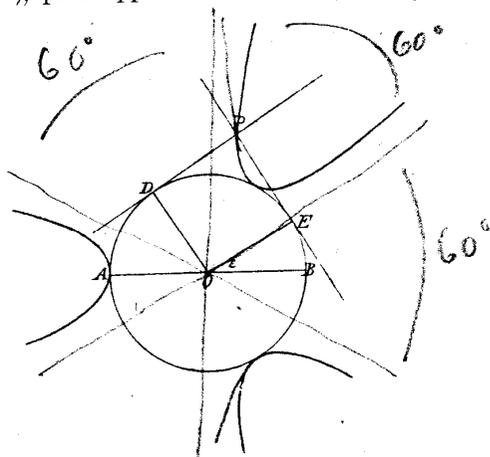


Fig. 21. — Trisettrice del de Longchamps.

il Bellavitis, tenendo conto della sua forma, le aveva dianzi dato il nome di *tricratere regolare*³⁾. Essa si può costruire mediante un cerchio (di centro O e raggio r) di cui sia dato (fig. 21) un diametro AB ; prendendo sulla periferia di esso due archi AD, BE il secondo dei quali sia doppio del primo; conducendo le tangenti nei loro estremi D, E il loro punto d'intersezione P apparterrà alla nuova trisettrice.

¹⁾ G. DE LONGCHAMPS, *Sur une trisectrice remarquable* (Mathésis, T. VIII, 1888).

²⁾ V. una lettera inserita nella T. XIV (1894) della III Serie delle *Nouv. Ann.*, p. 385; dalla quale togliemmo la maggior parte delle riferite proprietà della curva.

³⁾ *Su alcune curve di facile costruzione*, n. 22 (Mem. della Soc. It. delle Scienze, III Serie, T. III, 1879).

Per trovarne l'equazione assumiamo O per polo e OB per asse polare; posto ang $BOE = \varepsilon$, sarà ang $AOD = 2\varepsilon$; chiamato quindi ω l'angolo POB sussisterà la relazione $\pi - 3\varepsilon = 2(\omega - \varepsilon)$ onde $\varepsilon = \pi - 2\omega$ e ang $POE = \omega - \varepsilon = 3\omega - \pi$. Il triangolo rettangolo EOP dà quindi $\rho = \frac{r}{\cos(3\omega - \pi)}$;

$$(6) \quad \rho = -\frac{r}{\cos 3\omega}$$

è dunque l'equazione polare della trisettrice del Longchamps; la sua equazione cartesiana è pertanto

$$(7) \quad x(x^2 - 3y^2) + r(x^2 + y^2) = 0$$

Anche questa trisettrice è una cubica razionale; O ne è un punto isolato; appartengono ad essa i punti all'infinito delle rette facenti col diametro AB gli angoli $\left[0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ le bisettrici degli angoli formati dalle rette condotte per O in queste direzioni sono tre assi di simmetria della curva. I punti all'infinito della curva sono flessi; le corrispondenti tangenti costituiscono un triangolo equilatero essendo le loro equazioni:

$$x + \frac{r}{3} = 0, \quad x \pm y\sqrt{3} - \frac{2}{3}r = 0.$$

L'Hessiana della curva in questione ha per equazione $3x(x^2 - 3y^2) + r(x^2 + y^2) = 0$, onde è una curva della stessa specie. La sua polare reciproca rispetto al cerchio di centro O e raggio R ha per equazione $\rho = \frac{R^2}{r} \cos 3\omega$ onde è una speciale rodonea (v. Lib. V, Cap. 8).

La sua Cayleyana è un cerchio¹⁾. Finalmente, siccome la (7) può scriversi come segue

$$y = x \sqrt{\frac{x+r}{3x-2}},$$

così (v. n. 16) la curva è quadrabile algebricamente.

Chiuderemo questo Capitolo notando²⁾ che per trisecare un angolo può anche servire la curva definita come segue: « Dato un

¹⁾ CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorles. über Geometrie*, I Bd. (Leipzig 1876), p. 517.

²⁾ Cfr. G. LORIA, *Une nouvelle (?) trisectrice* (Mathésis, T. 39, 1925).

no
 $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6$

segmento BC e la retta AD che lo biseca ortogonalmente, si conduce per C una trasversale arbitraria a segare AD in E ; essa è incontrata in P dalla retta bisecante ortogonalmente il segmento BE ; la curva in questione è il luogo geometrico di P .

Assunto C per origine e la retta CB per asse delle x , se $BC = 2l$, come equazioni delle due rette segantisi in P si possono prendere le seguenti

$$\frac{x}{y} = \frac{l}{\lambda}, \quad 2lx - 2\lambda y = 3l^2 - \lambda^2,$$

donde eliminando il parametro λ

$$y^2 = x^2 \frac{2x - 3l}{2x - l}.$$

La nuova curva è, dunque, una cubica simmetrica rispetto alla retta BC , avente C per punto doppio, ecc.

CAPITOLO XIV

La cubica duplicatrice e la foglia parabolica.

51. Mentre le curve studiate nel Cap. precedente possono servire a dividere un angolo in tre parti eguali, quella che definiremo ora è suscettibile di uso nel problema della duplicazione del cubo; appunto per ciò G. de Longchamps l'ha chiamata

cubica duplicatrice; ecco la costruzione che egli ne ha indicata¹⁾: « Date (fig. 22) due rette r, r' fra loro perpendicolari ed un punto O della seconda, si conduce da O una trasversale arbitraria a tagliare r in A ; da A si conduce la perpendicolare a quella trasversale finchè incontri r' in B e da B la parallela a r , sinchè tagli la trasversale stessa in P ; il luogo geometrico del punto P è una cubica duplicatrice. Per trovarne l'equazione scegliamo O per polo e r' per asse polare; dettá l la distanza fra il punto O ed il punto $C \equiv r r'$, avremo:

$$OA = \frac{l}{\cos \omega}, \quad OB = \frac{OA}{\cos \omega}, \quad OP = \frac{OB}{\cos \omega};$$

¹⁾ *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris 1890), p. 92-94. La stessa curva s'incontra a pag. 54 delle *Entdeckungen in der höheren Geometrie* (Oldenburg, 1809) dell'ULHORN col nome di Toxoide.

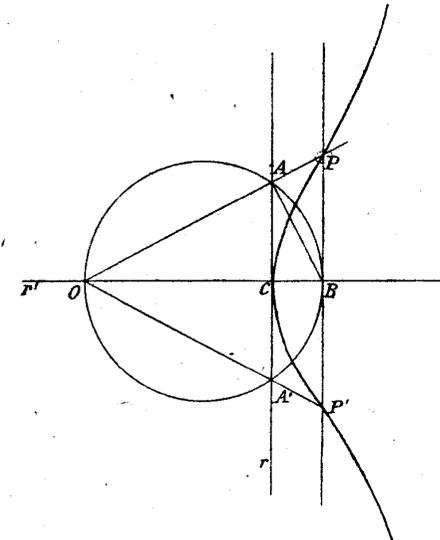


Fig. 22. — Cubica duplicatrice.

essendo $OP = \rho$ se ne conclude

$$(1) \quad \rho = \frac{l}{\cos^3 \omega}.$$

Corrispondentemente l'equazione cartesiana della curva è

$$(2) \quad x^3 = l(x^2 + y^2)$$

La curva di cui ci occupiamo è pertanto una cubica simmetrica rispetto all'asse Ox , avente un flesso all'infinito sull'asse delle y , la retta all'infinito essendo la corrispondente tangente; il punto O è un punto isolato, le corrispondenti tangenti sono rette isotrope; è la *parabola punctata* di Newton. La curva può anche rappresentarsi con le due equazioni

$$(3) \quad x = l(1 + \lambda^2), \quad y = l(\lambda + \lambda^3);$$

la condizione di collinearità dei tre punti (α) (β) (γ) essendo in conseguenza

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 1,$$

si vede che la curva possiede al finito due flessi reali aventi per comune ascissa $x = \frac{4l}{3}$. Osserviamo ancora come sia agevole determinare i punti della curva aventi una data ascissa OB ; basta infatti descrivere una circonferenza sul diametro OB , determinarne le intersezioni A, A' con r e quindi proiettare in P, P' questi punti da O sulla retta condotta da B parallelamente a r .

52. Lo stesso geometra che ha concepito la cubica duplicatrice, ha considerata un'altra curva del medesimo ordine di cui va fatto cenno: « Date due rette r, r' fra loro perpendicolari ed un punto O del loro piano (fig. 23), si conduce da O una trasversale arbitraria a segare r in P ; da questo punto si conduce la perpendicolare OP e se ne determina la intersezione Q con r' ; poi da Q si guida la parallela a OP e se ne trova la intersezione R con r ; finalmente da R la perpendicolare RM ad OP ; luogo del punto M »¹⁾. Per determinarne l'equazione prendiamo per assi delle x e delle y le parallele condotte da O a r' e r ; detti S il punto rr' , A, B le tracce di r su Og e di r' su Oy , a e b le coordinate OA, OB di S ; otterremo:

$$OP = \frac{a}{\cos \omega}, \quad AP = a \operatorname{tg} \omega, \quad PS = a \operatorname{tg} \omega - b; \quad PQ = -\frac{b - a \operatorname{tg} \omega}{\cos \omega},$$

¹⁾ Ivi, p. 120-121.

$$QR = PQ \operatorname{tg} \omega = -\frac{\operatorname{tg} \omega (b - a \operatorname{tg} \omega)}{\cos \omega}$$

e poichè $\rho = OM = OP - QR$, l'equazione polare del luogo geometrico del punto M è

$$(4) \quad \rho \cos \omega = a + \operatorname{tg} \omega (b - a \operatorname{tg} \omega).$$

In conseguenza la sua equazione cartesiana è:

$$(5) \quad x^3 = a(x^2 - y^2) + bxy;$$

in particolare, supposto $b = 0$,

$$(6) \quad x^3 = a(x^2 - y^2).$$

La (5) rappresenta la *foglia parabolica obliqua*, la (6) la *foglia parabolica retta*. La prima (che corrisponde al caso più generale) è una cubica avente per punto doppio O (*parabola nodata* di Newton), essendo le corrispondenti tangenti tra loro perpendicolari essa passa tanto per S quanto pel punto all'infinito dell'asse delle y ; anzi questo punto è un flesso con la retta all'infinito per corrispondente tangente. La (5) si può surrogare con le due equazioni

$$(7) \quad x = (1 - \lambda^2)a + \lambda b, \quad y = (\lambda - \lambda^3)a + \lambda^2 b,$$

rappresentazione parametrica da cui si trae la seguente condizione di collinearità di tre punti (α) , (β) , (γ) :

$$(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + 1)a^2 - (a + \beta + \gamma)ab + b^2 = 0;$$

i parametri dei flessi al finito della curva sono, quindi, radici dell'equazione

$$(3\omega^2 + 1)a^2 - 3\omega ab + b^2 = 0,$$

onde i flessi stessi sono immaginari, come poteva prevedersi (v. n. 18).

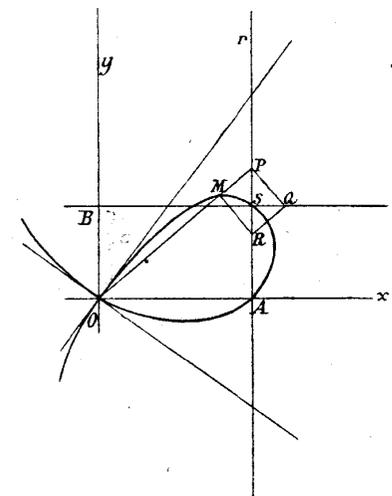


Fig. 23. — Foglia parabolica.

Quando $b = 0$ la curva gode inoltre la proprietà di essere simmetrica rispetto all'asse delle y .

Le due foglie paraboliche appartengono alla classe delle cubiche aventi un flesso all'infinito con la retta all'infinito per corrispondente tangente; queste sono suscettibili della seguente rappresentazione parametrica

$$x = f_1(\lambda), y = f_2(\lambda),$$

f_1 e f_2 essendo polinomi razionali interi; siffatte curve appartengono all'estesissima categoria di curve algebriche che A. Brill ha chiamate *razionali-intere*¹⁾.

Le cubiche di cui narrammo in questo Libro la storia e stabilimmo le proprietà più cospicue sono le uniche a noi note che riceveranno un nome speciale²⁾; altre notevoli incontreremo più innanzi trattando di curve più generali (v. Libri V e VII); altre pure per qualche motivo notevoli vennero trovate nel corso di svariate ricerche, ma non riceveranno nomi speciali; tale è quella di equazione

$$x(x^2 + y^2) = a^2 y$$

che s'incontra nel carteggio tra Leibniz e Huygens³⁾; tale quello di

¹⁾ Mathem. Annales, T. XVI, 1880, p. 348.

²⁾ Volendo essere completi converrebbe aggiungere le seguenti di cui il DE LONGCHAMPS si è occupato nei sottoindicati passi del citato *Essai*:

p. 113-114. Cubiche semplici:

$$\begin{aligned} x^2 &= h y^2; \text{ cubica semplice parabolica con cuspidè} \\ x^3 &= h^2 y; \text{ cubica semplice parabolica a centro} \\ x y^2 &= h^2; \text{ cubica semplice iperbolica} \end{aligned}$$

p. 116. Cubica mista: $y^2 x = h(x^2 + y^2)$

p. 119. Cubica concoidale:

$$\left(\frac{y^2}{x-h}\right) = \frac{x}{h-2x}$$

p. 119. Concoide circolare:

$$(x-y)(x^2 + y^2) - h(x^2 + y^2 - xy) = 0.$$

Lo stesso geometra ha considerate altrove (*Cours de problèmes de géométrie analytique*, T. I, Paris 1898), p. 149 e 213, la *cubique serpentine* e la *serpentine circulaire*.

³⁾ La parte della corrispondenza fra questi geometri che si riferisce a tale curva è così importante che non sappiamo trattenerci dallo spendervi intorno qualche parola.

Come è noto Huygens non fu tra i credenti della prima ora nel calcolo differenziale inventato dal suo antico discepolo Leibniz; e, per misurare la portata del « methodus tangentium inversa » di cui Leibniz vantava

equazione

$$y^2 = \frac{a^2 x}{a + 2x}$$

la singolare potenza, propose a questi di trovare le curve le cui sottangenti sono espresse risp. da

$$\frac{y^2}{2x} - 2x, \frac{2x^2 y - a^2 x}{3a^2 - 2xy}$$

(v. la lettera del 24 agosto 1690 inserita in *Leibniz ed. Gerhardt*, T. II, p. 46). Nella risposta (3-13 ottobre 1690; *op. cit.*, p. 50) Leibniz dice che la seconda delle curve richieste ha (quando si supponga per semplicità $a = 1$) per equazione $\frac{x^3 y}{h} = b^{2x}$, h essendo una costante arbitraria e b il numero

avente per logaritmo l'unità. Huygens non fu soddisfatto da questa soluzione ed in data 18 novembre 1690 replicava (*op. cit.*, p. 35-56): « Je ne vous avois pas envoyé les deux questions des lignes courbes pour vous donner de la peine en cherchant les solutions, mais croiant que vous auriez une méthode preste pour trouver les courbes par la propriété de leurs Tangentes, ou pour déterminer quand cela se peut ou non. Je commence à croire maintenant que cela n'est point, puisque le courbe dans la quelle AB estant x , et sa perpend. BC , y , on trouve BD , distance du concours de la tangente égale a $\frac{2xy - a^2 x}{3a - 2xy}$; cette courbe dis-je a pour équation qui exprime

sa nature, $x^3 + xxy = aay$ » (cfr. W. GAEDECKE, *Ueber die Huygenssche Kurve* $x(x^2 + y^2) = a^2 y$; Arch. f. Math. u. Phys., III Ser., T. 25, 1916). Huygens aggiunge una verificaione di tale asserto ed una costruzione della curva. La critica di Huygens sia per l'autorità della provenienza, sia perchè colpiva in pieno petto l'invenzione leibniziana, non poteva rimanere nè rimase senza replica da parte del glorioso emulo di Newton. Il quale infatti della lettera del 14-24 novembre 1690 (vol. cit., p. 62-63) spiega la discordanza delle proprie conclusioni da quelle ottenute da Huygens col l'aver presa la sottangente con segno diverso; il che egli ripete in una lettera posteriore (del 25 novembre 1690; vol. cit., p. 64-65); ove di più è assegnata come equazione della curva risoltrice del primo dei problemi di Huygens la seguente: $2r^4 x^2 = r^4 y^2 + a^2 y^4$, r e a essendo costanti arbitrarie. Neppure questa era la equazione voluta da Huygens, che è invece $2a^2 x^2 = a^2 y^2 + y^4$ (lettera del 19 dicembre 1690; vol. cit., p. 68-69); ma quella a questa riduce sostituendo a a $\frac{r^2}{a}$.

Per giudicare la difficoltà dei problemi proposti da Huygens, dei mezzi necessari alla loro risoluzione e della generalità dei risultati conseguiti, trattiamoli con i metodi moderni. Osserviamo perciò che il secondo di quei problemi, a seconda del segno assunto per la sottangente, si traduce nell'una o nell'altra delle seguenti equazioni differenziali:

$$-y dx = \frac{2x^2 y - a^2 x}{3a^2 - 2xy} dy, \quad y dx = \frac{2x^2 y - a^2 x}{3a^2 - 2xy} dy$$

ossia

$$(3a^2 - 2xy)y dx + (2xy - a^2)x dy = 0,$$

$$(3a^2 - 2xy)y dx + (a^2 - 2xy)x dy = 0.$$

che è il luogo dei fuochi delle iperboli aventi comuni un vertice ed un asintoto¹⁾; e può aggiungersene una che trae origine dalla rappresentazione grafica di una funzione di variabile complessa²⁾.

Applicando ora l'identità

$$\frac{M dx - N dy}{Mx - Ny} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{Mx + Ny}{Mx - Ny} d \log xy + d \log \left(\frac{x}{y} \right) \right\}$$

esse si trasformano nelle altre:

$$\frac{1}{2} \frac{(d xy)}{xy [a^2 - xy]} + d \log \left(\frac{x}{y} \right) = 0; \left[1 - \frac{xy}{a^2} \right] \frac{d(xy)}{xy} + \frac{1}{2} d \log \left(\frac{x}{y} \right) = 0$$

donde, mediante quadrature

$$x^3 = k xy^2 - k a^2 y, \quad x^3 y = h^2 e^{\frac{2ny}{a^2}};$$

equazioni di cui la prima, per $k = -1$, coincide con quella di Huygens, mentre la seconda non differisce da quella di Leibniz. — Quanto al primo dei problemi di Huygens, conducendo esso a curve di quart'ordine, esso è di pertinenza del prossimo Libro. Osserviamo invece qui, offrendosene occasione opportuna, che in tempi assai più vicini J. PORRO, studiando alcune questioni di matematica applicata, incontrò certe linee da lui chiamate *courbes atuptiques* (C. R., T. XXXIV, 1852, p. 173) e che sono definite in modo somigliante, col mezzo cioè dell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + xy^2 + 2 \rho y \sqrt{x^2 + y^2} - \lambda^2}{y^3 + yx^2 + 2 \rho x \sqrt{x^2 + y^2} - \lambda^2}$$

¹⁾ V. Questione al n. 61 proposta da H. BROCARD in *Progreso*, T. II, 1891, p. 128 e risolta da A. SCHIAPPA-MONTEIRO (vol. cit., p. 300); ed alla quale si riferiscono una nota del proponente (*Progreso*, T. III, 1893, p. 32) ed un esteso lavoro dello stesso SCHIAPPA-MONTEIRO (Ivi, p. 201-209 e p. 225-234).

²⁾ STÖCKLY, *Eigenschaften der aus rationalen ganzen Funktionen dritten Grades entspringenden Kurven* (Arch. f. Math. u. Phys., T. 56, 1874).

LIBRO III.

CURVE DEL QUART' ORDINE.

CAPITOLO I

Generalità. — Classificazione.

53. Le curve di quart'ordine fanno il loro ingresso nella letteratura matematica quasi contemporaneamente a quelle del terzo e circa nello stesso modo, cioè coll'inviare, quali loro rappresentanti, alcune curve in vario modo specializzate. Ma mentre la teoria generale delle cubiche conta ormai tre secoli di vita, quella delle quartiche può dirsi cominciata cento anni or sono; e mentre quella ha raggiunto un tale grado di sviluppo da potere essere considerata come una delle più perfette di tutta la geometria, la teoria delle curve del quart'ordine comprende bensì qualche splendido capitolo, ma offre tuttora delle lacune deplorabili. Così, se le investigazioni inaugurate da Steiner¹⁾ e Hesse²⁾ e proseguite da tanti illustri geometri posteriori fecero conoscere nei più minuti particolari la configurazione formata dalle 28 tangenti doppie di una curva generale del quart'ordine³⁾, una nube di mistero avvolge tuttora le relazioni geometriche che intercedono fra i suoi 24 flessi⁴⁾; così, se molta

¹⁾ *Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten* (G. di Crella, T. XLIX, 1855).

²⁾ *Ueber die Doppeltangenten der Curven vierten Grades* (Ivi).

³⁾ Cfr. H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, II Bd. (II Aufl., 1899), pagina 419 e segg. Certe quartiche danno luogo a speciali proprietà delle tangenti doppie; tale è la quartica $a_{11} x_1^4 + a_{22} x_2^4 + a_{33} x_3^4 + 2 a_{23} x_2^2 x_3^2 + 2 a_{31} x_3^2 x_1^2 + 2 a_{12} x_1^2 x_2^2 = 0$ studiata nella nota di ELSIE JEANNETTE. Mc FARLAND, *A special quartic curve* (Public. Univ. of California, volume I, 1923).

⁴⁾ Era stato creduto che ogni conica passante per cinque flessi di una quartica cubica ne contenesse altri tre (J. GRASSMANN, *Zur Theorie der Wendepunkte, besonders der Curven vierter Ordnung*, Diss. Berlin, 1875); ma la cosa fu posta in dubbio sperimentalmente da F. KLEIN (Math. Ann., T. X, 1876, p. 397) e fu mostrata errata da A. TERRACINI, il quale mostrò che sei flessi di una quartica non stanno mai su una conica (*Sui punti di flesso delle quartiche*

luce scaturì dall'applicazione a quelle curve di funzioni trascendenti, resta ancora da completare lo studio delle proprietà invariantive delle forme ternarie biquadratiche; ben è vero che già cinquanta anni or sono il GORDAN ha stabilito il sistema completo delle forme invariantive di una tal forma¹⁾; ma egli è morto prima di averne fatto conoscerne la composizione.

Tuttavia alcune delle forme che ne fanno parte sono note da gran tempo e vanno qui ricordate. Se

$$(1) \quad f = \sum_{ijk} a_{ijk} x_i x_j x_k = a^4_x = b^4_x = \dots$$

è il primo membro dell'equazione di una quartica generale, sotto forma effettiva e sotto forma simbolica, posto

$$(2) \quad I = (ab\xi)^4, \quad J = (bc\xi)^2 (ca\xi)^2 (ab\xi)^2$$

le due equazioni $I = 0$ e $J = 0$ rappresenteranno due curve, la prima di quarta classe e la seconda di sesta; il principio di trasporto di Clebsch conduce subito a concludere che quella è involupata dalle rette seganti la curva in quaterne equianarmoniche, e questa dalle rette che la tagliano in quaterne armoniche. L'equazione

$$I^3 - 6I^2 = 0,$$

non è poi che l'equazione tangenziale della curva; onde questa è dodicesima classe, come esigono le formole di Plücker. La funzione

$$(3) \quad S = (bcd)(acd)(abd)(abc) a_x b_x c_x d_x$$

eguagliata a 0 rappresentata invece una quartica covariante alla data ed altrettanto generale; è stato anzi notato²⁾ che come ad ogni quartica $f = 0$ ne corrisponde una seconda $S = 0$, viceversa il primo membro di ogni quartica può essere sempre considerata come covariante S di 36 determinate forme ternarie biquadratiche. Un altro covariante (e questo del sest'ordine) si ottiene considerando la Hessiana di f ; mentre un contravariante (della diciottesima classe) è dato dal primo membro dell'equazione della Cayleyana: questa curva ha 21 tangenti quaduple, le quali assorbono tutte

piane generali, Atti Acc. Torino, T. 59, 1924). Per quartiche speciali si presentano notevoli distribuzioni dei flessi (v. A. TERRACINI, *Su alcune particolari quartiche di genere terzo*, Rend. Acc. Lincei, T. 25, 1° Sem., 1916).

¹⁾ Cfr. CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, T. I (Leipzig 1876), p. 274, nota.

²⁾ G. SCORZA, *Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali* (Math. Ann., T. LII, 1899).

le singularità tangenziali della curva¹⁾. Fra gli invarianti della forma f merita di essere particolarmente notato, oltre il discriminante, il seguente:

$$(4) \quad A = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1112} & a_{1122} & a_{1113} & a_{1123} & a_{1133} \\ a_{1211} & a_{1212} & a_{1222} & a_{1213} & a_{1223} & a_{1233} \\ a_{2211} & a_{2212} & a_{2222} & a_{2213} & a_{2223} & a_{2233} \\ a_{1311} & a_{1312} & a_{1322} & a_{1313} & a_{1323} & a_{1333} \\ a_{2311} & a_{2312} & a_{2322} & a_{2313} & a_{2323} & a_{2333} \\ a_{3311} & a_{3312} & a_{3322} & a_{3313} & a_{3323} & a_{3333} \end{vmatrix},$$

del quale indicheremo presto il significato geometrico.

Una questione sulle quartiche che venne da tempo affrontata ed in varii modi risolta è quella della loro classificazione. Malgrado si presentasse come un problema complicato e di soluzione laboriosissima, sin dalla prima metà del secolo XVIII esso fu oggetto di studio da parte di parecchi geometri, alla testa dei quali troviamo l'Abate BRAGELOGNE. Questi in due lunghe memorie²⁾ espose il metodo per effettuare la determinazione dei varii tipi sotto cui si possono raggruppare le curve del quart'ordine, metodo che consiste in ultima analisi nella riduzione dell'equazione di quarto grado fra le coordinate ortogonali di un punto a certe forme canoniche. Ma il poderoso lavoro in cui dovevano essere completamente svolte siffatte idee non vide mai la luce. Morto il Bragelogne il problema attorno a cui egli aveva spese tante fatiche venne ripreso contemporaneamente da due geometri ben più famosi: L. EULERO³⁾ e G. CRAMER⁴⁾, il primo senza conoscere le fatiche dell'Abate francese, il secondo citandole esplicitamente⁵⁾. Le classificazioni proposte da questi matematici consistono nell'assumere come principale criterio di classificazione il modo in cui la curva si comporta all'infinito. In conseguenza tutte le curve del quart'ordine reali si ripartiscono in nove classi⁶⁾ caratterizzate dalla seguente struttura del gruppo formato dai quattro punti all'infinito:

¹⁾ E. LAGUERRE, *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie plane* (C. R. T. 78, 1874; *Oeuvres de Laguerre*, T. II, 1905, p. 375); E. BERTINI, *Le tangenti multiple della Cayleyana di una quartica piana generale* (Atti dell'Acc. di Torino, T. XXXII, 1896).

²⁾ *Examen des lignes du quatrième ordre ou courbes du troisième genre* (Mem. de l'Acad. des Sciences, Paris 1730). Veggasi anche la nota *Sur les lignes du quatrième ordre* (Hist. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1732).

³⁾ *Introductio in analysin infinitorum*, T. II (Lausanne, 1748), pagine 139-149.

⁴⁾ *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Génève 1750), p. 369-399.

⁵⁾ Una terza classificazione deve a E. WARING (*Miscellanea analytica*, Cantabrigiae 1762); essa abbraccia 12 casi principali e non meno di 84551 specie.

⁶⁾ Veramente di consueto si ripartiscono in otto soltanto; ma ci sembra che quelle segnate qui appresso coi numeri VI e VII vadano tenute distinte.

I. quattro punti immaginari a coppie coniugati; II. due punti reali e distinti e due immaginari coniugati; III. quattro punti reali e distinti; IV. due punti immaginari coniugati e due reali e coincidenti; V. due punti reali e distinti e due reali e coincidenti; VI. due punti doppi reali; VII. due punti doppi immaginati coniugati; VIII. un punto semplice ed uno triplo; IX. un punto quadruplo.

Ognuna di queste classi abbraccia parecchi generi; Eulero e Cramer ne segnarono un numero assai considerevole, limitandosi però piuttosto ad avvertirne la possibilità che a dimostrare l'effettiva esistenza delle curve corrispondenti. Tale complemento indispensabile venne somministrato da J. Plücker¹⁾, il quale, inoltre, mediante una enumerazione esauriente, fece giungere a 152 il numero dei generi distinti di quartiche piane e di ciascuno trovò l'equazione canonica.

Siffatto procedimento di classificazione, avendo come cardine un principio che mal si accorda con le idee dominanti la geometria, dopo il trionfo dei metodi proiettivi, è oggi caduto ormai in disuso ed in dimenticanza. E si accorda invece la preferenza ad uno dei due seguenti.

Il primo ha come fondamento la considerazione del genere di una curva e quindi del numero e della natura dei punti singolari che essa possiede. In corrispondenza tutte le quartiche si distribuiscono in quattro grandi categorie, secondo che hanno per genere 3, 2, 1, o 0; la prima abbraccia le curve esenti da punti multipli; la seconda le curve dotate di un punto doppio o di una cuspide²⁾; la terza le curve con due punti di molteplicità due (sono quartiche

¹⁾ *Theorie der algebraischen Curven* (Bonn 1839), p. 136-149. Nell'antecedente *Énumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies* (G. di Liouville, T. I, 1836) lo stesso geometra non aveva contemplati che 135 generi. V. anche BEERS, *Tabulae curvarum quartis ordinis* (Bonn 1852).

²⁾ A questa classe appartiene la curva rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione

$$y^4 - x^4 + ay^2 + bx^2 = 0,$$

incontrata dal BRAGELOGNE e detta dai geometri francesi *curva del diavolo*; l'origine ne è un nodo od un punto isolato seondochè $a \leq 0$; i punti all'infinito delle bisettrici dell'angolo degli assi ne sono punti semplici. È stato particolarmente considerato (v. G. CRAMER, *Introduction à la théorie des lignes courbes alg.*, Genève 1750, p. 19; MOIGNO, *Leçons de calcul diff. et de calcul intégr.*, T. I, Paris 1860, p. 222; BRIOT et BOUQUET, *Leçons de géom. analytique*, p. 367; e NIEVENGLAWSKI, *Cours de géom. analytique*, T. II, Paris 1895, p. 73) il caso seguente

$$y^4 - x^4 - 96 a^2 y^2 + 100 a^2 x^2 = 0.$$

La curva del diavolo non sembra essere notevole che per la sua forma; v. su di essa la nota di P. R. RIDER, *The Devil's curve and Abelian integrals* (Amer. math. Monthly, T. 34, 1927). Secondo E. BOREL (ivi) il nome di detta linea perviene dal giuoco detto *diavolo*, formato da due trottole.

ellittiche); l'ultima le curve con tre punti doppi (nodi, cuspidi o punti isolati) od un punto triplo (sono tutte quartiche razionali).

Raggruppando le quartiche dotate soltanto di singolarità ordinarie in base alle loro caratteristiche plückeriane si ottiene la seguente tabella¹⁾:

Genere	Classe	Punti doppi	Cuspidi	Tangenti doppie	Flessi
3	12	0	0	28	24
2	10	1	0	16	18
2	9	0	1	10	16
1	8	2	0	8	12
1	7	1	1	4	10
1	6	0	2	1	8
0	6	3	0	4	6
0	5	2	1	2	4
0	4	1	2	1	2
0	3	0	3	1	0

Tale classificazione si può spingere ulteriormente considerando i moduli delle singole curve considerate o le curve con singolarità superiori²⁾.

¹⁾ Applicando la legge di dualità a questa tabella se ne ottiene altra riassumendo la classificazione delle curve di quarta classe. Giova qui osservare che al criterio di classificazione, essenzialmente proiettivo, fondato sulla considerazione delle singolarità ordinarie e sull'applicazione delle formole di Plücker, altro ne fu suggerito ed ampiamente svolto da H. M. JEFFERY. Esso si basa sulla considerazione del numero, della molteplicità e della posizione dei fuochi — si ricordi che una curva di classe ν ha in generale ν fuochi reali. — Così una curva della terza classe può avere un fuoco triplo (JEFFERY, *On cubics of the third class with triple foci*, Quart. Journ., XIV, 1876), oppure un fuoco doppio ed uno semplice (JEFFERY, *On plane cubics with a double and a single focus*, Ivi), oppure — ed è questo il caso generale — tre fuochi semplici (JEFFERY, *On plane cubics of the third class with three single foci*, Id., XVI, 1879 e XVII, 1880; *On plane class cubics with three single foci*, Rep. Brit. Assoc., 1879). Similmente, fra le curve di quarta classe le più singolari sono quelle aventi ciascuna un fuoco quadruplo (JEFFERY, *On plane and spherical curves of the fourth class with quadruple foci*, Rep. Brit. Assoc., 1880; *On plane curves of the fourth class with quadruple foci*, Quart. Journ., XVIII, 1882; ivi è introdotto il nome *stapes* o *stapete* per designare un ramo di curva con due cuspidi ed un punto doppio); *On the stapele-points of class-fourthics with quadruple foci*, Quart. Journ., XVIII, 1882), alle quali seguono quelle che hanno un fuoco triplo ed uno semplice (JEFFERY, *On curves of the fourth class with a triple and a single focus*, Rep. Brit. Assoc., 1882 e Quart. Journ., XX, 1884). Si potrebbe analogamente intraprendere lo studio delle curve di quarta classe con due fuochi doppi, o con un fuoco doppio e due semplici e finalmente quello delle più generali, cioè con quattro fuochi semplici, ma il numero dei casi che si dovrebbero considerare spaventerà più di un ricercatore, tanto più che tale ricerca, almeno se si giudica dai risultati che diedero quelle congeneri del JEFFERY, non promette di riuscire molto remunerativa.

²⁾ Una cuspide di seconda specie si presenta nella curva

$$y^2 - a^2 x^2 = 4 a \beta^2 x^2 y + \beta^4 x^2$$

Il secondo dei metodi dianzi segnalati poggia sopra considerazione topologiche. Preparato dal Cayley¹⁾, venne svolto dallo Zeuthen²⁾ e poi completato in qualche punto dal Crone;³⁾ esso guida a considerare trentasei tipi di quartiche piane esenti da punti multipli, distribuiti in tredici classi e conduce a concludere che una curva del quart'ordine a discriminante non nullo consta al più di quattro circuiti chiusi, esterni l'uno a tutti gli altri, oppure di due uno interno all'altro. Per le quartiche razionali invece le forme tipiche essenzialmente distinte sono nove⁴⁾, fra cui si trovano altre intermedie fra le prime. Finalmente per le quartiche dei generi 2 e 1 osserviamo che, in forza di un noto teorema generale dell'Harnack⁵⁾, esse constano al più di 3 o 2 tratti. Basti questo cenno sopra un genere di considerazioni su cui non ci accadrà di ritornare; il lettore desideroso di più precisi ragguagli ricorra alla dissertazione di Ruth Gentry *On the forms of plane quartic curves* (New York, 1896).

Chiuderemo queste generalità osservando che della generazione meccanica delle quartiche si è occupato F. Dingeldey⁶⁾ e che parecchie si possono descrivere mediante il curvgrafo Lebeau⁷⁾.

54. Tutte le quartiche particolari di cui dovremo occuparci sono o ellittiche⁸⁾ (avendo per punti doppi o cuspidi i punti ciclici del piano) oppure razionali; onde — analogamente a quanto facemmo nel Libro prec. — dedicheremo un § speciale alle primé ed uno alle seconde. Prima però di chiudere il presente Cap. — pure per conformità quanto abbiamo fatto anteriormente (n. 17) — daremo notizia di alcune quartiche, esenti da punti multipli, ma tuttavia speciali.

considerata da DE GUA (v. P. SAUERBECK, *Abh. zur Gesch. d. Math.*, T. XV, 1902, p. 77) e nella $y = \sqrt{x} + \sqrt{x^3}$ che s'incontra in EULERO (*Introd. in anal. infin.*, T. II, p. 180).

¹⁾ V. la nota *On quartic curves* (Philosophical Magazine, Vol. XXIX, 1865).

²⁾ *Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième degré* (Math. Ann., T. VII, 1874).

³⁾ *Sur la distribution des tangentes doubles sur les divers systèmes de coniques ayant un contact quadruple avec une courbe du quatrième degré* (Id., T. XII, 1877).

⁴⁾ A. BRILL, *Ueber rationale Curven vierten Ordnung* (Id., T. XII, 1877).

⁵⁾ *Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraische Curven* (Id., T. X, 1876).

⁶⁾ *Ueber die Erzeugung von Curven vierter Ordnung durch Bewegungsmechanismen* (Diss. Leipzig, 1885).

⁷⁾ J. NEUBERG, *Sur les lignes tracées par le curvgraphe Victor Lebeau* (Mém. de Liège, III Ser., T. VI, 1904).

⁸⁾ Riguardo a quelle con un solo punto singolare, v. J. DE VRIES, *La quartique nodale* (Arch. Teyler, II Ser., T. IX, 1904); trovasi fra esse anche la curva di equazione polare

$$\rho^2 = b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \omega,$$

che s'incontra nelle *Nuove ricerche analitiche, geometriche e meccaniche* (Pavia 1811) di L. FORNI.

a) Accordiamo il primo posto alla *quartica di Clebsch*, la quale gode la proprietà che il primo membro della sua equazione omogenea è rappresentabile come somma dei biquadrati di cinque forme lineari¹⁾; essa ammette quindi dei pentalateri polari; analiticamente è caratterizzata dall'annullarsi del suo invariante A (v. eq. (4)).

Il covariante S (v. eq. (3)) di una quadratica di Clebsch eguagliato a zero rappresenta una quartica speciale perchè possono in essa inscrivere dei pentalateri completi; si chiama *quartica di Lüroth* in memoria del geometra che per primo l'ha studiata²⁾.

b) La curva rappresentata in coordinate omogenee da una equazione della seguente forma

$$x_1^4 + 4 u_3 x_1 + u_4 = 0,$$

ove u_3 e u_4 sono forme binarie in x_2, x_3 dei gradi 3, 4 gode, la proprietà di avere l'Hessiana con un punto singolare; la chiameremo *quartica di Geiser* in onore del geometra che per primo l'ha immaginata e se ne è servito per dimostrare l'assenza di punti doppi e cuspidi nell'Hessiana di una curva generale di ordine qualunque³⁾.

c) La Jacobiana di una retta e di un fascio sizigetico di cubiche è una curva del quart'ordine dipendente da sole dieci costanti. Geometricamente essa è caratterizzata dalla posizione de' suoi 24 flessi, i quali si separano in due gruppi composti ciascuno dai vertici dei trilateri di un fascio sizigetico. Analiticamente invece essa è caratterizzata dall'essere nullo l'invariante cubico del suo primo membro, nonchè l'invariante del 6° grado, assieme a tutti i sudde-terminanti di 5°. Si suol chiamare, dal nome di chi la scoperse, *quartica di Caporali*⁴⁾.

d) Dati nello spazio sei punti 1, 2, ..., esistono ∞^1 con quadriche che tutti li contengono; il luogo geometrico dei loro vertici è la così detta *superficie di Weddle*. È una superficie di 4° ordine di cui i dati punti sono doppi e che contiene, non soltanto le 15 congiungenti r dei punti dati ma anche le 10 rette s in cui si tagliano due piani quali ijh, lmn ove $ijhlmn$ è una permutazione dei numeri 1 2 3 4 5 6. Ogni sezione piana Σ di una superficie di Weddle è una curva di 4° ordine la quale contiene tanto i quindici punti

¹⁾ V. la memoria del CLEBSCH, *Ueber Curven vierter Ordnung* (G. di Crelle, T. LIX, 1861).

²⁾ Veggansi le due memorie: *Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung* (Math. Ann., T. I, 1869), e *Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfeits eingeschrieben werden kann* (Id., T. XIII, 1878).

³⁾ *Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado* (Ann. di Matem., 2ª Serie, T. IX, 1878).

⁴⁾ *Sopra una certa curva del quarto ordine* (Rend. dell'Accad. di Napoli, dicembre 1882). Cfr. E. CIANI, *La quartica di Caporali* (Id., aprile 1896).

R in cui il piano della curva è segato dalle rette r , quanto i venti punti S in cui l_0 è dalle rette s ; i punti R e S formano una notevole configurazione e la curva Σ contiene infinite analoghe configurazioni. Σ è caratterizzata dall'annullarsi di una invariante espresso da $A^2 + 144 B$, A e B avendo i significati di prima ¹⁾.

e) Altre curve speciali nascono cercando tutte le quartiche trasformate in sè stesse da una o più omologie armoniche ²⁾. Siffatta indagine conduce ai seguenti risultati.

1. Una sola omologia; equazione canonica della curva:

$$u_0 x_3^4 + u_2 x_2^3 + u_4 = 0,$$

ove u_0, u_2, u_4 sono forme in x_1, x_2 di gradi indicati dagli indici. Se, in particolare, $u_0 = 0$, nasce una curva con un punto doppio; è la *quartica omologico-armonica* del Cremona ³⁾.

2. Tre omologie i cui centri ed assi costituiscono un triangolo; equazione canonica della curva:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i^2 x_k^2 = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3);$$

la curva stessa ha 24 flessi distribuiti otto a otto sopra quindici coniche di una rete.

3. Tre omologie i cui centri stanno in una retta ed i cui assi passano per un punto; equazione canonica della curva:

$$a x_3^4 + b x_1 x_2 x_3^2 + c x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) + d x_3^4 = 0;$$

i flessi della curva giacciono sei a sei sopra quattro coniche di un fascio.

4. Cinque omologie; equazione canonica della curva:

$$a (x_1^4 + x_2^4) + b x_1^2 x_2^2 + c x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) + d x_3^4 = 0;$$

i flessi della curva stanno otto a otto sopra ventisette coniche.

5. Sette omologie; equazione canonica della curva:

$$a (x_1^4 + x_2^4) + b x_1^2 x_2^2 + c x_3^4 = 0;$$

i flessi stanno otto a otto sopra trentasei coniche.

6. Nove omologie; equazione canonica della curva:

$$\sum_{i=1}^3 x_i^4 + \lambda \sum_{i,k=1}^3 x_i^2 x_k^2 = 0$$

¹⁾ F. MORLEY and J. R. CONNER, *Plane sections of a Weddle surface* (Amer. Journal, Juli 1909).

²⁾ E. CIANI, *I vari tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche* (Rend. del Circolo Matem. di Palermo, T. XIII, 1899).

³⁾ V. le *Observations géométriques à propos de la note de Mr. Brioschi « Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4. ordre avec point double »* (Math. Ann., T. IV, 1871).

7. Quindici omologie; equazione canonica della curva:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$$

vi sono inoltre 96 omografie che mutano la curva in sè stessa ¹⁾.

8. Ventuna omologie; come equazione canonica della curva si può assumere la seguente:

$$x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 = 0.$$

È questa la più notevole delle quartiche ora enumerate; la si chiama *quartica di Klein* ²⁾; il Brioschi ha notato che il suo primo membro coincide col proprio covariante S di quarto ordine ³⁾; si può anzi dimostrare essere dessa l'unica curva propria del quart'ordine avente tale proprietà ⁴⁾.

Notiamo ancora che le curve le cui equazioni sono riducibili alle forme

$$x_1^4 + u_4 = 0, \quad x_1^3 x_2 + u_4 = 0$$

sono le uniche quartiche che siano trasformate in sè stesse da omologie non armoniche.

Va da ultimo osservato che tutte le quartiche ellittiche o razionali ammettono inversioni in sè stesse ⁵⁾.

f) Considerazioni di altro genere condussero alla linea detta ordinariamente *curva di Wälsch-Humbert* ⁶⁾; essa è rappresentata da un'equazione della seguente forma:

$$p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2 + p_3^2 x_3^2 - 2 p_2 p_3 x_2 x_3 - 2 p_3 p_1 x_3 x_1 - \\ - 2 p_1 p_2 x_1 x_2 = p x_1 x_2 x_3$$

ove p_1, p_2, p_3 sono le tre derivate rispetto a x_1, x_2, x_3 di una forma quadratica in x_1, x_2, x_3 , mentre p è una forma lineare delle stesse;

¹⁾ W. DYCK, *Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlecht drei und die zugehörige « Normalcurve » vierter Ordnung* (Math. Ann., T. XVII, 1880).

²⁾ Perché è menzionata nella memoria di F. KLEIN, *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen* (Math. Ann., T. XIV, 1879). Cfr.: R. FRICKE, *F. Klein Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, T. I (Leipzig 1890), p. 701 e seg.

³⁾ *Sopra una classe di curve del quarto ordine* (Atti della R. Acc. dei Lincei, 3^a Serie, T. VIII, 1884).

⁴⁾ E. CIANI, *Un teorema sopra il covariante S della quartica piana* (Rend. del Circolo matem. di Palermo, T. XIV, 1900).

⁵⁾ E. CIANI, *Le quartiche piane invertibili* (Giorn. di Matem., T. LVII, 1919).

⁶⁾ E. WAELSCH, *Ueber das Normalsystem und die Centralfläche der Flächen zweiter Ordnung* (Wiener Ber., T. 95, 1887); G. HUMBERT, *Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable de quatrième degré* (Journ. de mathém., IV Ser., T. VI, 1890). F. SCHUR osservò che detta curva è caso particolare di quella di Lüroth (Journ. f. Math., T. 95, 1883, p. 217).

come equazione canonica della stessa curva si può assumere:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_3^2x_1^2 - 2x_1^2x_2^2 = 4u x_1 x_2 x_3$$

essendo u una nuova forma lineare. Esiste una superficie desmica di quart'ordine di cui tutte le sezioni piane sono curve dell'indicata specie; è la superficie reciproca del luogo dei centri di curvatura di una quadratica a centro.

g) A. Wiman¹⁾ ha risolto il problema di determinare tutte le quartiche non singolari con trasformazioni lineari in sé stesse e ne ha trovate 12 specie, le cui equazioni canoniche sono:

$$\begin{aligned} G_2 \dots x_3^4 + x_3^2(b x_1^2 + c x_1 x_2 + d x_2^2) + (x_1^4 + a x_1^2 x_2^2 + c x_2^4) &= 0 \\ G_4 \dots x_3^4 + x_3^2(b x_1^2 + c x_2^2) + (x_1^4 + a x_1^2 x_2^2 + c x_2^4) &= 0 \\ G_3 \dots x_2 x_3^2 + x_1^4 + a x_1^2 x_2 + b x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 &= 0 \\ G_6 \dots (x_1^2 + x_2^2)^2 + a x_1 x_3 (x_1^2 - 3 x_2^2) + b x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) + x_3^4 &= 0 \\ G_9 \dots x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + a x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) + b x_1^2 x_2^2 &= 0 \\ G_8 \dots x_2 x_3^2 + x_1^4 + a x_1^2 x_2^2 + x_2^4 &= 0 \\ G_{16} \dots x_3^4 = x_1^4 + a x_1^2 x_2^2 + x_2^4 & \\ G_{24} \dots x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + a (x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2) &= 0 \\ G_9 \dots x_2 x_3^3 = x_1 (x_1^3 + x_2^3) & \\ G_{48} \dots x_3^4 = x_1^4 + x_1 x_2^3 & \\ G_{96} \dots x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0 \text{ (v. sopra)} & \\ G_{168} \dots x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 = 0 \text{ (curva di Klein)} & \end{aligned}$$

qui il simbolo G_r designa col proprio indice l'ordine del relativo gruppo.

In particolare una quartica dotata di quadruplicata simmetria rispetto a un punto ha un'equazione cartesiana di una delle forme seguenti:

$$\begin{aligned} 2 a_0 (x^4 + y^4) + 2 a_1 x (x^2 - y^2) + 4 a_2 x^2 y^2 + a_3 (x^2 + y^2) + a_4 &= 0 \\ a_0 (x^4 - y^4) + 2 a_1 (x^2 + y^2) + a^2 (x^2 - y^2) + 2 a^2 u y &= 0^2 \end{aligned}$$

h) Altre speciali quartiche s'incontrarono cercando le curve d'ordine n dotate della proprietà di essere segate in quaterne armoniche da tutte le rette di un fascio³⁾.

¹⁾ Ueber algebraischen Kurven von den Geschlechtern $p = 4, 5$ und 6 , welche eindeutige Transformationen in sich zulassen (Stockholm. Akad. Bihang., XXI, 1895, n. 3).

²⁾ R. D. CARMICHAEL, On the geometric properties of quartic curve possessing fourfold symmetry with respect to a point (Ann. of mathem., II Ser., T. X, 1909).

³⁾ K. W. RUTGERS, Kurven, die von einem Büschel Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten werden (Nieuw Arch. voor Wisk., II Ser., T. XII, 1918).

CAPITOLO II

Quartiche razionali in generale¹⁾.

55. Fra le quartiche specializzate quelle che si possono studiare con minore difficoltà sono quelle che possiedono il massimo numero di punti singolari. Siffatte curve si possono anzitutto investigare coi metodi della geometria proiettiva, fondandosi sopra il seguente metodo di generazione²⁾: In un piano, un fascio di raggi (di centro O) ed una involuzione proiettiva di tangenti con una conica K generano, con le intersezioni delle coppie di elementi corrispondenti una curva Γ . Cercando col principio di corrispondenza di Chasles il numero dei punti della curva situata sopra una retta arbitraria, si trova che tale curva è del 4° ordine. Su ogni retta del dato fascio esistono due punti della curva diversi da O ; onde questo è un punto doppio. Inoltre sull'asse dell'involuzione di tangenti nasce una proiettività, considerando le intersezioni di esso col dato fascio; i punti doppi sono evidentemente doppi anche per la curva. Onde questa è razionale, ecc.

Ma una quartica con tre punti doppi può derivarsi anche in altro modo da una conica. Notisi infatti che presi i suoi punti singolari (A_1, A_2, A_3) per vertici del triangolo di riferimento, l'equazione della curva assume la seguente forma:

$$(1) \quad a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 + 2 a_{23} x_1^2 x_2 x_3 + 2 a_{31} x_2^2 x_3 x_1 + 2 a_{12} x_3^2 x_1 x_2 = 0;$$

se ora si effettua la trasformazione quadratica determinata dalle formole

$$\rho x_i = \frac{1}{y_i}$$

¹⁾ Cfr. le Tafeln rationaler Kurven vierter Ordnung, nebst eine dazugehörige Abh. von A. BRILL pubblicate dal Politecnico di Monaco.

²⁾ AMESDER, Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkte (Wiener Ber., T. LXXIX, II Absh., 1879) e Bemerkungen über das Erzeugniss eines eindeutigen Strahlenbüschels und eines zweideutigen Strahlensystem zweiter Classe (Archiv, T. LXIV, 1879).

si ottiene' la conica K

$$a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2 a_{23} y_2 y_3 + 2 a_{31} y_3 y_1 + 2 a_{12} y_1 y_2 = 0;$$

dunque, inversamente, la curva (1) è deducibile da una conica mediante una trasformazione quadratica. Se la conica K taglia in due punti reali il lato $A_2 A_3$ del triangolo fondamentale, la curva Γ ha due tangenti reali nel vertice opposto A_1 , in altri termini questo è un nodo; ma se quei due punti d'intersezione sono coincidenti si ha una cuspide e, se sono immaginari coniugati, un punto isolato. Quindi, se la conica ha 6 intersezioni reali col triangolo $A_1 A_2 A_3$, Γ ha tre nodi, se ha 6 intersezioni immaginarie ha tre punti isolati e se finalmente presenta tre contatti Γ ha tre cuspidi¹⁾. Nel primo caso le sei tangenti alla curva nei punti doppi toccano la medesima conica; lo si dimostra facilmente considerando la quartica come derivata da una conica e questa considerazione prova anche essere tangenti di una conica le sei rette condotte dai punti doppi a toccare altrove la quartica. Nel caso di una quartica tricuspide, le tre tangenti cuspidali sono rette concorrenti in un punto.

Una semplice trasformazione²⁾ della (1) fa vedere che le quattro tangenti doppie della curva sono rappresentate dalle equazioni

$$\sqrt{a_{22} a_{33}} x_1 + \sqrt{a_{33} a_{11}} x_2 + \sqrt{a_{11} a_{22}} x_3 - (a_{23} x_1 + a_{31} x_2 + a_{12} x_3) = 0;$$

i loro punti di contatto appartengono ad una conica.

56. Oltre a questi due metodi geometrici per studiare le quartiche razionali, ve n'ha un terzo, prettamente analitico, a cui si è accordata in questi ultimi tempi la preferenza: è quello che impiega la rappresentazione parametrica dei punti della curva e sfrutta la teoria delle forme binarie biquadratiche. Posto

$$(2) \quad \varrho x_i = \sum_{k=0}^{k=4} a_{ik} \lambda^{4-k} \quad (i = 1, 2, 3),$$

interpretando le x_i come coordinate omogenee di un punto, ϱ come fattore di proporzionalità e λ come una variabile affatto libera, si ottiene una rappresentazione parametrica, di cui sono suscettibili

¹⁾ Le varie forme che può presentare la curva Γ sono indicate nelle Tavole I e II dei *Math. Annalen*, vol. XII (memoria di BRILL). Le curve aventi la forma della fig. 9 della prima di esse portano spesso il nome *Lemnisceros*; v. l'articolo *Lemnisceros* (e la corrispondente figura) dell'*Encyclopédie méthodique*; ivi sono indicati i termini *noeud* ou *las d'amour* come sinonimi di *lemniscero*.

²⁾ Venne indicata dal SALMON, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven deutsch* von FIEDLER (Leipzig 1873), p. 320.

tutte le quartiche razionali. Le intersezioni della curva (2) con una retta arbitraria si ottengono risolvendo rispetto a λ l'equazione:

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{k=4} \lambda^k \sum_{i=1}^{i=3} a_{ik} \xi_i = 0.$$

Dettenne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ le radici e posto

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = s_1, \lambda_1 \lambda_2 + \dots = s_2, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \dots = s_3, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = s_4$$

si ottiene facilmente come condizione di collinearità dei quattro punti $(\lambda_1) (\lambda_2) (\lambda_3) (\lambda_4)$ l'annullarsi di tutti i determinanti estratti dalla matrice seguente:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ s_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ s_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ s_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ s_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Affinchè ciò accada è notoriamente necessario e sufficiente, che si annullino due di tali determinanti: ora alle due equazioni che così risultano si può dare una forma conveniente ragionando come segue¹⁾. Scrivendo per simmetria s_0 invece di 1 ed indicando con d_{123} , ecc. i determinanti estratti dalla seguente matrice, presi con segni convenienti,

$$(A) \quad \begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

la prima di quelle equazioni di condizione è

$$(4) \quad s_0 d_{123} + s_1 d_{023} + s_2 d_{013} + s_3 d_{012} = 0.$$

Introducansi ora dieci nuove costanti α_i, β_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) tali che sia:

$$(5) \quad \sum_{i=0}^{i=4} \alpha_i a_{ki} = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=4} \beta_i a_{ki} = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

per un noto teorema i determinanti ternari estratti dalla matrice (A) sono proporzionali ai determinanti Δ_{mn} corrispondenti della matrice

¹⁾ W. FRANZ MEYER, *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen 1883), p. 7.

$$(B) \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix};$$

la (4) può quindi scriversi:

$$s_0 \Delta_{40} - s_1 \Delta_{41} + s_2 \Delta_{42} - s_3 \Delta_{43} + s_4 \Delta_{44} = 0$$

Generalizzando questo risultato si vede che le condizioni di collinearità assumono la seguente forma:

$$\sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \Delta_{ki} = 0;$$

ora poichè queste si scrivono anche

$$\alpha_k \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \beta_i - \beta_k \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \alpha_i = 0,$$

si conclude che le due equazioni

$$(5) \quad \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \beta_i = 0$$

bastano ad esprimere la condizione di collinearità dei quattro punti $(\lambda_1) (\lambda_2) (\lambda_3) (\lambda_4)$.

Innumerevoli ne sono le applicazioni. Così eliminando fra esse λ_4 si ottiene la condizione di collinearità dei tre punti $(\lambda_1) (\lambda_2) (\lambda_3)$; facendo poi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ si ottiene un'equazione (di 6° grado) le cui radici sono i parametri dei flessi: questi sei punti appartengono ad una conica (1); supponendo invece nelle (5) $\lambda_2 = \lambda_1$ e $\lambda_4 = \lambda_3$, si ottengono due equazioni fra cui eliminando λ_3 nasce l'equazione determinante dei parametri dei punti di contatto delle (quattro) tangenti doppie che ha la curva. Ancora: se si scrive che l'equazione risultante dalla eliminazione di λ_4 fra le (5) è soddisfatta identicamente rispetto a λ_3 si troveranno le equazioni atte a determinare i tre punti doppi della curva, in quanto daranno le funzioni simmetriche semplici $(\lambda_1 + \lambda_2$ e $\lambda_1 \lambda_2)$ dei due parametri che competono ad un punto doppio (2). Finalmente facendo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ le (5) si

1) Questo notevole teorema, il primo concernente la distribuzione dei flessi delle quartiche, fu scoperto nel 1875 da J. GRASSMANN (v. la Diss. *Zur Theorie der Wendepunkte, besonders der C₄*, Berlin) e, poi nuovamente, due anni dopo, da A. BRILL (v. la memoria *Ueber rationale Curven vierter Ordnung*, Math. Ann., T. XII, 1877).

2) Cfr. anche NAGEL, *Bestimmung der Doppelpunkte einer rationalen Curve vierter Ordnung* (Math. Ann., T. XIX, 1882).

mutano in due equazioni biquadratiche in λ ; il loro risultante eguagliato a 0 esprime la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza nella quartica di un punto di ondulazione. Ecc.

Non possiamo entrare in minuti dettaglio sugli sviluppi algebrici or ora segnalati. Vogliamo invece notare (1) che se si pone

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{i=3} a_{ik} \xi_i = a_k \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

la (3) diviene

$$(3') \quad a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + \dots + a_4 = 0$$

Calcolando ora gli invarianti quadratico e cubico del primo membro di quest'equazione si ottengono le due equazioni:

$$(8) \quad 12 a_0 a_4 - 3 a_1 a_3 + a_2^2 = 0; \quad \begin{vmatrix} 12a_0 & 3a_1 & 2a_2 \\ 3a_1 & 2a_2 & 3a_3 \\ 2a_2 & 3a_3 & 12a_4 \end{vmatrix} = 0;$$

ricordando i significati geometrici di quegli invarianti ed osservando che le (8) sono la prima quadratica e la seconda cubica nelle coordinate ξ , si vede che la (8, 1°) rappresenta una conica involupata dalle rette che incontrano la data quartica in quaterne equiarmoniche, mentre la (8, 2°) rappresenta una curva di terza classe involupata dalle rette secanti la medesima curva in quaterne equianarmoniche.

Per le quartiche dotate di tre punti doppi d'inflesso, o di un punto doppio e due cuspidi, o di tre cuspidi il numero dei punti sestattici è risp. 24, 12 e 3 (2). Per una quartica razionale avente 3, 2, 1, 0 cuspidi il numero dei triangoli ad un tempo inscritti e circoscritti è rispettivamente 0, 0, 2, 8 (3).

57. Un grande numero di questioni di geometria guidano a considerare delle quartiche con tre punti doppi (4), come vedremo nel

1) W. BRETSCHNEIDER, *Diss.* Erlangen 1875; W. STAHL, *Ueber rationale ebene Curve vierter Ordnung* (G. di Crelle, T. CI, 1887).

2) A. B. BASSET, *On the sextactic points of a quartic* (Q. Journ. of math., T. 35, 1903).

3) CLIFFORD BELL, *The triangles in-and-circumscribed to the quartic curves of deficiency zero* (Pubbl. of the University of Colorado, T. II, 1926).

4) Anche la meccanica conduce sovente a quartiche razionali: tale è, ad esempio, la così detta *curva del ballerino di corda*; è il « luogo dei piedi di un uomo che si muove sopra una corda fissata ad un estremo e tesa da un peso attaccato all'altro estremo dopo di essersi avvolta su una pulleggia ». J. B. BÉRARD (*Opuscles mathématiques*, 1811) ne trovò la seguente equazione

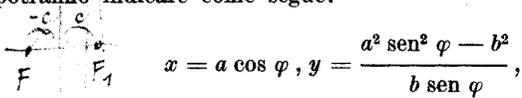
$$y^2 = \frac{x^2 (b - x)^2}{a - (1 - x)^2},$$

corso del presente Libro. Sin d'ora però giudichiamo opportuno segnalare due che s'incontrano nella teoria delle coniche.

a) 1). Ogni punto M dell'ellisse E

$$(9) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

determina con i due fuochi F, F_1 di questa un triangolo: ne sia M' l'ortocentro. Al muoversi di M sull'ellisse E , M' descrive una curva E' di cui è facile trovare l'equazione. Infatti se si rappresentano con $a \cos \varphi, b \sin \varphi$ le coordinate di M , quelle di M' si potranno indicare come segue:



$$x = a \cos \varphi, \quad y = \frac{a^2 \sin^2 \varphi - b^2}{b \sin \varphi},$$

d'onde, eliminando φ , si ottiene

$$(10) \quad a^2 (c^2 - x^2)^2 - b^2 y^2 (a^2 - x^2) = 0, \text{ ove } c^2 = a^2 - b^2,$$

come equazione di E' . Questa è dunque una quartica avente per punti doppi i fuochi F, F' ed il punto all'infinito dell'asse minore; i corrispondenti asintoti sono le rette $x = \pm a$ e limitano una striscia di piano entro cui si trovano tutti i punti reali della curva; questa tocca l'ellisse negli estremi dell'asse minore.

Se invece dell'ellisse (9) si fosse considerata l'iperbole I

$$(11) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si sarebbe ottenuta la curva I' di equazione

$$a^2 (c^2 - x^2)^2 + b^2 y^2 (a^2 - x^2) = 0 \text{ ove } c^2 = a^2 + b^2$$

analogha alla precedente, ma di aspetto diverso giacchè, a tacer d'altro, tutti i suoi punti reali sono esterni alla striscia di piano avente per confini le rette $x = \pm a$.

Alle stesse conclusioni si può giungere senza calcoli, considerando il metodo con cui si dedussero le curve E' e I' come caso speciale

la quale prova che ha per punti doppi l'origine, il punto all'infinito di Oy e il punto $x = b, y = 0$.

¹⁾ KÖTTGEN, *Die geometrischen Oerter der ausgezeichneten Punkten des Ellipsen und Hyperbeldreiecks* (Progr. Quisburg, 1852); HOCHHEIM, *Ueber geometrische Oerter der merkwürdigen Punkten des Dreiecks* (Zeitschrift, T. XV, 1870).

$\lambda = \cos \varphi$
 $\frac{x}{a} = \cos \varphi$
 $\frac{y}{b} = \sin \varphi$

Risulta
 $F(-c, 0)$
 $F(c, 0)$

note

sp. az.

della seguente trasformazione geometrica: Dati due punti fissi A_1, A_2 di un piano π , si faccia corrispondere ad ogni punto M di π il punto M' che è ortocentro del triangolo $M A_1 A_2$. Allora viceversa ad ogni punto M' corrisponderà in generale un unico punto M ; quello cioè in cui si tagliano le perpendicolari condotte da A_1 e A_2 risp. a $A_2 M'$ e $A_1 M'$. Se M descrive una retta r , $A_1 M$ e $A_2 M$ descriveranno due fasci prospettivi e quindi proiettivi; proiettivi riusciranno in conseguenza i fasci generati dalle perpendicolari condotte da A_1 e A_2 risp. a $A_2 M$ e $A_1 M$, onde il punto M' genera una conica passante per A_1 e A_2 . Siccome il punto in cui r taglia la retta $A_1 A_2$, considerato come punto M , ha per corrispondente M' il punto A_∞ all'infinito in direzione perpendicolare alla retta $A_1 A_2$, così quella conica passa per A_∞ . M e M' si corrispondono dunque in una trasformazione quadratica di cui A_1, A_2, A_∞ sono i punti fondamentali; ad A_1, A_2, A_∞ corrispondono risp. le rette $A_1 A_\infty, A_2 A_\infty, A_1 A_2$; ad una conica corrisponderà una quartica avente A_1, A_2 e A_∞ per punti doppi; supponendo, in particolare, che di quella A_1 e A_2 siano i fuochi, si ritrovano le proprietà indicate delle curve E' e I' .

b) Il luogo dei centri delle coniche circoscritte a un triangolo e i cui asintoti formano un dato angolo, è una biquadratica di cui sono doppi i punti medi dei lati del triangolo¹⁾. Lasciamo al lettore di dimostrarlo.

58. Una quartica è razionale non soltanto quando possiede tre punti doppi, ma eziandio quando è fornita di un punto triplo. Preso questo come vertice A_3 del triangolo di riferimento, l'equazione della curva assume la forma seguente

$$(12) \quad u_3 u_3 (x_1, x_2) - u_4 (x_1, x_2) = 0$$

u_3 e u_4 essendo forme binarie la prima cubica e biquadratica la seconda. Sostituendo ivi $x_1 : \lambda_1 = x_2 : \lambda_2$, si arriva alla seguente rappresentazione parametrica:

$$(13) \quad \varrho x_1 = \lambda_1 u_3 (\lambda_1, \lambda_2), \quad \varrho x_2 = \lambda_2 u_3 (\lambda_1, \lambda_2), \quad \varrho x_3 = u_4 (\lambda_1, \lambda_2)$$

Lasciamo al lettore di adattare a questa le considerazioni svolte sopra le curve (2) e piuttosto segnaliamo subito una curva speciale che rientra nella presente categoria; è quella che, in coordinate cartesiane, è rappresentata dall'equazione

$$(14) \quad x^2 (x^2 + y^2) = a y (x^2 - y^2).$$

¹⁾ B. SPOERER, *Ueber eine besondere Gruppe von Kurven des vierten Grades* (Math. naturw. Mitth. Württemberg, T. XV, 1913).

L'origine ne è punto triplo e le corrispondenti tangenti sono l'asse delle x e le bisettrici degli angoli degli assi; la curva consta di due foglie fra loro simmetriche rispetto all'asse delle y e di un ramo infinito simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e situato al disotto dell'asse delle ascisse. Queste proprietà giustificano il nome di *trifoglio parabolico* dato alla curva¹⁾. Questa passa per i punti ciclici del piano ed ha per fuoco straordinario il punto $(0, a)$ e per tangente doppia la retta $y = a(3 - \sqrt{2})$; ecc.

quartica Altra cubica con punto triplo è la *Scifoide* (nome di etimologia ignota) definita come segue²⁾. « Sull'asse delle x di un sistema cartesiano è dato un punto B alla distanza a dell'origine; per esso si conduce una trasversale a incontrare in C l'asse delle y ; la perpendicolare condotta dal punto C alla retta BC sega la circonferenza di centro C e raggio CO in due punti P , il cui luogo geometrico è la curva in questione ». Posto $OC = \xi$ la equazione della detta retta e della detta circonferenza sono risp.

$$ax - \xi(y - \xi) = 0 \quad x^2 + y^2 - 2\xi y = 0;$$

eliminando ξ si trova

$$x^4 - y^4 + 4axy^2 = 0.$$

La scifoide è, quindi, una quartica simmetrica rispetto a Ox e avente per O come punto triplo, le corrispondenti tangenti essendo l'asse delle y e quello delle x ; essa è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica

$$x = \frac{4a\lambda^2}{\lambda^4 - 1}, \quad y = \frac{4a\lambda^3}{\lambda^4 - 1}$$

Una quartica è razionale anche se ha una cuspide di seconda specie e un punto doppio o una cuspide di prima; tale è la curva di equazione

$$-(3x^3 + x^2) + y(72x^2 + 205x + 125) - y^2(29x + 17) - y^3(x + 9) + 2y^4 = 0;$$

essa ha due cuspidi di specie differenti e può rappresentarsi parametricamente come segue:

¹⁾ G. DE LONGCHAMPS, Journ. de math. spéciales, III Ser., vol. II, 1888, p. 255 e 285.

²⁾ P. HUBER, Die Scyphoide, eine Kurve 4. Ordnung (Diss. Bern, 1910).

$$x = -\frac{(\lambda + 2)(\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 4)}{\lambda^3(\lambda + 1)}, \quad y = \frac{(\lambda + 2)^2(\lambda - 3)}{\lambda^2(\lambda + 1)};$$

essa fu considerata a scopi analitici dal Sylvester, che le diede il nome di *bicorno*¹⁾, e venne poi studiata accuratamente dal Cayley²⁾.

¹⁾ On the real and imaginary roots of algebraical equations (Phil. Trans., T. 154, 1864).

²⁾ An eighth memoir on quartics (Id., T. 157, 1867, oppure Collected Papers, T. VI, p. 162-164).

Siaci lecito rilevare qui che H. BOUASSE (*Exercices et compléments de math. générales*, Paris, p. 67) chiama erroneamente cubica di van der Waals la curva

$$y = \frac{3y}{3x - 1} - \frac{3}{x^2}$$

la quale è evidentemente una quartica avente per triplo il punto all'infinito di Oy .

Presi ad arbitrio due punti sulla curva, essi, assieme ai due punti doppii, si possono considerare come costituenti la base di un fascio di coniche, il quale sega sulla quartica una serie lineare semplicemente infinita di coppie di punti, situate sopra ∞^1 rette inviluppanti una conica. Se p. es. il fascio è rappresentato dall'equazione

$$x_1 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + \lambda x_2 x_3 = 0,$$

questa conica ha per equazione

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) - (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 = 0$$

Si arriva così a esprimere x_1, x_2, x_3 in funzioni razionali di un parametro e della radice quadrata di una funzione biquadratica del medesimo; introducendo poi al posto di quel parametro un'opportuna funzione ellittica di una nuova variabile v , si arriva a formole del tipo seguente:

$$(2) \begin{cases} \rho x_1 = c_1 \left[sn^2 \left(v - \frac{\zeta + \sigma}{2} \right) - sn^2 \delta_2 \right] \left[sn^2 \left(v + \frac{\zeta + \sigma}{2} \right) - sn^2 \delta_3 \right] \\ \rho x_2 = c_2 \left[sn^2 \left(v + \frac{\zeta + \sigma}{2} \right) - sn^2 \delta_3 \right] \left[sn^2 \left(v - \frac{\zeta + \sigma}{2} \right) - sn^2 \left(\varepsilon - \frac{\zeta - \sigma}{2} \right) \right] \\ \rho x_3 = c_3 \left[sn^2 \left(v - \frac{\zeta + \sigma}{2} \right) - sn^2 \delta_2 \right] \left[sn \left(v + \frac{\zeta + \sigma}{2} \right) - sn \left(\varepsilon + \frac{\zeta - \sigma}{2} \right) \right] \end{cases}$$

I due parametri del punto doppio $x_1 = x_3 = 0$ sono $\frac{\zeta + \sigma}{2} \pm \delta_2$,

quelli dell'altro $-\frac{\zeta + \sigma}{2} \pm \delta_3$. Fra i parametri v_1, v_2, \dots de' punti

in cui la quartica è segata da una curva d'ordine m sussiste una congruenza lineare, la quale assume forme differenti secondochè la curva segante non passa per alcun punto doppio, o ne contiene uno, o passa per entrambi; corrispondentemente a queste tre ipotesi si hanno le tre congruenze seguenti:

$$(3) v_1 + v_2 + \dots + v_{4m-4} + v_{4m-3} + v_{4m-2} + v_{4m-1} + v_{4m} \equiv 0$$

$$(4) v_1 + v_2 + \dots + v_{m-4} + v_{4m-3} + v_{4m-2} \equiv \pm (\zeta + \sigma)$$

$$(5) v_1 + v_2 + \dots + v_{4m-4} \equiv 0 \pmod{2K, 2iK'}$$

Mostriamo sopra qualche esempio la facilità con cui col loro aiuto si scoprono le proprietà della curva.

CAPITOLO III

Quartiche ellittiche e Quartiche bicircolari in generale.

59. Le curve di quart'ordine con due punti doppii (nodi, cuspidi o punti isolati) si possono ottenere proiettando le quartiche gobbe di prima specie da un punto esterno. Si giunge così, non solo ad un metodo geometrico assai comodo per stabilirne le proprietà, ma anche ad un mezzo per esprimerne le coordinate mediante funzioni ellittiche di un parametro: infatti basta per ciò ricorrere alle espressioni delle coordinate omogenee di una quartica di prima specie mediante funzioni Jacobiane¹⁾ o mediante funzioni di Weierstrass²⁾.

Le stesse curve si possono generare effettuando sopra una cubica senza punti multipli una trasformazione quadratica avente per punti fondamentali due punti della curva. Così, oltre ad un procedimento per stabilire geometricamente i teoremi relativi alle quartiche di genere 1, si arriva in possesso di un mezzo per esprimerne le coordinate mediante funzioni ellittiche (è sufficiente per ciò appoggiarsi alle formole che stabilimmo nel n. 13).

Alle stesse rappresentazioni parametriche si giunge col metodo adoperato dal Clebsch nella sua classica memoria *Ueber diegenigen Curven, deren Coordinaten sich also elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen* (G. di Crelle, T. LXIV, 1865). Si assume per ciò come fondamentale di un sistema di coordinate omogenee un triangolo i cui vertici A_2, A_3 siano i punti doppii della curva; l'equazione di questa assume quindi la forma

$$(1) x_2^2 x_3^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) + x_1^2 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) = 0.$$

¹⁾ G. LORIA, *Sull'applicazione delle funzioni Jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie* (Rend. dell'Acc. dei Lincei, 4^a Serie, T. VI, 2^o Sem., 1890).

²⁾ G. LORIA, *Le curve di genere 1 e le funzioni σ di Weierstrass* (G. di Matem., T. XXXI, 1893).

Se (v) è un punto la cui corrispondente tangente passa per un punto doppio si avrà

$$2v \equiv \pm (\zeta + \sigma)$$

onde per v si hanno le due seguenti quaterne di valori incongrui:

$$\frac{\zeta + \sigma}{2}, \quad \frac{\zeta + \sigma}{2} + K, \quad \frac{\zeta + \sigma}{2} + iK', \quad \frac{\zeta + \sigma}{2} + K + iK'$$

$$\frac{\zeta + \sigma}{2}, \quad -\frac{\zeta + \sigma}{2} + K, \quad -\frac{\zeta + \sigma}{2} + iK', \quad -\frac{\zeta + \sigma}{2} + K + iK'$$

Da ogni punto doppio si possono, dunque, condurre quattro tangenti e i due gruppi così formati sono proiettivi. Potendosi la corrispondenza stabilire in quattro modi differenti, siano abilitati a concludere il seguente:

TEOREMA: *Le due quaterne di tangenti che si possono condurre ad una quartica ellittica dai suoi punti doppi si intersecano in 16 punti situati quattro a quattro su quattro coniche passanti per i punti doppi stessi.*

Similmente se (v) è un punto in cui la quartica considerata ammette un contatto del terz'ordine con una conica passante per i punti doppi, si avrà

$$4v \equiv 0$$

onde

$$v = \frac{pK + qiK'}{2};$$

agli interi p, q necessario e sufficiente di attribuire i valori $0, 1, 2, 3$; si ottengono così in totale 16 coniche, una qualunque delle quali si può indicare con p, q . Esse si possono ordinare nei quattro gruppi seguenti:

0,0	0,2	2,0	2,2
0,1	0,3	2,1	2,3
1,0	1,2	3,0	3,2
1,1	1,3	3,1	3,3;

ora, applicando la (5) si vede che nei punti di contatto con la quartica di due qualunque coniche dello stesso gruppo, la quartica stessa è toccata da una medesima conica passante per i punti doppi; di siffatte coniche se ne hanno in totale $4 \cdot 6 = 24$. Inoltre stanno sopra una conica passante per i punti doppi anche i punti di contatto delle quattro coniche di uno stesso gruppo; si ottengono così altre quattro coniche collegate alla quartica. Altre $4 \cdot 16 = 64$ nascono considerando

i punti di contatto di quattro coniche scelte una in ciascun gruppo; ecc.¹⁾.

Fra le quartiche ellittiche si trova anche il luogo dei punti ognuno dei quali sta ad una distanza conosciuta dalla retta che gli corrisponde in una polarità data; ne sono doppi i punti all'infinito della conica fondamentale di questa corrispondenza; se essa è una parabola, la curva ottenuta ha un tacnodo²⁾.

60. Nel caso in cui i punti doppi della curva coincidano coi punti ciclici del piano, la curva stessa si chiama *quartica bicircolare*³⁾. Essa può considerarsi come proiezione stereografica della curva in cui una sfera è tagliata da una quadrica non passante pel centro di proiezione. Ma può anche supporre generata trasformando per raggi vettori reciproci una cubica circolare; siccome per tale trasformazione a quattro punti conciclici corrispondono quattro punti conciclici, e inoltre ai fuochi della curva primitiva corrispondono i fuochi della trasformata, così il teorema di Hart (v. n. 21) conduce subito a concludere: *Una quartica bicircolare ammette sedici fuochi posti quattro a quattro sopra quattro cerchi*. Del resto questa proposizione non è che un caso particolare del primo teorema che stabilimmo a p. 140 mediante la rappresentazione parametrica⁴⁾.

In coordinate cartesiane ortogonali l'equazione di una quartica bicircolare può sempre scriversi sotto la forma

$$(6) \quad (x^2 + y^2)^2 + (\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0;$$

ora, trasportando l'origine nel punto $\left(-\frac{\alpha}{4}, -\frac{\beta}{4}\right)$, questa si

¹⁾ Altre congeneri proprietà furono stabilite dall'HUMBERT nella nota *Sur le courbe du quatrième degré à deux points doubles* (C. R., XCVII, 1883), esprimendo le coordinate col mezzo di funzioni \wp .

²⁾ R. DITTRICH, *Abstandorter im Polarraum* (Diss. Breslau 1910). Altre curve della stessa specie s'incontrano nelle ricerche di K. BRANDENBERGER, *Ueber Lamberts flächentreue Azimutprojektion* (Viertel. Naturf. Ges., T. LIV, 1910).

³⁾ Cfr. J. CASEY, *On bicircular Quartics* (Trans. of the R. Irish Academy, Vol. XXIV, 1869) e DARBOUX, *Sur une classe remarquables de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873).

⁴⁾ Un procedimento per descrivere una quartica bicircolare mediante un sistema articolato venne indicato da W. WOOLSEY JOHNSON in *Messenger*, T. V, p. 159 e riprodotto dal CARR (*A Synopsis of elementary results in pure and applied Mathematics*, Vol. I, Part II, London 1886, p. 738). Una classe particolare di quartiche bicircolari nodali è costituita da quelle in ognuna delle quali è inscritto uno e quindi ∞^1 quadrangoli aventi per vertici comuni i punti singolari della curva (STEINER, G. di Crelle, T. 32, p. 184 o Werke, T. II, p. 373); la curva è allora generabile mediante due involuzioni proiettive di raggi (C. SERVAIS, *Sur les quartiques binodales quadrillées*, Mathésis, III Ser., T. IX, 1909).

semplifica assumendo la forma

$$(7) \quad (x^2 + y^2)^2 + a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0,$$

quel punto si chiama *punto fondamentale della quartica* e gode di una notevole proprietà¹⁾. Passando, infatti, a coordinate polari la (7) diviene

$$\rho^4 + (a_{11} \cos^2 \omega + 2 a_{12} \cos \omega \sin \omega + a_{22} \sin^2 \omega) \rho^2 + 2 (a_{13} \cos \omega + a_{23} \sin \omega) \rho + a_{33} = 0;$$

dette quindi M_1, M_2, M_3, M_4 le intersezioni della curva con una retta passante per il punto fondamentale si ha sempre

$$O M_1 + O M_2 + O M_3 + O M_4 = 0;$$

onde, se M_{ih} è il punto medio del segmento $M_i M_h$, si potrà scrivere

$$O M_{ih} + O M_{jk} = 0,$$

ove $ihjk$ è una permutazione di 1234; dunque O è il punto di mezzo del segmento $M_{ih} M_{jk}$. Concludiamo pertanto: *Nel piano di qualunque quartica bicircolare esiste un punto (il punto fondamentale) equidistante dai punti medi dei segmenti che hanno per estremi due coppie di intersezioni della curva con una trasversale qualunque contenente quel punto.*

Servendosi dell'equazione generale (6) si può anche dimostrare che ogni quartica bicircolare è l'involuppo di un circolo ortogonale ad un circolo fisso ed il cui centro appartiene ad una data conica, detta conica deferente. Siano infatti

$$(8) \quad C_i \equiv (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 - r_i^2 = 0 \quad (i = 0, 1, 2)$$

le equazioni di tre cerchi ortogonali al dato cerchio; qualunque siano le costanti $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ l'equazione

$$(9) \quad \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

rappresenterà un altro circolo godente la stessa proprietà; le λ sono proporzionali alle coordinate baricentriche del centro O di questo circhio rispetto al triangolo avente per vertici i centri dei tre primi. Siccome per ipotesi O appartiene ad una conica, le λ saranno legate da una relazione del seguente tipo

¹⁾ ELGÉ (G. DE LONGCHAMPS), *Sur les quartiques bi-circulaires* (Journ. de Math. spéciales, IV Ser., T. V, 1896).

$$(10) \quad \sum_{ik} a_{ik} \lambda_i \lambda_k = 0 \quad (i, k = 0, 1, 2; a_{ik} = a_{ki})$$

Per trovare l'involuppo del cerchio (9) con la condizione (10) poniamo

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = p, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_0} = q$$

ed avremo, invece delle (9), (10), le equazioni

$$(9') \quad C_0 + p C_1 + q C_2 = 0;$$

$$(10') \quad a_{11} p^2 + 2 a_{12} p q + a_{22} q^2 + 2 a_{01} p + 2 a_{02} q + a_{00} = 0;$$

le quali dovremo combinare con le equazioni derivate rispetto a p, q della seguente:

$$a_{11} p^2 + 2 a_{12} p q + a_{22} q^2 + 2 a_{01} p + 2 a_{02} q + a_{00} + 2 \rho (C_0 + p C_1 + q C_2) = 0;$$

tali equazioni sono:

$$a_{01} + a_{11} p + a_{11} q + \rho C_1 = 0$$

$$a_{02} + a_{12} p + a_{22} q + \rho C_2 = 0$$

Moltiplicandole risp. per p e q e sottraendo i prodotti della precedente si ottiene, tenendo conto anche della (9'),

$$a_{00} + a_{10} p + a_{20} q + \rho C_0 = 0;$$

questa, con le due precedenti e la (9'), costituisce un sistema lineare in p, q, ρ ; l'eliminazione di tali quantità dà l'equazione cercata dell'involuppo sotto la seguente forma

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & C_0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & C_1 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & C_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

o anche, indicando con α_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel discriminante della (10),

$$(11) \quad \sum_{ik} \alpha_{ik} C_i C_k = 0;$$

ora, ricordando il significato delle C è evidente che quest'equazione ha la forma (6), onde il teorema enunciato è stabilito.

Consideriamo due cerchi involuppati consecutivi; essi si ta-

gliano in due punti appartenenti alla quartica ora ottenuta; di questa, dunque, tutti i cerchi involuppati sono bitangenti. In particolare: i 4 punti d'intersezione della conica deficiente col cerchio dato, sono centri di cerchi evanescenti bitangenti alla quartica, cioè sono fuochi di questa. Alle quattro quaterne di fuochi conciclici della curva (v. sopra), corrispondono quattro modi di generare questa come involuppo e altrettante serie semplicemente infinite di cerchi bitangenti.

Se eseguiamo una trasformazione per raggi vettori reciproci avente per centro il centro del cerchio di cui parlasti nella proposizione sopra dimostrata e per potenza il quadrato del suo raggio, ogni cerchio involuppatante si trasforma in sè stesso e quindi lo stesso accadrà per la curva involupata. Avendo segnalata or ora la possibilità di generare tale curva in quattro modi come involuppo di cerchi, possiamo ritenere che *esistono in generale quattro inversioni capaci di trasformare in sè stessa una qualunque quartica bicircolare*¹⁾.

61. Un nuovo modo per studiare le quartiche bicircolari si ha ponendole in relazione con la totalità degli ∞^3 del piano²⁾; vi si arriva stabilendo nel seguente modo un sistema di coordinate omogenee per lo spazio a tre dimensioni i cui elementi sono i cerchi di un piano.

Siano

$$C_i \equiv (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 - r_i^2 = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

le equazioni di quattro cerchi di un piano, i quali non siano ortogonali al medesimo cerchio. L'equazione

$$C \equiv x_0 C_0 + x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 = 0$$

rappresenta, al variare delle x_i , gli ∞^3 i cerchi del piano; ad ogni sistema di valori dei rapporti $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ corrisponde un determinato cerchio e viceversa, onde è lecito assumere le x come coordinate omogenee del cerchio generico rispetto ai cerchi C_i , considerati per fondamentali. Indicando con d_{ij} la distanza fra i centri dei cerchi C_i e C_j e ponendo

$$r_{ij} = r_j = \frac{r_i^2 + r_j^2 - d_{ij}^2}{2}, \quad r_{xx} = \sum_{ij} r_{ij} x_i x_j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

¹⁾ In generale una inversione trasforma una quartica bicircolare in altra curva della medesima specie.

²⁾ G. LORIA, *Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du 4. ordre* (Quarterly Journal, T. XXII, 1886).

si trova, con un breve calcolo, che il raggio r del cerchio C è determinato dall'equazione

$$r^2 = \frac{r_{xx}}{(\sum x_i)^2}$$

Perciò l'equazione $r_{xx} = 0$ caratterizza i punti del piano considerato (cerchi di raggio nullo o *punti-circoli*) e l'equazione $\sum x_i = 0$ le rette dello stesso (cerchi di raggio infinito); onde il nostro sistema di coordinate è capace di determinare i cerchi, i punti e le rette del piano.

È facile dimostrare che:

1.° Effettuare una sostituzione lineare sopra le coordinate omogenee di un cerchio equivale ad operare una trasformazione delle coordinate stesse; i cerchi fondamentali del nuovo sistema hanno per coordinate rispetto agli antichi i coefficienti della sostituzione lineare trasposta rispetto a quella eseguita.

2.° Una trasformazione per raggi vettori reciproci è rappresentata da una speciale sostituzione lineare sulle coordinate omogenee di cerchi.

Un'equazione $f = 0$ omogenea fra le coordinate x separa dalla totalità di tutti i cerchi un gruppo di ∞^2 ; se l'equazione è algebrica del grado n , tale gruppo si chiama *complesso di cerchi di ordine n* ; ad esempio tutti i punti e tutte le rette costituiscono due complessi particolari, il primo quadratico, il secondo lineare.

Si dimostra agevolmente che un complesso lineare di cerchi consta di tutti i cerchi ortogonali ad un cerchio fisso; questo è il luogo dei punti-circoli del complesso. Può accadere per eccezione che questo sia una retta, allora il complesso consta di tutti i cerchi che hanno i loro centri sopra questa retta.

Due equazioni omogenee $f = 0, g = 0$ fra le coordinate x rappresentano una *congruenza di cerchi*, contenente ∞^1 elementi. In particolare le equazioni $f = 0, r_{xx} = 0$ rappresentano la curva Γ luogo dei punti-circoli del complesso $f = 0$, mentre le equazioni $f = 0, \sum x_i = 0$ rappresentano la curva involupata dalle ∞^1 rette che appartengono allo stesso complesso.

Per determinare le proprietà di Γ quando f è algebrica di grado n , combiniamo le due equazioni $f = 0, r_{xx} = 0$ con quelle $\sum \xi_i x_i = 0$, di un complesso lineare qualunque; otterremo così i punti della curva Γ che stanno sul cerchio ortogonale del complesso. Essendo $2n$ il numero dei punti risultanti, la curva Γ è tagliata in $2n$ punti da ogni cerchio del piano. Siccome si ottengono $2n$ punti anche supponendo che il complesso $\sum \xi_i x_i = 0$ sia costituito da tutti i cerchi con i punti sopra una retta, così la curva Γ è tagliata in $2n$ punti anche da ogni retta del piano. Ciò prova che, se f è a coefficienti reali, la curva Γ è una curva d'ordine $2n$, di cui i punti ciclici del piano sono n -pli.

In particolare una coppia di equazioni del tipo

$$(12) \quad \sum a_{ik} x_i x_k = 0, \quad r_{xx} = 0$$

rappresentano una quartica bicircolare; una tale curva può quindi sempre riguardarsi come luogo dei punti-circoli di un complesso quadratico di cerchi. Questa considerazione riduce la classificazione delle curve di cui ci occupiamo a quella delle coppie di forme quaternarie quadratiche. E se s'interpretano le x come coordinate omogenee di un punto dello spazio, essa stabilisce una corrispondenza univoca fra i punti di una quartica bicircolare e quelli di una quartica gobba di prima specie: è in sostanza la relazione a cui alludemmo già in principio del n. 59.

Finiremo notando che con le quartiche bicircolari si può costituire un doppio sistema ortogonale¹⁾, che la loro rettificazione dipende da integrali ellittici²⁾ e che, quando sono razionali, possono considerarsi come cissoïdali di due cerchi reali o immaginari³⁾.

62. Della categoria di curve studiate nel presente Capitolo fanno parte alcune linee dotate di notevole prerogativa, epperò degne di menzione da parte nostra.

a) Ci si presentano anzitutto le curve di *quarto ordine con due cuspidi*⁴⁾. Assunto come triangolo fondamentale di un sistema di coordinate omogenee quello avente per vertici le cuspidi S_1, S_2 (supposte reali) ed il punto d'incontro delle corrispondenti tangenti, la curva si può rappresentare con un'equazione della seguente forma

$$(x_1 x_2 + x_3^2)^2 + 2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) x_3^2 = 0,$$

la quale pone subito in evidenza che l'equazione $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ rappresenta la tangente doppia d della curva. Se si cerca la prima polare di un punto della retta d si trova un risultato che, espresso a parole, suona così: *i punti di contatto delle quattro tangenti*

¹⁾ DARBOUX, *op. cit.*

²⁾ G. DARBOUX, *Sur la rectification d'une classe de courbes du quatrième ordre* (C. R. T. LXXXVII, 1878). Cfr. F. GOMES TEIXEIRA, *Sobre a construcção do círculos osculadores das cubicas e das quarticas bicirculares* (Porto Annaes, T. II, 1907).

³⁾ F. GOMES TEIXEIRA, *Sur la théorie des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires* (Ann. di matem., III Ser., T. XI, 1905); E. MALO, *Sur la génération cissoïdale des quartiques unicursales bicirculaires* (Arch. Math. u. Phys., III Ser., T. XII, 1907).

⁴⁾ J. DE VRIES, *On bicuspidal curves of order four* (Proc. k. Akad. Amsterdam, 1909). Alcuni dei risultati ivi stabiliti ed altri analoghi furono ritrovati, applicando i metodi della geometria descrittiva, da H. DE VRIES, *The plane quartic with 2 or 3 cusps and 0 or 1 nodes as a projection of the twisted curve of order 4 and of the 1st species* (Id., ib.).

condotte alla curva da un punto della tangente doppia stanno sopra una conica passante per le cuspidi. Calcolando invece l'Hessiana della curva si vede che gli otto flessi della curva stanno sopra una cubica che contiene le cuspidi della stessa ed il punto comune alle rette $S_1 S_2$ e d . Ecc.

b) Un altro caso particolare notevole è quello in cui due flessi della curva cadono uno nell'uno e l'altro nell'altro dei punti doppi¹⁾. La forma canonica dell'equazione delle curve è in tal caso

$$x_1^2 x_2^2 + x_3^4 + 2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) x_1 x_2 x_3 = 0,$$

da cui è facile dedurre, ad es., che due delle tangenti doppie della curva si tagliano sopra la retta che unisce i punti doppi.

Ancora più in particolare si può supporre che ogni punto doppio sia un flesso per ciascuno dei due rami di curva che s'incrociano in esso. L'equazione canonica della curva nelle attuali ipotesi è:

$$x_1^2 x_2^2 - a_1 x_2^2 x_3^2 - a_2 x_1^2 x_3^2 + b_0 x_1 x_2 x_3^2 + b_1 x_1 x_3^2 + b_2 x_2 x_3^2 + c^2 x_3^4 = 0.$$

Dei punti fondamentali del sistema di coordinate, due sono i punti singolari della curva, mentre nel terzo concorrono quattro tangenti doppie i cui punti di contatto appartengono ad una conica; le altre quattro tangenti doppie formano un quadrilatero completo avente per triangolo fondamentale il triangolo di riferimento. Calcolando l'Hessiana si trova che gli otto flessi della curva, che sono distinti dai punti doppi, stanno sopra una conica. Ecc.

c) G. H. Halphen nel suo *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* (Paris, 1886) ha definite geometricamente le funzioni ellittiche mediante una curva di cui ecco la genesi: Sia dato un cerchio di centro O e raggio R , e un punto C del suo piano; MM' ne sia una corda passante per C e su di essa si portino i segmenti $CN = CN'$ tali che si abbia

$$CN \sqrt{MM'} = l \sqrt{2(R + \delta)}$$

essendo $\delta = CO$. Il luogo geometrico dei punti N, N' è una curva di Halphen. Assunta C per origine e CO per asse delle x si trova facilmente come equazione della curva

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{\delta^2}{R^2} (x^2 + y^2) y^2 = l^4 \left[\frac{R + \delta}{2R} \right]^2,$$

donde emerge che si tratta di una quartica bicircolare.

¹⁾ J. DE VRIES, *On curves of order four with two flecnodal points or with two biflecnodal points* (Proc. k. Akad. Amsterdam, 1909).

x d) Il luogo dei punti che dividono in un dato rapporto le corde di un circolo uscenti da un punto fisso del suo piano è una quartica bicircolare razionale, la cui equazione può scriversi sotto la seguente forma:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = m^2 [R^2 x^2 - (a^2 - R^2) y^2]^2;$$

x e) Della stessa specie è il luogo dei vertici dei triangoli equilateri costruiti sulle corde di un cerchio uscenti da un determinato punto del suo piano ²⁾.

¹⁾ F. BÜTZENBERGER, *Ueber bicentrische Polygone* (Leipzig 1913), p. 50-51.

²⁾ T. ONO, *Sur une courbe du quatrième ordre* (Soc. mat. Tokyo, II Ser., T. VII, 1913).

CAPITOLO IV

Le spiriche di Perseo.

63. Gli antichi geometri — per attestazione di Erone e Proclo ¹⁾ — designavano coi nomi di *spira* (*σπειρα*) o *anello* (*κρίκος*) la superficie generata dalla completa rotazione di un circolo attorno ad una retta segnata ad arbitrio nel suo piano ²⁾; e distinguevano tre sorta di spire, cioè *spire aperte*, *spire chiuse* e *spire rientranti*, secondochè il raggio del circolo generatore è minore, eguale o maggiore della distanza del suo centro dall'asse di rotazione. Era naturale che i Greci, i quali, secando con piani un cono rotondo avevano ottenute delle curve così notevoli come sono le sezioni coniche, pensassero di effettuare la stessa operazione sopra le spire. Le sezioni fatte mediante piani passanti per l'asse od a questo perpendicolari non dando che curve già note, per ottenere qualche cosa di nuovo si ricorse ad altre sezioni. Prime si presentano quelle fatte con piani paralleli all'asse della spira; ed infatti, un geometra poco noto del periodo greco-alessandrino — Perseo — ha fama di averle per primo considerate; anzi Proclo ha serbati due versi in cui è celebrata siffatta scoperta.

Per trovare le proprietà più salienti delle curve di Perseo, o *spiriche*, prendiamo (v. fig. 24) un sistema di tre assi cartesiani ortogonali $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, il terzo dei quali sia l'asse della spira; supporremo di più che il circolo generatore stia nel piano $\xi\zeta$ e abbia per centro un punto C dell'asse $\Omega\xi$; sia $\Omega C = d$ e R il raggio del dato circolo. L'equazione di questo, nel piano $\xi\zeta$, è quindi: $(\xi - d)^2 + \zeta^2 = R^2$, onde quella della spira sarà:

$$(1) \quad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + d^2 - R^2)^2 = 4d^2(\xi^2 + \eta^2)$$

¹⁾ Cfr. G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia* (Milano 1914), p. 415.

²⁾ La spira non differisce quindi dalla superficie ordinariamente chiamata *toro*. P. ERNST ha notato (*Darstellend-geometrische Behandlung der Dupin'schen Zyklide*, Programm Wien) che le stesse curve si ottengono tagliando la spira (o toro che dir si voglia) con un piano passante per il suo centro.

Il piano secante σ — per ipotesi parallelo a $\Omega \zeta$ — abbia per equazione

$$(2) \quad \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p = 0$$

Sia O il piede della perpendicolare calata da Ω su σ ; prendiamo

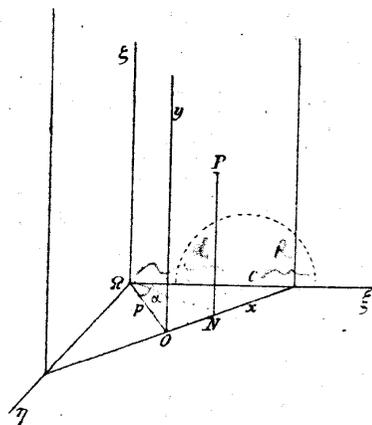


Fig. 24.

nel piano σ per asse delle x la sua traccia sul piano $\xi \eta$ e per asse delle y la parallela condotta da O a $\Omega \zeta$. p sarà la lunghezza della ΩO e α l'angolo che essa forma con $\Omega \xi$. Preso quindi ad arbitrio un punto P del piano σ , le sue coordinate $ON = x$, $NP = y$ saranno legate alle ξ, η, ζ dello stesso punto mediante le relazioni

$$x = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - p^2}, \quad y = \zeta;$$

eliminando col loro aiuto ξ, η, ζ dalla (1) si ottiene l'equazione della spirale sotto la seguente forma:

$$(3) \quad (x^2 + y^2 + p^2 + d^2 - R^2)^2 = 4 d^2 (x^2 + p^2),$$

che può anche scriversi

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^2 + 2(p^2 + d^2 - R^2)(x^2 + y^2) - 4 d^2 x^2 + (p+d+R)(p+d-R)(p-d+R)(p-d-R) = 0$$

La semplice ispezione di quest'equazione prova che le spiriche sono quartiche bicircolari simmetriche rispetto ad un asse. Le 4 tangenti nei punti ciclici alla curva (4) avendo per equazioni $x \pm i y = \pm d$, la curva stessa ha i punti $x = \pm d, y = 0$ per fuochi straordinari¹⁾. Le tangenti in ogni punto ciclico sono in generale distinte, tranne quando sia $d = 0$; ma in tal caso la spirale diviene una sfera e la spirica un circolo contato due volte; da ciò, applli-

¹⁾ Volendo i fuochi ordinari basta osservare che le 8 tangenti condotte dai punti ciclici hanno le seguenti equazioni:

$$x \pm i y = \pm \sqrt{(d+p-R)(d-p+R)}$$

$$x \pm i y = \pm \sqrt{(d+p+R)(d-p-R)}$$

cando sin d'ora una proposizione che stabiliremo più avanti (n. 78), si deduce che fra le spiriche non si trovano le ovali di Cartesio/~~si~~ *Finace,* ~~milmente~~, serviamoci sin d'ora dell'equazione generale delle ovali di Cassini (n. 88)

$$(5) \quad (x^2 + y^2)^2 + 2 a^2 (x^2 + y^2) - 4 a^2 x^2 + a^4 - c^4 = 0$$

e vedremo che affinché la spirica (4) coincida con questa curva bisogna che sia:

$$p^2 + d^2 - R^2 = a^2, \quad d = a, \quad (p^2 + d^2 - R^2)^2 - 4 p^2 d^2 = a^4 - c^4;$$

eliminando fra queste a e c si conclude che dev'essere $p = R$, onde le ovali di Cassini sono speciali spiriche¹⁾; descritto un cilindro circolare retto di asse $\Omega \zeta$ e raggio R , ogni suo piano tangente segherà la spirale (1) in una ovale di Cassini/Quando $c = a$ la (5) rappresenta una lemniscata di Bernoulli (v. n. 92); in tal caso le tre relazioni ultime scritte danno $d = 2 R$, onde soltanto nelle spire per cui $d = 2 R$ esistono sezioni piane parallele all'asse, aventi la forma di lemniscate di Bernoulli. (Ch. Biscaroni, 178)

La spirica rappresentata dall'equazione (4) taglia gli assi coordinati in due quaterne di punti; le ascisse dei punti della prima quaterna sono date dall'equazione

$$(6) \quad x^2 = (d \pm R + p)(d \pm R - p);$$

mentre le ordinate dei punti della seconda lo sono dall'equazione

$$(7) \quad y^2 = (R + p \pm d)(R - p \mp d).$$

Si deduce da ciò:

1° Se la spirale è aperta ($d > R$) sono reali o tutti i punti della prima quaterna e nessuno di quelli della seconda, oppure due della prima e due della seconda; nel primo caso è $p < d - R$, nel secondo $d - R < p < d + R$; nel primo caso la spirica consta di due ovali esterne l'una all'altra, nell'altra di una sola. Nei casi estremi $p = d - R$ o $p = d + R$ la curva ha un punto doppio.

2° Se la spirale è rientrante ($d < R$) sono reali o tutti i punti di ciascuna quaterna oppure due punti della prima e due della seconda; nel primo caso è $p < R - d$, nel secondo $R - d < p < R + d$; nel primo caso la spirica consta di due ovali interne una all'altra,

¹⁾ A torto quindi A. COMTE asserì (*Traité élémentaire de géométrie analytique*, Paris 1843, p. 72) che se un piano si muove conservandosi parallelo all'asse di un toro, esso taglia sempre questa superficie in ellissi di Cassini. Perciò la denominazione di sezioni toriche ivi applicato alle ovali di Cassini, non può servire che per le spiriche.

nell'altro di una sola. Qui pure se $p = R \mp d$ si ha una curva con punto doppio.

3° Se finalmente la spirale è chiusa ($d = R$) per $p < 2R$ si ha una spirale costituita da un ovale; nell'ipotesi limite $p = 2R$ la curva acquista un punto doppio.

Osserviamo ancora che la (3) fa vedere che le due rette di equazioni $y = \pm R$ sono tangenti doppie della curva; le ascisse dei relativi punti di contatto sono determinate dall'equazione $x^2 + p^2 = d^2$, onde i punti stessi sono reali od immaginari coniugati secondoche $d \geq p$; nella prima ipotesi si ha una vera tangente doppia, ma nel

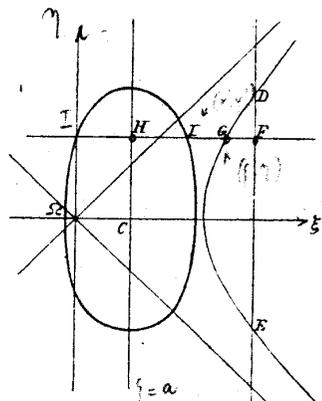


Fig. 25.

secondo una retta avente con la spirale un doppio contatto ideale. Una classificazione più minuta delle spiriche in base alla loro forma si ottiene considerandone i flessi reali; che essa non sia sfuggita agli antichi è attestato da Proclo; ma a noi manca il tempo per esporla¹⁾.

64. La definizione delle spiriche da cui siamo partiti dà una costruzione di esse fondata sopra considerazioni stereometriche; applicando i metodi della geometria descrittiva l'indicata genesi conduce a una conveniente costruzione delle curve²⁾. R. de Sluse ne segnalò, due secoli e mezzo fa³⁾, una offrente pure il vantaggio di adoperare esclusi-

sivamente costruzioni nel piano; eccola: « Sia DBE una iperbole equilatera (fig. 25) di assi $\Omega\xi, \Omega\eta$; HC e DE siano due parallele all'asse trasverso $\Omega\eta$, supposte fisse; una parallela variabile al-

¹⁾ Il lettore troverà ulteriori particolari sull'argomento nella memoria di G. M. PAGANI inserita nel T. V dei *Mem. cour. par l'Académie de Belgique* e rispondente al seguente tema posto a concorso da quest'Accademia nel 1824: « On sait que les lignes spiriques ou sections annulaires sont des courbes formées par l'intersection d'un plan avec la surface engendrée par la circonvolution d'un cercle autour d'un axe donné de position; on demande l'équation générale de ces courbes et une discussion complète de cette équation ». V. anche F. GOMES TEIXEIRA, *Sobre as espiricas de Perseo* (Annaes Acad. pol. do Porto, T. II, 1907).

²⁾ G. LORIA, *Construction plane des spiriques de Perseus* (Annaes Acad. pol. Porto, T. IX, 1915). Un metodo per descrivere meccanicamente le spiriche fu indicato dal SUARDI, *Trattamenti matematici* (Brescia 1764), p. 30.

³⁾ V. due lettere a HUYGENS datate 4 settembre e 5 ottobre 1657 e riprodotte nel T. II (La Haye, 1889), p. 52 e 69 delle *Oeuvres de Huygens*; cfr. F. GOMES TEIXEIRA, *Sur deux manières de construire les spiriques de Perseus* (Arch. f. Math. u. Phys., III Ser., T. XI, 1906).

l'altro asse tagli quelle due parallele e la curva risp. in H, F, G ; si prendano su di essa due punti I simmetrici rispetto a H e tali che si abbia $\overline{FG} \cdot \overline{GH} = \overline{HI}^2$; il luogo dei punti I è una spirica». Per dimostrarlo supponiamo che

$$\xi^2 - \eta^2 = k^2, \quad \xi = a, \quad \xi = b$$

siano le equazioni dell'iperbole data e delle due parallele fisse. Dette x', y' le coordinate di I , e ξ, η quelle di G , avremo evidentemente $y' = \eta, \pm HI = x' - a, FG = b - \xi, GH = \xi - a$, onde, per le condizioni del problema,

$$(x' - a)^2 = (b - \xi)(\xi - a)$$

L'equazione del luogo dei punti I si otterrà eliminando ξ e η fra questa equazione e le due $y' = \eta, \xi^2 - \eta^2 = k^2$, onde è

$$[(x' - a)^2 + y'^2 + k^2 + ab]^2 - (a + b)^2 (y'^2 + k^2) = 0$$

Ora ponendo

$$x' - a = y, \quad y' = x, \quad k^2 + ab = p^2 + d^2 - R^2, \quad \frac{a+b}{2} = d, \quad k = p$$

quest'equazione si identifica alla (3). Dunque il teorema è dimostrato; e si vede in pari tempo che la curva corrispondente nasce segnando la spirale per cui è

$$R = \left| \frac{a-b}{2} \right|, \quad d = \frac{a+b}{2},$$

con un piano distante di k dall'asse della spirale stessa.

All'esposta generazione planimetrica, che ha poco più del valore di una curiosità storica, il Siebeck ne aggiunse, più di mezzo secolo fa¹⁾, un'altra assai più notevole per le conseguenze a cui conduce e preferibile a quella del de Sluse perchè più elementare. Passiamo ad occuparcene con la diffusione consentitaci dallo spazio di cui disponiamo.

Dati due punti A, B alla distanza $2e$, si ponga

$$\overline{PA} + \overline{PB} = s, \quad \overline{PA} - \overline{PB} = d$$

e, se m, n sono due numeri dati, si cerchi il luogo dei punti P tali

¹⁾ V. la memoria *Ueber eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Functionen zusammenhängen* (G. di Crellé, T. LVII, 1860, e LIX, 1861). Cfr. F. GOMES TEIXEIRA, *Sobre a identidade das curvas de Perseo e das curvas de Siebeck* (Annaes Acad. pol. Porto, T. XIII, 1919).

che si abbia

$$(8_i) \quad m s^2 + n d^2 = 4 e^2$$

A tale scopo si prenda per asse delle x la retta AB e per origine il punto medio O del segmento AB ; si trova allora con tutta facilità che le equazioni, polare e cartesiana, delle curve sono risp.

$$(9) \quad [m \rho^2 - (1-m) e^2] [n \rho^2 - (1-n) e^2] + (m-n)^2 e^2 \cos^2 \omega = 0$$

$$(10) \quad [m(x^2 + y^2) - (1-m) e^2] [n(x^2 + y^2) - (1-n) e^2] + (m-n)^2 e^2 x^2 = 0$$

Ora, eseguendo il prodotto indicato nella equazione (10), si trova che il suo primo membro ha la forma del primo membro della (4) e si identifica con questo supponendo

$$p^2 = \frac{e^2}{4mn}, \quad d^2 = -\frac{(m-n)^2 e^2}{4mn}, \quad R^2 = \frac{(m+n-2mn) e^2}{2mn};$$

queste relazioni mostrano che una almeno delle quantità d, R, p è immaginaria, onde le curve risoltrici dell'anzidetto problema locale, non si possono ottenere segando un toro reale con un piano reale; è tuttavia opportuno considerarle come spiriche, anzi di attribuire tal nome a tutte le curve rappresentate dalla equazione (3) o (4), anche quando una o più delle costanti d, R, p sia immaginaria pura; in tal caso è inapplicabile nel campo reale la generazione di Perseo, mentre può sempre servire quella del Siebeck¹⁾.

La simmetria dell'equazione (10), rispetto ai numeri m, n mostra che la curva da essa rappresentata gode anche della proprietà espressa dall'equazione

$$(8_{ii}) \quad n s^2 + m d^2 = 4 e^2,$$

che nasce dalla (5i) per lo scambio di quei due numeri. Ma v'ha di più. L'equazione (10) non muta nemmeno cambiando rispettivamente m, n, e^2 rispettivamente in

¹⁾ La denominazione di *spirica* è usata in un senso ancora più lato dal DE LA GOURNERIE (*Mémoires sur les lignes spiriques*, G. di Lionville, II Serie, T. XIV, 1869), il quale, al pari del LAGUERRE (*Sur quelques propriétés des lignes spiriques*, Oeuvres, T. II, Paris 1905, p. 73), indica con quel nome qualunque quartica bicircolare simmetrica rispetto ad un asse. Adottando siffatta nomenclatura si dimostra che « dati due segmenti di una stessa retta, è una spirica il luogo dei punti da cui essi sono visti sotto due angoli la cui somma è costante » (v. *El progreso matemático*, T. III, 1893, Questione 75, p. 187-189).

$$1-n, 1-m, \frac{(1-m)(1-n)}{mn} e^2;$$

presi dunque sulla retta AB due punti A', B' tali che

$$\overline{OA'} = \overline{OB'} = e \sqrt{\frac{(1-m)(1-n)}{mn}},$$

e posto

$$\overline{PA'} + \overline{PB'} = s', \quad \overline{PA'} - \overline{PB'} = d', \quad \overline{A'B'} = 2e',$$

sussisteranno le seguenti relazioni analoghe alle (8_i), (8_{ii}):

$$(8_{iii}) \quad (1-n) s'^2 + (1-m) d'^2 = 4 e'^2,$$

$$(8_{iv}) \quad (1-m) s'^2 + (1-n) d'^2 = 4 e'^2;$$

onde in tutto si hanno quattro maniere per generare ogni spirica col metodo di Siebeck.

Ve ne sono però altre quattro. Posto infatti per brevità

$$(11) \quad L = \left[\frac{1-n}{n} + \frac{1-m}{m} \right] e^2, \quad M = \frac{(1-m)(1-n)}{mn} e^4, \\ N = \frac{(m-n)^2}{mn} e^2$$

la (6) diviene

$$(10') \quad (x^2 + y^2)^2 - L(x^2 + y^2) + M + N x^2 = 0.$$

Ora, se la scriviamo come segue

$$(x^2 + y^2)^2 - (L - N)(x^2 + y^2) + M - N y^2 = 0,$$

otterremo un'equazione che nasce dalla precedente con lo scambio delle variabili e col cambiamento delle costanti L e N risp. in $L - N$ e $-N$; esisteranno quindi sull'asse delle y altre due coppie di punti C, D e C', D' aventi per comune centro O e godenti rispetto alla spirica delle stesse proprietà che hanno le due coppie A, B e A', B' . Chiameremo per brevità *fulcri* della spirica, a due a due associati, i punti A e B, A' e B', C e D, C' e D' . Per investigarne la realtà notiamo che eliminando fra le (7) le costanti m, n si ottiene una equazione avente per radici le ascisse dei quattro fulcri appartenenti all'asse delle x ; tale equazione è

$$(12) \quad e^4 + C e^2 + M = 0 \quad \text{ove} \quad C = L - \frac{L^2 - 4M}{N}.$$

Cambiando in questa L e N risp. in $L - N$ e $-N$ si otterrà l'equazione avente per radici le ordinate degli altri quattro fulcri; tale equazione è

$$(13) \quad f^4 - C f^2 + M = 0$$

Una delle radici e^2 della (12) è reale positiva, essendo il quadrato della metà del segmento AB limitato dai punti A, B da cui partiamo; l'altra è quindi sempre reale, ma positiva o negativa secondochè $M \geq 0$; dunque i due fulcri A', B' sono reali od immaginari coniugati a norma che

$$M = \left[1 - \frac{1}{m}\right] \left[1 - \frac{1}{n}\right] e^4 \geq 0,$$

cioè secondochè m, n sono entrambi minori o entrambi maggiori 1, oppure uno maggiore e l'altro minore. Ora siccome si passa dalla (12) alla (13) cambiando e^2 in $-f^2$, ai due fulcri reali A, B corrispondono due fulcri sempre immaginari coniugati; quanto ai due ultimi C', D' essi saranno immaginari o reali secondochè $M \geq 0$. Emerge da ciò che in base alla realtà dei fulcri tutte le curve rappresentate dall'equazione si distribuiscono in due categorie:

Curve di I specie: $M > 0$; quattro fulcri reali in linea retta e quattro a due a due coniugati sopra un'altra.

Curve di II specie: $M < 0$; quattro fulcri reali, due su una retta e due sopra un'altra, e quattro analoghi immaginari.

Una terza specie è caratterizzata dall'essere $M = 0$ e dal possedere la curva nel centro un punto doppio.

65. Le curve di cui ci occupiamo s'incontrano in questioni geometriche non prive di importanza. Valga a provarlo il seguente esempio¹⁾: Data una conica a centro Γ

$$(14) \quad \alpha x^2 + \beta y^2 = 1,$$

si consideri il luogo di un punto tale che le tangenti condotte da esso alla curva formino un dato angolo μ ; esso si chiama *isottica d'angolo μ della conica data* (v. Lib. VII, Cap. IX). Per trovarne l'equazione si osservi che le tangenti condotte alla conica Γ dal punto (x', y') sono complessivamente rappresentate dall'equazione

$$\alpha \beta (x y' - x' y)^2 - \alpha (x - x')^2 - \beta (y - y')^2 = 0.$$

¹⁾ V. la seconda parte del citato lavoro del SIEBECK.

Perciò, se si indicano con

$$y - y' = a' (x - x'), \quad y - y' = a'' (x - x')$$

le equazioni separate dalle tangenti stesse, si avrà:

$$a' + a'' = \frac{2 \alpha x' y'}{1 - \alpha x'^2}, \quad a' a'' = \frac{\alpha \beta y'^2 - 1}{\alpha x'^2 - 1},$$

onde, applicando le condizioni del problema,

$$\operatorname{tg}^2 \mu = \left[\frac{a' - a''}{1 + a' a''} \right]^2 = \frac{4 \alpha \beta (\alpha x'^2 + \beta y'^2 - 1)}{[\alpha + \beta - \alpha \beta (x'^2 + y'^2)]^2}$$

Scrivendo quindi x, y invece di x' e y' si conclude essere

$$(15) \quad [\alpha + \beta - \alpha \beta (x^2 + y^2)]^2 \operatorname{tg}^2 \mu - 4 \alpha \beta (\alpha x^2 + \beta y^2 - 1) = 0$$

la cercata equazione dell'isottica. Ora sviluppando il quadrato indicato e ponendo

$$(16) \quad L = \frac{4}{\alpha \operatorname{tg}^2 \mu} + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta};$$

$$M = \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right] \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{4}{(\beta - \alpha) \operatorname{sen}^2 \mu} \right];$$

$$N = \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \mu} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right],$$

la (15) coincide con la (10'), dunque le isottiche delle coniche sono spiriche. In virtù della (12) i fulcri delle (15) situati sull'asse delle x sono determinati dalle relazioni

$$(17) \quad \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = e^2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta},$$

$$\overline{OA'}^2 = \overline{OB'}^2 = e'^2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{4}{(\beta - \alpha) \operatorname{sen}^2 \mu},$$

onde due di essi coincidono con i due fuochi (reali od immaginari) che la conica ha su quell'asse.

L'esistenza di altri quattro fulcri della (15) sull'asse delle y induce a credere che la stessa curva possa concepirsi come isottica di un'altra conica $\bar{\Gamma}$

$$(18) \quad \bar{\alpha} x^2 + \bar{\beta} y^2 = 1,$$

si trova infatti

$$(19) \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{\beta e'^2}, \quad \bar{\beta} = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha e'^2}$$

e come angolo visuale costante un $\bar{\mu}$ tale che si abbia

$$(20) \quad \frac{\text{tg } \bar{\mu}}{\text{tg } \mu} = \frac{e'}{e}$$

Si conclude pertanto che: *Ogni curva isottica di una conica Γ è isottica anche di un'altra $\bar{\Gamma}$; siccome le (19) danno*

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\beta} = 0$$

così, se Γ è ellisse, $\bar{\Gamma}$ è iperbole e viceversa; inoltre gli assi omnimi sono proporzionali.

Rileveremo da ultimo la presenza delle spiriche nella rappresentazione geometrica delle variabili complesse e delle loro funzioni ¹⁾. Rappresentiamo, infatti, al solito modo in due piani π e σ le variabili $z = x + iy$ e $w = u + iv$, e supponiamo che fra esse sussista la relazione

$$w = sn z \quad \text{ossia} \quad u + iv = sn(x + iy)$$

Sia P il punto (del piano σ) avente le coordinate u, v ; siano F, F' i punti dell'asse delle u che distano dall'origine di ± 1 . Avremo:

$$\overline{PF^2} = [1 - sn(x + iy)] [1 - sn(x - iy)],$$

$$\overline{PF'^2} = [1 + sn(x + iy)] [1 + sn(x - iy)]$$

ossia, applicando formole note (7),

$$\overline{PF} = \frac{sn x \cdot dn iy - cn iy}{\sqrt{1 - k^2 sn^2 x \cdot sn^2 iy}}, \quad \overline{PF'} = \frac{sn x \cdot dn iy + cn iy}{\sqrt{1 - k^2 sn^2 x \cdot sn^2 iy}}$$

per conseguenza

$$(21) \quad s = \frac{\overline{PF} - \overline{PF'}}{\overline{PF} + \overline{PF'}} = \frac{2 sn x \cdot dn iy}{\sqrt{1 - k^2 sn^2 x \cdot sn^2 iy}}$$

¹⁾ Oltre la memoria del SIEBECK, si veggia HOLZMÜLLER, *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen* (Leipzig 1882), p. 256 e seg.

$$d = \overline{PF} - \overline{PF'} = \frac{2 cn iy}{\sqrt{1 - k^2 sn^2 x \cdot sn^2 iy}}$$

Eliminando x fra queste si ricava

$$\frac{d^2}{cn^2 iy} - \frac{k^2}{k'^2} cn^2 iy \cdot s^2 = 4$$

o anche (8)

$$(22) \quad cn^2(y, k') d^2 - \frac{k^2}{k'^2 cn^2(y, k')} s^2 = 4$$

Questa è l'equazione delle curve del piano σ corrispondenti alle rette $y = \text{cost.}$ del piano π ; in virtù della (8) tali curve sono spiriche. Eliminando invece y fra le (21) si ottiene l'equazione

$$(23) \quad \frac{dn^2 x}{k'^2 sn^2 x} s^2 - \frac{k^2 cn^2 x}{k'^2} d^2 = 4,$$

che rappresenta ∞^1 spiriche del piano σ corrispondenti alle rette $x = \text{cost.}$ del piano π . Servendosi ora della proprietà caratteristica delle trasformazioni isogonali ed osservando che le linee $y = \text{cost.}$, $x = \text{cost.}$ costituiscono nel piano π un doppio sistema ortogonale, concluderemo che le equazioni (22) (23) rappresentano un doppio sistema ortogonale costituito da spiriche.

Ad analoghi risultati guida la considerazione delle funzioni $cn z$ e $dn z$.

66. Le spiriche con punto doppio, che ad arte escludemmo quasi totalmente dalle considerazioni precedenti, vennero incontrate più di recente da uno speciale punto di vista, che ci corre l'obbligo di segnalare. Dati due punti F_1, F_2 , aventi per punto medio O e per distanza $2c$, e data ancora una costante f , il luogo dei punti M tali che sia

$$\overline{MF_1^2} \cdot \overline{MF_2^2} = c^4 \pm f^2 \overline{OM^2},$$

è una curva che J. Booth ha studiato ¹⁾, imponendole il nome di lemniscata; per distinguerla da altre curve recanti lo stesso nome, noi la chiameremo *lemniscata di Booth*. Dalla definizione data si deduce subito che tale curva ha per equazione cartesiana

$$(24) \quad (x^2 + y^2)^2 = (\pm f^2 + 2c^2)x^2 + (\pm f^2 - 2c^2)y^2$$

¹⁾ *A treatise on some new geometrical methods*, T. I (London 1877), p. 162 e seg.

onde è una spirica avente nel punto O una duplice inflessione e di forme differenti a norma del segno di cui si fa precedere f^2 e della grandezza relativa delle costanti f , c .

I. Si faccia precedere f dal segno $+$. Allora, se $f > c\sqrt{2}$; posto $f^2 + 2c^2 = a^2$ e $f^2 - 2c^2 = b^2$ la (24) diviene

$$(24_I) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 \quad \text{ove} \quad a^2 > b^2$$

e rappresenta una lemniscata di Booth *ellittica*¹⁾. Se invece $f = c\sqrt{2}$ risulta $l=0$ e la (24) rappresenta i due cerchi $x^2 + y^2 \pm 2cx = 0$. Se finalmente $f < c\sqrt{2}$, posto ancora $f^2 + 2c^2 = a^2$ e $2c^2 - f^2 = b^2$, la (24) si muta nell'altra

$$(24_{II}) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2 \quad \text{ove} \quad a^2 < b^2,$$

e questa compete ad una lemniscata di Booth *iperbolica*²⁾.

II. Nel caso $f = 0$ la (24) diviene $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$ e vedremo (n. 88) rappresentare una lemniscata bernoulliana.

III. Se finalmente si prende il segno $-$, per ottenere una curva reale è necessario supporre $2c^2 > f^2$; fatto in conseguenza $2c^2 - f^2 = a^2$ ed inoltre $2c^2 + f^2 = b^2$ la (24) diviene

$$(24_{III}) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2 \quad \text{ove} \quad a^2 > b^2$$

pure rappresentante una lemniscata iperbolica. In totale adunque la (24) può sempre ridursi ad una delle forme

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 \pm b^2 y^2;$$

ad esse corrispondono le seguenti equazioni polari

$$(25) \quad \rho^2 = a^2 \cos^2 \omega \pm b^2 \sin^2 \omega^3,$$

e queste provano che le curve in questione possono ottenersi effettuando una trasformazione per raggi vettori reciproci di centro O e potenza k^2 sulle coniche rappresentate dall'equazione $a^2 x^2 \pm b^2 y^2 = k^4$. È poi

¹⁾ Il caso particolare corrispondente all'equazione polare

$$\rho = \sqrt{1 + 3 \cos^2 \omega}$$

è considerato nella memoria di E. COMINOTTO, *Geometria della curva magnetica* (Nuovo Cimento, VI Ser., T. III, 1912).

²⁾ Il NEUBERG preferisce il nome di *lemniscatoide* (*Sur quelques systèmes de tiges articulées*, Liège 1886, p. 36).

³⁾ Quest'equazione prova che le lemniscate del Booth appartengono alla classe di curve studiate dal TORTOLINI nell'articolo *Alcune proprietà delle curve algebriche rappresentate dall'equazione polare $r^{2n} = A \cos^n \theta + B \sin^n \theta$* (Annali di Mat., T. VI, 1864).

facile vedere (e noi lo dimostreremo nel n. 270) che esse sono anche podarie di un'ellisse o di un'iperbola rispetto al centro.

Per la delineazione effettiva delle curve di cui ci occupiamo torna utile il procedimento emergente dalla proposizione seguente: « Dato un cerchio (fig. 26 a, b, c) di centro C e raggio R , ed un punto O

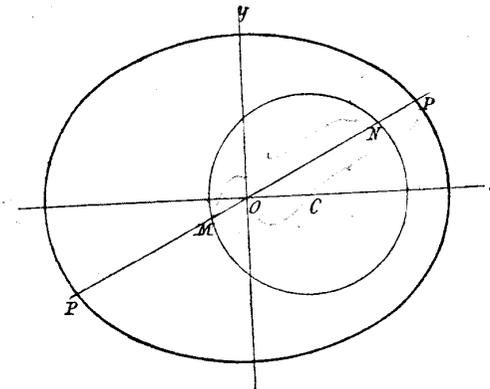


Fig. 26 a. — Lemniscata di Booth ellittica.

del suo piano, alla distanza d da C , su ogni trasversale condotta per O si porta un segmento OP eguale alla corda intercetta su quella trasversale del dato cerchio; il luogo del punto P è una lemniscata

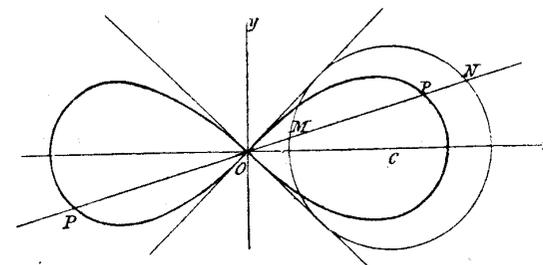


Fig. 26 b. — Lemniscata di Bernoulli.

del Booth ellittica od iperbolica secondochè O è interno od esterno al cerchio ». Ciò risulta dall'essere $\rho = R \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \omega}$ l'equazione polare e $(x^2 + y^2)^2 = 4 [R^2 x^2 + (r^2 - d^2) y^2]$ l'equazione cartesiana del luogo del punto P . Nel caso particolare $d = R\sqrt{2}$, la curva risultante è una lemniscata di Bernoulli e la costruzione indicata ricade in altra, che viene attribuita a Maclaurin¹⁾.

¹⁾ Cfr. AUBRY, *Journ. des Math. spéciales*, 4^a Serie, T. V, 1896, p. 155.

Se poi si osserva che le equazioni (24I. II. III) si ottengono eliminando z fra le due equazioni $a^2 x^2 \pm b^2 y^2 = k^2 z^2$, $x^2 + y^2 = k z$, si concluderà, col Booth, che « le curve di cui ci occupiamo possono considerarsi come proiezioni ortogonali dell'intersezione di un paraboloide di rotazione e di un cono, aventi comune l'asse ed il vertice, purchè la proiezione sia fatta su un piano perpendicolare a quell'asse ».

Paragonando finalmente le equazioni (24I. II. III) con la (4) si vede che: « La lemniscata ellittica (24I) si ottiene dalla spirale entrante generata dalla rotazione di un cerchio di raggio $a^2/2 \sqrt{a^2 - b^2}$ attorno ad un asse che disti dal suo centro della lunghezza $\sqrt{a^2 - b^2}/2$, tagliandola con un piano distante dall'asse di rotazione della lun-

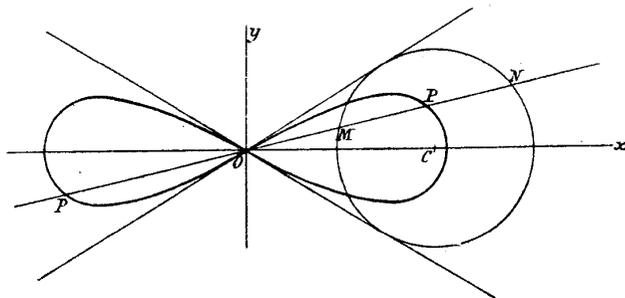


Fig. 26 c. — Lemniscata di Booth iperbolica.

ghezza $b^2/2 \sqrt{a^2 - b^2}$; invece le lemniscate iperboliche (24II. III) si possono dedurre dalla spirale aperta generata dalla rotazione del cerchio di raggio $a^2/2 \sqrt{a^2 + b^2}$ attorno ad un asse che disti dal suo centro della lunghezza $\sqrt{a^2 + b^2}/2$, tagliandola con un piano distante dall'asse di rotazione della lunghezza $b^2/2 \sqrt{a^2 + b^2}$.

La rettificazione delle lemniscate del Booth dipende da integrali ellittici di I e III specie; si può dire anzi che è in grazia di questa proprietà che dette curve attirarono l'attenzione del citato geometra inglese, nonchè quella del Tortolini¹⁾, il quale, indipendentemente dal Booth, studiò la lemniscata iperbolica, eseguendo la bisezione e trisezione di un quadrante di essa e dimostrando esistere nella stessa infinite coppie di archi la cui differenza è un arco circolare.

¹⁾ V. gli articoli in *Giornale arcadico*, 1844 e *Rivista scientifica*, 1845, compendiatamente e completati nella memoria *Sulla divisione degli archi di una curva del quart'ordine rappresentata dall'equazione $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2$* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, Serie 2^a, T. I, 1862).

CAPITOLO V

La concoide di Nicomede.

67. Circa contemporaneo dell'inventore delle spiriche è Nicomede, geometra esso pure poco noto, vissuto fra il 250 ed il 150 a. C., al quale si deve il concetto, lo studio e due importanti applicazioni (alla duplicazione del cubo ed alla trisezione dell'angolo) di una notevole curva del quart'ordine chiamata *concoide* o *cocloide* (da $\kappa\omicron\gamma\kappa\eta$ = conchiglia) per la forma che presenta¹⁾. Eccone la definizione: dato un punto fisso O (*polo*), una retta fissa r (*base*) ed un segmento rettilineo l (*intervallo*) si conduce per O una retta arbitraria a segare r in M (v. fig. 27 a, b, c); a partire da M si porta

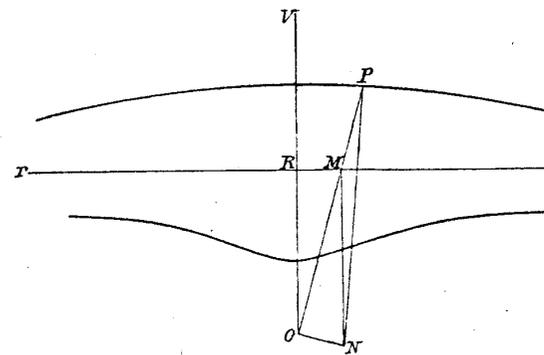


Fig. 27 a. — Concoide di Nicomede, con punto isolato.

sopra quella retta il segmento $MP = l$ nella direzione OM ; il luogo di tutti gli analoghi punti è quella curva che gli antichi chiamavano *prima concoide*, che Roberval diceva *conchoide de dessus*²⁾

¹⁾ I principali passi di antichi scrittori concernenti la *concoide*, trovansi raccolti a p. 404-410 dell'opera già citata su *Le scienze esatte nell'antica Grecia*.

²⁾ V. le *Observations* citate a p. 172.

e che nel *Dictionnaire des Sciences mathématiques* del Montferrier ¹⁾ è indicata col nome di *conchoïde citérieure*. Se invece il segmento $MP = l$ si porta nella direzione opposta viene generata un'altra curva, probabilmente pure considerata dagli antichi, alla quale il Roberval ed il Montferrier danno risp. i nomi di *conchoïde de dessous*

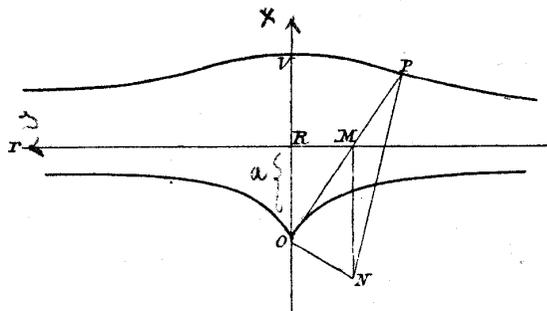


Fig. 27 b. — Concoïde di Nicomede cuspidata.

e *conchoïde ultérieure*. Le due curve ora definite costituiscono, secondo il nostro modo di vedere, una sola curva. Preso per polo O e per asse polare la perpendicolare calata da O su r , detta inoltre a

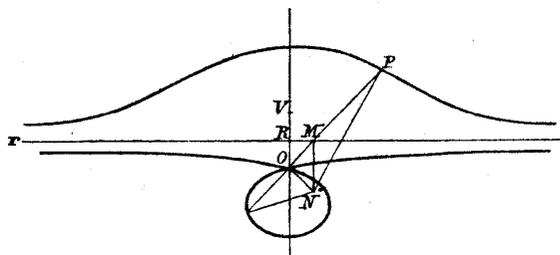


Fig. 27 c. — Concoïde di Nicomede nodata.

la distanza fra quel punto e questa retta, tale curva è rappresentata in coordinate polari ρ, ω ²⁾, dall'equazione

$$(1) \quad \rho = \frac{a}{\cos \omega} + l.$$

¹⁾ T. I (Bruxelles 1838), p. 353.

²⁾ Qui e in seguito al raggio vettore si attribuiscono anche valori negativi in base alle convenzioni espone dall'autore nelle sue *Osservazioni sopra le coordinate polari* (Period. di mat., II Ser., T. XV, 1899).

$$x(x+y) - 2ax(x+y) + (e-l)^2x + a^2y = 0$$

Passando a coordinate cartesiane questa diviene:

$$(2) \quad (x-a)^2(x^2+y^2) - l^2x^2 = 0$$

$$x^2(x^2+y^2) - 2ax(x^2+y^2) + (a^2-l^2)x^2 + a^2y^2 = 0$$

La conchoïde di Nicomede è pertanto una curva di quart'ordine passante per i punti ciclici del piano; all'infinito essa possiede una cuspide con la retta r per relativa tangente: resta così dimostrato l'accostarsi asintoticamente della conchoïde alla propria base, che gli antichi avevano rilevato. Il polo è sempre un punto doppio della curva e precisamente un nodo, una cuspide ed un punto isolato secondo che $l \geq a$; emerge da ciò che il secondo ramo della curva è suscettibile di tre forme distinte, le quali probabilmente corrispondono ai nomi di *seconda*, *terza* e *quarta conchoïde* di cui Pappo fa menzione, senza però dichiararne il significato. Nel caso $l > a$ i due rami della curva incrociano in O hanno ivi per curvatura $a/l\sqrt{l^2-a^2}$.

La grande celebrità della conchoïde fece sì che ad essa vennero applicati tutti i metodi per costruire le tangenti e le normali alle curve, che vennero inventati contemporaneamente alla geometria analitica. Ricordiamo fra essi anzitutto quello indicato da Descartes ¹⁾, senza però arrestarci ad esporlo, essendo esso inferiore di molto al seguente, fondato sulla considerazione della sunnormale polare $d\rho/d\omega$. Si deduca dalla (1) la seguente:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = a \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega};$$

essa prova che, condotte da O la perpendicolare a OM e da M la perpendicolare a r , esse si tagliano in un punto N tale che per N passano le normali alla conchoïde nei due punti di essa appartenenti al raggio vettore OM ; nulla di più facile adunque del costruire queste normali e quindi le relative tangenti.

D'altronde la ricerca delle tangenti alla conchoïde venne proposta da Fermat a Roberval, con lettera del 22 settembre 1636 ²⁾; Roberval, rispondendovi l'11 ottobre del medesimo anno, affermava di essersi già occupato di tale ricerca, collegandola alle equazioni biquadratiche, e segnalava due punti (i flessi?) « par lesquels on ne peut mener des tangentes » ³⁾. Questa osservazione, non a torto destò la meraviglia di Fermat, il quale replicò a Roberville, in data 4 novembre 1636, « j'ai peur que vous ayez equivoqué » ⁴⁾, e continuò esponendo la costruzione delle tangenti da lui ideata:

¹⁾ *La géométrie*, nouvelle édition (Paris 1886), p. 41.

²⁾ *Oeuvres de Fermat*, T. II (Paris 1894), p. 72.

³⁾ Id., p. 82.

⁴⁾ Id., p. 86.

è la stessa che si legge in appendice al suo celebre *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*¹⁾. È bene rilevare che Fermat si occupa ivi esclusivamente della prima concoide — osservando anzi che erroneamente Pappo ed Eutocio (od i loro editori!) la rappresentarono convessa verso il polo²⁾ —; ma delle altre fa cenno nella lettera a Roberval del 16 dicembre 1636, ove è proposta la questione di « trouver une tangente à un point donné en la seconde conchoïde de Nicomède »³⁾. In qual modo Roberval l'abbia risolta si apprende dai §§ IV e V delle sue *Observations sur la composition des mouvements et sur les touchantes des lignes courbes*⁴⁾, ove il metodo cinematico che di lui porta il nome, viene applicato tanto alla concoide superiore quanto all'inferiore: per brevità ci limitiamo a citare tale applicazione.

68. E riprendiamo invece l'equazione (1). Ne dedurremo:

$$(3) \quad x = a + l \cos \omega, \quad y = a \operatorname{tg} \omega + l \operatorname{sen} \omega$$

Queste provano che affinché siano in linea retta i tre punti (α) (β) (γ) di un ramo della concoide si deve avere

$$\begin{vmatrix} a + l \cos \alpha & a \operatorname{tg} \alpha + l \operatorname{sen} \alpha & 1 \\ a + l \cos \beta & a \operatorname{tg} \beta + l \operatorname{sen} \beta & 1 \\ a + l \cos \gamma & a \operatorname{tg} \gamma + l \operatorname{sen} \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & a \operatorname{tg} \alpha + l \operatorname{sen} \alpha & 1 \\ \cos \beta & a \operatorname{tg} \beta + l \operatorname{sen} \beta & 1 \\ \cos \gamma & a \operatorname{tg} \gamma + l \operatorname{sen} \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o anche

$$a \begin{vmatrix} \cos \alpha & \operatorname{tg} \alpha & 1 \\ \cos \beta & \operatorname{tg} \beta & 1 \\ \cos \gamma & \operatorname{tg} \gamma & 1 \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 1 \\ \cos \beta & \operatorname{sen} \beta & 1 \\ \cos \gamma & \operatorname{sen} \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ora questi determinanti valgono risp.⁵⁾:

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \left\{ \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) - 1 \right\},$$

¹⁾ *Oeuvres de Fermat*, T. I (Paris 1891), p. 160, e T. III (Paris 1896), pag. 142.

²⁾ *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 87.

³⁾ Id., p. 94.

⁴⁾ *Mém. de l'Académie des Sciences*, T. VI (Paris 1730).

⁵⁾ Pel calcolo di questi determinanti e degli analoghi vedi la mia nota *Sopra una classe notevole di alternanti d'ordine qualsivoglia* (Period. di mat. II Sez., T. XIII, 1898).

$$4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta);$$

dunque l'equazione precedente, liberata dal fattore non nullo

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

diviene:

$$(4) \quad a \left\{ \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) - 1 \right\} + 2l \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 0$$

Facendo ivi $\alpha = \beta = \gamma = \lambda$ si ottiene

$$a(3 \cos 2\lambda - 1) + 2l \cos^3 \lambda = 0$$

ovvero

$$(5) \quad 2l \cos^3 \lambda + 3a \cos^2 \lambda - a = 0$$

Ponendo $\cos \lambda = 1/u$ questa diviene

$$2a u^3 - 3a u - l = 0;$$

ora se $a > l$ quest'equazione ha tre radici reali, ma una è da escludersi non essendo compresa fra -1 e $+1$; se invece $a < l$ l'equazione stessa ha una sola radice reale. Perciò la concoide nodata ha due flessi reali, mentre quella con punto isolato ne ha quattro; due soltanto ne ha pure quella cuspidata. Una costruzione geometrica dei flessi venne data senza dimostrazione da Huygens nella lettera che egli scrisse allo Schooten il 23 ottobre 1653¹⁾ e pubblicata nel secondo volume di *Chr. Hugenii Opera varia* (Lugd. Batav., 1724): è così elegante che vale la pena di esporla.

