A. SIGNORINI

SULLA TEORIA ANALITICA

DEI

Fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici

La teoria matematica dei fenomeni luminosi nei mezzi trasparenti omogenei anisotropi non ha al giorno d'oggi che un ben mediocre sviluppo, perchè fino a pochi anni fa nessuna delle formole che servono di fondamento alla corrispondente teoria nei mezzi isotropi — se si eccettuano quelle relative al caso di una propagazione di onde luminose piane — era stata convenientemente estesa sia pure al solo caso dei mezzi uniassici. Come è noto [1], le formole date dalla Kowalevsky [2] come estensione della nota formola di Poisson [3] relativa all'integrazione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi$$

non corrispondono allo scopo pel quale sono state trovate e gl'integrali delle equazioni di Lamé che portano il nome di Lamé stesso [4]) non risultano adatti a rappresentare le vibrazioni luminose di un mezzo birifrangente dovute alla presenza di un unico punto luminoso.

---

[1]) V. VOLTERRA. *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents.* Acta Math. Bd. XVI. Nel seguito indicheremo questa memoria con (V).

[2]) V. KOWALEVSKY. *Ueber die Brechung des Lichtes in krystallinischen Medien.* Acta Math. Bd. VI. Nel seguito indicheremo questa memoria con (K).

[3]) V. ad es. DUHEM. *Cours de physique mathématique,* t. I, pag. 167.

[4]) V. LAMÉ. *Leçons sur l'élasticité.* 23.e leçon.

Scopo principale di questo lavoro è — riferendoci soltanto al caso dei mezzi uniassici — di esporre e completare i risultati che in questi ultimi anni hanno in parte colmato tale lacuna e anche di render ragione — nel caso *speciale* da noi considerato — dell'infruttuosità delle ricerche di Lamé e della Kowalevsky.

Nel capitolo I determineremo le soluzioni delle equazioni di Lamé relative a un mezzo uniassico, che corrispondono nella teoria elastica della luce ad una propagazione di onde elastiche tutte omotetiche, rispetto ad un medesimo punto, alla falda sferica o alla falda elissoidica della superficie di Fresnel relativa nel mezzo considerato al punto stesso, e del resto non soggette ad alcun'altra condizione.

Vedremo così, conformemente ai risultati ottenuti dal Brill nella memoria « *Ueber die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen* » [1]) che di tali soluzioni, oltre quelle date dagli integrali di Lamé, ve ne sono altre: tutte però presentano tali singolarità, che dei movimenti elastici rappresentati in generale dalle soluzioni delle equazioni di Lamé che si ottengono combinando linearmente le due specie di soluzioni in questione non può mai aversi una realizzazione fisica neppure approssimata. Resterà in tal modo provato che se si cerca di rappresentare analiticamente le vibrazioni di un mezzo birifrangente provenienti da un solo centro luminoso seguendo le idee di Lamé, necessariamente si arriva a delle formole cui non si può dare un significato fisico.

Nondimeno, considerando che è pure fisicamente irrealizzabile l'esistenza di un unico centro luminoso, si potrebbe ancora pensare che le formole così trovate fossero da considerare come espressione di una legge elementare atta a dare dei risultati conformi all'esperienza qualora si passi dal caso elementare a un caso concreto mediante un processo d'integrazione suggerito da un principio fisico *a priori* accettato: principio fisico che nel nostro caso non potrebbe essere altro che il principio di Huyghens. Ma sarà facile convincersi che procedendo per questa via non si arriva al resultato voluto. Basterà per ciò che applichiamo al caso dei mezzi uniassici le consi-

[1]) Math. Ann. Bd. I.

derazioni delle quali il prof. Volterra [1]) si è servito nel caso di un mezzo birifrangente generico per giungere alle formole finali della memoria (K) e per dimostrare che esse non danno in generale degli integrali delle equazioni di Lamé.

Di questo appunto ci occuperemo in principio del capitolo II, che continueremo poi cercando, sulla traccia della Kowalevsky, di verificare colla sostituzione diretta nelle equazioni di Lamé se le formole così ottenute ne danno degli integrali, collo scopo di porre in evidenza che ciò non accade, in generale, nonostante [2]) che gli integrali di Lamé passando dal caso generale dei mezzi a due assi a quello particolare dei mezzi uniassici da polidromi si riducano monodromi: e di porre anche in evidenza che scegliendo convenientemente le funzioni arbitrarie che compaiono nelle formole in questione si può ottenere ch'esse diano effettivamente degli integrali delle equazioni di Lamé.

Nel capitolo III estenderemo la formola di Poisson sopra ricordata all'integrazione del sistema

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= a^2\Delta_2\varphi + (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= a^2\Delta_2\psi - (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \end{aligned}\right.$$

che nella teoria analitica dei fenomeni luminosi nei mezzi uniassici fa la stessa parte che l'equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta_2\varphi$$

nella corrispondente teoria nei mezzi isotropi. Anzi troveremo delle

[1]) V. (V) art. 5, 3.
[2]) V. (V) Introduction, 3.

formole che esprimono ogni integrale regolare φ, ψ del sistema più generale

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \Phi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \psi - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \Psi$$

ove Φ, Ψ sono due funzioni qualunque di x, y, z, t — per i valori che ad un istante iniziale assegnato t_0 prendono φ, ψ e le loro derivate rispetto al tempo. Le formole così trovate includono come casi particolari le formole finali della memoria del prof. Grünwald « *Ueber die Ausbreitung elastischer und elektromagnetischer Wellen* [1] *in einaxig krystallinischen Medien* ».

Soggetto del capitolo IV sarà l'estensione agli integrali del sistema (I) della notissima formola di Kirchhof [2]) relativa agli integrali dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi .$$

Noi perverremo a tale estensione con un metodo analogo a quello di cui si è servito Kirchhoff, ma delle formole finali daremo anche una dimostrazione dovuta al prof. Grünwald, dimostrazione che, quantunque non sia stata ancora resa nota per mezzo della stampa, pure molto gentilmente ci è stata da Lui comunicata quando già eravamo pervenuti alle formole in questione col metodo cui sopra abbiamo accennato.

Tali formole, come è facile comprendere, hanno nella teoria matematica dei fenomeni luminosi nei mezzi uniassici la stessa importanza che ha la formola di Kirchhoff nella corrispondente teoria nei mezzi isotropi. Col loro aiuto se conosceremo i valori che a un istante qualunque prendono sulla superficie limitante il campo

[1]) Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien Math. naturw. Classe; Bd. CXI. Abth. II a. april 1902. Nel seguito indicheremo questa memoria con (G).

[2]) V. Kirchhoff. *Zur Theorie der Lichtsstrahlen*. Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Berlin (1882).

occupato da un mezzo uniassico le funzioni e le derivate prime delle funzioni che rappresentano le componenti dello spostamento elastico — se ci riferiamo alla teoria elastica della luce — o le componenti della forza magnetica — se ci riferiamo alla teoria elettromagnetica — in una qualunque propagazione d'onde luminose esistente nel mezzo considerato, tali funzioni risulteranno completamente determinate.

Otterremo così una soluzione di un problema la cui irrisolubilità porterebbe a concludere che nei mezzi uniassici non è possibile trovare un'espressione analitica per il principio di Huyghens. Le formole così trovate non sono però tali da permettere senz'altro d'affermare che ciò è possibile. Le funzioni che in tali formole rappresentano i contributi portati dai singoli elementi della superficie avvolgente il campo occupato dal mezzo uniassico considerato alla formazione dei valori dello spostamento elastico o della forza magnetica in un punto qualunque interno al campo stesso, non soddisfano alla condizione di trasversalità, e quindi da tali formole non risulta che la più generale propagazione d'onde luminose possibile in tale campo si possa considerare come dovuta a una conveniente distribuzione di centri luminosi sulla superficie che lo limita.

Termineremo il capitolo IV applicando i risultati ottenuti nei primi paragrafi del capitolo stesso a un breve studio delle soluzioni dell'equazioni dell'ottica nei mezzi uniassici, regolari in tutto lo spazio fatta eccezione che in un punto fissato. Ci convinceremo in tal modo che è possibile dare una rappresentazione analitica delle vibrazioni luminose originate in un mezzo uniassico dalla presenza di un'unica sorgente luminosa di dimensioni piccolissime, ciò che, dopo l'infruttuosità delle ricerche di Lamé, poteva anche porsi in dubbio.

Nel capitolo V mostreremo come le formole ottenute nel capitolo precedente estendendo la formola di Kirchhoff si possono senza difficoltà trasformare in altre atte ad esprimere analiticamente il principio di Huyghens nei mezzi uniassici. Le formole cui accenniamo sono state per la prima volta ottenute dal prof. Conway [1])

[1]) Proceedings of the London Math. Society, vol. XXXV.

come estensione delle formole del Love [1]) che esprimono analiticamente il principio di Huyghens nei mezzi isotropi. Noi ne faremo anche una verifica seguendo un metodo del tutto analogo a quello di cui si è servito il prof. Maggi nella sua memoria « *Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo* » [2]) per dimostrare la formola di Kirchhoff.

Con questo termineremo di esporre le ricerche che precedentemente abbiamo indicate come scopo principale di questo lavoro. Per dare un esempio delle applicazioni ch'esse possono avere nella teoria analitica dei fenomeni luminosi nei mezzi birifrangenti, mostreremo in un ultimo capitolo — nel capitolo VI — come i risultati del capitolo IV si possono applicare a dimostrare la ben nota regola di Huyghens che serve a determinare le direzioni dei due raggi rifratti che si originano quando un raggio luminoso propagantesi in un mezzo isotropo arriva alla superficie di separazione di questo mezzo e di un mezzo uniassico.

---

[1]) Love. *The integration of equations of propagation of electric waves.* Philosophical transactions of the Royal Society of London, series A, vol. 197.

[2]) Annali di Matematica, t. XVI.

Capitolo I.

Gli integrali di Lamé

1. — Le equazioni differenziali fondamentali della teoria elastica della luce, in un mezzo omogeneo anisotropo non soggetto ad azioni perturbatrici esterne, quando si assuma come sistema coordinato un sistema cartesiano ortogonale (x, y, z) cogli assi paralleli agli assi d'elasticità del mezzo e si rappresentino con ξ, η, ζ le componenti dello spostamento elastico presente al tempo t nel punto (x, y, z) e con a, b, c le inverse dei semiassi dell'elissoide d'elasticità relativo al mezzo considerato, sono, come è noto, l'equazioni di Lamé

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)-c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)-b^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\end{aligned}\right. .$$

e l'altra equazione

$$(2)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0$$

che esprime che le vibrazioni luminose sono trasversali.

Siccome dalle (1) segue

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=0$$

la (2) risulterà certamente soddisfatta in conseguenza delle (1) se ad un istante iniziale t_0 sarà

$$\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right]_{t=t_0}=0 \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right]_{t=t_0}=0\,.$$

Le equazioni (1) nel caso dei mezzi uniassici — supposto, come sempre allora si può fare, che sia $a=b$ — assumono la forma

$$\tag{3} \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)-c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\end{aligned}\right.$$

e l'asse z risulta in tal caso parallelo all'unico asse ottico del mezzo. Poichè allora la superficie di Fresnel relativa al mezzo considerato degenera in una sfera di raggio a e in un elissoide concentrico di rotazione intorno all'asse z e di semiassi c, c, a, nostro primo scopo sarà, conformemente a quanto abbiamo detto nell'Introduzione, di ricercare gli integrali del sistema (3) della forma

$$\tag{4} \left\{\begin{aligned} \xi &= \xi^{(i)} f(t+\lambda_i)\\ \eta &= \eta^{(i)} f(t+\lambda_i) \qquad (i=1,2)\\ \zeta &= \zeta^{(i)} f(t+\lambda_i)\end{aligned}\right.$$

ove $\xi^{(i)}, \eta^{(i)}, \zeta^{(i)}$ sono funzioni di x, y, z indipendenti dal tempo, f è il simbolo di una funzione arbitraria del suo argomento, e λ_1, λ_2 sono parametri atti rispettivamente ad individuare le singole sfere aventi per centro l'origine delle coordinate (x, y, z) e i singoli elis-

soidi concentrici di semiassi rispettivamente proporzionali alle quantità c, c, a [1]).

Esauriremo facilmente la nostra ricerca servendoci delle formole che nella memoria (V) il prof. Volterra ha dato per la trasformazione dell'equazioni di Lamé in un sistema di coordinate curvilinee qualunque [2]).

Indicando con u_1, u_2, u_3 i parametri di un tal sistema, sia

$$ds^2 = H_{11}du_1^2+H_{22}du_2^2+H_{33}du_3^2+2H_{12}du_1du_2+2H_{13}du_1du_3+2H_{23}du_2du_3$$

il quadrato dell'elemento lineare e poniamo

$$D=\frac{\partial(x\,y\,z)}{\partial(u_1\,u_2\,u_3)}=\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13}\\ H_{21} & H_{22} & H_{23}\\ H_{31} & H_{32} & H_{33}\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

Indichiamo con v_1, v_2, v_3 le componenti del vettore (ξ, η, ζ) relativo al punto (u_1, u_2, u_3) secondo le tangenti alle linee coordinate pel punto stesso e poniamo

$$p_1=\frac{v_1}{\sqrt{H_{11}}}\,,\; p_2=\frac{v_2}{\sqrt{H_{22}}}\,,\; p_3=\frac{v_3}{\sqrt{H_{33}}}\,.$$

---

[1]) Se più in generale si cercassero gl'integrali del sistema (3) della forma

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \xi^{(1)}f_1(t+\lambda_1)+\xi^{(2)}f_2(t+\lambda_2)\\ \eta &= \eta^{(1)}f_1(t+\lambda_1)+\eta^{(2)}f_2(t+\lambda_2)\\ \zeta &= \zeta^{(1)}f_1(t+\lambda_1)+\zeta^{(2)}f_2(t+\lambda_2)\end{aligned}\right.$$

senza ammettere *a priori* che necessariamente

$$\left\{\begin{aligned} &\xi^{(1)}f_1(t+\lambda_1)\\ &\eta^{(1)}f_1(t+\lambda_1)\\ &\zeta^{(1)}f_1(t+\lambda_1)\end{aligned}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{aligned} &\xi^{(2)}f_2(t+\lambda_2)\\ &\eta^{(2)}f_2(t+\lambda_2)\\ &\zeta^{(2)}f_2(t+\lambda_2)\end{aligned}\right.$$

ci diano due integrali di tal sistema, saremmo di necessità ricondotti al caso da noi trattato. (Cfr. (V) art. 4, 6).

[2]) V. (V) art. 1, 4.

Poniamo infine

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{K}_{is} &= a^2 \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_s} + a^2 \frac{\partial y}{\partial u_i} \frac{\partial y}{\partial u_s} + c^2 \frac{\partial z}{\partial u_i} \frac{\partial z}{\partial u_s} \\ q_i &= \textstyle\sum_l \mathrm{H}_{il}\, p_l \\ \mathrm{P}_s &= \frac{1}{\mathrm{D}} \left(\frac{\partial q_{s+1}}{\partial u_{s+2}} - \frac{\partial q_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right) \\ \mathrm{Q}_i &= \textstyle\sum_s \mathrm{K}_{is}\, \mathrm{P}_s \end{aligned}\right. \qquad (i, l, s = 1, 2, 3).$$

Introdotte queste denominazioni, le equazioni di Lamé si scrivono

$$\mathrm{D} \frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathrm{Q}_{s+2}}{\partial u_{s+1}} - \frac{\partial \mathrm{Q}_{s+1}}{\partial u_{s+2}} \qquad (s = 1, 2, 3).$$

2. — Per determinare gli integrali delle equazioni di Lamé della forma (4), ci serviremo secondochè $i = 1$ oppure $i = 2$, rispettivamente del sistema di coordinate individuato dalle formole

$$(\alpha) \quad x = u_1 \cos u_2 \sin u_3\,, \quad y = -u_1 \sin u_2 \sin u_3\,, \quad z = u_1 \cos u_3$$

$$(u_1 \geq 0 \quad 0 \leq u_2 < 2\pi \quad 0 \leq u_3 < \pi)$$

e dall'altro

$$(\beta) \quad x = \frac{c}{a} u_1 \cos u_3 \sin u_2\,, \quad y = \frac{c}{a} u_1 \sin u_3 \sin u_2\,, \quad z = u_1 \cos u_2$$

$$(u_1 \geq 0 \quad 0 \leq u_2 < \pi \quad 0 \leq u_3 < 2\pi).$$

Pel primo sistema, che non differisce da un sistema di coordinate polari altro che per avere cambiato il segno di uno dei parametri, si ha

$$(5) \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}_{11} = 1 \quad \mathrm{H}_{22} = u_1^2 \sin^2 u_3 \quad \mathrm{H}_{33} = u_1^2 \quad \mathrm{H}_{12} = \mathrm{H}_{13} = \mathrm{H}_{23} = 0 \quad \mathrm{D} = u_1^2 \sin u_3 \\ \qquad \mathrm{K}_{11} = a^2 \sin^2 u_3 + c^2 \cos^2 u_3 \quad \mathrm{K}_{22} = a^2 u_1^2 \sin^2 u_3 \\ \mathrm{K}_{33} = u_1^2 (a^2 \cos^2 u_3 + c^2 \sin^2 u_3) \quad \mathrm{K}_{12} = \mathrm{K}_{23} = 0 \quad \mathrm{K}_{13} = u_1 \sin u_3 \cos u_3 (a^2 - c^2) \end{array}\right.$$

e pel secondo si trova subito

$$(6) \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}_{11} = \frac{c^2}{a^2} \sin^2 u_2 + \cos^2 u_2 \quad \mathrm{H}_{22} = u_1^2 \left(\frac{c^2}{a^2} \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2\right) \\ \mathrm{H}_{33} = \frac{c^2}{a^2} u_1^2 \sin^2 u_2 \quad \mathrm{H}_{13} = \mathrm{H}_{23} = 0 \quad \mathrm{H}_{12} = \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) u_1 \sin u_2 \cos u_2 \\ \mathrm{K}_{11} = c^2 \quad \mathrm{K}_{22} = c^2 u_1^2 \quad \mathrm{K}_{33} = c^2 u_1^2 \sin^2 u_2 \quad \mathrm{K}_{12} = \mathrm{K}_{13} = \mathrm{K}_{23} = 0 \\ \qquad \mathrm{D} = \frac{c^2}{a^2} u_1^2 \sin u_2\,. \end{array}\right.$$

Tanto se $i = 1$, quanto se $i = 2$, ad un integrale del sistema (3) della forma (4), corrisponderà un integrale dello stesso sistema trasformato rispettivamente nel sistema di coordinate (α) o nel sistema di coordinate (β), della forma

$$(7) \quad \left\{\begin{array}{l} p_1 = p_1^{(i)} f(t + \lambda_i) \\ p_2 = p_2^{(i)} f(t + \lambda_i) \\ p_3 = p_3^{(i)} f(t + \lambda_i) \end{array}\right. \qquad (i = 1, 2)$$

ove $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}$ sono quantità che non dipendono dal tempo e λ è funzione della sola variabile u_1.

Siccome poi sia nell'uno che nell'altro caso è

$$\mathrm{H}_{13} = \mathrm{H}_{23} = \mathrm{K}_{12} = \mathrm{K}_{23} = 0$$

avremo successivamente sia per $i = 1$ che per $i = 2$

$$\left\{\begin{array}{l} q_1 = (\mathrm{H}_{11} p_1^{(i)} + \mathrm{H}_{12} p_2^{(i)}) f = q_1^{(i)} f \\ q_2 = (\mathrm{H}_{12} p_1^{(i)} + \mathrm{H}_{22} p_2^{(i)}) f = q_2^{(i)} f \\ q_3 = \mathrm{H}_{33} p_3^{(i)} = q_3^{(i)} f \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{P}_1 = \frac{1}{\mathrm{D}} \left(\frac{\partial q_2^{(i)}}{\partial u_3} - \frac{\partial q_3^{(i)}}{\partial u_2}\right) f = \mathrm{P}_1^{(i)} f \\ \mathrm{P}_2 = \frac{1}{\mathrm{D}} \left(\frac{\partial q_3^{(i)}}{\partial u_1} - \frac{\partial q_1^{(i)}}{\partial u_3}\right) f + \frac{q_3^{(i)}}{\mathrm{D}} f' \lambda'_i = \mathrm{P}_2^{(i)} f + \frac{q_3^{(i)}}{\mathrm{D}} f' \lambda'_i \\ \mathrm{P}_3 = \frac{1}{\mathrm{D}} \left(\frac{\partial q_1^{(i)}}{\partial u_2} - \frac{\partial q_2^{(i)}}{\partial u_1}\right) f - \frac{q_2^{(i)}}{\mathrm{D}} f' \lambda'_i = \mathrm{P}_3^{(i)} f - \frac{q_2^{(i)}}{\mathrm{D}} f' \lambda'_i \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
Q_1 &= (K_{11} P_1^{(i)} + K_{13} P_3^{(i)}) f - \frac{1}{D} K_{13} q_2^{(i)} f' \lambda'_i = Q_1^{(i)} f - \frac{K_{13}}{D} q_2^{(i)} f' \lambda'_i \\
Q_2 &= K_{22} P_2^{(i)} f + \frac{1}{D} K_{22} q_3^{(i)} f' \lambda'_i = Q_2^{(i)} f + \frac{K_{22}}{D} q_3^{(i)} f' \lambda'_i \\
Q_3 &= (K_{31} P_1^{(i)} + K_{33} P_3^{(i)}) f - \frac{1}{D} K_{33} q_2^{(i)} f' \lambda'_i = Q_3^{(i)} f - \frac{K_{33}}{D} q_2^{(i)} f' \lambda'_i
\end{aligned}\right.$$

e infine

$$\left\{\begin{aligned}
& D p_1^{(i)} f'' + \left(\frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial u_3} - \frac{\partial Q_3^{(i)}}{\partial u_2}\right) f + \left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{K_{33}}{D} q_2^{(i)} \lambda'_i\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{K_{22}}{D} q_3^{(i)} \lambda'_i\right)\right] f' = 0 \\
& \left(D p_2^{(i)} - \frac{K_{33}}{D} q_2^{(i)} \lambda'^2_i\right) f'' + \left(\frac{\partial Q_3^{(i)}}{d u_1} - \frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial u_3}\right) f + \\
& \qquad + \left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{K_{13}}{D} q_2^{(i)} \lambda'_i\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{K_{33}}{D} q_2^{(i)} \lambda'_i\right)\right] f' = 0 \\
& \left(D p_3^{(i)} - \frac{K_{22}}{D} q_3^{(i)} \lambda'^2_i\right) f'' + \left(\frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial u_2} - \frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial u_1}\right) f - \\
& \qquad - \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{K_{22}}{D} q_3^{(i)} \lambda'_i\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{K_{13}}{D} q_2^{(i)} \lambda'_i\right)\right] f' = 0 .
\end{aligned}\right.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le (7) ci diano, qualunque sia la funzione f, un integrale del sistema (3) trasformato, secondochè $i=1$ oppure $i=2$, nel sistema di coordinate (α) oppure nel sistema di coordinate (β), sarà dunque che le funzioni

$$p_1^{(i)} \quad p_2^{(i)} \quad p_3^{(i)} \quad \lambda_i$$

soddisfino al sistema

$$(S_1) \qquad p_1^{(i)} = 0 \qquad\qquad (S_2) \qquad D p_2^{(i)} - \frac{K_{33}}{D} q_2^{(i)} \lambda'^2_i = 0$$

$$(S_3) \qquad D p_3^{(i)} - \frac{K_{22}}{D} q_3^{(i)} \lambda'^2_i = 0 \qquad\qquad (S_4) \qquad \frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial u_3} - \frac{\partial Q_3^{(i)}}{\partial u_2} = 0$$

$$(S_5) \qquad \frac{\partial Q_3^{(i)}}{\partial u_1} - \frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial u_3} = 0 \qquad\qquad (S_6) \qquad \frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial u_2} - \frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial u_1} = 0$$

$$(S_7) \qquad \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{K_{33}}{D} q_2^{(i)} \lambda'_i\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{K_{22}}{D} q_3^{(i)} \lambda'_i\right) = 0$$

$$(S_8) \qquad \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{K_{13}}{D} q_2^{(i)} \lambda'_i\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{K_{33}}{D} q_2^{(i)} \lambda'_i\right) = 0$$

$$(S_9) \qquad \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{K_{22}}{D} q_3^{(i)} \lambda'_i\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{K_{13}}{D} q_2^{(i)} \lambda'_i\right) = 0 .$$

3. — Supponiamo dapprima $i=1$ e introduciamo nelle equazioni del sistema (S) per D, H_{is}, K_{is}, $(i, s = 1, 2, 3)$ i valori dati per tal quantità dalle (5). Dalle (S_1) (S_2) si deduce allora

$$p_2^{(1)} \left[1 - \lambda'^2_1 (a^2 \cos^2 u_3 + c^2 \sin^2 u_3)\right] = 0$$

e quindi non potendo aversi per qualunque valore di u_1, u_3

$$1 - \lambda'^2_1 (u_1) \, (a^2 \cos^2 u_3 + c^2 \sin^2 u_3) = 0$$

dovrà essere

$$p_2^{(1)} = 0 \qquad q_2^{(1)} = 0 :$$

la (S_3) poi, se si esclude che sia anche $p_3^{(1)} = 0$, ci dà

$$\lambda'_1 = \pm \frac{1}{a} \qquad \lambda_1 = \pm \frac{u_1}{a} + \text{cost.}$$

Siccome λ_1 compare soltanto sotto il segno della funzione arbitraria f, potremo senz'altro porre

$$\lambda_1 = \pm \frac{u_1}{a} .$$

Introducendo allora i valori trovati per $q_2^{(1)}$, λ_1 nelle (S_7) (S_9) si ottiene, indicando con $\psi(u_2)$ una funzione per ora indeterminata della sola variabile u_2,

$$\frac{K_{22}}{D} q_3^{(1)} = \psi(u_2) \qquad q_3^{(1)} = \frac{\psi(u_2)}{a^2 \sin u_3}$$

e quindi anche

$$\mathrm{P}_1^{(1)} = -\frac{\psi'(u_2)}{a^2 u_1^2 \sin^2 u_3} \qquad \mathrm{P}_2^{(1)} = \mathrm{P}_3^{(1)} = 0$$

$$\mathrm{Q}_1^{(1)} = -\frac{a^2 \sin^2 u_3 + c^2 \cos^2 u_3}{a^2 u_1^2 \sin^2 u_3} \psi'(u_2) \qquad \mathrm{Q}_2^{(1)} = 0$$

$$\mathrm{Q}_3^{(1)} = -\frac{(a^2 - c^2) \sin u_3 \cos u_3}{a^2 u_1 \sin^2 u_3} \psi'(u_2) .$$

Dopo ciò dalla (S_5) si ottene subito

$$\psi'(u_2) \frac{1}{u_1^2} \left[\frac{(a^2 - c^2) \sin u_3 \cos u_3}{\sin^2 u_3} + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{a^2 \sin^2 u_3 + c^2 \cos^2 u_3}{\sin^2 u_3} \right) \right] = 0$$

ciò che dà immediatamente

$$\psi'(u_2) = 0 .$$

Trascurando un fattore costante, potremo dunque porre

$$q_3^{(1)} = -\frac{1}{\sin u_3} \qquad p_3^{(1)} = -\frac{1}{u_1^2 \sin u_3}$$

Ora anche le equazioni $(\mathrm{S}_4)(\mathrm{S}_5)(\mathrm{S}_6)$ risultano verificate dai valori trovati per

$$p_1^{(1)} \; p_2^{(1)} \; p_3^{(1)} \; \lambda_1 .$$

Possiamo dunque concludere che per $i = 1$ gli integrali del sistema (3) della forma (4) essenzialmente si riducono ad uno e che questo integrale corrisponde all'integrale del sistema stesso riferito alle coordinate (α) pel quale è

$$v_1 = v_2 = 0 \qquad v_3 = -\frac{1}{u_1 \sin u_3} f\left(t \pm \frac{r}{a}\right)$$

Siccome poi, usando delle solite notazioni per le coordinate polari di origine $\mathrm{O} \equiv (0, 0, 0)$, di asse polare z, di piano polare xz, le coordinate (σ) risultano ad esse legate dalle relazioni

$$u_1 = r \qquad u_2 = -\varphi \qquad u_3 = \theta$$

tale integrale si otterrà ponendo

$$\text{(8)} \qquad \xi = -\frac{1}{r} \cot\theta \cos\varphi \, f\left(t \pm \frac{r}{a}\right) \quad \eta = -\frac{1}{r} \cot\theta \sin\varphi \, f\left(t \pm \frac{r}{a}\right)$$

$$\zeta = \frac{1}{r} f\left(t \pm \frac{r}{a}\right)$$

Questo integrale dell'equazioni di Lamé, come è naturale, coincide con quello che si ottiene specializzando pel caso dei mezzi uniassici l'integrale di Lamé relativo alla falda della superficie di Fresnel che allora degenera in una sfera. Come è ben noto esso soddisfa anche alla condizione di trasversalità

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 .$$

4. — Passiamo ora alla determinazione degli integrali del sistema (3) della forma (4) nel caso $i = 2$, per la cui trattazione sarà da usare il sistema di coordinate (β).

Dalle $(\mathrm{S}_1)(\mathrm{S}_2)(\mathrm{S}_3)$ si deduce subito

$$p_1^{(2)} = 0 \qquad \lambda_2 = \pm \frac{u_1}{a} .$$

Inoltre, essendo ora

$$\frac{\mathrm{K}_{22}}{\mathrm{D}} = \frac{a^2}{\sin u_2}$$

le $(\mathrm{S}_7)(\mathrm{S}_9)$ ci danno, indicando al solito con $\psi(u_2)$ una funzione della sola variabile u_2 che per ora resta indeterminata,

$$q_3^{(2)} = \psi(u_2) :$$

si vede allora subito che sarà

$$\mathrm{P}_1^{(2)} = -\frac{a^2 \psi'(u_2)}{c^2 u_1^2 \sin u_2} \qquad \mathrm{P}_2^{(2)} = \mathrm{P}_3^{(2)} = 0$$

$$\mathrm{Q}_1^{(2)} = -\frac{a^2 \psi'(u_2)}{u_1^2 \sin u_2} \qquad \mathrm{Q}_2^{(2)} = \mathrm{Q}_3^{(2)} = 0$$

Introducendo i valori così trovati di $Q_1^{(2)}, Q_2^{(2)}$ nella (S_6) si ottiene

$$\frac{\psi'(u_2)}{\sin u_2} = \text{cost}.$$

e infine, indicando con k_1, k_2 due costanti arbitrarie,

$$q_3^{(2)} = \psi(u_2) = \frac{c}{a^2}(k_1 \cos u_2 + k_2)$$

$$p_3^{(2)} = \frac{1}{c}\frac{k_1 \cos u_2 + k_2}{u_1^2 \sin^2 u_2}$$

$$v_3 = \frac{k_1 \cos u_2 + k_2}{a u_1 \sin u_2} f\left(t \pm \frac{u_1}{a}\right)$$

Si vede subito che tutte le equazioni del sistema (S) risultano verificate dai valori trovati per

$$p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, p_3^{(2)}, \lambda_2.$$

D'altra parte colle notazioni già introdotte per le coordinate polari di origine O, asse polare z, piano polare xz facilmente si vede che le attuali coordinate u_2, u_3 sono ad esse legate dalle relazioni

$$u_2 = \text{arc tg}\left(\frac{a}{c}\,\text{tg}\,\theta\right)$$

$$u_3 = \varphi:$$

di più posto

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}(x^2 + y^2) + z^2}$$

risulta

$$u_1 = \bar{r}.$$

Le linee coordinate u_2, u_3 saranno dunque date dai meridiani e dai paralleli degli elissoidi di rotazione

$$\bar{r} = \text{cost}.$$

È facile allora concludere che tutti gli integrali del sistema (3) della forma (4) per $i = 2$ si ottengono ponendo

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{k_1 \cos\left[\text{arc tg}\left(\frac{a}{c}\,\text{tg}\,\theta\right)\right] + k_2}{\bar{r}\sin\left[\text{arc tg}\left(\frac{a}{c}\,\text{tg}\,\theta\right)\right]}\sin\varphi\, f\left(t \pm \dfrac{\bar{r}}{a}\right) \\[2ex] \eta = \dfrac{k_1 \cos\left[\text{arc tg}\left(\frac{a}{c}\,\text{tg}\,\theta\right)\right] + k_2}{\bar{r}\sin\left[\text{arc tg}\left(\frac{a}{c}\,\text{tg}\,\theta\right)\right]}\cos\varphi\, f\left(t \pm \dfrac{\bar{r}}{a}\right) \\[2ex] \zeta = 0 \end{cases}$$

Si vede subito che anche questi integrali dell'equazioni di Lamé soddisfano alla condizione di trasversalità

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Le formole ora trovate quando sia $k_1 = 0$ ci danno l'integrale di Lamé relativo alla falda elissoidica della superficie di Fresnel corrispondente al mezzo considerato. Se poi in esse poniamo $a = c$, le formole così ottenute, cioè

$$(10)\qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{k_1 \cos\theta + k_2}{r \sin\theta}\sin\varphi\, f\left(t \pm \dfrac{r}{a}\right) \\[2ex] \eta = \dfrac{k_1 \cos\theta + k_2}{r \sin\theta}\cos\varphi\, f\left(t \pm \dfrac{r}{a}\right) \\[2ex] \zeta = 0 \end{cases}$$

ci danno degli integrali del sistema (3) riferito a un mezzo isotropo in cui sia a la velocità della luce.

