R. Conti
7.1.1944

TULLIO LEVI-CIVITA

CARATTERISTICHE DEI SISTEMI DIFFERENZIALI E PROPAGAZIONE ONDOSA

LEZIONI RACCOLTE DAL DOTT. G. LAMPARIELLO

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
1931 - IX

Bologna - Cooperativa Tipografica Azzoguidi. X-1931-IX

PREFAZIONE

Il Consiglio Direttivo del Seminario Matematico della R. Università di Roma (presieduto dal prof. ENRIQUES) *organizzò per l'anno scolastico 1930-31 due cicli di conferenze sulla teoria delle caratteristiche. Il primo, affidato a me, fu inteso a richiamarne brevemente la genesi in relazione ai teoremi generali di esistenza, e ad indicarne talune applicazioni, veramente grandiose nella loro semplicità, iniziate dall'* HUGONIOT *e riprese sistematicamente dall'* HADAMARD, *alla propagazione delle onde di discontinuità, acustiche, elastiche, ottiche, elettromagnetiche, ed altre ancora.*

Il secondo ciclo, affidato originariamente al VOLTERRA, *e svolto in sua vece dalla sig.na prof.* ELENA FREDA, *fu dedicato ai metodi di integrazione col sussidio delle caratteristiche, lumeggiandovisi il contributo essenziale, dovuto appunto al* VOLTERRA, *e le formule risolutive di alcuni celebri problemi, che egli seppe ricavarne.*

Il presente volumetto riproduce le mie conferenze, nell'accurata redazione fattane dal dott. GIOVANNI LAMPARIELLO.

Dopo aver richiamato i teoremi di esistenza, si introduce la nozione generale di varietà caratteristica, seguendo i noti criteri dell' HADAMARD. *Non vi*

è dunque alcuna novità sostanziale. Tuttavia mi lusingo di aver reso la trattazione più simmetrica e più agile, cosicchè sia la costruzione della equazione a derivate parziali definiente le varietà caratteristiche, sia la formazione e la discussione delle condizioni di compatibilità acquistano maggiore agilità algoritmica, e, sia pure soltanto di riverbero, anche una discreta semplificazione espositiva.

Ciò viene confermato nelle applicazioni particolari, idrodinamiche ed elettromagnetiche, con speciale riguardo alle propagazioni sonore e luminose, che si trovano qui sviluppate [1]. *Sono invece appena preliminarmente ricordate a titolo informativo le altre accezioni sotto cui furono classicamente considerate e spesso occorre tuttora considerare le onde, nella meccanica e nella fisica.*

Naturalmente, uno studio, per quanto sommario, delle varietà caratteristiche trae seco quello delle corrispondenti linee bicaratteristiche: e così sono stato condotto (prima di passare alle applicazioni) a riprendere in generale, e nell'aspetto più direttamente collegato ai sistemi canonici, il metodo di CAUCHY

[1] Di una trattazione delle onde elastiche sotto lo stesso punto di vista si occupò subito dopo il dott. LAMPARIELLO, traendone più note, presentemente in corso di stampa nei Rend. della R. Acc. dei Lincei.

Il caso delle equazioni gravitazionali dell'EINSTEIN (dove si presentano circostanze un po' più complicate) era stato il primo che avevo preso in considerazione per applicarvi la teoria dell'HADAMARD. Cfr. *Caratteristiche e bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein*, Rend. Acc. Lincei, Ser. 6ª, Vol. XI, 1931, pp. 3-11, 113-121.

per la integrazione di una equazione a derivate parziali del 1° ordine in quante si vogliono variabili.

Tornando alle applicazioni, vorrei segnalare le riflessioni generali dell'ultimo paragrafo circa le caratteristiche e bicaratteristiche spettanti ad un assegnato sistema differenziale (S). *È ivi rilevato e illustrato su qualche esempio espressivo come, qualora un certo sistema* (S) *porga una adeguata rappresentazione analitica di un qualche fenomeno fisico, si può associare al fenomeno stesso, attraverso le* varietà caratteristiche *del sistema* (S), *un* aspetto ondulatorio, *e, attraverso le* linee bicaratteristiche, *un* aspetto corpuscolare. *Si ha così uno schema matematico comprensivo, e, nel suo agnosticismo, perfettamente soddisfacente, di quel dualismo fra onde e corpuscoli, che ispirò le geniali intuizioni del* DE BROGLIE, *e di cui fu, dallo stesso* DE BROGLIE, *e da altri, indarno cercato un più concreto modello, veramente in accordo coi fatti osservati.*

Chi desideri più specifico ragguaglio sul contenuto del libro, lo potrà desumere dall'indice analitico, cui si è aggiunto per comodo del Lettore anche un indice dei nomi.

Tengo infine ad esprimere sentiti ringraziamenti sia al dott. LAMPARIELLO *che tanto volenterosamente assolse il compito gravoso di redigere il manoscritto, e mi aiutò nella revisione delle bozze, sia alla Casa Editrice Zanichelli, che, con premuroso interesse, si assunse e portò a compimento questa pubblicazione.*

Roma, 20 luglio 1931.

TULLIO LEVI-CIVITA

§ 1. Richiami intorno al teorema di esistenza degli integrali di un sistema di equazioni alle derivate parziali.

1. *Sistemi normali.* Un sistema di m equazioni alle derivate parziali nelle funzioni incognite φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$ di $n+1$ variabili indipendenti x_0, $x_1, \ldots, x_n$ è del tipo

$$E_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

essendo E_μ funzione delle x, delle φ e di derivate parziali delle φ rispetto alle x.

Un sistema siffatto dicesi *normale* (rispetto alla variabile x_0) se si può ridurre alla forma

$$\frac{\partial^{r_\nu} \varphi_\nu}{\partial x_0^{r_\nu}} = \Phi_\nu(x \,|\, \varphi \,|\, \psi \,|\, \chi) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \tag{1'}$$

dove le ψ che compariscono nei secondi membri sono derivate parziali di ciascuna φ_ν rispetto alla sola x_0 di ordine minore di r_ν e le χ sono derivate parziali delle φ rispetto alle x di ordine (finito) qualsiasi, purchè rispetto alla x_0 di ordine minore di r_ν per la corrispondente φ_ν.

Osserviamo che il sistema (1'), normale rispetto alla x_0, può non essere normale rispetto ad un'altra delle variabili x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

2. *Ipotesi qualitative.* Le funzioni Φ_ν si suppongono analitiche, olomorfe nell'intorno di un sistema di valori degli argomenti (valori iniziali).

Vale allora un teorema fondamentale di esistenza delle funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, dovuto a CAUCHY e precisato da SOFIA KOWALEVSKY.

3. *Il teorema di esistenza per i sistemi differenziali ordinari.* Prima di enunciare questo teorema, allo scopo di intenderne bene il contenuto, è conveniente richiamare il teorema di esistenza degli integrali di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Se si suppone che le funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ dipendano dalla sola variabile x_0, che ora denoteremo con t, il sistema differenziale (1') si scrive

$$(2) \qquad \frac{d^{r_\nu}\varphi_\nu}{dt^{r_\nu}} = \Phi_\nu(t \mid \varphi \mid \psi) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, m).$$

Come è noto, il sistema differenziale (2) si può ricondurre ad un sistema di equazioni differenziali del 1° ordine o, come si dice, alla forma canonica.

Infatti, basta assumere come incognite ausiliarie, accanto ad ogni φ_ν, le sue derivate rispetto a t fino all'ordine $r_\nu - 1$. Se si pone

$$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = \varphi'_\nu, \quad \frac{d\varphi'_\nu}{dt} = \varphi''_\nu, \dots, \quad \frac{d\varphi_\nu^{(r_\nu - 2)}}{dt} = \varphi_\nu^{(r_\nu - 1)},$$

le (2) si scrivono

$$\frac{d\varphi_\nu^{(r_\nu - 1)}}{dt} = \Phi_\nu(t \mid \varphi \mid \psi) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, m),$$

e, se si indica con y_ρ il generico elemento della tabella

$$\left\{ \begin{array}{llll} \varphi_1, & \varphi_2, & \dots, & \varphi_m, \\ \varphi_1', & \varphi_2', & \dots, & \varphi_m', \\ . & . & \dots & . \\ \varphi_1^{(r_1-1)}, & \varphi_2^{(r_2-1)}, & \dots, & \varphi_m^{(r_m-1)}, \end{array} \right.$$

il sistema (2) si riconduce allo schema

$$(2') \qquad \frac{dy_\rho}{dt} = Y_\rho(t \mid y)$$

$$(\rho = 1, 2, \dots, \quad r; \quad r = r_1 + r_2 + \dots + r_m).$$

Sotto l'ipotesi che ogni Y_ρ sia analitica, olomorfa nell'intorno di $t = t_0$, $y_\rho = b_\rho$, esiste un unico sistema di funzioni y_ρ, analitiche della variabile t, olomorfe nell'intorno di $t = t_0$, che assumono i valori b_ρ, quando $t = t_0$.

La dimostrazione di questo celebre teorema, secondo CAUCHY, si fa ricorrendo al metodo delle maggioranti.

Cominciamo con l'osservare che le equazioni differenziali permettono, mediante successive derivazioni, di calcolare le derivate di qualunque ordine di ogni funzione incognita y_ρ nel punto $t = t_0$ e quindi di scrivere, per ogni y_ρ, lo sviluppo tayloriano relativo a tale punto.

In questo sviluppo, il termine indipendente da t è b_ρ e i coefficienti, $\frac{1}{n!}\left(\frac{d^n y_\rho}{dt^n}\right)_{t=t_0}$ $(n = 1, 2, \dots)$, delle varie potenze di $t - t_0$ dipendono, in generale, da tutte le b e da t_0.

Il punto essenziale della dimostrazione, che, prima di Cauchy, era stato ammesso senza alcuna giustificazione, consiste nel far vedere che queste serie convergono in un conveniente intorno di $t = t_0$. Si considerano delle opportune funzioni maggioranti delle Y_ρ e allora il corrispondente sistema differenziale (2'), che si può integrare elementarmente, definisce delle funzioni analitiche, olomorfe nell'intorno di $t = t_0$, di cui gli sviluppi tayloriani riescono maggioranti degli sviluppi tayloriani delle y_ρ.

Il teorema di Cauchy per i sistemi differenziali (2') è valido anche quando i secondi membri delle (2') e i valori iniziali b_ρ dipendano da un certo numero (finito) di parametri (che potremo designare con $x_1, x_2, \ldots, x_n$), sotto la condizione di considerare campi di variabilità di questi, tali che in essi le Y_ρ siano olomorfe.

Si può allora — sottointendendo la specificazione essenziale che tutto deve comportarsi regolarmente nell'intorno dei valori che si considerano — enunciare il seguente

Teorema. Dato il sistema differenziale

$$(3) \qquad \frac{d^{r_\nu}\varphi_\nu}{dt^{r_\nu}} = \Phi_\nu(t\,|\,x\,|\,\varphi\,|\,\psi) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

assegnando ad arbitrio, per $t = t_0$, i valori di ciascuna φ_ν e delle derivate successive fino all'ordine $r_\nu - 1$ quali funzioni dei parametri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, esiste un unico sistema di funzioni φ, analitiche, della variabile t e dei parametri, soddisfacenti alle (3), e riducentisi ai valori assegnati per $t = t_0$.

4. Questo teorema si estende ai sistemi (1') normali di equazioni alle derivate parziali. La circostanza nuova che si presenta è che, nei secondi membri delle (3), intervengono anche derivate delle funzioni incognite rispetto ai parametri e si hanno così equazioni differenziali non più ordinarie, bensì alle derivate parziali. Per simmetria, riprenderò la designazione x_0 al posto di t.

Il teorema, cui si è accennato al n. 2, afferma che, assegnando ad arbitrio, in corrispondenza ad un valore a_0 di x_0, i valori delle φ e delle ψ (funzioni olomorfe di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entro un certo campo C) restano univocamente determinate le φ come funzioni olomorfe di $x_0, x_1, \ldots, x_n$ in un intorno di $x_0 = a_0$ (e nel campo C degli altri argomenti). (v. errata)

Il problema di Cauchy consiste appunto nella determinazione delle φ soddisfacenti al sistema normale (1') e ai dati iniziali suaccennati. Questi sono — ripetiamolo — i valori delle funzioni incognite e delle loro derivate parziali rispetto alla variabile x_0, di ordine inferiore al massimo, relativo ad ogni φ.

5. *Enunciato geometrico del teorema di Cauchy e sua generalizzazione.*

Sia S lo spazio delle variabili $x_0, x_1, \ldots, x_n$; per fissare le idee, lo penseremo dotato di metrica euclidea, interpretando le x quali coordinate cartesiane. Si consideri l'iperpiano

$$x_0 = a_0,$$

che indicheremo con $\bar{\omega}$.

Il teorema di esistenza afferma che nelle vicinanze dell'iperpiano $\bar{\omega}$ (detto portante) si potranno conoscere i valori delle funzioni φ, quando siano dati ad arbitrio, in ogni punto di $\bar{\omega}$, i valori (iniziali) delle φ e delle ψ.

È chiaro che le χ, su $\bar{\omega}$, risultano dai dati e dalle equazioni differenziali.

Questo teorema si può facilmente generalizzare, pensando di sostituire all'iperpiano $\bar{\omega}$ una ipersuperficie σ di S.

La generalizzazione è del resto conseguibile per semplice trasformazione di variabili.

Infatti, ove sia per es.

$$z(x_0, x_1 \dots, x_n) = z_0 \qquad (z_0 \text{ costante})$$

l'equazione della σ, basta immaginare di sostituire alle x $n+1$ loro combinazioni indipendenti $z, z_1, \dots, z_n$, tali che una di esse, la z, sia precisamente il primo membro della equazione testè scritta della σ.

Naturalmente, affinchè sia possibile la determinazione delle funzioni incognite φ, almeno in un intorno di σ, bisognerà che il sistema differenziale normale (1'), per effetto della detta trasformazione di variabili, risulti normale rispetto a z.

Di ciò vogliamo ora occuparci.

6. *Cambiamento di variabili.* Immaginiamo dunque di operare un cambiamento di variabili $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \dots & x_n \\ z & z_1 \dots & z_n \end{pmatrix}$ per modo che $\bar{\omega}$ si trasformi nell'ipersuperficie σ.

Il sistema differenziale normale (1') si trasforma in un sistema nelle funzioni incognite φ delle variabili $z, z_1, \dots, z_n$.

Nel sistema differenziale trasformato l'ordine complessivo può anche essere maggiore di qualcuno o di tutti i numeri $r_1, r_2, \dots, r_m$, perciò non si può affermare che nella trasformazione si conservino i massimi ordini di derivazione rispetto alla variabile z, nè si può quindi desumere il carattere di normalità senza più approfondita indagine. Per evitarla, cominciamo col limitarci a considerare particolari sistemi normali, quelli per i quali si può porre in evidenza un massimo ordine complessivo di derivazioni parziali rispetto alle varie variabili indipendenti (lo stesso per ciascuna delle m funzioni incognite).

Se indichiamo con s questo massimo ordine, il sistema differenziale, supposto normale rispetto ad x_0, si scrive più semplicemente

$$\frac{\partial^s \varphi_\nu}{\partial x_0{}^s} = \Phi_\nu(x\,;\varphi\,|\chi) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, m). \tag{4}$$

Ai secondi membri non è necessario fare la distinzione, come in (1'), tra le derivate ψ delle φ rispetto alla sola x_0 e le derivate χ delle φ rispetto alle $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Se si applica alle variabili x una trasformazione $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \dots & x_n \\ z & z_1 \dots & z_n \end{pmatrix}$, il sistema (4) si trasforma in un sistema pur esso dello stesso massimo ordine s rispetto alla z. Vedremo tra poco che si tratta precisamente di un sistema normale a meno che non si annulli un certo determinante.

Ammettendo provvisoriamente di trovarci nel caso che tale determinante non si annulli, sarà possibile determinare le funzioni φ nelle vicinanze dell'ipersuperficie σ (detta portante) quando si assegnino ad arbitrio, su di essa, i valori delle funzioni incognite e delle derivate parziali di ordine inferiore al massimo s.

Osserviamo ancora che si può ricondursi al caso in cui, nei secondi membri delle (4), le derivate di ordine massimo s (al più di ordine $s-1$ rispetto ad x_0) intervengano linearmente.

Infatti, se ciò non fosse, basterebbe derivare ambo i membri di ciascuna delle equazioni (4) rispetto ad x_0. Se $\overline{\chi}$ è una generica derivata parziale di ordine s, si ha

$$\frac{\partial^{s+1}\varphi_\nu}{\partial x_0{}^{s+1}} = \sum \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \overline{\chi}} \frac{\partial \overline{\chi}}{\partial x_0} + \dots .$$

Le $\dfrac{\partial \Phi_\nu}{\partial \overline{\chi}}$ e i termini omessi non involgono derivate parziali di ordine superiore ad s: le $\dfrac{\partial \overline{\chi}}{\partial x_0}$ sono di ordine $s+1$ ed intervengono linearmente.

§ 2. Varietà caratteristiche.

1. Ci limiteremo nel seguito a considerare sistemi differenziali per i quali il massimo ordine di derivazione è $s=1$ oppure $s=2$.

Tali sistemi si possono rendere espliciti sotto la forma rispettiva

$$(1)\quad E_\mu \equiv \sum_{1}^{m}{}_\nu \sum_{0}^{n}{}_i E^i_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} + \Phi_\mu(x \mid \varphi) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m);$$

$$(2)\quad E_\mu \equiv \sum_{1}^{m}{}_\nu \sum_{0}^{n}{}_{ik} E^{ik}_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_i \partial x_k} + \Phi_\mu(x \mid \varphi \mid \chi) = 0$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, m).$$

In (1) le $E^i_{\mu\nu}$ e Φ_μ dipendono dalle x e dalle φ, mentre in (2) le $E^{ik}_{\mu\nu}$ e Φ_μ dipendono dalle x, dalle φ e dalle derivate parziali del 1° ordine delle φ rispetto alle x.

Riterremo (come è lecito senza pregiudizio della generalità)

$$E^{ik}_{\mu\nu} = E^{ki}_{\mu\nu} \quad (i, k = 0, 1, \dots, n;\ \mu, \nu = 1, 2, \dots, m).$$

Nel caso particolare di una sola funzione incognita φ, le (2) si riducono all'unica equazione

$$(3)\qquad E \equiv \sum_{0}^{n}{}_{ik} E^{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} + \Phi(x \mid \varphi \mid \chi) = 0,$$

nella quale le χ designano derivate parziali prime di φ rispetto ad $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Una notevole equazione del tipo (3) è

$$(4)\qquad \Box\varphi = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta_2\, \varphi = 0 \ (^1),$$

(1) Abbiamo posto la lettera t in luogo della x_0; nel seguito tale sostituzione sarà fatta più volte senza avvertirlo.

essendo V una costante e

$$\Delta_2 = \sum_1^3 {}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

L' operatore

$$\square = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_2$$

si chiama il *dalembertiano* o *lorentziano*.