Indicando con x l'ascissa di un flesso, avremo per la prima delle (3), $\cos \lambda = (x - a)/l$, onde la (5) diviene

$$(6) \quad x^3 - 3a^2 x + 2a(a^2 - l^2) = 0;$$

questa equazione conferma che la determinazione dei flessi della concoide è in generale un problema cubico²⁾; se però $l^2 = 2a^2$, l'equazione precedente diviene

$$(x + a)(x^2 - ax - 2a^2) = 0,$$

onde — come avvertì Huygens stesso — in tal caso il problema di

¹⁾ *Oeuvres de Huygens*, T. I (La Haye, 1888), p. 245-246.

²⁾ Cfr. anche l'*Analyse des infiniment petits* del Marchese de l'Hôpital (II ed., Paris, 1705), p. 65.

viene quadratico. Nel caso generale, per risolvere graficamente l'equazione (6) adoperiamo il metodo indicato da Cartesio per qualunque equazione della forma

$$x^3 = ax + \beta^1);$$

si pone perciò

$$a = mp, \beta = m^2q, x^2 = my;$$

la precedente diviene quindi

$$x^2 + y^2 = qx + (p + m)y$$

sicchè le ascisse dei flessi sono quelle dei punti in cui il circolo rappresentato da quest'equazione è segato dalla parabola $y^2 = mx$. Per applicare siffatto procedimento all'equazione (6) porremo

$$3a^2 = mp, \quad 2a(l^2 - a^2) = m^2q$$

ossia

$$p = \frac{3a^2}{m}, \quad q = \frac{2a(l^2 - a^2)}{m^2};$$

facendo inoltre per comodità $m = -a$, otterremo le seguenti equazioni delle due curve ausiliarie:

$$x^2 + ay = 0, \quad \left[x - \frac{a^2 - l^2}{a} \right]^2 + (y + 2a)^2 = \left(a - \frac{l^2}{a} \right)^2 + 4a^2$$

o anche, ponendo $y + 2a = y'$ e quindi togliendo gli accenti,

$$x^2 + ay = 2a^2, \quad \left[x - \left[a - \frac{l^2}{a} \right] \right]^2 + y'^2 = \left[a - \frac{l^2}{a} \right]^2 + 4a^2$$

Le curve così rappresentate si possono definire geometricamente senza difficoltà. Sia infatti R il piede della perpendicolare calata dal polo O sulla base r ; si porti sopra la parallela condotta da O a r $OV = 2a$; allora la prima di quelle curve è una parabola avente V per vertice, a per parametro, quella parallela per asse e concava verso il polo. La seconda è invece il cerchio che ha per centro qual punto C della perpendicolare calata dal polo sulla base che dista dal polo della lunghezza $|a - l^2/a|$, e passa pel punto V . Essendo tale definizione delle curve ausiliarie identica nella sostanza a quella data da Huygens, si ha un forte argomento per ritenere

¹⁾ V. ad es. MATTHIESSEN, *Grundzüge der antike und moderne Algebra* (Leipzig 1878), p. 948.

che questi giunse alla sua costruzione dei flessi applicando il metodo di Cartesio di cui noi ci servimmo.

Allo stesso Huygens devesi l'osservazione che l'area interposta fra la conoide e la propria base è infinita¹⁾; essa, infatti, è espressa dall'integrale

$$\frac{1}{2} \int \left\{ \left[\frac{a}{\cos \omega} + l \right]^2 - \frac{a^2}{\cos^2 \omega} \right\} d\omega$$

preso fra i limiti $-\pi/2, \pi/2$; ora siccome il valore di quell'integrale è

$$al \log \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right] + \frac{1}{2} l^2 \omega,$$

così per quei limiti assume il valore ∞ .

L'area compresa fra la perpendicolare calata dal polo sulla base, un raggio vettore e i corrispondenti due archi di conoide è

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^\omega \left[\left[\frac{a}{\cos \omega} + l \right]^2 - \left[\frac{a}{\cos \omega} - l \right]^2 \right] d\omega = \\ &= 2al \int_0^\omega \frac{d\omega}{\cos \omega} = 2al \log \operatorname{tg} (\pi/4 + \omega/2) = 2al \log \operatorname{tg} \frac{1 + \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}, \end{aligned}$$

risultato ottenuto dal Cotes²⁾. Il quale ha inoltre calcolato il volume che genera quell'area rotando attorno alla perpendicolare anzidetta.

Le questioni concernenti la quadratura della conoide possono anche trattarsi convenientemente mediante coordinate cartesiane; infatti la (2) dà

$$\int y dx = \int \frac{x}{x-a} \sqrt{(l-a+x)(l+a-x)} dx;$$

ora introducendo la nuova variabile t definita dall'equazione

$$t^2 = \frac{l+a-x}{l-a+x},$$

questo integrale diviene razionale e si arriva a concludere con Gio-

¹⁾ V. le due lettere, dirette al Wallis il 6 settembre 1658 e il 1° gennaio 1659, inserite nel T. II, p. 212 e 298 delle *Oeuvres e Huyghens*.

²⁾ *Harmonia mensurarum* (Cantabridge, 1722), p. 25.

vanni Bernoulli « erit itaque spatium conchoidale aequale spatio hyperbolico, rectilineo et circulari »¹⁾).

La concoide non gode di molte proprietà geometriche²⁾; ma la facilità con cui si può descriverla mediante un semplice strumento ne rende utilissimo l'impiego nella pratica: citiamo ad es. l'applicazione che essa ricevette nell'architettura alla delineazione dei fusti delle colonne³⁾. Inoltre, poichè essa serve a risolvere i problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, e poichè all'uno od all'altro di questi problemi si può ridurre qualunque questione cubica o biquadratica, così Newton propose di ascriverla, assieme alla retta ed alla circonferenza (v. nn. 3 e 5) fra le linee a cui al geometra è concesso di servirsi, in ogni occasione⁴⁾.

¹⁾ V. la terza delle *Lectiones mathematicae* (Joh. Bernoulli Opera, T. III, p. 400-401).

²⁾ Alcune sono indicate nella *Note sur la conchoïde de Nicomède* (Mathesis, III Ser., T. IV, 1904) di A. H. COUVERT.

³⁾ POPPE, *Ausführliche Geschichte des Anwendung aller kurvemen Linien* (Nürnberg, 1802), p. 209.

⁴⁾ *Arithmétique universelle*, trad. Beaudeau, T. II (Paris 1802), p. 52.

CAPITOLO VI

Generalizzazioni della concoide di Nicomede, in particolare le concoide a base circolare.

69. Il concetto di concoide, quale venne stabilito da Nicomede, si presta a svariate generalizzazioni. Eccone una di data recente¹⁾: Dato un angolo (di vertice O ed ampiezza 2α) ed un punto fisso del suo piano, sia C il centro di una circonferenza tangente ai due lati dell'angolo e siano M gli estremi del diametro di essa che passa per A ; il luogo dei punti M è una curva la quale, quando O sta all'infinito, diviene una concoide di Nicomede avente per polo A , per base la bisettrice della striscia sostituyente l'angolo del caso generale e per intervallo la metà della larghezza di questa. Nell'ipotesi generale, presi per assi coordinati le bisettrici del dato angolo, si trova facilmente (*)

$$(1) \quad y^2 \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \} = \operatorname{sen}^2 \alpha (x y_0 - x_0 y)^2$$

come equazione del luogo (supposto che x_0 e y_0 siano le coordinate di A); questo è dunque una curva del quart'ordine. La stessa curva gode un'altra proprietà che mette in luce una circostanza degna di nota: infatti data una circonferenza (di centro C e raggio r) e dati due punti A , O del suo piano, si unisce un punto qualunque P della curva a C e O ; la retta OP è tagliata dalla parallela condotta da A al raggio CP in un punto M ; ora, per trovarne l'equazione del luogo del punto M , si prenda O per origine e OC per asse delle x , si chiami a la distanza OC e si indichino con x_0 , y_0 le coordinate di M ; si otterrà così la seguente relazione fra le coordinate x , y di M :

$$(2) \quad y^2 \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \} = (r/a)^2 (y_0 x - x_0 y)^2,$$

che ha la stessa forma della (1) e può ad essa identificarsi ogni qualvolta il punto O sia esterno alla data circonferenza. Ora nel

¹⁾ V. JERABEK, *Sur une quartique* (Mathesis, 2^a Série, vol. IX, 1899).

(*) eliminando $\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 \\ y - y_0 \end{array} \right\} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \left\{ \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\}$

$$\left| \begin{array}{cc} x & y \\ x_0 & y_0 \end{array} \right| = 0$$

A(2)

caso limite $r = a$ dalla (2) si separa il fattore $y - y_0$, tolto il quale resta

$$y(x^2 + y^2) + y_0 x^2 - 2x_0 xy - y_0 y^2 = 0,$$

equazione di una strofoide (v. n. 37): donde emerge che la curva di cui si tratta può considerarsi anche come generalizzazione di questa linea.

Molto più naturale ed antica, più vasta ed importante è l'estensione del concetto di concoide nascente dal supporre la base, invece che rettilinea, conformata comunque. Siffatta generalizzazione si presenta così spontaneamente che crediamo non si sia allontanato dal vero chi la suppose nota agli antichi, almeno pel caso in cui la base è circolare e contenente il polo¹⁾; in tutta la sua vastità la si trova nelle già citate *Observations sur la composition des mouvements* del Roberval²⁾ e poi nella memoria del De la Hire che tratta appunto *Des conchoïdes en général*³⁾ (Mém. de l'Académie des Sciences, MDCVIII, Paris 1730). Ma a siffatta generalizzazione non si arrestarono i geometri. Infatti G. de Longchamps⁴⁾ ha considerate le curve definite come segue: date in un piano tre linee $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ si conduce la tangente in un punto qualunque M della prima e se ne determinano le intersezioni M_1, M_2 con le altre due; si porta su di essa il segmento $\overline{MP} = \overline{M_1 M_2}$; il luogo del punto P è una curva concoïdale. Sono notevoli i casi in cui Γ riducesi ad un punto O ⁵⁾, nonchè quello in cui, per di più, Γ_1 sia un cerchio di centro O ⁶⁾; è anche ammissibile l'ipotesi che Γ_1 e Γ_2 coincidano⁷⁾; è pur degno di menzione il fatto che un gran numero di curve speciali (quali la cissoide, la strofoide e la lemniscata di Bernoulli) rientrano nella categoria delle curve concoïdali.

Limitandoci a questo cenno intorno alle curve concoïdali, ritorniamo alle concoïdi a base qualunque⁸⁾, per dimostrare anzitutto

¹⁾ M. CURTZE, *Reliquiae Copernicanae* (Zeitschrift, T. XX, 1875).

²⁾ Mém. de l'Académie Royale des Sciences, T. VI (Paris 1730), p. 32.

³⁾ Allo stesso matematico deve il concetto di *concoïde obliqua*; tale nome viene dato all'estremo Q di un segmento PQ di lunghezza costante formante con OP un angolo dato, O essendo un punto fisso e P un punto arbitrario di una data curva (base); se quell'angolo è nullo si ritrova la concoïde ordinaria.

⁴⁾ *Sur les conchoïdales* (Nouv. Corr. mathém., T. V, 1879).

⁵⁾ SCHOENTJES, *Sur un mode de génération des conchoïdes* (Mathesis, T. IV, 1884).

⁶⁾ WICKERSHEIMER, *Sur les conchoïdes* (Journ. de Math. spéciales, IV Serie, T. V, 1896). A tale classe di curve appartiene la sestica considerata da E. N. BARIEN nella prima parte dell'articolo *Sur deux courbes généralisatrices du limaçon de Pascal* (Bulletin de Math. spéc., T. V 1898-99).

⁷⁾ Se Γ si riduce ad un punto e Γ_1, Γ_2 coincidono in un cerchio, la concoïde è (come vedemmo nel n. 64) una lemniscata di Booth.

⁸⁾ Esse risolvono il problema di determinare le curve tali che le loro

che, sapendo costruire le normali alla base, è agevole trovare quelle alla concoïde¹⁾. Infatti se $\rho = f(\omega)$ è l'equazione polare della base (supposto preso il punto fisso per polo) e l l'intervallo, sarà $\rho = f(\omega) \pm l$ la corrispondente equazione della concoïde; ora siccome in generale $d\rho/d\omega$ è l'espressione della sunnormale polare, così nel caso attuale $f'(\omega)$ misurerà la sunnormale polare in punti corrispondenti tanto della base, quanto della concoïde. Preso dunque un punto M della base, e segnati i corrispondenti punti M_1 e M_2 della concoïde, se N è l'intersezione della normale in M alla base con la perpendicolare nel polo O al raggio vettore OM , saranno NM_1 e NM_2 normali alla concoïde in M_1 e M_2 . Se la base è rettilinea si ritrova la costruzione segnalata nel n. 65; se è circolare si ottiene una costruzione non meno elegante che lasciamo al lettore di enunciare aiutandosi con le figure 28 a, b, c (pag. 175).

Il calcolo dell'area dà risultati non meno eleganti. Detta infatti A l'area descritta dal raggio vettore $\rho + l$ di un ramo di concoïde si ha

$$A = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\Omega} (\rho + l)^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_{\omega_0}^{\Omega} \rho^2 d\omega + l \int_{\omega_0}^{\Omega} \rho d\omega + \frac{1}{2} l^2 (\Omega - \omega_0);$$

ora il primo integrale misura l'area descritta dal raggio vettore della base, onde si può considerare come conosciuto; in conseguenza il calcolo di A è ridotto alla valutazione dell'integrale $\int \rho d\omega$. Noto questo, si trova subito anche l'area descritta dal raggio vettore $\rho - l$ dell'altro ramo della concoïde²⁾.

Quando la base Γ è una curva algebrica $f(x, y) = 0$ di ordine n (passante r volte per il polo e s volte pei punti ciclici), Γ_1 è pure algebrica e il suo ordine n_1 si può determinare come segue. Se (x, y) e (x_1, y_1) sono due punti corrispondentisi in Γ e Γ_1 e si suppone che il polo cada nell'origine delle coordinate, sussisteranno le equazioni

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = l^2, \quad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}, \quad f(x, y) = 0$$

e l'equazione di Γ_1 si otterrà eliminando x e y fra queste tre equazioni. Limitandosi alla ricerca dell'ordine di Γ_1 , bisognerà determinare quanti dei suoi punti appartengono ad una retta arbitraria

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

corde passanti per un dato punto abbiano la stessa lunghezza: v. JOUVIN negli *Ann. de math.*, T. I, 1810, p. 124.

¹⁾ L. EULERI, *Opera postuma mathematica et physica*, T. I (Petropli 1862), p. 370-71.

²⁾ Per la determinazione della curvatura si può applicare il metodo generale esposto da K. FEDERHOFER nella nota *Zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte ebener Kurven* (Wien. Ber., T. 135, 1926).

cioè il numero delle soluzioni del sistema costituito dalle tre precedenti equazioni e dalla

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p = 0.$$

Ora, eliminando x_1 e y_1 si ottiene

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) (x^2 + y^2) = l^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2,$$

onde n_1 è il numero dei punti variabili comuni alla curva Δ di cui questa è l'equazione e la base Γ . Ma, passando a coordinate polari si ottiene per rappresentare Δ l'equazione

$$\rho = \frac{p}{\cos(\omega - \alpha)} + l,$$

e questa prova che Δ è una concoide di Nicomede col polo in O ; ciò basta per concludere che in generale si ha $n_1 = 4n - 2(r + s)$ ¹⁾. Il polo è per la concoide un punto multiplo secondo $2n - s$.

La concoide Γ_1 si decompone in due²⁾, ciascuna dell'ordine $2n - (r + s)$ se $f(x, y)$ ha la forma

$$(x^2 + y^2) \varphi(x, y) - \psi(x, y) = 0,$$

φ e ψ essendo funzioni razionali intere di x, y , vale a dire quando Γ appartiene alla I delle categorie di curve considerate dall'Halphen³⁾.

70. Dopo le concoide a base rettilinea, si incontrano per prime quelle a base circolare⁴⁾. Supponendo di più che il polo stia sulla base si ottiene una curva che Roberval ha considerata nelle sue

¹⁾ G. LORIA, *Intermed.*, T. VIII, 1901, p. 297-8.

²⁾ E. KÖSTLIN, *Ueber die ebenen algebraischen Kurven, deren Konchoiden zerfallen* (Mitth. Württemberg, II Ser., T. X, 1908).

³⁾ *Etude sur les points singuliers des courbes algébriques planes* (Paris 1883).

⁴⁾ Si presentano in seguito quelle aventi per base una conica. Del caso in cui questa sia parabolica trattò il DE LA HIRE nella memoria citata a p. 172, dei casi in cui sia ellittica od iperbolica il RÉAUMUR nello scritto intitolato *Manière générale de trouver une infinité de courbes nouvelles en faisant parcourir une ligne quelconque donnée par une extrémité d'une ligne droite donnée aussi et toujours placée sur un même point* (Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1708). Se la base è una conica qualunque e il polo cade in un fuoco o in un vertice si ottengono curve notevoli le quali si trovano investigate nei seguenti lavori: F. GOMES TEIXEIRA, *Obras*, T. IV, p. 312; J. CARDINAAL, *La conchoïde elliptique et les courbes qu'en dérivent* (Arch. Teyler, 2^a Ser., T. VIII, 1902); H. WIELEITNER, *Die Scheitel-Konchoïden der Kegelschnitten* (Arch. Math. u. Phys., III Ser., T. XII, 1907). Altra concoide è studiata nella Diss. del GUGGISBERG, *Die Konchoïde der kubischen Parabel* (Bern 1912).

pù volte citate *Observations*¹⁾, chiamandola « limaçon de M. P. » ed esponendone alcune proprietà di cui egli attribuisce la scoperta a Pascal. Perciò si suole chiamarla *lumaca di Pascal*²⁾. Dalla definizione scaturisce un nuovo aspetto da cui essa può considerarsi. Sia infatti (figure 28 a, b, c) C il centro della base circolare della concoide, O il polo e A l'altro estremo del diametro OC ; condotta per O una corda arbitraria OM della base, presi $MP_1 = MP_2 = l$, saranno P_1 e P_2 punti della lumaca; descritto poi un circolo di centro A e raggio l e condotto il diametro N_1N_2 parallelo a OM , la figura $N_1N_2P_2P_1$ sarà un rettangolo e P_1N_1 , P_2N_2 saranno due tangenti al circolo; in conseguenza i punti P_1, P_2 appartengono alla podaria del punto O rispetto al

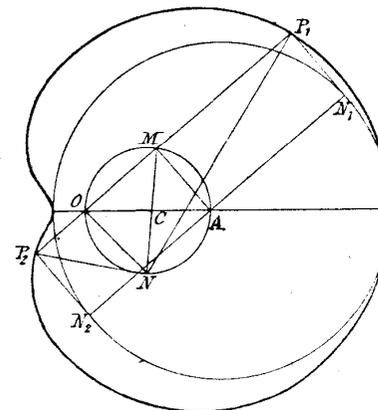


Fig. 28 a.

Lumaca di Pascal con punto isolato.

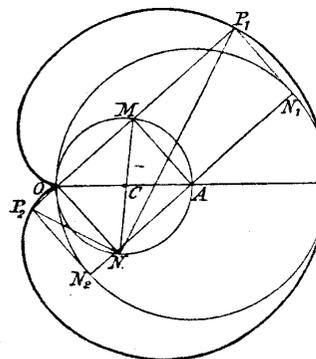


Fig. 28 b. — Lumaca di Pascal cuspidata o cardioida.

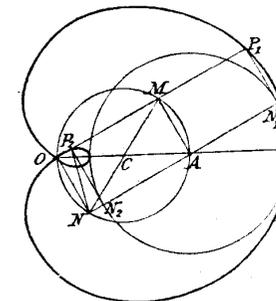


Fig. 28 c.

Lumaca di Pascal nodata.

circolo di centro A e raggio l . Dunque la lumaca di Pascal è la po-

¹⁾ Vol. cit., p. 35.

²⁾ Notiamo con P. TANNERY (cfr. CANTOR, *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, II Bd., 2. e Aufl., Leipzig 1900, p. 882) che il PASCAL di cui qui si tratta è indubbiamente STEFANO, padre di BIAGIO.

daria di un circolo rispetto ad un punto del suo piano¹⁾. Anzi, se S è un punto dello spazio avente per proiezione ortogonale O , per un noto teorema di stereometria elementare, anche le rette SP_1 e SP_2 saranno perpendicolari alle tangenti in N_1 e N_2 a quel circolo: ciò prova che — come osservò anche il Roberval²⁾ — nell'ultimo enunciato le parole « del suo piano » possono sostituirsi con queste altre « qualunque dello spazio ».

Preso al solito un sistema di coordinate polari avente per polo O e OC per asse polare, se a è il raggio della base, sarà

$$(3) \quad \rho = 2a \cos \omega + l$$

l'equazione polare della lumaca e quindi

$$(4) \quad (x^2 + y^2 - 2ax)^2 = l^2(x^2 + y^2)$$

la sua equazione cartesiana³⁾. La lumaca è dunque una curva di quarto ordine, di cui i punti ciclici sono cuspidi: le corrispondenti tangenti avendo per equazioni $x \pm iy = a$, il centro della base è un fuoco singolare quadruplo della curva. Anche O è un punto doppio; le relative tangenti avendo per equazioni $\sqrt{4a^2 - l^2}x \pm ly = 0$, O è un nodo od un punto isolato secondochè $l \leq 2a$: del caso intermedio $l = 2a$, in cui O è una cuspidi, ci occuperemo nel veniente Capitolo⁴⁾. Qui osserviamo che, essendo la lumaca di Pascal una curva del quart'ordine con due cuspidi ed un punto doppio, essa è di quarta classe e possiede una tangente doppia e due flessi; è dunque una curva razionale correlativa a sè stessa⁵⁾. Nel caso $l < 2a$ i due rami di curva incrociati in O hanno ivi il raggio di curvatura espresso da $\sqrt{4a^2 - l^2}$.

¹⁾ Da questo punto di vista le lumache di Pascal sono considerate nella memoria di O. RICHTER, *Ueber Kreisfusspunktcurven* (Zeitschrift, T. XXXIV, 1892).

²⁾ Vol. cit., p. 38-39.

³⁾ La semplice ispezione dell'equazione polare della lumaca conduce a considerare la curva analogamente rappresentata dall'equazione

$$\rho = 2a \cos \omega + 2b \sin \omega + l;$$

ora se si pone $a = m \cos \mu$, $l = m \sin \mu$, $\omega - \mu = \theta$ questa equazione diviene $\rho = 2m \cos \theta + l$, che appartiene a una lumaca di Pascal. Emerge da ciò che le curve studiate nella memoria di M. MUEHLENBRUCH, *Ueber die cardioidenformige Curven welche durch die Polargleichung $r = a + b \sin t + c \cos t$ gegeben sind*, Diss. Jena 1867) non differiscono da quelle di cui ci stiamo occupando.

⁴⁾ Se l è immaginario puro la curva è immaginaria, benchè rappresentata da un'equazione cartesiana reale e fu incontrata in questioni di analisi da E. ECKARDT (Arch. f. Math. u. Phys., III Ser., T. XI, 1906, p. 53).

⁵⁾ Come tale è studiata nella nota di L. E. WEAR, *Selfdual plane curve of the fourth order* (Amer. Journ. of Math., T. 42, 1920).

La (4) prova che la tangente doppia della lumaca ha per equazione $x + l^2/8a = 0$ e che le ordinate dei relativi punti di contatto sono

$$y = \frac{\pm l \sqrt{16a^2 - l^2}}{8a};$$

i contatti sono pertanto reali o ideali secondochè $l \leq 4a$; in particolare si vede che sono certamente reali quando la curva ha un punto doppio¹⁾.

Per determinare i flessi della lumaca ricaviamo dalla (3) le seguenti equazioni

$$(5) \quad x = 2a \cos^2 \omega + l \cos \omega, \quad y = 2a \cos \omega \sin \omega + l \sin \omega,$$

ovvero

$$(5') \quad x = a + a \cos 2\omega + l \cos \omega, \quad y = a \sin 2\omega + l \sin \omega;$$

perciò la condizione di collinearità dei tre punti (α) , (β) , (γ) è:

$$\begin{vmatrix} a + a \cos 2\alpha + l \cos \alpha & a \sin 2\alpha + l \sin \alpha & 1 \\ a + a \cos 2\beta + l \cos \beta & a \sin 2\beta + l \sin \beta & 1 \\ a + a \cos 2\gamma + l \cos \gamma & a \sin 2\gamma + l \sin \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$a^2 \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ \cos 2\beta & \sin 2\beta & 1 \\ \cos 2\gamma & \sin 2\gamma & 1 \end{vmatrix} + al \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin \alpha & 1 \\ \cos 2\beta & \sin \beta & 1 \\ \cos 2\gamma & \sin \gamma & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ al \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ \cos \beta & \sin 2\beta & 1 \\ \cos \gamma & \sin 2\gamma & 1 \end{vmatrix} + l^2 \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 1 \\ \cos \beta & \sin \beta & 1 \\ \cos \gamma & \sin \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

ora questi quattro determinanti valgono risp.

$$8 \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad 4 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta + \alpha}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - \cos(\alpha + \beta + \gamma), \quad 1$$

moltiplicati per $4 \sin(\beta - \gamma) | 2 \cdot \sin(\gamma - \alpha) | 2 \cdot \sin(\alpha - \beta) | 2$; onde la equazione precedente, liberata da questo fattore, diviene:

¹⁾ Giova notare che la curva studiata nella *Memoria analitica architettonica sull'ovoide* (Bibl. anal. di Scienze e lettere, vol. II, Napoli 1812) di A. RAHO (cfr. la memoria di F. AMODEO, *Giuseppe Sangro*, Atti dell'Acc. Pontaniana, T. 49, 1919) è una lumaca ove $a = l$.

$$8 a^2 \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma - \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \\ + al \left\{ 4 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \right. \\ \left. + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - \cos (\alpha + \beta + \gamma) \right\} + l^2 = 0$$

Facendo ivi $\alpha = \beta = \gamma = \lambda$ otterremo

$$8 a^2 + al (4 \cos^3 \lambda + 3 \cos \lambda - \cos 3 \lambda) + l^2 = 0,$$

o più semplicemente

$$8 a^2 + l^2 + 6 al \cos \lambda = 0.$$

L'anomalia di un flesso è dunque determinata dall'equazione

$$\cos \lambda = - \frac{8 a^2 + l^2}{6 al};$$

resta così confermata l'esistenza dei due flessi della lumaca e di più dimostrato che questi sono reali soltanto se $2 a < l < 4 a$; se ad es. la lumaca è nodata i due flessi sono immaginari; ma in ogni caso si trovano sulla retta reale

$$x - \frac{(8 a^2 + l^2) (4 a^2 - l^2)}{9 l^2} = 0$$

Notiamo finalmente che la (3) dà come espressione dell'area generata da un'intera rotazione del raggio vettore $2 a \cos \omega + l$, la seguente $2 \int_0^\omega (2 a \cos \omega + l)^2 d\omega = 4 \pi a^2 + 2 \pi l^2$, risultato già ottenuto dal Roberval¹⁾ e che è agevole l'enunciare a parole. Nel caso speciale $l = a$, quest'espressione diviene $6 \pi a^2$, che rappresenta il sestuplo dell'area del circolo base.

La rettificazione della lumaca dipende da integrali ellittici²⁾; infatti la (3) dà per il differenziale dell'arco l'espressione

$$ds = \sqrt{4 a^2 + l^2 + 4 al \cos \omega} d\omega.$$

Si noti ora che il differenziale dell'arco dell'ellisse

$$x = m \cos \varphi, \quad y = n \sin \varphi$$

¹⁾ Vol. cit., p. 40.

²⁾ Cfr. F. GOMES TEIXEIRA, *Nota sull'applicazione del teorema di Fa-gnano agli archi della lumaca di Pascal e della sinusoidale* (Period. di matem., III Ser., T. XIX, 1903).

è dato da

$$d\sigma = \sqrt{m^2 \sin^2 \varphi + n^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

ossia

$$d\sigma = \sqrt{\frac{n^2 + m^2}{2} + \frac{n^2 - m^2}{2} \cos 2\varphi} d\varphi;$$

ora questo si identifica con ds scegliendo m e n in modo che sia:

$$\frac{n^2 + m^2}{8} = 4 a^2 + l^2, \quad \frac{n^2 - m^2}{8} = 4 al \quad \text{e} \quad 2\varphi = \omega.$$

Ora queste danno

$$n/2 = 2 a + l, \quad m/2 = |2 a - l|;$$

dunque il perimetro della lumaca è eguale a quello d'un'ellisse avente per assi i quadrupli delle distanze fra il punto doppio e i vertici della curva¹⁾.

71. Essendo la lumaca una curva razionale, le coordinate de' suoi punti si potranno esprimere in funzione razionale di un parametro; si trova, infatti, ponendo nelle (5') $\operatorname{tg} \omega/2 = t$,

$$(6) \quad x = \frac{(1 - t^2) [(l+2a) + (l-2a)t^2]}{(1 + t^2)^2}, \quad y = \frac{2t [(l+2a) + (l-2a)t^2]}{(1 + t^2)^2},$$

rappresentazione parametrica che si presta assai bene a numerose applicazioni²⁾.

Non meno utile pel geometra è la seguente osservazione: eseguendo sulla curva (3) la trasformazione per raggi vettori reciproci avente O per polo e k^2 per potenza si ottiene la curva

$$\rho = \frac{k^2}{2 a \cos \omega + l},$$

la quale rappresenta una conica col fuoco nell'origine delle coordinate, e precisamente un'ellisse, una parabola od un'iperbola secondoche $l \geq 2 a$, cioè secondoche la lumaca ha un punto isolato, una cuspidè od un punto doppio; onde viceversa la *trasformata*

¹⁾ *Intermédiaire*, T. XXII, 1915, p. 217 e XXIII, 1916, p. 70.

²⁾ G. PITTARELLI, *Le lumache di Pascal* (G. di Matematiche, T. XXI, anno 1883).

per raggi vettoriali reciproci di una conica è una lumaca di Pascal supposto che il centro dell'inversione cada in un fuoco della curva ¹⁾.

Questa curva può anche ottenersi come involuppo; infatti un cerchio avente per diametro segmento che unisce un punto fisso ad un punto variabile di un cerchio fisso involuppa appunto una lumaca di Pascal: un breve calcolo basta a provare la verità di tale asserzione. Vedremo più innanzi che la stessa curva è caso speciale dell'ovale di Cartesio (n. 76) e può considerarsi anche come una particolare epicicloide (n. 210); essa s'incontra pure nella teoria delle rappresentazioni conformi ²⁾.

La lumaca di Pascal nel caso $l = a$ appartiene alla categoria delle curve che servono a risolvere il problema della trisezione dell'angolo ³⁾; è un'osservazione che fece per primo B. Pascal — a quanto attesta Roberval ⁴⁾ — e che poi molti altri ripeterono o svolsero ⁵⁾. La stessa curva interviene in un problema meccanico ⁶⁾ che si designa col nome di « ponte levatoio di Sauveur e de l'Hôpital » perchè

¹⁾ C. TAYLOR, *Ancient and modern geometry of conics* (Cambridge, 1881), p. 356.

²⁾ Infatti dalla funzione $w = 2mz - z^2$, ove m è una quantità reale, ponendo $w = u + iv$, $z = \rho e^{i\omega}$ si ottengono le due equazioni

$$x = \rho(2m \cos \omega - \rho \cos 2\omega), \quad y = \rho(2m \sin \omega - \rho \sin 2\omega),$$

le quali, se $\rho = \text{cost.}$, rappresentano una lumaca di Pascal. V. AMSTEIN, *Quelques exemples de représentation conforme, avec leur application à un problème d'hydrodynamique* (Bull. de la Soc. Vandoise des Sciences natur., T. XVI, 1882).

³⁾ Per convincersene si osservi che in tal caso l'equazione della curva può scriversi come segue:

$$\frac{\rho}{a} = 2a \cos \omega - a = 4 \cos^2 \frac{\omega}{2} - 3$$

ossia

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\cos 3 \omega/2}{\cos \omega/2};$$

noto quindi l'angolo $3 \omega/2 = a$, se ne dedurrà $\cos a/3$ e quindi a .

⁴⁾ *Observations citate*. Il caso $l = a$ s'incontra anche nella nota di A. SUCHARDA, *Ueber die Pascal'sche Spirale* (Arch. Math. y. Phys., II Ser., T. IV, 1886).

⁵⁾ AZÉMAR, *Trisection de l'angle, suivie de Recherches analytiques sur le même sujet par Garnier* (Paris 1809); FUSINIERI, *Trisezione geometrica degli archi di cerchio e descrizione di curve algebriche col mezzo della base variabile di un triangolo* (Mem. della Soc. Italiana delle Scienze, T. XXIII, 1846); JOUANNE, *Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal* (Nouv. Ann., II Série, T. IX, 1870); BROCARD, *Note sur un compas trisecteur* (Bull. de la Soc. math. de France, T. III, 1875; lo strumento ivi studiato è invenzione del LAISANT); ecc.

⁶⁾ Cfr. SCHELL, *Theorie der Bewegung und der Kräfte*, T. II (Leipzig 1880), pag. 67.

concerne appunto tale apparato: esso venne proposto dal Saurin e risolto per la prima volta dal marchese de l'Hôpital ¹⁾, poi da altri ²⁾.

Essa poi, essendo una quartica con due cuspidi ed un nodo, è, dal punto di vista proiettivo, identica ad una linea di data assai più recente, che merita qui almeno un cenno.

Date (fig. 29) due circonferenze Γ e Γ' eguali fra loro e fra loro tangenti, si consideri un punto qualunque M di Γ' e la sua polare m rispetto a Γ ; essa è tagliata in un punto P dalla retta p condotta da M parallelamente alla congiungente i centri O, O' delle due date circonferenze. Il luogo del punto P è una curva detta dagli inglesi « the cocked hat », cioè il cappello bicorno. La costruzione testè riferita — che venne concepita da Charlotte A. Scott ³⁾ — abilita a trovare l'equazione e quindi le proprietà

della curva. Presa infatti la retta OO' per asse delle y e O per origine di un sistema cartesiano ortogonale, si vede potersi assumere come espressioni generiche delle coordinate del punto M le seguenti:

$$x = a \cos \omega, \quad y = 2a + a \sin \omega,$$

a essendo il raggio di Γ e Γ' . Le rette m e p hanno quindi per equazioni risp.

$$x \cos \varphi + (2 + \sin \varphi) y = a, \quad x = a \cos \varphi,$$

donde si ottiene la seguente rappresentazione parametrica della curva:

¹⁾ V. l'articolo *Illustris Marchionis Hospitalii Solutio problematis physico-mathematici ab erudito quodam geometra propositi* (Acta Erud., febbraio 1695).

²⁾ V. *Joh. Bernoulli Opera*, T. I e *Jac. Bernoulli Opera*, T. I (Genevae anno 1744).

³⁾ Educational Times, gennaio 1896, Questione 12978.

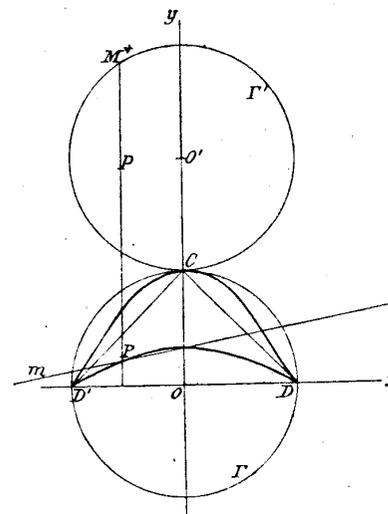


Fig. 29. — Il cappello bicorno.

$$(7) \quad x = a \cos \varphi, \quad y = \frac{a \operatorname{sen}^3 \varphi}{2 + \operatorname{sen} \varphi},$$

le quali intanto confermano che il cappello bicorno è una curva razionale. Eliminando φ tra le (7) si ottiene come equazione della stessa

$$(8) \quad (x^2 + 2 a y - a^2)^2 - y^2 (a^2 - x^2) = 0$$

o, se si vuole,

$$x^4 + 3 a^2 y^2 + 4 a^2 x^2 y - 2 a^2 x^2 - 4 a^3 y + x^2 y^2 = 0$$

Si trae da ciò che la curva sta tutta entro la striscia di piano limitata dalle tangenti comuni ai due dati cerchi che sono parallele alle $O O'$. L'asse delle x taglia la curva in due punti D, D' che sono cuspidi, aventi per relative tangenti le congiungenti di questi punti col punto C di contatto di Γ e Γ' . La curva è inoltre circolare ed ha per punto isolato il punto all'infinito di $O y$. Il punto C ne è il punto di massima ordinata; e i punti di ascisse $= \pm a \sqrt{5/3}$ ne sono flessi. Furono segnalati vari metodi per costruirne le tangenti¹⁾ e per stabilirne le proprietà²⁾.

¹⁾ G. DE LONGCHAMPS, *Note sur le bicorne* (Journ. de Math. spéc., 4^a Ser., T. VI, 1897).

²⁾ R. DEAUX, *Sur le bicorne* (Mathésis, T. XXXVII, 1923).

$$x^4 + 3a^2y^2 + 4a^2x^2y - 2a^2x^2 - 4a^3y + x^2y^2 = 0$$

CAPITOLO VII

Le quartiche tricuspitate.

72. Nel trattare nel Capitolo precedente delle concoide a base circolare escludemmo il caso in cui l'intervallo costante l fosse eguale al diametro $2a$ del cerchio base. In tale caso notevole (v. figura 28 b) si ha una quartica con tre cuspidi di cui ci occuperemo ora.

Il Carré¹⁾ ne attribuisce l'invenzione al matematico olandese J. Koersma²⁾; l'Ozanam ne ha fatto menzione nel suo *Dictionnaire mathématique* (Amsterdam 1691, p. 102) chiamandola *cicloide geometrica*; finalmente il Castillón, in base alla forma che essa ha, propose di chiamarla *cardioide*³⁾; e tale giudizioso suggerimento venne accettato da tutti⁴⁾.

Ricordando quanto si espose nel paragrafo precedente si vede che le equazioni, cartesiane e polare della cardioide sono

$$(1) \quad (x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

$$(2) \quad \rho = 2a(1 + \cos \omega)$$

e che le coordinate de' suoi punti si possono esprimere come segue in funzione di un parametro:

$$(3) \quad x = \frac{4a(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2}, \quad y = \frac{8a\lambda}{(1 + \lambda^2)^2} \quad ^5)$$

¹⁾ *Examen d'une courbe formée par le moyen du cercle* (Mem. de l'Académie, MDCCV, Paris 1730).

²⁾ Cfr. *Intermédiaire*, T. V, 1898, p. 200.

³⁾ *De curva cardioide* (Phil. Trans., 1741).

⁴⁾ Le principali proprietà di questa curva e la relativa bibliografia si trovano nella Diss. di R. C. ARCHIBALD, *The Cardioid and some of its related curves* (Strassburg, 1900).

⁵⁾ Questa rappresentazione trovasi largamente sfruttata nei seguenti scritti di K. ZAHRADNIK, *Theorie der Cardioide* (Prager Ber., 1875), *Ueber die Cardioide* (Id., 1877), *Beitrag zur Theorie der Cardioide* (Archiv, T. LXIII, anno 1879).

La cardioide non ha flessi, ma possiede come tangente doppia la retta di equazione $x + a/2 = 0$. Dalla (2) si trae la seguente equazione della tangente nel punto (λ) :

$$(4) \quad (3\lambda^2 - 1)x + \lambda(\lambda^2 - 3)y + 4a = 0,$$

la quale, essendo cubica in λ , prova che la cardioide è una curva di terza classe. $m = n(n-1) - 2d - 3r = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 3$
 Supponiamo che l'equazione

$$(4') \quad (3\mu^2 - 1)x + \mu(\mu^2 - 3)y + 4a = 0$$

appartenga a una tangente della cardioide perpendicolare a quella rappresentata dalla (4); la condizione affinché ciò accada è

$$(\lambda\mu + 1)[\lambda^2\mu^2 - 3(\lambda^2 + \mu^2) + 8\lambda\mu + 1] = 0$$

e si decompone in due, onde di due parti consta anche il luogo dei punti da cui possono condursi a una cardioide due tangenti fra loro perpendicolari ¹⁾.

La condizione di collinearità dei tre punti (α) (β) (γ) è:

$$(5) \quad \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + 3 = 0$$

del piano — Ne faremo un'applicazione alla ricerca del « luogo dei punti di una cardioide aventi la proprietà che i punti di contatto delle tangenti condotte alla curva da uno qualunque di essi siano collineari ». Se x, y sono le coordinate di un punto del luogo e (λ_1) (λ_2) (λ_3) i punti di contatto delle corrispondenti tangenti, in forza della (3) si avrà:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{3x}{y}, \quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = -3, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{x - 4a}{y};$$

se tali punti sono collineari, in virtù della (5) si avrà

$$(x + a)^2 + y^2 = a^2;$$

dunque il luogo cercato altro non è che il cerchio simmetrico alla base della cardioide rispetto alla cuspidale ²⁾.

La cardioide è una curva di 4° ordine e 3ª classe, con tre cuspidi ed una tangente doppia, ed esente da punti doppi e da flessi; è pertanto correlativa alle cubiche con punto doppio, le quali sono di

¹⁾ C. JUEL, Tidskrift math., 1880; un risultato più generale e preciso si troverà più avanti (n. 275).

²⁾ Educational Times, vol. LVIII, 1893, Quest. 11247.

4ª classe ed hanno tre flessi e nessuna altra singolarità. Niuna meraviglia adunque se essa sia polare reciproca, rispetto ad un conveniente circolo, di una speciale cubica razionale, cioè della trisettrice di Maclaurin (v. n. 47) ¹⁾. Per dimostrare questa notevole proposizione osserviamo che, con una semplice traslazione dell'asse delle y , l'equazione di detta trisettrice può scriversi sotto la forma

$$x(x^2 + y^2) = 4R^3 - 3R(x^2 + y^2)^2$$

la quale dà subito la seguente rappresentazione parametrica della curva:

$$x = R \frac{1 - 3\lambda^2}{1 + \lambda^2}, \quad y = R \frac{\lambda^3 - 3\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

La polare del punto (λ) rispetto al circolo $x^2 + y^2 = R^2$ ha per equazione

$$x(1 - 3\lambda^2) + y(\lambda^3 - 3\lambda) = R(1 + \lambda^2).$$

Per trovare l'involuppo di questa retta combiniamone l'equazione con la sua derivata rispetto a λ , che è:

$$-6\lambda x + 3y(\lambda^2 - 1) = 2\lambda R$$

Otterremo così:

$$x = -\frac{R}{3} \frac{\lambda^4 + 6\lambda^2 - 3}{(\lambda^2 + 1)^2}, \quad y = -\frac{R}{3} \frac{8\lambda}{(\lambda^2 + 1)^2},$$

ossia

$$x + \frac{R}{3} = \frac{R}{3} \frac{4(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2}, \quad y = -\frac{R}{3} \frac{8\lambda}{(1 + \lambda^2)^2}.$$

Siccome queste equazioni si deducono dalla (3) cambiandovi x, y, a risp. in $x + R/3, -y, R/3$ il teorema enunciato è dimostrato ³⁾.

Dall'equazione (2) si traggono facilmente le seguenti espressioni per l'arco s di cardioide, contato dalla cuspidale, e pel raggio

¹⁾ G. DE LONGCHAMPS, *Rapprochement entre la trisectrice de Maclaurin et la cardioide* (Prager Ber., 1887).

²⁾ Quest'equazione nasce dall'equazione cartesiana trovata nel n. 47 cambiando ivi x in $-(x + 2R)$.

³⁾ Per altre proprietà della stessa curva v. E. LAGUERRE, *Sur la cardioide* (Nouv. Ann. de math., II Ser., T. XVII, 1878, oppure *Oeuvres*, T. II, p. 480); un procedimento per tracciarle meccanicamente è ampiamente esposto nell'articolo di W. F. RIGGE, *Concerning a new method of tracing cardioids* (Amer. math. Monthly, T. XXVI, 1919).

di curvatura R :

$$(6) \quad s = 8a \operatorname{sen} \omega/2^1, \quad R = \frac{8a}{3} \cdot \cos \omega/2;$$

eliminando ω fra queste si trova

$$(7) \quad s^2 + 9R^2 = 8a^2,$$

che è l'equazione intrinseca della cardioide.

La forma di essa conduce a concepire delle curve più generali, aventi equazioni intrinseche della forma

$$(8) \quad s^2 + 2n + 1^2 R^2 = b^2:$$

E. Cèsaro, che per primo le ha considerate, le chiamò *cardioidi stellate* ²⁾. Per trovarne la rappresentazione ordinaria si può servirsi delle formole che insegnano la rappresentazione parametrica di una curva, di cui si conosca l'equazione intrinseca ³⁾.

¹⁾ Questa formola di rettificazione si trova in sostanza nella memoria di DE LA HIRE citata a p. 172. Per la determinazione del baricentro d'un arco, vedi SAINT-GERMAIN, *Exercices de mécanique* etc., p. 38.

²⁾ *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 2896), p. 12.

³⁾ Queste formole, che dovremo applicare assai spesso, si possono dimostrare nel modo seguente: Se $R = f(s)$ è la relazione che passa fra il raggio di curvatura R e l'arco s della curva, per la nota espressione di R in coordinate cartesiane si ha pure:

$$\frac{ds^3}{dx \cdot dy^2 - dy \cdot dx^2} = f(s);$$

assunta s per variabile indipendente, essendo $ds^2 = dx^2 + dy^2$, sarà: $dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y = 0$ epperò la formola precedente diviene

$$\frac{dx \cdot ds}{d^2y} = f(s) \quad \text{ossia} \quad \frac{\sqrt{1 - (dy/ds)^2}}{d^2y/ds^2} = f(s).$$

Posto $dy/ds = p$ questa diviene

$$\frac{dp}{\sqrt{1 - p^2}} = \frac{ds}{f(s)}$$

onde

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} p = \int \frac{ds}{f(s)}.$$

Posto quindi

$$(I) \quad \phi = \int \frac{ds}{f(s)}$$

Posto per abbreviare $2n + 1 = \mu$ si ha $R = \frac{1}{\mu} \sqrt{b^2 - s^2}$ onde

$$\varphi = \mu \int \frac{ds}{\sqrt{b^2 - s^2}} = \mu \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{s}{b},$$

supposto che sia $\varphi = 0$ per $s = 0$. Se ne deduce $s = b \operatorname{sen} \varphi/\mu$ onde

$$x = \frac{b}{\mu} \int \cos \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{\mu} d\varphi, \quad y = \frac{b}{\mu} \int \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{\mu} d\varphi$$

ossia

$$\frac{2\mu x}{b} = \int \left[\cos \frac{\mu+1}{\mu} \varphi + \cos \frac{\mu-1}{\mu} \varphi \right] d\varphi,$$

$$\frac{2\mu y}{b} = \int \left[\operatorname{sen} \frac{\mu+1}{\mu} \varphi + \operatorname{sen} \frac{\mu-1}{\mu} \varphi \right] d\varphi;$$

effettuando le integrazioni indicate e scrivendo per μ il suo valore, si conclude essere

$$(9) \quad \frac{4(x+x_0)}{b} = \frac{1}{n+1} \operatorname{sen} \frac{2(n+1)\varphi}{2n+1} + \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{2n\varphi}{2n+1},$$

$$-\frac{4(y+y_0)}{b} = \frac{1}{n+1} \cos \frac{2(n+1)\varphi}{2n+1} + \frac{1}{n} \cos \frac{2n\varphi}{2n+1}$$

la rappresentazione parametrica delle cardioidi stellate.

73. Incontreremo più innanzi di nuovo la cardioide come caso speciale delle epicicloidi (Lib. VI, Cap. X) e delle spirali sinusoidi (Lib. V, Cap. XVIII). Intanto vogliamo occuparci di una curva che, dal punto di vista proiettivo, non differisce dalla cardioide, ma che per la sua definizione e le sue proprietà metriche, ne è totalmente diversa; lo Steiner la segnalò all'attenzione dei geometri ¹⁾ e molti

si ha

$$p = \operatorname{sen} \phi, \quad \sqrt{1 - p^2} = \cos \phi$$

e quindi

$$(II) \quad x = \int \cos \phi \cdot ds, \quad y = \int \operatorname{sen} \phi \cdot ds$$

L'integrazione porta seco tre costanti arbitrarie; le ∞^3 curve risultanti sono fra loro identiche. Se la funzione $f(s)$ riducesi a una costante, si ha una retta o una circonferenza, l'*unicurva* del KRAUSE (*Nova theoria linearum curvarum*, München 1835, p. 24); in ogni altro caso si ottiene invece una *versicurva*.

¹⁾ *Ueber eine besondere Curve dritter Classe (und vierter Ordnung)* (G. di

di questi la fecero oggetto di ricerche assidue e fortunate. Nella nostra esposizione partiremo dalla definizione stessa di Steiner: « Se da un punto P della circonferenza circoscritta ad un triangolo ABC si abbassano le perpendicolari sui lati, i loro piedi A' , B' , C' sono alligati sopra una retta p , ordinariamente chiamata *retta di Wallace* relativa al punto P ; l'involuppo di tutte le rette p corrispondenti ai punti P di quella circonferenza è la curva di Steiner ». Per un teorema noto p è la tangente nel vertice di una parabola inscritta nel triangolo ABC ed avente per fuoco P ; onde la stessa curva può definirsi come involuppo delle tangenti nei vertici delle parabole inscritte nel triangolo dato ¹⁾.

Per trovare l'equazione della curva steineriana ci serviremo della prima definizione e prenderemo come origine delle coordinate il centro O del cerchio circoscritto al triangolo ABC . Come coordinate dei vertici potremo assumere le espressioni $r \cos \alpha$, $r \sin \alpha$; $r \cos \beta$, $r \sin \beta$; $r \cos \gamma$, $r \sin \gamma$. Perciò la equazione de' suoi lati sono:

$$x \cos \frac{\beta+\gamma}{2} + y \sin \frac{\beta+\gamma}{2} = r \cos \frac{\beta-\gamma}{2},$$

$$x \cos \frac{\gamma+\alpha}{2} + y \sin \frac{\gamma+\alpha}{2} = r \cos \frac{\gamma-\alpha}{2},$$

$$x \cos \frac{\alpha+\beta}{2} + y \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = r \cos \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Se $r \cos \varphi$, $r \sin \varphi$ sono le coordinate del punto P , saranno

$$x \sin \frac{\beta+\gamma}{2} - y \cos \frac{\beta+\gamma}{2} = r \sin \left[\frac{\beta+\gamma}{2} - \varphi \right],$$

$$x \sin \frac{\gamma+\alpha}{2} - y \cos \frac{\gamma+\alpha}{2} = r \sin \left[\frac{\gamma+\alpha}{2} - \varphi \right],$$

$$x \sin \frac{\alpha+\beta}{2} - y \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = r \sin \left[\frac{\alpha+\beta}{2} - \varphi \right].$$

Crelle, T. LIII, 1856). La stessa curva fu incontrata dal WEIERSTRASS risolvendo un problema di Calcolo delle variazioni; cfr. *Abhand. zur Geschichte der Mathem.*, T. XX, 1905, p. 81-86. Essa risolve anche un altro problema di minimo incontrato da EULERO nella sua *Scientia navalis*: cfr. G. H. LIGHT, *The intrinsic equation for Euler's resistance integral* (Bull. Amer. math. Soc., T. XXIV, 1928).

¹⁾ Potrebbe anche definirsi come involuppo degli asintoti delle iperboli equilateri circoscritte al triangolo ABC .

le equazioni delle perpendicolari calate da P su quei lati, onde le coordinate dei loro piedi A' , B' , C' saranno i prodotti di $r/2$ per le seguenti quantità:

$$[\cos \beta + \cos \gamma + \cos \varphi - \cos (\beta + \gamma - \varphi)],$$

$$[\sin \beta + \sin \gamma + \sin \varphi - \sin (\beta + \gamma - \varphi)];$$

$$[\cos \gamma + \cos \alpha + \cos \varphi - \cos (\gamma + \alpha - \varphi)],$$

$$[\sin \gamma + \sin \alpha + \sin \varphi - \sin (\gamma + \alpha - \varphi)];$$

$$[\cos \alpha + \cos \beta + \cos \varphi - \cos (\alpha + \beta - \varphi)],$$

$$[\sin \alpha + \sin \beta + \sin \varphi - \sin (\alpha + \beta - \varphi)].$$

Se ne può dedurre che l'equazione della retta $B'C'$ è:

$$x \sin \frac{\alpha+\beta+\gamma-\varphi}{2} - y \cos \frac{\alpha+\beta+\gamma-\varphi}{2} +$$

$$+ r \left\{ \sin \frac{\varphi-\alpha}{2} \cos \frac{\varphi-\beta}{2} \cos \frac{\varphi-\gamma}{2} + \cos \frac{\varphi-\alpha}{2} \sin \frac{\varphi-\beta}{2} \cos \frac{\varphi-\gamma}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos \frac{\varphi-\alpha}{2} \cos \frac{\varphi-\beta}{2} \sin \frac{\varphi-\gamma}{2} + \sin \frac{\varphi-\alpha}{2} \sin \frac{\varphi-\beta}{2} \sin \frac{\varphi-\gamma}{2} \right\}$$

o anche

$$(10) \quad x \sin \frac{\varphi - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} + y \cos \frac{\varphi - (\alpha + \beta + \gamma)}{2}$$

$$= \frac{r}{2} \left\{ \sin \frac{3\varphi - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} + \sin \frac{\varphi + \alpha - \beta - \gamma}{2} + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{\varphi - \alpha + \beta - \gamma}{2} + \sin \frac{\varphi - \alpha - \beta + \gamma}{2} \right\}$$

La simmetria di quest'equazione in α , β , γ mostra che la retta $B'C'$ passa anche per il punto A' ; resta così dimostrata l'esistenza della retta di Wallace. Osserviamo anche che cambiando φ in $\varphi + \pi$ la (10) si cambia nell'equazione di una retta perpendicolare a quella rappresentata dalla (10); onde le tangenti della curva si distribuiscono in coppie di ortogonali, corrispondentemente alle coppie di punti opposti della circonferenza data.

Per trovare l'involuppo della retta (10) poniamo

$$\varphi = 2\psi, \alpha + \beta + \gamma = 2s, -\alpha + \beta + \gamma = 2a, \alpha - \beta + \gamma = 2b, \alpha + \beta - \gamma = 2c;$$

L'equazione (10) assume in conseguenza questo aspetto:

$$x \operatorname{sen}(\psi - s) + y \operatorname{cos}(\psi - s) = \\ = \frac{r}{2} \{ \operatorname{sen}(3\psi - s) + \operatorname{sen}(\psi + a) + \operatorname{sen}(\psi + b) + \operatorname{sen}(\psi + c) \}$$

Differenziando rispetto a ψ se ne deduce:

$$x \operatorname{cos}(\psi - s) - y \operatorname{sen}(\psi - s) = \\ = \frac{r}{2} \{ 3 \operatorname{cos}(3\psi - s) + \operatorname{cos}(\psi + a) + \operatorname{cos}(\psi + b) + \operatorname{cos}(\psi + c) \},$$

equazione che, combinata con la precedente, dà:

$$2x/r = \operatorname{sen}(3\psi - s) \operatorname{sen}(\psi - s) + \\ + 3 \operatorname{cos}(3\psi - s) \operatorname{cos}(\psi - s) + \operatorname{sen}(a + s) + \operatorname{sen}(b + s) + \operatorname{sen}(c + s) \\ 2y/r = \operatorname{sen}(3\psi - s) \operatorname{cos}(\psi - s) - \\ - 3 \operatorname{cos}(3\psi - s) \operatorname{sen}(\psi - s) + \operatorname{cos}(a + s) + \operatorname{cos}(b + s) + \operatorname{cos}(c + s)$$

Ponendo ora per brevità

$$\operatorname{sen}(a + s) + \operatorname{sen}(b + s) + \operatorname{sen}(c + s) \\ \text{cioè} \quad \operatorname{sen}(\beta + \gamma) + \operatorname{sen}(\gamma + \alpha) + \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2x_0/r; \\ \text{poi} \quad \operatorname{cos}(a + s) + \operatorname{cos}(b + s) + \operatorname{cos}(c + s) \\ \text{cioè} \quad \operatorname{cos}(\beta + \gamma) + \operatorname{cos}(\gamma + \alpha) + \operatorname{cos}(\alpha + \beta) = 2y_0/r,$$

e inoltre

$$x - x_0 = x', \quad y - y_0 = y',$$

si possono trasformare le equazioni precedenti in queste altre:

$$2x'/r = 2 \operatorname{cos} \varphi + \operatorname{cos}(2\varphi - 2s), \quad 2y'/r = 2 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen}(2\varphi - 2s)$$

ovvero

$$\frac{2(x' \operatorname{cos} 2s + y' \operatorname{sen} 2s)}{r} = 2 \operatorname{cos}(\varphi - 2s) + \operatorname{cos} 2(\varphi - 2s) \\ \frac{2(x' \operatorname{sen} 2s - y' \operatorname{cos} 2s)}{r} = 2 \operatorname{sen}(\varphi - 2s) - \operatorname{sen} 2(\varphi - 2s).$$

Se quindi si pone $\varphi - 2s = \omega/3$ e si effettua il cambiamento di coordinate determinato dalle formole

$$\xi = x' \operatorname{cos} 2s + y' \operatorname{sen} 2s, \quad \eta = x' \operatorname{sen} 2s - y' \operatorname{cos} 2s$$

si ottengono finalmente le equazioni:

$$(11) \quad \xi = \frac{r}{2} \left[2 \operatorname{cos} \frac{\omega}{3} + \operatorname{cos} \frac{2\omega}{3} \right], \quad \eta = \frac{r}{2} \left[2 \operatorname{sen} \frac{\omega}{3} - \operatorname{sen} \frac{2\omega}{3} \right]$$

E poichè queste appartengono (Lib. VI, Cap. X) alla curva generata da un punto della periferia del circolo di raggio $r/2$ ruzzolante entro un cerchio fisso di raggio triplo, così resta dimostrata l'osservazione fatta da Schlaefli (e forse anche di Steiner)¹⁾, che la curva di Steiner è un'ipocicloide tricuspide. Le tre cuspidi si trovano sul cerchio di centro O e raggio $3r/2$, mentre il cerchio concentrico di raggio $r/2$ è tritangente alla curva.

Eliminando ω fra le equazioni (10) si trova come equazione cartesiana della curva:

$$(12) \quad (x^2 + y^2)^2 + 4rx(3y^2 - x^2) + \frac{3^2 r^2}{2} (x^2 + y^2) - \frac{3^3}{24} r^4 = 0;$$

dunque l'ipocicloide tricuspide è una curva di quart'ordine toccata dalla retta all'infinito nei punti ciclici del piano. Viceversa: qualunque curva di quart'ordine e terza classe toccata dalla retta all'infinito nei punti ciclici del piano è un'ipocicloide tricuspide. Quest'importante osservazione del Cremona²⁾ può dimostrarsi col seguente ragionamento suggerito dal Clebsch³⁾. L'equazione

$$\xi_1 \xi_2 \xi_3 = \xi_1^3 + \xi_2^3$$

fra le coordinate omogenee di una retta rappresenta una curva di 3ª classe avente il terzo lato del triangolo fondamentale per tangente doppia, i punti di contatto essendo i relativi vertici del triangolo stesso. L'equazione precedente guida subito alla seguente rappresentazione parametrica (ove r è un fattore di proporzionalità):

$$r \xi_1 = \lambda^2, \quad r \xi_2 = \lambda, \quad r \xi_3 = 1 + \lambda^3;$$

¹⁾ J. H. GRAF, *Der Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli* (Bern 1896), p. 206-208. Ciò non ostante la curva di cui si tratta è spesso chiamata *ipocicloide di Steiner*.

²⁾ V. la memoria *Sur l'ipocicloide à trois rebroussements* (G. di Crelle, T. LXIV, 1865).

³⁾ V. la nota alla memoria del CREMONA.

in altri termini

$$\lambda^2 x_1 + \lambda x_2 + (1 + \lambda^3) x_3 = 0$$

è l'equazione generale delle tangenti a quella curva. Combinandola con la sua derivata rispetto a λ , si vede che le coordinate di un punto qualunque della stessa curva sono proporzionali a $1 - 2\lambda^3$, $\lambda^4 - 2\lambda$, λ^2 ; posto quindi $\lambda = \mu/\nu$ potremo scrivere

$$\frac{x_1}{\nu^4 - 2\mu^3\nu} = \frac{x_2}{\mu^4 - 2\nu^3\mu} = \frac{x_3}{\mu^2\nu^2}$$

Facendo

$$\mu = \rho e^{i\phi/2}, \nu = \rho e^{-i\phi/2}, \frac{x_2 + x_1}{2x_3} = \frac{x}{a}, \frac{x_2 - x_1}{2ix_3} = \frac{y}{a}$$

se ne trae

$$x/a = \cos 2\varphi + 2 \cos \varphi, y/a = \sin 2\varphi - 2 \sin \varphi;$$

essendo queste della forma (11) il teorema di Cremona è dimostrato.

74. Cambiando per comodità le notazioni scriveremo le (11) come segue

$$(12) \quad x = a(2 \cos \lambda + \cos 2\lambda), y = a(2 \sin \lambda - \sin 2\lambda)$$

ed otterremo così una rappresentazione parametrica utilissima dell'ipocicloide tricuspide. Da essa se ne trae una analoga per le coordinate polari $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\omega = \arctg y/x$; si trovano infatti le equazioni

$$(13) \quad \rho^2 = a^2(5 + 4 \cos 3\lambda) \\ \operatorname{tg} \omega = \frac{2 \sin \lambda - \sin 2\lambda}{2 \cos \lambda + \cos 2\lambda},$$

la seconda delle quali, dopo qualche opportuna trasformazione, assume il seguente aspetto

$$(14) \quad \operatorname{tg} \left[\omega + \frac{\lambda}{2} \right] = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{3\lambda}{2}.$$

La (13) mostra che il raggio vettore ρ varia tra il minimo a ed il massimo $3a$; quello è raggiunto nei valori $\lambda = \pi/3, \pi, 5\pi/3$, questo nei valori $0, 2\pi/3, 4\pi/3$; i punti della curva di raggio vettore massimo sono cuspidi, quelli di raggio vettore minimo sono

di contatto col cerchio (« tritangente ») di centro O e raggio a . Facendo nella (13) $\lambda = 2k\pi/3 \pm a$ si ottiene $\rho^2 = a^2(5 + 4 \cos 3a)$; siccome qui non vi è più traccia del doppio segno, così è chiaro che (le tre rette condotte per l'origine e formanti con Ox gli angoli $0, 2\pi/3, 4\pi/3$, cioè) le tangenti cuspidali sono tre assi di simmetria della curva. Notando poi che le (13), (14) non si alterano cambiando λ in $\lambda + 2k\pi/3$ e ω in $\omega + 2k\pi/3$ ($k = 1, 2$) si vede che nell'ipocicloide tricuspide sono inscritti ∞' triangoli equilateri.

Riprendiamo le equazioni (12) per dedurne che la tangente all'ipocicloide nel punto (τ) ha la seguente equazione:

$$(15) \quad x \operatorname{sen} \frac{\tau}{2} + y \cos \frac{\tau}{2} = a \operatorname{sen} \frac{3\tau}{2},$$

onde forma coll'asse delle x l'angolo $\pi - \tau/2$. Le coordinate plückeriane di questa tangente sono

$$\xi = -\frac{\operatorname{sen} \tau/2}{a \operatorname{sen} 3\tau/2}, \eta = -\frac{\cos \tau/2}{a \operatorname{sen} 3\tau/2};$$

eliminando τ se ne deduce

$$(16) \quad \xi^2 + \eta^2 = a(3\xi\eta^2 - \eta^3),$$

cioè l'equazione tangenziale della curva. La retta rappresentata dall'equazione (15), come qualsivoglia retta del piano, taglia l'ipocicloide in quattro punti i cui parametri s'otterranno sostituendo nella (14) a x, y i valori (11) e risolvendo rispetto a λ l'equazione risultante. Ora quest'equazione può scriversi

$$\operatorname{sen} \left[\frac{\tau}{2} + \lambda \right] \operatorname{sen}^2 \frac{\tau - \lambda}{4} = 0$$

onde si decompone nelle due

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\tau - \lambda}{4} = 0, \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} + \lambda \right] = 0;$$

la prima dà il punto di partenza (τ) contato due volte, mentre la seconda guida ai due punti di parametri

$$\lambda_1 = \pi - \frac{\tau}{2}, \lambda_2 = 2\pi - \frac{\tau}{2}.$$

Vediamo quindi che: la tangente all'ipocicloide nel punto (τ)

taglia nuovamente la curva nei punti $(\pi - \tau/2)$ e $(2\pi - \tau/2)$.
Li chiameremo per brevità *punti associati*; le loro coordinate sono:

$$\begin{cases} x_1 = a(\cos \tau - 2 \cos \tau/2) \\ y_1 = a(\sin \tau + 2 \sin \tau/2) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = a(\cos \tau + 2 \cos \tau/2) \\ y_2 = a(\sin \tau - 2 \sin \tau/2); \end{cases}$$

se ne deduce:

$$\frac{x_1 - x_2}{4a} = -\cos \frac{\tau}{2}, \quad \frac{y_1 - y_2}{4a} = -\sin \frac{\tau}{2},$$

epperò

$$\overline{x_1 - x_2}^2 + \overline{y_1 - y_2}^2 = 4a^2;$$

dunque: *Il segmento limitato da due qualunque punti associati è eguale al diametro del cerchio tritangente all'ipocicloide ed ha per centro un punto della periferia di questo cerchio. Le tangenti in quei punti associati hanno per equazioni rispettivamente:*

$$x \cos \frac{\tau}{4} + y \sin \frac{\tau}{4} = -a \cos \frac{3\tau}{4}, \quad x \sin \frac{\tau}{4} - y \cos \frac{\tau}{4} = a \sin \frac{3\tau}{4};$$

osservando la forma di queste equazioni e notando che sono soddisfatte dai valori

$$x = -a \cos \tau, \quad y = -a \sin \tau$$

si conclude: *Le tangenti in due qualunque punti associati sono tra loro perpendicolari e si tagliano nel punto del cerchio tritangente che è diametralmente opposto al punto medio del segmento limitato da quei punti.*

La curva che studiamo essendo di terza classe — cfr. eq. (16) — per ogni punto (x, y) del piano passano tre sue tangenti; i corrispondenti valori del parametro τ sono le radici τ_1, τ_2, τ_3 della (15); avremo quindi

$$x \sin \frac{\tau_k}{2} + y \cos \frac{\tau_k}{2} = a \sin \frac{3\tau_k}{2} \quad (k = 1, 2, 3);$$

onde, eliminando x, y , si trova la relazione:

$$\begin{vmatrix} \sin \frac{\tau_1}{2}, \cos \frac{\tau_1}{2}, \sin \frac{3\tau_1}{2} \\ \sin \frac{\tau_2}{2}, \cos \frac{\tau_2}{2}, \sin \frac{3\tau_2}{2} \\ \sin \frac{\tau_3}{2}, \cos \frac{\tau_3}{2}, \sin \frac{3\tau_3}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \begin{vmatrix} \sin \frac{\tau_1}{2}, \cos \frac{\tau_1}{2}, \sin^3 \frac{\tau_1}{2} \\ \sin \frac{\tau_2}{2}, \cos \frac{\tau_2}{2}, \sin^3 \frac{\tau_2}{2} \\ \sin \frac{\tau_3}{2}, \cos \frac{\tau_3}{2}, \sin^3 \frac{\tau_3}{2} \end{vmatrix} = 0;$$

ora se si pone per brevità

$$\xi_k = e^{i\tau_k} \quad (k = 1, 2, 3),$$

quest'equazione diviene

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 & \xi_1^3 - 1 \\ \xi_2^2 & \xi_2 & \xi_2^3 - 1 \\ \xi_3^2 & \xi_3 & \xi_3^3 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ossia} \quad \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 1$$

Riponendo per le ξ i loro valori si trova $e^{i(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)} = 1$ onde

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2\pi.$$

Si vede pertanto che: *la somma dei parametri di tre punti della curva, in cui le corrispondenti tangenti concorrono nello stesso punto, è eguale a quattro angoli retti.*

Dalla equazione (15), rappresentante della tangente, si deduce l'equazione della normale, che è:

$$(17) \quad x \cos \frac{\tau}{2} - y \sin \frac{\tau}{2} = 3a \cos \frac{3\tau}{2};$$

ora, ponendo $\tau = \pi + \bar{\tau}$, questa si cambia in

$$x \sin \frac{\bar{\tau}}{2} + y \cos \frac{\bar{\tau}}{2} = 3a \sin \frac{\bar{\tau}}{2};$$

ed essendo di forma identica alla (15) si vede che l'involuppo delle normali, cioè *l'evoluto dell'ipocicloide tricuspide è una curva della stessa specie ma di grandezza tripla*; onde l'ipocicloide tricuspide è una curva simile alla propria evoluto. Se nell'equazione (17) si cambia τ in $\pi - \tau/2$ e poi in $2\pi - \tau/2$ si hanno le equazioni di due rette passanti pel punto di coordinate $3a \cos \tau, 3a \sin \tau$, il quale appartiene alla retta (17) stessa; dunque: *le normali all'ipocicloide tricuspide in tre punti appartenenti alla stessa tangente concorrono in un punto del cerchio circoscritto alla curva.*

Differenziando la (17) si ottiene l'equazione

$$x \operatorname{sen} \frac{\tau}{2} + y \operatorname{cos} \frac{\tau}{2} = 9a \operatorname{sen} \frac{3\tau}{2};$$

combinandola con la (17) si ottengono i seguenti valori per le coordinate del centro di curvatura.

$$x_0 = 3a(2 \operatorname{cos} \tau - \operatorname{cos} 2\tau), \quad y_0 = 3a(2 \operatorname{sen} \tau + \operatorname{sen} 2\tau)$$

Detto quindi R il raggio di curvatura si ha:

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 32a^2(1 - \operatorname{cos} 3\tau)$$

onde

$$(18) \quad R = \pm 8a \operatorname{sen} 3\tau/2;$$

se quindi R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura nei punti associati $(\pi - \tau/2)$ e $(2\pi - \tau/2)$ si ha:

$$R_1 = \mp 8a \operatorname{cos} \frac{3\tau}{4}, \quad R_2 = \pm 8a \operatorname{sen} \frac{3\tau}{4}$$

donde la notevole relazione:

$$R_1^2 + R_2^2 = 64a^2$$

Le (12) danno ancora come espressione del differenziale dell'arco $ds = 4a \operatorname{sen} 3\tau/2 d\tau$; onde integrando da $\tau = 0$

$$(19) \quad s = \frac{8a}{3} \left[1 - \operatorname{cos} \frac{3\tau}{2} \right] = \frac{16a}{3} \operatorname{sen}^2 \frac{3\tau}{4}.$$

Facendo ivi $\tau = 2\pi/3$ si ha $16a/3$ come lunghezza dell'arco compreso fra due cuspidi consecutive; onde la lunghezza totale dell'ipocicloide è sedici volte il raggio del circolo tritangente. Eseguendo invece la integrazione fra τ e $\pi/3$ si ottiene

$$(19') \quad s = \frac{8a}{3} \operatorname{cos} \frac{3\tau}{2};$$

eliminando τ fra le (17) (18') si trova

$$(20) \quad 9s^2 + R^2 = 64a^2,$$

che è l'equazione intrinseca dell'ipocicloide.

Col mezzo delle stesse equazioni (12) si effettua la quadratura di una porzione dell'ipocicloide; in particolare si trova che la superficie totale dell'ipocicloide è il doppio di quella del circolo tritangente.

L'ipocicloide tricuspide gode di molte altre belle proprietà¹⁾, le quali si possono stabilire, come fece il Cremona, applicando la teoria generale delle curve piane, ma che si possono anche dimostrare sia con considerazioni geometriche dirette²⁾, sia mediante il calcolo³⁾. A noi è vietato di arrestarci ulteriormente su questa curva; onde finiremo questo Capitolo notando come le curve di quart'ordine tricuspide, delle quali sono casi particolari la cardioid e l'epicicloide tricuspide, vennero studiate da F. Padula⁴⁾ e poi dal Siebeck⁵⁾, il quale (seguendo un concetto dello Schroter) le generò mediante le intersezioni delle tangenti corrispondenti in due coniche, ritenendo per corrispondenti due tangenti i cui punti di contatto sono allineati con un punto d'intersezione delle due curve.

¹⁾ Fra i più recenti lavori relativi ricordiamo i seguenti: C. WIRTZ, *Die Steiner'sche Hypocycloide* (Diss. Strassburg, 1900); P. F. RUFFINI, *Della ipocicloide tricuspide* (Rend. Acc. Bologna, 1900-01); A. GOB, *Note sur l'ipocicloide à trois rebroussements* (Mem. de Liège, III Ser., T. IV, 1902) e *Sur l'ipocicloide à trois rebroussements* (Id., T. VI, 1906); J. NEUBERG, *Notes sur l'ipocicloide à trois rebroussements* (Ivi); R. C. ARCHIBALD, *The cardioid and the quartic with three cusps* (Ann. of mathem., II Ser., T. IV, 1903); M. ROEGNER, *Die Steiner'sche Hypocycloide* (Diss. Jena, 1908; con ampia bibliografia); J. THOMAE, *Ueber den Steinerschen Strahlenbuschel und der Dreispitz* (Leipzig Abh. T. 35, 1916).

²⁾ INTRIGILA, *Studio geometrico sull'ipocicloide tricuspide* (G. di Matem., T. XXIII, 1885); C. WIRTZ, *Diss. cit.*

³⁾ PAINVIN, *Note sur l'ipocicloide à trois rebroussements* (Nouv. Ann., 2. Série, T. IX, 1870); SIMON, *Analytische Geometrie* (Leipzig, 1900), XIII Abschnitt.

⁴⁾ *Intorno le curve di quarto grado che hanno tre punti di regresso di prima specie* (Annali di Tortolini, T. III, 1852); in coordinate omogenee tali curve si possono rappresentare con equazioni della forma

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{\sqrt{x_3}} = 0.$$

⁵⁾ *Ueber die Erzeugung der Curven dritter Klasse und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes* (G. di Crelle, T. LXVI, 1866); v. anche E. BELTRAMI, *Su alcuni teoremi di Feterbach e di Steiner* (Mem. Acc. di Bologna, II Ser., T. V, 1875; Opere matematiche, T. III, Milano 1911); A. LONGHI, *Sulle quartiche piane tricuspide* (Giorn. di matemat., T. 63, 1925). Dal punto di vista proiettivo la curva in questione non differisce dalla proiezione del contorno apparente di una rigata cubica; tale circostanza fu utilizzata da G. STINER nella memoria *Die dreimal berührenden Ellipsen der Steiner'schen Hypocycloide* (Progr. St. Gallen, 1899). Siccome la stessa curva fu studiata elementarmente da J. THOMAE (v. nota¹⁾), il quale la considerò come involuppo delle rette di WALLACE da un triangolo e siccome stanno in linea retta anche i piedi delle oblique condotte sotto angoli eguali ai lati di un triangolo da un punto della circonferenza circoscritta, così era naturale proporsi lo studio dell'involuppo delle risultanti ∞^1 rette; esso è ancora un ipocicloide tricuspide, che, da questo punto di vista, è studiato nella nota di H. BÖHMEL, *Ueber eine Erweiterung des Steinerschen Strahlenbuschels* (Jahresber. Deutsch. Math. Ver., T. 36, 1927).

CAPITOLO VIII

Quartiche podarie dell'ipocicloide tricuspide.

75. L'ipocicloide tricuspide, studiato nel Capitolo precedente, è importante, non solo pel gran numero di belle prerogative di cui è fornito, ma anche per essere germe di altre curve particolari notevoli; valga a dimostrarlo il presente Capitolo, al quale è affidato il compito di far conoscere quelle di siffatte curve che sono del quart'ordine.

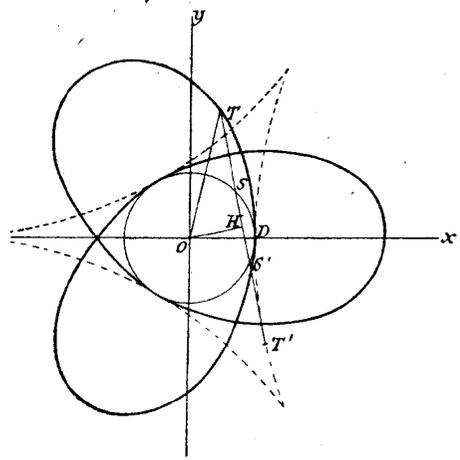


Fig. 30.

Notiamo anzitutto che « se (fig. 30) sopra la periferia di un cerchio (di centro O e raggio r) è dato un punto D e si prendono da parti opposte di D delle coppie di archi tali che $\text{arc } DS = 2 \text{ arc } DS'$, l'inviluppo delle rette SS' è un ipocicloide tricuspide ». Posto infatti $\text{arc } DS' = \alpha$, se O è l'origine e OD l'as-

se della x , la retta SS' avrà per equazione

$$(1) \quad x \cos \frac{\alpha}{2} + y \sin \frac{\alpha}{2} = r \cos \frac{3\alpha}{2};$$

questa essendo della stessa forma della (15) del Capitolo precedente, la proposizione enunciata è evidente.

Ora se si prolunga la corda SS' da una parte e dall'altra per

modo che risulti $ST = S'T' = SS'$ il luogo dei punti T, T' è una nuova curva, la cui rappresentazione analitica si ottiene come segue. Sia H il punto medio della corda SS' ; siccome dal punto O al punto T si può andare tanto pel cammino rettilineo OT , quanto lungo la spezzata OHT , così, proiettando sugli assi, si ottiene:

$$x = \overline{OH} \cos \frac{\alpha}{2} - \overline{HT} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad y = \overline{OH} \sin \frac{\alpha}{2} + \overline{HT} \cos \frac{\alpha}{2}$$

ora, $\overline{OH} = r \cos 3\alpha/2, \overline{HT} = 3r \sin 3\alpha/2$, onde

$$x = r \left\{ \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 3 \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right\},$$

$$y = r \left\{ \cos \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + 3 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right\}$$

o più semplicemente

$$(2) \quad x = r(2 \cos 2\alpha - \cos \alpha), \quad y = r(2 \sin 2\alpha + \sin \alpha).$$

Facendo $\text{tg } \alpha/2 = t$ si ottengono per x, y espressioni razionali fratte del quart'ordine, le quali conducono a concludere che la curva di cui si tratta è una quartica trinodale, con tre assi di simmetria, formanti fra loro angoli di 120° . Benchè tale curva abbia dato materia a molteplici investigazioni ¹⁾, non reputiamo del caso l'arrestarsi a studiarla.

Passiamo invece a occuparci della curva podaria di un ipocicloide tricuspide rispetto ad un punto del circolo tritangente (v. p. 193). È una curva che porta il nome di trifoglio obliquo, datale da G. de Longchamps ²⁾ ed usato dal Brocard, autore di una pregevole monografia su di essa ³⁾. L'equazione della curva in questione si potrebbe ottenere facilmente mediante l'equazione generale della tangente dell'ipocicloide; ma noi preferiamo arrivarvi partendo dalla seguente definizione (segnalata dal De Longchamps) di cui in generale essa è suscettibile.

« Data una circonferenza (fig. 31), un punto P di essa ed una retta fissa r , si conduce da P una corda arbitraria PR ; allora il cerchio di centro R e raggio PR taglia la parallela condotta da R a r in due punti M, M' il cui luogo è un trifoglio obliquo ⁴⁾ ».

¹⁾ Sono segnalate nella memoria del BROCARD *Le trifolium* (Journal de Mathém. spéciales, 1891), p. 17 dell'estratto.

²⁾ *Sur le trifolium* (Journ. de Math. spéciales, 1887).

³⁾ V. nota antiprecedente.

⁴⁾ È facile vedere che tale costruzione equivale ad una speciale trasformazione geometrica effettuata sulla data circonferenza.

Per trovarne l'equazione scegliamo un sistema polare del quale il polo sia P e l'asse polare il diametro POD del dato circolo; chiamiamo poi α l'angolo di questo diametro con la retta fissa r , a il raggio del circolo suddetto e ρ , ω le coordinate di un punto qualunque M della curva. Sarà

$$\overline{PR} = 2a \cos(2\omega - \alpha), \quad \rho = \overline{PM} = 2\overline{PR} \cos(\omega - \alpha),$$

onde

$$(3) \quad \rho = 4a \cos(2\omega - \alpha) \cos(\omega - \alpha),$$

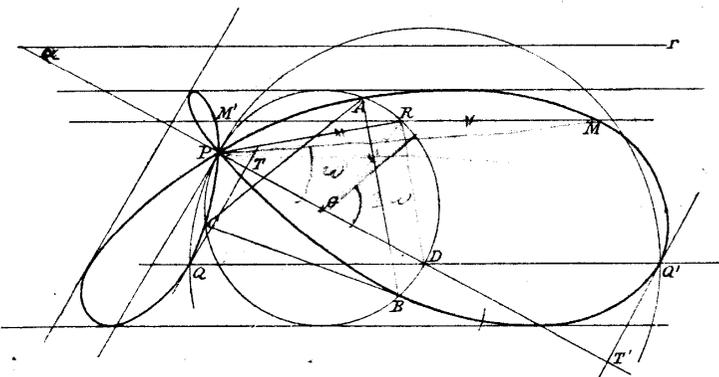


Fig. 31. — Trifoglio obliquo.

o, se meglio piace,

$$(3') \quad \rho = 2a \cos \omega + 2a \cos(3\omega - 2\alpha)$$

è l'equazione domandata¹⁾. Passando a coordinate cartesiane essa diviene:

$$(4) \quad \frac{(x^2 + y^2)^2}{2a} = x(x^2 + y^2) + x(x^2 - 3y^2) \cos 2\alpha + y(3x^2 - y^2) \sin 2\alpha$$

Se ne deduce che il trifoglio obliquo è una curva del quart'ordine di cui P è punto triplo; le corrispondenti tangenti formano coll'asse polare gli angoli

¹⁾ H. BROCARD, *Mémoire sur divers problèmes dont la solution dépend de la trisection de l'angle* (Algers, 1874).

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

onde due sono fra loro ortogonali e la terza è normale alla retta fissa. Nei punti ciclici del piano il trifoglio è toccato dalla retta all'infinito. Risulta dalle formole di Plücker che la curva di cui trattiamo è di sesta classe e possiede sei flessi e quattro tangenti doppie; una di queste è, come si disse, la retta all'infinito, altre due sono le tangenti al dato cerchio parallele alla retta fissa; la restante è reale e a distanza finita (v. la figura). Lasciamo al lettore di verificare, servendosi delle equazioni precedenti, che il cerchio dato sega il trifoglio, oltrechè nel punto P e nei punti ciclici del piano, nei vertici A, B, C di un triangolo equilatero; e che il trifoglio passa pei punti Q, Q' , in cui la parallela condotta da D alla retta fissa è tagliata dalla circonferenza di centro D e raggio DP ed è ivi toccata dalle perpendicolari condotte dai detti punti al diametro OD .

Se si pone

$$\rho_1 = 2a \cos \omega, \quad \rho_2 = 2a \cos 3(2\alpha/3 - \omega)$$

la (3') diverrà $\rho = \rho_1 + \rho_2$; ora di codeste equazioni la prima rappresenta il circolo dato, mentre la seconda appartiene (v. Lib. V, Cap. 8) a quella particolare rodonea conosciuta sotto il nome di *trifoglio equilatero*; onde il trifoglio obliquo si può costruire aggiungendo i raggi vettori corrispondenti di un cerchio e di un trifoglio regolare opportunamente disposti.

È facile dimostrare che la medesima curva si può costruire come segue: Data una conica passante per l'origine O delle coordinate, da un suo punto arbitrario M si abbassano le perpendicolari sopra i suoi assi e se ne congiungono i piedi A, B con retta; il piede P della perpendicolare condotta da O ad AB ha per luogo un trifoglio obliquo¹⁾.

76. Ad ogni valore dell'angolo α corrisponde un particolare trifoglio. Sono degni di menzione quelli che nascono supponendo $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi/2$. L'equazione polare del primo è (posto per abbreviare $4a = d$)

$$(5) \quad \rho = d \cos \varphi \cos 2\varphi$$

¹⁾ K. ZAHRADNICK, *Ueber eine bitonale kúbische Verwandtschaft und deren Anwendung* (Wiener Sitzungsber. T. CXIV, II Abt., 1905) Un'altra generazione è contenuta nella Cuestión 32 proposta dal BROCARD in *Progrés* (T. I, p. 292) e poi risolta (T. III, p. 241 e 261). Eccone l'enunciato: « Un hilo de longitud d está fijo á un punto A de una circumferencia de radio a y leva en su otro extremo un peso M que lo tiende. El hilo pasa por un pequeño anillo B que se mueve á lo largo de la circumferencia OA . Hallar el lugar de los puntos M ».

o anche

$$(5') \quad \rho = d \cos \varphi - 2 d \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

mentre quella del secondo è

$$(6) \quad \rho = 4 a \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} 2 \omega.$$

Ora le curve rappresentate dalle equazioni (5) e (6) furono incontrate da G. de Longchamps, il quale le chiamò risp. *trifoglio retto*¹⁾ e *foglia doppia retta*²⁾; egli addì uno speciale metodo di generazione della prima e un procedimento, che ora esporremo pure, per trovare una curva più generale della seconda.

I. « Dato (fig. 32) un segmento rettilineo $OO' = d$, si conduce per O una retta arbitraria sulla quale si abbassa la perpendicolare $O'M$; sia M' il simmetrico di M rispetto a OO' e P il piede della perpendicolare condotta da M' a OM . Il luogo del punto P è un trifoglio retto »³⁾. Per trovarne l'equazione assume-

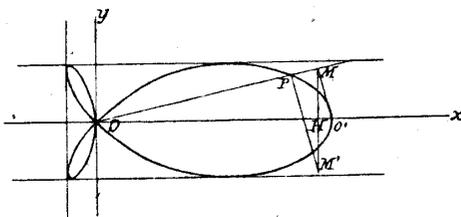


Fig. 32. — Trifoglio retto.

remo O per polo e OO' per asse polare; si avrà allora successivamente:

$$OM = d \cos \omega, \quad MH = OM \operatorname{sen} \omega = d \operatorname{sen} \omega \cos \omega,$$

$$MM' = 2 d \operatorname{sen} \omega \cos \omega, \quad MP = MM' \operatorname{sen} \omega = 2 d \operatorname{sen}^2 \omega \cos \omega$$

e poichè $\rho = OP = OM - MP$ si conclude

$$\rho = d \cos \omega - 2 d \cos \omega \operatorname{sen}^2 \omega \quad (1)$$

che coincide con la (5'). La corrispondente equazione cartesiana

¹⁾ Una costruzione stereometrica se ne trova fra le *Notes géométriques sur le trifolium droit* (Mathesis, III Ser., T. IV, 1904) di A. DROZ-FARNY.

²⁾ La prima menzione di questa curva leggesi nei *Trattamenti matematici* (Brescia 1764) di G. B. SUARDI (p. 184). Altra s'incontra nella *Abhandlung über die Kurve deren Natur durch die Gleichung $y^4 = (4a x - 2x^2)y^2 - x^4$ ausgedrückt wird* (Breslau 1833) di J. K. JOBISCH.

³⁾ G. DE LONGCHAMPS, *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équene* (Paris 1890), p. 125.

(1) Mediante questa si calcola facilmente l'area di ogniuno dei 3 cappi.

$(x^2 + y^2)^2 - dx(x^2 - y^2) = 0$ mette in evidenza che la curva consta di tre foglie, due fra loro simmetriche rispetto a OO' , la terza simmetrica rispetto a questa retta; inoltre le tangenti alla curva nel punto triplo O sono l'asse delle y e le bisettrici dell'angolo degli assi; finalmente, oltre la retta all'infinito, sono tangenti doppie della curva le tre rette $x + d/8 = 0$, $y \pm d/4 = 0$.

Il trifoglio retto presenta una grande analogia di forma con una quartica razionale considerata quasi due secoli fa da G. Cramer, il quale notò essere dessa « un espèce de trèfle » generabile nel seguente modo¹⁾: « Dato un cerchio di centro C e raggio r nonchè un punto O della sua periferia, si prendano come assi le due rette che passano per O e formano con OC angoli $= \pi/4$; tracciata l'ordinata NP di un punto qualunque N del cerchio, si segni il punto M tale che si abbia $MP^2 = OP \cdot NP$, e se ne consideri il luogo geometrico ». Si trova agevolmente che l'equazione di questo è

$$y^2 = x \left\{ \sqrt{r^2 - \left[x - \frac{r}{\sqrt{2}} \right]^2} - \frac{r}{\sqrt{2}} \right\},$$

ossia

$$(7) \quad x^4 + y^4 - 2ax(x^2 - y^2) = 0,$$

avendo posto per semplificare $r = a\sqrt{2}$. Il trifoglio di Cramer è pertanto una quartica avente O per punto triplo, la retta $x + a(\sqrt{2} - 1) = 0$ per tangente doppia, ecc.; non passa per i punti ciclici. ?

II. « Dato (fig. 33) l'angolo retto AOB , sui lati del quale sono segnati i punti A, B , su una retta qualunque condotta per B si cala la perpendicolare AM ; se MH è perpendicolare a OA e HP perpendicolare a AM , il luogo del punto P è una *foglia doppia obliqua* »²⁾. Per trovarne l'equazione chiamiamo a, b le distanze di A, B da O , ed assumiamo A per polo e OA per asse polare. Proiettando sopra AM la linea poligonale $AOBM$ otterremo

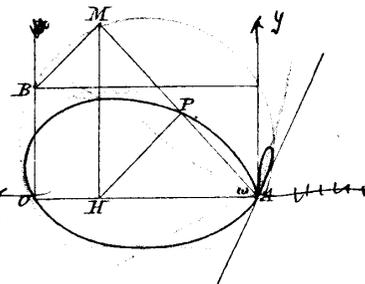


Fig. 33. — Foglia doppia obliqua.

$$AM = a \cos \omega + b \operatorname{sen} \omega$$

¹⁾ *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève, 1750), pag. 421.

²⁾ G. DE LONGCHAMPS, *Essai*, p. 122.

D'altronde si ha:

$$\rho = \overline{HP} = \overline{AP} \cos \omega = \overline{AM} \cos^2 \omega$$

dunque finalmente

$$(8) \quad \rho = a \cos^3 \omega + b \operatorname{sen} \omega \cos^2 \omega$$

è l'equazione che cercavasi. La corrispondente equazione cartesiana è

$$(9) \quad (x^2 + y^2)^2 = x^2 (ax + by)$$

onde la foglia doppia obliqua ha in A un punto triplo; le corrispondenti tangenti sono l'asse delle y contato due volte e la retta $ax + by = 0$.

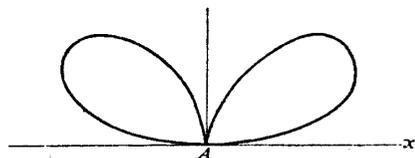


Fig. 34. — Foglia doppia retta.

Nel caso speciale $a = 0$ le (8) (9) divengono

$$(8') \quad \rho = b \operatorname{sen} \omega \cos^2 \omega,$$

$$(9') \quad (x^2 + y^2)^2 = bx^2y;$$

ora la prima si muta nella (6) cambiando b in $8a$ e ω in $\pi/2 - \omega$, mentre la seconda prova che la curva di cui si tratta consta di due curve fra loro simmetriche rispetto a Oy (fig. 34): donde il nome di *foglia doppia retta* che essa porta. Dalla (9'), scambiando x con y e scrivendo $4a$ invece di b si deduce

$$(9'') \quad y = \pm \sqrt{ax} \pm \sqrt{ax - x^2},$$

onde a foglia doppia retta appartiene alla classe di curve a cui è consacrato il Capo X del presente Libro. Essa risolve una questione proposta nel 1857, dal Montuucci nelle *Nouvelles Annales* (p. 449) e coincide con la *curva duplicatrice* adoperata dallo stesso geometra nel lavoro *Résolution de l'équation du 5.e degré* (Paris, 1869). Notiamo che la equazione (9'') riesce utile per lo studio della foglia doppia retta¹⁾: infatti essa conduce subito alla determinazione dell'area della curva:

$$2 \left\{ \int_0^a (\sqrt{ax} + \sqrt{ax - x^2}) dx - \int_0^a (\sqrt{ax} - \sqrt{ax - x^2}) dx \right\} = 4 \int_0^a \sqrt{ax - x^2} dx = \pi a^2/2.$$

¹⁾ Cfr. ELGÉ (= G. DE LONGCHAMPS), *Sur le folium double* (Journ. de Math. spéciales, 1896).

Nè va taciuto che nell'*Introduction* del Cramer si trova una curva di forma somigliantissima alla foglia doppia retta; alludiamo a quella generabile come segue¹⁾: « Dati un cerchio (di centro C e raggio r), un suo diametro e la tangente in un suo estremo, si consideri un segmento MN parallelo a OC e compreso fra la periferia e la tangente; si porti sopra la retta corrispondente il segmento $\overline{NP} = \sqrt{\overline{ON} \cdot \overline{NM}}$ e si considera il luogo del punto P ». Questo ha per equazione $x^4 + y^4 = 2axy^2$, ed una semplice discussione ne prova l'analogia di forma colla foglia doppia retta.

77. Abbiamo visto nei due numeri precedenti che il trifoglio generale ammette come casi particolari il trifoglio retto e la foglia doppia retta, mentre non rientra in esso il trifoglio regolare del quale abbiamo fatto incidentalmente menzione nella chiusa del n. 73. Ora il Brocard ha osservato²⁾ come vi sia un'altra curva podaria dell'ipocicloide tricuspide, della quale sono casi speciali tutte tre quelle curve ed altre ancora. È la podaria rispetto ad un punto A di una delle tangenti cuspidali. Per trovarne l'equazione chiamiamo a la ascissa del punto A ; e osserviamo che la perpendicolare condotta dal punto A alla retta (1) (pag. 199) ha per equazione

$$(x - a) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} - y \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

L'equazione della *podaria brocardiana* si otterrà eliminando a fra la (1) e questa equazione; ora siccome questa dà:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}},$$

così la (1), scritta come segue

$$x \cos \frac{\alpha}{2} + y \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = r \left\{ \cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \right\},$$

guida subito alla seguente rappresentazione analitica della curva di cui si tratta:

$$(10) \quad \left\{ x(x-a) + y^2 \right\} \left\{ (x-a)^2 + y^2 \right\} = r(x-a) \left\{ (x-a)^2 - 3y^2 \right\}$$

Trasportando l'origine nel punto A e poi passando a coordinate

¹⁾ CRAMER, *Introduction*, p. 413.

²⁾ V. la monografia succitata, p. 26 e seg. dell'estratto.

polari si ottengono le altre equazioni

$$(11) \quad (x^2 + y^2 + ax)(x^2 + y^2) = rx(x^2 - 3y^2)$$

$$(12) \quad \rho = (r - a) \cos \omega - 4r \cos \omega \sin^2 \omega$$

ovvero

$$(12') \quad \rho = -(a + 3r) \cos \omega + 4r \cos^3 \omega$$

La (11) fa vedere che la podaria brocardiana è una quartica razionale circolare avente il punto A per punto triplo; delle corrispondenti tangenti una è sempre reale (l'asse delle y), le altre (simmetriche rispetto a Ox) lo sono se A è interno al circolo di centro O e raggio r : in tal caso la curva consta di tre foglie, aventi due a due tre tangenti comuni; queste e la retta all'infinito sono bitangenti della curva; ecc.

La (12) e la (12') servono opportunamente a mettere in evidenza i casi particolari più salienti della curva in questione:

1° Se $a + 3r = 0$ la (12') diviene $\rho = 4r \cos^3 \omega$, che vedremo (Libro V, Cap. XI) rappresentare una proporzionatrice secondaria ¹⁾.

2° Se $a = r$ la (12) dà $\rho = -4r \cos \omega \sin^2 \omega = -2r \sin \omega \sin 2\omega$, che vedremo essere l'equazione di una foglia doppia retta.

3° Fatto nella (12) $r - a = d$, $2r = d$ otterremo l'equazione di un trifoglio retto.

4° Supposto finalmente $a = 0$, la (12') diviene $\rho = r(4 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega) = r \cos 3\omega$, equazione di un trifoglio regolare.

Resta così dimostrato quanto asserimmo in principio di questo numero ed in pari tempo segnalata una comune maniera di generazione di quattro curve particolari.

¹⁾ Cfr. V. JERABEK, *Podaire de l'hypocycloïde de Steiner par rapport à un point de rebroussement* (Mathésis, III Ser., T. V, 1905).

CAPITOLO IX

Le ovali di Cartesio.

78. Se gettiamo uno sguardo sopra i quattro precedenti Capitoli, vedremo facilmente qual sia la catena che li unisce; dopo di avere studiata la concoide di Nicomede (Cap. V) ci occupammo delle generalizzazioni che ricevette, in particolare delle concoide a base circolare (Cap. VI); essendo una di queste una quartica con tre cuspidi, fummo indotti a considerare un'altra curva speciale con la medesima qualità, cioè l'ipocicloide tricuspide (Cap. VII) e quindi certe quartiche che da questo derivano (Cap. VIII). Ma ora, esaurito questo gruppo, riprenderemo l'ordine cronologico (da cui ci stacciamo soltanto quando la concatenazione logica lo esige) ed osserviamo che Descartes nel II libro della sua *Géométrie*, per illustrare sopra un esempio interessante i nuovi metodi di cui egli è l'inventore, fece conoscere la definizione e le prime proprietà « de certaines ovales que Vous verrez être très-utiles pour la théorie de la catoptrique et de la dioptrique » ¹⁾. Sono le curve ordinariamente chiamate *ovals di Cartesio* o — per le loro proprietà ottiche — *curve aplanetiche* ²⁾; Descartes ne espone la seguente descrizione, celando però la considerazione che lo condussero ad immaginarle:

Siano dati (fig. 35) due punti F, G ed una retta r segante FG in A ; si tracci un cerchio di centro F e raggio arbitrario e sia B una delle sue intersezioni con la retta FG . Si determini poi su r

¹⁾ *La géométrie de René Descartes* (Nouv. éd., Paris 1886), p. 41 e seg.

²⁾ Il VALLÉE (*Mémoire sur la vision*, Mém. des Sav. étr., T. XII, 1854) usa il nome *optoïde*, che cadde ben presto in dimenticanza. — Per la bibliografia vedi LIGUINE, *Liste des travaux sur les ovales de Descartes* (Bull. des Sciences mathématiques, II Série, T. VI, 1882). Recenti esposizioni delle proprietà delle curve in questione trovansi nei lavori: A. HIMSTEDT, *Ueber cartesische Ovale* (Nordhausen, 1906) e CLARA L. BACON, *The cartesian oval and the elliptic functions p and sigma* (Amer. Journ. of Math., T. 35, 1913). Aggiungiamo che il DE MAIRAN considerò altre linee di quart'ordine aventi applicazioni nella teoria matematica della luce; sono le *curve anaclastiche* di equazione $\frac{x^2 y^2 + y^2 (b + y)^2}{x^2 y^2 + a^2 (b + y)^2} = \frac{m^2}{n}$ (v. il lavoro *Sur la refraction des corps* in Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1740).

un punto C tale che si abbia $AC/AB = \lambda$, λ essendo una costante (l'indice di rifrazione) « à savoir celle qui mesure les réfractions si on veut s'en servir pour la dioptrique ».

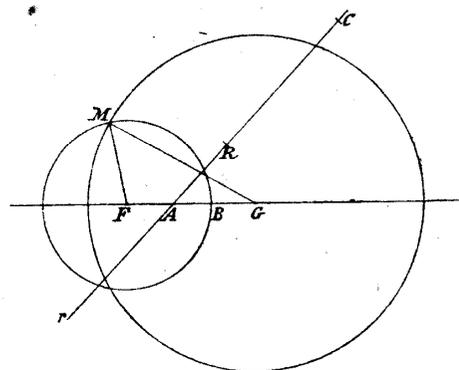


Fig. 35.

Si prenda ancora sopra r il segmento $AR = AG$ e con centro G e raggio CR si descriva un secondo cerchio a tagliare in M quello già tracciato. Il luogo dei punti M è un ovale di Cartesio.

Da questa costruzione abbastanza complicata è agevole dedurre un'elegante proprietà atta a caratterizzare le curve di cui

ci occupiamo. Osserviamo infatti che, essendo per costruzione

$$\overline{FM} = \overline{FB} = \overline{FA} + \overline{AB} = \overline{FA} + 1/\lambda \cdot \overline{AC},$$

$$\overline{GM} = \overline{CR} = \overline{AR} - \overline{AC} = \overline{AG} - \overline{AC},$$

si ha pure

$$\lambda \cdot \overline{FM} + \overline{GM} = \lambda \cdot \overline{AF} + \overline{AG};$$

o, scrivendo per maggiore simmetria μ/ν invece di λ ,

$$\mu \cdot \overline{MF} + \nu \cdot \overline{MG} = \mu \cdot \overline{AF} + \nu \cdot \overline{AG}.$$

Ora il secondo membro è una lunghezza conosciuta; ponendo

$$(1) \quad \mu \cdot \overline{AF} + \nu \cdot \overline{AG} = l$$

otterremo

$$(2) \quad \mu \cdot \overline{MF} + \nu \cdot \overline{MG} = l,$$

equazione che dice: *Un'ovale di Cartesio è il luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi moltiplicate per numeri dati, danno una somma costante*¹⁾. Il paragone della (2) con la (1) mostra che l'ovale

¹⁾ La (2) è in sostanza l'equazione dell'ovale in un sistema di coor-

passa pel punto A ; invece la (2) fa vedere che se $\nu = \mu$ l'ovale diviene un'ellisse di fuochi F, G e se $\nu = -\mu$ un'iperbole, casi questi che noi escluderemo costantemente dalle nostre considerazioni.

Un'immediata conseguenza dell'equazione (2) è che l'ovale di Cartesio appartiene alla categoria composta dai luoghi dei punti per cui è costante la somma delle distanze da n poli fissi, moltiplicate per altrettanti costanti. Come è noto le normali in un punto M di un tale luogo si ottiene conducendo da M dei segmenti diretti a quei poli e proporzionali ai numeri dati; la loro risultante sarà la normale in M alla curva¹⁾. In particolare per costruire la normale nel punto M dell'ovale prenderemo sulle rette MF, MG due punti P, Q tali che si abbia $MP/\mu = MQ/\nu$ e completeremo il parallelogrammo $PMQN$; la sua diagonale MN sarà la normale²⁾. Ora se chiamiamo i, r gli angoli FMN, GMN avremo $MP/\sin r = MQ/\sin i$, equazione che, paragonata alla precedente, dà $\sin r/\sin i = \mu/\nu = \lambda$. Ciò prova che se un'ovale di Cartesio separa due mezzi il cui indice di rifrazione sia λ , un fascio di raggi luminosi emananti da F si trasforma in un fascio di raggi concorrenti in G ³⁾: donde l'importanza ottica delle curve di cui si parla e la spiegazione del nome di *fuochi* comunemente dato ai punti F, G e di quello di *linee aplanetiche* (cioè senza aberrazione) dato a tali curve.

79. Preso per polo il fuoco F , detta h la distanza FG e ϱ , ω le coordinate polari di M , la (2) assume il seguente aspetto:

$$\mu \varrho + \nu \sqrt{\varrho^2 - 2 \varrho h \cos \omega + h^2} = l$$

ossia

$$(3) \quad (\nu^2 - \mu^2) \varrho^2 + 2 \varrho (\mu l - \nu^2 h \cos \omega) + \nu^2 h^2 - l^2 = 0;$$

nel caso particolare in cui è $\nu = |l/h|$ quest'equazione si semplifica divenendo

$$\varrho = \frac{2 h \nu^2}{\nu^2 - \mu^2} \cos \omega - \frac{2 \mu l}{\nu^2 - \mu^2};$$

dinate bipolari, avente F, G per punti fissi. Da questo punto di vista la stessa equazione venne già largamente sfruttata.

¹⁾ POINSON, Journ. Ec. pol., XIII Cah., 1806, p. 206; G. PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, 1887), p. 140.

²⁾ Un'altra costruzione venne indicata nel 1688 da FATIO DE DUILLIER: *o. P. SERRET, Des méthodes en géométrie* (Paris 1855), p. 52-57.

³⁾ Alla stessa conclusione il FRENET (*Recueil d'exercices sur le calcul infinitesimal*, III ed., Paris 1873, p. 221) giunge applicando alcune formule generali; egli porge così l'analisi di quanto Cartesio espone sinteticamente.

e quest'equazione, in forza nel n. 70, eq. (3), dice che la lumaca di Pascal è una speciale ovale di Cartesio.

E qui cade in acconcio notare che Chasles ha creduto di avere scoperta una trasformazione geometrica capace di mutare un cerchio in un ovale di Cartesio¹⁾, mentre essa non dà che una lumaca di Pascal²⁾. Se infatti si esegue sul circolo $\varrho^2 - 2a\varrho \cos \omega + b^2 = 0$ la trasformazione individuata dalle formole $\varrho = \sqrt{m\varrho_1}$, $\omega = \omega_1/2$ si ottiene la curva di equazione

$$[m^2(x^2 + y^2) - 2ma^2x + b^4]^2 - 4m^2(a^2 - b^2)^2(x^2 + y^2) = 0,$$

cioè una lumaca avente per punto doppio quello di coordinate $x = b^2/m$, $y = 0$. Se invece sulla lumaca di equazione $\varrho_1 = a + b \cos \omega_1$ si effettua la trasformazione

$$\omega = \omega_1, \quad \varrho = \frac{\varrho_1 \pm \sqrt{\varrho_1^2 - c^2}}{2}$$

si ottiene la curva di equazione polare

$$\varrho^2 - \varrho(a + b \cos \omega) + c^2/4 = 0,$$

la quale è una ovale di Cartesio³⁾.

La costruzione delle ovali che scaturisce dalle considerazioni precedenti offre un interesse molto minore di altre che ora esporremo.

Se a' , b' sono le coordinate di F e a'' , b'' quelle di G la (2) si può scrivere:

$$(4) \quad \mu \sqrt{(x - a')^2 + (y - b')^2} + \nu \sqrt{(x - a'')^2 + (y - b'')^2} = l;$$

ora è sempre possibile in infiniti modi determinare due lunghezze r' , r'' tali che sia

$$\mu r' + \nu r'' = l;$$

in conseguenza la (4) può scriversi

$$(5) \quad \frac{\sqrt{(x - a')^2 + (y - b')^2} - r'}{\sqrt{(x - a'')^2 + (y - b'')^2} - r''} = -\frac{\nu}{\mu}.$$

¹⁾ *Aperçu historique*, Nota XXI.

²⁾ L'errore di CHASLES fu rilevato dal CAYLEY sin dal 1850 (*Addition au mémoire sur quelques transmutations des lignes courbes*, Journ. de Math., T. XV) e poi da M. D'OCAGNE (*Sur un mode de génération des ovali de Descartes*, C. R., T. XCVII 1883).

³⁾ CAYLEY, *Note on the theory of cartesiani* (Quarterly Journal T. XV, 1878); cfr. il precedente articolo dello stesso autore *On the mechanical description of a cartesian* (Id., T. XIII, 1875).

Ora il numeratore del primo membro misura la distanza del punto (x, y) dal cerchio Γ' di centro (a', b') e raggio r' ; analogo significato ha il denominatore rispetto al cerchio Γ'' di centro (a'', b'') e raggio r'' . Si conclude pertanto, con Newton: *Un'ovale di Cartesio si può considerare come il luogo dei punti le cui distanze da due cerchi fissi stanno fra loro in un dato rapporto*¹⁾.

Da questa proposizione si può dedurre un'altra generazione, scoperta da Chasles; è espressa dal seguente teorema:

Dati due cerchi Γ' , Γ'' ed un punto O della congiungente i loro centri O' , O'' , se attorno a O si fa ruotare una trasversale t che ne tagli le periferie nei punti P_1' , P_2' , P_1'' , P_2'' i raggi $O'P_1'$, $O'P_2'$ di Γ' taglieranno i raggi $O''P_1''$, $O''P_2''$ di Γ'' in quattro punti M il cui luogo è un'ovale di Cartesio. Considerando infatti il triangolo $M O' O''$ tagliato dalla trasversale t nei punti O , P_1' , P_1'' avremo

$$\frac{O'O}{O''O} \cdot \frac{O''P_1''}{MP_1'} \cdot \frac{MP_1'}{O'P_1'} = 1$$

d'onde (se r' , r'' sono i raggi dei cerchi dati)

$$\frac{MP_1'}{MP_1''} = \frac{O''O}{O'O} \cdot \frac{r'}{r''} = \text{cost.};$$

e questa relazione, in virtù del precedente teorema di Newton, abilita a concludere il teorema di Chasles. Tale proposizione, benché sia un corollario della precedente è importante, non solo perchè dà un modo facilissimo per descrivere l'ovale per punti, ma anche perchè guida ad una ottima costruzione della tangente: giacchè Chasles osservò che la tangente in M e le tangenti a Γ' , Γ'' nei punti corrispondenti concorrono in un medesimo punto. Dalla stessa proposizione si desume che una curva di Cartesio completa consta, non di una sola ovale (come credevano Descartes ed i suoi immediati seguaci), ma, come notò Chasles, di *due ovali coniugate*, non aventi (al finito) alcun punto comune.

L'equazione (4) guida anche ad una generazione stereometrica delle curve di cui trattiamo²⁾. Consideriamo infatti due coni di rivoluzione ad assi paralleli; essi potranno ritenersi rappresentati dalle equazioni:

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = \frac{r'^2 (h' - z)^2}{h'^2},$$

¹⁾ *Phil. natur. Principia math.*, Lib. I, Sect. XIV.

²⁾ F. J. (GABRIEL MARIE), *Exercices de géométrie analytique* (III ed., Tours et Paris, 1893), p. 693. Questa generazione è caso speciale di quella indicata in principio del n. 59 per tutte le quartiche ellittiche.

$$(x - a'')^2 + (y - b'')^2 = \frac{r''^2 (h'' - z)^2}{h''^2};$$

la proiezione sul piano xy della intersezione di queste due superficie sarà rappresentata dall'equazione risultante dall'eliminazione di z fra queste equazioni, cioè da

$$\frac{r'}{h'} \sqrt{(x - a')^2 + (y - b')^2} - \frac{r''}{h''} \sqrt{(x - a'')^2 + (y - b'')^2} = h' - h''$$

Avendo questa la forma (4) si conclude che: *L'intersezione di due coni di rivoluzione ad assi paralleli, si proietta ortogonalmente sopra un piano perpendicolare a questi assi in un'ovale di Cartesio.*

Le stesse curve s'incontrano nella teoria delle funzioni di variabili complesse; se, infatti, si pone

$$u + iv = p(x + iy),$$

p essendo la nota funzione di Weierstrass, si ottiene fra i due piani (u, v) , (x, y) una corrispondenza tale che alle rette $u = \text{cost.}$ o $v = \text{cost.}$ corrispondono curve della detta specie ¹⁾.

Queste sono forse le più interessanti, ma non le uniche maniere per generare le curve aplanetiche; noi non possiamo attardarci ad esporre quelle escluse, onde rimandiamo chi desidera conoscerne altre alla Nota XXI dell'*Aperçu historique* di M. Chasles.

Soltanto osserviamo che la precedente genesi stereometrica delle ovali di Descartes guida a due convenienti costruzioni delle stesse, applicando i metodi insegnati dalla geometria descrittiva per costruire l'intersezione o di due coni o di due superficie di rotazione ad assi paralleli.

80. Le più rilevanti proprietà delle ovali di Cartesio si deducono dallo studio del loro contegno all'infinito. Per determinarlo riprendiamo la equazione (4) supponendo in essa per semplicità $a' = -a'' = a$, $b' = b'' = 0$; posto poi $x + iy = \xi/\zeta$, $x - iy = \eta/\zeta$ essa diverrà

$$\mu \sqrt{(\xi - a\zeta)(\eta - a\zeta)} + \nu \sqrt{(\xi + a\zeta)(\eta + a\zeta)} = l\zeta$$

¹⁾ E. HAENTSCHEL, *Ueber das cartesische Oval* (Arch. f. Math. u. Phys., T. 69, 1883) e *Ueber ein orthogonales System von bizirkularen Kurven vierten Ordnung* (Progr. Berlin, 1908).

o, razionalizzando,

$$(6) \quad [\mu^2 (\xi - a\zeta)(\eta - a\zeta) - \nu^2 (\xi + a\zeta)(\eta + a\zeta)]^2 - 2l^2 \zeta^2 [\mu^2 (\xi - a\zeta)(\eta - a\zeta) + \nu^2 (\xi + a\zeta)(\eta + a\zeta)] + l^4 \zeta^4 = 0.$$

Questa prova che i due punti $(\xi = 0, \zeta = 0)$ e $(\eta = 0, \zeta = 0)$, cioè i punti ciclici del piano, sono doppi per la curva (6). Le tangenti nel primo, nelle coordinate ξ, η, ζ , sono complessivamente rappresentate dall'equazione $[\mu^2 (\xi - a\zeta) - \nu^2 (\xi + a\zeta)]^2 = 0$, onde quel punto è una cuspidale ¹⁾ e la corrispondente tangente ha per equazione

$$\xi = \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} a \zeta;$$

in coordinate cartesiane tale tangente è rappresentata dall'equazione

$$x + iy = \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} a.$$

Similmente l'altro punto ciclico è pure una cuspidale e

$$x - iy = \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} a$$

è l'equazione cartesiana della corrispondente tangente. Le due tangenti cuspidali ora trovate si tagliano nel punto reale di coordinate

$$(7) \quad x = \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} a, \quad y = 0,$$

che è un fuoco straordinario multiplo dell'ovale.

Per trovare i fuochi ordinari cerchiamo le tangenti che si possono condurre all'ovale (6) dal punto $\xi = 0, \zeta = 0$. Poniamo perciò nella (6) $\zeta = k\xi$; l'equazione risultante è divisibile per ξ^2 e noi sceglieremo k in modo che, tolto questo fattore, si abbia una equazione in ξ/η con una radice doppia. Affinchè ciò accada k deve soddisfare alla condizione:

$$(p^2 - q^2)(k^2 + 2ap) = 0$$

¹⁾ Quest'importante osservazione appartiene al CAYLEY (v. l'*Addition* citata nella nota preced.), il quale così corresse l'asserzione di CHASLES che i punti ciclici sono punti doppi dell'ovale. In conseguenza questa è di 6ª non di 8ª classe come riteneva questo celebre geometra.

avendo posto per brevità:

$$p = \mu^2(1 - ak) - \nu^2(1 + ak), \quad q = \mu^2(1 - ak) + \nu^2(1 + ak)$$

Ora quell'equazione si scinde in queste tre: $p - q = 0$, $p + q = 0$, $k l^2 + 2ap = 0$, le quali danno per $1/k$ i tre valori

$$a, -a, a \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{l^2}{2a} \frac{1}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Dunque dal punto ciclico $\xi = 0$, $\zeta = 0$ si possono condurre all'ovale (6) tre tangenti rappresentate risp. dalle tre equazioni:

$$x + iy = a, \quad x + iy = -a, \quad x + iy = a \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{l^2}{2a} \frac{1}{\mu^2 - \nu^2}$$

Similmente

$$x - iy = a, \quad x - iy = -a, \quad x - iy = a \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{l^2}{2a} \frac{1}{\mu^2 - \nu^2}$$

rappresentano le tangenti condotte dall'altro punto ciclico. Segue da ciò che la curva ammette per fuochi i tre punti

$$(8) \quad x = a, y = 0; \quad x = -a, y = 0; \quad x = a \frac{\mu^2 + \nu^2}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{l^2}{2a} \frac{1}{\mu^2 - \nu^2}, y = 0.$$

I primi due non sono che i punti fondamentali F, G , i quali quindi sono fuochi non solo nel senso ottico ma eziandio nel senso plückeriano; il terzo è un nuovo fuoco reale H , che Chasles ha segnalato per primo ai geometri ¹⁾, ma che sembra non fosse sfuggito all'acuta mente di Descartes ²⁾. Dimosteremo ora che la curva si comporta nell'identico modo rispetto ai suoi tre fuochi. A tale scopo faremo un cambiamento di coordinate assumendo come nuova origine il fuoco singolare della curva; rispetto ad essa i punti F, G, H hanno per ascisse rispettiv.

$$a = -\frac{2a\nu^2}{\mu^2 - \nu^2}, \quad \beta = -\frac{2a\mu^2}{\mu^2 - \nu^2}, \quad \gamma = -\frac{l^2}{2a} \frac{1}{\mu^2 - \nu^2}.$$

¹⁾ *Aperçu historique*, Nota XXI.

²⁾ Cfr. P. TANNERY, *Les « excerpta » des M. SS. de R. Descartes* (Abb. zur Gesch. der Mathem., T. IX, 1899, p. 509). Va rilevato che la curva di cui trattiamo possiede, fuori del suo piano, infiniti fuochi, che riempiono una cubica posta nel piano condotto per la retta $F G H$ perpendicolarmente al piano dell'ovale (v. DARBOUX, *Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre*, Nouv. Ann., II Série, T. III, 1864).

Osservando che si ha

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{4a^2(\mu^2 + \nu^2) + l^2}{2a(\mu^2 - \nu^2)}, \quad \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = \frac{4a^2\mu^2\nu^2 + l^2(\mu^2 + \nu^2)}{(\mu^2 - \nu^2)^2},$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{2al^2\mu^2\nu^2}{(\mu^2 - \nu^2)^3}$$

si ottiene come nuova equazione dell'ovale la seguente:

$$(9) \quad [x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)]^2 + 4\alpha\beta\gamma[2x - (\alpha + \beta + \gamma)] = 0^1)$$

la cui perfetta simmetria rispetto alle costanti α, β, γ dimostra l'enunciata identità di contegno della curva rispetto ai tre fuochi.

Una conseguenza immediata di tale fatto è che per tutti i punti M dell'ovale si avranno due altre relazioni analoghe alla (2), cioè del seguente tipo:

$$\mu' \cdot \overline{MG} + \nu' \cdot \overline{MH} = l' \quad , \quad \mu'' \cdot \overline{MH} + \nu'' \cdot \overline{MF} = l'';$$

ciascuna di esse, combinata con la (2) prova che fra le distanze di un punto M dell'ovale di Cartesio dai tre fuochi F, G, H , passa una relazione omogenea a coefficienti costanti, cioè del tipo

$$f \cdot \overline{MF} + g \cdot \overline{MG} + h \cdot \overline{MH} = 0^2).$$

81. L'equazione (9) può applicarsi molto convenientemente allo studio dell'ovale di Cartesio. Essa, per esempio, mette in evidenza

$$\text{che} \quad x = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

è l'equazione dell'unica tangente doppia posseduta dalla curva e che i relativi punti di contatto stanno sul cerchio $x^2 + y^2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta$. Essa fa poi vedere che per trovare le tangenti di data direzione della curva (9) bisogna combinare questa coll'equazione

¹⁾ PANTON, *The educational Times*, Question 2622.

²⁾ I coefficienti f, g, h si esprimono come segue in funzione di α, β, γ :

$$f = (\beta - \gamma)\sqrt{\alpha}, \quad g = (\gamma - \alpha)\sqrt{\beta}, \quad h = (\alpha - \beta)\sqrt{\gamma}$$

L'equazione trinomia ora trovata può applicarsi al tracciamento meccanico dell'ovale (v. ZEUTHEN, *Tidskrift*, 4^a Serie, T. VI, 1882). Per altri scopi essa trovasi utilizzata nelle memorie di J. DE VRIES, *Recherche sur les coordonnées multipolaires* (Arch. Teyler, II Ser., T. V, 1896).

$$(10) \quad \frac{[x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)]x + 2\alpha\beta\gamma}{[x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)]y} = \tau,$$

τ essendo una costante data. Ora siccome la coppia di equazioni (9) (10) equivale alla seguente

$$2\alpha\beta\gamma - (\tau y - x)[x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)] = 0,$$

$$\alpha\beta\gamma + (\tau y - x)^2 [2x - (\alpha + \beta + \gamma)] = 0;$$

e siccome da queste scaturisce la nuova equazione

$$(11) \quad 2(\tau y - x)[2x - (\alpha + \beta + \gamma)] + x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0$$

così i punti di contatto delle sei tangenti di un'ovale di Cartesio parallele ad una direzione assegnata stanno sopra una conica. Si osservi che nella (11) τ entra linearmente; e si vedrà che le ∞' coniche rappresentate dalla (11) costituiscono un fascio avente per punti base le intersezioni dell'iperbola

$$3x^2 - y^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0$$

con le due rette $y = 0$ e $x = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$.

La (9) conduce finalmente a un'altra conseguenza importante. Se α, β, γ sono radici dell'equazione

$$(12) \quad \omega^3 - p_1\omega^2 + p_2\omega - p_3 = 0$$

la (9) si scrive

$$(9') \quad (x^2 + y^2 - p_2)^2 + 4p_3(2x - p_1) = 0;$$

dunque supposto che la (12) abbia tre radici ω reali, la (9') rappresenta un ovale di Cartesio; ma se si rimuove tale ipotesi e si suppone soltanto che i tre numeri p_1, p_2, p_3 siano reali, la (9') rappresenterà una nuova curva reale di quart'ordine: adottando la nomenclatura del Salmon¹⁾, si chiama *cartesiana*; dei tre fuochi collineari che una tale curva possiede, uno è reale e gli altri due immaginari coniugati.

Un cono circolare retto è segato da una sfera in una curva di quart'ordine, che può essere costituita da una o due parti staccate; proiettandola ortogonalmente sopra la base del cono si ottiene

¹⁾ *Höhere ebene Curves* deutsch von FIEDLER (Leipzig 1873), p. 311.

nel primo caso una coppia di ovali di Cartesio, nel secondo una curva cartesiana; donde (con applicazione dei metodi della geometria descrittiva) un procedimento per delineare una linea di questa specie¹⁾.

Ritorniamo un'ultima volta alle curve di Cartesio per enunciare, come chiusa le tre seguenti proposizioni:

1° Un'ovale di Cartesio possiede otto flessi, i quali stanno sopra una cubica circolare²⁾.

2° La somma delle aree di due ovali cartesiane coniugate, è eguale al doppio dell'area del circolo avente per centro il fuoco triplo e passante pei punti di contatto della tangente doppia della curva³⁾.

3° Qualunque arco di ovale cartesiana eguaglia la somma di tre archi di ellisse⁴⁾.

¹⁾ G. LORIA, *Fasci di quadriche rotonde e curve cartesiane* (Rend. Acc. Lincei, I Sem., 1919).

²⁾ S. ROBERTS, *On the oval of Descartes* (Proc. of the London math. Soc., T. III, 1869-1871).

³⁾ PANTON, *Educ. Times*, Question 4297.

⁴⁾ Questo teorema fu pubblicato dal GENOCCHI nel giornale *Il Cimento* del 15 ottobre 1855 (v. *Resumé de différentes recherches sur les ovales de Descartes et quelques autres courbes*, *Mathesis*, T. IV, 1884); esso venne assai più tardi ritrovato dal DARBOUX (*Sur la rectification des ovales de Descartes*, C. R., T. LXXXVII, 1878).

Quartiche polizomiali simmetriche.

82. Se $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ sono le equazioni di tre coniche in coordinate cartesiane, l'equazione

$$(1) \quad \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} + \sqrt{f_3} = 0,$$

ove i radicali si devono sempre intendere presi con entrambi i segni, rappresenta una curva del quart'ordine, perchè la (1), razionalizzata diviene $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - 2f_2f_3 - 2f_3f_1 - 2f_1f_2 = 0$; tale curva appartiene — al pari di qualunque curva di quart'ordine ¹⁾ — alla classe delle curve polizomiali di cui tratteremo nel Cap. VI del Libro V. In particolare, se f_1 e f_2 sono funzioni quadratiche della sola x , lo stesso può ripetersi per le quartiche di equazione

$$(2) \quad y = \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2},$$

su cui è opportuno arrestarci, perchè si trovano fra esse parecchie curve speciali, per varie ragioni notevoli ²⁾. Qualunque siano le funzioni quadratiche di x designate con f_1 e f_2 l'equazione (2) rappresenta una curva del quart'ordine simmetrica rispetto all'asse delle x . Ma, viceversa, non qualunque quartica dotata di un tale simmetria appartiene alla classe avente la (2) per equazione generale. Infatti l'equazione generale delle curve del 4° ordine simmetriche rispetto all'asse delle x è della forma

$$y^4 + y^2\varphi + \psi = 0,$$

¹⁾ Ciò risulta dal fatto che l'equazione di qualunque quartica può scriversi sotto la forma

$$\sqrt{t_1 t_2} + \sqrt{t_3 t_4} + \sqrt{t_5 t_6} = 0$$

le $t_i = 0$ essendo le equazioni di sei tangenti di un gruppo steineriano: v. H. WEBER, *Lehrb. d. Algebra* (II Aufl., 1899), p. 429.

²⁾ Ad esse è dedicata la memoria di A. HIMSTED, *Ueber polyzomale Kurven vierter Ordnung* (Progr. Neuhausen, 1914).

φ e ψ essendo funzioni di x dei gradi 2 e 4. Ora da questa si deduce

$$y = \sqrt{\frac{-\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\psi}}{2}}$$

ovvero

$$y = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{\psi}} + \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\sqrt{\psi}}$$

ora affinchè quest'ultima abbia la forma (2) è necessario e sufficiente che ψ sia il quadrato di una funzione quadratica χ di x . Concludiamo dunque che l'equazione

$$(3) \quad y^4 + y^2\varphi + \chi^2 = 0,$$

ovvero

$$(3') \quad y = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\chi} + \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\chi},$$

rappresenta, qualunque siano le funzioni quadratiche φ , χ di x , una quartica polizomale simmetrica rispetto a O x. Dette α , β le radici dell'equazione $\chi = 0$, la curva ha come doppi i punti $(\alpha, 0)$ e $(\beta, 0)$, uno dei quali sta all'infinito se la funzione χ scende al primo grado; esternamente all'asse delle x la curva non ha punti singolari, onde, se essa è razionale, uno di quelli che vi si trovano deve essere un punto di contatto di due rami; tale circostanza si verifica in particolare quando φ e χ sono funzioni di x di gradi minori di 2.

La trasformazione dell'equazione (3) nella (3') è utilissima; anzitutto essa conduce ad una costruzione della curva mediante le due coniche

$$y_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\chi}, \quad y_2 = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\chi},$$

giacchè si ha $y = y_1 + y_2$; in secondo luogo guida alla quadratura della curva, dal momento che si trova

$$\int y dx = \int dx \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\chi} + \int dx \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\chi}$$

e i due integrali del secondo membro si possono calcolare con procedimenti noti

L'utilità di porre l'equazione (3) sotto la forma (3') venne segnalata da Giacomo Bernoulli in un caso speciale ¹⁾; in tal modo egli riuscì a risolvere il problema, proposto da Leibniz, di quadrare

¹⁾ Acta erudit., 1687, p. 525.

la curva di equazione

$$(4) \quad y^4 - 6 a^2 y^2 + 4 x^2 y^2 + a^4 = 0^1);$$

infatti questa è del tipo (3), potendo scriversi come segue

$$(4') \quad y = \sqrt{2 a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}$$

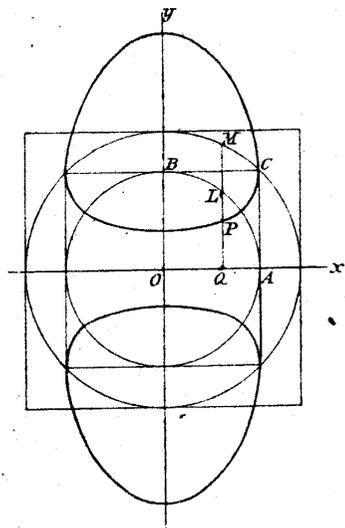


Fig. 36. Quartica polizomale di Giac. Bernoulli.

$$\int_0^a (\sqrt{2 a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}) dx - \int_0^a (\sqrt{2 a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}) dx = 2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi a^2/2;$$

perciò l'area di ciascuna foglia è eguale all'area del minore fra i due cerchi suddetti; le due foglie insieme equivalgono invece al maggiore.

83. Le più celebri fra le curve di quart'ordine che sono oggetto del presente Capitolo sono quelle che il Padre Gregorio di San

¹⁾ Leibniz ed. Gerhardt, T. III (Halle 1855, p. 39); lettera del 4 marzo dell'anno 1696.

L'esame di questa nuova equazione guida alla seguente costruzione della curva, dovuta pure al succitato Bernoulli: « Dato (fig. 36) un quadrato $O A C B$ di lato a si descrivano due cerchi aventi per comune centro O e per raggi la diagonale ed il lato del quadrato; una parallela a $O B$ tagli i due cerchi e la retta $O A$ nei punti L, M, Q ; si porti su essa $Q P = L M$. Il luogo del punto P , rispetto alle rette $O A, O B$ come assi coordinati, è appunto rappresentata dall'equazione precedente. Esso consta di due foglie distinte fra loro simmetriche rispetto a $O A$ ed entrambe simmetriche rispetto a $O B$. L'area della mezza foglia che sta entro l'angolo $A O B$, se si prendono tutti i radicali positivamente, è misurata da

Vincenzo ha considerate nella decima parte del colossale *Opus geometricum quadratura circuli et sectionum conii* (Autverpia, 1647). Ecco la definizione testuale che egli ne ha data (p. 840): « parabolam virtualem voco, cuius ordinatim applicatae, si ad rectam lineam ponantur, aut à recta linea dividantur bifariam, veram producunt parabolam. Porro illam pleraeque, virtualem habet proprietatem, ut linea bisecans ordinatim in illis applicatas, vera sit parabola, sed inversa ». L'autore ha dato a questa definizione un complemento indispensabile, indicando non meno di sei metodi per descriverle; li riferiremo qui indicando poi le equazioni delle curve corrispondenti ed alcune conseguenze che ne derivano.

I. « Dato (fig. 37) un cerchio (di centro H e diametro d) e uno $A C$ dei suoi diametri, si conduce per A una corda arbitraria $A G$, poi da G la parallela al diametro $A C$ a segare in E la tangente in A al dato cerchio e su di essa si prende $E P$ uguale alla corda $G C$. Il luogo di P è una parabola virtuale »¹⁾.

Preso A per origine ed il diametro $A C$ per asse delle y si vede subito che il luogo del punto P è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica: $x = d \sin \omega \cos \omega, y = d \cos \omega$; eliminando ω se ne trae l'equazione del luogo stesso, che è

$$(5) \quad d^2 (y^2 - x^2) = y^4$$

ovvero

$$(5') \quad y = \sqrt{d^2/4 + dx}/2 + \sqrt{d^2/4 - dx}/2$$

La curva ora ottenuta si ritrova nell'*Introduction* del Cramer (p. 470); ove ne è anche indicata un'applicazione (ivi, p. 495), ma non è avvertito che l'invenzione di essa appartiene al citato matematico belga. Essa s'incontra poi nella *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie der Ebene* (Berlin, 1833, p. 286) del Magnus, ove la curva è costruita nel seguente modo: dato un cerchio, di centro O e raggio a , ed un suo diametro $A B$, da un punto qualsivoglia M della sua periferia si conduce $M N$ perpendicolare a $A B$, poi da N si conduce $N Q$ perpendicolare al raggio $O M$ e si porta sopra $N M, N P = N Q$; il luogo del punto P ha per

¹⁾ *Opus geometricum*, Prop. CCXVI (T. II, p. 482).

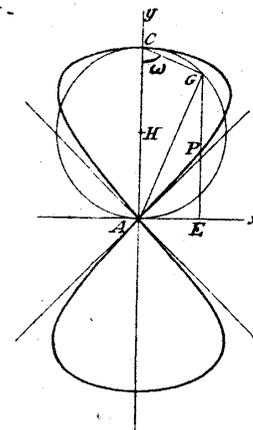


Fig. 37. Lemniscata di Gerono.

→ tacuoda



equazione $a^2 y^2 + x^4 = a^2 x^2$, onde è una parabola virtuale, che differisce dalla (5) pel solo scambio degli assi e per la designazione della costante¹⁾. « Diese Curve hat eine der Lemniscate ähnliche Gestalt », osserva il Magnus; « die Curve hat die Form einer Schleife (∞) » conferma lo Schlämilch dopo di avere riferita la precedente costruzione²⁾; concordano con tali osservazioni due fatti³⁾: uno è che la curva rappresentata dall'equazione $a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$ è chiamata dal Montferrier *lemniscata*⁴⁾, l'altro che un autore recente, per distinguerla da una celebre curva di cui tratteremo fra poco (n. 93), la denominò *lemniscata di Gerono*⁵⁾; in Francia la si chiama anche *huit*⁶⁾.

Importa notare ancora che di parabole virtuali si parla spesso nel carteggio tra C. Huygens e R. de Sluse⁷⁾, ma che ivi tal nome è dato a curve più generali, a tutte quelle cioè aventi equazioni del seguente tipo

$$(6) \quad (a^2 - x^2) x^2 = b^2 y^2 \quad 8),$$

ossia

$$(6') \quad x = \sqrt{a^2/4 + by/2} + \sqrt{a^2/4 - by/2}$$

Osservando che l'equazione (6) può surrogarsi con le due seguenti: $x = a \cos \varphi$, $y = a^2/2b \cdot \sin 2\varphi$, riesce palese che le curve di cui si tratta si possono costruirsi nel seguente modo: « Si descrivano due cerchi aventi per comune centro l'origine e per raggi le lunghezze a e $a^2/2b$; nel primo si conduca un raggio OA facente con Ox l'angolo arbitrario φ , e nel secondo il raggio OB facente con lo stesso l'angolo 2φ ; la parallela condotta da A a Oy , taglia la parallela condotta da B a Ox in un punto P di coordinate $x = a \cos \varphi$, $y = a^2/2b \sin 2\varphi$, il cui luogo è pertanto rappresentato dall'equa-

¹⁾ La stessa curva venne ai giorni nostri ottenuta dallo SCHOUTE (*Sur la construction des courbes unicursales par points et tangentes*, Archives néerlandaises, T. XX, p. 40 dell'estratto) applicando una particolare trasformazione di MACLAURIN (cfr. n. 48).

²⁾ *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, I Th. (3. Aufl., Leipzig 1878), p. 87.

³⁾ Cfr. *Intermédiaire*, T. IV, 1897, p. 98, 190 e 285.

⁴⁾ *Dictionnaire des Sciences mathématiques* (Bruxelles, 1838), T. II, p. 170.

⁵⁾ AUBRY, *De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformations de certaines courbes* (Journ. math. spéc., IV Ser., T. IV, 1895, p. 267).

⁶⁾ *Exercices de géométrie descriptive* par F. J. (GABRIEL-MARIE), III éd., p. 397, 649, 669, 702, 712.

⁷⁾ Per trovare i passi relativi si ricorra all'*Indice per materia* delle *Oeuvres de Huygens*.

⁸⁾ Questa definizione si legge nella lettera scritta da R. DE SLUSE il 19 ottobre 1757 (*Oeuvres de Huygens*, T. II, 1889, p. 70); l'equazione (7) prova che si tratta di curve affini alle lemniscate di Gerono.

zione (6) ». Tale luogo ha nell'origine un punto doppio d'inflessione e taglia l'asse delle x negli estremi del diametro del primo cerchio; il punto all'infinito di Oy ne è un punto di contatto di due rami, con la retta all'infinito per relativa tangente; le tangenti al secondo cerchio parallele a Ox sono tangenti doppie. Esse determinano, insieme alle tangenti del primo cerchio parallele a Oy , un rettangolo di area $R = 2a \cdot a^2/b = 2a^3/b$. Ora detta A l'area totale della curva si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} A &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} y \cdot dx = a^3/2b \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{a^3}{2b} \left| -\frac{2}{3} \cos^3 \varphi \right|_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{2b} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

onde $A = 2/3 \cdot 2a^3/3b = 2/3 R$, relazione notevole scoperta dal de Sluse¹⁾. Dalla (6) si deduce pure

$$(7) \quad y - x dy/dx = x^4/b^2 y;$$

onde le curve studiate dal de Sluse godono la proprietà seguente: « il segmento compreso fra l'origine ed il punto in cui l'asse delle y è segato dalla tangente nel punto (x, y) è espresso da $x^4/b^2 y$ ». Viceversa, integrando l'ultima equazione scritta, si otterranno tutte le curve dotate di siffatta proprietà; ora ponendo $y = tx$ l'integrazione si effettua facilmente e riconduce all'equazione (6); dunque le curve considerate dal de Sluse altro non sono che le curve integrali della (7): da questo punto vennero assai più di recente considerate dallo Schneider²⁾, il quale inoltre ne effettuò la rettificazione col mezzo di integrali ellittici; in casi particolari però questo problema si può risolvere elementarmente³⁾.

II. « Sono dati due cerchi (fig. 38), il minore dei quali ha per diametro una corda AC del maggiore; una corda qualunque AB del cerchio maggiore uscente da A , taglia nuovamente la periferia del minore in D ; da D si conduce DE perpendicolare a AC e si porta su essa il segmento $EP = AB$; il luogo del punto P è una parabola virtuale »⁴⁾.

¹⁾ Lettera precitata.

²⁾ V. la memoria *Ueber eine der Lemniscate der Gestalte nach ähnliche Curve* (Progr. Elbing, 1874).

³⁾ Ad es. ciò accade per la curva $a^2 y^2 = x^2 (a^2 - 2x^2)$ (*Educ. Times*, Quest. 13168). Essa infatti è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica: $x = a/\sqrt{2} \cdot \sin \phi$, $y = a/8 \cdot \sin 2\phi$; perciò $ds/d\phi = a/4 (\cos 2\phi + 2)$ e $s = a/8 \cdot \sin 2\phi + a/2 \cdot \phi$, senz'aggiunta di costante supponendo $s=0$ per $\phi=0$. In particolare, facendo $\phi = \pi/2$ si conclude essere $\pi a/4$ la lunghezza del quarto della curva data.

⁴⁾ *Opus geometricum*, Teor. CCXX (T. II, p. 846).