Ora si può osservare che tali integrali sono tutti gli integrali del sistema in questione pei quali

$$\zeta = 0.$$

A questa conclusione si arriva subito ripetendo, dopo aver posto $a = c$, le considerazioni fatte per giungere alle formole (9) e tenendo conto che la condizione $\zeta = 0$ è equivalente all'altra

$$p_z^{(2)} = 0 .$$

D'altra parte dalle formole (10) si passa alle (9) ponendo nei secondi membri delle (10) per x, y, z, rispettivamente $\frac{a}{c}x, \frac{a}{c}y, z$. Potremo dunque dire che se ad ogni istante in ogni punto (x, y, z) immaginiamo applicato il vettore che rappresenta lo spostamento elastico del punto $\left(\frac{c}{a}x, \frac{c}{a}y, z\right)$ nella più generale propagazione di vibrazioni luminose che è possibile per onde sferiche di centro comune O, in un mezzo isotropo in cui sia a la velocità della luce, colla limitazione che la componente dello spostamento di un punto qualunque secondo l'asse z risulti sempre nulla, otterremo l'immagine della più generale propagazione di vibrazioni luminose possibile nel mezzo uniassico considerato per onde elissoidiche concentriche, omotetiche alla falda elissoidica della superficie di Fresnel relativa al loro centro comune [1]).

5. — Abbiamo così perfettamente determinati tutti gli integrali del sistema (3) che secondo le idee di Lamé possono assumersi a rappresentare le vibrazioni luminose originate nel mezzo uniassico considerato dalla presenza di un unico centro luminoso situato nel punto O. Ma esaminando i secondi membri delle (8) o delle (9) apparisce subito evidente che essi divengono infiniti lungo tutto l'asse z, cioè lungo tutta la retta condotta per il punto sede del centro luminoso parallelamente all'asse ottico del mezzo: e che neppure combinandoli linearmente si possono ottenere degli integrali delle equazioni di Lamé regolari lungo tutta la retta in questione.

I movimenti elastici corrispondenti non possono dunque realizzarsi fisicamente, essendo il punto O, per il fatto che l'abbiamo supposto sede del solo centro luminoso esistente nel mezzo, l'unico punto in cui tali movimenti potrebbero, anzi dovrebbero, presentare delle singolarità.

[1]) Cfr. Brill. Mem. cit.

Capitolo II.

Le formole della Kowalevsky

6. — Sia (x, y, z) un punto qualunque del mezzo uniassico da noi considerato, e indichiamo con $\sigma_t^{(1)}$ la sfera di raggio at e centro (x, y, z), e con $\sigma_t^{(2)}$ l'elissoide concentrico che ha i suoi assi rispettivamente paralleli agli assi coordinati x, y, z e di lunghezza $2ct$, $2ct, 2at$.

Sempre riferendoci alla teoria elastica della luce, vediamo a che cosa ci conduce il servirci del principio di Huyghens nella sua forma ordinaria, quando a rappresentare gl'impulsi che da un centro luminoso sono trasmessi alle singole molecole del mezzo ambiente si assumano le formole (8) e (9).

Indicando al solito con ξ, η, ζ le componenti dello spostamento elastico presente al tempo t nel punto (x, y, z), avremo allora che nell'intervallo di tempo dt compreso tra gli istanti t e $t + dt$ esse riceveranno gli incrementi

$$d\xi = -\int_{\Delta S_t^{(1)}} \frac{\cot u_3^{(1)} \cos u_t^{(1)}}{u_1^{(1)}} F^{(1)}(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)} -$$

$$-\int_{\Delta S_t^{(2)}} \frac{h \cos u^{(2)} + 1}{u_1^{(2)} \sin u_2^{(2)}} \sin u_3^{(2)} F^{(2)}(x+u_1, y+v, z+w)\, dS_t^{(2)}$$

$$d\eta = \int\limits_{\Delta S_t^{(1)}} \frac{\cot u_3^{(1)} \sin u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}} F^{(1)}(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)} +$$

$$+ \int\limits_{\Delta S_t^{(2)}} \frac{h \cos u_2^{(2)} + 1}{u_1^{(2)} \sin u_2^{(2)}} \cos u_3^{(2)}\, F^{(2)}(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(2)}$$

$$d\zeta = \int\limits_{\Delta S_t^{(1)}} \frac{1}{u_1^{(1)}} F^{(1)}(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)}$$

ove si è indicato:

con $\Delta S_t^{(1)}$ e $\Delta S_t^{(2)}$ rispettivamente lo spazio compreso tra le due sfere $\sigma_t^{(1)}$ e $\sigma_{t+dt}^{(1)}$ e lo spazio compreso tra i due elissoidi $\sigma_t^{(2)}$ e $\sigma_{t+dt}^{(2)}$;

con u, v, w le coordinate di un punto mobile in $\Delta S_t^{(1)}$ o in $\Delta S_t^{(2)}$ nel sistema cartesiano che si ottiene dal sistema coordinato attuale portandone con una traslazione l'origine nel punto (x, y, z);

con $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}$ e $u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}$ i parametri dei due sistemi di coordinate curvilinee che rispetto al sistema cartesiano ora introdotto sono definiti rispettivamente dalle formole (α) e (β) del § 2;

con $F^{(1)}$ ed $F^{(2)}$ due funzioni arbitrarie dei loro argomenti che non dipendono altro che dallo stato del mezzo per $t=0$;

con h una quantità che nel caso più generale sarà da considerare come funzione di $x+u$, $y+v$, $z+w$.

Ora dalle formole (α) e (β) del § 2 si trae subito

$$dS_t^{(1)} = u_1^{(1)^2} \sin u_3^{(1)}\, du_1^{(1)}\, du_2^{(1)}\, du_3^{(1)}$$

$$dS_t^{(2)} = \frac{c^2}{a^2} u_1^{(2)^2} \sin u_2^{(2)}\, du_1^{(2)}\, du_2^{(2)}\, du_3^{(2)}$$

e siccome sopra $\sigma_t^{(1)}$, si ha

$$u_1^{(1)} = at \qquad du_1^{(1)} = a\,dt$$

e sopra $\sigma_t^{(2)}$

$$u_1^{(2)} = at \qquad du_1^{(2)} = a\,dt,$$

avremo infine

$$(11)\left\{\begin{aligned}
\Xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -a^2 t \int\limits_{\sigma_t^{(1)}} \cos u_2^{(1)} \cos u_3^{(1)}\, F^{(1)}(x+u, y+v, z+w)\, du_2^{(1)}\, du_3^{(1)} - \\
&\quad - c^2 t \int\limits_{\sigma_t^{(2)}} (h \cos u_2^{(2)} + 1) \sin u_3^{(2)}\, F^{(2)}(x+u, y+v, z+w)\, du_2^{(2)}\, du_3^{(2)} \\
H = \frac{\partial \eta}{\partial t} &= a^2 t \int\limits_{\sigma_t^{(1)}} \sin u_2^{(1)} \cos u_3^{(1)}\, F^{(1)}(x+u, y+v, z+w)\, du_2^{(1)}\, du_3^{(1)} + \\
&\quad + c^2 t \int\limits_{\sigma_t^{(2)}} (h \cos u_2^{(2)} + 1) \cos u_3^{(2)}\, F^{(2)}(x+u, y+v, z+w)\, du_2^{(2)}\, du_3^{(2)} \\
Z = \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= a^2 t \int\limits_{\sigma_t^{(1)}} \sin u_3^{(1)}\, F^{(1)}(x+u, y+v, z+w)\, du_2^{(1)}\, du_3^{(1)}.
\end{aligned}\right.$$

Ora per $t=0$ le funzioni $\Xi, H, Z, \frac{\partial \Xi}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t}$ si annullano e $\frac{\partial Z}{\partial t}$ si riduce a $4\pi a^2 F^{(1)}(x, y, z)$.

D'altra parte se ad es. supponiamo che la funzione $F^{(1)}$ sia indipendente da $z+w$, si soddisfa al sistema (3) sostituendo per ξ, η, ζ rispettivamente

$$0\,,\quad 0\,,\quad a^2 t \int\limits_{\sigma_t^{(1)}} \sin u_3^{(1)}\, F^{(1)}(x+u, y+v)\, du_2^{(1)}\, du_3^{(1)}.$$

Infatti, essendo allora

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0\,,$$

le prime due equazioni del sistema (3) sono verificate, perchè sono nulle tutte le funzioni che in esse compaiono, e la terza si può scrivere

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \zeta.$$

Da ciò evidentemente risulta che, non essendo le funzioni Ξ, H sempre nulle, le equazioni di Lamé non sono in generale verificate ponendo per ξ, η, ζ rispettivamente

$$\Xi \;,\; \mathrm{H} \;,\; \mathrm{Z}\,.$$

Vediamo dunque che applicando il principio d'Huyghens ai risultati del capitolo precedente, non si passa dagli integrali delle equazioni di Lamé riferite al caso da noi trattato dei mezzi uniassici, dati dalle formole (8), (9), a nuovi integrali delle equazioni stesse.

7. — Dopo questo è facile convincersi che il metodo usato dalla Kowalevsky nella memoria (K) per la ricerca degli integrali generali delle equazioni dell'ottica, anche applicato al caso particolare dei mezzi uniassici, non conduce al risultato voluto.

Come è noto, tale metodo si basa sulla determinazione degli integrali delle equazioni di Lamé della forma

$$\left\{\begin{aligned} \xi^* &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{S_t} \frac{\partial e}{\partial u}\, f(x+u,\, y+v,\, z+w)\, dS_t \\ \eta^* &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{S_t} \frac{\partial e}{\partial v}\, f(x+u,\, y+v,\, z+w)\, dS_t \\ \zeta^* &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{S_t} \frac{\partial e}{\partial w}\, f(x+u,\, y+v,\, z+w)\, dS_t \end{aligned}\right.$$

ove f è il simbolo di una funzione monodroma, finita e continua e del resto perfettamente arbitraria dei suoi argomenti, e è una funzione di u, v, w da determinarsi convenientemente, e infine S_t sta ad indicare o lo spazio $S_t^{(1)}$ interno a $\sigma_t^{(1)}$, o lo spazio $S_t^{(2)}$ interno a $\sigma_t^{(2)}$.

Riferendoci al primo caso, ripetendo i calcoli della memoria (K) si trova senza alcuna difficoltà che sarà da assumere

$$e = 2 \text{ sett senh } \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

e quindi anche, servendoci delle solite notazioni per le coordinate polari di origine (x, y, z) di asse polare w, e piano polare uw:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \xi^* &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{S_t^{(1)}} \left(-\frac{1}{r}\cos\varphi\cot\theta\right) f(x+u,\, y+v,\, z+w)\, dS_t^{(1)} \\ \eta^* &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{S_t^{(1)}} \left(-\frac{1}{r}\sin\varphi\cot\theta\right) f(x+u,\, y+v,\, z+w)\, dS_t^{(1)} \\ \zeta^* &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{S_t^{(1)}} \frac{1}{r}\, f(x+u,\, y+v,\, z+w)\, dS_t^{(1)}. \end{aligned}\right.$$

In queste formole possiamo facilmente far comparire degli integrali di superficie invece che degli integrali di spazio.

Indichiamo con $[\sigma_t^{(1)}]$ l'area che risulta da $\sigma_t^{(1)}$ togliendone le aree interne ad alcune sue curve chiuse $L_1, L_2, \ldots L_m$ in numero finito e con $[S_t^{(1)}]$ lo spazio che risulta da $S_t^{(1)}$ escludendone quella sua parte che è interna ai coni che da (x, y, z) proiettano $L_1, L_2, \ldots L_m$.

Sia poi $\psi(u, v, w)$ una funzione di u, v, w integrabile in $[S_t^{(1)}]$ ed ivi sempre finita e continua fatta eccezione al più pel punto $u = v = w = 0$. Sarà allora usando di una notazione il cui significato è evidente

$$\int_{[S_t^{(1)}]} \psi(u, v, w)\, dS_t^{(1)} = \int_0^{at} dr \int_{\left[\sigma_{\frac{r}{a}}^{(1)}\right]} \psi(u, v, w\; d\sigma_{\frac{r}{a}}^{(1)}$$

e quindi anche

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{[S_t^{(1)}]} \psi(u, v, w)\, dS_t^{(1)} = a \int_{[\sigma_t^{(1)}]} \psi(u, v, w)\, d\sigma_t^{(1)}.$$

Questa formola, che evidentemente è un caso particolare della formola di Weierstrass [1]) fondamentale per tutte le ricerche della

[1]) V. (K), formola (A).

memoria (K), applicata al caso delle formole (12), ci dà senza difficoltà

$$
(13)\qquad \begin{cases}
\xi^* = -a^2 t \displaystyle\int_{\sigma_t^{(1)}} \cos\varphi \cos\theta\, f(x+u, y+v, z+w)\, d\varphi\, d\theta \\[2ex]
\eta^* = -a^2 t \displaystyle\int_{\sigma_t^{(1)}} \sin\varphi \cos\theta\, f(x+u, y+v, z+w)\, d\varphi\, d\theta \\[2ex]
\zeta^* = a^2 t \displaystyle\int_{\sigma_t^{(1)}} \sin\theta\, f(x+u, y+v, z+w)\, d\varphi\, d\theta\,.
\end{cases}
$$

Vediamo dunque che il metodo della Kowalevsky ci porta a concludere che si soddisfa sempre alle equazioni di Lamé ponendo in esse per ξ, η, ζ rispettivamente i valori dei secondi membri delle (11) in cui sia fatto $F^{(2)} = 0$, ciò che invece, come abbiamo già visto, è falso.

8. — Questo risultato non ci apparisce strano perchè si deduce dai risultati della memoria (V) con un passaggio al limite per $a = b$ o $b = c$ (a, b, c rappresentando al solito le inverse dei tre semiassi d'elasticità d'un mezzo biassico disposte in ordine crescente o decrescente di grandezza).

Ma è evidente che gli integrali di Lamé — e quindi anche le funzioni che moltiplicano $f(x+u, y+v, z+w)$ nelle formole della Kowalevsky — passando dal caso generale di un mezzo a due assi al caso particolare dei mezzi uniassici, da polidromi si riducono monodromi; e d'altra parte le ricerche della Kowalevsky stessa sembrano escludere che l'errore incluso nel risultato ora ottenuto possa imputarsi alle singolarità che gli integrali di Lamé presentano, nel caso dei mezzi uniassici, lungo l'asse ottico, diventando ivi infiniti.

Noi cercheremo ora di verificare se le formole (12) danno o non danno degli integrali del sistema (3), imitando i calcoli fatti dalla Kowalevsky per lo scopo analogo nel caso generale dei mezzi biassici. Potremo così porre in evidenza che le (12) ci danno degli integrali non del sistema (3), ma di un sistema che da esso si deduce modificando la terza delle sue equazioni coll'aggiunta di un conveniente termine noto ad uno dei suoi membri.

Cerchiamo dunque di calcolare i valori delle tre espressioni

$$
(14)\qquad \begin{cases}
a^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \xi^*}{\partial z} - \dfrac{\partial \zeta^*}{\partial x}\right) - c^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \eta^*}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi^*}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial^2 \xi^*}{\partial t^2} \\[2ex]
c^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \eta^*}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi^*}{\partial y}\right) - a^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \zeta^*}{\partial y} - \dfrac{\partial \eta^*}{\partial z}\right) - \dfrac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} \\[2ex]
a^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \zeta^*}{\partial y} - \dfrac{\partial \eta^*}{\partial z}\right) - a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \xi^*}{\partial z} - \dfrac{\partial \zeta^*}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial^2 \zeta^*}{\partial t^2}\,.
\end{cases}
$$

Siano C′ e C″ due piccole circonferenze di $\sigma_t^{(1)}$ aventi i loro centri sferici rispettivamente nell'uno e nell'altro dei due punti in cui la superficie stessa è incontrata dalla retta $u = v = 0$, e precisamente C′ corrisponda a quello dei due punti, per cui $w > 0$. Siano inoltre:

σ_0 la superficie di una piccola sfera di centro (x, y, z);

K'_t e K''_t le aree limitate sui due coni che da (x, y, z) proiettano C′ e C″, da queste linee e dalle sezioni dei coni stessi colla sfera σ_0;

$[\sigma_t^{(1)}]$ l'area che risulta da $\sigma_t^{(1)}$ escludendone le due calotte limitate da C′, C″;

$[S_t^{(1)}]$ la parte di $S_t^{(1)}$ esterna ai due coni ora considerati e $[S_t^{(1)}] - \sigma_0$ la parte di $[S_t^{(1)}]$ esterna a σ_0:

$[\sigma_0]$ la parte di σ_0 inclusa nel contorno di $[S_t^{(1)}] - \sigma_0$.

Per un ben noto teorema di Gauss, avremo evidentemente

$$
\int_{[S_t^{(1)}] - \sigma_0} \frac{\partial}{\partial u} F(u, v, w) = \int_{[\sigma_t^{(1)}]} U_{\sigma_t^{(1)}} F(u, v, w)\, d\sigma_t^{(1)} + \int_{[\sigma_0]} U_{\sigma_0} F(u, v, w)\, d\sigma_0 +
$$

$$
+ \int_{K'_t} U_{K'_t} F(u, v, w)\, dK'_t + \int_{K''_t} U_{K''_t} F(u, v, w)\, dK''_t
$$

ove con U indichiamo il coseno dell'angolo che la normale alla superficie avvolgente $[S_t^{(1)}] - \sigma_0$ in un suo punto qualunque, volta verso l'esterno forma coll'asse u, e la funzione $F(u,v,w)$ si suppone tale da soddisfare in $[S_t^{(1)}]-\sigma_0$ alle condizioni di regolarità volute dal teorema in questione. Ne segue che, posto

$$F(u,v,w)=\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)$$

avremo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,dS_t^{(1)}=\\
=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0}\frac{\partial}{\partial u}\{\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\}\,dS_t^{(1)}-\\
-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0}f(x+u,y+v,z+w)\frac{\partial}{\partial u}\psi(u,v,w)\,dS_t^{(1)}=\\
=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[\sigma_t^{(1)}]}U_{\sigma_t^{(1)}}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,d\sigma_t^{(1)}+\\
+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[\sigma_0]}U_{\sigma_0}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,d\sigma_0+\\
+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{K'_t}U_{K'_t}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,dK'_t+\\
+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{K''_t}U_{K''_t}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,dK''_t-\\
-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0}f(x+u,y+v,z+w)\frac{\partial}{\partial u}\psi(u,v,w)\,dS_t^{(1)}\,.
\end{aligned}$$

D'altra parte per la (A), essendo colle notazioni già introdotte

$$U_{\sigma_t^{(1)}}=\frac{\partial r}{\partial u}\,,$$

si ha evidentemente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[\sigma_t^{(1)}]}U_{\sigma_t^{(1)}}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,d\sigma_t^{(1)}=\\
=\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{[S_t^{(1)}]}\frac{\partial r}{\partial u}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,dS_t^{(1)}:
\end{aligned}$$

inoltre è

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[\sigma_0]}U_{\sigma_0}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,d\sigma_0=0$$

perchè la sfera σ_0 non varia con t.

Sarà dunque

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,dS_t^{(1)}=\\
=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t^2}\int\limits_{[S_t^{(1)}]}\frac{\partial r}{\partial u}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,dS_t^{(1)}-\\
+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{K'_t}U_{K'_t}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,dK'_t+\\
+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{K''_t}U_{K''_t}\psi(u,v,w)\,f(x+u,y+v,z+w)\,dK''_t+\\
-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0}f(x+u,y+v,z+w)\frac{\partial}{\partial u}\psi(u,v,w)\,dS_t^{(1)}.
\end{aligned}$$

Siccome poi indicando con θ',φ',r' e θ'',φ'',r'' i valori dei parametri del solito sistema di coordinate polari in un punto qualunque di K'_t e in un punto qualunque di K''_t, si ha

$$dK'_t\, U_{K'_t} = -r'\, dr'\, d\varphi' \sin\theta' \cos\theta' \cos\varphi'$$
$$dK''_t\, U_{K''_t} = r''\, dr''\, d\varphi'' \sin\theta'' \cos\theta'' \cos\varphi''$$

avremo infine

$$(15_1) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0} \psi(u,v,w)\, f(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)} =$$
$$= \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{[S_t^{(1)}]} \frac{\partial r}{\partial u}\psi f\, dS_t^{(1)} - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0} f\frac{\partial \psi}{\partial u} dS_t^{(1)} - a^2 t \sin\theta' \cos\theta' \int\limits_{C'} \psi f \cos\varphi'\, d\varphi' +$$
$$+ a^2 t \sin\theta' \cos\theta'' \int\limits_{C''} \psi f \cos\varphi''\, d\varphi'',$$

ove ora θ' e θ'' sono i valori della colatitudine sul cerchio C' e sul cerchio C''.

Analogamente si trova

$$(15_2) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0} \psi(u,v,w)\, f(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)} =$$
$$= \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{[S_t^{(1)}]} \frac{\partial r}{\partial v}\psi f\, dS_t^{(1)} - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0} f\frac{\partial \psi}{\partial v} dS_t^{(1)} - a^2 t \sin\theta' \cos\theta' \int\limits_{C'} \psi f \sin\varphi'\, d\varphi' +$$
$$+ a^2 t \sin\theta'' \cos\theta'' \int\limits_{C''} \psi f \sin\varphi''\, d\varphi'';$$

$$(15_3) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0} \psi(u,v,w)\, f(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)} =$$
$$= \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{[S_t^{(1)}]} \frac{dr}{dw}\psi f\, dS_t^{(1)} - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{[S_t^{(1)}]-\sigma_0} f\frac{\partial \psi}{\partial w} dS_t^{(1)} + a^2 t \sin\theta' \int\limits_{C'} \psi f\, d\varphi' -$$
$$- a^2 t \sin\theta'' \int\limits_{C''} \psi f\, d\varphi''.$$

Applicando questa formola a calcolare i valori delle differenze

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial y} - \frac{\partial \eta^*}{\partial z} \qquad \frac{\partial \xi^*}{\partial z} - \frac{\partial \zeta^*}{\partial x} \qquad \frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial \xi^*}{\partial y}$$

che compariscono nelle espressioni (14), indicando con ε' ed ε'' i raggi di C', C'', otteniamo

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial y} - \frac{\partial \eta^*}{\partial z} = -\frac{1}{a}\lim_{\varepsilon'=0\ \varepsilon''=0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{[S_t^{(1)}]}\left(\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial w} - \frac{\partial e}{\partial w}\frac{\partial r}{\partial v}\right) f(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)} -$$
$$- a^2 t \lim_{\varepsilon'=0} \sin\theta' \int\limits_{C'} f\left[\frac{\partial e}{\partial v}\sin\theta' + \frac{\partial e}{\partial w}\cos\theta' \sin\varphi'\right] d\varphi' +$$
$$+ a^2 t \lim_{\varepsilon''=0} \sin\theta'' \int\limits_{C''} f\left[\frac{\partial e}{\partial v}\sin\theta'' + \frac{\partial e}{\partial w}\cos\theta'' \sin\varphi''\right] d\varphi''$$

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial z} - \frac{\partial \zeta^*}{\partial x} = -\frac{1}{a}\lim_{\varepsilon'=0\ \varepsilon''=0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{[S_t^{(1)}]}\left(\frac{\partial e}{\partial w}\frac{\partial r}{\partial u} - \frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial w}\right) f(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)} +$$
$$+ a^2 t \lim_{\varepsilon'=0} \sin\theta' \int\limits_{C'} f\left[\frac{\partial e}{\partial w}\cos\theta' \cos\varphi' + \frac{\partial e}{\partial u}\sin\theta'\right] d\varphi' -$$
$$- a^2 t \lim_{\varepsilon''=0} \sin\theta'' \int\limits_{C''} f\left[\frac{\partial e}{\partial w}\cos\theta'' \cos\varphi'' + \frac{\partial e}{\partial u}\sin\theta''\right] d\varphi''$$

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial \xi^*}{\partial y} = -\frac{1}{a}\lim_{\varepsilon'=0\ \varepsilon''=0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{[S_t^{(1)}]}\left(\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u}\right) f(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)} +$$
$$+ a^2 t \lim_{\varepsilon'=0} \sin\theta' \int\limits_{C'} f\left[\frac{\partial e}{\partial u}\cos\theta' \sin\varphi' - \frac{\partial e}{\partial v}\cos\theta' \cos\varphi'\right] d\varphi' -$$
$$- a^2 t \lim_{\varepsilon''=0} \sin\theta'' \int\limits_{C''} f\left[\frac{\partial e}{\partial u}\cos\theta'' \sin\varphi'' - \frac{\partial e}{\partial v}\cos\theta'' \cos\varphi''\right] d\varphi''.$$

D'altra parte sussistono le eguaglianze

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial w}-\frac{\partial e}{\partial w}\frac{\partial r}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\\ &\frac{\partial e}{\partial w}\frac{\partial r}{\partial u}-\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial w}=\frac{\partial \varphi}{\partial v}\\ &\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u}=0\,, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial e}{\partial v}\sin\theta+\frac{\partial e}{\partial w}\cos\theta\sin\varphi=0\\ &\frac{\partial e}{\partial w}\cos\theta\cos\varphi+\frac{\partial e}{\partial u}\sin\theta=0\\ &\frac{\partial e}{\partial u}\cos\theta\sin\varphi-\frac{\partial e}{\partial v}\cos\theta\cos\varphi=0\,. \end{aligned}\right.$$

Avremo dunque infine

$$\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}-\frac{\partial\eta^*}{\partial z}=-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{S_t^{(1)}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}f(x+u,y+v,z+w)\,dS_t^{(1)}$$

$$\frac{\partial\xi^*}{\partial z}-\frac{\partial\zeta^*}{\partial x}=-\frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{S_t^{(1)}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}f(x+u,y+v,z+w)\,dS_t^{(1)}$$

$$\frac{\partial\eta^*}{\partial x}-\frac{\partial\xi^*}{\partial y}=0\,.$$

Servendoci di nuovo delle formole (15), otteniamo allora, essendo φ indipendente da w:

$$a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi^*}{\partial z}-\frac{\partial\zeta^*}{\partial x}\right)-c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\eta^*}{\partial x}-\frac{\partial\xi^*}{\partial y}\right)=-\lim_{\varepsilon'=0}\lim_{\varepsilon''=0}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int_{[S_t^{(1)}]}\frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial\varphi}{\partial v}f(x+u,y+v,z+w)\,dS_t^{(1)}$$

$$-a^3\lim_{\varepsilon'=0}\frac{\partial}{\partial t}t\sin\theta'\int_{C'}\frac{\partial\varphi'}{\partial v}f(x+u,y+v,z+w)\,d\varphi'+$$

$$+a^3\lim_{\varepsilon''=0}\frac{\partial}{\partial t}t\sin\theta''\int_{C''}\frac{\partial\varphi''}{\partial v}f(x+u,y+v,z+w)\,d\varphi''$$

$$c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta^*}{\partial x}-\frac{\partial\xi^*}{\partial y}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}-\frac{\partial\eta^*}{\partial z}\right)=\lim_{\varepsilon'=\theta}\lim_{\varepsilon''=0}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int_{[S_t^{(1)}]}\frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial\varphi}{\partial u}f(x+u,y+v,z+w)\,dS_t^{(1)}+$$

$$+a^3\lim_{\varepsilon'=0}\frac{\partial}{\partial t}t\sin\theta'\int_{C'}\frac{\partial\varphi'}{\partial u}f(x+u,y+r,z+w)\,d\varphi'-$$

$$-a^3\lim_{\varepsilon''=0}\frac{\partial}{\partial t}t\sin\theta''\int_{C''}\frac{\partial\varphi''}{\partial u}f(x+u,y+v,z+w)\,d\varphi''$$

$$c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}-\frac{\partial\eta^*}{\partial z}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi^*}{\partial z}-\frac{\partial\zeta^*}{\partial x}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon'=0}\lim_{\varepsilon''=0}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int_{[S_t^{(1)}]}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}\right)f(x+u,y+v,z+w)\,dS_t^{(1)}-$$

$$-a^3\lim_{\varepsilon'=0}\frac{\partial}{\partial t}t\sin\theta'\cos\theta'\int_{C'}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial v}\cos\varphi'-\frac{\partial\varphi'}{\partial u}\sin\varphi'\right)f(x+u,y+v,z+w)\,d\varphi'+$$

$$+a^3\lim_{\varepsilon''=0}t\sin\theta''\cos\theta''\int_{C''}\left(\frac{\partial\varphi''}{\partial v}\cos\varphi''-\frac{\partial\varphi''}{\partial u}\sin\varphi''\right)f(x+u,y+v,z+w)\,d\varphi''$$

Tenendo conto che

$$-\frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{\partial e}{\partial u}$$

$$\frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial e}{\partial v}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}=\frac{\partial e}{\partial w}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\sin\theta\sin\varphi=\frac{1}{r}$$

si ottiene allora

$$a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi^*}{\partial z} - \frac{\partial \zeta^*}{\partial x}\right) - c^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial \xi^*}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3}{\partial t^3}\int_{S_t^{(1)}} \frac{\partial e}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)}$$

$$c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial \xi^*}{\partial y}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial y} - \frac{\partial \eta^*}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3}{\partial t^3}\int_{S_t^{(1)}} \frac{\partial e}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)}$$

$$a^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial y} - \frac{\partial \eta^*}{\partial z}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi^*}{\partial z} - \frac{\partial \zeta^*}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3}{\partial t^3}\int_{S_t^{(1)}} \frac{\partial e}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, dS_t^{(1)} +$$

$$- a^2 \lim_{\varepsilon'=0} \frac{\partial}{\partial t} \cos\theta' \int_{C'} f\, d\varphi' + a^2 \lim_{\varepsilon''=0} \frac{\partial}{\partial t} \cos\theta'' \int_{C''} f\, d\varphi''$$

e poichè evidentemente

$$(16) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon'=0} \cos\theta' \displaystyle\int_{C'} f\, d\varphi' = 2\pi f(x, y, z+at) \\ \lim\limits_{\varepsilon''=0} \cos\theta'' \displaystyle\int_{C''} f\, d\varphi'' = -2\pi f(x, y, z-at) \end{cases}$$

si ha infine

$$(17) \qquad \begin{cases} a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi^*}{\partial z} - \frac{\partial \zeta^*}{\partial x}\right) - c^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial \xi^*}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial t^2} = 0 \\ c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial \xi^*}{\partial y}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial y} - \frac{\partial \eta^*}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} = 0 \\ a^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial y} - \frac{\partial \eta^*}{\partial z}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi^*}{\partial z} - \frac{\partial \zeta^*}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial t^2} = \\ = -2\pi a^2 \frac{\partial}{\partial t}[f(x, y, z+at) + f(x, y, z-at)] = \\ = -2\pi a^3 \frac{\partial}{\partial z}[f(x, y, z+at) - f(x, y, z-at)]. \end{cases}$$

Vediamo così che le formole (12) non ci danno in generale degli integrali delle equazioni di Lamé: condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò accada è che sia per ogni valore di x, y, z, t

$$\frac{\partial}{\partial z}[f(x, y, z+at) - f(x, y, z-at)] = 0$$

cioè sia

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, z) = 0 .$$

La ragione della discordanza di questo risultato coi risultati finali della memoria (K) sta in questo che ivi è implicitamente ammesso che gli integrali che nel caso di un mezzo biassico corrispondono agli integrali che compariscono nei primi membri delle formole (16), sono nulli, quantunque la funzione da integrarsi risulti sempre dal prodotto di una funzione monodroma $f(x+u, y+v, z+w)$ per una funzione polidroma che cambia di valore quando si parte da un punto della linea d'integrazione e vi si ritorna seguendo la linea stessa.