La (4) interviene in numerose questioni di fisica matematica e dicesi *equazione canonica dei piccoli moti*; ne svilupperemo la genesi tra breve.

2. *Condizioni di normalità per i sistemi (1) e (2).* Le equazioni che formano i sistemi (1) e (2) non sono risolute rispetto alle derivate parziali di 1° o di 2° ordine, relative alla variabile x_0.

Vogliamo determinare le condizioni che debbono essere soddisfatte affinchè sia possibile tale risoluzione, cioè affinchè detti sistemi siano normali rispetto ad x_0.

Consideriamo dapprima il sistema (1).

Poichè interessano soltanto i termini nelle derivate parziali prime rispetto ad x_0, le (1) si scrivono

$$\sum_1^m {}_\nu E^0_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_0} + \dots = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Questo sistema è risolubile rispetto alle $\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_0}$, se il

determinante delle $E^0_{\mu\nu}$ è diverso da zero:

(5) $$\Omega = \| E^0_{\mu\nu} \| \neq 0$$
$$(\mu,\ \nu = 1,\ 2, \dots,\ m).$$

Osserviamo che il determinante in discorso involge le variabili indipendenti $x_0, x_1, \dots, x_n$ e (in generale, anche) le funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$.

Passiamo ora al sistema (2).

Le (2) si scrivono

$$\sum_1^m {}_\nu E^{00}_{\mu\nu}\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x_0^2} + \dots = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m),$$

e sono risolubili rispetto alle $\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x_0^2}$ se il determinante delle $E^{00}_{\mu\nu}$ è diverso da zero:

(6) $$\Omega = \| E^{00}_{\mu\nu} \| \neq 0$$
$$(\mu,\ \nu = 1,\ 2, \dots,\ m).$$

La condizione di normalità per la (3) è che sia

(6') $$E^{00} \neq 0.$$

Il determinante $\| E^{00}_{\mu\nu} \|$ involge le x, e, in generale, le φ e le derivate parziali prime delle φ rispetto alle x.

Se le condizioni di normalità ora trovate sono soddisfatte, per un dato iperpiano portante $x_0 = a_0$, è applicabile il teorema di Cauchy e allora rimangono determinate univocamente le funzioni φ_ν (o, in particolare, l' unica funzione φ) nelle vicinanze dell' iperpiano.

Occorre ora indagare quand' è che il carattere di normalità si conserva, se alle variabili indipendenti $x_0, x_1, \dots, x_n$ si applica una trasformazione $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ z & z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix}$ per modo che l'iperpiano $x_0 = a_0$ sia trasformato in un'ipersuperficie σ di equazione

$$z(x_0, x_1, \dots, x_n) = z_0$$

dello spazio S, a partire dalla quale sia possibile la determinazione (almeno in un'intorno) delle funzioni φ.

3. *Condizioni di normalità rispetto all'argomento* z. Poniamo

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Si ha

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} p_i + \sum_{1}^{n}{}_j \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial x_i} \quad (\nu = 1, 2, \dots, m)$$

che abbrevieremo in

$$(7) \qquad \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} p_i + \dots \quad (\nu = 1, 2, \dots, m).$$

mettendo in evidenza soltanto la derivata rispetto alla z.

Sostituendo nelle (1), queste si scrivono

$$\sum_{1}^{m}{}_\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial z} \sum_{0}^{n}{}_i E^i_{\mu\nu} p_i + \dots = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Se poniamo

$$(8) \qquad \omega_{\mu\nu} = \sum_{0}^{n}{}_i E^i_{\mu\nu} p_i ,$$

la condizione di normalità del sistema trasformato è espressa da

$$(9) \qquad \Omega = \| \omega_{\mu\nu} \| \neq 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, m).$$

Per ciò che riguarda il sistema (2), si ha analogamente

$$\frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial z^2} p_i p_k + \dots ,$$

e le equazioni si trasformano nelle

$$\sum_{1}^{m}{}_\nu \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial z^2} \sum_{0}^{n}{}_{ik} E^{ik}_{\mu\nu} p_i p_k + \dots = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Se poniamo

$$(10) \qquad \omega_{\mu\nu} = \sum_{0}^{n}{}_{ik} E^{ik}_{\mu\nu} p_i p_k ,$$

la condizione di normalità è espressa da

$$(11) \qquad \Omega = \| \omega_{\mu\nu} \| \neq 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, m).$$

Nel determinante (9) le $\omega_{\mu\nu}$ sono forme lineari delle $p_0, p_1, \dots, p_n$, e quindi Ω è una forma di grado m di questi argomenti; nel determinante (11) le $\omega_{\mu\nu}$ sono forme quadratiche delle p, e quindi Ω è una forma di grado $2m$ degli argomenti $p_0, p_1, \dots, p_n$.

Nel caso dell'unica equazione (3), il determinante si riduce all'unico elemento

$$\Omega = \sum_{0}^{n}{}_{ik} E^{ik} p_i p_k .$$

Concludendo, in corrispondenza ad ogni funzione $z(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ per la quale *non* sia identicamente $\Omega = 0$, si ha una famiglia di ipersuperficie $z = z_0$ a partire da ognuna delle quali è ancora possibile la risoluzione del problema di CAUCHY, di determinare cioè le funzioni incognite quando i dati iniziali siano relativi alla ipersuperficie stessa. Ciò in virtù del fatto che il sistema trasformato è normale rispetto a z.

4. Quando la funzione $z(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ soddisfa all' equazione

$$\Omega = 0, \tag{12}$$

non è più applicabile (qualunque sia la costante z_0) il teorema di CAUCHY a partire dalle ipersuperficie portanti $z = z_0$. In tal caso queste diconsi *varietà caratteristiche.*

L' equazione (12), mentre ci avverte che il sistema trasformato nelle variabili $z, z_1, \ldots, z_n$ non è normale rispetto a z, circoscrive e, in certi casi che ora preciseremo, permette addirittura di assegnare le varietà in corrispondenza alle quali non si può senza altro affermare la determinabilità delle funzioni incognite, quando siano assegnati sulla varietà i valori delle funzioni stesse e delle loro derivate parziali di ordine inferiore al massimo.

Le varietà caratteristiche, nel caso della (3), sono quelle che soddisfano all' equazione

$$\sum_{0}^{n}{}_{ik} E^{ik} p_i p_k = 0.$$

Pur supponendo reali i coefficienti E^{ik}, esse possono essere reali o immaginarie. Sono necessariamente immaginarie quando la forma quadratica a primo membro è definita. Nel caso opposto riescono reali, se tali sono i dati iniziali.

Consideriamo in particolare le varietà caratteristiche dell' equazione canonica dei piccoli moti. Esse sono integrali dell' equazione alle derivate parziali

$$\Omega = \frac{1}{V^2} p_0^2 - \sum_{1}^{3}{}_i p_i^2 = 0,$$

di cui il primo membro è una forma quadratica indefinita.

5. *Equazione alle derivate parziali delle varietà caratteristiche in un caso particolare.* La determinazione delle varietà caratteristiche si identifica col problema dell' integrazione dell' equazione alle derivate parziali del 1° ordine $\Omega = 0$, dove la funzione incognita è z.

Questo problema offre notevoli difficoltà, se nel determinante Ω i coefficienti $E^i_{\mu\nu}$ o $E^{ik}_{\mu\nu}$ dipendono anche dalle funzioni incognite φ dell' assegnato sistema differenziale.

La questione si semplifica quando si può isolare la ricerca di z dall' integrazione del sistema normale assegnato. Questa circostanza si presenta quando le equazioni del sistema sono lineari nelle derivate delle φ di ordine massimo. Allora infatti le E dipendono soltanto dalle $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

In tal caso la Ω involge unicamente le x e le p, e l' equazione è del tipo

$$\Omega(x \mid p) = 0,$$

nella quale è $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Non interviene esplicitamente la funzione incognita z; torneremo più tardi su questa equazione.

6. *Genesi meccanica dell'equazione canonica dei piccoli moti.*

L'equazione fondamentale dell'idrodinamica pura, nel caso in cui il moto del fluido (perfetto) sia irrotazionale, sotto l'azione di forze conservative, è [1]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + {}^1/_2\, v^2 - (U - \mathfrak{F}) = c, \tag{13}$$

designandosi al solito con $v = \operatorname{grad} \varphi$ la velocità (vettoriale) di una particella generica, con t il tempo, con x_1, x_2, x_3 coordinate cartesiane, con $\varphi(t \mid x_1, x_2, x_3)$ il potenziale di velocità, con U il potenziale della forza unitaria (di massa). Il secondo membro è costante rispetto ad x_1, x_2, x_3; e

$$\mathfrak{F} = \int \frac{dp}{\mu},$$

dove p e μ sono la pressione e la densità in un punto generico della massa fluida e si suppongono legate tra loro da una relazione, detta equazione di stato del fluido.

Per la determinazione del moto del fluido occorre considerare accanto all'equazione (13), l'equazione di stato e quella di continuità

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \operatorname{div} v = 0,$$

che traduce analiticamente (seguendo il punto di vista euleriano) la conservazione della massa durante il moto. In questa equazione il termine $\frac{d\mu}{dt}$ designa la derivata sostanziale della densità rispetto al tempo t. Ricordiamo a tale proposito che, nello studio del moto di un sistema continuo, si è condotti a considerare il modo di dipendere, ad ogni istante, di quantità scalari o vettoriali dai vari posti P del campo, in cui ha luogo il moto (punto di vista euleriano), o dalle varie particelle mobili M del sistema (punto di vista lagrangiano).

Se q è una tale quantità, si definisce derivata locale di q la derivata di q rispetto a t, trattando P costante; essa si designa con la notazione $\frac{\partial q}{\partial t}$.

Si definisce invece derivata sostanziale di q la derivata di q rispetto a t, trattando M costante.

Nel primo caso, si contempla una variazione locale di q al variare di t: nel secondo caso, si contempla il modo di variare di q riferendosi sempre alla stessa particella.

Si vede immediatamente che tra le due derivate intercede la relazione

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial q}{\partial x_i} u_i,$$

essendo u_i la componente di v secondo l'asse x_i.

[1] Cfr. T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Compendio di Meccanica razionale*, P. 2ª, Cap. XII, Bologna, Zanichelli, 1928.

Ciò posto, fissiamo l'attenzione sul caso che si tratti di un gas perfetto in regime adiabatico. Ogni particella di gas (pur variando di temperatura) si troverà sottratta a scambi di calore con le particelle contigue e in tal caso, come si sa dalla Termodinamica, la relazione che intercede tra p e μ è

$$p = c_1 \mu^{\gamma},$$

dove c_1 dipende esclusivamente dallo stato iniziale della particella considerata (pura costante se inizialmente temperatura e densità sono uniformi) e γ è il rapporto tra i due calori specifici a pressione e a volume costante ($\gamma = 1{,}41$ circa per l'aria e per gli altri gas più comuni).

Il sistema di equazioni che serve per determinare il moto è dunque

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + {}^1\!/_2 \, v^2 - (U - \mathfrak{F}) = c, \\ & \frac{d\mu}{dt} + \mu \operatorname{div} v = 0, \\ & \mathfrak{F} = \int \frac{dp}{\mu}, \quad p = c_1 \mu^{\gamma}, \end{aligned} \right.$$

e le funzioni incognite sono φ, μ, p.

Supponiamo ora che il gas sia sottratto ad azioni di forze e che p e μ siano poco differenti dalle loro determinazioni in condizioni normali; in particolare

$$\mu = \mu_0 (1 + \sigma),$$

dove σ è un numero puro, da risguardarsi come una

quantità piccola del primo ordine. Per ovvia ragione essa

$$\sigma = \frac{\mu - \mu_0}{\mu}$$

dicesi la *concentrazione* della generica particella gassosa.

Supponiamo inoltre che siano trascurabili le differenze tra la derivata sostanziale e la derivata locale (rispetto a t) delle funzioni φ e μ, in ogni punto della massa gassosa.

Da ciò segue, in particolare, che, nella prima equazione del sistema (14), è trascurabile il termine ${}^1\!/_2 \, v^2$. Infatti, osserviamo che, per essere v il gradiente di φ, si ha

$$v^2 = \sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2.$$

Ma

$$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_1^3{}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_i,$$

sicchè

$$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = v^2$$

risulterà trascurabile rispetto a $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

Si ha poi

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta_2 \varphi,$$

e quindi, in virtù delle ipotesi fatte, il sistema differenziale (14) assume la forma

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathcal{P} = c, \\ &\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\,\Delta_2 \varphi = 0\,, \\ &\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\mu}\,, \quad p = c_1 \mu^\gamma. \end{aligned}\right.$$

Si ha

$$dp = c_1 \gamma \mu^{\gamma-1}\, d\mu, \quad \frac{dp}{\mu} = c_1 \gamma \mu^{\gamma-2}\, d\mu,$$

$$\mathcal{P} = c_1 \frac{\gamma}{\gamma - 1}\, \mu^{\gamma-1} + \mathrm{cost} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\mu} + \mathrm{cost}\,.$$

Dalla posizione $\mu = \mu_0 (1 + \sigma)$ si ricava

$$\frac{p}{\mu} = c_1 \mu^{\gamma-1} = c_1 \mu_0^{\gamma-1} (1 + \sigma)^{\gamma-1} = c_1 \mu_0^{\gamma-1} [1 + (\gamma - 1)\sigma] =$$

$$= \frac{p_0}{\mu_0} [1 + (\gamma - 1)\sigma],$$

a meno di termini di ordine superiore al primo in σ. Si trova così

$$\mathcal{P} = V^2\, \sigma + k,$$

essendo k una costante che non importa specificare, e

$$V^2 = \gamma \frac{p_0}{\mu_0}\,.$$

Con la stessa approssimazione, si ha

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial t} = \frac{\partial \log (1 + \sigma)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}\,.$$

Osserviamo ancora che la φ risulta determinata a meno di una costante, rispetto alle x. Si può, per-

tanto, nelle equazioni (14), sostituire φ con $\varphi + \varphi_0(t)$, essendo $\varphi_0(t)$ una funzione arbitraria del solo argomento t. Con ciò, il $\Delta_2 \varphi$ rimane inalterato, mentre il primo membro della prima equazione si incrementa di $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \dfrac{d\varphi_0}{dt}$.

Assumendo, in particolare,

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = c - k,$$

il sistema (14) si riduce alla forma definitiva

$$\text{(15)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V^2 \sigma = 0\,, \\ &\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Delta_2 \varphi = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Eliminando σ, si trova

$$\frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta_2 \varphi = 0,$$

che è l'equazione canonica dei piccoli moti: in essa V^2 ha il valore *costante* $\gamma \dfrac{p_0}{\mu_0}$.

§ 3. L'equazione canonica dei piccoli moti. Concetto di propagazione ondosa. Velocità di avanzamento e di propagazione di una superficie d'onda o di discontinuità.

1. *Interpretazione acustica.* L'equazione testè stabilita

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta_2 \varphi = 0$$

è, in particolare, applicabile alle vibrazioni sonore dell'aria, o di altra massa gassosa, potendosi certo (in una prima e già notevole approssimazione) prescindere da qualsiasi azione dissipativa e quindi considerare il moto irrotazionale, senza scambi di calore da particella a particella (comportamento adiabatico).

Supponiamo dunque che il potenziale di velocità φ si riferisca a vibrazioni sonore, nell'aria.

Allora $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ rappresentano le componenti della velocità della molecola d'aria posta in (x_1, x_2, x_3) all'istante t.

Supponiamo anzi, in modo preciso, che, all'istante generico t, si trovi in vibrazione soltanto un certo strato d'aria, compreso tra due superficie

$$z(t \mid x) = c_1, \quad z(t \mid x) = c_2. \tag{2}$$

All'esterno dello strato vi sarà quiete (cui corrisponde la soluzione nulla, $\varphi^* = 0$, della (1)) e all'interno il fenomeno è caratterizzato da una soluzione, non nulla, $\varphi(t \mid x)$.

2. Prescindiamo ora dall'interpretazione acustica delle soluzioni della (1) e supponiamo che $\varphi(t \mid x)$ e $\varphi^*(t \mid x)$ siano soluzioni della (1) rispettivamente all'interno e all'esterno dello strato determinato dalle superficie (2). Il fenomeno rappresentato dalla (1) viene caratterizzato da due distinte funzioni, secondo che lo si consideri all'interno o all'esterno dello

strato. Attraverso la superficie (2), le derivate dei diversi ordini delle φ subiranno, in generale, delle brusche variazioni e, per questa ragione, tali superficie si dicono *di discontinuità*.

Ora può accadere che esse varino nel tempo; in tal caso, si dice che la discontinuità si propaga, ed essa, più specificamente, prende il nome di *onda*.

Dunque, se si interpreta l'equazione (1) come atta a caratterizzare una possibile propagazione ondosa, le superficie di discontinuità (o superficie d'onda come, indifferentemente, diremo) limitano uno strato che si sposta ed, eventualmente, si deforma nel tempo.

Se si ammette che, durante il moto, non avvengano compenetrazioni o cavitazioni molecolari, nel passaggio attraverso una superficie d'onda, le componenti normali della velocità della generica particella non dovranno subire discontinuità. Escludiamo pure che su tale superficie avvengano fenomeni di slittamento di molecole, i quali comporterebbero delle discontinuità tangenziali per la velocità.

A questo punto notiamo che, a norma dei postulati sugli sforzi (in particolare pressioni) sui quali si fonda la meccanica dei sistemi continui, la pressione non può, in condizioni normali, subire bruschi salti, anche se varia bruscamente il regime di moto.

Notiamo ancora che la densità μ è legata alla pressione dall'equazione di stato (che è la stessa sia da una parte che dall'altra della superficie di discontinuità).

Dalla continuità di p segue perciò quella di μ. D'altra parte, in base alla prima delle (15) del § prec., le derivate di φ e φ^* rispetto a t rappresentano densità (a meno di un fattore costante), perciò anche tali derivate debbono essere esenti da discontinuità attraverso la superficie d' onda.

Le considerazioni fatte portano alla conclusione che, affinchè l' equazione (1) definisca una propagazione ondosa, bisogna ammettere che due diverse soluzioni di essa φ e φ^*, supposte esistenti e caratterizzanti il fenomeno, all' interno e all' esterno di uno strato, si raccordino, cioè abbiano eguali derivate prime di spazio e di tempo, attraverso le superficie d' onda che, istante per istante, limitano lo strato.

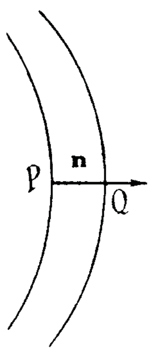

Fig. 1.

Sono le derivate seconde invece che subiranno delle brusche variazioni; ci occuperemo più tardi di queste, quando estenderemo le attuali considerazioni ad un generico sistema normale di equazioni alle derivate parziali. Allora faremo anche vedere come vengono caratterizzate, dal punto di vista analitico, le superficie d' onda.

3. *Velocità di avanzamento e di propagazione.* Consideriamo una delle superficie d' onda σ che, all' istante t, limitano lo strato, sede della perturbazione, e sia n la normale orientata verso l' esterno di esso in un generico punto P (Fig. 1).