Se infatti si prende la retta AC per asse delle x e per asse delle y la retta che biseca ad angolo retto il segmento AC , e si chiama φ l'angolo formato dalla corda variabile con la corda fissa si trova $x = 2a \cos^2 \varphi$, $y = 2(a \cos \varphi + b \sin \varphi)$, donde, eliminando φ

$$(8) \quad y = \sqrt{2ax} + \sqrt{4b^2 - \frac{2b^2}{a}x},$$

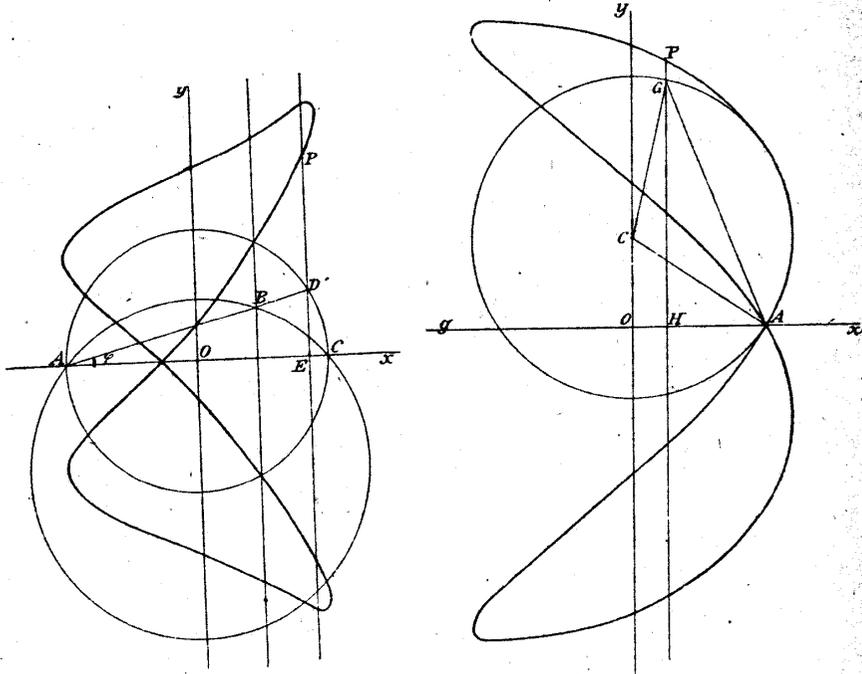


Fig. 38. — Parabola virtuale.

Fig. 39. — Parabola virtuale.

che è l'equazione della curva; essa è razionale, il punto

$$x = 2ab^2/(a^2 + b^2), \quad y = 0$$

ne è punto doppio; il punto all'infinito di Ox ne è un punto di contatto di due rami.

III. « Dato (fig. 39) un cerchio di centro C , un punto A della sua periferia ed una retta g passante per A , si conduce per questo punto una corda arbitraria AG del dato circolo, poi GH

perpendicolare a g ; su questa si prende il segmento $HP = AG$; luogo del punto P è una parabola virtuale »¹⁾.

Preso la retta g per asse delle x e per asse delle y la perpendicolare calata su di essa dal punto C ; e detti r il raggio del cerchio, 2φ l'angolo variabile ACG e α l'angolo dato ACO si trova facilmente

$$x = r \sin \alpha + 2r \sin \varphi \cos(\alpha + \varphi), \quad y = 2r \sin \varphi;$$

donde eliminando φ si conclude essere

$$(9) \quad \frac{y}{r} = \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{(1 - \sin \alpha)(x - r \sin \alpha)}{r}} + \\ + \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{(1 + \sin \alpha)(x - r \sin \alpha)}{r}}$$

l'equazione della curva. Questa è razionale ed ammette come punto doppio A ed il punto all'infinito di Ox come punto di contatto di due rami.

IV. « Dato il cerchio di diametro CD ed un punto A della sua periferia, si conduce ad arbitrio una corda AB (figura 40) e si porta sulla perpendicolare condotta da B a CD il segmento $PP' = AB$ per modo che sia bisecato dal diametro CD ; il luogo dei punti P, P' è una parabola virtuale »²⁾.

Assumendo come origine il centro O del dato cerchio e per asse delle x il dato diametro, e chiamati r il raggio del cerchio, α e 2φ gli angoli AOC e AOB si trova subito $x = r \cos(\alpha - 2\varphi)$, $y = r \sin \varphi$, donde eliminando φ ,

$$(10) \quad \sqrt{2} y/r = \sin \alpha/2 \cdot \sqrt{r^2 + rx} + \cos \alpha/2 \cdot \sqrt{r^2 - rx};$$

la curva così rappresentata è della stessa specie della precedente.

¹⁾ *Opus geometricum*, Teor. CCXXII (T. II, p. 846).

²⁾ *Opus geometricum*, Teor. CCXXIV (T. II, p. 847).

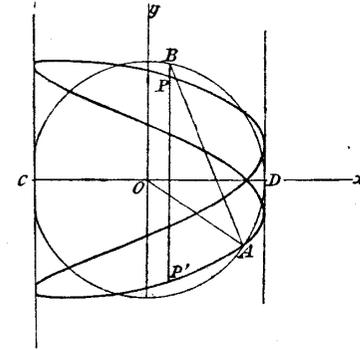


Fig. 40. — Parabola virtuale.

V. « Sono dati due cerchi aventi per comune centro il punto O (fig. 41) e un diametro DF del maggiore; una corda qualunque DE del maggiore tagli in B la circonferenza del minore; condotta EG perpendicolare a DF si porti sopra GE il segmento $GP = BE$; il luogo del punto P è una parabola virtuale »¹⁾.

Detti R e r i raggi dei due cerchi e φ l'angolo EDF , e presa D per origine, DF per asse delle x , si trova facilmente

$$(11) \quad x = 2R \cos^2 \varphi, \quad y = -R \cos \varphi + \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \varphi},$$

donde eliminando φ

$$(12) \quad y = \sqrt{Rx/2} + \sqrt{Rx/2 + r^2 - R^2}$$

Questa dimostra potersi la curva costruire aggiungendo le ordinate omonime delle parabole $y^2 = Rx/2$, $y^2 = Rx/2 + r^2 - R^2$; tale osservazione è importante perchè la costruzione indicata da G. di S. Vincenzo dà soltanto un tratto di curva, mentre questa si estende all'infinito; la nuova genera-

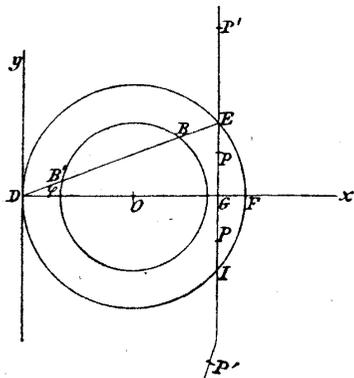


Fig. 41.

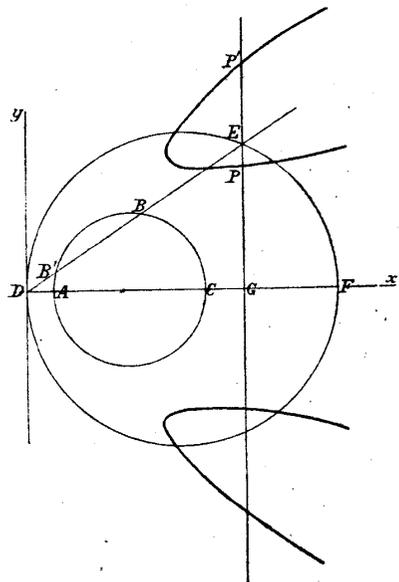


Fig. 42. — Parabola virtuale.

zione invece dà tutti i punti della curva, la quale ha all'infinito dell'asse delle x un punto triplo; quest'asse, contato due volte, e la retta all'infinito sono le relative tangenti.

VI. « Sono dati (fig. 42) due cerchi aventi due diametri

¹⁾ *Opus geometricum*, Teor. CCXXIX (T. II, p. 850).

AC, DF sulla medesima retta; una corda DE dell'uno taglia l'altro in B ; da E si conduce EG perpendicolare a DF , su cui si porta $GP = BE$; il luogo del punto P è una parabola virtuale »¹⁾.

Questa costruzione è un'evidente generalizzazione della precedente. L'equazione della curva corrispondente si ottiene, adottando gli stessi assi e le stesse notazioni di prima, sotto la forma

$$(13) \quad y + (d - 2R) \sqrt{x/2R} + \sqrt{d^2x/2R + r^2} = a^2$$

ove d è l'ascissa del centro del cerchio di diametro AC . Anche per la costruzione di tal curva può servire ed è utilissimo l'impiego di due parabole; essa ha per punto di contatto di due rami il punto all'infinito dell'asse delle ascisse e per punto doppio quello di ascissa

$$\frac{d^2 - r^2}{2(d - R)}.$$

84. Le parabole virtuali conseguirono scarsissima notorietà, in causa forse di essere state concepite da uno la cui fama fu macchiata da tentativi infelici per quadrare il cerchio. Tuttavia esse, od almeno quartiche polizomiali simmetriche generabili in modo differente dai sei surriferiti, si incontrano nel corso di investigazioni o nel corpo di opere meritevoli di considerazione; è quanto ora esporremo.

a) Huygens ha proposto prima al famigerato Fatio de Duiller e poi a Leibniz — lettera del 23 febbraio 1691²⁾ — la ricerca delle curve la cui sottangente è espressa da $y^2 \sqrt{a^2 - x^2}/ax$. Questo problema equivale all'integrazione dell'equazione differenziale

$$-y \frac{dx}{dy} = \frac{y^2 \sqrt{a^2 - x^2}}{ax};$$

ora in questa le variabili si separano subito e quindi si trova come equazione generale delle curve richieste e

$$(14) \quad a^2 - x^2 = \left[\frac{y^2 + \varepsilon k^2}{2a} \right]^2,$$

ove ε sta per ± 1 e k^2 è la costante introdotta dall'integrazione. Vi sono dunque innumerevoli curve che risolvono il problema; lo

¹⁾ *Opus geometricum*, Teor. CCXXX (T. II, p. 853).

²⁾ *Leibniz ed. Gerhardt*, T. II (Berlino 1850), p. 82.

avvertì Leibniz¹⁾, il quale fissò l'attenzione del suo corrispondente sulle due ipotesi: $k = 0$, e $k = 2a$, $\varepsilon = -1$. Un'altro caso notevole si ottiene osservando che l'equazione (14), ossia

$$(14') \quad y^4 + 2\varepsilon k^2 y^2 + 4a^2 x^2 - 4a^4 + k^4 = 0$$

appartiene ad una quartica polizomale solo quando sia $k^2 = 2a^2$; assunto poi $\varepsilon = -1$ per giungere ad una curva reale, la (14') può scriversi

$$(14'') \quad y = \sqrt{a^2 + ax} + \sqrt{a^2 - ax},$$

la cui parentela con le (12) (13) non ha bisogno di venire rilevata. Scrivendola come segue $y\sqrt{2} = \sqrt{2a(a+x)} + \sqrt{2a(a-x)}$ si vede che descritto un cerchio di centro O diametro $AA' = 2a$ e preso un punto M della sua periferia, se N è il piede della perpendicolare condotta da M a AA' e $ON = x$, si ha

$$\overline{AM} + \overline{A'M} = \sqrt{2a(a+x)} + \sqrt{2a(a-x)}$$

onde la curva di equazione $y = \overline{AM} + \overline{A'M}$, non coincide con la (14'') — come ritenne Huygens²⁾ — ma però le è affine.

b) A una speciale parabola virtuale guida anche un altro problema proposto dallo stesso Huygens³⁾: la determinazione cioè delle curve la cui sottangente è espressa da $y^2/2x - 2x$ (cf. la nota che chiude il Libro II). A seconda del segno che si attribuisce alla sottangente, siffatto problema traducesi in una delle seguenti equazioni differenziali:

$$(y^2 - 4x^2) dy + 2xy dx = 0, \quad (y^2 - 4x^2) dy - 2xy dx = 0;$$

entrambe sono omogenee onde s'integrano facilmente e danno

$$(15) \quad y^4 = c^2 (y^2 - 2x^2), \quad (16) \quad y^6 = c^6 + 6x^2 y^4;$$

queste equazioni vennero ottenute dai due geometri succitati.

La prima di queste, scambiando x con y , rientra nel tipo (6); scrivendola come segue:

$$y = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{cx}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{cx}{\sqrt{2}}},$$

¹⁾ Lettere a HUYGENS del 20-30 febbraio e del 10-20 aprile 1691 (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. II, p. 83 e 90).

²⁾ Lettera a LEIBNIZ del 26 marzo 1691 (vol. ora cit., p. 86).

³⁾ Lettera a LEIBNIZ del 24 agosto 1690 (ivi p. 46).

si rende palese l'analogia della curva corrispondente con quelle rappresentate dalle equazioni (12) e (13) e si vede come a ragione Leibniz avvertisse la possibilità di effettuare la quadratura¹⁾. Del resto la quadratura della curva (15) può anche ottenersi traendo dalla equazione citata $\int x dy = 1/c \sqrt{2} \int y \sqrt{c^2 - y^2} dy$, metodo che ha il vantaggio di essere applicabile anche alle curve di equazione $y^4 = c^2 (2x^2 - y^2)$, dedotta da Leibniz cambiando nella (15) c in $i c$, nonchè a quella di equazione $y^4 + a^2 y^2 = b^2 x^2$, considerate dal Craig²⁾.

c) Altre quartiche polizomali simmetriche s'incontrano nell'Introduction del Cramer. Tale infatti è quella di equazione

$$(16) \quad y^4 + 2x^2 y^2 + x^4 - 6ax^2 y^2 - 2ax^3 + a^2 x^2 = 0^3);$$

scrivendo questa sotto la forma

$$y = \sqrt{2ax - x^2} + \sqrt{ax}$$

si vede la possibilità di costruirla col mezzo di un circolo ed una parabola⁴⁾.

d) Della stessa specie è la curva generata come segue⁵⁾: si considerino due cerchi tangenti fra loro internamente nel punto A (fig. 43) uno dei quali abbia il raggio ($2a$) doppio dell'altro; una perpendicolare al comune diametro determina quattro segmenti aventi ciascuno un estremo sopra la periferia dell'uno ed uno sulla periferia dell'altro; i loro punti medi appartengono alla quartica di equazione (supposto preso il punto A per origine e quel diametro per asse delle x)

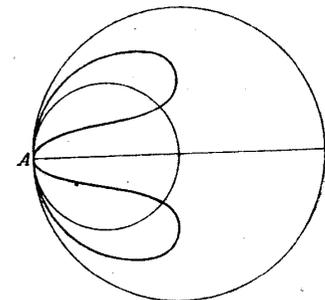


Fig. 43. — ~~Quartica polizomale~~

¹⁾ Lettere a HUYGENS del 27 gennaio e del 20-30 febbraio 1691 (ivi, p. 75 e 84).

²⁾ Cf. A. DE MOIVRE, *Specimen of the use of fluxions in the solution of geometric problems* (Phil. Trans. 1693, n. 216).

³⁾ *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750), pag. 239.

⁴⁾ È evidente che questa curva offre una certa analogia con altra considerata da G. RITT nel suo *Manuel des aspirants à l'École polytechnique* (Paris 1839) e che di recente fu studiata da H. BROCARD (*Note sur la quartique* $y = \pm \sqrt{2ax} \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ (*Le matematiche pure e applic.*, T. I, 1902) e V. RETALI (*Sopra una quartica binodale*, Ivi).

⁵⁾ CRAMER, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750), pag. 435.

$$2y = \sqrt{x(2a-x)} + \sqrt{x(4a-x)}$$

che è appunto della detta specie: A è un punto di contatto di due rami della curva.

e) L'equazione

$$(17) \quad x^4 + y^4 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 + b^4 = 0$$

considerata dal Cramer¹⁾, può scriversi

$$y = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + x^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2}}$$

onde appartiene ad una quartica polizomale simmetrica costruibile mediante un'ellisse ed un'iperbole coassiali; si può chiamare *doppio cuore*, dal momento che il Cramer osservò che essa ha « la figure de deux coeurs qui se pénètrent l'un l'autre par la pointe ».

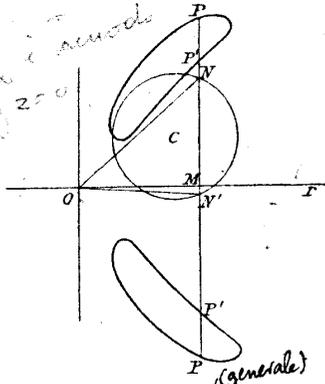


Fig. 44. — Bisaccia di Cramer

assumere $a + R \cos \varphi$, $b + R \sin \varphi$ come coordinate di N , onde

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + R^2 + 2R(a \cos \varphi + b \sin \varphi)}, \quad y = b + R \sin \varphi$$

saranno quelle di P . Eliminando φ si conclude essere

$$(18) \quad x^4 - 4b^2xy + 4(a^2 + b^2)y^2 - 2(a^2 - b^2 + R^2)x^2 - 4b(a^2 + b^2 - R^2)y + (a^2 + b^2 - R^2)^2 = 0$$

l'equazione del luogo. Nel caso particolare in cui O stia sulla peri-

¹⁾ Id., p. 436-438.

²⁾ Id., p. 450.

feria del dato cerchio, $R^2 = a^2 + b^2$ epperò questa equazione diviene

$$(19) \quad x^4 - 4(a^2 + by)x^2 + 4(a^2 + b^2)y^2 = 0;$$

in corrispondenza « la courbe », osserva Cramer, « représente en quelque sorte une besace ». Scrivendo l'equazione precedente come segue

$$x = \sqrt{a^2 + y(b + \sqrt{a^2 + b^2})} + \sqrt{a^2 + y(b - \sqrt{a^2 + b^2})}$$

e applicando quanto si disse in generale nel n. 79 si giunge ad una costruzione della *bisaccia* col mezzo di due parabole.

g) Un triangolo ABC di cui si conoscono i lati $AB = a$, $BC = b$ ha fisso il vertice A e di posizione il lato AC ; se ne prolunga il lato BC sino in M per modo che sia $CM = BC$. Preso A per origine e la retta AC per asse delle x si trova subito come equazione del luogo del punto M la seguente

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + 2\sqrt{b^2 - y^2};$$

il luogo stesso appartiene in conseguenza alla categoria di curve di cui ci stiamo occupando¹⁾.

h) Vi è una quartica polizomale che può considerarsi come caso speciale della curva di Watt (v. n. 143)²⁾. Essa è il luogo del punto M di un segmento di lunghezza costante (l) i cui estremi N, P descrivono il primo una retta r e il secondo un circolo di centro O e raggio R ³⁾. Per trovarne l'equazione assumeremo O per origine e per asse delle x la perpendicolare condotta da O a r ; detta allora d la distanza fra O e r , posto $PM/MN = \mu/\nu$ e detti φ, ψ gli angoli del raggio OM e del segmento MN con l'asse delle ascisse, avremo

$$x = R \cos \varphi + \frac{\mu l}{\mu + \nu} \cos \psi, \quad y = R \sin \varphi + \frac{\mu l}{\mu + \nu} \sin \psi,$$

$$d = R \cos \varphi + l \cos \psi;$$

¹⁾ RICCATI e SALADINI, *Institt. analyticae*, T. I (Bologna 1765), p. 319.

²⁾ Da questo punto di vista detto luogo s'incontra nell'*Essai d'un théorie du parallelogramme de Watt* di A. J. H. VINCENT (Mém. de la Soc. de Lille, 1837): nel quale sono dati i nomi di *sénoïde* e *hémicycle* a due speciali forme che esso luogo può assumere e che — secondo il VINCENT — potrebbero trovare impiego nell'architettura. L'equazione della curva si ritrova nel *Manuel des candidats à l'Ecole polytechnique* (T. I, Paris 1857, p. 331) di E. CATALAN.

³⁾ V. un articolo di H. BROCARD pubblicato nel 1870 nel *Journal de math. spéciales* e riprodotto in *Progreso*, T. I, 1891, p. 221-223.

taenoids in X_0
+ p. doppo in 0

$(-b, 0)$ $(b, 0)$
nod.

cambiare b e a con a e b nel cos

Torcolo in X_0 con $x=0$, con $y=0$
di fine

eliminando φ , e ψ si conclude essere

$$(20) \quad y = \frac{1}{v} \sqrt{v^2 R^2 - [(\mu + v)x - \mu d]^2} + \\ + \frac{\mu}{(\mu + v)v} \sqrt{v^2 l^2 - (\mu + v)^2 (d - x)^2}$$

l'equazione del luogo; questo può quindi in generale costruirsi mediante due ellissi, ma quando $l = d + R$ e $\mu = v$ una di esse diviene un circolo; il luogo stesso può allora presentare varie forme, come prova la discussione della equazione precedente¹⁾.

¹⁾ D. JOZÈ RUIZ CASTIZO ARIZA, *Estudio analytico de un lugar geometrico de cuarto orden* (Madrid 1889).

CAPITOLO XI

Quartiche razionali con un punto di contatto di due rami.

Tacnode

85. Gerard von Gutschoven, discepolo ed aiuto di Cartesio, fu dal 1640 al 1659 professore di matematiche a Louvain, poi ivi di anatomia, chirurgia e botanica. Di lui fa cenno R. F. de Sluse in una lettera a Huygens del 18 aprile 1662¹⁾ come proponente della questione seguente: « Dati una retta r ed un suo punto O (fig. 45)

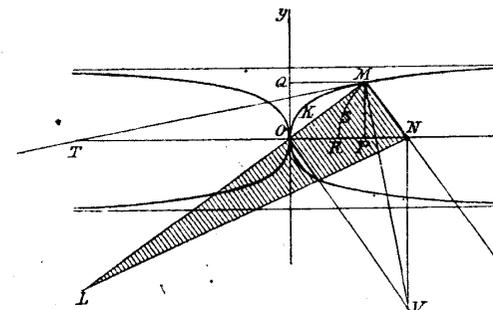


Fig. 45. — Curva di Gutschoven o Kappa.

trovare il luogo di un punto M tale che, condotta OM e poi MN ad essa perpendicolare e secante r in N , risulti MN eguale ad un segmento dato a . Preso O per polo e per asse polare la retta r , l'equazione della *curva di Gutschoven* è evidentemente

$$(1) \quad a \cos \omega = \rho \sin \omega;$$

il luogo stesso, in coordinate cartesiane, è rappresentato dalla equazione

$$(2) \quad a^2 x^2 = (x^2 + y^2) y^2,$$

¹⁾ *Oeuvres de Huygens*, T. IV (La Haye, 1891), p. 207.

la quale s'incontra nella lettera di Huygens a de Sluse del 25 settembre 1662¹⁾. Essa prova che si è in presenza di una quartica passante per punti ciclici del piano, simmetrica rispetto agli assi coordinati ed avente nell'origine un punto di contatto di due rami (brevemente *tacnodo*); all'infinito la curva ha inoltre un punto doppio d'inflessione, con le rette $y = \pm a$ per corrispondenti tangenti (queste due rette limitano una striscia di piano entro cui si trovano tutti i punti reali della curva); l'origine è inoltre un fuoco straordinario semplice della curva. La quale, per la sua somiglianza con la lettera greca κ è chiamata *kappa*²⁾; essa è di sesta classe, onde non è, come era stato creduto, polare reciproca di sé stessa rispetto ad alcuna conica³⁾.

Nella lettera dianzi citata lo Sluse suggerì una costruzione della tangente alla kappa che non è difficile dimostrare. Notiamo infatti che dalla (1) traesi la seguente rappresentazione parametrica della curva:

$$(3) \quad x = a \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega}, \quad y = a \cos \omega;$$

se, quindi, la tangente alla curva nel punto M taglia in T la retta r si avrà

$$\overline{OT} = -a \frac{\cos^2 \omega}{\sin^3 \omega}$$

epperò

$$\overline{TN} = \overline{ON} - \overline{OT} = \frac{a}{\sin \omega} + a \frac{\cos^2 \omega}{\sin^3 \omega} = \frac{a}{\sin^3 \omega};$$

d'altronde, detto P il piede della perpendicolare condotta da M a r , si ha

$$\overline{ON} = \frac{a}{\sin \omega}, \quad \overline{NP} = a \sin \omega$$

onde

$$\overline{TN} \cdot \overline{NP} = \overline{ON}^2,$$

cioè — come dice de Sluse — NP, NO, NT «sint in continua

¹⁾ Id., p. 238.

²⁾ AUBRY, *De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes* (Journ. de Math. spéc., IV Serie, T. IV, 1895, p. 201). La stessa curva trovata diversamente e ampiamente studiata nelle 248 pagine dell'*Essai sur les propriétés de la nouvelle cissoïde* (Paris 1822) del ROLLIER. Per il suo intervento in questioni di analisi, v. A. BUHL, *Sur les transformations et applications de la formule de Stokes*, III Mém. (Ann. de la Fac. de Toulouse, T. VI, 1914, p. 104).

³⁾ A sradicare codesta opinione errata è destinato un articolo di A. GENOCCHI nel T. XIV, 1855, p. 248-253 delle *Nouv. Ann.*

proporzione»; dato dunque M è subito trovato il punto T e quindi la tangente in M ¹⁾.

Invece nella lettera di Huygens dianzi ricordata è enunciata una notevole formula di quadratura che è opportuno dimostrare. Conduciamo perciò MQ perpendicolare a Oy e chiamiamo S la area del triangolo mistilineo avente per lati le rette OQ, QM e l'arco OKM della kappa. Sarà, in forza delle (3),

$$S = \int_{\pi/2}^{\omega} a \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega} (-a \sin \omega) d\omega = -\frac{a^2}{2} \int_{\pi/2}^{\omega} (1 + \cos 2\omega) d\omega = \\ = \frac{a^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \omega \right] - \frac{a^2}{4} \sin 2\omega;$$

ora, se si descrive l'arco MR del cerchio di centro N e si chiama \bar{S} l'area del semisegmento circolare $MPRS$ si otterrà:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{\pi}{2} - \omega \right] - \frac{1}{2} a \sin \omega \cos \omega = \\ = \frac{a^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \omega \right] - \frac{a^2}{4} \sin 2\omega,$$

dunque $S = \bar{S}$ come appunto asserì Huygens. Possiamo aggiungere che se nella espressione di S facciamo $\omega = 0$ otterremo $\pi a^2/4 = \pi (a/2)^2$ come espressione dell'area del triangolo limitato dall'asse delle y , da un arco della kappa e dal corrispondente asintoto; siffatto triangolo è perciò equivalente al circolo di diametro a . La porzione di piano interna alla kappa è invece (per conseguenza) infinita.

La definizione della kappa donde partimmo conduce ad un modo semplicissimo per descriverla; si consideri infatti una squadra LMN , rettangolo in M ed avente il cateto $MN = a$; se la si fa muovere in modo che l'altro cateto LM passi costantemente per O ed il vertice opposto N descriva l'asse delle x , il vertice dell'angolo retto percorrerà evidentemente la kappa. La normale in M a questa passa in conseguenza pel punto V in cui la perpendicolare condotta da O a LM interseca la perpendicolare condotta da N a Ox ²⁾.

Il Barrow — nelle *Lectiones geometriae* pubblicate nel 1670 — ha suggerito per la kappa un'altra costruzione³⁾. Se si porta sul-

¹⁾ Altra costruzione è indicata da F. GOMES TEIXEIRA, *Obras citate*, T. IV, p. 274.

²⁾ Questa costruzione può dimostrarsi direttamente col semplice calcolo della sunnormale polare.

³⁾ *The mathematical Works of J. BARROW*, ed. Whewell (Cambridge 1860), p. 247.

l'asse polare un segmento $OA = a$ e si conduce da A la perpendicolare allo stesso, una trasversale qualunque condotta pel polo taglia la retta r in un punto B tale che, preso su quella trasversale il segmento $OM = AB$, il luogo del punto M è una kappa. Infatti questa costruzione prova che il luogo del punto M ha per equazione

$$(4) \quad \rho = a \operatorname{tg} \omega,$$

la quale non differisce dalla (1) che pel cambio di ω in $\pi/2 - \omega$ ¹⁾.

Teoricamente e praticamente è più importante un'altra definizione della kappa che si ottiene trasformando quella donde partimmo. Descritto il cerchio di centro N e raggio NM , la retta OM ne è una tangente; dunque la kappa è il luogo geometrico dei punti di contatto delle tangenti che si possono condurre agli infiniti cerchi di dato raggio aventi i loro centri sopra una data retta, da un punto di questa retta²⁾.

L'ispezione della equazione (4) conduce spontaneamente a congetture delle curve più generali, rappresentate dall'equazione

$$(5) \quad \rho = a \operatorname{tg} \mu \omega,$$

μ essendo un numero dato. Esse sono algebriche se μ è un numero razionale³⁾ e presentano forme assai svariate, che consigliarono il nome di *nodi*, che venne ad esse attribuito⁴⁾. Tutti i nodi godono la proprietà di essere identici ai loro inversi rispetto a un cerchio di

¹⁾ Se si applica l'esposta costruzione nell'ipotesi che la retta r formi con l'asse polare l'angolo $\mu \pm \pi/2$, si giunge alla curva di equazione

$$\rho = a \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} (\mu - \omega)},$$

incontrato da H. RIEDER nella Diss. *Untersuchungen einer 2-4 deutige kinetographische Verwandtschaft* (München, 1907), p. 30.

²⁾ L. MASCHERONI, per rappresentare un certo fenomeno fisico, ha considerata (v. la memoria *Maniera di misurare l'inclinazione dell'ago calamitato*, Bergamo 1782) la curva di equazione

$$\rho - l = a (\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \alpha)$$

che è non trascendente — come affermò un biografo del MASCHERONI (Mem. Soc. Ital. Scienze, T. XI, 1804, p. XL1) — ma di quarto ordine; posto $n = l - a \operatorname{tg} \alpha$, l'equazione mascheroniana diviene

$$\rho = a \operatorname{tg} \omega + n$$

e rappresenta una concoide della curva kappa.

³⁾ Supposto $\mu = m/n$, l'ordine della curva (5) è $2(m+n)$ se m e n sono entrambi dispari, altrimenti dell'ordine $m+n$.

⁴⁾ AUBRY, mem. cit., p. 251; alcune proprietà ne sono indicate da F. GOMES TEIXEIRA, *Obras*, T. V, p. 240.

centro O e raggio a ; essendo infatti tale inversione rappresentata dall'equazione $\omega_1 = \omega$, $\rho_1 = a^2/\rho$, applicandola alla curva (5) si ottiene $\rho_1 = a \operatorname{tg} \mu \omega$, ossia $\rho_1 = a \operatorname{cotg} \mu \theta$ essendo $\theta + \omega_1 = \pi/2\mu$. Oltre l'ipotesi $\mu = 1$, conduce ad una curva nota il supporre $\mu = \frac{1}{2}$: essa infatti riconduce alla strofoide (v. p. 74 eq. (2)); per $\mu = 2$ si ha invece una nuova curva che è del sesto ordine e fu chiamata *mulino a vento*¹⁾.

I nodi non sono le uniche generalizzazioni che ricevette la kappa. Già lo SLUSE osservò che il problema del GUTSCHOVEN si può generalizzare supponendo che l'angolo OMN , invece di essere retto, abbia un valore costante α ; nasce così la curva rappresentata in coordinate polari e cartesiane dalle equazioni

$$(6) \quad \rho = a \frac{\operatorname{sen} (\omega + \alpha)}{\operatorname{sen} \omega}, \quad a^2 (x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha)^2 = (x^2 + y^2) y^2$$

che può chiamarsi *kappa obliqua* per distinguerla dalla curva primitiva o *kappa retta*. I nomi di *pankappa* e *pankappa obliqua* furono dati²⁾ alle curve

$$\rho = \frac{a + b \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega}, \quad \rho = \frac{a + b \cos \omega + c \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \omega}$$

e quello di *kappa proiettiva*³⁾ a tutte le quartiche aventi un punto doppio e un punto di contatto di due rami. Finalmente anche la curva rappresentata in coordinate polari dall'equazione

$$(7) \quad \rho = \frac{al \operatorname{sen} \omega}{l \cos \omega + a}$$

che, al pari della curva di GUTSCHOVEN, s'incontra in alcuni problemi di geometria descrittiva⁴⁾, può considerarsi per una generalizzazione della kappa dal momento che la (7) trasformasi nella (4) facendo tendere $l a \infty$.

86. Dal punto di vista proiettivo la kappa non differisce da una curva di data assai più recente la quale, per la sua forma e in memoria del suo inventore si chiama *concoide di Kūlp*⁵⁾. Eccone

¹⁾ G. DE LONGCHAMPS, *Cours de problèmes de géométrie analytique*, T. I (Paris 1898), p. 137.

²⁾ J. NEUBERG, *Mém. de Liège*, III Ser., T. V, 1904.

³⁾ V. RETALI, *Sopra una corrispondenza [m, n]* (Rend. del R. Ist. Lomb., 2ª Serie, T. XXXII, 1899).

⁴⁾ DE LA GOURNERIE, *Traité de géométrie descriptive*, III Partie (Paris 1885), p. 151.

⁵⁾ Ueber eine besondere Art der Conchoide (*Muschellinien*) (Archiv. T. XLVIII, 1868).

la genesi: Dato (fig. 46) un quadrante circolare ed il quadrato circoscritto, si conduce pel centro di quello una trasversale arbitraria a tagliare in G l'arco del quadrante ed in F un lato del quadrato; le parallele condotte da F all'altro lato e da G al primo si tagliano in un punto P il cui luogo geometrico è un arco della concoide di cui si tratta; altri tre sono i simmetrici del primo rispetto al centro del quadrante ed ai due raggi che lo limitano ¹⁾.

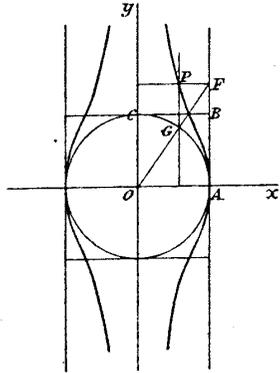


Fig. 46. — Concoide di Külp.

Da quest'equazione si desume che la concoide di Külp ha all'infinito di Oy un tacnode, detto asse essendo la corrispondente tangente, inoltre un punto isolato all'infinito di Ox . La curva è tutta compresa entro la striscia di piano limitato dalle due rette $x = \pm a$ e possiede quattro flessi reali di ascisse $\pm a\sqrt{2/3}$.

Siccome l'equazione (9) nasce dall'eliminazione di z fra le equazioni

$$x^2 + z^2 = a^2, \quad xy = az$$

così la concoide di Külp è la proiezione ortogonale sul piano xy del cilindro retto e del paraboloido iperbolico rappresentato da queste equazioni ²⁾.

Un'altra curva fornita di un punto di contatto di due rami nasce con la seguente costruzione: « Dato (fig. 47 a-b) un cerchio, di centro O e raggio r , ed un punto A del suo piano, si conduce ad

¹⁾ Il sig. K. HAGGE di Kiel ha comunicato all'autore (lettera del 20 gennaio 1921) quest'altra genesi della stessa curva: Di un cerchio si conosce un diametro $AB = 2r$; sulla retta AB si considerano due punti A', B' posti tra loro alla distanza $2r$; le tangenti condotte da essi al detto cerchio si tagliano in due punti, il cui luogo geometrico è una concoide di Külp.

²⁾ R. GOORMAGHTIGH, *Sur la conchoïde de Külp* (Nouv. Ann. de math., IV Ser., T. XIII, 1913).

arbitrio un raggio OM del cerchio e se ne determina la intersezione P con la perpendicolare condotta dal punto A alla retta AM ; variando, quel raggio, varia il punto P e descrive una linea chiamata *curva di Jerabek* ¹⁾. Per trovarne l'equazione prendiamo O per polo e OA per asse polare; chiamiamo a la distanza OA , ψ l'angolo OAM e ω le coordinate di P . Dall'ispezione della figura si traggono le relazioni seguenti:

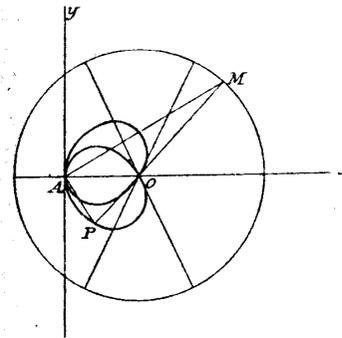


Fig. 47 a. — Curva di Jerabek.

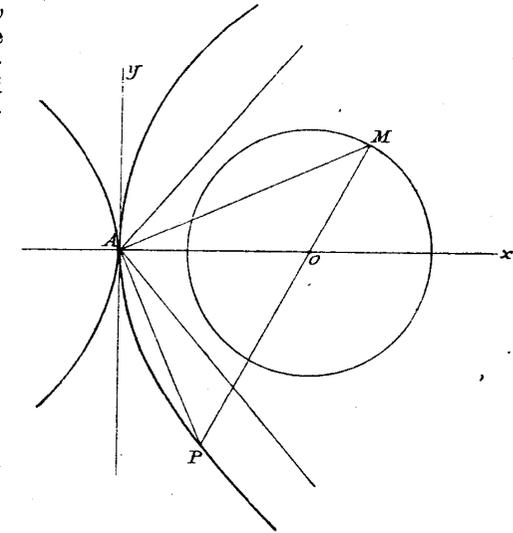


Fig. 47 b. — Curva di Jerabek.

$$\rho = \overline{OP} = r - \overline{PM} = r - \frac{\overline{AM}}{\cos \psi}, \quad \overline{AM} = a \frac{\sin \omega}{\sin \psi}$$

onde

$$(a) \quad \rho = r - a \frac{\sin \omega}{\sin \psi \cos \psi}$$

Essendo poi $\overline{AM} = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \omega}$, si ha

$$(b) \quad \frac{1}{\sin \psi} = \frac{\overline{AM}}{a \sin \omega} = \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \omega}}{a \sin \omega}$$

e quindi

$$(c) \quad \frac{1}{\cos \psi} = \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \omega}}{r - a \cos \omega}$$

¹⁾ *Mathésis*, Question n. 314 risolta T. V, 1885, p. 110-116.

Onde, eliminando ψ dalla (a) mediante le (b), (c), si ottiene

$$(10) \quad \rho = a \frac{r \cos \omega - a}{r - a \cos \omega},$$

equazione che intanto prova che la curva di Jerabek è razionale e simmetrica rispetto a OA . Passando a coordinate cartesiane questa diviene

$$(11) \quad r^2 (x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2) (x - a)^2$$

e questa dimostra che la curva stessa è del quart'ordine ¹⁾, circolare ed avente O per fuoco straordinario; A è un punto di contatto di due rami, la corrispondente tangente è perpendicolare a OA . La curva presenta poi forme diverse secondo che $a \leq r$. Se $a < r$, cioè A interno al cerchio dato, O è un nodo e le corrispondenti tangenti formano con OA l'angolo che ha per coseno a/r ; la curva è tutta interna al cerchio. Se invece $a > r$, O è un punto isolato e la curva

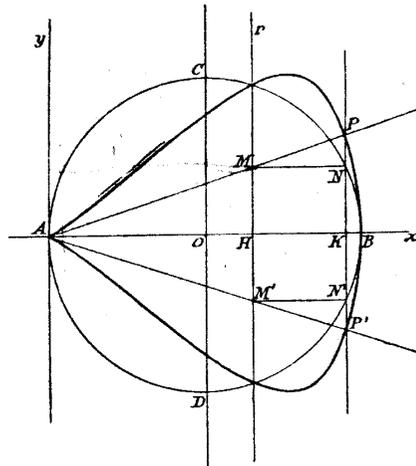


Fig. 48. — Quartica piriforme.

una trasversale arbitraria a tagliare r in M , poi da M la parallela a AB a tagliare in N la periferia di quel cerchio e finalmente da N la parallela a CD . Se P è l'intersezione di questa colla trasversale

¹⁾ Ciò risulta anche osservando che la costruzione di partenza fa apparire la curva come generata da due fasci di raggi in corrispondenza (2, 2) con i centri nei punti O, A .

possiede due rami infiniti aventi per asintoti due rette passanti per A , inclinate sull'asse polare dell'angolo avente per coseno r/a e distanti dal polo della lunghezza $r^2/\sqrt{r^2 - a^2}$.

87. Mentre la conoide di Kùlp e la curva di Jerabek hanno, oltre un punto di contatto di due rami, un punto doppio, quelle di cui ora parleremo hanno una cuspidè.

« Dato (fig. 48) un cerchio di centro O e raggio $a/2$, due suoi diametri fra loro perpendicolari AB, CD e finalmente una retta r parallela a CD , si conduce per A

condotta per A , il luogo di P è una delle curve chiamate da G. de Longchamps *quartiques pyriformes* ¹⁾. È utile dedurre da questa costruzione un procedimento per trovare i punti della curva aventi una data ascissa AK (supposto che A sia l'origine e il diametro AB l'asse delle x): si determinino i punti N, N' in cui il dato cerchio è incontrato dalla parallela condotta dal punto K alla retta r , poi i punti M, M' in cui questa è tagliata dalle parallele condotte da N e N' a AB ; le proiezioni P, P' dei punti M, M' fatte dal punto A sulla retta NN' sono i punti richiesti.

Detta b la distanza AH della retta r dal punto A e chiamato φ l'angolo variabile MAB , se x e y sono le coordinate del punto P , avremo $MH = b \operatorname{tg} \varphi$. È poi evidentemente $NK^2 = MH^2 = AK \cdot KB$ onde $b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = x(a - x)$. Ma $\operatorname{tg} \varphi = y/x$, onde l'equazione della considerata curva è

$$(12) \quad x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0.$$

La curva stessa è dunque del quart'ordine, simmetrica rispetto a Ox e tutta compresa nel quadrato i cui lati toccano il dato cerchio nei punti A, B, C, D . È una cuspidè della curva il punto A , AB è la corrispondente tangente; il punto all'infinito del diametro CD è invece punto di contatto di due rami, essendo la retta all'infinito la corrispondente tangente; sono flessi i due punti di ascissa $a(3 - \sqrt{3})/4$ e punti di culminazione quelli di ascissa $3a/4$.

È notevole il caso speciale $b = a^2$, allora r tocca il cerchio e la (12) diviene

$$x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0;$$

ora se in questa si cambia y in by/a si ricade nella (1); onde la *quartica piriforme generale* è una curva affine a quella speciale ora considerata. Un altro caso speciale venne segnalato: è quello in cui $a = 2b$; la curva corrispondente si chiama « trottola » (*toupie*) e può costruirsi come segue ²⁾: « Data una circonferenza di raggio b , Γ riferita a due assi Ox, Oy si proietta un punto qualunque M di essa in A e B sugli assi; si abbassa MH perpendicolare a AB e si porta $MP = MH$ sul prolungamento di BM ; luogo del punto P ».

L'area totale della curva è in generale

¹⁾ *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris 1890), p. 129
²⁾ Venne considerato sin dal 1844 da OSSIAN BONNET (Nouv. Ann., T. III, p. 75).

³⁾ G. DE LONGCHAMPS, *Cours de problèmes de géométrie analytique*, T. I (Paris 1898), p. 137; v. anche p. 177; SCHLÖMILCH, *Compendium der höh. Analysis* (Braunschweig, 1888), p. 87.

$$= 2 \int_{x=0}^{x=a} y \, dx = 2/b \int_0^a x \sqrt{ax - x^2} \, dx = \pi a^2/8b;$$

nel caso particolare $b = a$ questa espressione diviene $\frac{1}{2} \pi (a/2)^2$, e

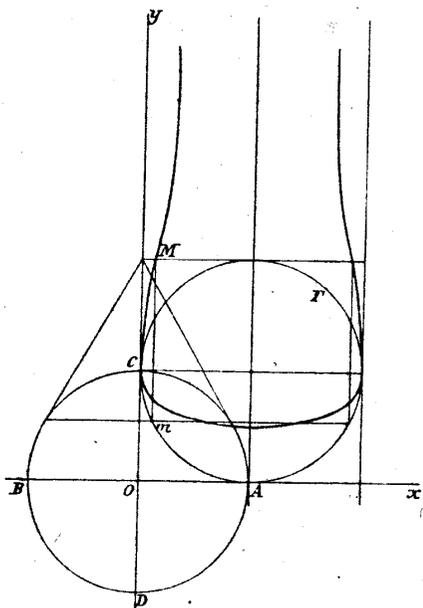


Fig. 49. — Apienne.

mostra che la curva è in superficie eguale alla metà del cerchio dato.

Allo stesso Longchamps si deve la considerazione di un'altra quartica cuspidata che, dal punto di vista proiettivo, è analoga all'antiprecedente; per la forma che ha (v. fig. 49) venne indicata dal suo inventore col nome di *apienne* (da *ixuov* = pera)²⁾. Essa ottiene dal cerchio rappresentato in coordinate cartesiane dall'equazione

$$X^2 + Y^2 - 2RY - 2RX + R^2 = 0$$

mediante la trasformazione (cartesiana semi-reciproca) determinata dalle formole:

$$X = x, \quad Y = R^2/y$$

L'*apienne* ha quindi la seguente equazione

$$y^2(x - R)^2 - 2R^2y + R^4 = 0$$

ed ammette la seguente rappresentazione parametrica:

$$\frac{x}{R} = 1 + \cos \varphi, \quad \frac{y}{R} = \frac{1}{1 + \sin \varphi}$$

¹⁾ Pel calcolo di questo integrale v. SCHLÖMILCH, *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, II Th. (2. Aufl., 1874), p. 22.

²⁾ *Cours de problèmes de géométrie analytique*, T. II (Paris 1899), p. 393.

³⁾ Per trovare il punto $M(X, Y)$ corrispondente al punto $m(x, y)$ si descriva il cerchio Γ di centro O e raggio R . Condotta da m la parallela a Ox , se ne trovi il polo rispetto a Γ ; la parallela condotta da esso a Ox sega la parallela condotta da m a Oy nel punto M .

È in conseguenza una quartica razionale simmetrica rispetto alla retta $x = R$. Il punto all'infinito di questa retta ne è una cuspidale con questa retta per corrispondente tangente; invece il punto all'infinito di Ox è un punto di contatto di due rami, con quest'asse per tangente. Tutti i punti reali della curva si ha per $-a \leq x \leq +a$ e $y \geq x/2$.

Le curve considerate in questo paragrafo hanno tutte, oltre un tacnodo, una cuspidale; lo stesso può ripetersi per la curva di equazione

$$x = \frac{b - y}{b} \sqrt{a^2 - y^2}$$

che Giordano Riccati ha insegnato a costruire nel suo curioso lavoro intitolato *Teorema: il nulla immaginario non può confondersi col reale* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze, T. IV, 1788); nel Capitolo seguente impareremo a conoscere una famiglia di linee i cui componenti, al pari di alcune parabole virtuali, hanno ciascuna la prima di tali singolarità¹⁾.

¹⁾ Un'altra quartica con tacnodo è generata come luogo del vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo di cateti r e $2r$, di cui gli estremi dell'ipotenusa percorrono una circonferenza di centro O e raggio r , l'altro un diametro della stessa (v. G. GHIGI, *Di una curva piana di quarto ordine*, Firenze 1904). Preso O per polo e per asse polare l'anzidetto diametro si trova per rappresentare la curva l'equazione

$$\rho = \frac{2r}{\sqrt{1 + (1 - \cotg \omega)^2}}$$

passando a coordinate cartesiane si ottiene

$$(x^2 + y^2)(x^2 + 2y^2 - 2xy)\frac{1}{2} = 4r^2x^2,$$

dove è agevole dedurre tutte le proprietà della curva.

Tale curva è simm. risp. all'origine e poiché ha una singolarità un tacnodo in O potrà avere al massimo un altro punto solo: questo se fosse proprio non potrebbe essere che O e d'altronde non può essere improprio poiché sulla $x = 0$ ci sono già 2 punti (imag. e distincti) della C_4 considerata.

Le conicali.

88. Il luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi o da due rette fisse o da un punto ed una retta serbano un dato rapporto è un cerchio, una coppia di rette od una conica. Se, nelle condizioni date, si sostituisce al rapporto la somma o la differenza si ottiene una conica a centro, una retta od una parabola. Se invece si sostituisce il prodotto si ottiene: 1° una curva di Cassini (v. n. 90) se i dati sono due punti; 2° un'iperbole se sono date due rette; 3° se finalmente sono dati un punto (F) ed una retta (r) si ha come luogo una curva di cui lo Schlömilch¹⁾ ha trovata l'equazione e qualche proprietà, ma il cui studio metodico venne fatto da G. Huber²⁾, il quale propose chiamarla *concale* per l'analogia di forma che essa talora presenta con la concaide di Nicomede.

Presi come asse delle x la perpendicolare FA condotta dal punto F alla retta r e per origine il punto medio del segmento $FA=2a$, si vede subito che, indicando con a k il prodotto costante, l'equazione della concale è:

$$(1) \quad (x+a)^2 \{ (x-a)^2 + y^2 \} = a^2 k^2$$

Essa è quindi una curva di quart'ordine simmetrica rispetto all'asse delle x . Le ascisse dei quattro punti in cui questo è tagliato dalla curva sono $\pm a \sqrt{a(a \pm k)}$, mentre le ordinate dei due punti di intersezione della curva coll'asse delle y valgono $\pm \sqrt{k^2 - a^2}$; ciò prova che di quei quattro punti sono reali 4 o 2 secondochè $k \leq a$, mentre questi due sono reali o immaginari secondochè $k \geq a$. Nel

¹⁾ *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, I Th. (3. Aufl., Leipzig 1878), p. 97.

²⁾ *Die Conchalen, ihre Orthogonalen Trajectorien und die Cissoïden vierten Ordnung* (Monatshefte. T. VI, 1895); il caso in cui il punto F cade sulla retta r fu trattato direttamente da G. CARDOSO LAYNES nella nota *Di un certo luogo geometrico* (Livorno 1896).

caso intermedio $k = a$ la (1) diviene

$$(2) \quad y^2 (x+a)^2 + x^2 (x^2 - 2a^2) = 0;$$

essa allora ha nell'origine un nodo con le tangenti $y = \pm x \sqrt{2}$ e taglia l'asse delle x nei punti di ascisse $x = \pm a \sqrt{2}$.

La curva passa nel caso generale pei punti ciclici del piano ed inoltre possiede, nel punto all'infinito di Oy un punto di contatto di due rami; la corrispondente tangente ha per equazione $x+a=0$ onde è la retta r . La concale presenta svariate forme a norma della grandezza relativa delle costanti a, k ; e precisamente essa consta:

- se $k < a$, di due rami infiniti ed un'ovale
- se $k = a$, di un serpentino e un ramo nodato
- se $k > a$, di due rami infiniti.

La quadratura delle conicali dipende in generale da funzioni ellittiche e la rettificazione da funzioni iperellittiche; ma per le conicali razionali il primo di questi problemi può risolversi elementarmente, mentre il secondo esige il solo impiego di funzioni ellittiche.

La tangente alla concale in un suo punto P può effettuarsi specializzando un procedimento generale di A. Hurwitz¹⁾; si giunge così alla seguente costruzione: Si unisca P a F e si conduca da F la perpendicolare p a questa congiungente; si congiunga anche il punto P al punto pr e si trovi il raggio coniugato armonico della retta $P \cdot pr$ rispetto alle due rette p, r ; esso sarà parallelo alla tangente cercata.

Al variare della costante k l'equazione (1) rappresenta ∞' curve; l'equazione differenziale delle loro traiettorie ortogonali è

$$dy \{ 2x(x-a) + y^2 \} - y(x+a) dx = 0;$$

integrandola si ottiene

$$(3) \quad \frac{y^4 - 4ax y^2}{\{ y^2 - 2a(x-a) \}^2} = \text{cost.};$$

dunque quelle traiettorie sono quartiche razionali aventi F per comune punto doppio e inoltre per tacnodo il punto all'infinito di Ox ; la retta all'infinito è la relativa tangente.

89. Steiner ha nel 1854 proposto il problema generale seguente²⁾: « Dati in un piano π una curva C ed un punto fisso P , trovare il luogo dei punti M di π tali che i punti di contatto di due delle

¹⁾ *Ueber Tangentenconstructionen* (Math. Ann., T. XXI, 1883).

²⁾ *Ges. Werke*, T. II (Berlin 1884), p. 599.

tangenti condotte da M a C siano allineati col punto P . Esso può risolversi facilmente supponendo che la curva sia una concale ed il punto fisso sia il punto F che serve a definirla. Si arriva così ad una nuova quartica simmetrica rispetto ad un asse, cioè a quella rappresentata dall'equazione seguente:

$$(4) \quad \{ k^2 - (a + x)^2 \} y^2 = (x^2 + k^2 - a^2)^2$$

Tale curva possiede due punti doppi sopra l'asse delle x ; sono quelli di ascisse $\pm \sqrt{a^2 - k^2}$, onde sono reali soltanto se $k < a$; in tal caso

uno di essi è un nodo, l'altro un punto isolato. Sull'asse delle y essa ha due punti semplici di ordinate $\pm \sqrt{k^2 - a^2}$, i quali sono reali solo quando $k > a$. Essa ha poi due asintoti, cioè le tangenti nel nodo all'infinito; le loro equazioni sono: $x + a \pm k = 0$. La curva essendo trinodata è razionale. Quando $k = a$ l'equazione (4) si spezza nelle due

$$x = 0, \quad (2a + x)y^2 + x^3 = 0,$$

onde la curva in questione si decompone nell'asse delle y e in una cissoide di Diocle. Questa circostanza consigliò a chiamare nel caso generale la curva (4) *cissoide biquadratica*. Tale curva, nel caso in cui abbia al finito due punti doppi reali, può generarsi senza ricorrere alle concali in un modo che merita di venir qui segnalato.

Sull'asse delle x di un sistema di coordinate cartesiano segniamo (fig. 50) il punto $A(-a, 0)$ e col centro in A descriviamo un cerchio Γ di raggio $k < a$. Si conducano al cerchio O le tangenti OM_1 e OM_2 e si descriva il cerchio di centro O e raggi $OM_1 = OM_2 = \sqrt{a^2 - k^2}$; la periferia di questo nuovo cerchio taglia l'asse delle x in due punti di cui S_1 sia esterno e S_2 interno a Γ . Se CC' è una corda qualunque di Γ passante per S_2 , si segnino le rette CQ e $C'Q'$ perpendicolari a Ox e se ne determinino le intersezioni P, P' con la perpendicolare S_1V calata da S_1 sulla corda CC' ; il luogo dei punti PP' è la cissoide del quart'ordine rappresentata dall'equazione (4).

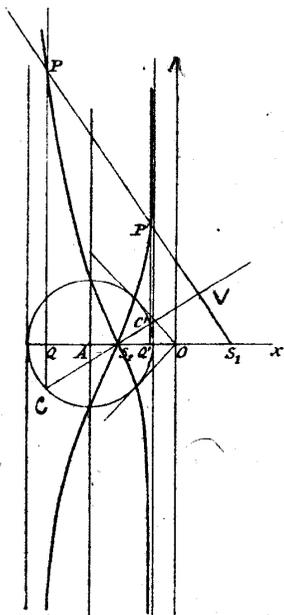


Fig. 50. — Cissoide biquadratica.

Infatti se x, y sono le coordinate del punto P , $-x$ misurerà il segmento OQ e y il segmento PQ . Essendo poi il triangolo CVP simile tanto al triangolo S_1QP quanto al triangolo CQS_2 , sussistono le relazioni

$$\overline{QS_1/QP} = \overline{CV/PV}, \quad \overline{CV/PV} = \overline{CQ/QS_2}$$

onde

$$\overline{QS_1/QP} = \overline{CQ/QS_2}$$

Se ne trae:

$$\overline{CQ} = \frac{s-x}{y} (-s-x) = \frac{x^2 - s^2}{y}$$

Ma il triangolo rettangolo ACQ dà $\overline{CQ^2} = \overline{CA^2} - \overline{AQ^2} = k^2 - (-x-a)^2 = k^2 - (x+a)^2$ dunque

$$\left[\frac{x^2 - s^2}{y} \right]^2 = k^2 - (x+a)^2,$$

ossia

$$y^2 \{ k^2 - (x+a)^2 \} = (x^2 - a^2 + k^2)^2,$$

è l'equazione del luogo del punto P . Ed essendo quest'equazione identica alla (4) la proposizione è dimostrata.

CAPITOLO XIII

La curva cassiniana.

90. Gian Domenico Cassini ha immaginato, per iscopi astronomici, una particolare curva, la quale, benchè non abbia in alcun modo soddisfatto alle condizioni del problema pel quale venne concepita, pure fu studiata da molti scienziati, i quali avvertirono in essa alcune importanti proprietà; è il luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi danno un prodotto costante. Per rendere conto delle origini di tal curva non v'ha di meglio che riferire il seguente squarcio degli *Eléments d'astronomie* di Giacomo Cassini¹⁾: « Depuis l'observation exacte de la grandeur apparente des diamètres du Soleil, mon Père a trouvé une autre courbe différente de l'Ellipse, qui sert à représenter fort exactement les mouvements vrais du Soleil, et ses diverses distance à la Terre. Il suppose que la Terre étant placée à l'un des foyers de cette courbe, le Soleil la parcourt par son mouvement propre, de manière que tirant de son centre aux deux foyers de la courbe deux lignes droites, le rectangle fait sur ces deux lignes soit toujours égal au rectangle fait sur la plus grande et la plus petite distance du Soleil à la Terre »²⁾.

La curva in questione si chiama *Curva Cassiniana*, o *ellisse di Cassini* oppure *ovale di Cassini*; altri la chiama *lemniscata generale*³⁾ o più semplicemente *lemniscata*⁴⁾, aggiungendo gli epiteti di *equilatera*⁵⁾ per indicare quella del Bernoulli che studieremo nel prossimo Capitolo, di *ellittica* per la cassiniana composta di due

¹⁾ Paris MDCCXL, p. 149. V. anche l'articolo di D'ALEMBERT nella *Encyclopédie méthodique*. T. I (Paris-Liège 1784), p. 632.

²⁾ Un altro modo di collegare la curva di cui si tratta a questioni di cinematica celeste si apprende dalla memoria di E. OECKINGHAUS, *Die Cassini'sche Linie in ihrer Beziehung zur Bewegung der Himmelkörper* (Wochenschrift für Astronomie, II Serie, T. XXXI).

³⁾ STEINER, *Einfache Construction der Tangente an die allgemeine Lemniscate* (G. di Crelle, T. XIV, 1835).

⁴⁾ VETCHMAN, *Diss. inaug. phil. de curvis lemniscatae* (Gottingae 1843).

⁵⁾ HATON DE LA GOUPILLÈRE, *Thèse de mécanique* (Paris 1857), p. 9.

foglie e di *iperbolica* per quella composta di una sola¹⁾; noi diamo la preferenza al primo di tali nomi perchè in tutti gli altri si riflette una sola delle forme che può presentare la curva; se non usiamo il nome di *Cassinioide* gli è che ricordiamo la giusta critica che ne fece il Montucla²⁾, probabilmente per l'uso fattone da d'Alembert nell'*Encyclopédie*.

Preso come asse delle ascisse di un sistema cartesiano ortogonale la retta che unisce i due punti fissi F_1, F_2 e come origine il punto medio O del segmento $F_1 F_2$, si vede subito che, detta $2a$ la distanza $F_1 F_2$ e c^2 il rettangolo dato, l'equazione cartesiana della curva è $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = c^2$ ossia

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - c^4 = 0 \quad 3).$$

La curva cassiniana è quindi una quartica bicircolare simmetrica rispetto a due assi fra loro perpendicolari⁴⁾. Essa taglia la congiungente dei punti fissi F_1, F_2 in due punti A_1, A_2 sempre reali di ascisse $= \pm \sqrt{a^2 + c^2}$, e in due altri B_1, B_2 di ascisse $= \pm \sqrt{a^2 - c^2}$, reali soltanto se $a^2 > c^2$. L'asse delle y invece è tagliato in due punti sempre immaginari ed in altri due reali soltanto se $a^2 < c^2$. Se ne deduce che la curva di Cassini consta di due tratti se $a^2 > c^2$, di uno solo se $a^2 < c^2$. Scartando pel momento l'ipotesi $a^2 = c^2$, di cui ci occuperemo nel venturo Capitolo, rileveremo che la curva ammette come tangenti doppie le rette $\pm y = c^2/2a$; i relativi punti di contatto hanno per ascisse $x = \pm \sqrt{4a^4 - c^4}$, onde sono reali solo quando $c < a\sqrt{2}$; nel caso limite $c = a\sqrt{2}$, i punti di contatto si riuniscono e si ha una tangente d'ondulazione. Emerge da ciò che soltanto quando $c > a\sqrt{2}$ la curva di Cassini

¹⁾ J. A. SERRET, *Note sur les fonctions elliptiques de I espèce* (G. di Liouville, T. VIII, 1843); *Calcul intégral*, II éd. (Paris 1880), p. 259.

²⁾ « ... quelques auteurs se sont avisé de nommer cette ellipse la *Cassinioide*, voulant par cette terminaison grecque dire en un mot la figure ou la courbe de M. Cassini; mais ce nom est tout-à-fait inepte. On dit Sphéroïde, Conchoïde, etc. pour dire qui ressemble à une sphère, à une coquille, etc. C'est le seul sens du mot grec $\sigma\phi\alpha\iota\delta\epsilon\iota\sigma$, d'où ces mots et leurs semblables sont dérivés. Ainsi la *cassinioide* ne voulant pas dire la courbe de M. Cassini, mais la figure ressemblant à M. Cassini. Si l'utilité de cette courbe en astronomie eut répondu aux idées de cet astronome, il eut fallu nommer l'ellipse Cassinienne, comme on dit l'ellipse Apollonienne, et non l'*Apollonoïde* ». *Histoire des Mathématiques*, nouv. éd., T. II, p. 565.

³⁾ Ricordiamo che di quest'equazione ci siamo già serviti (p. 151) per dimostrare che la curva di Cassini è una spirica.

⁴⁾ Mediante funzioni ellittiche la si trova studiata nella memoria di J. THOMAE, *Ueber die Cassinischen Kurven* (Jahresber. Deutsch. Math. Ver., T. XXIX, 1920). Una nuova genesi ne fu incontrata da A. WEDEMAYER (Astr. Nachr., 1909) nelle sue ricerche intorno al problema di Pothenot sulla sfera.

è di forma somigliante ad un ovale, epperò può surrogare l'ellisse di second'ordine nella rappresentazione grafica delle traiettorie degli astri ¹⁾.

Per riconoscere come la curva di Cassini si comporti all'infinito poniamo $x + iy = \xi/\zeta$, $x - iy = \eta/\zeta$; la (1) diverrà quindi

$$(2) \quad (\xi^2 - a^2 \zeta^2) (\eta^2 - a^2 \zeta^2) - c^4 \zeta^4 = 0$$

Questa equazione dimostra che nel punto ciclico $\xi = 0$, $\zeta = 0$ la cassiniana ammette come tangenti le due rette $\xi \pm a \zeta = 0$, ognuna delle quali taglia la curva in quattro punti coincidenti col relativo punto di contatto; altrettanto potendosi ripetere pel punto $\eta = 0$, $\zeta = 0$ si conclude che per la curva di Cassini i punti ciclici sono punti doppi d'inflexione ²⁾. Le corrispondenti tangenti avendo per equazioni

$$x + iy \pm a = 0, \quad x - iy \pm a = 0$$

si intersecano in due punti reali di coordinate $(\pm a, 0)$; sono i punti F_1, F_2 i quali risultano fuochi straordinari della curva.

Per trovare i fuochi ordinari cerchiamo le tangenti alla curva (2) passanti pel punto $\xi = 0$, $\zeta = 0$; porremo perciò $\xi = k \zeta$, divideremo per ζ^2 l'equazione risultante e cercheremo quali valori si devono attribuire a k affinché detta equazione ammetta una radice doppia η/ζ . Troveremo facilmente $k = \pm \sqrt{a^2 - c^2}/a$, onde le tangenti condotte alla curva del primo punto ciclico hanno per equazioni

$$x + iy = \frac{\pm \sqrt{a^2 - c^2}}{a}$$

Similmente quelle condotte dal secondo sono rappresentate come segue:

$$x - iy = \frac{\pm \sqrt{a^2 - c^2}}{a}$$

Queste due coppie di rette immaginarie coniugate si tagliano in 2 punti reali; sono quelli di coordinate

$$y = 0, \quad x = \pm \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \quad \text{se } a^2 > c^2,$$

¹⁾ In questo caso la curva trova applicazioni anche nell'architettura; v. FRÉZIER, *Traité de stéréotomie*, T. II (Strasbourg 1738), p. 99.

²⁾ CAYLEY, *Note on the Cassinian* (Mess., T. IV, 1875; Math. Papers, T. IX, p. 264).

quelli di coordinate

$$y = \pm \frac{\sqrt{c^4 - a^4}}{a}, \quad x = 0 \quad \text{se } a^2 < c^2;$$

essi dunque stanno sulla congiungente dei fuochi straordinari se la cassiniana consta di due tratti, stanno invece sulla retta che biseca ad angolo retto quella congiungente se la cassiniana consta di un solo tratto.

91. Quando la Cassiniana consta di due linee chiuse si può, senz'introdurre immaginari, scrivere l'equazione (1) sotto la seguente forma:

$$(1') \quad \frac{\sqrt{(x - \sqrt{a^4 - c^4})^2 + y^2} \sqrt{(x + \sqrt{a^4 - c^4})^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 - (y - \sqrt{a^4 - c^4})^2} + \sqrt{x^2 + (y + \sqrt{a^4 - c^4})^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + \sqrt{a^4 - c^4}}}{a^2 - \sqrt{a^4 - c^4}}$$

e questa esprime il seguente teorema di Wangerin: « Se sopra gli assi di una curva di Cassini composta di due linee chiuse, in cui $2a$ è la distanza dei fuochi straordinari e c^2 il prodotto costante delle distanze di questi dai punti della curva, si portano i segmenti $O X_1$, $O X_2$, $O Y_1$, $O Y_2$, eguali a $\sqrt{a^4 - c^4}$, la curva stessa potrà definirsi come luogo di punti M tali che

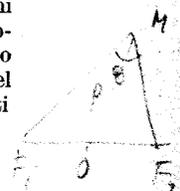
$$\frac{M X_1 \cdot M X_2}{M Y_1 \cdot M Y_2} = \text{cost. } ^{1)}$$

La curva di cui ci occupiamo può rappresentarsi assai semplicemente in un sistema di coordinate bipolari avente per fuochi F_1, F_2 , cioè mediante l'equazione $\rho_1 \rho_2 = c^2$. Ma può anche rappresentarsi comodamente mediante una relazione tra l'angolo $F_1 M F_2 = \theta$ e il raggio vettore ρ che unisce il punto medio O del segmento $F_1 F_2$ al punto variabile M sulla curva: essendo infatti

$$\overline{F_1 F_2}^2 = \overline{M F_1}^2 + \overline{M F_2}^2 - 2 \overline{M F_1} \cdot \overline{M F_2} \cos \theta,$$

$$\overline{M F_1} \cdot \overline{M F_2} = c^2, \quad \overline{M F_1}^2 + \overline{M F_2}^2 = 2a^2 + 2\rho^2$$

¹⁾ Ueber eine Eigenschaft der Lemniskate (Archiv, T. LV, 1873); quello ora dimostrarlo è caso speciale di un teorema di DARBOUX (*Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques*; Paris 1873, Art. 28 e 32).



si conclude

$$3) \quad \rho^2 = a^2 + c^2 \cos \theta,$$

equazione della cassiniana che torna utile in parecchie circostanze¹⁾.

La definizione della cassiniana da cui siamo partiti mal si presta

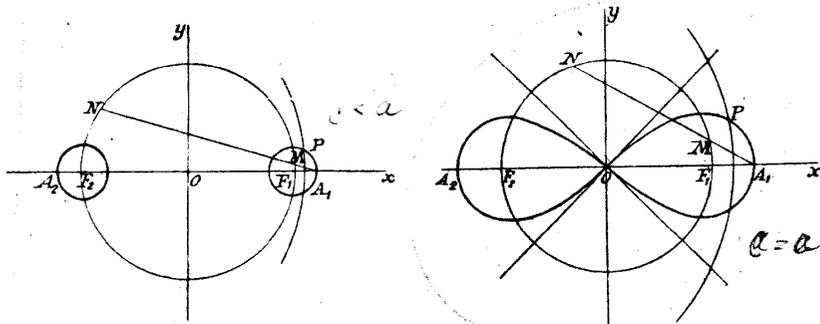


Fig. 51 a. — Curva cassiniana.

Fig. 51 b. — Curva cassiniana.

alla delineazione della curva, ma la costruzione per punti è effettuabile in modo assai comodo servendosi della proposizione seguente:

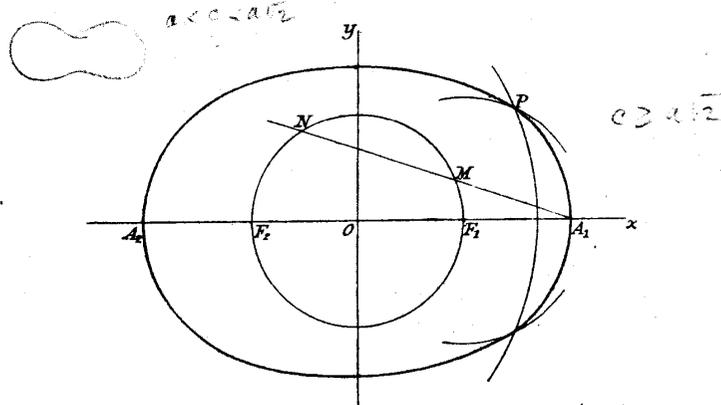


Fig. 51 c. — Curva cassiniana.

« Dati (fig. 51 a-b-c) un circolo di centro O e raggio r , un suo diametro fisso $F_1 F_2$ e due punti $A_1 A_2$ sul prolungamento di questo

¹⁾ OEKINGHANS, *Die Lemniskate* (Archiv., 2^a Serie, T. VII e VIII, 1889).

ed. equidistanti dal centro O , si conduce per A_1 (o A_2) ~~una~~ trasversale qualunque a tagliare in M, N la periferia del dato circolo; le due circonferenze di centri F_1 e F_2 e raggi $A_1 M$ e $A_1 N$ (o risp. $A_2 M$ e $A_2 N$) s'intersecano, in due punti P il cui luogo è una cassiniana ».

Per dimostrare ciò prendiamo O per origine e il diametro $F_1 F_2$ per asse delle x . Se d è la distanza di A_1 e A_2 da O , e ω l'angolo della trasversale coll'asse delle x , sarà evidentemente

$$\frac{A_1 M}{A_1 N} \left\{ \begin{aligned} &= d \cos \omega \pm \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \omega} \end{aligned} \right.$$

onde le equazioni dei due cerchi variabili di cui si parla nell'enunciato saranno risp.

$$x^2 + y^2 - 2 r x = d^2 (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) - 2 d \cos \omega \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \omega}$$

$$x^2 + y^2 + 2 r x = d^2 (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) + 2 d \cos \omega \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \omega}.$$

Eliminando ω si otterrà il luogo dei punti P . Ora queste due equazioni equivalgono alle seguenti:

$$x^2 + y^2 = d^2 (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega), \quad r x = d \cos \omega \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \omega};$$

la prima dà

$$\cos^2 \omega = \frac{x^2 + y^2 + d^2}{2 d^2}, \quad \sin^2 \omega = \frac{d^2 - x^2 - y^2}{2 d^2},$$

onde la seconda diviene

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2 r^2 (x^2 - y^2) + d^2 (2 r^2 - d^2) = 0$$

Quest'equazione, avendo la forma (1), dimostra la proposizione; siccome essa non si altera cambiando il segno di d , così la stessa cassiniana si ottiene servendosi del punto A_2 invece che di A_1 . La (4) si identifica alla (1) facendo

$$r = a, \quad d = \sqrt{a^2 + c^2};$$

dunque (in forza di quanto si dimostrò più sopra): il cerchio fisso ha per diametro la congiungente dei fuochi straordinari della curva ed i punti fissi sono i due punti sempre reali che la curva possiede sopra tale congiungente. La curva consta di una o due foglie secondochè $d \geq r \sqrt{2}$.

92. Vari sono i metodi che vennero indicati per costruire le tangenti e le normali alla cassiniana. Fra quelli che danno le normali ci sembra debba accordarsi la preferenza a quello a cui conduce il calcolo geometrico¹⁾; eccone l'enunciato: Per costruire (fig. 52) la normale in un punto M della cassiniana avente per fuochi i punti F_1, F_2 si porti sul raggio vettore $M F_2$ il segmento $\overline{M G_2} = \overline{M F_1}$ e sul raggio vettore $M F_1$ il segmento $\overline{M G_1} = \overline{M F_2}$; se N è il

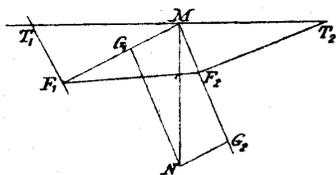


Fig. 52.

quarto vertice del parallelogrammo avente $M G_1$ e $M G_2$ per lati consecutivi, $M N$ è la normale in M alla curva. Come corollario se ne deduce una costruzione della tangente indicata senza dimostrazione di Steiner (v. nota³⁾ a p. 248). Indichiamo infatti con ϱ_1, ϱ_2 i raggi vettori $M F_1$ e $M F_2$, e con φ_1 e φ_2 gli angoli $N M F_1$ e $N M F_2$; sarà evidentemente

$$\frac{\varrho_1}{\sin \varphi_1} = \frac{\varrho_2}{\sin \varphi_2}.$$

Conduciamo poi le perpendicolari in F_1, F_2, M risp. a $M F_1, M F_2, M N$ e chiamiamo T_1, T_2 le intersezioni della terza (che è la tangente) con le due prime. Avremo, dai due triangoli rettangoli $M F_1 T_1$ e $M F_2 T_2$

$$\overline{M T_1} = \frac{\varrho_1}{\sin \varphi_1}, \quad \overline{M T_2} = \frac{\varrho_2}{\sin \varphi_2}$$

onde, per la precedente $\overline{M T_1} = \overline{M T_2}$. Concludiamo adunque con Steiner: *Si conducano in F_1, F_2 le perpendicolari alle due rette $M F_1, M F_2$ e quindi per M una retta che sia da esse bisecata; essa sarà tangente in M alla cassiniana avente per fuochi F_1 e F_2 .*

Un facile calcolo²⁾ dà la seguente espressione per il raggio di curvatura R in un punto della Cassiniana

$$(5) \quad \varrho^4 - 2 a^2 \varrho^2 \cos 2 \omega + a^4 - c^4 = 0$$

$$R = \frac{2 c^2 \varrho^3}{a^4 - c^4 + 3 \varrho^4}$$

¹⁾ PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino 1887), p. 142.

²⁾ V. SCHLÖMILCH, *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, I Th. (3. Aufl., 1878), p. 96.

$$\text{ossia} \quad (6) \quad R = \frac{c^2 \varrho}{\varrho^2 + a^2 \cos 2 \omega}$$

Se ne deduce che i flessi della curva di Cassini sono determinati come intersezioni di essa con la curva $\varrho^2 + a^2 \cos^2 \omega = 0$, che è (v. Cap. seg.) una lemniscata di Bernoulli, indipendente dalla costante c ; dunque: *tutte le curve di Cassini aventi a comune i fuochi straordinari hanno i loro flessi situati sopra una lemniscata confocale alle prime.* Aggiungiamo che la prima polare dell'origine rispetto alla curva (1) si spezza nella retta all'infinito e nell'iperbole di equazione $a^2 (x^2 - y^2) = a^4 - c^4$; ora siccome eliminando c fra questa equazione e la (1) si trova $\varrho^2 - a^2 \cos 2 \omega = 0$, così è anche una lemniscata di Bernoulli il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte a tutte le cassiniane aventi gli stessi fuochi straordinari dal loro centro comune.

Riguardo alla quadratura e rettificazione della cassiniana ci limitiamo a enunciare i seguenti risultati:

1° Il calcolo dell'area della curva di Cassini dipende da integrali ellittici; la superficie racchiusa dall'intera curva è espresso da integrali di prima specie se la curva consta di due foglie, da integrali di seconda se consta di una sola¹⁾.

2° Qualunque arco di curva cassiniana è esprimibile mediante la somma di due integrali ellittici a moduli complementari¹⁾. L'equazione intrinseca della cassiniana contiene quindi integrali ellittici e riesce, per la conseguente complicazione, di mediocre utilità²⁾.

¹⁾ J. A. SERRET, *Note sur les intégrales elliptiques de l'espèce* (Journ. de math., T. VIII, 1843); *Calcul intégral* (II éd., Paris 1880), p. 260 e segg.
²⁾ CÉSARO, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896), p. 42.

CAPITOLO XIV

Quartiche con tre nodi d'inflexione.

flecnod

93. Dobbiamo ora occuparci del caso particolare notevole della curva cassiniana che nasce supponendo $c = a$.

L'equazione (1) del n. 90 diviene in questo caso

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 \quad 1).$$

Essa s'incontra per la prima volta in un celebre articolo inserito negli *Acta eruditorum* del settembre 1694 sotto il titolo *Jacobi Bernoulli Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae cujusdam algebraicae, addenda nuperae solutione mensis Junii*; ivi la curva corrispondente appare soltanto come ausiliare analitico, e viene indicata come « curva quatuor dimensionum quae hac aequatione exprimitur $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$, quaeque circum axe $BG [2a]$ constituta formam referto jacentis notae octonarii ∞ , seu complicatae in nodum fasciae, sive lemnisci ²⁾, *d'un noeud de ruban* Gallis » ³⁾. Di tale somiglianza di forma parla anche Giovanni Bernoulli nella lettera a Varignon inserita nel *Journal des Savants* del 2 dicembre 1697, ove è cenno della « courbe que mon frère comparait autrefois à un noeud de ruban » ⁴⁾, ma essa non è designata col nome di *lemniscata* che era destinato a prendere posto permanente nei vocabolari matematici in seguito

¹⁾ Prendendo per nuovi assi le bisettrici degli angoli formati dagli assi primitivi la (1) diviene

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2xy,$$

equazione che conduce a considerare l'altra

$$(x^2 + 2xy \cos \alpha + y^2)^2 = 4a^2xy.$$

a cui fu dato il nome di *lemniscata obliqua* (G. DE LONCHAMPS, *Cours de problèmes*, T. II, p. 374).

²⁾ Da *lappi* xx ; = fascia conformata a 8.

³⁾ V. *Jac. Bernoulli Opera*, T. I (Genevae 1744), p. 609; v. anche p. 611.

⁴⁾ *Joh. Bernoulli Opera*, T. I, p. 213.

al surriferito articolo di Bernoulli *senior*. La lemniscata fissò stabilmente l'attenzione dei matematici, non già per l'applicazione che essa ricevette al suo nascere, ma per le importantissime investigazioni fatte su di essa dal Conte di Fagnano ¹⁾; il quale si occupò della rettificazione di essa e giunse a conclusioni che, convenientemente svolte e generalizzate, formarono il nocciolo della teoria delle funzioni ellittiche: basti ricordare avere egli dimostrato che ogni arco di lemniscata si può dividere algebricamente in n parti eguali, purchè n abbia una delle forme 2.2^m , 3.2^m , 5.2^m . I geometri che vennero dopo Fagnano sembra che considerassero la lemniscata piuttosto come punto di partenza di indagini di analisi che nell'intento di scoprirne le proprietà geometriche; lo fa credere il fatto che *per molto tempo rimase ignoto il fatto che la lemniscata di Bernoulli è caso speciale della curva di Cassini*. A dimostrare questa sorprendente ignoranza bastino le seguenti parole con cui si chiude l'articolo sopra la lemniscata che d'Alembert scrisse per l'*Encyclopédie méthodique*: « Il peut y avoir plusieurs autres courbes en 8 de chiffre. Voyez, par exemple, *Ellipse de Cassini*: mais celle dont nous venons de parler est la plus simple » ²⁾. L'identità delle due curve venne pubblicamente dimostrata da G. Saladini nel 1806 ³⁾; sembra però ⁴⁾ che ventiquattro anni prima fosse stata avvertita da Pietro Ferroni nell'opera *Theoria exponentialium, log. et trig. sublimis* (Firenze, T. I, 1782); ma non a lui certamente si deve se quel fatto è oggi generalmente noto.

94. L'equazione (1) mostra che l'origine è un punto doppio della curva, in cui le tangenti sono le bisettrici degli angoli degli assi; queste anzi sono tangenti d'inflexione; ricordando quanto si dimostrò in generale per tutte le cassiniane riguardo al loro contegno all'infinito (n. 90) si è in grado di asserire che la *lemniscata di Bernoulli è una quartica con tre nodi d'inflexione, due dei quali si trovano nei punti ciclici del piano*.

Mediante la stessa equazione si dimostra facilmente che *la lemniscata è la podaria di un'iperbole equilatera rispetto al centro e che essa è pure la curva che si ottiene assoggettando un'iperbole*

¹⁾ *Produzioni matematiche*, T. II (Pesaro 1750) p. 356 e segg. 413 e 415. Cfr. anche: D. BIERENS DE HAAN, *Dissertatio mathem. inaug. de Lemniscata Bernouilliana* Amstel 1847, § 5; ENNEPER, *Elliptische Functionen* (2. Aufl., Halle 1890), p. 531 e segg.; BELLACCHI, *Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche* (Firenze 1894), p. 12 e segg.

²⁾ *Encyclopédie méthodique*, T. II (Paris et Liège 1785), p. 266.

³⁾ V. la memoria *Della discesa dei gravi per la lemniscata e della dimostrazione che questa curva è una della famiglia dell'ellissi Cassiniana* (Mem. dell'Istituto Italiano, T. I, Parte II, Bologna 1806).

⁴⁾ V. P. FERRONI, *Prodromo d'osservazioni sopra il trattato di calcolo integrale pubblicato in Parigi dal sig. Marchese de Condoret* (Mem. della Società Ital. delle Scienze, T. V, 1790).

equilatera ad una inversione il cui polo cada nel centro di questa curva. Un'equazione della forma (1) si ottiene anche eliminando z fra le due equazioni

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2pz, \quad y^2 + z^2 = r^2$$

onde la lemniscata di Bernoulli è la proiezione ortogonale dell'intersezione di un cilindro e di un paraboloide di rivoluzione convenientemente scelti¹⁾. Altri metodi per generare e descrivere la lemniscata di Bernoulli risultano dall'osservare che questa è caso particolare tanto della curva di Cassini (cfr. fig. 51 b), quanto della lemniscata di Booth (n. 66; specialmente metodo di Maclaurin, fig. 26 b) e della curva di Watt (v. Lib. IV, Cap. IV) e che ad essa sono quindi applicabili i procedimenti adoperati per la genesi di queste²⁾.

Introducendo coordinate polari ρ, ω la (1) diviene

$$(2) \quad \rho^2 = a^2 \cos 2\omega, \quad \rho^2 = 2a^2 \cos 2\omega;$$

ne faremo subito un'applicazione. Detto ν l'angolo della normale alla curva (1) nel punto (x, y) coll'asse delle x , avremo:

$$\operatorname{tg} \nu = -\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 + (x^2 + y^2)}{a^2 - (x^2 + y^2)} \frac{y}{x}$$

ossia per la (2)

$$\operatorname{tg} \nu = -\frac{\operatorname{sen} \omega (1 + 2 \cos 2\omega)}{\cos \omega (1 - 2 \cos 2\omega)} = \frac{3 \operatorname{sen} \omega - 4 \operatorname{sen}^3 \omega}{4 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega} =$$

$$\frac{\operatorname{sen} 3\omega}{\cos 3\omega} = \operatorname{tg} 3\omega;$$

se ne trae

$$(3) \quad \nu = 3\omega$$

relazione notevolissima scoperta da Vetchmann³⁾, la quale non solo porge un metodo facile per costruire la normale (e quindi la tangente) in un punto qualunque della lemniscata, ma prova eziandio che il problema della trisezione dell'angolo è in sostanza identico a quello di condurre ad una lemniscata le normali (o le tangenti) di direzione assegnata. Così, per es., i punti in cui la normale è parallela alla bi-

¹⁾ G. STINER, *Die Bernoulli'sche Lemniskate dargestellt als Orthogonal-projection von Raumcurven* (Progr. Thurgau, 1897).

²⁾ V. anche H. DE VRIES, *Ueber eine einfache Erzeugungsweise der gewöhnlichen Lemniskate* (Nieuw Arch. voor. Wis., II Ser., T. V, 1904).

³⁾ *Diss. inaug. phil. de curvis lemniscatae* (Gottingae 1843).

settrice delle direzioni positive degli assi sono quelli per cui ω ha uno dei tre valori $\pi/12, 9\pi/12, 17\pi/12$; così i punti per cui $\omega = \pm \pi/6$ sono punti di culminazione, ecc.

La stessa equazione (2) può utilizzarsi per dimostrare un teorema enunciato da Steiner¹⁾. Segnamo perciò oltre i fuochi F_1, F_2 e gli estremi A_1, A_2 dell'asse della lemniscata, i coniugati armonici F_1', F_2' di F_1, F_2 rispetto alla coppia $A_1 A_2$. Essendo

$$\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = a, \quad \overline{OA_1} = \overline{OA_2} = a\sqrt{2}, \quad \overline{OF_1} \cdot \overline{OF_1'} = \overline{OA_1}^2,$$

$$\overline{OF_2} \cdot \overline{OF_2'} = \overline{OA_2}^2$$

sarà $\overline{OF_1'} = \overline{OF_2'} = 2a$. Si conduca ora per O una trasversale r arbitraria, formante coll'asse l'angolo ω , a segare la curva in M_1, M_2 e si proiettino su di essa in H_1, H_2 i punti F_1', F_2' , ossia si determinino le intersezioni di r colla circonferenza di diametro $(F_1' F_2')$; si avrà:

$$\overline{H_1 M_1} \cdot \overline{H_2 M_2} = \overline{OH_1}^2 - \overline{OM_1}^2 = (2a \cos \omega)^2 - \rho^2 = 4a^2 \cos^2 \omega - 2a^2 \cos 2\omega = 2a^2,$$

onde il rettangolo $H_1 M_1 \cdot H_2 M_2$ è costante; da ciò che passiamo ad esporre risulterà che è eguale all'area totale della curva.

Chiamiamo A_ω l'area descritta dal raggio vettore della curva quando l'anomalia varia da 0 a ω ; avremo per la (2)

$$A_\omega = \frac{1}{2} \int_0^\omega \rho^2 d\omega = a^2 \int_0^\omega \cos 2\omega d\omega = a^2/2 \operatorname{sen} 2\omega;$$

in particolare

$$A_{\pi/4} = a^2/2;$$

l'area totale essendo $4A_{\pi/4}$, se ne conclude che vale $2a^2$, come fu detto testè e come Fagnano ha per primo dimostrato²⁾. Inoltre si può scrivere

$$(4) \quad A_\omega = A_{\pi/2} \operatorname{sen} 2\omega$$

¹⁾ *Aufgaben und Lehrsätze* (G. di Crellé, T. XIV, 1835).

²⁾ *Produzioni matematiche*, T. II (Pesaro 1750), p. 343 e 349. Questo risultato, che si ottiene oggi con tanta facilità, epperò appare di mediocre importanza, era di grande valore quando venne stabilito per la prima volta, perchè valse a dimostrare erronea la opinione di TSCHIRNHAUSEN (*Acta erud.*, 1691, p. 437 e 1695, p. 490) che fosse impossibile ottenere la quadratura di una curva costituita da più foglie; il Fagnano era così consapevole del valore del suo ritrovato che pose sul frontispizio della sua grande opera la figura della lemniscata con l'epigrafe: « Multifariam divisa atque dimensa. — Deo veritatis gloria ».

Questa relazione abilita a risolvere il seguente problema: « trovare nella lemniscata un raggio vettore che ne spezzi il primo quadrante in due parti che stiano in un dato rapporto λ/μ »¹⁾; essendo infatti

$$\frac{A\omega}{A\pi/4 - A\omega} = \frac{\lambda}{\mu}$$

si avrà per la (4)

$$\frac{\text{sen } 2\omega}{1 - \text{sen } 2\omega} = \frac{\lambda}{\mu}$$

onde

$$\text{sen } 2\omega = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

epperò ω è determinato. Se per es. $\lambda = \mu$, $\text{sen } 2\omega = 1/2$, epperò $\omega = \pi/12$; il raggio vettore ottenuto ha quindi (v. p. 259) per estremo un punto tale che la corrispondente tangente è parallela alla seconda bisettrice dell'angolo degli assi.

Dalla stessa equazione (2) si trae

$$(5) \quad ds = \frac{2a^2 d\varrho}{\sqrt{4a^2 - \varrho^4}}$$

d'altronde la (6) della p. 255 dà il seguente valore del raggio di curvatura

$$(6) \quad R = \frac{2a^2}{3\varrho^2},$$

donde una facile costruzione del centro di curvatura²⁾. Eliminando ϱ fra le (5) (6) e ponendo per brevità $\sqrt{2}/3 a = \alpha$ si conclude essere

¹⁾ BIEREN² DE HAAN, *Diss.* citata.

²⁾ L'equazione (6) fu applicata da P. KOKOTT per risolvere il seguente problema: « Su quale curva deve scorrere una lemniscata affinché il suo centro descriva la retta condotta per l'originaria posizione del punto di contatto perpendicolarmente all'asse della curva » (*Arch. Math. u. Phys.*, III Ser., T. VI, 1903, p. 341). La curva cercata ha per equazione

$$x = \int_0^y \frac{y^2 dy}{\sqrt{1 - y^4}};$$

cfr. anche dello stesso *Das Abrollen von Kurven bei geradlinigen Bewegung eines Punktes* (Id., T. XI, 1906) e altra nota di H. WIELEITNER con eguale titolo (Ivi).

³⁾ L'equazione dell'evolvente si trova nella *Diss.* cit. di BIEREN² DE HAAN, p. 30.

$$(7) \quad s = 3 \int \frac{dR}{\sqrt{(R/\alpha)^4 - 1}},$$

l'equazione intrinseca della lemniscata.

95. La lemniscata essendo una quartica con tre nodi è una curva razionale epperò le coordinate dei suoi punti sono esprimibili in funzione razionale, di un parametro. Ed infatti l'equazione (1) si può surrogare con le due seguenti:

$$(8) \quad x = a\sqrt{2} \frac{\lambda + \lambda^3}{1 + \lambda^4}, \quad y = a\sqrt{2} \frac{\lambda - \lambda^3}{1 + \lambda^4}.$$

Risulta da queste²⁾ anzitutto che cambiando λ in $1/\lambda$, x rimane inalterato e y non fa che mutare segno, onde a quei valori del parametro corrispondono due punti della curva simmetrici rispetto a Ox . Invece due punti della curva simmetrici rispetto al centro corrispondono a valori di λ eguali e di segni contrari; se essi appartengono ad un diametro della curva formante con l'asse delle ascisse l'angolo δ , sussisterà l'equazione

$$\text{tg } \delta = \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2},$$

ossia

$$(9) \quad \lambda^2 = \frac{1 - \text{tg } \delta}{1 + \text{tg } \delta} = \text{tg} \left[\frac{\pi}{4} - \delta \right].$$

Dalla (8) si trae la seguente equazione della congiungente i punti (α) (β) :

$$(10) \quad (1 + \alpha\beta) [(\alpha + \beta)^2 - (1 + \alpha^2 \beta^2)] x + (1 - \alpha\beta) [(\alpha + \beta)^2 + (1 + \alpha^2 \beta^2)] y - 2\sqrt{2} a \alpha \beta (\alpha + \beta) = 0;$$

in particolare

$$(11) \quad (1 + \lambda^2) (4\lambda^2 - 1 - \lambda^4) x + (1 - \lambda^2) (4\lambda^2 + 1 + \lambda^4) y - 4\sqrt{2} a \lambda^3 = 0$$

è l'equazione della tangente alla lemniscata nel punto (λ) . Essendo la (11) di sesto grado in λ , se ne deduce che (conformemente a quanto

¹⁾ Furono date per la prima volta da J. A. SERRET (G. di Liouville, T. X, 1845, p. 258).

²⁾ Per quanto segue veggasi la memoria di EM. WEYR, *Die Lemniscate in rationaler Behandlung* (Prag. Abh., T. VI, 1874).

insegnano le formole di Plücker) la lemniscata è di sesta classe; le tangenti parallele ad una direzione data hanno punti di contatto che si determinano risolvendo la seguente equazione in λ :

$$\frac{(1 + \lambda^2)(4\lambda^2 - 1 - \lambda^4)}{(1 - \lambda^2)(4\lambda^2 + 1 + \lambda^4)} = \text{cost}$$

Ora, in forza della (9) questa può scriversi

$$\frac{1 - 3 \text{tg}^2 \delta}{3 \text{tg} \delta - \text{tg}^3 \delta} = \text{cost.} \quad \text{cioè} \quad \text{tg} 3 \delta = \text{cost.};$$

quindi, detta δ_0 una delle radici di quest'equazione, le due altre saranno $\delta, + \pi/3, \delta_0 + 2\pi/3$, onde si conclude: *La lemniscata ammette sei tangenti parallele ad una data direzione: i loro punti di contatto stanno sopra tre diametri formanti fra loro angoli eguali a $\pi/3$.*

Sempre dalla (8) si trae la seguente condizione di collinearità dei tre punti $(\lambda_1) (\lambda_2) (\lambda_3)$:

$$(12) \quad \lambda_2 \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} + \lambda_3 \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_3 \lambda_1} + \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = 0$$

e la seguente condizione di conciclicità dei quattro punti $(\lambda_1) (\lambda_2) (\lambda_3) (\lambda_4)$:

$$(13) \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = 1$$

Facendo nella (12) $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \lambda_3 = \xi$ essa diviene

$$(12') \quad \lambda + 2\xi + \lambda \xi^2 (\xi^2 + 2\lambda\xi) = 0;$$

dato (λ) essa serve a determinare i punti di contatto delle tangenti condotte da esso alla lemniscata; se $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sono i parametri dei punti di contatto si avrà:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 &= -2\lambda, \\ \xi_1 \xi_2 + \xi_3 \xi_4 + \xi_2 \xi_3 + \xi_1 \xi_4 + \xi_3 \xi_1 + \xi_2 \xi_4 &= 0, \\ \xi_2 \xi_3 \xi_4 + \xi_1 \xi_3 \xi_4 + \xi_1 \xi_2 \xi_4 + \xi_1 \xi_2 \xi_3 &= -2/\lambda, \\ \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 &= 1 \end{aligned}$$

donde, eliminando ξ_4 ,

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_1 \xi_2 \xi_3 (\xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_1 + \xi_1 \xi_2) = 0;$$

questa, in forza della (12) mostra che i tre punti $(\xi_1) (\xi_2) (\xi_3)$ sono

collineari; altrettanto potendosi ripetere per $(\xi_1) (\xi_2) (\xi_4)$ si può concludere: *I punti di contatto delle quattro tangenti condotte a una lemniscata da un suo punto qualunque stanno sopra una retta; essendo nullo l'invariante quadratico del primo membro della (12') quelle quattro tangenti (e i loro punti di contatto) formano un gruppo equianarmonico, onde non più di due sono reali.*

L'equazione della retta che contiene gli anzidetti punti di contatto è (se (λ) è il punto scelto sopra la curva)

$$(14) \quad (1 + \lambda^2)x + (1 - \lambda^2)y + a\sqrt{2}\lambda = 0;$$

la retta così rappresentata è simmetrica dell'altra

$$(1 + \lambda^2)x + (1 - \lambda^2)y - a\sqrt{2}\lambda = 0$$

rispetto al centro della curva. Ora questa biseca ad angolo retto la congiungente del punto (λ) col centro della curva; dunque per costruire le tangenti alla lemniscata che si spiccano da un suo punto, si costruisca la retta che biseca ad angolo retto la congiungente di questo punto col centro della curva; la simmetrica di essa rispetto al centro stesso taglia la curva nei punti di contatto delle tangenti cercate. Possiamo aggiungere che tutte le rette analoghe a quella rappresentata dall'equazione (14) involuppano l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = a^2/2$.

Il cerchio che oscula la lemniscata in un punto (λ) la taglia ancora in un punto (μ) che si chiama *satellite di (λ)* ; fra i parametri λ e μ sussiste la seguente relazione (conseguenza della equaz. 13)

$$(15) \quad \lambda^3 \mu = 1;$$

essa prova intanto che i punti satelliti di quattro punti conciclici sono pure conciclici. Ora la retta $(\lambda) (\mu)$ ha per equazione

$$(16) \quad (\lambda^6 + 1)x + (\lambda^6 - 1)y - 2a\sqrt{2}\lambda^3 = 0;$$

ma quest'equazione appartiene alla perpendicolare condotta dal punto (μ) di parametro $1/\lambda^3$ al corrispondente raggio vettore, dunque l'angolo $(\lambda) (\mu) O$ è retto. Ciò prova che la lemniscata è la podaria rispetto al punto O della curva involupata dalla retta (16), cioè dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 2a^2$: resta così verificata una asserzione fatta a p. 257. Dalla (15) si deduce anche che per ogni punto (μ) della lemniscata passano tre cerchi che la osculano altrove; detti $(\lambda_1) (\lambda_2) (\lambda_3)$ i punti di osculazione si avrà

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1/\mu;$$

se ne deduce che essi appartengono alla retta

$$(1 + \mu^2)x + (1 - \mu^2)y - 2\sqrt{2}\mu = 0;$$

osservando che questa equazione rappresenta la perpendicolare condotta dal punto (μ) al corrispondente raggio vettore, si è in grado di concludere: *Per ogni punto di una lemniscata passano tre cerchi che la osculano altrove; i tre punti di contatto si trovano sulla perpendicolare condotta da quel punto al relativo raggio vettore.*

96. Quello che esponemmo nel numero precedente è sufficiente a dimostrare quanto utilmente si applichi alla lemniscata la rappresentazione delle coordinate mediante funzioni razionali di un parametro. Ma vi è un altro artificio analitico che si può invocare in altri casi. Si prendano infatti F_1 e F_2 per punti fondamentali di un sistema di coordinate bipolari ϱ_1 e ϱ_2 : essendo $\varrho_1 \varrho_2 = a^2$ la equazione della lemniscata, si potrà porre $\varrho_1 = a e^u$, $\varrho_2 = a e^{-u}$, u essendo un parametro, ovvero, introducendo le funzioni iperboliche

$$(17) \quad \varrho_1 = a (\cosh u + \sinh u), \quad \varrho_2 = a (\cosh u - \sinh u).$$

Per fare un'applicazione di queste formole segniamo la bisettrice MD dell'angolo $F_1 M F_2$. Avremo:

$$F_1 D + F_2 D = 2a, \quad \frac{F_1 D}{F_2 D} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

e per la (17):

$$F_1 D = a(1 + \operatorname{tgh} u), \quad F_2 D = a(1 - \operatorname{tgh} u), \quad OD = a \operatorname{tgh} u$$

D'altronde, per un noto teorema di geometria elementare, è

$$F_1 M \cdot F_2 M = \overline{MD^2} + F_1 D \cdot F_2 D,$$

quindi, sostituendo i valori trovati,

$$MD = a \operatorname{tgh} u.$$

Se ne conclude $MD = OD$, relazione che esprime il seguente teorema: *In una lemniscata i due raggi vettori di un punto qualunque e la congiungente dei fuochi determinano un triangolo il quale gode la proprietà che la bisettrice dell'angolo dei due raggi vettori è eguale in lunghezza alla distanza del suo piede dal centro della curva¹⁾.*

In un altro modo si possono applicare le funzioni iperboliche

¹⁾ W. HESS, *Eigenschaften der Lemniscate* (Zeitschrift, T. XXVI, 1883).

alla lemniscata; si ponga infatti

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \operatorname{tgh} \frac{u}{2}$$

e si applichi l'equazione (2); allora si trova per espressione dell'area A di un settore di lemniscata

$$A = \frac{1}{2} \int_0^\omega \varrho^2 d\omega = \frac{a^2}{2} \left[\int_0^u \frac{du}{\cosh^3 u} - \int_0^u \frac{du}{\cosh u} \right] = \frac{a^2 \sinh u}{\cosh^3 u}$$

d'altronde se dal fuoco F_1 si cala la perpendicolare $F_2 K$ sul raggio vettore OM , si ottiene un triangolo $OF_1 K$ la cui area è

$$T = \frac{1}{2} OK \cdot F_1 K = \frac{a^2 \sin \omega \cos \omega}{2} = \frac{a^2 \sinh u}{2 \cosh^2 u};$$

dunque $T = \frac{1}{2} A$; vale a dire: *la perpendicolare calata da un fuoco della lemniscata su un raggio vettore centrale qualunque, biseca l'area compresa fra questo raggio vettore, l'asse e la curva* (v. nota preced.).

Prima di lasciare la curva di cui ci siamo ora occupati, sentiamo il dovere di fare cenno del seguente problema di meccanica: « Trovare la curva tale che i suoi archi contati da un punto fisso siano percorsi nello stesso tempo delle corrispondenti corde, da un punto pesante inizialmente in riposo ». T. Bonati¹⁾ che si è proposto tale questione²⁾, trovò equazione e forma della curva risoltrice, senza tuttavia avvertire che si tratta di una lemniscata. G. F. Malfatti³⁾ osservò che essa rientra nella categoria delle curve di Cassini. Finalmente G. Saladini⁴⁾ dimostrò che la curva risoltrice del problema di Bonati è una lemniscata col centro nella posizione iniziale del punto mobile il cui asse forma con la verticale l'angolo di 45°. Lo stesso risultato fu ottenuto da N. Fuss⁵⁾ e finalmente da J. A. Serret⁶⁾; Ossian Bonnet ha poi notato⁷⁾ che si ottiene analogamente una lemniscata supponendo che il punto mobile, in-

¹⁾ V. la memoria intolata *Nuova curva isocrona* (Raccolta ferrarese di Opuscoli scientifici e letterari, Venezia 1781, p. 1-17).

²⁾ Secondo il FOURET (*Remarque historique concernant une propriété mécanique de la lemniscate*, Bull. Soc. math. France, T. XX, 1892) prima di lui, la questione fu risolta da EULERO (*Mechanica*, Petrop. 1742, p. 166).

³⁾ V. la memoria *Della curva cassiniana* (Pavia 1781).

⁴⁾ Memoria citata a p. 251, nota ³⁾.

⁵⁾ *De descensu gravium super arcus lemniscatae* (Mem. de l'Acad. de St. Pétersbourg, T. IX, 1824).

⁶⁾ *Sur une propriété mécanique de la lemniscate, découverte par N. Fuss* (G. di Liouville, T. IX, 1844).

⁷⁾ *Note sur une propriété de la lemniscate* (Ivi).

vece di essere pesante, sia attratto da un centro fisso da una forza proporzionale alla distanza ¹⁾.

97. L'essere, come vedemmo (n. 94), la lemniscata una curva di quarto ordine con tre nodi d'inflessione ha condotto a considerare tutte le curve le quartiche dotate di siffatta prerogativa ²⁾. Il modo più semplice per ottenerle è di servirsi della trasformazione quadratica $\varrho x_i = 1/y_i$; mediante la stessa da una conica $\sum_{ik} a_{ik} y_i y_k = 0$ nasce la quartica trinodata

$$a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 + 2 a_{23} x_1^2 x_2 x_3 + 2 a_{31} x_1 x_2^2 x_3 + 2 a_{12} x_1 x_2 x_3^2 = 0.$$

Se la primitiva conica è circoscritta al triangolo di riferimento, la nuova curva si spezza in quattro rette; se è inscritta, cioè se in generale è $a_{ik} = \sqrt{a_{ii} a_{kk}}$, la quartica trasformata ha tre cuspidi, onde, dal punto di vista proiettivo, non differisce dalle curve che studiammo nel Cap. VII; se finalmente rispetto ad essa è autocongiugato il triangolo fondamentale, è $a_{23} = a_{21} = a_{12} = 0$ e l'equazione della curva dedotta assume il seguente aspetto

$$(18) \quad a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_3^2 x_1^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 = 0.$$

La curva stessa ha dunque tre punti doppi nei vertici del triangolo fondamentale; le corrispondenti tangenti sono rappresentate dalle tre coppie di equazioni

$$\frac{x_2}{\sqrt{a_2}} \pm \frac{x_3}{\sqrt{-a_3}} = 0, \quad \frac{x_3}{\sqrt{a_3}} \pm \frac{x_1}{\sqrt{-a_1}} = 0, \quad \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} \pm \frac{x_2}{\sqrt{-a_2}} = 0,$$

epperò sono a due a due armoniche con i lati del triangolo fondamentale appartenenti con esse allo stesso fascio; sono tutte tangenti d'inflessione. La (18) può quindi assumersi come equazione canonica delle quartiche con tre nodi d'inflessione (sono dette *lemniscate proiettive*) ³⁾. Queste curve possiedono tutte le proprietà descrittive dimostrate per la lemniscata di Bernoulli; così p. es. una propo-

¹⁾ Per altre questioni analoghe rinviamo il lettore alla nota di V. VXL-COVICI, *Sur les courbes et les surfaces synchrones* (Bull. Soc. des Sciences de Bucarest, T. VIII, 1909) ove, oltre a ricerche originali, trovansi riassunti i lavori congeneri di EULERO, FOURET, LEGOUX e ST.-GERMAIN.

²⁾ SCHOUTE, *Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Inflektionsknoten* (Arch. f. Math., II Serie, T. II, III, IV e VI, 1885-87) e *Les quartiques à trois points doubles d'inflexion* (G. di Teixeira, T. XIII, 1897).

³⁾ L. BERZOLARI, *Sulla lemniscata proiettiva* (Rend. Ist. Lomb., II Ser., T. XXXVII, 1904).

sizione dimostrata nel n. 95 conduce al seguente teorema di Laguerre: *Se una quartica ha tre punti doppi d'inflessione, le quattro tangenti che si possono condurre da un suo punto qualunque hanno i loro punti di contatto in linea retta* ¹⁾, e danno luogo ad un rapporto anarmonico costante ²⁾.

Supposto totalmente reale il triangolo di riferimento, affinché la curva (18) contenga infiniti punti reali, deve una delle costanti a avere segno contrario delle altre due; scegliendo opportunamente le notazioni potremo supporre a_1 negativo, nel qual caso della curva considerata A_1 è un punto isolato mentre A_2 e A_3 sono nodi. Proiettando la curva in modo che un lato del triangolo fondamentale vada all'infinito si ottengono curve di forme differenti, secondo che tale lato contiene o non il punto A_1 .

Nel primo caso (fig. 53) si ottiene una curva rappresentabile in coordinate cartesiane mediante un'equazione del seguente tipo:

$$(19) \quad \frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1;$$

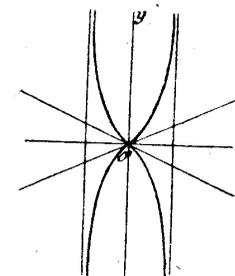


Fig. 53.
Kohlelspitzkurve.

essa ha per nodi di flesso reali l'origine ed il punto all'infinito dell'asse delle y , mentre il punto all'infinito dell'asse delle x ne è un punto isolato. I punti reali della curva si trovano entro la striscia di piano limitata dalle due rette $x = \pm a$; per la sua forma la curva ricorda il modo in cui sono disposti i due carboni di una lampada elettrica ad arco; donde il nome di *Kohlelspitzkurve* con cui lo Schoute l'ha indicata e che ora è generalmente adottata. Gli epiteti di *retta* e *obliqua* possono adoperarsi per ricordare se gli assi a cui è riferita la curva (19) sono ortogonali ovvero non; e quello di *equilatera* si può usare nel caso speciale $a = b$. All'equazione (19) si possono sostituire le due seguenti

$$(20) \quad x = a \cos \varphi, \quad y = b \cot \varphi,$$

ove φ è un parametro.

Nel secondo caso (fig. 54) si giunge ad una curva rappresentabile in coordinate cartesiane mediante l'equazione

$$(21) \quad \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1;$$

¹⁾ *Sur les courbes du quatrième ordre qui ont trois points doubles à inflexion et en particulier sur la lemniscate* (Nouv. Ann., II Ser., T. XVII, 1878; perchè mai questo lavoro non fu riprodotto nelle *Oeuvres de Laguerre*!).

²⁾ Cfr. G. KOHN, Wiener Ber., 1887, p. 332-3.

è una curva di cui l'origine è un punto isolato ed i punti all'infinito degli assi sono nodi d'inflexione; i punti reali della curva sono esterni alle striscie limitate dalle equazioni $x = \pm a$, $y = \pm b$. Tale curva s'incontra sin dal 1847 in una questione proposta dal Terquem ¹⁾; e tredici anni dopo in un lavoro giovanile di F. Siacci ²⁾; si ritrova

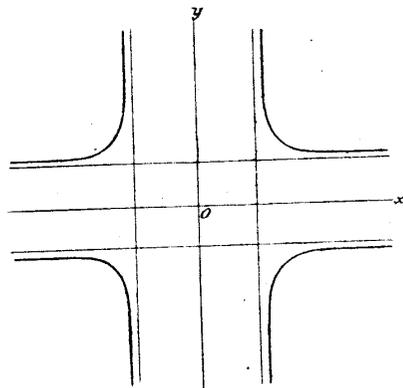


Fig. 54. — Kreuzkurve.

in alcune ricerche del La Gournerie sotto il nome di *trinodale armonica* ³⁾; ma è più spesso oggi chiamata *Kreuzcurve*, come fece lo Schoute, considerandone la forma. Anche ad essa si possono applicare gli aggettivi *retta* ed *obliqua* secondochè gli assi sono ortogonali od obliqui ⁴⁾; si chiama poi *circolare* quello per cui $a = b$ ⁵⁾. La *Kreuzcurve* circolare retta gode la proprietà che la podaria del centro rispetto ad essa ed alla sua evoluta hanno la stessa area ⁶⁾; vi sono infinite curve aventi la stessa

proprietà, cioè tutte quelle che hanno le seguenti equazioni polari:

$$\rho \operatorname{sen} \mu\omega = \operatorname{cost.}, \quad \rho \frac{\operatorname{senh} \mu\omega}{\operatorname{cosh} \mu\omega} = \operatorname{cost.} \quad ?)$$

Va ancora notato che l'equazione (21) si può surrogare con le

¹⁾ Nouv. Ann. Question 165.

²⁾ *Intorno ad una linea di quart'ordine* (Giorn. arcadico, T. CLXVII, 1860; oppure *Scritti scientifici di F. SIACCI*, T. II, Roma 1929). Ivi è dimostrato che la somma delle aree limitate dai quattro rami della curva e dai rispettivi asintoti è eguale alla superficie del rettangolo formato dagli asintoti stessi.

³⁾ *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques* (Paris 1867, pag. 92).

⁴⁾ E. CESÀRO la chiamò *stauroide* (Le mat. pure e appl., T. I, 1902, p. 287).

Il nome di *Kreuzcurve obliqua* è dato da G. DE LONGCHAMPS invece alla curva che, in un sistema di assi inclinati dell'angolo θ , ha per equazione:

$$4x^2y^2 \operatorname{sen}^4 \theta = k^2(x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta);$$

v. *Cours de problèmes de géométrie analytique*, T. II (Paris 2899), p. 291.

⁵⁾ Chiamata *chioide* da H. BURMESTER (Diss. München, 1918).

⁶⁾ *Intermédiaire*, T. III, 2897, p. 247.

⁷⁾ WELSCH in *Intermédiaire*, T. IV, 1898, p. 115-116.

due seguenti

$$(22) \quad x = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad y = \frac{b}{\operatorname{sen} \varphi}$$

φ essendo al solito un parametro. Osserviamo finalmente che le curve (19) e (20) possono dedursi dalle coniche $x^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1$ nel semplicissimo modo seguente: « In un punto qualunque M della conica si conduca la tangente e se ne trovino le intersezioni con gli assi coordinati; da questi punti si conducano le parallele agli assi stessi; esse si taglieranno in un punto della curva in questione ».

Questa costruzione offre una notevole rassomiglianza con altra la quale guida ad una nuova curva da considerarsi nel presente Capitolo; ecco in che cosa consiste: Data un'iperbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ e le due parallele all'asse focale alla distanza b dello stesso, una tangente arbitraria forma con dette parallele e l'asse delle y un trapezio, le cui diagonali s'incontrano in un punto, il cui luogo geometrico per la sua forma fu detta *curva clepsidrica* ¹⁾. È facile mostrare che può rappresentarsi mediante l'equazione

$$a^2(y^2 - b^2)^2 - 4b^2x^2(y^2 + b^2) = 0; \quad x = \pm \frac{a}{2b} \frac{y^2 - b^2}{\sqrt{y^2 + b^2}}$$

dei suoi tre punti singolari uno sta all'infinito, gli altri hanno per coordinate $a \pm b$.

Rileviamo (a ultimo la curva (18) può anche essere reale quando due vertici del triangolo di riferimento siano immaginari coniugati; se ad es. lo sono A_2 e A_3 , si ponga

$$\frac{x_2}{x_1} = x + iy, \quad \frac{x_3}{x_1} = x - iy, \quad \frac{a_2}{a_1} = a + i\beta, \quad \frac{a_3}{a_1} = a - i\beta;$$

la (18) diverrà

$$(23) \quad (x^2 + y^2)^2 + 2a(x^2 - y^2) + 4\beta xy = 0;$$

la curva così rappresentata in coordinate cartesiane ha nell'origine un punto doppio d'inflexione e può intendersi come la linea nascente da quella di Bernoulli applicandovi una trasformazione omografica reale ²⁾.

¹⁾ « Sanduhrkurve »: v. H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig 1908), p. 23.

²⁾ G. DE LONGCHAMPS, *Cours de problèmes de géométrie analytique*, T. II (Paris 1899), p. 374.

CAPITOLO XV

La Muschellinie e la Trisecante.

98. Ci occuperemo in questo Capitolo di due notevoli quartiche circolari entrambe razionali che ebbero i natali l'una, la più antica, in Germania, e l'altra in Italia.

Il famoso pittore Alberto Dürer nella sua lodatissima *Underweysung der messung mit den zirkel un richtscheyt* (Nürnberg 1525) ha descritto un apparato ¹⁾ per tracciare una linea da lui chiamata *Muschellinie* (concoide) « die in mancherley sachen zu gebrauchen ist » ²⁾. È una curva che può definirsi geometricamente come segue: Date (fig. 55 a-b-c) due rette fra loro ortogonali Ox, Oy , sulla prima delle quali è segnato un punto fisso A , un segmento MP di lunghezza costante si muove in modo che un suo estremo M percorre Ox e che, detta N la sua intersezione con Oy , si ha sempre $ON = AM$; il luogo dell'altro estremo P è una concoide di Dürer. Per trovarne la rappresentazione analitica poniamo $OA = a$ e $OM = z$; sarà $ON = a - z$ e l'equazione della retta MN sarà

$$(1) \quad \frac{x}{z} + \frac{y}{a-z} = 1.$$

Essendo poi $MP = b$ si avrà

$$(2) \quad (x-z)^2 + y^2 = b^2.$$

E l'equazione della concoide nascerà eliminando z fra queste due equazioni, onde è

¹⁾ Cfr. BRAUNMÜHL, *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven etc.* (Katalog mathematischer und mathematisch-phys. Modelle etc., München 1892), p. 62.

²⁾ Cfr. S. GÜNTHER, *Albrecht Dürer, einer der Begründer der modernen Curvenlehre* (Bibliotheca mathematica, 1886), p. 139, e *Geschichte des math. Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525* (Berlin 1887); ivi come ordine della curva è erroneamente dato il numero 8.

$$(3) \quad (xy + b^2 - y^2)^2 = (x + y - a)^2 (b^2 - y^2)^2.$$

La concoide di Dürer è dunque una curva del quart'ordine. Ne

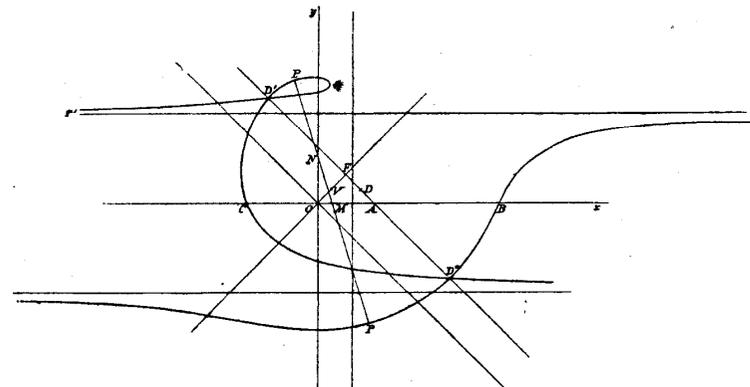


Fig. 55 a. — Muschellinie del Dürer.

sono evidentemente punti doppi le intersezioni D', D'' della retta

$$x + y = a$$

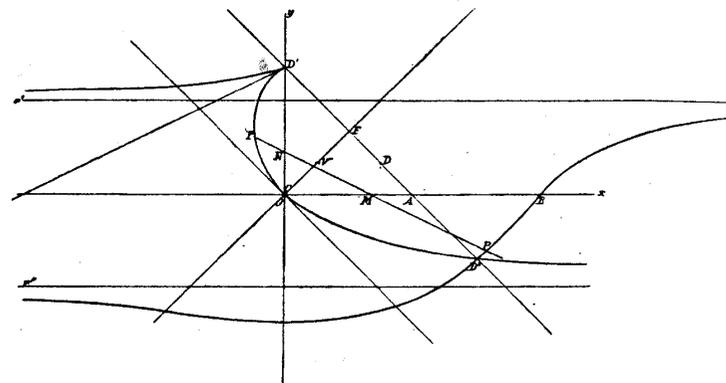


Fig. 55 b. — Muschellinie del Dürer.

¹⁾ Se nelle equazioni (1) (2) x, y, z s'interpretano come coordinate cartesiane di un punto dello spazio, si vede che la concoide di Dürer nasce come proiezione sul piano xy della curva in cui s'incontrano le quadriche rappresentate da quelle equazioni.

con la conica *(parabola)*

$$xy + b^2 - y^2 = 0;$$

quei due punti sono sempre reali e limitano un segmento avente per centro il punto D di coordinate $x = 3a/4$, $y = a/4$. Le intersezioni della curva coll'asse delle x sono il relativo punto all'infinito contato due volte ed i punti B , C di ascisse $a \pm b$; invece le intersezioni coll'asse delle y sono i punti di ordinate

$$\pm b, \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2};$$

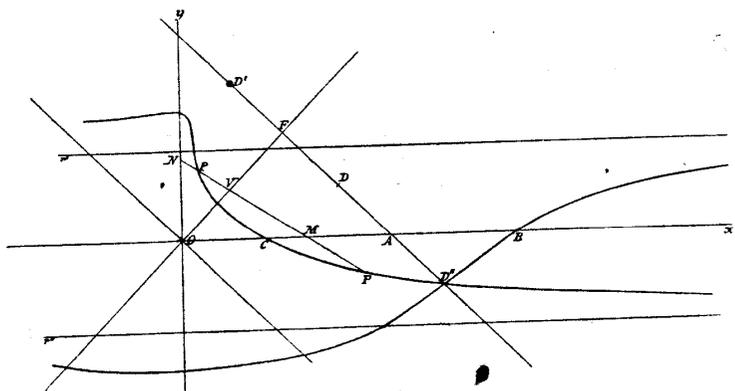


Fig. 55 c. — Muschellinie del Dürer.

finalmente le intersezioni della concoide colla retta all'infinito sono i punti ciclici del piano ed il punto all'infinito di Ox contato due volte. Emerge da ciò che anche il punto all'infinito di Ox è un punto doppio della concoide; le relative tangenti sono le rette r' , r'' parallele a Ox ed aventi per equazioni $y = \pm b/\sqrt{2}$. Riasumendo: *la concoide di Dürer è una quartica circolare e razionale.* È facile ottenere la rappresentazione parametrica mediante funzioni razionali; infatti la (2) può surrogarsi con le due equazioni:

$$x = z + b \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi;$$

sostituendo nella (1) si trova

$$z = \frac{a \cos \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi}$$

onde le precedenti divengono:

$$(4) \quad x = \frac{a \cos \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} + b \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi;$$

ponendo $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \lambda$ si giunge alla cercata rappresentazione.

Vi è una parabola strettamente legata alla concoide di Dürer: è l'involuppo delle rette MN ; la sua equazione si ottiene eliminando z fra l'equazione (1) e la sua derivata rispetto a z , onde è

$$(5) \quad (x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0;$$

ne viene che quella parabola ha per asse la prima bisettrice dell'angolo degli assi¹⁾ e per direttrice la seconda, per vertice il punto $V(a/4, a/4)$ e per fuoco il punto $F(a/2, a/2)$: è notevole che questo è anche il fuoco straordinario di cui è fornita la concoide.

La concoide di Dürer può assumere varie forme a norma del valore relativo delle costanti a , b . Anzitutto da quanto si disse prima risulta che essa taglia l'asse delle y in due punti reali e distinti, coincidenti od immaginari secondoche $a \leq b\sqrt{2}$. Più importante è una classificazione che risulta dalla considerazione dei punti doppi. Dette ξ , η le coordinate di uno di questi punti, si avrà

$$(6) \quad \xi \eta + b^2 - \eta^2 = 0, \quad \xi + \eta - a = 0;$$

onde, posto per brevità

$$a^2 + 8b^2 = c^2,$$

si ha

$$\eta = \frac{a + \varepsilon c}{4},$$

ove $\varepsilon = \pm 1$. Si consideri ora una retta qualunque uscente da uno di quei punti; se x , y sono le coordinate di un suo punto si avrà

$$x = \xi + \rho \cos \omega, \quad y = \eta + \rho \sin \omega;$$

sostituendo questi valori nella (3) si ottiene un'equazione divisibile per ρ^2 ; eseguita la divisione resta l'equazione

$$[\xi \sin \omega + \eta \cos \omega + \rho \sin \omega \cos \omega - 2\eta \sin \omega - \rho \sin \omega]^2 = \\ = (\cos \omega + \sin \omega)^2 (b^2 - \eta^2 - 2\rho \eta \sin \omega - \rho^2 \sin^2 \omega).$$

¹⁾ Chiamiamo per brevità *prima bisettrice* dell'angolo degli assi la retta che taglia per metà l'angolo formato dalle direzioni positive (o negative) di questi, *seconda* l'altra.

Ora affinché la retta r risulti tangente alla conoide anche quest'equazione dovrà essere soddisfatta da $\varrho = 0$; scrivendo che tale circostanza si verifica si trova l'equazione

$$(3a^2 + 16b^2 - \varepsilon a c) \sin^2 \omega - 16b^2 \sin \omega \cos \omega + (a^2 + \varepsilon a c) \cos^2 \omega = 0.$$

È questa un'equazione di secondo grado in $\operatorname{tg} \omega$, il cui discriminante è

$$\Delta = 8(a^2 + 8b^2)(4b^2 - a^2 - \varepsilon a \sqrt{a^2 + 8b^2});$$

quell'equazione avrà dunque radici reali distinte, coincidenti, od immaginarie secondoche

$$4b^2 - a^2 - \varepsilon a \sqrt{a^2 + 8b^2} \gtrless 0$$

Ora per $\varepsilon = -1$ il primo membro è certo positivo, dunque il punto doppio della conoide che ha ordinata negativa è sempre un nodo. Quanto all'altro esso sarà un nodo, una cuspidè od un punto isolato secondoche

$$4b^2 - a^2 - a \sqrt{a^2 + 8b^2} \gtrless 0$$

cioè secondoche

$$b \gtrless a.$$

Nel caso in cui il punto doppio di ordinata positiva è una cuspidè, la sua ordinata è $= a$, mentre la sua ascissa è nulla; la relativa tangente fa con Ox un angolo avente per tangente trigonometrica $\frac{1}{2}$; la curva passa per l'origine ed è ivi toccata dalla seconda bisettrice dell'angolo degli assi; appartengono ancora alla curva i punti $(2a, 0)$ e $(0, -a)$; il punto $(3a/2, -a/2)$ è il nodo che la curva possiede a distanza finita.

In ogni caso la curva consta di un ramo avente la forma di conoide¹⁾ e di un altro variamente conformato.

99. L'altra figura che considereremo nel presente Capitolo è una curva, che venne immaginata sul finire dello scorso secolo per

¹⁾ Un'altra considerazione che giustifica il nome conoide è la seguente (v. H. WIELEITNER, *Ueber einen Zusammenhang zwischen speziellem Quartiken*, Wiener Ber., T. 116, 1907): Un angolo ω di grandezza costante si muova in modo che uno dei suoi lati passi sempre per un punto F , mentre il suo vertice V percorra una retta r ; allora un punto P del secondo lato ($VP = l$) descrive in generale una conoide obliqua della retta r (n. 69). Ma se $\omega = 0$ si ottiene una conoide di NICOMEDE, se $\omega = \pi/4$ una conoide di DÜRER, se finalmente $\omega = \pi/2$ una nuova curva (v. J. NEUBERG, *Sur les lignes tracées par le curvigraph Lebeau*, Mem. de Liège, III Ser., T. V, 1904) chiamata *ortoconoide della retta* e rappresentabile mediante l'equazione

$$(x^2 + ax - l^2)^2 = y^2 (l^2 - x^2).$$

trisecare un angolo qualunque; appunto per questo porta il nome di *trisecante*¹⁾. Eccone la genesi:

« Dato (fig. 56) un cerchio di centro O e raggio a ed un suo raggio fisso OA , si conduce un altro raggio qualunque OM e si costruisce su di esso come base un triangolo isoscele OMP tale che sia $\operatorname{ang} OMP = \operatorname{ang} POM = \frac{1}{3} \operatorname{ang} AOM$; il luogo del punto P è una trisecante » Si prenda O per polo e OA per asse polare; avremo: $OP = \varrho$, $\operatorname{ang} POA = \omega$, $\operatorname{ang} MOP = \omega/2$, $\frac{1}{2} OM = OP \cos MOP$ onde

$$(6) \quad a/2 = \varrho \cos \omega/2.$$

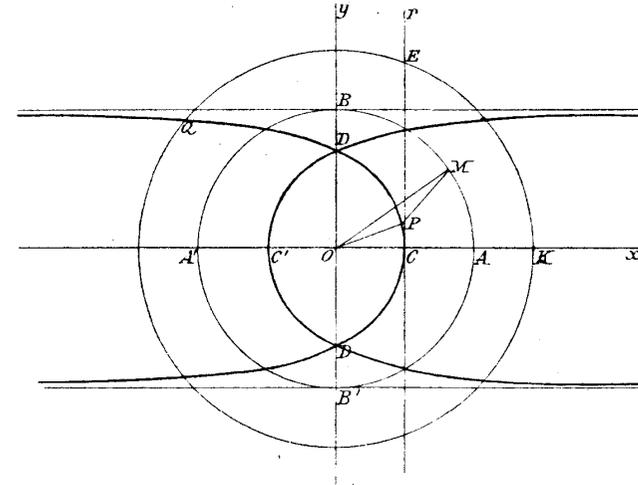


Fig. 56. — Trisecante di Delanges.

Questa è l'equazione polare della trisecante; l'equazione cartesiana è in conseguenza

$$(7) \quad (a^2 - y^2)(x^2 + y^2) - a^4/4 = 0.$$

La trisecante è quindi una curva del quart'ordine, circolare e simmetrica rispetto tanto al diametro AOA' quanto al diametro perpendicolare BOB' ; ha per punti doppi i punti D, D' del secondo diametro che distano da O del segmento $a/\sqrt{2}$ e per punti semplici i centri C, C' dei due raggi OA, OA' . Anche il punto

¹⁾ P. DELANGES, *La trisecante nuova curva; e pensieri sulla formula cardanica* (Verona 1783).

all'infinito di $A A'$ è un punto doppio (quindi la curva è razionale); le corrispondenti tangenti toccano in B, B' il dato cerchio e limitano una striscia di piano entro cui cadono tutti i punti reali della trisegante.

Dalla (7) traesi: $x = \frac{a^2/2 - y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}}$, onde, fatto $y = a \sin u$ si otterrà:

$$\int x dy = \int (a^2/2 - a^2 \sin^2 u) du = a^2/2 \int \cos 2u du = \\ = a^2/4 \sin 2u + \text{cost};$$

integrando fra $u = \pi/4$ e $u = 0$ si ottiene che l'area del triangolo mistilineo $O C D$ è espressa da $a^2/4$; quindi l'area del quadrangolo curvilineo $C D C' D'$ è eguale a a^2 , cioè al quadrato del raggio del dato circolo.

Ritorniamo all'equazione polare (6) per osservare che facendo in essa

$$(8) \quad \varrho_1 = \varrho, \quad \omega_1 = \omega/2,$$

veniamo a stabilire una trasformazione geometrica in virtù della quale la trisegante mutasi nella linea

$$a/2 = \varrho_1 \cos \omega_1 \quad \text{cioè} \quad x = a/2$$

vale a dire nella retta r condotta da C parallelamente a $B B'$. Onde, viceversa, applicando la trasformazione inversa $\varrho = \varrho_1, \omega = 2\omega_1$ dalla retta r nascerà la trisegante. Descritto quindi un cerchio di centro O e raggio $> a/2$, a tagliare $O A$ in K e la retta r in E e preso sulla sua periferia un punto Q , tali che $\text{arc } K E Q = 2 \text{ arc } K E$ sarà evidentemente Q un punto della trisegante. Variando quel cerchio se ne otterranno infiniti; anzi, essendo la trisegante doppiamente simmetrica, ogni punto Q ne darà subito altri tre, onde si può dire che la curva verrà generata per quaderne, e in un modo estremamente comodo in pratica ¹⁾.

È notevolissimo il fatto che, un secolo dopo che la trisegante era stata inventata, venne ritrovata e per iscopi analoghi da un geometra americano, W. Hillouse, il quale, appunto per renderne ancora più comoda l'applicazione alla trisezione dell'angolo, ideò uno strumento per delinearla meccanicamente ²⁾.

¹⁾ Una relazione fra la trisegante e la kappa fu indicata dal WIELEITNER nella nota citata nel n. precedente.

²⁾ V. l'articolo *On a new Curve for the trisection of an angle* (Analyst, T. IX, 1882).

CAPITOLO XVI

Quartiche derivabili da una conica.

100. La nostra lunga e laboriosa rassegna delle curve speciali del quart'ordine volge ormai al termine ¹⁾; prima di chiuderla, almeno provvisoriamente — diciamo così perchè altre quartiche incontreremo come casi speciali di figure più generali — faremo cenno di alcune linee a cui guidò l'inesauribile teoria delle sezioni coniche.

a) Luogo dei punti medi delle corde di una conica a centro

$$A x^2 + B y^2 = 1$$

aventi una data lunghezza. Con un calcolo non difficile M. Steiner ²⁾ e poi O. Tequem ³⁾ trovarono che l'equazione di esso è:

$$(1) \quad A^3 x^4 + B^3 y^4 + A B (A + B) x^2 y^2 = \\ = B^2 (1 - A c^2) y^2 + A^2 (1 - B c^2) x^2.$$

Quelle corde inviluppano una curva di quarta classe ed i loro poli rispetto alla data conica hanno per luogo geometrico la curva rappresentata dall'equazione seguente, trovata dallo Schlomilch ⁴⁾:

$$(2) \quad \frac{1}{A x^2 + B y^2} + \frac{2}{A (1/Bc^2 - 1) x^2 + B (1/Ac^2 - 1) y^2} = 1$$

b) Sia data l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

¹⁾ Tutte quelle da noi incontrate sono dotate di singolarità ordinarie; possiede invece una cuspidi di seconda specie la curva $y = \sqrt{x + \sqrt[4]{x^3}}$ scoperta da EULERO (*Introd. in anal. infin.*, Lausanne 1748, T. II, p. 186).
²⁾ *De loco geometrico centri lineae rectae definitae cujusdam longitudinis cujus termini lineae secundi ordinis moventur* (Diss. Vratislaviae, 1841).
³⁾ *Nouv. Ann.*, T. IV, 1845, p. 590.
⁴⁾ *Ueber einige aus Kegelschnitten abgeleitete Curven* (Zeitschrift, T. XIV, 1869).

se ne consideri una coppia $M \cdot M'$, $N \cdot N'$ di diametri coniugati di lunghezze m , n ; si portino sul primo i segmenti

$$\overline{OP} = \overline{OP'} = \sqrt{m^2 - n^2};$$

il luogo dei loro estremi P , P' è denominato *curva dei parametri* ¹⁾. È facile trovarne l'equazione. Dette, infatti, x , y le coordinate del punto M e X , Y quelle del punto P sussisteranno le equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad X^2 + Y^2 = m^2 - n^2, \quad x^2 + y^2 = m^2,$$

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2, \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y};$$

ora dalle quattro ultime si deduce

$$x^2 = \frac{1}{2} \frac{X^2 (X^2 + Y^2 + a^2 + b^2)}{X^2 + Y^2}, \quad y^2 = \frac{1}{2} \frac{Y^2 (X^2 + Y^2 + a^2 + b^2)}{X^2 + Y^2},$$

onde sostituendo nella prima si conclude essere

$$(3) \quad (X^2 + Y^2) (a^2 Y^2 + b^2 X^2) = (a^2 - b^2) (b^2 X^2 - a^2 Y^2)$$

l'equazione della curva dei parametri.

c) Data in un piano una conica Γ , ogni punto P del piano è centro di una involuzione di rette reciproche rispetto alla Γ e si può considerare una conica infinitesima (*l'indicatrice di P*) avente P per centro e queste rette per diametri coniugati; tale conica può intendersi definita dall'angolo (λ) formato da uno dei suoi assi con una retta fissa e dal rapporto (r) delle lunghezze de' suoi assi. Così ad ogni punto del piano sono annessi due numeri λ , r . E si può considerare il luogo dei punti per cui il primo o il secondo di questi numeri. Se è costante il primo, la curva è chiamata *Linea isogona*, se è costante il secondo è una *Linea di livello*; sono tutte curve del quart'ordine, come il lettore potrà verificare ²⁾.

d) L'inversa di una conica, quando nel fuoco cade il centro dell'inversione, è la quartica di equazione polare

$$\text{conica: } \rho = \frac{l}{e + e \cos \omega} \quad \rho = l(1 + e \cos \omega);$$

¹⁾ JACOB in *Nouv. Ann.*, T. II, 1843, p. 138 e TORTOLINI, *Applicazioni dei trascendenti ellittici alla quadratura di alcune curve sferiche* (Mem. della Soc. Italiana delle Scienze, T. XXIV, 1850).

²⁾ A. HAAS, *Ueber die Indicatricen der Kegelschnitte* (Zeitschr. Math. Phys., T. XXXIV, 1889).

a tale classe appartiene la *prunoide*

$$\rho = \frac{m + \cos \omega}{m^2 - 1} \quad 1)$$

e) Il luogo dei vertici delle parabole inscritte in un triangolo rettangolo ha (se si prendono due lati di questo per assi coordinati) la seguente equazione

$$(x^2/3 + y^2/3)^2 = px^1/3 + qy^1/3$$

che razionalizzata diviene

$$(x(x-p))^3 + y(y-q)^3 - 6xy(x-p)(y-q) + 8x^2y^2 = 0$$

onde è di quarto grado; è razionale, potendo rappresentarsi mediante le formole

$$x = \frac{t^3(pt+q)}{(t^2+1)^2}, \quad y = \frac{pt+q}{(t^2+1)^2},$$

e consta di tre foglie, la cui area fu calcolata da L. Dujardin ²⁾.

f) Una curva di quarto ordine si ottiene anche come luogo dei punti da cui si partono quattro tangenti equianarmoniche ad una coppia di coniche dello stesso piano ³⁾ ed altra se invece sono armoniche, non essendo coniugate le tangenti della stessa curva ⁴⁾.

g) Meritano ancora di essere ricordati i teoremi seguenti, in gran parte dovuti a Steiner ⁵⁾:

Il luogo dei centri delle coniche inscritte in un triangolo dato e simili ad una conica data è una curva di 4° ordine tangente alla retta all'infinito nei punti ciclici del piano; di più tocca le rette che uniscono a due a due i punti medi dei lati del dato triangolo nei punti in cui esse intersecano il cerchio rispetto a cui è autoconiugato questo triangolo.

Il luogo dei centri delle coniche circoscritte a un dato triangolo e di cui si conosce il rapporto degli assi è una curva di 4° ordine.

¹⁾ L. G. BARBOUR, *The Analyst.*, T. VII, 2880, p. 17.

²⁾ *Intermédiaire*, T. VII, 1900, p. 391.

³⁾ J. THOMAE, *Ueber die äquianarmonische Kovariante zweier Kegelschnitte* (Leipzig. Ber., T. LIV, 1912).

⁴⁾ J. THOMAE, *Ueber die harmonische Kovariante zweier Kegelschnitte* (Id., T. LXIX, 1917 e LXX, 1918); CHARLOTTE PLATTEN, *Beiträge zur harmonischen Kovarianten zweier Kegelschnitte und verwandten Kurven* (Diss. Halle, 1920).

⁵⁾ Per la dimostrazione vedi: G. LORIA, *Studi sulla teoria delle coordinate triangolari* (Giorn. di Matem., T. XXIV, 1886), p. 206, 210 e 213.

avente per punti doppi i punti medi dei lati del triangolo e tangente alla retta all'infinito nei punti ciclici del piano.

Il luogo dei centri delle coniche simili a una data e rispetto a cui un dato triangolo è autoconiugato è una curva di 4° ordine, avente per punti doppi i vertici del triangolo e tangente alla retta all'infinito nei punti ciclici del piano.

Chiuderemo questo Libro osservando che fra alcune curve ivi studiate ed altre che incontrammo nel precedente passa una parentela determinata dal fatto che tutte possono riguardarsi come curve inverse di coniche¹⁾; così già osservammo che la cissoide e la cardioide possono ottenersi applicando un'inversione a una parabola, che la lemniscata può derivarsi similmente da un'iperbole equilatera, mentre una trisettrice di Maclaurin è derivabile da una iperbole i cui asintoti formino fra loro l'angolo di 120°. Da ciò un metodo per giungere in modo uniforme alle proprietà di dette curve e a stabilire le costruzioni relative²⁾.

¹⁾ F. GÜTSCHKE, *Geometrischen Untersuchungen über inverse Kurven der Kegelschnitten* (Progr. Breslau, 1907).

²⁾ Le quartiche speciali sono talmente numerose e furono incontrate in così svariate ricerche che con quelle considerate non riteniamo di averne dato un completo elenco.

Così non facemmo menzione della curva

$$(y + a/x^2)(x - l) = c$$

erroneamente chiamata, nel caso $a = 3$, $b = 1/3$, da H. BOUASSE e E. TURRIÈRE (*Exercices et compléments de mathém. générales*, Paris, s. d., p. 67) cubica di van der Waals, quantunque sia di quarto ordine (ne è un punto triplo il punto all'infinito di Oy , essendo quest'asse, contato due volte, e la retta $x = b$ le corrispondenti tangenti).

D'altra parte considerazioni stereometriche condusse A. MAJČEN e J. BOZICVIC (in lavori scritti in boemo) a una categoria di curve fra cui trovasi la conoide di Nicomede. Giacchè il primo prese le mosse da una generatrice g d'un iperboloido a una falda e immaginò di portare sulle generatrici dell'altro sistema un segmento di lunghezza costante a partire dalle loro intersezioni con g ; il luogo geometrico dei loro altri estremi si proietta sul piano del cerchio di gola dell'iperboloido secondo una cubica. Ora generalizzando tale considerazione il Bozicvic giunse a curve aventi equazioni della seguente forma:

$$y^2 [m^2 - (y + b)^2] = [x(y + b) - am]^2;$$

ebbene, per $a = 0$ quest'equazione rappresenta una conoide di Nicomede; se invece si suppone $a = b$, la corrispondente quartica si spezza nella retta $y + a = 0$ e nella cubica incontrata dal MAJČEN e che può ottenersi nel piano come podaria di una parabola.

LIBRO IV.

CURVE ALGEBRICHE PARTICOLARI DI UN ORDINE DETERMINATO SUPERIORE A QUATTRO.

CAPITOLO PRIMO

Curve di quinto ordine¹⁾.