9. — Con un calcolo simile a quello ora fatto, facilmente si trova

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial x} + \frac{\partial \eta^*}{\partial y} + \frac{\partial \zeta^*}{\partial z} = 2\pi a[f(x, y, z+at) - f(x, y, z-at)].$$

Potremo quindi scrivere le relazioni (17) anche nella forma

$$(18) \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \xi^* - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial \xi^*}{\partial y}\right) = \\ \qquad = -2\pi a^3 \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y, z+at) - f(x, y, z-at)] \\ \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \eta^* + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta^*}{\partial x} - \frac{\partial \xi^*}{\partial y}\right) = \\ \qquad = -2\pi a^3 \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y, z+at) - f(x, y, z-at)] \\ \frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \zeta^* = 0 . \end{cases}$$

Nel capitolo seguente determineremo l'espressione dell'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \xi - (a^2 - c^2) \dfrac{\partial}{\partial y} \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \right) = X \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \eta + (a^2 - c^2) \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \right) = Y \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \zeta = Z \end{cases}$$

— ove X, Y, Z sono funzioni qualunque di x, y, z, t — per i valori che ad un istante iniziale assumono le funzioni incognite e le loro derivate prime rispetto al tempo.

Dopo ciò potremo facilmente verificare che l'integrale del sistema che si ottiene dalle (18) ove in esse ξ^*, η^*, ζ^* si considerino come funzioni incognite, corrispondente alle stesse condizioni iniziali cui soddisfano le funzioni da noi indicate con ξ^*, η^*, ζ^*, è proprio dato da tali funzioni.

Capitolo III.

Estensione della formola di Poisson

10. — Come abbiamo accennato in fine al capitolo precedente, vogliamo ora, assegnate per i valori di x, y, z corrispondenti ai punti di uno spazio finito o infinito R sei funzioni

$$\xi_0(x\,y\,z) \quad \eta_0(x\,y\,z) \quad \zeta_0(x\,y\,z) \quad \Xi_0(x\,y\,z) \quad \mathrm{H}_0(x\,y\,z) \quad \mathrm{Z}_0(x\,y\,z),$$

ricercare le formole che, nell'interno del campo stesso, almeno finchè il tempo varia entro limiti convenienti, determinano l'integrale del sistema

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \xi - (a^2 - c^2) \dfrac{\partial}{\partial y} \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \right) = X(x\,y\,z\,t) \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \eta + (a^2 - c^2) \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \right) = Y(x\,y\,z\,t) \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \zeta = Z(x\,y\,z\,t) \end{cases}$$

— ove X, Y, Z sono funzioni qualunque dei punti di R e di t — che, essendo t_0 un istante iniziale fissato, soddisfa alle condizioni

$$(\xi)_{t=t_0} = \xi_0 \qquad (\eta)_{t=t_0} = \eta_0 \qquad (\zeta)_{t=t_0} = \zeta_0$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \Xi_0 \qquad \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \mathrm{H}_0 \qquad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \mathrm{Z}_0\,,$$

oltre che a convenienti condizioni di regolarità, che nel corso della nostra ricerca gli andremo man mano imponendo senza soffermarci a precisarle. Quanto alle funzioni

$$\xi_0 \quad \eta_0 \quad \zeta_0 \quad \Xi_0 \quad H_0 \quad Z_0 \quad X \quad Y \quad Z\,,$$

perchè valga quanto andiamo a dire è sufficiente che nel campo S esse siano finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde, ma si può verificare che le formole finali cui arriveremo danno nel campo R un integrale del sistema (19) anche quando le funzioni in questione soddisfano a condizioni di regolarità meno restrittive delle precedenti. Noi però non ci occuperemo di fare tali verifiche.

Cominciamo dal fare l'ovvia osservazione che il problema proposto risulterà risoluto appena lo sia il problema analogo pel sistema formato dalle prime due equazioni del sistema dato, cioè appena siano note le formole che in ogni punto del campo S, almeno finchè t resta entro certi limiti, determinano l'integrale del sistema

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\xi - (a^2-c^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}-\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) = X \\[2ex] \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\eta + (a^2-c^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}-\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) = Y \end{cases}$$

tale che

$$(\xi)_{t=t_0} = \xi_0 \qquad (\eta)_{t=t_0} = \eta_0 \qquad \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \Xi_0 \qquad \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{t=t_0} = H_0\,.$$

Poniamo allora, come sempre è possibile,

$$X = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \qquad Y = \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}$$

ove A è una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

e la funzione B è determinata dalle due relazioni

$$\frac{\partial B}{\partial y} = X - \frac{\partial A}{\partial x} \qquad -\frac{\partial B}{\partial x} = Y - \frac{\partial A}{\partial y}\,,$$

che non sono contradittorie, perchè

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(X - \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Y - \frac{\partial A}{\partial y}\right) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right) = 0\,.$$

Dimostreremo prima di tutto che, dato un qualunque integrale regolare ξ, η del sistema (20) potremo sempre (in infiniti modi) porre

$$\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} \qquad \eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)}$$

ove

$$\xi^{(1)} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} \qquad \eta^{(1)} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}$$

$$\xi^{(2)} = \frac{\partial f^{(2)}}{\partial y} \qquad \eta^{(2)} = -\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}$$

$f^{(1)}, f^{(2)}$ essendo due funzioni che rispettivamente soddisfano alle due equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial z^2} = A$$

$$\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial z^2} = B\,.$$

Cominciamo dal determinare una funzione $\bar{f}^{(1)}$ in modo che sia

$$\frac{\partial^2 \bar{f}^{(1)}}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 \bar{f}^{(1)}}{\partial z^2} = a^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + A\,.$$

Se alle variabili z, t sostituiamo le variabili

$$\alpha = at + z \qquad \beta = at - z\,,$$

l'equazione precedente si scrive

$$4a^2\frac{\partial^2 \bar{f}^{(1)}}{\partial\alpha\,\partial\beta} = a^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right) + A$$

e quindi avremo

$$\bar{f}^{(1)} = \frac{1}{4a^2}\int_0^\alpha d\alpha \int_0^\beta d\beta \left[a^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\mathrm{A}\right]+\pi(x, y, \alpha)+\chi(x, y, \beta)$$

π, χ indicando due funzioni arbitrarie loro argomenti.

Dovendo inoltre aversi in conseguenza delle (20)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)-a^2\Delta_2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}$$

ed essendo

$$\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial y^2}=\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}$$

sarà pure

$$a^2\left(\frac{\partial^2\bar{f}^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{f}^{(1)}}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{4}\int_0^\alpha d\alpha\int_0^\beta d\beta\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)-\right.$$

$$\left.-a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\right]+a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\pi+a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\chi$$

cioè

$$a^2\left(\frac{\partial^2\bar{f}^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{f}^{(1)}}{\partial y^2}\right)=a^2\int_0^\alpha d\alpha\int_0^\beta d\beta\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+$$

$$+a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\pi+a^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\chi.$$

Ne segue che se sceglieremo le funzioni π, χ in modo che sia

$$\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]_{\beta=0}-\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]_{\alpha=0\,\beta=0}=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\pi(x, y, \alpha)$$

$$\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]_{\alpha=0}=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\chi(x, y, \beta)$$

avremo

$$\frac{\partial^2\bar{f}^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{f}^{(1)}}{\partial y^2}=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

e infine

(21) $$\frac{\partial^2\bar{f}^{(1)}}{\partial t^2}-a^2\Delta_2\bar{f}^{(1)}=\mathrm{A}\,.$$

Indichiamo allora con Φ una qualunque soluzione comune delle due equazioni

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-a^2\Delta_2\Phi=0 \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$

cioè una funzione di x, y, z, t armonica rispetto alle variabili x, y e contenente z, t soltanto nelle combinazioni in $at+z$, $at-z$: e posto

$$f^{(1)}=\bar{f}^{(1)}+\Phi$$

determiniamo $f^{(2)}$ mediante le relazioni

(22) $$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial y}=\xi-\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} \qquad -\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}=\eta-\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}$$

ciò che evidentemente si può fare essendo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi-\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta-\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}\right)=0\,.$$

Sostituendo nelle equazioni del sistema (20) avremo allora

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial t^2}-a^2\Delta_2 f^{(1)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial t^2}-a^2\Delta^2 f^{(1)}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}$$

e quindi anche per la (21)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial z^2}-\mathrm{B}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x^2}-c^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial z^2}-\mathrm{B}\right)=0\,.$$

Sempre soddisfacendo alle condizioni (22) potremo dunque scegliere $f^{(2)}$ in modo che sia

$$\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial z^2} = \mathrm{B}.$$

Dopo ciò le funzioni $f^{(1)}, f^{(2)}$ soddisfaranno a tutte le condizioni volute.

11. — Servendoci di questo risultato, coll'aiuto di una nota formola del Beltrami che dà un'estensione della formola di Kirchhoff, potremo facilmente giungere al nostro scopo.

La formola cui accenniamo è la seguente. Sia $\psi(x\,y\,z\,t)$ una qualunque soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \psi = \Psi$$

ove Ψ è una funzione di x, y, z, t che supporremo finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde, quantunque ciò non sia strettamente necessario per quanto segue.

Dando al solito alle variabili x, y, z il significato di coordinate cartesiane ortogonali di un punto dello spazio, e indicando con σ una qualunque superficie chiusa avvolgente il punto (x, y, z), con n la normale a tale superficie in un suo punto qualunque volta verso l'interno della superficie stessa, con S il volume racchiuso da σ, con u, v, w le coordinate di un punto qualunque dello spazio nel sistema cartesiano che si deduce dal primitivo portandone con una traslazione l'origine nel punto $(x\,y\,z)$, posto

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

avremo

$$(23) \quad \psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left\{ \frac{d}{dn} \frac{\psi\left(x+u, y+v, z+w, t - \frac{r}{a}\right)}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} \psi\left(x+u, y+v, z+w, t - \frac{r}{a}\right) \right\} d\sigma + \frac{1}{4\pi a^2} \int_S \frac{1}{r} \Psi\left(x+u, y+v, z+w, t - \frac{r}{a}\right) dS$$

ove, come si è soliti di fare anche scrivendo la formola di Kirchhoff, si è posto

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos nu \frac{\partial}{\partial u} + \cos nv \frac{\partial}{\partial v} + \cos nw \frac{\partial}{\partial w}$$

$$\frac{d}{dn} = \frac{\partial r}{dn} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Oltre che di questa formola noi ci serviremo anche di un'altra che da essa si deduce con una semplice trasformazione.

Sia ora $\psi(x, y, z, t)$ una qualunque soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \Psi(x, y, z, t).$$

Se poniamo

$$(24) \qquad x = \frac{c}{a} \bar{x} \qquad y = \frac{c}{a} \bar{y} \qquad z = \bar{z},$$

evidentemente la funzione

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, t) = \psi\left(\frac{c}{a} \bar{x}, \frac{c}{a} \bar{y}, \bar{z}, t\right)$$

soddisferà all'equazione

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} - a^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} - a^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{z}^2} = \Psi\left(\frac{c}{a} \bar{x}, \frac{c}{a} \bar{y}, \bar{z}, t\right)$$

e potremo quindi applicarle la formola (23).

Si vede allora subito che se indichiamo con $d\bar{\sigma}, d\bar{S}$ i differenziali dell'area $\bar{\sigma}$ e del volume $\bar{S}$ che corrispondono nell'affinità Ω definita dalle formole (24) all'area σ e al volume S, avremo

$$(25) \quad \psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\bar\sigma} \left\{ \frac{d}{d\bar{n}} \frac{\psi\left(x+u, y+v, z+w, t - \frac{\bar{r}}{a}\right)}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}} \left(x+u, y+v, z+w, t - \frac{\bar{r}}{a}\right) \right\} d\bar{\sigma} + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\bar S} \frac{1}{\bar{r}} \Psi\left(x+u, y+v, z+w, t - \frac{\bar{r}}{a}\right) d\bar{S}$$

ove

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}(u^2 + v^2) + w^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}} = \frac{\frac{c}{a}\cos n u}{\sqrt{\cos^2 n u + \cos^2 n v + \frac{a^2}{c^2}\cos^2 n w}} \frac{\partial}{\partial u} +$$

$$+ \frac{\frac{c}{a}\cos n v}{\sqrt{\cos^2 n u + \cos^2 n v + \frac{a^2}{c^2}\cos^2 n w}} \frac{\partial}{\partial v} +$$

$$+ \frac{\frac{a}{c}\cos n w}{\sqrt{\cos^2 n u + \cos^2 n v + \frac{a^2}{c^2}\cos^2 n w}} \frac{\partial}{\partial w} \quad [1]$$

$$\frac{d}{d\bar{n}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{n}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} .$$

---

[1]) Supponiamo che la superficie σ e quindi anche la superficie $\bar{\sigma}$ siano riferite a un sistema di coordinate curvilinee α, β e poniamo

$$u = \frac{c}{a}\,\bar{u} \ , \quad v = \frac{c}{a}\,\bar{v} \ , \quad w = \bar{w} .$$

I coseni di direzione della normale interna $\bar{n}$ a $\bar{\sigma}$ dovendo risultare proporzionali ai maggiori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \beta} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \beta} \end{matrix} \right\|$$

che è identica all'altra

$$\left\| \begin{matrix} \frac{a}{c}\frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{a}{c}\frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\ \frac{a}{c}\frac{\partial u}{\partial \beta} & \frac{a}{c}\frac{\partial v}{\partial \beta} & \frac{\partial w}{\partial \beta} \end{matrix} \right\|$$

12. — Premesso tutto questo, veniamo a determinare la cercata espressione di un qualunque integrale regolare ξ, η, del sistema (20) in funzione dei valori iniziali $\xi_0, \eta_0, \Xi_0, H_0$ di ξ, η e delle loro derivate rispetto al tempo. Per procedere più speditamente limiteremo

---

avremo evidentemente

$$\cos \bar{n}\bar{u} = \frac{\cos nu}{\sqrt{\cos^2 nu + \cos^2 nv + \frac{a^2}{c^2}\cos^2 nw}}$$

$$\cos \bar{n}\bar{v} = \frac{\cos nv}{\sqrt{\cos^2 nu + \cos^2 nv + \frac{a^2}{c^2}\cos^2 nw}}$$

$$\cos \bar{n}\bar{w} = \frac{\frac{a}{c}\cos nw}{\sqrt{\cos^2 nu + \cos^2 nv + \frac{a^2}{c^2}\cos^2 nw}} .$$

Siccome d'altra parte

$$\frac{\partial}{\partial \bar{u}} = \frac{c}{a}\frac{\partial}{\partial u} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{v}} = \frac{c}{a}\frac{\partial}{\partial v} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial}{\partial w}$$

risulta evidente che posto

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}} = \cos \bar{n}\bar{u}\,\frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \cos \bar{n}\bar{v}\,\frac{\partial}{\partial \bar{v}} + \cos \bar{n}\bar{w}\,\frac{\partial}{\partial \bar{w}} ,$$

sarà

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}} = \frac{\frac{c}{a}\cos nu}{\sqrt{\cos^2 nu + \cos^2 nv + \frac{a^2}{c^2}\cos^2 nw}} \frac{\partial}{\partial u} +$$

$$+ \frac{\frac{c}{a}\cos nv}{\sqrt{\cos^2 nu + \cos^2 nv + \frac{a^2}{c^2}\cos^2 nw}} \frac{\partial}{\partial v} +$$

$$+ \frac{\frac{a}{c}\cos nw}{\sqrt{\cos^2 nu + \cos^2 nv + \frac{a^2}{c^2}\cos^2 nw}} \frac{\partial}{\partial w} .$$

la nostra ricerca al caso che sia

$$t \geq t_0 \text{ [1]}.$$

Di più supporremo dapprima che le due funzioni ξ_0, η_0 siano identicamente nulle, cioè che le condizioni iniziali dell'integrale da determinare siano le seguenti:

$$(\xi)_{t=t_0} = (\eta)_{t=t_0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \Xi_0 \qquad \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \mathrm{H}_0 . \tag{26}$$

---

[1]) Volendo trattare l'altro caso

$$t < t_0$$

basterebbe osservare che se $\xi(x, y, z, t-t_0)$, $\eta(x, y, z, t-t_0)$ è una soluzione del sistema

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi(x,y,z,t-t_0) = a^2\Delta_2\xi(x,y,z,t-t_0) + \\ &\quad + (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}(x,y,z,t-t_0) - \frac{\partial\xi}{\partial y}(x,y,z,t-t_0)\right] + \mathrm{X}(x,y,z,t-t_0) \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^2}\eta(x,y,z,t-t_0) = a^2\Delta_2\eta(x,y,z,t-t_0) - \\ &\quad - (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}(x,y,z,t-t_0) - \frac{\partial\xi}{\partial y}(x,y,z,t-t_0)\right] + \mathrm{Y}(x,y,z,t-t_0), \end{aligned}\right.$$

ponendo

$$t^* - t_0 = -(t - t_0)$$

$$\xi^*(x,y,z,t^*-t_0) = \xi(x,y,z,t-t_0)$$

$$\eta^*(x,y,z,t^*-t_0) = \eta(x,y,z,t-t_0)$$

si ottiene una soluzione del sistema

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}\xi^*(x,y,z,t^*-t_0) = a^2\Delta_2\xi^*(x,y,z,t^*-t_0) + \\ &\quad + (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\eta^*(x,y,z,t^*-t_0) - \frac{\partial}{\partial y}\xi^*(x,y,z,t^*-t_0)\right] + \mathrm{X}(x,y,z,t_0-t^*) \\ &\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}\eta^*(x,y,z,t^*-t_0) = a^2\Delta_2\eta^*(x,y,z,t^*-t_0) - \\ &\quad - (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\eta^*(x,y,z,t^*-t_0) - \frac{\partial}{\partial y}\xi^*(x,y,z,t^*-t_0)\right] + \mathrm{Y}(x,y,z,t_0-t^*). \end{aligned}\right.$$

È evidente che le quattro funzioni

$$\xi^{(1)},\ \eta^{(1)},\ \xi^{(2)} = \xi - \xi^{(1)},\ \eta^{(2)} = \eta - \eta^{(1)}$$

considerate in principio al § 10 soddisfano rispettivamente alle equazioni

$$\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial t^2} = a^2\,\Delta_2\,\xi^{(1)} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\eta^{(1)}}{\partial t^2} = a^2\,\Delta_2\,\eta^{(1)} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial z^2} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2\eta^{(2)}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\eta^{(2)}}{\partial x^2} + c^2\frac{\partial^2\eta^{(2)}}{\partial y^2} + a^2\frac{\partial^2\eta^{(2)}}{\partial z^2} - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}.$$

Avremo allora per le formole (23) (25)

$$\begin{aligned} \xi(x,y,z,t) &= \xi^{(1)}(x,y,z,t) + \xi^{(2)}(x\,y\,z\,t) = \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma^{(1)}}\left\{\frac{d}{dn^{(1)}}\frac{1}{r}\,\xi^{(1)}\left(x+u,y+v,z+w,t-\frac{r}{a}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n^{(1)}}\xi^{(1)}\left(x+u,y+v,z+w,t-\frac{r}{a}\right)\right\}d\sigma^{(1)} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2}\int_{\mathrm{S}^{(1)}}\frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u}\left(x+u,y+v,z+w,t-\frac{r}{a}\right)d\mathrm{S}^{(1)} + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma^{(2)}}\left\{\frac{d}{d\bar{n}^{(2)}}\frac{1}{\bar{r}}\,\xi^{(2)}\left(x+u,y+v,z+w,t-\frac{\bar{r}}{a}\right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{n}^{(2)}}\xi^{(2)}\left(x+u,y+v,z+w,t-\frac{\bar{r}}{a}\right)\right\}d\bar{\sigma}^{(2)} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2}\int_{\mathrm{S}^{(2)}}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v}\left(x+u,y+v,z+w,t-\frac{\bar{r}}{a}\right)d\bar{\mathrm{S}}^{(2)} \end{aligned} \tag{27_1}$$

$$(27_2)\qquad \eta(x,y,z,t)=\eta^{(1)}(x,y,z,t)+\eta^{(2)}(x,y,z,t)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma^{(1)}}\left\{\frac{d}{dn^{(1)}}\frac{1}{r}\eta^{(1)}\left(x+u,y+v,z+w,t-\frac{r}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n^{(1)}}\eta^{(1)}\left(x+u,\,y+v,\,z+w,\,t-\frac{r}{a}\right)\right\}d\sigma^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(1)}}\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial v}\left(x+u,y+v,z+w,t-\frac{r}{a}\right)dS^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma^{(2)}}\left\{\frac{d}{d\bar{n}^{(2)}}\frac{1}{\bar{r}}\eta^{(2)}\left(x+u,y+v,z+w,t-\frac{\bar{r}}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{n}^{(2)}}\eta^{(2)}\left(x+u,\,y+v,\,z+w,\,t-\frac{\bar{r}}{a}\right)\right\}d\bar{\sigma}^{(2)}-$$

$$-\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(2)}}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial B}{\partial u}\left(x+u,y+v,z+w,t-\frac{\bar{r}}{a}\right)d\bar{S}^{(2)}$$

ove le derivate $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}$ sono da eseguire senza tener conto della dipendenza di $r, \bar{r}$ dalle variabili u, v, w e gl'indici $^{(1)}\,^{(2)}$ posti alle lettere $\sigma, S, n, \bar{\sigma}, \bar{S}, \bar{n}$ non cambiano il significato precedentemente loro dato, ma hanno lo scopo di porre in evidenza che gli enti geometrici da esse rappresentati riferiti alle funzioni $\xi^{(1)}, \eta^{(1)}$ si potranno in generale supporre diversi dagli enti corrispondenti riferiti alle funzioni $\xi^{(2)}, \eta^{(2)}$.

Nel seguito indicheremo in generale con $\sigma_\tau^{(1)}$ la sfera di centro (x, y, z) e di raggio $a\tau$ e con $S_\tau^{(1)}$ lo spazio da essa racchiuso: con $\sigma_\tau^{(2)}$ l'elissoide di centro (x, y, z) e di equazione

$$\bar{r}^2=\frac{a^2}{c^2}u^2+\frac{a^2}{c^2}v^2+w^2=a^2\tau^2$$

e con $S_\tau^{(2)}$ lo spazio da esso racchiuso; infine con $\bar{\sigma}_\tau^{(2)}$ è $\bar{S}_\tau^{(2)}$ la sfera e il volume racchiuso dalla sfera corrispondente all'elissoide $\sigma_\tau^{(2)}$ nell'affinità Ω definita dalle formole (24).

Supponiamo allora che nelle (27) $\sigma^{(1)}$ coincida con $\sigma_{t-t_0}^{(1)}$ e $\sigma^{(2)}$ con $\sigma_{t-t_0}^{(2)}$: in tal caso sopra $\sigma^{(1)}$ sarà

$$t-\frac{r}{a}=t_0$$

e sopra $\sigma^{(2)}$

$$t-\frac{\bar{r}}{a}=t_0.$$

Di più dalle condizioni iniziali (26) segue che potremo scegliere

$$(\xi^{(1)})_{t=t_0}=(\eta^{(1)})_{t=t_0}=(\xi^{(2)})_{t=t_0}=(\eta^{(2)})_{t=t_0}=0\ ^{1}).$$

Se dunque poniamo

$$\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0}=\Xi_0^{(1)}\qquad\left(\frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial t}\right)_{t=t_0}=\Xi_0^{(2)}$$

$$\left(\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0}=H_0^{(1)}\qquad\left(\frac{\partial^2\eta^{(2)}}{\partial t}\right)_{t=t_0}=H_0^{(2)},$$

---

[1]) Infatti se $(\xi)_{t=t_0}=(\eta)_{t=t_0}=0$ avremo pure

$$\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right]_{t=t_0}=0$$

e quindi anche, mantenendo le notazioni del § 10

$$\left[\frac{\partial^2\bar{f}^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{f}^{(1)}}{\partial y^2}\right]_{t=t_0}=0.$$

D'altra parte la funzione Φ per $t=t_0$ è soggetta alla sola condizione

$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right]_{t=t_0}=0.$$

Potremo dunque sceglierla in modo che si abbia

$$(f^{(1)})_{t=t_0}=(\bar{f}^{(1)}+\Phi)_{t=t_0}=0.$$

Evidentemente avremo allora

$$\xi^{(1)}=\eta^{(1)}=0$$

e quindi anche

$$\xi^{(2)}=\eta^{(2)}=0.$$

siccome, valendo le relazioni

$$\xi = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} \qquad \eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)},$$

risulta evidente che sarà pure

$$\Xi_0 = \Xi_0^{(1)} + \Xi_0^{(2)}$$

$$\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}_0^{(1)} + \mathrm{H}_0^{(2)},$$

avremo

$$\xi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)} \int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \Xi_0^{(1)}\, d\sigma^{(1)}_{t-t_0} + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathrm{S}^{(1)}_{t-t_0}} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u}\left(t-\frac{r}{a}\right) d\,\mathrm{S}^{(1)}_{t-t_0} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)} \int_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} (\Xi_0 - \Xi_0^{(2)})\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathrm{S}^{(2)}_{t-t_0}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right) d\bar{\mathrm{S}}^{(2)}$$

$$\eta(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)} \int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \mathrm{H}_0^{(1)}\, d\sigma^{(1)}_{t-t_0} + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathrm{S}^{(1)}_{t-t_0}} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v}\left(t-\frac{r}{a}\right) d\,\mathrm{S}^{(1)}_{t-t_0} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)} \int_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} (\mathrm{H}_0 - \mathrm{H}_0^{(2)})\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} - \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathrm{S}^{(2)}_{t-t_0}} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right) d\bar{\mathrm{S}}^{(2)}.$$

D'altra parte si ha

$$\Xi_0^{(1)} = \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} \qquad \Xi_0^{(2)} = \left(\frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \Xi_0 - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0}$$

$$\mathrm{H}_0^{(1)} = \left(\frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} \qquad \mathrm{H}_0^{(2)} = \left(\frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \mathrm{H}_0 - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0}.$$

Potremo quindi concludere che è

$$(27)' \left\{ \begin{aligned} \xi(x,y,z,t) &= \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)} \int_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} \Xi_0\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} d\sigma^{(1)}_{t-t_0} - \int_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathrm{S}^{(1)}_{t-t_0}} \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u}\left(t-\frac{r}{a}\right) d\,\mathrm{S}^{(1)}_{t-t_0} + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathrm{S}^{(2)}_{t-t_0}} \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial v}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right) d\bar{\mathrm{S}}^{(1)}_{t-t_0} \\ \eta(x,y,z,t) &= \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)} \int_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} \mathrm{H}_0\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} d\sigma^{(1)}_{t-t_0} - \int_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathrm{S}^{(1)}_{t-t_0}} \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v}\left(t-\frac{r}{a}\right) d\,\mathrm{S}^{(1)}_{t-t_0} - \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathrm{S}^{(2)}_{t-t_0}} \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right) d\bar{\mathrm{S}}^{(2)}_{t-t_0}. \end{aligned} \right.$$

Cerchiamo allora di trasformare l'espressione

$$\int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} d\sigma^{(1)}_{t-t_0} - \int_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0}$$

in modo da porre in evidenza che almeno le sue derivate prime rispetto ad x od y risultano note appena assegnate le funzioni Ξ_0, H_0.

Posto per semplicità di scrittura

$$\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \mathrm{F}(x,y,z) \qquad \delta^2\mathrm{F} = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2},$$

essendo, se s'indica al solito con φ la longitudine nel sistema di coordinate polari di origine (x,y,z), asse u e piano polare uw, essendo

$$d\sigma^{(1)}_{t-t_0} = a\,(t-t_0)\,d\varphi\,dw\,,$$

per una ben nota formola di Green potremo scrivere

$$\int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \mathrm{F}\,d\sigma^{(1)}_{t-t_0} = a\,(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1}{\pi}\int_{c^{(1)}_w}\left(\mathrm{F}\,\frac{\partial}{\partial p^{(1)}}\log\frac{1}{\rho} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p^{(1)}}\log\frac{1}{\rho}\right) dc^{(1)}_w - \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{C}^{(1)}_w} \delta_2 \mathrm{F}\log\frac{1}{\rho}\,d\mathrm{C}^{(1)}_w\right]$$

ove $c^{(1)}_w$ è la circonferenza di raggio $\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}$ sezione della sfera $\sigma^{(1)}_{t-t_0}$ col piano $w=\text{cost.}$ passante pel punto $(x, y, z+w)$, $\mathrm{C}^{(1)}_w$ il cerchio da essa racchiuso, $p^{(1)}$ la normale interna a $c^{(1)}_w$, ρ la distanza tra il punto di $c^{(1)}_u$ che corrisponde al valore φ della longitudine e il punto mobile su $c^{(1)}_w$ o in $\mathrm{C}^{(1)}_w$ in cui sono calcolati i valori di $\mathrm{F}, \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial p^{(1)}}, \delta_2\mathrm{F}$. La formola ora scritta si può porre anche nella forma

$$\int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \mathrm{F}\,d\sigma^{(1)}_{t-t_0} = -\frac{a(t-t_0)}{\pi}\int_{-a}^{a} dw \int_{\mathrm{C}^{(1)}_w} \delta_2\mathrm{F}\left(\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{\rho}\,d\varphi\right) d\,\mathrm{C}^{(1)}_w +$$

$$+\frac{a\,(t-t_0)}{\pi}\int_{-a}^{a} dw \int_{c^{(1)}_u} dc^{(1)}_w \left\{\mathrm{F}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial p^{(1)}}\log\frac{1}{\rho}\,d\varphi\right) - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p^{(1)}}\left(\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{\rho}\,d\varphi\right)\right\}.$$

Ora dalla teoria del potenziale logaritmico si deduce subito che

$$\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{\rho}\,d\varphi = 2\,\pi\log\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}}\,.$$

D'altra parte per una nota formola di Gauss si ha che

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial p^{(1)}}\log\frac{1}{\rho}\,d\varphi = \pi\,\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}}\,.$$

Sarà dunque

$$\int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \mathrm{F}\,d\sigma^{(1)}_{t-t_0} = -\,2a\,(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int_{\mathrm{C}^{(1)}_w}\delta_2\mathrm{F}\log\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}}\,d\mathrm{C}^{(1)}_w -$$

$$-\,a\,(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int_{c^{(1)}_w} dc^{(1)}_w \left\{2\,\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p^{(1)}}\log\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}} - \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}}\right\}$$

e poichè per una nota formola

$$\int_{c^{(1)}_w}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p^{(1)}}\,dc^{(1)}_w = -\int_{\mathrm{C}^{(1)}_w}\delta_2\mathrm{F}\,d\,\mathrm{C}^{(1)}_w$$

avremo infine

$$\int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \mathrm{F}\,d\sigma^{(1)}_{t-t_0} = -\,a\,(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int_{\mathrm{C}^{(1)}_w}\delta_2\mathrm{F}\log\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}}\,d\mathrm{C}^{(1)}_w -$$

$$-\,a\,(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int_{c^{(1)}_w} dc^{(1)}_w \left\{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p^{(1)}}\log\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}} - \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}}\right\}.$$

In modo del tutto analogo, essendo

$$d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} = a\,(t-t_0)\,d\varphi\,dw$$

si trova

$$\int_{\sigma^{(2)}_{t-t}} \mathrm{F}\,d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} = -\,a\,(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int_{\mathrm{C}^{(2)}_w}\delta_2\mathrm{F}\log\frac{1}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2(t-t_0)-w^2}}\,d\,\mathrm{C}^{(2)}_u -$$

$$-\,a\,(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int_{c^{(2)}_w} dc^{(2)}_w \left\{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial p^{(2)}}\log\frac{1}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}} - \frac{\mathrm{F}}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}}\right\}$$

ove $c^{(2)}_w$ è la circonferenza $\left(\text{di raggio } \dfrac{c}{a}\sqrt{a^2(t-t_0)^2-w^2}\right)$ sezione dell'elissoide $\sigma^{(2)}_{t-t_0}$ col piano $w = \text{cost.}$ passante pel punto $(x, y, z+w)$, $C^{(2)}_w$ è il cerchio da essa racchiuso, $p^{(2)}$ è la normale interna a $c^{(2)}_w$.