La superficie si sposta e nell' istante $t + dt$ interseca la normale n in un punto Q.

Sia dn la misura, con segno, del segmento PQ, contata positivamente verso l' esterno.

Il rapporto

$$a = \frac{dn}{dt}$$

dicesi la *velocità di avanzamento* della superficie d' onda nel punto P e nell' istante considerato.

Nei casi ordinari accade che, in tutti i punti di una delle due superficie terminali dello strato, è $a > 0$, e in tutti i punti dell' altra è $a < 0$. La prima dicesi fronte d' onda od anche prora, la seconda poppa.

Daremo più tardi (cfr. § 4, n. 3) l' espressione esplicita di a collegandola con l' equazione della superficie d' onda σ.

La differenza

$$c = a - \frac{d\varphi}{dn},$$

tra la velocità di avanzamento e la componente normale alla σ della velocità della particella fluida situata nel punto P, all' istante t considerato, dicesi *velocità (normale) di propagazione* della σ nel punto P.

Per il principio dei moti relativi, questa velocità misura, manifestamente, la rapidità con cui la superficie si sposta (non rispetto agli assi fissi, ma) rispetto al mezzo.

Se all' esterno dello strato c' è quiete, si ha $\varphi^* = 0$ e poichè, come si è detto, le φ e φ^* debbono raccordarsi attraverso la σ, si ha

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0,$$

onde

$$c = a.$$

In tal caso, la velocità di propagazione si identifica con quella di avanzamento.

4. È ora importante osservare che la σ è una varietà caratteristica, relativa all'equazione (1), cioè un integrale dell'equazione

$$\frac{1}{V^2} p_0^{\,2} - \sum_1^3 {}_i\, p_i^{\,2} = 0. \tag{3}$$

Infatti, se ciò non fosse, nelle vicinanze della σ, rimarrebbe determinata, dalla sola conoscenza dei valori superficiali sopra la σ, di φ e di $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, un'unica soluzione φ della (1), a norma del teorema di CAUCHY.

La propagazione ondosa è dunque possibile in quanto le superficie d'onda sono varietà caratteristiche.

Un caso particolare della (1) mostra altresì che, affinchè sia ancora possibile risolvere il problema di CAUCHY, a partire da una varietà caratteristica, è necessario che siano soddisfatte certe condizioni. Peraltro, se queste sono soddisfatte, non esiste una soluzione unica, bensì infinite.

Per rendercene conto, supponiamo che la funzione φ dipenda da t e dalla sola x_1, che ora scriveremo x. La (1) diventa

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \tag{1'}$$

Ricordiamo come si perviene all'integrazione di questa celebre equazione. Si osserva che essa si può

scrivere

$$\left(\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = 0.$$

È ovvio che si tratta a primo membro di un prodotto operatorio applicato a φ.

Introduciamo al posto delle variabili t, x, le variabili z, z_1, legate alle prime dalle relazioni

$$z = x - Vt, \quad z_1 = x + Vt,$$

con che

$$x = {}^1/_2(z + z_1), \quad t = {}^1/_2(z_1 - z)/V.$$

Per il teorema della derivazione delle funzioni composte, si ha

$$\frac{\partial}{\partial z} = {}^1/_2\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z_1} = {}^1/_2\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

e quindi la (1') si trasforma nell'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial z_1} = 0$$

che si integra a vista.

L'integrale generale è

$$\varphi = \alpha(z) + \beta(z_1), \tag{4}$$

essendo α e β due funzioni arbitrarie (derivabili) delle z e z_1 rispettivamente.

Si vede subito (come del resto dovevamo aspettarci) che non si può, in generale, risolvere il problema di CAUCHY per una retta portante $z = c$, ma occorre che i dati soddisfino ad una condizione di compatibilità, verificata la quale esistono infinite soluzioni.

Invero, dalla (4) segue

$$\begin{cases} \varphi(c, z_1) = \alpha(c) + \beta(z_1) \\ \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=c} = \alpha'(c). \end{cases}$$

Non si possono quindi assumere a piacere le funzioni φ_0 e φ_1 della variabile z_1, alle quali debbano ridursi rispettivamente φ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ per $z = c$. La funzione $\varphi_1(z_1)$ deve essere una costante; e, in tal caso, si hanno infinite forme per la soluzione φ del problema.

Queste osservazioni mostrano quanto sia essenziale la considerazione delle varietà caratteristiche.

Finora ne abbiamo rilevato soltanto il lato negativo, ma va avvertito che anche maggiore è la loro importanza dal punto di vista costruttivo. Infatti, esse servono proprio a risolvere il problema di CAUCHY in corrispondenza a varietà portanti non caratteristiche.

L'idea è dovuta a B. RIEMANN che, in una celebre Memoria dell'Accademia delle Scienze di Gottinga (1860), ha trattato con successo il problema dell'integrazione dell'equazione lineare del 2° ordine di tipo iperbolico a due variabili indipendenti

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0.$$

Il metodo di RIEMANN fu ripreso dal DARBOUX (1) e da altri.

Importanti ricerche sulle equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico in tre e più variabili, nonchè sulla espressione matematica del principio di HUYGENS (2), formulata per la prima volta da KIRCHHOFF per l'equazione canonica dei piccoli moti, si debbono a VOLTERRA (3) e ad HADAMARD (4).

§ 4. Concetto di propagazione ondosa esteso ad un generico sistema normale.

1. Le considerazioni istituite intorno all'equazione (1) del § prec. si possono facilmente estendere ai sistemi di equazioni considerati al n. 1 del § 2.

(1) Cfr. G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, T. II. Paris, Gauthier-Villars, 1889.

(2) Indicazioni bibliografiche con particolare riguardo al contributo italiano si possono trovare nelle *Lezioni di meccanica razionale* di LEVI-CIVITA e AMALDI, Vol. II, Parte seconda, p. 468 (Bologna, Zanichelli, 1927).

(3) Cfr. V. VOLTERRA, *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*, professées à Stockholm, Paris, Hermann, 1912; *Lectures delivered at the celebration of the twentieth anniversary of the foundation of Clerk University*, deuxième leçon, 1912.

(4) Cfr. J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes*, Paris, Hermann, 1903; *Lectures on Cauchy's Problem in linear partial differential equations*, New Haven, 1921. È in corso di stampa (presso Hermann) una edizione francese di queste lezioni.

Per la bibliografia dell'argomento il lettore può consultare l'interessante opuscolo di R. D'ADHÉMAR, *Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles*, Coll. Scientia, Gauthier-Villars, Paris, 1907.

Introduciamo qui ancora lo spazio S delle variabili t, x_1, x_2, ..., x_n e supponiamo che, all'interno e all'esterno dello strato determinato da due *ipersuperficie*, che diremo anche semplicemente *superficie* (quando non ci sia pericolo di ambiguità)

$$z = c_1, \quad z = c_2, \tag{1}$$

uno dei due sistemi

$$E_\mu \equiv \sum_{1}^{m}{}_{\nu} \sum_{0}^{n}{}_{i} E^i_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} + \Phi_\mu (x \,|\, \varphi) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, ..., m); \tag{2}$$

$$E_\mu \equiv \sum_{1}^{m}{}_{\nu} \sum_{0}^{n}{}_{ik} E^{ik}_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_i \partial x_k} + \Phi_\mu (x \,|\, \varphi \,|\, \chi) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, ..., m) \tag{3}$$

sia soddisfatto rispettivamente da due m — ple di funzioni φ_1, φ_2, ..., φ_m e φ_1^*, φ_2^*, ..., φ_m^*. In base alle considerazioni istituite intorno all'equazione canonica dei piccoli moti, supporremo che, al variare del tempo, lo strato determinato dalle (1) si sposti ed eventualmente si deformi e che attraverso le ipersuperficie (1) le derivate parziali del 1° ordine (nel caso $s = 1$) e del 2° ordine (nel caso $s = 2$) subiscano delle brusche variazioni (salti).

Supporremo anche che le funzioni φ e φ^* siano continue attraverso le (1) nel caso $s = 1$, e nel caso $s = 2$, siano tali anche le derivate parziali prime.

Questa impostazione corrisponde a presentare un tipo di fenomeno ondoso, le superficie d'onda essendo quelle che limitano lo strato.

Nel caso di un sistema generale di ordine massimo s, attraverso le superficie d'onda, le funzioni φ e φ^* dovranno riattaccarsi insieme con le derivate di ordine inferiore ad s.

Si presenterà invece una qualche discontinuità per le derivate di ordine s.

Tali superficie, in quanto limitano porzioni dello spazio S, nelle quali il fenomeno, rappresentato analiticamente dalle equazioni differenziali del sistema, è retto da due diverse determinazioni delle funzioni φ, risultano varietà caratteristiche, poichè a partire da esse non è applicabile il teorema di univoca esistenza degli integrali.

Noi non ci occupiamo qui del problema di assegnare le due m — ple di funzioni incognite φ e φ^*; tale ricerca ci obbligherebbe a discutere il problema di CAUCHY in corrispondenza alle varietà caratteristiche.

Questo studio è stato fatto, almeno in taluni casi particolari, da HADAMARD e approfondito da RIQUIER [1] e DELASSUS; esso potrebbe ricondursi, con CARTAN, alle equazioni di PFAFF [2].

Ammettiamo invece l'esistenza delle funzioni φ e φ^* e con esse una propagazione ondosa, e proponiamoci di illustrarne alcune proprietà.

2. Se $z = c$ è una superficie d'onda σ, la funzione z deve soddisfare all'equazione

$$\Omega(x \,|\, p) = 0,$$

[1] Cfr. CH. RIQUIER, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1910; oppure M. JANET: *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1929.

[2] Cfr. E. GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris, Hermann, 1922.

essendo

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad (i = 0,\ 1, \dots ,\ n).$$

Con ciò la validità di tale equazione risulta, a dir vero, stabilita soltanto sulla σ, cioè per z eguale ad un particolare valore c. Siccome però l' argomento z non entra esplicitamente in Ω, così la limitazione $z = c$ è inessenziale, nel senso che la Ω va senz' altro a zero, ogni qualvolta vi si pongano le p_i eguali alle derivate di quella tale funzione z: si tratta quindi, rispetto a z, di vera e propria equazione alle derivate parziali (del primo ordine).

Questa, nell' ipotesi che le funzioni E che compaiono in uno dei sistemi (2) o (3) dipendano solo dalle x, è atta a caratterizzare la z di per sè sola.

Prima di approfondire lo studio in tale ipotesi, estendiamo, in generale, il concetto di velocità di avanzamento della σ in un punto P, attribuendo allo spazio S' delle variabili $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$ una metrica euclidea, e alle variabili x l' interpretazione di coordinate cartesiane.

Siano

(4) $$z(t \mid x) = c, \quad z(t + dt \mid x) = c$$

le equazioni della σ agli istanti t e $t + dt$. La normale n in P a σ interseca la seconda delle (4) in un punto Q. Se dn è la misura, con segno, del segmento PQ, contata positivamente verso l' esterno dello strato determinato dalla σ e dall' altra superficie d' onda relativa all' istante $t + dt$, il rapporto

$$a = \frac{dn}{dt}$$

dicesi la velocità di avanzamento della superficie d' onda nel punto P all' istante considerato.

3. *Calcolo della velocità di avanzamento.* Cerchiamo un' espressione della a che faccia intervenire gli elementi della superficie σ.

Siano α_i $(i = 1,\ 2, \dots,\ n)$ i coseni direttori della normale n in P a σ.

Si sa che

(5) $$\alpha_i = \frac{p_i}{g} \qquad (i = 1,\ 2, \dots,\ n),$$

essendo g la determinazione positiva della radice quadrata di

(5') $$g^2 = \sum_1^n {}_i\, p_i^2.$$

Se x_i e $x_i + dx_i$ sono le coordinate dei punti P e Q, si ha, per le (4),

$$z(t \mid x) = c, \quad z(t + dt \mid x + dx) = c,$$

da cui, per differenza

(6) $$dz = p_0 dt + \sum_1^n {}_i\, p_i dx_i = 0\,.$$

Poichè i dx_i sono le componenti del vettore $Q - P$, si ha

(7) $$dx_i = \pm\, \alpha_i dn \qquad (i = 1,\ 2, \dots,\ n).$$

Il segno + o — va scelto a seconda che è $z > 0$ o $z < 0$ all' esterno dello strato; ma noi, nelle nostre considerazioni, non avremo bisogno di specificare il senso, e quindi manterremo il doppio segno.

Sostituendo nella (6) le espressioni dei dx_i date dalle (7) e tenendo conto delle (5), si ha

$$p_0 dt \pm dn \sum_1^n \alpha_i p_i = p_0 dt \pm g dn = 0,$$

da cui

$$|a| = \left|\frac{dn}{dt}\right| = \frac{|p_0|}{g}. \tag{8}$$

È questa la formula che avevamo in vista; essa pone in evidenza il modo di variare della velocità di avanzamento al variare di P e del tempo, e quindi al variare della superficie d'onda.

4. *Un' applicazione della formula* (8). Applichiamo la formula trovata all'equazione (1) del § 3, che, come abbiamo detto, regge il fenomeno della propagazione del suono.

La (3) del § 3, in virtù della (5'), si scrive

$$\frac{1}{V^2} p_0^2 = g^2$$

da cui

$$V = \frac{|p_0|}{g}.$$

Si trova così che la costante V è la velocità di avanzamento di una superficie d'onda, limite di uno strato che, all'istante t, è sede di vibrazioni sonore.

Per i gas perfetti in regime adiabatico, si è visto che

$$V^2 = \gamma \frac{p_0}{\mu_0},$$

nella quale formula il significato dei simboli ci è già noto (cfr. § 2, n. 6). Poichè all'esterno dello strato perturbato c'è quiete, per un'osservazione fatta, possiamo affermare che la formula

$$V = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\mu_0}}$$

dà la velocità di propagazione del suono.

Adottando il sistema pratico di misure, tenendo conto che un m³ d'aria pesa kg. 1,29 e che p_0 è circa 10^4 unità pratiche, si ha per V il valore approssimato dato da

$$V^2 = 1{,}41 \frac{10^4 \cdot 9{,}8}{1{,}29}$$

(9, 8 è l'accelerazione della gravità). Si trova che la velocità V è di circa 331 metri al secondo, valore che è in buon accordo con quello determinato sperimentalmente.

Il calcolo della velocità di propagazione del suono (con referenza al caso tipico di onde piane) fu fatto per la prima volta dal NEWTON, il quale trovò, supponendo il fenomeno isotermo,

$$V = \sqrt{\frac{p_0}{\mu_0}}.$$

Tale espressione, nel caso in cui il mezzo sia l'aria, alla temperatura di 0°, dà $V = 280$ metri al secondo. L'esperienza invece fornisce a 0° il valore 333. Il LAPLACE dette la ragione del disaccordo tra la teoria e l'esperienza osservando che le compressioni e le rarefazioni degli strati d'aria, dovute alla propagazione ondosa, producono variazioni di temperatura, nel senso che gli strati compressi si riscaldano e quelli rarefatti si raffreddano.

Tenendo conto di queste circostanze, il LAPLACE dimostrò che per avere dalla formula teorica la vera velocità di propagazione del suono d'accordo con l'esperienza basta risguardare il fenomeno quale adiabatico, con che il rapporto $\frac{p_0}{\mu_0}$ va moltiplicato per il numero γ.

§ 5. Digressione sulla concezione generale di moto ondoso [1].

1. *Che cos'è un moto ondoso?* Si potrebbe forse qualificare ondoso il moto di un fluido quando gli spostamenti delle singole particelle materiali implicano un moto assai più cospicuo di un qualche elemento saliente; per es. di una superficie libera o di una superficie di separazione di due diversi regimi.

Ma questo non è un carattere nettamente discriminante e si può rendersene conto con un esempio classico.

Consideriamo un canale rettilineo a fondo orizzontale e pareti verticali, riferendoci al caso tipico in cui il movimento del liquido pesante contenuto nel canale, diciamo addirittura acqua, avviene pa-

[1] Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Questioni di Meccanica classica e relativista*, II Conferenza. Le onde dei liquidi. Propagazione nei canali; Bologna, Zanichelli, 1924.

rallelamente alle sponde, comportandosi nello stesso modo in tutte le sezioni longitudinali del canale, cioè nei vari piani verticali paralleli alle sponde. Il fenomeno si può allora studiare in due dimensioni, occupandosi di una sezione longitudinale generica.

Il fondo (Fig. 2) vi sarà rappresentato da una retta orizzontale ΩX, e il pelo libero superiore da una linea l in generale variabile col tempo, ma comunque (almeno in condizioni ordinarie) non molto diversa da una retta orizzontale $y = h$: quella tale retta che costituirebbe la linea di livello in condizioni sta-

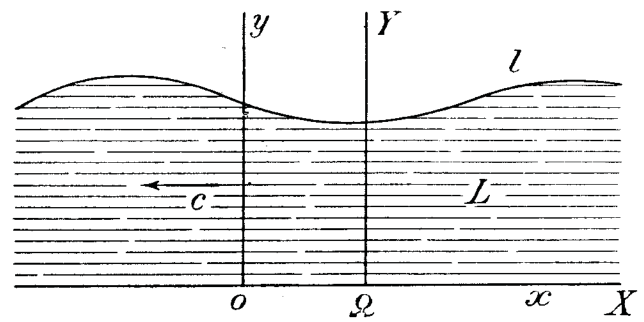

Fig. 2.

tiche, sicchè h rappresenta la profondità (media) del canale.

Indichiamo con L il campo del moto, cioè la striscia indefinita (in generale variabile anch'essa col tempo) compresa tra il fondo e la linea l.

Ciò premesso, il problema generale dell'idrodinamica per questi moti piani si può manifestamente formulare così: Nell'istante iniziale $t = 0$ è data la perturbazione, cioè la configurazione di l e la distribuzione delle velocità in L. Caratterizzare l'andamento successivo del moto, in particolare la legge con cui varia l.

Questa stessa impostazione, salvo specificazioni qualitative, spetta al problema generale delle onde di canale, chiamandosi appunto propagazione ondosa la legge che presiede allo svolgimento del moto a partire da una perturbazione assegnata. Un tale punto di vista che mira direttamente all'integrale generale, rilevando poi quasi per incidenza in alcune applicazioni particolari l'aspetto di moto ondoso nel senso ordinario della parola, si riscontra nelle prime ricerche di LAGRANGE, che riconducono il problema all'equazione delle corde vibranti, trascurando di fronte a g (accelerazione della gravità) l'accelerazione verticale del moto delle singole particelle; la applicazione più cospicua è costituita dalle onde di marea.

Analogamente procedono POISSON e CAUCHY, abbandonando la ipotesi molto restrittiva concernente l'accelerazione, e trattando in generale dei piccoli moti in canali molto profondi.

Le onde saltano poi fuori in modo indubbiamente espressivo, ma senza una demarcazione sistematica, là dove per la natura fisica della questione non potrebbero mancare.