101. Le più antiche ricerche a noi note sopra le curve di quinto ordine — che in seguito, per brevità, chiameremo « quintiche » — sono dovute al Cramer²⁾, il quale, tenendo conto del loro contegno all'infinito, le divise in undici classi, ognuna divisa in parecchie categorie. Alla teoria generale delle stesse appartengono alcune ricerche topologiche di D. Bancroft³⁾ e altre sui loro flessi di H. L. Slobin⁴⁾, e così due proposizioni, una di J. Steiner (1851)⁵⁾ e l'altra di K. Rohn (1885)⁶⁾; la prima dice esistere in una quintica 165 punti ognuno dei quali forma un gruppo armonico con le ulteriori intersezioni della curva con la corrispondente tangente, mentre l'altra insegna l'esistenza di 208 coniche tangenti ciascuna in cinque punti una quintica generale.

¹⁾ La teoria generale delle curve di quinto ordine è nota soltanto molto imperfettamente; non si meravigli, quindi, il lettore delle molte lacune che troverà nel presente Capitolo. Mentre estremamente grande è il numero delle curve degli ordini 3 e 4 che furono ravvisate tanto notevoli da meritare un nome speciale, a nessuna del quinto fu conferito siffatto onore. Perciò questo Capitolo, con le sue imperfezioni, può servire a segnalare ai geometri un campo quasi inesplorato, degno delle loro cure.

²⁾ *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750, p. 392).

³⁾ *Formes of non-degenerate quintic curves* (Amer. Journ. of Math., T. X, 1889).

⁴⁾ *On plane quintic curves* (Diss. Worcester, 1908).

⁵⁾ *Gesamm. Werke*, T. II, p. 593.

⁶⁾ *Math. Ann.*, T. XXV, p. 602.

Una quintica generale ammette 120 tangenti doppie; i loro punti di contatto costituiscono la completa intersezione della data con una curva del 48° ordine, la cui equazione fu ottenuta sotto varie forme da Maisano ¹⁾, Heal ²⁾, Cayley ³⁾ e Hanna ⁴⁾. Altri studi di A. Perna ⁵⁾ concernono le forme invariate delle forme quintiche ternarie, mentre G. Dawson ⁶⁾ si è occupato della riduzione dell'equazione di una quintica alla corrispondente forma canonica (somma di sette potenze di forme lineari); sono queste ricerche aventi una stretta relazione con la considerazione dei poligoni polari rispetto alla curva ⁷⁾.

In una quintica, probabilmente particolare (benchè esente da punti doppi) si è imbattuto lo Steiner nel 1851 ⁸⁾; essa è il luogo dei centri delle cubiche passanti per sei punti dati e contiene anche i quindici punti ognuno dei quali è centro del segmento limitato da due dei dati, i centri delle sei coniche determinate ciascuna da cinque degli stessi punti e da quelli delle trenta coniche ognuna delle quali passa per quattro di questi e ha il proprio centro sulla congiungente dei due rimanenti.

Pure senza punti doppi è la quintica luogo dei punti di contatto dalle tangenti condotte alle cubiche di un fascio sizigetico da un punto qualunque del suo piano. F. Morley ⁹⁾ che studiò a fondo questa curva, ha scoperto la notevole proprietà di cui gode che le sue 45 tangenti di flesso passano nove a nove per cinque punti della curva. Se

$$C \equiv x_1 x_2 - \frac{1}{4} x_3^2 = 0$$

è l'equazione della conica passante per quei cinque punti, se poi

$$C_\alpha \equiv x_1 - x_2 t_\alpha + x_3 t_\alpha^2 = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 5)$$

sono le tangenti della conica C nei detti punti e se finalmente

$$C_{\alpha\beta} = (t_\alpha - t_\beta)^2,$$

l'equazione della *quintica di Morley* può scriversi sotto la seguente forma:

$$C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 - \frac{1}{3} C \sum C_{12} C_3 C_4 C_5 + \frac{1}{6} C^2 \sum C_{12} C_3 C_4 C_5 = 0.$$

¹⁾ Math. Ann., T. XXIX, 1887, p. 431-446.

²⁾ Ann. of Mathem., T. V, 1889, p. 33-41.

³⁾ Id., p. 90-92 oppure Collect. Papers, T. XIII, p. 21.

⁴⁾ Rend. Circ. matem. di Palermo, T. XXVIII, 1909, p. 185-209.

⁵⁾ Giorn. di matem., T. XXXVII, 1887, p. 431-446.

⁶⁾ Quart. Journ. of Math., T. XXXVII, 1906, p. 379-384.

⁷⁾ G. MANFREDINI, Giorn. di matem., T. XL, 1902, p. 16-25.

⁸⁾ Ges. Werke, T. II, p. 500. Un analogo luogo geometrico può considerarsi riguardo a curve di ordine superiore a tre: cfr. P. H. SCHOUTE, Bull. Soc. math. de France, T. X, 1882, p. 114-121.

⁹⁾ On a plane quintic curve (Proc. Lond. math. Soc., II Ser., T. II, 1904).

Prescindendo da queste ricerche di Steiner e Morley, tutto quanto si conosce intorno alle curve di quinto ordine speciali concerne le quintiche con punti multipli, cioè di genere inferiore a 6. Tenendo conto delle singolarità le curve in questione si ripartiscono in 26 categorie, come è indicato dalla seguente tabella:

Genere	Classe	Punti doppi	Cuspidi	Tangenti doppie	Flessi
6	20	0	0	120	45
5	18	1	0 ¹⁾	92	39
5	17	0	1	78	37
4	16	2	0	78	33
4	15	1	1	56	31
4	14	0	2	45	29
3	14	3	0	48	27
3	13	2	1	38	25
3	12	1	2	29	23
3	11	0	3	21	21
2	12	4	0	32	21
2	11	3	1	24	19
2	10	2	2	17	17
2	9	1	3	11	15
2	8	0	4	6	13
1	10	5	0	20	15
1	9	4	1	18	13
1	8	3	2	16	11
1	7	2	3	14	9
1	6	1	4	12	7
1	5	0	5	10	5
0	8	6	0	12	9
0	7	5	1	8	7
0	6	4 ¹⁾	2	5	5
0	5	3	3	3	3
0	4	2	4	2	1

In ogni categoria si trovano poi curve specializzate per la presenza di punti di singolarità superiore ²⁾.

¹⁾ È notevole che se queste quattro cuspidi sono reali, reali saranno anche i due punti doppi della curva: v. P. FIELD, On a rational plane quintic with four real cusps (Amer. Journ., T. XLVI, 1924).

²⁾ Così esistono quintiche con un unico punto singolare; esse si trovano investigate nelle memorie: HILTON, On certain types of plane algebraic curves

Volendo enumerare con ordine le particolari quintiche sinora studiate le distribuiremo in base al loro genere, cominciando con quelle di genere più basso.

102. Quintiche di genere $p = 0$. Sono le quintiche razionali, le quali furono studiate dal punto di vista topologico prima da W. Fr. Meyer¹⁾ e poi da P. Field²⁾. Quando della curva si conoscono i punti doppi, essa può generarsi con un procedimento immaginato da K. Rohm³⁾ e che guida a nuove proprietà della curva. Questa si può anche generare col mezzo di due fasci di cubiche fra loro proiettivi⁴⁾ e così⁵⁾ mediante due involucri razionali fra loro, proiettivi delle classi 2 e 3, oppure 1 e 4; nel secondo caso il centro del fascio generatore è un punto quadruplo della curva generata.

Senza addentrarmi nello studio delle involuzioni che si possono stabilire sopra una quintica razionale⁶⁾ e sulle applicazioni alle stesse di considerazioni iperspaziali⁷⁾, enumereremo le quintiche razionali dotate di speciali proprietà metriche o definite in base alle stesse, osservando che molte hanno la loro origine nella teoria delle coniche⁸⁾.

a) Nel corso della sua celebre comunicazione sulla teoria delle coniche, da lui fatta all'Accademia delle Scienze di Parigi il 15 Febbraio 1864, M. Chasles ha enunciato un teorema il quale,

(Rend. Circ. mat. Palermo, T. XLIV, 1920); HILTON e SADD, *On plane unicursal quintic curves with a triple point* (Quart. Journ. of Math., T. XLIX, 1923). V. anche A. B. BASSET, *Compound singularities of quintic curves* (Id., T. XXXVII, 1905).

¹⁾ Inaugural Dissert. (München 1878); Proc. of the R. Soc. Edinburgh, T. XIII, 1886.

²⁾ Amer. Journ. of Math., T. XXVI, 1906, p. 149-163.

³⁾ Math. Annalen, T. XXV, 1886, p. 598-602.

⁴⁾ E. DE JONQUIÈRES, Rend. Circ. mat. Palermo, T. II, 1887, p. 118-123.

⁵⁾ J. F. EBERLE, Diss. 1887 (München 1892).

⁶⁾ W. STAHL, Journ. f. Math., T. CIV, 1889, p. 51 e Math. Ann., T. XXXVIII, 1891, p. 577; J. DE VRIES, Proc. Acad. Amsterdam, T. XII, 1904, p. 742.

⁷⁾ G. MARLETTA, Rend. Circ. mat. Palermo, T. XIX, 1905, p. 94-119; W. MÜLLER, Giorn. di matem., T. LX (1922), p. 103-198.

⁸⁾ Va osservato in generale che di curve degli ordini 3-9 definite mediante coniche tratta la Diss. di K. DÖRHOLT, *Ueber einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte* (Münster 1884); v. anche l'articolo di F. DINGELDEY, *Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme* nel III Vol. dell'Encyklop. der math. Wissenschaften. In particolare il luogo dei centri delle coniche circoscritte a un triangolo e per cui è costante la somma dei quadrati degli assi è una quintica circolare, avente per punti doppi i centri dei lati del lato triangolo e per asintoti d'inflessione i lati stessi: cfr. G. LORIA, *Studi sulla teoria delle coordinate triangolari* (Giorn. di matem., T. XXIV, 1886), p. 209. È pure una quintica il luogo dei punti del piano nel quale si toccano due coniche appartenenti a due fasci del piano stesso; la si trova studiata nella nota di R. DEAUX, *Sur une quintique associée à deux faisceaux punctuels de coniques* (Mathesis, T. XXXVIII, 1924).

opportunamente specializzato da A. Cayley¹⁾, mostra che « il luogo dei fuochi delle parabole circoscritte a un triangolo è una quintica circolare razionale »; ques i ne ottenne anche l'equazione osservando che questa curva è proiettivamente identica al luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da due punti I, J allo ∞' coniche circoscritte a un dato triangolo e tangenti alla retta IJ ; S. Hal-ler²⁾ da dato la rappresentazione parametrica della curva. Questa ha sei punti doppi, tutti immaginari, posti a coppie su tre rette concorrenti in un punto; ne sono tangenti doppie le sei rette che proiettano i punti I, J dai vertici del dato triangolo.

b) Dato un fascio di coniche, per ogni punto P del suo piano ne passa un elemento; sia P' il secondo estremo del diametro di questa uscente da P ; in conseguenza fra i punti P e P' nasce una corrispondenza univoca involutoria; questa è tale che ad una retta qualunque del piano corrisponde una quintica di cui sono doppi i punti base del fascio e i punti all'infinito delle due parabole esistenti nel fascio stesso³⁾.

Per dimostrare la verità di questo enunciato, si indichino con $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ le equazioni cartesiane di due coniche del dato fascio e con X, Y e X', Y' le coordinate dei punti P e P' . Designando con Φ e Ψ i risultati della sostituzione $x = X, y = Y$ nelle funzioni φ, ψ sarà $\varphi \Psi - \psi \Phi = 0$ l'equazione della conica del dato fascio che passa per il punto P . Il centro $C(x, y)$ della stessa ha coordinate che si ottengono risolvendo le equazioni

$$\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \Phi \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \Phi \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0;$$

ora x, y risultano della seguente forma:

$$x = \frac{a_1 \Phi^2 + b_1 \Phi \Psi + c_1 \Psi^2}{a \Phi^2 + b \Phi \Psi + c \Psi^2}, \quad y = \frac{a_2 \Phi^2 + b_2 \Phi \Psi + c_2 \Psi^2}{a \Phi^2 + b \Phi \Psi + c \Psi^2},$$

ove a, b, \dots, c_2 sono determinate costanti. Essendo ora C il centro del segmento PP' , si ha

$$x = \frac{X + X'}{2}, \quad y = \frac{Y + Y'}{2}$$

Sostituendo a x, y i valori precedenti si ottengono X' e Y'

¹⁾ The educ. Times, T. VII, 1867, p. 17, oppure The collected Papers, T. VII, p. 522.

²⁾ *Ueber die Brennpunktskurven zweier besondere Gruppen von Kegelschnittsysteme* (Progr. München, 1905).

³⁾ SCHOOTE, *Wiskundige Opgaven met de Oplosningen vitgeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam*, T. II, n. 109.

esprese in funzioni di quinto grado in X, Y , le quali rappresentano analiticamente la trasformazione in parola. Per conseguenza, se il punto P' percorre la retta r' d'equazione

$$\alpha X' + \beta Y' - \gamma = 0,$$

il punto corrispondente descriverà la curva

$$2 \{ \alpha (a_1 \Phi^2 + b_1 \Phi \Psi + c_1 \Psi^2) + \beta (a_2 \Phi^2 + b_2 \Phi \Psi + c_2 \Psi^2) \} \\ = (\alpha X + \beta Y - \gamma) (\alpha \Phi^2 + b \Phi \Psi + c \Psi^2).$$

Questa equazione mette in evidenza che i punti base del fascio sono doppi per la curva. Sia poi U il punto all'infinito di una delle parabole del fascio e A', B' i punti nei quali essa incontra la retta r' ; allora è chiaro che se P' cade in A' o B' il punto P va in U , onde la curva corrispondente alla retta r' passa due volte per il punto U .

c) L'involuppo delle circonferenze i cui centri appartengono ad un'iperbole e che ne toccano un asintoto l è una quintica bicircolare ¹⁾.

Se, infatti, $\xi \eta = k$ l'equazione della data iperbole e l coincide con l'asse delle x , l'equazione generale dei cerchi considerati è

$$(x - \xi)^2 + y^2 - 2 \eta y = 0$$

ossia, eliminando ξ ,

$$(\eta x - k)^2 + \eta^2 y^2 - 2 \eta^3 y = 0$$

o anche

$$(x^2 + y^2) \eta^2 - 2 k \eta x - 2 \eta^3 y + k^2 = 0$$

Differenziando rispetto a η si trova

$$\eta (x^2 + y^2) - k x - 3 \eta^2 y = 0$$

L'equazione del cercato involuppo si otterrà eliminando η fra le due ultime equazioni; ora, tenendo conto della seconda, la prima si scrive

$$4 k \eta x - (x^2 + y^2) \eta - 3 k^2 = 0$$

e si è ridotti a eliminare η fra due equazioni quadratiche; fatto il calcolo si trova

$$[(x^2 + y^2) k^2 x - 9 k^4 y]^2 = [-(x^2 + y^2)^2 + 12 k^2 x y] [-4 k^4 x^2 + 3 k^4 (x^2 + y^2)];$$

¹⁾ NEUBERG, id., T. III, n. 82.

da questa equazione si separa il fattore y , dopo di che essa diviene

$$(x^2 + y^2) y - 2 k^2 x (x^2 + 9 y^2) + 27 k^4 y = 0$$

L'involuppo è dunque una quintica bicircolare simmetrica rispetto all'origine delle coordinate e di cui sono cuspidi i punti di coordinate polari

$$\rho = \pm k \sqrt{27}, \omega = \pi/6$$

d) La normale in un punto A di una parabola incontra nuovamente la parabola in B ; la circonferenza di diametro AB sega ancora la data curva in C ; l'involuppo della retta BC è una quintica ¹⁾.

La parabola data $y^2 = 2 p x$ è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica

$$x = \lambda^2/2p, y = \lambda$$

Se al punto A corrisponde il valore α del parametro, ai punti B e C corrisponderanno i valori

$$-\frac{\alpha^2 + 2 p^2}{\alpha}, \frac{2 p^2 - \alpha^2}{\alpha}$$

dello stesso, donde emerge che la corda BC di cui cercasi l'involuppo ha per equazione

$$2 \alpha^2 p x + 2 \alpha^3 y - (4 p^4 - \alpha^4) = 0$$

Differenziando rispetto a α si trova

$$2 \alpha p x + 3 \alpha^2 y + 2 \alpha^3 = 0$$

e questa combinata alla precedente dà la seguente rappresentazione parametrica della curva cercata:

$$x = \frac{12 p^4 + \alpha^4}{2 \alpha^2 p}, y = -\frac{\alpha^4 + 4 p^4}{\alpha^3}$$

Da questa formole emerge che si è in presenza di una quintica razionale; lasciamo al lettore di mostrare che essa ha quattro cuspidi, di cui due reali, e due punti doppi immaginari.

¹⁾ G. DE LONGCHAMPS, Id., T. III, n. 162.

e) Quando una parabola ruotola sopra altra ad essa eguale per modo che in origine i vertici coincidano, essa involupa una quintica razionale avente due cuspidi reali e due immaginarie e inoltre due punti doppi¹⁾.

La parabola fissa sia riferita agli assi ortogonali Ox, Oy il primo dei quali sia la tangente nel vertice e il secondo l'asse della curva. Per un noto teorema, se la normale in un punto B della parabola mobile passa per il corrispondente punto di contatto A delle due curve, B è un punto dell'involuppo cercato. Siano ora X, Y le coordinate di B rispetto agli assi fissi a, b le sue coordinate rispetto agli assi mobili e x, y le coordinate del punto A della parabola fissa; sia finalmente φ l'angolo fatto dalla tangente in A con Ox ; sussisteranno le seguenti relazioni:

$$X = x + (a - x) \cos 2\varphi + (b - y) \sin 2\varphi$$

$$Y = y + (a - x) \sin 2\varphi - (b - y) \cos 2\varphi,$$

$$x^2 = 2px, \quad a^2 = 2pb, \quad \operatorname{tg} \varphi = x/p, \quad y - b = -p(x - a)/a$$

epperò

$$a^2 + ax + 2p^2 = 0, \quad x = -\frac{a^2 + 2p^2}{a}, \quad y = \frac{(a^2 + 2p^2)^2}{2pa^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a^2 + 2p^2}{ap}, \quad \operatorname{sen} 2\varphi = -\frac{2pa^2(a^2 + 2p^2)}{(a^2 + p^2)(a^2 + 4p^2)},$$

$$\cos 2\varphi = -\frac{a^4 + 3p^2a^2 + 4p^4}{(a^2 + p^2)(a^2 + 4p^2)}$$

$$a - x = 2\frac{a^2 + p^2}{a}, \quad b - y = -2p\frac{a^2 + p^2}{a^2}$$

e finalmente

$$X = -\frac{3a^4 + 8a^2p^2 + 8p^4}{a(a^2 + 4p^2)}, \quad Y = \frac{a^4 - 4a^2p^2 - 8p^4}{2p(a^2 + 4p^2)}$$

Perciò il luogo del punto A , cioè il cercato involuppo, è una curva razionale di 5° ordine; si può dimostrare che possiede le indicate singolarità, epperò è la curva correlativa di una quintica con due punti doppi e una cuspidi.

f) Una quintica razionale è anche la curva tale che sia una

¹⁾ MANTEL, Id., T. III, n. 70.

retta il luogo dei centri delle iperboli equilateri aventi con la curva in contatto di terzo ordine (iperboli iperosculatrici)¹⁾.

Per dimostrare questo teorema si osservi che, se un cerchio tocca esternamente un'iperbole equilatera e il suo diametro è eguale al corrispondente raggio di curvatura dell'iperbole, esso passa per il centro di questa. Segue da ciò che se un cerchio tocca una curva dalla parte della convessità e ha per diametro il corrispondente raggio di curvatura, esso è il luogo geometrico Ω dei centri delle iperboli equilateri aventi con la data curva un contatto di secondo ordine. Se ora si considerano due consecutivi di tali cerchi, la loro intersezione diversa del punto di contatto sarà centro d'un'iperbole equilatera avente con la data curva un contatto di terzo ordine. Perciò l'involuppo di detti cerchi non differisce dal luogo dei centri delle iperboli iperosculatrici della data.

Nell'ipotesi che questo luogo sia una retta, la si può assumere per asse delle x e allora la curva cercata è determinata dalle equazioni

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2, \quad x - a + y \, db/da,$$

a e b essendo le coordinate di un punto del luogo Ω , cosicchè b è funzione di a . Scrivendo che il raggio di curvatura in un punto della curva cercata è eguale al raggio di quel cerchio si trova l'altra equazione

$$2(y - b) \, da/dx = 3b$$

Se ora poniamo $x - a = b \cos \varphi$, $y - b = b \sin \varphi$ e calcoliamo db/da , dx/da , $d\varphi/da$ troviamo

$$b = \frac{m}{(1 + \operatorname{sen} \varphi)^3}, \quad a = 3m \int \frac{d\varphi}{(1 + \operatorname{sen} \varphi)^3}$$

m essendo una costante d'integrazione, epperò

$$x = 2m \int \frac{\operatorname{sen} \varphi \cdot d\varphi}{(1 + \operatorname{sen} \varphi)^2}, \quad y = \frac{m}{(1 + \operatorname{sen} \varphi)^3}$$

l'integrazione si può eseguire facilmente ponendo

$$\operatorname{sen} \varphi = (1 - z^2)/(1 + z^2);$$

così si trova

$$x = \frac{m}{10} (z^5 - 5z), \quad y = \frac{m}{4} (z^2 + 1)^2$$

La curva cercata è pertanto una quintica razionale; la sua

¹⁾ MANTEL, Id., T. IV, n. 113.

classe è sei; essa ha quattro punti doppi e due cuspidi (immaginarie)¹⁾.

g) Il luogo dei centri di similitudine di due cerchi qualunque aventi per diametri due corde di una cissoide condotte per la cuspidale e fra loro perpendicolari, è una curva di quinto ordine avente per punto quadruplo il punto singolare delle cissoide²⁾.

h) La tangente a una cissoide in un punto P ne incontra l'asse in Q e in R la perpendicolare condotta ad essa dalla cuspidale; il luogo geometrico del centro del segmento QR è una quintica, avente una cuspidale nella cuspidale della cissoide e un punto triplo all'infinito in direzione normale all'asse³⁾.

i) Si considera un triangolo avente per vertici la cuspidale A di una cissoide, un punto arbitrario B della curva e l'intersezione C della normale in B con la tangente cuspidale della curva data; il luogo del punto d'incontro delle sue altezze è una quintica avente per cuspidale A e all'infinito un punto triplo⁴⁾.

k) Dati due triangoli ABC , $A'B'C'$ in piani distinti o coincidenti, si facciano corrispondere due punti M , M' quando da essi i lati dei due triangoli sono visti sotto angoli eguali; allora se M descrive una retta, M' percorrerà una quintica razionale e viceversa⁵⁾.

l) Una quintica con punto quadruplo s'incontra fra le curve che si possono descrivere con l'apparecchio del Lebeau⁶⁾.

m) Sia M un punto qualunque del cerchio circoscritto al triangolo ABC ; la relativa tangente incontra la corrispondente retta di Wallace in un punto P , il cui luogo geometrico è evidentemente una quintica razionale, essendo generata dalle intersezioni delle rette corrispondenti di due curve (cerchio e ipocicloide tricuspidale) delle classi 2 e 3. La rappresentazione parametrica e quindi l'equazione cartesiana si ottengono servendosi dell'equazione della retta di Wallace data nel N. 73. Essa possiede sei punti doppi, onde la sua classe è otto⁷⁾.

u) Passando da una curva alla sua podaria o antipodaria (v. Lib. VII, Cap. VIII) il genere si conserva; onde se la podaria o l'antipodaria di una curva razionale è di 5° ordine, essa appartiene alla categoria di linee che stiamo considerando. In tali condizioni si trovano l'antipodaria d'una parabola, la podaria di una parabola

¹⁾ Altre quintiche deducibili da una conica sono definite nell'*Intermed. des mathém.*, T. VII, 1900, p. 55 e T. VIII, 1901, p. 144.

²⁾ E. BARISIEN, *Interméd.*, T. VIII, 1901, p. 88.

³⁾ Id. id., T. VII, 1900, p. 57.

⁴⁾ Id. id., T. VII, 1900, p. 277.

⁵⁾ E. DUPORCQ, *Intermédiaire*, T. VII, 1900, p. 217.

⁶⁾ J. NEUBERG, *Sur les lignes tracées par le curvigraph Lebeau* (Mémoires de Liège, III Ser., T. V, 1904).

⁷⁾ R. GOORMAGHTIGH, *Sur une quintique circulaire* (Mathésis, T. XII, 1927).

cubica, se il polo cade nel flesso¹⁾ e l'antipodaria d'una cissoide se per polo si assume l'intersezione dell'asintoto con l'asse della curva²⁾.

103. Quintiche di genere $p = 1$. Le forme che possono assumere le quintiche ellittiche furono determinate da P. Field³⁾. La loro rappresentazione parametrica fu data da G. Humbert⁴⁾, servendosi delle funzioni $\Theta(z + i\omega/5)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), con i periodi ω, ω' ; così egli dimostrò che una quintica ellittica può sempre considerarsi come proiezione dell'intersezione di due superficie cubiche fra loro tangenti lungo una conica (le rette delle due superficie situate nel piano di questa curva s'incontrano in un punto di quell'intersezione). Applicando la teoria generale delle curve ellittiche lo stesso geometra dimostrò quanto segue⁵⁾: Le coniche 5 — tangenti d'una quintica ellittica si distribuiscono in quattro sistemi, essendo costante per ogni sistema la somma degli argomenti dei punti di contatto; tre di questi sistemi comprendono ciascuno 16 coniche, mentre quello per cui detta somma vale $5(\omega + 5\omega')/2$ non contiene che 5 coniche proprie, oltre le rette del piano contate ciascuna due volte. Detti A, B, C, D, E i punti doppi della curva, se si conduce una conica per quattro di essi, p. es., B, C, D, E , e se ne determinano le ulteriori intersezioni L, M con la curva, la retta LM involupa una delle coniche 5-tangenti e i suoi punti di contatto stanno con i punti B, C, D, E su una curva del terzo ordine che tocca in A la conica $ABCDE$.

L'esistenza di quintiche con cinque cuspidi fu dimostrato da A. Clebsch⁶⁾ e confermata da P. del Pezzo⁷⁾, il quale dedusse una di dette curve, mediante una trasformazione quadratica, da una quartica bicuspidata; la curva risultante è di 5ª classe e ha cinque flessi, ond'è correlativa a sè stessa; dal punto di vista topologico fu studiata da P. Field⁸⁾.

Si ottiene una quintica ellittica metricamente specializzata cercando il luogo dei vertici delle iperboli tangenti in un dato punto

¹⁾ A. B. BASSET, *An element. treatise on cubic and quartic curves* (Cambridge, 1901), p. 9.

²⁾ E. BARISIEN, *Intermédiaire*, T. VII, 1900, p. 278.

³⁾ *Quintic curves for which, $p = 1$* (Amer. Journ. of Math., T. XXVII, 1905).

⁴⁾ Bull. Soc. math. France, T. IX, 1881, p. 166.

⁵⁾ *Thèse sur les courbes de genre 1* (Paris 1886), p. 77 e 85.

⁶⁾ Journ. f. Math., T. LXIV, 1865, p. 250.

⁷⁾ Rendic. dell'Acc. di Napoli, II Ser., T. III, 1889, p. 46-49; v. anche M. LEHR, *The plane quintic with five cusps* (Amer. Journ., T. XLIX, 1927). Della determinazione dell'equazione di una quintica con quattro cuspidi e altre singolarità tratta la nota di A. B. BASSET, *On quintic curves with four cusps* (Rend. Circ. mat. Palermo, T. XXVI, 1908).

⁸⁾ P. FIELD, *On the form of plane quintic with five cusps* (Trans. of the Amer. math. Soc., T. VII, 1905).

una data retta e aventi per comune asintoto una perpendicolare a questa retta¹⁾.

Quintiche di genere p = 2. Se una quintica ha quattro punti doppi, ogni conica passante per essi incontra nuovamente la curva in due punti, che si corrispondono in una involuzione e la cui congiungente ha per inviluppo la cosiddetta «conica fondamentale» della quintica. Indicando con A, B, C tre funzioni lineari, con P, Q due funzioni quadratiche delle tre coordinate omogenee di un punto del piano e con λ un parametro, ogni quintica di genere 2 può essere generata dai due seguenti sistemi proiettivi

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0, \quad P + \lambda Q = 0$$

ovvero dai due

$$(AQ - BP) + (BQ - CP)\lambda = 0, \quad P + \lambda Q = 0$$

donde si trae l'equazione della curva:

$$AQ^2 - 2BQP + CP^2 = 0$$

La conica fondamentale può ridursi come inviluppo ad un punto e allora la quintica dicesi «di II specie»: essa può allora generarsi mediante un fascio di rette proiettivo ad un'involuzione esistente in un fascio di coniche²⁾.

Le curve in questione furono studiate anche come proiezioni di congeneri curve gobbe³⁾. Esse appartengono alla vasta classe di curve tali che le coordinate omogenee di un punto arbitrario di una di esse si possono esprimere sotto forma razionale e intera mediante due funzioni lineari e le radici quadrate di due funzioni intere; da questo punto di vista furono studiate da C. Weltzien⁴⁾, il quale, partendo da questa rappresentazione analitica, determinò le coordinate dei punti doppi.

Una quintica ellittica di seconda specie metricamente specializzata si può generare come segue⁵⁾: «Nel piano di tre punti ABC si conduce la retta Oy che biseca ortogonalmente il segmento BC , per A riconduce una trasversale qualunque che sega Oy in M ; delle due parti di O si portano su Oy i segmenti $MN_1 = MN_2 = MB$ e si descrivono i cerchi di centri N_1 e N_2 che passano per B e C ; il luogo geometrico dei punti P in cui si

¹⁾ BARBARIN, Interm. des math., T. VIII, 1901, p. 89.

²⁾ J. DE VRIES, Wien. Ber., T. CIV, 1895, p. 46.

³⁾ H. E. TIMERDING, Ueber eine Raumkurve fünfter Ordnung (Journ. f. Math., T. CXXIII, 1901).

⁴⁾ Math. Annalen, T. XXX, 1887, p. 537-9 e 543-7.

⁵⁾ G. ESPANET, Interméd. des math., T. IX, 1902, p. 3.

tagliano questi cerchi è la curva in questione». Per trovarne l'equazione¹⁾ assumiamo la retta NC come asse delle x e O per origine delle coordinate; se si chiamano a, b le coordinate di A , l la lunghezza di BC e λ l'ordinata di M , l'equazione del raggio AM è

$$(1) \quad \lambda(x - a) - (bx - ay) = 0,$$

mentre le ordinate μ di N_1 e N_2 valgono $\lambda \pm \sqrt{l^2 + \lambda^2}$. Da questa equazione segue

$$\lambda = (\mu^2 - l^2)/2\mu,$$

donde risulta che fra i raggi del fascio A e i cerchi del fascio avente per basi i punti B, C sussiste una corrispondenza (2, 1). Allora un'applicazione del principio di corrispondenza di Chasles mena alla conclusione che la curva cercata è del quinto ordine. Per A essa passa una volta perchè per detto punto passa un unico circolo del fascio; invece per B e C passa due volte dal momento che due cerchi del fascio corrispondono a ciascuno dei raggi AB, AC ; ne sono punti doppi i punti ciclici del piano; la curva pressa poi per il piede F della perpendicolare calate da A su BC e per il punto all'infinito di questa retta. Tutto ciò emerge facilmente dall'equazione della curva che si ottiene eliminando λ fra l'equazione (1) e la seguente:

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 2\lambda y - l^2 = \pm 2y\sqrt{l^2 + \lambda^2}$$

Si ottiene così l'equazione:

$$(3) \quad (x^2 + y^2 - l^2)^2 (x - a) - 4y(x^2 + y^2 - l^2)(bx - ay) = 4l^2 y^2 (x - a)$$

Essa mostra che qualunque cerchio passante per i punti B, C , p. es., quello di equazione

$$x^2 + y^2 - 2\varrho y = l^2,$$

incontra la curva, oltre che nei punti doppi B, C , in due altri che sono congiunti dalla retta

$$(\varrho^2 - l^2)(x - a) = 2\varrho(bx - ay),$$

la quale, qualunque sia ϱ , passa sempre per il punto A ; ciò prova che la curva ottenuta è una quintica di II specie. Nel caso in cui A coincida con uno dei punti B, C l'equazione (3) si decompone nelle due seguenti

¹⁾ G. LORIA, Id., T. XIII, 1906, p. 265.

$$(x-l)^2 + y^2 = 0, \quad (x+l)(x-l)^2 = y^2(3l-x),$$

di cui la prima rappresenta un cerchio di raggio nullo, mentre la altra appartiene a una strofoide retta.

104. *Quintiche di genere* $p = 3$. A questa categoria appartengono le quintiche con punto triplo, le quali si possono rappresentare in coordinate omogenee con equazioni della forma seguente:

$$A x_3^2 + 2 B x_3 + C = 0$$

ove A, B, C sono forme binarie in x_1, x_2 dei gradi 3, 4, 5. Notevole è il caso ¹⁾ in cui sia $C = A Q$, Q essendo una forma quadratica; allora le tangenti alla curva nel punto triplo incontrano nuovamente la curva in tre punti collineari e la curva stessa gode di altre notevoli proprietà.

Quintiche che ammettono un gruppo di trasformazioni lineari in sé. Esse furono determinate da V. Snyder ²⁾; i risultati conseguiti sono riepilogati nella seguente tabella, del tutto analogo a quella esposta nel n. 53 per le quartiche:

$$\begin{aligned} G_{20} & a x_1 x_2^4 + b x_3^5 = 0 \\ G_{10} & a x_1 x_2^2 x_3^2 + b (x_1^5 + x_2^5) = 0 \\ G_6 & a x_3^2 (x_1^3 + a x_2^3) + b x_1^2 (x_1^3 + b x_2^3) = 0 \\ G_{30} & a x_1^2 x_2^3 + b x_3^5 = 0 \\ G_6 & x_1^3 \varphi_2(x_2, x_3) + \varphi_5(x_2, x_3) = 0 \\ G_{15} & a x_1^3 x_2^2 + b x_1^5 + c x_3^5 = 0 \\ G_{30} & a x_1^3 x_2 x_3 + b (x_2^5 + x_3^5) = 0 \\ G_{20} & a x_1^4 x_2 + b (x_2^5 + x_3^5) = 0 \\ G_{10} & x_1^5 + \varphi_5(x_2, x_3) = 0 \\ G_{12} & x_3^3 x_2^3 - x_1 (x_1^4 + x_2^4) = 0 \\ G_{39} & x_1^4 x_2 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_1 = 0 \\ G_{21} & x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_3^2 + x_3^3 x_1^2 = 0 \\ G_6 & a \sigma_1^5 + b \sigma_1^3 \sigma_2 + c \sigma_1^2 \sigma_3 + d \sigma_1 \sigma_2^2 + e \sigma_2 \sigma_3 = 0; \\ G_{150} & x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0; \end{aligned}$$

ivi a, b, c designano costanti; φ_k una forma binaria di grado k e σ_k una funzione simmetrica elementare di dimensione k delle coordinate x_1, x_2, x_3 .

¹⁾ W. R. WESTROOPS ROBERTS, Proc. Irish Acad., T. XXIV, 1902, p. 34-44.

²⁾ Plane quintic curves which possess a group of linear transformations (Amer. Journ. of Math., T. XXX, 1908).

CAPITOLO II

Curve di sesto ordine.

§ 1. GENERALITÀ ¹⁾.

105. Le uniche proposizioni a noi note relative alle curve di sesto ordine (brevemente «sestiche») sono quelle scoperte dal Clebsch ²⁾ relative e al numero (3²⁰) di quintiche che osculano in dieci punti una delle dette curve e alle relazioni esistenti fra i loro punti di contatto.

Per dare un esempio dell'applicazione della teoria delle funzioni algebriche, il Cayley ³⁾ ha considerata una sestica con cinque punti doppi ($p = 5$) e la serie g_4^1 costituita dalle quaterne dei suoi punti tali che ogni curva di terz'ordine passate per tre punti di una quaterna contenga anche il quarto. La stessa curva fu incontrata da G. Humbert ⁴⁾, il quale, studiando il sistema delle cubiche gobbe passanti per cinque punti dati, s'imbattè in una curva del settimo ordine la quale è proiettata da uno qualunque dei suoi punti in una sestica con cinque punti doppi, tali che cinque delle relative tangenti concorrono in un punto e lo stesso accade per le altre cinque; i due punti di concorso appartengono colla conica determinata dai cinque punti doppi della curva.

Sono di genere $p = 4$ le sestiche, con due punti tripli, di cui Hjelmann ha studiate le forme ⁵⁾. Così dicasi di quelle con sei punti doppi o cuspidi; in quest'ultimo caso, se le sei cuspidi appartengono

¹⁾ La più antica sestica a noi nota è quella avente la seguente equaz.:

$$y^6 - 3 a x y^4 - 2 a^2 x y^3 + 3 a^2 x^2 y^2 - 6 a^3 x^2 y + a^4 x^2 - a^3 x^3 = 0;$$

la si trova in una lettera di HUDDE a FR. VON SCHOOTEN (*Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 97).

²⁾ Journ. f. Mathem., T. LXIV, 1865, p. 250.

³⁾ Math. Annalen, T. VIII, 1875; oppure Collected Papers, T. IX, p. 504.

⁴⁾ Sur un complexe remarquables de coniques (Journ. Ec. polyt., Cah. LXIV, 1894, p. 137).

⁵⁾ Sur les courbes planes du 6.^e ordre à deux points triples (Oefver. af Finska Soc., T. XI, 1897-98).

a una stessa conica, la curva è rappresentabile mediante un'equazione della forma

$$f(x, y)^2 + \lambda \varphi(x, y)^3 = 0,$$

f essendo una funzione di terzo e φ una di secondo grado; riguardo ad esse D. Montesano ha notato che quando una sestica ha sei punti doppi appartenenti a una conica, se cinque di essi sono cuspidi, lo stesso accade riguardo al rimanente ¹⁾.

Una sestica di genere $p = 3$ fu incontrata da Steiner nel corso delle sue ricerche sulle curve algebriche dotate di centro; è il luogo dei punti doppi delle cubiche razionali passanti per sette punti dati; questi sono doppi per l'indicato luogo ²⁾. Questa specie di curve rientra nella classe considerata dal Weltzien in una memoria già citata (pag. 292), ove si trova l'equazione della curva e la determinazione dei suoi punti doppi ³⁾.

Una sestica ellittica possiede in generale nove punti doppi, alcuni dei quali possono essere cuspidi; ora siccome una curva ellittica d'ordine n può avere al più $3n/2$ cuspidi, così questo massimo per una sestica è 9; che tale massimo passa essere raggiunto si vede osservando che tale curva è la correlativa di una curva di terz'ordine generale (che è di sesta classe e ha nove flessi). Una siffatta sestica ammette tre cubiche 9-tangenti ⁴⁾.

Si deve a G. Salmon ⁵⁾ l'osservazione che i nove punti doppi di una sestica ellittica non sono fra loro indipendenti; nove punti scelti ad arbitrio in un piano sono doppi soltanto per la sestica formata dalla cubica passante per essi, presa due volte. Questo risultato fu precisato dall'Halphen ⁶⁾, il quale diede sotto varie forme la condizione affinché nove punti possano essere doppi per un sestica propria; di questa ottenne l'equazione procedendo come

¹⁾ *Esercitazioni matematiche*, T. I, 1921, p. 178. V. anche L. GODEAUX, *Sur les courbes planes du sixième ordre* (Mathesis, T. XXXVIII, 1924).

²⁾ *Ges. Werke*, T. II, p. 526. Di sesto ordine è anche il luogo dei punti doppi delle cubiche di una rete (Jacobiana della rete). Invece (grazie a un teorema di E. CAPORALI, *Mem. di Geometria*, Napoli 1888, p. 177) è di dodicesimo ordine il luogo delle cuspidi di un sistema lineare di ∞^3 cubiche, ne sono doppi i punti fondamentali semplici del sistema; in questo senso va modificata l'asserzione di STEINER (l. c.) che quel luogo è di sest'ordine. Il caso delle ∞^3 cubiche passanti per sei punti fissi fu studiato da P. H. SCHOUTE (*Versalgen Acad.* Amsterdam, T. XV, 1906-07) il quale ha in particolare considerato il caso che i sei punti siano i vertici di un pentagono regolare e il centro dello stesso, nonché altre ipotesi.

³⁾ *Math. Annalen*, T. XXX, 1887, p. 540 e 544.

⁴⁾ A. CLEBSCH, *Journ. f. Math.*, T. LXIV, 1865, p. 250.

⁵⁾ SALMON-FIEDLER, *Anal. Geom. der höh. eb. Kurven*, II Aufl. (Leipzig 1887), p. 42.

⁶⁾ Bull. de la Soc. math. de France, T. X, 1882, oppure *Oeuvres d'Halphen*, T. II (Paris 1918).

segue: Suppongasi

$$A = \alpha_1 x_1^2 (x_2 + x_3) + \alpha_2 x_2^2 (x_3 + x_1) + \alpha_3 x_3^2 (x_1 + x_2)$$

$$P = \sum p_{ik} x_i x_k, Q = \sum q_{ik} x_i x_k, R = \sum r_{ik} x_i x_k$$

$$B = x_2 x_3 P + x_3 x_1 Q + x_1 x_2 R$$

$$a = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

$$\beta = (q_{11} + r_{11}) x_1^2 + \left[2p_{23} + \frac{q_{33} \alpha_2}{\alpha_3} + \frac{r_{33} \alpha_3}{\alpha_2} \right] x_2^2 x_3 + \dots$$

$$\gamma = \lambda x_1 x_2 x_3 + \frac{q_{11} r_{11}}{\alpha_1} x_1^3 + \left[2 \frac{r_{22} p_{23}}{\alpha_2} + \frac{q_{33} p_{22}}{\alpha_3} \right] x_2^2 x_3 + \dots,$$

ove le x sono coordinate omogenee e le altre lettere indicano costanti, di cui λ è arbitraria; allora il polinomio di nono grado $\alpha B^2 - 2\beta B A + \gamma A^2$ è divisibile per il prodotto $x_1 x_2 x_3$ e il quoziente eguagliato a zero dà l'equazione di una delle sestiche in questione.

Sono pure ellittiche le curve che R. A. Roberts ¹⁾ ha tratto dalla considerazione dell'integrale

$$\int \frac{dx}{X^{2/3}}, \text{ ove } X = (x-a)(x-b)(x-c);$$

questo è un integrale ellittico, ma l'equazione differenziale

$$(1) \quad \frac{dx_1}{X^{2/3}} + \frac{dx_2}{X^{2/3}} = 0$$

ammette in generale un integrale algebrico a cui si perviene come segue: Si ponga

$$(2) \quad (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \varphi(x), \quad (p x + q)^3 = X + \lambda \varphi(x).$$

Si considerino x_1, x_2, x_3 come funzioni di p e q e si differenzi; si otterrà

$$\lambda \varphi'(x_1) = 3(p x_1 + q)(x_1 \cdot d p + d q)$$

ossia, dal momento che $p x_1 + q = X^{2/3}$,

$$\frac{\lambda d x_1}{X^{2/3}} = \frac{3(x_1 \cdot d p + d q)}{\varphi'(x_1)}$$

¹⁾ *On certain curves of the sixth order* (Messenger Ser. II, T. XV, 1885-86).

Due relazioni analoghe si hanno mutando x_1 in x_2 e x_3 , onde adizionando

$$(3) \quad \frac{dx_1}{X^{2/3}} + \frac{dx_2}{X^{2/3}} + \frac{dx_3}{X^{2/3}} = 0$$

equazione che coincide con la (1) quando $x_3 = \text{cost.}$ Ora le (2) danno

$$\sqrt[3]{\lambda \varphi(a)} = p a + q, \quad \sqrt[3]{\lambda \varphi(b)} = p b + q, \quad \sqrt[3]{\lambda \varphi(c)} = p c + q$$

quindi

$$(4) \quad (b-c)\sqrt[3]{\varphi(a)} + (c-a)\sqrt[3]{\varphi(b)} + (a-b)\sqrt[3]{\varphi(c)} = 0$$

e questo è l'integrale algebrico della (1). Se ora si pone

$$x_1 = x + i y, \quad x_2 = x - i y, \quad x_3 = \text{cost.},$$

l'equazione (4) rappresenta un sistema di sestiche tricirculari tale che per ogni punto del piano ne passano tre; ogni curva del sistema ha tre punti doppi a distanza finita, è di dodicesima classe e possiede 18 tangenti di flessi, di cui sei passano tre a tre pei punti ciclici del piano; nascono così tre fuochi A, B, C della curva e questa può definirsi come luogo dei punti P per cui è costante il rapporto del prodotto $PA \cdot PB \cdot PC$ alla lunghezza della tangente condotta da P al cerchio circoscritto al triangolo ABC ; rispetto a tale cerchio la sestica è anallagmatica (v. Libro V, Cap. 14). Come involuppo la stessa sestica si può ottenere considerando gli ∞' cerchi ortogonali ad un dato e coi centri sopra un ipocicloide tricuspide.

Le sestiche razionali trasformate in sé stesse da una o più proiezioni furono determinate da R. M. Winger¹⁾.

Una sestica razionale può generarsi mediante le intersezioni degli elementi corrispondenti di due involuppi delle classi 2 e 4²⁾; come tali si possono scegliere una conica e la sua evoluta e la corrispondenza si può stabilire a) fra la tangente in M alla conica e la normale in un suo punto M' per modo che la retta MM' passi per un punto fisso³⁾, oppure b) fra la tangente in M e la norma M' , essendo M e M' estremi di due diametri coniugati della data conica⁴⁾.

¹⁾ *Self-projective rational sextics* (Amer. Journ. of Math., T. XXXVIII, 1916).

²⁾ Cfr. la Diss. di EBERLE citata a pag. 00.

³⁾ P. HENDLÉ, *Intermédiaire*, T. VII, 1900, p. 228.

⁴⁾ BARISIEN, LER, MALO e TAFELMACHER, *Id.*, T. XI, 1904, p. 94, 225 e 294, e T. XIII, 1906, p. 20.

Una sestica razionale si ottiene come caustica di un cerchio quando il fuoco ha una posizione arbitraria; essa ha quattro punti doppi e sei cuspidi ed è priva di flessi, come risulta dalle ricerche di A. Cayley¹⁾ e T. I. J. Bromwich²⁾.

Di sesto ordine risulta la caustica di una conica quando il punto luminoso cade nel centro della curva o nel punto all'infinito d'un asse e così la caustica di una parabola quando il fuoco trovasi sull'asse³⁾.

A curve di sesto ordine guida anche la teoria delle caratteristiche dei sistemi di coniche. Si osservi, infatti, che i sistemi di coniche passanti per p punti e tangenti a t rette ($p + t = 4$) hanno le seguenti caratteristiche: (1, 2), (2, 4), (4, 4), (4, 2), (2, 1); emerge da ciò che il numero delle curve di uno di questi sistemi che sono tangenti a una conica è dato ordinatamente da 6, 12, 16, 12, 6. Se pertanto si indica con C la condizione per una conica di toccarne una fissa, si ottengono come caratteristiche di quattro nuovi sistemi le seguenti:

$$(3p, C) = (6, 12), \quad (2p, 1r, C) = (12, 16), \quad (1p, 2r, C) = (16, 12), \\ (3r, C) = (12, 6)$$

Applicando ora un teorema generale di Chasles si conclude: *Il luogo dei centri dei cerchi che sono tangenti a una conica e passano per un punto fisso è una sestica*; si dimostra che è razionale. Così si è condotti a considerare metodicamente le sestiche collegate a coniche, argomento di cui proseguiamo ora ad occuparsi.

§ 2. SESTICHE COLLEGATE ALLE NORMALI DI UNA CONICA.

106. Consideriamo la conica a centro

$$(1) \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

ossia

$$(1') \quad x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

Posto per brevità $c^2 = a^2 - b^2$ e chiamando u, v le coordinate plückeriane di una qualunque normale si trova agevolmente

¹⁾ Phil. Trans., T. CLXXVIII, 1858, oppure The Collected Papers, T. II, p. 33-44.

²⁾ *Americ. Journ.*, T. XXVI, 1904, p. 33-44.

³⁾ BARISIEN, BROCARD, MALO, MATHIEU e RETALI in *Intermédiaire*, T. XI, 1904, p. 239 e 303, T. XII, 1905, p. 228, e T. XIII, 1906, p. 40 e 108.

$$(2) \quad u = \frac{a}{c^2 \cos \varphi}, \quad v = \frac{b}{c^2 \sin \varphi}$$

donde, eliminando φ , si ottiene la seguente equazione tangenziale dell'evoluta della data curva:

$$a^2 v^2 + b^2 u^2 - c^4 u^2 v^2 = 0$$

Ora per trovare le rette di questo involuppo che passano per un punto (ξ, η) poniamo

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = \lambda$$

cioè consideriamo la retta che ha le seguenti coordinate plückeriane

$$u = -\frac{\lambda}{\lambda \xi - \eta}, \quad v = \frac{1}{\lambda \xi - \eta}$$

Affinchè essa appartenga all'evoluta, λ deve soddisfare la equazione

$$(a^2 + b^2 \lambda^2) (\lambda \xi - \eta)^2 = c^4 \lambda^2$$

ossia

$$(3) \quad b^2 \xi^2 \lambda^4 - 2 b^2 \xi \eta \lambda^3 + (a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4) \lambda^2 - 2 a^2 \xi \eta \lambda + a^2 \eta^2 = 0$$

Questa è un'equazione biquadratica in λ , alle cui quattro radici corrispondono le quattro normali condotte alla data conica dal punto (ξ, η) . Notiamo che i due invarianti del primo membro della (3) valgono risp.

$$i = \frac{1}{6} (a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4)$$

$$j = \frac{1}{36} \{ (a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4)^3 + 54 a^2 b^2 c^4 \xi^2 \eta^2 \};$$

se ora ricordiamo che il primo (o il secondo) si annulla quando le quattro radici di quell'equazione formano un gruppo equianarmonico (o armonico), potremo concludere quanto segue:

I. La conica $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4 = 0$ è il luogo dei punti da cui escono quattro normali equianarmoniche della data conica;

II. La sestica $(a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4)^3 + 54 a^2 b^2 c^4 \xi^2 \eta^2 = 0$ è il

luogo dei punti da cui escono quattro normali armoniche della stessa ¹⁾.

L'invariante assoluto del primo membro dell'equazione (3) è:

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{6 (a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4)^3}{\{ (a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4)^3 + 54 a^2 b^2 c^4 \xi^2 \eta^2 \}^2}$$

Equagliandolo alla costante $6k$ si ottiene un'equazione in ξ, η che rappresenta il luogo dei punti da cui escono quattro normali della data conica formanti un dato birapporto; ma si vede senza difficoltà che detta equazione si decompone nelle due

$$(4) \quad (a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4)^3 \pm \sqrt{k} \{ (a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4)^3 + 54 a^2 b^2 c^4 \xi^2 \eta^2 \} = 0;$$

perciò quel luogo si spezza in due sestiche; ognuna ha sei cuspidi, di cui soltanto quattro sono reali, è priva di punti doppi e possiede 24 flessi.

Il discriminante $i^3 - 6j^2$ del primo membro delle (3) decomponesi nel prodotto di $54 a^2 b^2 c^4 \xi^2 \eta^2$ per $(a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4)^3 + 54 a^2 b^2 c^4 \xi^2 \eta^2$; questo secondo fattore, eguagliato a zero, dà l'equazione locale dell'evoluta della conica ed è pure di 6° ordine.

Le sestiche testè trovate danno per proiezione le evolute delle coniche in una metrica non-euclidea e da questo punto di vista furono studiate da A. Clebsch in una sua importante memoria ²⁾.

Le evolute delle coniche sono, dal punto di vista proiettivo, identiche alle curve rappresentate in coordinate omogenee da equazioni della seguente forma:

$$\left[\frac{x_1}{a_1} \right]^{2/3} + \left[\frac{x_2}{a_2} \right]^{2/3} + \left[\frac{x_3}{a_3} \right]^{2/3} = 0$$

S. Roberts che le ha studiate a fondo ³⁾ dimostrò che sono razionali, hanno sei cuspidi e sono di quarta classe, essendo reciproche alle curve

$$\frac{1}{a_1^2 x_1^2} + \frac{1}{a_2^2 x_2^2} + \frac{1}{a_3^2 x_3^2} = 0;$$

dette cuspidi stanno sulla conica

¹⁾ Educ. Times Quest. 6431, risolta T. XXXVI, 1882, p. 75.

²⁾ Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen zweiten Ordnung (Journ. f. Math., T. LXII, 1863).

³⁾ On the sextic represented by $(x/A)^{\frac{2}{3}} + (y/B)^{\frac{2}{3}} + (z/C)^{\frac{2}{3}} = 0$ (Quart. Journ., T. XV, 1878).

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0;$$

i quattro punti doppi hanno per coordinate $(a_1, \pm a_2, \pm a_3)$.

G. Bauer¹⁾ ha dedotto delle sestiche (4) altre curve dello stesso ordine con la procedura seguente: Della data ellisse si considerino i punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, nonchè le corrispondenti tangenti e normali; se (ξ, η) sono le coordinate del punto comune alle due prime e (X, Y) quelle del punto comune alle seconde si hanno le relazioni:

$$X = \frac{c^2 \xi (b^2 - \eta^2)}{a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2}, \quad Y = \frac{c^2 \eta (a^2 - \xi^2)}{a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2}$$

Ora, se il punto (X, Y) descrive una delle curve rappresentate dall'equazione (4), il punto (ξ, η) percorrerà una curva di 18° ordine avente la seguente equazione:

$$(5) \quad \left\{ \left[\frac{\xi^2}{a^2} - 1 \right] \left[\frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right] \left[\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right] - 4 \frac{\xi^2 \eta^2}{a^2 b^2} \right\}^3 + \frac{54 \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \frac{\xi^2 \eta^2}{a^2 b^2} \left[\frac{\xi^2}{a^2} - 1 \right] \left[\frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right] \left[\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right] = 0$$

Ma ponendo

$$(6) \quad \left[\frac{\xi^2}{a^2} - 1 \right] \left[\frac{\eta^2}{b^2} - 1 \right] \left[\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right] = \varrho \frac{\xi^2 \eta^2}{a^2 b^2}$$

la (5) si scrive

$$(7) \quad (\varrho - 4)^3 + \frac{54 \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \varrho^2 = 0,$$

la quale dice che quella curva di 18° ordine si spezza in tre di 6°, che sono rappresentate dall'equazione (6) nell'ipotesi che ϱ sia una radice della (7); ognuna è di genere 7 e di classe 24. Altre curve del medesimo ordine si ottengono facendo percorrere allo stesso punto (X, Y) la conica $a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 - c^4 = 0$ o l'evoluta della data conica.

Se si cerca la condizione affinché l'equazione (3) abbia, per ogni radice λ , anche la radice $-1/\lambda$, si ottiene la nuova equazione

¹⁾ Ueber Systeme von Kurven 6. Ordnung auf welche das Normalproblem der Kegelschnitte führt (München. Ber., T. VIII, 1878).

$$(8) \quad (a^2 + b^2) (\xi^2 + \eta^2) (a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 (a^2 \eta^2 - b^2 \xi^2)^2,$$

che rappresenta la sestica luogo dei punti donde partono normali della data ellisse fra loro perpendicolari¹⁾.

Il problema delle normali alle coniche è una vera miniera di sestiche particolari, come emerge dagli enunciati seguenti:

a) Il luogo dei centri dei cerchi circoscritti ai triangoli aventi per vertici i piedi delle normali condotte all'ellisse (1) dai punti della sua evoluta ha per equazione

$$4 (a^2 x^2 + b^2 y^2)^3 = a^2 b^2 c^4 x^2 y^2.$$

b) È una sestica il luogo dei punti M tali che, condotte da uno di essi le normali a un'ellisse e le tangenti nei loro piedi, si ottenga un quadrilatero a diagonali fra loro perpendicolari²⁾.

c) Di egual ordine è il luogo dei vertici dei detti quadrilateri.

d) Se P, Q, R sono i piedi delle normali condotte a un'ellisse da un suo punto M , il luogo delle intersezioni dei lati opposti del quadrangolo $MPQR$ è una sestica⁴⁾.

e) Se si biseca il segmento di normale della ellisse (1) situato nell'interno della curva, si ottiene una curva quadrifoglia avente per equazione

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right]^2 \left[\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} \right] - c^4 \frac{x^2 y^2}{a^6 b^6} = 0,$$

essa si ottiene anche come luogo dei baricentri dei triangoli aventi per vertici gli estremi di detto segmento e il centro della curva.

f) Il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte dal centro della stessa ellisse sulle normali (ossia la podaria del centro rispetto all'evoluta di questa curva) ha la seguente equazione:

$$(x^2 + y^2)^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2) - c^4 x^2 y^2 = 0 \quad ^5).$$

§ 3. SESTICHE FOCALI.

107. Il luogo geometrico dei fuochi delle coniche di una schiera è una cubica circolare, mentre il luogo analogo per le coniche di un fascio è una sestica bicircolare: questi teoremi risultano da una

¹⁾ VIDAL in Nouv. Ann. de mathém., T. II, 1848, p. 365.

²⁾ Educ. Times Quest. 6375, risolta T. XXXVI, 1882, p. 77.

³⁾ Interméd. des math., T. VII, 1900, p. 164 e 349.

⁴⁾ Id., T. VIII, 1901, p. 155 e 319, e T. XIII, 1906, p. 62, 207 e 225.

⁵⁾ Comunicazione epistolare di LEOPOLDO BRAUDE.

semplice applicazione della teoria delle caratteristiche di Chasles, ma il secondo era stato enunciato prima da H. Faure, come Questione 565 delle *Nouv. Ann. de mathém.* (T. XX, 1861, p. 65). La prima dimostrazione di esso fu data dal Cremona¹⁾, che più generalmente dimostrò che il luogo dei fuochi delle curve d'ordine n di un fascio è di regola una curva dell'ordine $2(n-1)[2n(n-1)-1]$, passante due volte per ciascuno dei punti base del fascio e $2(n-1)[n(n-1)-1]$ pei punti ciclici del piano. La stessa proposizione si trova anche in uno dei classici trattati del Salmon²⁾, ove si legge anche l'elegante relazione, scoperta da Möbius³⁾, che passa fra cinque punti, uno dei quali è fuoco di una conica passante per gli altri quattro. Ma la prima investigazione profonda delle proprietà della curva in questione è dovuta a Sylvester⁴⁾ e Cayley⁵⁾: il primo ritrovò la citata relazione di Möbius, ed entrambi diedero varie rappresentazioni analitiche di detta curva. Senza fondarsi in alcun modo su queste ricerche, ma con le sole risorse della pura geometria, la stessa questione fu trattata da K. Bobek⁶⁾ il quale trovò che, oltre i punti ciclici, sono doppi per la detta curva i vertici del triangolo autoconiugato rispetto a tutte le coniche del fascio dato (ivi le tangenti sono fra loro ortogonali) e il punto d'incontro delle sue altezze. Essa è iperellittica di genere $p=2$, essendo la relativa corrispondenza specializzata perchè i suoi sei punti doppi coincidono a coppie. La citata relazione di Möbius servì di base alle ricerche di S. Haller⁷⁾ sopra le curve focali dei sistemi elementari di coniche; egli infatti notò che, almeno in casi speciali, quella relazione conduce all'equazione della curva; p. es. nel caso in cui i punti base del fascio sono i vertici di un triangolo equilatero e il centro dello stesso, l'equazione polare del luogo in discorso è

$$4 \varrho^6 + 4 \varrho^5 \cos 3\omega - 15 \varrho^4 + 8 \varrho^2 - 1 = 0$$

Nel caso generale lo studio della curva si può eseguire più

¹⁾ *Nouv. Ann. de math.*, II Ser., T. III, 1864, p. 21; *Opere matematiche*, T. II, p. 168.

²⁾ SALMON-FIEDLER, *Anal. Geom. des Kegelschnitte*, VI ed. (Leipzig, 1898), p. 540.

³⁾ *Journ. f. Math.*, T. XXVI, 1833, oppure *Ges. Werke*, T. I, p. 587.

⁴⁾ *Supplemental note on the analogous in space to the cartesian ovals in plano* (Phil. Mag., T. XXXII, 1866).

⁵⁾ *On the locus of conics which pass through four given points* (Id. *opere Collected Papers*, T. VII).

⁶⁾ *Die Breunpunktskurve des Kegelschnittbüschels* (Monatshefte f. Math. u. Phys., T. III, 1892).

⁷⁾ *Untersuchungen der Breunpunktskurven eines Kegelschnittbüschels mit besonderer Berücksichtigung der gestaltlichen Verhältnisse* (Diss. München o Arch. Math. Phys., III Ser., T. VII, 1904); v. anche il posteriore lavoro dello stesso autore *Ueber Brennpunktskurven von Kegelschnittsystemen* (Progr. München, 1908).

agevolmente servendosi di funzioni irrazionali di un parametro; ad esempio si possono così determinare le varie forme assunte da essa in conseguenza della posizione che hanno i punti base del fascio, come pure le singolarità eccezionali che essa può presentare. Così, allorchè detti punti stanno su un cerchio, la curva si spezza in due cubiche (teorema di Sylvester¹⁾); se invece due coincidono la sestica diventa razionale, assumendo un punto quadruplo; se la congiungente di due di essi è parallela alla congiungente degli altri due, la sestica si spezza nella retta all'infinito ed in una quintica, in generale di genere $p=2$, razionale se due dei punti doppi del fascio coincidono, ecc.

La più elegante rappresentazione analitica della sestica focale è dovuta a G. Bauer²⁾, il quale ha usato un sistema di coordinate trilineari avente per triangolo fondamentale ABC il triangolo autoconiugato comune a tutte le coniche del fascio. Allora questo si può supporre determinato dalle curve

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0, \quad a_1' x_1^2 + a_2' x_2^2 + a_3' x_3^2 = 0;$$

se si pone per brevità:

$$a_2 a_3' - a_2' a_3 = (23), \quad a_3 a_1' - a_3' a_1 = (31), \quad a_1 a_2' - a_1' a_2 = (12)$$

$$x_2 x_3 + x_1 (-x_1 \cos A + x_2 \cos B + x_3 \cos C) = K_1$$

$$x_3 x_1 + x_2 (x_1 \cos A - x_2 \cos B + x_3 \cos C) = K_2$$

$$x_1 x_2 + x_3 (x_1 \cos A + x_2 \cos B - x_3 \cos C) = K_3,$$

le equazioni $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ rappresenteranno le circonferenze descritte risp. sopra i segmenti BC , CA , AB come diametri, mentre

$$(23) x_2 x_3 K_2 K_3 + (31) x_3 x_1 K_3 K_1 + (12) x_1 x_2 K_1 K_2 = 0$$

è l'equazione della sestica luogo dei fuochi delle ∞' coniche considerate. Essa si presta particolarmente alla determinazione delle varie forme che può assumere la curva, delle condizioni per il suo spezzamento, ecc.

Ricordando la definizione generale di «fuoco di una curva» dato da Plücker si riconosce subito che la precedente questione, estesa

¹⁾ Cfr. SALMON-FIEDLER, *op. cit.*, p. 555.

²⁾ *Von der Kurven sechster Ordnung, welche der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte ist, welche durch vier Punkte gehen* (München. Berichte, T. XXXV, 1905).

a una metrica qualunque, si muta nella ricerca del luogo dei vertici di un quadrangolo completo circoscritto a una conica fissa e a una conica appartenente a un determinato fascio. Tale questione fu risolta in vari casi speciali, più o meno felicemente, nelle *Nouvelles Ann. des Math.* ¹⁾; in generale lo fu con somma eleganza da G. Darboux ²⁾ con la seguente procedura: Sia $S(x, y, z) = 0$ l'equazione omogenea della conica fissa e x', y', z' le coordinate omogenee di un punto del luogo cercato posto

$$2P = x' \frac{\partial S}{\partial x} + y' \frac{\partial S}{\partial y} + z' \frac{\partial S}{\partial z},$$

l'equazione complessiva delle tangenti condotte da M a quella curva è

$$S S' - P^2 = 0,$$

S' essendo il risultato della sostituzione $x' = x, y' = y, z' = z$ nella funzione S . Per ogni punto del luogo cercato esiste una conica tangente alle due anzidette rette e passante per quattro punti A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) che costituiscono la base del dato fascio. Sia ora

$$P^2 - S S' = (m x + n y + p z)^2$$

l'equazione di detta conica, (x_i, y_i, z_i) le coordinate di A_i e S_i, P_i i risultati della sostituzione delle coordinate del punto A_i risp. in S e P . Sussisteranno allora le equazioni

$$\pm \sqrt{P_i^2 - S_i S'_i} = m x_i + n y_i + p z_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Eliminando fra esse le costanti m, n, p si giunge alla seguente equazione irrazionale del luogo cercato:

$$\begin{aligned} &\pm (234) \sqrt{P_1^2 - S_1 S'_1} \mp (134) \sqrt{P_2^2 - S_2 S'_2} \pm \\ &\pm (124) \sqrt{P_3^2 - S_3 S'_3} \mp (123) \sqrt{P_4^2 - S_4 S'_4} = 0, \end{aligned}$$

ove in generale

$$(i \ j \ k) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}$$

¹⁾ V. LE COINTE, *Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une conique et à un cercle* (Nouv. Ann. de Math., T. XIX, 1860), nonché altri lavori ivi citati.

²⁾ *Correspondence* (lvi, p. 184).

Quest'equazione — la quale corrisponde a quella di Möbius in una metrica qualsivoglia — resa razionale sale all'ottavo grado, ma si vede facilmente che contiene il fattore S' . La curva focale è pertanto, come nella geometria euclidea, di sesto ordine; ne sono tangenti triple le tangenti condotte alla conica assoluto dai punti base del fascio; essa si spezza se questi appartengono a detta conica.

Ad altra sestica si perviene considerando tutte le coniche bitangenti a due coniche fisse, le quali costituiscono tre sistemi semplicemente infiniti di caratteristiche $2,2$ ¹⁾. Il luogo dei centri delle coniche di ciascun sistema è una conica, mentre quello dei fuochi è una sestica bicircolare. Dalla relativa equazione, che fu stabilita da R. A. Roberts ²⁾, emerge che la curva passa per punti all'infinito delle due parabole esistenti nel sistema considerato e ha per punti doppi, oltre quattro dei sei che rappresentano a coppie coniche appartenenti alla schiera definita dalle due coniche date, altri tre. In totale la curva ha sette punti doppi onde è di genere $p = 3$. Ne sono tangenti doppie le tangenti condotte dai punti ciclici alle due coniche date. Notevole è il caso in cui le due coniche date sono cerchi ³⁾, perchè riconduce ad alcuni noti sviluppi di Steiner sopra le coniche bitangenti ⁴⁾.

§ 4. ALTRE CURVE DI SESTO ORDINE

COLLEGATE ALLA TEORIA DELLE SEZIONI CONICHE.

108. La teoria delle coniche, che ci ha condotto già a considerare molte curve degli ordini 3-6, ha portato alla scoperta di altre sestiche, di cui ora faremo una rapida menzione.

a) L'inviluppo delle rette che uniscono il punto di osculazione col punto d'intersezione di un cerchio con l'ellisse **E**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ha per equazione:

$$\left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 4 \right]^3 + 27 \left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]^2 = 0 \quad \text{5)}$$

¹⁾ SALMON-FIEDLER, op. cit., p. 572.

²⁾ *On the locus of foci of conics having a double contact with two fixed conics* (Bull. Amer. math. Society, T. II, 1896).

³⁾ SALMON-FIEDLER, op. cit., p. 573.

⁴⁾ Altre questioni analoghe a quelle trattate nel presente paragrafo si trovano nell'articolo di R. DEAUX, *Sur la sextique focale* (Mathesis, T. XXXIX, 1925).

⁵⁾ SALMON-FIEDLER, *Höhere ebene Kurven*, II Aufl. (Leipzig 1873), p. 90.

È una sestica avente per cuspidi i punti $x = \pm a\sqrt{2}$, $y = \pm b\sqrt{2}$ e altri sei punti doppi; è, quindi, di sesta classe e ha quattro flessi e sei tangenti doppie.

b) Si dà il nome di *radiale di una curva* al luogo degli estremi dei segmenti uscenti da un punto arbitrario e equipollenti ai raggi di curvatura di essa¹⁾. Se ad es. si considera l'ellisse

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

e si chiama ρ il raggio di curvatura nel punto corrispondente al valore φ del parametro e ω l'angolo che esso forma con l'asse polare, si ha:

$$\rho = \frac{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}{ab}, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi;$$

L'equazione polare della radiale si otterrà eliminando φ fra queste equazioni; ora poichè da esse si trae

$$\frac{\sin \varphi}{b \sin \omega} = \frac{\cos \varphi}{a \cos \omega} = \frac{1}{\sqrt{b^2 \sin^2 \omega + a^2 \cos^2 \omega}}$$

si trova

$$\rho^2 (a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega)^2 = a^4 b^4$$

che è l'equazione cercata²⁾; passando a coordinate cartesiane si ottiene:

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2)^3 = a^4 b^4 (x^2 + y^2)^2.$$

La radiale dell'ellisse è quindi una curva di sesto ordine avente nel centro di questa un punto quadruplo, con le tangenti a coppie coincidenti con le corrispondenti rette isotrope. Similmente per la iperbole.

e) Sempre della stessa ellisse **E**, Wolstenholme ha derivata una sestica, reciproca di sè stessa³⁾ nel seguente modo: Se O è il centro di **E**, si descriva col centro in O un cerchio **K** tale che siano in esso inscritti ∞' triangoli circoscritti a **E**. L'involuppo di tali cerchi consta dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left[\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right]^2$$

¹⁾ R. TUCKER, *On radial Curves* (Proc. London math. Soc., T. I, 1865), cfr. J. HOÛEL, *Calcul infinitesimal*, T. II (Paris 1879), p. 269.

²⁾ R. TUCKER, *The radial of an ellipse* (Quart. Journ., T. XVIII, 1882).

³⁾ *On a certain envelope* (Proc. London math. Soc., T. XV, 1884).

e della curva suscettibile della seguente rappresentazione parametrica:

$$x = \frac{a \cos \theta}{a^2 - b^2} \left\{ a^2 + b^2 + 4 b^2 \frac{a^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \right\}$$

$$y = \frac{b \sin \theta}{a^2 - b^2} \left\{ b^2 + a^2 + 4 a^2 \frac{b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \right\};$$

essa è di sesto ordine e sesta classe, ha sei punti doppi e sei tangenti doppie, quattro cuspidi e quattro flessi.

d) Nasce una curva di sesto ordine proiettando il centro dell'ellisse **E** sulle corde che essa ha comuni con i suoi cerchi osculatori¹⁾; la sua equazione essendo

$$(x^2 + y^2)^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2) = (a^2 x^2 - b^2 y^2)^2$$

essa è di sest'ordine e ha nell'origine un punto quadruplo.

e) La curva rappresentata dalle due seguenti equazioni (cartesiana e polare) fra loro equivalenti,

$$2(2x^2 + 2y^2 - Rx)^3 = 27R^2(x^2 + y^2)^2$$

$$\rho = 2R \cos^2 \frac{\pi - \omega}{3}$$

fu incontrata dal Maclaurin²⁾ come podaria di una cardioide rispetto alla cuspidi e, da questo punto di vista, fu studiata dal Cayley³⁾; come luogo dei vertici delle parabole tangenti al cerchio di centro O e raggio R ed aventi per un fuoco un punto della relativa periferia, fu considerata dal Barisien⁴⁾ ed esaminata accuratamente da altri⁵⁾.

f) Da un punto P dell'ellisse **E** si abbassa la perpendicolare sul raggio vettore del punto P' simmetrico di P rispetto all'asse maggiore della curva; il luogo geometrico del piede ha per equazione

¹⁾ *Progreso mathem.*, Questione 93.

²⁾ *Philos. Transactions*, London 1718.

³⁾ *A supplementary memoir on Caustics* (*Philos. Trans.*, T. 157, 1867; oppure *Collected Papers*, T. V); donde la ragione del nome *Cayley's sextic* dato dall'ARCHIBALD (Diss. citata a p. 107) alla curva in questione.

⁴⁾ *Intermédiaire*, T. II, p. 21; cfr. anche *Nouv. Ann. de math.*, Question 166, risolta da P. SERRET (1848).

⁵⁾ *Ivi*, p. 376; V. RETALI, *Note sur une courbe du sixième ordre* (*Journ. de math. spéc.*, IV Ser., T. VI, 1897).

$$(x^2 + y^2)^2 \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right] - (x^2 - y^2)^2 = 0$$

onde può considerarsi come generalizzazione della rodonea a quattro foglie (v. Lib. V, Cap. IV)¹⁾.

Non sono queste le uniche sestiche aventi la loro radice nella teoria delle coniche; il lettore ne troverà altre nelle più estese raccolte di esercizi di geometria analitica.

¹⁾ Comunicazione fatta all'autore da LEOPOLDO BRAUDE.

CAPITOLO III

Curve di sesto ordine (continuazione).

§ 5. ASTEROIDI E SCARABEI.

109. Il movimento di un piano su se stesso si può definire assegnando due curve fisse (*direttrici*) che devono essere percorse da due punti dati del piano mobile; ogni altro punto del piano descrive allora una curva che Inglesi e Francesi chiamano *glissettes* e che noi indicheremo col nome di *olistoidi* (dal verbo *δλεσθάνω* = scorrere); invece qualunque curva (in particolare qualunque retta) del piano mobile involupa una curva detta *enveloppe-glissette* o *inviluppo olistoidale*. Se le direttrici sono curve algebriche e se ne indicano con n, n' gli ordini, con v, v' le classi, con d, d' il numero dei punti doppi e con k, k' il numero delle cuspidi, per l'olistoide si ha *in generale*: ordine = $2n n'$; classe = $2(n v' + n' v + n n')$; numero dei punti doppi: $(2n n' - n - n') + 2(n d' - n' d)$; numero delle cuspidi: $2(n d' + n' d)$; ma se le direttrici coincidono, oppure passano per punti ciclici questi numeri subiscono considerevoli modificazioni¹⁾.

Il caso più semplice è quello in cui le due direttrici siano rettilinee e si considera il luogo di un punto appartenente alla congiungente i punti dati, oppure l'inviluppo di questa congiungente. Quel luogo è notoriamente un'ellisse, questo inviluppo è invece una nuova curva che, grazie alla sua forma, è chiamata *asteroide* o *astroide*²⁾. Per trovarne la rappresentazione analitica assumiamo (fig. 57) come assi coordinati le due rette fisse; chiamiamo a l'angolo che esse formano, l la lunghezza della congiungente dei due

¹⁾ S. ROBERTS, *On the motion of a plane under certain conditions* (Proc. of L. M. S., T. III, 1871).

²⁾ Nome proposto una prima volta da J. J. LITROW (*Kurze Anleitung zur gesamten Mathematik*, Wien 1838, p. 299). «Astroide oder Sternlinie» scrive M. SIMON (*Analytische Geometrie*, Leipzig 1900, p. 307). Per la bibliografia si ricorra ad alcuni articoli dell'HATON DE LA GOUPILLIÈRE in *Nouv. Ann.*, 1874, 1880 e 1885.

punti mobili A, B e φ, ψ gli angoli che la retta AB , in una sua posizione arbitraria, forma con gli assi. Il triangolo OAB dà:

$$(1) \quad \varphi + \psi = \pi - \alpha, \quad \frac{OA}{\sin \psi} = \frac{OB}{\sin \varphi} = \frac{l}{\sin \alpha}$$

onde l'equazione della retta AB è:

$$(2) \quad \frac{x}{\sin \psi} + \frac{y}{\sin \varphi} = \frac{l}{\sin \alpha};$$

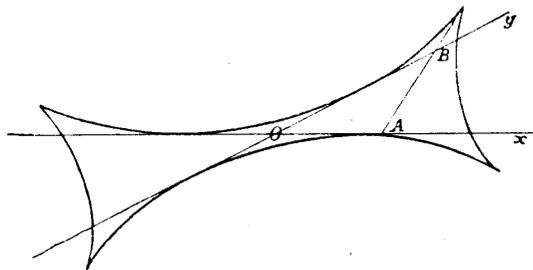


Fig. 57. — Asteroide obliquo.

differenziando quest'equazione rispetto a φ e tenendo conto della (1) si ottiene:

$$\frac{x \cos \psi}{\sin^2 \psi} = \frac{y \cos \varphi}{\sin^2 \varphi},$$

che, combinata con la (2) dà

$$(3) \quad x = \frac{l}{\sin^2 \alpha} \cos \varphi \cdot \sin^2 \psi, \quad y = \frac{l}{\sin^2 \alpha} \cos \psi \cdot \sin^2 \varphi$$

Eliminando dalle (3) φ o ψ mediante la (2) si ottengono le coordinate di un punto qualunque dell'asteroide in funzione trigonometrica di ψ o φ ; per fissare le idee di φ ; posto allora $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \lambda$, le (3) danno x, y come funzioni razionali di sesto ordine di λ . Se ne deduce che l'asteroide è una curva razionale di sesto ordine. Osservando ora che la (2) rappresenta una tangente qualunque dell'asteroide e che posto in essa $\psi = \pi - \alpha - \varphi$ e poi $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \lambda$, nasce un'equazione di quarto grado in λ , si conclude che l'asteroide è di quarta classe. Questa curva ha in conseguenza sei cuspidi e quattro punti doppi, è esente da flessi, ma possiede tre tangenti doppie.

*di cui 2
in apparenza
e 4 reali*

Eliminando φ e ψ fra le equazioni (1) e (3) si ottiene l'equazione dell'asteroide sotto la seguente forma:

$$(4) \quad [(x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha - l^2)^3 + 27 l^2 x^2 y^2 \sin^2 \alpha] \sin^2 \alpha - l^2 \cos \alpha [(x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha - l^2)^2 \cos \alpha - 2xy \{ 9(x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha - a^2) \sin^2 \alpha - 8a^2 \cos^2 \alpha \}] = 0^{(1)}.$$

Questa conferma che la curva è di sesto ordine e prova inoltre che le sei cuspidi della curva sono:

1° I punti $P(l/\sin \alpha, 0)$ e $P'(-l/\sin \alpha, 0)$; l'asse delle x è comune tangente cuspidale in P e P' .

2° I punti $Q(0, l/\sin \alpha)$ e $Q'(0, -l/\sin \alpha)$; l'asse delle y è comune tangente cuspidale in Q e Q' .

3° I punti ciclici del piano; la retta all'infinito è tangente in entrambi alla curva.

L'asteroide ha dunque tre tangenti bicuspidali; onde è correlativa alle quartiche con tre nodi di inflessione; per ciò venne proposto di dare il nome di *asteroide proiettivo* a tutte le sestiche razionali con tre tangenti bicuspidali²⁾.

Essendo l'asteroide una curva duale di una quartica con tre nodi di inflessione, sussisterà per essa il teorema correlativo a quello di Laguerre (n. 95), cioè la proposizione seguente: *ogni tangente t di un asteroide (sia esso o non proiettivo) sega nuovamente la curva in quattro punti; le relative tangenti passano per un medesimo punto P .* Aggiungiamo che di queste quattro tangenti due sole sono reali, e che il luogo descritto dal punto P al variare della tangente t è il cerchio (di centro O e raggio 1) circoscritto all'asteroide³⁾.

Il caso dell'asteroide che s'incontra più spesso è quello in cui due direttrici siano rette fra loro perpendicolari (fig. 58); la curva

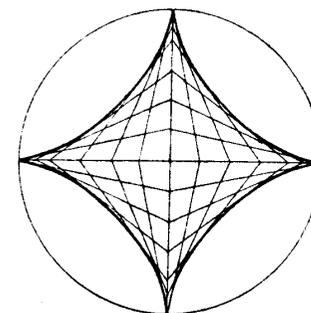


Fig. 58. — Asteroide retto.

¹⁾ H. T. JENTSCH, *Theorie der Astroiden einer neuen Classe von Curven* (Diss. Greiswald, 1860).

²⁾ Perciò le sestiche aventi le dette singolarità furono dette *asteroidi proiettive* (V. RETALI, *Intermédiaire*, T. V, 1898, p. 68); in coordinate proiettive hanno equazioni della seguente forma: $(x_1/a_1)^2/3 + (x_2/a_2)^2/3 + (x_3/a_3)^2/3 = 0$.

³⁾ Riguardo a questa proposizione, segnalata da A. BOUTIN (*Intermédiaire*, T. IV, 1897, p. 170) si veggano molte comunicazioni in *Intermédiaire*, T. IV, 1897, p. 239; T. V, 1898, p. 68; T. VI, 1899, p. 31 e 281.

chiamasi allora generalmente *asteroide regolare* o *tetracuspide regolare*; però il Montuucci la indica col nome di *cubo-cycloide*¹⁾ e il Matthiessen con quello di *Paracykel*²⁾.

Dell'asteroide regolare si può ottenere un'agevole costruzione per punti; sia infatti AB una posizione arbitraria della retta mobile e C il quarto vertice del rettangolo di vertici A, O, B ; la equazione di AB essendo

$$x \operatorname{sen} \varphi + y \operatorname{cos} \varphi = \frac{1}{2} l \operatorname{sen} 2\varphi,$$

le coordinate del punto P in cui essa tocca il proprio involuppo si ottengono combinando quest'equazione con la sua derivata rispetto a φ , cioè

$$(x - l \operatorname{cos} \varphi) \operatorname{cos} \varphi - (y - l \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \varphi = 0;$$

ora, siccome questa rappresenta la perpendicolare calata da C su AB , così si conclude che *l'asteroide regolare è il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate dai punti analoghi a C sulle rette analoghe alle AB* ³⁾.

Facendo nelle equazioni (3) (4) $\alpha = \pi/2$ esse divengono:

$$(3') \quad x = l \operatorname{cos}^3 \varphi, \quad y = l \operatorname{sen}^3 \varphi$$

$$(4') \quad (x^2 + y^2 - l^2)^3 + 27 l^2 x^2 y^2 = 0;$$

invece di quest'ultima equazione si suole spesso adoperare un'altra più comoda⁴⁾, benchè irrazionale, e che si ottiene dalla diretta eliminazione di φ tra le (3'): è la seguente

$$(5) \quad x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

Scrivendo le (3') come segue:

$$x = l (3 \operatorname{cos} \varphi + \operatorname{cos} 3 \varphi) / 4, \quad y = l (3 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} 3 \varphi) / 4,$$

si vede (cf. Lib. VI, Cap. IX) che l'asteroide regolare appartiene

¹⁾ *Comptes rendus*, T. LXX, 1865, p. 441: ivi è segnalata l'applicabilità dell'astroide alla risoluzione delle equazioni del 5° grado.

²⁾ *Ueber die mechanische Construction einiger Curven, welche sich zur Auflösung des Problems von der Duplication der Würfels verwenden lassen* (Archiv., T. XLVIII, 1868).

³⁾ Alla stessa conclusione giunse, servendosi della geometria descrittiva, A. SUCHARDA nella nota *Eine Tangentenconstruction zur Astroide* (Arch. f. Math. u. Phys., T. LXVI, 1881).

⁴⁾ La s'incontra già in una lettera scritta da LEIBNIZ a HERMANN addì 22 Novembre 1715 (*Leibniz ed. Gerhardt*, T. IV, 1859, p. 408): cfr. anche la lettera del secondo al primo del 6 Gennaio 1716 (Vol. cit. p. 410).

alla classe delle epicloidi. Ma le (3'), anche come stanno, si prestano benissimo alla risoluzione dei principali problemi metrici concernenti l'asteroide regolare. Detta infatti S la superficie della curva si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \int_{x=0}^{x=l} y dx = \int_{\phi=\pi/2}^{\phi=0} l \operatorname{sen}^3 \varphi \cdot (-3l) \operatorname{cos}^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi \cdot d\varphi = 3l^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 \varphi \operatorname{cos}^2 \varphi \cdot d\varphi = \\ &= 3l^2 \left[\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 \varphi \cdot d\varphi - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 \varphi \cdot d\varphi \right] = \frac{3\pi l^2}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \end{aligned}$$

onde $S = 3/8 \cdot \pi l^2$; risultato che è facile esprimere a parole dal momento che πl^2 è l'area del cerchio circoscritto all'asteroide.

L'equazione generale della tangente è — in forza della (2) —

$$\frac{x}{\operatorname{cos} \varphi} + \frac{y}{\operatorname{sen} \varphi} = l;$$

perciò l'equazione

$$-\frac{x}{\operatorname{sen} \varphi} + \frac{y}{\operatorname{cos} \varphi} = l$$

rappresenta la tangente perpendicolare alla precedente. Eliminando φ si ottiene l'equazione $l^2 (x^2 - y^2)^2 = 2 (x^2 + y^2)^3$; passando a coordinate polari questa diviene

$$\rho = \frac{l}{\sqrt{2}} \operatorname{cos} 2\omega,$$

donde emerge che il luogo dei vertici degli angoli retti circoscritti a un asteroide regolare è una (v. n. 136) rodonea quadrifoglia¹⁾.

Detto s l'arco della curva, mediante la (3') si trova:

$$ds = 3 l \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi d\varphi$$

onde

$$s = \frac{3 l}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi + \operatorname{cost}.$$

la lunghezza totale dell'asteroide è il quadruplo del risultato otte-

¹⁾ E. N. BARISIEN, *Intermédiaire*, T. III, 1896, p. 198.

nuto prendendo s fra $\varphi = \pi/2$ e $\varphi = 0$ onde è $6l$. Se l'arco si conta dal punto in cui $\varphi = \pi/4$ si ha in generale

$$(6) \quad s = \frac{3l}{2} (\sin^2 \varphi - \frac{1}{2}) = -\frac{3l}{4} \cos 2\varphi^1).$$

Il raggio di curvatura ρ è dato poi da

$$(7) \quad \rho = \frac{3l}{2} \sin 2\varphi;$$

eliminando φ tra le (6) (7) si trova

$$(8) \quad \rho^2 + 4s^2 = \left[\frac{3l}{2} \right]^2,$$

che è l'equazione intrinseca della curva: si può nuovamente dedurre da ciò che l'asteroide è un'epicloide.

Chiamiamo finalmente A l'area e V il volume generato dalla rotazione completa dell'asteroide attorno ad una delle tangenti bicuspidali x : avremo

$$S = 4\pi \int_{x=0}^{x=l} x ds = -4\pi \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} l \cos^3 \varphi \cdot 3l \sin \varphi \cos \varphi \cdot d\varphi =$$

$$-12\pi l^2 \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{12\pi l^2}{5}$$

$$V = 2\pi \int_{x=0}^{x=l} x^2 dy = 6\pi l^3 \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \cos^7 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi =$$

$$= 6\pi l^3 \left[\int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \cos^7 \varphi d\varphi - \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \cos^9 \varphi d\varphi \right] = \frac{32\pi l^3}{105};$$

¹⁾ Parve al D'ALEMBERT (Mém. de Berl., 1747, oppure *Opuscules mathématiques*, T. IV, mem. XXIII) che la rettificazione dell'asteroide desse origine a qualche contraddizione; ma ogni parvenza di paradosso fu tolta da Lord BROUGHAM nella nota *Sur certains paradoxes réels ou supposés dans le calcul intégral* (Comptes rendus, T. XLIV, 1857), nella quale sono esposte le più salienti proprietà della curva.

e questi risultati si enunciano agevolmente osservando che $4\pi l^2$ e $4/3\pi l^3$ sono la superficie ed il volume della sfera avente per circolo massimo il cerchio circoscritto all'asteroide¹⁾.

L'asteroide regolare può servire anche a dividere un angolo in tre parti eguali²⁾. La curva che le corrisponde in un'inversione col centro nel centro della curva è di 12° ordine e fu detta *pseudo-asteroide*³⁾.

110. È dovuta all'Ameseder⁴⁾ una notevole generalizzazione del concetto di astroide, sulla quale è debito nostro l'arrestarci.

Data una conica Γ a centro e due rette fisse l'involuppo delle rette tali che il segmento di ciascuna intercetto fra quelle due, eguagli il diametro parallelo della conica Γ , è una curva che può chiamarsi *asteroide generale*; essa riducesi ad un'asteroide ordinaria quando Γ è un cerchio. Per trovarne l'equazione prenderemo ancora per assi coordinati le due rette fisse e supporremo che

$$(8) \quad ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$$

sia l'equazione di Γ e che

$$(9) \quad \frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$$

sia l'equazione della retta involupante in una sua posizione qua-

¹⁾ La rappresentazione geometrica dei numeri complessi e delle loro funzioni conduce, in un caso, a curve più generali dell'asteroide (AMSTEIN, *Un exemple de représentation conforme*, Bull. de la Soc. vaudoise des Sc. Nat., T. XV, 1878). Si consideri infatti la funzione $w = 1/4(3z + z^{-2})$. Posto $w = u + iv$, $z = \rho e^{i\omega}$, se ne trae

$$x = 1/4(3\rho \cos \omega + 1/\rho^3 \cdot \cos 3\omega), \quad y = 1/4(3\rho \sin \omega - 1/\rho^3 \cdot \sin 3\omega).$$

Supposto $\rho = \text{cost.}$, si ha qui la rappresentazione parametrica delle curve (razionali) di cui si tratta. In particolare per $\rho = 1$ si hanno le equazioni

$$x = 1/4(3 \cos \omega + \cos 3\omega) = \cos^3 \omega, \quad y = 1/4(3 \sin \omega - \sin 3\omega) = \sin^3 \omega$$

che appartengono all'asteroide regolare $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Per $\rho = 1/\sqrt[4]{3}$ si avrebbe invece la rodonea avente per equazione, in coordinate polari r, u :

$$r = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}} \cos 2u$$

²⁾ G. CARBONI, *Una nuova soluzione del problema della trisezione dell'angolo* (Il Pitagora, T. XV, 1909).

³⁾ L. CLARIANA, *Origen de la curva pseudo-astroide* (Rev. de la Soc. matem. espanola, T. III, 1914).

⁴⁾ V. l'articolo *Astroiden* (Archiv, T. LXIV, 1879).

lunque. Le condizioni del problema danno la equazione

$$\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha} = 2 \sqrt{\frac{u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha}{a^2 u^2 - 2huv + b^2 v^2}},$$

ossia

$$(10) \quad a^2 u^2 - 2huv + b^2 v^2 = 4,$$

e per ottenere l'equazione dell'asteroide generale bisogna trovare l'involuppo della retta (9) con la condizione (10); applicando regole note si trova che per ciò basta eliminare u, v fra le (9), (10) e la seguente:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} x - u & bv - hu \\ y - v & au - hv \end{vmatrix} = 0$$

L'eliminazione si effettua in modo assai semplice quando la conica Γ ha gli assi coordinati per diametri congregati; in tal caso, essendo $h = 0$, la (11) diviene:

$$(11') \quad au(x - u) = bv(y - v);$$

sostituendo in questa al posto di v il valore $uy/(u - x)$ tratto dalla (9) si deduce

$$u = x + \sqrt[3]{\frac{b}{a} \cdot xy^2},$$

similmente

$$v = y + \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot x^2 y}.$$

Finalmente ponendo questi valori nella (10) — in cui si sia fatto $h = 0$ — si trova, dopo qualche riduzione, che

$$(12) \quad \sqrt[3]{ax^2} + \sqrt[3]{by^2} = \sqrt[3]{4};$$

è l'equazione dell'asteroide generale. Volendo distinguere i due casi in cui la data curva sia un'ellisse od un'iperbole si scriverà la (12) come segue

$$(12') \quad (x/a)^{2/3} \pm (y/b)^{2/3} = 2^{2/3};$$

le curve così rappresentate, essendo reciproca della trinodale armonica, da noi già incontrata (p. 268), furono chiamate dal la Gour-

nerie *trilaterali armoniche*¹⁾; nel caso $a = b$ si ha la curva detta dal Breton (de Champ) *evoluta equilatera*²⁾.

111. L'asteroide regolare dà origine ad un'altra sestica notevole considerandone la podaria rispetto ad un punto della bisettrice di uno degli angoli formato dalle tangenti bicuspidali. Senza parlare dell'asteroide, tale curva si può definire come segue: Un segmento rettilineo PQ di lunghezza $2a$ scorre coi suoi estremi su due rette rettangolari Ox, Oy ; da un punto fisso della F della bisettrice dell'angolo xOy si conducono le perpendicolari FM alle varie posizioni della retta PQ ; il luogo del punto M è una curva che, grazie alla forma che ha in certi casi, si chiama *scarabeo*³⁾. Per rappresentarlo comodamente prendiamo (fig. 59) F per polo e OF per asse polare e chiamiamo c la lunghezza del segmento OF . Conduciamo poi OH e FM perpendicolari a PQ e uniamo O al punto medio R della retta PQ . Indicando al solito con ρ e ω le coordinate polari del punto M , si vede facilmente che $\text{ang } ROH = 2\omega$; e siccome $\overline{OR} = \overline{PQ}/2 = a$ così $\overline{OH} = a \cos 2\omega$. D'altronde $\overline{OH} = \overline{OF} \cos \omega + \overline{FM} = c \cos \omega + \rho$, dunque

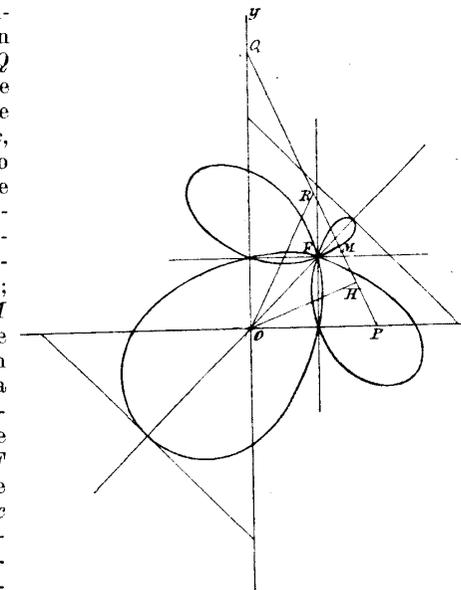


Fig. 59. — Scarabeo.

$$(13) \quad \rho = a \cos 2\omega - c \cos \omega$$

¹⁾ *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques* (Paris 1867), p. 116.

²⁾ *Démonstration d'un théorème sur les développées de l'ellipse et de l'hyperbole* (Nouv. Ann., T. II, 1883, p. 227).

³⁾ CATALAN, *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, T. I (Paris 1857), p. 338.

è l'equazione polare dello scarabeo. Questa è dunque una curva razionale; passando a coordinate cartesiane si ottiene

$$(14) \quad (x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + cx)^2 = a^2 (x^2 - y^2)^2,$$

onde lo scarabeo è di 6° ordine. F ne è un punto quadruplo e ne sono punti doppi le proiezioni di questo punto sopra le rette Ox , Oy ; finalmente i punti ciclici del piano ne sono cuspidi, essendo la retta all'infinito tangente in entrambi.

Nel caso particolare $c = 0$ la (13) diviene $\varrho = a \cos 2\omega$ e rappresenta una speciale rodonea (n. 136), cioè la *rosa a quattro foglie*, detta anche *corolla*¹⁾. Ora ponendo

$$\varrho_1 = a \cos 2\omega, \quad \varrho_2 = c \cos \omega$$

la prima rappresenta una corolla e la seconda il cerchio di diametro c passante per l'origine; e poichè la (13) dà $\varrho = \varrho_1 - \varrho_2$ è chiaro che lo scarabeo può considerarsi come curva cissoidale di una corolla e di un cerchio.

Osserviamo finendo che lo scarabeo è una curva analoga alla podaria dell'origine rispetto all'astroide di equazione

$$(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1;$$

infatti, dette X , Y le coordinate correnti, l'equazione generale della tangente a questa curva è

$$\frac{X}{a(x/a)^{1/3}} + \frac{Y}{b(y/b)^{1/3}} = 1;$$

per ciò l'equazione di quella podaria si otterrà eliminando x e y fra le due equazioni precedenti e quella che segue:

$$a(x/a)^{1/3} X - b(y/b)^{1/3} = 0;$$

è dunque

$$(X^2 + Y^2) (a^2 X^2 + b^2 Y^2) = a^2 b^2 X^2 Y^2,$$

equazione di cui è palese l'analogia con la (14). La curva così rappresentata venne considerata dal Tortolini²⁾, il quale ne eseguì la rettificazione mediante archi d'ellisse.

¹⁾ Cf. W. J. C. MILLER, *Solution of the Question 3648* (Educ. Times, T. XIX, 1874, p. 59-62). M. SIMON (*Analytische Geometrie*, Leipzig 1900, p. 316) la chiama *4-blättriges Kleeblatt*.

²⁾ *Applicazione dei trascendenti ellittici alla quadratura di alcune curve sferiche* (Mem. della Soc. It. delle Scienze, T. XXIV, 1850).

§ 6. LA CURVA DI WATT E LE SUE ANALOGHE¹⁾.

112. Ricordi il lettore la definizione che esponemmo nell'esordio del n. 109 di luoghi ed involuipi olistoidali; ed osservi che, al caso semplicissimo ivi considerato, in cui le direttrici siano rettilinee, segue naturalmente quello in cui una sia rettilinea e l'altra circolare; esso venne da noi già considerato (p. 231) perchè da esso trae origine una speciale quartica poligonale simmetrica. Si presenta quindi, in ordine di difficoltà crescente, quello in cui le direttrici siano entrambe circolari. Esso ha in pratica una grande importanza perchè si presenta nello studio di quel notissimo apparato, immaginato nel 1784 da Giacomo Watt, e detto, appunto perciò, parallelogramma di Watt. In siffatto studio è, in particolare, necessaria la soluzione del seguente problema locale: « Un quadrilatero $ABCD$, la cui base AD è fissa, è articolato in tutti i suoi vertici; trovare il luogo delle posizioni occupate da un assegnato punto M del lato opposto BC ». Chiameremo questo luogo *curva di Watt*²⁾; altri, per ricordare la forma di essa, la chiama *lemniscoide* o (seguendo l'Hachette, *Histoire des machines à vapeur*) *curva a lunga inflessione*³⁾.

Per delineare la curva di Watt si descrivano (fig. 60) le circonferenze (direttrici) aventi per centri i punti fissi A , D e per raggi rispettivi le lunghezze dei lati AB e CD . Si prenda poi ad arbitrio un punto B della prima e si descriva una circonferenza di centro B e di raggio eguale alla lunghezza del lato BC del quadrilatero articolato; essa taglierà la seconda circonferenza direttrice in due punti C' , C'' ; su ciascuna delle rette BC' e BC'' si troverà un punto M della curva di Watt e variando B se ne otterranno infiniti. È chiaro però che in generale non tutti i punti della prima direttrice condurranno a punti reali della curva di Watt; per determinare la regione utile si descrivano le due circonferenze aventi D per centro comune e per raggi $BC \pm CD$, esse determineranno sulla prima direttrice due archi i quali costituiscono la detta regione. Cose simili si possono ripetere scambiando fra loro le funzioni delle due direttrici.

Nulla di più facile del determinare la normale (e quindi la tan-

¹⁾ Estese notizie bibliografiche su questa curva su trovano nell'*Intermédiaire*, T. IV, 1897, p. 184.

²⁾ La sua equazione sembra sia stata stabilita per la prima volta dal PRONY: v. KOENIGS, *Leçons de cinématique* (Paris 1897), p. 262, ove è citato come fonte un'opera di HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

³⁾ A. J. H. VINCENT, *Essai d'une théorie du parallélogramme de Watt* (Mem. de la Soc. de Lille, 1836-37) e *Note sur la théorie du parallélogramme de Watt* (Nouv. Ann., T. VII, 1848); ivi trovasi il nome di *selenoide* per un caso speciale della curva in questione.

gente) in un punto arbitrario M della curva di Watt; se, infatti, $A B C D$ è la corrispondente posizione del quadrilatero articolato, il punto I in cui si tagliano le rette $A B$, $C D$ è il corrispondente centro di istantaneo rotazione; onde $I M$ è normale in M al luogo del punto generatore.

Per trovare l'equazione della curva di Watt assumiamo come asse delle x la retta $A D$ e chiamiamo a_1 e a_2 le ascisse dei punti A e D , R_1 e R_2 i raggi delle circonferenze direttrici, inoltre l_1 e l_2 le lunghezze $B M$ e $M C$; indichiamo finalmente con ω_1 , ω_2 , ω

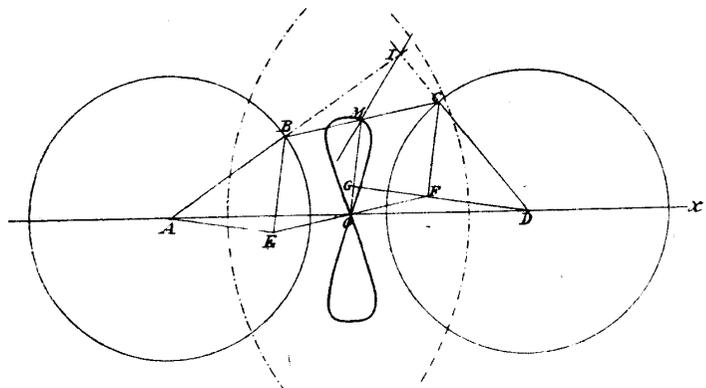


Fig. 60. — Curva di Watt.

gli angoli che le rette $A B$, $D C$, $B C$ formano con la direzione positiva dell'asse delle x . Porremo inoltre per brevità

$$(1) \quad \Gamma_1 = (x - a_1)^2 + y^2, \quad \Gamma_2 = (x - a_2)^2 + y^2$$

onde

$$(x - a_1)(x - a_2) + y^2 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - (a_1 - a_2)^2}{2}$$

Se x , y sono le coordinate di M avremo facilmente le quattro relazioni:

$$R_1 \cos \omega_1 + l_1 \cos \omega = x - a_1; \quad R_1 \sin \omega_1 + l_1 \sin \omega = y$$

$$R_2 \cos \omega_2 - l_2 \cos \omega = x - a_2; \quad R_2 \sin \omega_2 - l_2 \sin \omega = y$$

Eliminando ω_1 fra le due prime equazioni e ω_2 fra le due seconde si trova:

$$\begin{aligned} 2(x - a_1)l_1 \cos \omega + 2y l_1 \sin \omega &= \Gamma_1 - R_1^2 + l_1^2 \\ -2(x - a_2)l_2 \cos \omega - 2y l_2 \sin \omega &= \Gamma_2 - R_2^2 + l_2^2; \end{aligned}$$

eliminando ω fra queste si otterrà l'equazione della curva. Ora se si pone per brevità:

$$\begin{aligned} P &= 2(x - a_1)l_1, & Q &= 2y l_1, & R &= \Gamma_1 - R_1^2 + l_1^2, \\ P' &= -2(x - a_2)l_2, & Q' &= -2y l_2, & R' &= \Gamma_2 - R_2^2 + l_2^2, \end{aligned}$$

il risultato dell'eliminazione si può scrivere sotto l'una o l'altra delle seguenti forme:

$$(2) \quad (P Q' - P' Q)^2 = (P R' - P' R)^2 + (Q R' - Q' R)^2$$

$$(3) \quad (P^2 + Q^2 - R^2)(P'^2 + Q'^2 - R'^2) = (P P' + Q Q' - R R')^2$$

Emerge dalla (2) che della curva di Watt sono doppi i punti soddisfacenti alle equazioni

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{vmatrix} = 0,$$

cioè — per le posizioni fatte —

$$(4) \quad y = 0, \quad \frac{l_1(x - a_1)}{l_2(x - a_2)} + \frac{(x - a_1)^2 - R_1^2 + l_1^2}{(x - a_2)^2 - R_2^2 + l_2^2} = 0;$$

dunque la curva di Watt ha tre punti doppi sul lato fisso del quadrilatero articolato. Sostituendo nella (2) a P, \dots, R' i loro valori si trova:

$$(5) \quad 4 l_1^2 l_2^2 (a_1 - a_2)^2 y^2 = \left\{ x [(l_1 \Gamma_2 + l_2 \Gamma_1) - l_1 R_2^2 - l_2 R_1^2 - l_1 l_2 (l_1 + l_2)] - [a_2 l_2 \Gamma_1 + a_1 l_1 \Gamma_2 - 2 l_1 l_2 (a_1 l_2 + a_2 l_1) - a_1 l_1 R_2^2 - a_2 l_2 R_1^2] \right\}^2 + y^2 \left\{ (l_1 \Gamma_2 + l_2 \Gamma_1) + l_1^3 + l_2^3 - l_1 R_1^2 - l_2 R_2^2 \right\}^2;$$

Essendo quest'equazione di 6° grado si conclude che la curva di Watt è di sesto ordine. Ogni cerchio taglia la curva soltanto in sei punti, invece che in dodici, dunque la curva di Watt ha i punti ciclici del piano per punti tripli, è dunque una sestica tricircolare. Consideriamo in particolare uno qualunque dei cerchi rappresentati dall'equazione

$$l_1 \Gamma_2 + l_2 \Gamma_1 = \text{cost.};$$

ciascuno taglia la curva di Watt in soli quattro punti a distanza finita, onde è bitangente alla curva nei punti ciclici del piano; se in particolare si prende la

$$\text{cost.} = - \frac{(a_1 l_2 + a_2 l_1)^2}{l_1 + l_2}$$

si ottiene il circolo di raggio nullo

$$\left[x - \frac{a_1 l_2 + a_2 l_1}{l_1 + l_2} \right]^2 + y^2 = 0;$$

il suo centro, F , è quindi un fuoco straordinario della curva. Notiamo che essendo

$$OA = a_1, \quad OD = a_2, \quad OF = \frac{a_1 l_2 + a_2 l_1}{l_1 + l_2}$$

si ha

$$\overline{AF}/\overline{FD} = \overline{BM}/\overline{MC},$$

onde F è il punto del segmento AD che lo divide in due parti che stanno nel rapporto BM/MC .

Sostituendo nella (3) a P, \dots, R' i loro valori si ottiene come equazione della curva di Watt la seguente:

$$(6) (\Gamma_1 - \overline{R_1 - l_1^2}) (\Gamma_1 - \overline{R_1 - l_1^2}) (\Gamma_2 - \overline{R_2 + l_2^2}) (\Gamma_2 - \overline{R_2 - l_2^2}) = \\ = \left\{ (\Gamma_1 + l_1^2 - R_1^2 + 2 l_1 l_2) (\Gamma_2 + l_2^2 - R_2^2 + 2 l_1 l_2) - \right. \\ \left. - 4 l_1 l_2 (\overline{l_1 + l_2^2} + \overline{a_1 - a_2^2 - R_1^2 - R_2^2}) \right\}^2;$$

questa è apparentemente di 8° grado, ma in realtà è del sesto perchè nei due membri compare il termine $\Gamma_1^2 \Gamma_2^2$, che può sopprimersi. Essa prova che tutti i circoli di equazione $\Gamma_1 = \text{cost.}$ sono bitangenti alla curva di Watt; in particolare l'equazione $\Gamma_1 = 0$ rappresenta un cerchio di raggio nullo bitangente; il suo centro è dunque un fuoco straordinario; lo stesso potendo ripetersi per $\Gamma_2 = 0$, si conclude che anche i punti fissi A, D sono fuochi straordinari della curva di Watt.

113. La curva di Watt essendo di sest'ordine e dotata di due punti tripli e tre punti doppi, è di genere 1; le coordinate de' suoi punti si potranno quindi esprimere mediante funzioni ellittiche di un parametro. Un modo genialissimo per giungere a siffatta rappresentazione è il seguente, suggerito e completamente svolto dal

Darboux¹⁾: Si chiamino a, b, c le lunghezze dei lati AB, BC, CD del quadrilatero; α, β, γ gli angoli che esse formano col lato fisso AD ; e d la lunghezza di questo. Proiettando la linea spezzata $ABCD$ sulla retta AD e poi sopra una perpendicolare si ottengono le due equazioni:

$$d + a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0, \quad a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 0$$

ossia

$$d + a e^{\pm i\alpha} + b e^{\pm i\beta} + c e^{\pm i\gamma} = 0.$$

Si ponga ora

$$x = e^{i\alpha}, \quad y = e^{i\beta}, \quad z = e^{i\gamma};$$

si otterranno le due equazioni:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a/x + b/y + c/z + d = 0;$$

interpretando x, y, z come coordinate cartesiane di un punto nello spazio queste equazioni rappresentano la cubica in cui il piano $ax + by + cz + d = 0$, taglia la superficie del terz'ordine $a/x + b/y + c/z + d = 0$; ad ogni punto di questa curva corrisponde una posizione del sistema articolato, cioè un punto della curva di Watt; onde rappresentando le coordinate di quella mediante funzioni ellittiche, si otterrà lo stesso per la linea di cui ci occupiamo.

Allo studio della medesima curva furono applicati metodi vettoriali da F. V. Morley²⁾.

Nel caso particolare notevole in cui $\overline{AB} = \overline{CD}$ e M è il punto medio del segmento BC l'equazione della curva di Watt può ottenersi più elementarmente col seguente procedimento segnalato dal Catalan³⁾. Chiamiamo O il punto medio del segmento AD e poniamo:

$$\overline{AD} = 2a, \quad \overline{AB} = \overline{CD} = b, \quad \overline{BC} = 2c;$$

per l'esistenza di un quadrilatero aventi questi lati è necessario e sufficiente che sia

$$|a - b| < c < a + b,$$

e noi supporremo che le costanti a, b, c soddisfacciano a questa

¹⁾ De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan (C. R., T. LXXXVIII, 1879; oppure Bull. des Sciences math., II Serie, T. III, 1879).

²⁾ An analytical treatment of the 3-bar curve (Proc. Lond. Math. Soc., II Ser., T. XXI, 1923).

³⁾ Sur la courbe de Watt (Mathésis, T. V, 1885).

condizione. Conduciamo ora (fig. 60) la retta MO e da BC le parallele ad essa e da O la EF parallela a BC . In conseguenza il quadrilatero $BCFE$ è un parallelogrammo e si ha: $BE = CF$, $OE = OF = MB = MC$. I triangoli OAE e ODF sono quindi eguali, onde, in particolare $AE = DF$ e risultano fra loro parallele le rette a cui appartengono questi triangoli. Ora i triangoli ABE , CDF avendo i lati dell'uno rispettivamente eguali ai lati dell'altro sono fra loro eguali; in particolare $\text{ang } AEB = \text{ang } CFD$; ma questi angoli sono altresì supplementari onde sono retti; e se si prolunga DF finchè tagli OM in G , risulterà retto anche l'angolo OGD . Premesse queste osservazioni, se si chiamano ρ , ω le coordinate polari di M rispetto al polo O ed all'asse AD , avremo:

$$\rho^2 = \overline{OM^2} = \overline{CF^2} = \overline{CD^2} - \overline{DF^2} = b^2 - \overline{FD^2};$$

d'altronde:

$$\overline{FD} = \overline{GD} - \overline{GF} = a \text{ sen } \omega - \overline{GF};$$

$$\overline{FG^2} = \overline{OF^2} - \overline{OG^2} = \overline{MC^2} - \overline{OG^2} = c^2 - a^2 \cos^2 \omega.$$

Dunque

$$\rho^2 = b^2 - \left\{ a \text{ sen } \omega - \sqrt{c^2 - a^2 \cos^2 \omega} \right\}^2,$$

ossia

$$(7) \quad (\rho^2 - a^2 - b^2 + c^2)^2 + 4 a^2 (\rho^2 - b^2) \text{ sen}^2 \omega = 0$$

è l'equazione polare della curva di Watt. Corrispondentemente la equazione cartesiana di essa è:

$$(8) \quad (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 + c^2)^2 + 4 a^2 y^2 (x^2 + y^2 - b^2) = 0$$

La curva di cui si tratta è quindi simmetrica tanto rispetto alla retta AD quanto alla retta che biseca questa ad angolo retto. L'equazione (8) mette in evidenza che punti ciclici ne sono punti tripli e che le corrispondenti tangenti sono $x \pm iy = 0$, $x \pm iy = \pm a$; onde O , A , D sono fuochi straordinari della curva. Questa ha inoltre per punti doppi l'origine e i punti $(\pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, 0)$; questi, quando sono reali, sono punti isolati; mentre l'origine è un nodo od un punto isolato secondochè $a + c \geq b$. Nel primo caso la curva di Watt consta di due foglie congiungentesi per la punta, la quale è un nodo d'inflessione (fig. 60); allora è giustificato il nome di lemniscoide; nell'altro caso si hanno due foglie separate (fig. 61).

Notevole è il caso $c = a$; la (2) si spezza allora nelle due seguenti:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - b^2) + 4 a^2 y^2 = 0,$$

la prima delle quali rappresenta il cerchio di centro O e raggio b , mentre la seconda appartiene ad una lemniscata di Booth (n. 64); se poi si suppone di più $b = a\sqrt{2}$ quest'ultima si riduce ad una lemniscata di Bernoulli (n. 92).

114. Sulla teoria della curva di Watt venne proiettata gran luce quando se ne considerò la generalizzazione che nasce supponendo — i dati essendo quelli stessi considerati in principio del presente Capitolo — di esaminare il luogo di un punto M invariabilmente connesso al lato BC del quadrilatero articolato, ma non posto sopra questo lato. Ora S. Roberts ha dimostrato ¹⁾ questo luogo — chiamato dagli Inglesi *the three-bar curve* e dai tedeschi *koppelkurve* — è ancora una sestica tricircolare la quale ha per fuochi straordinari i punti A , D ed un terzo F tale che i due triangoli ADF , BCM siano simili; rispetto ai tre fuochi straordinari la curva si comporta nell'identico modo, onde, in tutto, è suscettibile di tre generazioni mediante un quadrilatero articolato.

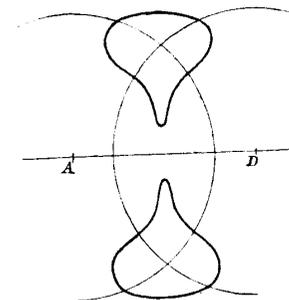


Fig. 61. — Curva di Watt.

Essa ha tre punti doppi sul cerchio circoscritto al triangolo ADF , onde è, come la curva di Watt, una sestica tricircolare di genere 1; ma dipende da una costante di più. A seconda dei valori delle costanti e della posizione del punto mobile assume forme diverse ²⁾.

Dal punto di vista cinematico possiede notevole importanza la « Koppelkurve mit sechspunktig beruhrender Tangente » che R. Müller ha trattato a fondo ³⁾; lo stesso geometra si è occupato di altre speciali Koppelkurven ⁴⁾; ed ha notato che se il punto M si sceglie nel piano del quadrilatero, articolato sopra una certa curva (la cosiddetta « Polkurve ») uno dei punti doppi della curva diviene una cuspidè, se si sceglie sopra un'altra (l'« Uebergangskurve ») di 10° ordine essa acquista un tacnodo, se da ultimo la si sceglie sopra una terza curva (detta « Flachpunktkurve ») di 8° ordine, essa acquista un punto di ondulazione. La prima di tali curve —

¹⁾ V. l'importante memoria *On three-bar motion in plane space* (Proc. of L. M., S. T. VII, 1876); alla quale servono di commento le due di CAYLEY, *On three-bar motion* e *On the bicursal sextic* (Ivi).

²⁾ V. le figure 158 e 159 in CARR, *Synopsis of elementary results in pure and applied mathematics*, Vol. I, Parte II (London 1886).

³⁾ Zeitschr. Mathem. Phys., XLVIII, 1902, p. 208-219.

⁴⁾ *Ueber einigen Kurven, die mit der Theorie des ebenen Gelenkvierecks in Zusammenhang stehen* (Zeitschr. Math. Phys., XLVIII, 1902).

che venne per la prima volta considerata da S. Roberts ¹⁾ — è generalmente una curva di 8° ordine, avente per cuspidi i punti ciclici del piano e per punti tripli i due vertici fissi del quadrangolo articolato; avendo inoltre altri sei punti doppi, è, come la Koppelkurve, del genere 1. L'Uebergangskurve è di 10° ordine e si ottiene dalla Polkurve mediante la trasformazione conforme definita dalla relazione $z' = z^2$. La Flachpunktkurve è pure di 10° ordine ed ha per punti doppi i vertici fissi del quadrilatero articolato e per punti quadrupli i punti ciclici del piano.

Va ancora notato che le considerazioni cinematiche a cui deve la vita la curva di Watt, convenientemente modificate, condussero ad altre analoghe curve d'ordine più elevato. Si consideri, infatti ²⁾, un quadrilatero articolato $OO'R'R$ coi vertici O, O' fissi ed ai cui lati OR e $O'R'$ siano connessi i due triangoli ORS e $O'R'S'$ e si supponga che dai vertici si spicchino i due segmenti SK e $S'K$ articolati in S e S' ; il luogo geometrico del punto K è una curva (detta « Kniekurve ») del 14° ordine avente i punti ciclici per punti settupli. Ma, nel caso in cui i due triangoli ORS e $O'R'S'$ siano direttamente simili, da quella curva si separa la retta all'infinito due volte e resta una curva sei volte circolare, di 12° ordine; in altri casi speciali la retta all'infinito si separa altre volte in numero pari e si ottengono come residui delle curve di 10°, 8° e 6° ordine di notevole importanza cinematica.

La curva di Watt e la sua generalizzazione hanno una grande importanza per alcuni rami della matematica applicata, onde si trovano studiate a fondo nei più moderni trattati di cinematica ³⁾; ivi il lettore troverà più minuti particolari sull'argomento ⁴⁾.

¹⁾ Proc. Lond. Math. Soc., T. III, 1871, p. 312.

²⁾ R. MÜLLER, *Ueber eine gewisse Klasse von übergeschlossenen Gelenkmechanismen* (Zeitschr. Math. Phys., T. XL, 1895). Un'altra curva collegata al moto di un quadrilatero articolato è studiata nella nota di J. CARDINAAL, *Sur une courbe plane de huitième degré* (Arch. Teyler, II Ser., T. X, 1910).

³⁾ Oltre KOENIGS, op. cit., p. 246-262, v. BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik*, T. I (Leipzig 1888), p. 294 e R. BRICARD, *Leçons de cinématique*, T. II, p. 301 e segg. (Paris 1927). Si veda anche buona parte del volume di F. EBNER, *Leitfaden der technisch wichtigen Kurven* (Leipzig 1906).

⁴⁾ Un'altra sestica di definizione analoga è il luogo del vertice C di un quadrilatero $ABCD$ di cui è fisso il vertice A e la bisettrice dell'angolo BAD : v. Journ. de math. spéciales, IV Serie, T. V, 1896, p. 61.

CAPITOLO IV

Curve di sesto ordine (continuazione).

§ 7. LA NEFROIDE E L'ATRIPTALOIDE.

115. Dato un cerchio di centro O e raggio a ed un punto A della sua periferia, si conduce per A una corda arbitraria AB del cerchio e se ne congiunge l'estremo al centro O ; finalmente si porta sopra questa congiungente il segmento $\overline{BP} = \overline{BA}$; il luogo del punto P è la *nefroide* del Freeth ¹⁾.

Preso (Fig. 62) OA per asse polare e O per polo avremo evidentemente $AB = 2 \rho \sin \omega/2$ onde l'equazione polare della curva di cui si tratta è

$$(1) \quad \rho = a + 2a \sin \omega/2.$$

Passando a coordinate cartesiane quest'equazione diviene

$$(2) \quad (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 0.$$

La nefroide è pertanto una curva di sesto ordine avente A per punto triplo e O per punto doppio; tripli sono pure i punti ciclici del piano e ne sono ivi tangenti le congiungenti col punto O ; così le congiungenti di O con i punti ciclici sono bitangenti analoghe. Essa è dunque una curva razionale ²⁾.

¹⁾ V. l'articolo *Freeth's Nephroid* in Proc. of the Lond. math. Soc., T. X, 1879.

²⁾ Le più salienti proprietà della nefroide sono possedute da un'altra curva che può dirsi una generalizzazione; essa è generata nel modo seguente: « È dato un cerchio K , di centro O e raggio a e un punto fisso A della sua periferia; sia D un altro punto del cerchio; col centro in un punto qualunque P_0 di K e col raggio P_0A si descriva un cerchio variabile K e se ne determinino le intersezioni $P'P''$ con la retta P_0D ; il luogo geometrico dei punti P', P'' è una curva che si identifica con la nefroide quando D cade in O , mentre si muta in un trifoglio obliquo se D si trova all'infinito » (Comunicazione fatta all'autore dal sig. E. KÖSTLIN).

Assunto A per polo e OA per asse l'equazione polare della nefroide diviene

$$\rho = 4a \sin \frac{2\omega}{3} \cdot \sin \frac{\omega}{3} = 2a (\cos \frac{\omega}{3} - \cos \omega);$$

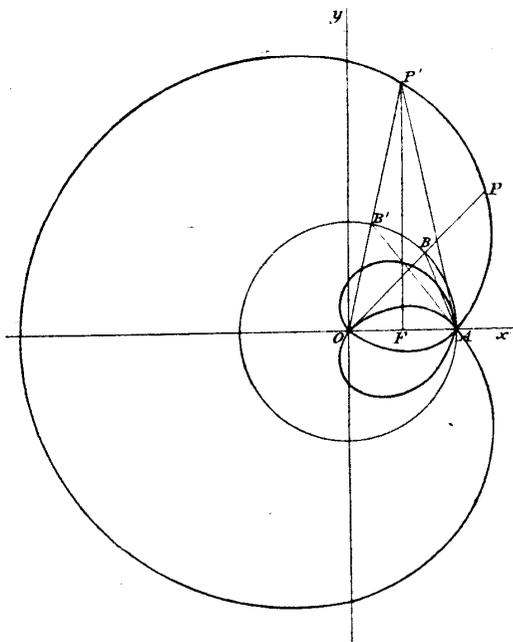


Fig. 62. — La nefroide.

segue da questa che la sua inversa rispetto a un cerchio di centro A e raggio k è

$$k^2/\rho = 2a (\cos \frac{\omega}{3} - \cos \omega);$$

siccome di questa l'equazione cartesiana è

$$(4x + 3h)(x^2 + y^2) - 4(x + h)^3 = 0 \text{ ove } h = k^2/2a$$

così si vede che è una cubica circolare.

L'area descritta del raggio vettore di un punto della nefroide durante una completa rotazione è misurata da

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[3a^2 - 2a^2 \cos \omega + 4a^2 \sin \frac{\omega}{2} \right] d\omega = 3 \cdot \pi a^2 + 2(2a)^2,$$

onde essa equivale al triplo della superficie del cerchio dato, aumentato del doppio del quadrato avente per lato il diametro di quel cerchio.

L'interesse che offre la nefroide sembra concentrarsi esclusivamente nell'applicazione che essa riceve alla costruzione dei poligoni regolari di $7(2^{2^m} + 1)$ lati, supposto primo il numero $2^{2^m} + 1$. Per render conto di siffatto uso, chiamiamo F il punto medio del raggio OA , conduciamo da esso la perpendicolare a questa retta e chiamiamone P' l'intersezione con l'arco esterno della nefroide; sia B' l'intersezione di OP' col cerchio dato. Condotta la corda AB' , nasceranno i due triangoli OAB' , $AB'P$ entrambi isosceli; si chiami φ l'angolo $B'OA$ e ψ il valore comune degli angoli OAB' , $OB'A$. Sarà $\varphi + 2\psi = \pi$. Siccome poi è isoscele anche il triangolo $P'OA$ così si ha $\text{ang } P'AB' = \text{ang } P'B'A = \varphi - \psi$. Considerando finalmente che l'angolo $OB'A$ è esterno al triangolo $B'A P'$ si trova $\psi = 2(\varphi - \psi)$. Le due relazioni così stabilite fra gli angoli φ e ψ diverranno

$$\varphi = \frac{3}{7} \pi, \quad \psi = \frac{2}{7} \pi, \quad \varphi - \psi = \frac{\pi}{7}$$

Ciò prova che, tracciata che sia la nefroide, con riga e compasso si può dividere l'intera circonferenza in sette parti eguali; si potrà poi analogamente eseguire la divisione della stessa in 21 e 35 parti dal momento che

$$\frac{1}{21} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right], \quad \frac{1}{31} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right].$$

Più generalmente: si ricordi che si può dividere *regula et circini* una circonferenza in $2^{2^m} + 1$ parti eguali, purchè questo numero sia primo, e si osservi che esistono sempre due interi α, β tali che sia

$$\frac{1}{7(2^{2^m} + 1)} = \frac{\alpha}{7} - \frac{\beta}{2^{2^m} + 1};$$

se ne dedurrà che — come fu annunciato — la nefroide guida alla divisione del cerchio in $7(2^{2^m} + 1)$ parti eguali.

116. Un'altra categoria di sestiche venne incontrata dal Dottor Haughton nel corso delle sue investigazioni sulla forma che ha la superficie del mare: egli diede loro il nome di *atriphthalassic curves*, nome derivato da $\acute{\alpha}\tau\eta\rho\iota\tau\omicron\varsigma$ = intatto e $\theta\acute{\alpha}\lambda\alpha\sigma\sigma\alpha$ = mare. Emerge fra esse quella che, in coordinate polari, è rappresentata dall'equazione

$$(3) \quad \varrho^2 (\varrho - h) + \frac{k^3}{\cos^2 \omega} = 0:$$

è l'*atriphthaloide* che il Townsend ha studiata¹⁾ e di cui G. de Longchamps ha costruita la tangente²⁾.

L'*atriphthaloide* essendo rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^2 x^2 = (h x^2 - k^3),$$

è una sestica simmetrica rispetto agli assi coordinati. La (3), può riguardarsi come una equazione cubica in ϱ , la quale ha una o tre radici reali secondoche

$$\text{sen}^2 \omega > \frac{4 h^3 - 27 k^3}{4 h^3}.$$

Supposto $4 h^3 - 27 k^3 > 0$ si potranno condurre per O due rette formanti con Ox angoli aventi per seni

$$\pm \sqrt{\frac{4 h^3 - 27 k^3}{4 h^3}};$$

allora ogni retta condotta per O e interna all'angolo da esse formato taglierà l'*atriphthaloide* in 6 punti, ogni retta esterna in due: in tal caso la curva consta di due rami infiniti e due ovali (v. fig. 63). Se invece $4 h^3 - 27 k^3 = 0$, le due ovali diventano infinitesime, cioè sono surrogate da due punti isolati. Se finalmente $4 h^3 - 27 k^3 < 0$, la curva è costituita da due soli serpentine.

Qualunque sia la grandezza relativa delle costanti h, k , la curva ha i punti ciclici del piano per punti doppi; le corrispondenti tangenti avendo per equazioni $x \pm iy = \pm h/2$, si vede che i due punti $x = \pm \frac{1}{2} h, y = 0$ sono fuochi straordinari della curva e che quindi al variare di k la (4) rappresenta ∞^1 atriphthaloidi aventi comuni tali

¹⁾ *On the atriphthaloid and atriphthalid of Dr. Haughton* (Educ. Times, T. XXXVII, 1882) e *On the geometrical properties of the atriphthaloid* (Proc. of the R. Irish Andeeny, 1882).

²⁾ *Construction de la tangente à l'atriphthaloide* (Journ. de math. spéc., IV Serie, T. XVII, 1893).

fuochi. I punti di culminazione hanno per ascisse le radici della equazione

$$2 x^3 \pm h x^2 \pm k^3 = 0,$$

ove i segni superiori si corrispondono e così gli inferiori; queste due equazioni aventi ciascuna una sola radice reale, si hanno così due tangenti doppie reali parallele all'asse delle x . Oltre che i punti ciclici, l'*atriphthaloide* ha all'infinito un altro punto doppio; è il punto all'infinito dell'asse delle y ; quest'asse è la corrispondente tangente; e siccome esso non incontra altrove la curva, così questa presenta all'infinito questa singolarità: due rami che si toccano in un punto che è un flesso per entrambi.

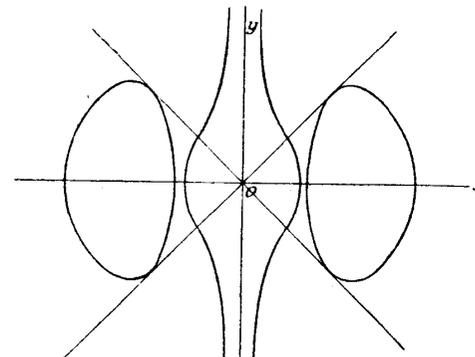


Fig. 63. — Atriphthaloide.

117. Mentre l'*atriphthaloide* deve la vita ad una questione di fisica matematica, da questioni astronomiche fu generata un'altra sestica di cui dobbiamo ora fare menzione.

La formola che dà l'equazione del tempo E in funzione della longitudine vera φ venne posta sotto la forma:

$$E = -462 \text{ sen } (\varphi - \alpha) - 593 \text{ sen } 2 \varphi - 3 \text{ sen } 2 (\varphi - \alpha) + 13 \text{ sen } 4 \varphi,$$

α essendo la longitudine dell'afelio. Trascurando gli ultimi due termini e ponendo:

$$\frac{1}{2} \frac{E}{593} = \varrho, \quad \frac{231}{593} \text{ sen } \alpha = a, \quad \frac{231}{593} \text{ cos } \alpha = b$$

essa diviene

$$(5) \quad \varrho = a \text{ cos } \varphi - b \text{ sen } \varphi - \text{ sen } \varphi \text{ cos } \varphi.$$

Interpretando ϱ e φ come coordinate polari di un punto essa

rappresenta una curva razionale studiata da E. de Jonquières¹⁾: è la sestica suaccennata. In coordinate cartesiane essa ha per equazione:

$$(6) \quad (x^2 + y^2) (x^2 + y^2 - a x + b y)^2 = x^2 y^2,$$

onde l'origine ne è un punto quadruplo con tangenti a coppie coincidenti; ne sono punti doppi i punti $A(a, 0)$ e $B(0, -b)$ e cuspidi i punti ciclici del piano, la retta all'infinito essendo la comune tangente. Questa curva, dal punto di vista proiettivo, non differisce dallo scarabeo; il de Jonquières insegnò a generarle mediante fasci proiettivi di curve d'ordine inferiore.

§ 8. LA CRANIOIDE E LA CAPRICORNOIDE.

118. Ad un'altra sestica fu condotto L. Burmester da alcune ricerche intorno alle ombre di superficie elicoidi²⁾; si costruisce nel piano nel modo seguente: Siano dati (fig. 64) due cerchi Γ e Δ aventi O per centro comune e c, d per raggi; nel loro piano sia poi dato un punto fisso; si conduce per O una retta arbitraria a tagliare risp. in C, D le periferie dei dati cerchi; si unisce C a G e sulla congiungente si determinano i due punti P che distano da D di una data lunghezza; il luogo dei punti P è una curva composta di due ovali interne una all'altra e che, grazie alla sua forma, si chiama *Cranioide* (da $\kappa\rho\alpha\nu\iota\omicron\nu = \text{cranio}$)³⁾. Per trovarne l'equazione assumiamo O per origine e OG per asse delle y ; chiamiamo g il segmento OG , l la lunghezza costante del segmento DP , e φ l'angolo che il raggio mobile OCD forma coll'asse delle x ; le coordinate di C saranno quindi $(c \cos \varphi, c \sin \varphi)$ e quelle di D $(d \cos \varphi, d \sin \varphi)$ onde le equazioni della retta CG e del cerchio di centro D e raggio l , saranno risp.

$$x(g - c \sin \varphi) + c y \cos \varphi = c g \cos \varphi$$

$$x^2 + y^2 - 2 d x \cos \varphi - 2 d y \sin \varphi + d^2 = l^2;$$

scrivendole come segue

¹⁾ Note relative à une courbe du sixième ordre qui se presente en astronomie (Ann. di Mat., T. I, 1858).

²⁾ L. BURMESTER, *Kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojection der Schraubensflächen und insbesondere des Schattens derselben* (Zeitschrift., T. XVIII, 1873), p. 198.

³⁾ L. BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik*, I Bd. (Leipzig 1888), p. 78.

$$(g - y) \cos \varphi + x \sin \varphi = \frac{g x}{c}$$

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{2 d}$$

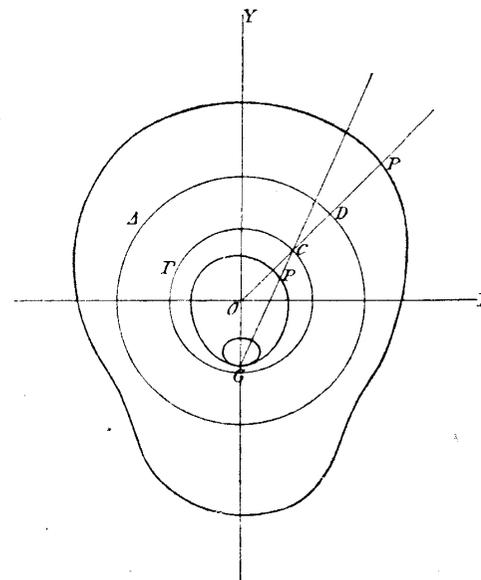


Fig. 64. — Cranioide.

potremo dedurre:

$$(g y - \sqrt{x^2 + y^2}) \cos \varphi = \frac{g x y}{c} - \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{2 d} x$$

$$(g y - \sqrt{x^2 + y^2}) \sin \varphi = -\frac{g x^2}{c} + \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{2 d} (g - y);$$

onde, quadrando e sommando,

$$(1) \quad (g y - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = g^2 x^2 \left[\frac{x^2 + y^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{c d} \right] + \frac{(x^2 + y^2 + d^2 - l^2)^2}{4 d^2} (x^2 + y^2 - 2 g y + g^2);$$

e questa è l'equazione della cranoide: essa prova che tal curva è effettivamente del sesto ordine, come era stato asserito anteriormente. Il Burmester ha segnalate tanto due costruzioni meccaniche della curva, quanto due procedimenti per trovarne in ogni suo punto la normale e quindi la tangente¹⁾.

Senza arrestarci ad esporre le une e gli altri, vogliamo invece indicare un notevole caso speciale della cranoide, il quale fu incontrato, al principio del Sec. XIX, dal Poncelet occupandosi appunto di questioni analoghe a quelle a cui deve la vita la sestica

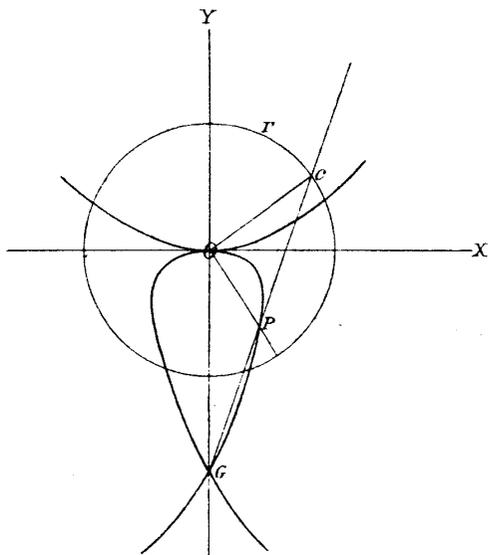


Fig. 65. — Capricornoide.

anzidetta²⁾. Questo caso corrisponde all'ipotesi che d e quindi l siano infiniti. La costruzione indicata diviene allora la seguente: Dato (fig. 65) un cerchio di centro O e raggio c ed un punto G del suo piano, si conduce un raggio arbitrario OC di quel cerchio, quindi la retta GC e da O la perpendicolare a GC ; queste due rette si tagliano in un punto P della curva in questione. Per tro-

¹⁾ Id., p. 79 e seg.

²⁾ Application de la méthode de Roberval du tracé des tangentes aux courbes de contour apparent et de séparation d'ombre et de lumière dans l'épure de la vies à filets triangulaires (Applications d'analyse et de géométrie etc., T. I, Paris 1864, p. 447 e seg.).

varne l'equazione si potrebbe ricorrere ad un passaggio al limite applicato all'equazione della cranoide; ma è più agevole il ragionare direttamente. Mantenendo, infatti, tutte le notazioni precedenti, si vede che le equazioni delle rette GC e OP sono

$$(2) \quad x + y \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad , \quad x(g - c \operatorname{sen} \varphi) + cy \cos \varphi = gc \cos \varphi$$

Eliminando φ si trae:

$$(3) \quad g^2 x^2 (x^2 + y^2) = c^2 (gy - x^2 - y^2)^2;$$

è l'equazione della curva cercata; questa è pertanto una curva del quart'ordine, avente nell'origine un punto di contatto di due rami; notiamo anche che dalle equazioni (2) si trae

$$(4) \quad x = \frac{gc \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{g \operatorname{sen} \varphi - c} \quad , \quad y = -\frac{gc \cos^2 \varphi}{g \operatorname{sen} \varphi - c}$$

onde la curva è razionale. Nel caso in cui G appartenga alla periferia del dato cerchio ($g = c$), la curva ottenuta si confonde con una strofoide. In generale Poncelet osservò¹⁾: « cette courbe du quatrième degré, que nous avons baptisée, dans la salle n. 6, du nom de *capricorne*; courbe remarquable à plus d'un titre, par sa forme symétrique, élégante meme, et douée de nombreuses propriétés géométriques, jusqu'ici encore peu étudiée; etc. »; uniformandosi a tale ragionevole proposta del grande geometra francese, la quartica in questione si chiama *capricornoide*²⁾; essa può generarsi meccanicamente e se ne possono determinare le tangenti col metodo di Roberval.

§ 9. ALTRE SESTICHE NOTEVOLI.

119. Un'altra curva di sest'ordine che venne considerata, se non studiata a fondo, è quella che ha la seguente genesi: « È dato (fig. 66) un cerchio di raggio r e centro O e due sue diametri fra loro perpendicolari AA' e BB' ; sia MM' una sua corda qualunque parallela al diametro AA' ; dal punto M' si abbassa la perpendicolare u alla retta m che tocca in M il dato cerchio; luogo del piede N di questa perpendicolare ».

Per trovare la rappresentazione analitica di siffatto luogo prenderemo i due diametri dati come assi coordinati. Le coordinate di M avranno la forma: $r \cos \varphi$, $r \operatorname{sen} \varphi$ e quelle di M' : $-r \cos \varphi$, $r \operatorname{sen} \varphi$.

¹⁾ Vol. cit., p. 460.

²⁾ BURMESTER, *Kinematik*, T. I, p. 81.

La tangente m sarà quindi rappresentata dall'equazione

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - r = 0$$

e la perpendicolare u della

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi + r \sin 2\varphi = 0.$$

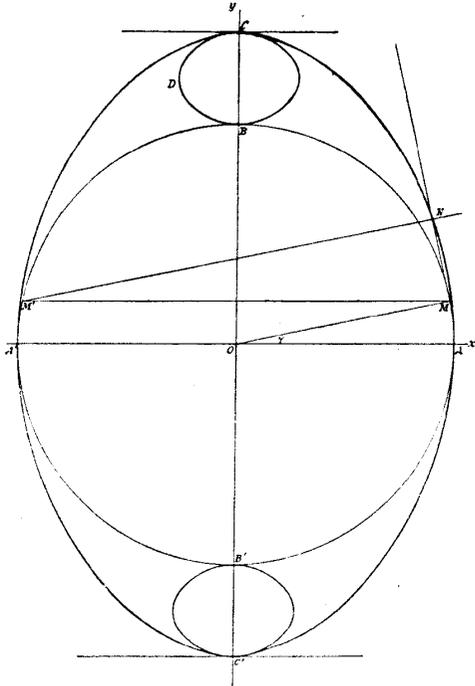


Fig. 66. — Cornoide.