Rappresentando allora con C_w l'area compresa tra le due circonferenze $c^{(1)}_w, c^{(2)}_w$, con c_w il contorno di tale area, e con p la normale interna a tale contorno, avremo

$$\int\limits_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} F\, d\sigma^{(1)}_{t-t_0} - \int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} F\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} = -a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C^{(1)}_w} \delta_2 F \log \frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2 - w^2}}\, dC^{(1)}_w +$$

$$+ a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C^{(2)}_w} \delta_2 F \log \frac{1}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2(t-t_0)^2 - w^2}}\, dC^{(2)}_w \mp$$

$$\mp a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{c_w} dc_w \left\{ \frac{\partial F}{\partial p} \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} - F \frac{\partial}{\partial p} \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \right\}$$

ove vale il segno superiore o l'inferiore secondochè $a > c$ oppure $a < c$, cioè secondochè il mezzo uniassico considerato è positivo oppure negativo: e poichè per una nota formola di Green

$$\int\limits_{c_w} dc_w \left\{ \frac{\partial F}{\partial p} \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} - F \frac{\partial}{\partial p} \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \right\} = -\int\limits_{C_w} \delta_2 F \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dC_w$$

avremo infine

$$\int\limits_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} F\, d\sigma^{(1)}_{t-t_0} - \int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} F\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} = -a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C^{(1)}_w} \delta_2 F \log \frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2 - w^2}}\, dC^{(1)}_w +$$

$$+ a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C^{(2)}_w} \delta_2 F \log \frac{1}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2(t-t_0)^2 - w^2}}\, dC^{(2)}_w \pm$$

$$\pm a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C_w} \delta_2 F \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dC_w .$$

Questa è appunto la formola cui volevamo arrivare, perchè

$$\delta_2 F = \frac{\partial \Xi_0}{\partial x} + \frac{\partial H_0}{\partial y} .$$

Noteremo esplicitamente che ad essa siamo giunti senza servirci di alcuna delle proprietà speciali di F, onde essa vale per ogni funzione che soddisfi alle condizioni di regolarità cui soddisfa $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=t_0}$.

Dalla formola ora trovata si deduce subito

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int\limits_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} F\, d\sigma^{(1)}_{t-t_0} - \int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} F\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0}\right] = -a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C^{(1)}_w} \frac{\partial}{\partial u}\left[\delta_2 F \log \frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)^2 - w^2}}\right] dC^{(1)}_w +$$

$$+ a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C^{(2)}_w} \frac{\partial}{\partial u}\left[\delta_2 F \log \frac{1}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2(t-t_0)^2 - w^2}}\right] dC^{(2)}_w \pm$$

$$\pm a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C_w} \frac{\partial}{\partial u}\left[\delta_2 F \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right] dC_w \mp$$

$$\mp a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C_w} \delta_2 F \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dC_w =$$

$$= a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{c^{(1)}_w} \delta_2 F \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \cos p^{(1)} u\, dc^{(1)}_w -$$

$$- a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{c^{(1)}_w} \delta_2 F \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \cos p^{(2)} u\, dc^{(2)}_w \mp$$

$$\mp a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{c_w} \delta_2 F \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \cos p u\, dc_w \mp$$

$$\mp a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C_w} \delta_2 F \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dC_w =$$

$$= \mp a(t-t_0)\int_{-a}^{a} dw \int\limits_{C_w} \delta_2 F \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dC_u$$

cioè, indicando con S_{t-t_0} lo spazio compreso tra la sfera $\sigma^{(1)}_{t-t_0}$ e l'elissoide $\sigma^{(2)}_{t-t_0}$,

$$(28)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} F\, d\sigma^{(1)}_{t-t_0} - \int_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} F\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0}\right] = \mp a(t-t_0)\int_{S_{t-t_0}} \delta_2 F \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dS_{t-t_0}\,.$$

Analogamente si trova

$$(29)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} F\, d\sigma^{(1)}_{t-t_0} - \int_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} F\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0}\right] = \mp a(t-t_0)\int_{S_{t-t_0}} \delta_2 F \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dS_{t-t_0}\,.$$

13. — Prima di tornare a scrivere le formole (27)′ tenendo conto dei risultati cui ora siamo arrivati, osserveremo che, essendo

$$\frac{\partial B}{\partial y} = X - \frac{\partial A}{\partial x} \qquad -\frac{\partial B}{\partial x} = Y - \frac{\partial A}{\partial y}$$

avremo

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(1)}_{t-t_0}} \frac{\partial A}{\partial u}\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{dS^{(1)}_{t-t_0}}{r} + \frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(2)}_{t-t_0}} \frac{\partial B}{\partial v}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right)\frac{d\bar{S}^{(2)}_{t-t_0}}{\bar{r}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(2)}_{t-t_0}} X\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right)\frac{d\bar{S}^{(2)}_{t-t_0}}{\bar{r}} + \frac{1}{4\pi a^2}\left\{\int_{S^{(1)}_{t-t_0}} \frac{\partial A}{\partial u}\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{dS^{(1)}_{t-t_0}}{r} - \int_{S^{(2)}_{t-t_0}} \frac{\partial A}{\partial u}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right)\frac{d\bar{S}^{(2)}_{t-t_0}}{\bar{r}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(2)}_{t-t_0}} X\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right)\frac{d\bar{S}^{(2)}_{t-t_0}}{\bar{r}} + \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{S^{(1)}_{t-t_0}} A\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{dS^{(1)}_{t-t_0}}{r} - \int_{S^{(2)}_{t-t_0}} A\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right)\frac{d\bar{S}^{(2)}_{t-t_0}}{\bar{r}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{t-t'}\left\{\int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}} X(t')\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{\sigma^{(1)}_{t-t'}} A(t')\, d\sigma^{(1)}_{t-t'} - \int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}} A(t')\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'}\right]\right\}$$

e analogamente

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(1)}_{t-t_0}} \frac{\partial A}{\partial v}\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{dS^{(1)}_{t-t_0}}{r} - \frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(2)}_{t-t_0}} \frac{\partial B}{\partial u}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right)\frac{d\bar{S}^{(2)}_{t-t_0}}{\bar{r}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2}\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{t-t'}\left\{\int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}} Y(t')\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{\sigma^{(1)}_{t-t'}} A(t')\, d\sigma^{(1)}_{t-t'} - \int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}} A(t')\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'}\right]\right\}.$$

Applicando allora, come è lecito, alla funzione A le formole (28) (29), essendo evidentemente

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

otteniamo

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(1)}_{t-t_0}} \frac{\partial A}{\partial u}\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{dS^{(1)}_{t-t_0}}{r} + \frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(2)}_{t-t_0}} \frac{\partial B}{\partial v}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right)\frac{d\bar{S}^{(2)}_{t-t_0}}{\bar{r}} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt'\left\{\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}} X(t')\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'} \mp \frac{1}{4\pi a}\int_{S_{t-t'}}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{t'}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dS_{t-t'}\right\}$$

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(1)}_{t-t_0}} \frac{\partial A}{\partial v}\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{dS^{(1)}_{t-t_0}}{r} - \frac{1}{4\pi a^2}\int_{S^{(2)}_{t-t_0}} \frac{\partial B}{\partial u}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right)\frac{d\bar{S}^{(2)}_{t-t_0}}{\bar{r}} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt'\left\{\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}} Y(t')\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'} \mp \frac{1}{4\pi a}\int_{S_{t-t'}}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{t'}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dS_{t-t'}\right\}.$$

Dopo questo possiamo evidentemente scrivere le formole (27)′ nella forma

$$\Xi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)}\int_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} \Xi_0\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} \mp \frac{1}{4\pi a}\int_{S_{t-t_0}}\left(\frac{\partial \Xi_0}{\partial u}+\frac{\partial H_0}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dS_{t-t_0} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} dt'\left\{\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}} X(t')\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t} \mp \frac{1}{4\pi a}\int_{S_{t-t'}}\left(\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial Y}{\partial v}\right)_{t'}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, dS_{t-t'}\right\}$$

$$\eta(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)}\int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} \mathrm{H}_0\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} \mp \frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t_0}} \left(\frac{\partial \Xi_0}{\partial u}+\frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, d\mathrm{S}_{t-t_0}$$

$$+\int_{t_0}^{t} dt' \left\{ \frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t'}} \mathrm{Y}(t')\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'} \mp \frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t'}} \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}+\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial v}\right)_{t'}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, d\mathrm{S}_{t-t'}\right\}.$$

Da queste formole possiamo anche far sparire le derivate delle funzioni $\Xi_0, \mathrm{H}_0, \mathrm{X}, \mathrm{Y}$ osservando che ad es. è

$$\mp\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t_0}} \left(\frac{\partial \Xi_0}{\partial u}+\frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, d\mathrm{S}_{t-t_0} = \mp\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t_0}} \frac{\partial}{\partial u}\left\{\Xi_0 \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right\} d\mathrm{S}_{t-t_0} \pm$$

$$\pm\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t_0}} \Xi_0 \frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, d\mathrm{S}_{t-t_0} \mp \int\limits_{\mathrm{S}_{t-t_0}} \frac{\partial}{\partial v}\left\{\mathrm{H}_0 \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right\} d\mathrm{S}_{t-t_0} \pm$$

$$\pm\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t_0}} \mathrm{H}_0 \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, d\mathrm{S}_{t-t_0}$$

ed anche, poichè

$$-d\sigma^{(2)}_{t-t_0}\cos p^{(2)}u = \frac{u}{a(t-t_0)}\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0},$$

$$\mp\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t_0}} \left(\frac{\partial \Xi_0}{\partial u}+\frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, d\mathrm{S}_{t-t_0} = \frac{1}{a(t-t_0)}\int\limits_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \frac{\Xi_0 u+\mathrm{H}_0 v}{u^2+v^2}\, u\, d\sigma^{(1)}_{t-t_0} -$$

$$-\frac{1}{a(t-t_0)}\int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} \frac{\Xi_0 u+\mathrm{H}_0 v}{u^2+v^2}\, u\, d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} \pm$$

$$\pm\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t_0}} \left(\Xi_0 \frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} + \mathrm{H}_0\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) d\mathrm{S}_{t-t_0}.$$

Le formole considerate, posto

$$\chi = \log\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

prendono allora la forma seguente

$$\xi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)}\int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} \left\{\Xi_0 - \frac{\Xi_0 u+\mathrm{H}_0 v}{u^2+v^2}\, u\right\} d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)}\int\limits_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \frac{\Xi_0 u+\mathrm{H}_0 v}{u^2+v^2}\, u\, d\sigma^{(1)}_{t-t_0} \pm$$

$$\pm\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t_0}} \left\{\Xi_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + \mathrm{H}_0\frac{\partial^2 \chi}{\partial u\,\partial v}\right\} d\mathrm{S}_{t-t_0} +$$

$$+\int_{t_0}^{t} dt' \left[\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t'}} \left\{\mathrm{X} - \frac{\mathrm{X}u+\mathrm{X}v}{u^2+v^2}\, u\right\}_{t'} d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int\limits_{\sigma^{(1)}_{t-t'}} \left\{\frac{\mathrm{X}u+\mathrm{Y}v}{u^2+v^2}\, u\right\}_{t'} d\sigma^{(1)}_{t-t'} \pm \frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t'}} \left\{\mathrm{X}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + \mathrm{Y}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u\,\partial v}\right\}_{t'} d\mathrm{S}_{t-t'}\right]$$

$$\eta(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)}\int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t_0}} \left\{\mathrm{H}_0 - \frac{\Xi_0 u+\mathrm{H}_0 v}{u^2+v^2}\, v\right\} d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t_0} +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2(t-t_0)}\int\limits_{\sigma^{(1)}_{t-t_0}} \frac{\Xi_0 u+\mathrm{H}_0 v}{u^2+v^2}\, v\, d\sigma^{(1)}_{t-t_0} \pm$$

$$\pm\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t_0}} \left\{\Xi_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{H}\frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2}\right\} d\mathrm{S}_{t-t_0} +$$

$$+\int_{t_0}^{t} dt' \left[\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t'}} \left\{\mathrm{Y} - \frac{\mathrm{X}u+\mathrm{Y}v}{u^2+v^2}\, v\right\}_{t'} d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int\limits_{\sigma^{(1)}_{t-t'}} \left\{\frac{\mathrm{X}u+\mathrm{Y}v}{u^2+v^2}\, v\right\}_{t'} d\sigma^{(1)}_{t-t'} \pm \frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\mathrm{S}_{t-t'}} \left\{\mathrm{X}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{Y}\frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2}\right\}_{t'} d\mathrm{S}_{t-t'}\right].$$

Se poniamo in generale

$$\omega_x[\Phi(x,y,z,t),\Psi(x,y,z,t)]_{t'}=\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t'}}\left\{\Phi-\frac{\Phi u+\Psi v}{u^2+v^2}u\right\}_{t'}d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t}+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int\limits_{\sigma^{(1)}_{t-t'}}\left\{\frac{\Phi u+\Psi v}{u^2+v^2}u\right\}_{t'}d\sigma^{(1)}_{t-t'}\pm\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{S_{t-t'}}\left\{\Phi\frac{\partial^2\chi}{\partial u^2}+\Psi\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v}\right\}_{t'}dS_{t-t'}$$

$$\omega_y[\Phi(x,y,z,t),\Psi(x,y,z,t)]_{t'}=\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int\limits_{\sigma^{(2)}_{t-t'}}\left\{\Psi-\frac{\Phi u+\Psi v}{u^2+v^2}v\right\}_{t'}d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'}+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int\limits_{\sigma^{(1)}_{t-t'}}\left\{\frac{\Phi u+\Psi v}{u^2+v^2}v\right\}_{t'}d\sigma^{(1)}_{t-t'}\pm\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{S_{t-t'}}\left\{\Phi\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v}+\Psi\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}\right\}_{t'}dS_{t-t'}$$

ove valgono i segni superiori oppure gl'inferiori secondo che è $a>c$ oppure $a<c$, avremo dunque

$$\xi=\omega_x[\Xi_0,H_0]_{t_0}+\int_{t_0}^{t}\omega_x[X,Y]_{t'}\,dt'$$

$$\eta=\omega_y[\Xi_0,H_0]_{t_0}+\int_{t_0}^{t}\omega_y[X,Y]_{t'}\,dt'.$$

Abbiamo così perfettamente determinato per $t\geq t_0$ l'integrale ξ,η del sistema (20) che soddisfa alle condizioni iniziali (26).

Da questo risultato possiamo facilmente dedurre le formole che danno per $t\geq t_0$ l'integrale del nostro sistema che soddisfa alle più generali condizioni iniziali che sia permesso assegnare, cioè alle condizioni

$$(\xi)_{t=t_0}=\xi_0\qquad(\eta)_{t=t_0}=\eta_0\qquad\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)_{t=t_0}=\Xi_0\qquad\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{t=t_0}=H_0.$$

Intanto da quanto precede segue immediatamente che si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\omega_x[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}-a^2\Delta_2\left\{\omega_x[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}-$$

$$-(a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\omega_y[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}-\frac{\partial}{\partial y}\left\{\omega_x[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}\right]=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\omega_y[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}-a^2\Delta_2\left\{\omega_y[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}+$$

$$+(a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\omega_y[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}-\frac{\partial}{\partial y}\left\{\omega_x[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}\right]=0.$$

ed anche

$$\left\{\omega_x[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}_{t=t_0}=\left\{\omega_y[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}_{t=t_0}=0$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\omega_x[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}_{t=t_0}=\xi_0\qquad\left\{\frac{\partial}{\partial t}\omega_y[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}_{t=t_0}=\eta_0.$$

Per $t=t_0$ saranno dunque nulle anche tutte le derivate di $\omega_x[\xi_0,\eta_0]_{t_0}$, $\omega_y[\xi_0,\eta_0]_{t_0}$ rispetto ad x,y,z e quindi anche sarà

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\omega_x[\xi_0,\eta_0]_{t_0}\right\}_{t=t_0}=\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\omega_y[\xi,\eta_0]_{t_0}\right\}_{t=t_0}=0.$$

Dopo questo possiamo evidentemente concludere che ponendo

$$(30)\qquad\left\{\begin{aligned}\xi&=\omega_x[\Xi_0,H_0]_{t_0}+\frac{\partial}{\partial t}\omega_x[\xi_0,\eta_0]_{t_0}+\int_{t_0}^{t}dt'\,\omega_x[X,Y]_{t'}\\ \eta&=\omega_y[\Xi_0,H_0]_{t_0}+\frac{\partial}{\partial t}\omega_y[\xi_0,\eta_0]_{t_0}+\int_{t_0}^{t}dt'\,\omega_y[X,Y]_{t'}\end{aligned}\right.$$

avremo le formole cercate.

14. — Nelle formole (30) poniamo $a=c$. L'una o l'altra di esse determinerà allora l'integrale generale dell'equazione

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-a^2\Delta_2\zeta=Z$$

in funzione dei valori iniziali dell'integrale stesso e della sua derivata rispetto al tempo. Precisamente, posto in generale

$$\omega_z[\Phi(x,y,z,t)]_{t'} = \frac{1}{4\pi a^2(t-t')}\int_{\sigma^{(1)}_{t-t'}} \Phi(x,y,z,t')\,d\sigma^{(1)}_{t-t'}$$

sarà

$$\zeta = \omega_z[Z_0]_{t'} + \frac{\partial}{\partial t}\omega_z[\zeta_0]_{t'} + \int_{t_0}^{t} dt\,\omega_z[Z_0]_{t'}. \tag{31}$$

Questa formola evidentemente non è che una semplice conseguenza della formola del Beltrami da cui siamo partiti. Aggiungendola alle formole (30) otteniamo la cercata espressione dell'integrale generale del sistema (19) per i valori iniziali di ξ, η, ζ e delle loro derivate rispetto al tempo. Le formole trovate determinano in ogni punto interno ad R il valore di ξ, η, ζ per ogni valore del tempo $\geq t_0$ pel quale ambedue le superficie $\sigma^{(1)}_{t-t_0}$, $\sigma^{(2)}_{t-t_0}$ relative al punto considerato risultano interne ad R.

Per $X = Y = Z = 0$ le formole (30), (31) ci danno l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\xi - (a^2-c^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x} - \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\eta + (a^2-c^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x} - \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\zeta = 0 \end{cases}$$

che si può anche scrivere

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) - c^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right) - a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) + a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) - a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

e coincidono perfettamente colle formole (43) della memoria (G).

In tal caso sarà necessariamente

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) = a^2\Delta_2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

e quindi se tra le funzioni assegnate $\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0$ e $\Xi_0\,H_0\,Z_0$ passeranno le relazioni

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x} + \frac{\partial\eta_0}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_0}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\Xi_0}{\partial x} + \frac{\partial H_0}{\partial y} + \frac{\partial Z_0}{\partial z} = 0$$

avremo ad ogni istante

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0$$

e le formole (30), (31) ci daranno evidentemente in funzione dei valori di ξ, η, ζ e delle derivate di ξ, η, ζ rispetto al tempo per $t = t_0$ ogni integrale ξ, η, ζ del sistema di Lamé, relativo ai mezzi uniassici, che soddisfi alla condizione di trasversalità

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0.$$

Le formole (30) (31) ove sia posto $X = Y = Z = 0$ e le funzioni $\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0$ e $\Xi_0\,H_0\,Z_0$ siano legate dalle relazioni

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x} + \frac{\partial\eta_0}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_0}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\Xi_0}{\partial x} + \frac{\partial H_0}{\partial y} + \frac{\partial Z_0}{\partial z} = 0$$

sono dunque le formole da sostituirsi nel caso dei mezzi uniassici alle formole finali della memoria (K).

15. — Nelle formole (30) (31) poniamo ora $t_0 = -\infty$ e supponiamo che all'infinito le funzioni ξ_0, η_0, ζ_0 e Ξ_0, H_0, Z_0 si annullino.

Avremo allora

$$\xi=\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{4\pi a^2(t-t')}\int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}}\left\{X-\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}u\right\}_{t'}d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'}+$$

$$+\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{4\pi a^2(t-t')}\int_{\sigma^{(1)}_{t-t'}}\left\{\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}u\right\}_{t'}d\sigma^{(1)}_{t-t'}\pm\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{S_{t-t'}}\left\{X\frac{\partial^2\chi}{\partial u^2}+Y\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v}\right\}_{t'}dS_{t-t}$$

$$\eta=\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{4\pi a^2(t-t')}\int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}}\left\{Y-\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}v\right\}_{t'}d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'}+$$

$$+\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{4\pi a^2(t-t')}\int_{\sigma^{(1)}_{t-t'}}\left\{\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}v\right\}_{t'}d\sigma^{(1)}_{t-t'}\pm\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{S_{t-t'}}\left\{X\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v}+Y\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}\right\}dS_{t-t}$$

$$\zeta=\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{4\pi a^2(t-t')}\int_{\sigma^{(1)}_{t-t'}}Z_{t'}\,d\sigma^{(1)}_{t-t'}\,.$$

Ora essendo sopra $\sigma^{(2)}_{t-t'}$

$$\frac{\bar{r}}{a}=t-t'$$

si avrà, colle notazioni già introdotte al § 11

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{t-t'}\int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}}\left\{X-\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}u\right\}_{t'}d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'}=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{0}^{\infty}\frac{d\bar{r}}{\bar{r}}\int_{\bar{\sigma}^{(2)}_{\frac{\bar{r}}{a}}}\left\{X-\frac{X\bar{u}+Y\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}\bar{u}\right\}_{t-\frac{\bar{r}}{a}}d\bar{\sigma}^{(1)}_{\frac{\bar{r}}{a}}$$

e quindi anche

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{t-t'}\int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}}\left\{X-\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}u\right\}_{t'}d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t}=\frac{1}{4\pi c^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\bar{r}}\left\{X-\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}u\right\}_{t-\frac{\bar{r}}{a}}du\,dv\,dw:$$

allo stesso modo si trova

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{t-t'}\int_{\sigma^{(2)}_{t-t'}}\left\{Y-\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}v\right\}_{t'}d\bar{\sigma}^{(2)}_{t-t'}=\frac{1}{4\pi c^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\bar{r}}\left\{Y-\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}v\right\}_{t-\frac{\bar{r}}{a}}du\,dv\,dw\,.$$

Analogamente si ottiene

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{t-t'}\int_{\sigma^{(1)}_{t-t'}}\left\{\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}u\right\}_{t'}d\sigma^{(1)}_{t-t}=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r}\left\{\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}u\right\}_{t-\frac{r}{a}}du\,dv\,dw$$

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{t-t'}\int_{\sigma^{(1)}_{t-t'}}\left\{\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}v\right\}_{t'}d\sigma^{(1)}_{t-t'}=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r}\left\{\frac{Xu+Yv}{u^2+v^2}v\right\}_{t-\frac{r}{a}}du\,dv\,dw$$

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{t-t'}\int_{\sigma^{(1)}_{t-t'}}Z_{t'}\,d\sigma^{(1)}_{t-t'}=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r}Z_{t-\frac{r}{a}}\,du\,dv\,dw\,.$$

Infine scambiando nei due integrali

$$\pm\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{S_{t-t'}}\left\{X\frac{\partial^2\chi}{\partial u^2}+Y\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v}\right\}_{t'}dS_{t-t'}$$

$$\pm\frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_{S_{t-t'}}\left\{X\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v}+Y\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}\right\}_{t'}dS_{t-t'}$$

l'ordine delle integrazioni, si vede subito che sono rispettivamente eguali ai due

$$\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}du\,dv\,dw\int_{t-\frac{\bar{r}}{a}}^{t-\frac{r}{a}}\left\{X\frac{\partial^2\chi}{\partial u^2}+Y\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v}\right\}_{\tau}d\tau$$

$$\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}du\,dv\,dw\int_{t-\frac{\bar{r}}{a}}^{t-\frac{r}{a}}\left\{X\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v}+Y\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}\right\}_{\tau}d\tau\,.$$

Possiamo dunque concludere che nelle ipotesi fatte si ha

$$(31)\qquad \xi = \iiint_{-\infty}^{\infty} f_1[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]\, du\, dv\, dw \qquad \eta = \iiint_{-\infty}^{\infty} f_2[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]\, du\, dv\, dw$$

$$\zeta = \iiint_{-\infty}^{\infty} f_3[\mathrm{Z}]\, du\, dv\, dw$$

ove in generale, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ essendo tre funzioni qualunque del tempo, si è posto

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} f_1[\alpha(t), \beta(t)] &= \frac{1}{4\pi c^2 \bar{r}} \left\{ \alpha - \frac{\alpha u + \beta v}{u^2+v^2} u \right\}_{t-\frac{\bar{r}}{a}} + \frac{1}{4\pi a^2 r} \left\{ \frac{\alpha u + \beta v}{u^2+v^2} u \right\}_{t-\frac{r}{a}} + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi a} \int_{t-\frac{\bar{r}}{a}}^{t-\frac{r}{a}} \left\{ \alpha(\tau) \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + \beta(\tau) \frac{\partial^2 \chi}{\partial u\, \partial v} \right\} d\tau \\ f_2[\alpha(t), \beta(t)] &= \frac{1}{4\pi c^2 \bar{r}} \left\{ \beta - \frac{\alpha u + \beta v}{u^2+v^2} v \right\}_{t-\frac{\bar{r}}{a}} + \frac{1}{4\pi a^2 r} \left\{ \frac{\alpha u + \beta v}{u^2+v^2} v \right\}_{t-\frac{r}{a}} + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi a} \int_{t-\frac{\bar{r}}{a}}^{t-\frac{r}{a}} \left\{ \alpha(\tau) \frac{\partial^2 \chi}{\partial u\, \partial v} + \beta(\tau) \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} \right\} d\tau \\ f_3[\gamma(t)] &= \frac{1}{4\pi a^2 r} \gamma\left(t - \frac{r}{a}\right). \end{aligned} \right.$$

Le formole ora ottenute coincidono colle formole (31) della memoria (G).

Qualunque sia la dipendenza di α, β, γ dal tempo, le tre funzioni

$$f_1[\alpha, \beta] \qquad f_2[\alpha, \beta] \qquad f_3[\gamma]$$

danno sempre un integrale del sistema (19). Ciò resta provato con

tutto rigore se si osserva che si può scrivere

$$\begin{aligned} f_1[\alpha, \beta] &= \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \int_{-\infty}^{w} dw' \frac{u}{u^2+v^2} \alpha\left(t - \frac{1}{a}\sqrt{u^2+v^2+w'^2}\right) \frac{w'}{\sqrt{u^2+v^2+w'^2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \int_{-\infty}^{w} dw' \frac{u}{u^2+v^2} \beta\left(t - \frac{1}{a}\sqrt{u^2+v^2+w'^2}\right) \frac{w'}{\sqrt{u^2+v^2+w'^2}} \right\} - \\ &- \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{v}{u^2+v^2} \int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}} \alpha(\tau)\, d\tau \right\} + \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{v}{u^2+v^2} \int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}} \beta(\tau)\, d\tau \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2[\alpha, \beta] &= \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \int_{-\infty}^{w} dw' \frac{v}{u^2+v^2} \alpha\left(t - \frac{1}{a}\sqrt{u^2+v^2+w'^2}\right) \frac{w'}{\sqrt{u^2+v^2+w'^2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \int_{-\infty}^{w} dw' \frac{v}{u^2+v^2} \beta\left(t - \frac{1}{a}\sqrt{u^2+v^2+w'^2}\right) \frac{w'}{\sqrt{u^2+v^2+w'^2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{u}{u^2+v^2} \int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}} \alpha(\tau)\, d\tau \right\} - \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{u}{u^2+v^2} \int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}} \beta(\tau)\, d\tau \right\} \end{aligned}$$

e si confrontano le espressioni che in queste formole compaiono sotto il segno integrale, colle espressioni che ci danno gli integrali di Lamé, tenendo presente che tali integrali soddisfano alla condizione di trasversalità.

Osserveremo subito che scambiando u con v, α con β, $f_1[\alpha, \beta]$ si cambia in $f_2[\alpha, \beta]$, ed anche che, se conformemente alle notazioni già introdotte si pone

$$\bar{f}_3[\alpha] = \frac{1}{4\pi a^2 \bar{r}} \alpha\left(t - \frac{\bar{r}}{a}\right),$$

si ha identicamente:

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} & f_1[\alpha, 0] + f_2[0, \alpha] = \frac{\alpha\left(t - \frac{\bar{r}}{a}\right)}{4\pi c^2 \bar{r}} + \frac{\alpha\left(t - \frac{r}{a}\right)}{4\pi a^2 r} = \frac{a^2}{c^2} \bar{f}_3[\alpha] + f_3[\alpha] \\ & f_1[0, \beta] = f_2[\beta, 0]; \end{aligned} \right.$$

$$(34)\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u}f_1[\alpha,\beta]+\dfrac{\partial}{\partial v}f_2[\alpha,\beta]=\dfrac{1}{4\pi a^2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\alpha\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}+\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\beta\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\right\}=\\ \qquad\qquad\qquad =\dfrac{\partial}{\partial u}f_3[\alpha]+\dfrac{\partial}{\partial v}f_3[\beta]\,,\\ \dfrac{\partial}{\partial v}f_1[\alpha,\beta]-\dfrac{\partial}{\partial u}f_2[\alpha,\beta]=\dfrac{1}{4\pi c^2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\alpha\left(t-\dfrac{\bar r}{a}\right)}{\bar r}-\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\beta\left(t-\dfrac{\bar r}{a}\right)}{\bar r}\right\}=\\ \qquad\qquad\qquad =\dfrac{a^2}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial v}\bar f_3[\alpha]-\dfrac{a^2}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial u}\bar f_3[\beta].\end{cases}$$

Osserveremo inoltre che si ha

$$(35)\begin{cases}f_1[\alpha,\beta]=\dfrac{\alpha\left(t-\dfrac{\bar r}{a}\right)}{4\pi c^2\bar r}+\dfrac{1}{4\pi a}\dfrac{\partial}{\partial u}\displaystyle\int_{t-\frac{\bar r}{a}}^{t-\frac{r}{a}}\left\{\alpha(\tau)\dfrac{\partial\chi}{\partial u}+\beta(\tau)\dfrac{\partial\chi}{\partial v}\right\}d\tau\\ f_2[\alpha,\beta]=\dfrac{\beta\left(t-\dfrac{\bar r}{a}\right)}{4\pi c^2\bar r}+\dfrac{1}{4\pi a}\dfrac{\partial}{\partial v}\displaystyle\int_{t-\frac{\bar r}{a}}^{t-\frac{r}{a}}\left\{\alpha(\tau)\dfrac{\partial\chi}{\partial u}+\beta(\tau)\dfrac{\partial\chi}{\partial v}\right\}d\tau\end{cases}$$

ed anche

$$(36)\begin{cases}f_1[\alpha,\beta]=\dfrac{\alpha\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{4\pi r a^2}-\dfrac{1}{4\pi a}\dfrac{\partial}{\partial v}\displaystyle\int_{t-\frac{\bar r}{a}}^{t-\frac{r}{a}}\left\{\alpha(\tau)\dfrac{\partial\chi}{\partial v}-\beta(\tau)\dfrac{\partial\chi}{\partial u}\right\}d\tau\\ f_2[\alpha,\beta]=\dfrac{\beta\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{4\pi r a^2}+\dfrac{1}{4\pi a}\dfrac{\partial}{\partial u}\displaystyle\int_{t-\frac{\bar r}{a}}^{t-\frac{r}{a}}\left\{\alpha(\tau)\dfrac{\partial\chi}{\partial v}-\beta(\tau)\dfrac{\partial\chi}{\partial u}\right\}d\tau.\end{cases}$$

Dall'une o dall'altre di queste formole si deduce immediatamente che se le funzioni α, β sono finite e continue insieme alle loro derivate $1^e, 2^e, \ldots (n+1)^e$, le due funzioni

$$f_1[\alpha,\beta] \qquad f_2[\alpha,\beta]$$

risultano ad ogni istante certamente finite e continue insieme alle loro derivate $1^e, 2^e, \ldots n^e$ in tutto lo spazio, eccettuato che nel punto $u = v = w = 0$.