Così avviene, ad esempio, per le cosiddette onde di emersione che corrispondono all'ipotesi di un solido (quale potrebbe essere un galleggiante) che venga bruscamente sollevato e tirato via, lasciando poi la massa fluida a riassettarsi da sè.

In questo riassetto che, almeno in teoria (fluidi ideali rigorosamente incompressibili), si inizia istantaneamente in tutta la massa d'acqua, si formano intumescenze e depressioni del pelo libero, le quali viaggiano lungo il canale con accelerazione (badisi bene accelerazione, non velocità) sensibilmente costante. Ecco un qualche cosa che si propaga, ma pur trattandosi di una circostanza saliente, non c'è ancora una legge nitida la quale permetta di dominare il carattere ondoso del moto. Tale è invece quella che si schematizza nella propagazione delle discontinuità, di cui ci occupiamo sistematicamente nella presente trattazione.

2. È importante rilevare che, pur essendo essenziale la caratteristica su accennata, lo studio quantitativo dei fenomeni ondosi nei fluidi e nei mezzi elastici non è stato originariamente impostato sotto questa forma, ma si è andato sviluppando senza rinunciare al criterio di continuità.

In realtà, si è preso norma dai casi semplici in cui si può limitarsi a considerare una sola dimensione di spazio, come avviene per le corde vibranti.

Se si designa con s il parametro di posizione della particella vibrante nel campo ad una dimensione di cui si tratta (configurazione rettilinea iniziale della corda vibrante), con t il tempo, con φ lo spostamento e con (E) l'equazione (o il sistema) differenziale che traduce analiticamente il fenomeno meccanico, si sono considerate per prime le soluzioni $\varphi(s, t)$, dipendenti da un unico argomento $s_1 = s - Vt$, con V costante.

Il binomio $s_1 = s - Vt$ si suol chiamare *fase* del corrispondente fenomeno.

Quando la fase è costante, ogniqualvolta cioè i due argomenti s e t, che a priori sono tra loro indipendenti, si pensino legati da una equazione del tipo

$$s_1 = s - Vt = \text{cost},$$

la caratteristica $\varphi(s_1)$ del fenomeno vibratorio si mantiene costante. Ciò val quanto dire che, per un osservatore il quale si sposti lungo la corda (o, più generalmente, lungo il supporto dell'argomento s) con la *velocità costante* V, il fenomeno appare stazionario. Ecco perchè, di fronte alle soluzioni del tipo particolare $\varphi(s_1)$, la costante V si può interpretare come *velocità di propagazione* dello stato vibratorio del filo. Appunto in questo senso si parla di *onde che si propagano colla velocità* V.

Più generalmente, anche nel caso di fenomeni in tre dimensioni, sonori, elastici, elettromagnetici, lo studio delle onde si è sviluppato cercando quelle classi particolari di soluzioni (dei sistemi differenziali alle derivate parziali definienti i fenomeni stessi) che dipendono da un unico argomento funzione lineare delle tre coordinate di spazio x_1, x_2, x_3 e del tempo $t \equiv x_0$, cioè da un *solo* argomento del tipo

$$\xi = \sum_0^3{}_i\, c_i x_i$$

le c_i essendo costanti, a priori arbitrarie.

Ammesso che si tratti di soluzioni, le quali dipendano in qualche modo dal posto (non siano cioè

funzioni unicamente del tempo), dovrà ritenersi diversa da zero una almeno delle c_1, c_2, c_3, ossia non nullo il vettore c, avente c_1, c_2, c_3 per componenti secondo gli assi coordinati. Con ciò si può anche risguardare come unico argomento, da cui dipendono le soluzioni in questione, $s_1 = \frac{\xi}{c}$ (c lunghezza del vettore c), anzichè ξ. Se si nota che $\frac{c_i}{c} = \alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$ rappresentano coseni direttori (del detto vettore c) e si scrive V al posto di $-\frac{c_0}{c}$, l'argomento unico, da cui si suppongono dipendenti i parametri determinativi del fenomeno si presenta qui ancora sotto la forma $s_1 = s - Vt$, dove

$$s = \sum_1^3{}_i\, \alpha_i x_i$$

è, virtualmente, una coordinata spaziale, secondo la direzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e potrebbe quindi senza sostanziale restrizione (in quanto si assuma l'asse delle x_3 nella detta direzione) essere più semplicemente designata con x_3.

Comunque, si tratta di *onde piane*, in quanto lo stato vibratorio dipende, per ogni assegnato t, soltanto da s, ed è quindi identico in tutti i punti di un medesimo piano $s = \text{cost}$.

Ne consegue altresì che il fenomeno è stazionario rispetto ad un osservatore per cui fosse $s_1 = \text{cost}$, per cui cioè s procedesse con velocità V; ecc.

Un' impostazione un po' più generale si ha assumendo s funzione qualunque (anzichè lineare) di x_1, x_2, x_3 e supponendo i parametri determinativi del fenomeno funzioni non soltanto di $s_1 = s - Vt$ ma anche di un altro argomento puramente spaziale.

In quest' ultimo tipo rientrano le cosiddette onde sferiche.

Tipi ancor più generali di onde, concepite in tale modo, furono studiati, sotto diversi punti di vista, dal BATEMAN e dal MAGGI [1].

§ 6. Il metodo di Cauchy per l'integrazione di una equazione alle derivate parziali del 1° ordine.

1. Per quanto si è visto al n. 4 del § 2, le varietà caratteristiche

$$z(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \text{cost}$$

di un sistema normale di equazioni nelle $n+1$ variabili indipendenti $x_0, x_1, \ldots, x_n$ annullano un certo determinante

$$\Omega(x \mid p) = 0 \tag{1}$$

in cui

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

[1] H. BATEMAN, *Electrical and optical wave motion*. Cambridge University Press, 1915.

G. A. MAGGI, *Sulla propagazione delle onde di forma qualsivoglia nei mezzi isotropi*, Rend. Acc. Lincei, (5), Vol. XXIX (2° semestre 1920), pp. 371-378.

Nel caso più generale, la Ω, oltre che le variabili indipendenti x, e le p, contiene anche le funzioni incognite φ del sistema normale di cui si tratta, ma vi è (come fu notato al n. 5 del § 2) una classe assai ragguardevole di sistemi normali in cui la Ω contiene esclusivamente le x e le p: a questa classe appartengono le equazioni normali di ordine $s = 1$ e $s = 2$ allorquando i coefficienti $E^i_{\mu\nu}$ o rispettivamente $E^{ik}_{\mu\nu}$ sono funzioni unicamente delle x.

Anche per i sistemi normali di ordine $s > 1$, si ha, per la determinazione delle varietà caratteristiche, una equazione del tipo (1), purchè i coefficienti delle derivate di ordine massimo dipendano esclusivamente dalle x.

Poichè ci proponiamo lo studio dell' equazione (1), vogliamo qui esporre il metodo di CAUCHY per l'integrazione di un' equazione a derivate parziali del 1° ordine, considerando, in particolare, la (1), in cui non interviene esplicitamente la funzione incognita z. Si è quindi sicuri che in Ω figura una almeno delle p, ad esempio p_0.

Se la (2) si risolve rispetto a p_0 si può scrivere

$$p_0 + H(t, x_1, \ldots, x_n \mid p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{3}$$

essendo

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Converrà dapprima trattare il caso lineare.

2. *Caso dell' equazione lineare.* È ben noto che, se H è una funzione lineare delle p, il problema di integrare la (3) si trasforma nell' integrazione di un sistema differenziale ordinario.

Non sarà male tuttavia ritrovare questo risultato che si applica con successo anche al caso generale.

L' equazione (3) è allora del tipo

$$p_0 + A_0 + \sum_1^n {}_i A_i p_i = 0, \tag{4}$$

essendo le A funzioni delle sole variabili $t, x_1, \dots, x_n$.

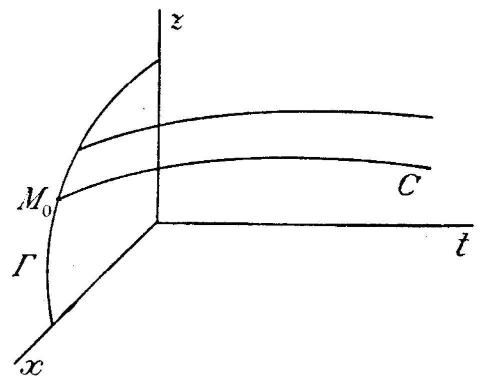

Fig. 3.

Consideriamo lo spazio S_{n+2} delle $n+2$ variabili $t, x_1, \dots, x_n, z$ e una ipersuperficie integrale

$$z = \varphi(t \mid x),$$

che indicheremo con σ, dell' equazione (4).

Disegniamo gli assi di riferimento dello spazio S_{n+2} (che pensiamo euclideo, per comodità di immagine) ponendo in evidenza una sola x per maggior chiarezza; sia Γ la sezione dell' ipersuperficie integrale σ con l' iperpiano $t = 0$, cioè il luogo dei punti definiti dalla equazione $z = \varphi(0 \mid x)$, che scriveremo

più brevemente

$$z = \varphi_0(x).$$

Il concetto fondamentale che ci guiderà nei successivi passaggi logici consiste nel risguardare la σ come luogo di ∞^n curve ottenibili mediante l' integrazione di un opportuno sistema differenziale ordinario del tipo

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t \mid x) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{5}$$

$$\frac{dz}{dt} = Z(t \mid x) \tag{6}$$

di rango $n+1$ nelle funzioni incognite $x_1, \dots, x_n, z$ della variabile t.

Il sistema (5), (6) introduce $n+1$ costanti arbitrarie, ma va avvertito che il loro numero diminuisce di 1, se si vuole che il sistema stesso sia conciliabile con l' equazione $z = \varphi(t \mid x)$ della σ.

L' ipotesi essenziale (che giustifica l' interesse del sistema (5), (6)) è che questo sistema sia indipendente dalla preventiva integrazione dell'equazione (4).

Ciò posto, dobbiamo esprimere la condizione che una qualsiasi curva integrale di (5), (6) appartiene alla σ.

Si ha dalla (6) e dalle (5), in quanto si risguarda z funzione della t e delle x,

$$\frac{dz}{dt} = Z = p_0 + \sum_1^n {}_i\, p_i \frac{dx_i}{dt} = p_0 + \sum_1^n {}_i\, p_i X_i,$$

e, tenendo conto della (4),

$$Z = -A_0 + \sum_1^n {}_i\, p_i (X_i - A_i).$$

Poichè si vuole che il sistema differenziale (5), (6) sia indipendente dall'integrazione della (4), i coefficienti delle p_i debbono essere nulli, epperò deve essere

$$X_i = A_i,$$

da cui segue che

$$Z = -A_0.$$

Dunque il sistema differenziale cercato è

$$(5') \qquad \frac{dx_i}{dt} = A_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(6') \qquad \frac{dz}{dt} = -A_0,$$

o, se si vuole, nella forma tradizionale,

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \dots = \frac{dx_n}{A_n} = -\frac{dz}{A_0} = dt,$$

il quale è atto a determinare le ipersuperficie integrali σ della (4).

Infatti, per risolvere il problema di CAUCHY relativamente ad una prefissata Γ dell'iperpiano $t = 0$, basta considerare, in primo luogo, la totalità delle curve integrali, che è ∞^n, del sistema di equazioni (5'), nel quale non compare la z.

L'integrazione dell'equazione differenziale residua (6'), che si effettua con una semplice quadratura, quando sia stato integrato il sistema (5'), completa poi la determinazione delle curve dello spazio S_{n+2} (della t, delle x e della z) che sono integrali del sistema (5'), (6'). Se si vuole che queste curve

escano dai punti di Γ, bisogna e basta che z, per $t = 0$, assuma il valore $\varphi_0(x)$, le x riferendosi allo stesso valore zero di t e potendo quindi identificarsi colle n costanti arbitrarie introdotte dalla integrazione del sistema (5'). Così è n il numero complessivo delle costanti arbitrarie, e ogni ipersuperficie integrale σ della (4) appare come il luogo delle ∞^n curve integrali di (5'), (6'), uscenti dai punti di Γ.

3. *Caso generale.* Il concetto di trasformare il problema dell'integrazione di un'equazione lineare alle derivate parziali del 1° ordine nel problema dell'integrazione di un sistema differenziale ordinario, dovuto al LAGRANGE, è stato generalizzato dal LAGRANGE stesso, da CHARPIT, da CAUCHY e JACOBI alle equazioni non lineari.

Esponiamo qui il metodo di CAUCHY, seguendo un procedimento che ne sottolinea il concetto (un po' più di quanto apparisca dalle trattazioni abituali).

Riprendiamo l'equazione generale

$$(3) \qquad p_0 + H(t, x_1, \dots, x_n \mid p_1, \dots, p_n) = 0,$$

e cerchiamo se sia possibile determinare una sua generica ipersuperficie integrale (quella di cui il teorema di CAUCHY ci assicura l'esistenza in base ai dati iniziali) come luogo di curve integrali di un opportuno sistema differenziale.

Si riconosce facilmente che non si può più, in generale, associare alla (3) una congruenza di curve dello spazio S_{n+2}, che valga per qualsiasi ipersuperficie integrale, ma bisogna passare ad uno spazio ausiliario (ad un numero maggiore di dimensioni); e precisamente gioverà considerare come argomenti, oltre alle coordinate x di un punto P generico della ipersuperficie integrale σ, anche le $p_0, p_1, \ldots, p_n$, che, geometricamente, definiscono una faccetta per P. Se si vuole che le p abbiano un significato metrico concreto, basta attribuire (come del resto si è già fatto per comodità di locuzione) metrica euclidea allo spazio S_{n+2}, risguardando la t, le x e la z quali coordinate cartesiane. Allora $p_0, p_1, \ldots, p_n, -1$ sono proporzionali ai coseni di direzione della normale a σ, con referenza agli assi $t, x_1, \ldots, x_n, z$ rispettivamente.

Ciò posto, cercheremo di associare alla (3) un sistema differenziale del tipo

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = X_i(t, x \,|\, p), \\[2mm] \dfrac{dp_i}{dt} = P_i(t, x \,|\, p) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(8) \qquad \frac{dz}{dt} = Z(t, x \,|\, p).$$

Quando siano state determinate le espressioni delle X_i in termini delle t, x, p, si trova facilmente anche quella di Z. Infatti, poichè la z è una funzione di t per il tramite di $x_0 \equiv t$ e delle altre x, si ha

$$\frac{dz}{dt} = p_0 + \sum_1^n {}_i\, p_i \frac{dx_i}{dt},$$

e, per le prime delle (7),

$$(9) \qquad \frac{dz}{dt} = Z(t, x \,|\, p) = p_0 + \sum_1^n {}_i\, p_i X_i.$$

Osserviamo che l'equazione (8), con la Z data dalla (9), va associata dopo aver integrato il sistema (7), perchè allora la z si esprimerà in termini di t, mediante una quadratura.

Consideriamo qui ancora lo spazio S_{n+2}, una ipersuperficie Γ nell'iperpiano $t = 0$; e siano M_0 e $\bar{\omega}_0$ rispettivamente un punto di Γ e l'iperpiano tangente in M_0 alla ipersuperficie integrale σ della (3) passante per Γ.

Vogliamo esprimere la condizione affinchè la curva integrale C_0 del sistema (7), (8), uscente da M_0 e tangente a $\bar{\omega}$ appartenga alla ipersuperficie integrale σ, rimanendo rispettate le equazioni

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, \ldots n : x_0 \equiv t),$$

e ciò qualunque sia tale Γ, passante per M_0.

Nel passaggio da t a $t + dt$, p_i aumenta di dp_i, tale che

$$(10) \qquad dp_i = P_i\, dt,$$

e d'altra parte, affinchè seguitino a sussistere le

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},$$

si richiede che

$$(11) \qquad dp_i = \sum_0^n {}_j\, p_{ij}\, dx_j \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

dove si è posto

$$p_{ij} = p_{ji} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n).$$

Bisogna stabilire l'eguaglianza delle espressioni dei dp_i fornite da (10) e (11). Osserviamo che le quantità p_{ij}, con gli indici i, j maggiori di zero, sono arbitrarie in dipendenza della scelta, per ipotesi arbitraria, della Γ, mentre quelle, per le quali almeno un indice è nullo, soddisfano a delle relazioni che si deducono differenziando l'equazione data (3).

Si ha cioè

(12) $$p_{0i} + \sum_1^n{}_j \frac{\partial H}{\partial p_j} p_{ji} + \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, n),$$

relazioni in numero di $n+1$.

Poichè le p_{ij} sono in tutto $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, ne restano

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) - (n+1) = \tfrac{1}{2} n(n+1),$$

mentre le quantità di cui si dispone sono

$$x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$$

in numero di $2n$.

Le considerazioni fatte indurrebbero a pensare che sia impossibile determinare le P_i in modo che

$$P_i dt = \sum_0^n{}_j p_{ij} dx_j,$$

indipendentemente dalle p_{ij}.

Tuttavia i seguenti sviluppi assicurano il successo dell'idea di CAUCHY.

Poichè $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, si ha, derivando rispetto a t,

$$\frac{dp_i}{dt} = P_i = p_{i0} + \sum_1^n{}_j p_{ij} \frac{dx_j}{dt} = p_{i0} + \sum_1^n{}_j p_{ij} X_j.$$

Eliminando le $p_{i0} = p_{0i}$ mediante le (12) e tenendo conto del fatto che tutte le p_{ij} sono simmetriche rispetto ai loro due indici, si vede che le relazioni ora trovate equivalgono alle

$$P_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_j \left(X_j - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) p_{ij} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

E queste sono soddisfatte indipendentemente dalle p_{ij} se

$$X_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

nonchè

$$P_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Rimane così acquisito che, se a partire dal punto generico M_0 dell'ipersuperficie integrale σ, si attribuiscono alle t, x, p, z incrementi che obbediscono al sistema differenziale (7), (8), che oramai è univocamente caratterizzato sotto la forma

(13) $$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\[2mm] \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

(14) $$\frac{dz}{dt} = \sum_1^n{}_j p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H.$$

si passa ad un punto infinitamente vicino M_1 che appartiene ancora alla σ e per il quale le $p_i + dp_i$ individuano la direzione della normale alla stessa σ.

Anzi le stesse considerazioni possono senz'altro ripetersi a partire dal punto M_1 e ciò per la circostanza essenziale che il sistema (7), (8) e quindi (13), (14) è stato costruito in modo che valesse per tutte le ipersuperficie integrali σ, che passavano per M_0 con data orientazione della normale, cioè con date p.

Ci troviamo quindi in M_1 (per la ipersuperficie integrale σ) nelle stesse condizioni in cui ci trovavamo in M_0.

Se ne inferisce che l'intera curva C, definita univocamente dalle (13), (14) sotto la condizione che le x, p, z prendano per $t = 0$, i valori corrispondenti ad M_0, appartiene alla ipersuperficie integrale considerata, la quale (notiamolo bene) è una qualsiasi delle ipersuperficie integrali passanti per M_0 ed avente ivi $\bar{\omega}_0$ per iperpiano tangente.