Risolvendo queste rispetto a x e y dedurremo:

$$x = r \cos \varphi - r \sin \varphi \sin 2\varphi, \quad y = r \sin \varphi + r \cos \varphi \sin 2\varphi$$

o, se meglio piace,

$$(1) \quad x = r \cos \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi), \quad y = r \sin \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi)$$

Questo è il modo più comodo per rappresentare analiticamente la curva; introducendo invece del parametro φ la quantità $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$, si ottengono x e y espresse mediante funzioni razionali frazionarie di sesto grado: donde segue che, come si era annunciato, la curva è del sest'ordine, e di più razionale. Si vede poi che è simmetrica tanto rispetto alla retta $A A'$ quanto rispetto alla $B B'$; sulla prima di queste rette essa ha due punti di contatto di due rami C, C' ; la curva inoltre passa nei punti B, B' . Essendo $x^2 + y^2 = r^2 (1 + \sin^2 2\varphi)$ tutti i punti reali della curva stanno nella corona circolare avente per centro O e per raggi r e $r\sqrt{2}$. Eliminando φ le fra equazioni (1) si giunge all'equazione cartesiana seguente:

$$(x^2 + y^2)^3 = 5 r^2 y^4 - 8 r^4 y^2 - 3 r^2 x^4 + 6 r^2 x^2 y^2 + 4 r^6.$$

La curva si può studiare geometricamente considerandola come caso particolare di quelle generate da una conica le cui tangenti siano accoppiate in involuzione. La sua area è $\frac{3}{2} \pi r^2$. A. Saucy, che giudicò opportuno di dedicare un opuscolo speciale a questa curva¹⁾, considerandone soltanto la quarta parte, cioè l'arco che comincia in A e termina in B , la credette di forma analoga ad un corno, e quindi le impose il nome di *cornoide*; da quanto si è detto emerge che, se essa dovesse prendere posto stabile nella geometria, sarebbe consigliabile darle un nome che non sia in aperta antitesi con la forma che possiede.

Pure di sesto ordine è la prima podaria negativa dell'origine rispetto alla foglia doppia

$$\rho = a \cos^2 \omega;$$

essa infatti è l'involuppo della retta

$$x \cos \omega + y \sin \omega = a \cos^2 \omega;$$

ora combinando questa alla sua derivata rispetto a ω

$$-x \sin \omega + y \cos \omega = -2 a \sin \omega \cos \omega$$

si ottiene

$$x = a \cos \omega (1 + \sin^2 \omega), \quad y = -a \sin \omega \cos \omega$$

donde eliminando ω

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4 + 2 a^2 x^2 y^2 - 8 a^2 y^4 - 16 a^4 y^6.$$

¹⁾ La *cornoide* (San Salvador, América central, 1895); v. ancora: W. GAEDCKE, *Ueber die Cornoide und die Maltakreuz* (Jahresber. Deutschen Math., Ver., T. XXVI, 1917); A. PLESKOR, *La construction cinématique de la normale et du rayon de courbure pour la cornoide* (Acad. tchèque des Sciences; Bull. intern., 1926).

Questa è una sestica tricircolare che per la sua forma è detta *croce di Malta*¹⁾; si può dimostrare senza difficoltà che per essa il luogo dei punti da cui partono coppie di tangenti fra loro perpendicolari è una *cornoid*.

Notiamo da ultimo che una speciale ricerca di geometria solida ha condotto A. Grünwald jun.²⁾ a una curva di sesto ordine e sesta classe, pure tricircolare, dotata di quattro cuspidi e sei punti doppi tutti immaginari; in coordinate cartesiane ortogonali essa è rappresentabile mediante l'equazione

$$(x^2 + y^2)^3 = 3r^2x^4 + 3r^2x^2y^2 - r^2y^4 - 3r^4x^2 + r^4y^2 + r^6;$$

variando r si ottengono ∞' curve fra loro simili e che, essendo di forma somigliante a grani di caffè, furono chiamate *caffeoidi*.

¹⁾ Cf. E. CZUBER, *Vorl. über Differential- und Integralrechnung*, II Bd. (Leipzig 1919), p. 239 e 270.

²⁾ *Die bifokale Abbildung von Kreskegeln auf die Punkten der Ebene* (Prager Ber., 1910).

CAPITOLO V

Curve speciali di ordine determinato superiore a sei¹⁾.

§ 1. CURVE D'ORDINE PARI.

120. Curve di settimo ordine s'incontrano assai di rado in ricerche matematiche²⁾: come esempio citeremo il luogo dei centri delle coniche concentriche e fra loro simili, una delle quali è inscritta in un triangolo circoscritto all'altra, luogo che consta della retta all'infinito e di una curva appunto del detto ordine³⁾. In generale s'incontrano raramente curve di ordine dispari: abbastanza numerose sono quelle di ordine pari, fra cui emergono quelle connesse alla teoria delle coniche e di cui ci occuperemo anzitutto, dopo avere segnalate le ricerche topologiche di carattere generale, relativi alle curve di 8° ordine con due punti quadrupli⁴⁾.

a) Se su ogni diametro dell'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ si porta a partire dal centro un segmento eguale al raggio di curvatura nell'estremo, si ottiene la curva di equazione polare e cartesiana rispettivamente

$$(1) \quad ab\varrho = (a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)^{3/2}, \quad a^2 b^2 (x^2 + y^2)^4 = (a^2 y^2 + b^2 x^2)^3;$$

B. Tortolini che l'ha studiata per primo⁵⁾ ha dimostrato che, mentre

¹⁾ Alcune furono già citate nel Capitolo precedente come collegate alla considerazione di un quadrilatero articolato.

²⁾ Nel corso di una ricerca meccanica J. I. VAES (*Etude mathématique sur la transmission par bielle et nominelle*, Ann. Ec. polyt. de Delft, T. VII, 1897, p. 131) incontrò la curva di equazione $(x - y)(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 l^2 x^2$ che chiamò *curva d'accelerazione*; è razionale e costituita da un unico ramo dispari.

³⁾ V. la già citata (p. 284) Diss. del DÖRHOLT.

⁴⁾ ELISABETH BUCHANAN COWLEY, *Plane curves of the eight order with two four-fold points having distinct tangent and no other singularities* (Diss. Columbia Univ., 1908).

⁵⁾ Sulla curva luogo geometrico dei raggi di curvatura d'un'ellisse data (Ann. di matem., T. VI, 1864).

la quadratura si può ottenere elementarmente, la rettificazione esige integrali iperellittici.

b) È pure di 8° ordine il luogo dei vertici delle coniche bitangenti a due cerchi dati ¹⁾.

c) Il luogo dei punti da cui partono coppie di tangenti fra loro perpendicolari a due coniche è in generale di 8° ordine; se però le linee date sono circonferenze, essa si spezza in due lumache di Pascal ²⁾.

d) Nel piano di un'ellisse **E** il luogo dei punti *P* tali che il cerchio di centro *P* tangente alla polare di questo punto riesca anche tangente a **E** è una curva di 12° ordine ³⁾.

e) Se *P* è un punto di un'ellisse di fuochi *F* e *F'*, esiste almeno una conica tangente in *F* e *F'* risp. a *PF* e *PF'* e inoltre alla data ellisse; il luogo del suo centro è di 12° ordine ⁴⁾.

f) Il luogo del piede della perpendicolare calata dal centro di un'ellisse sopra la congiungente gli estremi di due diametri coniugati è di 14° ordine; lo stesso dicasi quando si considera invece la congiungente i centri di curvatura negli estremi anzidetti ⁵⁾.

g) Fra le coniche tangenti a tre date rette, se ne trovano sei di dati assi ⁶⁾; ciò prova che le coniche di dati assi tangenti a due rette costituiscono un sistema avente per seconda caratteristica 6; applicando, quindi, un teorema di Chasles, si vede che il luogo dei fuochi delle coniche di un tale sistema è una curva di 18° ordine e che i punti ciclici ne sono sestupli.

h) Se da ogni punto di una curva si conduce una retta formante un dato angolo α con la corrispondente tangente e si porta su di essa da quel punto un segmento di lunghezza assegnata si ottiene una curva che si dice *equisoclina* della data. Se $\alpha = \pi/2$ si ha in particolare una curva *parallela* alla data (v. Lib. VII, Cap. V), mentre se $\alpha = 0$ si ha la curva *equitangenziale* (v. Lib. VI, Cap. XXI). Se, ad es., si parte dall'ellisse

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

si vede facilmente che, dette x, y le coordinate di un punto qualunque della corrispondente isoclina, si avrà

¹⁾ Un anonimo e DUJARDIN in Interm., T. XII, 1905, p. 236-40.

²⁾ G. ESPANET, Id., T. IX, 1902, p. 217.

³⁾ V. RETALI, Id., T. VIII, 1901, p. 335.

⁴⁾ WELSCH e HENDLE, Id., T. IV, 1897, p. 12.

⁵⁾ Vari, Ivi, T. XIII, p. 176-80.

⁶⁾ J. STEINER, Ges. Werke, T. II, p. 345; cfr. G. LORIA, Giorn. di matem., T. XXIV, 1586, p. 206.

$$\frac{x - a \cos \varphi}{a \sin \varphi \cos \alpha + b \cos \varphi \sin \alpha} = \frac{y - b \sin \varphi}{a \sin \varphi \sin \alpha - b \cos \varphi \cos \alpha} = \frac{l}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$$

Da ciò subito la rappresentazione parametrica della curva e il mezzo per dimostrare che è di 8° ordine. Se s'introducono le funzioni ellittiche di modulo $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, ponendo

$$\sin \varphi = \operatorname{cn} u, \quad \cos \varphi = \operatorname{sn} u, \quad \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \operatorname{dn} u$$

si giunge a quest'altra rappresentazione parametrica della curva:

$$x = a \operatorname{sn} u + \frac{l}{a} \frac{a \cos \alpha \cdot \operatorname{cn} u + b \sin \alpha \cdot \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$$

$$y = b \operatorname{cn} u + \frac{l}{a} \frac{a \sin \alpha \cdot \operatorname{cn} u - b \cos \alpha \cdot \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u},$$

dove emerge che la stessa è una curva ellittica.

i) Di 8° ordine sono anche in generale le conoidi delle coniche, di cui fecesi cenno nel n. 69.

121. Di ordine pari è anche la seguente curva, suggerita da ricerche astronomiche ¹⁾.

Il problema di determinare il corso di una cometa mediante tre osservazioni guida allo studio dell'equazione seguente:

$$(1) \quad m - z = \frac{m}{(1 - r \cos \psi + z^2)^{3/2}}$$

ove m e ψ sono costanti dedotte dall'osservazione e z è l'incognita. Se ora si pone

$$(2) \quad x = z - \cos \psi, \quad m y = m - \cos \psi - z,$$

si trasforma l'equazione precedente in quest'altra

¹⁾ W. H. YOUNG (Miss Grace Chisolm), *On the curve* $y = \frac{1}{x^2 + \sin^2 \psi} \sqrt{x^2 + \sin^2 \psi}$ and its connection with an astronomical problem (Month. Notices of the R. Astron. Society, Marzo 1897).

$$(3) \quad y = \frac{1}{(x^2 + \operatorname{sen}^2 \psi)^{3/2}}$$

epperò la ricerca di z è ricondotta alla determinazione dell'intersezione della retta (2) con la curva (3). Ora questa razionalizzata diviene

$$y^2 (x^2 + \operatorname{sen}^2 \psi)^3 = 1$$

e rappresenta appunto una curva di 8° ordine, simmetrica rispetto agli assi; essa ha per punti di culminazione quelli di coordinate $(0, \pm \operatorname{sen}^{-3} \psi)$ e per flessi quattro punti di ascisse $\pm \frac{1}{2} \operatorname{sen} \psi$. Il punto all'infinito di Oy è sestuplo e quello all'infinito di Ox doppio. Nel caso $\psi = \pi/2$ l'equazione (3) diviene

$$y = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}},$$

e rappresenta una curva utilizzata da tempo dal Binet¹⁾ con analoghi scopi.

Altra curva d'ordine pari: La questione n. 539 delle *Nouvelles Annales de Mathématiques*²⁾ si enuncia così: «trouver une courbe qui représente les trois folioles du *trifolium pratense*». Essa venne risolta da H. Brocard nel modo seguente:

Immaginiamo una curva chiusa Γ convessa e simmetrica rispetto ad un asse, avente sopra tale asse una cuspid C e tagliante ortogonalmente l'asse stesso in O ; si prenda O per polo e quell'asse di simmetria per asse polare, e, senza mutare i raggi vettori dei singoli punti, se ne triplichino gli argomenti. Si trasformerà Γ in una curva composta di tre foglioline eguali e simmetriche rispetto ad un asse, ciascuna con una cuspid. Ogni curva Γ dell'indicata natura conduce perciò ad una soluzione del problema enunciato.

Come curva Γ può servire la cardioide che, in coordinate polari r e u , ha per equazione:

$$(3) \quad r = a (1 - \cos u);$$

siccome essa ha la sua cuspid nel polo e taglia ortogonalmente l'asse polare nel punto $u = \pi$, $r = 2a$, così bisognerà fare un cambiamento di coordinate assumendo questo punto per nuovo polo. Dette ϱ , ω le nuove coordinate del punto (r, u) sussisteranno le relazioni

¹⁾ *Mémoire sur la détermination des orbites des planètes et des comètes* (Journ. Ec. polyt., 20 Cah., 1831).

²⁾ *Nouv. Ann. de math.*, III Ser., T. IV, 1894, p. 58*.

$$\frac{r}{\operatorname{sen} \omega} = \frac{\varrho}{\operatorname{sen} u} = \frac{2a}{\operatorname{sen}(u - \omega)}.$$

Nelle coordinate ϱ , ω la cardioide è quindi rappresentata come segue:

$$a^2 (\varrho^2 - 4a\varrho \cos \omega + 4a^2) = (\varrho^2 - 3a\varrho \cos \omega + 2a^2)^2$$

Mutando ivi ω in 3ω si ha

$$a^2 (\varrho^2 - 4a\varrho \cos 3\omega + 4a^2) = (\varrho^2 - 3a\varrho \cos 3\omega + 2a^2)^2$$

come equazione polare del *trifolium pratense*; la sua equazione cartesiana è per conseguenza

$$a^2 \left[x^2 + y^2 - 4ax \frac{x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2} + 4a^2 \right] = \left[x^2 + y^2 - 3ax \frac{x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2} + 2a^2 \right]^2$$

Se ne può trarre la conferma che la curva corrispondente ha tre assi di simmetria formanti fra loro angoli $= 2\pi/3$ e tre cuspidi distanti dal peduncolo della lunghezza $2a$.

122. Chiuderemo questo paragrafo dando notizia di due curve d'ordine pari, aventi un'origine fisico-matematica.

a) A. Cayley¹⁾ ha chiamate *equipotenziali* le curve che, in un sistema di coordinate bipolari, sono rappresentate da un'equazione della forma

$$\frac{l}{\varrho} + \frac{l_1}{\varrho_1} = 1,$$

l e l_1 essendo lunghezze date; esse sono di 8° ordine. Se ne ottiene una conveniente rappresentazione parametrica osservando che la equazione precedente è soddisfatta, qualunque siano λ e μ , ponendo

$$\varrho = l \frac{\lambda + \mu}{\lambda}, \quad \varrho_1 = l_1 \frac{\lambda + \mu}{\mu}$$

Ora se si assume come asse delle x la congiungente dei due punti fissi e come origine il centro O del segmento $2a$ che essi limitano, le equazioni precedenti divengono:

¹⁾ *Phil. Magazine*, T. XIV, 1857, o *Collected Papers*, T. III, p. 258.

$$x^2 + y^2 + a^2 - 2ax = l^2 \frac{(\lambda + \mu)^2}{\lambda^2}$$

$$x^2 + y^2 + a^2 + 2ax = l_1^2 \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu^2}$$

e queste danno

$$x = \frac{(\lambda + \mu)^2 (l^2 \mu^2 - l_1^2 \lambda^2)}{4a\lambda^2 \mu^2}$$

$$(4a\lambda^2 \mu^2 y)^2 = [(\lambda + \mu)(l\mu + l_1\lambda) + 2a\lambda\mu][(\lambda + \mu)(l\mu - l_1\lambda) + 2a\lambda\mu] - [(\lambda + \mu)(l\mu + l_1\lambda) - 2a\lambda\mu][(\lambda + \mu)(l\mu - l_1\lambda) - 2a\lambda\mu]$$

Da una congenere rappresentazione analitica F. Gomes Teixeira¹⁾ ha dedotte alcune proprietà metriche delle curve equipotenziali; citiamo le seguenti: È costante la somma delle distanze da un fuoco delle intersezioni della curva con una retta arbitraria del suo piano e così il prodotto delle distanze delle analoghe distanze dalle intersezioni della curva con una retta condotta ad arbitrio per l'altro fuoco.

Le dette curve, come le cosiddette *curve di livello*

$$\frac{l}{\rho} + \frac{l_1}{\rho_1} + \frac{l_2}{\rho_2} = 0,$$

hanno una parte importante nella fisica-matematica²⁾.

b) Si dice che un corpo possiede una « simmetria cinetica » quando risultano fra loro eguali i suoi momenti d'inerzia rispetto a tutti gli assi passanti per il suo baricentro. Secondo Laplace³⁾, dopo la sfera, il corpo più semplice avente simmetria cinetica è quella generato dalla rotazione della curva

$$\rho^5 = a^5 + l^5 (7 \cos^4 \omega - 6 \cos^2 \omega);$$

ora, siccome passando a coordinate cartesiane quest'equazione diviene

$$(x^2 + y^2)^5 = [a^5 (x^2 + y^2)^2 + l^5 (7y^4 - 6y^2(x^2 + y^2))]^2,$$

così la curva rappresentata è di 18° ordine, ha nell'origine un punto

¹⁾ Arch. f. Math. u. Phys., III Ser., T. III, 1902, p. 132.

²⁾ Cfr. HOLZMÜLLER, *Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig, 1882).

³⁾ *Mécanique céleste*, T. III.

ottuplo e passa nove volte nei punti ciclici del piano. A seconda dei valori delle costanti a, l essa assume varie forme¹⁾.

Notiamo finalmente che annessa a una lettera scritta dal Tschinhausen a Huygens li 12 maggio 1687 si trova la figura di una curva simmetrica rispetto a un asse e dotata di 25 punti doppi²⁾; di quale curva si tratti è ignoto; secondo il Barbarin³⁾ sarebbe di 16° ordine.

§ 2. CURVE D'ORDINE DISPARI.

123. a) È di 15° ordine il luogo dei punti medi dei segmenti limitati ciascuno da un punto di una curva di terzo ordine e dall'ulteriore punto d'incontro con la curva della tangente corrispondente⁴⁾; se però la curva data è una strofoide l'ordine si abbassa all'ottavo⁵⁾.

b) I punti di contatto delle tangenti condotte da un punto del suo piano alle curve di un fascio di quartiche aventi comuni tre punti doppi e quattro punti semplici è una curva di 7° ordine e 24ª classe con tre punti tripli, mentre è di 15° classe l'involuppo delle tangenti d'inflessione delle curve del fascio e di 15° ordine il luogo dei loro flessi (questo ha tre punti settupli⁶⁾).

c) La teoria delle funzioni di variabili complesse che vedemmo intervenire nello studio delle spiriche (n. 63), delle lumache di Pascal (n. 70), delle asteroidi regolari (n. 109) e delle isocline (n. 120), guida alla considerazione di una famiglia di curve, di cui il primo individuo è un'interessante curva di nono ordine a cui spetta un posto nel presente Capitolo.

Ricordiamo che si dà il nome di funzioni lemniscatiche alle funzioni ellittiche di modulo i . Se quindi si pone

$$(1) \quad u = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^4}}$$

sarà $x = \operatorname{sn} u$ la prima delle funzioni lemniscatiche e $\operatorname{cn} u = \sqrt{1 - x^2}$, $\operatorname{dn} u = \sqrt{1 + x^2}$ le due altre. Dalla (1) si deduce

¹⁾ T. HELLER *Der einfachste Körper, welchen kinetische Symmetrie besitzt* (Progr. Nürnberg, 1902-03).

²⁾ *Oeuvres complètes de Huygens*, T. IX, p. 152.

³⁾ *Une curiosité géométrique* (Procès-Verb. Bordeaux, 1905).

⁴⁾ STEINER, *Ges. Werke*, T. II, p. 488.

⁵⁾ *Interméd.*, T. VII, 1900, p. 357 e VIII, 1901, p. 73.

⁶⁾ R. PIRKOSCH, *Das Büschel von Kurven 4ter Ordnung mit 3 festen Doppel-punkten und 4 festen einfachen Punkten* (Progr. Breslau, 1907).

$$i u = \int_0^x \frac{i d \xi}{\sqrt{1 - \xi^4}};$$

ossia, ponendo $i \xi = \eta$,

$$i u = \int_0^{ix} \frac{d \eta}{\sqrt{1 - \eta^4}};$$

se ne deduce

$$i x = \operatorname{sn}(i u)$$

cioè

$$\operatorname{sn}(i u) = i \operatorname{sn} u$$

In conseguenza

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cn}(i u) &= \operatorname{dn} u \\ \operatorname{dn}(i u) &= \operatorname{dn} u \end{aligned} \right\} (2)$$

La prima dimostra che, posto

$$(3) \quad x + i y = \operatorname{sn}(m + n i) u$$

sarà

$$(4) \quad y + i x = \operatorname{sn}(m i + n) u,$$

onde le curve nascenti dalla rappresentazione geometrica della funzione $\operatorname{sn}(m + n i) u$ non differiscono, se non per la posizione rispetto a gli assi, da quelle provenienti in modo analogo dalla funzione $\operatorname{sn}(m i + n) u$. Sono appunto le curve rappresentate dalla (3), supponendo m, n interi fra loro primi, che costituiscono la famiglia suddetta¹⁾. Siccome cambiando nella (3) u in $-u$, x e y cambiano soltanto di segno, così tali curve sono simmetriche rispetto all'origine; questa è un flesso per tutte.

Nel caso più semplice $m = n = 1$ si ha, ponendo per brevità $\operatorname{sn} u = \lambda$,

$$x + i y = \frac{\lambda + i \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^4}}, \text{ onde } x = y = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^4}};$$

la linea corrispondente è una retta.

Per trattare il caso seguente $m = 1, n = 2$, osserviamo anzitutto che è

$$\operatorname{sn}((1 + i) u) = \frac{\lambda + i \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^4}}, \quad \operatorname{cn}((1 + i) u) = \frac{1 - i \lambda^2}{\sqrt{1 - \lambda^4}},$$

¹⁾ W. KRIMPHOFF, *Ueber eine neue Kurvengattung, welche aus der lemniskatischen Funktion entspringt* (Dissertation, Münster 1890).

$$\operatorname{dn}((1 + i) u) = \frac{1 + i \lambda^2}{\sqrt{1 - \lambda^4}};$$

applicando, quindi, ancora il teorema di addizione si trova:

$$x + i y = \operatorname{sn}((1 + 2 i) u) = \frac{\lambda(1 + 2 i) - \lambda^5}{1 - (1 + 2 i) \lambda^4};$$

e quest'eguaglianza si scinde in queste due altre

$$(5) \quad x = \frac{\lambda - 6 \lambda^5 + \lambda^9}{1 - 2 \lambda^4 + 5 \lambda^8}, \quad y = \frac{2 \lambda - 2 \lambda^9}{1 - 2 \lambda^4 + 5 \lambda^8},$$

che rappresentano una curva razionale Γ del nono ordine. Eliminando λ si trova che l'equazione di Γ è:

$$(6) \quad (2x + y)(x^2 + y^2)^4 + 2y(5x^4 + 10x^2y^2 - 3y^4) - 2x + y = 0;$$

questa prova che la curva in questione ha i punti ciclici del piano per punti quadrupli e per punto semplice il punto all'infinito della retta $2x + y = 0$; il parametro di questo è $\lambda = \infty$, i parametri di quelli $\sqrt[4]{1 \pm 2i}$ (sono queste le radici dell'equazione $1 - 2\lambda^4 + 5\lambda^8 = 0$). La curva Γ essendo razionale deve avere, oltre quei due punti quadrupli, sedici punti fra doppi e cuspidi. Per trovare i relativi parametri, si osservi che ad un punto doppio competono due distinti valori; detti questi λ_1, λ_2 dovrà dunque essere

$$\frac{\lambda_1(1 + 2i) - \lambda_1^5}{1 - (1 + 2i)\lambda_1^4} = \frac{\lambda_2(1 + 2i) - \lambda_2^5}{1 - (1 + 2i)\lambda_2^4}.$$

Tale equazione è divisibile per $\lambda_1 - \lambda_2$; il quoziente si spezza nelle due seguenti equazioni reali:

$$(\lambda_1^2 \lambda_2^2 - 1)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 - 4 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0,$$

$$(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 1)^2 + 2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0.$$

Queste equazioni sono risolubili algebricamente e ammettono 4 soluzioni reali e 12 immaginarie; Γ ha quindi 4 punti doppi reali (v. fig. 67). Allo stesso risultato si giunge per via trascendente; e si vede così che la determinazione dei punti doppi della curva Γ equivale al problema della cinque-sezione della lemniscata.

Supponendo di prendere nella (3) $m = 1, n = 3$ si ottiene una curva non razionale; ma se si suppone $m = 2, n = 3$ si ottiene

similmente una curva razionale del 25° ordine ¹⁾ della quale i punti ciclici del piano sono multipli secondo il numero 12; all'infinito la curva ha anche un punto reale; di più dei 144 punti doppi che essa possiede, 12 sono reali (v. fig. 68) ²⁾.

Questi cenni sono sufficienti a provare che la teoria delle funzioni lemniscatiche è un germe fecondo di notevoli curve razionali.

Chiudiamo osservando che

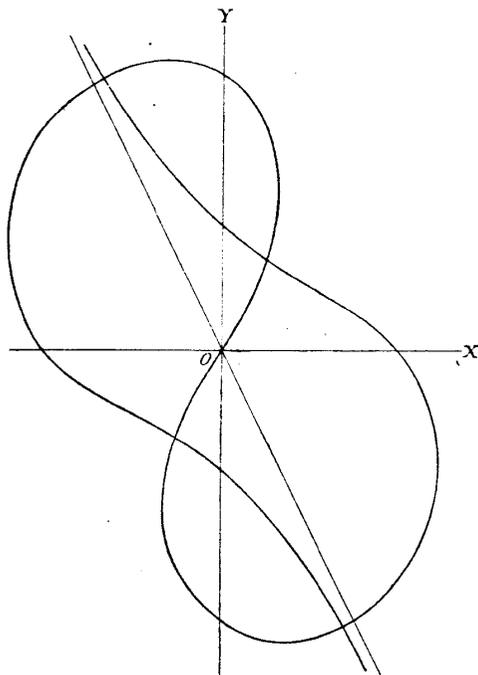


Fig. 67. — Curva di 9° ordine.

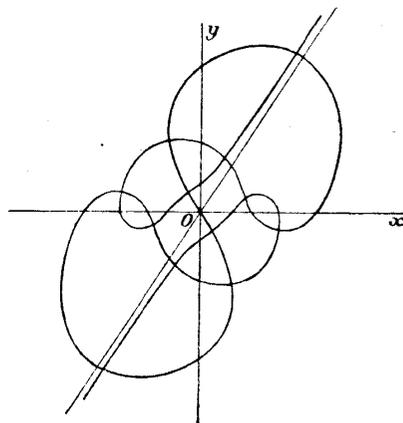


Fig. 68. — Curva di 25° ordine.

altre curve particolari di vari ordini s'incontrano come casi speciali di quelle a cui è dedicato il seguente Libro.

¹⁾ W. KRIMPHOFF, *Neue geometrische Darstellung der lemniscatischen Function* (G. di Crelle, T. CX, 1892).

²⁾ Per induzione si conclude che se m e n sono numeri primi relativi, uno pari e l'altro dispari si arriva ad una curva dell'ordine $(m+n)^2$ avente all'infinito un punto reale semplice e di cui i punti ciclici sono multipli secondo $\frac{(m+n-1)(m+n+1)}{2}$; la curva ha inoltre $\frac{(m+n-1)(m+n+1)^2}{2}$ punti doppi, di cui soltanto $\frac{(m+n-1)(m+n+1)}{2}$ sono reali.

LIBRO V.

CURVE ALGEBRICHE PARTICOLARI DI ORDINE QUALUNQUE.

CAPITOLO I

Generalità.

124. L'odierna geometria, oltre che di un grande numero di curve algebriche di ordine determinato, è ricca di molte curve di ordine arbitrario, ma dotate di prerogative speciali, alle quali si giunse partendo da svariatissimi concetti. Ad alcune si pervenne generalizzando la costruzione di curve già conosciute: le curve cissoidali e le cissoidi generali (n. 29), le strofoidali e le strofoidi generali (n. 41), le curve conoidali e le conoidi a base qualunque (n. 69) possono addursi come esempi dei buoni risultati a cui tale processo generalizzatore può condurre, quando venga abilmente applicato. Altre si ottennero generalizzando l'equazione di una curva: così dall'equazione della foglia di Cartesio si ottenne quelle di infinite curve d'ordine dispari (n. 34); e analogamente si giunse alle cardioidi stellate (n. 72) ed ai nodi (n. 85): vedremo in questo Libro (Cap. II-VI) come la medesima via condusse alle parabole ed alle iperboli di ordine qualunque, alle perle, alle curve triangolari di Lamé ed alle polizomiali, tutte curve da riguardarsi quali « generalizzazioni analitiche delle sezioni coniche ». Questo metodo di estendere il concetto di una curva generalizzando una delle equazioni con cui essa può rappresentarsi, presenta l'inconveniente di essere un po' vago, essendo illimitato il numero dei modi in cui si può rappresentare analiticamente una curva; onde alcuni preferirono di generalizzare la definizione di una curva prendendo le mosse da qualche notevole proprietà geometrica da essa posseduta: così ebbero vita le curve di Darboux e le equilateri di P. Serret che fra breve (ved. Cap. VII del presente Libro) impareremo a conoscere come ef-

fettive « generalizzazioni geometriche delle coniche ». Nuove curve si ottennero cercando quelle linee dotate di prestabilite proprietà di forma; è un concetto al quale Augusto Comte dava grande importanza, che vedemmo applicato nella ricerca del *trifolium pratense* (n. 121) e che nel presente Libro troveremo (Cap. VIII-X) come germe della teoria delle rodonee, delle foglie geometriche, delle curve orbiformi e triangolari di Eulero e delle ovali. Estremamente fecondi in curve nuove ed importanti furono il problema di Delo generalizzato e quello della divisione di un angolo in un certo numero di parti eguali: essi condussero alle curve *moltiplicatrici* o *mediatrici* ed alla estesissima classe di *curve settrici*, il cui esame è riservato ai Cap. XI-XII di questo Libro.

Un altro germe fecondo di nuove curve esiste nella dottrina delle trasformazioni geometriche; non ci arresteremo di regola alle curve nascenti dall'applicazione di trasformazioni note a linee pur note, chè il loro studio non offre generalmente difficoltà nè interesse¹⁾, e di quelle più importanti tratteremo nel Libro VII; ma nel presente includeremo invece la considerazione di alcune curve aventi la proprietà di corrispondere a sè medesime rispetto a certe trasformazioni geometriche: tali sono le curve che hanno centro oppure qualche diametro, le autopolari e le anallagmatiche, di cui

¹⁾ Facciamo un'eccezione alla regola generale in favore di una trasformazione algebrica connessa alla geometria del triangolo e che si ottiene come segue (cfr. la nota di G. LORIA, *Sur deux classes d'enveloppes*, in Archives de mathématiques, 1^{re} année, 1907): È noto che in qualunque triangolo ABC il centro di gravità, il punto d'incontro delle altezze ed il centro del cerchio di FEUERBACH si trovano sopra una retta e , la *retta di Eulero* del triangolo. Ora se si tengono fissi i punti A, B e si fa variare il punto C sopra una determinata linea, la retta e si muoverà involuandone un'altra. Fra i punti $C(x, y)$ e le rette $e(u, v)$ ha quindi luogo una corrispondenza; per determinare la natura assumiamo come asse delle x la retta AB e come origine il punto medio del segmento AB . Si vede allora che (indicando con X, Y coordinate correnti) l'equazione della retta e è

$$X(3x^2 + y^2 - 3a^2) + 2xyY + x(a^2 - x^2 - y^2) = 0$$

onde

$$u = \frac{3x^2 + y^2 - 3a^2}{x(a^2 - x^2 - y^2)}, \quad v = \frac{2y}{a^2 - x^2 - y^2},$$

epperò

$$ux + vy + 3 = 0, \quad v(a^2 - x^2 - y^2) = 2y.$$

Tali relazioni provano che fra i punti C e le rette e passa una corrispondenza (1, 2). Alcune applicazioni di tale corrispondenza si leggono nella Diss. di F. MÜHLEMANN, *Enveloppen der Euler'schen Geraden* (Bern, 1905).

Altra eccezione va fatta riguardo alle curve d'ordine $3n$ nascenti applicando a una cubica circolare una trasformazione isogonale della forma $u + iv = \varphi(x + iy)$, φ essendo un polinomio di grado n , perchè si mostrarono utili in questioni di analisi. (N. PERRY, *Das Problem der konformen Abbildung für eine spezielle Kurve des Ordnung $3n$* — Diss., München, 1901).

parleremo nei Capitoli XIII-XIV. La rappresentazione geometrica dei numeri complessi, da cui già raccogliemmo qualche frutto (n. 113), ci condurrà pure a importanti classi di linee (Capitolo XV); e ad altre (Cap. XVI-XVIII) la ricerca — un caso particolare della quale vedemmo (n. 20) eseguita dal Raffy — delle curve il cui arco è esprimibile col mezzo di trascendenti di natura prestabilita; finalmente altre curve vennero concepite trattando questioni di fisica (Cap. XVII), onde rientrano nella grande coorte delle curve fisico-matematiche.

Prima di accingerci a svolgere il programma che abbiamo schizzato nelle linee precedenti, osserviamo che a molte curve speciali si giunse anche rappresentando geometricamente le formole relative a certe speciali teorie; due esempi di siffatte generazioni sono offerti dalle curve definite nei nn. 117, 121 e 123. Un altro è offerto dalle *curve di Hermite* aventi per equazione generale

$$U_{m,n} = \frac{\delta^{m+n} (x^2 + y^2 - 1)^{m+n}}{\delta x^m \cdot \delta y^n} = 0 \quad (1)$$

di cui solo recentemente si è cominciato lo studio²⁾.

Un terzo di valore più grande, proviene dalla teoria delle funzioni ellittiche. È noto che effettuando sopra una tale funzione una trasformazione di ordine determinato, fra il modulo p della funzione primitiva ed il modulo q della trasformata ha luogo una relazione algebrica, la quale, interpretando p, q come coordinate cartesiane di un punto, rappresenta una curva. Orbene le *curve modulari* vennero considerate nei casi più semplici dal Cayley³⁾ ed in tutta la loro generalità da H. J. S. Smith⁴⁾, che riuscì a determinarne tutte le caratteristiche pluckeriane; basti questo cenno sopra un tema che interessa più l'analista che il geometra.

¹⁾ Cfr. una memoria di HERMITE nel T. LX (1865) dei *Comptes rendus* e APPELL, *Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels* (Arch. f. Math. u. Phys., III Ser., T. IV, 1902).

²⁾ TRAMUR, *Geometrische Diskussion des Hermite'schen Polynoms* (Diss., Zürich, 1908) e WILLIGENS, *Sur les polynoms $U_{m,n}$* (Nouv. Ann. de mathém., IV Ser., T. XI, 1909). Se uno dei numeri m, n è eguale a 1 la curva si spezza in un certo numero di ellissi coassiali.

³⁾ *A memoir on the transformation of elliptic functions* (Phil. Trans., Vol. CLXIV, 1874). V. anche il successivo articolo *On the transformation of elliptic functions* (Am. Journ., T. IX, 1887), ove sono anche considerate le *multiplier-modular curves or MM-curves*.

⁴⁾ *On the singularities of modular equations and curves* (Proc. of the Lond. math. Soc., T. IX, 1878). Cfr. anche l'antioriore *Mémoire sur les équations modulaires* (Mem. Lincei, 3^a Serie, T. I, 1877) ed il posteriore *Memoir on the theta and omega functions* (Collected math. Papers, T. II, Oxford, 1894, p. 415 e seg.).

125. Osserviamo finendo che fra le curve algebriche se ne incontrano assai spesso di razionali; le coordinate di un punto qualunque di una tale curva si possono esprimere mediante funzioni razionali di un parametro, che si possono trovare applicando un metodo generale dovuto al Clebsch¹⁾; però in casi speciali conviene scegliere vie più brevi, determinate caso per caso, come risulta dagli esempi seguenti²⁾:

Si consideri la curva Γ d'ordine n rappresentata dalla seguente equazione

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) = 0$$

ove $f_r(x, y)$ indica una forma di grado r delle coordinate cartesiane x, y . Si ponga

$$y = tx, \quad f_r(1, t) = T_r$$

e si trasformerà l'equazione precedente in quest'altra

$$\sum_{r=0}^{r=n} x^r T_r = 0;$$

se la risolve rispetto a x e poi si sostituiscono i valori trovata nelle $y = tx$ si otterrà una rappresentazione parametrica della data curva; in generale le formole trovate contengono funzioni trascendenti; se però, con un cambiamento del parametro si possono sostituire con espressioni razionali, Γ sarà di genere $p = 0$.

Applichiamo³⁾ questo schema di calcolo alla curva

$$x^{n+1} = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} y^r;$$

otterremo

$$x = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^r, \quad y = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^{r+1};$$

applicandolo invece alla curva

$$x^{n-1} = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} x^{n-r} y^r$$

¹⁾ Ueber diejenigen Kurven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind (Journ. f. Math., T. LXIV, 1865).

²⁾ HAHN, Eulers Methode der Parameterdarstellung algebraischer Kurven (Progr. Berlin., 1889).

³⁾ Cfr. G. CRAMER, Introduction citata, p. 636.

otteniamo

$$x = \frac{1}{\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^r}, \quad y = \frac{t}{\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^r}$$

Se finalmente consideriamo la curva¹⁾

$$f_m^2 - f_2 f_{m-2} = 0$$

giungiamo alle formole seguenti:

$$x = \frac{T_{m-2}}{T_m} \sqrt{T_2}, \quad y = \frac{T_{m-2}}{T_m} \sqrt{T_2};$$

ora è noto che si può sostituire t con un parametro τ tale che t e $\sqrt{T_2}$ siano espresse in funzione razionale di τ ; allora anche x e y saranno espressi in modo analogo.

Trattando similmente l'equazione

$$f_m^2 - 2 f_1 f_m f_{m-2} + f_2 f_m^2 = 0$$

nascono le formole

$$x = \frac{T_{m-2}}{T_m} (T_1 + \sqrt{T_1^2 - T_2}), \quad y = \frac{T_{m-2}}{T_m} (T_1 - \sqrt{T_1^2 - T_2})$$

le quali, con lo stesso artificio di prima, si possono trasformare in espressioni razionali.

¹⁾ C. HERMITE, Cours d'analyse, I Partie (Paris, 1873), p. 242.

CAPITOLO II

Le parabole di ordine qualunque.

126. Dall'equazione $y^2 = p x$, che rappresenta in coordinate cartesiane un'ordinaria parabola, si assurge, generalizzando, alle curve rappresentate dall'equazione

$$(1) \quad y^n = p^{n-1} x,$$

ove n è un numero intero positivo arbitrario: sono le *paraboloidi* o *parabole d'ordine superiore* (rettangole od obliquangole secondochè gli assi sono ortogonali od obliqui) che vennero concepite e studiate da parecchi illustri geometri nella prima metà del secolo XVII. La più antica menzione di esse si trova in una lettera scritta da Descartes addì 13 luglio 1638 ¹⁾, nella quale sono enunciati alcuni teoremi atti a determinarne i baricentri ed i volumi che esse generano rotando. Circa contemporaneo è uno scritto di Fermat ²⁾ diretto a Cavalieri, pel tramite del P. Mersenne, prima del 1644, ove è assegnata l'espressione dell'area di un segmento di parabola e del volume che esso genera ruotando attorno all'asse, nonchè i baricentri di quella superficie e di questo solido. Questi importanti risultati vennero divulgati dal P. Mersenne col riprodurli nella « Prefatio ad *Mechanica* » della sua *Cogitata physico-mathematica* (1644). Importa osservare che tali ricerche di Fermat risalgono ad epoca di parecchie anteriori al 1644. Infatti in una lettera che egli diresse a Roberval il 22 settembre 1636 ³⁾ è fatto cenno di quadrature da lui eseguite, in particolare di quella della parabola $y^3/x = \text{cost.}$ « que M. Beau-grand... appelle *parabole solide* »; nella risposta — datata 11 ottobre 1636 — Roberval dice di avere trovata la dimostrazione delle pro-

posizioni scoperte dal suo illustre corrispondente ¹⁾. Allora Fermat annunciò — lettera del 4 novembre 1636 ²⁾ — la scoperta dei teoremi concernenti « le centre de gravité de toutes ces nouvelles figures ». E su questo soggetto ritornò nelle lettere allo stesso Roberval del 16 dicembre 1636 ³⁾ e al P. Mersenne del 10 agosto 1638 ⁴⁾ e poi, con tutta la diffusione desiderabile, nel celebre lavoro che tratta *De aequationum localium transmutatione et emendatione*, che vide la luce soltanto nel 1679 ⁵⁾. Tenendo conto della data di pubblicazione la priorità di alcuni fra questi risultati spetterebbe in primo luogo a Bonaventura Cavalieri, il quale li fece conoscere nella quarta delle sue *Exercitationes mathematicae* (Bonomiae 1647), in secondo luogo a Stefano degli Angeli, autore di un importante lavoro *De infinitis parabolis, de infinitisque solidis ex variis rotationibus ipsarum etc.* (Venet. 1654), e finalmente al Wallis che di parabole superiori si è diffusamente occupato nella sua *Arithmetica infinitorum* (Oxon. 1655) e poi nel suo trattato delle *Sezioni coniche* (1665): tale coincidenza di risultati diede luogo ad amari lamenti da parte del Cavalieri ⁶⁾ ed uno scambio di lettere fra il Wallis e Fermat ⁷⁾; a noi pare non sia il caso di supporre malafede da parte di alcuno, perchè, i tempi essendo maturi per le indagini sulle parabole superiori, non deve recar meraviglia che parecchi siansi accinti e siano riusciti ad eseguirle ⁸⁾.

Va notato che i primi che si occuparono delle parabole superiori non ne studiarono la forma; onde, in particolare, lasciarono e al de l'Hopital ⁹⁾ e al Maclaurin ¹⁰⁾ di osservare che presentano forme differenti secondochè n è pari o dispari: nel primo caso la curva è simmetrica rispetto all'asse delle x ed ha nell'origine, coll'altro asse,

¹⁾ Id., p. 81.

²⁾ Id., p. 85.

³⁾ Id., p. 95.

⁴⁾ Id., p. 165.

⁵⁾ In *Varia opera*; v. anche *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 255-285.

⁶⁾ Si legge infatti in una lettera che egli diresse G. ROCCA addì 17 Ottobre 1646: « Il signor Torricelli... ha dimostrata anch'egli la quadratura delle infinite parabole (come le hanno chiamate in Francia)... per via diversissima; il quale teorema ella sa ch'io lo proposi in Francia, sebbene ora si fanno là inventori del medesimo: ma io cito per testimonio il P. MERSENNE, al quale lo mandai, ed il P. NICERONI che vedendo l'ultimo problema della mia centuria dove io lo accenno, disse di volerlo proporre colà, siccome lo propose al BEAUGRAND. Insomma, si vede anche in loro anche in questa parte una emulazione grande cogli Italiani ». G. PIOLA, *Elogio di Bonaventura Cavalieri*, (Milano) 1844, p. 55-56.

⁷⁾ V. il *Commercium epistolicum de quaest. quibusdam inter J. Wallis et alios viros* (Oxon., 1658) e il T. III delle *Oeuvres de Fermat*.

⁸⁾ Se ne occupò anche il TORRICELLI in una memoria che vide la luce soltanto nelle sue *Opere* (ed. LORIA e VASSURA), T. I (Faenza, 1919), pagine 275-328.

⁹⁾ *Sections coniques* (Paris, 1720), p. 339-42.

¹⁰⁾ *A treatise of algebra* (1748), p. 317-8.

¹⁾ *Oeuvres de Descartes*, éd. ADAM e TANNERY, T. II (Paris, 1898), p. 246.

²⁾ Venne pubblicato per la prima volta nelle *Oeuvres de Fermat* (ed. TANNERY et HENRY), T. I, p. 195-198.

³⁾ *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 73.

un contatto d'ordine $n - 1$; nel secondo essa è simmetrica rispetto all'origine ed ha ivi un flesso. Va ancora notato che ben presto si generalizzò la primitiva definizione di parabola, ammettendo che l'esponente n invece di essere intero e positivo fosse semplicemente razionale e positivo; in altri termini si considerò in luogo della equazione (1) la seguente

$$(2) \quad y^{m+n} = p^m x^n;$$

le curve corrispondenti sono indicate col nome di *parabole parametriche* in un'antica memoria del Kuntzen ¹⁾, il noto maestro di Kant. L'origine ne è un punto n -plo ed il punto all'infinito di Ox un punto m -plo; siccome dall'equazione (2) si trae la seguente rappresentazione parametrica

$$(3) \quad x = p \lambda^{m+n}, y = p \lambda^n$$

così tutte le curve considerate sono razionali.

127. Le proposizioni metriche concernenti le parabole superiori sono in gran parte estensioni di teoremi noti sin dai tempi di Archimede per le parabole del second'ordine e possono stabilirsi con poche righe di calcolo; lo mostreremo ora ragionando sull'equazione (1), ma senza supporre che n sia intero (lo chiameremo perciò *indice* della curva), nè che l'angolo α degli assi coordinati sia retto.

Detta S_t la sottangente, dalla (1) si trae:

$$S_t = x - y \frac{dx}{dy} = x - \frac{ny^n}{p^{n-1}} = x - nx = -(n-1)x;$$

dunque per costruire la tangente in un punto qualunque P della parabola di indice n basta portare sull'asse delle ascisse un segmento $-(n-1)$ volte l'ascissa, chè il suo estremo congiunto a P con una retta sarà la tangente ²⁾. Sia S l'area del triangolo mistilineo avente per lati un arco di curva contato dall'origine e le coordinate del suo punto estremo; avremo:

$$S = \text{sen } \alpha \int_0^x y dx = \text{sen } \alpha \int_0^x p^{\frac{n-1}{n}} x^{\frac{1}{n}} dx = \frac{n}{n+1} \frac{y^{n+1}}{p^{n-1}} \text{sen } \alpha;$$

¹⁾ *Theoremata nova de parabolis infinitis eadem parametro et circa eandem axim descriptis* (Acta eruditorum Lips. 1737).

²⁾ DE L'HÔPITAL, *Sections coniques* (Paris 1720), p. 156; WALLIS, *Opera omnia*, T. I (Oxon. 1695), p. 351-353. V. anche la I Parte della memoria di J. SOBOTKA *Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plankurven* (Praga Ber. 1898), ove trovasi pure indicata una costruzione del centro di curvatura.

d'altronde, se si chiama T è l'area del triangolo rettilineo che ha gli stessi vertici del triangolo mistilineo suddetto, si ha

$$T = \frac{1}{2} \text{sen } \alpha \cdot xy = \frac{y^{n+1}}{2 p^{n-1}} \text{sen } \alpha;$$

perciò

$$\frac{S}{T} = \frac{2n}{n+1},$$

relazione elegante ¹⁾ che per $n = 1$ coincide con una scoperta da Archimede (*Quadratura della parabola*, prop. 24).

Si supponga ora $\alpha = \pi/2$ e si chiami V il volume che genera l'anzidetto triangolo curvilineo rotando attorno a Ox ; si avrà

$$V = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi \int_0^x p^{\frac{2(n-1)}{n}} x^{\frac{2}{n}} dx = \frac{n\pi}{n+2} p^{\frac{2(n-1)}{n}} x^{\frac{n+2}{n}};$$

ora il volume U generato dalla rotazione attorno a Ox del rettangolo avente per lati consecutivi x, y è dato da

$$U = x \cdot \pi y^2 = \pi p^{\frac{2(n-1)}{n}} x^{\frac{n+2}{n}};$$

è per conseguenza

$$\frac{V}{U} = \frac{n}{n+2},$$

relazione che esprime un teorema facile da enunciarsi a parole ²⁾.

Detta g l'ascissa del centro di gravità del segmento compreso fra un arco di parabola ed una parallela a Ox si ha:

$$g = \frac{\int_0^x xy dx}{\int_0^x y dx} = \frac{\int_0^x x (p^{u-1}x)^{\frac{1}{n}} dx}{\int_0^x (p^{u-1}x)^{\frac{1}{n}} dx} = \frac{\int_0^x x^{\frac{n+1}{n}} dx}{\int_0^x x^{\frac{1}{n}} dx} = x \frac{n+1}{2n+1},$$

onde

$$\frac{x-g}{g} = \frac{n}{n+1},$$

risultato valevole anche per assi obliqui e che per $n = 2$ era noto ad Archimede (v. op. cit.).

¹⁾ WALLIS l. c., p. 353.

²⁾ Ivi.

Chiamato finalmente s l'arco della curva avremo

$$ds = \frac{1}{p^{n-1}} dx \sqrt{p^{2n-2} + u^2 x^{2n-2}};$$

ds è dunque espresso da un differenziale binomio, il quale è integrabile in termini finiti se uno dei numeri

$$\frac{1}{2n-2}, \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2}$$

è intero; cioè se, detto ν un intero, si ha

$$\frac{1}{2n-2} = \nu \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2} = \nu;$$

scrivendo queste così

$$n = 1 + \frac{1}{2\nu}, \quad n = 1 + \frac{1}{2\nu - 1}$$

si vede che quando $n = 1 + 1/\mu$, μ essendo un intero arbitrario, la parabola di indice \hat{u} è rettificabile; variando μ si ottengono infinite curve dotate di siffatta prerogativa.

128. Considerando la curva rappresentata dalle equazioni (3) si vede che, come equazione generale della sua tangente, si può assumere la seguente:

$$(4) \quad nx - (m+n)\lambda^m y + mp\lambda^{m+n} = 0,$$

onde le coordinate pleckeriane di una tangente qualunque sono

$$\xi = \frac{n}{mp\lambda^{m+n}}, \quad \eta = -\frac{m+n}{mp\lambda^n}$$

perciò

$$(5) \quad \eta^{m+n} = \pi^m \xi^n$$

è la forma generale dell'equazione tangenziale della curva. Avendo quest'equazione lo stesso aspetto della (1), si conclude che, ogni parabola risulta eguale alla propria polare reciproca rispetto ad un cerchio convenientemente scelto¹⁾.

¹⁾ GENOCCHI in *Nouv. Ann.*, T. XIII, 1854, p. 132-136.

L'equazione della normale nel punto (x, y) alla curva (3) ha per equazione

$$(6) \quad (m+n)(X-x)y^{m+n-1} + up^n(Y-y)x^{n-1} = 0,$$

ove X, Y sono coordinate correnti. Onde se, viceversa, è dato il punto (X, Y) , per trovare le normali condotte da esso alla curva bisognerà determinare i valori di x, y che soddisfanno quest'equazione e la (2); ora moltiplicando la (5) per y e tenendo conto della (2) essa diviene

$$(6') \quad (m+n)(X-x)x + n(Y-y)y = 0,$$

che può surrogare la (6); siccome questa rappresenta una conica passante per l'origine e siccome l'origine è un punto n -plo della parabola considerata, così si hanno elementi per concludere il seguente teorema: per ogni punto del piano P di una parabola d'indice $(m+n)/n$ passano $2m+n$ normali della curva; i loro piedi stanno su una conica passante per l'origine e pel punto P stesso¹⁾.

Cercando l'involuppo delle rette rappresentate dalla equazione (6) si arriva all'evoluto della curva in esame e a concludere che si tratta di una curva di un ordine espresso dal maggiore dei numeri $3m$ e $2m+n$; per una parabola d'indice intero n l'ordine è $3(n-1)$.

Ogni parabola di indice intero o frazionario, rappresentabile cioè con un'equazione dei tipi (1), (2), è determinata quando, oltre gli assi, si conosce il parametro p . Invece di assegnare questa costante si può determinare la curva dandone un punto: se (x_0, y_0) sono le coordinate di questo, le (1) (2) vengono surrogate dalle equazioni seguenti:

$$(1') \quad \left[\frac{y}{y_0} \right]^n = \left[\frac{x}{x_0} \right], \quad \left[\frac{y}{y_0} \right]^{m+n} = \left[\frac{x}{x_0} \right]^n \quad (2')$$

Si può dedurre dalla prima una costruzione per punti di tutte le parabole di indice intero²⁾. Sia infatti (fig. 69) A il punto (x_0, y_0) e sia $\overline{OB} = y_0$, $\overline{BA} = x_0$, si prenda ad arbitrio l'ordinata $\overline{OM} = y$, e da M si conduca la retta m parallela a Ox . Si proietti A da O su m in $P_1(x_1, y)$; essendo O, A_1, P punti collineari avremo

¹⁾ *V. Nouv. Ann.*, Question 1131 proposta dal PAINVIN e risolta nel Vol. XIII (2^a Serie), 1874.

²⁾ Cfr. PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, 1887), p. 74. — La costruzione esposta nel testo suppone gli assi ortogonali; con evidenti modificazioni può adattarsi al caso di assi obliqui.

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{y}{y_0}.$$

Si proietti P_1 ortogonalmente in A_1 sulla parallela b condotta da B a Ox e quindi A_1 da O su M in $P_2(x_2, y)$; essendo collineari anche i punti $O A_1 P_2$ si ha similmente

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y}{y_0}.$$

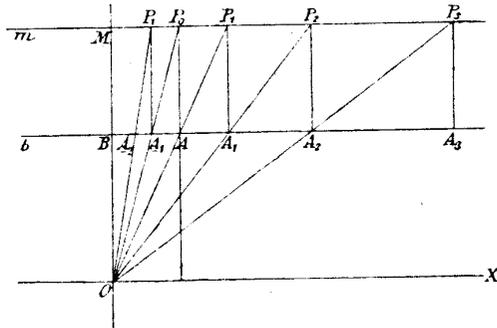


Fig. 69. — Costruzione delle parabole.

Operando similmente sopra P_2 nasceranno i punti $A_2, P_3(x_3, y)$ ecc.; finalmente $A_{u-1}, P_u(x_u, y)$; e sussisteranno le relazioni

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{y}{y_0}, \frac{x_2}{x_1} = \frac{y}{y_0}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} = \frac{y}{y_0}, \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{y}{y_0};$$

moltiplicandole fra loro si trova:

$$\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^u = \left(\frac{y}{y_0}\right)^n,$$

relazione che dimostra che il punto P_n appartiene alla parabola d'indice n rappresentata dall'equazione (1'). Variando l'ordinata $OM = y$ si otterranno quanti si vogliono punti della curva in questione. Possiamo aggiungere che proiettando A ortogonalmente in P_0 su m , quindi P_0 da O su B in A_{-1} , poi A_{-1} ortogonalmente su m in P_{-1} , ecc. si otterrà la serie di punti

$P_0(x_0, y), A_{-1}(x_{-1}, y_0), P_{-1}(x_{-1}, y), \dots, A_{-n}(x_{-n}, y_0), P_{-n}(x_{-n}, y)$

e la serie di eguaglianze:

$$\frac{x_0}{x_{-1}} = \frac{y}{y_0}, \frac{x_{-1}}{x_{-2}} = \frac{y}{y_0}, \dots, \frac{x_{-n+1}}{x_{-n}} = \frac{y}{y_0},$$

da cui

$$\frac{x_0}{x_{-u}} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^u$$

ossia

$$\frac{x_{-u}}{x_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-n};$$

per conseguenza il punto P_{-n} appartiene alla parabola di indice $-n$ rappresentata dall'equazione $x/x_0 = (y/y_0)^{-n}$.

Il metodo testè esposto per costruire tutte le parabole di indice intero guida alla costruzione per punti anche di tutte le curve paraboliche¹⁾, cioè di tutte quelle che possono rappresentarsi mediante equazioni del seguente tipo:

$$y = \sum_{r=0}^{r=n} \alpha_r x^r;$$

costruendo infatti le n parabole rappresentate delle equazioni

$$y_r = \alpha_r x^r$$

si ha $y = \sum_{r=1}^{r=n} y_r$. Siffatte curve hanno una certa importanza alge-

brica. In primo luogo perchè il problema di risolvere un'equazione algebrica equivale a quello di trovare l'intersezione di una curva parabolica col relativo asse delle ascisse; appunto per ciò vennero costruiti strumenti con cui esse possono descriversi con moto continuo²⁾. Ed in secondo luogo perchè esse intervengono nel calcolo approssimato delle aree piane; appunto perciò la determinazione delle aree delle curve paraboliche diede occasione, anche di recente, a indagini importanti³⁾. Esse però non sono dotate di salienti

¹⁾ Newton *Opuscula mathematica, philosophica et philologica*. T. I (Lans. et Gen. 1744), p. 271-282; ove è risolto il problema: « invenire lineam curvam generis Parabolici, quae per data quotcunque puncta transibit ». Cf. MAGNUS, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze auf der analytischen Geometrie* (Berlin 1833), p. 260.

²⁾ SEGNER, *Methodus simplex et universalis omnes omnium aequationum radices detegendi* (Nov. Comment. Petrop., T. VII, 1761); ROWNING, *A machine for finding the roots of equations* (Phil. Trans., 1770).

³⁾ SCHOUTE, *L'aire des paraboles d'ordre supérieur* (C. R., T. CXXII, 1896); KORTWEG, *Sur le théorème énoncé par M. P. H. Schoute* (Ivi); MAN-

proprietà geometriche ¹⁾, onde non reputiamo opportuno attardarci a considerarle più a lungo, e preferiamo chiudere questo Capitolo enumerando le parabole speciali più notevoli.

129. I. La più celebre è incontestabilmente la prima delle parabole rettificabili a cui giungemmo nella chiusa del n. 127; essa ha per indice $n = 3/2$ e per equazione $y^3 = p x^2$. La si chiama ordinariamente *parabola semicubica*, seguendo la proposta di Wallis; è la più antica curva algebrica rettificabile ²⁾. La rettificabilità di essa venne avvertita dal francese Fermat ³⁾, dall'inglese Neil ⁴⁾ e dall'olandese Heuraet ⁵⁾; donde i nomi differenti con cui viene indicata la curva di cui ci occupiamo ⁶⁾.

La parabola semicubica gode grande celebrità anche perchè risolve il seguente problema meccanico che Leibniz propose nel corso della sua celebre disputa con i Cartesiani: « Trovare una linea percorrendo la quale un punto si muove uniformemente, cioè accostandosi all'orizzonte di spazi eguali in tempi eguali ». Questo problema venne risolto subito (8 ottobre 1687) da Huygens ⁷⁾, la cui soluzione venne commentata da Leibniz ⁸⁾; se ne occuparono più tardi tanto Giacomo ⁹⁾ quanto Giovanni Bernoulli ¹⁰⁾ ed il Mau-

NOURY, *Sur la note de M. Schoute* (Ivi). Per $n = 3$ una curva parabolica è determinata da due punti e le relative tangenti; per costruirle si può ricorrere al procedimento esposto di P. KEELHOFF nella nota *Construction d'une parabole cubique* (Mathesis, T. XXXIX, 1925).

¹⁾ La più notevole è forse la seguente: esse sono le uniche curve algebriche di cui tutte le penultime polari sono ordinarie parabole; v. E. KANSER, *Determinations of the algebraic curves whose polar conics are parabolas* (Amer. Journ., T. XXVI, 1904). V. anche W. A. VERLUYS, *On satellite points ou Curves given by the equations, $x = a t^2$, $y = b t^q$* (Proc. Acad. Amsterdam, T. XX, 1918).

²⁾ S. A. CHRISTENSEN, *The first determination of the length of a curve* (Bibl. mathem., 1887).

³⁾ V. il lavoro *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione* (Oeuvres de Fermat, T. I, p. 181 e 186).

⁴⁾ La scoperta del NEIL venne pubblicata nel 1659 dal WALLIS (cf. WALLIS, *Opera math.*, T. I, p. 550-554; ed inoltre una lettera scritta dallo stesso a HUYGENS addì 9 Giugno 1673 e pubblicata nel T. VII, p. 305-309 delle *Oeuvres de Huygens*).

⁵⁾ V. l'edizione fatta dallo SCHOOTEN nel 1659 della *Geometria di DESCARTES*.

⁶⁾ « Sic rectificata Curva Nelii, et Curva Heuratii, et Curva demum Fermatii, eadem est mea Paraboloides Semicubicali », scrisse il WALLIS a LEIBNIZ in data 6 Aprile 1697 (Lebniz ed. Gerhardt, T. IV, p. 18).

⁷⁾ *Nouvelles de la Républiques des Lettres*, Ottobre 1687 (Leibniz ed. Gerhardt, T. V, p. 237).

⁸⁾ Leibniz ed. Gerhardt, T. V, p. 234-243.

⁹⁾ *De inventione lineae descensus a corpore gravi percurranda uniformiter* (Acta erud. 1690; Jacobi Bernoulli Opera, T. I, p. 421-426).

¹⁰⁾ V. le XXXIII e XXXIV delle *Lectiones mathematicae* (Joh. Bernoulli, *Opera omnia*, T. III, p. 482-486).

pertuis ¹⁾ lo generalizzò notevolmente. La parabola semicubica, considerata come risoltrice del riferito problema di meccanica porta il nome di *curva isocrona* o anche di *curva descensus aequabilis*.

La stessa curva s'incontra nella teoria delle evolute. Se infatti si cerca il luogo dei centri di curvatura della parabola $y^2 = 2 p x$ si ottiene la curva $8 (x - p)^3 = 27 p y^2$ che è evidentemente una parabola semicubica. Tale circostanza venne anzi utilizzata da Huygens per dimostrare la rettificabilità della curva in questione ²⁾. Si conosce anche uno speciale apparato per descriverlo meccanicamente ³⁾. Notiamo anche che le prime polari di tutti i punti della retta $3y + p = 0$ rispetto alla parabola $y^3 = p x^2$ sono circonferenze.

II. In un manoscritto di Leibniz datato 11 novembre 1675 ed intitolato *Methodi tangentium inversae exempla* si legge il seguente problema: « Trovare le curve in cui il segmento dell'asse intercetto fra la normale e l'ordinata è inversamente proporzionale all'ordinata stessa » ⁴⁾. Esso si traduce nella seguente equazione differenziale: $y dy/dx = m^2/y$; ora questa scritta come segue $y^2 dy = m^2 dx$ s'integra subito e dà $y^3 = 3 m^2 (x - x_0)$; dunque la curva cercata altro non è che una *parabola cubica*. Essa non è rettificabile (v. la chiusa del n. 127); ma Giovanni Bernoulli ha scoperto esistere in essa delle coppie di archi a differenza rettificabile ⁵⁾; lo dimostreremo fra breve (p. 367) come corollario di un teorema più generale.

III. In una lettera ad Huygens del 29 ottobre 1637 ⁶⁾ F. Schooten attrasse l'attenzione del grande geometra olandese sopra la curva rappresentata dall'equazione

$$(6) \quad x + y = \sqrt[4]{a x^3};$$

ed Huygens a sua volta la segnalò a R. de Sluse in una lettera del successivo 2 novembre ⁷⁾. Nessuno dei citati geometri si avvide

¹⁾ *La courbe de descensus aequabilis dans un milieu résistant comme une puissance quelconque* (Mém. de Paris, 1730).

²⁾ *Opera varia* (Leida 1724), p. 100.

³⁾ MATTHIESSEN, *Ueber die mechanische Construction einiger Curven welche sich zu Auflösung des Problems von der Duplication des Würfels verwenden lassen* (Arch. T. XLVIII, 1868).

⁴⁾ GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland* (München 1877), p. 147.

⁵⁾ V. l'importante memoria *Theorema universale rectificationi linearum curvarum inserviens* (Acta Erud. Octobr. 1698; Joh. Bernoulli Opera, T. I, p. 249-253). Ivi la parabola cubica è chiamata « parabola cubicalis primaria », e la semicubica « parabola cubicalis secunda ».

⁶⁾ *Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 76.

⁷⁾ Id., p. 80. Cf. anche una lettera di HUDDÉ a SCHOOTEN in *Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 97.

essere la curva di cui si tratta una parabola di indice $3/4$ riferita a due assi formanti fra loro l'angolo $\pi/4$; anche la forma della curva rimase ad essi ignota: Huygens infatti non soltanto considerò il solo arco OFG della curva situato nell'angolo delle direzioni positive degli assi Ox e Oy , ma arbitrariamente vi aggregò un arco $OF'G$ simmetrico del primo rispetto all'asse delle x , ed in conseguenza ritenne che su quest'asse fosse collocato il baricentro della porzione di piano limitata dalla curva. Il suddetto arco OFG passa pel punto G dell'asse delle x posto alla distanza a dall'origine e pel punto F di coordinate $x = 81/256 a$, $y = 27/256 a$ il quale è un punto di culminazione della curva; questa si estende poi indefinitamente al di là di O e G mediante due rami situati nell'angolo formato dalla direzione positiva di Ox e dalla direzione negativa di Oy . L'area compresa fra l'arco OFG e l'asse delle x è data:

$$\int_{x=0}^{x=x} y dx = \int_{x=0}^{x=x} \left(-x + \sqrt[4]{ax^3} \right) dx = \frac{a^2}{14};$$

in conseguenza di ciò e dell'aver aggiunto alla curva l'arco $OF'G$, Huygens ¹⁾ si credette autorizzato a ritenere che l'area della curva fosse espressa da $a^2/7$. L'erronea opinione intorno alla forma della parabola biquadrato-cubica di Schooten, mentre ebbe deplorabili effetti sulla soluzione di alcune questioni metriche concernenti la curva, non infuori sulle ricerche intese a determinarne la tangente; Huygens ne scoperse infatti una costruzione notevole non solo per semplicità ed eleganza, ma anche perchè risulta dalla ricerca del punto in cui la tangente sega, non già uno degli assi coordinati, ma una retta opportunamente scelta ²⁾. Si consideri, infatti, la tangente alla curva (6) nel punto (x, y) ; se X, Y ne sono le coordinate correnti,

$$\frac{Y + x - \sqrt[4]{ax^3}}{X - x} = -1 + \frac{3}{4} \sqrt[4]{\frac{a}{x}},$$

ne è l'equazione, onde ponendo $X = -x/3$ si trova $Y = x/3$; ciò prova che la tangente alla considerata parabola biquadrato-cubica nel punto di ascissa x passa pel punto di coordinate $(-x/3, x/3)$; nulla di più agevole dunque del costruirla. Si può ancora notare che la curva è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica

$$x = \frac{a \lambda^4}{(1+\lambda)^4}, \quad y = \frac{a \lambda^3}{(1+\lambda)^4};$$

¹⁾ Lettera a SLUSE del 7 Dicembre 1657 (*Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 92).

²⁾ *Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 90 e 93.

dalla quale deducesi la seguente condizione di collinearità di tre punti (α) (β) (γ) :

$$\beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2 + \alpha^2 \beta^2 + 4 \alpha \beta \gamma (\beta \gamma + \gamma \alpha + \alpha \beta) + \alpha \beta \gamma (\alpha + \beta + \gamma) + 6 \alpha^2 \beta^2 \gamma^2 = 0.$$

Facendo ivi $\beta = \gamma$ si vede che per ogni punto della curva si possono condurre quattro tangenti, onde la curva stessa è di sesta classe; essa quindi non possiede altra singolarità che il punto triplo situato nell'origine; il punto di parametro -1 ne è un flesso.

IV. Innumerevoli altre parabole notevoli vennero scoperte dal Conte di Fagnano. Il quale, ispirandosi ad un teorema relativo alla parabola cubica scoperto da Giovanni Bernoulli (v. p. 365), propose nel 1714 (*Giornale dei Letterati d'Italia*, vol. XIX, p. 438) il problema seguente: « Sia dare una parabola biquadratica primaria che ha per equazione costitutiva $x^4 = y$ e sia data ancora una porzione di essa; dimando che si assegni un'altra porzione della medesima curva tale, che la differenza delle porzioni suddette sia rettificabile ». Nessuno avendo risposto al quesito, il Fagnano stesso ne pubblicò la soluzione nello scritto *Nuovo metodo per rettificare la differenza di archi (uno dei quali è dato) in infinite specie di parabole irrettificabili* ¹⁾, del quale dobbiamo qui riferire almeno i concetti fondamentali.

Si consideri la parabola di equazione

$$(7) \quad y = \frac{2}{m+2} \frac{x^{\frac{m+2}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}},$$

m essendo un numero razionale ed a una costante data. Detta t la lunghezza del segmento della tangente nel punto (x, y) , compreso fra il punto di contatto e l'asse delle x e s la lunghezza dell'arco della curva, si trova:

$$t = y \sqrt{1+y'^2}/y' = \frac{2x}{m+2} \sqrt{1+(x/a)^m}$$

$$s = \int dx \sqrt{1+y'^2} = \int \sqrt{1+(x/a)^m} dx;$$

¹⁾ *Giornale dei letterati d'Italia*, T. XXII, 1715; *Produzioni matematiche*, T. II (Pesaro 1750), p. 317-330; *Opere matematiche* (Roma 1911), T. II, p. 272-282.

integrando per parti se ne trae:

$$\frac{m+2}{2} s = x \sqrt{1+(x/a)^m} + m/2 \int \frac{dx}{\sqrt{1+(x/a)^m}}$$

ossia

$$(8) \quad \frac{m+2}{m} (s-t) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+(x/a)^m}}$$

Preso l'integrale che sta al secondo membro tra due limiti determinati, il suo significato è il seguente: a meno del fattore costante $m+2/m$ esso, è eguale ad un arco della parabola (7) diminuito della differenza fra le lunghezze delle tangenti negli estremi, intendendo per « lunghezza della tangente » il segmento compreso fra il punto di contatto e l'intersezione coll'asse delle ascisse. Scelti adunque quattro punti $P_0 P_1 Q_0 Q_1$ sulla parabola corrispondenti alle ascisse $p_0 p_1 q_0 q_1$ e condotte le tangenti $P_0 R_0, P_1 R_1, Q_0 S_0, Q_1 S_1$, dedurremo dalla (8) le due seguenti:

$$\text{arco } P_0 P_1 - (P_1 R_1 - P_0 R_0) = \frac{m}{m+2} \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\sqrt{1+(p/a)^m}};$$

$$\text{arco } Q_0 Q_1 - (Q_1 S_1 - Q_0 S_0) = \frac{m}{m+2} \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{1+(q/a)^m}}$$

Ora se fra p, q si può stabilire una relazione tale che l'integrale della prima di queste equazioni si identifichi al secondo si avrà

$$\text{arco } P_0 P_1 - (P_1 R_1 - P_0 R_0) = \text{arco } Q_0 Q_1 - (Q_1 S_1 - Q_0 S_0),$$

e gli archi $P_0 P_1$ e $Q_0 Q_1$ avranno una differenza rettificabile. La questione è pertanto ridotta all'integrazione dell'equazione differenziale seguente:

$$(9) \quad \frac{dp}{\sqrt{1+(p/a)^m}} + \frac{dq}{\sqrt{1+(q/a)^m}} = 0,$$

ove i radicali hanno segni arbitrari. Fagnano ha effettuato l'integrazione nei casi di $m = 4, 3, 6$ ottenendo in corrispondenza le parabole:

$$y = \frac{x^3}{3 a^2}, \quad y = \frac{2 x^{\frac{5}{2}}}{5 a^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{x^4}{4 a^3};$$

la presenza della prima dimostra il citato teorema bernoulliano, mentre quella della terza dà la chiave per risolvere il problema

proposto dal Fagnano; la seconda è una curva del 5° ordine contenente archi a differenze rettificabili. Tutte le curve analoghe si conosceranno il giorno in cui si saprà quali siano tutti i casi d'integrabilità in termini finiti dell'equazione differenziale (9) ¹⁾.

¹⁾ Giova osservare che in alcune recenti opere tedesche (REUSCHLE, *Pratik der Kurvendiskussion*, Stuttgart 1886; HAAS, *Kleyer's Lehrbuch der Differentialrechnung*, id. 1894) sono indicate con nomi speciali alcune parabole di forme particolari; eccole: $p^2 y = x^2$, Wendeparabel; $p^3 y = x^4$, Flachparabel; $p y^3 = x^4$, Spitzparabel; $y' = p^2 x^3$, Wendespitzparabe'; $p^4 y = x^5$, Wendeflachparabel.

CAPITOLO III

Le iperboli di ordine qualunque.

130. Come, generalizzando l'equazione canonica $y^2 = px$ delle ordinarie parabole si pervenne al concetto di parabole d'ordine superiore, così, prendendo le mosse dall'equazione $xy = a^2$ di un'iperbole riferita agli asintoti, si giunge alle curve rappresentate da equazioni nel seguente tipo

$$(1) \quad x^n y^p = a^{n+p};$$

si chiamano *iperboloidi* o *iperboli di ordine superiore*¹⁾, *rettangole* od *obliquangole* secondochè gli assi sono ortogonali od obliqui²⁾. Paragonando quest'equazione con la equazione (2) del n. 126 si vede che un'iperbole d'ordine superiore si può considerarsi come una analoga parabola d'indice negativo e viceversa. Tale analogia consigliò Augusto Comte a formare delle parabole e delle iperboli una sola classe, i cui elementi egli chiamò *curve binomie*³⁾.

Emerge dalla (1) che la curva corrispondente ha all'infinito di Ox un punto p -plo e all'infinito di Oy un punto n -plo, onde può

¹⁾ « Hyperboloeides » lo chiama incidentalmente LEIBNIZ (Leibniz ed. Gerhardt, T. V, Halle 1858, p. 88). Altri, come il marchese DE L'HÔPITAL (*Analyse des infiniment petit*, II éd., Paris 1705, p. 14), CARACCIOLI (*De lineis curvis liber*, Pisis 1740, p. 37) e MACLAURIN (*Traité d'Algèbre*, Paris 1753, p. 183), chiamano iperboli le curve $Ay^{m+n} = B(a+x)^m x^n$, di cui tratteremo nel prossimo Capitolo. Questo esempio è seguito nell'*Encyclopédie méthodique* (T. II, Paris 1785, p. 33), nel *Dictionnaire des sciences mathématiques*, del MONTFERRIER (T. II, Paris 1838, p. 102) e nel *Mathematisches Wörterbuch*, dell'HOFFMANN, (T. III, Berlin 1861), p. 276).

²⁾ Fra le iperboli si trovano le curve $y = x^{-1/41}$, $y = x^{-9/8}$ che s'incontrano nella fisica matematica sotto il nome proposto dal RANKINE di *adiabatischen Diagrammcurven* (HOLZMÜLLER, *Die Ingenieur-Mathematik*, I Th., Leipzig 1897, p. 136); nonchè la *Newtonschen Gravitationskurve* di equazione $x = py^{-2}$ (Id. e Th. II, Leipzig 1898, p. 15 e segg.).

³⁾ *Traité élémentaire de géométrie analytique* (Paris 1843), p. 239.

generarsi mediante due fasci di raggi paralleli, fra cui esista una corrispondenza (x, p) . Essa ammette la seguente rappresentazione parametrica:

$$(2) \quad x = a \lambda^p, \quad y = \frac{a}{\lambda^n};$$

essa è dunque sempre razionale. Come equazione tangenziale della curva si trova una della forma seguente:

$$\xi^n \eta^p = a^{n+p},$$

onde l'iperbole è correlativa a sè stessa, e può ridursi a coincidere con la sua polare reciproca rispetto ad un circolo con convenientemente scelto¹⁾.

Il calcolo fatto in principio del n. 127 prova che nell'iperbole rappresentata dall'equazione (1) il rapporto della sottangente all'ascissa è espresso da $(n+p)/n$; donde un modo semplicissimo per costruire la tangente²⁾. Se, nella citata equazione (1) si fa variare a si ottengono ∞' iperboli e si vede che il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte ad esse da un punto arbitrario del piano è un'ordinaria iperbole³⁾. Lasciamo al lettore di adattare alle iperboli il calcolo dell'area delle parabole da noi eseguito nel n. 127. Noi osserviamo che la quadratura delle iperboli di grado superiore si trova in una lettera scritta da Fermat a Digby il 20 aprile 1657 e riprodotte la sostanza di altra lettera diretta dallo stesso Fermat a Torricelli verso la fine dell'anno 1646⁴⁾; il metodo con cui il grande geometra francese ottenne questo importante risultato si apprende dal lavoro già ricordato *De aequationum localium transuntatione et emendatione*⁵⁾. Dello stesso soggetto si occupò il Wallis incontrando delle apparenti contraddizioni, a togliere le quali si adoperarono con successo il Varignon⁶⁾ e poi il Conte di Fagnano⁷⁾.

Supposti gli assi ortogonali il volume generato dalla rotazione

¹⁾ GENOCCHI in *Nouv. Ann. de Math.*, T. XIII, 1854, p. 132-136.

²⁾ DE L'HÔPITAL, *Sections coniques*, p. 157; v. anche la memoria del SOBOTKA citata a pag. 358.

³⁾ DE L'HÔPITAL, op. cit., p. 264.

⁴⁾ *Oeuvres de Fermat*, T. II, p. 338. Cfr. anche una lettera di FERMAT a DIGBY (Ivi, p. 377) ove sono contestati i diritti di priorità accampati dal WALLIS — in base alla sua *Aritmetica infinitorum* — in due lettere dirette al DIGBY il 1-16 Giugno ed il 21 Novembre-1° Dicembre 1657 (*Oeuvres de Fermat*, T. III, p. 406, 441 e 452).

⁵⁾ *Oeuvres de Fermat*, T. I, p. 255.

⁶⁾ *Reflexions sur les espaces plus qu'infinis de M. Wallis* (Mém. de Paris, Année MDCCVI).

⁷⁾ *Riflessioni in occasione della quadratura degli spazi iperbolici* (Produzioni matematiche, T. II, Pesaro 1750); *Opere matematiche*, T. II, p. 205).

attorno a Ox del quadrilatero determinato da un arco d'iperbole, la sua proiezione su quell'asse e le ordinate corrispondenti è dato da:

$$\pi \int_{u=u_0}^{u=X} y^2 dx = \pi \int_{u=u_0}^{u=X} a^2 \frac{n+p}{n} x^{-\frac{2n}{p}} dx = \frac{\pi p a^{\frac{2(n+p)}{n}}}{p-2n} \left[X^{\frac{p-2n}{p}} - x_0^{\frac{p-2n}{p}} \right]$$

Nel caso particolare dell'iperbole apolloniana $n = p = 1$, onde questo valore diviene $\pi x_0^4 (1/x_0 - 1/X)$; e facendo $X = \infty$ si trova $\pi a^4/x_0$, valore finito qualunque sia l'ascissa iniziale x_0 . È questo un fatto notevole che ha scoperto E. Torricelli¹⁾. Esso è incluso in altra proposizione generale valevole per tutte le iperboli e scoperta dal Roberval²⁾. Supposto, infatti, $p - 2n < 0$, dalla espressione generale precedente, fatto $X = \infty$, si ottiene

$$\frac{\pi p a^{\frac{2(n+p)}{2}}}{2n-p} \frac{1}{x_0^{\frac{2n-p}{p}}}$$

valore finito per tutti i valori finiti di x_0 . Se invece fosse $2n - p < 0$ riuscirebbe infinito il volume nascente dalla rotazione dell'iperbole.

Nel caso intermedio $p = 2n$ è finito il volume generato dalla rotazione attorno a Oy dall'iperbole $xy^2 = a^3$; mentre la parabola $x^2y = a^3$ genera un volume finito ruotando attorno a Ox ³⁾.

Il differenziale dell'arco dell'iperbole (1) è dato da:

$$ds = \frac{1}{p} dx \sqrt{p^2 + n^2 a^{\frac{2(n+p)}{p}} x^{-\frac{2(n+p)}{p}}}$$

è dunque espresso da un differenziale binomio; ora siccome i tre numeri

$$\frac{1}{2}, \frac{n}{2(n+p)}, \frac{p}{2(n+p)}$$

¹⁾ TORRICELLI lo fece cooscere nel 1643 al P. NICERON ed al pubblico l'anno seguente con la sua *Opera geometrica*; egli certamente vi giunse nel corso di ricerche generali, i cui risultati si leggono nella memoria postuma *De hyperbolis* (*Opere*, T. I, 2ª Parte, p. 227-274).

²⁾ *Epistola Aegidii Personerii de Roberval ad Evangelistam Torricellium* (*Mem. de Paris*, T. VI, 73)0.

³⁾ La necessità di distinguere i vari casi che s'incontrano a seconda della grandezza nei numeri n, p sembra sia stata avvertita per la prima volta da GREGORIO FONTANA nell'Art. III della memoria intitolata *Ricerche analitiche sopra diversi soggetti* (*Mem. della Soc. Ital. delle Scienze*, T. III, 1786). Ivi le curve in questione sono chiamate *iperboloidi*.

sono tutti sempre frazionari, così l'integrazione non è mai possibile in termini finiti, epperò non esiste alcuna iperbole rettificabile.

131. L'iperbole (1) è pienamente determinata quando, oltre agli interi n, p , si conosce la costante a ; invece di dare a si può assegnare un punto x_0, y_0 per cui essa passa; allora la (1) si può scrivere

$$(x_0/x)^u = (y/y_0)^p.$$

Nel caso più particolare $n = 1, p = 2k$ ed inoltre sia retto l'angolo degli assi, la curva corrispondente si può costruire per punti mediante un procedimento che Vincenzo Viviani¹⁾ adoperò per $k = 1$, cioè per costruire la curva $xy^2 = a^3$ (da lui chiamata *iperbola mesolabica* in grazia dell'applicazione che egli ne fece al problema di Delo): ecco in che cosa consiste tale procedimento:

Consideriamo (fig. 70) un semicerchio di diametro $AC = a$; conduciamo da A una trasversale arbitraria a tagliare in B la periferia del semicerchio ed in D la retta che la tocca in C . Sia BG perpendicolare a AC , GB_1 perpendicolare a BD , B_1G_1 perpendicolare a AC , G_1B_2 perpendicolare a BD , B_2G_2 perpendicolare a AC e così via. Finalmente sulla retta $B_{k-1}G_{k-1}$ da ultimo così ottenuta portiamo il segmento $G_{k-1}M = AD$: il luogo del punto M è l'iperbole $xy^{2k} = a^{2k+1}$. Infatti dalle costruzioni fatte, chiamando φ l'angolo DAC , e x, y le coordinate del punto M , risultano le relazioni seguenti:

$$y = AD = a/\cos \varphi,$$

$$AB = a \cos \varphi, \quad AG = a \cos^2 \varphi$$

$$AB_1 = a \cos^3 \varphi, \quad AG_1 = a \cos^4 \varphi$$

$$AB_{k-1} = a \cos^{2k-1} \varphi, \quad x = AG_{k-1} = a \cos^{2k} \varphi;$$

eliminando φ tra la prima e l'ultima delle equazioni scritte si conclude

$$xy^{2k} = a^{2k+1},$$

la quale dimostra quanto si è enunciato. Come corollario delle relazioni scritte si vede che, costruendo una curva tale che le coordinate x, y di un suo punto generico P siano eguali a AB_{k-1} e AD , si avrà

$$x = a \cos^{2k-1} \varphi, \quad y = a/\cos \varphi$$

¹⁾ *Quinto Libro di Euclide o Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo* (Firenze 1674), p. 278-279.

onde eliminando φ si conclude

$$x y^{2k-1} = a^{2k};$$

perciò anche il luogo del punto P è un'iperbole, ma d'ordine pari.

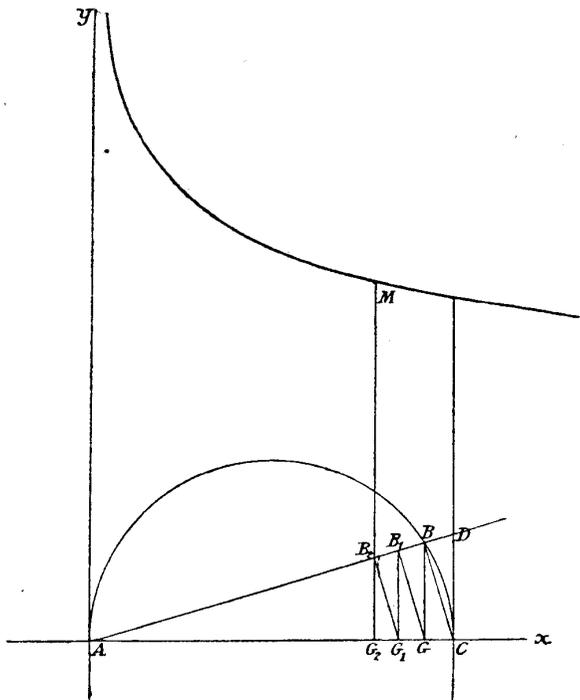


Fig. 70. — Costruzione dell'iperbole $x y^{2k} = a^{2k+1}$.

Chiuderemo questo Capitolo osservando che le iperboli sono casi speciali delle *curve iperboliche* di equazione

$$y = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{a_r}{x^r},$$

e che le curve iperboliche e paraboliche sono casi particolari delle curve rappresentate da equazioni del seguente tipo:

$$y = \frac{p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_m}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n}$$

delle quali Maclaurin notò qualche proprietà e fece alcune applicazioni¹⁾. Egli ha notato che se $n > m$ esse hanno l'asse delle x per asintoto, della qual cosa non è difficile persuadersi; se poi $n > m + 1$ si scriva

$$x^{n-m} y = \frac{p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_m x^{n-m}}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_n} = \frac{p_0 + p_1/x + \dots + p_m/x^m}{q_0 + q_1/x + \dots + q_n/x^n},$$

e si vedrà che per tutti i valori positivi di x la quantità $x^{n-m}y$ è inferiore ad una costante determinata e finita; in conseguenza, per un noto teorema, $\int_{x_0}^x y dx$ è una quantità finita, cioè è finita l'area compresa fra un'ordinata, la curva e l'asse delle ascisse: è un'altra prerogativa delle curve in questione che Maclaurin ha stabilita.

¹⁾ *Treatise on fluxions* (Edinburgh, 1742), p. 272; *Traité des fluxions* (Paris, 1749), T. I, p. 209.

CAPITOLO IV

Le perle.

132. La conica a centro definita dall'equazione $x^2/a^2 + \varepsilon y^2/b^2 = 1$ (ove $\varepsilon = 1$ se si tratta d'un'iperbole, $\varepsilon = -1$ se si tratta d'un'ellisse) può rappresentarsi mediante l'equazione seguente, assumendo come origine un vertice della curva:

$$x(2a \pm x) = \mp \varepsilon a^2/b^2 \cdot y^2.$$

Applicando a questa il processo generalizzatore che ci guidò alle parabole ed alle iperboli superiori si arriva alle curve aventi per equazione generale

$$(1) \quad x^s (a \pm x)^r = \frac{a^{r+s}}{b^p} y^p,$$

ove a, b rappresentano due segmenti rettilinei dati e p, r, s tre interi positivi, non aventi alcun fattore comune a tutti. Si chiamano *perle*; le parabole sono speciali perle come si vede facendo $r = 0$ o $s = 0$ nell'equazione (1); altre curve più particolari si ottengono supponendo $r = 1, s = n, p = n, b = a$; la (1) diviene quindi

$$(2) \quad y^n = \frac{(a \pm x)x^n}{a}$$

ed è l'equazione generale delle così dette *perle di $(n+1)^{\text{mo}}$ ordine*; finalmente se $p = r + s$ e si prende il segno — si ottengono le curve $y^{r+s} = (a-x)^r x^s$ chiamate *circoli di grado superiore*¹⁾.

Di alcune perle speciali fa menzione R. de Sluse in quattro lettere dirette a Huygens il 14 agosto 1657, l'8 gennaio, il 19 febbraio

¹⁾ MONTFERRIER, *Dictionnaire des Sciences math.*, T. I (Bruxelles, 1838), p. 316.

ed il 12 aprile 1658¹⁾; in altra lettera posteriore dello stesso allo stesso (15 luglio 1659) è adoperato il vocabolo «*elliptoides*» per indicare le curve di cui si tratta, coll'osservazione «*perlas vocat Dettonvillius*»²⁾; il che ci conduce a far cenno del carteggio tra Sluse e Pascal, del quale le lettere datate 6 aprile e 29 giugno 1658 concernono appunto le curve di cui si tratta. Sembra quindi che, se il concetto di queste sia creazione di Sluse, il nome da noi usato appartenga a B. Pascal³⁾.

Emerge dalla equazione (1) che la perla da essa rappresentata è una curva algebrica d'ordine eguale al maggiore dei numeri $r+s$ e p ; l'origine ne è un punto di molteplicità espressa dal minore dei numeri s, p , mentre il punto $x = \pm a, y = 0$ ha una molteplicità espressa dal minore dei due numeri r, p . Se $r+s < p$ tutti i punti all'infinito della curva sono riuniti nel punto all'infinito di Ox , se invece $r+s > p$ essi si riuniscono nel punto all'infinito di Oy ; se finalmente $p = r+s$ la curva ha sulla retta all'infinito gli $r+s$ punti tali che $x/y = \omega (a/b)$, ove ω è una radice $(r+s)$ ma dell'unità.

Nella succitata lettera del 16 aprile 1658 il de Sluse afferma di essere in grado di costruire le tangenti a tutte le perle, ma qual fosse l'«*unica et breve regula*» da lui a tal uopo formulata non ci è noto. Tuttavia è cosa agevole convincersi che egli non si è vantato di avere raggiunto cosa che non era in grado di ottenere. Osserviamo, infatti, che dalla (1) si trae:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{p} \left\{ \frac{s}{x} \pm \frac{r}{a \pm x} \right\} \end{aligned} \right\}$$

onde la sotttangente è data da:

$$x - y \frac{dx}{dy} = x \frac{a(s-p) \pm (r+s-p)x}{as \pm (r+s)x},$$

espressione questa che si può costruire mediante riga e compasso qualunque siano gli interi p, r, s ; probabilmente la regola di de Sluse non era che uno speciale enunciato di tale costruzione.

Nella medesima lettera del 16 aprile 1658 il de Sluse confessa di non sapere quadrare nè trovare i baricentri di tutte le perle: è facile vedere che egli accennava così ad una difficoltà che l'analisi moderna è in grado di chiarire completamente. Si osservi infatti

¹⁾ *Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 46, 121, 134 e 167.

²⁾ *Id.*, p. 458.

³⁾ C. LE PAIGE, *Correspondance de F. R. de Sluse, publiée pour la première fois et précédée d'une Introduction* (Bullettino di Bibl. e Storia ecc., T. XVII, 1887), p. 494-8.

che la (2) dà:

$$\int y dx = b a^{-\frac{r+s}{p}} \int x^{\frac{s}{p}} (a \pm x)^{\frac{r}{p}} dx;$$

ora nel secondo membro troviamo un differenziale binomio il quale è integrabile soltanto quando uno dei tre numeri r/p , s/p , $(r+s)/p$ sia intero. Queste tre circostanze si verificano contemporaneamente quando $p = 1$. In tal caso si ha:

$$\begin{aligned} \int y dx &= \frac{b}{a^{r+s}} \int x^s (a \pm x)^r dx = \frac{b}{a^{r+s}} \int x^s dx \sum_{k=0}^{k=r} (\pm 1)^k \binom{r}{k} a^{r-k} x^k = \\ &= \frac{b}{a^{r+s}} \sum_{k=0}^{k=r} (\pm 1)^k \binom{r}{k} a^{r-k} \int x^{k+s} dx = \\ &= \frac{b}{a^{r+s}} \sum_{k=0}^{k=r} (\pm 1)^k \binom{r}{k} a^{r-k} \frac{x^{k+s+1}}{k+s+1}; \end{aligned}$$

integrando fra $x = 0$ e $x = \mp a$ si trova come area A il seguente valore:

$$(3) \quad A = (\pm 1)^{s+1} ab \sum_{k=0}^{k=r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{k+s+1}$$

In particolare per la curva

$$(4) \quad x(a-x)^r = b^r y$$

si trova

$$(5) \quad A = \left[\frac{a}{b} \right]^r a^2 \sum_{k=0}^{k=r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{k+2}.$$

Si osservi ora che per $x = a/2$ la (4) dà

$$y = \frac{a}{2^{r+1}} \left[\frac{a}{b} \right]^r$$

e che l'area T del rettangolo i cui lati sono a e questo valore di y è dato da

$$T = \frac{a^2}{2^{r+1}} \left[\frac{a}{b} \right]^r;$$

per conseguenza

$$(6) \quad \frac{A}{T} = 2^{r+1} \sum_{k=0}^{k=r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{k+2},$$

relazione elegante che si trova in un articolo allegato alla lettera diretta a Huygens il 31 gennaio 1659 ed intitolato *La quadrature des perles de Monsieur Sluse par Cl. Mylon. En Juin 1658*¹⁾. Ad es. la (6) per $r = 2$ dà $A/T = 2/3$, per $r = 3$, $A/T = 4/5$ e così continuando.

Una difficoltà analitica dello stesso grado di quella che presenta la quadratura delle perle offre la cubatura dei solidi generati dalla loro rotazione attorno all'asse delle x ; si ha infatti

$$V = \pi \int y^2 dx = \pi b^2 a^{-2\frac{r+s}{p}} \int x^{\frac{2s}{p}} (a \pm x)^{\frac{2r}{p}} dx;$$

onde il calcolo di V dipende da un differenziale binomio, il quale è integrabile in termini finiti solo quando uno dei numeri $2r/p$, $2s/p$, $2(r+s)/p$ sia intero; ciò accade, in particolare, nuovamente, quando $p = 1$. Osservazioni congeneri si possono fare riguardo alla determinazione dei baricentri.

133. Le perle non godono di importanti prerogative geometriche, onde dal punto di vista dottrinale possiedono scarso interesse. Ma le pagine del carteggio scientifico di Huygens che le concernono possiedono considerevole importanza per lo storico, il quale può col loro aiuto ricostruire un quadro della geometria cartesiana quale era nel suo primo stadio di sviluppo; saremo quindi giustificati se ci arrestiamo a dir qualche cosa intorno alle perle speciali considerate in quelle pagine.

È nella lettera di Sluse del 14 agosto 1657 che s'incontra la prima perla²⁾, quella cioè di equazione

$$(7) \quad x^2(a-x) = b^2 y^3;$$

¹⁾ *Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 337.

²⁾ *Id.*, p. 46.

³⁾ Il sig. K. HAGGE ha comunicato (lettera del 6 Giugno 1922) all'autore una trasformazione geometrica che — fra l'altro — guida da un'iperbole a una di queste perle. Si supponga data sull'asse delle x di un sistema ortogonale un punto O' che stia alla distanza a dell'origine e si faccia corrispondere al punto $P(x, y)$ un punto $P'(\xi, \eta)$ tale che la retta PP' sia parallela a Oy e che l'angolo $PO'P'$ sia retto; sussisteranno allora le relazioni

$$x = \xi, \quad -y\eta = (a - \xi)^2;$$

ivi è proposta la determinazione della tangente e del baricentro, e la curva è erroneamente disegnata simmetrica rispetto a Ox come si vede dalla fig. 71, la quale probabilmente suggerì il nome di perla: una facile discussione prova invece che la forma della curva è quale è data dalla fig. 72¹⁾. Rispondendo a Sluse, addì 3 settembre 1637²⁾, Huygens traccia esattamente l'arco finito OMA (fig. 72) — nel quale è anche notato il flesso di ascissa $a/3$ —, ma ne sopprime i rami infiniti e arbitrariamente vi aggiunge l'arco simmetrico rispetto a Ox ; la stessa figura s'incontra nella *Inventio methodi ad tangentes linearum curvarum* di Huygens, che si trova in appendice ad una lettera diretta da questo al de Witt il 25 febbraio 1663³⁾. Huygens determina esattamente l'area $OMA O$ ed il baricentro della super-

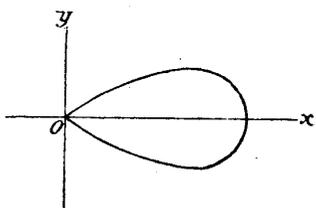


Fig. 71.
Perla cubica (figura errata).

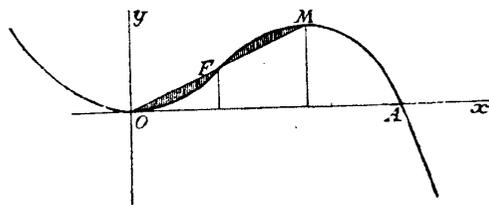


Fig. 72.
Perla cubica (figura esatta).

ficie costituita da questa e dalla sua simmetrica rispetto a Ox .

Della prima perla si è occupato anche Fr. van Schooten⁴⁾, limitando le sue considerazioni all'arco OMA . Egli ha trovato che, detta d la sotttangente relativa al punto di ascissa x , si ha

$$d = \frac{2x^2 - ax}{2a - 3x},$$

come è facile verificare; come corollario dedusse l'equazione deter-

onde dall'iperbole $xy = b^2$ si deduce la curva

$$\xi(\xi - a)^2 + b^2\eta = 0,$$

ora, posto $a - \xi = x'$, $\eta = -y'$, si avrà

$$(a - x')x'^2 = b^2y' \text{ c. d. d.}$$

¹⁾ La curva è tangente nell'origine all'asse delle x ; ha per cuspidi il punto all'infinito di Oy con la retta all'infinito per corrispondente tangente; è in conseguenza di genere 0 e classe 3.

²⁾ *Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 49. V. anche p. 116.

³⁾ Id., T. IV, p. 312.

⁴⁾ Lettera a HUYGENS del 29 ottobre 1657 in *Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 73.

minatrice delle (tre) tangenti della perla che passano per un punto arbitrario del piano; lo stesso valore di d mostrò allo Schooten che nel punto di ascisse $a/2$ la tangente passa per l'origine e che il punto di ascissa $2a/3$ è un punto di culminazione. Dallo stesso valore di d si trae:

$$2x^2 + (3d - a)x - 2ad = 0,$$

equazione che determina le ascisse dei due punti della curva le cui tangenti passano pel punto $(-d, 0)$ ¹⁾; ora il discriminante vale $(a + d)^2 + 8d^2$, onde è sempre positivo; perciò da ogni punto dell'asse partono due tangenti reali della perla, proprietà questa che lo Schooten avvertì pel solo segment OA . Non meno notevoli sono le proposizioni di quadratura stabiliti dallo Schooten. Anzitutto egli ha notato che il doppio dell'area $OFMAO$ è eguale al rettangolo di base $OA = a$ ed altezza eguale a $9/8$ dell'ordinata massima; ed infatti entrambe queste superficie sono misurate da $1/12 \cdot a^4/b^2$. Poi egli notò che, condotte le rette OF, FM , esse determinano con gli archi corrispondenti della perla due aree equivalenti: del che è agevole convincersi mediante un'integrazione. Al termine della lettera dianzi citata Fr. van Schooten propone lo studio di tre nuove curve, la prima delle quali ha la seguente equazione:

$$a^2x = y^3 + 2ay^2 + a^2y;$$

ora facendo in questa $x = -\eta$, $y = \xi - a$ essa diviene

$$(8) \quad a^2\eta = \xi^2(a - \xi);$$

dunque la pretesa nuova curva è un caso particolare di quella rappresentata dall'equazione (7). Di ciò non si accorse lo Schooten — il quale credette la curva di forma parabolica²⁾, mentre ha lo aspetto insegnato dalla fig. 73 — né se ne accorsero lo Sluse e Huygens³⁾; i quali ne indicarono due costruzioni della tangente, fondate sulla ricerca dei punti in cui questa retta sega gli assi coordinati; limiti di spazio ci vietano di riferirle e di esporre le eleganti formule di quadratura concernenti quella curva.

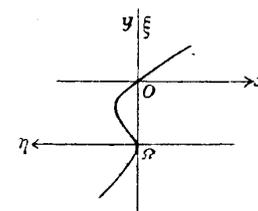


Fig. 73.
Speciale perla cubica.

¹⁾ Si ricordi che l'asse delle x essendo una tangente, per ogni suo punto passano due altre tangenti della perla.

²⁾ *Oeuvres de Huygens*, T. II, p. 76.

³⁾ Id., p. 88, 89, 90 e 93.

Nella lettera dell'8 gennaio 1658 R. de Sluse notò¹⁾ che la perla (8) fa parte di una serie di curve i cui primi elementi hanno le equazioni seguenti:

$$ay - y^2 = ax, \quad ay - y^2 = x^2, \quad ay^2 - y^3 = a^2x, \quad ay^2 - y^3 = ax^2,$$

aggiungendo che si può considerare la serie analoga

$$ay + y^2 = ax, \quad ay + y^2 = x^2, \quad ay^2 + y^3 = a^2x, \quad ay^2 + y^3 = ax^2;$$

ora è chiaro che la curva $ay^2 + y^3 = a^2x$ non è che la simmetrica rispetto a Ox della omologa nella prima serie, la quale non differisce dalla (8); il de Sluse non se ne accorge, onde si attarda a stabilirne direttamente parecchie proprietà: noi non ne seguiremo l'esempio. Ed osserviamo invece che nella medesima lettera è parola di una perla del quart'ordine, cioè di quella rappresentata dall'equazione

$$(9) \quad ay^3 - y^4 = a^2x^2.$$

è una curva simmetrica rispetto a Oy , retta che è tangente alla curva nell'origine, che è una cuspide; de Sluse non ne considerò che la metà posta nell'angolo delle coordinate positive, notando che l'ascissa massima corrisponde all'ordinata $3a/4$; i punti $x = \pm a/4$, $y = a/2$ ne sono flessi. Riguardo all'area della mezza perla, de Sluse osserva: « hoc spatium si fueris dimensins, scias, te circulum ipsum facile metiri passe »; ed infatti quell'area è

$$= \int_{y=0}^{y=a} x dy = a^{-1} \int \sqrt{ay - y^2} dy = \pi (a/4)^2,$$

equivale cioè al cerchio di raggio $a/4$. Nella stessa lettera lo Sluse propone al suo celebre corrispondente la ricerca del rapporto che esiste fra il volume V generato dalla rotazione di quell'area attorno ad Oy ed il volume U del cilindro avente per base il cerchio di raggio eguale all'ascissa relativa all'ordinata $3a/4$ e per altezza a ; ed Huygens in data 22 gennaio 1658 risponde essere quel rapporto eguale a $64/135$ « insi me calculus fallit »²⁾. Ed infatti, essendo

$$V = \pi \int_{y=0}^{y=a} x^2 dy = \pi a^{-2} \int_{y=0}^{y=a} (ay^3 - y^4) dy = \frac{\pi a^3}{20}, \quad U = \frac{27 \pi a^3}{256}$$

si ha

$$\frac{V}{U} = \frac{64}{135}.$$

¹⁾ Id., p. 121.

²⁾ Id., p. 124.

Di quart'ordine è pure la perla che ha per equazione

$$(10) \quad ay^3 - y^4 = x^4,$$

di cui parla lo Sluse nella lettera a Huygens del 19 febbraio 1658¹⁾. Di essa, come della precedente, è tenuto parola nelle lettere scambiate fra i due citati geometri il 4, 12 e 14 marzo 1658²⁾. Da quanto ivi si legge scaturisce una costruzione notevole delle curve in questione. Si scriva infatti la (10) come segue

$$y^2 (ay - y^2) = x^4$$

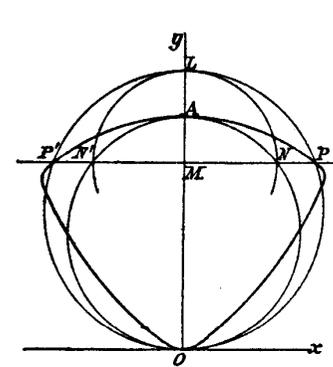


Fig. 74.
Perla di quarto ordine.

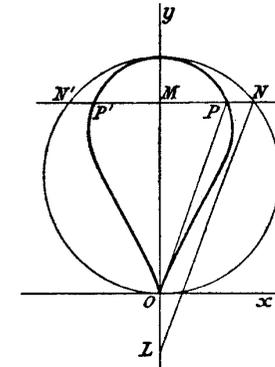


Fig. 75.
Altra perla di quarto ordine.

e si consideri il cerchio di equazione $ay - y^2 = x_1^2$; si avrà allora $x = \sqrt{x_1 y}$, onde x è media proporzionale fra x_1 e y_1 ; preso (fig. 74) quindi sull'asse delle y il segmento $OA = a$, si descriva il cerchio di diametro OA , si prenda un punto qualunque M di OA e si segni la corda NN' passante per M e parallela a Ox ; si porti su Oy , $ML = MN$ e si descriva il cerchio di diametro OL ; esso taglierà la retta NN' in due punti P, P' della perla (10). Considerando lo stesso cerchio $ay - y^2 = x_1^2$, la (9) si scrive $x_1 y = ax$. Descritto perciò come prima il cerchio di diametro OA (fig. 75) e segnata una corda arbitraria $NM N'$ perpendicolare a Oy , si prenda su Oy $ML = a$; la parallela condotta da O a LN taglierà la corda NN' in un punto P della perla (9).

Ulteriori particolari sopra perle speciali si trovano nel carteggio di Huygens.

¹⁾ Id., p. 134.

²⁾ Id., p. 144, 148 e 150.

CAPITOLO V

Curve di Lamé e Curve triangolari simmetriche.

134. Le equazioni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1,$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1,$$

le quali rappresentano risp. una retta, un'iperbole, una conica a centro ed una parabola, sono casi particolari della seguente:

$$(1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1,$$

ove a e b sono quantità qualunque e m un numero razionale, che può chiamarsi *indice* o *esponente* della corrispondente curva.

Altri casi particolari sono le curve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{-2} + \left(\frac{y}{b}\right)^{-2} = 1, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$$

che rappresentano rispettivamente una Krenzkurve (v. n. 97) e l'evoluta di una ellisse o, secondo il Bellavitis, *tetracuspidè*¹⁾.

Le curve corrispondenti rientrano (come le perle) nella categoria delle *curve trinomie* di A. Comte²⁾ e, per essere state consi-

¹⁾ *Sposizione del metodo delle equipollenze*, n. 191 (Mem. Soc. Ital. delle Scienze, T. XXV, 2ª Parte, 1860); cfr. F. GOMES TEIXEIRA, *Sur la tetracuspidè de Bellavitis* (Mathésis, III Ser., T. I, 1901).

²⁾ *Géométrie analytique* (Paris, 1843), p. 249. Questo nome spetta anche alle curve più generali $(x/a)^m + (y/b)^n = 1$ che L'EUZET ha considerate in *Nouv. Ann.*, T. XIII, 1854.

derate in generale per la prima volta da G. Lamé¹⁾, sono di regola chiamate, quando gli assi sono ortogonali, *curve di Lamé*²⁾; esse rappresentano una parte importante nella teoria delle funzioni iperboliche generalizzate³⁾.

Si esegua sopra la curva (1) la trasformazione (affinità) definita analiticamente dalle equazioni

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{l}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{l},$$

ove l è una lunghezza arbitraria che potremmo supporre = 1; si otterrà allora la curva di equazione

$$(1') \quad x'^m + y'^m = l^m;$$

siccome questa (che diremo *equilatera*) ha le stesse proprietà proiettive della (1) (che può chiamarsi *scalena*) e si comporta nell'identico modo rispetto alla retta all'infinito, così, volendo determinare le forme tipiche sotto cui può presentarsi una curva di Lamé, è lecito ragionare sopra l'equazione (1'), nella quale, in seguito, per semplicità, immagineremo di avere tolti gli accenti dalle coordinate.

Avendo supposto razionale l'indice m , ne indicheremo il valore assoluto con $p:q$, p e q essendo due numeri fra loro primi.

L'equazione (1') prova che se p è un numero pari e soltanto allora la curva è simmetrica rispetto agli assi coordinati. Ma vi è un'altra relazione analoga che sussiste sempre; per riconoscerlo si assumano come nuovi assi le bisettrici degli angoli degli antichi assi; le formole di trasformazione essendo

$$x' = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}},$$

l'equazione (1') diviene

$$(1'') \quad (\xi + \eta)^m + (\xi - \eta)^m = (l\sqrt{2})^m$$

¹⁾ *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* (Paris 1818), p. 105 e seg. È una speciale curva di LAMÉ quella di equazione $x^2 + y^2 = c^2$ a cui il BARROW applicò il suo metodo delle tangenti; v. le *Lectiones geometricae* pubblicate a Londra nel 1670 e riprodotte in *The math. Works of Is. Barrow, ed. Wehwell* (Cambridge 1860).

²⁾ A siffatta regola fanno eccezione L'Aoust che adopera il nome di *strofoidi* (*Analyse infinitésimale des courbes planes*, Paris 1873, p. 58) e C. F. A. LEROY (*Traité de géom. discr.*, VI ed., Paris 1862) che usa quello di *storoïdes*.

³⁾ V. il Cap. VIII dell'opera di S. GÜNTHER, *Die Lehre der gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen* (Halle 1881).

Ora questa non muta cambiando il segno di η , onde la curva in ^{que-} ~~que-~~ questione è sempre simmetrica rispetto alla bisettrice dell'angolo formato dalle direzioni positive dei primitivi assi; se poi si nota che il primo membro della (1''), quando si cambi il segno di η , diviene

$$(-1)^m \{ (\xi + \eta)^m + (\xi - \eta)^m \}$$

si vede che esso coincide col primo membro della (1'') sempre e solo quando il numero p sia pari; in questo caso, dunque, la curva ha quattro assi di simmetria, in tutti gli altri uno solo.

Si consideri, oltre la curva di Lamé rappresentata dall'equazione (1'), quella che, rispetto allo stesso sistema d'assi, ha l'equazione seguente

$$(1''') \quad \frac{1}{x^m} + \frac{1}{y^m} = \frac{1}{l^m};$$

si vedrà che una di esse nasce dall'altra col mezzo della trasformazione geometrica rappresentata dalle equazioni seguenti: $xx' = l^2$, $yy' = l^2$. È questa una corrispondenza quadratica avente per punti fondamentali l'origine ed i punti all'infinito degli assi coordinati e che può costruirsi come segue: «s'immagini descritto il cerchio di centro O e raggio l ; sia P un punto arbitrario del suo piano e Q, R le proiezioni ortogonali di esso sopra gli assi; le polari di Q, R rispetto a quel cerchio si tagliano in un punto che evidentemente è quello che corrisponde a P nella trasformazione in discorso». Siccome è chiaro che, se m è positivo, la curva (1') non passa per l'origine nè per i punti all'infinito degli assi, così, in forza di notissimi teoremi relativi alle trasformazioni quadratiche, l'ordine della curva (1''') è doppio dell'ordine della curva (1').

135. Si supponga $m > 0$ e si scriva l'equazione (1') sotto la seguente forma:

$$\sqrt[q]{\left[\frac{x}{l}\right]^p} + \sqrt[q]{\left[\frac{y}{l}\right]^p} - 1 = 0;$$

si vedrà allora che il primo membro è suscettibile di q^2 valori; il loro prodotto eguagliato a 0 ci darà l'equazione razionale della curva, onde questa è

$$\prod_{\varepsilon \varepsilon'} (\varepsilon \sqrt[q]{x^p} + \varepsilon' \sqrt[q]{y^p} - \sqrt[q]{l^p}) = 0$$

ove $\varepsilon, \varepsilon'$ sono due radici q -esime dell'unità e con $\sqrt[q]{l^p}$ si rappresenta il valore reale e positivo della radice q -esima del numero positivo l^p .

Ora siccome ciascuno dei q^2 fattori del primo membro della precedente equazione è nelle coordinate del grado $p : q$, così nel prodotto (razionale) le coordinate saliranno al grado $p q$. Dunque: una curva di Lamé di indice positivo $m = p : q$ è dell'ordine $p q$. Applicando ora l'osservazione fatta prima intorno alle curve di Lamé d'indice negativo si conclude che una curva di Lamé d'indice negativo $m = -p : q$ è dell'ordine $2 p q^1$.

Queste proposizioni permettono di risolvere il seguente

Problema: Determinare il numero delle specie distinte delle curve di Lamé di dato ordine n .

Si decomponga, infatti, il numero n nei suoi fattori primi e si ponga $n = n_1^{p_1} \cdot n_2^{p_2} \dots n_k^{p_k}$, ove n_1, n_2, \dots, n_k sono numeri primi fra loro differenti e che possono supporre scritti in ordine di grandezza crescente. Giova poi distinguere i tre casi seguenti: 1° n dispari; 2° n semplicemente pari (cioè divisibile per 2 a prima potenza); 3° n moltiplicemente pari. Nel 1° caso, l'indice m della curva è necessariamente positivo; indicandolo al solito con $p : q$ dovrà essere $n = p q$; quindi i valori leciti di p sono l'unità, e uno dei numeri $n_1^{p_1}, n_2^{p_2}, \dots, n_k^{p_k}$, uno dei prodotti binari di tali numeri, uno dei prodotti ternari degli stessi, ecc., finalmente $p = n$; in ogni caso, scelto il numero p, q risultata determinata in conseguenza ($q = n : p$) epperò risulta individuata una specie di curva di Lamé; dunque il numero complessivo di tali specie è uguale

a $1 + k + \binom{2}{k} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k$. Nel 2° caso si hanno ancora le

2^k specie trovate nel caso precedente ed inoltre altre relative a curve d'indice negativo; per determinare quante siano notiamo che in tal caso, essendo $n = 2 n_2^{p_2} n_3^{p_3} \dots n_k^{p_k}$, posto $m = -p : q$ (indice di una delle curve richieste) dovrà aversi $p q = n_2^{p_2} n_3^{p_3} \dots n_k^{p_k}$; ora, ragionando come si fece più sopra, si vede che i numeri p, q si possono scegliere in 2^{k-1} modi differenti; ciò prova che in totale le specie delle curve richieste sono $2^k + 2^{k-1} = 3 \cdot 2^{k-1}$. Finalmente nel 3° caso si ritrovano le 2^k curve di Lamé d'indice positivo incon-

¹⁾ Riguardo alla forma dell'equazione razionale di una curva di LAMÉ si osservi che, posto

$$\Pi \Pi (\varepsilon \sqrt[q]{\xi} + \varepsilon' \sqrt[q]{\eta} - \sqrt[q]{l}) = \Phi(\xi, \eta, l),$$

Φ sarà una funzione razionale e l'equazione razionale della curva (1') si scriverà

$$\Phi(x^p, y^p, l^p) = 0.$$

Da ciò si desume che le equazioni di tutte le curve di Lamé il cui indice ha un valore assoluto espresso da frazioni aventi il medesimo denominatore q sono fra loro simili, giacchè si ottengono da quella della curva di indice $m = 1/q$ elevando ad una medesima potenza x, y, l .

trate nei due casi precedenti ed inoltre altre d'indice negativo che si ottengono come segue: essendo $n = 2^{\nu_1} n_2^{\nu_2} n_3^{\nu_3} \dots n_k^{\nu_k}$ (ove $\nu_1 > 1$) si vede che deve aversi $p q = 2^{\nu_1-1} n_2^{\nu_2} n_3^{\nu_3} \dots n_k^{\nu_k}$, onde la coppia $p q$ si può scegliere in 2^k modi; tutto sommato dunque il numero delle specie di curve cercato è dato da $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Possiamo dunque enunciare il seguente

TEOREMA: Il numero delle specie distinte di curve di Lamé d'ordine n è dato da $2^k, 3 \cdot 2^{k-1}$ o 2^{k+1} secondoche n è dispari, semplicemente pari o moltiplicemente pari, ove in ogni caso k rappresenta il numero dei numeri primi distinti che entrano come fattori in n ³⁾.

136. L'equazione della tangente nel punto (x, y) alla curva (1') ha per equazione

$$x^{m-1} X + y^{m-1} Y - l^m = 0$$

ove X, Y sono coordinate correnti; per ciò, se si chiamano u, v le coordinate pluckeriane della tangente, si avrà

$$u = -\frac{x^{m-1}}{l^m}, \quad v = -\frac{y^{m-1}}{l^m};$$

se si eliminano x e y fra queste equazioni e la (1') si otterrà l'equazione tangenziale della curva in questione; essa è quindi:

$$u^{\frac{m}{m-1}} + v^{\frac{m}{m-1}} = (-1/l)^{\frac{m}{m-1}}.$$

Ora questa ha la stessa forma della (1') con la differenza che l'esponente (« indice tangenziale ») è $\mu = m/(m-1)$, il quale è razionale se tale è m ed è > 0 quando m è negativo, mentre, quando m è positivo, risulta positivo o negativo secondoche m è maggiore o minore di 1. L'equazione tangenziale della curva si può rendere razionale con un procedimento analogo a quello usato per razionalizzarne l'equazione locale; dal risultato traesi un'espressione per la classe della curva, cioè: *La classe di una curva di Lamé d'indice m eguale in valore assoluto a $p : q$ è data da $p(p+q)$ se m è negativo, da $p(p-q)$ se m è maggiore di 1, finalmente da $2p(q-p)$ se m è compreso fra 0 e 1.*

Il coefficiente angolare della tangente alla curva (1') nel punto (x, y) è dato da

$$y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^{m-1};$$

³⁾ Ad es. sono curve di LAMÉ di terzo ordine solo le due di indici 3 e 1: 3, sono invece di 6° ordine le sei di indici 1: 6, 2: 3, 3: 2,6, -1: 8, -3; finalmente sono di 12° ordine le otto di indici 1: 12, 3: 4, 4: 3, 12, -1: 6, -2: 3, -3: 2, -6.

ciò prova che: 1° Se $m > 1$, si avrà $y' = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ secondoche $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
 2° Se invece $0 < m < 1$ si avrà $y' = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ secondoche $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Dunque: Se l'indice m della curva di Lamé che si considera è compreso fra 0 e 1 le uniche tangenti alla curva che siano parallele agli assi sono gli assi stessi; se invece m è maggiore di 1 le tangenti parallele a Ox e Oy hanno risp. per punti di contatto punti di Oy o risp. Ox . Nel caso finora escluso in cui l'indice sia negativo gli assi toccano la curva all'infinito e sono le uniche tangenti di tali direzioni.

Differenziando un'altra volta la relazione $y' = -(x/y)^{m-1}$ e tenendo conto dell'equazione (1') si trova

$$yy'' = (1-m)x^m \frac{l^m}{(xy^{m-1})^2};$$

ora è noto che una curva è in un suo punto convessa o concava verso Ox secondoche il prodotto yy'' è ivi positivo o negativo; tenendo conto della formola precedente si vede che se l'indice m è negativo la curva (1') è convessa verso Ox in tutti e soli i punti per cui $x^m > 0$; lo stesso dicasi se $0 < m < 1$; ma se invece $m > 1$ la curva è convessa verso Ox nei punti in cui $x^m < 0$. Ciò conferma la necessità di tener distinti i tre casi in cui m cade in uno dei tre intervalli

$$-\infty \dots 0, 0 \dots 1, 1 \dots +\infty$$

137. Supponiamo $m > 0$ e scriviamo l'equazione (1') sotto la seguente forma:

$$x = \sqrt[p]{\sqrt[q]{l^p} - \sqrt[q]{y^p}}^q;$$

vedremo allora che: 1° Se i due numeri p, q sono entrambi dispari a qualunque valore reale di y corrisponde sempre un solo valore reale di x ; geometricamente ciò significa che qualunque parallela a Ox taglia la curva in un solo punto sempre reale. Altrettanto può ripetersi per le parallele a Oy . 2° Se q è dispari e p pari ad ogni valore reale di y in valore assoluto inferiore a l corrispondono due valori reali (eguali ed opposti), onde, geometricamente, le rette $y = \pm l$ limitano una striscia di piano tale che tutte le parallele a Ox in essa contenute tagliano la curva in due punti reali; altrettanto accade riguardo a Oy . 3° Se finalmente q è pari e p è dispari, ad ogni valore positivo di y corrispondono due valori di x sempre

reali e positivi; geometricamente ciò significa che qualunque parallela a Ox ad ordinate positive taglia la curva in due punti ad ascisse positive. Similmente riguardo all'altro asse.

Queste osservazioni si estendono immediatamente al caso di $m < 0$ osservando che in tal caso l'equazione della curva può scriversi come segue:

$$\frac{1}{x} = \sqrt[p]{\left[\sqrt[q]{\frac{1}{l^p}} - \sqrt[q]{\frac{1}{y^p}} \right]^q}$$

Ritorniamo al caso $m > 0$ e notiamo che i punti all'infinito della curva sono caratterizzati dalla seguente equazione:

$$x^{\frac{p}{q}} + y^{\frac{p}{q}} = 0$$

Ora se p è pari questa non è evidentemente soddisfatta da valori reali di x e y , onde la curva corrispondente è chiusa. Cerchiamo che cosa succede se p è dispari. Scriviamo perciò la relazione precedente sotto la forma $1 + (y/x)^{p/q} = 0$ e vedremo intanto che il valore assoluto del rapporto $y : x$ dev'essere = 1. Posto $y : x = 1$ la relazione precedente diviene $1^{p/q} = -1$ ossia, detto k un intero,

$$\cos \frac{2pk\pi}{q} + i \operatorname{sen} \frac{2pk\pi}{q} = -1$$

ciò prova che dev'essere

$$\frac{2pk\pi}{q} = (2h + 1)\pi$$

ove h è un nuovo intero, ossia

$$\frac{-p}{q} = \frac{2h + 1}{2k}$$

Posto invece: $y : x = -1$ si trova similmente successivamente

$$(-1)^{p/q} = -1, \cos \frac{p(2k+1)\pi}{q} + i \operatorname{sen} \frac{p(2k+1)\pi}{q} = -1,$$

$$\frac{p}{q} = \frac{2h+1}{2k+1},$$

Emerge da tutto ciò che: Una curva di Lamé d'indice $m = p : q$ positivo è chiusa se p è pari; passa per il punto all'infinito della bi-

settrice dell'angolo formato dalle direzioni positive degli assi se p è dispari e q pari; passa invece per il punto all'infinito della bisettrice dell'altro degli angoli degli assi se p e q sono entrambi dispari. Quando invece l'indice è negativo, gli unici punti all'infinito della curva si trovano sopra gli assi.

138. Queste osservazioni abilitano ad enumerare e descrivere tutte le forme sotto cui può presentarsi una curva di Lamé¹⁾; converrà perciò considerare separatamente i casi $m > 0$, $m < 0$.

1°) Curve ad indice positivo. Distingueremo le tre forme aritmetiche che può assumere l'indice.

a) $m = \frac{2h}{2k+1}$. La curva possiede quattro assi di simmetria, cioè gli assi coordinati e le bisettrici degli angoli da essi for-

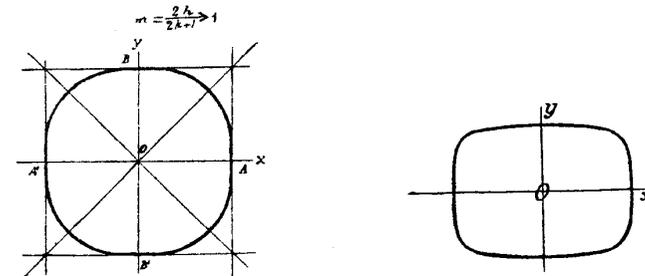


Fig. 76. — Curva di Lamé equilatera. Fig. 77. — Curva di Lamé scalena.

mati; onde consta di 8 archi fra loro identici aventi per estremi i punti A, A', B, B' in cui la curva incontra gli assi. Ogni parallela a Ox (o Oy) distante da tale asse di una quantità in valore assoluto inferiore a l taglia la curva in due punti reali. Se l'indice m è superiore a 1, gli 8 archi suddetti volgono la loro concavità verso Ox e la curva tocca in A, A' due parallele a Oy , in B, B' due parallele a Ox ; onde la curva se è equilatera ha la forma indicata dalla fig. 76, se è scalena quella della fig. 77. Se invece $m < 1$, quei quattro archi volgono verso gli assi la loro convessità e toccano in A e A' l'asse Ox , in B, B' l'asse Oy ; la curva ha dunque l'aspetto di un asteroide regolare (fig. 58, p. 313).

b) $m = \frac{2h+1}{2k}$. La curva ha per unico asse di simmetria la bisettrice dell'angolo formato dalle direzioni positive degli assi,

¹⁾ V. per quanto segue G. LORIA, *Topologia delle curve di Lamé e delle spirali sinusoidi algebriche* (Atti dell'Acc. Pontoniana, T. XXXIX, 1909).

bisettrice il cui punto all'infinito è l'unico punto reale all'infinito della curva, angolo entro cui cadono tutti i punti reali della curva. La curva consta di tre archi; uno finito avente per estremi i punti $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, gli altri infiniti ed uscenti uno da A verso la direzione positiva di Ox , l'altro da B verso la direzione positiva di Oy . Se $m > 1$ il primo di questi archi è concavo verso Ox e così il secondo, mentre il terzo è convesso; l'opposto succede se $m < 1$. Nel primo caso la curva tocca in A e B le parallele condotte da A e B agli assi ed ha i punti A, B per cuspidi; nel secondo tocca ivi gli assi stessi; ciò prova che nel primo caso l'aspetto della curva è quale risulta dalla fig. 78; nel secondo invece ha la forma di una

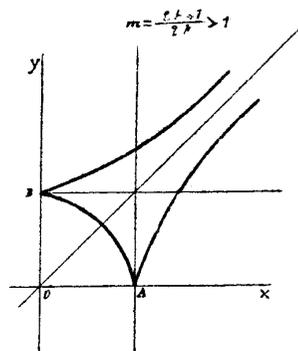


Fig. 78. — Curva di Lamé.

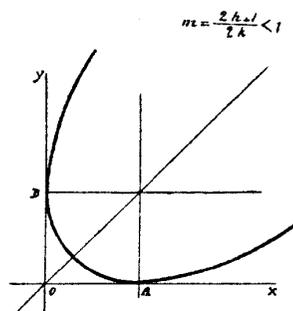


Fig. 79. — Curva di Lamé.

parabola tangente in A e B agli assi, come è rappresentata dalla fig. 79.

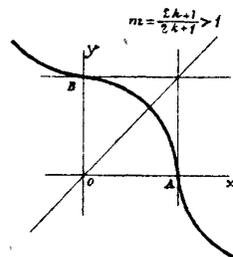
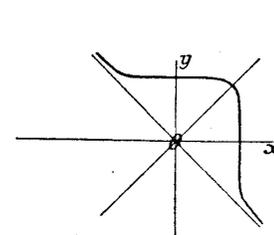
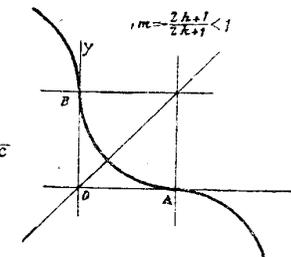
c) $m = \frac{2h+1}{2k+1}$. Anche in questo caso la curva ha per asse di simmetria la bisettrice dell'angolo formato dalle direzioni positive degli assi, ed ha per unico punto all'infinito quello situato sopra l'altra analoga bisettrice. La curva consta di tre archi; uno avente per estremi i punti $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ e tutto situato entro l'angolo formato dalle direzioni positive degli assi, un altro è formato da punti tali che $x > l$, $y < 0$; il terzo infine da punti per cui $x < 0$, $y > l$. Se $m > 1$, le tangenti in A, B sono le parallele risp. a Oy e Ox , il primo arco di curva è concavo verso Ox e così il secondo, mentre il terzo è convesso; la curva ha dunque la forma indicata dalle figure 80 e 81; se invece $m < 1$ la curva tocca Ox in A e Oy in B e le relazioni di concavità e convessità testè indicate risultano invertite; la curva presentasi dunque come è indicato nella fig. 82. In entrambi i casi i punti A e B sono flessi.

2°) *Curve ad indice negativo.* Il valore assoluto dell'indice si può presentare sotto tre forme analoghe a quelle indicate nel caso dell'indice positivo e che esamineremo separatamente:

a) $m = -\frac{2h}{2k+1}$. La curva ha come assi di simmetria

gli assi coordinati e le bisettrici degli angoli che esse formano. Condotte le rette $x = \pm l$, $y = \pm l$ restano individuati quattro angoli retti entro cui cadono tutti i punti reali della curva; ogni retta parallela ad uno degli assi e che ne disti più di l taglia la curva in due punti reali; la curva consta di quattro rami infiniti fra loro identici volgenti la loro convessità verso Ox . Da tutto ciò emerge che la curva ha la forma generale della « Kreuzkurve » (fig. 54, p. 268), che corrisponde all'ipotesi $h = 1$, $k = 0$.

b) $m = -\frac{2h+1}{2k}$. L'unico asse di simmetria della curva è la bisettrice dell'angolo formato dalle direzioni positive degli assi.

Fig. 80.
Curva di Lamé.Fig. 81.
Curva di Lamé.Fig. 82.
Curva di Lamé.

Condotte le rette $l = x$, $y = l$ resta determinato un angolo retto in cui stanno infiniti punti a coordinate positive il quale contiene un arco infinito di curva. Altri due archi partono da 0 , toccano ivi l'asse di simmetria della curva e sono uno concavo, l'altro convesso verso Ox ; 0 è dunque una cuspidale con l'asse di simmetria per corrispondente tangente cuspidale, come è indicato dalla fig. 83.

c) $m = -\frac{2h+1}{2k+1}$. L'unico asse di simmetria della curva è ancora la bisettrice dell'angolo delle direzioni positive degli assi. Condotte le rette $x = l$, $y = l$ nasce, come nel caso precedente, un arco infinito di curva nell'angolo retto determinato da tali rette e tutto costituito di punti a coordinate positive. Inoltre l'asse delle x , la retta $y = l$ e l'asse delle y limitano una semi-striscia di piano tutta formata di punti ad ordinate negative nella quale si trova un altro arco che parte dall'origine e tocca ivi l'altra delle bisettrici

dell'angolo degli assi. Un terzo arco si trova in un'altra analoga semi-striscia limitata dalle rette $x = 0, x = l, y = 0$. La curva ha quindi un aspetto analogo a quello di un'iperbola equilatera (fig. 84),

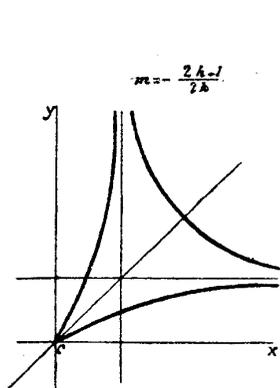


Fig. 83. — Curva di Lamé.

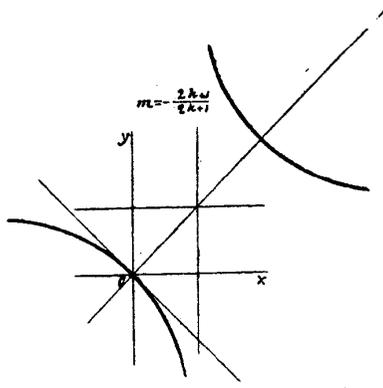


Fig. 84. — Curva di Lamé.

il che non deve stupire se si riflette che tal curva si ottiene supponendo $h = k = 0$.

Riassumendo dunque si vede che dal punto di vista topologico le curve di Lamé si distribuiscono in nove tipi¹⁾.

1) Analoghe alle curve di LAMÉ sono quelle di equazioni della forma

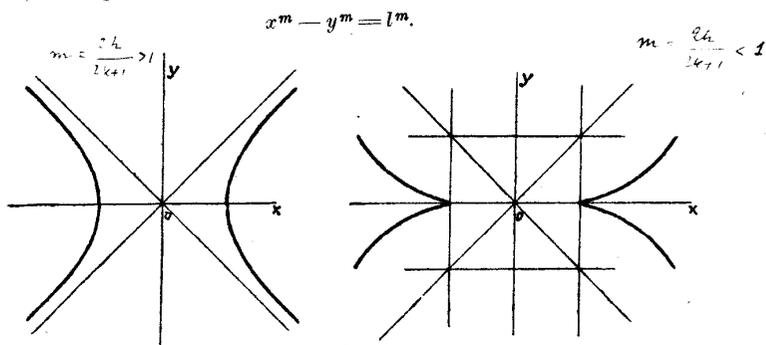


Fig. 85.

Fig. 86.

Ora se si tiene conto del fatto che quando m è frazionario le potenze considerate sono suscettibili di parecchi valori, è facile vedere che, se m ha un valore assoluto della forma $(2h+1)/2k$ oppure della forma $(2h+1)/(2k+1)$

Combinando questo risultato con le considerazioni svolte prima per determinare quante siano le specie di una curva di Lamé di dato ordine si può rispondere alla questione: Sotto quali forme può presentarsi una curva di Lamé di dato ordine n ? Si vede infatti che, se si tratta di una curva d'ordine n dispari, il suo indice è necessariamente della forma $\frac{2h+1}{2k+1}$; dunque le uniche forme che può assumere una curva di Lamé d'ordine dispari sono quelle indicate dalle figure 80-82. Se invece n è semplicemente pari, il suo indice non può avere che una delle seguenti forme:

$$\frac{2h}{2k+1}, \frac{2h+1}{2k}, -\frac{2h+1}{2k+1}$$

dunque le forme che può assumere una curva di Lamé d'ordine semplicemente pari sono indicate dalle figure 76, 58, 78, 79 e 84. Se finalmente l'ordine è moltiplicemente pari l'indice può assumere uno dei quattro valori

$$\pm \frac{2h}{2k+1}, \pm \frac{2h+1}{2k};$$

in conseguenza: se l'ordine di una curva di Lamé è moltiplicemente pari, le forme sotto cui essa può presentarsi è indicata dalle figure 76, 58, 78, 79, 54 e 83.

139. Riguardo alle curve rappresentate dall'equazione (1) il Lamé ha dimostrato (l. c.) un notevole teorema che venne poi esposto dal Magnus¹⁾ e di recente ritrovato dal Gilbert²⁾. Per farlo

le nuove curve non sono altro che curve di LAMÉ, onde le loro forme sono già note: resta dunque soltanto da esaminare i casi in cui il valore assoluto di m abbia la forma $2h/(2k+1)$; distingueremo perciò l'ipotesi di m positivo dall'opposta.

A) $m = 2h/(2k+1)$. La curva non taglia Oy , ma incontra Ox nei punti A, A' di ascisse $\pm l$ nei quali le relative tangenti sono parallele a Oy se $m > 1$, mentre coincidono con Ox se $m < 1$. Nel primo caso la curva è concava verso Ox , nel secondo è convessa ed allora A e A' sono cuspidi. Nel primo caso l'aspetto della curva è simile a quello d'un'iperbola equilatera (fig. 85), mentre nell'altro si presenta come l'evoluta di una tale curva (v. Fig. 86).

B) $m = -2h/(2k+1)$. Tutti i punti reali della curva cadono entro la striscia di piano compresa fra le rette $x = \pm l$; la curva è simmetrica rispetto all'origine, punto che è un nodo d'inflessione; la curva è convessa verso Ox , onde ha un aspetto analogo alla « Kohlenspitzkurve » rappresentata dalla fig. 53, p. 267.

¹⁾ *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie* (Berlin 1833), p. 586.

²⁾ *Sur les courbes planes à équations trinomes* (Nouv. Ann., 2^a Serie, T. IX, 1870).

conoscere consideriamo le ∞' curve rappresentate dall'equazione

$$(2) \quad \left[\frac{x}{\xi} \right]^m + \left[\frac{y}{\eta} \right]^m = 1,$$

ove le quantità ξ, η sono legate dalla relazione

$$(3) \quad \left[\frac{\xi}{a} \right]^p + \left[\frac{\eta}{b} \right]^p = 1;$$

dico che il loro involuppo è una curva di Lamé della specie (1) avente per indice il numero $mp/(m+p)$ ¹⁾. E infatti, applicando il metodo dei moltiplicatori, si vede che l'equazione dell'involuppo in questione nasce eliminando ξ, η dall'equazione (2) mediante la relazione

$$\xi^{m+p} = a^p x^m, \quad \eta^{m+p} = b^p y^m,$$

onde è

$$\left[\frac{x}{a} \right]^{\frac{m+p}{m}} + \left[\frac{y}{b} \right]^{\frac{m+p}{m}} = 1;$$

questa equazione, con la sua forma, dimostra l'enunciato.

Se ad esempio si suppone $m=2, p=1, b=a$ si ottiene lo asteroide regolare $x^{2:3} + y^{2:3} = a^{2:3}$ come involuppo delle ∞' ellissi $(x/\xi)^2 + (y/\eta)^2 = 1$ i cui assi hanno la somma costante $2a$; se invece si suppone $m=p=2$ si trova che: Il sistema delle ∞' ellissi concentriche e coassiali i cui semiassi sono eguali alle coordinate dei punti di una data ellisse hanno per involuppo i lati del parallelogrammo avente per vertici i vertici di questa.

Si noti anche²⁾ che unendo i piedi delle proiezioni su gli assi coordinati di un punto della curva Γ di Lamé

$$\left[\frac{\xi}{a} \right]^p + \left[\frac{\eta}{b} \right]^p = 1$$

si ottiene la retta

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} = 1$$

¹⁾ EUZET (*Sur les courbes planes à équations trinômes et les surfaces à équations tetranoms*, Nouv. Ann. de math., T. XIII, 1852) tentò di estendere questo risultato alle curve $(x/a)^m + (y/b)^n = 1$, ma senza risultato a cagione d'un errore di calcolo commesso in principio. Queste curve si trovano considerate, sotto il nome di *ovali doppie*, nella nota di Mc. LAREN, *Equation of the glissette of the twofold oval* $x^m/a^m + y^n/b^n = 1$ (Proc. R. Soc. Edinburgh, T. XIII, 1890).

²⁾ C. FRANCOIS, *Sur une certaine transformation et son inverse* (Mathésis, III Ser., T. IX, 1909).

il cui involuppo è una nuova curva Γ_1 di Lamé d'indice

$$p_1 = \frac{p}{p+1} = \frac{1}{1+1/p}.$$

Operando similmente su Γ_1 si ottiene una nuova curva di Lamé dell'indice

$$p_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{p_1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1/p}}$$

Proseguendo indefinitamente si finirà per ottenere la curva di Lamé dell'indice

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Lasciamo al lettore di determinare le forme assunte dalle curve successivamente ottenute, distinguendo i due casi $p > 0, p < 0$.