Ciò appare evidente se si osserva che ad es. si ha

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\chi}{\partial u}\int_{t-\frac{\bar r}{a}}^{t-\frac{r}{a}}\alpha(\tau)\,d\tau=\frac{u}{r+\bar r}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\alpha(\bar\tau)$$

ove $\bar\tau$ è sempre compreso tra $t-\dfrac{r}{a}$, $t-\dfrac{\bar r}{a}$ e di più risulta funzione finita e continua dei due argomenti $t-\dfrac{r}{a}$, $t-\dfrac{\bar r}{a}$ insieme a tante delle sue derivate quante sono le derivate di $\alpha(t)$ finite e continue.

Nel punto $u=v=w=0$ $f_1[\alpha,\beta]$, $f_2[\alpha,\beta]$ divengono infinite come $\dfrac{1}{r}$ e i prodotti

$$r f_1[\alpha,\beta] \qquad r f_2[\alpha,\beta]$$

risultano finiti e continui secondo ogni retta uscente da tal punto, pur non essendo nel punto stesso continui in senso assoluto.

Vediamo così che le funzioni $f_1[\alpha,\beta]$ $f_2[\alpha,\beta]$ soddisfano a condizioni di regolarità del tutto analoghe a quelle cui soddisfano le funzioni

$$\frac{\alpha\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{4\pi a^2 r}, \qquad \frac{\beta\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{4\pi a^2 r},$$

cui evidentemente esse si riducono per $a = c$. Nel capitolo seguente mostreremo come la formola di Kirchhoff si può estendere agli integrali del sistema (20) servendoci di un procedimento in cui le funzioni $f_1[\alpha,\beta]$, $f_2[\alpha,\beta]$ fanno lo stesso giuoco che la funzione $\dfrac{\alpha\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{4\pi a^2 r}$ o $\dfrac{\beta\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{4\pi a^2 r}$ fa nella deduzione della formola in questione secondo il metodo tenuto da Kirchhoff stesso nello stabilirla.

16. — Applichiamo infine le formole (30) (31) a determinare l'integrale ξ, η, ζ del sistema

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \xi - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = -2\pi a^3 \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y, z+at) - \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - f(x, y, z-at)] \\
&\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \eta + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = -2\pi a^3 \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y, z+at) - \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - f(x, y, z-at)] \\
&\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \zeta = 0
\end{aligned}\right.$$

che soddisfa alle condizioni iniziali

$$(\xi)_{t=0} = (\eta)_{t=0} = (\zeta)_{t=0} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)_{t=0} = 4\pi a^2 f(x, y, z).$$

La (31) ci dà allora immediatamente

$$\zeta(x, y, z, t) = \frac{1}{t}\int_{\sigma_t^{(1)}} f(x+u, y+v, z+w)\, d\sigma_t^{(1)},$$

cioè

$$\zeta = a\int_{\sigma_t^{(1)}} \frac{1}{r} f(x+u, y+v, z+w)\, d\sigma_t^{(1)},$$

e le formole (30) nel nostro caso coincidono colle formole (27) ove si sia posto

$$\Xi_0 = \mathrm{H}_0 = 0\,, \quad \mathrm{A} = -2\pi a^3[f(x, y, z+at) - f(x, y, z-at)]\,, \quad \mathrm{B} = 0\,.$$

Sarà dunque

$$\begin{aligned}
\xi = -\frac{a}{2}\int_{\mathrm{S}_t^{(1)}} \frac{d\mathrm{S}_t^{(1)}}{r} \frac{\partial}{\partial u}[&f(x+u, y+v, z+w+at-r) - \\
&- f(x+u, y+v, z+w-at+r)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta = -\frac{a}{2}\int_{\mathrm{S}_t^{(1)}} \frac{d\mathrm{S}_t^{(1)}}{r} \frac{\partial}{\partial v}[&f(x+u, y+v, z+w+at-r) - \\
&- f(x+u, y+v, z+w-at+r)]
\end{aligned}$$

ove dovremo intendere che nel fare le derivazioni rispetto ad u, v si faccia astrazione dalla dipendenza di r da tali variabili.

Applicando ripetutamente un notissimo teorema di Gauss e tenendo conto che sulla superficie $\sigma_t^{(1)}$ si ha

$$\begin{aligned}
f(x+u, y+v, z+w+at-r) &= f(x+u, y+v, z+w-at+r) = \\
&= f(x+u, y+v, z+w)\,,
\end{aligned}$$

si ottiene allora senza difficoltà

$$\xi(x, y, z, t) = -a\int_{\sigma_t^{(1)}} \frac{\cos\varphi \cot\theta}{r} f(x+u, y+v, z+w)\, d\sigma_t^{(1)}.$$

$$\eta(x, y, z, t) = -a\int_{\sigma_t^{(1)}} \frac{\sin\varphi \cot\theta}{r} f(x+u, y+v, z+w)\, d\sigma_t^{(1)}.$$

Vediamo così che l'integrale cercato è dato dalle funzioni che nel capitolo precedente abbiamo indicato con ξ^*, η^*, ζ^*. Resta così verificato che tali funzioni soddisfano alle relazioni (18).

CAPITOLO IV.

Estensione della formola di Kirchhoff. Possibilità analitica di un solo punto luminoso

17. — Siano ξ, η e ξ_1, η_1 due integrali del sistema

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \xi - (a^2 - c^2) \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 \eta + (a^2 - c^2) \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}$$

che nello spazio S^* limitato da una superficie regolare σ^*, semplicemente connessa o no, supporremo finiti e continui insieme alle loro derivate prime e seconde per qualunque valore del tempo che appartenga a un intervalio $(t_1 t_2)$ includente un istante fissato t e talmente esteso che — R essendo la massima distanza di un punto fissato (x, y, z) esterno a S^* da un punto di σ^* — oltre la condizione

$$t_2 > t\,,$$

è soddisfatta anche l'altra

$$t_1 - t + \frac{R}{a}\sqrt{\frac{a^2}{c^2} + 1} < 0\,.$$

Evidentemente se rappresentiamo al solito con (u, v, w) il sistema cartesiano ortogonale che si ottiene dal sistema fondamentale portandone con una traslazione l'origine nel punto (x, y, z),

avremo a un qualunque istante t'

$$\begin{aligned} \xi_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t'^2} - \xi \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t'^2} &= \frac{\partial}{\partial t'}\left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial t'} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial t'}\right) = a^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial u}\right) + \\ &+ a^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right) + a^2 \frac{\partial}{\partial w}\left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial w} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial w}\right) - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial v}\left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right) + \\ &+ (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial v}\left(\xi_1 \frac{\partial \eta}{\partial u} - \xi \frac{\partial \eta_1}{\partial u}\right) - (a^2 - c^2)\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t'^2} - \eta \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t'^2} &= \frac{\partial}{\partial t'}\left(\eta_1 \frac{\partial \eta}{\partial t'} - \eta \frac{\partial \eta_1}{\partial t'}\right) = a^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\eta_1 \frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta \frac{\partial \eta_1}{\partial u}\right) + \\ &+ a^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\eta_1 \frac{\partial \eta}{\partial v} - \eta \frac{\partial \eta_1}{\partial v}\right) + a^2 \frac{\partial}{\partial w}\left(\eta_1 \frac{\partial \eta}{\partial w} - \eta \frac{\partial \eta_1}{\partial w}\right) - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial u}\left(\eta_1 \frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta \frac{\partial \eta_1}{\partial u}\right) + \\ &+ (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial u}\left(\eta_1 \frac{\partial \xi}{\partial v} - \eta \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right) - (a^2 - c^2)\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Ne segue che sarà pure

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial t'}\int_{S^*}\left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial t'} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial t'}\right) dS^* - \frac{\partial}{\partial t'}\int_{S^*}\left(\eta_1 \frac{\partial \eta}{\partial t'} - \eta \frac{\partial \eta_1}{\partial t'}\right) dS^* = \\ &= a^2 \int_{\sigma^*}\left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial n^*} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial n^*}\right) d\sigma^* - (a^2 - c^2)\int_{\sigma^*}\left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial v}\right)\cos n^* v\, d\sigma^* + \\ &+ (a^2 - c^2)\int_{\sigma^*}\left(\xi_1 \frac{\partial \eta}{\partial u} - \xi \frac{\partial \eta_1}{\partial u}\right)\cos n^* v\, d\sigma^* + a^2 \int_{\sigma^*}\left(\eta_1 \frac{\partial \eta}{\partial n^*} - \eta \frac{\partial \eta_1}{\partial n^*}\right) d\sigma^* - \\ &- (a^2 - c^2)\int_{\sigma^*}\left(\eta_1 \frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta \frac{\partial \eta_1}{\partial u}\right)\cos n^* u\, d\sigma^* + \\ &+ (a^2 - c^2)\int_{\sigma^*}\left(\eta_1 \frac{\partial \xi}{\partial v} - \eta \frac{\partial \xi_1}{\partial r}\right)\cos n^* u\, d\sigma^*\,, \end{aligned}$$

ove n^* indica la normale interna alla superficie σ^*, e infine

$$(37)\qquad -\left[\int_{S^*}\left(\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial t'}-\xi\frac{\partial\xi_1}{\partial t'}\right)dS^*+\int_{S^*}\left(\eta_1\frac{\partial\eta}{\partial t'}-\eta\frac{\partial\eta_1}{\partial t'}\right)dS^*\right]_{t_1}^{t_2}=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}dt'\left[a^2\int_{\sigma^*}\left(\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial n^*}-\xi\frac{\partial\xi_1}{\partial n^*}\right)d\sigma^*-(a^2-c^2)\int_{\sigma^*}\left(\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial v}-\xi\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\right)\cos n^*v\,d\sigma^*+\right.$$

$$+(a^2-c^2)\int_{\sigma^*}\left(\xi_1\frac{\partial\eta}{\partial u}-\xi\frac{\partial\eta_1}{\partial u}\right)\cos n^*v\,d\sigma^*+a^2\int_{\sigma^*}\left(\eta_1\frac{\partial\eta}{\partial n^*}-\eta\frac{\partial\eta_1}{\partial n^*}\right)d\sigma^*-$$

$$-(a^2-c^2)\int_{\sigma^*}\left(\eta_1\frac{\partial\eta}{\partial u}-\eta\frac{\partial\eta_1}{\partial u}\right)\cos n^*u\,d\sigma^*+$$

$$\left.+(a^2-c^2)\int_{\sigma^*}\left(\eta_1\frac{\partial\xi}{\partial v}-\eta\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\right)\cos n^*u\,d\sigma^*\right].$$

Sia allora $F(t')$ una funzione del tempo finita e continua insieme alle sue derivate 1.ª 2.ª e 3.ª: potremo assumere

$$\xi_1(x+u, y+v, z+w, -t')=f_1[F(-t'), 0]$$
$$\eta_1(x+u, y+v, z+w, -t')=f_2[F(-t'), 0]$$

cioè

$$\xi_1(x+u, y+v, z+w, t')=\frac{1}{4\pi c^2\bar{r}}\frac{F\left(t'+\frac{\bar{r}}{a}\right)}{u^2+v^2}v^2+\frac{1}{4\pi a^2 r}\frac{F\left(t'+\frac{r}{a}\right)}{u^2+v^2}u^2+$$
$$+\frac{1}{a}\frac{\partial^2\chi}{\partial u^2}\int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar{r}}{a}}F(\tau)\,d\tau$$

$$\eta_1(x+u, y+v, z+w, t')=-\frac{1}{4\pi c^2\bar{r}}\frac{F\left(t'+\frac{\bar{r}}{a}\right)}{u^2+v^2}uv+\frac{1}{4\pi a^2 r}\frac{F\left(t'+\frac{r}{a}\right)}{u^2+v^2}uv+$$
$$+\frac{1}{a}\frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v}\int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar{r}}{a}}F(\tau)\,d\tau\,.$$

Supponiamo inoltre che $F(t')$ — e quindi anche ξ_1 e η_1 — dipendano da un parametro ε in tal guisa che per qualunque valore di $\varepsilon>0$ risulti

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}F(t')\,dt'=1\,,$$

e di più quando t' è compreso nell'intervallo $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ sia $F(t')>0$, quando t' è fuori di tale intervallo sia $F(t')=0$.

Tutte le condizioni volute risultano soddisfatte assumendo nell'intervallo $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$

$$F(t')=\frac{315}{256\,\varepsilon^9}(t'-t-\varepsilon)^4(t'-t+\varepsilon)^4\,.$$

Fissiamo allora comunque ε, purchè sia insieme

$$(38)\qquad \begin{cases}-\varepsilon>t_1-t+\dfrac{R}{a}\sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}+1}\\ \varepsilon<t_2-t\,.\end{cases}$$

Dopo ciò, essendo certamente

$$\frac{r}{a}<\frac{R}{a}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+1}\,,$$
$$\frac{\bar{r}}{a}<\frac{R}{a}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}+1}\,,$$

potremo esser sicuri che le funzioni ξ_1, η_1 sopra definite si annulleranno agli istanti t_1 e t_2 insieme alle loro derivate in ogni punto dello spazio. Quindi per esse — qualunque sia l'integrale ξ, η del sistema (20) — la formola (37) darà

$$(39)\qquad \int_{t_1}^{t_2}dt'\left[a^2\int_{\sigma^*}\left(\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial n^*}-\xi\frac{\partial\xi_1}{\partial n^*}\right)d\sigma^*-(a^2-c^2)\int_{\sigma^*}\left(\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial v}-\xi\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\right)\cos n^*v\,dv^*+\right.$$

$$+(a^2-c^2)\int_{\sigma^*}\left(\xi_1\frac{\partial\eta}{\partial u}-\xi\frac{\partial\eta_1}{\partial u}\right)\cos n^*v\,d\sigma^*+a^2\int_{\sigma^*}\left(\eta_1\frac{\partial\eta}{\partial n^*}-\eta\frac{\partial\eta_1}{\partial n^*}\right)d\sigma^*-$$

$$\left.-(a^2-c^2)\int_{\sigma^*}\left(\eta_1\frac{\partial\eta}{\partial u}-\eta\frac{\partial\eta_1}{\partial u}\right)\cos n^*u\,d\sigma^*+(a^2-c^2)\int_{\sigma^*}\left(\eta_1\frac{\partial\xi}{\partial v}-\eta\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\right)\cos n^*u\,d\sigma^*\right]=0.$$

Osserviamo ora che, indicando con $\Phi(t')$ una qualunque funzione di t' finita e continua, avremo evidentemente in ogni punto di S^*

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(t')\,\mathrm{F}\left(t'+\frac{r}{a}\right) dt' = \Phi\left(t+\theta'-\frac{r}{a}\right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(t')\,\mathrm{F}\left(t'+\frac{\bar r}{a}\right) dt' = \Phi\left(t+\theta''-\frac{\bar r}{a}\right)$$

ove

$$|\theta'| < \varepsilon \qquad |\theta''| < \varepsilon .$$

Osserviamo inoltre che, potendosi assumere

per $\quad t'-t < -\varepsilon \quad \displaystyle\int^{t'} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}$,

per $\quad -\varepsilon \leq t'-t \leq \varepsilon \quad \displaystyle\int^{t'} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau = \frac{315}{256\,\varepsilon^9}\left[\frac{(t'-t)^9}{9} - 4\,\frac{(t'-t)^7\varepsilon^2}{7} + 6\,\frac{(t'-t)^5\varepsilon^4}{5} - 4\,\frac{(t'-t)^3\varepsilon^6}{3} + (t'-t)\,\varepsilon^8\right]$,

per $\quad t'-t > \varepsilon \quad \displaystyle\int^{t'} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}$,

avremo, se $a > c$ (e quindi $\bar r > r$)

$$\int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar r}{a}} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau = 0$$

tutte le volte che sia

$$t' \leq t - \frac{\bar r}{a} - \varepsilon$$

oppure

$$t' \geq t - \frac{r}{a} + \varepsilon$$

onde sarà

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(t')\,dt' \int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar r}{a}} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau = \int_{t-\frac{\bar r}{a}-\varepsilon}^{t-\frac{r}{a}+\varepsilon} \Phi(t') \int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar r}{a}} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau .$$

D'altra parte se ε è stato scelto così piccolo che sia

$$t - \frac{r}{a} - \varepsilon > t - \frac{\bar r}{a} + \varepsilon ,$$

per

(38)* $$t - \frac{r}{a} - \varepsilon \geq t' \geq t - \frac{\bar r}{a} + \varepsilon$$

avremo

$$\int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar r}{a}} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau = 1 ,$$

e potremo concludere che allora

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(t')\,dt' \int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar r}{a}} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau = \int_{t-\frac{\bar r}{a}-\varepsilon}^{t-\frac{\bar r}{a}+\varepsilon} \Phi(t')\,dt' \int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar r}{a}} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{t-\frac{\bar r}{a}+\varepsilon}^{t-\frac{r}{a}-\varepsilon} \Phi(t')\,dt' \int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar r}{a}} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau + \int_{t-\frac{r}{a}-\varepsilon}^{t-\frac{r}{a}+\varepsilon} \Phi(t')\,dt' \int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar r}{a}} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \theta\,\mathrm{K} + \int_{t-\frac{\bar r}{a}+\varepsilon}^{t-\frac{r}{a}-\varepsilon} \Phi(t')\,dt'$$

ove

$$|\theta| < \varepsilon$$

e K è un numero finito indipendente da ε. Si vede subito che questa formola vale anche se $a < c$.

In base alle osservazioni ora fatte, posto

$$u = u_1\ ,\quad v = u_2\ ,\quad w = u_3\ ,$$

si vede facilmente mediante alcune integrazioni per parti, che per qualunque valore di ε soddisfacente alle condizioni (38), (38)*, si ha, per $i = 1, 2, 3$:

$$a^2\int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{\sigma^*}\left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_i} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial u_i}\right)\cos n^* u_i\, d\sigma^* =$$

$$= \frac{a^2}{4\pi}\int_{\sigma^*}\left[\frac{1}{c^2\bar{r}}\frac{v^2}{u^2+v^2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\mathrm{F}\left(t'+\frac{\bar{r}}{a}\right)dt' + \right.$$

$$+\frac{1}{a^2 r}\frac{u^2}{u^2+v^2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\mathrm{F}\left(t'+\frac{r}{a}\right)dt' + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial \xi}{\partial u_i}dt'\int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar{r}}{a}}\mathrm{F}(\tau)\,d\tau -$$

$$-\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{c^2\bar{r}}\frac{v^2}{u^2+v^2}\right)\int_{t_1}^{t_2}\xi\,\mathrm{F}\left(t'+\frac{\bar{r}}{a}\right)dt' - \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{a^2 r}\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)\int_{t_1}^{t_2}\xi\,\mathrm{F}\left(t'+\frac{r}{a}\right)dt' -$$

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial u_i}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\int_{t_1}^{t_2}\xi\,dt'\int_{t'+\frac{r}{a}}^{t'+\frac{\bar{r}}{a}}\mathrm{F}(\tau)\,d\tau - \frac{1}{a c^2 \bar{r}}\frac{v^2}{u^2+v^2}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\int_{t_1}^{t_2}\xi\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{F}\left(t'+\frac{\bar{r}}{a}\right)dt' -$$

$$-\frac{1}{a^3 r}\frac{u^2}{u^2+v^2}\frac{\partial r}{\partial u_i}\int_{t_1}^{t_2}\xi\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{F}\left(t'+\frac{\bar{r}}{a}\right)dt' -$$

$$\left.-\frac{1}{a}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\int_{t_1}^{t_2}\xi\,dt'\left\{\frac{1}{a}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\mathrm{F}\left(t'+\frac{\bar{r}}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{\partial r}{\partial u_i}\mathrm{F}\left(t'+\frac{r}{a}\right)\right\}\right]\cos n^* u_i\, d\sigma^* =$$

$$= \frac{a^2}{4\pi}\int_{\sigma^*}\left[\frac{1}{c^2\bar{r}}\frac{v^2}{u^2+v^2}\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\left(t+\theta_1-\frac{\bar{r}}{a}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{a^2 r}\frac{u^2}{u^2+v^2}\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\left(t+\theta_2-\frac{r}{a}\right) + \theta_3\mathrm{K}_1 + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\int_{t-\frac{\bar{r}}{a}+\varepsilon}^{t-\frac{r}{a}-\varepsilon}\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\,d\tau -$$

$$-\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{c^2\bar{r}}\frac{v^2}{u^2+v^2}\right)\xi\left(t+\theta_4-\frac{\bar{r}}{a}\right) - \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{a^2 r}\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)\xi\left(t+\theta_5-\frac{r}{a}\right) -$$

$$-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial u_i}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\int_{t-\frac{\bar{r}}{a}+\varepsilon}^{t-\frac{r}{a}-\varepsilon}\xi\,d\tau - \theta_6\mathrm{K}_2 + \frac{1}{a c^2\bar{r}}\frac{v^2}{u^2+v^2}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\frac{\partial \xi}{\partial t}\left(t+\theta_7-\frac{\bar{r}}{a}\right) +$$

$$+\frac{1}{a^3 r}\frac{u^2}{u^2+v^2}\frac{\partial r}{\partial u_i}\frac{\partial \xi}{\partial t}\left(t+\theta_8-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\xi\left(t+\theta_9-\frac{\bar{r}}{a}\right) +$$

$$\left.+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\frac{\partial r}{\partial u_i}\xi\left(t+\theta_{10}-\frac{r}{a}\right)\right]\cos n^* u_i\, d\sigma^*\ ,$$

ove si sono indicate con $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_{10}$ delle quantità in valore assoluto inferiori ad ε, e con $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2$ dei numeri finiti indipendenti dalle θ. Sarà dunque

$$\lim_{\varepsilon=0} a^2\int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{\sigma^*}\left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_i} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial u_i}\right)\cos n^* u_i\, d\sigma^* =$$

$$= \frac{a^2}{4\pi}\int_{\sigma^*}\left[\frac{1}{c^2\bar{r}}\frac{v^2}{u^2+v^2}\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right) + \frac{1}{a^2 r}\frac{u^2}{u^2+v^2}\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\left(t-\frac{r}{a}\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{a}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\int_{t-\frac{\bar{r}}{a}}^{t-\frac{r}{a}}\frac{\partial \xi}{\partial u_i}\,d\tau - \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{c^2\bar{r}}\frac{v^2}{u^2+v^2}\right)\xi\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{a^2 r}\frac{u^2}{u^2+v^2}\right)\xi\left(t-\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial u_i}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\int_{t-\frac{\bar{r}}{a}}^{t-\frac{r}{a}}\xi\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{a c^2\bar{r}}\frac{v^2}{u^2+v^2}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\frac{\partial \xi}{\partial t}\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right) + \frac{1}{a^3 r}\frac{u^2}{u^2+v^2}\frac{\partial r}{\partial u_i}\frac{\partial \xi}{\partial t}\left(t-\frac{r}{a}\right) -$$

$$\left.-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i}\xi\left(t-\frac{\bar{r}}{a}\right) + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2}\frac{\partial r}{\partial u_i}\xi\left(t-\frac{r}{a}\right)\right]\cos n^* u_i\, d\sigma^*$$

e infine

$$\lim_{\varepsilon=0} a^2 \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{\sigma^*} \left(\xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_i} - \xi \frac{\partial \xi_1}{\partial u_i} \right) d\sigma^* \cos n^* u_i =$$

$$= \int_{\sigma^*} \left[f_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial u_i} (t), 0 \right] - \frac{d}{du_i} f_1 \left[\xi (t), 0 \right] \right] \cos n^* u_i \, d\sigma^* \quad (i = 1, 2, 3)$$

ove le $\frac{d}{du_i}$ è da intendere eseguita senza tener conto della dipendenza di ξ dalle variabili u, v, w.

In modo del tutto analogo si trova

$$\left\{ \begin{aligned} & \lim_{\varepsilon=0} a^2 \int_{t_1}^{t_2} dt' \int \left(\eta_1 \frac{\partial \eta}{\partial u_i} - \eta \frac{\partial \eta_1}{\partial u_i} \right) \cos n^* u_i \, d\sigma^* = \\ & \qquad = a^2 \int_{\sigma^*} \left[f_2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial u_i} (t), 0 \right] - \frac{d}{du_i} f_2 \left[\eta (t), 0 \right] \right] \cos n^* u_i \, d\sigma^* \\ & \lim_{\varepsilon=0} (a^2 - c^2) \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{\sigma^*} \left(\xi_1 \frac{\partial \eta}{\partial u} - \xi \frac{\partial \eta_1}{\partial u} \right) \cos n^* v \, d\sigma^* = \\ & \qquad = (a^2 - c^2) \int_{\sigma^*} \left[f_1 \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} (t), 0 \right] - \frac{d}{du} f_2 \left[\xi (t), 0 \right] \right] \cos n^* v \, d\sigma^* \\ & \lim_{\varepsilon=0} (a^2 - c^2) \int_{t_1}^{t_2} dt' \int_{\sigma^*} \left(\eta_1 \frac{\partial \xi}{\partial v} - \eta \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \right) \cos n^* u \, d\sigma^* = \\ & \qquad = (a^2 - c^2) \int_{\sigma^*} \left[f_2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial v} (t), 0 \right] - \frac{d}{dv} f_1 \left[\eta (t), 0 \right] \right] \cos n^* u \, d\sigma^* \\ & \qquad\qquad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \right.$$

Dopo ciò dalla formola (39) segue immediatamente che, qualunque sia la superficie σ^*, semplicemente connessa o no, e qualunque sia la soluzione ξ, η del sistema (20), purchè finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto lo spazio S^* racchiuso

da σ^* per ogni valore del tempo appartenente ad un intervallo convenientemente esteso includente l'istante t, quando l'origine del sistema di coordinate (u, v, w) sia esterna allo spazio S^* si avrà

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} d\sigma^* \Bigg[& a^2 f_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial n^*} (t), 0 \right] - a^2 \frac{d}{dn^*} f_1 \left[\xi (t), 0 \right] + a^2 f_2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial n^*} (t), 0 \right] - \\ & - a^2 \frac{d}{dn^*} f_2 \left[\eta (t), 0 \right] - (a^2 - c^2) \cos n^* v \, f_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial v} (t), 0 \right] + \\ & + (a^2 - c^2) \cos n^* v \frac{d}{dv} f_1 \left[\xi (t), 0 \right] - (a^2 - c^2) \cos n^* u \, f_2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} (t), 0 \right] + \\ & + (a^2 - c^2) \cos n^* u \frac{d}{du} f_2 \left[\eta (t), 0 \right] + (a^2 - c^2) \cos n^* u \, f_2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial v} (t), 0 \right] - \\ & - (a^2 - c^2) \cos n^* v \frac{d}{du} f_2 \left[\xi (t), 0 \right] + (a^2 - c^2) \cos n^* v \, f_1 \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} (t), 0 \right] - \\ & - (a^2 - c^2) \cos n^* u \frac{d}{dv} f_1 \left[\eta (t), 0 \right] \Bigg] = 0, \end{aligned}$$

ove le $\frac{d}{du_i}$ devono intendersi eseguite senza tener conto della dipendenza di ξ, η dalle variabili u_i: ed anche, per la $(33)_2$,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma^*} d\sigma^* \Bigg[& a^2 f_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial n^*}, \frac{\partial \eta}{\partial n^*} \right] - a^2 \frac{d}{dn^*} f_1 \left[\xi, \eta \right] - (a^2 - c^2) \cos n^* v \, f_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial v}, 0 \right] + \\ & + (a^2 - c^2) \cos n^* v \frac{d}{dv} f_1 \left[\xi, 0 \right] - (a^2 - c^2) \cos n^* u \, f_1 \left[0, \frac{\partial \eta}{\partial u} \right] + \\ & + (a^2 - c^2) \cos n^* u \frac{d}{du} f_1 \left[0, \eta \right] + (a^2 - c^2) \cos n^* u \, f_1 \left[0, \frac{\partial \xi}{\partial v} \right] - \\ & - (a^2 - c^2) \cos n^* v \frac{d}{du} f_1 \left[0, \xi \right] + (a^2 - c^2) \cos n^* v \, f_1 \left[\frac{\partial \eta}{\partial u}, 0 \right] - \\ & - (a^2 - c^2) \cos n^* u \frac{d}{dv} f_1 \left[\eta, 0 \right] \Bigg] = 0. \end{aligned}$$

Supponiamo allora che la superficie σ' consti di una piccola sfera σ_0 di centro $(x y z)$ e di una superficie chiusa σ, semplicemente connessa o no, avvolgente σ_0. Allo svanire di σ_0, siccome sopra ogni retta uscente dal punto $u = v = w = 0$ i prodotti

$$r^2 \frac{\partial}{\partial u_i} f_1 \qquad r^2 \frac{\partial}{\partial u_i} f_2 \qquad (i=1, 2, 3)$$

risultano sempre finiti e continui, e di più si ha

$$\lim_{r=0} r^2 f_1 = 0 \qquad \lim_{r=0} r^2 f_2 = 0\,,$$

la formola precedente ci darà, usando delle notazioni solite,

$$\int_\sigma d\sigma \left[a^2 \frac{d}{dn} f_1 \left[\xi, \eta\right] - a^2 f_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial n}, \frac{\partial \eta}{\partial n}\right] - (a^2 - c^2) \cos n v \frac{d}{dv} f_1 \left[\xi, 0\right] + \right.$$

$$+ (a^2 - c^2) \cos n v\, f_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial v}, 0\right] - (a^2 - c^2) \cos n u \frac{d}{du} f_1 \left[0, \eta\right] +$$

$$+ (a^2 - c^2) \cos n u\, f_1 \left[0, \frac{\partial \eta}{\partial u}\right] - (a^2 - c^2) \cos n u\, f_1 \left[0, \frac{\partial \xi}{\partial v}\right] +$$

$$+ (a^2 - c^2) \cos n v \frac{d}{du} f_1 \left[0, \xi\right] + (a^2 - c^2) \cos n u \frac{d}{dv} f_1 \left[\eta, 0\right] -$$

$$\left. - (a^2 - c^2) \cos n v\, f_1 \left[\frac{\partial \eta}{\partial u}, 0\right]\right] =$$

$$= - \xi (x y z t) \lim_{\sigma_0 = 0} \int_{\sigma_0} d\sigma_0 \left[a^2 \frac{\partial}{\partial n_0} f_1 (1, 0) - \right.$$

$$\left. - (a^2 - c^2) \cos n_0 v \frac{\partial}{\partial v} f_1 (1, 0) + (a^2 - c^2) \cos n_0 v \frac{\partial}{\partial u} f_1 (0, 1)\right] -$$

$$- \eta (x y z t) \lim_{\sigma_0 = 0} \int_{\sigma_0} d\sigma_0 \left[a^2 \frac{\partial}{\partial n_0} f_1 (0, 1) - \right.$$

$$\left. - (a^2 - c^2) \cos n_0 u \frac{\partial}{\partial u} f_1 (0, 1) + (a^2 - c^2) \cos n_0 u \frac{\partial}{\partial v} f_1 (1, 0)\right].$$

Ora tenendo presente che

$$\frac{a^2}{4 \pi c^2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta \, d\theta}{\left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}\right)^3} = \frac{1}{2 \pi}\,,$$

è facile vedere che qualunque sia il raggio di σ_0 si ha

$$\int_{\sigma_0} d\sigma_0 \left[a^2 \frac{\partial}{\partial n_0} f_1 (1, 0) - (a^2 - c^2) \cos n_0 v \frac{\partial}{\partial v} f_1 (1, 0) + \right.$$

$$\left. + (a^2 - c^2) \cos n_0 v \frac{\partial}{\partial u} f_1 (0, 1)\right] = -1$$

$$\int_{\sigma_0} d\sigma_0 \left[a^2 \frac{\partial}{\partial n_0} f_1 (0, 1) - (a^2 - c^2) \cos n_0 u \frac{\partial}{\partial u} f_1 (0, 1) + \right.$$

$$\left. + (a^2 - c^2) \cos n_0 u \frac{\partial}{\partial v} f_1 (1, 0)\right] = 0\,.$$

Possiamo dunque concludere che

$$(40) \qquad \xi (x y z t) = \int_\sigma d\sigma \left[a^2 \left[\frac{d}{dn} f_1 [\xi, \eta] - a^2 f_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial n}, \frac{\partial \eta}{\partial n}\right] - \right.\right.$$

$$- (a^2 - c^2) \cos n v \frac{d}{dv} f_1 [\xi, 0] + (a^2 - c^2) \cos n v\, f_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial v}, 0\right] -$$

$$- (a^2 - c^2) \cos n u \frac{d}{du} f_1 [0, \eta] + (a^2 - c^2) \cos n u\, f_1 \left[0, \frac{\partial \eta}{\partial u}\right] +$$

$$+ (a^2 - c^2) \cos n v \frac{d}{du} f_1 [0, \xi] - (a^2 - c^2) \cos n u\, f_1 \left[0, \frac{\partial \xi}{\partial v}\right] +$$

$$\left.\left. + (a^2 - c^2) \cos n u \frac{d}{dv} f_1 [\eta, 0] - (a^2 - c^2) \cos n v\, f_1 \left[\frac{\partial \eta}{\partial u}, 0\right]\right]\right].$$

In modo del tutto analogo, assumendo nella (37), come è lecito,

$$\xi_1(x\,y\,z\,t') = -\frac{1}{4\pi c^2 \bar r}\,\frac{F\left(t'+\dfrac{\bar r}{a}\right)}{u^2+v^2}\,uv + \frac{1}{4\pi a^2 r}\,\frac{F\left(t+\dfrac{r}{a}\right)}{u^2+v^2}\,uv +$$

$$+\frac{1}{a}\,\frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\int_{t+\frac{r}{a}}^{t+\frac{\bar r}{a}} F(\tau)\,d\tau$$

$$\eta_1(x\,y\,z\,t') = \frac{1}{4\pi c^2 \bar r}\,\frac{F\left(t'+\dfrac{\bar r}{a}\right)}{u^2+v^2}\,u^2 + \frac{1}{4\pi a^2 r}\,\frac{F\left(t+\dfrac{\bar r}{a}\right)}{u^2+v^2}\,v^2 +$$

$$+\frac{1}{a}\,\frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}\int_{t+\frac{r}{a}}^{t+\frac{\bar r}{a}} F(\tau)\,d\tau$$

si giunge alla formola

$$\eta(x\,y\,z\,t) = \int_\sigma d\sigma \Bigg[a^2 \frac{d}{dn} f_2[\xi,\eta] - a^2\left[\frac{\partial\xi}{\partial n},\ \frac{\partial\eta}{\partial n}\right] - \tag{41}$$

$$-(a^2-c^2)\frac{d}{dv} f_2[\xi,0]\cos nv + (a^2-c^2) f_2\left[\frac{\partial\xi}{\partial v},\ 0\right]\cos nv -$$

$$-(a^2-c^2)\cos nu\,\frac{d}{du} f_2[0,\eta] + (a^2-c^2)\cos nu\, f_2\left[0,\ \frac{\partial\eta}{\partial u}\right] +$$

$$+(a^2-c^2)\cos nv\,\frac{d}{du} f_2[0,\xi] - (a^2-c^2)\cos nu\, f_2\left[0,\ \frac{\partial\xi}{\partial y}\right] +$$

$$+(a^2-c^2)\cos nu\,\frac{d}{dv} f_2[\eta,0] - (a^2-c^2)\cos nv\, f_2\left[\frac{\partial\eta}{\partial n},\ 0\right]\Bigg].$$

Del resto questa formola si può anche dedurre dalla (40) osservando che il sistema (20) si trasforma in sè stesso se si scambia ξ con η e al tempo stesso x con y. Osserveremo inoltre che il secondo membro delia (41) si può ottenere dal secondo membro della (40) anche scambiando in tutti i termini di questo f_1 con f_2.