Si ha così l'importante corollario geometrico che, *se due varietà integrali si toccano in un punto, esse si toccano lungo tutta la C passante per quel punto.*

Le curve C furono chiamate caratteristiche da CAUCHY: noi, seguendo HADAMARD, le chiameremo bicaratteristiche, avendo riservato l'appellativo caratteristiche alle ipersuperficie (dello spazio S delle t, x) che hanno comportamento eccezionale rispetto al problema di CAUCHY.

4. *Risoluzione del problema di Cauchy.* Il metodo ora esposto permette di risolvere il problema di CAUCHY, di determinare cioè la ipersuperficie integrale σ dello spazio S_{n+2} passante per un'assegnata ipersuperficie Γ dell'iperpiano $t = 0$.

Infatti, basterà considerare le curve integrali del sistema (13), (14) uscenti dai punti di Γ; tali curve integrali riempiono una ipersuperficie σ che risulta integrale dell'equazione (3).

5. *Il sistema hamiltoniano associato all'equazione* $\Omega = 0$.

Il sistema (13) ha forma hamiltoniana; la funzione caratteristica H dipende, in generale, dalle t, x, p.

Si è osservato che Ω è una forma di grado m o $2m$ nelle p secondo che la $\Omega = 0$ è l'equazione delle varietà caratteristiche nel caso $s = 1$ od $s = 2$.

Per tale omogeneità, se le p verificano l'equazione $\Omega = 0$, anche le λp la verificano, essendo λ un moltiplicatore arbitrario; allora, risolvendo rispetto a p_0, ne segue che, moltiplicando le $p_1, p_2, \dots, p_n$ per λ, anche p_0, cioè $-H$, viene moltiplicato per λ, il che significa che H è funzione omogenea di primo grado rispetto alle p.

I sistemi hamiltoniani per i quali la funzione H è omogenea di primo grado nelle p intervengono in questioni di ottica geometrica [1].

Importa rilevare che, in questo caso, a norma del teorema di EULERO per le funzioni omogenee, il secondo membro della (14) è identicamente nullo, dunque

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

[1] Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, loc. cit. a pag. 29, pp. 456-469.

da cui

$$z = \text{cost}.$$

Vuol dire dunque che, in questo caso, le curve del sistema hamiltoniano (13) appartengono agli iperpiani $z = \text{cost}$; in particolare sono proprio curve piane se $n = 1$ (cioè se, oltre alla t, c'è una sola variabile x).

6. *Applicazioni.* Supponiamo le $E^i_{\mu\nu}$, o rispettivamente le $E^{ik}_{\mu\nu}$, costanti, il che per $n = 3$ corrisponde fisicamente al caso dei *mezzi omogenei*.

Allora la Ω dipende solo dalle p e quindi la funzione H dipende solo dalle $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Il sistema hamiltoniano diventa

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = 0, \\ \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le prime danno gli n integrali

$$p_i = p_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

i quali, sostituiti nelle $\dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, le rendono costanti, sicchè, integrando ancora e designando con x_i^0 i valori iniziali delle x_i, si ha

$$x_i = t\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_0 + x_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

E di qui appare che le bicaratteristiche sono rette, sia nello spazio S degli argomenti $t \equiv x_0, x_1, \ldots, x_n$; sia, eliminando t, nello spazio geometrico S' delle sole $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Per ciò che concerne la determinazione delle superficie d'onda, sempre nell'ipotesi dei mezzi omogenei, fissiamo l'attenzione sopra la loro configurazione, istante per istante, nello spazio geometrico S' (delle sole x).

Si tratta in sostanza di un caso particolare della risoluzione geometrica del problema di CAUCHY, già accennata al n. 4, in cui va tenuto conto del duplice fatto che a t non si attribuisce più il significato di coordinata geometrica, ma quello di tempo, e che le bicaratteristiche sono rette.

Vediamo che cosa diventa all'istante t una ipersuperficie d'onda σ_0 assegnata arbitrariamente all'istante $t = 0$.

Da ogni punto x_i^0 della σ_0, corrispondente all'istante $t = 0$, si fa uscire la retta definita parametricamente dalle equazioni (15); si vede che la orientazione della retta dipende dal modo con cui la H contiene le p.

Il punto M_0 di coordinate x_i^0 si porta all'istante t nel punto M le cui coordinate sono date dalle (15).

Il luogo dei punti M è la ipersuperficie d'onda σ all'istante t.

7. *Onde piane.* Le formule (15) mettono in rilievo il fatto che, se all'istante $t = 0$, la superficie d'onda è piana, essa si conserva tale in ogni istante.

Consegue che in un mezzo omogeneo qualsivoglia, qualunque sia la natura del fenomeno di cui si tratta, sono sempre possibili onde piane.

8. *Onde epicentrali.* Supponiamo, in particolare, che, all'istante $t=0$, la σ_0 sia infinitamente piccola attorno ad un punto O (che prendiamo per origine, risultando in conformità ogni $x_i^0=0$).

È questo il caso di una perturbazione inizialmente circoscritta ad un intorno piccolissimo del punto O. Estendendo una locuzione abituale nella sismologia, il punto O si dice *epicentro*, e si chiamano *epicentrali* le onde che ne emanano.

Ricordando che la funzione H è omogenea di 1° grado nelle p e quindi $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ omogenea di grado zero, si riconosce che ogni $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ dipende solo dai rapporti di $n-1$ delle p alla rimanente.

Se questa è p_n e si pone

$$u_j=\frac{p_j}{p_n}\qquad (j=1,2,\ldots,n-1),$$

le equazioni (15) assumono l'aspetto

$$x_i=t\psi_i(u_1,u_2,\ldots u_{n-1})\quad (i=1,2,\ldots,n),$$

le ψ_i dipendendo dai soli argomenti u.

Esse pongono in evidenza il fatto che le superficie d'onda, al crescere del tempo, vanno espandendosi omoteticamente attorno ad O.

§ 7. Condizioni di compatibilità geometrico-cinematiche e dinamiche.

1. *Condizioni di compatibilità geometrico-cinematiche.* Supponiamo che $z=\text{cost}$ sia una possibile

superficie d'onda σ nello spazio S delle variabili t, x e che φ e φ^* siano due m — ple di funzioni soddisfacenti al sistema normale di equazioni alle derivate parziali.

Per analogia col tipo delle condizioni di raccordo che, nel caso dell'equazione canonica dei piccoli moti, si sono riconosciute conformi alla natura del problema meccanico, supporremo che le φ e φ^* si riattacchino con continuità attraverso la σ, insieme con le derivate parziali fino all'ordine $s-1$ e che invece le derivate parziali di ordine s subiscano un salto attraverso tale superficie. Così le φ e φ^* definiscono un fenomeno ondoso da una parte e dall'altra della σ.

Vogliamo determinare le relazioni di compatibilità che debbono intercedere tra questi salti attraverso la superficie.

Caso $s=1$. Supponiamo che f sia una funzione continua e derivabile delle variabili $t\equiv x_0, x_1,\ldots, x_n$; e poniamo

$$f_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}\qquad (i=0,1,\ldots,n).$$

Nel caso di $s=1$ subiranno in generale dei salti attraverso la superficie le derivate prime della f, cioè le f_i.

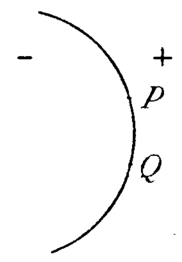

Fig. 4.

Contrassegniamo le due porzioni di spazio separate dalla superficie d'onda con i segni + e — e indichiamo con f^+ ed f^- i valori limiti di una funzione f quando il generico punto da cui essa dipende tende ad un punto della superficie. E poniamo in generale

$$\Delta f = f^+ - f^-.$$

Se si tratta in particolare di una funzione f continua attraverso σ, si ha

$$f_P^+ = f_P^-,$$

essendo P un punto della superficie.

Se Q è un altro punto della superficie, si ha anche

$$f_Q^+ = f_Q^-,$$

donde

$$f_Q^+ - f_P^+ = f_Q^- - f_P^-.$$

Supposto Q infinitamente vicino a P, si ha

$$df_P^+ = df_P^-,$$

ovvero, poichè esistono i limiti delle derivate, se dx_i designano i differenziali delle coordinate nel passaggio da P a Q,

$$\sum_0^n {}_i f_i^+ \, dx_i = \sum_0^n {}_i f_i^- \, dx_i,$$

da cui

$$\sum_0^n {}_i (f_i^+ - f_i^-) \, dx_i = \sum_0^n {}_i \Delta f_i \, dx_i = 0,$$

per tutti i dx_i, corrispondenti a spostamenti infinitesimi tangenziali alla superficie, cioè tali che

$$dz = \sum_0^n {}_i p_i dx_i = 0.$$

Applicando il classico procedimento lagrangiano (dei moltiplicatori indeterminati) la condizione diventa

$$\sum_0^n {}_i (\Delta f_i - \lambda p_i) dx_i = 0.$$

Se supponiamo $p_0 \neq 0$, si può scegliere λ in tal modo che sia

$$\Delta f_0 - \lambda p_0 = 0,$$

da cui

$$\lambda = \frac{\Delta f_0}{p_0},$$

e allora, siccome $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ sono arbitrari, si ha

$$\Delta f_i = \lambda p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si può dunque ritenere che, supposta la f continua, gli $n+1$ salti delle derivate prime di f attraverso la superficie sono complessivamente legati alle p dalle relazioni

$$(1) \qquad \Delta f_i = \lambda p_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

in cui λ è a priori indeterminato.

Caso $s = 2$. La f e le derivate prime debbono essere continue attraverso la superficie, sicchè le formule ora trovate valgono per le derivate seconde.

Poichè ogni f_i è continua, si ha, per quanto precede, indicando con λ_i il moltiplicatore (caratteristico della discontinuità delle derivate) che spetta alla detta f_i:

$$\Delta f_{ij} = \lambda_i p_j = \lambda_j p_i,$$

essendo

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

I coefficienti λ variano, in generale, quando si passa da una delle derivate prime ad un' altra.

Si trae per altro

$$\frac{\lambda_i}{p_i} = \frac{\lambda_j}{p_j} = \rho.$$

e quindi

(2) $$\Delta f_{ij} = \rho p_i p_j \qquad (i, j = 0, 1, ..., n).$$

A queste condizioni (1) o (2) (indipendenti dal fatto che si tratta di soluzioni di un assegnato sistema normale e quindi, nell' interpretazione fisica, dallo speciale meccanismo del fenomeno retto da quel sistema) daremo il nome di condizioni di compatibilità geometrico-cinematiche.

2. *Condizioni di compatibilità dinamica* si traggono invece direttamente dalle equazioni.

La giustificazione di tal nome dato alle condizioni che ora determineremo proviene appunto dal fatto che si pensa al sistema normale come definiente fisicamente (in particolare dinamicamente) un qualche fenomeno.

Per $s = 1$, le equazioni sono

$$E_\mu \equiv \sum_1^m {}_\nu \sum_0^n {}_i \, E^i_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} + \Phi_\mu = 0$$

$$(\mu = 1, 2, ..., m).$$

Poichè le $E^i_{\mu\nu}$ e Φ_μ sono continue, i salti delle derivate parziali $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i}$ attraverso la superficie d'onda σ debbono soddisfare alle relazioni

$$\sum_1^m {}_\nu \sum_0^n {}_i \, E^i_{\mu\nu} \, \Delta \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} = 0$$

$$(\mu = 1, 2, ..., m).$$

ma (n. 1)

$$\Delta \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} = \lambda_\nu p_i \qquad (\nu = 1, 2, ..., m).$$

Ne segue quindi

$$\sum_1^m {}_\nu \sum_0^n {}_i \, E^i_{\mu\nu} \, \lambda_\nu p_i = 0,$$

ossia, in base alle (8) del § 2,

(3) $$\sum_1^m {}_\nu \, \omega_{\mu\nu} \lambda_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, ..., m).$$

Queste relazioni costituiscono un sistema di m equazioni lineari omogenee negli m parametri

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$$

che caratterizzano le discontinuità delle derivate prime attraverso la superficie d' onda σ.

Tale sistema ammette soluzioni non nulle, perchè il determinante delle $\omega_{\mu\nu}$ è nullo, in corrispondenza ad una varietà caratteristica (superficie d' onda).

Nelle applicazioni concrete occorre spesso precisare non solo la natura delle superficie d' onda, ma anche le condizioni di compatibilità dinamica.

Bisogna quindi formare le equazioni lineari (3), il cui determinante eguagliato a zero permette di determinare le superficie d'onda.

Ne desumiamo la seguente

Regola pratica. *L'equazione alle derivate parziali delle varietà caratteristiche si ottiene annullando il determinante del sistema delle condizioni di compatibilità dinamiche.*

§ 8. Applicazione alle equazioni dell'idrodinamica.

1. Le equazioni che reggono il fenomeno idrodinamico sono

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = a = F - \dfrac{1}{\mu}\,\mathrm{grad}\, p, \\[2mm] \dfrac{d\mu}{dt} + \mu \displaystyle\sum_{1}^{3}{}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\,. \end{cases}$$

In questo sistema le funzioni incognite sono le u_i $(i = 1, 2, 3)$ componenti della velocità v della generica particella fluida e μ densità; le variabili indipendenti sono t, x_1, x_2, x_3; p designa la pressione, e F la forza di massa.

La derivata sostanziale $\dfrac{d}{dt}$ si esprime, come è noto, con la formula [1]

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

[1] Qui e nel seguito scriveremo $\sum_i$ invece di $\sum_{1}^{3}{}_i$.

Se escludiamo il caso dei liquidi omogenei, per i quali μ è una caratteristica intrinseca di ciascun elemento materiale, si può risguardare p funzione di μ.

La prima delle (1) equivale alle tre equazioni scalari

$$\frac{du_i}{dt} + \frac{1}{\mu}\frac{dp}{d\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_i} = X_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

essendo le X_i le componenti secondo gli assi della forza F.

Il sistema (1) si può scrivere dunque

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{du_i}{dt} + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{dp}{d\mu}\dfrac{\partial\mu}{\partial x_i} = X_i \qquad (i = 1, 2, 3), \\[2mm] \dfrac{d\mu}{dt} + \mu \displaystyle\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Formiamo l'equazione $\Omega = 0$ corrispondente. Se si cambiano le variabili $t \equiv x_0$, x_1, x_2, x_3 nelle variabili z, z_1, z_2, z_3 il sistema (2) si trasforma in uno normale soltanto se $\Omega \neq 0$.

Poichè, per una generica funzione $\varphi(t, x)$ si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} p_j + \dots \qquad (j = 0, 1, 2, 3),$$

le equazioni trasformate delle (2) sono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial z}\Big(p_0 + \sum_j u_j p_j\Big) + \dfrac{1}{\mu}\dfrac{dp}{d\mu} p_i \dfrac{\partial\mu}{\partial z} + \dots = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, 3), \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial z}\Big(p_0 + \sum_j u_j p_j\Big) + \mu \sum_i p_i \dfrac{\partial u_i}{\partial z} + \dots = 0 \end{cases}$$

ovvero anche, poichè

$$\frac{dz}{dt} = p_0 + \sum_j u_j p_j ,$$

$$(2')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{\mu}\frac{dp}{d\mu}p_i\frac{\partial\mu}{\partial z} + \ldots = 0 \quad (i = 1, 2, 3),\\ &\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \mu\sum_i p_i\frac{\partial u_i}{\partial z} + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Il determinante Ω è quello dei coefficienti delle tre $\frac{\partial u_i}{\partial z}$ e $\frac{\partial \mu}{\partial z}$.

Dunque

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{dz}{dt} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu}\frac{dp}{d\mu}p_1 \\ 0 & \frac{dz}{dt} & 0 & \frac{1}{\mu}\frac{dp}{d\mu}p_2 \\ 0 & 0 & \frac{dz}{dt} & \frac{1}{\mu}\frac{dp}{d\mu}p_3 \\ \mu p_1 & \mu p_2 & \mu p_3 & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} = 0$$

è l'equazione che definisce le varietà caratteristiche (superficie d'onda del cronotopo t, x_1, x_2, x_3).

Sviluppando il determinante a primo membro della (3), si ha

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - g^2\frac{dp}{d\mu}\right] = 0,$$

dove abbiamo posto ancora una volta $g^2 = \Sigma_i p_i^2$.

Quest'equazione si scinde nelle due

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - g^2\frac{dp}{d\mu} = 0.$$

La (I) sta ad esprimere che si tratta di una superficie di discontinuità fissa.

Quanto alla (II), se supponiamo (come accade sempre nei fluidi reali) che la pressione cresca con la densità, potremo ritenere

$$\frac{dp}{d\mu} = V^2,$$

con V reale positivo. Si trae allora dalla (II)

$$\frac{dz}{dt} = \pm g V,$$

da cui

$$V = \left|\frac{1}{g}\frac{dz}{dt}\right|,$$

cioè

$$V = \left|\frac{p_0}{g} + \frac{1}{g}\sum_j u_j p_j\right|.$$

Ma la velocità di avanzamento della superficie di onda è

$$a = -\frac{p_0}{g}$$

e $\frac{1}{g}\sum_j u_j p_j$ è la componente normale v_n della velocità v, sicchè si ha la formula

$$V = | a - v_n |,$$

la quale dimostra che V è la velocità di propagazione.

Questa ha dunque l'espressione

$$V = \sqrt{\frac{dp}{d\mu}}. \tag{4}$$

Nel caso adiabatico, si ha (§ 1, n. 6)

$$p = c_1 \mu^\gamma, \quad \frac{dp}{d\mu} = \gamma \frac{p}{\mu}$$

e la (4) diventa

$$V = \sqrt{\gamma \frac{p}{\mu}}.$$

Questi risultati furono enunciati per la prima volta da HUGONIOT e ridotti a forma sistematica da HADAMARD nelle sue *Leçons sur la propagation des ondes*, citate a pag. 29.

Qualche ulteriore semplificazione si è potuta qui raggiungere con la rappresentazione nello spazio S delle t, x, che consente di trattare alla stessa stregua le quattro variabili indipendenti.

2. *Le condizioni di compatibilità dinamica. Parametri di discontinuità.* Se indichiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, k$ i parametri che caratterizzano le discontinuità delle derivate parziali prime rapporto a z delle funzioni u_1, u_2, u_3, μ, le prime equazioni delle (2) danno (§ prec., n. 2)

$$\lambda_i \frac{dz}{dt} + \frac{1}{\mu} \frac{dp}{d\mu} p_i k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

La condizione che si dedurrebbe dalla quarta equazione del sistema (2) è una conseguenza delle (5).

Poichè $\frac{dz}{dt} \neq 0$, dalle (5) si ricava

$$\lambda_i = - \frac{k}{\mu} p_i \frac{\frac{dp}{d\mu}}{\frac{dz}{dt}}.$$

Tenendo conto delle

$$V^2 = \frac{dp}{d\mu} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dt} = \pm g V,$$

si ottiene

$$\lambda_i = \pm \frac{k}{\mu} V \frac{p_i}{g} = \frac{kV}{\mu} \alpha_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

avendo posto

$$\alpha_i = \pm \frac{p_i}{g},$$

con che le α_i rappresentano in ogni caso i coseni di direzione della normale alla superficie d'onda (orientata nell'uno o nell'altro verso a seconda del segno).