Un'altra proposizione notevole concerne la curvatura delle curve di Lamé: ecco come può ottenersi. Dalla (1) si deduce

$$(4) \quad - \left[\frac{b}{a} \right]^m = \left[\frac{y}{x} \right]^{m-1} \frac{dy}{dx}$$

ossia

$$- \left[\frac{a}{b} \right]^m \frac{dy}{dx} = \left[\frac{x}{y} \right]^{m-1}$$

differenziano questa rispetto a x se ne trae:

$$- \left[\frac{a}{b} \right]^m \frac{d^2y}{dx^2} = (m-1) \left[\frac{x}{y} \right]^{m-2} \left[\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \frac{dy}{dx} \right],$$

che, moltiplicata per la (4),²⁾ diviene

$$(5) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = (m-1) \frac{1}{xy} \frac{dy}{dx} \left[y - x \frac{dy}{dx} \right]$$

Quest'espressione dimostra che il raggio di curvatura R_m della curva (1) nel punto $P(x, y)$ è dato dalla formola seguente

$$(6) \quad R_m = \frac{xy \{ 1 + (dy/dx)^2 \}^{3/2}}{(m-1) dy/dx \cdot (y - x dy/dx)}$$

Introducendo l'arco s si può dedurre:

$$\frac{1}{(m-1)R_m} = x y \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \left| \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \right|^{-1} \quad ^1)$$

Ora se esaminiamo l'espressione così nascente di $(m-1)R_m$ vedremo che essa non dipende nè da a , b nè da m , ma soltanto dalle coordinate x, y del punto considerato e dalla direzione della retta tangente ivi alla curva; in altre parole — usando la nomenclatura introdotta da S. Lie — $(m-1)R_m$ è funzione soltanto delle « coordinate dell'elemento lineare » della curva avente per sede il punto P . Ne viene che se consideriamo un'altra curva di Lamé del tipo (1), per es. la seguente

$$\left[\frac{x}{a'} \right]^{m'} + \left[\frac{y}{b'} \right]^{m'} = 1,$$

e supponiamo che essa tocchi la precedente nel punto P , il valore della funzione $(m'-1)R_{m'}$, sarà lo stesso di quello che ha la funzione $(m-1)R_m$. Si conclude dunque

$$(7) \quad (m-1)R_m = (m'-1)R_{m'},$$

ovvero

$$\frac{1}{R_m} : \frac{1}{R_m} = \frac{m-1}{m'-1}$$

relazione che esprime il seguente teorema: *Se due curve di Lamé riferite agli stessi assi si toccano in un punto ed hanno per indici m e m' , il rapporto delle loro curvature in quel punto è espresso da $\frac{m-1}{m'-1}$.* Se quindi si sa costruire il centro di curvatura in un punto, ad una delle infinite curve di Lamé ivi fra loro tangenti, si dedurranno quelli di tutti gli altri; prendendo ad es. $m'=2$ si ottiene $R_m = \frac{1}{m-1} R_2$, onde la determinazione di R_m è ridotta alla costruzione del raggio di curvatura in un punto P di una conica individuata dalla posizione de' suoi assi, dal punto P e dalla rela-

¹⁾ Per altra forma che può darsi a quest'espressione vedi R. GODEFROY, *Théorèmes sur les rayons de courbures d'une classe de courbes géométriques* (Nouv. Ann., 3 Serie, T. V, 1886).

tiva tangente. Riduzioni congeneri nascono supponendo

$$m' = -1 \quad \text{o} \quad m' = \frac{1}{2} \quad ^1)$$

Servendosi di integrali euleriani, si può ottenere per la quadratura delle curve di Lamé una formola elegante.

Notiamo infatti che la curva (1) è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica:

$$x = a \cos^{\frac{2}{m}} \lambda, \quad y = b \sin^{\frac{2}{m}} \lambda;$$

onde, detta A l'area totale della curva, avremo:

$$\frac{1}{4} A = \frac{ab}{m} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\pi/2} \sin^{\frac{2}{m}+1} \lambda \cdot \cos^{\frac{2}{m}+1} \lambda \cdot d\lambda;$$

ora si ha in generale:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu-1} \lambda \cdot \cos^{\nu-1} \lambda \cdot d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)};$$

perciò

$$\frac{1}{4} A = \frac{ab}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)};$$

e da questa, per essere in generale $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$, si trae finalmente

$$A = \frac{2ab}{m} \frac{\Gamma^2(1/m)}{\Gamma(2/m)};$$

tale è la formola annunciata ²⁾.

¹⁾ G. FURET, *Construction du rayon de courbure des certaines classes de courbes, notamment des courbes de Lamé et des paraboles et hyperboles de divers ordres* (C. R., T. CX, 1890); R. GODEFROY, *Sur les rayons de courbure de certaines courbes et surfaces, en particulier des courbes et surfaces de Lamé* (Journ. de l'Ec. pol., LXII cah., 1892).

²⁾ Pel caso particolare di m pari, veggasi la nota di S. SPITZER, *Bestimmung der Flächeninhalte jener Curven, die durch die Gleichung $(x/a)^{2m} + (y/b)^{2m} = 1$, und des Körperinhalts jener Flächen, die durch die Gleichung $(x/a)^{2m} + (y/b)^{2m} + (z/c)^{2m} = 1$ gegeben sind, worin m eine ganze Zahl bezeichnet* (Archiv, T. LXI, 1877); e pel caso $a = b$ CESARO, *Elementi di Calcolo infinitesimale* (Napoli 1899), p. 324.

140. Si proietti una curva di Lamé per modo che alla retta all'infinito ne corrisponda una a distanza finita; nascerà così una nuova curva trinomia rappresentabile in coordinate omogenee con un'equazione del seguente tipo:

$$(9) \quad \left[\frac{x_1}{a_1} \right]^m + \left[\frac{x_2}{a_2} \right]^m + \left[\frac{x_3}{a_3} \right]^m = 0.$$

Tutte le curve suscettibili di una così fatta rappresentazione analitica si chiamano, secondo J. de la Gournerie, *curve triangolari simmetriche*¹⁾; m ne è l'esponente ed il triangolo di riferimento ne è il *triangolo fondamentale*. Se $m = 1$ si ha in particolare una retta; se $m = -1$ una conica circoscritta al triangolo fondamentale; se $m = \frac{1}{2}$ una conica inscritta nello stesso triangolo; se $m = 2$ una conica della quale questo è un triangolo autoconiugato²⁾.

È facile vedere che eseguendo una trasformazione proiettiva arbitraria sopra una curva triangolare simmetrica si ottiene un'altra curva triangolare simmetrica dello stesso esponente ed avente per triangolo fondamentale il trasformato del triangolo fondamentale primitivo. Un fatto analogo si presenta effettuando certe trasformazioni reciproche che ora determineremo.

Consideriamo la conica

$$(10) \quad k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 = 0$$

e notiamo che le coordinate della tangente nel punto (x_1, x_2, x_3) alla curva (9) sono date dalle formole:

$$(11) \quad r \xi_i = \frac{x_i^{m-1}}{a_i^m} \quad (i = 1, 2, 3),$$

r essendo un fattore di proporzionalità; il polo di questa tangente rispetto alla conica (10) ha le coordinate X_1, X_2, X_3 determinate dalle equazioni

$$(12) \quad \varrho X_i = \frac{x_i^{m-1}}{k_i a_i^m},$$

ϱ essendo un nuovo fattore di proporzionalità. Eliminando le x fra le (9) (12) si otterrà l'equazione della curva polare reciproca

¹⁾ J. DE LA GOURNERIE. *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques* (Paris 1867), p. 196 e seg.

²⁾ Nel caso in cui m sia l'inverso di un numero intero si ottengono le linee studiate da L. BRUSOTTI nella nota *Sulle curve piane razionali dotate di tre punti d'iperosculazione* (Rend. Ist. Lomb., II Ser., T. XXXVII, 1904).

della triangolare (9) rispetto alla conica (10); è la seguente:

$$(13) \quad (k_1 a_1 X_1)^{\frac{m}{m-1}} + (k_2 a_2 X_2)^{\frac{m}{m-1}} + (k_3 a_3 X_3)^{\frac{m}{m-1}} = 0;$$

essa appartiene a una curva triangolare di esponente $\mu = m/(m-1)$ ed avente il medesimo triangolo fondamentale della (9); dunque: *la curva polare reciproca di una curva triangolare simmetrica di esponente m rispetto ad una conica avente il triangolo fondamentale per autoconiugato è una curva analoga di esponente $\mu = m/(m-1)$* . Notiamo due cose: la prima che la relazione fra m e μ può scriversi sotto la forma simmetrica $1/m + 1/\mu = 1$; l'altra che qualunque curva triangolare simmetrica di esponente μ , quale sarebbe questa

$$(14) \quad \left[\frac{x_1}{a_1} \right]^\mu + \left[\frac{x_2}{a_2} \right]^\mu + \left[\frac{x_3}{a_3} \right]^\mu = 0,$$

può ottenersi polarizzando la (9) rispetto ad una conica conveniente; infatti le (13) (14) coincidono quando k_1, k_2, k_3 soddisfanno alle relazioni:

$$k_1 a_1 a_1 = k_2 a_2 a_2 = k_3 a_3 a_3$$

Le formole precedenti conducono ad altre conseguenze. Se si eliminano le x fra le equazioni (9) e (11) si trova:

$$(15) \quad (a_1 \xi_1)^{\frac{m}{m-1}} + (a_2 \xi_2)^{\frac{m}{m-1}} + (a_3 \xi_3)^{\frac{m}{m-1}} = 0;$$

questa è l'equazione tangenziale della curva (9) ed è notevole che ha la stessa forma della (9); soltanto l'esponente m è divenuto μ ; questo numero può quindi chiamarsi *esponente tangenziale* della curva considerata.

Si vede subito che le polari di tutti gli ordini r di un punto qualunque del piano rispetto ad una curva triangolare di esponente m è una curva analoga di esponente $m - r$ ed avente lo stesso triangolo fondamentale. Consideriamo in particolare le due curve

$$(16) \quad \left[\frac{x_1}{l_1} \right]^p + \left[\frac{x_2}{l_2} \right]^p + \left[\frac{x_3}{l_3} \right]^p = 0, \\ \left[\frac{x_1}{m_1} \right]^q + \left[\frac{x_2}{m_2} \right]^q + \left[\frac{x_3}{m_3} \right]^q = 0;$$

l'ultima polare di un punto della prima rispetto alla seconda ha per equazione

$$\frac{x_1^{q-1} X_1}{m_1^q} + \frac{x_2^{q-1} X_2}{m_2^q} + \frac{x_3^{q-1} X_3}{m_3^q} = 0,$$

X_1, X_2, X_3 essendo coordinate correnti, onde le sue coordinate sono date dalle formole:

$$r \xi_i = \frac{x_i^{q-1}}{m_i^q} \quad (i = 1, 2, 3);$$

eliminando col mezzo di queste equazioni le x dalle (16) si trova:

$$\left[\frac{m_1^{\frac{q}{q-1}}}{l_1} \right]^p \xi_1^{\frac{p}{q-1}} + \left[\frac{m_2^{\frac{q}{q-1}}}{l_2} \right]^p \xi_2^{\frac{p}{q-1}} + \left[\frac{m_3^{\frac{q}{q-1}}}{l_3} \right]^p \xi_3^{\frac{p}{q-1}} = 0.$$

Questa equazione prova che: *date due curve triangolari di esponenti p, q relative allo stesso triangolo, l'involuppo delle ultime polari dei punti della prima rispetto alla seconda è una curva della stessa specie di esponente tangenziale $p/(q-1)$. L'altro esponente è quindi $p/(p-q+1)$. Va notato che questa proposizione per $q=2$ coincide con una anteriormente stabilita e che gli esponenti della curva risultante non mutano scambiando gli uffici delle curve (16), quando $p=q$ oppure $p+q=1$.*

141. Si ponga

$$(17) \quad \rho x_i' = x_i^m \quad (i = 1, 2, 3);$$

si viene così a stabilire una corrispondenza fra i punti $P(x_1, x_2, x_3)$ di un piano π ed i punti $P'(x_1', x_2', x_3')$ di un altro piano π' . Ora in forza delle (17) la (9) diviene:

$$\frac{x_1'}{a_1^m} + \frac{x_2'}{a_2^m} + \frac{x_3'}{a_3^m} = 0$$

che rappresenta una retta. Dunque: *Le curve triangolari simmetriche sono le curve che, nel piano π , corrispondono alle rette del piano π' in forza della trasformazione geometrica determinata dalle equazioni (17). Da questo punto di vista le triangolari simmetriche vennero studiate da E. Timerding, il quale, credendole curve nuove, le designò con un nome nuovo, cioè *courbes puissances*¹⁾.*

Lo studio della curvatura delle curve triangolari simmetriche dà luogo ad un teorema importante che possiamo dedurre nel seguente modo da uno dimostrato nel n. 139. Consideriamo in un piano π due curve di Lamé Γ_m e Γ_n degli indici m e n fra loro tangenti nel punto P ; proiettiamole sopra un piano π' non parallelo a π ; otterremo così due curve triangolari Γ'_m e Γ'_n fra loro tangenti

¹⁾ V. l'articolo *Sur une certaine famille de courbes algébriques* (Nouv. Ann., 3^a Serie, T. XVII, 1898).

nel punto P' che è proiezione di P . Chiamiamo R_m e R_n i raggi di curvatura in P di Γ_m e Γ_n , R'_m e R'_n i raggi di curvatura in P' di Γ'_m e Γ'_n . In virtù del teorema testè citato si avrà

$$\frac{R_m}{R_n} = \frac{n-1}{m-1}.$$

Ora è noto¹⁾ che se due curve si toccano in un punto, il rapporto delle loro curvature in quel punto non si altera in causa di qualsiasi trasformazione proiettiva, in particolare per effetto di una proiezione. Dunque:

$$\frac{R'_m}{R'_n} = \frac{R_m}{R_n}.$$

Questa relazione combinata con la precedente dà

$$\frac{R'_m}{R'_n} = \frac{n-1}{m-1},$$

equazione che esprime il seguente teorema di Jamet: *Se due curve triangolari simmetriche di esponenti m, n hanno comune il triangolo fondamentale e si toccano in un punto, il rapporto delle loro curvature in questo punto è espresso da $(m-1)/(n-1)$. In particolare facendo $n=-1$: Il raggio di curvatura in un punto P di una curva triangolare simmetrica di esponente m sta nel rapporto $2/(1-m)$ al raggio di curvatura in P della conica circoscritta al triangolo fondamentale e tangente in P a quella curva²⁾; per ciò la costruzione del raggio di curvatura in un punto arbitrario di qualunque curva triangolare è ricondotta alla costruzione del cerchio osculatore in P ad una conica determinata da quattro punti $P A_1 A_2 A_3$ e dalla tangente nel primo di essi³⁾.*

¹⁾ MEHMKE, *Ueber zwei die Krümmung von Curven und das Gauss'sche Krümmungsmaass von Flächen betreffende Eigenschaft der linearen Punkttransformation* (Zeitschrift, T. XXXVI, 1891); WÖLFFING, *Das Verhältniss der Krümmungsradien im Berührungspunkte zweier Curven* (Id., T. XXXVIII, 1893).

²⁾ JAMET, *Sur les courbes et les surfaces tétraédrales symétriques* (Ann. de l'Ec. nom. sup., 3^a Serie, T. IV, 1887, Supplément). Cf. anche: F. MACHOVEC, *Ueber die Krümmungsmittelpunkte der Dreieckscurven (courbes triangulaires)* (Prager Ber. 1891), e CESARO, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli 1896), p. 101 e R. GOORMAGHTIGH, *Sur une généralisation du théorème de Jamet relatif aux courbes triangulaires symétriques* (Mathesis, T. XXXVIII, 1924) e *Généralisation du théorème de Maclaurin sur la courbure des développées des coniques* (Id., T. XXXIX, 1925).

³⁾ Questo problema, risolto da CHASLES e poi dal MANNHEIM, è stato studiato di nuovo di recente da G. FOURET nella nota *Construction du rayon de courbure des courbes triangulaires symétriques, des courbes planes anharmoniques et des lignes asymptotiques de la surface de Steiner* (C. R., T. CX, 1890).

142. L'esponente m che entra nell'equazione (9) è per ipotesi un numero razionale positivo o negativo; ne indicheremo il valore assoluto ridotto ai suoi minimi termini con p/q . Allora, razionalizzando l'equazione (9), si vede che se $m = p/q$ la curva corrispondente è dell'ordine pq , mentre se $m = -p/q$ il suo ordine è $2pq$. Nel primo caso la curva non passa pei vertici del triangolo fondamentale; nel secondo caso invece essa ha in ogni vertice del triangolo fondamentale la molteplicità pq , le corrispondenti tangenti riducendosi a sole p rette distinte. In questo caso la curva non taglia i lati del triangolo fondamentale che nei vertici; ma se invece m è positivo, le pq intersezioni con uno qualunque dei lati del triangolo fondamentale formano p gruppi composti ciascuno di q punti coincidenti. Essendo, come abbiamo visto, l'equazione tangenziale di una curva triangolare della stessa forma dell'equazione locale, a queste proprietà, a cui conduce la semplice discussione dell'equazione (9), ne corrispondono per dualità altrettante: arrestiamoci un istante a dire qualche cosa di quelle che concernono la classe delle curve che studiamo. In generale l'esponente tangenziale della curva (9) è dato da $\mu = m/(m-1)$. Quindi se $m = p/q$ si ha $\mu = p/(p-q)$; perciò se $p > q$ la classe è $= p(p-q)$, ma se $p < q$ la classe è $= 2(q-p)$; se invece è $m = -p/q$ si ha $\mu = p/(p+q)$ e la classe della curva è sempre $= p(p+q)$. Siffatta diversità di comportamento ha consigliato il La Gourmerie a distinguere le curve triangolari in *tre specie*; ponendo nella prima quelle in cui l'esponente m è maggiore di 1, nella seconda quelle in cui l'esponente è compreso fra 0 e 1, e nella terza quelle ad esponente negativo. Ciascuna specie si suddivide poi in tre generi, a seconda che dei numeri p, q il solo secondo, o il solo primo, od entrambi sono dispari: le proprietà particolari a ciascuno dei nove generi risultanti vennero diffusamente studiate dal precitato geometra francese, alla cui opera (p. 400) rimandiamo il lettore desideroso di ulteriori notizie.

Ci arresteremo invece a stabilire una serie di considerazioni che abilitano a determinare il genere di qualunque curva triangolare simmetrica. Riprendiamo per ciò la curva (9) ed eseguiamo su di essa la trasformazione proiettiva determinata dalle formole

$$x = \frac{a_3}{a_1} \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{a_3}{a_2} \frac{x_2}{x_3};$$

otterremo così la curva Γ

$$(9') \quad x^{\pm \frac{p}{q}} + y^{\pm \frac{p}{q}} + 1 = 0$$

(ove $\pm p/q = m$ e p, q sono interi positivi fra loro primi) che è dello

stesso genere della (9). Su di essa si operi poi la trasformazione

$$(T) \quad x = X^{\pm a}, \quad y = Y^{\pm a}$$

e si otterrà la curva Δ di equazione

$$(9'') \quad X^p + Y^p + 1 = 0$$

la quale è d'ordine p ed esente da punti doppi. Ora le formole (T) provano subito che ad ogni punto della curva Δ corrisponde un punto determinato ed unico di Γ ; ma si può dimostrare che anche ad ogni punto di Γ corrisponde in generale un punto unico di Δ . Ciò basta per concludere che le due curve Γ e Δ sono dello stesso genere. Ora Δ è, in forza di quanto si è osservato prima, del genere $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$; dunque si conclude: *Una curva triangolare simmetrica di indice $m = \pm p/q$ è del genere $\frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$.*

Chiuderemo questo Capitolo col far cenno di un caso limite delle curve triangolari. Scriviamo la (9) come segue

$$(18) \quad c_1 x_1^m + c_2 x_2^m + c_3 x_3^m = 0,$$

supponiamo

$$(19) \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

e cerchiamo il limite a cui tende l'equazione (18) quando m tende a 0. Notiamo perciò che, detta c una costante finita, essendo

$$\lim_{m=0} (m \cdot c) = 0$$

il limite cercato è

$$\lim_{m=0} (c_1 x_1^m + c_2 x_2^m + c_3 x_3^m) = \lim_{m=0} (m \cdot c)$$

ossia

$$\sum_{k=1}^{k=3} c_k \lim_{m=0} \frac{x_k^m - 1}{m} = c.$$

¹⁾ V. JAMET, *Sur le genre des courbes planes triangulaires* (Bull. Soc. math. Franc., T. XVI, 1887-88).

Ma $\lim_{m \rightarrow 0} \frac{x_k^m - 1}{m} = \log x_k$ perciò

$$\sum_{k=1}^{k=3} c_k \log x_k = c,$$

ossia, ponendo $e^c = C$,

$$x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3} = C.$$

Questa è l'equazione cercata; in virtù della (19) può scriversi

$$\left(\frac{x_1}{x_3} \right)^{c_1} \left(\frac{x_2}{x_3} \right)^{c_2} = C;$$

o, ponendo $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$

$$x^{c_1} y^{c_2} = C.$$

Supposto all'infinito il lato $x_3 = 0$ quest'equazione rappresenta, quando c_1 e c_2 sono numeri razionali, una parabola od un'iperbole d'ordine superiore; se invece c_1 e c_2 sono irrazionali si ottengono delle curve non più algebriche, le quali possono dirsi *curve binomie interscendenti*. Le incontreremo di nuovo da un altro punto di vista; ma qui vogliamo notare che il teorema di Jamet applicato alle curve ora considerate conduce alla conclusione seguente: *Il raggio di curvatura in un punto P di una curva binomia, algebrica od interscendente, è il doppio del raggio del circolo che oscula in P la conica circoscritta al triangolo fondamentale e tangente in P a quella curva*; teorema questo che il Fouret comunicò sin dal 1875 alla Società matematica di Francia.

Chiudiamo questo Cap. osservando che alla categoria delle curve triangolari appartengono le linee suscettibili della seguente rappresentazione parametrica

$$x_1 : x_2 : x_3 = (t - 1)^p : (-1)^q (1 - t)^a : (-t)^a$$

e che furono recentemente studiate ¹⁾.

¹⁾ HAROLD HILTON, *A generalisation of a property of an acnodal cubic curve* (Bull. Amer. math. Soc., T. XXIX, 1923).

CAPITOLO VI

Le linee polizomiali.

143. A. Cayley ha dato ¹⁾ il nome di « polyzomal curves » (derivato da *ξῶμα*=cintura) a tutte le curve rappresentabili con equazioni della seguente forma:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{i=v} \sqrt{-U_i} = 0,$$

ove i radicali hanno segni arbitrari e le U sono forme ternarie di grado r nelle coordinate proiettive di un punto ²⁾. Si suppone sempre $v > 3$, chè nei casi $v = 1$ e $v = 2$ la (1) diviene $U_1 = 0$ e $U_1 - U_2 = 0$ il cui studio non presenta alcuna diversità da quello di una curva generale del grado r ; si suppone anche che due qualunque delle U non abbiano un quoziente quadratico. Nel tipo generale ora considerato rientra un grande numero di equazioni di curve note; anzitutto le coniche a centro, definite p. es. come luoghi dei punti per cui è costante la somma o la differenza delle distanze da due punti fissi; poi le ovali di Cartesio (Lib. III, Cap. 9), come curve luoghi dei punti per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi moltiplicate per numeri dati (n. 77); e finalmente tutte le linee studiate nel Cap. 10 del Lib. III. Possiamo aggiungere la linea considerata da Descartes nella lettera al P. Mersenne del 23 agosto 1638, nella quale egli sfida Fermat ad applicare i metodi da lui inventati a « trouver la tangente d'une ligne courbe qui a cette propriété, que l'aggrégé de quatre lignes tirées de chacun de ses points vers quatre autres points donnés, comme vers A, B, C, D , est toujours égale à une ligne donnée » ³⁾; tale linea è poi caso par-

¹⁾ V. la memoria *On polyzomal curves, otherwise the curves $\sqrt{-U} + \sqrt{-V} + \text{etc.} = 0$* (Trans. of the R. Soc. of Edinburgh, Vol. XX V, 1868; Collected Papers, T. VI).

²⁾ I francesi adoperano il nome di *courbes à ventres* e chiamano le curve $U_i = 0$ *ceintures*.

³⁾ *Oeuvres de Descartes* ed. ADAM e T. TANNERY. II (Paris, 1898), p. 324.

ticolare delle curve a n fuochi di Tschirnhausen, ognuna delle quali è luogo di un punto M soddisfacente ad una relazione del seguente tipo $\sum_i \mu_i \cdot \overline{M F_i} = \text{cost.}$, F_i essendo punti fissi e μ_i costanti date¹⁾.

L'equazione (1) contiene $\nu \frac{(r+1)(r+2)}{2} - 1$ costanti essenziali; essa, razionalizzata, diviene

$$(1') \quad \Pi \sum_{i=1}^{i=\nu} \sqrt{\overline{U}_i} = 0,$$

il segno Π indicando che si devono considerare i $2^{\nu-1}$ polinomi ottenuti dal polinomio $\sqrt{\overline{U}_1} + \sqrt{\overline{U}_2} + \dots + \sqrt{\overline{U}_\nu}$ tenendo fisso il segno del primo addendo e variando in tutti i modi possibili i segni dei seguenti. Il primo membro della (1') è quindi in generale una funzione razionale di grado $2^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2} r$; ciò prova che la (1) rappresenta una curva dell'ordine $n = 2^{\nu-2} r$. Attribuendo ai radicali che si presentano nella (1) i vari segni di cui sono suscettibili, si ottengono $2^{\nu-1}$ rami della curva, i quali hanno a due a due punti comuni. Siffatti punti si otterranno considerando le intersezioni delle curve del seguente tipo:

$$(2) \quad \left. \begin{aligned} \sqrt{\overline{U}_\alpha} + \sqrt{\overline{U}_\beta} + \dots + \sqrt{\overline{U}_\kappa} &= 0, \\ \sqrt{\overline{U}_\lambda} + \sqrt{\overline{U}_\mu} + \dots + \sqrt{\overline{U}_\omega} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

ove $\alpha \beta \dots \kappa \lambda \mu \dots \omega$ è una permutazione del gruppo di numeri 1, 2, ..., ν . Se una delle equazioni (2) contiene un solo termine, le curve corrispondenti si diranno *zoma* e *antizoma*; mentre nel caso generale si diranno *curve parazomali complementari*.

È facile convincersi che ogni intersezione di una zoma con la corrispondente antizoma è punto di contatto di quella con la data curva polizomale. Queste intersezioni sono per ogni zoma in numero di $\nu \cdot 2^{\nu-3} r$ onde in totale sono $2^{\nu-3} \nu r^2$; siccome ciascuna è punto di contatto della curva polizomale con una sua zoma, così esse equivalgono a $2^{\nu-2} \nu r^2$ intersezioni della curva (1) con le proprie zome, epperò assorbono tutte le intersezioni di quella (che è dell'ordine $2^{\nu-2} r$) con le sue ν zome (che sono curve dell'ordine r).

Per converso le $2^{\alpha-2} r \cdot 2^{\beta-2} r = 2^{\nu-4} r^2$ intersezioni delle due parazomali complementari rappresentate dalle equazioni (2) sono punti doppi della data curva, anzi sono gli unici punti multipli posseduti in generale dalla curva. Qual è il loro numero? Per rispondere a questa domanda osserviamo che, detto a il numero dei termini della prima delle equazioni (2) e scelto per a uno dei

¹⁾ *Medicina mentis* (Amstelodam, 1686), pag. 91.

valori 2, 3, ..., $\nu-2$ si ottengono $\binom{\nu}{a}$ sistemi del tipo (2), ognuno dei quali però nasce tanto dal valore a quanto dal valore $\nu-a$; onde il numero dei sistemi distinti del tipo (2) è

$$\frac{1}{2} \sum_{a=2}^{\alpha=\nu-2} \binom{\nu}{a} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{\alpha=\nu} \left[\binom{\nu}{a} - 2(\nu+1) \right] = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{\alpha=\nu} \binom{\nu}{a} - (\nu+1) = 2^{\nu-1} - \nu - 1.$$

Segue da ciò che il numero complessivo dei punti doppi della curva è espresso da

$$d = 2^{\nu-4} r^2 (2^{\nu-1} - \nu - 1).$$

Siccome in generale la curva è esente da cuspidi così la sua classe è data da:

$$2^{\nu-3} r (r(\nu+1) - 2),$$

mentre il suo genere è espresso da

$$2^{\nu-4} r \{ r(\nu+1) - 6 \} + 1.$$

144. Questi numeri subiscono delle mutazioni quando le ν curve $U_i = 0$ abbiano un certo numero k di punti comuni; si dimostra in particolare che il numero dei punti doppi cresce in conseguenza di $2^{\nu-4} (\nu-1) k$ e che quindi di altrettanto diminuisce il genere e del doppio la classe della curva. In particolare, se le U hanno la seguente forma

$$U_i = l_i (\Theta + L_i \Phi),$$

ove le l_i sono costanti e le quantità Θ, L_i, Φ_i sono forme ternarie dei gradi $r, s, r-s$, il numero dei punti doppi è espresso da

$$2^{\nu-4} r \{ (2^{\nu-1} - 1) r - (\nu-1) s \};$$

ma nelle attuali ipotesi può succedere che il primo membro della (1') abbia a fattore Φ^ω , ω essendo un intero positivo; allora l'ordine della curva polizomale subisce una diminuzione di $\omega(r-s)$ unità.

Può inoltre accadere in casi speciali che la curva polizomale si decomponga in altre di ordine inferiore. Valga a provarlo l'esempio seguente addotto dal Cayley. Si consideri la tetrazomale avente per equazione:

$$(3) \quad \sqrt{a_1 \overline{U}_1} + \sqrt{a_2 \overline{U}_2} + \sqrt{a_3 \overline{U}_3} + \sqrt{a_4 \overline{U}_4} = 0$$

e si supponga che le funzioni U siano legate dalla seguente identità

$$(4) \quad k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 + k_4 U_4 = 0,$$

ove le k sono costanti date. Ora eliminando U_4 fra le equazioni (3) (4) si trova

$$k_4 (\sqrt{a_1 U_1} + \sqrt{a_2 U_2} + \sqrt{a_3 U_3})^2 + a_4 (k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3) = 0,$$

ossia

$$\begin{aligned} 0 &= (k_4 a_1 + k_1 a_4) U_1 + (k_4 a_2 + k_2 a_4) U_2 + (k_4 a_3 + k_3 a_4) U_3 + \\ &+ 2 k_4 \sqrt{a_2 a_3} \sqrt{U_2} \sqrt{U_3} + 2 k_4 \sqrt{a_3 a_1} \sqrt{U_3} \sqrt{U_1} + \\ &+ 2 k_4 \sqrt{a_1 a_2} \sqrt{U_1} \sqrt{U_2}. \end{aligned}$$

Il secondo membro si può riguardare come una funzione quadratica omogenea in $\sqrt{U_1}$, $\sqrt{U_2}$, $\sqrt{U_3}$; esso si decompone nel prodotto di due fattori lineari quando è nullo il determinante (discriminante)

$$\begin{vmatrix} k_1 a_4 + k_4 a_1 & k_4 \sqrt{a_1 a_2} & k_4 \sqrt{a_1 a_3} \\ k_4 \sqrt{a_1 a_2} & k_2 a_4 + k_4 a_2 & k_4 \sqrt{a_2 a_3} \\ k_4 \sqrt{a_1 a_3} & k_4 \sqrt{a_2 a_3} & k_3 a_4 + k_4 a_3 \end{vmatrix},$$

vale a dire quando sia

$$(5) \quad \frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2} + \frac{a_3}{k_3} + \frac{a_4}{k_4} = 0$$

Emerge da ciò che quando sussistono le relazioni (4) e (5) la curva tetrazomale (3) si decompone in due trizomali.

Quanto esponemmo in questo Capitolo ci sembra sufficiente a caratterizzare le indagini finora compiute sopra una classe di curve delle quali, per quanto ci consta, dopo il Cayley, nessuno si è occupato. Eppure assai numerose sono le questioni che restano a trattarsi riguardo alle curve polizomali. Queste hanno infatti una definizione analitica semplice e chiara; ma è ignoto quali ne siano le proprietà geometriche caratteristiche; in altri termini, qual è la definizione geometrica delle curve polizomali? Inoltre, dal momento che esistono curve in più modi polizomali¹⁾, quali sono le curve suscettibili di parecchie rappresentazioni analitiche del tipo (1)? E, dal momento che ne esistono di degeneri, quali relazioni devono

¹⁾ Ogni conica lo è in ∞^3 modi corrispondentemente ai suoi ∞^3 triangoli circoscritti ed ogni curva di quarto ordine in un numero finito di modi (v. SALMON-FIEDLER, *Anal. Geometrie der höheren ebenen Curven*, Leipzig, 1873, pag. 295).

intercedere fra le U affinché le curve (1) si decomponga in polizomali di ordine inferiore? Sono questi problemi abbastanza interessanti per fermare l'attenzione dei matematici; soltanto quando saranno risolti sarà il caso di passare allo studio delle curve

$$\sum_{i=1}^{i=v} \sqrt[n]{U_i} = 0,$$

che delle polizomali sono una naturale estensione¹⁾.

¹⁾ Rientrano in questo tipo le curve di potenziale costante la cui equazione cartesiana è $\sum \frac{k_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} = \text{cost.}$; esse trovansi studiate nella memoria di G. SCHEFFERS, *Funktionen der Abstände von festen Punkten* (Württemberg Mitt., 2. Reihe, 2. Bd., 1900).

CAPITOLO VII

Curve di Darboux ed Equilatero di P. Serret.

145. Un concetto unico, benchè variamente atteggiato, guidò a concepire le curve studiate nei cinque Capitoli precedenti, il concetto cioè di generalizzare le coniche generalizzando le loro equazioni canoniche. Ad uno scopo analogo mirano le estensioni di cui dobbiamo ora occuparci, ma si servono come punto d'appoggio di alcune prerogative geometriche di cui godono le curve di secondo ordine.

Consideriamo una parabola e due sue tangenti fisse m, n ; ne siano M_∞ e N_∞ i punti all'infinito, M'' e N' i punti di contatto e O il punto d'incontro; chiamiamo poi T'' e T' i punti in cui una terza tangente arbitraria t della curva taglia le rette m e n . I birapporti $(O N' T' M_\infty)$ e $(M'' O T'' N_\infty)$ essendo fra loro eguali si ha

$$\frac{O N'}{O T'} = \frac{M'' O}{M'' T''}$$

Ma $M'' T'' = O T'' - O M''$, dunque si può scrivere:

$$\frac{O' T'}{O N'} + \frac{O T''}{O M''} = 1.$$

Dunque: *nella parabola una tangente qualunque determina sopra due tangenti fisse due segmenti variabili, aventi per comune origine l'intersezione di quelle e legati da una relazione lineare non omogenea a coefficienti costanti.* Questa proposizione ha indotto il Darboux a considerare ¹⁾ l'inviluppo Δ delle rette che tagliano n date rette

¹⁾ Sur une classe de courbes unicursales (C. R., T. XCIV, 1882; Ann. de l'Éc. normale sup., III Série, T. VII, 1890); Principes de géométrie analytique (Paris, 1917), pag. 161-167.

r_k ($k = 1, 2, \dots, n$) in altrettanti punti A_k le cui distanze da un egual numero di punti O_k dati su queste rette, soddisfano l'equazione

$$(1) \quad \sum_k \lambda_k \cdot \overline{O_k A_k} = c,$$

ove le λ sono coefficienti numerici dati e c è una data lunghezza. Per caratterizzare siffatto inviluppo supponiamo che

$$(2) \quad \frac{x - x_k}{\cos \alpha_k} = \frac{y - y_k}{\sin \alpha_k}$$

sia l'equazione della retta r_k , mentre x_k, y_k sono le coordinate del punto O_k . Segue da questa che, se l_k è la distanza di un punto qualunque (x, y) di r_k dal punto O_k avremo

$$(3) \quad x = x_k + l_k \cos \alpha_k, \quad y = y_k + l_k \sin \alpha_k$$

Prendiamo poi ad arbitrio un punto $P(x_0, y_0)$ e cerchiamo quante rette dell'inviluppo Δ passino per esso; sia

$$(4) \quad x - x_0 = \lambda (y - y_0)$$

una di esse; essa taglia r_k in un punto A_k la cui distanza da O_k altro non è che il valore di l_k ottenuto risolvendo l'equazione risultante dall'eliminazione di x, y fra le equazioni (3) (4). È dunque

$$\overline{O_k A_k} = \frac{(x_k - x_0) - \lambda (y_k - y_0)}{\lambda \sin \alpha_k - \cos \alpha_k}.$$

Sostituendo nella (1) troveremo:

$$(5) \quad \sum_k \lambda_k \frac{(x_k - x_0) - \lambda (y_k - y_0)}{\lambda \sin \alpha_k - \cos \alpha_k} = c.$$

Essendo quest'equazione di grado n in λ e corrispondendo ad ogni sua radice una retta dell'inviluppo Δ passante pel punto arbitrario P , si conclude che l'inviluppo Δ è di classe n . Se la equazione (4) ammette due radici λ eguali fra loro, il punto P appartiene all'inviluppo Δ ; onde l'equazione locale di Δ si ottiene eguagliando a 0 il discriminante del primo membro della (5); ora questo discriminante è di grado $2(n-1)$ nei coefficienti e questi sono lineari nelle coordinate x_0, y_0 del punto P , dunque la curva Δ è in generale dell'ordine $2(n-1)$. Cerchiamo anche le tangenti di Δ che sono parallele ad una data direzione; perciò consideriamo la equazione

$$(6) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

supponiamo ivi dato l'angolo α e cerchiamo di determinare p in modo che la retta da essa rappresentata tocchi la curva Δ . Eliminiamo perciò dall'equazione (6) le x, y mediante le (3) ed otterremo il seguente valore per $l_k = \overline{O_k A_k}$

$$\overline{O_k A_k} = - \frac{x_k \cos \alpha + y_k \sin \alpha - p}{\cos(\alpha - \alpha_k)};$$

sostituendo nella (1) si ottiene:

$$(7) \quad \sum_k \lambda_k \frac{x_k \cos \alpha + y_k \sin \alpha - p}{\cos(\alpha - \alpha_k)} + c = 0.$$

Essendo questa un'equazione lineare in p , si vede che l'involuppo Δ ha una sola tangente parallela ad una data direzione; ciò significa che la retta all'infinito è tangente $(n-1)$ —pla dell'involuppo Δ ¹⁾. L'involuppo Δ è in conseguenza razionale e non ha altre tangenti multiple od inflessionali; ma è fornito di $2(n-2)$ $(n-3)$ punti doppi e $3(n-2)$ cuspidi. Eliminando p fra le equazioni (6) (7) nasce l'equazione

$$(8) \quad \sum_k \lambda_k \frac{(x - x_k) \cos \alpha + (y - y_k) \sin \alpha}{\cos(\alpha - \alpha_k)} = 0;$$

facendo ivi variare α essa rappresenta tutte le rette dell'involuppo in questione. In particolare facendo in questa equazione $\alpha = \pi/2 + \alpha_k$ si ricade nella (2). dunque l'involuppo Δ è tangente alle n rette r_k .

Supponendo $n = 2$ si trova una curva di second'ordine tangente alle rette date ed alla retta all'infinito; è dunque la parabola da cui siamo partiti. Supponendo invece $n = 3$ si giunge ad una curva di terza classe e quarto ordine, senza punti doppi ma con tre cuspidi, e tangente alla retta all'infinito nei punti ciclici del piano; è dunque (v. n. 73) un'ipocicloide tricuspide. Se finalmente si suppone $n = 4$ si ottiene una curva di quarta classe e sesto ordine, fornita di quattro punti doppi e sei cuspidi, e tritangente alla retta all'infinito; essa venne incontrata da Laguerre nel corso delle sue ricerche intorno alle trasformazioni per semirette reciproche; secondo la proposta da lui fatta la si chiama iperciclo²⁾.

¹⁾ Viceversa: qualunque curva di classe n avente la retta all'infinito per tangente $(n-1)$ pla può definirsi nel modo suindicato, nonchè in quello che verrà esposto nel n. seg.

²⁾ *Sur les hypercycles* (C. R., T. XCIV, 1882); *Sur les anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles* (Nouv. Anc. de math., III Ser., T. II, 1883) e *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe* (Id., T. V, 1885), oppure *Oeuvres de Laguerre*, T. II, pag. 620, 637 e 675. V. anche W. BLASCHKE, *Untersuchung über die Geometrie der Speere in der euklidischen Ebene* (Monatshefte f. Math. u. Phys., T. XXI, 1910).

146. Riprendiamo la considerazione di una parabola; a, b, c, d ne siano quattro tangenti fisse e t una tangente mobile. Siano A, B, C le tracce sopra d delle rette a, b, c ; siano L, M, N le tracce analoghe sopra t . La retta all'infinito e le rette a, b, c determinano sulle tangenti d, t punteggiate proiettive onde

$$(A B C \infty) = (L M N \infty) \quad \text{ossia} \quad \frac{A C}{B C} = \frac{L N}{M N}$$

o se si vuole

$$M N \cdot A C - L N \cdot B C = 0;$$

dunque: in una parabola esiste una relazione omogenea a coefficienti costanti fra i segmenti che tre tangenti fisse determinano sopra una tangente mobile. Per dimostrare che gli involuppi Δ godono delle proprietà analoga, consideriamo $n+1$ rette arbitrarie r_k ($k=0, 1, \dots, n$) e cerchiamo l'involuppo delle rette r che le tagliano in $u+1$ punti tali che si abbia

$$(8) \quad \sum_{k=0}^{k=u-1} \lambda_k \cdot A_k A_{k+1} = 0,$$

ove le λ_k sono di nuovo coefficienti numerici dati. Siano

$$(9) \quad \xi_k x + \eta_k y + 1 = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

le equazioni delle rette r_k ; preso un punto arbitrario $P(x_0, y_0)$ si rappresenti con le due equazioni

$$(10) \quad x = x_0 + l \cos \alpha, \quad y = y_0 + l \sin \alpha$$

una retta qualunque uscente da esso. Allora il segmento $P A_k$ è misurato dal valore di l che nasce risolvendo l'equazione risultante dall'eliminazione di x, y fra le (9), (10). Onde

$$\overline{P A_k} = - \frac{\xi_k x_0 + \eta_k y_0 + 1}{\xi_k \cos \alpha + \eta_k \sin \alpha}$$

e

$$\overline{A_k A_{k+1}} = \frac{\xi_k x_0 + \eta_k y_0 + 1}{\xi_k \cos \alpha + \eta_k \sin \alpha} - \frac{\xi_{k+1} x_0 + \eta_{k+1} y_0 + 1}{\xi_{k+1} \cos \alpha + \eta_{k+1} \sin \alpha}$$

Sostituendo questo valore nella (8) si ottiene un'equazione di grado n in $\tan \alpha$, la quale prova che l'involuppo delle rette r è di classe n . Se ora cerchiamo le rette r che sono parallele ad una data direzione, si vede, procedendo analogamente a quanto si fece sopra, che ve

ne è una sola; dunque dell'involuppo in questione la retta all'infinito è retta ($u-1$)pla. Si hanno così elementi per concludere quanto si è anteriormente enunciato. Gli involuppi Δ possono quindi per un doppio titolo riguardarsi come generalizzazioni delle ordinarie parabole. Li chiameremo curve di Darboux di prima specie. E riserveremo il nome di curve di Darboux di seconda specie agli involuppi di cui passiamo ad occuparci.

147. È noto che il triangolo costituito da due tangenti fisse di un cerchio e una tangente mobile risulta di perimetro costante, purchè il contorno del triangolo venga percorso convenientemente. Questa osservazione condusse il Darboux a domandarsi ¹⁾: Qual'è l'involuppo delle rette che determinano con n coppie di rette altrettanti triangoli aventi costante la somma dei perimetri? Chiamiamolo Ω_u e indichiamone con v_u la classe; designamo poi con r'_k, r''_k ($k = 1, 2, \dots, n$) le date rette, con s la data somma di perimetri, e con O un punto arbitrario del piano considerato. Una retta a condotta per O determina con le coppie di rette $r'_1 r''_1, r'_2 r''_2, \dots, r'_{u-1} r''_{u-1}$, $n-1$ triangoli; sia σ la somma dei loro perimetri; vi sono ∞^1 rette le quali formano con $r'_u r''_u$ un triangolo di perimetro $s - \sigma$; il loro involuppo è un cerchio Ω_1 al quale si possono condurre da O due tangenti a ; se una di esse coincide con a si ottiene una retta dell'involuppo Ω_u passante per O . Ora conduciamo invece per O una retta arbitraria a e chiamiamo p il perimetro del triangolo che essa forma con le rette $r'_u r''_u$; tutte le rette che determinano con le coppie $r'_1 r''_1, r'_2 r''_2, \dots, r'_{u-1} r''_{u-1}$ triangoli i cui perimetri formano la somma $s - p$ involuppano una curva Ω_{u-1} a cui si possono condurre da O v_{u-1} tangenti a . Ciò prova che fra le rette a , a passa una corrispondenza algebrica ($2, v_{u-1}$). Si deduce da ciò: $v_u = v_{u-1} + 2$; cambiando in questa relazione n successivamente in $n-1, n-2, \dots, 2$, e aggiungendo le equazioni risultanti dopo di avere notato che $v_1 = 2$ si conclude $v_u = 2n$, onde l'involuppo Ω_n è di classe $2n$. Chiamiamo ora v'_u il numero delle tangenti di Ω_u che sono parallele ad una direzione arbitraria; ragionando in modo analogo al precedente otterremo nel corrispondente fascio di raggi improprio $v'_{u-1} + 2$ coincidenze; siccome queste sono rappresentate dalla retta all'infinito contata due volte e dalle tangenti di Ω_u parallele a quella direzione, si vede che $v'_{n-1} + 2 = v'_n + 2$, onde $v'_u = v'_{u-1} = v'_{u-2} = \dots = v'_1$; ora Ω_1 essendo un cerchio $v'_1 = 2$ dunque in generale $v'_u = 2$. Emerge da ciò che dell'involuppo Ω_u la retta all'infinito è retta multipla secondo $2(n-1)$.

Alle stesse conclusioni si può pervenire per via di calcolo. Si

¹⁾ Sur une propriété du cercle (C. R., T. XCIV, 1882, Ann. de l'Ec. normale sup., T. VII della 3^a Serie, 1890).

rappresentino infatti con le equazioni

$$\frac{x - x_k}{\operatorname{sen}(\alpha_k \mp \delta_k)} = \frac{y - y_k}{\operatorname{cos}(\alpha_k \mp \delta_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

le n coppie date di rette; preso allora un punto arbitrario $P(x_0, y_0)$ si conduca per esso una retta arbitraria

$$\frac{x - x_0}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{y - y_0}{\operatorname{cos} \alpha}$$

e si cerchi la condizione affinché essa appartenga al dato involuppo Ω_u . Si troverà l'equazione

$$(11) \quad \sum_{k=1}^{k=u} \frac{[(x_k - x_0) \operatorname{cos} \alpha + (y_k - y_0) \operatorname{sen} \alpha] \operatorname{cos} \delta_k}{\operatorname{cos} \frac{\alpha - \alpha_k + \delta_k}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \alpha_k - \delta_k}{2}} = c,$$

la quale può servire di fondamento ad uno studio analitico degli involuppi in questione; in particolare a trattare le questioni algebriche e geometriche di cui parla il Darboux nella sua nota, e nelle quali risiede il considerevole interesse che possiedono le curve di cui si tratta. Noi non possiamo addentrarci nello studio di esse. Ma prima di lasciare le curve di Darboux di seconda specie noteremo che esse passano per i punti ciclici del piano, sono razionali ed in casi speciali si riducono a curve di Darboux di prima specie. Inoltre possono considerarsi per polari reciproche rispetto ad un cerchio di quelle avente un'equazione della forma

$$\rho = f(\operatorname{cos} \omega, \operatorname{sen} \omega),$$

f essendo una funzione razionale, intera o frazionaria, di $\operatorname{cos} \omega$ e $\operatorname{sen} \omega$.

148. Un'iperbole equilatera è una curva di second'ordine avente gli asintoti ortogonali. Esistono curve di ordine n i cui n asintoti concorrono in un punto e dividono in n parti eguali lo spazio circostante ossia formano un « fascio regolare »? Tale questione si è proposto P. Serret ¹⁾, il quale ha dato il nome di equilatera alle curve dotate di quella prerogativa. Per trovarne l'equazione generale as-

¹⁾ V. le note Sur les hyperboles équilatères d'ordre quelconque, Sur les faisceaux réguliers et les équilatères d'ordre n , e Sur les équilatères comprises dans les équations $0 = \sum_1^{n-2} l_1 T_1^u \equiv H_u$, $0 = \sum_1^{2n-1} l_1 T_1^n \equiv H_u + \lambda H_1'$ (C. R., T. CXI, 1895).

sumiamo per origine il punto di concorso degli asintoti e per asse delle x uno di essi; le equazioni degli asintoti stessi saranno

$$x \cos \frac{2k\pi}{n} - y \sin \frac{2k\pi}{n} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, u-1),$$

onde l'equazione cercata è

$$(12) \quad \prod_{k=0}^{k=u-1} \left[x \cos \frac{2k\pi}{n} - y \sin \frac{2k\pi}{n} \right] - \varphi_{u-2}(x, y) = 0,$$

φ_{u-2} essendo una funzione arbitraria di grado $u-2$ di x, y . Questa equazione dipende da $\frac{(n-1)n}{2}$ costanti. Lasciando arbitrario il punto di concorso e l'orientazione degli asintoti questo numero cresce di 3, onde un'equilatera d'ordine n dipende da $\frac{n(n-1)}{2} + 3$ costanti, cioè da $2n-3$ costanti meno che una curva generale di ordine n .

Il Serret ha avvertite parecchie eleganti proprietà delle equilatera le quali devono considerarsi come estensioni di quelle notissime di cui sono dotate le iperboli equilatera; p. es. ha notato che, analogamente a quanto accade per queste, due equilatera qualsivogliano determinano un fascio di equilatera i cui centri sono distribuiti sopra una circonferenza ed i cui asintoti involuppano un'ipocicloide. Rimandiamo il lettore per la dimostrazione agli articoli precitati e notiamo che fra non molto (Cap. XV) c'imbatteremo in una speciale categoria di equilatera fornita dalla rappresentazione geometrica dei numeri complessi ¹⁾.

¹⁾ Le equilatera furono considerate, indipendentemente dal SERRET, da J. H. GRACE (On a class of plane curves. Proc. London math. Soc., T. XXXIII, 1901) il quale le indicò col nome di « curve isogonali ».

CAPITOLO VIII

Le Rodonee di G. Grandi.

149. Alle curve a cui è principalmente consacrato l'attuale Capitolo Guido Grandi pervenne cercando di definire geometricamente delle linee che avessero la forma di fiori, cioè di rose a più foglie; chiamò *rodonee* quelle piane, *clielie* quelle sferiche. Gli è esclusivamente delle prime — chiamate dai francesi *rosaces* ¹⁾ — che ci occuperemo; in coordinate polari ρ, ω esse sono rappresentate da equazioni del seguente tipo

$$(1) \quad \rho = R \sin \mu \omega,$$

ove R è una lunghezza data e μ è un coefficiente numerico che può evidentemente supporre sempre positivo. Le più belle proprietà di queste curve furono comunicate dal Grandi a Leibniz in due lettere che risalgono al dicembre 1713 ²⁾, ma vennero nel dominio del pubblico soltanto dieci anni dopo grazie ad una memoria presentata alla Società Reale di Londra ³⁾; la loro teoria completa venne poi esposta dal Grandi stesso nel 1728 in un opuscolo speciale ⁴⁾. I tempi assai vicini a noi, ma indipendentemente dal Grandi, le rodonee vennero studiate in generale da E. W. Hyde — sotto il nome di *foliate curves* ⁵⁾ — e poi dall'Himstedt ⁶⁾.

Posto

$$\omega = \frac{\pi}{2\mu} - \bar{\omega}$$

¹⁾ P. KOKOTT (Arch. Math. u. Phys., III Ser., T. XI, 1906, p. 62) le chiama *Schleifelinien*.

²⁾ LEIBNIZ ed. Gerhardt, T. IV, pag. 221 e 224.

³⁾ *Florum geometricorum manipulus* (Phil. Trans., 1723).

⁴⁾ *Flores geometricien rhodonearum et claeliarum descriptione resultantis* (Florentiae, 1728).

⁵⁾ V. l'articolo *Foliate Curves* in The Analyst, T. II, 1875.

⁶⁾ *Ueber diejenigen ebenen Kurven, welche der Polargleichung $r = a \sin \lambda \theta$ entsprechen* (Progr. Löbau, 1888).

la (1) diviene

$$(1') \quad \rho = R \cos \mu \bar{\omega}$$

e più completamente surrogare la (1). Sotto la forma (1') l'equazione delle rodonee s'incontra traducendo in formole il seguente metodo di generazione: «Siano OA , AM due rette fra loro eguali articolate in O e A ; la prima ruoti attorno a O con una certa velocità e la seconda attorno a A con velocità m -pla; il luogo del punto M è una rodonea». Presa infatti come asse polare la posizione iniziale della retta OA e supposto che allora AM cada nel prolungamento AB di OA , avremo:

$$OA = a, OM = \rho; \widehat{MO}x = \omega; \widehat{AO}x = \alpha; M\widehat{A}B = m\alpha;$$

$$\omega = \alpha + \frac{m\alpha}{2}; \quad \rho = 2a \cos \frac{m\alpha}{2};$$

dunque l'equazione del luogo di M è:

$$\rho = 2a \cos \frac{m}{m+2} \omega,$$

la quale, con la sua forma dimostra l'asserto. È facile dedurre dal teorema ora dimostrato un metodo per descrivere meccanicamente tutte le rodonee ¹⁾.

Emerge dalla (1) che, detto k un numero intero arbitrario, per $\mu\omega = k\pi$ si ha $\rho = 0$ e per $\mu\omega = (2k+1)\pi/2$ si ha $\rho = R$, onde il raggio vettore della curva varia fra i limiti 0 e R , cioè la curva corrispondente è tutta interna al circolo avente per centro l'origine e raggio $R/2$; chiameremo questo *cerchio fondamentale* delle rodonee. Considerando anche angoli immaginari si vede che, se $\mu\omega = \pm \text{arc tg } i$, si ha $\rho = \infty$; ciò prova che le intersezioni della curva con la retta all'infinito cadono tutte nei punti ciclici del piano. Come vedemmo testè affinché sia $\rho = 0$ dev'essere $\mu\omega = k\pi$; ora se μ è irrazionale due valori di ω soddisfacenti a questa condizione sono di necessità incongrui mod. 2π ; infatti se fosse

$$\mu\omega_1 = k_1\pi, \quad \mu\omega_2 = k_2\pi, \quad \omega_1 - \omega_2 = 2k\pi$$

¹⁾ PIRONDINI, *Sur une famille remarquable de courbes* (Mathésis, T. IV della 2ª Serie, 1894). Per altri procedimenti v. AUBRY, *De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes* (Journ. de math. spéciales, 4ª Serie, T. IV, 1895, p. 202-204). Di uno notevole cenno nel Capitolo seguente dimostrando che le rodonee sono speciali epicycloidi.

²⁾ GRANDI, *Flores geometrici etc.*, p. 4.

risulterebbe

$$\mu = \frac{k_1 - k_2}{2k},$$

relazione assurda perchè il primo membro è irrazionale ed il secondo è razionale. Se, dunque, μ è irrazionale la rodonea passa infinite volte pel polo, onde essa comprende infinite foglie ¹⁾; in tal caso la curva non può essere algebrica. Se per converso

$$\mu = \frac{a}{b},$$

ove a, b sono interi fra loro primi, una facile discussione dimostra che: la rodonea rappresentata dall'equazione

$$\rho = R \text{ sen } \left[\frac{a}{b} \omega \right]$$

consta di a foglie se i numeri a, b sono entrambi dispari, mentre ne comprende $2a$ se uno di essi è pari e l'altro dispari.

Se $b > 1$ le foglie della rodonea si sovrappongono le une alle altre, sicchè la curva si può dire a b strati; se $b = 1$ invece essa è ad un solo strato; essa sarebbe ad infiniti strati ove μ fosse irrazionale; in O tutte le foglie hanno per raggio di curvatura Ra/b .

Consideriamo due consecutivi dei valori di ω che annullano ρ , per esempio:

$$\omega_1 = \frac{k\pi}{\mu}, \quad \omega_2 = \frac{(k+1)\pi}{\mu};$$

siccome

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{2k+1}{\mu} \frac{\pi}{2},$$

così il raggio vettore corrispondente all'angolo

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

è di lunghezza massima (R); e siccome

$$R \text{ sen } \mu \left[\frac{2k+1}{\mu} \frac{\pi}{2} \pm \alpha \right] = (-1)^k R \cos \mu \alpha$$

così è chiaro che due raggi vettori simmetrici rispetto ad un raggio vettore massimo sono fra loro eguali; in altre parole le varie foglie

¹⁾ Id., p. 12.

di una rodonea sono simmetriche rispetto ai raggi vettori massimi ¹⁾. Perciò, se μ è irrazionale la rodonea possiede infiniti assi di simmetria; se $\mu = a/b$ ne possiede a se a, b sono entrambi dispari e $2a$ se uno di essi è pari.

La quadratura delle rodonee dà luogo a due notevoli proposizioni scoperte dal Grandi e che noi dimostreremo ora coi metodi moderni.

Sia A l'area di una foglia della rodonea rappresentata dalla equazione (1). Avremo:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/\mu} \rho^2 d\omega = \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/\mu} \sin^2 \mu \omega d\omega =$$

$$\frac{R^2}{4\mu} \left[\mu \omega - \frac{1}{2} \sin 2\mu \omega \right]_0^{\pi/\mu} = \frac{\pi R^2}{4\mu};$$

ora il quadrante Q del cerchio fondamentale ha per area $Q = \pi R^2/4$; dunque:

$$A = \frac{1}{\mu} Q,$$

equazione che esprime il primo teorema del Grandi ¹⁾. Se in particolare $\mu = a/b$ sarà

$$A = \frac{b \pi R^2}{4a};$$

ora se a, b sono entrambi dispari, la rodonea constando di a foglie, la sua area totale è

$$b \frac{\pi R^2}{4} = b Q,$$

ma se uno di quei due numeri è dispari essa è espressa da $2bQ$: così se $b = 1$ l'area è eguale alla quarta parte od alla metà del cerchio fondamentale secondo che a è dispari o pari.

Chiamisi ora B l'area compresa tra i due raggi vettori corrispondenti agli angoli $\pi/4\mu$ e $3\pi/4\mu$, e l'arco della curva da essi interocetto. Sarà (v. sopra)

$$B = \frac{R^2}{4\mu} \left[\mu \omega - \frac{1}{2} \sin 2\mu \omega \right]_{\frac{\pi}{4\mu}}^{\frac{3\pi}{4\mu}} = \frac{R^2}{4\mu} (\pi/2 + 1);$$

¹⁾ Id., p. 15.

ora quei due raggi vettori hanno per comune lunghezza

$$R \sin \frac{\pi}{4} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

e limitano, assieme ad un arco di cerchio di centro O , un settore circolare la cui area è

$$C = \frac{\pi R^2}{8\mu};$$

perciò la lunula compresa fra quell'arco di cerchio e l'arco contermini della rodonea ha per area

$$L = B - C = \frac{R^2}{4\mu},$$

onde

$$\frac{L}{R^2} = \frac{1}{4\mu};$$

e questa formola esprime il secondo dei citati teoremi del Grandi ¹⁾. Notiamo che il differenziale dell'arco s della rodonea è dato da

$$ds = R \sqrt{1 - \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \sin^2 \mu \omega} d(\mu \omega);$$

dunque la rettificazione delle rodonee dipende da integrali ellittici ²⁾.

150. Nel caso in cui μ sia razionale ($= a/b$) è facile ottenere l'equazione cartesiana della rodonea ³⁾. Si applichi infatti ai due membri dell'identità

$$\sin a \omega = \sin \left[b \cdot \frac{a}{b} \omega \right]$$

la nota formola:

$$\sin m \omega = \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} \cos^{m-1} \omega \cdot \sin \omega - \begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix} \cos^{m-3} \omega \cdot \sin^3 \omega + \dots$$

¹⁾ Id., p. 20.

²⁾ Id., p. 31.

³⁾ Il primo a ottenere l'equazione cartesiana delle rodonee algebriche fu LUIGI dei marchesi RIDOLFI; veggasi il notevole opuscolo *Di alcuni usi delle epicloidi e di uno strumento per la loro descrizione e specialmente per quelli dell'ellisse* (Firenze, 1844), p. 24 nota. Lo stesso problema fu poi risolto dall'HIMSTEDT, op. cit., p. 4.

e si otterrà:

$$\begin{aligned} & \binom{a}{1} \cos^{a-1} \omega \cdot \sin \omega - \binom{a}{3} \cos^{a-3} \omega \cdot \sin^3 \omega + \\ & + \binom{a}{5} \cos^{a-5} \omega \cdot \sin^5 \omega - \dots = \binom{b}{1} \cos^{b-1} \left[\frac{a}{b} \omega \right] \sin \left[\frac{a}{b} \omega \right] - \\ & - \binom{b}{3} \cos^{b-3} \left[\frac{a}{b} \omega \right] \sin^3 \left[\frac{a}{b} \omega \right] + \dots; \end{aligned}$$

ora per relazioni generali e per la (1) si ha:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \omega = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \omega = \frac{y}{\rho},$$

$$\sin \left[\frac{a}{b} \omega \right] = \frac{\rho}{R}, \quad \cos \left[\frac{a}{b} \omega \right] = \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{R};$$

dunque sostituendo nella precedente:

$$(2) \quad R^b \left\{ \binom{a}{1} x^{a-1} y - \binom{a}{3} x^{a-3} y^3 + \binom{a}{5} x^{a-5} y^5 - \dots \right\} =$$

$$= \binom{b}{1} (x^2 + y^2)^{\frac{a+1}{2}} (R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{b-1}{2}} - \binom{b}{3} (x^2 + y^2)^{\frac{a-1}{2}} (R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{b-3}{2}}$$

Se a, b sono entrambi dispari quest'equazione è razionale e del grado $a + b$; ma in tutti gli altri casi per essere razionalizzata deve venire elevata a quadrato ed allora raggiunge il grado $2(a + b)$. Dunque: *Se μ è un numero razionale a/b , l'equazione (1) rappresenta una curva sempre algebrica, il cui ordine è $a + b$ se entrambi i numeri a, b sono dispari, ma è $2(a + b)$ se uno di essi è pari.* La curva è dunque sempre di ordine pari ed il suo ordine è funzione simmetrica dei numeri a, b . Aggiungiamo che essa è razionale: infatti ponendo $\omega/b = \theta$ se ne ha la seguente rappresentazione parametrica:

$$x = R \sin a \theta \cdot \cos \theta, \quad y = R \sin a \theta \cdot \sin \theta,$$

ed i secondi membri di queste equazioni si possono esprimere in funzione razionale di $\operatorname{tg} \theta/2$. La stessa equazione (2) dimostra poi che l'origine è un punto di molteplicità a o $2a$ secondochè dei numeri a, b nessuno od un solo è dispari.

Invece la ricerca dei punti doppi che la rodonea possiede al finito e fuori dell'origine si effettua comodamente servendosi della (1);

infatti un tale punto doppio nasce cercando due valori ω_1, ω_2 di ω tali che sia

$$\omega_1 - \omega_2 = 2q\pi \quad \text{e} \quad \sin \frac{a}{b} \omega_1 = \sin \frac{a}{b} \omega_2$$

oppure

$$\omega_1 - \omega_2 = (2q - 1)\pi \quad \text{e} \quad \sin \frac{a}{b} \omega_1 = \sin \frac{a}{b} \omega_2;$$

alle due prime si possono sostituire le seguenti:

$$\omega_1 - \omega_2 = 2q\pi, \quad \omega_1 + \omega_2 = (2r - 1)\pi b/a,$$

ed alle seconde:

$$\omega_1 - \omega_2 = (2q - 1)\pi, \quad \omega_1 + \omega_2 = b/a \cdot 2r\pi.$$

In queste equazioni agli interi q, r si devono attribuire valori tali che i corrispondenti valori di ω_1 o di ω_2 siano fra loro incongrui *mod.* 2π . Una facile discussione conduce a concludere che il numero delle soluzioni è $\frac{1}{2}a(b - 1)$ o $2a(b - 1)$; donde il seguente teorema¹⁾: *la rodonea rappresentata dall'equazione $\rho = R \sin \frac{a}{b} \omega$ ha dei punti doppi posti a distanza nulla nè infinita dal centro; il loro numero è $\frac{1}{2}a(b - 1)$ o $2a(b - 1)$ secondochè dei numeri a, b nessuno od un solo è dispari.*

151. Il teorema dianzi dimostrato sull'ordine di una rodonea algebrica abilita a rispondere alla questione seguente: *qual'è il numero delle specie distinte di rodonee di dato ordine n ?* Naturalmente n si deve supporre pari. Se $f(n)$ è il numero cercato, esso sarà evidentemente la somma di numeri $f_1(n)$ e $f_2(n)$; il primo rappresenta il numero delle coppie distinte²⁾ di numeri dispari fra loro primi soddisfacenti la relazione

$$(\alpha) \quad a + b = n,$$

mentre il secondo è il numero delle coppie di numeri uno pari e l'altro dispari soddisfacenti alla relazione

$$(\beta) \quad 2(a + b) = n.$$

¹⁾ HIMSTEDT, l. c., p. 5-7.

²⁾ Si devono considerare per differenti due coppie nascenti l'una dall'altra per il solo scambio dei due elementi.

Occupiamoci anzitutto dell'equazione (α). Dovendo a e b essere primi fra loro, ciascuno di essi sarà primo con n ; viceversa preso ad arbitrio per a un valore arbitrario primo con n e minore di questo, si potrà prendere per b il valore $n - a$; dunque il numero delle coppie di numeri soddisfacenti la (α) è eguale al numero dei numeri primi con n e inferiori ad esso. Servendosi dunque di un simbolo introdotto da Gauss ¹⁾ potremo scrivere

$$f_1(n) = \varphi(n).$$

Passiamo alla (β); essendo n pari essa può scriversi $a + b = n/2$. Siccome a, b devono essere uno pari e l'altro dispari, questa relazione è impossibile se $n/2$ è pari; dunque

$$f_2(n) = 0 \quad \text{se } n/2 \text{ è pari};$$

se invece $n/2$ è dispari ad ogni numero primo con $n/2$ e inferiore ad esso corrisponde una soluzione dell'equazione (β). Dunque:

$$f_2(n) = \varphi(n/2) \quad \text{se } n/2 \text{ è dispari}.$$

Epperò si conclude: il numero delle specie distinte rodonee dell'ordine n è espresso da $\varphi(n)$ se n è un multiplo di 4, è invece espresso da $\varphi(n) + \varphi(n/2)$ se n è semplicemente pari. Perciò vi è una sola rodonea di second'ordine, ve ne sono due del quarto (corrispondono ai valori $\mu = 3$ e $\mu = 1/3$), quattro del sesto (sono caratterizzate dai valori 2, 1/2, 5, 1/5 di μ), pure quattro dell'ottavo, ecc.

Esaminiamo qualcuna delle più semplici.

I. $\mu = 1, n = 2, \rho = R \sin \omega$. Passando a coordinate cartesiane si ottiene l'equazione $x^2 + y^2 = Ry$, che appartiene al circolo di centro $(0, R/2)$ e raggio $R/2$. Il Grandi erroneamente credeva che della rodonea facesse parte anche il circolo simmetrico del precedente rispetto all'asse delle x .

II. $\mu = 3, n = 4, \rho = R \sin 3\omega$. Questa rodonea è ad un solo strato e consta di tre foglie eguali aventi per assi di simmetria i raggi del circolo fondamentale che formano con Ox angoli eguali a $\pi/3, \pi, 5\pi/3$; grazie alla forma che ha la curva si chiama *trifoglio equilatero o regolare* ²⁾.

III. $\mu = 1/3, n = 4, \rho = R \sin \omega/3$. La curva ha per equazione cartesiana $R^3y = (x^2 + y^2)(3R^2 - 4x^2 + y^2)$; essa tocca l'asse delle x nell'origine e lo taglia nei punti di ascisse $\pm \frac{R\sqrt{3}}{2}$; ha per

¹⁾ *Disquis. arithmeticae*, art. 38.

²⁾ Lo abbiamo già incontrato a p. 201.

punto doppio il punto $(0, R/2)$ e per punto semplice il punto $(0, -R)$; i punti ciclici del piano ne sono punti doppi; essa è una quartica razionale di forma analoga alla lumaca di Pascal nodata.

IV. $\mu = 2, n = 6, \rho = R \sin 2\omega$ (v. fig. 87). È una rodonea ad un solo strato e composta di quattro foglie eguali; è del sesto ordine ed ha per equazione cartesiana la seguente

$$(x^2 + y^2)^3 = 4R^2x^2y^2.$$

Essa può considerarsi come una forma limite dello scarabeo (v. numero 102) cioè come la podaria d'un asteroide regolare rispetto al suo centro o ancora come il luogo dei piedi delle perpendicolari

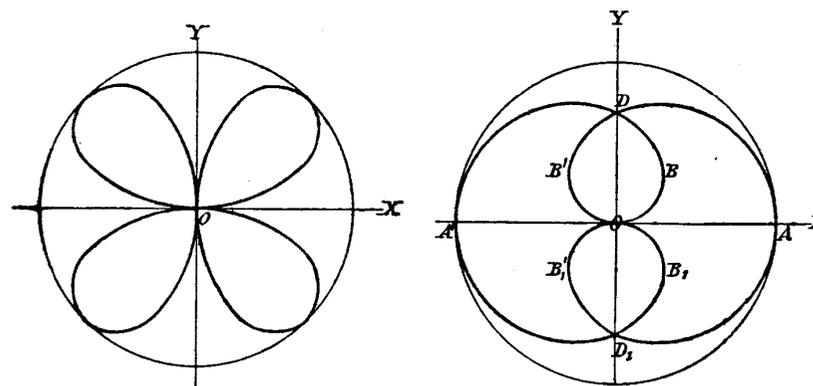


Fig. 87. — Rosa a quattro foglie.

Fig. 88. — Rosa a foglie intrecciate.

calate dal vertice di un angolo retto sulle posizioni che può prendere un segmento di lunghezza costante i cui estremi percorrono i lati di quell'angolo ¹⁾. I geometri francesi la chiamano *rosace à quatre branches* ²⁾; il Ridolfi (l. c. p. 35-7) ne avvertì l'applicabilità alla soluzione del problema della duplicazione del cubo.

V. $\mu = 1/2, n = 6, \rho = R \sin \omega/2$ (v. fig. 88). Questa rodonea è del sest'ordine ed è rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione

$$4(x^2 + y^2)^3 + R^4y^2 - 4R^2(x^2 + y^2)^2 = 0.$$

¹⁾ Vedi: *Institutiones analyticae* a V. RICCATO et H. SALADINIUS collectae (Bononiae, 1756), T. I, Lib. III, Cap. VII, Probl. VI; *Nouv. Corr. Math.*, Question 311 (T. IV, 1878, p. 155 e 290).

²⁾ V. per es. BRIOT et BOUQUET, *Géom. analytique* (Paris, 1878), p. 22.

È una curva simmetrica rispetto agli assi coordinati, che ha l'origine per punto di contatto di due rami, l'asse delle x essendo la corrispondente tangente; ne sono punti semplici gli estremi del diametro del circolo fondamentale posto sull'asse Ox , mentre ne sono punti doppi i punti $(0, \pm R/\sqrt{2})$; essa ha inoltre due tangenti doppie parallele a Ox e due parallele a Oy . Il Grandi avendo considerata soltanto una metà della curva in questione, cioè il solo arco $OBDA'D_1B_1O^1$, non fu in grado di avvertire le più cospicue proprietà di forma della curva, quali sono la presenza del contatto di due rami e delle tangenti doppie. L'equazione polare della nefroide (p. 329) pone in evidenza che questa può considerarsi per una concoide della rodonea ora considerata.

osserviamo ancora più in generale che le concoide delle rodonee possono rappresentarsi con un'equazione della forma

$$\rho = a \cos \mu \omega + k$$

e furono chiamate *ciclico-armoniche*²⁾. Sono le medesime linee la cui descrizione meccanica è esposta negli articoli di W. F. Rogge *Cuspidal rosettes* (Amer. math. Monthly, ottobre 1919) e *Envelope rosettes* (Id., aprile 1920).

Va da ultimo notato che alle rodonee si è giunti³⁾, senza avere conoscenza dei lavori del Grandi, risolvendo il seguente problema di cinematica: « trovare la traiettoria di un punto oscillante sopra una retta che ruota attorno ad un punto fisso ». Per dimostrare che la curva richiesta è una rodonea prendiamo il punto fisso per origine delle coordinate e chiamiamo s la distanza di esso dal punto mobile; allora, indicando con t il tempo, con m il numero delle oscillazioni che si effettuano nell'unità di tempo e con θ una costante, si avrà una relazione del seguente tipo:

$$s = a \sin 2m\pi(t + \theta).$$

Ora, se φ è l'angolo che la retta mobile fa con l'asse delle x alla fine del tempo t , si avrà

$$x = s \cos \varphi, \quad y = s \sin \varphi;$$

¹⁾ Flores geometrici etc., fig. 8.

²⁾ R. E. MORITZ, *On the construction of curves given in polar coordinates* (Amer. math. Monthly, maggio 1917) e *The general theory of cyclic-harmonic curves* (Ann. of Math., II Ser., T. XXIII, 1921); H. HILTON, *On cyclic-harmonic curves* (Id., T. XXIV, 1922).

³⁾ E. AUTH, *Untersuchungen über diejenigen Curven, welche erzeugt werden durch Schwingungen eines Punktes auf einer Geraden, während die Gerade zugleich rotirt* (Diss. Marburg, 1866).

se inoltre n è il numero dei giri che la retta mobile fa nell'unità di tempo e τ un'altra costante, sarà ancora

$$\varphi = 2n\pi(t + \tau).$$

Eliminando s e φ fra le equazioni precedenti si ottengono le due equazioni seguenti

$$x = a \sin 2m\pi(t + \theta) \cos 2n\pi(t + \tau),$$

$$y = a \sin 2m\pi(t + \theta) \sin 2n\pi(t + \tau),$$

le quali costituiscono la rappresentazione parametrica della traiettoria. Dette ρ, ω le coordinate polari del punto (x, y) se ne trae

$$\rho = a \sin 2m\pi(t + \theta), \quad \omega = 2n\pi(t + \tau)$$

donde, eliminando t ,

$$\rho = a \sin \left[\frac{m}{n} \omega + 2m\pi(\theta - \tau) \right],$$

che rappresenta effettivamente una rodonea; donde una descrizione meccanica di una tale curva¹⁾. Le curve studiate nel presente Capitolo, considerate come risoltrici del problema di cinematica surriferito, vennero dette *Oscillationscurven*²⁾; da quanto precede però emerge che questo nome può cancellarsi dal dizionario matematico come inutile duplicato.

L'equazione delle rodonee è compresa come caso speciale nella seguente

$$(2) \quad \rho = R \sin^v \mu \omega,$$

ove è lecito supporre $\mu > 0$; la vasta classe delle curve così rappresentate abbraccia molte curve speciali note, quali ad es. le parabole, la lemniscata, la *Kreuzcurve*, la concoide slusiana, ecc. Se i numeri μ e v sono razionali la curva corrispondente è algebrica e il suo ordine si può determinare con lo stesso ragionamento usato per determinare l'ordine delle rodonee; si giunge così al seguente risultato: Posto $\mu = a/b$ e $v = p/q$, ove tanto a e b , quanto p e q sono numeri primi relativi, l'ordine della curva (2) è dato,

¹⁾ Altri procedimenti analoghi leggonsi nella nota di L. BRAUDE, *Ueber die Erzeugung der Rosenkurven, sowie eine Verallgemeinerung derselben* (Arch. Math. u. Phys., III Ser., T. XXIII, 1914).

²⁾ MELDE, *Die Lehre von den Schwingungscurven* (Leipzig, 1864).

1° se il numero $a p + b q$ è pari e positivo, dal maggiore dei numeri $a p$, $a p + b q$;

2° se $a p + b q$ è dispari e positivo, dal maggiore dei due numeri $2 a p$, $2 (a p + b q)$;

3° se finalmente $a p + b q$ è negativo, dal primo o dal secondo dei numeri $-b q$, $-2 b q$ secondo che $a p + b q$ è pari o dispari.

Similmente dall'equazione generale dei nodi (v. p. 236) si asurge alla più generale seguente

$$(3) \quad \varrho = R \operatorname{tg}^{\nu} \mu \omega;$$

ivi è lecito supporre, non soltanto μ , ma anche ν positivo; chè se fosse $\nu = -\lambda$ la (3) potrebbe scriversi

$$\varrho = R \operatorname{cotg}^{\lambda} \mu \omega = R \operatorname{tg}^{\lambda} (\pi/2 - \mu \omega) = R \operatorname{tg}^{\lambda} \mu (\pi/2\mu - \omega),$$

onde, posto $\pi/2\mu - \omega = \omega_1$ si avrebbe

$$\varrho = R \operatorname{tg}^{\lambda} \mu \omega,$$

che è della forma (3) ma con l'esponente positivo.

Ora se μ, ν sono numeri razionali, la curva rappresentata dalla (3) è algebrica e, posto ancora $\mu = a/b$, $\nu = p/q$; il suo ordine è in generale espresso da $2(ap + bq)$; se però uno dei numeri b, q è pari lo è semplicemente da $ap + bq$ ¹⁾.

152. Lasciamo al lettore la discussione completa delle rodnee del sest'ordine e lo rimandiamo all'opuscolo del Ridolfi per lo studio di quelle che possono servire a dividere un angolo qualunque in parti eguali ²⁾. Noi invece notiamo anzitutto che eseguendo sulla curva (1) la trasformazione per raggi vettori reciprocamente per equazioni

$$\omega_1 = \omega, \quad \varrho_1 = k^2$$

si ottiene la curva di equazione

$$(1) \quad \varrho_1 = k^2/R \cdot \sec \mu \omega_1;$$

facendo ivi variare μ si ottengono infinite curve che G. Sacchi chiama

¹⁾ Le considerazioni esposte sulle equazioni (2), (3) sono tolte da un lavoro inedito del sig. H. AXT, un riassunto del quale fu cortesemente comunicato all'autore.

²⁾ RIDOLFI, op. cit., p. 17-19.

spirali di Côtes ¹⁾, ma che oggi portano il nome di *spighe* ²⁾; in particolare per $\mu = 3$ si ottiene una trisettrice di Longchamps (n. 48) e per $\mu = \frac{1}{2}$ una trisegante di Delanges (n. 99).

¹⁾ Sulla geometria analitica delle curve piane (Pavia 1854) pag. 11, Cfr. Nouv. Ann. de Math. 1860 pag. 38.

²⁾ AUBRY, op. cit., p. 201 e 251. Alcune proprietà ne sono indicate da F. GOMES TEIXEIRA (Obras, T. V, p. 257). Quando μ è un numero razionale la curva è algebrica e G. H. HALPHEN ne determinò ordine e classe (Etudes sur les points singuliers des courbes algébriques, n. 16, Paris 1883). Giova osservare che assai prima W. STAMMER (Ueber Kreiskoordinaten, Journ. f. Math., T. XLIV, 1852), giunse alle spighe applicando un sistema di coordinate ideato da PLÜCKER. Tali coordinate ξ, η sono legate alle coordinate cartesiane ortogonali dalle seguenti relazioni:

$$\left. \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right\} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}{R} \pm \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

ove R è una costante data. Le linee più semplici sono quelle corrispondenti alla relazione

$$\eta = a \xi;$$

la loro equazione cartesiana è

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}{R} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = a \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}{R} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right\};$$

ora, passando a coordinate polari, questa diviene

$$\omega = \frac{a-1}{a+1} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2}}{R},$$

ossia

$$\rho = \frac{R}{\cos \left[\frac{a+1}{a-1} \omega \right]}$$

e questa rappresenta una spiga; perciò il nome di « curva di Stammer » usato da J. VARGAS Y AGUIRRE (Catalogo general de curvas, Mem. Acad. de Madrid, T. XXVI, 1908, p. 301) è superfluo.

/50

CAPITOLO IX

Le foglie geometriche ¹⁾.

153. Se fossero matematicamente conosciute tutte le forze che cooperano allo sviluppo di una pianta, nonchè l'intimo meccanismo de' suoi organi si sarebbe in grado di rappresentare con formole il completo svolgimento della sua vita e, in particolare, si potrebbero ottenere le equazioni delle curve rappresentatrici del contorno delle sue foglie. Ma, inversamente, quand'anche si conoscessero queste equazioni, non si sarebbe in grado di rappresentare mediante formole la vita di quella pianta; ancor più lontani da questo risultato si rimane limitandosi a stabilire del contorno delle foglie equazioni, non esatte, ma semplicemente approssimate. Di quale importanza siano dunque, pel progresso della botanica, le ricerche che Bodo Habenicht ²⁾ istituì per ottenere un'approssimativa rappresentazione analitica della forma delle foglie degli alberi, lasciamo giudicare al lettore; e ci restringiamo ad esporre (non senza qualche ritocco ed aggiunta) le considerazioni matematiche che egli ha espresse ³⁾.

Il contorno di qualunque foglia è una curva simmetrica rispetto ad un asse ⁴⁾; ogni punto di esso si trova a distanza finita da qua-

¹⁾ Nome adoperato dal BROCARD (*Notes de bibliographie des courbes géométriques*, Partie complémentaire, Bar-le-Duc, 1899, p. 100); l'autore aveva dianzi proposto il nome di *courbes botaniques* (v. *Verhandlungen des I. Internationale Mathematikers-Kongresses*, Leipzig, 1898, p. 294).

²⁾ *Die analytische Form der Blätter* (Quedlinburg 1895); *Beiträge zur mathem. Begründung der Morphologie der Blätter* (Berlin, 1895).

³⁾ È superfluo che additiamo l'analogia delle ricerche in questione con quelle che diedero origine alle curve dette *trifolium pratense* (p. 345) e *rodonee* (v. Cap. prec.). Notiamo invece che a questi tentativi, appartenenti alla biologia vegetale, ne corrispondono altri nel regno animale; v. infatti il Cap. VII del nostro Libro seguente, ed inoltre: J. F. BLAKE, *On the measurement of the curves formed by cephalopoda and other mollusk* (Phil. Mag., 1878).

⁴⁾ Se si prescinde da siffatta condizione restrittiva il numero delle curve rappresentatrici aumenta di molto; p. es. si trovano quelle aventi per equazione $\rho = a + b \cos n \omega + c \sin n \omega$, incidentalmente incontrate dall'HABENICHT (op. cit., p. 14).

lunque punto della foglia; onde in coordinate polari ρ, ω quel contorno si potrà rappresentare con un'equazione del tipo seguente

$$\rho = F(\omega),$$

ove F è, nel campo reale, una funzione uniforme, continua e finita di ω . Ogni raggio vettore deve tagliare il contorno in un solo punto, onde F sarà, di più, una funzione di periodo 2π , onde sarà della forma $\varphi(\sin \omega, \cos \omega)$. Se poi si sceglie come asse polare l'asse di simmetria della curva, a valori di ω eguali e di segni contrari deve corrispondere lo stesso valore di ρ : ciò esige che nella funzione F non entri $\sin \omega$. Nasce così la seguente forma di equazione

$$\rho = f(\cos \omega),$$

f essendo una funzione analoga alla precedente F . Il caso più semplice si ha supponendo

$$(1) \quad \rho = a_0 + a_1 \cos \omega + a_2 \cos^2 \omega + \dots + a_u \cos^u \omega;$$

sostituendo a $\cos^k \omega$ ($k = 2, 3, \dots, u$) la loro espressione in funzione di $\cos \omega, \cos 2\omega, \dots, \cos k\omega$, si può surrogare la (1) con altra equazione del seguente tipo:

$$(2) \quad \rho = b_0 + b_1 \cos \omega + b_2 \cos 2\omega + \dots + b_n \cos n\omega.$$

Se si introduce — seguendo l'esempio dell'Habenicht ¹⁾ — come ulteriore condizione che la somma dei raggi vettori corrispondenti agli angoli ω e $\omega + \pi$ sia sempre eguale ad una costante c (detta *diametro* della foglia), si avrà

$$\varphi(\omega) + \varphi(\omega + \pi) = c,$$

per tutti i valori di ω ; quindi nella (1) dev'essere $a_2 = a_4 = \dots = 0$ e nella (2) $b_2 = b_4 = \dots = 0$; ciò riduce le or citate equazioni alle forme seguenti:

$$(1') \quad \rho = a_0 + a_1 \cos \omega + a_3 \cos^3 \omega + \dots + a_{2p+1} \cos^{2p+1} \omega$$

$$(2') \quad \rho = b_0 + b_1 \cos \omega + b_3 \cos 3\omega + \dots + b_{2p+1} \cos(2p+1)\omega^2.$$

¹⁾ Questa nuova condizione non è però da lui sempre rispettata; perciò egli considera in un certo punto (p. 6-7) le curve

$$\rho = a + b \cos 2n\omega, \quad \rho = a + b \cos^{2n}\omega,$$

che poi esclude perchè possiedono una duplice simmetria.

²⁾ Rientrano nelle (2'), direttamente o per analogia le curve rappre-

Esse rappresentano delle curve d'ordine $4(p+1)$ aventi diametri delle lunghezze rispettive $2a_0$ e $2b_0$. Se poniamo

$$\varrho_k = b_k \cos k \omega \quad (k = 0, 1, 3, \dots, 2p+1),$$

otterremo evidentemente le equazioni di un circolo e $p+1$ rodonee; e poichè la (2') equivale in conseguenza alla seguente equazione

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1 + \dots + \varrho_p,$$

così è chiaro che la curva rappresentata dalla (2') può ottenersi aggiungendo i raggi vettori corrispondenti delle dette curve. Una costruzione analoga si ottiene mediante la (1'); posto infatti

$$\bar{\varrho}_k = a_k \cos^k \omega \quad (k = 0, 1, 3, \dots, 2p+1)$$

avremo le equazioni di $p+2$ curve appartenenti ad una classe di cui ci occuperemo nel Cap. XI del presente Libro; e siccome la (1') diviene

$$\varrho = \bar{\varrho}_0 + \bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_3 + \dots + \bar{\varrho}_p,$$

così la curva rappresentata dalla (1') può costruirsi facilmente mediante quelle.

La più semplice delle curve (1') (2') è il circolo. Segue ad essa quella di equazione

$$\varrho = a_0 + a_1 \cos \omega,$$

che è una lumaca di Pascal (v. p. 176); siccome le foglie geometriche devono essere esenti da nodi, così si deve supporre $a_0 > a_1$. Lasciando p indeterminato al tipo (1') appartiene inoltre la curva di ordine $4(p+1)$ avente per equazione

$$(3) \quad \varrho = a(1 + \cos^{2p+1} \omega);$$

la si chiama $(p+1)$ mo cuore. Analoghe ad esse sono le curve di equazione generale

$$(4) \quad \varrho = a \left(1 + \sqrt[2p+1]{\cos \omega} \right);$$

esse sono pure dell'ordine $4(p+1)$.

sentate come segue:

$$\begin{aligned} \rho &= R(\sin \mu_1 \omega + \cos \mu_2 \omega) \\ \rho &= R(\cos \mu_1 \omega + \cos \mu_2 \omega) \\ \rho &= R(\sin \mu_1 \omega + \sin \mu_2 \omega), \end{aligned}$$

le quali sono algebriche quando μ_1, μ_2 sono numeri razionali e furono studiate dal sig. AXR nel lavoro citato a p. 430.

Le equazioni (1') (2') non sembrarono all'Habenicht adattarsi abbastanza bene a rappresentare la forma delle foglie di qualsiasi pianta, onde egli in vari casi le modificò. Non crediamo utile di riferire siffatte modificazioni, perchè vennero eseguite abbandonando le norme assunte in origine per la determinazione delle funzioni F, φ, f . E notiamo invece che le equazioni del tipo (1') o (2') possono servire a rappresentare con grande approssimazione qualunque foglia; si segnino infatti su questa $p+2$ punti notevoli e si prenda p abbastanza grande per comprendere tutti i punti importanti della foglia; scrivendo che la (1') o la (2') è soddisfatta dalle coordinate polari di tutti, si otterranno $p+2$ equazioni lineari nelle costanti $a_0, a_1, \dots, a_{2p+1}$, le quali serviranno a determinare tali costanti e quindi le equazioni (1') o (2').

Equazioni somiglianti a quelle delle curve considerate hanno le curve meridiane dei rocchetti più convenienti in chirurgia; sono le curve *glomeratrici* (da «glomerare» = aggomitolare) di H. du Bois¹⁾, la cui equazione polare è

$$\varrho = a \sin^m \omega \cos^n \omega;$$

se m e n sono numeri razionali si hanno curve algebriche, fra cui trovansi, oltre il cerchio, molte curve che incontrammo o incontreremo.

¹⁾ *Gewisse ebene Blattkurven und deren elektromagnetische Bedeutung* (Arch. Math. u. Phys., III Ser., T. XXVI, 1917).

CAPITOLO X

Le ovali e le orbiformi.

154. Si consideri (fig. 89) un cerchio di centro C e raggio r ed un punto O del suo piano; si conduca per O una trasversale arbitraria t e si chiami P una delle intersezioni con la periferia di quel cerchio; si proietti P ortogonalmente in Q sul diametro OC ,

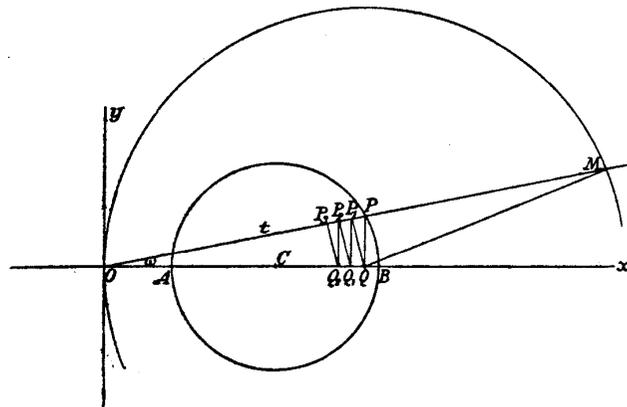


Fig. 89.

quindi Q in P_1 sulla trasversale, poi P_1 in Q_1 su OC , ecc.; si otterrà finalmente sopra t un punto P_n il quale, al ruotare di t , descrive una curva che, secondo la proposta di F. Münger, si chiama *ovale*¹⁾. Per trovarne l'equazione si prenda O per polo e OC per asse polare; indicando con d la lunghezza del segmento OC l'equazione del

¹⁾ F. MÜNGER, *Die eiförmigen Kurven*. Inaugural-Dissertation (Bern, 1894).

dato cerchio sarà

$$(1) \quad \rho^2 - 2d\rho \cos \omega + d^2 - r^2 = 0;$$

detti poi $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ i raggi vettoriali dei punti P_1, P_2, \dots, P_n si ha evidentemente

$$\rho_1 = \rho \cos^2 \omega, \quad \rho_2 = \rho \cos^4 \omega, \quad \dots, \quad \rho_n = \rho \cos^{2n} \omega;$$

sostituendo nella (1) $\rho = \rho_n / \cos^{2n} \omega$ si ottiene

$$(2) \quad \rho_n^2 - 2d\rho_n \cos^{2n+1} \omega + (d^2 - r^2) \cos^{4n} \omega = 0$$

che è l'equazione polare dell'ovale. Passando a coordinate cartesiane si ottiene l'equazione

$$(3) \quad (x^2 + y^2)^{2n+1} - 2dx^{2n+1}(x^2 + y^2)^n + (d^2 - r^2)x^{4n} = 0;$$

dunque l'ovale costruita è una curva dell'ordine $2(2n + 1)$ avente in O un punto $4n$ -plo in cui le corrispondenti tangenti coincidono coll'asse delle y ; nell'origine sono concentrate tutte le intersezioni della curva con quest'asse; invece le intersezioni coll'asse delle x sono l'origine, contata $4n$ volte, e inoltre i punti di ascisse $d \pm r$, cioè gli estremi del diametro OC ; tutti i punti della curva situati all'infinito cadono nei punti ciclici del piano. La curva è simmetrica rispetto all'asse delle x ed è tangente alle rette condotte da O a toccare il dato cerchio.

Facendo nella (3) $n = 0$, si ritrova l'equazione del cerchio da cui prendemmo le mosse. Facendo invece $n = 1$ si ottiene la curva del sest'ordine rappresentata dall'equazione

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^3 - 2dx^3(x^2 + y^2) + (d^2 - r^2)x^4 = 0;$$

è una curva di cui i punti ciclici del piano sono cuspidi con la retta all'infinito per comune corrispondente tangente, la quale assume forme differenti (v. fig. 90, a, b, c) secondochè il punto fisso O è esterno, appartenente od interno alla periferia del dato cerchio. Notevole è il caso $d = 0$; la curva corrispondente è simmetrica anche rispetto a Oy , consta pertanto di due curve chiuse eguali raccordare nell'origine; grazie alla sua forma viene chiamata dal Münger *Ovale doppia*: essa è rappresentata, in coordinate polari e cartesiane, risp. dalle equazioni seguenti:

$$\rho = r \cos^2 \omega, \quad (x^2 + y^2)^3 - r^2 x^4 = 0.$$

Tutte le ovali del sest'ordine testè considerate sono suscetti-

bili di un'altra costruzione che merita di essere rilevata. I dati essendo gli stessi ed essendo segnati come prima i punti P, Q, P_1 si descriva (fig. 89) il cerchio di centro Q e raggio QO e se ne determini la seconda intersezione M_1 con t ; dico che il luogo del punto M_1 è un'ovale di sesto ordine.

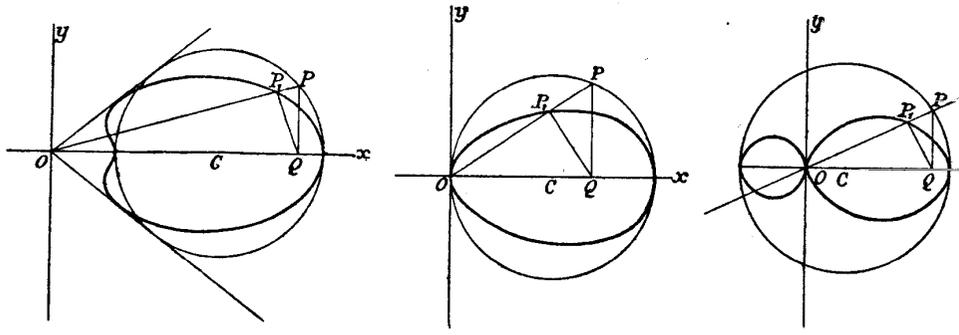


Fig. 90 a.

Fig. 90 b.

Fig. 90 c.

Ovali di Műnger.

Indicando infatti con ω gli angoli QOP, QM_1P sarà $\text{ang } QPM_1 = \pi/2 + \omega$, $\text{ang } PQM_1 = \pi/2 - 2\omega$ onde il triangolo PQM_1 dà

$$\frac{\overline{PM_1}}{\cos 2\omega} = \frac{\overline{QM_1}}{\cos \omega}$$

Ma $\frac{\overline{QM_1}}{\cos \omega} = \frac{\overline{OQ}}{\cos \omega} = OP$, quindi

$$\overline{PM_1} = \overline{OP} \cos 2\omega;$$

se ne trae

$$\overline{OM_1} = \overline{OP} (1 + \cos 2\omega) = 2 \overline{OP} \cos^2 \omega.$$

Posto, quindi, come si fece prima, $\overline{OP} = \rho$ ed inoltre $\overline{OM_1} = \rho'$ si avrà

$$\rho' = \frac{\rho}{2 \cos^2 \omega}.$$

Sostituendo nella (1) si trova:

$$\rho'^2 - 4d\rho' \cos^3 \omega + 4(d^2 - r^2) \cos^4 \omega = 0$$

e poi

$$(x^2 + y^2)^3 - 4d(x^2 + y^2)x^2 + 4(d^2 - r^2)x^4 = 0;$$

siccome questa non differisce dalla (4) che pel cambiamento di d, r risp. in $2d, 2r$, così resta dimostrato il precedente asserto.

155. Al gruppo di ricerche intese a determinare le equazioni delle curve aventi una forma previamente conosciuta anche il sommo Eulero portò un notevole contributo ¹⁾. Ma, mentre nelle altre investigazioni da lui compiute egli fu generalmente seguito da uno stuolo di commentatori o discepoli, quelle di cui dobbiamo ora occuparci non vennero, per quanto ci consta, largamente proseguite onde nel renderne conto per sommi capi noi non faremo che riprodurre fedelmente il pensiero del grande matematico svizzero e saremo lieti se questo cenno spingerà qualche volenteroso a ricuparsi della questione, per renderne la soluzione più soddisfacente, dal punto di vista del rigore, e più completa.

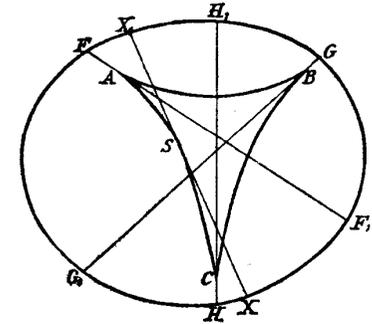


Fig. 91.

Curva triangolare di Eulero.

Si chiamano *curve triangolari* quelle di cui tutti i punti reali formano (fig. 91) tre archi finiti BC, CA, AB tangenti a due a due nei punti A, B, C , i quali sono cuspidi della curva. Un esempio di siffatte curve è offerto dall'ipocicloide tricuspide (v. n. 73); che ne esistano infinite altre (alcune algebriche ed altre trascendenti) venne dimostrato per la prima volta da Eulero stesso risolvendo il seguente problema di ottica geometrica: «dato un punto luminoso, trovare una curva tale che ogni raggio di luce emanato da quello ritorni all'origine dopo due riflessioni» ²⁾. La ricerca delle curve triangolari è più difficile

¹⁾ V. la memoria *De curvis triangularibus*, Acta Acad. Sc. Imp. Petrop. pro anno MDCCLXXVIII, Pars posterior (Petrop. 1781).

²⁾ Questo problema si trova enunciato in una lettera di EULERO al GOLDBACH del 16 febbraio 1745 (v. P. H. FUSS, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème Siècle*, T. I, St. Pétersbourg, 1843, p. 314) e diede per lungo tempo argomento a scambi di idee fra quei geometri, non soltanto prima che EULERO ne pubblicasse la soluzione (*Solutio problematis in Actis Lipsiensibus A. 1745 propositi*, Acta erud. 1746 oppure Vol. citato p. 341-354) ma anche dopo (v. la citata *Correspondance*); la linea cercata è ivi sempre indicata col nome di *curva*

di quella delle loro evolventi; è perciò utile cominciare dalla ricerca di queste.

Indichiamo per ciò con a, b, c le lunghezze degli archi BC, CA, AB della curva triangolare e supponiamo che il filo generatore dell'evolvente abbia per posizione iniziale il segmento AF di lunghezza f . F è pertanto l'origine dell'evolvente. Immaginiamo ora che il filo si svolga sopra l'arco AB ; al termine di quest'operazione il filo risulterà tangente ai due archi AB, BC ed il punto generatore dell'evolvente verrà nel punto G_1 tale che $BG_1 = \text{arc } BA + AF = c + f$. Si continui lo svolgimento sull'arco BC e si giungerà in fine ad un punto H tale che la retta CH è tangente in C alla curva triangolare e si avrà $\text{arc } BC + CH = BG_1$, onde $CH = f + c - a$. Svolgasi ora il filo sopra l'arco CA e si giungerà da ultimo ad una posizione F_1 del punto mobile tale che AF_1 tocca la curva triangolare e si ha $AF_1 = AC + CH = f + b + c - a$. Continuando ancora il moto di svolgimento del filo si otterrà il segmento rettilineo BG tangente in B alla curva e tale che $AB + BG = Af$ onde $BG = f + b + c - a - c = f + b - a$; in seguito nascerà il segmento Ch nuovamente tangente in C e tale che $Ch = BC + BG = a + f + b - a = f + b$. Facendo finalmente svolgere il filo sull'arco CA si ritorna al punto di partenza F . Emerge da ciò che qualsiasi evolvente di una curva triangolare è una curva chiusa di forma ovale, come indica la figura $FG_1HF_1GH_1$; tutte le tangenti della curva triangolare sono ne normali doppie¹⁾. Eulero la chiamò *curva orbiforme*²⁾ e ne stabilì, col seguente ragionamento, un'interessante proprietà.

Da quanto precede si trae:

$$F_1F = 2f - a + b + c, \quad G_1G = 2f + a - b + c,$$

$$H_1H = 2f + a + b - c.$$

Sia ora XX_1 una tangente qualunque della curva triangolare e S il suo punto di contatto; supposto che questo appartenga all'arco

catoptrica; un metodo per determinarla, differente da quello di EULERO, venne suggerito dall'OECHLIN e da EULERO comunicato a GOLDBACH il 25 giugno 1748 (*Correspondance etc.*, T. I, p. 463).

¹⁾ Le curve orbiformi sono dunque curve *complexse*, se, con G. HUMBERT (*Sur les courbes planes rectifiables*, G. di Liouville, 4^a Serie, T. IV, 1888, p. 141), si chiamano *simplici* le curve di cui una normale generica è normale semplice, e *complexse* quelle di cui ogni normale è normale doppia; è noto che una curva indecomposta non può avere tutte le sue normali multiple di un grado > 2 .

²⁾ Oggi molti preferiscono il nome di *curve di larghezza costante*; v. F. SCHILLING, *Die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. LXIV).

A C avremo:

$$SX = \text{arc } SC + CH = \text{arc } SC + f + c - a;$$

$$SX_1 = \text{arc } AS + AF = \text{arc } AS + f,$$

perciò

$$SX + SX_1 = \text{arc } AS + \text{arc } SC + 2f + c - a$$

cioè

$$XX_1 = 2f - a + b + c.$$

Dunque: la normale in un punto qualunque X di una curva orbiforme taglia questa in un secondo punto X_1 nel quale essa è pure normale, e la distanza fra i due punti X, X_1 è costante; è questa una notevole prerogativa che si credeva posseduta esclusivamente dal cerchio. Notiamo che le relazioni precedenti assumono una forma di notevole simmetria ponendo $f = a + k$; esse infatti divengono

$$\begin{aligned} AF &= a + k, & BG_1 &= b + k, & CH &= c + k \\ AF_1 &= b + c + k, & BG_1 &= c + a + k, & CH_1 &= a + b + k \\ FF_1 &= GG_1 = HH_1 = XX_1 = a + b + c + 2k. \end{aligned}$$

156. La proposizione superiormente stabilita per le curve orbiformi abilita a trovarne l'equazione generale. Sia infatti FMF_1m (figura 92) una curva orbiforme riferita ad una normale doppia FF_1 considerata come asse; sia MM_1 una seconda normale doppia scelta ad arbitrio, la quale incontra la FF_1 in N ; P e P_1 siano le proiezioni ortogonali di M e M_1 sopra FF_1 . Poniamo:

$$FF_1 = MM_1 = 2f, \quad FP = X, \\ PM = Y, \quad PP_1 = x, \quad P_1M_1 = -y,$$

$$\frac{dY}{dX} = P, \quad \frac{dy}{dx} = p$$

ed avremo

$$MN = Y\sqrt{1+P^2}, \quad M_1N_1 = -y\sqrt{1+p^2}, \quad P = p.$$

Sia S il punto in cui si tagliano la perpendicolare condotta da M a FF_1 e la parallela condotta da M_1 alla stessa FF_1 . Essendo

$$\frac{MS}{MP} = \frac{M_1M_1}{M_1N}$$

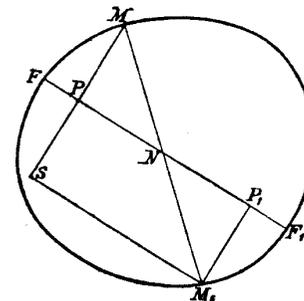


Fig. 92.

Curva orbiforme di Eulero.

avremo

$$M S = 2 f \cdot \frac{M P}{M N} = \frac{2 f}{\sqrt{1+P^2}}$$

e quindi

$$M_1 S = \frac{2 f P}{\sqrt{1+P^2}};$$

ossia (per l'eguaglianza di P e p)

$$M S = \frac{2 f}{\sqrt{1+p^2}}, \quad M_1 S = \frac{2 f p}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Essendo poi

$$M S = M P + M_1 P_1 = Y - y, \quad M_1 S = F P - F P_1 = x - X$$

si conclude

$$(5) \quad Y - y = \frac{2 f}{\sqrt{1+p^2}}, \quad x - X = \frac{2 f p}{\sqrt{1+p^2}}$$

Poniamo ora:

$$(6) \quad X + x = 2 Q, \quad Y + y = 2 R;$$

combinando queste posizioni con le precedenti equazioni, ricaveremo:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = R + \frac{f}{\sqrt{1+p^2}} \\ X = Q - \frac{f p}{\sqrt{1+p^2}} \end{array} \right. \quad (7) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = R - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}} \\ x = Q + \frac{f p}{\sqrt{1+p^2}} \end{array} \right.$$

Differenziando si deduce:

$$\begin{aligned} d Y &= d R - \frac{f p dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} & d y &= d R + \frac{f p dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \\ d X &= d Q - \frac{f dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} & d x &= d Q + \frac{f dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}, \end{aligned}$$

e siccome

$$\frac{d Y}{d X} = \frac{d y}{d x} = p$$

così se ne trae

$$d R \pm \frac{f p dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = p d Q \pm \frac{f p dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}}$$

(ove i segni si corrispondono), le quali si accordano nel dare $d R = p d Q$, cioè

$$(8) \quad R = \int p d Q.$$

Avendo già tenuto conto di tutte le condizioni del problema si vede che, presa per Q una funzione arbitraria di p , soggetta alla unica condizione che sia effettuabile la quadratura $\int p d Q$, l'equazione (8) darà R e quindi le (6) somministreranno le coordinate del punto M in funzione del parametro p ; le (7) daranno quelle del corrispondente punto M_1 ; lasciando ai radicali l'arbitrarietà di cui sono suscettibili, i sistemi (6) e (7) non sono sostanzialmente differenti, onde potremo assumere ad es. le (7) come rappresentazione parametrica generale delle curve orbiformi. Ad altra rappresentazione più comoda si giunge osservando che, integrando per parti, la (8) può scriversi

$$R = p Q - \int Q dp;$$

se quindi si pone $\int Q dp = S$ ossia

$$Q = \frac{d S}{d p} \text{ si avrà } R = p \frac{d S}{d p} - S$$

e quindi

$$(9) \quad x = \frac{d S}{d p} + \frac{f p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y = p \frac{d S}{d p} - S - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}}.$$

In questa nuova rappresentazione parametrica di una curva orbiforme, S è una funzione arbitraria di p , la quale però deve scegliersi in modo che x, y risultino sempre finite; volendo ottenere curve algebriche si potrà porre

$$S = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_m p^m}{\beta_0 + \beta_1 p + \dots + \beta_n p^n}$$

ove $m < n$ ed il denominatore non ha fattori lineari reali.

Dalle (9) si può dedurre la rappresentazione analitica generale delle curve triangolari, ricordando che queste sono le evolute di curve orbiformi. Per semplificare i calcoli si osservi che le ∞' curve orbiformi, corrispondenti agli infiniti valori che può assumere la costante f , sono evolventi di una stessa curva triangolare, onde per ottenere la rappresentazione di questa si può supporre che f abbia un valore opportunamente scelto, p. es. $f = 0$; si ha quindi

$$(9') \quad x = \frac{dS}{dp}, \quad y = p \frac{dS}{dp} - S,$$

Servendosi delle note espressioni delle coordinate t, u del centro di curvatura se ne deduce

$$(10) \quad t = \frac{dS}{dp} - p(1+p^2) \frac{d^2S}{dp^2}, \quad u = p \frac{dS}{dp} - S + (1+p^2) \frac{d^2S}{dp^2};$$

e questa è la cercata rappresentazione analitica delle curve triangolari; essa mostra che il raggio di curvatura R della (9') è dato dalla relazione

$$R = \sqrt{(1+p^2)^3} \frac{d^2S}{dp^2}$$

Dalle (10) si trae:

$$(11) \quad \frac{dt}{dp} = -3p^2 \frac{d^2S}{dp^2} - p(1+p^2) \frac{d^3S}{dp^3},$$

$$\frac{du}{dp} = 3p \frac{d^2S}{dp^2} + (1+p^2) \frac{d^3S}{dp^3},$$

onde

$$(12) \quad \frac{dt}{dp} + p \frac{du}{dp} = 0;$$

in ogni punto reale della curva in cui è $dt/dp = 0$ è pure $du/dp = 0$ e viceversa, onde quel punto è singolare, è dunque una delle tre cuspidi della curva (dal momento che esse sono gli unici punti multipli della curva). Dalle (11) si deduce pure (detto s l'arco della curva triangolare)

$$\frac{ds}{dp} = \frac{d}{dp} \left[\sqrt{(1+p^2)^3} \frac{d^2S}{dp^2} \right]$$

onde

$$s = R + \text{cost.},$$

come d'altronde potevasi prevedere perchè la curva (10) è la evoluta dalla (9).

Le curve orbiformi godono di molteplici proprietà, non solo geometriche ¹⁾, ma anche meccaniche ²⁾, che furono di recente avvertite.

¹⁾ O. P. ARVESEN, *Quelques études sur la largeur des courbes* (Oslo, 1926).

²⁾ G. TIERRY, *Sur une remarquable propriété des courbes orbiformes* (Giorn. di matem., T. 57, 1919).

CAPITOLO XI

Moltiplicatrici o mediatrici.

157. Nella costruzione delle ovali di Münger esposta nel n. 154 introduciamo l'ipotesi speciale che il punto O appartenga alla periferia del dato circolo; ciò equivale a supporre $d = r$; in allora le equazioni (2) (3) del numero citato divengono rispettivamente.

$$(1) \quad \rho_n = 2 r \cos^{2n+1} \omega$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2)^{n+1} = 2 r x^{2n+1}$$

e rappresentano una curva dell'ordine $2(n+1)$ avente nell'origine un punto $(2n+1)$ -plo con tutte le tangenti coincidenti coll'asse delle y . La più semplice curva di tale specie (dopo il circolo) si ottiene supponendo $n = 1$; in tale ipotesi si ottiene una curva del quart'ordine che parecchi astronomi, fra cui lo stesso Kepler¹⁾, adoperarono per rappresentare l'orbita di Marte; essa poi venne immaginata dal P. Villapauda il quale, per l'applicazione fattane da lui alla duplicazione del cubo, la chiamò *proporzionatrice secondaria*²⁾; più di due secoli appresso (1868) la stessa curva venne rimarcata da L. Seidel il quale, per la forma che essa ha (v. fig. 90 b), la chiamò *das eigentliche Oval*³⁾; finalmente, pochi anni or sono, G. de Longchamps le incontrò nel corso delle sue ricerche sulle linee costruibili col mezzo di riga e squadra e le impose il nome di *folium simple*⁴⁾. Dall'equazione polare della curva

$$\rho = 2 r \cos^3 \omega$$

¹⁾ *Astronomia nova*, Prag 1609, p. 337. (Cfr. CAJORI, *A history of mathematics*, II ed., New York 1919, p. 159).

²⁾ V. VIVIANI, *Quinto libro di Euclide o Scienza universale delle proporzioni* (Firenze 1674), p. 279-280.

³⁾ A. WITTSTEIN, *Notiz über das eigentliche Oval* (Archiv, 2^a Serie, T. XIV, 1895).

⁴⁾ *Essai sur la géométrie de le règle et de l'équerre* (Paris 1890), p. 126. Cf. *Cours de problèmes de géométrie analytique*, T. II (Paris 1899), p. 400.

si deduce che la sua area (che Kepler aveva tentato indarno di determinare) è

$$= 4 d^2 \int_0^{\pi/2} \cos^6 \omega d\omega = 4 r^2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2} = \frac{5}{8} \pi r^2,$$

cioè $5/8$ dell'area del dato circolo.

Consideriamo un punto qualunque P_n della curva rappresentata dall'equazione (1); proiettiamolo in H sul diametro OC e quindi portiamo sulla retta OP_n il segmento $OM = OH$; il luogo del punto M ha evidentemente per equazione polare

$$(3) \quad \rho = 2 r \cos^{2n+2} \omega,$$

onde è una curva analoga a quella rappresentata dalla (1). Altre due curve congeneri si ottengono con le costruzioni che ora ci apprestiamo ad esporre.

Dato il cerchio di centro C e raggio r ed il suo diametro $OC O'$

(fig. 93) si conduce per O una trasversale arbitraria e se ne determina la intersezione M_1 con la perpendicolare condotta da O' al diametro OO' ; la perpendicolare condotta da M_1 a t taglia questo diametro in N_1 e la perpendicolare condotta da N_1 a OO' taglia t in N_2 ; così continuando si otterrà finalmente su t un punto M_n , di cui vogliamo determinare il luogo geometrico. Notiamo perciò che se ω è l'angolo delle rette t, OO' si ha successivamente:

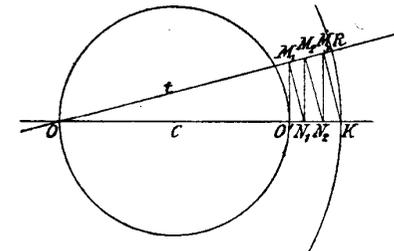


Fig. 93.

$$OM_1 = \frac{2 r}{\cos \omega}, \quad ON_1 = \frac{2 r}{\cos^2 \omega}, \quad OM_2 = \frac{2 r}{\cos^3 \omega}, \quad \dots,$$

$$OM_n = \frac{2 r}{\cos^{2n-1} \omega},$$

onde l'equazione del luogo del punto M_n è

$$(4) \quad \rho = \frac{2 r}{\cos^{2n-1} \omega};$$

il luogo stesso è pertanto una curva dell'ordine $2n - 1$ avente l'origine per punto $(2n - 2)$ -plo. Esso venne concepita da De-

scartes, il quale immaginò per costruirlo un apposito congegno di squadre e se ne servì per inserire fra due rette date quantesivogliano medie proporzionali ¹⁾; più tardi il P. Caraccioli consacrò ad esso una opera speciale ²⁾. Supponendo in particolare $n = 2$ si ricade nella cubica duplicatrice di G. de Longchamps (v. p. 113).

Se ora noi conduciamo dal punto M_n la perpendicolare $M_n K$ a t e quindi portiamo sopra questa trasversale il segmento $OR = OK$, otterremo evidentemente come luogo del punto R la curva avente la seguente equazione

$$(5) \quad \varrho = \frac{2r}{\cos^{2u} \omega}$$

La semplice ispezione delle equazioni (1), (3), (4) e (5) dimostra che siano in grado di costruire per punti tutte le curve rappresentabili in coordinate polari mediante equazioni del tipo seguente

$$(6) \quad \varrho = a \cos^m \omega,$$

ove m è un numero intero positivo o negativo arbitrario ³⁾.

Notisi anche che, rispetto a un'inversione di centro O e potenza $4r^2$, alla curva (1) corrisponde la (4) e alla (2) la (3).

158. Alla categoria di curve rappresentate dall'equazione (4) appartiene una curva del quart'ordine che — se si accettano le congetture e le conclusioni di P. Tannery ⁴⁾ — sarebbe stata adoperata da Eudosso da Cnido per risolvere il problema di Delo. Affinchè il lettore veda ove mirano le argomentazioni del noto dotto francese, fa mestieri ricordare ⁵⁾ che Archita da Taranto suggerì una

¹⁾ *La Géométrie* (Paris 1886), p. 17.

²⁾ *De liniis curvis* (Pisii, 1740).

³⁾ Si sono anche considerate le curve del tipo (6), ove m è frazionario; così quella di equazione $\rho = a \sqrt{\cos \omega}$ fu incontrata da R. J. BOSCOVICH (*Probl. mechanic. de solido maximae attractionis solum*, Mem. sopra la fisica e istoria naturale, Lucca 1743) e poi da J. PLAYFAIR (*On the solid of greatest attraction*, Proc. R. Soc. Edinburgh, II Ser., T. VI, 1812), donde il nome di « curva di Bosovich e Playfair » datole da J. DE JANS (*Over krommen von Clairaut, Bosovich and Playfair*; Handl. van het XIV Vlaamisch Natur en Genesekundig Congress, 1910); la s'incontra anche nella soluzione di un problema studiato da P. G. TAIT (*Note on Milner lamp*; Proc. Edinburgh math. Soc., T. V, 1887, oppure Scientific Papers, T. I, 1900, p. 215) e poi dal CAYLEY (*On a differential equation and the construction of Milner's lamp*, Collected Papers, T. XIII, 1897, p. 3); essa ha una parte anche nella teoria dell'illuminazione delle superficie (v. HOZA, Arch. Math. Phys., T. LV, 1873, p. 320).

⁴⁾ *Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudore* (Bordeaux Mém., 2^a Serie, T. II, 1878).

⁵⁾ Cfr. G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia* (II ed., Milano 1914), p. 99 e seg.

genialissima soluzione di quel problema fondata sopra considerazioni stereometriche; egli ridusse, cioè, quella celebre questione alla ricerca delle intersezioni delle tre superficie (cilindro, toro, cono) rappresentate dalle tre equazioni seguenti:

$$x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2} x^2,$$

(ove $a > b$). Per rendersi conto di siffatta riduzione si ponga

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \sqrt{x^2 + y^2},$$

verrà

$$v^2 = ax, \quad u^2 = av, \quad u = \frac{a}{b} x,$$

onde

$$a : u = u : v = v : b;$$

perciò u, v sono le due medie cercate. Ora, mentre i pregi teorici di questa soluzione non vennero da nessuno revocati in dubbio, la sua pratica utilità venne da taluno negata recisamente: cosa che non meraviglierà chiunque conosca in qual modo essa viene presentata dal commentatore Eutocio d'Ascalona ¹⁾. Ma essa può mutarsi in altra completamente effettuabile considerando le proiezioni sui piani coordinati delle linee in cui quelle tre superficie ausiliarie si tagliano scambievolmente. Fra tali proiezioni si presentano prime quelle esistenti sul piano xy ; una è il cerchio $x^2 + y^2 = ax$, l'altra la curva avente per equazione cartesiana

$$(7) \quad a^2 (x^2 + y^2) = \frac{a^4}{b^4} x^4$$

e come equazione polare

$$(8) \quad \varrho = \frac{b^2}{a} \frac{1}{\cos^2 \omega}$$

È questa la curva che il Tannery suppone essere stata impiegata da Eudosso per eseguire sul piano la costruzione architettata dal suo maestro Archita, curva da lui designata col nome vago di *curva campila* (*καμπύλη γραμμή*). Per tracciarla si può procedere come segue: Si prendono (fig. 94) i due segmenti $AD = a$, $AB = \frac{b^2}{a}$ inclinati di un angolo tale che ABD sia un angolo retto e si conduca da A una retta qualunque la quale tagli in G la perpen-

¹⁾ *Archimedis Opera omnia ed. Heiberg*, T. III (Lipsiae 1881), p. 98 e segg.

dicolare BE abbassata da B su AD ; si porti sopra AD , $AH = AG$; la perpendicolare condotta da H a AD taglierà AG in un punto P della curva di cui si tratta. Questa è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi coordinati ed ha l'origine per punto isolato; i suoi punti reali stanno tutti esterni alla striscia di piano limitata dalle rette

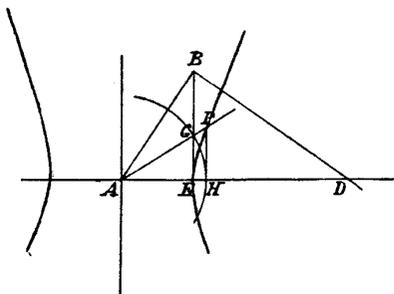


Fig. 94. — Kampila di Eudosso.

$x = \pm b^2/a$; essa è suscettibile della seguente rappresentazione parametrica:

$$(9) \quad x = \frac{b^2}{a} \frac{1}{\cos \omega}, \quad y = \frac{b^2}{a} \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega};$$

dalla quale si deduce che affinché i tre punti (α) (β) (γ) siano in una retta dev'essere

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg} \alpha & \cos \alpha \\ 1 & \operatorname{tg} \beta & \cos \beta \\ 1 & \operatorname{tg} \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) = 1.$$

Facendovi $\alpha = \beta = \gamma = \theta$ si trova l'equazione

$$3 \cos 2\theta = 1$$

per determinare i flessi della curva; questi dunque corrispondono a

$$\theta = \arccos \left[\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \right];$$

ciò prova che la curva ha per flessi i quattro punti di coordinate

$$x = \pm \frac{b^2}{a} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y = \pm \frac{b^2}{a} \sqrt{\frac{3}{4}}$$

B. Tortolini ha osservato¹⁾ che la (7) è una curva che può considerarsi in due modi differenti come caso particolare di curve

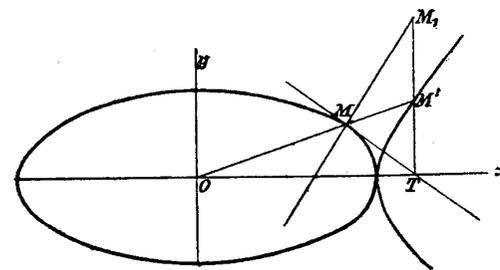


Fig. 95.

deducibili da una conica²⁾. Per convincersene consideriamo (fig. 95) un punto qualunque M dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e determiniamo l'intersezione T della relativa tangente coll'asse focale e poi il punto M' in cui la retta OM taglia la parallela condotta da T all'altro asse. L'equazione del luogo del punto M' (x' , y') altro non è che il risultato dell'eliminazione di x e y fra le tre equaz.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}, \quad xx' = a^2$$

onde è

$$(9) \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \frac{x'^4}{a^4},$$

la quale, quando $b = a$, è di forma identica alla (7). Se invece, condotta la normale in M all'ellisse suddetta, se ne determina l'inter-

¹⁾ V. la rivista bibliografica *Sopra alcune curve derivate dall'ellisse* (Annali di Mat., T. IV, 1861).

²⁾ I seguenti metodi di derivazioni sono speciali trasformazioni piane quadratiche.

sezione M_1 con la parallela condotta da T all'asse delle y , l'equazione del luogo del punto $M_1(x_1, y_1)$ si otterrà eliminando x, y fra le tre equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad xx_1 = a^2, \quad \frac{a^2 x_1}{x} - \frac{b^2 y_1}{y} = a^2 - b^2$$

onde è

$$(10) \quad b^2 x_1^2 y_1^2 = (x_1^2 - a^2)(x_1^2 - a^2 + b^2)^2;$$

e questa, quando $b = a$, liberata dal fattore x_1^2 assume la forma che ha la (7), come appunto avevamo annunciato.

159. Le curve che — al pari di gran parte di quelle che incontrammo in questo Capitolo — servono a risolvere il problema di Delo generalizzato, cioè alla moltiplicazione del cubo ed alla inserzione di quante si vogliono medie proporzionali fra due rette date, possono chiamarsi *moltiplicatrici* o *mediatrici*. A questa vasta classe di linee appartengono quattro gruppi di curve che Alesio Clairaut ha immaginato quando non aveva che dodici anni e mezzo; la memoria in cui egli le fece conoscere riscosse l'approvazione e gli applausi dell'Accademia di Parigi nella seduta del 18 maggio 1726 e venne poco dopo pubblicata per cura dell'Accademia di Berlino ¹⁾; dobbiamo arrestarci ad esporne brevemente il contenuto.

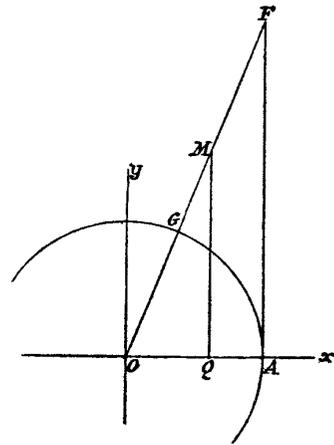


Fig. 96.

I. Dato (fig. 96) un angolo retto xOy ed un punto A sopra il primo de' suoi lati, si cerca il

luogo di un punto M tale che, condotta \overline{MQ} perpendicolare a Ox , si abbia $MQ^2 = OA \cdot OM$.

L'equazione di questo luogo è evidentemente

$$(11) \quad y^2 = a \sqrt{x^2 + y^2};$$

¹⁾ *Quatre problèmes sur de nouvelles courbes par M. Alexis Clairaut le Fils* (Miscellanea Berolinensia, T. IV, Berolini 1734).

il luogo stesso è pertanto una curva campila. Ma quest'equazione si generalizza subito e dà

$$(12) \quad y^m = a^{m-1} \sqrt{x^2 + y^2},$$

che rappresenta una nuova curva di cui dimostreremo l'applicazione al problema di Delo generalizzato. A tale scopo descriviamo il cerchio di centro O e raggio OA ; la sua periferia taglia in G la retta OM e questa è tagliata in F dalla perpendicolare condotta da A a Ox . Ora si vede facilmente che la curva rappresentata dalla equazione (11) gode della proprietà espressa dall'equazione

$$\overline{OF^2} = \overline{OG} \cdot \overline{OM};$$

OF è dunque media proporzionale fra OG e OM . Se invece OF fosse l' n^{ma} media proporzionale tra le stesse OG, OM si avrebbe

$$\overline{OF^{n+1}} = \overline{OG^n} \cdot \overline{OM}$$

ed il luogo del punto M avrebbe per equazione

$$\frac{a^{n+1} (x^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}{y^{n+1}} = a^n (x^2 + y^2)^{1/2}$$

ossia

$$(12') \quad y^{1+\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \sqrt{x^2 + y^2};$$

e questa equazione coincide con la (12) supponendo $m = 1 + 1/n$. Ciò prova che ogni curva avente un'equazione del tipo (12') serve all'inserzione di n medie proporzionali.

Se $m = p/q$, ove p, q sono inte i positivi fra loro primi, la curva rappresentata dalla equazione (12), quando q è dispari è di un ordine eguale al maggiore dei numeri $2p, 2q$, mentre quando q è pari è di un ordine eguale al maggiore dei numeri p, q .

II. I dati essendo gli stessi che nel problema precedente, si cerca il luogo dei punti M tali che $\overline{OM} \cdot \overline{QM} = \overline{OA}^2$. L'equazione del luogo è evidentemente

$$(13) \quad \sqrt{x^2 + y^2} \cdot y = a^2.$$

Generalizzando se ne trae

$$(14) \quad \sqrt{x^2 + y^2} \cdot y^{m-1} = a^m$$

Ora la curva (13) può anche definirsi con la relazione

$$OM^2 = OF \cdot OG,$$

essa è dunque il luogo dei punti M tali che OM è media proporzionale fra OF e OG . Cercando similmente il luogo di un punto M tale che OM risulti l' n^{ma} media proporzionale fra OF e OG si ottiene, dalla relazione

$$OM^{n+1} = OF \cdot OG^n,$$

l'equazione

$$(14') \quad \sqrt{x^2 + y^2} y^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}+1}$$

che coincide con la (14) quando $m = 1 + 1/n$; per tale valore di m la (14) è dunque una curva mediatrice.

Se $m = p/q$ la curva (14) è dell'ordine p o $2p$ secondo che q è pari o dispari. Scrivendo la (14) come segue:

$$y^{1-m} = a^{-m} \sqrt{x^2 + y^2}$$

si vede che l'equazione (14) può intendersi compresa nella (13) purchè si ammetta che m sia suscettibile anche di valori negativi. Il Clairaut ha indicato le curve rappresentate dalle equazioni (13) e (14) col nome di *courbes des médianes paraboliques et hyperboliques*.

III. I dati essendo gli stessi, descritto il cerchio di centro O e raggio OA , si chiami G l'intersezione della sua periferia con l'ordinata MQ del punto M ; si domanda il luogo del punto M tale QM risulti media proporzionale tra OA e QG .

L'equazione del luogo è evidentemente

$$(15) \quad a \sqrt{a^2 - x^2} = y^2;$$

generalizzando si ottiene la curva di equazione

$$(16) \quad a (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} = y^{n+1}.$$

IV. Se finalmente — attenendosi alle ipotesi fatte nel problema precedente — si vuole che OA risulti media proporzionale tra QM e QG si ottiene come luogo del punto M la curva rappresentata dall'equazione

$$(17) \quad \sqrt{a^2 - x^2} y = a^2.$$

E generalizzando anche questa si perviene all'equazione

$$(18) \quad y (a^2 - x^2)^{\frac{u}{2}} = a^{u+1}.$$

Lasciamo al lettore di discutere le equazioni così trovate e dimostrare che esse si possono definire come le curve tali che le loro tangenti o normali polari sono divise in un rapporto costante da una retta uscente dal polo¹⁾.

¹⁾ R. DEBAUX, *Sur les courbes de Clairaut* (Mathesis, T. XLII, 1928).

CAPITOLO XII

Curve settrici.

160. Dopo che i matematici si avvidero che l'antico problema della trisezione dell'angolo non si può risolvere coll'uso esclusivo della retta e del compasso, volsero i loro sforzi ad immaginare delle curve di facile descrizione che conducessero al medesimo scopo; molte delle pagine precedenti fanno testimonianza dei vantaggi che in conseguenza derivarono alla teoria delle curve piane. Non meno fecondi furono i ripetuti e svariati sforzi fatti per risolvere il problema più generale della divisione di un angolo in quantesivogliano parti eguali. Vennero per ciò impiegate, oltre le rodnee (Capitolo VIII)¹⁾, molte altre linee speciali: ne indicheremo ora le più cospicue, dopo avere premessa l'osservazione generale che riescono di effettivo giovamento nella pratica quelle sole *curve settrici* che si sanno descrivere meccanicamente con movimento continuo.

I. In quello degli *Opuscula mathematica Thomae Cevae* (Mediolani, 1699) che porta per titolo *Cicloidi anomalarum descriptio* si trova (pag. 31) una costruzione di una nuova curva che l'autore chiama *cicloydum anomalarum* e che egli insegnò ad applicare alla divisione di un angolo in un numero qualunque dispari di parti eguali²⁾. Eccone la genesi: Dato (fig. 97) un cerchio di centro O e raggio a ed una retta Ox passante pel suo centro, si chiami A una delle intersezioni di questa con la periferia del circolo dato. Si con-

duca poi da O una retta arbitraria r a tagliare in M la detta periferia e si segnino successivamente sopra Ox e r i punti $A_1 A_2 \dots$, $M_1 M_2 \dots$, in modo che sia $MA_1 = A_1 M_1 = M_1 A_2 = A_2 M_2 = \dots = \dots = a$; al variare di r attorno a O i punti $M_1 M_2 \dots$ descrivono altrettante *cicloidi di T. Ceva*¹⁾. Cerchiamone l'equazione in un sistema di coordinate polari aventi per O polo e Ox per asse polare.

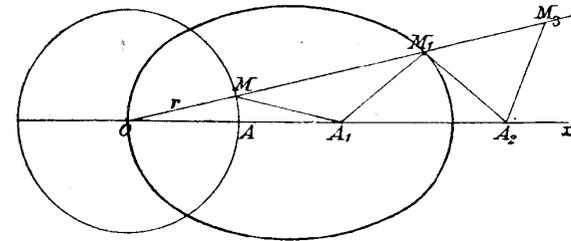


Fig. 97. — Cicloide di T. Ceva.

Indichiamo perciò con ω l'angolo di r con Ox e con $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ i segmenti OM_1, OM_2, \dots . Avremo evidentemente:

$$\text{ang } MOA_1 = \text{ang } MA_1O = \omega;$$

$$\text{ang } M_1MA_1 = \text{ang } A_1M_1M = 2\omega;$$

$$\text{ang } M_1A_1A_2 = \text{ang } M_1A_2A_1 = 3\omega;$$

$$\text{ang } M_2M_1A_2 = \text{ang } M_1M_2A_2 = 4\omega;$$

e così via; inoltre

$$OM = a; MM_1 = 2a \cos 2\omega; M_1M_2 = 2a \cos 4\omega; \text{ ecc.}$$

onde

$$\varrho_k = OM + MM_1 + \dots + M_{k-1}M_k =$$

$$= a + 2a \cos 2\omega + 2a \cos 4\omega + \dots + 2a \cos 2k\omega$$

¹⁾ Vedi RIDOLFI, *Di alcuni usi delle epicicloidi e di uno strumento per la loro descrizione* (Firenze, 1844).

²⁾ Delle stesse curve si parla più volte nel carteggio tenuto da T. CEVA con G. GRANDI; così nella lettera del 17 Aprile 1700 è indicata una costruzione della tangente alla prima di esse (la trisettrice), mentre in quella del successivo 27 Maggio tale procedimento viene esteso a tutte; più tardi (lettera del 21 Giugno 1700) il GRANDI si occupa della quadratura. Tutto ciò si apprende dalla memoria di A. PAOLI, *La scuola di Galileo nella storia della filosofia. Documenti*. Corrispondenza del P. GRANDI col P. CEVA (Ann. Univ. toscane, Vol. XXVIII e XXIX, 1908-09).

¹⁾ Crediamo di non errare ritenendo che il geometra italiano siasi ispirato, per concepire queste curve, all'8° dei *Lemmi* di ARCHIMEDE. Va notato che lo stesso concetto che portò all'invenzione di dette curve guidò il PERRIN all'invenzione di un apparecchio polisettore, come può vedersi dalla sua *Note sur la division mécanique de l'angle* (Bull. Soc. mathém. France, T. IV, 1875-76).

ossia

$$(1) \quad \rho_k = a + 2a \frac{\operatorname{sen} k\omega \cdot \cos(k+1)\omega}{\operatorname{sen} \omega}$$

Questa è l'equazione polare della k^{ma} cicloide di Ceva; essa prova che tale curva è razionale. Passando a coordinate cartesiane si ottiene:

$$(2) \quad (x^2 + y^2)^{2k+1} = \\ = \left\{ ay (x^2 + y^2)^k + 2a \left[\binom{k}{1} x^{k-1} y - \binom{k}{3} x^{k-3} y^2 + \dots \right] \right. \\ \left. \left[\binom{k+1}{0} x^{k+1} - \binom{k+1}{2} x^{k-1} y^2 + \dots \right] \right\}^2,$$

donde emerge che la curva corrispondente è dell'ordine $2(2k+1)$. Costruita che sia tale curva, se noi adattiamo un dato angolo α con un lato steso su Ox e determiniamo una delle intersezioni dell'altro suo lato con la $(k-1)^{\text{ma}}$ delle cicloidi suddette, tale intersezione sarà congiunta a O da una retta formante con Ox un angolo $= \alpha/(2k+1)$; donde si vede che le curve di Ceva sono effettivamente settrici.

161. II. Dati (fig. 98) due punti fissi A, A' si consideri il luogo (detta *settrice di Plateau*¹⁾ o *curva isociclotomica*²⁾ di un punto P tale che, condotte le rette PA, PA' risulti l'angolo $PA A'$, interno al triangolo formato dal punto mobile con i due punti fissi, in un assegnato rapporto coll'angolo esterno $PA' B$. Si chiami $2a$ la lunghezza del segmento AA' e con n, n' due numeri interi positivi primi fra loro, il primo dei quali sia minore del secondo; e si supponga

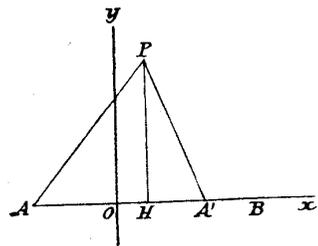


Fig. 98.

¹⁾ PLATEAU (Corresp. mathém. et phys., T. IV, 1828) e più completamente P. H. SCHOUTE, *Sur les courbes settrices* (Journ. de math. spéciales, 2^a Serie, T. IX, 1885). Posto $PA A' = \omega$, $PA' A = \omega'$ si ha $\omega = n\phi$, $\omega' = \pi - n'\phi$ onde $n'\omega + n\omega' = n\pi = \text{cost.}$; per ciò le curve dello $\omega = n\phi$ appartengono alla classe delle strofoidi generali (v. n. 41). Se $n = n'$ si ottiene un'iperbole, come già osservarono POPPE e CLAIRAUT (A. MITSCHERLING, *Das Problem der Kreisteilung*, Leipzig 1913, p. 91). Si veda anche J. H. WEAVER, *Some algebraic curves* (Bull. Amer. math. Soc., T. XXV, 1918).

²⁾ E. COLLIGNON, *Courbes divisant en parties égales une série d'arcs de cercle* (Ass. fr. av. Sc., T. XXXI, 1903).

$$\frac{\operatorname{ang} P A A'}{n} = \frac{\operatorname{ang} P A' B}{n'}$$

Detto φ il valore comune di questi rapporti sarà

$$\operatorname{ang} P A A' = n\varphi, \quad \operatorname{ang} P A' B = n'\varphi.$$

Preso poi un sistema cartesiano ortogonale avente la retta AA' per asse delle x e per origine il centro del segmento AA' , e condotta PH perpendicolare a AA' , avremo

$$(3) \quad y = (x+a) \operatorname{tg} n\varphi = (x-a) \operatorname{tg} n'\varphi$$

onde

$$(4) \quad x = a \frac{\operatorname{sen}(n'+n)\varphi}{\operatorname{sen}(n'-n)\varphi}, \quad y = 2a \frac{\operatorname{sen} n\varphi \operatorname{sen} n'\varphi}{\operatorname{sen}(n'-n)\varphi}$$

che è la rappresentazione parametrica più comoda della curva. Essa prova che la curva corrispondente è razionale. Dalle (3) si trae

$$\frac{x+a}{x-a} = \frac{n' \frac{\operatorname{tg}' n\varphi}{n'\varphi}}{n \frac{\operatorname{tg} n\varphi}{n\varphi}}$$

onde

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{x+a}{x-a} \right) = \frac{n'}{n}.$$

Emerge da ciò che la curva taglia la retta AA' in un punto C tale che

$$\frac{x+a}{x-a} = \frac{n'}{n};$$

l'ascissa x_0 di C è dunque data da:

$$(5) \quad x_0 = a \frac{n'+n}{n'-n}$$

Posto $\overline{PA} = \rho$ e $\overline{PA'} = \rho'$ si ha

$$\rho = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, \quad \rho' = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

onde le (3) danno

$$(6) \quad \varrho = 2a \frac{\operatorname{sen} n' \varphi}{\operatorname{sen} (n' - n) \varphi}, \quad \varrho' = \frac{2a \operatorname{sen} n \varphi}{\operatorname{sen} (n' - n) \varphi};$$

indicando quindi con ω e ω' gli angoli $PA A'$ e $PA' B$ si avrà $n \varphi = \omega$, $n' \varphi = \omega'$ e le (6) si muteranno nelle seguenti

$$(6') \quad \varrho = 2a \frac{\operatorname{sen} (n' \omega / n)}{\operatorname{sen} (n' - n) \omega / n}, \quad \varrho' = 2a \frac{\operatorname{sen} (n \omega' / n')}{\operatorname{sen} (n' - n) \omega' / n'},$$

ciascuna delle quali rappresenta la curva di cui si tratta in coordinate polari.

Le (4) fanno vedere che in generale x, y risultano infiniti quando

$$(n' - n) \varphi = k\pi,$$

ove k è un intero; escluso il valore $k = 0$ (perchè riconduce al punto C a distanza finita), facendo $k = 1, 2, \dots, n' - n - 1$ si ottengono per φ $n' - n - 1$ valori incongrui (mod. π) ai quali corrispondono altrettanti punti all'infinito reali della curva.

Cerchiamo gli asintoti corrispondenti servendoci della prima delle equazioni (6'). Notiamo perciò che i punti all'infinito della curva corrispondono ai seguenti valori di ω : $\frac{k n \pi}{n' - n}$ ove $k = 1, 2, \dots, n' - n - 1$. Chiamando α uno qualunque di essi, l'equazione del relativo asintoto sarà

$$x \cos (\alpha + \pi/2) + y \operatorname{sen} (\alpha + \pi/2) = d$$

ossia

$$-x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha = d$$

essendo ¹⁾ $d = \lim_{\alpha=\omega} (\varrho (\omega - \alpha))$; sostituendo a ϱ e α i loro valori si trova

$$\begin{aligned} d &= (-1)^k 2a \cdot \frac{n}{n' - n} \operatorname{sen} \frac{k n' \pi}{n' - n} = \\ &= (-1)^k \cdot 2a \cdot \frac{n}{n' - n} \operatorname{sen} \left[k\pi + \frac{k n \pi}{n' - n} \right] = \frac{2na}{n' - n} \operatorname{sen} \frac{k n \pi}{n' - n}. \end{aligned}$$

¹⁾ V. per es. HOÛEL, *Cours de calcul infinitésimal*, T. II (Paris, 1879), pag. 22.

