Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze, S. 1, vol. 4 (1887), p. 1-52

SULLA

TEORIA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

TESI PER L'ABILITAZIONE ALL'INSEGNAMENTO

PRESENTATA

ALLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

DAL

DOTT. ELCÌA SADUN

SULLA TEORIA
DELLE FUNZIONI IMPLICITE

§. 1.

Il Chiarissimo Prof. Dini, nelle sue « *Lezioni d'Analisi Infinitesimale* », ha ricondotto la teoria delle funzioni implicite al vero concetto col quale dovrebbe essere svolta negli ordinarii trattati. Ed infatti, quando, per fissare le idee, sia data una relazione fra due variabili, reali o complesse,

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

è, innanzi tutto, da riconoscere se la $f(x, y)$ come funzione di due variabili indipendenti, soddisfa a condizioni tali da poter asserire che, per i valori di una di esse, per esempio della x, compresi in un determinato campo, l'altra, y, vien definita come una funzione della prima, capace di verificare l'equazione data. E solo dopochè si trova che questa funzione è ad un valore, finita e continua, è conveniente d' occuparsi dell' esistenza delle varie sue derivate e del processo da seguire per la loro determinazione.

Con tali criterii appunto, il chiariss mo Prof. Dini, limitandosi alle funzioni di variabili reali, ha dimostrato i teoremi relativi ai casi in cui l' equazione (1) può definire una sola funzione y della x, finita e continua insieme colle sue derivate dentro un certo intervallo, oppure in cui l' equazione

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_n, y) = 0$$

o, in generale, il sistema di equazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0 \end{cases}$$

possono respettivamente definire una sola funzione y, o un unico sistema di funzioni $y_1, y_2, \ldots y_m$, delle n variabili indipendenti $x_1, \ldots x_n$, finite e continue insieme alle loro derivate parziali dei varii ordini dentro un campo ad n dimensioni relativo alle variabili indipendenti x, ed ha altresì accennato all' applicazione che potrebbe farsi dell' ultimo teorema al caso delle funzioni di variabili complesse. Ma il metodo da lui proposto si presta a

qualche semplificazione ed estensione, come resulta dalle considerazioni seguenti.

Cominciamo dal ricordare che se una funzione di una variabile reale x è finita e continua insieme colle sue derivate del primo, secondo, ..., n.^{0} ordine (*), per tutti i valori della variabile che cadono in un intorno del punto x_0, ha luogo la formula:

$$(4) \quad F(x_0+h) = F(x_0) + \frac{h}{\Pi(1)} F'(x_0) + \frac{h^2}{\Pi(2)} F''(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{\Pi(n-1)} F^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{\Pi(n)} F^{(n)}(x_0 + \theta_n h);$$

e così pure nel caso di una funzione di m variabili reali, finita e continua insieme colle derivate parziali dei primi n ordini in un campo ad m dimensioni che racchiude il punto $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0)$ si ha:

$$(5) \quad F(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \ldots x_m^0+h_m) = F(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m} h_m\right)_0 + \frac{1}{\Pi(2)}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m} h_m\right)_0^2 + \ldots + \frac{1}{\Pi(n-1)}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m} h_m\right)_0^{n-1} + \frac{1}{\Pi(n)}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_m} h_m\right)^n_{x_1^0+\theta_n h_1, \ldots, x_m^0+\theta_n h_m}$$

(*) A rigore, la continuità delle derivate n^{esime} non è necessaria; ma, per semplicità, stabiliremo sin da ora che tutte le derivate, le quali verranno via via introdotte, saranno sempre supposte continue, anche quando, come in questo caso, tale condizione possa essere superflua.

ove i termini simbolici

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} h_1 + \ldots \frac{\partial F}{\partial x_m} h_m\right)^r$$

per $r<n$ hanno i coefficienti delle h calcolati nel punto iniziale $(x_1^0, \ldots x_m^0)$, e per $r=n$ nel punto $(x_1^0+\theta_n h_1, \ldots x_m^0+\theta_n h_m)$ interno al campo che si considera, indicando θ_n un numero compreso fra 0 e 1 (0 e 1 esclusi). Dalla (5) apparisce subito che sviluppando le potenze simboliche, la $F(x_1^0+h_1, \ldots x_m^0+h_m)$ si esprime mediante un polinomio i cui termini sono della forma

$$A_{p_1, \ldots p_m} h_1^{p_1} h_2^{p_2} \ldots h_m^{p_m}$$

colla condizione

$$p_1 + p_2 + \ldots p_m \leqq n;$$

ed i coefficienti $A_{p_1, \ldots p_m}$ sono funzioni delle h, soltanto quando si abbia