Per $a=c$ ambedue le formole (40), (41) si riducono alla formola di Kirchhoff. Anche il metodo col quale siamo ad esse pervenuti

è evidentemente un'estensione del metodo di cui si è servito Kirchhoff stesso per giungere alla sua formola: soltanto la scelta fatta della funzione $F(t')$ lo pone al riparo dalle obbiezioni che, dal lato del rigore, sono state fatte al metodo di Kirchhoff.

18. — Delle formole (40), (41) si può dare anche la seguente dimostrazione dovuta al prof. Grünwald.

Il risultato incluso nelle formole (31), cioè nelle formole (31)' della memoria (G), si può enunciare nel modo seguente.

Siano $\Phi(x\,z\,y\,t)$, $\Psi(x\,y\,z\,t)$ due qualunque funzioni dei loro argomenti sempre finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde. Se in ogni punto a tutti gli istanti precedenti un istante fissato e del resto remoto quanto si vuole esse si annullano, posto

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\Phi - (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = F_1$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\Psi + (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = F_2,$$

avremo

$$\Phi(x\,y\,z\,t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} du\,dv\,dw\, f_1\Big[F_1(x+u,\,y+v,\,z+w,\,t),\ F_2(x+u,\,y+v,\,z+w,\,t)\Big]$$

$$\Psi(x\,y\,z\,t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} du\,dv\,dw\, f_2\Big[F_1(x+u,\,y+v,\,z+w,\,t),\ F_2(x+u,\,y+v,\,z+w,\,t)\Big]$$

e quindi sarà *identicamente*

$$\Phi(x\,y\,z\,t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} du\,dv\,dw\, f_1\Bigg[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\Phi - (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\Psi + (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\Bigg]$$

$$\Psi(x\,y\,z\,t)=\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} du\,dv\,dw\, f_2\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-a^2\Delta_2\Phi-(a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right),\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-a^2\Delta_2\Psi+(a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right],$$

e infine

$$\Phi(x\,y\,z\,t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_2+(a^2-c^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_1[\Phi,0]\,du\,dv\,dw+$$

$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_2+(a^2-c^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_1[0,\Psi]\,du\,dv\,dw-$$

$$-(a^2-c^2)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_1[\Psi,\Phi]\,du\,dv\,dw$$

$$\Psi(x\,y\,z\,t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_2+(a^2-c^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_2[\Phi,0]\,du\,dv\,dw+$$

$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_2+(a^2-c^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_2[0,\Psi]\,du\,dv\,dw-$$

$$-(a^2-c^2)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f_2[\Psi,\Phi]\,du\,dv\,dw.$$

Scritte in questa forma, queste identità restano valevoli anche quando le funzioni Φ, Ψ sopra la superficie chiusa σ limitante uno spazio qualunque S risultano discontinue. Supponiamo allora che il punto $(x\,y\,z)$ sia interno ad S e che fuori di S tanto Φ che Ψ a qualunque istante siano nulle. Le integrazioni che compariscono

nei secondi membri delle formole ora scritte saranno allora da estendere soltanto allo spazio S. Ma per un notissimo teorema di Gauss posto

$$x=x_1 \qquad y=x_2 \qquad z=x_3,$$

risulta subito che

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_S f_k[\Phi,\Psi]\,dS=\int_\sigma \cos n u_i\, f_k[\Phi,\Psi]\,d\sigma+\int_S f_k\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u_i},\frac{\partial\Psi}{\partial u_i}\right]dS$$

$$(i=1,2,3) \qquad (k=1,2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\int_S f_k[\Phi,\Psi]\,dS=-\int_\sigma \cos n u_i\frac{\partial}{\partial u_j} f_k[\Phi,\Psi]+$$

$$+\int_\sigma \cos n u_j\, f_k\left[\frac{\partial\Phi}{\partial u_i},\frac{\partial\Psi}{\partial u_i}\right]+\int_S f_k\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_i\,\partial u_j},\frac{\partial^2\Psi}{\partial u_i\,\partial u_j}\right]dS:$$

di più

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_S f_k[\Phi,\Psi]\,dS=\int_S f_k\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2},\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right]dS.$$

Si vede allora facilmente che sarà

$$\Phi(x\,y\,z\,t)=\int_S f_1[F_1,F_2]\,dS+\int_\sigma d\sigma\left[a^2\frac{d}{dn}f_1[\Phi,\Psi]-\right.$$

$$-a^2\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n},\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right]-(a^2-c^2)\frac{d}{dv}f_1[\Phi,0]\cos n v+(a^2-c^2)f_1\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v},0\right]\cos n v-$$

$$-(a^2-c^2)\frac{d}{du}f_1[0,\Psi]\cos n u+(a^2-c^2)f_1\left[0,\frac{\partial\Psi}{\partial u}\right]\cos n u+$$

$$+(a^2-c^2)\cos n v\frac{d}{du}f_1[0,\Phi]-(a^2-c^2)\cos n u\, f_1\left[0,\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right]+$$

$$\left.+(a^2-c^2)\cos n u\frac{d}{dv}f_1[\Psi,0]-(a^2-c^2)\cos n v\, f_1\left[\frac{\partial\Psi}{\partial u},0\right]\right]:$$

$$\Psi(xyzt) = \int_S f_2[F_1, F_2]\,dS + \int_\sigma d\sigma \left[a^2 \frac{d}{dn} f_2[\Phi, \Psi] - \right.$$

$$- a^2\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}, \frac{\partial\Psi}{\partial n}\right] - (a^2-c^2)\frac{d}{dv} f_2[\Phi, 0]\cos nv + (a^2-c^2) f_2\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}, 0\right]\cos nv -$$

$$-(a^2-c^2)\frac{d}{du} f_2[0, \Psi]\cos nu + (a^2-c^2) f_2\left[0, \frac{\partial\Psi}{\partial u}\right]\cos nu +$$

$$+(a^2-c^2)\cos nv \frac{d}{du} f_2[0, \Phi] - (a^2-c^2)\cos nu\, f_2\left[0, \frac{\partial\Phi}{\partial v}\right] +$$

$$\left. + (a^2-c^2)\cos nu \frac{d}{dv} f_2[\Psi, 0] - (a^2-c^2)\cos nv\, f_2\left[\frac{\partial\Psi}{\partial u}, 0\right]\right].$$

Ne segue immediatamente che se per le funzioni Φ, Ψ assumeremo due funzioni ξ, η che oltre essere finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde soddisfino al sistema differenziale

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\xi - (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right) = X$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - a^2\Delta_2\eta + (a^2-c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right) = Y$$

avremo

$$(40)^* \quad \xi(xyzt) = \int_S dS\, f_1[X, Y] + \int_\sigma d\sigma \left[a^2 \frac{d}{dn} f_1[\xi, \eta] - \right.$$

$$- a^2 f_1\left[\frac{\partial\xi}{\partial n}, \frac{\partial\eta}{\partial n}\right] - (a^2-c^2)\frac{d}{dv} f_1[\xi, 0]\cos nv + (a^2-c^2) f_1\left[\frac{\partial\xi}{\partial v}, 0\right]\cos nv -$$

$$-(a^2-c^2)\frac{d}{du} f_1[0, \eta]\cos nu + (a^2-c^2) f_1\left[0, \frac{\partial\eta}{\partial u}\right]\cos nu +$$

$$+(a^2-c^2)\cos nv \frac{d}{du} f_1[0, \xi] - (a^2-c^2)\cos nu\, f_1\left[0, \frac{\partial\xi}{\partial v}\right] +$$

$$\left. + (a^2-c^2)\cos nu \frac{d}{dv} f_1[\eta, 0] - (a^2-c^2)\cos nv\, f_1\left[\frac{\partial\eta}{\partial u}, 0\right]\right]:$$

$$(41)^* \quad \eta(xyzt) = \int_S dS\, f_2[X, Y] + \int_\sigma d\sigma \left[a^2 \frac{d}{dn} f_2[\xi, \eta] - \right.$$

$$- a^2 f_2\left[\frac{\partial\xi}{\partial n}, \frac{\partial\eta}{\partial n}\right] - (a^2-c^2)\frac{d}{dv} f_2[\xi, 0]\cos nv + (a^2-c^2) f_2\left[\frac{\partial\xi}{\partial v}, 0\right]\cos nv -$$

$$-(a^2-c^2)\frac{d}{du} f_2[0, \eta]\cos nu + (a^2-c^2) f_2\left[0, \frac{\partial\eta}{\partial u}\right]\cos nu +$$

$$+(a^2-c^2)\cos nv \frac{d}{du} f_2[0, \xi] - (a^2-c^2)\cos nu\, f_2\left[0, \frac{\partial\xi}{\partial v}\right] +$$

$$\left. + (a^2-c^2)\cos nu \frac{d}{dv} f_2[\eta, 0] - (a^2-c^2)\cos nv\, f_2\left[\frac{\partial\eta}{\partial u}, 0\right]\right].$$

Queste formole per $X = Y = 0$ coincidono colle (40), (41).

19. — Le formole (40), (41) insieme alla formola di Kirchhoff applicata all'equazione

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - a^2\Delta\zeta = 0,$$

cioè alla formola

$$(42) \qquad \zeta(xyzt) = \int_\sigma d\sigma \left[a^2 \frac{d}{dn} f_3[\zeta] - a^2 f_3\left[\frac{\partial\zeta}{\partial n}\right]\right],$$

possono servire ad ogni istante in ogni punto dello spazio S limitato dalla superficie σ ad esprimere una qualunque soluzione ξ, η, ζ delle equazioni di Lamé nei mezzi uniassici per i valori che agli istanti precedenti prendono sopra σ le funzioni ξ, η, ζ e le loro derivate prime, purchè le funzioni stesse soddisfino alla condizione di trasversalità

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0.$$

Ma non possiamo considerare le tre formole in questione come un'espressione analitica del principio di Huyghens, perchè, non soddisfacendo le tre funzioni che compariscono sotto il segno integrale nei loro secondi membri alla condizione di trasversalità, da tali formole non risulta che — riferendosi ad es. alla teoria elastica della luce — lo spostamento elastico presente in un punto qualunque di S ad un dato istante, può immaginarsi come risultante degli spostamenti elastici originati allo stesso istante nel punto in questione da una conveniente distribuzione di centri luminosi sopra σ.

Nel capitolo seguente mostreremo come tali formole si possano trasformare senza difficoltà nelle formole del Conway che esprimono analiticamente il principio di Huyghens nei mezzi uniassici nella teoria elettromagnetica della luce.

20. — Dalle formole (40), (41) è facile dedurre che ogni integrale del sistema (20) risultante da due funzioni che all'infinito si annullano insieme alle loro derivate e sono regolari in tutto lo spazio — fatta eccezione al più che nel punto $u = v = w = 0$ ove ξ, η divengono infinite come $\frac{1}{r}$, in tal guisa però che i prodotti $r\xi$, $r\eta$, pur potendo non essere assolutamente continui, risultano continui secondo ogni retta uscente da tal punto — si ottiene ponendo

$$\xi = f_1[\alpha, \beta] \ , \quad \eta = f_2[\alpha, \beta] \ ,$$

ove con α, β s'indichino due funzioni regolari del tempo.

Per convincersi di ciò basta applicare le formole (40), (41) allo spazio S racchiuso da una sfera di raggio infinitamente grande e una sfera di raggio infinitamente piccolo aventi per centro comune il punto $u = v = w = 0$, tenendo presente che il secondo membro della formola (41) si ottiene dal secondo membro della formola (40) sostituendo in tutti i suoi termini f_2 ad f_1.

D'altra parte se, essendo ω, σ una qualunque soluzione del sistema (20) che soddisfi alla condizione

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0$$

— ciò che porta necessariamente che si abbia

$$\omega = -\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \sigma = \frac{\partial f}{\partial x}$$

ove f è una soluzione qualunque dell'equazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \ —$$

si pone

$$\xi = \omega \qquad \eta = \sigma \qquad \zeta = 0 \ ,$$

si ottiene una soluzione del sistema di Lamé che soddisfa alla condizione di trasversalità: e si ottiene pure una tale soluzione delle equazioni di Lamé se, qualunque sia la soluzione ω, σ del sistema (20), si pone:

$$\xi = \frac{\partial \omega}{\partial z} \qquad \eta = \frac{\partial \sigma}{\partial z} \qquad \zeta = -\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial y} \ . \tag{43}$$

Anzi è noto [1]) che qualunque integrale ξ, η, ζ delle equazioni di Lamé nei mezzi uniassici, soddisfacente alla condizione di trasversalità, si può ottenere dalle (43) scegliendo convenientemente le funzioni ω, σ.

È allora manifesto, non solo che esistono delle soluzioni del sistema di Lamé relativo ai mezzi uniassici che nella teoria elastica della luce possono assumersi a rappresentare gli spostamenti elastici presenti in un mezzo uniassico nel caso limite della presenza in esso di un unico punto luminoso, ma anche che, se s'indicano con $\alpha(t)$, $\beta(t)$ due funzioni regolari del tempo, le più semplici di tali soluzioni, quando si assuma il punto sede del centro luminoso come origine del sistema di coordinate (u, r, w), saranno date

1.° se non è identicamente $\zeta = 0$, dalle formole:

$$\xi = \frac{\partial}{\partial w} f_1[\alpha, \beta] \qquad \eta = \frac{\partial}{\partial w} f_2[\alpha, \beta] \tag{44}$$

$$\zeta = -\frac{\partial}{\partial u} f_1[\alpha, \beta] - \frac{\partial}{\partial v} f_2[\alpha, \beta] - \left\{\frac{\partial}{\partial u} f_3[\alpha] + \frac{\partial}{\partial v} f_3[\beta]\right\};$$

---

[1]) V. (V) art. 8, 1.

2.° se è identicamente $\zeta = 0$ dalle formole:

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial v}\,\bar{f}_3[\alpha] \qquad \eta = \frac{\partial}{\partial u}\,\bar{f}_3[\alpha] \qquad \zeta = 0\,. \tag{45}$$

Ammettiamo, secondo quanto sempre si è soliti fare, che i movimenti elastici rappresentati dalle formole ora scritte non s'inizino altro che dopo un istante fissato e del resto comunque remoto: ciò che equivale analiticamente a supporre che anteriormente a tale istante sia

$$\alpha = \beta = 0\,.$$

Allora, posto

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \mathrm{A} \qquad \frac{\partial\beta}{\partial t} = \mathrm{B}\,,$$

le formole (44) si possono anche scrivere nella forma seguente:

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}
4\pi\xi &= -\frac{uw}{a^3r^2}\left\{\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_{t-\frac{r}{a}} - \frac{vw}{ac^2\bar{r}^2}\left\{\frac{\mathrm{A}v-\mathrm{B}u}{u^2+v^2}\right\}_{t-\frac{\bar{r}}{a}} + \\
&\quad + \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a}} \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{w}{r}\,\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_\tau d\tau + \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}} \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{w}{\bar{r}}\,\frac{\mathrm{A}v-\mathrm{B}u}{u^2+v^2}\right\}_\tau d\tau \\
4\pi\eta &= -\frac{vw}{a^3r^2}\left\{\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_{t-\frac{r}{a}} + \frac{uw}{ac^2\bar{r}^2}\left\{\frac{\mathrm{A}v-\mathrm{B}u}{u^2+v^2}\right\}_{t-\frac{\bar{r}}{a}} + \\
&\quad + \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a}} \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{w}{r}\,\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_\tau d\tau - \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}} \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{w}{\bar{r}}\,\frac{\mathrm{A}v-\mathrm{B}u}{u^2+v^2}\right\}_\tau d\tau \\
4\pi\zeta &= \frac{u^2+v^2}{a^3r^2}\left\{\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_{t-\frac{r}{a}} \qquad + \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a}} \frac{u^2+v^2}{r^3}\left\{\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_\tau d\tau.
\end{aligned}\right.$$

Secondo queste formole il movimento elastico originato in un mezzo uniassico dalla presenza di un unico centro luminoso, sarà da considerare come risultante dalla composizione di quattro mo-

vimenti, pei quali, ad un istante qualunque, lo spostamento del punto (u, r, w) è rappresentato rispettivamente dai quattro vettori

$$(\xi^{(0)}\ \eta^{(0)}\ \zeta^{(0)}) \quad (\xi^{(s)}\ \eta^{(s)}\ \zeta^{(s)}) \quad (\xi^{(\bar{0})}\ \eta^{(\bar{0})}\ \zeta^{(\bar{0})}) \quad (\xi^{(\bar{s})}\ \eta^{(\bar{s})}\ \zeta^{(\bar{s})})$$

definiti dalle eguaglianze

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
\xi^{(0)} &= -\frac{uw}{a^3r^2}\left\{\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_{t-\frac{r}{a}} \\
\eta^{(0)} &= -\frac{vw}{a^3r^2}\left\{\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_{t-\frac{r}{a}} \\
\zeta^{(0)} &= \frac{u^2+v^2}{a^3r^2}\left\{\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_{t-\frac{r}{a}}
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
\xi^{(s)} &= -\frac{vw}{ac^2\bar{r}^2}\left\{\frac{\mathrm{A}v-\mathrm{B}u}{u^2+v^2}\right\}_{t-\frac{\bar{r}}{r}} \\
\eta^{(s)} &= \frac{uw}{ac^2\bar{r}^2}\left\{\frac{\mathrm{A}v-\mathrm{B}u}{u^2+v^2}\right\}_{t-\frac{\bar{r}}{a}} \\
\zeta^{(s)} &= 0
\end{aligned}\right. \\
&\left|\begin{aligned}
\xi^{(\bar{0})} &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a}} \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{w}{r}\,\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_\tau d\tau \\
\eta^{(\bar{0})} &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a}} \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{w}{r}\,\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_\tau d\tau \\
\zeta^{(\bar{0})} &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a}} \frac{u^2+v^2}{r^3}\left\{\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}v}{u^2+v^2}\right\}_\tau d\tau
\end{aligned}\right.
\left|\begin{aligned}
\xi^{(\bar{s})} &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}} \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{w}{\bar{r}}\,\frac{\mathrm{A}v-\mathrm{B}u}{u^2+v^2}\right\}_\tau d\tau \\
\eta^{(\bar{s})} &= -\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}} \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{w}{\bar{r}}\,\frac{\mathrm{A}v-\mathrm{B}u}{u^2+v^2}\right\}_\tau d\tau \\
\zeta^{(\bar{s})} &= 0\,.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.$$

Osserveremo subito che nessuno dei quattro movimenti considerati può avere un'esistenza fisica a sè, perchè, mentre il vettore (ξ, η, ζ), pur di scegliere convenientemente le funzioni α, β, risulta finito e continuo in tutto lo spazio — fatta eccezione che nel punto $u=v=w=0$ — insieme a quel numero delle sue derivate che più ci piace, i quattro vettori definiti dalle formole (47) hanno tutti delle singolarità lungo l'asse cui non si può dare un significato fisico. Anzi tali singolarità compariscono anche nei due vettori

$$(\xi^{(0)}+\xi^{(\bar{0})}\,,\ \eta^{(0)}+\eta^{(\bar{0})}\,,\ \zeta^{(0)}+\zeta^{(\bar{0})})$$
$$(\xi^{(s)}+\xi^{(\bar{s})},\ \eta^{(s)}+\eta^{(\bar{s})},\ \zeta^{(s)}+\zeta^{(\bar{s})})$$

ciascuno dei quali ci dà colle sue componenti una soluzione delle equazioni di Lamé soddisfacente alla condizione di trasversalità.

Il movimento corrispondente al vettore $(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)})$ si propaga dal centro luminoso per onde sferiche e il movimento corrispondente al vettore $(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)})$ per onde ellissoidiche di equazione $\bar{r}$=cost. Si vede subito che le direzioni degli spostamenti competenti in questi due movimenti a un punto qualunque dello spazio non variano al variar del tempo, e coincidono colle direzioni dei due diametri principali della conica sezione dell'elissoide d'elasticità relativo al punto sede del centro luminoso col piano condotto per tal punto normalmente alla retta che lo unisce al punto del mezzo cui ci riferiamo.

Al contrario le direzioni dei due vettori $(\xi^{(\overline{0})}, \eta^{(\overline{0})}, \zeta^{(\overline{0})})$ e $(\xi^{(\overline{s})}, \eta^{(\overline{s})}, \zeta^{(\overline{s})})$ variano col tempo, pur mantenendosi la direzione del secondo sempre normale all'asse del cristallo, e i movimenti corrispondenti non sono ondulatori. I valori delle due funzioni A, B ad un certo istante τ non contribuiscono ad un qualunque istante posteriore t soltanto alla formazione dei valori delle funzioni $\xi^{(\overline{0})}, \eta^{(\overline{0})}, \zeta^{(\overline{0})}$ e $\xi^{(\overline{s})}, \eta^{(\overline{s})}, \zeta^{(\overline{s})}$ relativi ai punti di una superficie, ma contribuiscono invece alla formazione dei valori di tali funzioni relativi a tutti quanti i punti rispettivamente interni alla sfera

$$r = a\,(t-\tau)$$

e all'elissoide

$$\bar{r} = a\,(t-\tau)\,,$$

cioè a tutti quanti i punti nei quali precedentemente all'istante t i valori delle due funzioni A, B all'istante τ hanno avuto parte nella formazione rispettivamente dei valori delle funzioni $\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}$ e $\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)}$.

Questo fatto analitico si può interpretare dicendo che le singole onde delle quali risultano i due movimenti corrispondenti al vettore $(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)})$ e al vettore $(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)})$ suscitano in tutto lo spazio da esse attraversato delle vibrazioni perenni che combinate tra di loro danno appunto origine ai due movimenti corrispondenti al vettore $(\xi^{(\overline{0})}, \eta^{(\overline{0})}, \zeta^{(\overline{0})})$ e al vettore $(\xi^{(\overline{s})}, \eta^{(\overline{s})}, \zeta^{(\overline{s})})$.

Ciò non è affatto in contradizione coi risultati sperimentali, perchè a grande distanza dal centro luminoso i due vettori $(\xi^{(\overline{0})}, \eta^{(\overline{0})}, \zeta^{(\overline{0})})$ e $(\xi^{(\overline{s})}, \eta^{(\overline{s})}, \zeta^{(\overline{s})})$ risultano sempre trascurabili rispetto ai vettori $(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)})$ e $(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)})$, e lo stesso accade anche in prossimità del centro luminoso se le due funzioni A, B sono periodiche con un periodo molto breve.

Il risultato ottenuto rende ragione anche del fatto che gli integrali di Lamé non risultano adatti a rappresentare il movimento elastico prodotto in un mezzo cristallino dalla presenza di un'unica sorgente luminosa di dimensioni piccolissime. Infatti tali integrali sono stati ottenuti in base al concetto che un tal movimento debba risultare da una successione di onde sferiche e di onde elissoidiche $\bar{r}$ = cost. che si propaghino nel mezzo le une *indipendentemente* dalle altre senza lasciar traccia del loro passaggio.

Osserveremo infine che, fissato un punto $(u^* \, v^* \, w^*)$ a gran distanza dal centro luminoso, punto di cui indicheremo con r^*, φ^*, θ^* le coordinate polari nel sistema di origine $u=v=w=0$, asse polare u, piano polare $u\,w$, se ci limitiamo a considerare i punti pei quali le quantità

$$\frac{u-u^*}{r^*} \qquad \frac{v-v^*}{r^*} \qquad \frac{w-w^*}{r^*}$$

risultano dello stesso ordine di grandezza di $\frac{1}{r^*}$, e poniamo per semplicità

$$B = 0\,,$$

avranno a meno di quantità dell'ordine di $\frac{1}{r^{*2}}$

$$\begin{cases} \xi^{(0)}(u,v,w) = -c\cos\theta^*\cos\varphi^*\,A\left[t-\frac{1}{a}\{\sin\theta^*\cos\varphi^*\,u+\sin\theta^*\sin\varphi^*\,v+\cos\theta^*\,w\}\right] \\ \eta^{(0)}(u,v,w) = -c\cos\theta^*\sin\varphi^*\,A\left[t-\frac{1}{a}\{\sin\theta^*\cos\varphi^*\,u+\sin\theta^*\sin\varphi^*\,v+\cos\theta^*\,w\}\right] \\ \zeta^{(0)}(u,v,w) = c\sin\theta^*\,A\left[t-\frac{1}{a}\{\sin\theta^*\cos\varphi^*\,u+\sin\theta^*\sin\varphi^*\,v+\cos\theta^*\,w\}\right] \end{cases}$$

ed anche

$$\begin{cases} \xi^{(s)}(u,v,w) = -\bar c \sin\bar\varphi^* \mathrm{A}\left[t-\dfrac{1}{\bar a}\{\sin\bar\theta^*\cos\bar\varphi^* u+\sin\bar\theta^*\sin\bar\varphi^* v+\cos\bar\theta^* w\}\right] \\ \eta^{(s)}(u,v,w) = \bar c\cos\bar\varphi^* \mathrm{A}\left[t-\dfrac{1}{\bar a}\{\sin\bar\theta^*\cos\bar\varphi^* u+\sin\bar\theta^*\sin\bar\varphi^* v+\cos\bar\theta^* w\}\right] \\ \zeta^{(s)}(u,v,w) = 0 \end{cases}$$

ove abbiamo indicato con $c, \bar c$ delle quantità costanti dell'ordine di $\dfrac{1}{r^*}$, con $\bar\varphi^*, \bar\theta^*$ la latitudine e la longitudine del raggio condotto dall'origine normalmente al piano tangente in $(u^*\, v^*\, w^*)$ all'elissoide $\bar r=$ cost. passante pel punto stesso, e infine con $\dfrac{\bar a}{2}$ l'inversa della lunghezza di quello dei due assi della conica sezione dell'elissoide d'elasticità col piano normale alla direzione $(\bar\theta^*\, \bar\varphi^*)$, che è perpendicolare alla direzione del vettore $(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)})$.

Vediamo così che le formole (46) nel caso limite di un centro luminoso a distanza infinita si riducono a quelle che rappresentano gli spostamenti elastici presenti nei singoli punti di un mezzo uniassico quando si ammette che il mezzo stesso debba risultar sede di una propagazione di onde luminose piane.

Le considerazioni ora svolte si possono applicare senza difficoltà anche allo studio del movimento elastico rappresentato dalle formole (45). Noi non ci soffermeremo su questo: noteremo soltanto che tale movimento si può considerare come risultante dalla composizione di due, pei quali lo spostamento di un punto qualunque del mezzo ai vari istanti è rappresentato da due vettori che hanno rispettivamente proprietà del tutto analoghe al vettore $(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)})$ e al vettore $(\xi^{(\bar s)}, \eta^{(\bar s)}, \zeta^{(\bar s)})$.

Capitolo V.

Il principio di Huyghens

21. — Nella teoria elettromagnetica della luce le equazioni di Maxwell-Hertz che regolano i fenomeni luminosi in un mezzo cristallino uniassico non conduttore e non soggetto ad azioni perturbatrici esterne — indicando con X, Y, Z e L, M, N rispettivamente le componenti della forza elettrica e della forza magnetica in unità elettromagnetiche, e con a, c due costanti che coi loro valori individuano il mezzo in questione — si possono scrivere

$$(48)_1 \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} \\ \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial z} \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} \end{cases} \qquad (48)_2 \begin{cases} -\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x}\,. \end{cases}$$

Ad esse sono da aggiungere le altre due, con esse compatibili:

$$(49) \qquad \frac{1}{a^2}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} = 0$$

$$(50) \qquad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} = 0\,.$$

Le equazioni $(48)_1$, quando da esse si eliminino L, M, N mediante le $(48)_2$ tenendo presente la (49), si possono porre nella forma seguente

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = \\ &= a^2 \Delta_2 X - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = \\ &= a^2 \Delta_2 Y - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}. \end{aligned}\right.$$

Ora, se $f(x\,y\,z\,t)$ è una qualunque soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 f,$$

ponendo

$$X = -\frac{\partial f}{\partial y} \qquad Y = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad Z = 0$$

si ottiene la più generale soluzione del sistema (51) per la quale sia verificata la condizione (49) e al tempo stesso sia identicamente

$$Z = 0.$$

Inoltre non è difficile convincersi che [1]), essendo $\bar{\omega}, \bar{\sigma}$ una soluzione qualunque del sistema

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial z^2} - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial z^2} + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\right), \end{aligned}\right.$$

[1]) Cfr. (V), art. 8, 1.

ponendo

$$X = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \qquad Y = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} \qquad Z = -\frac{c^2}{a^2} \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y}\right)$$

si ottiene la più generale soluzione del sistema (51) che soddisfi alla condizione

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

e ponendo

$$\bar{\omega} = \sigma \qquad \bar{\sigma} = -\omega$$

la più generale soluzione del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}\right) = \\ &= a^2 \Delta_2 \omega + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}\right) = \\ &= a^2 \Delta_2 \sigma - (a^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

cioè del sistema (20).