L'equazione generica degli asintoti diviene quindi

$$\operatorname{sen} \frac{k n \pi}{n' - n} \left[x + \frac{2an}{n' - n} \right] + y \cos \frac{k n \pi}{n' - n} = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n' - n - 1)$$

Siccome essa è soddisfatta, qualunque sia k , da $x = -\frac{2na}{n' - n}$, $y = 0$ così gli $n' - n - 1$ asintoti reali della curva considerata concorrono nel punto $D \left[-\frac{n}{n' - n} 2a, 0 \right]$.

Eliminando φ fra le equazioni (3) otterremo l'equazione cartesiana della curva. Per effettuare l'eliminazione applichiamo la nota relazione generale

$$(*) \quad \operatorname{tg} r \omega = \frac{\begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{tg} \omega - \begin{bmatrix} r \\ 3 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^3 \omega + \begin{bmatrix} r \\ 5 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^5 \omega - \dots}{\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ 2 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^2 \omega + \begin{bmatrix} r \\ 4 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^4 \omega - \dots}$$

all'identità

$$\operatorname{tg} (n' \cdot n \varphi) = \operatorname{tg} (n \cdot n' \varphi)$$

ed otterremo:

$$\begin{aligned} & \frac{\begin{bmatrix} n' \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{tg} n \varphi - \begin{bmatrix} n' \\ 3 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^3 n \varphi + \begin{bmatrix} n' \\ 5 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^5 n \varphi - \dots}{\begin{bmatrix} n' \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n' \\ 2 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^2 n \varphi + \begin{bmatrix} n' \\ 4 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^4 n \varphi - \dots} = \\ & = \frac{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{tg} n' \varphi - \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^3 n' \varphi + \begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^5 n' \varphi - \dots}{\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^2 n' \varphi + \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix} \operatorname{tg}^4 n' \varphi - \dots}; \end{aligned}$$

sostituendo qui a $\operatorname{tg} n \varphi$ e $\operatorname{tg} n' \varphi$ i loro valori somministrati dalle equazioni (3) si ottiene:

$$\frac{\binom{n'}{1} \frac{y}{x+a} - \binom{n'}{3} \left(\frac{y}{x+a}\right)^3 + \binom{n'}{5} \left(\frac{y}{x+a}\right)^5 - \dots}{\binom{n'}{0} - \binom{n'}{2} \left(\frac{y}{x+a}\right)^2 + \binom{n'}{4} \left(\frac{y}{x+a}\right)^4 - \dots} = \frac{\binom{n}{1} \frac{y}{x-a} - \binom{n}{3} \left(\frac{y}{x-a}\right)^3 + \binom{n}{5} \left(\frac{y}{x-a}\right)^5 - \dots}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2} \left(\frac{y}{x-a}\right)^2 + \binom{n}{4} \left(\frac{y}{x-a}\right)^4 - \dots}$$

Fatti scomparire i denominatori si ottiene un'equazione del grado $n' + n - 1$; questo è dunque l'ordine della curva.

Si conduca ora per A una retta arbitraria e si chiami α l'angolo minimo che essa forma con A^3 . Posto

$$n \varphi = \alpha \pmod{\pi}$$

si otterranno n valori di φ fra loro incongrui $\pmod{\pi}$, a cui ne corrispondono altrettanti di $n' \varphi$; onde ad ogni retta condotta per A ne corrispondono n passanti per A' , le quali tagliano la curva in altrettanti punti della curva; ogni retta per A taglia dunque la curva in n punti diversi da A , dunque A è un punto $(n' - 1)$ -plo della curva. Similmente A è un punto $(n - 1)$ -plo. Queste conclusioni vengono confermate e completate dalle equazioni (6).

La prima di esse, infatti, fa vedere che è $\varphi = 0$ se α si attribuisce un valore differente da 0 e tale che sia $n' \varphi \equiv 0 \pmod{\pi}$; si ottengono così i valori

$$\frac{\pi}{n'}, \frac{2\pi}{n'}, \dots, \frac{(n' - 1)\pi}{n'}$$

ai quali corrispondono altrettante rette tangenti in A alla curva; dunque le $(n' - 1)$ tangenti alla curva nel punto A , insieme alla retta $A A'$, dividono in n' parti eguali lo spazio circostante ad A . Similmente le $(n - 1)$ tangenti alla curva nel punto A , insieme alla retta $A A'$, dividono in n parti eguali lo spazio circostante ad A' .

Abbiamo visto superiormente che ogni retta r condotta per A contiene n punti della curva diversi da A ; supponiamo in particolare che r passi per uno, I , dei punti ciclici. Sarà $\operatorname{tg} n \varphi = i$; e — lo prova la (*) — $\operatorname{tg} \varphi = i$ e $\operatorname{tg} n' \varphi = i$; onde alla retta per $A I$ corrispondono n rette coincidenti con $A' I$; dunque I è un punto n -plo della curva. Lo stesso dicasi dell'altro punto ciclico J . La curva

che studiamo (che è d'ordine $n + n' - 1$) taglia dunque la retta all'infinito negli $n' - n - 1$ punti reali dianzi trovati e nei punti ciclici, contati ciascuno n volte.

Le curve corrispondenti all'ipotesi $n = 1$ sono settrici per eccellenza: supposto infatti descritta quella relativa ad un certo valore di n' , e supposto dato un angolo α , lo si disponga col vertice in A' e con un lato steso lungo $A' B$; l'altro suo lato taglierà la settrice in n' punti P , ognuno dei quali congiunto a A darà un angolo $P A A'$ eguale all' n' —ma parte di $\alpha + k \pi$. In questa categoria di settrici si trovano: per $n' = 1$, la retta all'infinito; per $n' = 2$ la circonferenza di centro A' e raggio $A' A$; e per $n' = 3$ la tri-settrice di Maclaurin (n. 46)¹⁾. Notevole è anche il caso $n = 2$, $n' = 3$; la linea corrispondente è una curva di quart'ordine che si chiama *sesquissettrice*; lasciamo al lettore di mostrare che essa altro non è che una speciale lumaca di Pascal (n. 69), quella cioè che si ottiene portando su tutte le corde uscenti da un punto fisso di una periferia dei segmenti eguali al raggio.

162. Si ponga nell'equazione (6) $n = 1$ e si scriva poi n invece di n' ; si otterranno le curve rappresentate come segue:

$$(7) \quad \varrho = \frac{2 a \operatorname{sen} n \varphi}{\operatorname{sen} (n - 1) \varphi},$$

Esse furono incontrate dall'Ing. Wasserschleben e da lui studiate nella nota *Zur Theilung des Winkels*²⁾. Indipendentemente da lui e dallo Schoute, esse vennero poi considerate da O. P. Dexter³⁾, dall'Habich⁴⁾ e dal Lazzeri⁵⁾. Il penultimo degli autori ora citati ha fatto a questo proposito un'osservazione che dobbiamo riferire.

Nell'equazione (7) si è supposto finora n intero; ma è evidente che essa conserva un senso anche ammettendo per n dei valori frazionari ed irrazionali; potremo quindi fare variare in essa n con continuità ed otterremo in corrispondenza una schiera continua di curve. Supponiamo in particolare che n tenda a 0 mentre a tende

¹⁾ Da questo punto di vista tale curva è studiata nella nota di J. D'ALMEIDA, *Sobre una curva de terceiro grau* (Jorn. di Teixeira, T. VI, 1889).

²⁾ *Archiv*, T. LVI, 1874. Ivi sono date le equazioni cartesiane della 3-settrice e della 5-settrice; nella seconda delle quali equazioni vi è un errore che venne corretto da A. RADIKI (*Zur Theilung des Winkels*, Id., T. LXIII, 1879); questi, ritenendo che la 3-settrice fosse una foglia di Cartesio, suggerì di chiamare le n -settrici che stiamo considerando *foglie di Cartesio generalizzate*; è chiaro che siffatta proposta non può accogliersi.

³⁾ V. l'opuscolo *The division of angles* (New York, 1881).

⁴⁾ V. l'articolo *Division de un angulo* inserito nel n. 12 della *Gaceta científica de Lima*, 1885.

⁵⁾ *Division d'un angle en parties égales* (Mathesis, T. VI, 1886).

all'infinito in modo che il prodotto $2 a n$ tenda ad un limite finito $— l$; se scriviamo la (7) come segue

$$\rho \operatorname{sen} (1 - n) \varphi = - (2 a n) \varphi \frac{\operatorname{sen} n \varphi}{n \varphi}$$

vedremo che al limite essa diviene

$$\rho \operatorname{sen} \varphi = l \varphi$$

che rappresenta (v. il Cap. II del Libro seguente) una quadratrice di Dinostrato ; tale curva è pertanto una forma limite delle settrici di cui ci siamo occupati.

Analoghe alle curve rappresentate dall'equazione sono quelle ciascuna delle quali è il luogo del vertice P di un triangolo $P A A'$ la cui base è fissa e il di cui angolo $P A' A$ è n -plo dell'angolo $P A A'$ (1). Posto $A A' = 2 a$, $P A = \rho$, $\operatorname{ang} P A A' = \varphi$ si ottiene come equazione polare della curva

$$(8) \quad \rho = \frac{2 a \operatorname{sen} n \varphi}{\operatorname{sen} (n + 1) \varphi} ;$$

va rilevato che la (8) deriva dalla (7) pel semplice cambiamento di segno della costante n . La curva rappresentata dalla (8) è una curva di ordine n , avente A per punto $(n - 1)$ -plo, non passante per A' e segante la retta $A A'$ nel punto C tale che $A C = \frac{2 n a}{n + 1}$; le tangenti alla curva nel punto A formano con la retta $A A'$ gli angoli

$$\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n} ;$$

la curva ha all'infinito n punti reali, quelli cioè che si trovano nelle direzioni formanti con $A A'$ gli angoli

$$\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}, \dots, \frac{n\pi}{n+1} ;$$

gli asintoti corrispondenti concorrono nel punto $\left[\frac{2 a}{n + 1}, 0 \right]$; ecc.

L'analogia esistente fra le curve (7) (8) ha consigliato W. Heymann a designarle con uno stesso nome, quello cioè di *araneidi* (2),

¹⁾ MARIANTONI e PALATINI, *Sur le problème de la polysection de l'angle* (Nouv. Ann. de Math., III Ser., T. XVIII, 1899).

²⁾ V. la memoria *Ueber Winkelteilung mittelst Araneiden* (Zeitschrift, T. XLIV, 1899).

aggiungendo per le prime l'epiteto di *allungate*, per le altre quello di *accorciate* ; noi indicheremo per brevità con C_n una curva (7) e con Γ_n una delle (8) e stabiliremo due notevoli leggi di dipendenza a cui esse sono soggette.

Siano P, P' (fig. 99) due punti corrispondenti di C_n e Γ_n , cioè due punti di queste curve allineati con A ; e conduciamo $A' D$ perpendicolare a $A' A$. Essendo $\widehat{P A' A} = \widehat{P' A' B} = n \varphi$ sarà $\widehat{P' A' D} = \widehat{P A' D}$, la retta $A' D$ è bisettrice dell'angolo $P A' A'$; conoscendo pertanto uno dei due punti P, P' l'altro è in conseguenza individuato, e descritta che sia una delle due curve C_n e Γ_n l'altra si costruisce per punti con tutta facilità. -

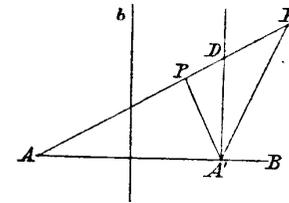


Fig. 99.

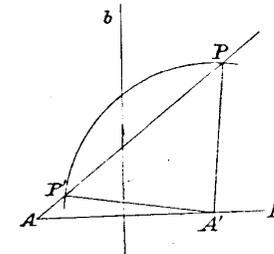


Fig. 100.

Sia P (fig. 100) un punto qualunque di C_n , P' il punto di Γ_{n-2} che sta sulla retta $A P$. Si avrà :

$$\operatorname{ang} P A A' = \varphi, \operatorname{ang} P A' B = n \varphi, \operatorname{ang} P' A' A = (n - 2) \varphi$$

onde

$$\operatorname{ang} P' P A' = (n - 1) \varphi, \operatorname{ang} A P' A' = (n - 1) \varphi.$$

Ciò prova che il triangolo $P P' A'$ è isoscele, che — in altre parole — P e P' stanno sopra una circonferenza di centro A' ; descritta quindi la curva Γ_{n-2} si può costruire per punti la curva C_n .

Combinando fra loro queste due leggi di derivazione si è condotti a stabilire una o l'altra delle due catene di curve deducibili ciascuna dalla precedente :

$$\Gamma_0 C_2 \Gamma_2 C_4 \Gamma_4 \dots C_{2u} \Gamma_{2u} \dots ; \Gamma_1 C_3 \Gamma_3 C_5 \dots \Gamma_{2u-1} C_{2u+1} \dots ;$$

e si noti che per $n = 0$ la (8) diviene $\rho = 0$ onde Γ_n è un punto, mentre la stessa per $n = 1$ diviene $\rho \cos \varphi = a$ che rappresenta

la retta b luogo dei punti equidistanti da A e A' ; partendo dunque dal punto A o dalla retta b , applicando quei due semplicissimi procedimenti si arriva a costruire tutte le araneidi.

Un'altra notevole proprietà delle araneidi venne dall'Heyman dimostrata in casi speciali ed enunciata in generale. Per stabilirla seghiamo la C_n rappresentata dall'equazione (7) con un cerchio qualunque passante per i punti $A A'$; siccome l'equazione di esso ha la forma

$$\varrho = 2a \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha},$$

le anomalie dei punti in cui esso è segato dalla C_n sono radici dell'equazione

$$\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{\sin n\varphi}{\sin(n-1)\varphi};$$

e poichè questa si può scrivere come segue

$$\sin \varphi \cdot \cos(n-1\varphi + \alpha) = 0,$$

le sue radici sono $\varphi = k\pi$, le quali non danno che i punti A e A' , e

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi - 2\alpha}{2(n-1)};$$

per ottenere radici fra loro incongrue (mod. π) si diano all'intero k i valori $2, 4, \dots, 2(n-1)$; si avranno in corrispondenza $n-1$ valori equidiferenti; quei punti d'intersezione costituiscono quindi un poligono regolare di $n-1$ lati; essendo α arbitrario si conclude che: *in una curva C_n sono inscritti ∞' $(n-1)$ -goni regolari*; ognuno è anche inscritto in un cerchio passante per i punti A e A' . Similmente si dimostra che: *in una curva Γ_n sono inscritti ∞' $(n+1)$ -goni regolari*.

Delle araneiden fu anche segnalata dall'Heyman una generazione organica con moto continuo, la quale (v. p. 456) ne rende possibile l'applicazione effettiva alla divisione di un angolo in parti eguali.

163. Ad una notevole categoria speciale di settrici di Plateau si è giunti¹⁾ con un procedimento differente ed indipendente da quello precedentemente indicato, del quale è necessario fare qui menzione.

Siano dati (fig. 101) in un piano π due punti fissi A, B ; ne sia

¹⁾ H. NAEGELSBACH, *Die Kreisconchoiden* (Programm, Erlangen 1885).

d la distanza e M il centro. Chiameremo K_m la circonferenza di diametro AB e K_a, K_b le due circonferenze di raggio d e centri risp. A e B . Preso ad arbitrio un punto P_1 del piano π si conduca AP_1 e se ne determini la intersezione P colla circonferenza K_m ; quindi sulla retta AP_1 si segni il punto P_2 tale che il segmento P_1P_2 abbia per centro il punto P . Resta in tal modo stabilita fra i punti del piano π una trasformazione Cremoniana involutoria che indicheremo con T_a ; la circonferenza K_m ne è evidentemente una curva punteggiata unita.

Preso A per polo e AB per asse polare e dette ϱ_1, ω_1 e ϱ_2, ω_2 le coordinate dei punti corrispondenti P_1 e P_2 , avremo evidentemente le relazioni:

$$(9) \quad \omega_1 = \omega_2,$$

$$\varrho_1 + \varrho_2 = d \cos \omega_1;$$

passando a coordinate cartesiane si può rappresentare la trasformazione T_a mediante le formole

$$(10) \quad x_2 = x_1 \frac{2d x_1 - x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_2 = y_1 \frac{2d x_1 - x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 + y_1^2},$$

le quali dimostrano che T_a è una trasformazione cubica; la corrispondente rete omaloidea è formata dalle ∞^2 curve del terz'ordine aventi A per punto doppio e B per comune fuoco straordinario; essa è quindi una speciale trasformazione cubica di de Jonquières, avente due coppie di punti fondamentali coincidenti nei punti ciclici del piano I e J , nelle direzioni BI e BJ . Una trasformazione simigliante si ottiene sostituendo il punto B al punto A ; la indicheremo con T_b .

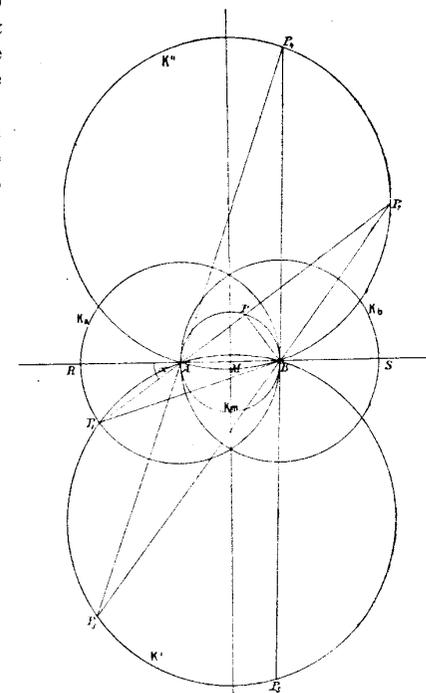


Fig. 101.

Eseguiamo la trasformazione T_a sulla circonferenza K_a — che ora indicheremo per maggior chiarezza con Γ_1 —; otterremo una nuova curva Γ_2 ; siccome Γ_1 ha per equazione $\rho_1 = d$, così le (9) provano che la Γ_2 è rappresentata come segue:

$$\rho_2 = 2 d \cos \omega_2 - d;$$

la Γ_2 è dunque una speciale lumaca di Pascal (concoide circolare, n. 69). Se ora si effettua sopra Γ_2 la trasformazione T_b si ottiene una curva Γ_3 , che sottoposta alla trasformazione T_a dà una curva Γ_4 ; continuando si otterrà una serie illimitata di curve. Indicando in genere con Γ_m una qualunque di esse e colla relazione simbolica $T(\Gamma) \equiv \Gamma'$ che la curva Γ' nasce dalla Γ sottoponendola alla trasformazione T , potremo scrivere in generale

$$T_a(\Gamma_{2n-1}) = \Gamma_{2n}, \quad T_b(\Gamma_{2n}) = \Gamma_{2n+1}.$$

Le curve Γ_m si chiamano (per una ragione facile a comprendere) *concoide circolari d'ordine superiore*; le loro proprietà — in particolare la loro rappresentazione analitica — si potrebbero ottenere servendosi delle equazioni che rappresentano le trasformazioni T_a e T_b ; ma è più semplice stabilirle mediante le seguenti considerazioni dirette sulla figura.

Chiamiamo R e S le seconde intersezioni della retta AB colle circonferenze K_a e K_b ; inoltre α l'angolo $P_1 A R$. Condotta la retta $P_1 B$ risulta isoscele il triangolo $A P_1 R$; ed essendolo anche il triangolo $B P_1 P_2$ si conclude

$$\text{ang } A P_1 B = \text{ang } A P_2 B = \alpha/2.$$

Perciò le due circonferenze K' e K'' , la prima descritta pei punti A, B, P_1 e la seconda pei punti A, B, P_2 , sono simmetriche fra loro rispetto alla retta AB . Si segni ora il punto P_3 che corrisponde a P_2 in T_b ; il triangolo $B P_2 P_3$ risulta isoscele, quindi

$$\text{ang } A P_3 B = \text{ang } A P_2 B = \alpha/2,$$

per conseguenza anche il punto P_3 sta sulla circonferenza K' . Similmente si vede che

$$\text{ang } A P_4 B = \text{ang } A P_3 B = \alpha/2,$$

onde P_4 sta sulla circonferenza K'' . Così continuando si vede che sopra K' stanno i punti $P_1, P_3, \dots, P_{2n+1}, \dots$ e sopra K'' i punti $P_2, P_4, \dots, P_{2n}, \dots$. Notiamo ancora che: $\text{ang } B A P_2 = \alpha$; che l'angolo $P_1 B P_3$, esterno al triangolo isoscele $B P_1 P_2$, vale pure α ;

che l'angolo $P_2 B P_4$, esterno al triangolo isoscele $A P_2 P_3$ è eziandio eguale a α ; e così via, onde in generale

$$\text{ang } A P_{2n} B = \text{ang } A P_{2n+1} B = \alpha/2;$$

$$\text{ang } P_{2n-2} A P_{2n} = \text{ang } P_{2n-1} B P_{2n+1} = \alpha$$

Per conseguenza:

$$\text{ang } A B P_{2n+1} = \frac{2n+1}{2} \alpha,$$

$$\text{ang } B A P_{2n+1} = \pi - (n+1)\alpha, \quad \text{ang } P_{2n+1} A R = (n+1)\alpha$$

$$\text{ang } B A P_{2n} = n\alpha,$$

$$\text{ang } A B P_{2n} = \pi - \frac{2n+1}{2} \alpha, \quad \text{ang } P_{2n} B S = \frac{2n+1}{2} \alpha$$

Se ne deduce:

$$\frac{\text{ang } P_{2n+1} A R}{\text{ang } P_{2n+1} B A} = \frac{2n+2}{2n+1}; \quad \frac{\text{ang } P_{2n} B S}{\text{ang } P_{2n} A B} = \frac{2n+1}{2n}$$

e queste relazioni autorizzano a concludere che *le concoide circolari d'ordine superiore sono particolari settrici di Plateau*. Le trovate relazioni fra angoli conducono direttamente alle equazioni polari delle curve Γ_{2n} e Γ_{2n+1} . Riferiamo infatti la prima ad un sistema di coordinate polari ρ, φ avente A per polo e AB per asse polare; avremo quindi

$$\overline{A P_{2n}} = \rho, \quad \text{ang } P_{2n} A B = \varphi;$$

e siccome il triangolo $P_{2n} A B$ dà

$$\frac{A P_{2n}}{\text{sen } A B P_{2n}} = \frac{A B}{\text{sen } A P_{2n} B},$$

così, ricordando le relazioni precedenti, si conclude essere

$$(11) \quad \rho = d \frac{\text{sen } \frac{2n+1}{2n} \varphi}{\text{sen } \frac{\varphi}{2n}}$$

l'equazione polare della curva Γ_{2n} . Similmente si vede che

$$(12) \quad \rho = d \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+2}{2n+1} \varphi}{\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2n+1}}$$

è l'equazione polare di Γ_{2n+1} quando scelgasi B per polo e BA per asse polare. È evidente che le (11), (12) sono casi particolari dell'equazione (6').

Particolarizzando i teoremi dimostrati per tutte le settrici di Plateau si vede che: ogni curva Γ_{2n} è razionale e dell'ordine $4n$; ne sono punti di molteplicità $2n$ A e i punti ciclici del piano, mentre B è multiplo di ordine $2n-1$; ogni curva Γ_{2n+1} è razionale e dell'ordine $4n+2$; B ed i punti ciclici del piano ne sono punti multipli secondo $2n+1$, mentre A è solo multiplo secondo $2n$. Nessuna di tali linee ha punti reali all'infinito.

Faremo un'ultima osservazione concernente l'applicazione delle curve Γ_{2n} e Γ_{2n+1} al problema della divisione di un angolo. Dalle relazioni angolari anteriormente stabilite si deducono facilmente queste altre:

$$\operatorname{ang} A P_{2n} B = \frac{1}{2n+1} \operatorname{ang} P_{2n} B S$$

$$\operatorname{ang} A P_{2n+1} B = \frac{1}{2n} \operatorname{ang} P_{2n} A R.$$

Se quindi si costruisce col vertice in B e con un lato in BS un angolo eguale ad un dato angolo α , l'altro suo lato taglierà la curva Γ_{2n} in $2n+1$ punti P_{2n} ; congiungendo uno qualunque di questi ai due punti A, B si otterrà un angolo che sarà la $(2n+1)^{\text{ma}}$ parte di $\alpha + k\pi$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$). Similmente, costruendo col vertice in A e con un lato in AR un angolo eguale ad un dato angolo α , l'altro suo lato taglierà Γ_{2n+1} in $2n+2$ punti P_{2n+1} ; congiungendo uno qualunque di questi ai punti A, B si otterrà un angolo che sarà la $(2n+2)^{\text{ma}}$ parte di $\alpha + k\pi$ ($k = 0, 1, \dots, 2n+1$). Tracciata dunque che sia la curva Γ_m sarà eseguibile la $(m+1)$ sezione di un angolo qualsivoglia.

164. III. Analoghe alle precedenti settrici sono le curve ognuna delle quali è il luogo del vertice P di un triangolo la cui base AB è fissa e di cui l'altezza PH divide l'angolo APB in due parti che stanno nel rapporto $1:(n-1)^1$. Posto $\operatorname{ang} APH = \varphi$, sarà

¹⁾ K. HESSE, *Ueber die Teilung des Winkels, speziell die Trisection* (Montabour, 1881).

$\operatorname{ang} BPH = (n-1)\varphi$; quindi, preso un sistema di coordinate cartesiane avente A per origine e AB per asse delle x , si avrà (se $AB = a$) $x = y \operatorname{tg} \varphi$, $a - x = y \operatorname{tg} (n-1)\varphi$, da cui

$$(13) \quad x = a \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos (n-1)\varphi}{\operatorname{sen} n\varphi}, \quad y = a \frac{\cos \varphi \cos (n-1)\varphi}{\operatorname{sen} n\varphi},$$

che è la rappresentazione parametrica della curva. Se ne deduce che, supposto n intero positivo, questa è razionale d'ordine n con A per punto $(n-1)$ plo. Ponendo

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \pi/2 - \omega;$$

si trova come equazione polare della curva

$$(14) \quad \rho = a \frac{\cos (n-1)(\pi/2 - \omega)}{\operatorname{sen} n(\pi/2 - \omega)},$$

la quale, secondochè n è pari o dispari, assume una delle forme seguenti:

$$(14_I) \quad \rho = a \frac{\operatorname{sen} (n-1)\omega}{\operatorname{sen} n\omega} \quad (14_{II}) \quad \rho = a \frac{\cos (n-1)\omega}{\cos n\omega}$$

Lasciamo al lettore di dedurre da queste equazioni le proprietà delle curve in questione. Limitiamoci ad osservare che nel secondo caso la curva passa pel punto B mentre nel primo taglia AB nel punto C tale che $AC = \frac{n-1}{n} a$. Aggiungiamo che, supposta descritta la curva relativa ad un certo valore di n , se si costruisce sopra AB un segmento capace di un dato angolo α , il suo arco taglierà quella curva in certi punti P ; se uno qualunque di essi si congiunge ai punti A e B e si conduce PH perpendicolare a AB , risulterà $\operatorname{ang} APH = \alpha/n$: basta ciò a provare che quella curva è una n -settrice.

IV. Se si sapesse dividere in n parti eguali uno qualunque degli archi circolari aventi per estremi due punti fissi N_0 e N_n , si sarebbe evidentemente in grado di dividere in n parti eguali qualsivoglia angolo rettilineo γ ; costruito infatti il triangolo isoscele $N_0 C N_n$ avente l'angolo al vertice eguale a γ , si descriva l'arco circolare limitato dai punti N_0 e N_n e avente per centro C ; e lo si divida in n parti eguali; i raggi corrispondenti divideranno γ in n parti eguali. Ora per eseguire quella divisione in n parti eguali è sufficiente considerare ¹⁾ il luogo dei punti N_r ognuno dei quali è

¹⁾ C. BURALI-FORTI, *Sopra un sistema di curve che dividono in n parti eguali gli archi di circolo che passano per due punti fissi* (Giorn. di Matem.,

l' r^{mo} vertice di una linea poligonale regolare inscritta in un arco circolare avente per estremi i punti N_o e N_n . Per trovare l'equazione del luogo dei punti N_r , assumiamo per origine il centro O del segmento $N_o N_n$ e la retta $N_o N_n$ per asse delle x di un sistema cartesiano e chiamiamo C il centro di uno dei suddetti archi circolari. Posto

$$\text{ang } N_o C N_n = 2 \alpha,$$

si avrà :

$$\text{ang } N_r N_o N_n = \frac{n-r}{u} \alpha, \quad \text{ang } N_r N_n N_o = \frac{r}{n} \alpha$$

onde — se $\overline{N_o N_n} = 2a$ — le equazioni delle due rette $N_r N_o$ e $N_r N_n$ saranno :

$$\frac{y}{a+x} = \text{tg } \frac{n-r}{n} \alpha, \quad \frac{y}{a-x} = \text{tg } \frac{r}{n} \alpha.$$

L'equazione del luogo suddetto si otterrà eliminando a fra queste. Ma è più comodo rappresentarlo esprimendo x e y in funzione dell'angolo $\beta = \alpha/n$; si ottengono così le due equazioni:

$$(15) \quad x = a \frac{\text{sen } (2r-n) \beta}{\text{sen } n \beta}, \quad y = 2a \frac{\text{sen } r \beta \cdot \text{sen } (n-r) \beta}{\text{sen } n \beta}$$

Se ne deduce facilmente che le curve così ottenute sono razionali d'ordine n . Non se ne conosce alcuna costruzione meccanica con moto continuo che le renda effettivamente utili per la divisione degli angoli.

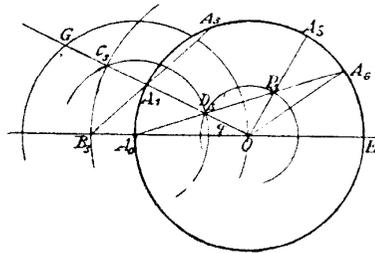


Fig. 102.

165. V. Assai più complicata è la definizione di altre settrici ¹⁾, alla cui considerazione guida il seguente

TEOREMA. Nel cerchio di centro O e diametro $A_o E = 2r$, sia l'angolo $A_{n-2} O A_o = (n-2)$ ang $A_1 O A_o$ (v. fig. 102, ove

si è supposto $n = 5$) e si eseguisca la costruzione seguente: Si con-

T. XXVII, 1889). Queste curve erano state prima considerate da J. E. WAGNER in un lavoro di cui un resoconto leggesi in *Nouv. Ann. de math.*, T. X, 1851, p. 297.

¹⁾ A. VAN GRINTEN, *Die n- und (n+1)-Theilung des Winkels und des Kreises* (Archiv, T. LXX, 1874).

duca la retta $A_1 A_{n-2}$ e se ne determini la intersezione B_{n-2} col diametro $A_o E$; si porta sul raggio $O A_1$ prolungato $O C_{n-2} = O B_{n-2}$; si descrive il cerchio di centro A_o e raggio $A_o C_{n-2}$ e se ne determina la seconda intersezione D_n con $O A_1$; si conduce $A_n D_n$ a tagliare nuovamente in A_{n+1} la periferia del dato cerchio; si segna la seconda intersezione P_n della retta $A_o A_{n+1}$ colla circonferenza di cerchio O e raggio $O D_n$ e finalmente si conduce il raggio $O P_n A_n$. Allora gli angoli $A_n O A_n$ e $A_n O A_{n+1}$ sono il primo n -plo ed il secondo $(n+1)$ -plo dell'angolo $A_o O A_1 = \varphi$.

Dimostrazione. Si ha infatti:

$$\text{triang. } A_1 O B_{n-2} + \text{triang. } A_1 O A_{n-2} = \text{triang. } A_{n-2} O B_{n-2}$$

ossia

$$\frac{1}{2} r \cdot O B_{n-2} \text{sen } \varphi + \frac{1}{2} r^2 \cdot \text{sen } (n-3) \varphi = \frac{1}{2} r \cdot O B_{n-2} \text{sen } (n-2) \varphi$$

onde

$$O B_{n-2} = \frac{r \text{sen } (n-3) \varphi}{\text{sen } (n-2) \varphi - \text{sen } \varphi}$$

Descrivasi ora il cerchio di centro A_o e raggio $A_o O$ e se ne determini la seconda intersezione G con $O A_1$. Sarà

$$O G = 2 r \cos \varphi, \quad O D_n = C_{n-2} G$$

quindi

$$O D_n = O G - O G_{n-2} = O G - O B_{n-2} = 2r \cos \varphi - \frac{r \text{sen } (n-3) \varphi}{\text{sen } (n-2) - \text{sen } \varphi};$$

posto quindi $O D_n = \varrho_n$ dopo qualche riduzione si trova

$$(16) \quad \varrho_n = r \frac{\cos \frac{n+1}{2} \varphi}{\cos \frac{n-1}{2} \varphi}$$

o, se si preferisce,

$$(12') \quad \varrho_n = r \frac{\text{sen } n \varphi - \text{sen } \varphi}{\text{sen } (n-1) \varphi}$$

Indichisi ora con ψ l'angolo $P_n O D_n$; essendo per costruzione $O P_n = O D_n$, la relazione

$$\text{triang. } A_o O D_n + \text{triang. } D_n O P_n = \text{triang. } A_o O P_n$$

dà

$$\frac{1}{2} r \rho_n \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{2} \rho_n^2 \operatorname{sen} \psi = \frac{1}{2} r \rho_n \operatorname{sen} (\varphi + \psi)$$

ed in seguito

$$\rho_n = \frac{\operatorname{sen} (\varphi + \psi) - \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \psi}.$$

Paragonando questa relazione con la (12') si vede essere $\psi = (n-1)\varphi$; per conseguenza:

$$\operatorname{ang} A_1 O A_n = (n-1) \operatorname{ang} A_o O A_1; \operatorname{ang} A_o O A_n = n \operatorname{ang} A_o O A_1;$$

$$\operatorname{ang} A_o O A_{n+1} = (n+1) \operatorname{ang} A_o O A_1,$$

come appunto dice il teorema enunciato.

La equazione (12) o (12') rappresenta, al variare di φ , in coordinate polari il luogo Δ del punto D_n , essendo O il polo e $O A_o$ l'asse polare. Posto poi $O P_n = \rho$, $n\varphi = \omega$, essendo $O P_n = O D_n = \rho_n$ le equazioni citate divengono

$$(17) \quad \rho = r \frac{\cos \frac{n+1}{2n} \omega}{\cos \frac{n-1}{2} \omega} \quad (17') \quad \rho = r \frac{\operatorname{sen} \omega - \operatorname{sen} \frac{\omega}{n}}{\operatorname{sen} \frac{n-1}{n} \omega}$$

e rappresentano in modo analogo il luogo Π del punto P_n .

Costruita che sia la curva Π l' n -sezione di un angolo qualunque si opera con tutta facilità; lo si disponga infatti col vertice in O e con un lato steso lungo $O A_o$; l'altro suo lato $O A_n$ tagli la curva Π nel punto P_n , si conduca la retta $A_o P_n$ e se ne trovi la seconda intersezione D_n colla circonferenza di centro O e raggio $O P_n$; condotta la retta $O D_n A_1$, l'angolo $A_1 O A_o$ sarà l' n^{ma} parte del dato. Ma la stessa curva serve a dividere un angolo qualunque anche in $n+1$ parti eguali; lo si disponga infatti col vertice in O , con un lato sopra la retta $A_o O$ e si segni l'intersezione A_{n+1} dell'altro suo lato con la data circonferenza; si conduca la retta $A_o A_{n+1}$ e si trovi il punto P in cui questa taglia la curva Π ; l'angolo $P_o A_o A_{n+1}$ sarà l' $(n+1)^{\text{ma}}$ parte del dato.

Per brevità non ci arresteremo a discutere le equazioni trovate delle curve Δ e Π ; soltanto osserveremo che per $n=2$ la (12') diviene $\rho_2 = r(2 \cos \varphi - 1)$, che rappresenta una lumaca di Pascal; onde anche le curve Δ si possono considerare come generalizzazioni di questa notevole curva.

VI. Di una rappresentazione analitica analoga a quelle date dalle equazioni (6'), (7), (8), (10), (12), (13) sono suscettibili altre

settrici che vennero considerate da E. Oekinghaus¹⁾; sono quelle rappresentate come segue in coordinate polari:

$$(18) \quad \rho = a \frac{\operatorname{sen} \frac{n-2}{2} \varphi}{\operatorname{sen} \frac{n}{2} \varphi}, \quad \rho = a \frac{\cos \frac{n-2}{2} \varphi}{\cos \frac{n}{2} \varphi}.$$

Lo stesso autore ha inoltre introdotta la considerazione delle settrici aventi equazioni polari del seguente tipo:

$$(19) \quad \rho^n - \binom{n}{2} a^2 \rho^{n-2} + \binom{n}{3} a^3 \rho^{n-3} \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} - \binom{n}{4} a^4 \rho^{n-4} \frac{\operatorname{sen} 3\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} + \dots = 0,$$

le quali godono della proprietà che la somma dei raggi vettori dei punti della curva posti sopra qualunque trasversale condotta pel polo è eguale a 0.

166. VII. Ad un'altra e più importante classe di settrici si giunge con le osservazioni seguenti²⁾.

Siccome ogni numero intero o è primo o è il prodotto di numeri primi, così si saprà dividere un angolo arbitrario in un numero qualunque di parti eguali quando se ne saprà eseguire la divisione in un numero primo di parti eguali. Ora se p è un numero primo, per un noto teorema di Fermat p divide $2^{p-1} - 1$ cioè il prodotto $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1)$; onde uno almeno dei numeri $2^{\frac{p-1}{2}} \pm 1$ è multiplo di p ; per conseguenza, se si saprà eseguire la divisione

in numero di parti espresso da $2^{\frac{p-1}{2}} \pm 1$, si saprà effettuarla in generale. Ora la divisione in un numero di parti eguale a $2^n \pm 1$ si può operare col mezzo di due curve che ora passiamo a definire.

a) Col centro in M (fig. 103) e col raggio a si descrive un cerchio tangente nell'origine all'asse delle x ; condotta per O in quel cerchio una corda arbitraria OA si porta sul suo prolungamento successivamente

$$AB = AM, \quad BC = BM, \quad CD = CM, \quad \dots;$$

¹⁾ Die Sectionscurven (Archiv, 2^a Serie, T. I, 1884).

²⁾ A. KEMPE, De verdeeling van sen hoek en $2n+1$ gelijke deelen e De verdeeling van sen hoek in sen vellekeurig antal gelijke deelen (Nieuw Arch. voo Wiskunde, 2^a Serie, T. I, 1894). Inoltre la memoria Sur les courbes settrices (Mem. de Liège, 2^a Serie, T. XX, 1898).

al variare di quella corda i punti B, C, D descrivono altrettante curve, l' n^{ma} delle quali ha per equazione polare

$$(20) \quad \rho = a + 2a \operatorname{sen} \varphi + 2a \cos(\pi/4 - \varphi/2) + \\ + 2a \cos(\pi/4 - \varphi/2) \cos(\pi/8 - \varphi/4) + \\ + 2a \cos(\pi/4 - \varphi/2) \cos(\pi/8 - \varphi/4) + \dots \\ + \cos(\pi/2^{n+1} - \varphi/2^n)$$

e ha $2^n - 1$ cappii.

Per convincersi dell'applicabilità di tali curve — dette $(2^n + 1)$ -settrici — al problema della divisione degli angoli, prolunghiamo

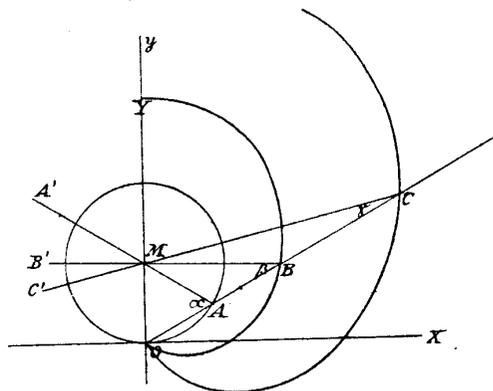


Fig. 103.

in A', B', C', D', \dots le rette AM, BM, CM, DM, \dots e chiamiamo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ gli angoli formati con OA dalle rette MA, MB, MC, MD, \dots e $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \dots$ quelli formati con MO dai prolungamenti $MA', MB', MC', MD', \dots$. L'ispezione della figura prova essere:

$$\alpha' = 2\alpha, \beta' = 3\beta, \gamma' = 5\gamma, \delta' = 9\delta, \dots$$

Emerge da queste relazioni che se si conduce per M una retta qualunque la quale formi con OM l'angolo arbitrario ω , essa taglierà il cerchio dato e quelle curve ausiliari in punti A_0, B_0, C_0, \dots tali che gli angoli da essa formati risp. con le rette OA_0, OB_0, OC_0, \dots valgono risp. $\omega/2, \omega/3, \omega/5, \omega/9, \dots$. Dunque quelle curve servono alla divisione di un angolo qualunque in $2^n + 1$ parti eguali¹⁾.

¹⁾ Nel caso $n = 1$ dette curve furono applicate da G. LA MANNA COPPOLA nell'opuscolo *Lo sviluppo di un arco del cerchio e la trisezione dell'angolo* (Palermo, 1902).

b) Col centro nell'origine (fig. 104) e con raggio a si descrive un cerchio il quale tagli in M l'asse delle x . Condotta poi un raggio arbitrario OD si porta sul suo prolungamento successivamente

$$AB = AM, BC = BM, CD = CM, \dots$$

Al variare di quel raggio i punti B, C, D, \dots descriveranno altret-

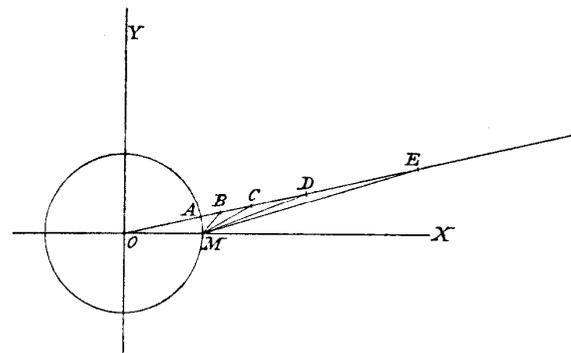


Fig. 104.

tante curve di cui le equazioni polari nel sistema di cui O è il polo e OM l'asse. Sono ordinatamente:

$$\rho = a + 2a \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}, \quad \rho = a + 2a \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi + \omega}{4},$$

$$\rho = a + 2a \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi + \omega}{4} \operatorname{sen} \frac{3\pi + \omega}{8}, \text{ ecc.}$$

Ora la figura mostra facilmente che:

$$\operatorname{ang} OAM = \operatorname{ang} OMA, \quad \operatorname{ang} OBM = 1/7 \operatorname{ang} OMB,$$

$$\operatorname{ang} OCM = 1/7 \operatorname{ang} OMC, \text{ ecc.}$$

Se quindi una trasversale condotta per O e facente con OM l'angolo ω taglia le curve suddette in D_0, E_0, \dots essa formerà colle rette ME_0, MF_0, \dots angoli eguali risp. a $\omega/3, \omega/7, \omega/15, \dots$; quelle curve servono quindi a dividere un angolo qualunque in $2^n - 1$ parti eguali epperò diconsi $(2^n - 1)$ -settrici; ognuna consta di

$2^n - 2$ cappii. Il Kempe ha mostrato come le settrici in discorso si possono descrivere con moto continuo ¹⁾.

167. VIII. La divisione di un angolo in $2^n + 1$ parti eguali si può eseguire mediante un semplicissimo strumento — detto *multisetto* ²⁾ — avente la forma (fig. 105) di un gnomone rettangolare $NQSTCR$; se il prolungamento dello spigolo TC dell'apparato taglia NQ in P , si suppone $TC = CP$ e la lunghezza comune m di questi segmenti si chiama *modulo* dello strumento. In P si suppone fissata una matita. Ora se immaginiamo data ad arbitrio una curva fissa Δ (*direttrice*), nonché un punto fisso O , ed immaginiamo di fare muovere il multisetto in modo che il suo orlo RC passi costantemente per O e che il punto T descriva la direttrice Δ ,

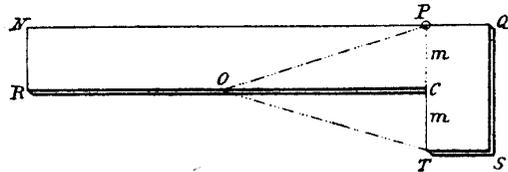


Fig. 105. — L'apparato multisetto.

il punto P genererà una nuova curva che diremo *poliode* (da $\text{πολιος} =$ punto fisso e $\text{οδος} =$ cammino). Fra le due curve Δ e Π esiste una relazione geometrica che, tradotta in formole permette di trovare l'equazione della seconda quando si conosca l'equazione della prima. È conveniente riferire tutte le figure considerate ad un sistema di coordinate polari avente per polo il punto fisso O . Se

$$f(\varrho_1, \omega_1) = 0$$

è l'equazione della direttrice Δ e ϱ, ω sono le coordinate del punto mobile P , essendo P e T equidistanti da O si avrà

$$\varrho = \varrho_1.$$

Inoltre l'angolo $PO T$ è eguale alla differenza fra gli angoli

¹⁾ Un metodo si legge nell'articolo *Ueber die stetige Erzeugung gewisser Schleifenkurven, die einen beliebigen Winkel in gleiche Teile teilen* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., T. XLIX, 1903); un altro nella comunicazione *Ein Gelenkmechanismus zur Teilung des Winkels* (Verhand. des III internationalen Mathem.-Kongress 1904).

²⁾ T. W. NICHOLSON, *The multisection of angles* (The Analyst., T. X, 1883).

o e ω_1 ; perciò nel triangolo rettangolo OCT si ha $CT = m, OT = \varrho$, $\text{ang } COT = \frac{\omega - \omega_1}{2}$, quindi

$$m = \varrho \text{ sen } \frac{\omega - \omega_1}{2}.$$

L'equazione della curva Π altro non è che il risultato dell'eliminazione di ϱ_1 e ω_1 fra le tre equazioni precedenti, onde è

$$f(\varrho, \omega - 2 \text{ arc sen } m/\varrho) = 0.$$

Se per es. come direttrice si sceglie l'asse polare, si ha sempre $\omega_1 = 0$ onde l'equazione della poliode è

$$m = \varrho \text{ sen } \omega/2;$$

la poliode stessa è quindi una trisegante (v. n. 98), di cui in conseguenza resta stabilita una nuova genesi. Più generalmente, se si prende per curva Δ una parallela all'asse polare, si avrà

$$\varrho_1 \text{ sen } \omega_1 = k,$$

k essendo una costante data; così si giunge ad una curva Π del quarto ordine, a quella cioè rappresentata in coordinate cartesiane dall'equazione

$$y^2(x^2 + y^2 - k^2) = (x^2 + y^2 + kx - 2m^2)^2,$$

la quale curva si può considerare come una generalizzazione della trisegante.

Dimostriamo ora l'uso delle polioidi nel problema della divisione di un angolo qualunque AOB .

a) Si conduca la retta b parallela a OB ad una distanza da questa eguale al modulo m (fig. 106); si prenda per punto fisso il vertice O e per direttrice il lato OA dell'angolo dividendo, e si costruisca la corrispondente poliode Π ; se P è una intersezione di Π e b si avrà

$$\text{ang } POB = \frac{1}{3} \text{ ang } AOB.$$

Se infatti si porta su OA , $OT = OP$ e si abbassa OC perpendicolare a PT e PH perpendicolare a OB , i tre triangoli OCT , OCP , OHP risulteranno eguali; in particolare sarà $\text{ang } TOC = \text{ang } COP = \text{ang } POH$, donde segue la relazione enunciata.

b) Per eseguire la 5-sezione dello stesso angolo AOB (fig. 107) si tracci come prima la retta b e la poliode Π ; preso poi di nuovo O

per punto fisso e la retta b per nuova direttrice si descriva una seconda poliode Π' e se ne determini una intersezione P con la Π . Si segni la circonferenza di centro O e raggio OP e se ne indichino con T, T' le intersezioni con OA e b ; condotte le rette PT e PT' si abbassino su di esse le perpendicolari OC e OC' , e si conduca da ultimo $T'H$ perpendicolare a OB . I cinque triangoli rettangoli $OCT, OCP, OC'P, OC'T, OHT'$ risultano per costruzione eguali, dunque

$$\text{ang } TOH = 1/5 \text{ ang } AOB.$$

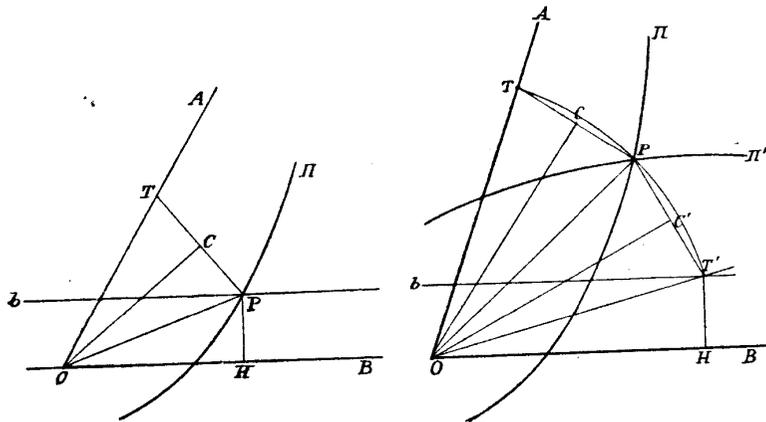


Fig. 106.

Applicazione del multisettore.

Fig. 107.

Seconda applicazione del multisettore.

c) Similmente si procede per eseguire la 7-sezione del medesimo angolo AOB (fig. 108). Si traccino ancora la retta b e le polioidi Π e Π' ; indi preso di nuovo O per polo e Π' per direttrice si costruisca la corrispondente poliode.

Sia P un punto comune a Π e Π'' ; ad esso, considerato come punto di Π , corrisponde il punto T di OA , mentre considerato come punto di Π'' , ne sia T'' il corrispondente in Π' ; finalmente a T'' corrisponda T' sopra b . Condotte le rette $PT, PT'', T''T'$ si abbassino su di esse le perpendicolari OC, OC'', OC' ; si guidi ancora $T'H$ perpendicolare a OB . Risultano in conseguenza sette triangoli rettangoli eguali, i quali provano essere

$$\text{ang } T'OH = 1/7 \text{ ang } AOB.$$

Il metodo adoperato ora per la divisione in 3, 5 e 7 parti eguali si estende immediatamente a 9, 11, ...; onde — come si era an-

nunciato — il multisettore serve a dividere qualunque angolo in $2n + 1$ parti eguali¹⁾.

IX. La trisegante di Delanges appartiene eziandio alla classe più recente di curve settrici a noi nota²⁾: eccone la genesi.

Attorno all'origine O di un sistema cartesiano (il lettore è pregato di eseguire la figura) si descriva un cerchio di raggio arbitrario r , che seghi in A l'asse delle ascisse. A partire da A si porti il segmento $2a$ come corda in detto cerchio, onde si abbia $A_2 = A_2A_4 = A_4A_6 = \dots = 2a$. I centri degli archi così determinati siano A_1, A_3, A_5, \dots mentre B_1, B_3, B_5, \dots siano i centri delle corde

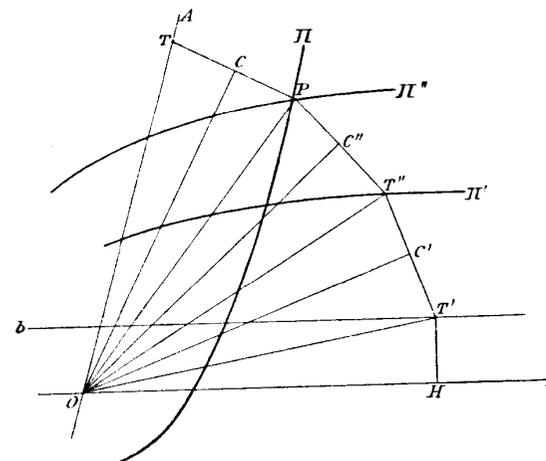


Fig. 108. — Terza applicazione del multisettore.

corrispondenti. Supponiamo che la stessa costruzione venga effettuata su tutti i cerchi di centro O cominciando da quello di raggio $r = a$. Allora, rispetto a un sistema di coordinate polari ρ, ω la equazione del luogo A_n del punto A_n (dal momento che è $\text{ang } A_nOA = \omega$ e $\text{ang } A_nOA_{n-1} = \omega/n$)

$$(21) \quad \rho \text{ sen } (\omega/n) = a.$$

¹⁾ S. H. JOHNSON ha osservato (v. la nota *The multisection of angles*. *The Analyst*, T. X, 1883) che il metodo di multisezione esposto rientra in uno pubblicato sin dal 1880 da J. B. MILLER, il quale fece uso di alcune curve, da lui chiamate *cordali*, più generali delle polioidi.

²⁾ E. LAMPE, *Ueber eine Gattung von Kurven die zur Teilung eines Winkels in n gleiche Teile dienen können* (Sitzungsber. der Berliner math. Ges., 1900).

Invece il luogo Ω_n del punto B_n è

$$(22) \quad \rho \operatorname{tg}(\omega/n) = a.$$

In tal modo vengono generate due schiere di curve A_n e Ω_n che sono di facile descrizione e, come è facile vedere, possono servire alla divisione di un angolo in parti eguali.

Di proprietà delle curve A_n limitiamoci a segnalare le seguenti.

Esse hanno tutte per asintoto la retta $y = na$, parallela all'asse delle x ; infatti

$$y = \rho \operatorname{sen} \omega = a \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen}(\omega/n)},$$

per $\omega = 0$ (epperò $\rho = \infty$) segue $y = na$.

Se n è pari si ha un secondo asintoto $y = -na$.

Il settore della curva A_n limitato da un raggio vettore qualunque OP (essendo $\operatorname{ang} POX = \omega$) e l'asse Oy perpendicolare a Ox ha per area

$$I = \frac{na^2}{2} \left[\operatorname{cotg} \frac{\omega}{n} - \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n} \right]$$

Siano P_1 e Y_1 le intersezioni di OP e OY con l'asintoto della curva; l'area S del quadrilatero mistilineo PP_1Y_1Y è dato da

$$S = \frac{na^2}{2} \left[n \operatorname{cotg} \omega - \operatorname{cotg} \frac{\omega}{n} + \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n} \right].$$

Quando ω tende a 0 è $\lim [n \operatorname{cotg} \omega - \operatorname{cotg} \omega/2] = 0$; perciò l'area S_n limitata dalla curva A_n , dell'asse Oy e dell'asintoto è data da

$$S_n = \frac{na^2}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n}$$

L'ordine della curva A_n è espresso da n o $2n$ secondo che n è un numero pari o dispari; lo si dimostra cercando l'equazione di detta curva nel modo seguente:

a) Supposto n dispari si ha in generale:

$$\operatorname{sen} na = n \left[\operatorname{sen} \alpha - \frac{n^2 - 1^2}{3!} \operatorname{sen}^3 \alpha +$$

$$\frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{5!} \operatorname{sen}^5 \alpha - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1} \operatorname{sen}^n \alpha \right].$$

Suppongasì $na = \omega$; sarà $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\omega/n) = a/\rho$, $\operatorname{sen} \omega = y/\rho$

e la relazione precedente moltiplicata per ρ^{n-1} diverrà:

$$(23) \quad y\rho^{n-1} = n \left[a\rho^{n-1} - \frac{n^2 - 1}{3!} a^3 \rho^{n-3} + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{5!} a^5 \rho^{n-5} - \dots \right];$$

ora essendo n dispari, ρ è elevato dappertutto a un esponente pari onde, con la sostituzione di ρ^2 con $x^2 + y^2$ la precedente equazione diviene razionale di grado n in x, y e così resta dimostrata la prima parte dell'enunciato. Nel caso più semplice $n = 3$ quell'equazione diviene

$$(x^2 + y^2)(3a - y) = 4a^3,$$

la quale rappresenta una trisettrice di Maclaurin (p. 101) avente il suo nodo nel punto $(0, 2a)$. Siccome l'equazione (23) contiene x solo a potenze pari, così Oy ne è un asse di simmetria, mentre non lo è Ox ; il suo asintoto è d'inflessione.

b) Supposto invece n pari si ha in generale l'equazione:

$$\cos na = 1 - \frac{n^2}{2!} \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{4!} \operatorname{sen}^4 \alpha - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1} \operatorname{sen}^n \alpha.$$

Facendo nuovamente $\alpha = \omega/n$, cioè $na = \omega$, si ha $\operatorname{sen}(\omega/n) = a/\rho$, $\cos \omega = x/\rho$ e moltiplicando l'equazione risultante per ρ^n si trova:

$$(24) \quad x\rho^{n-1} = \rho^n - \frac{n^2}{2!} a^2 \rho^{n-2} + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{4!} a^4 \rho^{n-4} - \frac{n^2(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{6!} a^6 \rho^{n-6} + \dots$$

Ora, per le fatte ipotesi, $n - 1$ è un numero dispari; perciò, onde rendere razionale in x, y l'equazione precedente, ove si sia posto $\sqrt{x^2 + y^2}$ per ρ , è necessario elevarla al quadrato, col che il suo grado sale a $2n$. La equazione risultante contiene soltanto potenze positive di x e y , onde la curva A_n è in tal caso simmetrica rispetto a entrarvi gli assi. Nel caso più semplice $n = 2$, la (24) diviene

$$(4a^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 4a^4$$

e rappresenta una trisegante di Delanges (p. 275).

Le curve Ω_n sono dell'ordine $2n+2$. Infatti la loro equazione si trae dalla formola

$$\operatorname{tang}(n\alpha) = \frac{\binom{n}{1} \operatorname{tg} \alpha - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 \alpha + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 \alpha - \dots}{1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha + \binom{n}{4} \operatorname{tg}^4 \alpha - \dots}$$

supponendo $\alpha = \omega/n$. Ora l'equazione della Ω_u essendo la (22), si ha

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\omega}{n} = \frac{a}{\rho}, \quad \operatorname{tg} n\alpha = \operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x}$$

epperò la precedente diviene

$$\frac{y}{x} = \frac{\binom{n}{1} \rho^{n-1} - \binom{n}{3} a^2 \rho^{n-3} + \binom{n}{5} a^4 \rho^{n-5} - \dots}{\rho^n - \binom{n}{2} \rho^{n-2} a^2 + \binom{n}{4} \rho^{n-4} a^4 - \dots}$$

Facciasi ivi $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; l'equazione risultante è irrazionale e per renderla razionale deve venire innalzata al quadrato; liberandolo poi dai denominatori, il suo primo membro diviene $y^2 \rho^{2n}$ che è del grado $2n+2$, conformemente all'enunciata. Tutte le curve in discorso sono simmetriche rispetto agli assi. Fra esse quella di ordine minimo è la Ω_2 ; essa ha per equazione $\rho \operatorname{tg} \omega = a$ onde è una curva kappa (p. 233).

CAPITOLO XIII

Curve dotate di centri o di assi di simmetria.¹⁾

168. Per *centro* di una curva piana Γ s'intende un punto C del suo piano tale che ogni retta condotta per C tagli Γ in tante coppie di punti simmetrici rispetto a C ; quindi i punti di Γ si distribuiscono in ∞' coppie costituite ciascuna di un punto e del suo *opposto*; sono opposti di sè stessi il centro C e tutti i punti della retta all'infinito. Quando la curva Γ ha un centro C (e più di uno evidentemente non ne può possedere a meno che consti di un fascio di rette parallele) essa chiamasi *centro-simmetrica*, e corrisponde a sè stessa nell'omologia armonica avente per centro C e per asse la retta all'infinito, onde appartiene alla classe delle *curve omologico-armoniche*.

La definizione di centro non presuppone che la curva Γ sia algebrica; noi però supporremo nel seguito di questo Capitolo che si tratti di curve algebriche²⁾. Tutte le curve di second'ordine possiedono un centro (a distanza finita od all'infinito); tutte le cubiche si possono proiettare in curve dotate di centro (v. n. 14); le curve di ordine superiore non hanno in generale centro nè sono proiezioni di curve centrate; esistono però molte curve di 4° e 6° ordine, nonchè di ordine più elevato, godenti quest'importante

¹⁾ Le curve a cui è consacrato questo paragrafo sono casi particolari di quelle che corrispondono a sè stesse in una o più omografie; S. KANTOR indicò un modo per trovarne l'equazione generale: v. *Premiers fondements pour une théorie des transformations planes univoques* (Naples, 1891), I Partie, § 2; in particolare, per le curve di quarto ordine v. E. CIANI, *Le quartiche proiettive a sè stesse* (Rend. Circ. mat. Palermo, T. XXVIII, 1909).

²⁾ Per ciò che segue v. specialmente la grande memoria di STEINER, *Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkthaben, und über darauf bezüglichen Eigenschaften allgemeiner Curven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren* (G. di Crelle, T. XLVII, 1854). Molte proposizioni ivi enunciate vennero dimostrate dal GUSSELDT nel lavoro *Ueber Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen* (Math. Ann., T. II, 1870).

prerogativa (v. Libri III e IV). Che esistano curve a centro di ordine qualsivoglia si vede osservando che, se si indica in genere con f_k una forma binaria di ordine k in x, y le equazioni

$$(1) \quad f_0 + f_2 + \dots + f_{2\mu} = 0, \quad f_1 + f_3 + \dots + f_{2\nu-1} = 0$$

rappresentano due curve, la prima di ordine $n = 2\mu$ e la seconda di ordine $n = 2\nu - 1$. La prima contiene

$$1 + 3 + \dots + (2\mu + 1) = (\mu + 1)^2 = \frac{n(n+4)}{4} + 1$$

costanti, mentre la seconda ne contiene

$$2 + 4 + \dots + 2\nu = \nu(\nu + 1) = \frac{n(n+4) - 1}{4} + 1.$$

Emerge da ciò che le curve d'ordine n aventi per centro un dato punto sono $\infty^{\frac{n(n+4)}{4}}$ o $\infty^{\frac{n(n+4)-1}{4}}$ secondo che n è pari o dispari. Siccome le curve generali d'ordine n sono $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$ così l'avere come centro un punto determinato equivale per una curva d'ordine a $\frac{n(n+2)}{4}$ o $\frac{n(n+2)-1}{4}$ condizioni semplici, secondo che n è pari o dispari. Si vede anche, supponendo il centro non dato di posizione, che vi sono nel piano $\infty^{\frac{n(n+4)+8}{2}}$ o $\infty^{\frac{n(n+4)+7}{2}}$ curve d'ordine n a centro, secondo che n è pari o dispari. Per $\frac{n(n+4)+8}{2}$ o $\frac{n(n+4)+7}{2}$ punti arbitrari del piano passa in conseguenza un numero finito di curve d'ordine n centrate; la determinazione del loro numero è un problema che Steiner ha risolto in alcuni casi particolari, che egli propose in generale, ma che non crediamo sia stato ancora risolto¹⁾.

Siccome nelle equazioni (1) può mancare un certo numero di termini, così: Una curva a centro d'ordine pari o non contiene il proprio centro o passa per questo un numero pari di volte; invece una curva a centro di ordine dispari passa sempre pel proprio centro un numero dispari di volte; le corrispondenti tangenti sono di inflessione.

Sia I un punto semplice all'infinito di una curva Γ simmetrica rispetto al centro C ; I coincidendo col suo punto opposto, $C I$ tocca in I la curva; dunque: tutti gli asintoti di una curva centrata relativi a punti semplici della curva concorrono nel centro.

¹⁾ *Aufgaben und Sätze* (G. di Crelle, T. XLVII, p. 106 u. s.).

Per vedere come possano essere disposte le tangenti in un punto multiplo all'infinito di una curva centro-simmetrica, scriviamo le equazioni (1) come segue:

$$(1') \quad \begin{cases} f_0 z^{2\mu} + f_2 z^{2\mu-2} + \dots + f_{2\lambda} z^{2\mu-2\lambda} + (ax + by)^r \varphi_{2\mu-r} = 0 \\ f_1 z^{2\nu} + f_3 z^{2\nu-2} + \dots + f_{2\lambda+1} z^{2\nu-2\nu} + (ax + by)^r \varphi_{2\nu+1-r} = 0 \end{cases}$$

ove la variabile z si è introdotta per omogeneità. Ogni tangente nel punto $ax + by = 0, z = 0$ avrà un'equazione della forma $ax + by = cz$; si vede inoltre facilmente che, se $r < 2\mu - 2\lambda$, dev'essere $c = 0$, mentre, se $r > 2\mu - 2\lambda$, si ha $c = \infty$; nel primo caso la tangente passa per il centro di simmetria, nel secondo coincide con la retta all'infinito; nel caso intermedio $r = 2\mu - 2\lambda$ si trova

$$c = \sqrt[r]{-\frac{f_{2\lambda+1}}{\varphi_{2\lambda+1}}},$$

purchè in queste due funzioni si sia fatto $y/x = -a/b$; essendo ora r un numero pari i valori di c risultano a coppie eguali e disegni continui. Ragionando analogamente sulla seconda delle (1') si conclude che: le tangenti negli eventuali punti multipli all'infinito di una curva a centro o passano per questo o coincidono con la retta all'infinito o finalmente sono a due a due simmetriche rispetto al centro.

Siano M e N due punti di Γ posti su una retta r condotta per C ; sopra r staranno anche i punti M' e N' opposti risp. a M e N ; se in particolare supponiamo che M e N coincidano, coincideranno anche M' e N' , e r risulterà bitangente; perciò tutte le rette condotte dal centro di una curva a toccarla in punti a distanza finita sono bitangenti di essa. Similmente, se si considerano due punti qualunque M e N di Γ ed i loro opposti M' e N' le corde MN e $M'N'$ saranno parallele ed equidistanti dal centro C ; se in particolare N coincide con M , N' cadrà in M' , epperò: in due punti opposti una curva centrata ammette per tangenti due rette simmetriche rispetto al centro. Analogamente si dimostra che i punti singolari di una curva centrata i quali non si trovano nè nel centro nè a distanza infinita sono a due a due simmetrici rispetto al centro e lo stesso accade per le corrispondenti tangenti. Sono pure a due a due simmetriche le tangenti multiple ed i loro punti di contatto sono punti opposti.

Le prime polari del centro rispetto alle curve (1) constano della retta all'infinito e di una curva Γ_1 dell'ordine $n - 2$ rappresentata da l'una o l'altra delle equazioni seguenti:

$$(2) \quad \begin{aligned} \mu f_0 + (\mu - 1) f_2 + \dots + f_{-2\mu-2} &= 0, \\ (\nu - 1) f_1 + (\nu - 2) f_3 + \dots + f_{2\nu-1} &= 0; \end{aligned}$$

entrambe hanno per centro il punto C . Ragionando su Γ_1 come fecesi sopra Γ e così proseguendo si ottiene una serie di curve degli ordini $n-4, n-6, \dots$ l'ultima delle quali è una conica se n è pari, è una retta (cioè la tangente alla curva nel centro) se n è dispari.

Se indichiamo con f il primo membro dell'una o l'altra delle equazioni (1) e consideriamo il punto P della retta all'infinito che appartiene alla direzione facente con Ox l'angolo ω , vedremo subito che la prima polare di P è rappresentata dall'equazione

$$(3) \quad \cos \omega \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \omega \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

quella polare è pertanto una curva d'ordine $n-1$ concentrica alla curva Γ . Variando il punto P , la curva (3) varia e genera un fascio avente per base gli $(n-1)^2$ punti in cui si tagliano le due curve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Se n è pari, i punti base sono il centro e $\frac{n(n-2)}{2}$ coppie di punti opposti; ma, se n è dispari, la base consta di $\frac{(n-1)^2}{2}$ coppie di punti opposti.

Steiner ha osservato che le curve a centro intervengono nello studio delle proprietà metriche delle curve algebriche: basti a provarlo la considerazione seguente. Sia Γ una curva generale d'ordine n e O un punto arbitrario del suo piano; sia poi Γ' la curva simmetrica di Γ rispetto a O . Γ e Γ' hanno evidentemente comuni gli n loro punti all'infinito; onde avranno comuni altri $n(n-1)$ punti situati sopra una curva H dell'ordine $n-1$, e formanti $\frac{n(n-1)}{2}$ coppie di punti simmetrici rispetto a O . Questa conclusione si può enunciare come segue: *Per un punto arbitrario del piano di una curva d'ordine n passano in generale $\frac{n(n-1)}{2}$ corde della curva aventi tutte per centro quel punto; se, eccezionalmente, ne passeranno $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ la curva sarebbe simmetrica rispetto a quel punto; nel caso ordinario gli estremi di quelle corde sono situati sopra una curva dell'ordine $n-1$, detta Polare interna del punto considerato. Questa proposizione subisce delle modificazioni, che è facile determinare, quando il punto fisso sia un punto multiplo della curva data¹⁾.*

¹⁾ La ricerca delle curve centro-simmetriche presenta una certa analogia col seguente problema. Dati due assi ortogonali Ox, Oy , trovare una

169. Una retta r si chiama *diametro* (in senso stretto)¹⁾ di una curva piana Γ coniugato ad una certa direzione d se ogni retta parallela a d taglia Γ in tante coppie di punti aventi i loro centri sopra la retta r ; in tal caso i punti di Γ si distribuiscono in ∞' coppie di punti opposti; la curva chiamasi *asse-simmetrica*, e corrisponde a sè stessa nell'omologia armonica il cui asse è r ed il cui centro è il punto all'infinito della retta d ; è dunque una curva omologico-armonica (v. p. 485). Corrispondono a sè stessi il detto punto della retta all'infinito e tutti quelli del diametro. Se, in particolare, d è perpendicolare a r , la simmetria è ortogonale e r è un *asse* della curva.

Presi per asse delle x il diametro r e per asse delle y una retta avente per direzione quella della retta d , una curva Γ d'ordine n dotata di quella simmetria avrà un'equazione tale che non si altera cambiando il segno di y , cioè una equazione di uno o l'altro dei seguenti tipi secondo che n è pari o dispari:

$$(4) \quad \begin{aligned} f_0(x) y^{2\mu} + f_2(x) y^{2\mu-2} + \dots + f_{2\mu}(x) &= 0, \\ f_1(x) y^{2\nu-2} + f_3(x) y^{2\nu-4} + \dots + f_{2\nu-1}(x) &= 0, \end{aligned}$$

ove in genere $f_k(x)$ è un polinomio di grado k in x . Ragionando su queste come si fece sulle equazioni (1) si conclude che: *le curve d'ordine n aventi una determinata simmetria assiale sono $\infty^{\frac{n(n+4)}{4}}$ o $\infty^{\frac{n(n+4)-1}{2}}$ secondo che n è pari o dispari; quindi il possedere un'assegnata simmetria equivale per una curva d'ordine n a $\frac{(n+1)^2-1}{4}$ o $\frac{(n+1)^2}{4}$ condizioni secondo che n è pari o dispari; onde il numero*

curva C tale che, preso un punto qualunque m di essa e sulla retta mO un punto μ tale che il segmento $m\mu$ sia eguale alla costante $2a$, il luogo del punto μ sia una curva Γ eguale a C disposta rispetto a Oy come Γ lo è rispetto a Ox .

EULERO ha trovato (v. P. H. FUSS, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème Siècle*, St.-Petersbourg 1843, T. I, p. 72) che la rappresentazione parametrica generale di tali curve è:

$$x = \frac{(a+z) \sqrt{a^2+z^2+2Q}}{\sqrt{2(a^2+z^2)}}, \quad y = \frac{(a+z) \sqrt{a^2+z^2-2Q}}{\sqrt{2(a^2+z^2)}}$$

z essendo un parametro e Q una funzione dispari di esso. Se per es. $Q = naz$ si ottiene una curva di ottavo ordine.

¹⁾ In generale per diametro s'intende la curva polare di un punto all'infinito: v. V. KOMMERELL, *Durchmesser ebener algebraischer Kurven* (Württemberg, Mitth. II Ser., T. IX, 1907).

delle curve d'ordine n aventi simmetria assiale è $\infty \frac{(u+1)^2-1}{4} + 3$ o $\infty \left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + 3$.
 Le tangenti a una curva Γ , avente la retta r per diametro coniugato rispetto alla direzione d , nei punti semplici in cui sega la retta r sono parallele alla retta d ; tutte le altre tangenti della curva parallele a d sono bitangenti di essa. Le tangenti alla curva Γ in due punti corrispondenti si tagliano sull'asse.

I punti singolari di Γ si corrispondono nella supposta simmetria. Ecc. ecc. Se la curva è di ordine dispari, essa passa pel punto all'infinito della retta d ed ha ivi un flesso; in casi particolari quel punto può essere di molteplicità maggiore, ma sempre dispari; se invece la curva è d'ordine pari, pel punto all'infinito della retta d la curva passa un numero pari di volte, non escluso lo zero.

Fra le curvature in due punti corrispondenti di una curva assi-simmetrica esiste una relazione notevole, espressa dal seguente

TEOREMA DI MANNHEIM ¹⁾, *Se una curva ammette un diametro rettilineo, i raggi di curvatura negli estremi di una corda ad esso coniugata stanno fra loro come i cubi delle relative tangenti limitate ai loro punti d'intersezione con quel diametro.*

Per dimostrarlo si riferisca la curva ad un sistema cartesiano avente per asse delle x quel diametro e l'asse delle y parallelo alla direzione comune delle corde coniugate; si osservi poi che, detto ω l'angolo degli assi, pel raggio di curvatura R e per la lunghezza T della tangente in un punto (x, y) si hanno le seguenti espressioni:

$$R = \frac{(1 + 2y' \cos \omega + y'^2)^{3/2}}{y'' \sin \omega}, \quad T = \frac{y(1 + 2y' \cos \omega + y'^2)}{y'' \sin \omega}.$$

delle quali si trae in valore assoluto

$$R = \frac{T^3 y^3}{y'^3 y'' \sin \omega}.$$

Dette R_1, T_1 le quantità analoghe relative al punto $(x, -y)$ si ha pure in valore assoluto

$$R_1 = \frac{T_1^3 y^3}{y'^3 y'' \sin \omega},$$

onde

$$\frac{R}{T^3} = \frac{R_1}{T_1^3} \quad \text{c. d. d.}$$

La maggior parte delle proposizioni concernenti le curve asse-simmetriche corrispondono ad altrettante relative alle curve centro-

¹⁾ Note de géométrie infinitésimale (Ann. di Matem., II, 1859).

simmetriche. Ma queste godono di una prerogativa che non ha nulla di analogo nelle curve della categoria che attualmente ci occupa; e cioè, mentre una curva non può essere simmetrica che rispetto ad un centro (perchè un segmento rettilineo non può possedere più di un centro), essa può essere simmetrica rispetto a parecchi assi; basti a provarlo l'esempio delle coniche, le quali godono della simmetria (generalmente obliqua) determinata da qualunque diametro e dalla corrispondente direzione coniugata. La ricerca della distribuzione dei diametri di una curva venne tentata con mediocre successo da Eulero ¹⁾, il quale ha almeno intravveduta la legge governatrice di quella distribuzione: tale legge venne più tardi stabilita dal Wantzel ²⁾ con piena generalità, con un'argomentazione che ora riprodurremo nelle sue linee fondamentali.

Una curva avente un solo diametro non avrà in generale altra specialità che quella risultante appunto dalla definizione di questo

diametro; lo stesso dicasi se la curva possiede una coppia di diametri coniugati. Ma se una curva possiede due diametri, non fra loro coniugati, ne avrà un terzo passante per l'intersezione dei due primi, quindi un quarto, e così via indefinitamente, a meno che non si ricada su uno dei diametri donde si sono prese le mosse. Per dimostrarlo supponiamo (fig. 109) che OA e OB siano i due diametri dati e che le rette a, b condotte pel centro indichino le direzioni delle corde rispettivamente coniugate; S_a e S_b siano le relative simmetrie. Vi sono infinite coniche K aventi OA e a , OB e b per due coppie di diametri coniugate; sono tutte curve concentriche ed omotetiche, ellissi ed iperboli secondochè le due coppie di diametri coniugati si separano o non; in particolare sono circoli se OA e OB sono assi di sim-

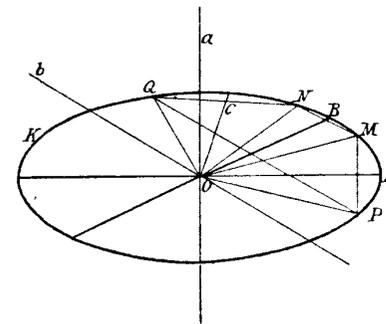


Fig. 109.

¹⁾ Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes (Mem. de l'Acad. de Berlin, T. I, 1745).

²⁾ Mémoire sur la théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques (G. di Liouville, T. XIV, 1849).

Inoltre: BRETON (DE CHAMPS), Propriétés générales des courbes algébriques planes, diamètres bissecteurs (Nouv. Ann. de math., T. XIV, 1885); M. CHASLES, Propriétés des diamètres des courbes géométriques (C. R., T. LXXII, 1871); H. LEBESGUE, Sur les diamètres rectilignes des courbes algébriques planes (Bull. Soc. math. France, T. XLIX, 1921).

metria; in ogni caso per un punto arbitrario del piano passa una delle dette K , determinata ed unica. Delle coniche K si consideri quella che passa per un punto M della curva Γ per ipotesi godente delle simmetrie S_a e S_b . Si conduca da M la corda MP di K parallela a a e le corde MN e PQ parallele a b ; uniamo O al punto medio C della corda NQ . Dico che questo diametro OC ha una posizione indipendente dal punto M scelto sopra Γ . Infatti dalla costruzione fatta risulta:

Settore $QOB =$ Settore POB ; Settore $NOB =$ Settore MOB

onde

Settore $NOC =$ Settore MOA

e

Settore $BOC =$ Settore BOA .

Dunque OC è quel diametro di K che forma con OB un settore equivalente a quello determinato dai diametri OA e OB . Ma, per l'omotetia e la concentricità delle coniche K , esso è anche indipendente dal punto M pel quale si è fatta passare la conica considerata; onde esso dipende esclusivamente dalle coppie di diametri OA, a e OB, b . Osserviamo ora che, M essendo un punto di Γ , a questa curva appartengono anche i punti P e N che a M corrispondono in S_a e S_b , nonchè Q che a P corrisponde in S_b ; inoltre N e Q si corrispondono nella simmetria S_c determinata dal diametro OC e dalla direzione c ad esso coniugata; dunque Γ corrisponde a sè stessa anche rispetto a S_c . Ragionando ora sulla coppia OB, OC come fecesi sulla OA, OB si otterrà una nuova simmetria S_d , che però può coincidere con una delle precedenti. Così continuando si vede: *Tutti i diametri di una curva che passano per un punto, appartengono ad una conica della quale essi sono coniugati alle stesse direzioni di corde, e determinano ciascuno col consecutivo e col corrispondente arco della conica, settori fra loro equivalenti.* In particolare: *Tutti gli assi di una curva che passano per un punto formano ciascuno col seguente, angoli fra loro eguali.* — Dal ragionamento fatto anteriormente risulta che, se la curva Γ possiede infiniti diametri, concorrenti in un punto, essa ha comuni con la conica K infiniti punti, onde è necessariamente trascendente; le curve algebriche hanno, dunque, al più un numero finito di diametri concorrenti in un punto; nel caso che il loro ordine sia dispari, il detto numero non può superare l'ordine della curva¹⁾, dal momento che (v. sopra) ogni simmetria di una curva rispetto ad un asse è annessa ad un punto all'infinito della curva stessa. In particolare: *gli assi di una curva algebrica passanti pel medesimo punto formano una rosa di venti.*

¹⁾ WARING, *Miscellanea analytica* (Cantabridgiae, 1762), p. 68.

Nel ragionamento fatto per dimostrare il primo dei teoremi precedenti, si sono escluse due ipotesi: che a e b coincidessero, e che i due diametri fossero paralleli: è necessario ora vedere che cosa accada in tali casi speciali.

a) Nel primo caso (fig. 110) si conduca una retta AB parallela alla direzione comune delle rette a, b . Preso poi ad arbitrio un punto M di Γ se ne trovino corrispondenti P e N in S_a e S_b , quindi il corrispondente Q di P in S_b ; è chiara che i punti N, P, Q si trovano sulla parallela condotta da M a AB e che, preso su questa retta il segmento $AC = AB$, i punti N e Q si corrispondono nella simmetria S_c avente per asse OC e per direzione coniugata AB ; perciò la curva Γ gode anche di questa terza simmetria. Proseguendo in questo modo si vede che se una curva ha due diametri concorrenti coniugati ad una stessa direzione di corde, ne avrà infiniti altri passanti pel medesimo punto ed intercettanti su una retta avente quella direzione dei segmenti fra loro eguali.

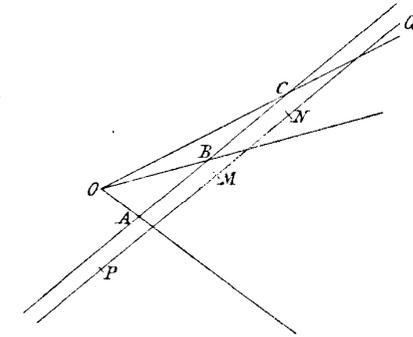


Fig. 110.

b) Nel secondo caso, se AA', BB' sono due diametri paralleli della curva Γ coniugati risp. alle direzioni delle rette a, b , si costruisca una parabola K in cui ai diametri AA', BB' siano conjugate le corde parallele a a, b ; applicando il ragionamento precedentemente, con le debite modificazioni, si conclude che: *se una curva ha due diametri paralleli, essa ne avrà infiniti fra loro equidistanti appartenenti alla stessa parabola, nella quale essi sono coniugati alle medesime corde.*

170. Le curve Γ contemplate in queste due ipotesi sono tutte trascendenti; onde delle stesse ipotesi non tratteremo ulteriormente. E ritorneremo al caso generale per mostrare come si determinino analiticamente gli altri diametri di una curva Γ dotata di due simmetrie conosciute. Prenderemo a tale scopo un sistema di coordinate cartesiane aventi OA e a per assi; supporremo che a sia l'angolo da essi formato e che

$$y = mx, y = nx$$

siano le equazioni di OB e b . Se m e n hanno segni contrari, le co-

niche K sono tutte ellissi; sia

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'equazione di una di esse. Essendo $O B$ e b due diametri coniugati della (5) sussisterà la relazione

$$(6) \quad m n + \frac{b^2}{a^2} = 0.$$

Passando a coordinate polari ϱ, φ aventi O per polo e $O A$ per asse polare dovremo porre

$$x = \varrho \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \alpha}, \quad y = \varrho \frac{\text{sen } (\alpha - \varphi)}{\text{sen } \alpha};$$

in conseguenza la (5) diverrà

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2 \text{sen}^2 \alpha}{a^2 \text{sen}^2 \varphi + b^2 \text{sen}^2 (\alpha - \varphi)};$$

perciò la superficie Σ del settore compreso fra il semidiametro $O A$ ed il semidiametro facente con $O A$ l'angolo φ sarà dato da:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{2} \int_0^\varphi \varrho^2 d\varphi = \frac{a^2 b^2 \text{sen}^2 \alpha}{2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{a^2 \text{sen}^2 \varphi + b^2 \text{sen}^2 (\alpha - \varphi)} = \\ &= \frac{a^2 b^2 \text{sen}^2 \alpha}{2} \int_0^\varphi \frac{d \text{tg } \varphi}{b^2 \text{sen}^2 \alpha - 2 b^2 \text{sen } \alpha \cos \alpha \text{tg } \varphi + (a^2 + b^2 \cos^2 \alpha) \text{tg}^2 \varphi}; \end{aligned}$$

onde, effettuando la integrazione, si conclude

$$(7) \quad \Sigma = \frac{ab \text{sen } \alpha}{2} \omega,$$

avendo posto

$$\omega = \text{arc tg } \frac{(a^2 + b^2 \cos^2 \alpha) \text{tg } \varphi - b^2 \text{sen } \alpha \cos \alpha}{ab \text{sen } \alpha},$$

ossia, per la (6),

$$(8) \quad \text{tg } \omega = \frac{(1 - mn \cos^2 \alpha) \text{tg } \varphi + m n \text{sen } \alpha \cos \alpha}{\sqrt{-mn} \text{sen } \alpha}$$

Consideriamo in particolare come secondo semidiametro del set-

tore considerato il semidiametro $O B$. In tal caso

$$m = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } (\alpha - \varphi)} \quad \text{ossia} \quad \text{tg } \varphi = \frac{m \text{sen } \alpha}{1 + m \cos \alpha};$$

in conseguenza la (8) diviene, dopo qualche riduzione,

$$(9) \quad \text{tg } \omega = \sqrt{-\frac{m}{u}} \frac{1 + n \cos \alpha}{1 + m \cos \alpha}$$

Se, contrariamente alle ipotesi dianzi fatte, m e n hanno lo stesso segno, le coniche K sono tutte iperboli; supposto che

$$(5') \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sia l'equazione di una fra esse, si avrà

$$(6') \quad m n = \frac{b^2}{a^2};$$

sussisterà ancora la (7) ma la quantità ω sarà determinata, non più dalla (9), ma dall'equazione seguente:

$$(9') \quad \text{tgh } \omega = \sqrt{\frac{m}{n}} \frac{1 + n \cos \alpha}{1 + m \cos \alpha}$$

Riassumendo diremo: l'area Σ del settore di conica K limitato dai due semidiametri dati $O A, O B$ è dato dalla (7), ω essendo determinato dalla (9) o dalla (9') secondo che la conica è un'ellisse od un'iperbola. Nel caso speciale in cui $O A$ sia un asse, le relazioni (7), (9), (9') divengono (essendo $\alpha = \pi/2$)

$$\Sigma = \frac{ab}{2} \omega, \quad \text{tg}^2 = -\frac{m}{n}, \quad \text{tgh}^2 \omega = \frac{m}{n},$$

che vennero stabilite dal Wautzell, il quale tacitamente ammise che il primo diametro di partenza fosse un asse.

Si consideri ora nella curva Γ un terzo diametro $O C$ ed il suo coniugato; se $y = m' x, y = n' x$ ne sono le equazioni si avrà

$$(10) \quad m' n' = m n;$$

l'area del settore $B O C$ sarà eguale a quella del diametro $A O B$, onde quella del settore $A O C$ sarà doppia di quella del settore

$A O B$, varrà quindi $\frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{2} \cdot 2 \omega$ e si avrà, secondochè si è nel caso ellittico o nel caso iperbolico

$$(11) \quad \operatorname{tg} 2 \omega = \sqrt{\frac{m'}{n'} \frac{1+n' \cos \alpha}{1+m' \cos \alpha}}$$

$$(11') \quad \operatorname{tgh} 2 \omega = \sqrt{\frac{m'}{n'} \frac{1+n' \cos \alpha}{1+m' \cos \alpha}};$$

combinando la (10) con la (11) o la (11') si otterranno m' e n' , cioè si determinerà la terza simmetria posseduta da Γ .

Una quarta si otterrà cercando un semidiametro $O D$ tale che il settore $A O D$ sia triplo di $A O B$; e così via. È chiaro che affinché si finisca col ricadere nel diametro $O A$ donde si parti si deve essere nel caso ellittico e di più l'angolo ω determinato dalla (9) deve essere una parte aliquota della intera circonferenza.

Nella supposizione che le due simmetrie di partenza sono ortogonali, si ha $\alpha = \pi/2$, $mn = -1$ e la (9) dà $\operatorname{tg} \omega = m$, come doveva accadere. Se inoltre $\omega = \pi/2$ la curva Γ ha per diametri le rette r condotte per l'origine a formare con $O A$ gli angoli

$$0, \frac{\pi}{r}, \frac{2\pi}{r}, \dots, \frac{(r-1)\pi}{r}.$$

Supposto ¹⁾ che Γ sia una curva algebrica ed abbia per equazione polare

$$f(\rho, \cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi) = 0,$$

f dovrà essere tale che non muta cambiando il segno di φ ; onde in f non entreranno che potenze pari di $\operatorname{sen} \varphi$, le quali si potranno fare scomparire mediante l'identità $\operatorname{sen}^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$. Fatto ciò la equazione precedente assumerà la forma

$$F(\rho, \cos \varphi) = 0.$$

Essendo poi Γ simmetrica alla retta $y/x = \operatorname{tg} k\pi/n$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) l'equazione ora trovata dovrà essere identica a quest'altra

$$F(\rho, \cos(2k\pi/n - \varphi)) = 0,$$

¹⁾ EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, T. II (Lausannae, 1748), Cap. XV.

il che esige sia della forma

$$F(\rho, \cos n \varphi) = 0.$$

Supponendo qui che F sia una funzione di ρ e $\cos n\varphi$ algebrica razionale e intera, o riducibile a tale forma, si ottiene così la rappresentazione analitica di curve algebriche n volte assi-simmetriche ¹⁾.

171. Un esempio di curve con un numero determinato di assi di simmetria è offerto dalle rodonee (Cap. VIII del presente Libro).

Un altro è dato dalle curve rappresentabili in coordinate polari con un'equazione della forma

$$(12) \quad \rho = \frac{p}{1 + e \cos n \omega},$$

ove p è un dato segmento, e un numero reale e n un numero intero; per $n = 0$ si ha un cerchio e per $n = 1$ una conica, onde tali curve si possono aggiungere alle generalizzazioni delle coniche studiate nei Cap. II-VI del presente Libro. Però esse non furono scoperte per tale via, ma per le applicazioni che ricevono nella cinematica, ove, dietro proposta di C. P. Lefèbre, furono chiamate dal Labouleye *curve a n centri* ²⁾; noi le diremo *poligasteroidi*. Se si pone

$$\rho_1 = a(1 + e \cos n \omega)$$

si ha l'equazione della conoide di una rodonea; e combinando la con la (12) si ottiene

$$\rho \rho_1 = ae:$$

dunque una curva *poligasteroide* è l'inversa di una conoide di rodonea.

La considerazione dell'equazione (12) conduce a notevoli proprietà delle curve in questione. Osserviamo, infatti, che, scelto ω in modo che sia

$$(13) \quad 1 + e \cos n \omega = 0$$

risulta $\rho = \infty$; ora quest'equazione in ω ha radici reali soltanto

¹⁾ Ulteriori sviluppi sopra siffatte curve si troveranno nelle memorie di E. CIANI, *Le linee diametrali delle curve algebriche piane, in particolare i loro assi di simmetria* (Pisa, Annali, 1889) e di R. D. CARMICHAEL, *On the classification of plane algebraic curves possessive four fold symmetry with respect to point* (Ann. of Math., II Ser., T. IX, 1908).

²⁾ *Traité de cinématique* (Paris 1849); togliamo questa indicazione, come la definizione (12) dalle *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar-le-Duc, 1897), p. 65-66.

quando $|e| \geq 1$; perciò le curve rappresentate dall'equazione (12) hanno punti all'infinito soltanto quando $|e| \geq 1$; in caso diverso sono tutte comprese nella corona circolare col centro nel polo e di raggio p : $|1 \pm e|$. Nel primo caso poniamo $-1/e = \cos \alpha$; la (12) diverrà

$$(12') \quad \rho = \frac{p \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos n \omega}$$

e la (13)

$$\cos n \omega - \cos \alpha = 0$$

donde

$$\omega = \pm \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Indichiamo con β uno qualunque di questi valori, cioè consideriamo uno qualunque dei punti all'infinito della curva e chiamiamo d la distanza del polo del corrispondente asintoto; avremo ¹⁾

$$\begin{aligned} d &= \lim \rho (\omega - \beta) = \lim \frac{p \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos n \omega} (\omega - \beta) \\ &= p \cos \alpha \cdot \lim \frac{\omega - \beta}{\cos n \beta - \cos n \omega} = \frac{p \cos \alpha}{u} \frac{1}{\sin n \beta} = \\ &= \frac{\pm p}{n \operatorname{tg} \alpha} = \pm \frac{p \sqrt{e^2 - 1}}{n}; \end{aligned}$$

siccome quest'espressione è indipendente da k così si conclude: Quando una curva poligasteroide ha rami infiniti, i suoi asintoti toccano uno stesso cerchio concentrico alla curva.

Ricordiamo ora ²⁾ che, posto $1/\rho = \sigma$, l'espressione del raggio di curvatura R in coordinate polari è espresso come segue:

$$R = \frac{\{\sigma^2 + (d\sigma/d\omega)^2\}^{3/2}}{\sigma^2 (\sigma + d^2\sigma/d\omega^2)}$$

onde i flessi si ottengono dall'equazione

$$\sigma + \frac{d^2\sigma}{d\omega^2} = 0;$$

applicando questa formola alla curva (12) si ottiene

$$1 + e(1 - n^2) \cos n \omega = 0$$

¹⁾ HOÜEL, *Cours de calcul infinitésimal*, T. II (Paris 1878), p. 22.

²⁾ SERRET, *Calcul différentiel* (II éd., T. I, Paris 1879), p. 305.

che, combinata alla (12), dà

$$\rho = \frac{n^2 - 1}{n^2} p$$

e questa prova che tutti i punti in cui la curva ¹⁾ è tagliata dalla circonferenza ad essa concentrica e di raggio $p(n^2 - 1)/n^2$ sono flessi di essa.

L'equazione cartesiana della curva si ottiene scrivendo la (12) come segue

$$\cos n \omega = \frac{p - \rho}{\rho e}$$

e sostituendo a $\cos n \omega$ la sua espressione in funzione di $\cos \omega$; si trova così

per n pari:

$$\{e^n \left\{ x - \left[\frac{n}{2} \right] x^{n-2} y^2 + \dots \right\} + (x^2 + y^2)^{n/2}\}^2 - p^2 (x^2 + y^2)^{n-1} = 0$$

per n dispari:

$$\{e^n \left\{ x - \left[\frac{u}{2} \right] x^{n-2} y^2 + \dots \right\} - p (x^2 + y^2)^{n-1/2}\}^2 - (x^2 y^2)^n = 0.$$

Ciò prova che: Una curva a n centri è dell'ordine $2n$; il suo centro è multiplo secondo $2(n-1)$ e le corrispondenti tangenti cadono nelle rette che lo congiungono ai punti ciclici del piano. Quando n è pari essa ha all'infinito n punti doppi, mentre se n è dispari si hanno $2n$ punti semplici.

In questioni di geometria descrittiva s'incontrano anche curve di equazione (12), n essendo una frazione; supposta questa ridotta ai suoi minimi termini la indicheremo con a/b e cercheremo l'ordine della curva corrispondente. Poniamo, a tale scopo, $\omega/b = \theta$ e determiniamo il numero dei punti della curva che cadono su una retta arbitraria $Ax + By + C = 0$; si vede agevolmente che corrispondono alle radici dell'equazione

$$(A \cos b \theta + B \sin b \theta) + C(1 + e \cos a \theta) = 0;$$

posto poi

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t$$

¹⁾ TH. OLIVIER, *Journ. de l'Éc. pol.*, XXII Cah., 1833, p. 122; E. CATALAN, *Nouv. Ann. de math.*, T. XV, 1856, p. 107 e *Traité de géom. descript.*, T. II (Paris 1857), p. 58.

si trova

$$\cos b \theta = \frac{F_{2b}}{(1+t^2)^b}, \quad \text{sen } b \theta = \frac{F_{2b-1}}{(1+t^2)^b}, \quad \cos a \theta = \frac{F_{2a}}{(1+t^2)^a}$$

ove le F sono polinomi in t del grado indicato dell'indice relativo; l'equazione precedente diviene pertanto

$$p \frac{A F_{2b} + B F_{2b-1}}{(1+t^2)^b} + C \frac{(1+t^2)^a + F_{2a}}{(1+t^2)^a} = 0;$$

ora, secondochè $b \geq a$, questa si scrive nei due seguenti modi:

$$p \{A F_{2b} + B F_{2b-1}\} + C (1+t^2)^{b-a} \{(1+t^2)^a + F_{2a}\} = 0$$

$$p \{A F_{2b} + B F_{2b-1}\} (1+t^2)^{a-b} + C \{(1+t^2)^a + F_{2a}\} = 0;$$

di queste equazioni la prima è del grado $2b$ e la seconda del grado $2a$; la curva considerata è dunque di un ordine dato dal maggiore dei numeri $2a$, $2b$.

Altro esempio di curve dotate di parecchie simmetrie è offerto dal luogo dei punti egualmente rischiarati da n lumi eguali situati nei vertici di un poligono regolare di n lati; è evidente che un tal luogo è simmetrico rispetto a ciascun diametro del dato cerchio che passi pel centro di un lato del dato poligono o per un vertice del medesimo. Supposto che la intensità dell'illuminazione sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto illuminato dalla fonte luminosa e che le coordinate dei vertici del dato poligono regolare siano

$$x = R \cos \frac{2k\pi}{n}, \quad y = R \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (n = 0, 1, \dots, n-1)$$

ove R è il raggio del cerchio circoscritto al poligono considerato, l'equazione del luogo è evidentemente

$$\sum_{h=0}^{k-1} \frac{1}{(x - R \cos 2k\pi/n)^2 + (y - R \sin 2k\pi/n)^2} = \frac{1}{a^2},$$

a essendo costante.

Il luogo stesso può chiamarsi *curva isofana* ¹⁾.

¹⁾ Nel caso semplicissimo di $n=2$ le curve isofone s'incontrano nel *Manuel des candidats à l'École polytechnique* par E. CATALAN (Paris, 1857), T. I, p. 330.

CAPITOLO XIV

Curve autopolari - Curve anallagmatiche - Curve di direzione.

172. La ricerca delle curve a cui è dedicato il Capitolo precedente fa parte del vasto e multiforme problema che consiste nella determinazione delle linee corrispondenti a sè stesse in un'assegnata trasformazione geometrica. Di tale questione è altro caso particolare l'investigazione delle *curve auto-polari*, vale a dire di quelle curve che si mutano in sè medesime quando vengano assoggettate ad una trasformazione polare. Sia

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

l'equazione omogenea della conica Γ direttrice di una polarità; vi sono ∞^2 coniche Σ polari di sè stesse rispetto ad essa; è facile vedere che la loro equazione generale è

$$(2) \quad 2(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0,$$

ove le ξ sono parametri arbitrari. Risolto in tal modo il problema della determinazione delle curve di secondo ordine auto-polari rispetto a Γ , il problema analogo per curve d'ordine qualunque si può sciogliere come segue ¹⁾:

Supponiamo che nella (2) le ξ siano funzioni arbitrarie di un parametro; la (2) rappresenterà allora ∞' coniche Σ ; il loro involuppo consta della curva Γ e di una curva K autopolare rispetto a Γ stessa. Sia infatti A il punto di contatto di Γ con una delle Σ e b la comune tangente in A alle due curve. Nella data polarità a Σ corrisponde per ipotesi sè stessa, a K una curva K' tangente a Σ nel polo B di b , onde K' è al pari di K l'involuppo delle conide-

¹⁾ P. APPELL, *Courbes autopolaires* (Nouv. Ann. de Math., 3^a Serie, T. XIII, 1894).

rate coniche Σ ; onde K' coincide con K a meno eventualmente di certe parti parassite, rappresentate dalla conica Γ contata una o più volte. Viceversa qualunque curva K autopolare rispetto a Γ può generarsi in questo modo. Sia infatti A un punto di K e b la corrispondente tangente; per ipotesi la polare a di A tocca K nel punto B che è polo di b ; perciò si può trovare una conica Σ autopolare rispetto a Γ la quale tocchi le rette a, b risp. in A, B ; essa è quindi bitangente anche a K ; questa è dunque l'inviluppo di infinite coniche autopolari, c. d. d. La ricerca delle curve autopolari è così ridotta a un problema concernente l'inviluppo di una serie di ∞' coniche¹⁾.

La questione se esistano curve autopolari rispetto ad un numero finito di coniche non crediamo sia ancora stata trattata. Invece il Fouret ha dimostrato²⁾ l'esistenza di curve che sono le loro autopolari rispetto a ∞' coniche; tali speciali curve sono le parabole interscendenti che incidentalmente incontrammo a p. 406 e che studieremo *ex-professo* nel veniente Libro (v. Cap. XIX).

173. Nella storia delle trasformazioni geometriche alla teoria delle trasformazioni proiettive (collineari o reciproche) segue in ordine di tempo lo studio della trasformazione per raggi vettori reciproci o inversione; quindi alle curve trasformate in sé stesse da collineazioni o reciprocità, di cui ci occupammo nei numeri precedenti, segue naturalmente la considerazione delle curve trasformate in sé stesse da una inversione. Sono quelle che — seguendo la denominazione proposta dal Montard³⁾ — si chiamano *curve anallagmatiche*, denominazione realmente un po' vaga essendo derivata dal privativo α combinato col verbo $\alpha\lambda\lambda\alpha\sigma\sigma\omega$ (cambiare), ma che fu generalmente accettata.

Il concetto di curva anallagmatica non è collegato all'algebricità della curva. Un esempio di curva anallagmatica trascendente è offerto dalla curva⁴⁾ (paralgebraica) avente per equazione polare

¹⁾ Altro procedimento per risolvere la stessa questione fu indicato da C. RABUT nella nota, *Equations et propriétés fondamentales des courbes autopolaires dans le plan et dans l'espace* (Comptes rendus, T. CXXXII, 1901).

²⁾ V. la nota *Sur les courbes planes ou surfaces qui sont leurs propres polaires réciproques par rapport à une infinité de coniques ou surfaces du second ordre* (Bull. de la Soc. Philom., Paris 1878).

³⁾ *Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (Nouv. Ann. de Math., 2^a Serie, T. III, 1864). — Per ciò segue v. specialmente J. DE LA GOURNERIE, *Mémoire sur les lignes spiriques* (G. di Liouville, 2^a Serie, T. IV, 1869). Altre considerazioni importanti sono svolte nel *Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères* del RIBACOUR (Nouv. Corr. Math., T. V, 1879, e T. VI, 1886) e nella nota di V. LIQUIÈRE, *Sur les aires des courbes anallagmatiques* (Bull. des Sc. mathém., 2^a Serie, T. V, 1881).

⁴⁾ L. ECKHART, *Ueber ebene Loxodromen* (Wiener Sitzungsberichte, T. 127, 1918).

$$\log \frac{\rho}{C} = \int \sqrt{\frac{1 - A \cos^2 \omega}{B - 1 + A \cos^2 \omega}} d\omega,$$

ove il segno del radicale è arbitrario; essa infatti si trasforma in sé stessa per un'inversione di centro O e potenza C . Nel caso $A = 1$ essa diviene un cerchio, mentre nel caso generale la sua equazione dipende da integrali ellittici di terza specie: posto, infatti,

$$1 - A \cos^2 \varphi = \frac{1}{t - e}, \quad e = \frac{AB - A + 2B + 1}{3B(A - 1)}$$

si trova

$$\log \frac{\rho}{C} = k \int \frac{dt}{(t - e) \sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$$

ove k^2, g_2 e g_3 sono funzioni di A, B .

Sia I una inversione, determinata dal cerchio Ω di centro O e raggio r , reale od immaginario puro¹⁾. Vi sono ∞^2 cerchi K ortogonali a Ω , ognuno è notoriamente anallagmatico; per un punto arbitrario M del piano passano ∞' cerchi K , tutti quelli cioè che passano anche pel punto $I(M)$ trasformato di M in forza della I^2 ; per due punti del piano (a distanza finita od infinitesima) passa invece un cerchio K determinato ed unico.

Sia ora Γ una curva reale anallagmatica rispetto all'inversione I, P un suo punto e t la relativa tangente. Vi è un cerchio K tangente alla retta t nel punto P . Siccome tanto Γ quanto K sono anallagmatiche, così al punto P corrisponde un altro punto $I(P)$ comune a K e Γ ; e siccome l'inversione è una trasformazione di contatto, così Γ e K si toccheranno anche in $I(P)$. K è dunque un cerchio bitangente a Γ ; variando P, K occupa ∞' posizioni ed il suo centro descriverà una determinata curva Δ ; secondo la proposta della Gournerie si chiama *curva deferente*; essa è algebrica se tale è Γ , ne indicheremo con n l'ordine. Potremo dunque dire: *Qualunque curva anallagmatica può considerarsi come l'inviluppo delle ∞' posizioni di un cerchio ortogonale ad un cerchio fisso ed il cui centro percorre una data curva*. Viceversa è chiaro che comunque si scelga la deferente ed il cerchio fisso, si ottiene sempre come inviluppo una curva anallagmatica. Non è escluso che il raggio di Ω sia nullo; allora tutti i cerchi K passano pel punto O . Nel caso generale se consideriamo due punti consecutivi D_1 e D_2 di Δ e i corrispondenti

¹⁾ Lo si chiama *cerchio d'inversione*.

²⁾ Indichiamo in genere con $I(\Phi)$ ciò che si ottiene effettuando l'inversione I sulla figura Φ .

circoli K_1 e K_2 , questi si taglieranno in due punti P, Q di Γ , simmetrici fra loro rispetto alla retta $D_1 D_2$ che è una tangente di Δ ; dunque: *il segmento che unisce due punti corrispondenti di un'anallagmatica è bisecato ortogonalmente da una tangente della deferente.*

I cerchi K formano un sistema semplicemente infinito a cui può applicarsi il metodo delle caratteristiche; chiameremo perciò μ il numero dei cerchi K che passano per un punto arbitrario del piano, ν il numero di essi che toccano una retta arbitraria, α il numero dei cerchi K degenerati come involuppi in una coppia di punti e β il numero di essi degenerati in una coppia di rette. Per determinare questi quattro numeri basta determinarne direttamente due e poi applicare le note formole di Chasles:

$$2\mu - \nu = \alpha, \quad 2\nu - \mu = \beta.$$

Ora μ si trova come segue: Tutti i cerchi K che passano per M passano anche per $I(M)$; i loro centri stanno quindi sulla retta r che biseca ad angolo retto il segmento limitato da questi; d'altronde i loro centri appartengono anche a Δ , onde altro non sono che le intersezioni di r e Δ ; ciò prova che $\mu = n$. Per trovare β osserviamo che, se F è uno dei $2n$ punti d'intersezione di Γ e Ω , le congiungenti Γ coi punti ciclici del piano costituiscono un circolo degenerare del sistema; se poi U è uno degli n punti all'infinito della curva Γ , il diametro di Ω perpendicolare alla retta OU e la retta all'infinito costituiscono un altro circolo degenerare del sistema; è facile vedere che altri non ve ne sono; onde $\beta = 3n$. Sostituendo i valori ora trovati di μ e β nelle equazioni precedenti si conclude essere $\nu = 2n$ (doppio dell'ordine della curva deferente) e $\alpha = 0$.

Dal ragionamento fatto per determinare β risultano incidentalmente queste due proprietà dell'anallagmatica Γ : *i $2n$ punti di intersezione di Γ con la periferia di Ω sono fuochi della curva; le rette condotte dal centro di Ω perpendicolarmente agli asintoti della curva deferente sono altrettante bitangenti dell'anallagmatica.* Γ in generale non passa pel centro O di Ω ; onde ogni retta r condotta per O la taglia in un certo numero di coppie di punti corrispondenti M e $I(M)$; la retta che biseca ad angolo retto la congiungente questi due punti essendo tangente a Δ , il numero di quelle coppie è eguale al numero delle tangenti di Δ che sono perpendicolari a r , cioè alla classe di Δ . Siamo quindi autorizzati a concludere che: *L'ordine di una curva anallagmatica è in generale eguale al doppio della classe della sua deferente.*

Consideriamo ancora un circolo A passante per O ; esso taglierà la curva Γ in un certo numero x di punti reali X ; effettuiamo su tutta la figura la inversione data; A si trasformerà in una retta l e Γ in sè stessa, onde i punti $I(X)$ saranno le intersezioni di l e Γ ; x è dunque eguale al doppio della classe della deferente. D'altronde

il numero complessivo delle intersezioni di Γ e A , essendo il doppio dell'ordine di Γ , è il quadruplo della classe della deferente; dunque: *una curva anallagmatica reale passa per ciascuno punto ciclico del piano un numero di volte eguale alla classe della sua deferente.* È facile vedere che le relative tangenti toccano questa curva, dimodochè *i fuochi della deferente sono fuochi straordinari dell'anallagmatica.* L'anallagmatica può anche avere dei punti multipli; essi corrispondono per coppie alle tangenti multiple della deferente. Questa se è generale di classe N , determina col cerchio Ω un'anallagmatica generale d'ordine $2N$; questa curva dipende quindi da $\frac{N(N+3)}{2} + 3$

costanti, onde si può far passare per altrettanti punti arbitrari del piano. L'equazione di una tale curva può sempre porsi sotto la forma $F(f_1, f_2, f_3) = 0$ ove F è una forma ternaria di grado N e $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ sono le equazioni di tre cerchi non appartenenti al medesimo fascio.

Nel caso sinora escluso che la deferente tocchi la retta all'infinito, l'ordine dell'anallagmatica si abbassa di un'unità, e la curva passa pel polo dell'inversione; se il contatto è di second'ordine l'abbassamento è di due unità, cosicchè si può dire che *l'ordine dell'anallagmatica è eguale al doppio della classe della deferente meno il numero dei contatti che questa ha con la retta all'infinito e meno il doppio delle sue tangenti d'inflessione coincidenti con la retta stessa.* Le altre proposizioni dimostrate subiscono in conseguenza delle modificazioni che il lettore determinerà facilmente anche senza il nostro aiuto.

Sia ancora Γ una curva anallagmatica; essa sarà l'involuppo di ∞' cerchi K ortogonali ad un cerchio Ω . Eseguiamo su questo sistema una inversione arbitraria \bar{J} ; nascerà un sistema di ∞' cerchi \bar{K} tutti ortogonali al cerchio $\bar{\Omega}$ trasformato di Ω , il cui involuppo sarà una curva anallagmatica $\bar{\Gamma}$; siccome $\bar{\Gamma}$ è ciò che si ottiene sottoponendo Γ all'inversione \bar{I} , così è chiaro che *trasformando per raggi vettori reciproci una curva anallagmatica si ottiene un'altra curva della stessa specie.*

Facciamo subito un'applicazione di questo teorema. Una simmetria ortogonale S rispetto ad un asse a può considerarsi come una forma limite dell'inversione; il cerchio fisso ha come periferia l'asse a e come centro il punto all'infinito nella direzione perpendicolare a a ; dunque: *trasformando per raggi vettori reciproci una curva ortogonalmente simmetrica rispetto ad un asse, si ottiene una curva anallagmatica.* Operando similmente sopra una curva fornita di parecchie simmetrie ortogonali rispetto ad assi concorrenti in un punto, si giunge a curve anallagmatiche rispetto a parecchi cerchi del medesimo fascio¹⁾.

¹⁾ Oltre a queste curve, anallagmatiche rispetto ad un numero finito

174. Lo studio delle curve anallagmatiche può anche farsi da un altro punto di vista che importa segnalare perchè conduce a nuovi risultati.

Ricordiamo infatti¹⁾ che se si assoggetta una curva reale Γ di ordine n ad una inversione I avente il polo O ed i punti ciclici del piano I, J per punti multipli risp. secondo ω, ι, ι , ad essa corrisponde una curva Γ' dell'ordine $n' = 2n - (\omega + 2\iota)$ in cui O, I e J sono multipli risp. secondo $\omega' = n - 2\iota, \iota' = n - (\omega + \iota)$; ora è chiaro che affinchè Γ sia anallagmatica rispetto alla I dev'essere $n' = n, \omega' = \omega, \iota' = \iota$; e queste condizioni sono tutte soddisfatte supponendo $n = \omega + 2\iota$. Attribuiamo a ω un valore arbitrario p , pari o dispari secondochè n è pari o dispari; nascerà così una curva Γ' dell'ordine n avente O per punto p -plo ed i punti ciclici per punti multipli secondo $(n-p)/2$. Essa sarà tagliata dalla retta all'infinito in altri p punti. Sia P uno di essi; ad esso corrisponde in I il punto della OP infinitamente vicino a O , punto che, se Γ è anallagmatica, deve appartenere a Γ stessa; ciò significa che se Γ è una curva anallagmatica le p rette OP altro non sono che le rette che la toccano nel punto O .

Se p. es. n è pari e si assume $p = 0$ si ottengono curve d'ordine n aventi i punti ciclici del piano per punti $n/2$ -pli; si chiamano *curve isotrope*²⁾, e non differiscono da quelle studiate nel numero precedente. Se, qualunque sia n , si assume $p = n - 2$ si ottiene³⁾ una curva d'ordine n avente un punto $(n - 2)$ -plo, passante pei punti ciclici del piano e per gli $(n - 2)$ punti all'infinito delle rette tangenti alla curva nel punto O . Una tal curva, riferita ad un sistema di coordinate ortogonali aventi per origine O , ha un'equazione della seguente forma:

$$(x^2 + y^2) f_{n-2}(x, y) + f_{n-1}(x, y) + R^2 f_{n-2}(x, y) = 0,$$

f_{n-1} e f_{n-2} essendo forme binarie in x, y dei gradi $n-1$ e $n-2$. Passando a coordinate polari questa diviene

$$\rho^2 f_{n-2}(\cos \omega, \sin \omega) + \rho f_{n-1}(\cos \omega, \sin \omega) + R^2 f_{n-2}(\cos \omega, \sin \omega) = 0.$$

di inversioni, ve ne è una, la circonferenza, evidentemente, anallagmatica rispetto a ∞^2 ; che non ne esistano di quelle anallagmatiche rispetto a ∞' ha dimostrato G. FOURET nella nota intitolata *Recherche d'une courbe plane possédant un lieu géométrique de pôles principales d'inversion* (Nouv. Ann. de Math., 3^a Serie, T. II, 1883).

¹⁾ V. p. es. G. DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris, 1873), p. 2.

²⁾ *Index du Répertoire des Sciences mathématiques* (Paris 1893), p. 51; il nome fu suggerito da M. D'OCAGNE (Journ. de Math. spéc., III Ser., T. I, p. 125); E. CIANI (v. mem. cit. p. 000) preferì quello di curve *iper-cicliche*.

³⁾ PIQUET, *Sur une nouvelle espèce de courbes et de surfaces anallagmaticques* (C. R., T. LXXXVII, 1878).

Detti quindi ρ_1 e ρ_2 i due valori di ρ corrispondenti ad uno stesso valore di ω , si ha $\rho_1 \rho_2 = R^2$, il che prova che la curva suddetta è trasformata in sè stessa dall'inversione di centro O e potenza R^2 ; nel caso $p = n - 2$ le condizioni dianzi trovate sono pertanto, non solo necessarie, ma anche sufficienti, affinchè la curva sia anallagmatica. Tutte le curve d'ordine n dotate delle prerogative dianzi descritte sono in conseguenza anallagmatiche; le corrispondenti differenti sono curve di classe $n-1$, aventi la retta all'infinito per tangenti $(n-2)$ -pla; ciascuna possiede in generale $2(n-3)(n-4)$ punti doppi e $3(n-3)$ cuspidi, ond'è dell'ordine $2(n-2)$.

175. Le curve isotrope, che incontrammo nel numero precedente, sono casi particolari delle *curve cicliche s-esime*, se con F. P. Ruffini¹⁾ si adopera questo nome per designare le curve d'ordine n le cui intersezioni con la retta all'infinito constano dei punti ciclici e di altri $n - 2s$ punti, curve che in coordinate cartesiane hanno una equazione i cui termini di ordine massimo sono il prodotto di $(x^2 + y^2)^s$ per una forma binaria di grado $n - 2s$ in x, y . Siffatte curve s'incontrano risolvendo la seguente questione seguente: «esistono delle curve, oltre il cerchio, godenti della proprietà che il prodotto delle distanze di un punto fisso arbitrario del loro piano ai punti d'intersezione della curva con una trasversale condotta per quel punto è costante per tutte quelle trasversali? »²⁾. Tale problema, che fu studiato da Eulero sin dal 1748³⁾ e che di recente il Mannheim ha riproposto⁴⁾, fu risolto sin dal 1869 da J. Petersen⁵⁾ e, più di vent'anni dopo, senza conoscere il lavoro relativo del matematico danese, da F. P. Ruffini nella succitata memoria. Il metodo seguito da quest'ultimo per giungere alle *curve potenziate* è abbastanza semplice ed elementare per trovare qui un posto.

Sia

$$(3) \quad f(x, y) = 0$$

l'equazione di una, Γ , di dette curve e sia $\sum_{r=0}^{r=n} a_r x^{n-r} y^r$ il complesso dei suoi termini di ordine massimo. Sia $O(x_0, y_0)$ il punto

¹⁾ *Delle curve piane algebriche che hanno potenze in rispetto a ogni punto del loro piano, ovvero in rispetto ad alcuni dei loro propri punti*. (Bologna, Mem., 4^a Serie, T. X, 1890); v. anche la nota dello stesso autore *Della lemniscata* (Rend. Acc. Bologna, 1907).

²⁾ Estendendo un nome in uso, si può chiamare *potenza* del punto fisso rispetto a quella curva quel prodotto costante, e *curve potenziate* le curve aventi la detta proprietà.

³⁾ *Introductio in analysin infinitorum*, II Bd., p. 220.

⁴⁾ *Intermédiaire*, T. III, 1896, p. 274.

⁵⁾ V. l'articolo *On et punkts potens med hensyn til en curve* (Tidsskrift, 2^a Serie, T. V, 1869).

fisso da cui si conducono le trasversali, il quale non appartenga alla curva data; sostituendo nella (3)

$$x = x_0 + \rho \cos \omega, \quad y = y_0 + \rho \sin \omega,$$

otterremo un'equazione di grado n in ρ le cui radici siano $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$; è chiaro che affinché Γ abbia potenza rispetto a O bisogna e basta che il prodotto

$$\pi = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n$$

abbia un valore indipendente da ω . Ora se si pone per abbreviare

$$\cos \omega = \alpha, \quad \sin \omega = \beta$$

si ha

$$f(x, y) = f(x_0 + \rho \cos \omega, y_0 + \rho \sin \omega) = f(x_0 + \rho \alpha, y_0 + \rho \beta)$$

onde svolgendo con la formola di Taylor e adottando notazioni generalmente usate, la (3) diviene

$$(4) \quad f(x_0, y_0) + \frac{\rho}{1} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta \right]_0 + \\ + \frac{\rho^2}{2!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta \right]_0^{(2)} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta \right]_0^{(n)} = 0$$

Se ne trae

$$\pi = (-1)^n \frac{f(x_0, y_0)}{\frac{1}{n!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta \right]_0^{(n)}}$$

Il numeratore di questa frazione è indipendente da ω ; onde perchè altrettanto accada di tutta la funzione si dovrà avere

$$\frac{d}{d\omega} \cdot \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta \right]_0^{(n)} = 0$$

ossia

$$\frac{d}{d\omega} \sum_{r=0}^{n-u} a_r \alpha^{n-r} \beta^r = 0$$

o finalmente

$$\sum \{ (n-r+1) a_{r-1} - (r+1) a_{r+1} \} \alpha^{n-r} \beta^r = 0.$$

Affinchè questa relazione valga per tutti i valori di α e β devono

sussistere le $n+1$ relazioni seguenti:

$$(5) \quad (n-r+1) a_{r-1} = (r+1) a_{r+1} \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

ove è da avvertire che $a_{-1} = a_{n+1} = 0$. Convieni ora distinguere due casi: I. Se $n = 2p$, facendo nella (4) successivamente $r = 0, 2, \dots, 2p-2$ si trova $a_1 = a_3 = \dots = a_{2p-1} = 0$; facendo invece $r = 1, 3, \dots, 2p-1$ si trova

$$p a_0 = 1 \cdot a_2, \quad (p-1) a_2 = 2 \cdot a_4, \quad \dots, \quad (p-k) a_{2k} = \\ = (k+1) a_{2k+2}, \quad \dots, \quad 1 \cdot a_{2p-2} = p a_{2p}$$

onde in generale

$$a_{2k+2} = \binom{p}{k+1} a_0;$$

si conclude pertanto

$$\frac{1}{n!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta \right]_0^{(n)} = \sum_{r=0}^{n-u} a_r \alpha^{n-r} \beta^r = a_0 (\alpha^2 + \beta^2)^u = a_0$$

onde

$$\pi = (-1)^n \frac{f(x_0, y_0)}{a_0};$$

quantità realmente indipendente da ω . Ora i valori dianzi trovati dei coefficienti a_1, a_2, \dots fanno vedere che i termini di grado supremo nei coefficienti della curva $f=0$, a meno del fattore a_0 , formano la potenza $(x^2 + y^2)^p$, onde f ha la forma $(x^2 + y^2)^p + F(x, y) = 0$, F essendo una funzione di grado inferiore a $2p$. Siamo dunque in grado di concludere che le curve d'ordine pari $2p$ che hanno potenza rispetto ad ogni punto del loro piano sono curve cicliche p^{me1} .

II. Se $n = 2p+1$ facendo nella (5) prima $r = 0, 2, 4, \dots$ poi $r = 2p+1, 2p-1, 2p-3, \dots$ si vedrà che tutti i coefficienti a sono nulli; dunque: non esistono curve d'ordine dispari aventi potenza rispetto a tutti i punti del loro piano.

Escludemmo sinora l'ipotesi che il punto fisso O appartenesse alla curva. In tal caso $f(x_0, y_0) = 0$, la (4) ha una radice $\rho = 0$ e come potenza di O si ha l'espressione

¹⁾ A una classe speciale di tali curve è consacrata la nota di A. EMCH, *On a certain generation of rational circular and isotropic curves* (Bull. Amer. math. Soc., T. XXV, 1919).

$$\pi = \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_{u-1} = (-1)^{u-1} \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta \right]_0^{(1)}}{\frac{1}{n!} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta \right]_0^{(n)}}$$

purchè essa risulti indipendente da ω ; ciò realmente accade se O è un punto doppio, chè allora $\pi = 0$; escluso questo caso triviale si vede, con una semplice discussione, che quel fatto si verifica soltanto quando Γ perde tutti i suoi termini di grado massimo. Ciò guida a concludere che *non esistono curve algebriche aventi potenza rispetto a tutti i propri punti*. Vi sono però delle curve che hanno potenza rispetto ad alcuni loro punti; così il Ruffini, con un'argomentazione del genere di quelle riferite, ha dimostrato che: *Ogni curva d'ordine $2p+1$ che sia ciclica p^{ma} ha potenza rispetto a ciascuno dei punti di contatto delle tangenti che possono condursi ad essa dall'unico punto reale che essa possiede sopra la retta all'infinito*. Si può anche cercare il luogo dei punti del piano di una curva potenziata che hanno rispetto alla stessa egual potenza; la linea risultante fu detta da H. Wieleitner *curva di egual potenza*¹⁾; ora tale considerazione permise di stabilire delle nuove relazioni fra curve distinte, giacchè si può dimostrare che le spiriche (n. 61) sono linee di egual potenza rispetto alle lemniscate di Booth (n. 65) e le ovali cartesiane (n. 78) rispetto a una lumaca di Pascal (n. 70).

176. Non vogliamo chiudere questo Capitolo dedicato principalmente, come il precedente, a curve provenienti dalla teoria di speciali trasformazioni geometriche, senza far cenno delle *curve di direzione* a cui E. Laguerre è pervenuto nel corso delle sue ricerche sulla « geometria di direzione » da lui inventata²⁾, e che si possono considerare tutte come anticaustiche di curve algebriche, i raggi incidenti essendo supposti paralleli³⁾. Se $\omega(x, y) = 0$ è la equazione di una curva algebrica di detta specie, i coseni di direzione della tangente in un suo punto saranno esprimibili mediante funzioni razionali delle coordinate del punto di contatto⁴⁾. Se s è l'arco

¹⁾ Ueber einige Zusammenhänge zwischen speziellen Quartiken (Wiener Sitzungsber., T. 116, 1907).

²⁾ Sur la géométrie de direction (Bull. de la Soc. math. de France, T. VIII, 1880), oppure Oeuvres de Laguerre, T. II, Paris 1905, p. 592). L'equazione tangenziale di queste curve è $\Phi_n(u, v) - (u^2 + v^2) \Phi_{n-2}(u, v) = 0$, ove Φ_{n-2} e Φ_n sono forme binarie dei gradi indicati dagli indici relativi.

³⁾ LAGUERRE, Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles (Nouv. Ann., 2^a Serie, T. II, 1883).

⁴⁾ A tale proprietà è dovuta l'importanza delle curve di direzione nelle ricerche sopra le *curve algebriche rettificabili*, cioè il cui arco è esprimibile mediante una funzione algebrica delle coordinate (G. HUMBERT, Sur les courbes algebriques plane: rectifiables, G. di Liouville, 4^a Serie, T. IV, 1888).

della curva, quei coseni sono dati risp. da

$$\frac{dx}{ds} = - \frac{\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\sqrt{\left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \right]^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = + \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x}}{\sqrt{\left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \right]^2}};$$

affinchè quindi $\omega(x, y) = 0$ sia una curva di direzione è necessario e sufficiente che le due quantità dx/ds , dy/ds siano funzioni razionali di x, y ¹⁾. Ora P. Appell²⁾ ha suggerito il seguente metodo per dedurre dall'equazione di una curva di direzione

$$(6) \quad F(X, Y) = 0$$

quelle di infinite altre. Chiamisi S l'arco della curva (6) e R una funzione razionale delle coordinate; per la fatta ipotesi che la (6) sia una curva di direzione potremo scrivere

$$(7) \quad dS = R(X, Y) dX.$$

Si consideri ancora una funzione razionale Ω di $z = x + iy$, soddisfacente alla condizione che siano nulli tutti i residui di $\Omega^2(z)$; allora $\int \Omega^2(z) dz$ sarà una funzione razionale di z , e potremo porre

$$Z = X + iY = \int \Omega^2(z) \cdot dz = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Le formole

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y)$$

determinano allora nel piano una corrispondenza fra i punti (x, y) e (X, Y) . Dico che essa trasforma la curva (6) in un'altra curva di direzione

$$(8) \quad f(x, y) = 0.$$

Essendo infatti $dX + i dY = \Omega^2(z) (dx + i dy)$, si ha pure $dX -$

¹⁾ E. KÖSTLIN ha indicato (Württemberg. Mitth., II Ser., T. IX, 1907) un metodo per dedurre una curva di direzione da una cubica razionale Γ avente un punto doppio O a distanza finita; detto, infatti, K un cerchio passante per O e tangente a Γ in un suo punto variabile P , esso incontra nuovamente questa curva in due punti variabili Q_1, Q_2 ; la loro congiungente invilupperà una curva di direzione, la cui classe è uno dei numeri 4, 6, 8 e il suo ordine risp. 5 o 3, 8 o 6, 11 o 9.

²⁾ Exercices sur les courbes de direction (Nouv. Ann. de Math., 3^a Serie, T. XV, 1896); conseguenze dei risultati ivi esposti leggersi nella nota di A. MYLLER, Sur les courbes autopolaires (Id., IV Ser., T. XIII, 1913).

— $i dY = \overline{\Omega(z)}^2 (dx - i dy)$ ove $\overline{\Omega(z)}$ è la quantità immaginaria coniugata di $\Omega(z)$. Moltiplicando membro queste relazioni, servendosi della (7) e chiamando s l'arco della curva (8) si conclude

$$ds = \frac{R(X, Y)}{\Omega(z) \cdot \overline{\Omega(z)}} dX.$$

Ma, siccome $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, $\overline{\Omega(x + iy)}$, $\Omega(x - iy)$ sono funzioni razionali di $x \cdot y$, così lo è anche il coefficiente di dX in quest'equazione; essendo inoltre

$$dX = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0,$$

anche dX/dx è funzione razionale di x, y ; la relazione precedente può quindi scriversi sotto la forma

$$ds = r(x, y) dx,$$

r essendo una nuova funzione razionale. È questa basta a provare che la (8) rappresenta una curva di direzione.

Applichiamo questo metodo ad un esempio. Detto k un intero suppongasi $\Omega(z) = \sqrt{2k+1} z^k$; verrà

$$\int \Omega(z)^2 dz = z^{2k+1} = \rho^{2k+1} \{ \cos(2k+1)\omega + i \sin(2k+1)\omega \}$$

sicchè la trasformazione da usarsi è:

$$X = \rho^{2k+1} \cos(2k+1)\omega, \quad Y = \rho^{2k+1} \sin(2k+1)\omega;$$

applicandola alla retta $X = a^{2k+1}$ — che è evidentemente una curva di direzione — si ottiene la curva rappresentata dall'equazione

$$\rho^{2k+1} \cos(2k+1)\omega = a^{2k+1},$$

altra curva di direzione: vedremo tra poco essere dessa una spirale sinusoidale (v. Cap. XVIII)¹⁾.

¹⁾ Ciò è stato già osservato per la prima volta da G. HUMBERT (*Sur le théorème d'Abel et quelques unes de ses applications*, G. di Liouville, 4^a Serie, T. III, 1887, p. 395), studiando le curve di direzione circolari, cioè non aventi comuni con la retta all'infinito che i punti ciclici.

CAPITOLO XV

Geometria dei polinomi.

177. La rappresentazione geometrica dei numeri complessi sui punti di un piano conduce a considerare e permette di studiare alcune curve algebriche che, grazie alla loro stretta connessione con la dottrina delle trasformazioni isogonali, meritano un posto accanto a quelle che investigammo nei due Capitoli precedenti; il legame che esse hanno con la considerazione di polinomi, ci consiglia considerarle come appartenenti ad uno speciale capitolo della scienza dell'estensione, che, seguendo l'esempio di F. Lucas, intitoliamo « geometria de' polinomi ».

Sia

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

un polinomio intero nella variabile $z = x + iy$ i cui coefficienti supporremo per generalità numeri complessi arbitrari. Separando la parte reale di $f(z)$ dalla parte puramente immaginaria potremo scrivere

$$f(z) = P(x, y) + i Q(x, y);$$

P e Q saranno polinomi in x, y del grado n a coefficienti reali; onde, interpretando x, y come coordinate cartesiane ortogonali, le equazioni

$$(1) \quad P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0$$

rappresenteranno due curve d'ordine n , le quali si taglieranno in n punti reali, cioè nei punti-radici della equazione $f(z) = 0$. L'introduzione nella scienza di siffatte curve risale alla fine del secolo XVIII, giacchè, appunto dallo studio delle loro proprietà, Gauss dedusse gli elementi della sua prima dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche¹⁾, e cinquant'anni dopo se

¹⁾ *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationally integræ unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (Inaug. Dissert., Helmstadii, 1799).

ne servi nella quarta delle sue dimostrazioni dello stesso teorema¹⁾. Ma l'indagine delle proprietà di quelle curve venne intrapresa ed in gran parte compiuta da W. Walton²⁾, più di cinquant'anni fa: a lui si deve il nome di *curve riziche* con cui esse sogliono designarsi. Più recentemente esse furono studiate da E. Kanser, che le chiamò *curve potenziali algebriche*³⁾ tenendo conto del fatto che soddisfanno le equazioni:

$$\Delta_2 P = 0 \quad , \quad \Delta_2 Q = 0.$$

Siano τ_P e τ_Q gli angoli fatti dalle tangenti alle curve (1) in un punto $M(x, y)$ ad esse comune; sarà

$$\operatorname{tg} \tau_P = -\frac{\partial P}{\partial x} : \frac{\partial P}{\partial y} \quad , \quad \operatorname{tg} \tau_Q = -\frac{\partial Q}{\partial x} : \frac{\partial Q}{\partial y} ;$$

e poichè è noto aversi

$$(2) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

si conclude essere

$$\operatorname{tg} \tau_P \cdot \operatorname{tg} \tau_Q + 1 = 0 ;$$

quest'equazione prova che: *le curve* $P = 0$, $Q = 0$ *si tagliano ortogonalmente in tutti i punti che esse hanno comuni.*

Differenziando le equazioni (2) si deducono agevolmente queste altre:

$$(3) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2r-2a} \cdot \partial y^{2a}} &= (-1)^a \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2r}} \quad , & \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r-2a} \cdot \partial y^{2a}} &= (-1)^a \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \\ \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2r-2a-1} \cdot \partial y^{2a+1}} &= (-1)^{a+1} \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \quad , & \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r-2a-1} \cdot \partial y^{2a+1}} &= (-1)^a \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2r}} \end{aligned} \right\}$$

¹⁾ *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* (Götting. Abhandl., T. IV, 1850).

²⁾ Veggansi i tre articoli *Note on the rhizic curves, On the spoke asymptotes of rhizic curves, e On the curvature of rhizic curves at multiples points* inseriti nel T. XI, 1871, del Quart. Journ. Sullo stesso tema si può consultare il lavoro di T. BOND SPRAGUE, *On the nature of the curves whose intersections give the imaginary roots of an algebraic equation* (Edinburgh Trans., T. XXX, Part II, 1882).

³⁾ *On the algebraic potential curves* (Bull. Amer. Math. Soc., II Ser., T. VII, 1901).

di cui tosto faremo un'applicazione. Supponiamo che $M(x, y)$ sia un punto $2r$ -plo della curva $P = 0$; gli angoli θ_P che le corrispondenti tangenti formano coll'asse delle x sono determinati da un'equazione che può rappresentarsi simbolicamente così

$$\left[\cos \theta_P \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} \theta_P \frac{\partial}{\partial y} \right]^{2r} P(x, y) = 0,$$

purchè s'intenda che, sviluppata la potenza di quel binomio, si surroggi in genere

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^p \left[\frac{\partial}{\partial y} \right]^q P(x, y) \text{ con } \frac{\partial^{p+q} P(x, y)}{\partial x^p \partial y^q}.$$

Perciò codesta equazione effettivamente equivale a quest'altra:

$$\sum_{\alpha=0}^{a=r} \binom{2r}{2\alpha} \cos^{2\alpha} \theta_P \cdot \operatorname{sen}^{2r-2\alpha} \theta_P \cdot \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2\alpha} \cdot \partial y^{2r-2\alpha}} + \sum_{\alpha=0}^{a=r-1} \binom{2r}{2\alpha+1} \cos^{2\alpha+1} \theta_P \operatorname{sen}^{2r-2\alpha-1} \theta_P \cdot \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2\alpha+1} \cdot \partial y^{2r-2\alpha-1}} = 0 ;$$

e questa, servendosi delle identità (3) e delle formole di moltiplicazione degli archi, si muta in quest'altra più semplice

$$(4) \quad \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2r}} \cos 2r \cdot \theta_P + \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \operatorname{sen} 2r \cdot \theta_P = 0 ;$$

detto quindi μ un valore dell'angolo $2r \theta_P$ soddisfacente a questa equazione, θ_P è passibile dei seguenti valori

$$\frac{\mu}{2r} \quad , \quad \frac{\mu+\pi}{2r} \quad , \quad \frac{\mu+2\pi}{2r} \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\mu+(2r-1)\pi}{2r}$$

fra loro incongrui (mod. π); emerge da ciò che *le tangenti alla curva* $P = 0$ *in un suo punto* $2r$ -plo *dividono lo spazio circostante a* P *in* $2r$ *parti eguali.* La stessa proprietà vale per un punto di molteplicità dispari e si dimostra similmente.

Se invece $M(x, y)$ è un punto $2r$ -plo della curva $Q(x, y) = 0$, ripetendo il calcolo precedente si trova, invece della (4), l'equazione

$$(5) \quad \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \cos 2r \theta_Q - \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \operatorname{sen} 2r \theta_Q = 0,$$

la quale — se μ ha il significato di prima — è soddisfatta dei se-

guenti valori di θ_0 :

$$\frac{\mu + \pi/2}{2r}, \frac{\mu + \pi/2 + \pi}{2r}, \frac{\mu + \pi/2 + 2\pi}{2r}, \dots, \frac{\mu + \pi/2 + (2r-1)\pi}{2r};$$

e ciò prova che le tangenti alla curva $Q(x, y) = 0$ nel punto r -plo $M(x, y) = 0$ si ottengono facendo ruotare dell'angolo $\pi/4r$ le tangenti analoghe della curva $P(x, y) = 0$. Un fatto simile accade per un punto di molteplicità $2r-1$; ma l'ampiezza della rotazione corrispondente è $\frac{\pi}{2(2r-1)}$.

La considerazione degli asintoti delle curve $P = 0$, $Q = 0$ conduce ad un teorema analogo ai precedenti. Per stabilirlo supporremo per semplicità i coefficienti a reali. Ricordiamo²⁾ poi che se l'equazione di una curva d'ordine n si scrive sotto la forma

$$f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y) + \dots + f_1(x, y) + f_0 = 0,$$

ove $f_k(x, y)$ è una forma binaria di grado k in x e y , gli asintoti di essa hanno per equazioni

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} X + \frac{\partial f_n}{\partial y} Y + f_{n-1} = 0$$

X e Y essendo coordinate correnti e x, y soddisfacendo l'equazione omogenea $f_n(x, y) = 0$ ³⁾. Per applicare questa regola al caso nostro poniamo

$$a_{n-r}(x \pm i y)^r = P_r + i Q_r$$

¹⁾ Prima del WALTON questi teoremi erano stati avvertiti da W. J. MACQUORN RANKINE nella nota *On curves fulfilling the equation $d^2\phi/dx^2 + d^2\phi/dy^2 = 0$* (Phil. Mag., 1868).

²⁾ GREGORY, *Of asymptotes to algebraic curves* (Cambridge Math. Journ., T. IV, 1845); F. CASORATI, *Nuova e migliore forma delle equazioni degli asintoti di una linea piana algebrica* (Rend. Ist. Lomb., 2^a Serie, T. XII, 1879; cfr. Rend. Circ. mat. Palermo, T. III, p. 49-52).

³⁾ Per verificare ciò si scriva l'equazione della curva sotto forma omogenea così: $\sum_0^u f_r(x, y) u^r = 0$; un asintoto altro non essendo che la tangente alla curva in un suo punto all'infinito, cioè in un punto tale che $u = 0$, $f_n = 0$, avrà per equazione

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} X + \frac{\partial f_n}{\partial y} Y + f_{n-1} = 0$$

con la condizione $f_n = 0$, come appunto si è detto nel testo.

ossia

$$\frac{P_r}{2a_{n-r}} = (x+iy)^r + (x-iy)^r, \frac{Q_r}{2ia_{n-r}} = (x+iy)^r - (x-iy)^r;$$

vedremo allora che l'equazione di uno qualunque degli asintoti della curva $P = 0$ sarà

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} X + \frac{\partial P_n}{\partial y} Y + P_{n-1} = 0,$$

con la condizione $P_n = 0$, o, più esplicitamente

$$n a_0 \{ (x+iy)^{n-1} + (x-iy)^{n-1} \} X + n i a_0 \{ (x+iy)^{n-1} - (x-iy)^{n-1} \} Y + a_1 \{ (x+iy)^{n-1} + (x-iy)^{n-1} \} = 0$$

con la condizione $(x+iy)^n + (x-iy)^n = 0$.

Posto $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$ queste due relazioni divengono :

$$x a_0 \cos(n-1)\omega \cdot X - n a_0 \sin(n-1)\omega \cdot Y + a_1 \cos(n-1)\omega = 0, \\ \cos n\omega = 0$$

o anche

$$n a_0 \sin \omega \cdot X - n a_0 \cos \omega \cdot Y + a_1 \sin \omega = 0, \quad \cos n\omega = 0.$$

Ma la seconda di queste relazioni dà

$$\omega = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1);$$

dunque le equazioni

$$n a_0 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \cdot Y = (n a_0 X + a_1) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

rappresentano gli n asintoti della curva $P = 0$. Esse mostrano che gli asintoti stessi concorrono nel punto $C \left[-\frac{a_1}{n a_0}, 0 \right]$ e formano coll'asse delle x gli angoli

$$\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2n};$$

onde due qualunque consecutivi fra essi formano l'angolo π/n .

Similmente si dimostra che gli asintoti della curva $Q = 0$ passano pure pel punto C e formano coll'asse delle x gli angoli

$$0, \frac{\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n};$$

essi dunque sono le bisettrici degli angoli formati da due consecutivi degli asintoti della curva $P = 0$. Questo dimostra che le curve riziche sono speciali equilateri di P. Serret (n. 148).