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n.$$

In quello che segue, per le funzioni che costituiscono i primi membri delle equazioni (1), (2), (3), se sono funzioni di variabili reali, verrà sempre supposta, almeno dentro certi campi, la loro sviluppabilità mediante la

formula (5), omettendo di enunciare ogni volta esplicitamente tutte le condizioni necessarie e sufficienti affinchè tale sviluppo sia possibile. Con ciò verrà introdotta maggior semplicità nei ragionamenti, e d' altronde non sarà difficile il vedere quali dei resultati a cui si giungerà cesseranno d' esser veri, o come dovranno modificarsi, quando per le funzioni stesse non sussistano tutte le ipotesi fatte.

§. 2.

Siano:

$$F_1(x_1, \ldots x_m),\ F_2(x_1, \ldots x_m),\ \ldots F_m(x_1, \ldots x_m)$$

m funzioni di m variabili indipendenti e reali. In un intorno del punto $(x_1^0, \ldots x_m^0)$ in cui vale per tutte lo sviluppo secondo la formula (5) per $n=1$, avremo:

$$\begin{aligned}
F_1(x_1^0+h_1, \ldots x_m^0+h_m) &= F_1(x_1^0, \ldots x_m^0) + h_1 P_1^{(1)} + h_2 P_2^{(1)} + \ldots + h_m P_m^{(1)} \\
F_2(x_1^0+h_1, \ldots x_m^0+h_m) &= F_2(x_1^0, \ldots x_m^0) + h_1 P_1^{(2)} + h_2 P_2^{(2)} + \ldots + h_m P_m^{(2)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_m(x_1^0+h_1, \ldots x_m^0+h_m) &= F_m(x_1^0, \ldots x_m^0) + h_1 P_1^{(m)} + h_2 P_2^{(m)} + \ldots + h_m P_m^{(m)}
\end{aligned}$$

ove è stato posto $P_s^{(r)}$ in luogo di

$$\left(\frac{\partial F_r}{\partial x_s}\right)_{x_1^0 + \theta^{(r)} h_1, \ldots x_m^0 + \theta^{(r)} h_m}.$$

Se i due punti $(x_1^0+h_1, \ldots x_m^0+h_m)$, $(x_1^0, \ldots x_m^0)$

sono tali che in essi si annullino tutte le funzioni F_r, o più generalmente, sia per $r = 1, 2, \ldots m$

$$F_r(x_1^0 + h_1, \ldots x_m^0 + h_m) = F_r(x_1^0, \ldots x_m^0),$$

dalle relazioni precedenti si trarranno le altre

$$0 = h_1 P_1^{(1)} + h_2 P_2^{(1)} + \ldots + h_m P_m^{(1)}$$
$$0 = h_1 P_1^{(2)} + h_2 P_2^{(2)} + \ldots + h_m P_m^{(2)}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$0 = h_1 P_1^{(m)} + h_2 P_2^{(m)} + \ldots + h_m P_m^{(m)}$$

le quali dovendo coesistere senza che tutte le h siano uguali a zero, dànno necessariamente luogo all'equazione:

$$D = \begin{vmatrix} P_1^{(1)} & P_2^{(1)} \ldots & P_m^{(1)} \\ P_1^{(2)} & P_2^{(2)} \ldots & P_m^{(2)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ P_1^{(m)} & P_2^{(m)} \ldots & P_m^{(m)} \end{vmatrix} = 0$$

E da notare che nel determinante D, mentre tutti i termini della linea r^a s' intendono calcolati nello stesso punto $(x_1^0 + \theta^{(r)} h_1, \ldots x_m^0 + \theta^{(r)} h_m)$ e così quelli della linea s^a nello stesso punto $(x_1^0 + \theta^{(s)} h_1, \ldots x_m^0 + \theta^{(s)} h_m)$, non sarà in generale, $\theta^{(s)} = \theta^{(r)}$ e perciò non si potrà dire che esso sia il valore del *determinante funzionale*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}$$

in un punto intermedio $(x_1^0 + \theta h_1, \ldots x_m^0 + \theta h_m)$.