In base a quanto abbiamo detto in principio al § 20 possiamo allora concludere che le più semplici espressioni che si possono dare a X, Y, Z quando si vogliano rappresentare analiticamente le vibrazioni luminose di un mezzo uniassico nell'ipotesi della presenza in esso di un unico centro luminoso — se al solito indichiamo con $\alpha(t)$, $\beta(t)$ due qualunque funzioni regolari del tempo e ci riferiamo al sistema di coordinate (u, v, w) avente l'origine nel centro luminoso — si ottengono, se non è identicamente $Z = 0$, ponendo:

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial w} f_2[\alpha, \beta] \\ Y &= -\frac{\partial}{\partial w} f_1[\alpha, \beta] \\ Z &= -\frac{c^2}{a^2} \left(\frac{\partial}{\partial u} f_2[\alpha, \beta] - \frac{\partial}{\partial v} f_1[\alpha, \beta]\right) = \frac{\partial}{\partial v} \bar{f}_3[\alpha] - \frac{\partial}{\partial u} \bar{f}_3[\beta], \end{aligned}\right.$$

e, se è identicamente $Z=0$, ponendo:

$$(53)\qquad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial}{\partial v} f_3[\alpha] \\[2mm] Y = \dfrac{\partial}{\partial u} f_3[\alpha] \\[2mm] Z = 0\,. \end{cases}$$

La somiglianza delle funzioni che ci danno i secondi membri delle formole ora scritte con quelle che compariscono nei secondi membri delle formole (44) e (45) è troppo grande perchè sia necessario insistere sulle proprietà delle funzioni stesse.

22. — Le formole (40), (41), (42) possono senza alcuna modificazione applicarsi ad esprimere i valori assunti dalle funzioni L, M, N ad ogni istante, in ogni punto dello spazio S limitato da una superficie regolare qualunque σ, per i valori che agli istanti precedenti prendono su σ le funzioni L, M, N e le loro derivate prime, perchè, eliminando X, Y, Z dalle $(48)_2$ mediante le $(48)_1$, risulta subito che L, M, N oltre che alla condizione di trasversalità (50), soddisfano anche al sistema differenziale

$$(54)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 L}{\partial t^2} = a^2\Delta_2 L + (a^2-c^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial y}\right) \\[2mm] \dfrac{\partial^2 M}{\partial t^2} = a^2\Delta_2 M - (a^2-c^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial y}\right) \\[2mm] \dfrac{\partial^2 N}{\partial t^2} = a^2\Delta_2 N\,. \end{cases}$$

Ma da tali formole possono anche molto semplicemente dedursene altre del tutto simili applicabili alle funzioni X, Y, Z.

Basta per ciò osservare che se nelle equazioni (51) scambiamo tra di loro a, c e operato tale scambio introduciamo una nuova variabile z' col porre

$$z = \frac{c}{a}\,z'\,,$$

tali equazioni risultano identiche alle (54).

Su ciò noi non insisteremo e indicheremo piuttosto come dalle formole (40), (41), (42) si possono dedurre le formole date dal Conway come espressione del principio di Huyghens nei mezzi uniassici nella teoria elettromagnetica della luce.

23. — Supposto, secondo quanto si fa ordinariamente, che per i valori del tempo anteriori ad un istante fissato e del resto remoto quanto si vuole le funzioni X, Y, Z risultino nulle poniamo

$$l = \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \qquad m = \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)$$

$$n = \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right).$$

Le componenti del vettore (l, m, n) risulteranno legate alle componenti della forza elettrica dalle semplici relazioni

$$(55)\qquad X = a^2\left(\frac{\partial n}{\partial y}-\frac{\partial m}{\partial z}\right) \qquad Y = a^2\left(\frac{\partial l}{\partial z}-\frac{\partial n}{\partial x}\right) \qquad Z = c^2\left(\frac{\partial m}{\partial x}-\frac{\partial l}{\partial y}\right)$$

e inoltre sarà

$$(56)\qquad \frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial z} = 0$$

$$(57)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 l}{\partial t^2} = a^2\Delta_2\, l + (a^2-c^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial m}{\partial x}-\dfrac{\partial l}{\partial y}\right) \\[2mm] \dfrac{\partial^2 m}{\partial t^2} = a^2\Delta_2 m - (a^2-c^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial m}{\partial x}-\dfrac{\partial l}{\partial y}\right) \\[2mm] \dfrac{\partial^2 n}{\partial t^2} = a^2\Delta_2 n\,. \end{cases}$$

Alle funzioni l, m, n potremo dunque applicare le formole (40), (41), (42). Sostituendo le espressioni che in tal modo si ottengono per l, m, n nelle (55), X, Y, Z risultano rappresentate in ogni punto di S ad ogni istante, da integrali estesi a σ che involgono i valori presi su σ da l, m, n e dalle loro derivate prime. Tali integrali, coll'aiuto di un notissimo teorema di Gauss, possono senza difficoltà trasformarsi in modo da fare comparire in essi invece che i valori delle singole derivate prime di l, m, n i valori di X, Y, Z che per tali derivate si esprimono secondo le (55). Le formole cui così si perviene sono appunto le formole del Conway. Colle notazioni già introdotte esse si scrivono nel modo seguente:

$$
(58)\quad
\begin{cases}
\mathrm{X}(x\,y\,z\,t) = a^2 \int_\sigma d\sigma \Big[\frac{d}{dw} f_2[\mathrm{Z}\cos nv - \mathrm{Y}\cos nw, 0] + \\
\quad + \frac{d}{dw} f_2[0, \mathrm{X}\cos nw - \mathrm{Z}\cos nu] - \frac{d}{dv} f_3[\mathrm{Y}\cos nu - \mathrm{X}\cos nv] + \\
\quad + a^2 \Big\{ \frac{d}{dv}\Big(-\frac{d}{dv} f_3[n\cos nv - m\cos nw]\Big) - \frac{d}{dw}\frac{d}{dw} f_2[0, \cos nv - m\cos nw] \Big\} + \\
\quad + a^2 \Big\{ \frac{d}{dw}\frac{d}{dw} f_2[l\cos nw - n\cos nu, 0] - \frac{d}{du}\Big(-\frac{d}{dv} f_3[l\cos nw - n\cos nu]\Big) \Big\} + \\
\quad + c^2 \Big\{ \frac{d}{du}\frac{d}{dw} f_2[0, m\cos nu - l\cos nv] - \frac{d}{dv}\frac{d}{dw} f_2[m\cos nu - l\cos nv, 0] \Big\} \Big] : \\[2ex]
\mathrm{Y}(x\,y\,z\,t) = a^2 \int_\sigma d\sigma \Big[-\frac{d}{dw} f_1[\mathrm{Z}\cos nv - \mathrm{Y}\cos nw, 0] - \\
\quad - \frac{d}{dw} f_1[0, \mathrm{X}\cos nw - \mathrm{Z}\cos nu] + \frac{d}{du} f_3[\mathrm{Y}\cos nu - \mathrm{X}\cos nv] + \\
\quad + a^2 \Big\{ \frac{d}{dv}\frac{d}{du} f_3[n\cos nv - m\cos nw] - \frac{d}{dw}\Big(-\frac{d}{dw} f_1[0, n\cos nv \;\; m\cos nw]\Big) \Big\} + \\
\quad + a^2 \Big\{ \frac{d}{dw}\Big(-\frac{d}{du} f_1[l\cos nw - n\cos nu, 0]\Big) - \frac{d}{du}\frac{d}{du} f_3[l\cos nw - n\cos nu] \Big\} + \\
\quad + c^2 \Big\{ \frac{d}{du}\Big(-\frac{d}{du} f_1[0, m\cos nu - l\cos nv]\Big) - \frac{d}{dv}\Big(-\frac{d}{dw} f_1[m\cos nu - l\cos nv, 0]\Big) \Big\} \Big] : \\[2ex]
\mathrm{Z}(x\,y\,z\,t) = a^2 \int_\sigma d\sigma \Big[\frac{d}{dv} \bar{f}_3[\mathrm{Z}\cos nv - \mathrm{Y}\cos nw] - \\
\quad - \frac{d}{du} \bar{f}_3[\mathrm{X}\cos nw - \mathrm{Z}\cos nu] - \\
\qquad\qquad - a^2 \frac{d}{dv}\Big(-\frac{d}{du} \bar{f}_3[n\cos nv - m\cos nw]\Big) + \\
\quad + a^2 \frac{d}{dw}\frac{d}{dv} \bar{f}_3[l\cos nw - n\cos nu] + \\
\quad + c^2 \Big\{ \frac{d}{du}\Big(-\frac{d}{du} \bar{f}_3[m\cos nu - l\cos nv]\Big) - \frac{d}{dv}\frac{d}{dv} \bar{f}_3[m\cos nu - l\cos nv] \Big\} \Big) .
\end{cases}
$$

I risultati inclusi nelle formole (52), (53) rendono evidente che le formole ora scritte hanno tutte le proprietà richieste per poterle considerare come l'espressione analitica del principio di Huyghens nei mezzi uniassici nella teoria elettromagnetica della luce.

Mediante una semplice trasformazione di coordinate cui già più avanti abbiamo accennato, si potrebbe dalle formole del Conway dedurne altre del tutto simili che possono assumersi come espressione analitica del principio di Huyghens nei mezzi uniassici nella teoria elastica della luce.

24. — Termineremo il presente capitolo dimostrando come si possa verificare la esattezza delle formole ora trovate servendosi dello stesso metodo che ha impiegato il prof. Maggi nella sua memoria: *Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo* [1]) per dimostrare la formola di Kirchhoff. Ci limiteremo a mostrare che ognuno dei tre integrali che compaiono nei secondi membri delle (58) risulta nullo se il punto origine del sistema di coordinate (u, v, w) invece che interno è esterno allo spazio S. Dopo ciò non offre nessuna difficoltà il condurre a fine la dimostrazione servendosi del metodo che sempre si adopera in questioni simili a quella trattata.

Tenendo presenti le (55), da un notissimo teorema di Gauss discende immediatamente che nell'ipotesi che il punto $u=v=w=0$

[1]) Ann. di Mat., t. XVI.

sia esterno a σ si ha:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}=\int_\sigma \Big[& \frac{d}{dw} f_2[\mathrm{Z}\cos nv - \mathrm{Y}\cos nw, 0] + \frac{d}{dw} f_2[0, \mathrm{X}\cos nw - \mathrm{Z}\cos nu] - \\
& - \frac{d}{dv} f_3[\mathrm{Y}\cos nu - \mathrm{X}\cos nv] + \\
& - a^2 \Big\{ \frac{d^2}{dv^2} f_3[n\cos nv - m\cos nw] + \frac{d^2}{dw^2} f_2[0, n\cos nv - m\cos nw] \Big\} + \\
& + a^2 \Big\{ \frac{d^2}{dw^2} f_2[l\cos nw - n\cos nu, 0] + \frac{d^2}{du\,dv} f_3[l\cos nw - n\cos nu] \Big\} + \\
& + c^2 \Big\{ \frac{d}{du\,dw} f_2[0, m\cos nu - l\cos nv] - \frac{d^2}{dv\,dw} f_2[m\cos nu - l\cos nv, 0] = \Big\{
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \int_{\mathrm{S}} d\mathrm{S} \Big[& \frac{d}{dw} f_2\Big[a^2 \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}\Big) - c^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}\Big), 0\Big] + a^2 \frac{d^2}{dw^2} f_2\Big[\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}, 0\Big] - \\
& - c^2 \frac{d^2}{dv\,dw} f_2\Big[\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}, 0\Big] + \frac{d}{dw} f_2\Big[0, c^2 \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}\Big) - a^2 \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\Big)\Big] + \\
& + c^2 \frac{d^2}{du\,dw} f_2\Big[0, \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}\Big] - a^2 \frac{d^2}{dw^2} f_2\Big[0, \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\Big] - \\
& - \frac{d}{dv} f_3\Big[a^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\Big) - a^2 \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}\Big)\Big] - \\
& - a^2 \frac{d^2}{dv^2} f_3\Big[\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\Big] + a^2 \frac{d^2}{du\,dv} f_3\Big[\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}\Big] + \\
& + a^2 \frac{d^2}{dv^2} f_3\Big[\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\Big] + a^2 \frac{d_3}{dv^3} f_3[n] - a^2 \frac{d^3}{dv^2\,dw} f_3[m] + \\
& + a^2 \frac{d^2}{dw^2} f_2\Big[0, \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\Big] + a^2 \frac{d^3}{dv\,dw^2} f_2[0, n] - a^2 \frac{d^3}{dw^3} f_2[0, m] - \\
& - a^2 \frac{d^2}{dw^2} f_2\Big[\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial z}, 0\Big] - a^2 \frac{d^3}{dw^3} f_2[l, 0] + a^2 \frac{d^3}{du\,dw^2} f_2[n, 0] - \\
& - a^2 \frac{d^2}{du\,dv} f_3\Big[\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}\Big] - a^2 \frac{d^3}{du\,dv\,dw} f_3[l] + a^2 \frac{d^3}{du^2\,dv} f_3[n] - \\
& - c^2 \frac{d^2}{du\,dw} f_2\Big[0, \frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}\Big] - c^2 \frac{d^3}{du^2\,dw} f_2[0, m] + c^2 \frac{d^3}{du\,dv\,dw} f_2[0, l] + \\
& + c^2 \frac{d^2}{dv\,dw} f_2\Big[\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}, 0\Big] + c^2 \frac{d^3}{du\,dv\,dw} f_2[m, 0] - c^2 \frac{d^3}{dv^2\,dw} f_2[l, 0]\Big],
\end{aligned}
$$

ed anche per le (33), (34)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}=\int_\sigma d\sigma \Big[& \frac{d}{dw} f_1\Big[0, a^2 \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}\Big) - c^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}\Big)\Big] + \\
& + \frac{d}{dw} f_2\Big[0, c^2 \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}\Big) - a^2 \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\Big)\Big] - \\
& - \frac{d}{dv} f_3\Big[a^2 \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\Big) - a^2 \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}\Big)\Big] - \frac{d}{dw} \Big\{ a^2 \frac{d^2}{du^2} f_1[0, l] + \\
& + a^2 \frac{d^2}{dv^2} f_1[0, l] + a^2 \frac{d^2}{dw^2} f_1[0, l] + (a^2 - c^2) \frac{d}{dv}\Big(\frac{d}{du} f_2[0, l] - \frac{d}{dv} f_1[0, l]\Big] \Big\} \\
& - \frac{d}{dw} \Big\{ a^2 \frac{d^2}{du^2} f_2[0, m] + a^2 \frac{d^2}{dv^2} f_2[0, m] + a^2 \frac{d^2}{dw^2} f_2[0, m] - \\
& - (a^2 - c^2) \frac{d}{du}\Big(\frac{d}{du} f_2[0, m] - \frac{d}{dv} f_1[0, m]\Big) \Big\} + \\
& + a^2 \frac{d}{dv} \Big\{ \frac{d^2}{du^2} f_3[n] + \frac{d^2}{dv^2} f_3[n] + \frac{d^2}{dw^2} f_3[n] \Big\} \Big].
\end{aligned}
$$

Ora, qualunque siano le funzioni l, m, n, si ha *identicamente*

$$
\begin{aligned}
& a^2 \frac{d^2}{du^2} f_1[0, l] + a^2 \frac{d^2}{dv_2} f_1[0, l] + a^2 \frac{d^2}{dw^2} f_1[0, l] + \\
& \qquad + (a^2 - c^2) \frac{d}{dv}\Big(\frac{d}{du} f_2[0, l] - \frac{d}{dv} f_1[0, l]\Big) = f_1\Big[0, \frac{\partial^2 l}{\partial t^2}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& a^2 \frac{d^2}{du^2} f_2[0, m] + a^2 \frac{d^2}{dv^2} f_2[0, m] + a^2 \frac{d^2}{dw^2} f_2[0, m] \\
& \qquad - (a^2 - c^2) \frac{d}{du}\Big(\frac{d}{du} f_2[0, m] - \frac{d}{dv} f_1[0, m]\Big) = f_2\Big[0, \frac{\partial^2 m}{\partial t^2}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
a^2 \frac{d^2}{du^2} f_3[n] + a^2 \frac{d^2}{du^2} f_3[n] + a^2 \frac{d^2}{dw^2} f_3[n] = f_3\Big[\frac{\partial^2 n}{\partial t^2}\Big].
$$

D'altra parte dalle (56) e (57) segue che

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}\right) - c^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x}\right). \end{aligned}\right.$$

Sarà dunque, nell'ipotesi fatta che il punto $u = v = w = 0$ sia esterno allo spazio S:

$$\mathrm{I} = 0 .$$

In modo del tutto analogo si potrebbe dimostrare che anche gli altri due integrali che compariscono nei secondi membri delle formole del Conway, quando la superficie σ non contiene il punto origine del sistema di coordinate (u, v, w), risultano nulli.

Capitolo VI.

La regola di Huyghens

25. — Scopo principale di quest'ultimo capitolo sarà quello di far vedere come le formole (40), (41) (42) possano applicarsi a dimostrare analiticamente la ben nota regola di Huyghens che determina le direzioni dei due raggi rifratti che si originano, in generale, quando un raggio luminoso propagantesi in un mezzo isotropo arriva alla superficie di separazione di questo mezzo e di un mezzo anisotropo uniassico.

Nel corso della nostra trattazione ci riferiremo alla teoria elettromagnetica della luce, ma dal seguito della trattazione stessa risulterà evidente che il risultato finale non cambierebbe se ci riferissimo alla teoria elastica.

Immagineremo, per semplicità, che la superficie che separa il mezzo cristallino dal mezzo isotropo sia una superficie piana indefinita π e assumeremo per sistema coordinato un sistema cartesiano ortogonale $(x\,y\,z)$ coll'asse z parallelo all'asse ottico del cristallo e coll'origine in un punto qualunque O del piano π.

Sia:

$$x \cos a + y \cos b + z \cos c = 0$$

l'equazione di π nel sistema di coordinate $(x\,y\,z)$: se escludiamo che sia $\cos c = 0$, potremo sempre supporre

$$\cos c > 0 ,$$

ed anche

$$z > 0$$

in ogni punto dell'asse z appartenente al mezzo cristallino.

In quello che segue è appunto inclusa tale ipotesi, ma ci si può ben facilmente convincere mediante ovvie considerazioni di continuità, che il risultato finale cui arriveremo vale anche nel caso escluso.

Allo studio del fenomeno cui si riferisce la regola di Huyghens premetteremo qualche osservazione relativamente al fenomeno corrispondente ad una propagazione di onde luminose piane nel mezzo isotropo, quando su tutto il piano π nessun ostacolo si opponga al passaggio delle onde luminose dal mezzo isotropo al mezzo cristallino. Se supponiamo, come evidentemente è sempre lecito, che la direzione di propagazione delle onde luminose considerate sia perpendicolare alla retta q comune ai piani π ed $\widehat{xz}$, sulla pagina del piano π che guarda il mezzo isotropo i valori delle componenti L, M, N della forza magnetica risulteranno evidentemente costanti secondo ogni retta parallela alla retta q, cioè sopra ogni retta per la quale $y = \text{cost.}$: e se indichiamo con ι l'angolo d'incidenza sul piano π — angolo che, per ora, supporremo non nullo — delle onde piane presenti nel mezzo isotropo e con V la velocità di propagazione delle onde medesime, tali valori di L, M, N si propagheranno sul piano π in direzione normale alla direzione della retta q colla velocità $\dfrac{V}{\sin\iota}$, in un senso che potremo sempre supporre concorde con quello dell'asse y.

In base a questo, — tenendo conto che la lunghezza della perpendicolare abbassata da O sopra una retta $y = \text{cost.}$ del piano π, contata positivamente nel senso della normale a q concorde col senso dell'asse y, se s'indica con $\widehat{qx}$ l'angolo acuto che l'asse x forma colla retta q, è data da $y\,\dfrac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}$ — se rappresentiamo con

$$L_0 \cos kt \qquad M_0 \cos kt \qquad N_0 \cos kt$$

— ove L_0, M_0, N_0, k sono costanti da scegliersi convenientemente a seconda delle proprietà del sistema di onde piane incidenti su π e della natura dei due mezzi ottici in presenza — i valori che in O, sulla pagina di π che guarda il mezzo cristallino, al variar del tempo prendono le componenti della forza magnetica, sarà evidentemente da ammettere che i valori di L, M, N in un punto qualunque di tal pagina di π saranno dati da

$$\left\{\begin{aligned} L &= L_0 \cos k\left[t - \frac{y}{V}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right]\\ M &= M_0 \cos k\left[t - \frac{y}{V}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right]\\ N &= N_0 \cos k\left[t - \frac{y}{V}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right].\end{aligned}\right. \tag{59}$$

Ammetteremo inoltre che, detta n la direzione normale a π che penetra nel mezzo cristallino, nei punti di π i valori di $\dfrac{\partial L}{\partial n}$, $\dfrac{\partial M}{\partial n}$, $\dfrac{\partial N}{\partial n}$ siano della forma:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial n} &= k\,L_0^{(n)} \sin k\left[t - \frac{y}{V}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right]\\ \frac{\partial M}{\partial n} &= k\,M_0^{(n)} \sin k\left[t - \frac{y}{V}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right]\\ \frac{\partial N}{\partial n} &= k\,N_0^{(n)} \sin k\left[t - \frac{y}{V}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right]\end{aligned}\right. \tag{60}$$

ove $L_0^{(n)}$, $M_0^{(n)}$, $N_0^{(n)}$ sono delle costanti.

Di più noi supporremo sempre nel seguito che k sia così grande che le quantità dell'ordine di $\dfrac{1}{k}$ si possano trascurare nei nostri calcoli: ma supporremo pure che, qualunque possa essere il valore di k, non solo le costanti

$$L_0 \quad M_0 \quad N_0$$

ma anche le costanti

$$L_0^{(n)} \quad M_0^{(n)} \quad N_0^{(n)}$$

si conservino inferiori a un numero finito. La prima ipotesi è conforme al fatto che, qualunque possa risultare il valore di k, le componenti di L, M, N su ambedue le pagine di π dovranno sempre assumere valori finiti, e la seconda, del pari che l'ipotesi inclusa nelle formole (60), conferisce alle funzioni $\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial n}$, $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial n}$, $\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial n}$ una proprietà che ad esse certamente non potremmo negare se si ammettesse senza altro che, come è presumibile e come risulterà anche dal seguito della nostra trattazione, il sistema di onde piane incidenti su π origini nel mezzo cristallino uno o più sistemi di onde piane rifratte.

26. — Fin qui abbiamo supposto che su tutto il piano π nessun ostacolo si opponga al passaggio delle onde luminose dal mezzo isotropo nel mezzo cristallino. Ora vogliamo invece supporre che tutto il piano π, fatta eccezione di una certa area s, sia coperto da un involucro nero. Ciò si può ritenere equivalente al supporre che nell'ipotesi primitiva che su tutto il piano π nessun ostacolo si opponga alla propagazione della luce dal mezzo isotropo al mezzo cristallino, nel mezzo isotropo invece che un sistema di onde luminose piane sia presente un fascio di raggi luminosi: dimodochè il fenomeno fisico che così veniamo a prendere in esame è proprio il fenomeno cui si riferisce la regola di Huyghens.

Applichiamo le formole (40), (41), (42) a calcolare i valori che in tale ipotesi prendono le funzioni L, M, N nell'interno del mezzo cristallino.

Ammetteremo, ciò che anche nelle sue conseguenze è conforme all'esperienza, che tali valori di L, M, N siano dati a meno di quantità dell'ordine di $\frac{1}{k}$ dalle espressioni che si ottengono dalle formole in questione riferite alle funzioni L, M, N, quando si estendano le integrazioni che compariscono in tali formole alla sola area s e si assumano in ogni punto di s come valori di L, M, N e delle loro derivate prime i valori dati dalle (59), (60).

Avremo allora colle solite notazioni:

$$
(61)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{L}(x\,y\,z\,t) = \int_s ds \Bigg[& a^2 \frac{d}{dn} f_1 \Bigg[\mathrm{L}_0 \cos k\left(t - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right), \\
& \mathrm{M}_0 \cos k\left(t - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right)\Bigg] - \\
& - a^2 f_1 \Bigg[\mathrm{L}_0^{(n)} \sin k\left(t - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right), \\
& \mathrm{M}_0^{(n)} \sin k\left(t - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right)\Bigg] + \text{etc.}\Bigg] \\
\mathrm{M}(x\,y\,z\,t) = \int_s ds \Bigg[& a^2 \frac{d}{dn} f_2 \Bigg[\mathrm{L}_0 \cos k\left(t - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right), \\
& \mathrm{M}_0 \cos k\left(t - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right)\Bigg] - \\
& - a^2 f_2 \Bigg[\mathrm{L}_0^{(n)} \sin k\left(t - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right), \\
& \mathrm{M}_0^{(n)} \sin k\left(t - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right)\Bigg] + \text{etc.}\Bigg] \\
\mathrm{N}(x\,y\,z\,t) = \int_s ds \Bigg[& a^2 \frac{d}{dn} f_3 \Bigg[\mathrm{N}_0 \cos k\left(t - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right)\Bigg] - \\
& - a^2 f_3 \Bigg[\mathrm{N}_0^{(n)} \sin k\left(t - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right)\Bigg]\Bigg].
\end{aligned}
\right.
$$

Per calcolare i valori degli integrali che compariscono nei secondi membri di queste formole, ci serviremo di un teorema di Kirchhoff che spesso capita di applicare anche nella teoria analitica dei fenomeni ottici nei mezzi isotropi. Il teorema cui alludiamo è quello che ora enunceremo [1]).

---

[1]) Cfr. specialmente KIRCHOFF, Vorlesungen über Mathematische Optik, dritte Vorlesung.

Sia s un pezzo di superficie analitica; ζ una funzione analitica e G una funzione continua dei punti di s; δ una quantità costante su s che non escludiamo possa variare insieme a un certo parametro k.

Supposto che sul contorno di s non si abbiano dei tratti finiti lungo i quali sia $\zeta = \text{cost.}$, se s non contiene nessun punto pel quale sia

$$d\zeta = 0\,,$$

per $k = \infty$ l'integrale

$$\int_s k\,\mathrm{G} \sin(k\zeta + \delta)\, ds$$

diverrà infinitesimo di ordine non minore di $\frac{1}{k}$.

Se invece s contiene un punto P nel quale

$$d\zeta = 0\,,$$

immaginiamo un sistema cartesiano $(x''\,y''\,z'')$ coll'origine in P e l'asse z'' diretto secondo la normale in P ad s.

Lasciando fisso l'asse z'', potremo sempre con una rotazione intorno a P cambiare le direzioni degli assi x'', y'' in modo che dopo ciò risulti

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x''\,\partial y''}\right)_{\mathrm{P}} = 0\,.$$

Posto allora

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x''^2}\right)_{\mathrm{P}} = \mu_1 \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y''^2}\right)_{\mathrm{P}} = \mu_2\,,$$

se μ_1 e μ_2 hanno lo stesso segno, la quantità

$$\int_s k\,\mathrm{G} \sin(k\zeta + \delta)\, ds \mp \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} (\mathrm{G})_{\mathrm{P}} \cos(k\zeta + \delta)$$

— ove vale il segno — o il segno + secondochè μ_1, μ_2 sono ambedue positive o ambedue negative - per $k = \infty$ diverrà infinitesima di ordine non minore di $\frac{1}{k}$. Lo stesso accadrà, se μ_1, μ_2 hanno segni opposti, della quantità

$$\int_s k\,\mathrm{G} \sin(k\zeta + \delta)\, ds - \frac{\pi}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} (\mathrm{G})_{\mathrm{P}} \sin(k\zeta + \delta)\,.$$

Da questo teorema, tenendo presenti le ipotesi fatte sull'ordine di grandezza delle quantità

$$\begin{matrix} \mathrm{L}_0 & \mathrm{M}_0 & \mathrm{N}_0 \\ \mathrm{L}_0^{(n)} & \mathrm{M}_0^{(n)} & \mathrm{N}_0^{(n)}\,, \end{matrix}$$

segue subito che quando si vogliano calcolare i valori effettivi dei secondi membri delle (61), sempre restando nell'ordine d'approssimazione voluto potremo trascurare tutti i termini contenenti a fattore uno dei due integrali

$$\int_{t+\frac{r}{a}}^{t+\frac{\bar r}{a}} \sin k\left[\tau - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right] d\tau$$

$$\int_{t+\frac{r}{a}}^{t+\frac{\bar r}{a}} \cos k\left[\tau - \frac{(y+v)}{\mathrm{V}}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\right] d\tau$$

e potremo anche nell'eseguire le $\frac{d}{du}\,\frac{d}{dv}\,\frac{d}{dw}$ limitarci a derivare le funzioni cui tale derivate dopo le omissioni fatte vengono a riferirsi, soltanto in quanto u, v, w compariscono in $t - \frac{r}{a}$, $t - \frac{\bar r}{a}$.

Vediamo così che a meno di quantità dell'ordine di $\frac{1}{k}$ i valori di L, M, N saranno dati dalla somma di un certo numero d'integrali della forma

$$\int_s k\,\mathrm{G} \sin(k\zeta + \delta)\, ds$$

ove è

$$-\zeta = \frac{\bar{r}}{a} + \frac{(y+v)}{V}\frac{\cos qx}{\cos c}\sin\iota$$

oppure

$$-\zeta = \frac{\bar{r}}{a} + \frac{(y+v)}{V}\frac{\cos qx}{\cos c}\sin\iota$$

e inoltre

$$\delta = kt.$$

27. — Cerchiamo allora di stabilire per quali posizioni del punto (xyz) nell'interno del mezzo cristallino accadrà che, coll'uno oppure coll'altro significato di ζ, in un punto $P \equiv (x_P, y_P, z_P)$ appartenente all'area s si abbia

$$d\zeta = 0 \tag{62}$$

quando si consideri ζ come funzione dei punti di π. Vedremo che, risoluta tale questione, la regola di Huyghens ci si presenta come una conseguenza immediata del teorema di Kirchhoff sopra ricordato.

Siccome la proprietà della funzione ζ espressa dalla (62), sia essa dovuta al fatto che nel punto P la derivata di ζ secondo qualunque direzione sia nulla, sia essa dovuta al fatto che nel punto P il piano π tocchi la superficie $\zeta = \text{cost.}$ che passa pel punto stesso, si mantiene per una qualunque trasformazione di coordinate, per procedere con maggior semplicità, riferendoci dapprima al caso che sia

$$-\zeta = \frac{r}{a} + \frac{y+v}{V}\frac{\cos \widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota,$$

all'attuale sistema coordinato (xyz) ne sostituiremo un altro $(x^* y^* z^*)$ pel quale l'origine sia ancora il punto O, la direzione positiva dell'asse z^* coincida con quella di n, e la direzione positiva dell'asse y^* colla direzione di π normale a q concorde all'asse y. Si vede facilmente che per eseguire questa trasformazione di coordinate sarà

da porre

$$\left\{\begin{aligned} x &= x^*\cos\widehat{qx} + y^*\cos b\sin\widehat{qx} + z^*\cos a \\ y &= y^*\frac{\cos c}{\cos\widehat{qx}} + z^*\cos b \\ z &= \pm x^*\sin\widehat{qx} - y^*\cos b\cos\widehat{qx} + z^*\cos c \end{aligned}\right. \tag{63}$$

ove varrà il segno + o il segno — secondochè la direzione della retta q che si assume come direzione positiva dell'asse x^* è interna all'angolo retto compreso tra le direzioni positive degli assi x, z o esterna ad esso.