Le curve $P = 0$, $Q = 0$ ammettono ciascuna in un punto r -plo r centri di curvatura distribuiti sopra una retta; e se quel punto è multiplo per entrambe, le due rette analoghe così nascenti coincideranno. Lasciamo al lettore la dimostrazione di questi teoremi e passiamo ad un'altra classe di linee di cui le curve riziche possono considerarsi come casi speciali.

178. Siano $z = x + iy$, $Z = X + iY$ due variabili complesse legate dalla relazione

$$(6) \quad Z = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n;$$

rappresentandolo nel modo consueto in due piani π e Π nascerà una trasformazione isogonale. Nel piano Π consideriamo una retta qualunque

$$(7) \quad \frac{Y-b}{X-a} = \operatorname{tg} \gamma$$

e cerchiamone la curva corrispondente in π . A tale scopo indicheremo con $f(z)$ il secondo membro della (6), con $\bar{\zeta}$ le quantità conjugata di ζ e con c il numero complesso $a + bi$; siccome la (7) può scriversi

$$\gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y-b}{X-a} = \frac{1}{2i} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(X+iY) - (a+ib)}{(X-iY) - (a-ib)}$$

così, per la (6), avremo

$$\gamma = \frac{1}{2i} \log \frac{f(z) - c}{\overline{f(\bar{c}) - \bar{z}}}$$

Indichiamo ora con c_1, c_2, \dots, c_n le radici dell'equazione $f(z) = c$, cioè poniamo,

$$(8) \quad f(z) - c = (z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_n);$$

l'equazione precedente diverrà

$$\gamma = \frac{1}{2i} \log \prod_{k=1}^{k=n} \frac{z - c_k}{\bar{z} - \bar{c}_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2i} \log \frac{z - c_k}{\bar{z} - \bar{c}_k}$$

o finalmente

$$\gamma = \sum_{k=1}^{k=n} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y - b_k}{x - a_k}$$

Per interpretare questa equazione della curva trasformata osserviamo che $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y - b_k}{x - a_k}$ misura l'angolo φ_k formato con l'asse delle x dalla retta che unisce il punto $M(x, y)$ col punto fisso $P_k(a_k, b_k)$; l'equazione precedente equivale dunque a quest'altra

$$(9) \quad \gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

Perciò — chiamando con Laguerre *orientazione di un sistema di rette* la somma degli angoli che queste formano con una retta fissa ¹⁾ — siamo autorizzati a concludere che: *nella trasformazione isogonale determinata dall'equazione (6), alle rette del piano Π corrispondono nel piano π curve d'ordine n , ciascuna delle quali è il luogo dei punti da cui escono n rette passanti per altrettanti punti fissi e costituenti un sistema di orientazione costante.* Le curve così ottenute chiamansi, seguendo G. Holzmüller ²⁾, *iperboli irregolari di ordine n* ; nel caso speciale in cui siano nulle tutte le costanti p_1, p_2, \dots, p_n i punti fissi sono vertici di un poligono regolare e le curve corrispondenti si dicono *iperboli regolari d'ordine n* : la ragione di queste denominazioni sta in ciò che per $n = 2$ le dette curve divengono ordinarie iperboli di second'ordine, scalene od equilateri. Le curve ottenute godono di una bella proprietà, che si mette in evidenza notando che la retta rappresentata dall'equazione (7) non differisce dalla seguente:

$$(7') \quad \frac{Y - (b + d \operatorname{sen} \gamma)}{X - (a + d \operatorname{cos} \gamma)} = \operatorname{tg} \gamma,$$

d essendo una costante affatto arbitraria; sulla (7') si potrà ragionare come fecesi sulla (7) e giungere a conseguenze analoghe; il solo divario sta in ciò che l'equazione $f(z) = c$ verrà sostituita dalla $f(z) = c + d e^{i\gamma}$, epperò i punti fissi P_k avranno mutato. Si vede dunque che: *le iperboli regolari od irregolari d'ordine n sono suscet-*

¹⁾ Cfr. G. HUMBERT, *Sur l'orientation des systèmes de droites* (Nouv. Amer. de Math., III Ser., T. XII, 1893).

²⁾ *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig, 1882), p. 170 e 203.

tibili di ∞' definizioni analoghe a quella surriferita; in corrispondenza si hanno ∞' n-ple di punti fissi, aventi tutte il medesimo bari-centro; le orientazioni corrispondenti sono tutte fra loro eguali. Nel piano Π si considerino due rette qualunque; sia α il loro angolo; ad esse corrisponderanno due iperboli segantisi sotto l'angolo α in ogni punto ad esse comune; ciò prova che due iperboli di Holzmüller dello stesso ordine e relative agli stessi punti fissi si incontrano sotto lo stesso angolo in tutti i punti che hanno comuni.

Se ora nel piano Π si considera il circolo di centro (a, b) e raggio R , osservando esserne

$$(Z - c)(\bar{Z} - \bar{c}) = R^2$$

l'equazione, si vedrà che esso si muta nella curva

$$(f(z) - c)(\overline{f(z)} - \bar{c}) = R^2,$$

o, per la (8),

$$\prod_{k=1}^{k=n} (z - c_k)(\bar{z} - \bar{c}_k) = R^2;$$

ora $(z - c_k)(\bar{z} - \bar{c}_k)$ misura il quadrato della distanza d_k del punto $M(x, y)$ dal punto $P_k(a_k, b_k)$; onde questa equazione equivale all'altra:

$$(10) \quad d_1 d_2 \dots d_n = R.$$

Dunque: Nella trasformazione isogonale determinata dall'equazione (6) alle circonferenze del piano Π corrispondono curve d'ordine $2n$, ciascuna delle quali è il luogo dei punti le cui distanze da n punti fissi danno un prodotto costante. Per $n = 2$ queste curve sono ovali di Cassini o, in particolare, lemniscate di Bernoulli; in generale si chiamano, secondo G. Holzmüller lemniscate d'ordine superiore, regolari se $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$, irregolari nel caso generale¹⁾, e, secondo F. Lucas, curve equipotenziali²⁾; quelle regolari vennero anticamente chiamate da W. Roberts cassinoidi a n fuochi³⁾. È

¹⁾ Einführung citata, p. 172 e 204.

²⁾ V. la nota Détermination électrique des racines réelles et imaginaires de la dérivée d'un polynome quelconque (C. R., T. CVI, 1888), ove è indicato un metodo elettrico per tracciare quelle curve.

³⁾ Note sur la rectification de la cassinoïde à n foyers (G. di Liouville, T. XIII, 1848); ivi le curve sono rappresentate dall'equazione polare: $\rho^{2n} - 2a^n \rho^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n}$, la quale si presta assai bene alla discussione della curva; p. es. fa vedere che al variare di b si ottengono ∞' curve i cui flessi stanno sulla spirale sinusoidale (v. n. 186) rappresentata dall'equazione $\rho^n + (n-1)a^n \cos n\omega = 0$.

evidente che le lemniscate generali ora ottenute sono le traiettorie ortogonali delle iperboli antecedentemente definite.

Se invece di partire dalla (6) avessimo posta l'equazione seguente

$$Z = \frac{f(z)}{F(z)}$$

a base delle nostre considerazioni (ove f e F sono due polinomi in z fra loro pirimi e dei gradi m, n) si sarebbe giunti a due nuove classi di curve caratterizzate, invece che dalle (9), (10), dalle analoghe equazioni:

$$(\varphi_1' + \varphi_2' + \dots + \varphi_m') - (\varphi_1'' + \varphi_2'' + \dots + \varphi_n'') = \gamma, \quad \frac{d_1' d_2' \dots d_m'}{d_1'' d_2'' \dots d_n''} = R$$

a cui l'Holzmüller applicò pure i nomi di iperboli e lemniscate. Esse erano state anteriormente studiate dal Darboux¹⁾, il quale trovò in esse alcune notevoli proprietà; in addietro poi A. Genocchi²⁾ si era occupato del caso in cui i punti fissi sono vertici di due poligoni regolari concentrici e dello stesso numero di lati, applicando un metodo di trasformazione delle figure ideato nel 1842 da W. Roberts.

179. Alle curve studiate nel n. prec. si può giungere, e si giunse effettivamente, senza ricorrere alla teoria delle trasformazioni isogonali, ma prendendo come punto di partenza una delle proprietà di cui vedemmo godere le iperboli regolari od irregolari; poichè tal modo di vedere più geometrico ha condotto a nuovi risultati è dovere nostro il farne qui cenno.

Siano dati in un piano n punti fissi P_1, P_2, \dots, P_n ; esistono nel piano stesso infiniti punti M tali che le rette MP_1, MP_2, \dots, MP_n formino un sistema di data orientazione; il loro luogo è una curva d'ordine n che F. Lucas ha chiamato stelloide di grado n ³⁾; lo designeremo con S_n e ne chiameremo perni i punti fissi. Per $n = 1$ la stelloide si riduce ad una retta uscente dall'unico perno della curva; ma anche se $n > 1$ la stelloide passa pei suoi perni; infatti pel punto R_k noi possiamo sempre condurre una retta che costituisca con le rette $P_k P_1, \dots, P_k P_{k-1}, P_k P_{k+1}, \dots, P_k P_n$ un sistema di n rette aventi la data orientazione. Per trovare l'equazione di S_n

¹⁾ Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques (Paris 1873), p. 66-75.

²⁾ Intorno alla rettificazione e alle proprietà delle caustiche secondarie (Ann. di Mat., T. VI, 1864).

³⁾ Géométrie des polynomes (Journ. de l'Ec. pol., XLVI cah., 1879). Le principali proprietà delle stelloidi trovansi enunciate nella nota di G. FOURET, Sur quelques propriétés géométriques des stelloïdes (C. R., T. CVI, 1888).

indichiamo con a_k, b_k le coordinate di P_k e con x, y quelle di M . Posto $c_k = a_k + i b_k, z = x + i y$ l'angolo della retta MA_k con Ox sarà $= \arg(z - a_k)$. Onde per le condizioni del problema sarà

$$\sum_{k=1}^{k=n} \arg(z - a_k) = c$$

ossia

$$\arg \cdot \prod_{k=1}^{k=n} (z - a_k) = c.$$

Posto quindi

$$f(z) = (z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_n) = P(x, y) + i Q(x, y)$$

l'equazione precedente diverrà

$$(11) \quad \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = c,$$

che prova essere S_n una curva d'ordine n ; scrivendo invece

$$\frac{\frac{1}{2}(f(z) + \bar{f}(\bar{z}))}{(1/2i)(f(z) - \bar{f}(\bar{z}))} = c,$$

oppure

$$(12) \quad \frac{f(z)}{\bar{f}(\bar{z})} = \frac{c + i}{c - i},$$

si vedrà che le stelloidi non differiscono dalle iperboli di Holzmüller.

Emerge dalla (11) che affinché una curva sia una stelloide è necessario e sufficiente che la sua equazione si possa scrivere sotto la forma

$$a P(x, y) + b Q(x, y) = 0$$

ove a, b sono costanti e P, Q sono funzioni intere di x, y tali che

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Da ciò deriva una proposizione degna di nota. L'equazione della prima polare di un punto all'infinito rispetto alla curva $P - c Q = 0$ ha un'equazione della forma seguente:

$$\left[\xi \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial P}{\partial y} \right] - c \left[\xi \frac{\partial Q}{\partial x} + \eta \frac{\partial Q}{\partial y} \right] = 0,$$

ossia, grazie alle equazioni precedenti,

$$(\xi - c\eta) \frac{\partial P}{\partial x} + (\eta + c\xi) \frac{\partial P}{\partial y} = 0;$$

ora essendo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial P}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right], \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial P}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right] = 0,$$

si vede che: le prime polari dei punti della retta all'infinito rispetto ad una stelloide di grado n sono stelloidi di grado $n - 1$.

Per stabilire un'altra proprietà delle stelloidi rappresenteremo, come fece il Darboux, un punto qualunque M mediante due numeri complessi, coniugati o non secondochè M è reale o immaginario (coordinate immaginarie simmetriche); chiameremo poi coppia di punti opposti alla coppia P_h, P_k i due punti che sono la terza coppia di vertici opposti del quadrilatero completo che nasce proiettando da P_h e P_k i punti ciclici del piano; poichè c_h, \bar{c}_h sono le coordinate immaginarie simmetriche di P_h e c_k, \bar{c}_k quelle di P_k saranno c_h, \bar{c}_k e \bar{c}_h, c_k quelle dei punti Q'_{hk}, Q''_{hk} opposti alla coppia P_h, P_k . Ora siccome la (12) si scrive esplicitamente come segue

$$(12') \quad \frac{(x + iy - c_1)(c + iy - c_2) \dots (x + iy - c_n)}{(x - iy - c_1)(x - iy - c_2) \dots (x - iy - c_n)} = \frac{c + i}{c - i},$$

così è chiaro che essa è soddisfatta tanto ponendo

$$x + iy = c_k, \quad x - iy = \bar{c}_k$$

quanto ponendo

$$x + iy = c_h, \quad x - iy = \bar{c}_h;$$

essa è dunque soddisfatta tanto dalle coordinate dei perni, quanto dalle coordinate dei punti delle $\frac{n(n-1)}{2}$ coppie di punti opposti risp. alle coppie formate dei perni stessi. In tutto si hanno

$$n + 2 \frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

punti comuni a tutte le ∞' curve rappresentate dalla equazione (12') al variare della costante c ; tale equazione rappresenta quindi un fascio di stelloidi; quali ne siano i punti base risulta da ciò che precede. Per es. formano un fascio tutte le prime polari dei punti all'infinito rispetto ad una stelloide arbitraria.

180. Altre proprietà delle stelloidi scaturiscono facilmente dall'equazione polare che ora ne stabiliremo. A tale scopo poniamo:

$$(13) \quad f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_{n-1} z + p_n \quad \text{ove } p_0 = 1,$$

$$z = \rho e^{i\omega}, \quad p_k = g_k e^{i\gamma_k} \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad c = \operatorname{tg} \gamma;$$

$$\text{sarà} \quad g_0 = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_0 = 1;$$

verrà quindi

$$P(x, y) = \sum_{h=0}^{k=n} g_k \rho^{n-h} \cos(\gamma_k + n - k \omega),$$

$$Q(x, y) = \sum_{h=0}^{k=n} g_k \rho^{n-h} \operatorname{sen}(\gamma_k + n - k \omega),$$

eperò la (11) diverrà

$$(14) \quad \sum_{h=0}^{k=n} g_k \rho^{n-h} \cos(\gamma + \gamma_k + n - k \omega) = 0.$$

È questa è l'equazione polare della curva. Deduciamone tosto una conseguenza. Conduciamo pel polo una retta arbitraria formante con l'asse polare l'angolo α ; sia $P(\alpha)$ il prodotto dei raggi vettori degli n punti in cui essa taglia la stelloide, sarà evidentemente

$$P(\alpha) = (-1)^n g_n \frac{\cos(\gamma + \gamma_n)}{\cos(\gamma + n\alpha)}$$

Similmente, qualunque sia l'intero r ,

$$P\left[\alpha + \frac{r\pi}{n}\right] = (-1)^n g_n \frac{\cos(\gamma + \gamma_n)}{\cos(\gamma + n\alpha + r\pi)} = (-1)^n g_n \frac{\cos(\gamma + \gamma_n)}{(-1)^r \cos(\gamma + n\alpha)}$$

dal paragone di queste due relazioni deducesi che:

$$P\left[\alpha + \frac{r\pi}{n}\right] = (-1)^r P(\alpha).$$

Se ora si ricorda che il polo del sistema di riferimento è un punto arbitrario del piano si vede che si è giunti al seguente risultato: *Tagliando una stelloide di grado n con un angolo di ampiezza $r\pi/n$ (r intero), il prodotto delle distanze del vertice dai punti d'intersezione col primo lato è sempre eguale in valore assoluto al prodotto analogo relativo all'altro lato, e ne differisce pel segno soltanto quando r è dispari.* Convieni spesso assumere come polo il baricentro dei perni

(il Fouret lo chiama *punto d'irradiamento*)¹). In tal caso è evidentemente

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = 0, \quad p_1 = 0, \quad g_1 = 0.$$

Ora i punti all'infinito della curva (14) corrispondono a valori di ω tali che

$$n\omega + \gamma = (2r+1)\pi/2;$$

facendo $r = 0, 1, \dots, n-1$ si hanno n valori distinti di ω che determinano le direzioni in cui trovansi i punti all'infinito della stelloide; ma dando a ω uno di questi valori, l'equazione (14) diviene del grado $n-2$ in ρ , il che prova che le rette condotte pel polo in quelle direzioni hanno ciascuna due intersezioni con la curva all'infinito, onde sono gli asintoti della stelloide. Dunque: *Una stelloide d'ordine n ha n asintoti reali concorrenti nel baricentro dei suoi perni e formanti una rosa dei venti a n braccia; le ulteriori intersezioni della curva e degli asintoti stanno su un'altra stelloide del grado $n-2$, la quale forma, assieme alla retta all'infinito, la curva prima polare del punto d'irradiamento rispetto alla data stelloide d'ordine n .*

Queste sono le principali proprietà delle stelloidi. Come esse hanno radice nella rappresentazione geometrica dei numeri complessi quelle dedotte dal polinomio $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ ponendo

$$\frac{\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial Q}{\partial y}\right]^2}{P^2 + Q^2} = \operatorname{cost.}; \quad \frac{P \frac{\partial P}{\partial y} + Q \frac{\partial Q}{\partial y}}{P \frac{\partial P}{\partial x} + Q \frac{\partial Q}{\partial x}} = \operatorname{cost.};$$

F. Lucas, che per primo le considerò le chiamò risp. *linee isodinamiche* e *linee alisiche*²). Origine analoga hanno pure le curve di equazione generale

$$\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{\bar{z}} + A \sqrt[n]{z} + \bar{A} \sqrt[n]{\bar{z}} + \beta = 0,$$

ove z e \bar{z} e così A e \bar{A} sono immaginarie coniugate, mentre β è

¹ Cfr. anche BRIOT et BOUQUET, *Traité des fonctions elliptiques* (II ed., Paris 1875), p. 226; e P. G. LAURIN, *Sur la transformation isogonale définie par une fonction rationnelle* (Diss., Lund, 1887), p. 89.

² *Généralisation du théorème de Rolle* (C. R., T. CVI, 1888). Il BROCARD (*Notes de bibliographie des courbes géométriques*, Partie complémentaire, 1899) ha notato come l'idea prima di tali curve appartenga al DUHAMEL e risalga al 1862.

reale; essendo curve algebriche d'ordine $2n$ si chiamano *cardioidi di grado $2n$* ¹⁾. L'importanza geometrica che finora raggiunsero queste linee non è tale da consigliarci a darne più della definizione.

Chiuderemo questo Capitolo notando un'altra via che guidò a nuove curve per mezzo della rappresentazione geometrica dei numeri complessi. Essendo il cerchio una curva razionale si può stabilire una corrispondenza univoca fra i suoi punti e quelli di una curva di genere 0; è di più lecito supporre che quel cerchio abbia per centro l'origine e raggio 1; onde si può dire che le coordinate di un punto qualunque di una curva razionale si possono esprimere in funzione razionale di una variabile complessa t di modulo 1. Tale considerazione venne proposta ed ampiamente applicata da F. Morley²⁾ il quale si è particolarmente occupato degli involucri Δ^{2n-1} di classe $2n-1$ ed ordine $2n$ costituiti dalle rette rappresentate al variare del parametro t dall'equazione seguente:

$$(-1)^n (xt^n - yt^{n-1}) = (t^{2n-1} - 1) - (s_1 t^{2n-2} - s_{2n-2} t) + \dots + (-1)^n (s_{n-2} t^{n+1} - s_{n+1} t^{n-2})$$

nella quale in genere s_k e s_{2n-1-k} sono quantità immaginarie coniugate. Tali curve sono razionali; tenendo conto del loro ordine e della loro classe le formole di Plücker insegnano che possiedono $2n-1$ cuspidi ($2n-1$) ($n-2$) punti doppi, $2(n-2)$ flessi e $2n^2 - 7n + 7$ bitangenti. In questa categoria di curve se ne trova una ben nota, l'«ipocicloide tricuspide» (che il Morley chiama «delfoide»), la quale si ottiene supponendo $n=2$; ora tutte le curve in questione sono dotate di proprietà elegantissime aventi il loro perfetto riscontro in quelle notissime di cui gode l'ipocicloide tricuspide; citiamo ad es. la seguente: «le $2n-1$ tangenti cuspidali di una Δ^{2n-1} toccano una Δ^{2n-3} . Nel caso speciale $n=3$ si ottiene una speciale curva di 5° ordine e sesta classe già considerata e designata da W. K. Clifford³⁾ e che di recente fu studiata a fondo con i metodi dell'analisi vettoriale da R. P. Stephens⁴⁾, il quale propose di chiamarla «pentadelfoide» e ne stabilì delle belle proprietà la maggior parte delle quali sussistono anche per tutti gli involucri considerati. Proseguendo nello stesso ordine d'idee il Morley fu condotto a un'altra classe di involucri razionali, che egli chiama *ciclogeni*⁵⁾; sono gli involucri delle rette rappresentate da equazioni

della forma seguente:

$$\begin{aligned} a + \bar{a}t &= 0 \\ a + 2\eta t + \bar{a}t^2 &= 0 \\ a + bt + \bar{b}t^2 + \bar{a}t^3 &= 0 \\ a + bt + 2\eta t^2 + \bar{b}t^3 + \bar{a}t^4 &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

ove η rappresenta una quantità reale, mentre a e \bar{a} , b e \bar{b} , ... sono coppie di quantità immaginarie coniugate. Sia n la classe di una di tali curve e m il numero delle sue tangenti di direzione assegnata (*aspetto*, secondo il Morley); la curva corrispondente si indica allora con C^n_m ; C^1_1 è un punto, C^2_2 un cerchio, C^3_1 un delfoide o ipocicloide tricuspide, C^3_3 una cardioide; C^4_2 e C^4_4 sono due nuove curve chiamate dal citato geometra *parastroide* e *paranefroide*. Specialmente notevoli sono le *n-cardioidi* C^n_1 ; sono curve di classe n e di ordine $2(n-1)$; in ogni punto ciclico hanno una singolarità equivalente a $n-2$ cuspidi e $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ punti doppi; a distanza finita ogni C^n ha $n-2$ cuspidi, $(n-2)(n-3)$ nodi e $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ tangenti doppie, ma è esente da flessi; essa si può descrivere ricorrendo a due ipocicloidii opportunamente scelti.

1) E. C. PHILIPS, *On the pentacardioid* (Diss. Baltimore, 1909).

1) J. GOETTLER, *Conforme Abbildung eines von concentrischen gleichseitigen Hyperbeln oder gewissen Kurven nter Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis* (München, 1897).

2) *On the metric geometry of the plane n-line* (Trans. Amer. Math. Soc., I, 1900), e *Orthocentric properties of the plane n-line* (Id., IV, 1903).

3) *Mathem. Papers* (London 1882), p. 614-617.

4) *On the pentadeltoid* (Trans. Math. Soc., VII, 1906).

5) *On reflexive geometry* (Id. VII, 1907).

CAPITOLO XVI

**Generalità sulla ricerca delle curve algebriche
la cui rettificazione dipende da funzioni prestabilite.
Curve rettificabili mediante archi di parabola,
circolo o iperbole.**

181. Data che sia una curva il calcolo infinitesimale insegna quale sia la natura delle funzioni di cui è necessario di fare uso per effettuarne la rettificazione. Ben più ardua è la questione inversa, cioè la ricerca di tutte le curve la cui rettificazione può eseguirsi mediante funzioni conosciute *a priori*, o, se così piace esprimersi, mediante archi di curve date ¹⁾. A siffatto problema generale Eulero ha dedicato molto tempo e fatica ²⁾, riducendolo prima a una questione di analisi indeterminata algebrica e mettendo poi a profitto quella virtuosità nel calcolo algebrico che è comparabile soltanto alle analoghe doti spiegate da Diofanto in investigazioni aritmetiche.

Il problema di Eulero può enunciarsi così: « data una funzione V di una variabile v , trovare due espressioni algebriche $x(v)$ e $y(v)$ tali che sia identicamente

$$(1) \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = V dv.$$

Una soluzione (o, se si vuole, una trasformazione) di tale problema

¹⁾ Da questo punto di vista la detta questione fu studiata da J. HERMANN (Acta erudit., 1723) e GIOVANNI BERNOULLI (Ivi, 1724, oppure *Opera omnia*, T. II, p. 582). Sopra questi e altri lavori antichi e moderni di eguale indirizzo porge larghe informazioni il *Mémoire sur la représentation des transcendentes par des arcs de courbe* (Ann. Ec. Norm. Sup., II Ser., T. I, 1873) dell'ALLÈGRET.

²⁾ Veggansi le tre memorie: *De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolico metiri licet* (Nova Acta Petrop., T. V, 1789; presentata il 3 Giugno 1776); *De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus* (Mém. de St. Péterbourg, T. XI, 1830; presentata il 20 agosto 1781); *De lineis curvis, quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur* (Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica, T. I, Petropoli 1862, p. 439-452; *Opera omnia*, I Ser., T. XXI, p. 274 e segg.).

si ottiene notando che, se U è una funzione arbitraria di v e A, B sono costanti, ponendo

$$(2) \quad dx = V \frac{\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}} dv, \quad dy = V \frac{\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}} dv$$

la (1) è soddisfatta per identità, onde tutto è ridotto a scegliere in modo che siano effettuabili le due quadrature

$$\int V \frac{\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}} dv, \quad \int V \frac{\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}} dv$$

e che la risultante rappresentazione parametrica $x = x(v)$, $y = y(v)$ appartenga ad una curva algebrica. Una riduzione analoga si ottiene notando che la (1) può surrogarsi con queste due equazioni:

$$(3) \quad dx = V \cos \varphi \cdot dv, \quad dy = V \sin \varphi \cdot dv$$

onde la questione è ricondotta a trovare la funzione $\varphi = \varphi(v)$ in modo che le equazioni

$$x = \int V \cos \varphi \cdot dv, \quad y = \int V \sin \varphi \cdot dv$$

rappresentino una curva algebrica. Nel caso speciale in cui sia $V = \sqrt{P^2 + Q^2}$, P e Q essendo funzioni di v , la (1) può essere sostituita sia dalle due equazioni

$$(4) \quad \frac{dx}{dv} = \frac{P \sqrt{A+U} - Q \sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}}, \quad \frac{dy}{dv} = \frac{P \sqrt{B-U} + Q \sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}}$$

sia ponendo

$$(5) \quad \frac{dx}{dv} = P \sin \varphi + Q \cos \varphi, \quad \frac{dy}{dv} = P \cos \varphi - Q \sin \varphi,$$

ove A, B, U, φ hanno gli stessi significati di prima; onde la trasformazione del primitivo problema può operarsi in altri due modi analoghi ai precedenti.

Queste considerazioni, benchè non guidino alla soluzione generale del problema proposto, pure conducono a molti risultati notevoli: valgano a provarlo le applicazioni che ora ne esporremo.

182. Curve rettificabili mediante archi di parabola ¹⁾. In tal caso

¹⁾ Oltre alle tre memorie di EULERO citate nella nota precedente, v. quella intitolata *De innumeris curvis algebraicis quarum longitudo arcui*

si può porre $V = \sqrt{1+v^2}$, cioè $P = 1$, $Q = v$; le (4) divengono

$$\frac{dx}{dv} = \frac{\sqrt{A+U} - v\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}}, \quad \frac{dy}{dv} = \frac{\sqrt{B-U} + v\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}};$$

Eulero pone $U = \sqrt{v}$ e giunse così a delle curve algebriche. Nelle stesse ipotesi le (5) danno

$$\frac{dx}{dv} = \sin \varphi + v \cos \varphi, \quad \frac{dy}{dv} = \cos \varphi - v \sin \varphi;$$

ora facendo $v = \sin \theta$ e poi supponendo $\varphi = k\theta + \alpha$, ove k è un numero razionale, si ottengono formole integrabili conducenti a a curve algebriche. Un terzo e migliore procedimento si basa sulla considerazione del differenziale dell'arco di parabola scritto sotto la forma $dz \sqrt{z^2+a^2}$, z essendo la variabile indipendente. Posto

$$dx = \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{a} \cos \varphi \cdot dz, \quad dy = \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{a} \sin \varphi \cdot dz,$$

la questione è ridotta a scegliere $\varphi = \varphi(z)$ in guisa che x e y possano ottenersi in termini finiti. Eulero pure a tale scopo

$$z = a \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = n\theta;$$

ottiene in corrispondenza:

$$(6) \quad dx = a \frac{\cos n\theta \cdot d\theta}{\cos^3 \theta}, \quad dy = a \frac{\sin n\theta \cdot d\theta}{\cos^3 \theta}$$

Per giudicare dell'integrabilità di queste espressioni poniamo:

$$\varphi(n) = \int \frac{\cos n\theta \cdot d\theta}{\cos^3 \theta}, \quad \psi(n) = \int \frac{\sin n\theta \cdot d\theta}{\cos^3 \theta};$$

integrando per parti si trova

$$\varphi(n) = \frac{2}{n-3} \frac{\sin(n-1)\theta}{\cos^2 \theta} - \frac{n+1}{n-3} \varphi(n-2),$$

$$\psi(n) = -\frac{2}{n-1} \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos^2 \theta} + \frac{n+1}{n-3} \psi(n-2);$$

parabolico aequatur (Mem. de St. Pétersbourg, T. XI, 1830; presentata il 20 Agosto 1781; Opera omnia, I Ser., T. XXI, p. 150 e 246.

onde, se l'integrazione è possibile per un certo valore \bar{n} di n , lo sarà per tutti i valori della forma $\bar{n}+2k$, ove k è intero. Questo risultato può completarsi osservando che dai valori soprascritti di dx e dy si deduce:

$$\frac{x+iy}{a} = \int \frac{e^{in\theta} d\theta}{\cos^3 \theta} = \int \frac{e^{in\theta} d\theta}{\left[\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right]^3} = 8 \int \frac{e^{i(n+3)\theta} d\theta}{(e^{2i\theta}+1)^3};$$

posto quindi $e^{i\theta} = t$ verrà

$$\frac{x+iy}{a} = -8i \int (1+t^2)^{-3} t^{n+1} dt;$$

ora la notissima teoria dei differenziali binomi assicura che qualunque sia l'intero n questa quadratura è eseguibile; si conclude pertanto: qualunque sia il numero n , intero e positivo (pos. può evidentemente sempre supporre) le equazioni (6) conducono ad una curva algebrica il cui arco è esprimibile mediante archi di parabola.

Curve rettificabili mediante archi di circolo. L'applicazione dei suesposti procedimenti generali alla determinazione delle curve rettificabili mediante archi di circolo tentata più volte da Eulero non diede come risultato che il cerchio stesso, onde quel grande fu indotto a enunciare come verosimili la proposizione seguente: « escluso il cerchio, non esiste alcuna curva algebrica di cui un arco qualsivoglia si possa esprimere mediante un arco di circolo »¹⁾. Ma nuovi sforzi e l'uso di coordinate polari lo guidarono a una nuova curva dotata di tale proprietà e quindi a ricredersi sull'opinione manifestata colla precedente proposizione²⁾. Ecco come procedette il grande geometra: Se ρ e ω sono le coordinate polari di un punto di una curva dotata dell'anzidetta prerogativa, dovrà essere

$$\int \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} = \varphi$$

φ essendo un arco circolare, onde viceversa

¹⁾ Oltre alla prima e terza delle memorie citate nella nota (2) a pag. 528 ed a quella indicata nella nota (1) a pag. 536, si veda una lettera di EULERO a LAGRANGE del 23 marzo 1775 inserita in *L. Euleri Opera postuma*, T. I, p. 588. In ognuno di questi luoghi EULERO enuncia anche l'altro teorema ipotetico seguente: « Non esiste alcuna curva algebrica il cui arco generico eguagli il logaritmo di una funzione algebrica »; ignoriamo se sia stata dimostrata la verità o falsità di questa proposizione.

²⁾ *De curvis algebraicis quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat* (Mem. de St. Pétersbourg, T. XI, 1830; presentata il 20 agosto 1781); *Opera omnia*, I Ser., T. XXI, p. 263.

$$\omega = \int \frac{\sqrt{d\varphi^2 - d\rho^2}}{\rho};$$

fra ρ e φ bisognerà stabilire una relazione tale che questa quadratura sia effettuabile. Eulero pose

$$\rho = b + \cos \varphi$$

ed ottenne

$$\omega = \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{b + \cos \varphi} = \varphi - b \int \frac{d\varphi}{b + \cos \varphi};$$

ora ponendo $t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ e supponendo la costante $b > 1$ si trova:

$$\int \frac{d\varphi}{b + \cos \varphi} = 2 \int \frac{dt}{(b+1) + (b-1)t^2} = \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{b-1}{b+1}} t \right];$$

dunque

$$\omega = \varphi - \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{b-1}{b+1}} t \right]$$

La curva corrispondente sarà algebrica se $\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}$ è un numero razionale. Posto quindi $\frac{b}{\sqrt{b^2-1}} = n$, potremo concludere: *Qualunque sia il numero razionale n , le equazioni*

$$\rho = b + \cos \varphi, \quad \omega = \varphi - \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{b-1}{b+1}} t \right]$$

ove

$$t = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \quad \text{e} \quad b = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}},$$

rappresentano in coordinate polari ρ, ω una curva algebrica rettificabile per archi di circolo¹⁾.

In una memoria presentata all'Accademia delle Scienze di Pietroburgo addì 20 agosto 1823²⁾ N. Fuss ha fatto notare che alle curve

¹⁾ O. HOEL ha osservato (*Ueber die Euler'sche Kurve, deren Bogen durch Kreisbogen darstellen lassen*, *Porta Ann.* T. XV, 1927) che la curva in questione si può rappresentare mediante l'equazione $\rho = b + a \cos(s/a)$ fra il raggio vettore e l'arco.

²⁾ *De curvis algebraicis quorum singuli arcus arcibus circularibus aequantur* (Mem. de St. Péterbourg, T. XI, 1830).

suddette si giunge anche cercando l'equazione polare delle curve in cui la distanza del polo dalla tangente è espressa da $a\rho - \rho^2$, a essendo una lunghezza data. E invero questo problema si traduce subito nella seguente equazione differenziale:

$$\frac{\rho^2 d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}} = a\rho - \rho^2;$$

ora per integrarla — indicando con ds il differenziale dell'arco — la si scriva come segue:

$$\rho d\omega = (a - \rho) ds;$$

si osservi poi che, essendo

$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho d\omega)^2,$$

la precedente dà

$$ds = \frac{d\rho}{\sqrt{1 - (a - \rho)^2}}$$

onde

$$s = \operatorname{arc} \cos (a - \rho)$$

ossia

$$(7) \quad \rho = a - \cos s,$$

la prima delle quali dimostra che la curva cercata è rettificabile col mezzo di archi circolari.

Si ha poi, come conseguenze delle formole precedenti,

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{a - \rho}{\rho} ds = \frac{a - \rho}{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{1 - (a - \rho)^2}} = \\ &= a \frac{d\rho}{\rho \sqrt{1 - (a - \rho)^2}} - \frac{d\rho}{\sqrt{1 - (a - \rho)^2}} = a \frac{d\rho}{\rho \sqrt{1 - (a - \rho)^2}} - ds \end{aligned}$$

onde

$$\omega + s = a \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{1 - (a - \rho)^2}};$$

supposto $a > 1$ e posto

$$(8) \quad t = \sqrt{\frac{1 - a + \rho}{1 + a - \rho}}$$

si conclude

$$(9) \quad \omega + s = \frac{2a}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{a+1}{a-1}} t \right];$$

e questa, assieme alle equazioni (7) e (8), rappresenta la curva cercata e dimostra che questa non differisce da quella di Eulero.

Questa è caso particolare di una classe estesa di curve razionali che J. A. Serret ha fatto conoscere nel suo *Mémoire sur les courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle* (Journ. de l'Ec. pol., T. XXXV, 1853); se noi crediamo superfluo l'arrestarci a fare conoscere gli importantissimi risultati ivi stabiliti gli è che il Serret stesso li ha, per così dire, popolarizzati esponendoli in due suoi notissimi trattati¹⁾.

Curve rettificabili mediante archi di iperbole. La ricerca di tali curve venne compiuta da N. Fuss ispirandosi indubbiamente alle idee di Eulero²⁾. Si consideri un'iperbole di potenza k^2 ed i cui asintoti formino l'angolo α ; prendendo un sistema cartesiano ortogonale di cui l'origine sia il centro della curva data e l'asse delle x sia un asintoto, l'iperbole stessa può rappresentarsi mediante le equazioni

$$x = \frac{k^2}{v} + v \cos \alpha, \quad y = v \sin \alpha$$

onde

$$\frac{ds}{dv} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2} = \frac{1}{v^2} \sqrt{k^4 - 2k^2 v^2 \cos \alpha + v^4};$$

e, posto $v = \sqrt{z^n}$ si avrà:

$$ds = \frac{n dz}{2 \sqrt{z^{n+2}}} \sqrt{k^4 - 2k^2 z^n \cos \alpha + z^{2n}};$$

scelte quindi due funzioni p, q di z tali che sia identicamente

$$(10) \quad p^2 + q^2 = k^4 - 2k^2 z^n \cos \alpha + z^{2n},$$

se si pone

$$x = \frac{n}{2} \int \frac{p dz}{\sqrt{z^{n+2}}}, \quad y = \frac{n}{2} \int \frac{q dz}{\sqrt{z^{n+2}}}$$

¹⁾ *Cours d'algèbre supérieure*, 4^a ed., T. I (Paris 1877), p. 511-515; *Cours de calcul différentiel et intégral*, 2^a ed., T. II (Paris 1880), p. 248-259. Sono ivi particolarmente studiate le curve di EULERO.

²⁾ *De innumeris curvis algebraicis quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet* (Nova Acta Petrop., T. XIV, Petrop. 1805).

si otterrà una curva rettificabile mediante archi di iperbole. Ora il secondo membro della (10) è decomponibile in $2n$ fattori lineari a due a due coniugati; si faccia il prodotto di n fra loro, di cui due qualunque non siano coniugati; sia $\varphi(z) + i\psi(z)$ il risultato; il prodotto degli altri n sarà $\varphi(z) - i\psi(z)$; onde posto $p + qi = \varphi(z) + i\psi(z)$ sarà $p - iq = \varphi(z) - i\psi(z)$ e la (10) sarà soddisfatta. Dunque basta prendere $p = \varphi(z)$, $q = \psi(z)$. Tenendo conto dell'elemento arbitrario nella formazione del prodotto φ , si vede che si ottengono così in generale $\sum_{k=2}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n - 2$ curve soddisfacenti alle condizioni del problema; e facendo variare n se ne otterranno infinite.

CAPITOLO XVII

**Curve algebriche rettificabili mediante archi d'ellisse.
Le curve di Serret.**

183. Altre applicazioni dei metodi esposti nel n. 181 vennero fatte da Eulero alle curve rettificabili mediante archi di ellisse¹⁾. In tal caso (ritenendo le notazioni usate nell'or citato n.) conviene supporre

$$V = \frac{\sqrt{1+(k^2-1)v^2}}{\sqrt{1-v^2}}$$

onde

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = dv \frac{\sqrt{1+(k^2-1)v^2}}{\sqrt{1-v^2}};$$

ed a questa si soddisfa ponendo

$$dx = \frac{p+q}{\sqrt{2(1+v)}} dv, \quad dy = \frac{p-q}{\sqrt{2(1-v)}} dv,$$

purchè le funzioni p, q di v verificino identicamente la relazione

$$p^2 + q^2 - 2pqv = 1 + (k^2 - 1)v^2;$$

per es. si può assumere $p = 1, q = (k + 1)v$ e si ottiene

$$dx = \frac{1+(k+1)v}{\sqrt{2(1+v)}} dv, \quad dy = \frac{1-(k+1)v}{\sqrt{2(1+v)}} dv,$$

onde

$$2x = \{1 - 2k + (k + 1)v\} \sqrt{2(1+v)},$$

¹⁾ De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet (Nova Acta Petrop., T. V, 1789; presentata il 10 giugno 1776).

$$2y = \{2k - 1 + (k + 1)v\} \sqrt{2(1-v)},$$

le quali rappresentano una curva del sest'ordine.

La stessa questione può trattarsi diversamente come segue¹⁾. Le equazioni

$$dx = \sqrt{1 + \frac{m^2 z^2}{1-z^2}} \cos \varphi dz, \quad dy = \sqrt{1 + \frac{m^2 z^2}{1-z^2}} \sin \varphi dz,$$

rappresentano evidentemente una curva rettificabile per archi di ellisse, purchè si determini $\varphi = \varphi(z)$ in modo che x, y si possano ottenere in termini finiti. Per raggiungere siffatto intento si ponga $z = \sin \theta$; le equazioni precedenti diverranno:

$$dx = \sqrt{\cos^2 \theta + m^2 \sin^2 \theta} \cos \varphi \cdot d\theta,$$

$$dy = \sqrt{\cos^2 \theta + m^2 \sin^2 \theta} \sin \varphi \cdot d\theta.$$

Si stabilisca ora fra θ ed un nuovo angolo ω la relazione

$$\operatorname{tg} \omega = m \operatorname{tg} \theta, \quad \text{onde} \quad \frac{d\omega}{\cos^2 \omega} = m \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

e si otterrà

$$dx = \frac{\cos \theta \cdot \cos \varphi}{\cos \omega} d\theta, \quad dy = \frac{\cos \theta \cdot \sin \varphi}{\cos \omega} d\theta$$

Supponendo quindi $\varphi + \omega = n\theta$ ed eliminando φ e ω si conclude:

$$dx = d\theta \{ \cos \theta \cdot \cos n\theta + m \sin \theta \cdot \sin n\theta \},$$

$$dy = d\theta \{ \cos \theta \cdot \sin n\theta - m \sin \theta \cdot \sin n\theta \}.$$

Integrando si trova, a meno di costanti insignificanti,

$$x = \frac{m+1}{n-1} \sin(n-1)\theta - \frac{m-1}{n+1} \sin(n+1)\theta,$$

$$y = -\frac{m+1}{n-1} \cos(n-1)\theta + \frac{m-1}{n+1} \cos(n+1)\theta;$$

ora queste equazioni rappresentano (v. Lib. VI, Cap. X) delle

¹⁾ De lineis curvis quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur (L. EULERI, Opera postum., T. I, Petropoli, 1862, p. 439-452; Opera omnia, I Ser., T. XXI, p. 163 e 240).

epicicloidali algebriche se n è un numero razionale; dunque tutte le epicicloidali algebriche sono curve rettificabili mediante archi d'ellisse.

184. La ricerca di curve rettificabili mediante integrali ellittici ha occupato, oltre Eulero, Legendre¹⁾, il quale riuscì a trovare una curva del sesto ordine avente questa proprietà²⁾, e poi J. A. Serret³⁾, il quale si propose il problema di determinare tutte le curve razionali aventi quelle proprietà, e lo considerò come caso speciale di quello avente per intento la determinazione di due funzioni $x(z)$, $y(z)$ soddisfacenti la relazione

$$dx^2 + dy^2 = Z dz^2,$$

Z essendo una funzione razionale di z . Supponendo

$$Z = \frac{c^2 z^{2n}}{\sqrt{(z-a)(z-\alpha)(z-b)(z-\beta)}}$$

ove a e α , b e β sono due coppie di numeri immaginari coniugati si ricade nel problema già trattato da Eulero. In tal caso l'arco s della curva essendo un integrale ellittico della variabile z , z sarà una funzione biperiodica di s onde x , y saranno funzioni biperiodiche dell'arco; le curve di Serret godono adunque la proprietà che loro coordinate sono funzioni biperiodiche dell'arco; si potrebbe dimostrare essere dette le più generali curve razionali aventi tale proprietà⁴⁾. Non possiamo arrestarci a dimostrare questo teorema,

¹⁾ *Traité des fonctions elliptiques*, T. I (Paris, 1827), p. 35.

²⁾ La sestica di Legendre è rappresentata dalle equazioni

$$x = h \operatorname{sen} \phi \left[1 + \frac{m}{2} \operatorname{sen}^2 \phi \right], \quad y = bh \cos \phi \left[1 + m - \frac{m}{2} \cos^2 \phi \right]$$

ove

$$m = \frac{3k^2}{1-k^2}, \quad h = \frac{1-2k^2}{b^2};$$

in conseguenza

$$s = \int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} - \frac{k^2}{b^2} \operatorname{sen} \phi \cdot \cos \phi \cdot \Delta(\phi).$$

³⁾ *Mémoire sur la représentation des fonctions elliptiques et hyperelliptiques* (G. di Liouville, T. X, 1845); *Développements sur une classe d'équations relatives à la représentation géométrique des fonctions elliptiques* (Ivi); *Note sur les courbes elliptiques de première classe* (Ivi); *Théorie géométrique de la lemniscate et des courbes elliptiques de la première classe* (Id., T. XI, 1846). Cfr. SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, T. II (Paris, 1880), p. 264-269.

⁴⁾ KROHS, *Die Serret'schen Kurven sind die einzigen algebraischen vom Geschlecht Null, deren Koordinaten eindeutige doppelt periodische Funktionen des Bogens der Kurve sind* (Diss., Halle a. S., 1891).

nè a riferire le elevate considerazioni che adoperò il Serret per ottenere le equazioni di innumerevoli curve aventi l'indicata proprietà ed il procedimento con cui il Liouville¹⁾ allargò la portata delle conclusioni da quelle raggiunte. Limitiamoci ad enunciare la seguente proposizione che compendia una piccola parte di siffatte conclusioni: « Se con x , y si indicano le coordinate di un punto di una curva, e si pone

$$x + iy = C e^{i\omega} \int \frac{(z-a)(z+\alpha)^n}{(z-a)^2(z+\alpha)^{n+1}} dz$$

ossia

$$x + iy = C e^{i\omega} \frac{(z+\alpha)^{n+1}}{(z-a)(z+\alpha)^n} + \text{cost.},$$

ove C e ω sono costanti arbitrarie, a e α sono numeri complessi coniugati e n un numero reale legato a queste costanti dall'equazione

$$\frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha} = \frac{n}{n+1},$$

si otterrà la rappresentazione parametrica di una curva razionale il cui arco è espresso da

$$C \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-\alpha^2)}}.$$

Tutte le curve così nascenti costituiscono quella che il Serret chiama *prima classe di curve ellittiche*; sono generalizzazioni della lemniscata, curva che si presenta supponendo $n = 1$. Il Serret stesso ha notato esserci « pour ces courbes un mode de génération de suprême élégance », il quale può « servir à définir les courbes elliptiques de la première classe, dont la théorie deviendra, dès lors, entièrement indépendante des considérations analytiques qui les ont fait découvrir ». Quanto ora esporremo dimostrerà la giustezza di questo modo di vedere e metterà fuor di questione l'importanza geometrica delle curve di Serret della prima classe.

« È dato (fig. 111) un punto fisso O ed una retta fissa r , che po-

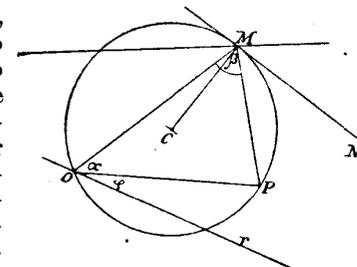


Fig. 111.

¹⁾ G. di Liouville, T. X, 1845, p. 351-363.

tremo supporre passi per O ; sono dati inoltre un segmento rettilineo a ed un numero reale positivo n . Un triangolo variabile OPM ha un suo vertice in O ed i due lati OP e PM di lunghezze costanti e precisamente $OP = a\sqrt{n}$, $PM = a\sqrt{n+1}$; se gli angoli $POM = \alpha$, $PMO = \beta$ sono legati all'angolo φ , che il lato OM del triangolo variabile forma con la retta fissa r , dalla relazione

$$(1) \quad \pm \varphi = n\alpha - (n+1)\beta$$

il luogo geometrico del punto M sarà una curva ellittica di prima classe. Per dimostrare ciò supponiamo per semplicità $a = 1$; posto $OM = \rho$ il triangolo OMP dà:

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{\rho^2 - 1}{2\rho\sqrt{n}}, \quad \cos \beta = \frac{\rho^2 + 1}{2\rho\sqrt{n+1}},$$

ovvero

$$(2') \quad \sin \alpha = \frac{\Delta}{2\rho\sqrt{n}}, \quad \sin \beta = \frac{\Delta}{2\rho\sqrt{n+1}},$$

ove

$$\Delta = \sqrt{-\rho^4 + 2(2n+1)\rho^2 - 1};$$

se ne deduce

$$(3) \quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Preso O come polo e r per asse polare l'equazione polare del luogo del punto M risulterà eliminando gli angoli α , β fra la (1) e le (2) o (2'). L'eliminazione si esegue senza difficoltà e mostra che, se n è un numero razionale, la curva ottenuta è algebrica.

Se, per es. $n = 1$ si ha successivamente:

$$\pm \varphi = \alpha - 2\beta, \quad \cos \varphi = \cos \beta \cos(\alpha - \beta) + \sin \beta \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha = \frac{\rho^2 - 1}{2\rho}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{-\rho^4 + 6\rho^2 - 1}}{2\rho};$$

$$\cos \beta = \frac{\rho^2 + 1}{2\rho\sqrt{2}}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{-\rho^4 + 6\rho^2 - 1}}{2\rho\sqrt{2}}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{-\rho^4 + 6\rho^2 - 1}}{2\rho\sqrt{2}}, \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{3\rho^2 - 1}{2\rho^2\sqrt{2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\rho^4 + 4\rho^2 - 1}{4\rho^3};$$

passando a coordinate cartesiane si ottiene l'equazione

$$(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2) + 4(x^2 + y^2) - 1 = 0,$$

che rappresenta una lemniscata.

Ritorniamo, dopo questa breve digressione, al caso generale per notare che dalle (2'), differenziando ed applicando poi le (2), si trae:

$$(4) \quad \frac{d\alpha}{\cos \beta} = \frac{-2d\rho}{\sqrt{n+1}\Delta}, \quad \frac{d\beta}{\cos \alpha} = \frac{-2d\rho}{\sqrt{n}\Delta};$$

e queste, combinate con la (1), conducono a:

$$(5) \quad \pm d\varphi = \frac{\rho^2 - (2n+1)}{\Delta} \frac{d\rho}{\rho}.$$

E siccome in generale $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$, così nel caso attuale

$$(6) \quad \pm ds = \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{\Delta} d\rho;$$

servendoci delle (4) potremo anche scrivere

$$(7) \quad \pm ds = \sqrt{n} \frac{d\alpha}{\cos \beta} = \sqrt{n+1} \frac{d\beta}{\cos \alpha}$$

Convieni ora porre

$$k = \sqrt{\frac{n}{n+1}};$$

la (3) diviene allora $\sin \beta = k \sin \alpha$ e le (7) danno

$$(8) \quad \pm ds = \sqrt{n} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}};$$

e questa dimostra che l'arco s della curva luogo del punto M è espresso da un integrale ellittico di prima specie; *q. e. d.*

Le formole precedenti mettono in evidenza alcune proprietà delle curve di cui ci occupiamo. Si ha infatti:

$$\text{area triang. } OMP = \frac{1}{2} \sqrt{n} \sqrt{n+1} \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{4} \Delta;$$

$$\frac{1}{2} \int \rho^2 d\varphi = \frac{1}{4} \int \frac{\rho^3 - 4(2n+1)\rho}{2\Delta} d\varphi = \frac{1}{4} \Delta + \text{cost.};$$

dunque: l'area del settore della curva, contata a partire dall'asse po-

l'area, è eguale all'area del triangolo generatore, considerato quando ha un vertice nell'estremo dell'arco di quel settore. Inoltre dalle (2) (2') si trae

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\Delta}{2\sqrt{n(n+1)}}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{\varrho^2 - (2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}},$$

o, per le (6), (7),

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \pm \frac{ds}{d\varrho}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \pm \varrho \frac{d\varphi}{ds},$$

le quali provano che l'inclinazione della normale sul raggio vettore è eguale all'angolo $\alpha + \beta$ od al suo supplemento. Perciò, nel primo caso, se si costruisce l'ang $PMN = \text{ang } POM$ sarà MN la normale in M alla curva. Notiamo che MN è invece tangente in M al circolo circoscritto al triangolo MOP ; onde la congiungente M al centro O di quel circolo sarà la tangente in M alla curva di cui si tratta. Nel caso in cui l'inclinazione della normale sul raggio vettore fosse $= \pi - (\alpha + \beta)$, basterebbe considerare il triangolo simmetrico di OMP rispetto a M per estendere le conclusioni precedenti e concludere: Dato il punto fisso O , se il triangolo OMP varia in modo che si abbia sempre

$$OM = a\sqrt{n}, \quad MP = a\sqrt{n+1}$$

e che di più lo spostamento infinitesimo MM' del punto M abbia sempre luogo nella direzione che congiunge il punto M al centro del circolo del triangolo circoscritto al triangolo generatore, il punto M genererà una curva ellittica di prima classe corrispondente al numero n .

Il Liouville¹⁾ osservò che il luogo del punto M può rappresentarsi mediante le due equazioni seguenti:

$$x = \frac{\cos 2n\varphi - 2\sqrt{n} \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos(2n+1)\varphi}{1 - 4\sqrt{n} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + 4n \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$y = \frac{\operatorname{sen} 2n\varphi - 2\sqrt{n} \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen}(2n+1)\varphi}{1 - 4\sqrt{n} \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + 4n \operatorname{sen}^2 \varphi};$$

da esse si può dedurre²⁾ che la curva è l'inversa di una speciale epicycloide.

Da quanto precede si desume che l'angolo ε della normale alla curva coll'asse polare è dato da $\varepsilon = \varphi - (\alpha + \beta)$. Perciò l'angolo di

¹⁾ Journ. de math., T. X, 1845, p. 295.

²⁾ ALLEGRET nella citata (p. 528) mem. delle Ann. Ec. norm. sup., p. 180.

contingenza è dato da

$$d\varepsilon = d\varphi - (d\alpha + d\beta) = (n-1)d\alpha - nd\beta$$

ossia

$$d\varepsilon = \frac{3\varrho^2 - (2n+1)}{\Delta} \frac{d\varrho}{\varrho};$$

ne viene che il raggio di curvatura R è dato da

$$R = \frac{2\sqrt{n(n+1)}\varrho}{3\varrho^2 - (2n+1)};$$

onde i flessi della curva di cui si tratta si trovano sul circhio di centro O e raggio $\sqrt{\frac{2n+1}{3}}$ 1).

¹⁾ Per ulteriori ricerche sulle curve ellittiche vedi L. KIEPERT, *De curvis quarum arcus integralibus ellipticis primi generi exprimitur* (Diss., Berlin 1870).

CAPITOLO XVIII

**Curve algebriche rettificabili mediante archi di lemniscata.
Le spirali sinusoidi.**

185. Essendo la lemniscata rettificabile mediante speciali funzioni ellittiche, la ricerca delle curve rettificabili col mezzo di archi di lemniscata è caso particolare di quello trattato nel paragrafo precedente. Tuttavia giova occuparsene particolarmente per mostrare come Eulero vi applicò le considerazioni che esponemmo nel n. 181¹⁾. È chiaro che le equazioni

$$dx = \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} \cos \varphi, \quad dy = \frac{a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} \sin \varphi$$

rappresenteranno una delle curve cercate purchè $\varphi = \varphi(z)$ sia scelto in modo opportuno. Per determinare tale scelta si ponga

$$z^2 = a^2 \sin \theta.$$

e si otterrà

$$\frac{2 dx}{a} = \frac{\cos \varphi \cdot d\theta}{\sqrt{\sin \theta}}, \quad \frac{2 dy}{a} = \frac{\sin \varphi \cdot d\theta}{\sqrt{\sin \theta}};$$

supponendo inoltre $\varphi = n\theta$ si concluderà

$$(1) \quad x = \frac{a}{2} \int \frac{\cos n\theta \cdot d\theta}{\sqrt{\sin \theta}}, \quad y = \frac{a}{2} \int \frac{\sin n\theta \cdot d\theta}{\sqrt{\sin \theta}}$$

Per giudicare dell'integrabilità di queste formule poniamo:

$$\varphi(n) = \int \frac{\cos n\theta \cdot d\theta}{\sqrt{\sin \theta}}, \quad \psi(n) = \int \frac{\sin n\theta \cdot d\theta}{\sqrt{\sin \theta}};$$

¹⁾ De lineis curvis, quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur, nn. 7-13 (L. EULERI, Opera postuma, Petropoli 1862).

ora, integrando per parti, si ottengono le seguenti formole di riduzione:

$$\varphi(n) = \frac{4}{2n-1} \sqrt{\sin \theta} \cos(n-1)\theta + \frac{2n-3}{2n-1} \varphi(n-2),$$

$$\psi(n) = \frac{4}{2n-1} \sqrt{\sin \theta} \sin(n-1)\theta + \frac{2n-3}{2n-1} \psi(n-2)$$

le quali provano che, se l'integrazione è effettuabile per un certo valore n di n , lo sarà per tutti i valori $n + 2k$. D'altronde la ricerca delle condizioni d'integrabilità può anche farsi deducendo dalle (1) successivamente ciò che segue:

$$\frac{2(x+iy)}{a} = \int \frac{e^{in\theta} d\theta}{\sqrt{\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}} = \sqrt{2i} \int \frac{e^{i(n+1)\theta} d\theta}{\sqrt{e^{2i\theta} - 1}};$$

facendo adesso $e^{i\theta} = t$

si può scrivere

$$\frac{2(x+iy)}{a} = \frac{\sqrt{2i}}{i} \int t^{(n+1)} (t^2 - 1)^{-1/2} dt;$$

applicando la teoria dei differenziali binomi si vede che affinché l'integrazione sia effettuabile n dev'essere della forma $2k \pm \frac{1}{2}$. Dunque: se $n = 2k \pm \frac{1}{2}$ le formole (1) rappresentano una curva algebrica rettificabile mediante archi di lemniscata.

Ma la rettificazione della lemniscata ha condotto in un altro modo a nuove curve algebriche: gli è quanto ci apprestiamo a fare ora conoscere ai nostri lettori.

186. Ricordiamo le definizioni degli integrali Euleriani di I e II specie:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

e la relazione che li collega:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Facendo ivi $x = \sin^2 \omega$, $p = m/2$, $q = n/2$ si ottiene l'identità:

$$(2) \quad \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{m-1} \omega \cdot \cos^{n-1} \omega \cdot d\omega = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m/2) \cdot \Gamma(n/2)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$$

Suppongasi qui $n = m$ e si ponga $2\omega = \theta$; si troverà

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^{m-1} \theta \cdot d\theta = 2^{m-1} \frac{\Gamma^2(m/2)}{\Gamma(m)}$$

e poichè è facile vedere che

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^{m-1} \theta \cdot d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{m-1} \theta \cdot d\theta$$

si conclude

$$(3) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^{m-1} \theta \cdot d\theta = 2^{m-2} \frac{\Gamma^2(m/2)}{\Gamma(m)}$$

Premesso questo, riprendiamo l'equazione polare della lemniscata.

$$(4) \quad \rho^2 = \frac{(2a)^2}{2} \cos 2\omega;$$

detto s l'arco di tale curva otterremo:

$$\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2 = \rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 = \frac{2a^2}{\cos 2\omega}, \quad s = a\sqrt{2} \int (\cos 2\omega)^{-1/2} d\omega.$$

Il perimetro totale s_2 della lemniscata sarà il quadruplo del valore di questo integrale preso fra i limiti $\omega = 0$ e $\omega = \pi/4$; dunque

$$s_2 = 4a\sqrt{2} \int_0^{\pi/4} (\cos 2\omega)^{-1/2} d\omega;$$

ossia, ponendo $2\omega = \theta$

$$s_2 = 2a\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{-1/2} d\theta;$$

applicando ora la (3) si conclude

$$(5) \quad s_2 = a \frac{\Gamma^2(1/4)}{\Gamma(1/2)},$$

che dà l'intero contorno della lemniscata mediante integrali eulerei di I specie.

J. A. Serret che ha scoperta questa notevole espressione¹⁾ ha osservato, come la lemniscata faccia parte di una classe di curve dotate della stessa proprietà. Sono quelle di equazione polare

$$(6) \quad \rho^n = \frac{(2a^n)}{2} \cos n\omega,$$

n essendo un numero intero positivo; facendo ivi $n = 1$ si ottiene un cerchio di diametro a il cui perimetro $s_1 = \pi a$ può esprimersi così

$$s_1 = a \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)},$$

formola analoga alla (5). Nel caso generale la (6) dà:

$$s = 2^{1-1/n} a \int (\cos n\omega)^{(1/n)-1} d\omega;$$

il perimetro totale s_n della curva si otterrà moltiplicando per $2n$ il valore di questo integrale preso fra $\omega = 0$ e $\omega = \pi/2n$; quindi

$$s_n = 2n \cdot 2^{1-1/n} a \int_0^{\pi/2n} (\cos u\omega)^{(1/n)-1} d\omega;$$

ora facendo $u\omega = \theta$ questa diviene

$$s_n = 2^{2-1/n} a \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{(1/n)-1} d\theta$$

onde, applicando la (3),

$$(7) \quad s_n = a \frac{\Gamma^2(1/2n)}{\Gamma(1/n)},$$

equazione del tutto analoga alla (6) e che con questa si identifica quando $n = 2$.

Possiamo aggiungere²⁾ che una espressione congenere si può stabilire per l'area totale della curva (6). Infatti l'area di un settore essendo data da

$$\frac{1}{2} 2^{\frac{2(n-1)}{n}} a^2 \int (\cos n\omega)^{\frac{2}{n}} d\omega,$$

la superficie totale S_n limitata dalla curva sarà $2n$ volte questa

¹⁾ Note sur les intégrales eulérienne de seconde espèce (G. di Liouville, T. VII, 1842).

²⁾ V. G. LORIA, Integrali eulerei e spirali sinusoidi (Prager Ber., 1897).

espressione presa fra i limiti $\omega = 0$ e $\omega = \pi/2n$; dunque

$$S_n = n \cdot 2^{\frac{2(n-1)}{n}} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\cos n\omega)^{\frac{2}{n}} d\omega;$$

quindi, ponendo $n\omega = \theta$ e poi applicando la (3) si conclude:

$$S_u = 2^{\frac{2(n-1)}{n}} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\frac{2}{n}} d\theta = 2 a^2 \frac{\Gamma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2} \right]}{\Gamma \left[\frac{2}{n} + 1 \right]}$$

Ma

$$\Gamma \left[\frac{2}{n} + 1 \right] = \frac{2}{n} \Gamma \left[\frac{2}{n} \right]; \quad \Gamma \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2} \right] = \frac{\pi^{1/2}}{2^{2/n-1}} \frac{\Gamma(2/n)}{\Gamma(1/n)};$$

dunque

$$(8) \quad S_n = 2^{\frac{2(n-2)}{n}} n \pi a^2 \frac{\Gamma(2/n)}{\Gamma^2(1/n)},$$

che è la formola annunciata. Per $n = 1$ si ha $S_1 = \pi a^2/4$ area del circolo di diametro a ; per $n = 2$ $S_2 = 2 a^2$, area della lemniscata (v. p. 259); ecc. Le (7) (8) provano che le curve rappresentate dall'equazione (6) possono servire a rappresentare gli integrali euleriali di II specie tanto col loro perimetro quanto con la loro area.

187. Prima del Serret le curve medesime erano state incontrate e studiate dal Maclaurin¹⁾; dopo di lui furono in esse ravvisate tante belle proprietà che si giudicò opportuno designarle con un nome speciale: si accordò generalmente la preferenza a quello di *spirali sinusoidi* suggerito da Haton de la Goupillière²⁾, e che noi

¹⁾ *A treatise of fluxions* (Edimburgh, 1742), p. 264 e 285. Il citato geometra giunse alle spirali sinusoidi applicando al cerchio

$$\rho' = a^n \cos \omega'$$

la trasformazione

$$\rho' = \rho^n, \quad \omega' = n\omega;$$

applicandola invece ad un cerchio disposto comunemente nel piano si ottiene una classe di curve più generali che l'ALLÉGRET (in un lavoro che citeremo a p. 551) chiamò *ciologeni*.

²⁾ *Note sur les courbes qui représentent l'équation $\rho^n = A \sin n\omega$* (Nouv. Ann., 2^a Serie, T. XV, 1876). Ivi e nelle più recenti *Notes bibliographiques* (Id., 3^a Serie, T. XVIII, 1898) il lettore troverà molti dati bibliografici sulle curve di cui si tratta. — Probabilmente HATON DE LA GOUPILLIÈRE scelse il nome di spirale sinusoidale estendendo il significato dato a questo da T. OLIVIER nel suo *Cours de géométrie descriptive* (Paris 1754, 2^a ed., p. 293).

pure adottiamo per uniformarci all'uso comune¹⁾; il numero n si dirà *indice* della curva²⁾.

Stabiliremo ora le principali proposizioni concernenti le spirali sinusoidi, dopo di avere avvertito che nella loro equazione (6) non è ora più necessario, come nel numero precedente, di supporre che il numero n sia un intero positivo; però, per ottenere una curva algebrica, è necessario supporre n razionale³⁾.

Se sull'equazione (6) si esegue la trasformazione

$$\rho = k^2 \rho_1, \quad \omega = \omega_1$$

si ottiene l'altra

$$\rho_1^{-n} = \frac{1}{2} (k^2/2a)^{-n} \cos(-n)\omega_1,$$

donde emerge che la curva inversa di una spirale sinusoidale d'indice n è una curva della stessa specie di indice $-n$.

Se μ è l'angolo della tangente alla curva col raggio vettore si ha in generale $\operatorname{tg} \mu = \rho \, d\omega/d\rho$, onde per la (6)

$$\operatorname{tg} \mu = -\cot n\omega, \quad \text{ovvero} \quad \mu = \pi/2 + n\omega;$$

questa espressione dice che in una spirale sinusoidale, se il raggio vettore ruota uniformemente intorno al polo, la tangente ruoterà pure uniformemente intorno al punto di contatto. Nell'enunciato precedente è evidentemente lecito sostituire la parola *tangente* con *normale* onde nasce il sospetto che le spirali sinusoidi siano le curve, cercate dal Conte di Fagnano⁴⁾, aventi la proprietà che « gli angoli fatti dalle corde uscenti da un punto fisso e dall'asse stiano in un rapporto costante agli angoli fatti collo stesso asse dalle normali negli estremi di dette corde ». Che tale supposizione sia conforme alla realtà si può dimostrare col breve calcolo seguente. Chiamando

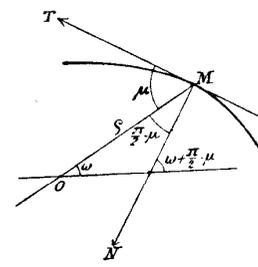


Fig. 112.

¹⁾ RIBAUCCOUR (*Etudes sur les élassoïdes etc.*, Belgique Mem. cour., T. XLIV, 1881) adopera invece il nome di *spirali di Lamé* per ricordare che questo grande geometra ne trattò sin dal 1836 (G. di Liouville, T. I, pag. 86).

²⁾ Fra le spirali sinusoidi si trovano parecchie curve note che vanno qui indicate: $n = 1$, cerchio di diametro a ; $n = -1$, retta $x = 4a$; $n = 2$, lemniscata; $n = -2$, iperbole equilatera; $n = -\frac{1}{2}$, parabola; $n = \frac{1}{2}$, cardioide.

³⁾ L'ordine della curva fu determinato dall'HALPHEN (*Etudes sur les points singuliers des courbes algébriques*, Paris 1883).

⁴⁾ *Produzioni matematiche* (Pesaro 1750), T. II, p. 375-412; *Opere matematiche*, T. II (Roma 1911), p. 319-347.

ϱ, ω le coordinate di un punto M di una delle curve cercate, μ l'angolo della corrispondente tangente col raggio vettore del punto di contatto e k il valore del rapporto costante, le condizioni del problema adanno subito (cfr. fig. 112) l'equazione:

$$k\omega = \omega + \frac{\pi}{2} - \mu \quad \text{ossia} \quad (k-1)\omega = \frac{\pi}{2} - \mu;$$

se ne deduce

$$\cot(k-1)\omega = \operatorname{tg} \mu = \varrho \, d\omega/d\varrho.$$

Scrivendo questa come segue:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} - \operatorname{tg}(k-1)\omega \cdot d\omega = 0,$$

le variabili risultano separate, onde integrando si conclude:

$$\log \varrho + \frac{1}{k-1} \log \cos(k-1)\omega = c$$

ossia

$$\varrho^{1-k} = c^{1-k} \cos(1-k)\omega.$$

Essendo questa della forma (6) è dimostrato che le curve di Fagnano sono spirali sinusoidi.

Quando n è intero queste curve possono definirsi in altro modo.

Siano

$$a e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

gli n numeri complessi rappresentanti i vertici A_k di un poligono regolare; $\varrho e^{i\omega}$ il numero corrispondente ad un punto M del piano; si avrà

$$\begin{aligned} \overline{A_0 M} \cdot \overline{A_1 M} \cdot \overline{A_2 M} \cdot \dots \cdot \overline{A_{n-1} M} &= \prod_{k=0}^{n-1} \left[\varrho^2 - 2a\varrho \cos \left[\omega - \frac{2k\pi}{n} \right] + a^2 \right] \\ &= \varrho^{2n} - 2a^n \varrho^n \cos n\omega + a^{2n}. \end{aligned}$$

Ne viene che il luogo del punto M tale che risulti

$$\overline{A_0 M} \cdot \overline{A_1 M} + \dots + \overline{A_{k-1} M} = b^n$$

avrà per equazione polare

$$\varrho^{2n} - 2a^n \varrho^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n}.$$

In particolare per $b = a$ si ha

$$\varrho^n = 2a^n \cos n\omega$$

che in sostanza coincide con la (6). Dunque: una spirale sinusoidale d'indice intero n è una speciale cassinoide a n fuochi, cioè il luogo dei punti del piano di un poligono regolare di n lati le cui distanze dai vertici del poligono danno un prodotto eguale alla potenza n^{ma} del raggio del cerchio circoscritto a quel poligono.

188. Indichiamo ora con R il raggio di curvatura della (6) e ν l'angolo della normale col raggio vettore; si avrà:

$$(9) \quad R = \frac{2^n a}{n+1} (\cos n\omega)^{\frac{1-n}{n}}, \quad \cos \nu = \cos n\omega,$$

onde

$$(10) \quad R \cos \nu = \frac{\varrho}{n+1},$$

equazione che dimostra il seguente teorema: In qualunque spirale sinusoidale è costante il rapporto della proiezione del raggio di curvatura sopra il raggio vettore alla lunghezza del raggio vettore stesso. Sia $\varrho - \varrho'$ la proiezione suddetta; essendo per la (10)

$$\varrho - \varrho' = \frac{\varrho}{n+1} \quad \text{si avrà} \quad \varrho' = \frac{n\varrho}{n+1}$$

e la (6) diverrà:

$$\left[\frac{n+1}{n} \right]^n \varrho'^n = \frac{(2a)^n}{2} \cos n\omega \quad \text{o anche} \quad \varrho'^n = \frac{1}{2} \left[\frac{2na}{n+1} \right]^n \cos n\omega;$$

essendo quest'equazione della stessa forma della (6) si vede che in una spirale sinusoidale il luogo delle proiezioni dei centri di curvatura sopra i corrispondenti raggi vettori è un'altra spirale sinusoidale dello stesso indice ed avente il medesimo polo¹⁾.

La proprietà espressa dall'equazione (10) è caratteristica per le spirali sinusoidi e per un'altra curva che può considerarsi come un caso limite di queste²⁾. Se, infatti, è $\frac{\varrho}{R \cos \nu} = \text{cost.}$, detto m il

¹⁾ Sussiste anche la proposizione: « Se una spirale sinusoidale d'indice n ruotola sopra una curva di RIBAUCCOUR (v. Lib. VI, Cap. XV) d'indice $2n-1$, il suo polo descrive la direttrice di questa » (H. WIELEITNER, Arch. Math. Phys., III Ser., T. XI, 1906, p. 308).

²⁾ ALLÉGRET, Remarques sur une certaine famille de courbes planes

valore di questa costante e sostituendo a R e $\cos \nu$ i loro valori si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\rho^2 - \rho \frac{d^2 \rho}{d \omega^2} + 2 \left[\frac{d \rho}{d \omega} \right]^2 = m \left[\rho^2 + \left[\frac{d \rho}{d \omega} \right]^2 \right],$$

ossia

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{d \omega^2} - \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{d \rho}{d \omega} \right]^2 + m - 1 = 0$$

$$1 + \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{d \rho}{d \omega} \right]^2$$

Se $m \neq 1$ trasformeremo quest'equazione nell'altra

$$\frac{d}{d \omega} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d \omega} \right] + m - 1 = 0$$

onde, con un'opportuna scelta della costante d'integrazione,

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d \omega} \right] + (m - 1) \omega = 0$$

ossia

$$\frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d \omega} + \operatorname{tg} (m - 1) \omega = 0.$$

Una nuova integrazione dà

$$\log \rho = \frac{1}{m - 1} \log \cos (m - 1) \omega + k,$$

ove k è una costante, ossia

$$\rho^{m-1} = k^{m-1} \cos (m - 1) \omega;$$

quest'equazione, essendo della forma (6), rappresenta una spirale sinusoidale. Nel caso escluso $m = 1$ l'equazione differenziale del problema è

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho}{d \omega^2} - \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{d \rho}{d \omega} \right]^2 = 0,$$

che, integrata dà

$$\frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d \omega} = c,$$

(Nouv. Ann. de Math., 2^a Serie, T. XI, 1872); M. DU CHATENET, *Sur les courbes dans lesquelles la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant* (Id., 3^a Serie, T. V, 1886).

ossia

$$\frac{d \rho}{\rho} = c d \omega$$

e integrando

$$\rho = b e^{c \omega},$$

che vedremo (Lib. VI, Cap. VII) rappresentare una spirale logaritmica: questa dunque condivide con le spirali sinusoidi la proprietà espressa dall'equazione (10)¹).

L'equazione (10) conduce ad un'altra conseguenza. Consideriamo, oltre la spirale rappresentata dall'equazione (6), un'altra curva analoga tangente a quella nel punto (ρ, ω) ; indicandone con n' l'indice e con R' il raggio di curvatura avremo:

$$(10') \quad R' \cos \nu = \frac{\rho}{n' + 1};$$

dalle (10) e (10') si trae

$$\frac{R}{R'} = \frac{n' + 1}{n + 1};$$

è questa una equazione che esprime la notevole proprietà di cui vedemmo (p. 398) fornite le curve triangolari simmetriche). Ora

¹ Nella seduta che tenne la Società matematica di Francia il 3 marzo 1875, l'HALPHEN fece una comunicazione *Sur les courbes planes dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale polaire* (Bulletin, T. III, 1874-75, p. 182) la quale fu pubblicata per esteso soltanto nel T. IV (1924) delle *Oeuvres d'Halphen* col titolo *Sur une famille de courbes planes*. L'equazione differenziale delle curve in questione è

$$\frac{\left\{ \rho^2 + (d\rho/d\omega)^2 \right\}^{3/2}}{\rho^2 - \rho d^2\rho/d\omega^2 + 2 d\rho/d\omega} = k^2 \left\{ \rho^2 + (d\rho/d\omega)^2 \right\}^{1/2}$$

ossia

$$\rho^2 - \rho \frac{d^2 \rho}{d \omega^2} + 2 \frac{d \rho}{d \omega} = \frac{1}{k} \left[\rho^2 + \left[\frac{d \rho}{d \omega} \right]^2 \right];$$

si deduce da ciò che le dette curve sono in generale spirali sinusoidi e in particolare spirali logaritmiche.

² Consideriamo ad esempio le spirali sinusoidi corrispondenti agli indici $n = 1$, $n = \frac{1}{2}$ e applichiamo la formola trovata; otterremo

$$R' = \frac{4}{3} R$$

dunque: *Il raggio di curvatura in un punto di una cardiode è eguale a 4/3 del raggio del cerchio che tocca ivi la curva e passa per il polo*: v. L. SIRE, *Sur le rayon de courbure de la cardiode* (Revue de math. spéc., T. XVIII, 1908).

tale coincidenza non è fortuita e per vederne la vera ragione mettiamo nella (6) n in $-m$ e scriviamola in conseguenza:

$$(6') \quad \rho^m \cos m \omega = 2 (2a)^m;$$

se ora poniamo $\rho e^{i\omega} = x + iy$, verrà

$$\rho^m (\cos m \omega + i \sin m \omega) = (x + iy)^m,$$

$$\rho^m (\cos m \omega - i \sin m \omega) = (x - iy)^m,$$

epperò la (6') assumerà questo aspetto:

$$(11) \quad \left[\frac{x+iy}{2a} \right]^m + \left[\frac{x-iy}{2a} \right]^m = 4;$$

la quale prova: *le spirali sinusoidi sono curve simmetriche triangolari rispetto ad un triangolo avente due vertici nei punti ciclici del piano.* Questo risultato abilita a dedurre da un teorema dimostrato a p. 387 che se m è un numero razionale $\pm p/q$, l'equazione (11) rappresenta una curva algebrica il cui ordine è espresso da $p q$ o da $2pq$ secondo che m è positivo o negativo. È notevole che l'equazione delle spirali sinusoidi sotto la forma (11) venne ottenuta dal Beltrami cercando¹⁾ quei sistemi di curve piane i quali, venendo ruotati per un angolo dato intorno ad un punto del loro piano, segano i sistemi primitivi sotto un angolo costante parimente dato; resta così dimostrato che quel problema di Beltrami è risoluto dalle curve di cui andiamo esponendo le qualità più spiccate.

Delle spirali sinusoidi va stabilita, oltre le equazioni polare e cartesiana, l'equazione intrinseca²⁾. Per trovarla poniamo per brevità $\frac{(2a)^n}{2} = \alpha^n$; la (6) diverrà quindi $\rho^n = \alpha^n \cos n \omega$ e darà:

$$s = \alpha \int (\cos n \omega)^{\frac{1-n}{n}}, \quad R = \frac{\alpha}{n+1} (\cos n \omega)^{\frac{1-n}{n}};$$

eliminando ω si trova

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left[\frac{n+1}{\alpha} R \right]^{2n/(n+1)} - 1}};$$

¹⁾ V. la nota *Intorno ad alcuni sistemi di curve piane* (Annali di Matem., T. IV, 1861, oppure T. I delle *Opere matematiche*).

²⁾ E. CESÀRO, *Lezioni di geometria intrinseca* (Napoli, 1896), p. 51.

ponendo per brevità $\frac{\alpha}{n+1} = b$ potremo concludere che l'equazione intrinseca di tutte le spirali sinusoidi di indice n è della seguente forma:

$$(12) \quad s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{(R/b)^{2n/(n+1)} - 1}}$$

189. È estraneo al nostro compito il fare conoscere anche le proprietà meccaniche delle spirali sinusoidi¹⁾ ed il loro intervento in questioni di geodesia²⁾.

Entra invece del nostro programma l'esposizione di una classificazione dal punto di vista topologico delle curve di cui ci stiamo occupando³⁾. Supporremo sempre che l'indice della curva sia un numero razionale di cui indicheremo il valore assoluto con $p:q$, p e q essendo numeri fra loro primi. Immagineremo poi che un semi-raggio uscente dal polo e coincidente in origine con l'asse polare ruoti (p. es.) nel senso positivo; è facile vedere che per ottenere tutti i punti della curva una volta ciascuno è necessario e sufficiente far compiere a quel semi-raggio q giri completi. Notiamo anche che la proposizione dimostrata a pag. 549 abilita ad occuparsi prima delle curve ad indice positivo, giacchè le proprietà di quelle ad indice negativo si deducono per inversione da quelle delle curve ad indice positivo. L'equazione (6), che, per brevità, scriveremo d'or in poi sotto la seguente forma

$$(6') \quad \rho^n = l^n \cos n \omega$$

non muta cambiando il segno di ω ; ciò prova che tutte le spirali sinusoidi sono curve simmetriche rispetto all'asse polare. Ma v'ha di più: se si fa ruotare l'asse polare di un angolo eguale $= 2\pi/n$ e si chiama $\tilde{\omega}$ la nuova coordinata angolare, si ha

$$\omega = \tilde{\omega} + \frac{2\pi}{n}$$

e l'equazione (6') diviene

$$\rho^n = b^n \cos \left[n \left(\tilde{\omega} + \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

¹⁾ O. BONNET, *Propriétés géométriques et mécaniques de quelques courbes* (G. di Liouville, T. IX, 1844); HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Thèse d'Astronomie* (Paris 1857) e *Sur le minimum du potentiel de l'arc* (Ass. fr., Besançon 1893).

²⁾ A. WINCKLER, *Bemerkung über einige Formeln der Geodäsie* (G. di Crelle, T. L, 1855). La curva di diffrazione ivi incontrata è appunto una spirale sinusoidale.

³⁾ G. LORIA, *Topologia delle curve di Lamé e delle spirali sinusoidi* (Atti dell'Acc. Pontaniana, 1909).

ossia

$$\varrho^n = l^n \cos n \tilde{\omega}.$$

Essendo questa equazione identica di forma all'equazione di partenza si vede che anche il nuovo asse polare gode la proprietà di essere un asse di simmetria; emerge da ciò che *qualunque spirale sinusoidale d'indice* $n = \pm p/q$ *possiede* p *assi di simmetria, di cui due consecutivi qualunque formano fra loro l'angolo* $2\pi p/q$. Per gli estremi di tali assi e per essi soltanto il raggio vettore raggiunge il valore l , massimo o minimo secondochè l'indice è positivo o negativo. Se invece si fa $\omega = \alpha\pi/n$, ove α è un intero qualunque, si ha $\varrho = 0$ oppure $= \infty$, secondochè l'indice è positivo o negativo; ciò prova che nel primo caso per il polo passano p rami della curva, mentre nel secondo questa ha p punti all'infinito nelle suindicate direzioni.

Per fissare le idee supponiamo l'indice positivo ed osserviamo che, se un punto distinto dal polo è doppio per la curva rappresentata dall'equazione (6'), dettate ϱ' , ω' e ϱ'' , ω'' le coppie di coordinate, si deve palesemente avere

$$\omega' - \omega'' = 2\alpha\pi, \quad \cos n\omega' = \cos n\omega''$$

ove α è un numero intero convenientemente scelto, ovvero

$$(13) \quad \omega' - \omega'' = 2\alpha\pi, \quad n\omega' = \pm n\omega'' + 2\beta\pi,$$

essendo β un altro numero intero da determinarsi. Ora se si prende il segno $+$, essendo $n = p : q$, queste equazioni divengono

$$\omega' - \omega'' = 2\alpha\pi, \quad \omega' - \omega'' = \frac{2\beta q}{p}\pi$$

e queste dimostrano che deve aversi

$$\frac{\alpha}{q} = \frac{\beta}{p}$$

Se ora si tiene conto dell'essere α, β numeri interi e p, q numeri fra loro primi si vede che la soluzione minima di questa equazione indeterminata è $\alpha = q, \beta = p$; ora è chiaro che ai valori ω'' e $\omega'' + 2q\pi$ della coordinata angolare non corrisponde un punto doppio della curva, dal momento che, come osservammo, il punto generatore dopo q giri riprende ad occupare le posizioni per le quali è già passato. Se invece nelle equazioni (13) si prende il segno $-$ esse divengono

$$\omega' - \omega'' = 2\alpha\pi, \quad \omega' + \omega'' = \frac{2\beta q}{p}\pi$$

e danno

$$(14) \quad \omega' = \alpha\pi + \frac{\beta q}{p}\pi, \quad \omega'' = -\alpha\pi + \frac{\beta q}{p}\pi$$

Per ottenere dei punti doppi reali e distinti bisogna attribuire agli interi α, β dei valori tali che i corrispondenti valori di ω' (o ω'') siano fra loro incongrui mod. $2q$, onde intanto ad α basterà attribuire i valori $0, 1, \dots, q-1$, mentre a β saranno da attribuirsi i valori $0, 1, \dots, p-1$; bisognerà poi escludere quelli fra tali valori della coordinata angolare a cui corrispondono valori immaginari del raggio vettore ϱ . Se ora si ricorda che due punti corrispondenti in un'inversione sono allineati col polo e che se un punto è doppio per una curva quello che ad esso corrisponde in un'inversione è doppio per la curva corrispondente, si vede che la coordinata angolare di un punto doppio di una spirale sinusoidale il cui indice ha per valore assoluto $p : q$ è della forma $\alpha\pi + \beta q\pi/p$. Giova rilevare che, essendo, in forza dell'equazione (14), per un punto doppio

$$n\omega' = \frac{p}{q}\omega' = \frac{\alpha p}{q}\pi + \beta\pi,$$

quando $q = 2$, per $\alpha = 1$ si ha $\varrho = 0$, onde i presunti punti doppi vengono a cadere nel polo. Notiamo anche che le spirali sinusoidi ad indice intero ($q = 1$) non hanno punti doppi, tranne il polo quando l'indice è positivo.

190. Per determinare le varie forme delle spirali sinusoidi, cominceremo dal considerare quelle d'indice positivo, distinguendo le tre forme aritmetiche sotto cui l'indice può presentarsi:

a) $n = \frac{2h+1}{2k}$. La più semplice delle curve di tale specie è la cardioide ($h = 0, k = 1$). Scritta l'equazione (6') sotto la forma

$$\varrho = l \sqrt[2h+1]{\left[\cos \frac{2h+1}{2k}\omega\right]^{2h}}$$

si vede che ad ogni valore reale di ω corrisponde un valore reale determinato, unico, positivo di ϱ . Per $\omega = 0$, si ha $\varrho = l$; se si fa crescere ω a partire da 0, ϱ diminuisce sino ad annullarsi per $\omega = k\pi/(2h+1)$; continuando a crescere riprende in ordine inverso i valori prima assunti, finchè per $\omega = 2k\pi/(2h+1)$ si ha un nuovo massimo $= l$. Continuando a far crescere ω sino al valore $4k$ si ottengono le $2h+1$ foglie costituenti la curva. Questa generalmente ha dei punti doppi sopra le semi-rette formanti con l'asse

polare angoli della forma $\alpha\pi + \frac{2\beta k\pi}{2h+1}$, eccetto il caso $k=1$. Così ad es. per $h=k=2$ si ha una curva (fig. 113) la quale ha cinque punti doppi posti sopra le semi-rette che formano con l'asse polare gli angoli $\pi/5, 3\pi/5, \pi, 7\pi/5, 9\pi/5$; mentre quella che corrisponde all'ipotesi $h=k=1$ (fig. 114) è costituita da tre foglie non intrecciate; tale curva ($\rho^3 = l^3 \cos^3 2\omega/3$) è di 12° ordine e fu incontrata da W. Roberts¹⁾.

b) $n = \frac{2h+1}{2k+1}$. Scritta l'equazione della curva sotto la forma

$$\rho = a \sqrt[2h+1]{\left[\cos \frac{2h+1}{2k+1} \omega \right]^{2k+1}}$$

si vede che ad ogni valore reale di ω corrisponde un unico valore reale di ρ , il quale è positivo se ω soddisfa alla relazione della forma

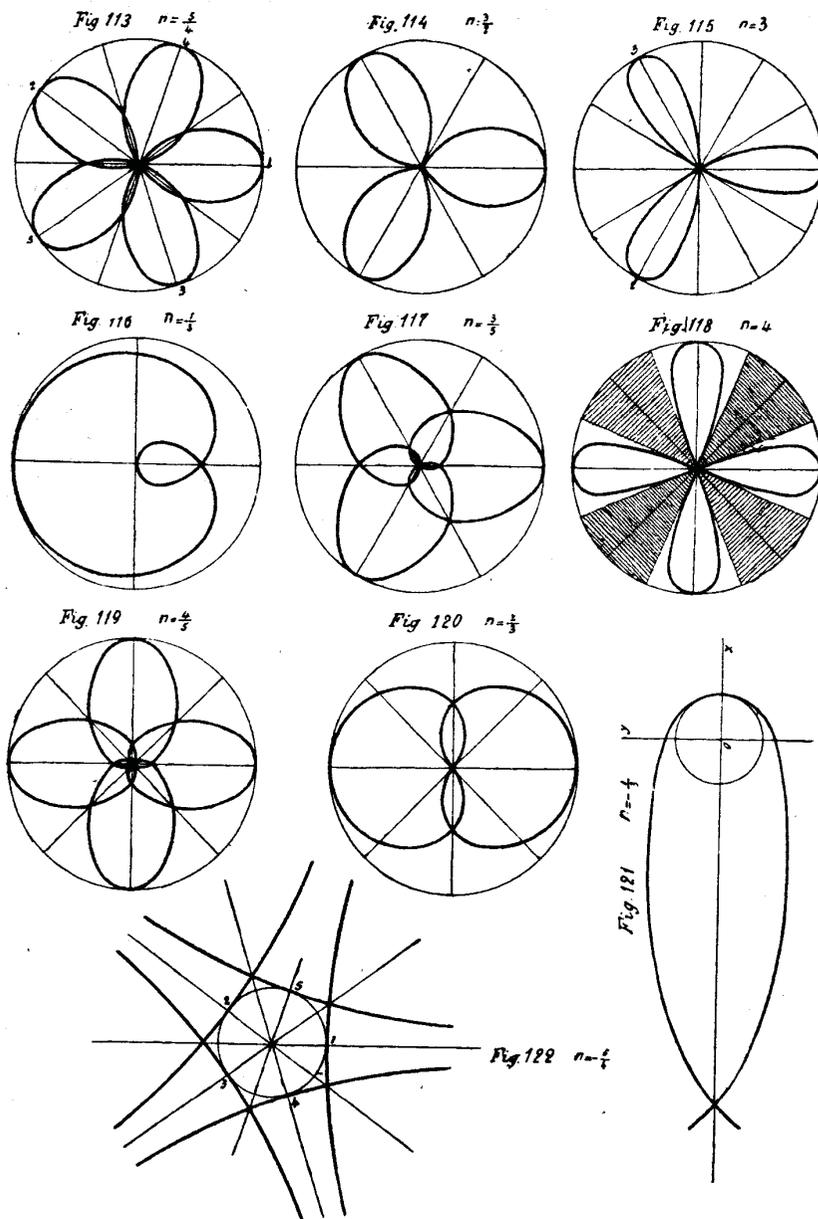
$$(4\alpha - 1) \frac{\pi}{2} < \frac{2h+1}{2k+1} \omega < (4\alpha + 1) \frac{\pi}{2}$$

(ove α è intero), negativo in qualunque altro caso. Così pàr $\omega=0$ si ha $\rho=l$; facendo ad a crescere ω , ρ diminuisce finchè per $\omega = \frac{2k+1}{2h+1} \frac{\pi}{2}$ si annulla; proseguendo ω a crescere, ρ diventa nega-

tivo e tale rimane raggiungendo per $\omega = \frac{2k+1}{2h+1} \pi$ il suo valore minimo $= -l$. A partire da questo valore ρ ricomincia a crescere e, dopo essersi annullato per $\omega = \frac{2k+1}{2h+1} \frac{3\pi}{2}$, riacquista nuova-

mente il valore massimo $\rho = a$ quando $\omega = \frac{2k+1}{2h+1} 2\pi$. Facendo ora crescere ω ancora ρ riprende gli stessi valori e nello stesso ordine, finchè esaurite le $2h+1$ foglie componenti la curva, si ritorna al punto da cui si presero le mosse. I punti doppi della curva si trovano sopra le semirette formanti con l'asse polare gli angoli della forma $\alpha\pi + \frac{2k+1}{2h+1} 2\beta\pi$.

Così p. es. nel caso $h=0, k=1$ (che è il più semplice che s'incontra in questa categoria dopo il cerchio, per cui $n=1$) si ha una curva costituita da una sola foglia avente un nodo sull'asse polare (fig. 115); mentre per $h=1, k=2$ si ha una curva di 6° ordine ri-



Spirali sinusoidi.

¹⁾ Note sur la rectification de quelque courbes (Liouville's Journal, XII, 1847).

sultante da tre foglie (fig. 117) segantisi a due a due in sei punti situati sopra le tre semirette che formano con l'asse polare gli angoli $\pi/3$, π , $5\pi/3$; è la curva che già incontrammo (n. 102) e che allora chiamammo *Sestica di Cayley*.

Un'altra notevole spirale sinusoidale della medesima categoria corrisponde all'ipotesi $n = 3$; essa venne incontrata per la prima volta da W. Roberts; ma, avendo L. Kiepert eseguito sulla rettificazione di essa ricerche importanti¹⁾ applicando la teoria delle funzioni ellittiche, si chiama da molti *Kiepert'sche Kurve* (fig. 115).

c) $n = \frac{2h}{2k+1}$. Analogamente a quanto fecesi nei casi precedenti si scriva l'equazione della curva sotto la forma seguente:

$$\rho = l \sqrt[2h]{\left[\cos \frac{2h}{2k+1} \omega \right]^{2k+1}}$$

si vedrà allora che ad ogni valore di ω che rende $\cos n\omega$ positivo, ρ assume due valori eguali ed opposti; la curva è quindi simmetrica rispetto al polo, epperò ogni ramo di essa che passa per tal punto ha ivi un'inflessione; il lettore conosce già il presentarsi di tale circostanza nella lemniscata, che è la più semplice spirale sinusoidale dell'attuale categoria. In generale per $\omega = 0$ si ha $\rho = \pm l$; se ora si fa crescere ω , ρ diminuisce in valore assoluto sino ad annullarsi per $\omega = \frac{2k+1}{2h} \frac{\pi}{2}$; a partire da questo valore e per tutti i valori

di ω compresi nell'intervallo $\frac{(2k+1)\pi}{4h} \dots \frac{3(2k+1)\pi}{4h}$, ρ è immaginario (v. la fig. 118 ove si è supposto $n = 4$). Invece nell'intervallo $\frac{3(2k+1)\pi}{4h} \dots \frac{(2k+1)\pi}{h}$ il raggio vettore riparte dal valore 0 e ri-

prende in senso inverso i valori assunti prima sino a raggiungere i valori $\pm l$; continuando a far crescere ω si ottengono successivamente ed in totale $2h$ foglie che costituiscono la curva. Questa, se ha punti doppi, li possiede sopra le rette formanti con l'asse polare angoli della seguente forma $\alpha\pi + \beta \frac{2k+1}{2h} \pi$. Così p. es. se

$n = 2/3$ (fig. 120) si ha la spirale sinusoidale che è la podaria di una lemniscata rispetto al polo; è una curva risultante da due foglie che s'intrecciano sopra la retta condotta dal polo perpendicolarmente all'asse polare. Maggiori intrecci presenta la curva (fig. 119)

¹⁾ S. la Diss. già citata *De curvis, quarum arcus integralibus ellipticis prioris generis exprimitur* (Berolini 1870) e la memoria *Ueber eine geometrische Anwendung der completen Multiplication der elliptischen Funktionen* (Crelle's Journal, LXXIV, 1872).

che corrisponde all'ipotesi $n = 4/5$; essa ha otto punti doppi sopra le rette che formano con l'asse polare angoli multipli di 45° .

Per ottenere le forme delle spirali sinusoidi d'indice negativo applicheremo ai risultati ora stabiliti un'inversione col centro nel polo. Vedremo allora che una spirale sinusoidale d'indice $n = -p:q$ consta di p foglie infinite, aventi per origini altrettanto punti del cerchio fondamentale, punti le cui congiungenti col polo sono altrettanti assi di simmetria della curva, la quale inoltre è simmetrica rispetto all'origine se p è pari; tutti i punti reali della curva sono esterni al cerchio anzidetto. Le figure 121 e 122 danno le forme delle spirali sinusoidi di indici $-1/3$ e $-5/4$; la prima è una cubica che già incontrammo (v. pag. 109) e di cui conosciamo parecchie definizioni.

Chiudiamo osservando essere dotate di speciale importanza tutte le spirali sinusoidi rappresentabili con equazioni della forma

$$\rho = \frac{p}{2} \frac{1}{\cos^n \frac{\omega}{n}},$$

perchè esse appartengono alla grande famiglia delle curve settrici. Per dimostrare questo fatto importante, notiamo che, detto μ l'angolo della tangente nel punto $P(\rho, \omega)$ col raggio vettore, si ha:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\rho d\omega}{d\rho} = \cot \frac{\omega}{n} = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n} \right]$$

onde

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n};$$

condotta quindi dal polo la OP_1 perpendicolare a quella tangente avremo:

$$\operatorname{ang} P_1 P O = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n}, \quad \operatorname{ang} P_1 O P = \frac{\omega}{n};$$

ma se OA è l'asse polare si

$$\operatorname{ang} P O A = \omega$$

onde

$$\operatorname{ang} P_1 O P = \frac{1}{n} \operatorname{ang} P O A.$$

Volendo quindi dividere un angolo α in n parti eguali, lo si di-

sponga con un lato steso sopra OA ; l'altro lato taglierà la curva considerata in certi punti P ; condotta la tangente in uno di essi e la perpendicolare OP_1 alla medesima, sarà P_1OP uno degli angoli cercati¹⁾.

In geometria descrittiva s'incontrano le curve di equazioni

$$\rho = \frac{\text{sen}^n}{\text{cos}^n} m \omega^2.$$

evidentemente più generali delle spirali sinusoidi.

¹⁾ Pel solo caso $n = 3$ questa proprietà era stata avvertita da F. GAUSS (Progr. Bunzlau, 1890).

²⁾ F. J. (GABRIEL MARIE), *Exercices de géométrie descriptive*, III éd. (Tours et Paris, 1893), p. 785.

CAPITOLO XIX

Le curve di Lissajous.

191. Allo studio matematico di alcuni fenomeni di acustica la geometria è debitrice di una classe di curve a cui dedichiamo l'ultimo Capitolo del presente Libro¹⁾; sono quelle che — dal nome del fisico francese che per primo le ha considerate²⁾ in Europa³⁾ — si chiamano *curve di Lissajous*. Le definiremo mediante le due equazioni

$$(1) \quad x = a \text{sen}(mt + \gamma), \quad y = b \text{sen}(nt + \delta),$$

che ne danno la rappresentazione parametrica; a e b sono costanti reali qualunque, γ e δ angoli dati ad arbitrio e m, n numeri conosciuti. Questi possono sempre suporsi positivi, perchè, ove nol fossero, si prenderebbe come parametro — t invece di t e si cambierebbe il senso positivo sopra uno o entrambi gli assi coordinati. Se il rapporto m/n è irrazionale si vede facilmente che la curva non può essere algebrica. Se esso è razionale, si possono sempre supporre interi, ed inoltre fra loro primi, chè se non fossero tali si ridurreb-

¹⁾ Altre curve fisico-matematiche sono studiate nella memoria di EULERO intitolata: *Problème: Un corps étant attiré en raison réciproque du carré des distances vers deux points fixes donnés, trouver le cas ou la courbe décrite par ce corps sera algébrique* (Mem. de Berlin, T. XVI, 1760); i risultati ivi esposti vennero esposti e completati da LEGENDRE nel T. II (Paris 1817) de' suoi *Exercices de Calcul intégral*.

²⁾ LISSAJOUS, *Mémoire sur la position des noeuds dans les lames qui vibrent transversalement* (Ann. de Phys. et de Chimie, 3^a Serie, T. XXX, 1850). Cf. JAMIN, *Cours de physique*, 4^a ed., T. III (Paris 1887), p. 147 e seg.

³⁾ Questa restrizione è necessaria per il fatto che prima erano state incontrate da NATANIELE BOWDICH nella memoria *On the motion of a pendulum suspended from two points* (Mem. Americ. Acad., T. III, Part II, 1815); ciò fu osservato da J. LOVERING nella nota *Anticipations of the Lissajous curves* (Proc. Americ. Acad., Nuova Ser., T. VIII, 1881); v. anche F. CAJORI, *A history of physics* (London, 1899), p. 285.

bero prendendo t/Λ (ove Λ è il minimo multiplo dei denominatori di m, n) per nuovo parametro. Finalmente scegliendo opportunamente le notazioni si può fare sempre in modo che risulti $n \geq m$. Riassumendo: noi rappresenteremo una curva di Lissajous mediante le equazioni

$$(2) \quad x = a \operatorname{sen} (m t + \gamma), \quad y = b \operatorname{sen} n t,$$

ove i numeri m, n sono interi positivi fra loro primi, il secondo dei quali è maggiore o eguale al primo ¹⁾.

La determinazione delle singolarità di una siffatta curva può farsi in due modi:

I. Il più elementare ²⁾ è una semplice applicazione dei procedimenti classici per discutere una curva rappresentata mediante coordinate cartesiane, applicazione che non presenta difficoltà tanto note essendo le funzioni circolari che compaiono nella (2); per es. la ricerca dei punti doppi equivale evidentemente alla ricerca delle coppie di valori di t' e t'' che rendono

$$\operatorname{sen} (m t' + \gamma) = \operatorname{sen} (m t'' + \gamma), \quad \operatorname{sen} n t' = \operatorname{sen} n t''.$$

II. L'altro metodo ³⁾ è più artificioso ed elevato. In esso si pone

$$x = \frac{x_2}{x_3}, \quad y = \frac{x_1}{x_3}, \quad e^{it} = \frac{\lambda}{\mu}$$

e si ottengono quindi, invece delle (2),

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{a}{2i} \frac{e^{i\gamma} \lambda^{2m} - e^{-i\gamma} \mu^{2m}}{\lambda^m \mu^m}, \quad \frac{x_1}{x_3} = \frac{b}{2i} \frac{\lambda^{2n} - \mu^{2n}}{\lambda^n \mu^n};$$

chiamando ρ un fattore di proporzionalità queste equazioni si possono surrogare con le tre altre seguenti:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho x_1 = b (\lambda^{2n} - \mu^{2n}) \\ \rho x_2 = a (e^{i\gamma} \lambda^{n+m} \mu^{n-m} - e^{-i\gamma} \lambda^{n-m} \mu^{n+m})^3 \\ \rho x_3 = 2i \lambda^n \mu^n \end{array} \right.$$

¹⁾ Cfr. V. STROUHAL, *Analytische Darstellung der Lissajous'schen Figuren* (Prager Ber., 1902).

²⁾ HIMSTEDT, *Ueber Lissajous'schen Curven* (Arch. der Math., T. LXX, 1884).

³⁾ W. BRAUN, *Die Singularitäten der Lissajous'schen Stimmgabelcurven* (Diss. Erlangen 1875); cf. il sunto dal titolo *Ueber Lissajous Curven* (Math. Ann., T. VIII, 1875).

Essendo così espresse le coordinate omogenee di un punto qualunque delle curve di Lissajous mediante forme binarie di grado $2n$ in λ, μ , risulta aperto l'adito per l'applicazione a quelle curve della teoria delle forme binarie. Anzitutto le (3) mostrano che le curve di Lissajous sono algebriche razionali dell'ordine $2n$; va però notato che esistono valori dell'angolo γ , per cui si ottiene una curva d'ordine n contata due volte; se m e n sono entrambi dispari questi valori singolari sono $k\pi/n$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), mentre se uno di quei numeri è dispari quei valori sono $(2k+1)\pi/2n$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Nel caso generale la curva possiede $2(n-m+1)$ cuspidi e $(2n-1)(n-1)$ punti doppi, dei quali $2nm - (n+m)$ a distanza finita; ha inoltre $2(m-1)$ tangenti di flesso all'infinito e $2(n+m)$ al finito, delle quali $2(n-m)$ reali; finalmente ha $(2n+2m-1)(n+m-1) - 2(n+2m-1)$ tangenti doppie; è in conseguenza della classe $2(n+m)$. Ma quando γ ha uno dei valori suindicati, la curva ha soltanto $n-m+1$ cuspidi e $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi, dei quali $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ a distanza finita; ha inoltre $m-1$ tangenti di flesso all'infinito e $n+m-3$ a distanza finita, delle quali soltanto $n-m-1$ sono reali; le sue tangenti doppie sono in numero di $\frac{(n+m-2)(n+m-3)}{2} - (n+2m-4)$, epperò la sua classe è $n+m-1$. Non ci arresteremo a dimostrare queste proposizioni perchè le curve di Lissajous occupano nella geometria un posto assai secondario ¹⁾. Notiamo soltanto che fra esse, oltre alla retta ed alla ellisse, si trova una notevole curva del quart'ordine rettificabile ²⁾ elementarmente; è quella rappresentata come segue:

$$x = 4\sqrt{2}b \operatorname{sen}(\theta + a), \quad y = b \operatorname{sen} 2\theta.$$

Le curve di Lissajous godono alcune proprietà degne di nota anche nel caso in cui i numeri m e n non siano razionali. Osserviamo infatti che eliminando t fra le equazioni (1) si ottiene

$$\frac{1}{m} \left[\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{a} - \gamma \right] = \frac{1}{n} \left[\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{y}{b} - \delta \right]$$

donde differenziando

¹⁾ Per una descrizione meccanica delle curve di LISSAJOUS vedi J. C. W. ELLIS, *A machine for tracing curves described by points of a vibrating string* (Cambridge Proc., T. II, 1870).

²⁾ E. SANG, *On a singular case of rectification in lines of fourth order* (Edinburgh Proc., T. VII, 1892).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m \sqrt{a^2 - x^2}}{n \sqrt{b^2 - y^2}};$$

ciò prova che: i punti di contatto delle tangenti condotte alla considerata curva del punto $P(x_0, y_0)$ appartengono alla curva di quarto ordine

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{m \sqrt{a^2 - x^2}}{n \sqrt{b^2 - y^2}};$$

P ne è un punto doppio. Invece i punti di contatto delle tangenti formanti con Ox l'angolo λ stanno sulla curva

$$\frac{m \sqrt{a^2 - x^2}}{n \sqrt{b^2 - y^2}} = \frac{\text{sen } \lambda}{\text{cos } \lambda}$$

che è l'iperbole di equazione

$$m^2 \cos^2 \lambda \cdot x^2 - n^2 \text{sen}^2 \lambda \cdot y^2 = m^2 a^2 \cos^2 \lambda - n^2 b^2 \text{sen}^2 \lambda.$$

Dettine p e q i semiassi si ha

$$\frac{1}{p^2} = \frac{m^2 \cos^2 \lambda}{m^2 a^2 \cos^2 \lambda - n^2 b^2 \text{sen}^2 \lambda}$$

$$\frac{1}{q^2} = \frac{n^2 \text{sen}^2 \lambda}{m^2 a^2 \cos^2 \lambda - n^2 b^2 \text{sen}^2 \lambda}$$

onde fra essi passa la relazione

$$\frac{a^2}{p^2} - \frac{b^2}{q^2} = 1$$

che è indipendente da m e n .

La quadratura della curva può eseguirsi elementarmente, essendo, in forza delle (2),

$$\int y dx = \frac{m a b}{2} \left\{ \frac{\cos [(m - n)t + (\gamma - \delta)]}{m - n} - \frac{\cos [(m + n)t + (\gamma - \delta)]}{m + n} \right\} + \text{cost.};$$

altrettanto non può ripetersi in generale riguardo alla rettificazione.

INDICE DEI NOMI

A

Adam, 356, 407.
 Agnesi, 60, 72, 94, 104.
 d'Alembert, 63, 248, 249, 257, 316.
 Allégre, 107, 528, 548, 551.
 Almeida, 463.
 Alvera, 24.
 Ameseder, 129, 317.
 Amodeo, 177.
 Amstein 180, 317.
 degli Angeli, 357.
 Antifonte, 5, 7.
 Aoust, 385.
 Apollonio, 2, 6, 10, 11.
 Appell, 353, 501, 511.
 Archibald, 107, 183, 197.
 Archimede, 2, 7, 10, 39, 358, 359, 449, 457.
 Archita, 448, 449.
 Aristeo, 9, 10, 11.
 Aristotele I,
 Ariza, 232.
 Arveson, 445.
 Astor, 110.
 Aubry, 161, 166, 222, 234, 236, 420, 431.
 Auth, 428.
 Axt, 430, 434.
 Azémar, 180.

B

Bacon, 207.
 Balstrand, 36, 71.
 Ball Rouse, 14.
 Bancroft, 281.
 Barbarin, 84, 292, 347.
 Barbour, 279.

Barisien, 29, 40, 172, 290, 291, 298, 299, 309, 315.
 Barnes, 85.
 Barrow, 63, 235, 285.
 Basset, 133, 284, 291.
 Bateman, 25.
 Baudin, 68.
 Bauer, 302, 305.
 Beaudeau, 42, 170.
 Beaugrand, 356, 357.
 Peers, 122.
 Bellacchi, 40, 60, 79, 96, 257.
 Bellavitis, 11, 60, 110, 384.
 Beltrami, 13, 197, 554.
 Bérard, 133.
 Berghoff, 79.
 Bernoulli Giac., 181, 219, 220, 255-266, 269, 364.
 Bernoulli Giov., 48, 49, 63, 64, 57, 151, 170, 172, 181, 255, 364, 365, 520, 528.
 Bertini, 121.
 Berzolari, 266.
 Bierens de Haan, 257, 260.
 Binet, 344.
 Bioche, 31.
 Bjerknæs, 34.
 Blake, 432.
 Blaschke, 414.
 Basel, 57.
 Bobek, 304.
 Böhmel, 197.
 du Bois, 435.
 Bolyai G., 7.
 Bonati, 265.
 Boncompagni, 71.
 Bond Sprague, 514.
 Bonnet, 241, 265, 555.
 Booth, 73, 79, 94, 159, 162, 172, 258, 510.

Borel, 122.
 Bouasse, 137, 280.
 Bouquet, 122, 427, 525.
 Boutin, 313.
 Bowditsch, 563.
 Bozovic, 280.
 Bragelogne, 63, 121, 122.
 Brandenberger, 141.
 Braude, 303, 310, 429.
 Braun, 564.
 Braunmühl, 9, 270.
 Breton (de Champ), 319.
 Bretschneider C. A., 81.
 Bretschneider W. 133.
 Brianchon, 12.
 Bricard, 328.
 Brill, 124, 129, 130, 132.
 Brioschi, 126, 127.
 Briot, 122, 127, 525.
 Brisone, 5, 7.
 Brocard, 73, 100, 118, 180, 199,
 200, 201, 205, 229, 231, 299, 344,
 432, 525.
 Bromwich, 299.
 Brooks, 23.
 Brougham, 316.
 Brusotti, 400.
 Butzenberger, 148.
 Buhl, 234.
 Burali-Forti, 471, 472.
 Burmester H., 268.
 Burmester L., 84, 328, 334, 336.
 Burton, 101.

C

Cajori, 563.
 Cantor, 175.
 Caporali, 125, 296.
 Carboni, 317.
 Caraccioli, 370.
 Carcavy, 47.
 Cardinaal, 174, 238.
 Cardoso Laynes, 244.
 Carmichael, 128, 497.
 Carr, 317.
 Carré, 63, 183.
 Cartesio *vedi* Descartes.
 Casali, 71, 72.
 Casey, 34, 141.
 Casorati, 516.
 Cassini, 151, 244, 255, 257, 265, 520.
 Castillon, 183.
 Catalan, 107, 110, 231, 319, 325,
 499, 501.
 Cavalieri, 365, 357.
 Cavalli Ernesto, 89.

Cavalli Ettore, 80.
 Cayley, 11, 18, 19, 21, 124, 137, 210,
 213, 250, 282, 284, 285, 295, 299,
 304, 309, 317, 345, 353, 407-411
 448, 560.
 Cazamian, 80, 107.
 Cesàro, 13, 20, 79, 84, 68, 186, 255,
 268, 399, 403, 554.
 Ceva, 456-468.
 Chasles, 13, 72, 129, 210, 211, 213,
 214, 284, 293, 299, 304, 403, 491,
 504.
 Châtenet, 551.
 Christensen, 364.
 Ciani, 125, 126, 485, 497, 516.
 Clairaut, 452-455, 458.
 Clariana, 317.
 Clebsch, 14, 125, 138, 191, 291, 295,
 301, 354.
 Clebsch-Lindemann, 14, 111, 120.
 Clifford, 20, 526.
 Clifford Bell, 133.
 Collignon, 458.
 Cominotto, 160.
 Comte, 151, 352, 370, 384.
 Condorcet, 257.
 Connor, 126.
 Cornu, 74.
 Couvert, 170.
 Cowley, 341.
 Cramer, 63, 72, 89, 103, 107, 121,
 122, 203, 205, 221, 229, 230, 231,
 281, 354.
 Cremona, 13, 14, 18, 126, 191, 192,
 197, 304.
 Crone, 124.
 Curtze, 172.
 Czuber, 24, 36, 340.

D

Dandelin, 69, 72.
 Darboux, 24, 32, 141, 146, 214, 217,
 251, 306, 325, 351, 212-417, 506,
 521, 523.
 Dawson, 282.
 Deaux, 24, 182, 284, 307.
 Delanges, 274-276, 431, 481, 483.
 Desargues, 11.
 Descartes, 11, 14, 59, 62, 63, 64, 65,
 72, 73, 105, 151, 165, 168, 169,
 207-217, 233, 351, 356, 364, 447.
 Dexter, 463.
 Digby, 371.
 Dingeldey, 13, 31, 32, 124, 284.
 Dinostrato, 464.
 Diole, 39-51, 52, 53, 55, 56, 89.

Diofanto, 528.
 Disteli, 35.
 Dittrich, 141.
 Dölle, 35.
 Dörholt, 284, 341.
 Droz-Farny, 202.
 Dürer, 270-274.
 Duhamel, 525.
 Dujardin, 279, 342.
 Duporeq, 290.
 Durège, 31, 36.
 Dyck, 127.

E

Eberle, 284, 298.
 Ebner, 328.
 Eckhardt, 36, 176, 502.
 Eisenlohr, 5.
 Ellis, 565.
 Emch, 19, 509.
 Enneper, 32, 257.
 Erdmann, 68.
 Ernst, 149.
 Erone, 58.
 Espanet, 292, 342.
 Eudosso, 9, 448, 449.
 Euclide, 2, 3, 6, 10,
 Eulero, 12, 121, 122, 124, 173, 188,
 265, 266, 277, 352, 354, 439-445,
 489, 491, 496, 507, 528, 529, 531,
 534, 536, 537, 544, 563.
 Eutocio, 39, 166, 449.
 Euzet, 384, 396.

F

Fagnano, 12, 178, 257, 259, 367,
 368, 369, 371.
 Fatio de Duiller, 209.
 Faquenberg, 107.
 Farland, 119.
 Faure, 304.
 Federhofer, 173.
 Fermat, 11, 40, 45, 47, 63, 94, 165,
 356, 357, 364, 371.
 Ferroni, 257.
 Feuerbach, 197, 352.
 Fiedler, 410.
 Field, 283, 284, 291.
 F. J., 211, 222, 562.
 Fontana, 372.
 Forni, 124.
 Fouret, 265, 266, 399, 403, 506, 521.
 Franchini, 71.
 François, 396.

Freeth, 74, 392.
 Frenet, 209.
 Freund, 107.
 Frézier, 250.
 Fricke, 34, 127.
 Frietz, 14.
 Fusinieri, 180.
 Fuss N., 23, 265, 532, 534.
 Fuss P. H., 50, 439, 389.

G

Gaedeke, 37, 46, 88, 117, 339.
 Galilei, 71, 94, 456.
 Garnier, 180.
 Gauss F., 561.
 Gauss F. K., 426, 513.
 Geiser, 125.
 Genocchi, 217, 234, 360, 371, 521.
 Gentry, 124.
 Gerhardt, 2, 7, 365.
 Ghigi, 243.
 Gilbert, 49, 395.
 Goldbach, 439.
 Gob, 197.
 Godefroidy, 102, 398, 399.
 Godeaux, 296.
 Göttler, 526.
 Goormaghtigh, 95, 68, 238, 290, 403.
 Gordan, 120.
 de la Goupillière, 248, 311, 311, 321,
 548, 555.
 de la Gournerie, 79, 154, 237, 268,
 318, 400, 502, 503.
 Grace, 418.
 Graf, 191.
 Grandi, 71, 94, 419, 431, 456.
 Grassmann H., 14, 31.
 Grassmann J. 119, 132.
 Gregorio di S. Vincenzo, 220-227.
 Gregory, 99, 516.
 Greiner, 60.
 Griffiths, 31.
 van Grinten, 472-474.
 Grünwald, 340.
 de Gua, 124.
 Günther, 78, 79, 385.
 Güssfeld, 485.
 Gütsche, 78.
 Guggisberg, 174.
 van Gutschoven, 233, 237.

H

Hass, 278.
 Haas-Kleyer, 369.
 Habenicht, 432-435.

Habich, 463.
 Hachette, 321.
 Häntschel, 212.
 Hagge, 238.
 Hahn, 354.
 Haller, 304.
 Halphen, 17, 147, 174, 296, 431, 549, 553.
 Harnack, 17, 124.
 Hart, 35, 411.
 Haughton, 332.
 Hauna, 282.
 Heal, 282.
 Hegor, 58.
 Heiberg, 39, 449.
 Heller, 347.
 Hendlé, 298, 342.
 Hermann, 314, 528.
 Hermes, 80.
 Hermite, 353, 355.
 Hess K., 470-471.
 Hesse O., 119.
 Heuraet, 364.
 Heymann, 464-466.
 Hillhouse, 276.
 Hilton, 283, 284, 406, 428.
 Himstedt, 207, 218, 419, 423, 425, 564.
 Hjelmann, 295.
 Hochheim, 134.
 Hodge, 86.
 Hoel, 532.
 Hoffmann, 370.
 Holzmüller, 159, 346, 370, 519, 520, 521, 522.
 de l'Hôpital, 60, 63, 64, 87, 107, 167, 181, 357, 358, 370, 371.
 Houël, 308, 460, 498.
 Hoza, 448.
 Huber, G., 244.
 Huber P., 136.
 Hudde, 63, 295, 365.
 Humbert, 127, 141, 291, 295, 440, 510, 512, 519.
 Huntigton, 12.
 Hurwitz, 345.
 Huygens, 7, 40, 47, 48, 49, 62, 67, 79, 87, 89, 94, 99, 116, 117, 152, 167, 169, 222, 227, 228, 229, 233, 234, 235, 364, 365, 366, 377, 379, 380, 381, 382, 383.
 Hyde, 419.

I

Igel, 26.
 Intrigila, 197.
 Ippocrate, 1, 5, 6.

J

Jacob, 278.
 Jeffery, 123.
 Jentsch, 313.
 Jerabek, 55, 102, 171, 206, 239.
 Jobisch, 202.
 Jonson, 85, 141, 481.
 de Jonquières, 284, 334, 467.
 Joanne, 180.
 Jouvin, 173.
 Juél, 45, 184.

K

Kanser, 364, 514.
 Kantor, 485.
 Keelhoff, 364.
 Kempe, 475-478.
 Kepler, 11, 446, 447.
 Kiepert, 543, 560.
 Klein F., 7, 119, 127.
 Koenigs, 321, 328.
 Koërsma, 183.
 Kohn, 267.
 Kölmel, 14, 19.
 Kokott, 260, 419.
 Kommerell, 489.
 Korneck, 24.
 Kortweg, 363.
 Köstlin, 174, 329, 511.
 Köttgen, 134.
 Krause, 187.
 Krimphoff, 348-350.
 Krohs, 538.
 Kobuta, 3.
 Külp, 72, 237.
 Kuntzen, 358.

L

Laboulaye, 497.
 Lagrange, 83, 531.
 Laguerre, 34, 121, 154, 185, 267, 414, 510, 519.
 La Hire, 12, 172, 174, 186.
 Laisant, 180.
 Laloubère, 290.
 La Manna Coppola, 476.
 Lambert, 7.
 Lamé, 351, 384-400, 549.
 Lampe, 481-484.
 Laplace, 346.
 Laquière, 502.
 Laurin, 525.
 Lazzeri, 463.

Lebeau, 77, 124, 274, 290.
 Lebesgue, 491.
 Le Cointe, 306.
 Ler, 298.
 Lefébvre, 497.
 Legendre, 7, 538, 563.
 Legoux, 266.
 Lehmus, 73.
 Lehr, 291.
 Leibniz, 2, 7, 12, 37, 50, 62, 63, 98, 99, 116, 118, 219, 220, 227, 228, 314, 358, 364, 365, 370, 419.
 Lemaire, 80.
 Lemoine, 24.
 Leone, 1.
 Lorey, 385.
 Le Paige, 49, 377.
 Lie, 398.
 Light, 188.
 Liguine, 207.
 Lindemann, 7.
 Liouville, 539, 542.
 Lissajous, 563-566.
 Littrow, 311.
 Livering, 563.
 London, 3.
 de Longchamps, 32, 54, 66, 85, 92, 96, 97, 98, 100, 102, 110, 113, 116, 136, 142, 172, 185, 199, 202, 203, 204, 237, 241, 242, 256, 268, 287, 332, 431, 446.
 Longhi, 197.
 Loria, 30, 39, 58, 87, 111, 138, 144, 149, 152, 174, 217, 279, 284, 293, 342, 352, 357, 391, 448, 547, 555.
 Lucas, 24, 513, 520, 521, 525.
 Lüroth, 125, 127.

M

Machovec, 403.
 Maclaurin, 100-107, 185, 222, 258, 280, 309, 357, 370, 375, 403, 463, 483.
 Magnus, 42, 79, 80, 221, 363, 395.
 de Mairan, 207.
 Maisano, 282.
 Majcen, 280.
 Malfatti, 265.
 Malo, 146, 298, 299.
 Manfredini, 282.
 Mannheim, 403, 490, 507.
 Manoury, 364.
 Mansion, 79, 67.
 Mantel, 287, 288.
 Marantoni, 464.
 Marie, 23.

Marletta, 284.
 Mascheroni, 6, 236.
 Massau, 49.
 Mathews, 36.
 Matthiessen, 58, 168, 314, 365.
 Mathieu, 299.
 Maupertuis, 364.
 Mehmke, 403.
 Melde, 429.
 Menecmo, 9, 13.
 Mersenne, 62, 65, 356, 357.
 Michel, 68.
 Midy, 73.
 Miller, 320, 481.
 Mirman, 43.
 Mister, 94.
 Mitscherling, 458.
 Möbius, 304, 307.
 de Moivre, 49, 63, 64, 72, 75, 169, 229.
 Moigno, 122.
 Montferrier, 164, 222, 370.
 Montesano, 269.
 Montucci, 73, 204, 314.
 Montucla, 6, 249.
 Moore, 28, 38.
 Moritz, 428.
 Morley, 38, 126, 282, 283, 325, 526.
 Moutard, 502.
 Mühlemann, 352.
 Mühlenbruch, 176.
 Müller, R. 36, 237, 328.
 Müller W., 284.
 Münger, 436-439.
 Mydorge, 12.
 Myller, 501.
 Mylon, 379.

N

Nagel, 132.
 Nagelsbach, 466-470.
 Neely, 38.
 Neil, 364.
 Nelson, 54.
 Neuberg, 24, 44, 76, 90, 95, 103, 124, 197, 237, 286.
 Newman, 21.
 Newson, 86.
 Newton, 12, 14, 18, 19, 20, 50, 60, 114, 160, 170, 211, 363.
 Nicéron, 357.
 Nicholson, 478.
 Nicomede, 24, 37, 163, 170, 171, 244, 274, 280.
 Niemtschick, 79.
 Nievenglowski, 122.

O

d'Ocagne, 12, 210, 506.
 Occhlin, 440.
 Ockinghaus, 248, 252, 475.
 Oldenburg, 50.
 Olivier, 499, 548.
 Ono, 38, 148.
 Ozanam, 99, 183.

P

Padula, 197.
 Pagani, 152.
 Painvin, 197, 361.
 Palatini, 464.
 Panton, 215, 217.
 Paoli, 456.
 Pappo, 6, 10, 39, 165, 166.
 Pascal B., 4, 11, 12, 172, 175, 180,
 342, 377.
 Pascal S., 175-181, 510.
 Peano, 54, 96, 209, 254, 361.
 Peschke, 107.
 Perna, 282.
 Perrin, 457.
 Perry, 352.
 Perseo, 149-162.
 Petersen, 507.
 del Pezzo, 291.
 Picquet, 84, 506.
 Piola, 357.
 Pirondini, 420.
 Pitagora, 1, 5, 6.
 Pittarelli, 179.
 Plateau, 458-463, 466.
 Playfair, 448.
 Plücker, 4, 8, 14, 120, 122, 123,
 201, 262, 305, 431, 526.
 Poinsot, 209.
 Poncelet, 3, 21, 336, 337.
 Poppe, 7, 9, 170.
 Pothenot, 249.
 Proclo, 2, 9, 39, 149, 152.
 Prony, 321.
 Pyrkosch, 347.

Q

Quetelet, 62, 72.

R

Rabut, 502.
 Radicke, 463.
 Raffy, 32, 352.

Raho, 177.
 Rankine, 370, 516.
 Réamur, 174.
 Retali, 56, 229, 237, 299, 309, 313,
 342.
 Reuschle, 74, 369.
 Ribaucour, 502, 549.
 Riccati G., 243.
 Riccati V., 72, 231, 427.
 Richlicki, 68.
 Richter, 176.
 Rider, 122.
 Ridolfi, 423, 427, 430.
 Rieder, 89, 236.
 Ritt, 73, 229.
 Roberts R. A., 297, 307.
 Roberts S., 217, 301, 311, 327, 328.
 Roberts W., 520, 521, 558, 560.
 Roberts W. R. W., 294.
 Roberval, 40, 45, 60, 62, 63, 64, 65,
 72, 77, 163, 164, 165, 166, 172,
 174, 176, 178, 180, 337, 356, 357,
 372.

Rocca, 357.
 Roegner, 197.
 Rogge, 428.
 Rohn, 281, 284.
 Rolle, 37, 525.
 Rollier, 234.
 Rosenstock, 81.
 Rowning, 363.
 Rudio, 7.
 Ruffini, 197, 307, 310.
 Rummer, 73.
 Rutgers, 128.
 Sacchi, 431.
 Sadd, 284.
 St. Germain, 77, 78, 186, 266.
 Saladini, 72, 231, 257, 265, 427.

S

Salmon, 14, 15, 32, 35, 296, 304, 410.
 Salmon-Piedler, 28, 29, 35, 36, 45,
 130, 216, 296, 304, 305, 307.
 Sanchez, 339.
 Sang, 79, 565.
 Sangro, 177.
 Sauerbeck, 124.
 Sauveur, 181.
 Scheffers, 411.
 Schell, 180.
 Sciappa-Monteiro, 117.
 Schilling, 440.
 Schläfli, 191.
 Schlömilch, 101, 222, 241, 242, 244,
 254, 277.

Schmidt K., 14.
 Schneider, 223.
 Schontjes, 172.
 Schooten, 63, 167, 295, 364, 365,
 380, 381.
 Schoute, 80, 102, 103, 107, 222, 266,
 267, 268, 282, 285, 285, 296, 363,
 458, 463.
 Schröter, 14, 36, 197.
 Schulz von Stranchintzky, 54.
 Schur, 127.
 Scorza, 120.
 Scott Charlotte Angas, 181.
 Scott G., 101.
 Segner, 363.
 Seidel, 446.
 Sereno, 11.
 Serret J. A., 67, 249, 255, 261, 265,
 417, 418, 498, 534, 538, 539, 547.
 Serret P., 209, 309, 351.
 Servais, 33, 141.
 Siacci, 268.
 Sibirani, 21.
 Siebeck, 152-159, 197.
 Sievert, 19.
 Simon, 38, 48, 197, 311, 320.
 Simson, 4.
 Sire, 553.
 Slobin, 281.
 de Sluse, 40, 41, 49, 87, 89, 90, 152,
 222, 223, 233, 234, 237, 365, 366,
 376, 377, 380, 381, 382, 383.
 Smith H. J. S., 353.
 Sneyder, 294.
 Sobotka, 358, 371.
 Spitzer, 399.
 Sporer, 135.
 Stahl W., 133, 284.
 Stammer, 431.
 Staudt, 13.
 Stephens, 526.
 Steiner J., 13, 30, 119, 187, 188,
 191, 197, 245, 248, 259, 281, 282,
 283, 296, 298, 307, 342, 485, 486,
 488.
 Steiner M., 277.
 Stiner, 54, 197, 258.
 Stone, 48.
 Studnicka, 12.
 Stuyvaert, 24.
 Suardi, 152, 202.
 Sucharda, 180, 314.
 Sylvester, 137, 304, 305.

T

Tait, 448.
 Tafelmacher, 298.

Talete, 5.
 Tannery, 62, 63, 73, 175, 214, 356,
 407, 448, 449.
 Taylor, 180.
 Teixeira, 20, 21, 29, 36, 54, 146,
 152, 153, 174, 178, 235, 236, 346,
 384, 431.
 Terquem, 13, 268.
 Terracini, 119, 120.
 Teudio, 1.
 Thalberg, 38.
 Thomae, 15, 60, 197, 249, 279.
 Thomson, 24.
 Thierry, 445.
 Timerding, 292, 402.
 Torricelli, 71, 72, 357, 372.
 Tortolini, 72, 160, 162, 341, 451.
 Townsend, 232.
 Tramur, 352.
 Tschirnhausen, 107, 259, 347, 408.
 Tucker, 308.
 Turrière, 280.

U

Ulhorn, 57, 73.
 Usai, 55.

V

Vacca, 94.
 Vaes, 341.
 Valcovici, 266.
 Valdés, 80.
 Vallée, 207.
 Varignon, 37, 256, 371.
 Vassura, 357.
 de Vargas y de Aquirre, 74, 431.
 Vetchman, 248, 258.
 de Verdus, 72.
 Verluys, 364.
 Vidal, 303.
 Villapauco, 446.
 Vincent, 231, 321.
 Viviani, 373, 446.
 de Vries H., 146, 258, 284, 292.
 de Vries J., 124, 146, 137, 215.

W

Wälsch, 127.
 Wallace, 4, 188, 189, 197.
 Wallis, 21, 49, 169, 357, 358, 359,
 364, 371.
 Walton, 514.

- Wagner, 472.
Wangerin, 252, 251.
Wantzel, 491, 495.
Waring, 492.
Wasserschleben, 463.
Watt, 231, 258, 321-328.
Weaver, 85, 176, 548, 458.
Weber, 15, 119, 218.
Weddle, 125.
Wedemayer, 249.
Weierstrass, 138, 182, 212.
Welsch, 268, 342.
Weltzien, 292-296.
Weyr, 28, 30.
Whewell, 235, 335.
Whittemore, 12.
Wickersheimer, 172.
Wielcitner, 55, 95, 174, 260, 269,
274, 276, 510, 551.
Wiener, 19.
- Willigens, 353.
Wiman, 128.
Winckler, 555.
Winger, 29, 298.
Wirtz, 197.
de Witt, 198.
Wittstein, 446.
Wölffing, 13, 403.
Wolstenholme, 308.
- Y
- Young, 343.
- Z
- Zahradnik, 30, 33, 44, 46, 54, 183.
Zeuthen, 124, 215.

BARBIERI A., Poligonazione isochometrica. Norme pratiche per il rilevamento planimetrico delle linee poligonali e per il loro calcolo, di pag. XVI-246, legato L. 4.—

BELTRAMI E., Opere matematiche pubbl. per cura della facoltà di scienze della R. Un. di Roma. 4 volumi in-4 L. 400.—

BERZOLARI L., Geometria analitica. I. Il metodo delle coordinate. III ediz. riv. ed accresc. di una appendice sugli Elementi del Calcolo Vettoriale. Volume di pagine XVI-459, con 61 incisioni, legato L. 12.—

II. Curve e superficie del secondo ordine. II ediz. riv. e ampl., di pag. 486, legato L. 12.—

BETTI E., Opere matematiche pubbl. per cura della R. Acc. dei Lincei. Vol. I, in-4 (esaurito). Vol. II, in-4 L. 100.—

BRIOSCHI F., Opere matematiche pubbl. per cura del Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. (G. Ascoli, E. Beltrami, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli). Volumi 5, in-4 L. 500.—

CREMONA L., Opere matematiche pubbl. sotto gli auspici della R. Acc. dei Lincei. Tomo I, con ritr. dell'Autore, 1913, in-4, di pag. VIII-497. Tomo II, 1915, in-4, di pag. IV-459. Tomo III (ultimo), 1917, in-4, di pag. 532. (Tre volumi insepapabili) L. 800.—

EBRIDE G., Geometria pratica. VI ediz. riv. ed ampl. di pag. XVI-253, con 135 inc., legato L. 7,50

FANTASIA F., Minimi quadrati. Formule ed esercizi per l'applicaz. del metodo dei minimi quadrati alla Topogr., di pag. XVI-330, con 107 esercizi, legato L. 3.—

GHERSI L., Geometria elementare. Metodi per risolvere i problemi di Geometria elementare. III ediz. accresc. con 311 problemi ed esercizi e 199 incisioni, legato L. 12,50

GHERSI L., Matematica elementare e curiosità. Problemi bizzarri. Paradossi algebrici, geometrici e meccanici. Moto perpetuo. Grandi numeri. Curve e loro tracciamento meccanico. Sistemi articolati. Quadratura del cerchio. Trisezione dell'angolo. Duplicazione del cubo. Geometria della riga e del compasso. Rompiscapo geometrici. Inesp. de. Probabilità. Giochi. Quadrati, poligoni e poliedri magici. III ediz. ampl., di pag. VIII-748 con 706 figure originali dell'Autore, legato L. 24.—

GIUDICE P., Matematica elementare. Risoluzioni, trasformazioni e costruzioni geometriche. Congruenze. Numeri. Aggregati. Equazioni. Divisione del cerchio. Volume in-16, di pag. XVI-424, con 23 incisioni, legato L. 22,50

KOPFF A., I fondamenti della Relatività Einsteiniana. Ediz. ital. a cura di R. CONTU e T. BRUNO, con prefaz. di G. Aronstein. — Valore e interpretaz. della teoria negli scritti orig. di A. Einstein, E. H. Weyl, G. Baccardi, A. Bonucci, P. Dargatzis, V. Cerulli, P. Enriques, E. Enriques, E. Ferrar, G. Fubini, G. Gianfranceschi, La Rosa, Q. Majorana, E. Rignano, U. Spitzer, A. Tighes, E. Trollo, E. Borel, G. Weir. Complementi di G. Castelnuovo e T. Levi-Civita. — Bibliografia, Formule, Indici. Volume in-8 gr., di pag. XXX-453-17. (È un volume della Biblioteca Tecnica in-8 grande) L. 54.—

LORIA G., Geometria descrittiva (Complementi di). Visibilità, ombre, chiaroscuro, prospettiva lineare, di pag. XII-402, con 60 ill., leg. L. 11,50

LORIA G., Geometria descrittiva (Metodi della). III ediz. riv. e migl., di pag. XX-369, con 126 incisioni, legato L. 16.—

LORIA G., Poliedri, curve e superfici, secondo i metodi della Geometria descrittiva, di pagine XVI-297, legato L. 6.—

LORIA G., Sistema sesto (Le) nell'antica Grecia. III ed. totalm. riv., pag. XXIV-374, leg. L. 12.—

LORIA G., Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai nostri giorni. (Insignito del Prix Boursier) Istituito per le opere pubblicate in tutto il mondo sopra la storia e la filosofia delle scienze, pag. 607, 24 fig. L. 22.—

LORIA G., Storia della matematica (Metodi della), pag. XVI-228, legato L. 12.—

MACCAFERRI E., Calcolo universale. Volume di pag. XVI-200, legato L. 12.—

MARCOLOGNO R., Meccanica razionale. Due volumi: I. Cinematica-Statica. III ediz. riv. ed ampl., con 33 inc., pag. XV-323, leg. L. 12,50

II. Dinamica. Meccanica dei sistemi deformabili. III ediz. riv. ed ampl., con 23 inc., di pag. VIII-414, legato L. 16,50

MARCOLOGNO R., Problemi (II) del tre corpi da Newton (1686) ai nostri giorni, di pagine 174, legato L. 4,50

MARCOLOGNO R., ROSSI C., TOLLE M., Elementi di calcolo vettoriale, emagrafice, tensoriale e meccanica razionale dei corpi rigidi. 1925, in-8, di pag. VIII-188, con 157 fig., legatura uso della L. 24.—

PASCAL E., Calcolo differenziale e integrale (Esercizi esat. di). III ediz. riv. eduta, di pag. XVI-286, legato L. 3.—

PASCAL E., Calcolo infinitesimale (Lezioni di): I. Calcolo differenziale. V ediz. riv., di pagine XII-313, con 10 inc., legato L. 15.—

II. Calcolo integrale. V ediz., di pag. VIII-330, con 16 inc., legato L. 15.—

III. Calcolo delle variazioni e delle differenze finite. II ediz., di pag. XII-328, legato L. 4,50

PASCAL E., Determinanti e applicazioni. II ed. riv. e ampl., di pag. VIII-338, legato L. 16,50

PASCAL E., Funzioni ellittiche. II ediz. anna. con le trasformaz., di pag. XVI-342, con incisioni, legato L. 14.—

PASCAL E., Gruppi continui di trasformazioni (Parte generale della teoria), p. XI-378, legato L. 3.—

PINCHERLE S., Algebra elementare. Parte I. Analisi algebrica. IV ediz., di pag. VIII-174, con inc., legato L. 7,50

Parte II. Teoria delle equazioni. IV ediz. riv. e corr., di pag. 174, 4 inc., legato L. 7,50

PINCHERLE S., Algebra elementare. XIV ed. riv. di pag. VIII-210, 2 inc., legato L. 6.—

PINCHERLE S., Esercizi sulla Geometria elementare. III ediz. ann., pag. VIII-147, legato L. 7,50

PINCHERLE S., Geometria elementare (Esercizi di). II ed., p. VIII-156, 50 inc., legato L. 3.—

PINCHERLE S., Geometria metrica e telegeometria. IX ed., p. VIII-160, 47 inc., leg. L. 6.—

PINCHERLE S., Geometria pura elementare. Con le figure stereiche. IX ediz., di pag. VIII-175 con 121 incisioni, legato L. 6.—

POLETTI L., Numeri primi (Tavola di) entro limiti diversi, con precedente tavola dei n. p. entro i primi 100.000 n. succ., entro 100.000 n. oltre un miliardo, tavole di scomposiz. in fatt. primi, tav. di moltiplicaz. ecc., di pag. XX-292, con prefazione di G. Loria, legato L. 10,50

RANELLETTI C., Geometria descrittiva (Applicazioni di). Teoria delle ombre. Taglio delle pietre. Taglio dei legnami, ad uso dei I.R. Istituti tecnici e Scuole profess. II ediz., di pagine X-301, con 133 fig. originali, leg. L. 6,50

RANELLETTI C., Geometria descrittiva (Elementi di) ad uso degli Istituti tecnici. III ediz., di pag. XII-197, con 141 inc. orig., leg. L. 8,50

SACCHERI G. P., Euclide (L.) emendato. Traduzione e note di G. Baccardi, di pag. XXIV-126, con 55 incisioni, legato L. 3.—

SIBIRANI F., Geometria differenziale (Elementi di) esposti con metodo vettoriale, di pag. XII-304 con incisioni, legato L. 15.—

VIVANTI G., Equaz. integ. lineari (Elem. della teoria delle), pag. XVI-388, legato L. 7,50

VIVANTI G., Funzioni analitiche e funzioni trascendenti intere (Elementi della teoria delle). II ediz. completamente riv., di pag. XII-425, legato L. 22.—

VIVANTI G., Funzioni polidrome e moduli (Elem. della teoria delle).

VIVANTI G., Matematiche uso dei chimici e dei fisici, di pag. VI-338, legato