Tenendo pur presente questa particolarità, lo chiameremo semplicemente *un valore intermedio del determinante funzionale*, enunciando così il teorema:

« Nel campo in cui m funzioni F_r di m variabili in-
« dipendenti sono finite e continue insieme colle loro de-
« rivate prime parziali, non possono esistere due punti
« $(x_1^0 \ldots x_m^0)$, $(x_1^0 + h_1, \ldots x_m^0 + h_m)$ in cui tutte le
« funzioni si annullino, oppure per $r = 1, 2, \ldots m$ si abbia

$$F_r(x_1^0 + h_1, \ldots x_m^0 + h_m) = F_r(x_1^0, \ldots x_m^0),$$

« senza che sia nullo un valore intermedio del determi-
« nante funzionale del sistema ».

Facciamo subito, di questo teorema, un' applicazione che sarà utile nel seguito. I primi membri delle (3), vale a dire m funzioni di $n+m$ variabili indipendenti, che ora supporremo reali, siano finite e continue insieme colle loro derivate prime parziali in un intorno del punto $(x_1^0, \ldots x_n^0, y_1^0, \ldots y_m^0)$, e consideriamo il determinante funzionale rapporto alle variabili y

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

Ponendo

$$\frac{\partial f_r}{\partial y_s} = \left(\frac{\partial f_r}{\partial y_s}\right)_0 + \alpha_s^{(r)},$$

dove $\left(\frac{\partial f_r}{\partial y_s}\right)_0$ indica il valore della derivata $\frac{\partial f_r}{\partial y_s}$ nel punto $(x_1^0 \dots x_n^0, y_1^0 \dots y_m^0)$, un valore qualunque del determinante precedente, *anche se non tutti i termini che vi compariscono sono calcolati nello stesso punto del campo,* sarà della forma:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)_0 + \alpha_1^{(1)} & \dots\dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_m}\right)_0 + \alpha_m^{(1)} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right)_0 + \alpha_1^{(2)} & \dots\dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_m}\right)_0 + \alpha_m^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial f_m}{\partial y_1}\right)_0 + \alpha_1^{(m)} & \dots\dots & \left(\frac{\partial f_m}{\partial y_m}\right)_0 + \alpha_m^{(m)} \end{vmatrix} = (\mathrm{D})_0 + \mathrm{S},$$

essendo

$$(\mathrm{D})_0 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_m}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_m}\right)_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial f_m}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_m}{\partial y_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_m}{\partial y_m}\right)_0 \end{vmatrix}$$

ed S una somma di prodotti di una o più delle quantità finite $\left(\frac{\partial f_r}{\partial y_s}\right)_0$ per una o più delle $\alpha_s^{(r)}$. Ora, indicando con $(x_1^0+h_1, \dots x_n^0+h_n, y_1^0+k_1, \dots y_m^0+k_m)$ un altro punto qualunque differente da $(x_1^0, .. x_n^0, y_1^0, .. y_m^0)$ resulta dalle condizioni ammesse che si potranno determinare per le h, k da cui vengono a dipendere le $\alpha_s^{(r)}$, limiti tali $(-h_1^0, +h_1^0), \dots (-h_n^0, +h_n^0), (-k_1^0, +k_1^0), \dots (-k_m^0, +k_m^0)$, che non solo ognuna delle $\alpha_s^{(r)}$, ma anche la S non superi in valore assoluto una data quantità. E così se, in particolare, il valore $(\mathrm{D})_0$ è differente da zero, si potrà formare un intorno del punto $(x_1^0, \dots y_m^0)$ tale che sia diverso da zero anche $(\mathrm{D})_0+\mathrm{S}$. Ma allora, quando per ciascun sistema di valori assegnati alle h dentro i loro limiti, le f_r si riducono funzioni finite e continue, insieme colle loro derivate prime parziali, delle m quantità $k_1, k_2, \dots k_m$, sarà impossibile che per *due* sistemi distinti $(k_1', k_2', \dots k_m')$, $(k_1'', k_2'', \dots k_m'')$ di valori compresi respettivamente tra $-k_1^0$ e $+k_1^0$, ... $-k_m^0$ e $+k_m^0$, ognuna delle f_r possa avere lo stesso valore (in particolare il valore zero), giacchè, per le ipotesi fatte, non può, tra i medesimi limiti, esser nullo *nessun valore* del determinante funzionale considerato.