Comunque, indicandone con n il relativo versore, si possono compendiare le formule ora scritte nell'unica relazione vettoriale

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{kV}{\mu} \boldsymbol{n}, \tag{6}$$

dove s'intende con $\boldsymbol{\lambda}$ il vettore di componenti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Calcoliamo anche il salto del vettore $\boldsymbol{a}$ che rappresenta l'accelerazione. Se a_i è una componente di tale vettore, si ha

$$a_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j,$$

e poichè

$$\Delta \frac{\partial u_i}{\partial t} = \lambda_i p_0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$\Delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \lambda_i p_j \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

segue

$$\Delta a_i = \lambda_i (p_0 + \Sigma_j u_j p_j) = \lambda_i \frac{dz}{dt}$$

e quindi

(7) $$\Delta \boldsymbol{a} = \pm g V \boldsymbol{\lambda}.$$

Si vede così che la discontinuità del vettore accelerazione è parallela a $\boldsymbol{\lambda}$ e quindi, per la (6), normale alla superficie d'onda, cioè *longitudinale*.

3. In questa discussione delle equazioni idrodinamiche abbiamo escluso il caso dei liquidi. Tale caso si potrebbe dedurre dalle considerazioni generali per via di limite, facendo tendere a zero $\frac{d\mu}{dp}$, ciò che equivale a rendere infinita la $\frac{dp}{d\mu}$ che è il quadrato della velocità di propagazione. Si vede così, ricordando la (I), che nei liquidi sono possibili soltanto i due casi estremi: discontinuità fisse, oppure propagantisi istantaneamente.

In realtà, praticamente, anche nel caso dei liquidi, si ha una velocità di propagazione finita, perchè anch'essi sono comprimibili.

4. *Fluidi viscosi. Impossibilità di propagazioni ondose* [1].

Applichiamo ancora i principi generali precedenti alle equazioni del moto lento di un fluido viscoso.

Dimostreremo che la viscosità è incompatibile con la presenza di superficie di discontinuità, variabili nel tempo.

Le equazioni differenziali sono [2]

(8) $$\begin{cases} \dfrac{du_i}{dt} = X_i - \dfrac{1}{\mu}\dfrac{dp}{d\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial x_i} + {}^1/_3\, \nu \dfrac{\partial}{\partial x_i} \sum_k \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} + \nu\, \Delta_2 u_i \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, 3), \\ \dfrac{d\mu}{dt} + \mu \sum_k \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0, \end{cases}$$

nelle quali u_1, u_2, u_3, μ sono le componenti della velocità e la densità di una generica particella fluida, p è la pressione media, ν il coefficiente cinematico di viscosità, X_i la componente secondo l'asse x_i della forza sollecitante unitaria (di massa),

[1] Cfr. G. LAMPARIELLO, *Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, (6), Vol. XIII, 1° sem. 1931, pp. 688-691.

[2] Cfr. ad es.: H. LAMB, *Hydrodinamics*, fifth ed., p. 546, Cambridge University Press, 1924; M. BRILLOUIN, *Leçons sur la viscosité* etc., Première partie, Ch. II, Paris, Gauthier-Villars, 1907.

i simboli $\frac{d}{dt}$, Δ_2 denotano rispettivamente una derivata sostanziale (rispetto a t) e l'operatore di LAPLACE.

Il sistema (8) nelle funzioni incognite u_1, u_2, u_3, μ delle quattro variabili $t \equiv x_0, x_1, x_2, x_3$ è normale rispetto a t (§ 1, n. 1), e tutto si riduce, per giustificare l'asserto, a far vedere che, applicando alle variabili indipendenti una generica trasformazione puntuale *reale*, il sistema trasformato risulta sempre normale rispetto alla variabile z, omologa di t.

Infatti, sia $z =$ cost un' eventuale ipersuperficie caratteristica σ, e poniamo, come al solito,

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Applicando le note relazioni

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = p_i \frac{\partial}{\partial z} + \dots,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} = p_i p_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \dots \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} =$$

$$= \sum_k p_i p_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + \dots = p_i \sum_k p_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + \dots$$

$$\Delta_2 u_i = \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^{\,2}} = \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} p_k^2 + \dots = \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \sum_k p_k^2 + \dots$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} =$$

$$= \left(p_0 + \sum_k p_k u_k\right) \frac{\partial}{\partial z} + \dots = \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} + \dots$$

Il sistema trasformato di (8) assume così l'aspetto

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \nu p_i \sum_k p_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \sum_k p_k^2 - \frac{1}{\mu} \frac{dp}{d\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} \; p_i + \dots = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, 3), \\ \frac{dz}{dt} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \dots = 0, \end{cases}$$

nel quale si sono trascurati i termini che non contengono qualcuna delle quattro derivate $\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}$, $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ e che quindi non influiscono sul carattere di normalità.

Se non è $\frac{dz}{dt} = 0$, nel qual caso la superficie σ sarebbe fissa, la quarta equazione del sistema è risolubile rispetto a $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ e quindi basta considerare il determinante di 3° ordine, formato con i coefficienti delle tre derivate $\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}$.

Esso è, a meno di un inessenziale fattore,

$$\begin{vmatrix} p_1^2 + 3\sum_k p_k^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\ p_2 p_1 & p_2^2 + 3\sum_k p_k^2 & p_2 p_3 \\ p_3 p_1 & p_3 p_2 & p_3^2 + 3\sum_k p_k^2 \end{vmatrix} = 36 \left(\sum_k p_k^2\right)^3.$$

L' equazione a derivate parziali delle varietà caratteristiche è dunque

$$\sum_k p_k^2 = 0$$

che dà senz'altro

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0.$$

È così dimostrata l'inesistenza di propagazioni ondose.

Non bisogna pensare però che questo fatto sia una necessaria conseguenza della viscosità.

Per rendersene conto basta considerare il seguente esempio.

Le vibrazioni di una corda, nel caso in cui si supponga che il mezzo (per es. l'aria) eserciti su di essa una resistenza viscosa, sono rette da un'equazione alle derivate parziali del 2° ordine del tipo

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

In quest'equazione, la funzione incognita φ delle variabili t, x designa lo spostamento della generica particella della corda vibrante; il termine $-\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, in cui è $\lambda > 0$ ed avente le dimensioni dell'inversa di una lunghezza, traduce analiticamente la resistenza opposta dal mezzo alle vibrazioni.

Pur trattandosi qui di un sistema dissipativo, il fenomeno è suscettibile di propagazione ondosa, perchè le caratteristiche della (9) coincidono con quelle dell'equazione

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

§ 9. Applicazione alle equazioni differenziali di Maxwell, che reggono i fenomeni elettromagnetici.

1. Le funzioni φ del generico sistema di equazioni alle derivate parziali sono in questo caso sei, precisamente le tre componenti della forza elettrica $\boldsymbol{E}$ e le tre della forza magnetica $\boldsymbol{H}$.

Introduciamo anche lo spostamento elettrico $\boldsymbol{D}$ e l'induzione magnetica $\boldsymbol{B}$. Nel vuoto, si ha $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$: in un dielettrico, omogeneo ed isotropo, $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$, dove ε e μ rappresentano due costanti positive (ε costante dielettrica, μ permeabilità magnetica).

In generale, in un mezzo qualunque (in quiete), le componenti di $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{B}$ sono forme lineari delle componenti di $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ rispettivamente. Scriveremo ancora

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H},$$

intendendo questa volta che i simboli ε e μ rappresentino due omografie vettoriali.

Comunque, le equazioni differenziali del campo elettromagnetico sono

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} + \dots, \tag{1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \dots. \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \dots, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

essendo c la velocità della luce, e i termini omessi potendo dipendere da cariche, correnti, forze elettromotrici impresse, ecc.; in modo comprensivo da quantità o indipendenti addirittura dal campo, cioè dai vettori $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{H}$ o, quanto meno (se pur dipendono dal campo), indipendenti dalle derivate di tali vettori [1].

Cominciamo col tener conto soltanto delle prime due equazioni, le quali costituiscono un sistema normale di ordine $s=1$.

Si riconoscerà che le conseguenze, cui perverremo, sono compatibili con le due rimanenti equazioni differenziali del sistema.

Attraverso un' eventuale superficie d' onda σ, dovremo ritenere continue le E_i, H_i, ossia le componenti delle forze elettrica e magnetica, nonchè le omografie ε e μ e quindi le polarizzazioni $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$.

Nei riguardi delle omografie, ammetteremo più precisamente che rimangano continui attraverso σ i loro coefficienti insieme con tutte le derivate prime.

Saranno invece a presumersi discontinuità nelle derivate prime delle $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ (e con esse delle $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$).

Siano e_i, h_i $(i=1, 2, 3)$ i sei parametri di discontinuità spettanti ordinatamente alle componenti E_i, H_i, parametri che, a norma del § 7, n. 1, individuano le discontinuità delle derivate di tali funzioni. Tornerà utile pensarle come componenti di due vettori $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h}$ (in corrispondenza ad un punto generico della superficie σ di discontinuità).

Ciò premesso, cerchiamo le condizioni di compatibilità dinamica cui debbono soddisfare i vettori $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h}$.

[1] Cfr. H. Hertz, *Gesammelte Werke*, Bd. II, p. 220.

Poichè $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$, si ha

$$(5) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{1}{c}\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\boldsymbol{E},$$

da cui, indicando con ε^{-1} l' omografia inversa di (che si riduce all' inversa aritmetica della costante ε nel caso dell' isotropia) e badando all' equazione (1),

$$(5') \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)\boldsymbol{E}=\frac{1}{c}\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}+\ldots$$

Poichè $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$, si ha

$$(6) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{1}{c}\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mu}{\partial t}\boldsymbol{H},$$

da cui, per la (2), con evidente significato di μ^{-1} segue

$$(6') \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(\mu^{-1}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)\boldsymbol{H}=-\frac{1}{c}\mu^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\ldots$$

Immaginiamo ora di introdurre nelle (1), (2) una prima volta le determinazioni limiti $\boldsymbol{E}^{+}$, $\boldsymbol{H}^{+}$ delle $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ da una parte della σ, una seconda volta le analoghe determinazioni $\boldsymbol{E}^{-}$, $\boldsymbol{H}^{-}$ dall' altra parte. Sottraendo membro a membro e tenendo conto delle (5), (6) e del fatto che gli addendi che rimangono continui (e tali sono in particolare quelli non scritti) si elidono, otteniamo

$$(7) \qquad \frac{1}{c}\varepsilon\left(\Delta\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)-\Delta\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=0.$$

$$(8) \qquad \frac{1}{c}\mu\left(\Delta\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right)+\Delta\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0.$$

Ciò posto, applichiamo le formule (1) del § 7 alle varie funzioni E_i, H_i, tenendo conto che il fattore λ che in esso comparisce va ordinatamente sostituito con e_i, h_i. Si ottengono così le relazioni

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Delta \frac{\partial E_i}{\partial t} = e_i p_0, \quad \Delta \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = e_i p_j ; \\ &\Delta \frac{\partial H_i}{\partial t} = h_i p_0, \quad \Delta \frac{\partial H_i}{\partial x_j} = h_i p_j \qquad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \right.$$

I due gruppi di sinistra si possono compendiare ciascuno in un' unica equazione vettoriale

$$(10) \qquad \Delta \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = p_0 \boldsymbol{e},$$

$$(11) \qquad \Delta \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = p_0 \boldsymbol{h}.$$

La (7), tenendo conto della (10) e con la convenzione evidente di risguardare identici gli indici che differiscono di tre unità, equivale alle tre equazioni scalari

$$(12) \qquad \frac{p_0}{c} (\varepsilon \boldsymbol{e})_i + \Delta \frac{\partial H_{i+1}}{\partial x_{i+2}} - \Delta \frac{\partial H_{i+2}}{\partial x_{i+1}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Analogamente, la (8) dà luogo alle tre equazioni

$$(13) \qquad \frac{p_0}{c} (\mu \boldsymbol{h})_i + \Delta \frac{\partial E_{i+2}}{\partial x_{i+1}} - \Delta \frac{\partial E_{i+1}}{\partial x_{i+2}} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Tenendo conto delle (9) e ponendo al posto delle p_i i prodotti $\alpha_i g$, con $g = |\sqrt{\Sigma_i p_i^2}|$, essendo

gli α_i i coseni di direzione del versore $\boldsymbol{n}$ della normale a σ, le (12), (13), si possono anche scrivere

$$\frac{p_0}{c} \varepsilon e_i - g (h_{i+2} \alpha_{i+1} - h_{i+1} \alpha_{i+2}) = 0,$$

$$\frac{p_0}{c} \mu h_i + g (e_{i+2} \alpha_{i+1} - e_{i+1} \alpha_{i+2}) = 0),$$

o, in forma vettoriale,

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{p_0}{c} \varepsilon \boldsymbol{e} - g \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{h} = 0, \\ &\frac{p_0}{c} \mu \boldsymbol{h} + g \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e} = 0. \end{aligned} \right.$$

Queste equazioni, cui soddisfano i vettori caratteristici $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h}$ delle discontinuità delle derivate delle forze elettrica e magnetica pongono in evidenza che, a differenza di quanto accade nel fenomeno idrodinamico, i vettori $\varepsilon \boldsymbol{e}$, $\mu \boldsymbol{h}$ sono normali ad $\boldsymbol{n}$, cioè sono *tangenziali* alle superficie di discontinuità : si tratta quindi, come suol dirsi, di *discontinuità trasversali*. Più precisamente, non sono trasversali i vettori $\boldsymbol{e}$ ed $\boldsymbol{h}$ che caratterizzano le discontinuità delle derivate delle forze elettrica e magnetica, bensì $\varepsilon \boldsymbol{e}$ e $\mu \boldsymbol{h}$, riferentisi alle derivate della polarizzazione elettrica ed induzione magnetica.

2. Osserviamo ora che, se si denotano con $\boldsymbol{d} = \mu \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{b} = \varepsilon \boldsymbol{e}$ i vettori caratteristici di discontinuità delle derivate di $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{B}$, applicando alle equazioni (di conservazione) (3), (4) il procedimento ora indicato relativo alle (1), (2) per la determinazione delle condizioni di compatibilità dinamica, si trova

$$\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{n} = 0,$$
$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n} = 0.$$

Queste relazioni si traggono anche dalle (14), moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{n}$, e dimostrano che il carattere di trasversalità dei vettori $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{b}$, testè rilevato, include anche le condizioni di compatibilità derivanti dalle (3), (4). Sono queste le due equazioni che avevamo provvisoriamente lasciate da parte, ma che pur vanno associate al sistema normale (1), (2), per fornire la rappresentazione completa dei fenomeni elettromagnetici, secondo la teoria di MAXWELL-HERTZ.

3. *Costruzione dell' equazione* $\Omega = 0$ *nei mezzi magneticamente isotropi. Applicazione alla teoria elettromagnetica della luce.*

Le considerazioni fatte valgono, in generale, anche se le omografie ε e μ dipendono dal campo elettromagnetico, cioè dalle forze elettrica e magnetica. Noi però, in vista di ulteriori sviluppi, supporremo oramai che esse siano costanti e di più che l' omografia magnetica si riduca ad una moltiplicazione ordinaria.

Supporremo poi che la omografia ε sia una dilatazione e che essa sia ridotta alla forma canonica scegliendo opportunamente gli assi fissi di riferimento. A questo punto conviene ricordare che alla dilatazione ε va associata una quadrica, detta indicatrice, e che si chiamano piani principali della dilatazione quelli della sua quadrica indicatrice [1]. *Saranno questi, nel seguito, i piani di riferimento.*

I coefficienti dell' omografia si riducono così a tre: ε_1, ε_2, ε_3.

In questo schema rientrano, in particolare, le equazioni della teoria elettromagnetica della luce nei mezzi cristallini.

Ci limiteremo a considerare il caso dei mezzi cosiddetti *biassici*, in cui le costanti ε sono distinte tra loro, e potremo, in conformità, ritenere

$$\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0.$$

Dalla seconda delle (14) si trae

$$\boldsymbol{h} = -\frac{g}{\mu \frac{p_0}{c}} (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e})$$

e, sostituendo nella prima,

$$\frac{p_0^2}{c^2} \mu\varepsilon \boldsymbol{e} + g^2 \boldsymbol{n} \wedge (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e}) = 0. \tag{15}$$

Decomponiamo il vettore $\boldsymbol{e}$ in due vettori, $\boldsymbol{e}'$ normale ad $\boldsymbol{n}$ ed $\boldsymbol{e}'' = (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ parallelo ad $\boldsymbol{n}$, con che $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' + \boldsymbol{e}''$.

Si ha
$$\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e} = \boldsymbol{n} \wedge (\boldsymbol{e}' + \boldsymbol{e}'') = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e}'.$$

Il vettore $\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e}'$ è $\boldsymbol{e}'$ stesso rotato di 90° attorno

(1) Cfr. R. MARCOLONGO, *Meccanica razionale*, vol. 1°, pp. 24-25, 3ª ed., Milano, Hoepli, 1922.

ad n, perciò

$$n \wedge (n \wedge e') = -e' = -(e - e'') = -[e - (e \times n) n]$$

e la (15) diventa

$$\frac{p_0^2}{c^2}\mu\varepsilon e - g^2 e + (e \times g n) g n = 0. \tag{16}$$

Poniamo ora

$$\frac{\mu\varepsilon_i}{c^2} p_0^2 - g^2 = \rho_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{17}$$

$$V_i^2 = \frac{c^2}{\mu\varepsilon_i}, \tag{18}$$

per modo che

$$\rho_i = \frac{p_0^2}{V_i^2} - g^2 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{19}$$

La (16), in quanto le componenti di gn non sono altro che p_1, p_2, p_3, dà luogo alle tre equazioni scalari

$$\begin{cases} (\rho_1 + p_1^2) e_1 + p_1 p_2 e_2 + p_1 p_3 e_3 = 0, \\ p_2 p_1 e_1 + (\rho_2 + p_2^2) e_2 + p_2 p_3 e_3 = 0, \\ p_3 p_1 e_1 + p_3 p_2 e_2 + (\rho_3 + p_3^2) e_3 = 0. \end{cases}$$

Applicando la regola pratica del n. 2, § 7 l'equazione differenziale delle superficie d'onda si ottiene ponendo eguale a zero il determinante dei coefficienti di e_1, e_2, e_3.

Si ha così l'equazione

$$\Omega(p) = \begin{vmatrix} \rho_1 + p_1^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\ p_2 p_1 & \rho_2 + p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_3 p_1 & p_3 p_2 & \rho_3 + p_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero, sviluppando il determinante,

$$\Omega(p) = \rho_2\rho_3 p_1^2 + \rho_3\rho_1 p_2^2 + \rho_1\rho_2 p_3^2 + \rho_1\rho_2\rho_3 = 0. \tag{20}$$

È questa la cercata equazione alle derivate parziali nella funzione incognita z che definisce le superficie d'onda, purchè al posto delle ρ_i si pongano i loro valori dati dalle (19).