Nei punti di s avremo allora

$$\frac{r}{a} + \frac{y+v}{V}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota = \frac{r}{a} + \frac{y^*\sin\iota}{V},$$

e siccome, indicando con x_P^*, y_P^*, z_P^* le coordinate di P nel sistema ora introdotto [1]) e con r_P la distanza di P dal punto (xyz), si ha

$$-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x^*}\right)_P = \frac{x_P^* - x^*}{ar_P} \qquad -\left(\frac{\partial\zeta}{dy^*}\right)_P = \frac{y_P^* - y^*}{ar_P} + \frac{\sin\iota}{V}$$

la condizione (59) non sarà mai soddisfatta per

$$-\zeta = \frac{r}{a} + \frac{y+v}{V}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota$$

se non sarà

$$\frac{a\sin\iota}{V} \leq 1$$

e quando ciò accada (e quindi si possa porre

$$\frac{a\sin\iota}{V} = \sin\rho,$$

ove ρ è un angolo conveniente che potremo supporre $\leq \frac{\pi}{2}$) tale condizione sarà soddisfatta allora e allora soltanto il punto (xyz)

[1]) Evidentemente sarà $z_P^* = 0$.

appartenga al piano $x^* = \text{cost.}$ per P e insieme al raggio di tal piano che esce da P in senso concorde al senso dell'asse y^* e forma con z^* l'angolo ρ. Tale raggio si può ben facilmente costruire osservando che il suo punto d'incontro colla sfera di centro P e di raggio a coincide col punto in cui tale sfera è toccata da uno dei due piani ad essa tangenti che passano per la retta

$$z^* = 0 \qquad y^* - y^*_P = \frac{a}{\sin\rho} = \frac{V}{\sin\iota}$$

e precisamente col punto in cui tale sfera è toccata dal piano π_0 che nel sistema di coordinate $(x^*\, y^*\, z^*)$ ha per equazione:

$$(y^* - y^*_P)\sin\rho + z^*\cos\rho = a$$

e nel sistema di coordinate $(x\,y\,z)$:

$$\left(\cos\rho - \frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\rho\cos b\right)\left(x\cos a + y\cos b + z\cos c\right) +$$
$$+ (y - y_P)\sin\rho\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c} = a\,.$$

Passiamo ora a determinare le posizioni del punto (xyz) nell'interno del mezzo cristallino per le quali risulterà soddisfatta in P la condizione (62), quando sia

$$-\zeta = \frac{\bar r}{a} + \frac{y+v}{V}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota = \frac{\bar r}{a} + \frac{y+v}{a}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\rho\,.$$

Cambiamo di coordinate ponendo

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{a}{c}\,x &= \bar x \\ \frac{a}{c}\,y &= \bar y \\ z &= \bar z\,: \end{aligned}\right.$$

con ciò la questione da risolvere si riconduce subito a quella precedentemente trattata.

Nel sistema di coordinate $(\bar x\,\bar y\,\bar z)$ l'equazione del piano π sarà:

$$\cos\bar a\,\bar x + \cos\bar b\,\bar y + \cos\bar c\,\bar z = 0$$

ove

$$\cos\bar a = \frac{\frac{c}{a}\cos a}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{a^2}\cos^2 c}}$$

$$\cos\bar b = \frac{\frac{c}{a}\cos b}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{a^2}\cos^2 c}}$$

$$\cos\bar c = \frac{\cos c}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{a^2}\cos^2 c}}\,.$$

Detto $\overline{\widehat{qx}}$ l'angolo acuto tale che

$$\operatorname{tg}\overline{\widehat{qx}} = \left|\frac{\cos\bar a}{\cos\bar c}\right| = \left|\frac{c}{a}\,\frac{\cos a}{\cos c}\right|$$

consideriamo l'equazione in $\bar\rho$

$$\frac{c}{a}\sin\rho\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c} = \sin\bar\rho\,\frac{\cos\overline{\widehat{qx}}}{\cos\bar c}\,.$$

Se non sarà possibile soddisfare a questa equazione con nessun valore di $\bar\rho$, per nessuna posizione del punto $(x\,y\,z)$ potrà esser soddisfatta in P la condizione voluta: se invece esisterà un angolo $\bar\rho \leq \frac{\pi}{2}$ che soddisfi a tale equazione e indicheremo con $(\bar x_P\,\bar y_P\,\bar z_P)$ le coordinate $(\bar x\,\bar y\,\bar z)$ del punto P, la condizione voluta sarà soddisfatta in $(x\,y\,z)$ allora e allora soltanto che il punto $(x\,y\,z)$ appartenga al raggio che unisce P col punto interno al mezzo cristallino nel quale il piano π_s di equazione

$$\left(\cos\bar{\rho} - \frac{\cos\widehat{qx}}{\cos\bar{c}}\sin\bar{\rho}\right)\left(\bar{x}\cos\bar{a} + \bar{y}\cos\bar{b} + \bar{z}\cos\bar{c}\right) + $$
$$+ \left(\bar{y} - \bar{y}_P\right)\sin\bar{\rho}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos\bar{c}} = a$$

tocca la sfera

$$(\bar{x} - \bar{x}_P)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_P)^2 + (\bar{z} - \bar{z}_P)^2 = a^2:$$

cioè al raggio che unisce P col punto interno al mezzo cristallino nel quale l'elissoide

$$\frac{a^2}{c^2}(x - x_P)^2 + \frac{a^2}{c^2}(y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 = a^2$$

è toccato dal piano di equazione:

$$\left(\cos\bar{\rho} - \frac{c^2}{a^2}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\,\frac{\sin\rho\cos b}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}\cos^2 c}}\right) \times$$
$$\times \frac{x\cos a + y\cos b + z\cos c}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{(a^2 - c^2)}{a^2}\cos^2 c}} + (y - y_P)\sin\rho\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}$$

ove

$$\cos\bar{\rho} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\rho\,\frac{1 + \frac{c^2}{a^2}\frac{\cos^2 a}{\cos^2 c}}{1 + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 c}}\,\frac{1}{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}\cos^2 c}}\,.$$

Tale piano passa anch'esso per la retta

$$z^* = 0 \qquad y^* - y_P^* = \frac{a}{\sin\rho}\,.$$

Per il teorema di Kirchhoff sopra ricordato possiamo dunque concludere che in un punto $(x\,y\,z)$ del mezzo cristallino i valori di

L, M, N, sempre a meno di quantità dell'ordine di $\frac{1}{k}$, saranno certamente nulli se nell'area s non esisterà alcun punto $(x_P\,y_P\,z_P)$ tale che, se esistono due raggi r_0, r_1 che lo uniscano a due punti interni al mezzo cristallino nei quali rispettivamente la sfera

$$(x - x_P)^2 + (y - y_P) + (z - z_P) = a^2$$

e l'elissoide

$$\frac{a^2}{c^2}(x - x_P)^2 + \frac{a^2}{c^2}(y - y_P)^2 + (z - z_P)^2 = a^2$$

siano toccati dai piani passanti per la retta

$$z^* = 0 \qquad y^* - y_P^* = \frac{a}{\sin\rho}\,,$$

il punto $(x\,y\,z)$ venga a cadere sopra uno di tali raggi.

Tradotto nel linguaggio della fisica sperimentale tale risultato ci dà appunto la regola di Huyghens che era nostro scopo dimostrare:

Immaginiamo che un raggio luminoso propagantesi in un mezzo isotropo in cui è V *la velocità della luce arrivi, in un punto* P, *alla superficie piana* π *che separa tal mezzo da un mezzo cristallino uniassico con un angolo d'incidenza* $= \iota$. *A partire dal punto* P *sulla retta d'intersezione del piano* π *col piano d'incidenza riportiamo nella direzione di tal retta concorde alla direzione di propagazione del raggio luminoso un segmento* $= \frac{V}{\sin\iota}$ [1]) *e per l'estremo di questo segmento conduciamo la perpendicolare* q *al piano d'incidenza. Per la retta* q *conduciamo poi, se è possibile, i due piani che toccano in due punti* T_0, T_1 *appartenenti al mezzo cristallino, rispettivamente la falda sferica e la falda elissoidica della superficie di Fresnel relativa al mezzo cristallino considerato e al punto* P. *Al raggio incidente corrisponderanno nell'interno del mezzo cri-*

[1]) Se $\sin\iota = 0$ tale direzione non è determinata e la retta q è la retta all'infinito del piano π.

stallino due raggi rifratti, uno r_0 — raggio ordinario — avente la direzione della retta che unisce il punto P col punto T_0 e l'altro r_s — raggio straordinario — avente la direzione della retta che unisce il punto P col punto T_s.

28. — Completeremo ora la ricerca precedente applicando il teorema di Kirchhoff a calcolare i valori di L, M, N in un punto $(x y z)$ che giaccia sul raggio r_0 o sul raggio r_s relativo a un punto P di s.

Supposto dapprima

$$-\zeta = \frac{r}{a} + \frac{y+v}{V}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota = \frac{r}{a} + \frac{\sin\rho}{a}y^*,$$

se in P sarà

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x^*}\right)_P = 0 \qquad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y^*}\right)_P = 0,$$

cioè se sarà

$$x^*_P = x^* \qquad \frac{y^* - y^*_P}{r_P} = \sin\rho,$$

avremo pure

$$-(\zeta)_P = \frac{1}{a}(y^*\sin\rho + z^*\cos\rho) =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\cos\rho - \sin\rho\cos b\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\right)(x\cos a + y\cos b + z\cos c) + y\frac{\sin\rho}{a}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}$$

e anche

$$-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^{*2}}\right)_P = \frac{1}{ar_P} \quad \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^*\partial y^*}\right)_P = 0 \quad -\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^{*2}}\right) = \frac{\cos^2 r}{ar_P},$$

e quindi, qualunque sia la funzione continua G dei punti di s, se $\delta = kt$, potremo scrivere, a meno di quantità dell'ordine di $\frac{1}{k}$:

$$\int_s k\,\mathrm{G}\sin(k\zeta + \delta)\,ds = -\frac{2a\pi r_P}{\cos\rho}(\mathrm{G})_P \times$$

$$\times \cos k\left[t - \frac{1}{a}\left(\cos\rho - \sin\rho\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\cos b\right)\times\right.$$

$$\left.\times(x\cos a + y\cos b + x\cos c) - y\frac{\sin\rho}{a}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\right].$$

Analogamente se

$$-\zeta = \frac{\bar r}{a} + \frac{y+v}{V}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota,$$

servendoci della trasformazione di coordinate data dalle (64), posto

$$\bar r_P = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}(x - x_P)^2 + \frac{a^2}{c^2}(y - y_P)^2 + (z - z_P)^2},$$

si trova

$$\int_s k\,\mathrm{G}\sin(k\zeta + \delta)\,ds = -\frac{2a\pi\bar r_P}{\cos\bar\rho}(\mathrm{G})_P \times$$

$$\times \cos k\left[t - \frac{1}{a}\left(\cos\bar\rho - \frac{c^2}{a^2}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\frac{\sin\rho\cos b}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}\cos^2 c}}\right)\right.$$

$$\left.\frac{x\cos a + y\cos b + z\cos c}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}\cos^2 c}} - y\frac{\sin\rho}{a}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\right]$$

ove al solito

$$\cos\bar\rho = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\rho\,\frac{1 + \frac{c^2}{a^2}\frac{\cos^2 a}{\cos^2 c}}{1 + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 c}}\,\frac{1}{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}\cos^2 c}}.$$

Introduciamo i risultati ora ottenuti nei secondi membri delle formule (61) che, semplificati come abbiamo detto in fine del § 26, sono dati appunto dalla somma di un certo numero di integrali della forma

$$\int_s k\,\mathrm{G}\sin(k + \delta)\,ds$$

ove

$$-\zeta = \frac{r}{a} + \frac{y+v}{a}\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\rho$$

oppure

$$-\zeta = \frac{\bar{r}}{a} + \frac{y+v}{a}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\rho$$

e

$$\delta = kt.$$

Siccome in tutti questi integrali la funzione G risulta dal prodotto di $\frac{1}{r}$ o di $\frac{1}{\bar{r}}$ — secondochè

$$-\zeta = \frac{r}{a} + \frac{y+v}{V}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota$$

oppure

$$-\zeta = \frac{\bar{r}}{a} + \frac{y+v}{V}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\sin\iota\ —$$

per una funzione dei punti di s il cui valore in P non dipende nè dalla posizione di (xyz) nè dal tempo, ma soltanto dalle direzioni del raggio r_0 e del raggio r_s (che non variano evidentemente quando P si muove su s) otterremo così — indicando con L_1, L_2, M_1, M_2, N dei coefficienti indipendenti da t i cui valori, come subito si vede, dipendono linearmente dai valori dei coefficienti $L_0^{(n)}, M_0^{(n)}, N_0^{(n)}$ che compariscono nelle formole (60) —:

$$(65)\qquad \begin{cases} L = L^{(0)} + L^{(s)} \\ M = M^{(0)} + M^{(s)} \\ N = N^{(0)} + N^{(s)} \end{cases}$$

ove:

1.° $L^{(0)}, M^{(0)}, N^{(0)}$ sono nulli se non esiste nessun punto P di s tale che il raggio r_0 ad esso relativo passi pel punto $(x\,y\,z)$ e nel caso

contrario sono dati da

$$(66)\qquad \begin{cases} L^{(0)} = L_1\cos k\left[t - \frac{1}{a}\left(\cos\rho - \sin\rho\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\cos b\right)\times\right. \\ \qquad\qquad \left.\times\,(x\cos a + y\cos b + z\cos c) - y\,\frac{\sin\rho}{a}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\right] \\ M^{(0)} = M_1\cos k\left[t - \frac{1}{a}\left(\cos\rho - \sin\rho\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\cos b\right)\times\right. \\ \qquad\qquad \left.\times\,(x\cos a + y\cos b + z\cos c) - y\,\frac{\sin\rho}{a}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\right] \\ N^{(0)} = N_1\cos k\left[t - \frac{1}{a}\left(\cos\rho - \sin\rho\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\cos b\right)\times\right. \\ \qquad\qquad \left.\times\,(x\cos a + y\cos b + z\cos c) - y\,\frac{\sin\rho}{a}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\right] \end{cases}$$

2.° $L^{(s)}, M^{(s)}, N^{(s)}$ sono nulli se non esiste nessun punto P di s tale che il raggio r_s ad esso relativo passi pel punto $(x\,y\,z)$ e nel caso contrario sono dati da

$$(67)\qquad \begin{cases} L^{(s)} = L_2\cos k\left[t - \frac{1}{a}\left(\cos\bar{\rho} - \frac{c^2}{a^2}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\,\frac{\sin\rho\cos b}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{a^2}\cos^2 c}}\right)\times\right. \\ \qquad\qquad \left.\times\,\frac{x\cos a + y\cos b + z\cos c}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{a^2}\cos^2 c}} - y\,\frac{\sin\rho}{a}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\right] \\ M^{(s)} = M_2\cos k\left[t - \frac{1}{a}\left(\cos\bar{\rho} - \frac{c^2}{a^2}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\,\frac{\sin\rho\cos b}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{a^2}\cos^2 c}}\right)\times\right. \\ \qquad\qquad \left.\times\,\frac{x\cos a + y\cos b + z\cos c}{\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{a^2}\cos^2 c}} - y\,\frac{\sin\rho}{a}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\right] \\ N^{(s)} = 0\,. \end{cases}$$

Osserveremo subito che se indichiamo con

$$\alpha_0 \quad \beta_0 \quad \gamma_0$$

i coseni di direzione di r_0, e con

$$\alpha'_s \quad \beta'_s \quad \gamma'_s$$

i coseni di direzione della normale r'_s al piano π_s, e se indichiamo anche con $\frac{\bar{a}}{2}$ l'inversa della lunghezza di quello dei due assi della conica sezione dell'elissoide d'elasticità relativo a un punto qualunque del mezzo considerato col piano condotto per tal punto parallelamente al piano π_s, che è perpendicolare alla direzione del vettore $(L^{(s)}, M^{(s)}, N^{(s)})$, potremo scrivere le formole (66), (67) anche nella forma seguente

$$(68) \quad \begin{cases} L^{(0)} = L_1 \cos k \left[t - \frac{1}{a}(\sigma_0 x + \beta_0 y + \gamma_3 z)\right] \\ M^{(0)} = M_1 \cos k \left[t - \frac{1}{a}(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right] \\ N^{(0)} = N \cos k \left[t - \frac{1}{a}(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right] \end{cases}$$

$$(69) \quad \begin{cases} L^{(s)} = L_2 \cos k \left[t - \frac{1}{\bar{a}}(\alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z)\right] \\ M^{(s)} = M_2 \cos k \left[t - \frac{1}{\bar{a}}(\alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z)\right] \\ N^{(s)} = 0 . \end{cases}$$

In un punto $(x\, y\, z)$ appartenente ad s dovendo aversi:

$$\begin{cases} L = L_0 \cos k \left[t - \frac{y}{V} \frac{\cos \widehat{qx}}{\cos c} \sin \iota\right] \\ M = M_0 \cos k \left[t - \frac{y}{V} \frac{\cos \widehat{qx}}{\cos c} \sin \iota\right] \\ N = N_0 \cos k \left[t - \frac{y}{V} \frac{\cos \widehat{qx}}{\cos c} \sin \iota\right] , \end{cases}$$

dovrà essere

$$(70) \quad \begin{cases} L_0 = L_1 + L_2 \\ M_0 = M_1 + M_2 \\ N_0 = N . \end{cases}$$

Otteniamo così per $L_0^{(n)}\, M_0^{(n)}\, N_0^{(n)}$ tre equazioni lineari, risolvendo le quali le quantità L_1, L_2, M_1, M_2, N risultano tutte perfettamente determinate. Ma si possono calcolare i valori di queste quantità anche senza prima conoscere i valori di $L_0^{(n)}, M_0^{(n)}, N_0^{(n)}$, perchè, scrivendo le espressioni effettive di L_1, L_2, M_1, M_2 si riconosce subito che, indicando con

$$\alpha_s \quad \beta_s \quad \gamma_s$$

i coseni di direzione di r_s — che evidentemente sono legati ai coseni di direzione di r'_s dalla relazione

$$\alpha_s \beta'_s - \alpha'_s \beta_s -$$

si ha

$$L_1 \beta_0 - M_1 \alpha_0 = 0 \qquad L_2 \alpha_s + M_2 \beta_s = 0 .$$

Queste due relazioni, insieme alle due altre

$$L_1 + L_2 = L_0 \qquad M_1 + M_2 = M_0 ,$$

ci danno subito

$$L_1 = \frac{L_0 \alpha_s + M_0 \beta_s}{\sigma_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_s} \alpha_0 \qquad L_2 = \frac{L_0 \beta_0 - M_0 \sigma_0}{\alpha_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_t} \beta_s$$

$$M_1 = \frac{L_0 \alpha_s + M_0 \beta_s}{\sigma_0 \sigma_s + \beta_0 \beta_s} \beta_0 \qquad M_2 = - \frac{L_0 \beta_0 - M_0 \alpha_0}{\sigma_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_s} \sigma_s .$$

Trovati così i valori di L_1, L_2, M_1, M_2, siccome di più evidentemente si ha

$$N = N_0 ,$$

le formole (68), (69) assumono la forma finale

$$(71)\quad \left\{\begin{aligned} L^{(0)} &= \frac{L_0\,\alpha_s + M_0\beta_s}{\alpha_0\,\alpha_s + \beta_0\,\beta_s}\,\alpha_0 \cos k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right] \\ M^{(0)} &= \frac{L_0\,\alpha_s + M_0\beta_s}{\alpha_0\,\alpha_s + \beta_0\,\beta_s}\,\beta_0 \cos k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right] \\ N^{(0)} &= N_0 \cos k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right] \end{aligned}\right.$$

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} L^{(s)} &= \frac{L_0\beta_0 - M_0\alpha_0}{\alpha_0\,\alpha_s + \beta_0\,\beta_s}\,\beta_s \cos k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z)\right] \\ M^{(s)} &= -\frac{L_0\beta_0 - M_0\alpha_0}{\alpha_0\,\alpha_s + \beta_0\,\beta_s}\,\alpha_s \cos k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z)\right] \\ N^{(s)} &= 0\,. \end{aligned}\right.$$

Restano così completamente determinati i valori di L, M, N in un punto (x, y, z) che appartenga al raggio r_0 o al raggio r_s relativo a un punto P di s.

29. — Secondo le formole ora scritte avremo, sempre nel nostro ordine d'approssimazione e indicando con $\widehat{r_0 n}$ e $\widehat{r'_s n}$ gli angoli che le direzioni r_0 e r'_s formano con n,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial n} = {} & \frac{k}{a}\,\frac{L_0\alpha_s + M_0\beta_s}{\alpha_0\alpha_s + \beta_0\beta_s}\,\alpha_0 \sin k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right]\cos\widehat{r_0 n} + \\ & + \frac{k}{a}\,\frac{L_0\beta_0 - M_0\alpha_0}{\alpha_0\alpha_s + \beta_0\beta_s}\,\beta_s \sin k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z)\right]\cos\widehat{r'_s n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial n} = {} & \frac{k}{a}\,\frac{L_0\alpha_s + M_0\beta_s}{\alpha_0\alpha_s + \beta_0\beta_s}\,\beta_0 \sin k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right]\cos\widehat{r_0 n} - \\ & - \frac{k}{a}\,\frac{L_0\beta_0 - M_0\alpha_0}{\alpha_0\alpha_s + \beta_0\beta_s}\,\alpha_s \sin k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha'_s x + \beta'_r y + \gamma'_s z)\right]\cos\widehat{r'_s n} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N}{\partial n} = \frac{k}{a}\,N_0 \sin k\left[t - \frac{1}{a}(a_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right]\cos\widehat{r_0 n}$$

e quindi anche

$$\left\{\begin{aligned} L_0^{(n)} &= \frac{k}{a}\,\frac{L_0\alpha_s + M_0\beta_s}{\alpha_0\alpha_s + \beta_0\beta_s}\,\alpha_0 \cos\widehat{r_0 n} + \frac{k}{a}\,\frac{\beta_0 L_0 - \alpha_0 M_0}{\alpha_0\alpha_s + \beta_0\beta_s}\,\beta_s \cos\widehat{r'_s n} \\ M_0^{(n)} &= \frac{k}{a}\,\frac{L_0\alpha_s + M_0\beta_s}{\alpha_0\alpha_s + \beta_0\beta_s}\,\beta_0 \cos\widehat{r_0 n} - \frac{k}{a}\,\frac{\beta_0 L_0 - \alpha_0 M_0}{\alpha_0\alpha_s + \beta_0\beta_s}\,\alpha_s \cos\widehat{r'_s n} \\ L_0^{(n)} &= \frac{k}{a}\,N_0 \cos\widehat{r_0 n}\,. \end{aligned}\right.$$

Sostituendo questi valori di $L_0^{(n)}$ $M_0^{(n)}$ $N_0^{(n)}$ nelle tre equazioni fornite per tali quantità dalle relazioni (70), tali equazioni dovranno risultar soddisfatte, almeno nell'ordine d'approssimazione a cui ci siamo sempre tenuti nei nostri calcoli. Siccome su ciò si potrebbe avere qualche dubbio, faremo ora alcune osservazioni che ci renderanno convinti che ciò deve verificarsi, senza bisogno di ricorrere al calcolo diretto dei valori che assumono le L_1, L_2, M_1, M_2, N per la sostituzione in questione.

Sia ponendo

$$L = L^{(0)} \qquad M = M^{(0)} \qquad N = N^{(0)}$$

ove $L^{(0)}, M^{(0)}, N^{(0)}$ sono dati dalle formole (71) sia ponendo

$$L = L^{(s)} \qquad M = M^{(s)} \qquad N = N^{(s)}$$

ove $L^{(s)}, M^{(s)}, N^{(s)}$ sono dati dalle formole (72) si ottiene una soluzione del sistema

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} &= a^2\Delta_2 L + (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial M} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} &= a^2\Delta_2 M - (a^2 - c^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} &= a^2\Delta_2 N \end{aligned}\right.$$

che soddisfa anche alla condizione di trasversalità. Otterremo dunque una soluzione di questo sistema che soddisfa alla condizione di trasversalità anche ponendo

$$\begin{cases} L = L^{(0)} + L^{(s)} \\ M = M^{(0)} + M^{(s)} \\ N = N^{(0)} + N^{(s)} . \end{cases}$$

Ammettiamo in primo luogo che ad essa siano applicabili le formole (40), (41), (42) anche quando come superficie σ si assuma la superficie piana indefinita π: ognuna delle funzioni

$$L^{(0)} + L^{(s)} \qquad M^{(0)} + M^{(s)} \qquad N^{(0)} + N^{(s)}$$

verrà allora ad esser rappresentata dalla somma di un certo numero d'integrali estesi a tutto il piano π aventi colle solite notazioni una delle forme seguenti:

$$\int_s k\, G \sin(k\zeta + \delta)\, ds$$

$$\int_s G \sin(k\zeta + \delta)\, ds$$

$$\int_s \frac{G}{k} \sin(k\zeta + \delta)\, ds$$

ove al solito

$$-\zeta = \frac{r}{a} + \frac{y + v}{V} \sin \iota \frac{\cos \widehat{qx}}{\cos c}$$

oppure

$$-\zeta = \frac{\bar{r}}{a} + \frac{y + v}{V} \sin \iota \frac{\cos \widehat{qx}}{\cos c} .$$

Ammettiamo inoltre che a tali integrali si possa applicare il teorema di Kirchhoff enunciato al § 26.

Si vede subito in base ai risultati dei § 27, 28 che nelle ipotesi fatte, indicando con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ delle quantità che per $k = \infty$ divengono infinitesime d'ordine non inferiore ad $\frac{1}{k}$, se $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{N}$ sono i valori che assumono L_1, L_2, M_1, M_2, N quando in essi si ponga

$$(74) \quad \begin{cases} L_0^{(n)} = \dfrac{k}{a} \dfrac{L_0 \alpha_s + M_0 \beta_s}{\alpha_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_s} \alpha_0 \cos \widehat{r_0 n} + \dfrac{k}{\bar{a}} \dfrac{L_0 \beta_0 - M_0 \alpha_0}{\alpha_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_s} \beta_s \cos \widehat{r'_s n} \\[2ex] M_0^{(n)} = \dfrac{k}{a} \dfrac{L_0 \alpha_s + M_0 \beta_s}{\alpha_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_s} \beta_0 \cos \widehat{r_0 n} - \dfrac{k}{\bar{a}} \dfrac{L_0 \beta_0 - M_0 \alpha_0}{\alpha_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_s} \alpha_s \cos \widehat{r'_s n} \\[2ex] N_0^{(n)} = \dfrac{k}{a} N_0 \cos \widehat{r_0 n} , \end{cases}$$

si avrà

$$L^{(0)} + L^{(s)} = \varepsilon_1 + \overline{L}_1 \cos k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right] +$$
$$+ \overline{L}_2 \cos k\left[t - \frac{1}{\bar{a}}(\alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z)\right]$$

$$M^{(0)} + M^{(s)} = \varepsilon_2 + \overline{M}_1 \cos k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right] +$$
$$+ \overline{M}_2 \cos k\left[t - \frac{1}{\bar{a}}(\alpha'_s x + \beta'_s y + \gamma'_s z)\right]$$

$$N^{(0)} + N^{(s)} = \varepsilon_3 + \overline{N} \cos k\left[t - \frac{1}{a}(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\right] .$$

Ora queste eguaglianze devono valere per qualunque valore di k, x, y, z, t; dovrà dunque essere

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$$

$$\overline{L}_1 = \frac{L_0 \alpha_s + M_0 \beta_s}{\alpha_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_s} \alpha_0 \qquad \overline{M}_1 = \frac{L_0 \alpha_s + M_0 \beta_s}{\alpha_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_s} \beta_0$$

$$\overline{L}_2 = \frac{L_0 \beta_0 - M_0 \alpha_0}{\alpha_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_s} \beta_s \qquad \overline{M}_2 = -\frac{L_0 \beta_0 - M_0 \alpha_0}{\alpha_0 \alpha_s + \beta_0 \beta_s} \alpha_s$$

$$\overline{N} = N_0 .$$

Con ciò resta dimostrato che se le ipotesi da noi fatte sono legittime, sostituendo in L_1, L_2, M_1, M_2, N per $L_n^{(0)}, M_n^{(0)}, N_n^{(0)}$ i valori dati per queste quantità dalle (72) risulterà certamente

$$\overline{\mathrm{L}}_1 + \overline{\mathrm{L}}_2 = \mathrm{L}_0 \qquad \overline{\mathrm{M}}_1 + \overline{\mathrm{M}}_2 = \mathrm{M}_0 \qquad \overline{\mathrm{N}} = \mathrm{N}_0\,.$$

30. — Chiuderemo il presente lavoro coll'osservazione seguente. Siccome le funzioni L, M, N date dalle formole (65) forniscono una soluzione del sistema (73) che è regolare per ogni valore di $x\,y\,z\,t$, e di più soddisfano alla condizione di trasversalità: siccome inoltre tali funzioni L, M, N in un punto $(x\,y\,z)$ del piano π assumono i valori

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}_0 \cos k\left[t - \frac{y}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\,\sin\iota\right] \qquad \mathrm{M} = \mathrm{M}_0 \cos k\left[t - \frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\,\sin\iota\right]$$

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 \cos k\left[t - \frac{y}{\mathrm{V}}\,\frac{\cos\widehat{qx}}{\cos c}\,\sin\iota\right]$$

e le loro derivate secondo la direzione n sul piano stesso hanno la forma voluta dalle formole (60): tali funzioni L, M, N saranno da assumere a rappresentare i valori delle componenti della forza magnetica nei punti del mezzo cristallino da noi considerato, nell'ipotesi che nel mezzo isotropo adiacente sia presente il sistema d'onde luminose piane considerato al § 25 e sulla superficie π di separazione dei due mezzi nessun ostacolo si opponga alla propagazione delle onde luminose dall'un mezzo all'altro.

Al sistema di onde piane presente nel mezzo isotropo corrisponderanno dunque nel mezzo cristallino due sistemi d'onde piane rappresentati rispettivamente dalle formole (71) e (72).

Determiniamo allora la direzione che si è soliti chiamare direzione del raggio ordinario corrispondente al sistema d'onde piane rappresentato dalle (71), e la direzione che si è soliti chiamare direzione del raggio straordinario corrispondente al sistema d'onde piane rappresentato dalle (72). Le direzioni così determinate saranno precisamente le direzioni di r_0 e di r_s e potremo quindi concludere che *se un raggio luminoso propagantesi in un mezzo isotropo arriva alla superficie di separazione di questo mezzo e di*

un mezzo cristallino uniassico, le direzioni dei due raggi rifratti che, in generale, si originano nel mezzo cristallino coincideranno rispettivamente colla direzione del raggio ordinario relativo all'uno e colla direzione del raggio straordinario relativo all'altro dei due sistemi d'onde piane che in generale si originerebbero nel mezzo cristallino, se nel mezzo isotropo adiacente invece che il raggio luminoso considerato fosse presente un sistema d'onde luminose piane propagantesi nella direzione del raggio stesso.

Arezzo, 25 ottobre 1910.

INDICE

ERRATA-CORRIGE

Pag. 6 riga 5 dall'alto	ove Φ, Ψ sono ecc.	— ove Φ, Ψ sono ecc.
» 66 » 2 »	(31)	(31)*
» 85 » 7 »	nelle formole (31)	nelle formole (31)*
» 91 » 2 dal basso	$-\left\{\frac{\partial}{\partial u} f_3[\sigma] + \frac{\partial}{\partial v} f_3[\beta]\right\}$	$=\left\{\frac{\partial}{\partial u} f_3[\sigma] + \frac{\partial}{\partial v} f_3[\beta]\right\}$