Siano, come al solito, $\alpha_i = \frac{p_i}{g}$ i coseni direttori della normale alla superficie. Dividendo ambo i membri della (20) per g^2, si ha

$$\frac{1}{g^2}\Omega(p) = \rho_2\rho_3\alpha_1^2 + \rho_3\rho_1\alpha_2^2 + \rho_1\rho_2\alpha_3^2 + \frac{1}{g^2}\rho_1\rho_2\rho_3 = 0. \tag{20'}$$

Anche indipendentemente dalla integrazione della (20), questa equazione mette in luce importanti caratteristiche del fenomeno, in quanto porta, in sostanza, come ora mostreremo, a stabilire il legame della velocità di propagazione (in senso normale) di un generico elemento di superficie d'onda con l'orientazione dell'elemento stesso.

4. *Legge di variazione della velocità di propagazione.* Per fare apparire la velocità di propagazione V, ci basterà sostituire a p_0 il prodotto $\pm Vg$ nelle ρ, definite dalla (18).

Prima però gioverà rendersi conto dei casi in cui l'equazione (20') rimane verificata essendo nulla qualcuna delle ρ.

Va notato subito che, avendo supposte le ε distinte, non è possibile, in base alle espressioni (17) delle ρ_i, che due delle ρ siano nulle contemporaneamente.

Possiamo dunque fissare l'attenzione sul caso in cui si annulla ρ_1 e ρ_1 soltanto. La (20') mostra che, in tale ipotesi, deve essere $\alpha_1 = 0$, ossia la normale alla superficie d'onda deve essere parallela al piano $x_2 x_3$.

D'altra parte $\rho_1 = 0$ implica

$$\frac{p_0^2}{V_1^2} - g^2 = 0,$$

ossia

$$V_1 = \left| \frac{p_0}{g} \right|,$$

la quale ci permette di interpretare la costante V_1 quale possibile velocità di propagazione della luce in tutte le direzioni normali all' asse delle x_1.

Analoghe considerazioni valgono nel caso in cui si annulli ρ_2 o ρ_3.

Rimane così acquisito che V_1, V_2, V_3 sono velocità di propagazione nelle direzioni spettanti rispettivamente a ciascuno dei piani coordinati, che come si ricorderà, furono scelti con la condizione di essere piani principali dell' omografia (dilatazione) elettrica.

Riconosciuto ormai il comportamento di $\Omega = 0$ quando qualcuna delle ρ si annulla, passiamo ad esaminare il caso generale in cui $\Omega = 0$, essendo d'altra parte tutte le ρ diverse da zero.

Il primo membro della (20) si può scrivere in tal caso

$$\Omega = \rho_1\rho_2\rho_3 \left(1 + \sum_i \frac{p_i^2}{\rho_i}\right),$$

e poichè

$$\frac{p_i^2}{\rho_i} = \frac{g^2\alpha_i^2}{\rho_i} = \frac{\alpha_i^2}{\frac{p_0^2}{g^2}\frac{1}{V_i^2} - 1} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

mentre $\frac{p_0^2}{g^2}$ rappresenta, al solito, il quadrato della velocità V di propagazione della superficie d' onda di cui si tratta, si ha anche

$$\Omega = \rho_1\rho_2\rho_3 \left(1 + \sum_i \frac{\alpha_i^2}{\frac{V^2}{V_i^2} - 1}\right).$$

Se si tien conto dell' identità $\Sigma_i \alpha_i^2 = 1$, si può scrivere in definitiva l' equazione in discorso sotto la forma

$$\Omega(p) \equiv V^2 \rho_1\rho_2\rho_3 \sum_i \frac{\alpha_i^2}{V^2 - V_i^2} = 0. \tag{21}$$

La (21) è, in primo luogo, soddisfatta se $V = 0$, ossia, poichè

$$p_0 = \pm Vg,$$

se

$$p_0 = \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

In tal caso si ha una superficie di discontinuità fissa.

Ma consideriamo ormai l' equazione che si ottiene annullando l' altro fattore

$$\sum_i \frac{\alpha_i^2}{V^2 - V_i^2} = 0. \tag{22}$$

Poniamo

(23) $$f(V^2) = {}^1/_2 \sum_i \frac{\alpha_i^2}{V^2 - V_i^2}$$

e facciamo qualche considerazione intorno all'equazione (22) che equivale alla

(22') $$f(V^2) = 0\,.$$

Quest' equazione, ridotta a forma intera, risulta di 2° grado in V^2 e ammette pertanto due radici che, come passiamo a dimostrare, sono entrambe positive.

Le quantità V_i, in causa della (18) e dell'ordine attribuito alle ε ($\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$), verificano le disuguaglianze

$$V_1 > V_2 > V_3\,.$$

Fissiamo dapprima l'attenzione sul caso generale di una direzione α_i che non sia parallela ad alcuno dei piani principali (coordinati).

La funzione $f(V^2)$ è, allora, ovunque regolare, eccetto i valori di V^2 eguali ad una delle V_i^2, per i quali è infinita.

Se a V^2 si attribuiscono valori interni all'intervallo (V_3^2, V_2^2) e prossimi a V_3^2, il termine $\frac{\alpha_3^2}{V^2 - V_3^2}$, di segno positivo, prevale sui due addendi rimanenti, e la $f(V^2)$ assume valori positivi; se invece a V^2 si attribuiscono valori interni allo stesso intervallo e prossimi a V_2^2, il termine $\frac{\alpha_2^2}{V^2 - V_2^2}$, di segno negativo, prevale sui due addendi rimanenti, e la $f(V^2)$ assume valori negativi.

La equazione (22') ammette dunque una radice nel detto intervallo; analogamente si dimostra che l'altra radice è interna all'intervallo (V_2^2, V_1^2).

Si vede così che, in valore assoluto, sono possibili due velocità di propagazione, rispettivamente comprese tra V_1 e V_2, V_2 e V_3.

Se poi uno dei coseni di direzione α_i è nullo, ad es. α_1, l'equazione (20') è intanto soddisfatta da $\rho_1 = 0$, con che una delle possibili velocità di propagazione è V_1.

La stessa equazione (20'), liberata dal fattore ρ_1, mostra poi che l'equazione (la quale definisce le possibili velocità diverse da V_1, V_2, V_3) si riduce a

$$\frac{\alpha_2^2}{V^2 - V_2^2} + \frac{\alpha_3^2}{V^2 - V_3^2} = 0\,.$$

che ha una radice, in V, compresa tra V_2 e V_3.

5. *Costruzione geometrica delle radici dell' equazione* $f(V^2) = 0$.

Consideriamo l'ellissoide

(24) $$\varphi \equiv \Sigma_i V_i^2 x_i^2 = 1.$$

e sia

$$\psi \equiv \Sigma_i \alpha_i x_i = 0.$$

l'equazione di un generico piano passante per l'origine, i coefficienti α_i designando specificamente i coseni direttori della normale al piano, orientata a piacere.

Per trovare le lunghezze dei semiassi dell'ellisse secondo cui l'ellissoide $\varphi = 1$ è tagliato dal piano $\psi = 0$ basta manifestamente cercare il massimo e il minimo della distanza (o ciò che è lo stesso, del quadrato della distanza $\rho^2 = \Sigma_i x_i^2$), quando il punto x_i varia sull' ellisse, cioè quando le variabili x_i sono vincolate dalle due equazioni

$$\varphi = 1, \quad \psi = 0.$$

Applicando il classico metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE, siamo condotti a scrivere

$$(25) \qquad \delta[\rho^2 + \lambda(\varphi - 1) + \lambda_1 \psi] = 0,$$

essendo λ e λ_1 a priori indeterminati e la variazione dovendo annullarsi comunque si scelgano gli incrementi δx_i.

Risulta così, dividendo anche per 2,

$$(26) \qquad x_i(1 + \lambda V_i^2) + {}^1/_2 \lambda_1 \alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Moltiplicando per x_i e sommando, si ha, in virtù della (24) e di $\psi \equiv \Sigma_i \alpha_i x_i = 0$,

$$\rho^2 + \lambda = 0.$$

Notiamo che ρ (semiasse di un' effettiva ellisse) va ritenuto essenzialmente maggiore di zero.

D' altra parte, ponendoci dapprima nel caso generale in cui $\frac{1}{\rho^2}$ sia diverso da ognuna delle V_i^2, le (26) si possono risolvere rispetto alle x_i, e, ponendo per λ il suo valore $-\rho^2$, ora trovato, porgono

$$(27) \qquad x_i = - {}^1/_2 \frac{\lambda_1 \alpha_i}{1 - \rho^2 V_i^2} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

che, sostituite nella $\psi \equiv \Sigma_i \alpha_i x_i = 0$ $\left(\text{ove si metta altresì in evidenza il fattore } \frac{1}{\rho^2}\right)$, danno

$$- {}^1/_2 \frac{\lambda_1}{\rho^2} \sum_i \frac{\alpha_i^2}{\frac{1}{\rho^2} - V_i^2} = 0.$$

Osserviamo che λ_1 non può essere zero, perchè, in virtù delle (27), ne seguirebbe l' annullarsi di ogni x_i e quindi di ρ, ciò che va escluso. Possiamo pertanto prescindere dal fattore $-\frac{\lambda_1}{\rho^2}$, con che resta

$${}^1/_2 \sum_i \frac{\alpha_i^2}{\frac{1}{\rho^2} - V_i^2} = 0,$$

la quale si identifica con l' equazione $f(V^2) = 0$, che definisce le possibili velocità di propagazione, purchè si ponga

$$V^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

Di qua la costruzione geometrica delle velocità di propagazione spettanti ad una generica direzione α_i, la quale rimane valida anche nel caso precedentemente escluso che $\frac{1}{\rho^2}$ possa avere uno dei valori V_i^2.

Si traccia il piano normale alla generica direzione α_i per il centro dell' ellissoide $\varphi = 1$. Gli inversi dei semiassi dell' ellisse sezione danno i valori assoluti delle due possibili velocità di propagazione.

6. *Superficie d'onda di Fresnel.* Riportiamoci alle considerazioni generali, svolte ai n^{i}. 6-8 del § 6, circa l' integrazione dell' equazione $p_0 + H = 0$, con l' ausilio delle bicaratteristiche. Ritenuto in primo luogo $n = 3$, segue che le equazioni parametriche della configurazione assunta in un generico istante t dalla superficie d'onda, la quale nell' istante $t = 0$ si riduce ad una superficie infinitesima attorno ad un punto prefissato O (epicentro), che assumeremo come origine delle coordinate, sono

$$x_i = t\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{28}$$

fungendo da parametri i rapporti tra le p dai quali soltanto dipendono i secondi membri, per essere H omogenea di 1° grado nelle p.

Risguardando le x_i funzioni della t, le (28) danno le equazioni dei raggi luminosi e pongono in evidenza il loro andamento rettilineo (nei mezzi omogenei).

Nei vari istanti t, le superficie d'onda (28) sono, come abbiamo a suo tempo osservato, tutte omotetiche tra loro: basta quindi fissare l' attenzione sopra una qualunque di esse; si suole considerare quella corrispondente a $t = 1$ che chiamasi specificamente superficie d'onda ed ha le equazioni parametriche

$$x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{29}$$

Per il caso di cui ora ci occupiamo si ha, in particolare, la celebre superficie d' onda di Fresnel (scoperta nel 1827), che, nel seguito, indicheremo

con F. Incidentalmente, rileveremo altresì che, dallo studio analitico di questa superficie, Hamilton fu condotto alla scoperta del fenomeno della rifrazione conica.

Ci proponiamo di determinare l' equazione cartesiana della F, la quale si otterrebbe materialmente dalle (29), eliminando i parametri (rapporti delle p).

All' uopo ci conviene intanto procurarci la distanza δ dall' origine del piano tangente in un generico punto di coordinate x_i di F. Essendo α_i i coseni direttori della normale alla F in P, avremo

$$\delta = \Sigma_i \alpha_i x_i ,$$

cioè, tenuto conto delle equazioni parametriche (29) e dei valori $\pm \frac{p_i}{g}$ delle α_i (in relazione al senso che si assume come positivo sulla normale),

$$\delta = \sum_i \alpha_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = \pm \frac{1}{g} \sum_i p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

(con la solita convenzione concernente il segno da attribuire alla distanza δ).

Attesa l' omogeneità di 1° grado di H e l' equazione $p_0 + H = 0$, si ha

$$\delta = \pm \frac{H}{g} = \mp \frac{p_0}{g} = \pm V.$$

Prendiamo, per semplicità di scrittura, uno dei due segni, per es. il $+$, ma avvertiamo subito che si arriva allo stesso risultato se si prende l' altro segno.

L' equazione del piano tangente è così

(30) $$\Sigma_i \alpha_i x_i - V = 0,$$

dove questa volta le x_i rappresentano coordinate correnti, mentre le α_i e V sono tra loro legate dall' equazione

(22') $$f(V^2) = {}^1/_2 \sum_i \frac{\alpha_i^2}{V^2 - V_i^2} = 0.$$

Differenziando la (30) (rispetto ai parametri α_i e V), si ha

(31) $$\Sigma_i x_i d\alpha_i - dV = 0.$$

Poniamo

(32) $$f_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \frac{\alpha_i}{V^2 - V_i^2} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

(33) $$f_0 = \frac{\partial f}{\partial V} = - V \sum_i f_i^2 .$$

Differenziando la (22') si ha

(34) $$\Sigma_i f_i d\alpha_i + f_0 dV = 0.$$

Le relazioni (30), (31), (34) ci permetteranno di eliminare i parametri α_i, V e di ottenere così l'equazione cartesiana di F.

Dalla identità

$$\Sigma_i \alpha_i^2 = 1$$

si deduce, differenziando,

(35) $$\Sigma_i \alpha_i d\alpha_i = 0.$$

D' altra parte, ponendo al posto di dV in (34) l'espressione ricavata da (31), si ha

$$\Sigma_i (f_i + f_0 x_i) d\alpha_i = 0.$$

Questa deve sussistere qualunque siano i coseni direttori α_i, cioè per tutti i possibili incrementi $d\alpha_i$ che sono legati dalla (35).

Ne consegue

(36) $$f_i + f_0 x_i = k\alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

essendo k un fattore di proporzionalità a priori indeterminato.

È facile calcolarlo, perchè, in virtù delle espressioni (32) delle f_i, si ha

(37) $$\Sigma_i f_i \alpha_i = 0.$$

Moltiplicando ambo i membri delle (36) per α_i e sommando si ha

$$k \Sigma_i \alpha_i^2 = \Sigma_i f_i \alpha_i + f_0 \Sigma_i \alpha_i x_i,$$

cioè, per le (30) e (37),

(38) $$k = f_0 V.$$

Ora osserviamo che

$$\Sigma_i f_i^2 V_i^2 = \Sigma_i f_i^2 (V_i^2 - V^2) + V^2 \Sigma_i f_i^2 .$$

Il primo degli addendi al 2° membro è nullo attese le equazioni (32) e (22'), quindi

(39) $$\Sigma_i f_i^2 V_i^2 = V^2 \Sigma_i f_i^2 .$$

Ancora, si ha

$$\Sigma_i f_i \alpha_i V_i^2 = \Sigma_i f_i \alpha_i (V_i^2 - V^2) + V^2 \Sigma_i f_i \alpha_i$$

e per la (37) e la (32),

(40) $\Sigma_i f_i \alpha_i V_i^2 = \Sigma_i f_i \alpha_i (V_i^2 - V^2) = -\Sigma_i \alpha_i^2 = -1.$

Riprendiamo ora le (36): moltiplichiamo ambo i membri per $f_i V_i^2$ e sommiamo; si ottiene

$$\Sigma_i f_i^2 V_i^2 + f_0 \Sigma_i x_i f_i V_i^2 = k \Sigma_i f_i \alpha_i V_i^2,$$

da cui

$$f_0 \Sigma_i x_i f_i V_i^2 = k \Sigma_i f_i \alpha_i V_i^2 - \Sigma_i f_i^2 V_i^2.$$

Il secondo membro si annulla, come tosto si riconosce tenendo conto delle (39), (33), (40) e del valore (38) di k e quindi, poichè $f_0 \neq 0$, rimane

(41) $$\Sigma_i x_i f_i V_i^2 = 0.$$

Dalle (36) si ricava

$$f_0 x_i = k\alpha_i - f_i,$$

donde, quadrando ambo i membri e ponendo $\rho^2 = \Sigma_i x_i^2$, si ha, per somma,

$$f_0^2 \rho^2 = k^2 - 2k \Sigma_i f_i \alpha_i + \Sigma_i f_i^2.$$

In virtù della (33) e delle (37), (38), questa relazione diventa successivamente

$$f_0^2 \rho^2 = k^2 - \frac{f_0}{V} = -\frac{f_0}{V} + k f_0 V = \frac{f_0}{V}(k V^2 - 1)$$

da cui

(42) $$1 - k V^2 = -f_0 V \rho^2 = -k \rho^2.$$

Si ha anche

$$f_0 x_i = k\alpha_i - f_i = k f_i (V^2 - V_i^2) - f_i$$

a norma delle (36) e (32), quindi

$$f_0 x_i = -f_i (1 - k V^2 + k V_i^2).$$

Introducendo per $1 - k V^2$ il valore fornito dalla (42), si ha infine

$$f_0 x_i = f_i k \rho^2 - f_i k V_i^2 = k f_i (\rho^2 - V_i^2),$$

da cui

$$f_i = -\frac{f_0}{k} \frac{x_i}{V_i^2 - \rho^2}.$$

Sostituendo questa espressione nella (41), si trova

(43) $$\sum_i \frac{V_i^2 x_i^2}{V_i^2 - \rho^2} = 0$$

che è l'equazione puntuale della superficie d'onda di Fresnel.

Si tratta, come si vede facilmente, liberando dai denominatori, di una superficie algebrica del 4° ordine.

7. *Piani tangenti alla* F. Si è visto poco fa che i piani tangenti in una direzione generica α_i (cioè più precisamente aventi α_i come coseni direttori della normale) hanno dall'origine le distanze (orientate) $\delta = \pm V$, essendo V la velocità di propagazione (o più esattamente una delle due velocità di propagazione).

La costruzione geometrica di V, indicata al n. 5, consente senz'altro di individuare i quattro piani tangenti, perpendicolari ad una direzione generica, come quelli che hanno da una parte e dall'altra distanze da O eguali alle due velocità di propagazione ([1]). Come si vede, la superficie di FRESNEL gode della particolare proprietà di essere ad un tempo del 4° ordine e della 4ª classe (mentre una superficie algebrica d'ordine n è *in generale* di classe $n(n-1)^2$, e viceversa ([2])).

8. *Assi ottici.* Si chiamano assi ottici quelle direzioni in corrispondenza alle quali le due velocità di propagazione (n. 4) sono eguali.

Mostriamo anzitutto che tali assi appartengono ad un qualche piano principale. Infatti, qualora fosse asse ottico una direzione α_i non appartenente a piani siffatti, la relazione tra i suoi coseni di direzione e le possibili velocità di propagazione sarebbe compendiata nella (22'),

$$f(V^2)=0,$$

([1]) Per uno studio geometrico della superficie di FRESNEL, il lettore può consultare G. SALMON, *Traité de géométrie analytique à trois dimensions* (traduzione francese di O. CHEMIN), Troisième Partie, Paris, Gauthier-Villars, 1892, Ch. XVI, pp. 117-119; G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, T. IV, pag. 466, Paris, Gauthier-Villars, 1896; D'OCAGNE, *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique*, ibidem, 1930; DRUDE, *Précis d'Optique*, T. II, Ch. IV, Paris, Gauthier-Villars, 1912. Un'estesa bibliografia trovasi nell'opera di GINO LORIA: *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* (2ª ed.), Padova, Cedam, 1931, pp. 99-102; ed anche in « Enc. der Math. Wiss. », B. III, 10b, pp. 1740-1744.

([2]) Cfr. p. es. ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II, pag. 152; Bologna, Zanichelli, 1918.

e affinchè le due radici coincidessero il loro valore comune dovrebbe soddisfare anche all'equazione

$$f_0=\frac{\partial f}{\partial V}=0.$$

In virtù della (33),

$$f_0=-V\Sigma_i f_i^2,$$

ne seguirebbe addirittura

$$f_i=0 \qquad (i=1,2,3),$$

cioè

$$\alpha_i=0 \qquad (i=1,2,3),$$

il che è assurdo.

Dunque, gli eventuali assi ottici sono da ricercarsi nei piani principali.

Consideriamo il piano perpendicolare all'asse x_i ($\alpha_i=0$) con la solita convenzione riguardo agli indici $i+1$, $i+2$.

Dall'equazione

$$\Omega(p)=\rho_2\rho_3p_1^2+\rho_3\rho_1p_2^2+\rho_1\rho_2p_3^2+\rho_1\rho_2\rho_3=0,$$

in cui si ponga α_i, cioè p_i eguale a zero e si divida per g^2, segue

$$\rho_i\left(\rho_{i+2}\alpha_{i+1}^2+\rho_{i+1}\alpha_{i+2}^2+\frac{1}{g^2}\rho_{i+1}\rho_{i+2}\right)=0.$$

Delle due radici V^2, una, come già sappiamo, è V_i^2 che annulla il fattore ρ_i, l'altra deve annullare l'altro fattore e, d'altra parte, se si tratta di un asse ottico, essere essa pure eguale a V_i^2. Di qua, avuto riguardo alle espressioni (19) che forniscono le ρ, dividendo ulteriormente per $\rho_1\rho_2\rho_3/g^2$ e tenendo conto che p_0^2/g^2 va posto eguale a V_i^2, si ha

$$\frac{\alpha_{i+1}^2}{\dfrac{V_i^2}{V_{i+1}^2}-1}+\frac{\alpha_{i+2}^2}{\dfrac{V_i^2}{V_{i+2}^2}-1}+1=0,$$

cioè, avuto riguardo all' identità $\Sigma_i \alpha_i^2 = 1$, che, in questo caso, si riduce a $\alpha_{i+1}^2 + \alpha_{i+2}^2 = 1$.

$$V_i^2 \left\{ \frac{\alpha_{i+1}^2}{V_i^2 - V_{i+1}^2} + \frac{\alpha_{i+2}^2}{V_i^2 - V_{i+2}^2} \right\} = 0.$$

Questa relazione è soddisfatta da valori reali del rapporto $\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_{i+2}}$ allora e allora soltanto che i due denominatori risultino di segni contrari. In virtù delle diseguaglianze

$$V_1^2 > V_2^2 > V_3^2,$$

ciò può aver luogo soltanto per $i = 2$, cioè per il piano principale corrispondente alla velocità di propagazione V_2 intermedia tra la massima e la minima.

In tale piano x_3x_1 si hanno effettivamente due direzioni corrispondenti ai due valori

$$\pm\sqrt{\frac{V_2^2 - V_3^2}{V_1^2 - V_2^2}}.$$

del rapporto di α_3/α_1.

9. *Caso in cui la superficie di Fresnel è degenere.* Il caso escluso in cui due (e due soltanto) delle velocità di propagazione V_i risultassero eguali corrisponde ai cosiddetti mezzi *uniassici*, in cui c' è un solo asse ottico.

In questo caso, l' ellissoide ausiliario $\varphi = 1$ (n. 5) risulta di rotazione, avendo naturalmente per raggio equatoriale R l' inverso del valore comune delle due V_i eguali.

Un qualunque semidiametro rimane sempre compreso tra tale raggio equatoriale e l' inversa della terza V.

Per ogni sua sezione con un piano passante per il centro, uno dei semiassi è necessariamente coincidente col raggio equatoriale R, e perciò rimangono compresi nell' inviluppo tutti i piani distanti R dal centro, il che è quanto dire che alla superficie F appartiene necessariamente la sfera di raggio R.

Dunque la F che è di 4° ordine si spezza nella detta sfera e in una quadrica (ellissoide).

Sarebbe assai facile avere conferma di ciò dall' equazione cartesiana della F, supponendovi eguali due delle V e liberandola dai denominatori.

§ 10. Il dualismo onde-corpuscoli della Fisica moderna, secondo de Broglie.

1. Dopo Young e Fresnel, parvero inquadrarsi in uno schema ondulatorio, fornito inizialmente da un modello elastico e successivamente dalle equazioni elettromagnetiche di Maxwell (teoria elettromagnetica della luce), tutti i fenomeni luminosi fin allora conosciuti. Ma non si è poi riusciti a conciliare in modo semplice la teoria ondulatoria con i fatti osservati a proposito del fenomeno fotoelettrico che risale ad H. HERTZ.

Si tratta essenzialmente di questo. Quando un fascio di luce colpisce una superficie metallica, da questa, il più delle volte, si liberano degli elettroni. Qualitativamente, il fenomeno si schematizza pensando che l'energia luminosa incidente vada in parte impiegata in un certo lavoro l (dipendente dal metallo di cui si tratta) necessario per svincolare l'elettrone, e in parte per comunicargli dell'energia cinetica.

In questo bilancio energetico, interviene l'intensità, ma non la frequenza della luce incidente. Senonchè, fu sperimentalmente osservato (LENARD) che, al disotto di una certa frequenza, qualunque sia l'intensità della luce incidente, l'effetto fotoelettrico non si produce, mentre la velocità massima comunicata agli elettroni dipende esclusivamente dalla frequenza (MILLIKAN).

Questo comportamento, inesplicabile dal punto di vista dell'ottica ondulatoria, ha trovato invece brillante rappresentazione quantitativa nella ipotesi corpuscolare e quantistica di EINSTEIN (1905), secondo cui ogni fascio luminoso di frequenza ν dovrebbe potersi risguardare come costituito da uno sciame di fotoni o quanti di luce (porziuncole di energia) possedenti ciascuno un'energia E proporzionale alla frequenza ν, e precisamente

$$E = h\nu,$$

essendo h la celebre costante di PLANCK.

In quanto l'effetto fotoelettrico venga effettivamente attribuito all'urto di tali fotoni, è chiaro che, finchè $h\nu$ rimane inferiore a quel certo lavoro di estrazione l, non si determinerà alcuna emissione di elettroni per quanto grande sia l'intensità della luce considerata; e i vari fatti osservati si accordano egregiamente con la detta ipotesi corpuscolare.

Essa serve egualmente a render conto di un fenomeno scoperto da COMPTON nel 1923, secondo cui, se un fascio di raggi X investe degli elementi materiali, esso rimane, in generale, deviato con abbassamento di frequenza, mentre qui ancora si liberano elettroni.

Tutto il complesso fenomeno rimane soddisfacentemente spiegato, come hanno rilevato COMPTON, DEBYE, FERMI e PERSICO [1], associando all'ipotesi di EINSTEIN, oltre il principio della conservazione dell'energia, quello della quantità di moto.

Come si possano fondere, in una superiore veduta, la teoria ondulatoria e il ritorno all'ipotesi corpuscolare attraverso i fotoni, non si saprebbe oggi stabilire in modo esauriente. Ci basti il rilevare che la fisica moderna ha avuto bisogno, per spiegare alcuni fenomeni ottici, di far intervenire insieme la concezione ondulatoria e quella corpuscolare. Una circostanza analoga si presenta nella teoria degli elettroni che, in base sopratutto al comportamento dei raggi catodici e a celebri esperienze della fine del sec. XIX, principalmente eseguite da J. J. THOMSON, KAUFMANN, H. A. WILSON, si rite-

[1] Cfr. per es. FERMI, *Introduzione alla fisica atomica* (Bologna, Zanichelli. 1928). p. 97.

nevano completamente caratterizzati come pure cariche elettriche tutte eguali tra loro.

Questo punto di vista esclusivamente corpuscolare non renderebbe conto del fenomeno della diffrazione degli elettroni nei cristalli, scoperto nel 1927 da DAVISSON e GERMER e confermato da ulteriori esperienze, dovute a RUPP e a G. P. THOMSON.

Qui si presenta il fatto opposto a quello precedentemente rilevato, cioè che i fenomeni elettronici, fino a poco fa inquadrabili in uno schema esclusivamente corpuscolare, sembrano richiedere, in causa di nuove constatazioni sperimentali, una trattazione complementare di tipo ondulatorio.

Questa specie di dualismo, per cui i più notevoli fatti della fisica moderna esigono, ad un tempo, l'intervento simultaneo di corpuscoli e di onde, fu riconosciuta e prospettata come legge generale di natura, anche prima della bella conferma desunta dalla diffrazione degli elettroni, da LUIGI DE BROGLIE.

In un primo tempo egli aveva anche cercato di dare forma più concreta alla sua concezione associando ad ogni corpuscolo mobile un ben determinato gruppo o pacchetto di onde; però egli stesso riconobbe le difficoltà provenienti da tale associazione [1].

Un altro notevole criterio di corrispondenza, desunto dal teorema di HAMILTON sull'azione variata, fu indicato dal MAGGI [2]; ma, per quanto esso sia

[1] Cfr. L. DE BROGLIE, *Introduction à l'étude de la mécanique ondulatoire*, Paris, Hermann, 1930 (prefazione).

[2] Cfr. G. A. MAGGI, *Sul significato nel passato e nell'avvenire delle equazioni dinamiche*, Rendiconti del Seminario Mat. e Fis. di Milano, vol. 3°, 1930, pp. 53-72.

teoricamente seducente, non sembra possibile desumerne una rappresentazione quantitativa dei molteplici fatti osservati.

Pur molto interessante è il ravvicinamento dinamico-ottico proposto da PERSICO [1] per rendere plausibile l'equazione di SCHRÖDINGER, sebbene nemmeno questo porga una vera legge di corrispondenza fra ben determinati aspetti, corpuscolare e ondulatorio, di un dato fenomeno.

Le considerazioni precedentemente svolte sui sistemi normali, che ad essi associano varietà caratteristiche (superficie d'onda) e linee bicaratteristiche (traiettorie), porgono uno schema abbastanza largo per rispecchiare i due aspetti ondulatorio e corpuscolare di un medesimo fenomeno, tosto che il sistema normale di partenza sia effettivamente adeguato al fenomeno di cui si tratta.

Tale è indubbiamente il caso dell'equazione di SCHRÖDINGER in base alle sue mirabili conferme spettroscopiche.

Ricordiamo qui, a titolo di esempio, che l'equazione in questione è [2]

$$S \equiv \frac{2}{E^2}(U + E)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta_2 \varphi = 0, \tag{1}$$

dove la costante E rappresenta un'energia unitaria che risulta a posteriori quantizzata mediante l'in-

[1] Cfr. E. PERSICO, *Lezioni di Meccanica ondulatoria* (lit.), 2ª ed., Padova, Cedam, 1930, pp. 29-40.

[2] Cfr. E. SCHRÖDINGER, *Abhandlungen zur Wellenmechanik*, Leipzig, Barth, 1927, p. 38; cfr. altresì p. 40 delle Lezioni del prof. PERSICO, citate nella nota prec.

tervento degli autovalori della (1) stessa, definiti da opportune condizioni di regolarità, $-U$ è il potenziale elettrostatico unitario.

Ricordiamo ancora che le soluzioni φ della (1), le quali vengono in uso nella meccanica ondulatoria, sono in generale complesse, e che, non la φ stessa, ma soltanto $|\varphi|^2$ ha una diretta interpretazione fisica, risultando proporzionale ad una certa probabilità locale (di presenza di elettroni nell'intorno di un dato posto).

Dal punto di vista matematico, qualunque siano state le considerazioni o, se si vuole anche dire, le divinazioni attraverso le quali lo SCHRÖDINGER pervenne la prima volta a stabilire la (1), ci basterà ritenere acquisito che un gruppo assai cospicuo di fenomeni, includenti in particolare la spiegazione delle linee spettroscopiche di BALMER e la cosiddetta fine struttura dell'atomo di idrogeno, sono mirabilmente compendiate nella (1).

Basta designare il coefficiente $\frac{2}{E^2}(U+E)$ di $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ con $\frac{1}{V^2}$ per essere materialmente ricondotti all'equazione canonica dei piccoli moti (¹) (§ 2, n^i. 1 e 6), le cui varietà caratteristiche

$$z(x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3) = \text{cost}$$

(¹) Per verità in tale equazione il coefficiente V designa una costante. Però il procedimento con cui se ne desumono le caratteristiche non subisce alcuna modificazione anche se V sia invece una funzione qualsiasi del posto e del tempo.

sono, come abbiamo visto (§ 3, n. 4), definite dall'equazione omogenea di 2° grado

$$\Omega = \frac{1}{V^2}p_0^2 - \Sigma_i p_i^2 = 0.$$

Quest'equazione, risoluta rispetto a p_0, sotto la forma

$$p_0 + H = 0,$$

dà

$$H = -V\sqrt{\Sigma_i p_i^2}$$

che costituisce, come sappiamo, la funzione hamiltoniana delle bicaratteristiche.

Tutto ciò è ben ovvio; abbiamo voluto farne cenno esplicito per fissare, con questo esempio specifico, l'attenzione sul fatto più generale che, quando di un dato fenomeno è completamente conosciuta la teoria mediante un sistema normale di equazioni nei suoi parametri determinativi φ (la $S=0$ di SCHRÖDINGER nel caso attuale), sono immediatamente desumibili anche le equazioni che ne definiscono le caratteristiche e bicaratteristiche, cioè i parziali aspetti di onde e corpuscoli che vi sono subordinati. Al contrario, se in qualche circostanza si possa ritenere noto l'uno o l'altro di questi aspetti, cioè analiticamente, la Ω o la H, non si può senz'altro risalire alla completa legge del fenomeno, cioè al sistema normale che lo rappresenta.

Sempre restando nell'esempio particolare testè considerato, la conoscenza di Ω non è sufficiente ad individuare la S di SCHRÖDINGER, come risulta ovviamente dal fatto che, in base alla regola del § 7,

n. 2, se si aggiunge ad S una funzione F dipendente in modo qualunque dalle x, dalla φ e dalle derivate prime di φ, anche l'equazione $S+F=0$ possiede le stesse caratteristiche e bicaratteristiche.

In qualche caso, in cui si poteva ritenere conosciuto dall'ordinaria fisica macroscopica uno dei due aspetti parziali di un particolare fenomeno, cioè analiticamente la funzione Ω delle p e delle x, è potuto bastare di sostituire ad ogni p_k l'operatore $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ ($k=0, 1, 2, 3$: $i=\sqrt{-1}$), perchè l'equazione

$$\Omega\left(x \left| \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right.\right)\varphi = 0$$

porgesse la corrispondente equazione alle derivate parziali della micromeccanica, ma una tale regola non è univoca.

Basta pensare che un termine del tipo ap_0p_1, con a funzione del posto e del tempo, potrebbe con eguale ragionevolezza dar luogo ad una delle quattro espressioni

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2(a\varphi)}{\partial x_0\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right),$$

le quali tutte hanno comune il termine di secondo ordine $a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0\partial x_1}$, ma differiscono per termini dipendenti dalle x, dalla φ e dalle derivate prime, i quali, conformemente all'osservazione fatta poco fa, non influiscono sulla Ω.

La regola formale suddetta può dunque avere

soltanto un valore euristico [1] (e lo ebbe mirabile nell'opera di SCHRÖDINGER e DIRAC [2]), ma non sembra possibile ricavarne una costruzione sistematica rispecchiante una vera realtà fisica.

Tornando allo schema puramente matematico, fornito dalla teoria delle caratteristiche, vogliamo ancora segnalare una notevole applicazione, fattane dal dott. RACAH [3], alle equazioni di DIRAC, che generalizzano quella di SCHRÖDINGER e costituiscono ciò che oggi si può risguardare come la più completa sintesi matematica dei microfenomeni elettromagnetici ed ottici. Come necessaria conseguenza della equazione $\Omega=0$, la quale ne definisce le varietà caratteristiche, il RACAH ne ha desunto, per un caso particolare molto espressivo, una istruttiva giustificazione del principio di indeterminazione di HEISENBERG.

(1) Specie se il sistema normale di cui si tratta deve sottostare a particolari condizioni, come invarianze gruppali o addirittura rispetto a tutte le trasformazioni delle x.

(2) *The principles of Quantum Mechanics*, Oxford, Clarendon Press, 1930.

(3) *Caratteristiche delle equazioni di Dirac e principio di indeterminazione*, Rend. Acc. Lincei, (6), vol. XIII, 1931, pp. 424-427.

INDICE DEI NOMI

I numeri si riferiscono alle pagine.

INDICE

ERRATA CORRIGE

Pag. 5, righe 13-14 (dall'alto):

La proposizione ***restano univocamente determinate le** φ **come funzioni olomorfe di*** $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ecc.

è esatta senza riserva nel caso, ordinariamente contemplato, in cui anche le singole derivate di tipo χ di una qualsiasi $\varphi_\mu (\mu = 1, 2, \ldots, m)$, che compariscono nel secondo membro di una generica (1'), sono di ordine complessivo inferiore, o tutt'al più eguale a r_μ (oltre che, come si è detto a pag. 1, di ordine minore di r_μ rispetto alla x_0). Se non si introduce questa restrizione (e noi abbiamo desiderato evitarla in vista di talune applicazioni svolte nel testo), si può soltanto affermare che le (1') forniscono, in base ai dati iniziali, tutte le derivate delle funzioni incognite relative allo stesso valore iniziale $x_0 = a_0$. Ma non è detto che i corrispondenti sviluppi tayloriani necessariamente convergano; anzi sono stati dati esempi del contrario dalla stessa KOWALEVSKY [cfr. « Journal für die reine und angewandte Math. », B. 80, 1875, p. 22]. Possono dunque ***non*** esistere integrali olomorfi soddisfacenti alle assegnate condizioni iniziali. Comunque, quando esistono, l'univocità è assicurata; e questo basta per il nostro scopo. Infatti è soltanto il venir meno della univocità che porta ad introdurre le varietà caratteristiche (§ 2), donde tutti gli ulteriori sviluppi.