Nel caso di $m=1$, avendosi una sola funzione

$$f(x_1, x_2, \dots x_n, y)$$

e il determinante funzionale riducendosi a $\frac{\partial f}{\partial y}$, se ne deduce che se nel punto $(x_1^0, \dots x_n^0, y^0)$ la $\frac{\partial f}{\partial y}$ è differente da zero, esiste, per la supposta continuità, un intorno di $(x_1^0, \dots y^0)$ in cui essa si mantiene diversa da zero, e tale intorno è costituito dai punti $(x_1^0+h_1, \dots x_n^0+h_n, y^0+k)$ corrispondenti ai valori di $h_1 \dots h_n$, k compresi fra limiti convenientemente determinati: $(-h_1^0, +h_1^0), \dots (h_n^0, +h_n^0)$, $(-k^0, +k^0)$. Assegnando alle h un sistema qualunque di valori compresi in questi limiti, la f, che diviene una funzione finita e continua della k per tutti i valori da $-k^0$ a $+k^0$ non potrà prendere lo stesso valore, od, in particolare, annullarsi in due punti k', k'' compresi nell'intervallo $(-k^0, +k^0)$ giacchè come si deduce dalla formula

$$F(x_0+h) = F(x_0) + h\, F'(x_0+\theta h)$$

— che è un caso particolare della (4) per $n=1$, o del precedente sistema delle F_r per $m=1$ — dovrebbe, contro il supposto, annullarsi $\frac{\partial f}{\partial y}$ in un punto fra k' e k''. Ma poichè il teorema contenuto in quest' ultima formula e applicato alla derivata prima di $F(x)$ porta a concludere che, fra due punti in cui si annulla la derivata pri-

ma deve esisterne almeno uno in cui si annulla la derivata seconda, e così successivamente, ne resulta anche, che se nell' intorno del punto $(x_1^0, \dots y^0)$ la $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ è diversa da zero, potendovisi invece annullare le $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dots \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}$, a ciascun sistema delle h non potranno corrispondere $n+1$ valori k', k'', k''', ... $k^{(n+1)}$ compresi fra $-k^0$ e $+k^0$ per i quali la funzione abbia lo stesso valore, o, in particolare, si annulli; perchè altrimenti in n punti k_1', k_1'', ... $k_1^{(n)}$ compresi respettivamente fra k' e k'', k'' e k''', ... $k^{(n)}$ e $k^{(n+1)}$ si annullerebbe la $\frac{\partial f}{\partial y}$, in $n-1$ punti k_2', k_2'', ... $k_2^{(n-1)}$ compresi fra questi n si annullerebbe la derivata seconda $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, e così di seguito, finchè in due punti k'_{n-1}, k''_{n-1} sarebbe nulla la derivata $(n-1)^a$ ed in un punto k_n' fra k'_{n-1} e k''_{n-1}, e quindi nell'intervallo considerato, si annullerebbe la $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$; il che è contrario all' ipotesi.

§. 3.

Nel caso che si abbiano da considerare funzioni di variabili complesse, ammetteremo che, almeno nell' interno di campi speciali, abbiano il carattere di funzioni intere; ed allora varranno per esse i teoremi seguenti, che, per essere abbastanza noti, (*) ci limitiamo soltanto ad enunciare:

I. « Una funzione di più variabili complesse, monodroma, finita e continua rapporto a ciascuna di esse dentro un certo campo, ammette un' infinità di derivate parziali che sono pure monodrome, finite e continue dentro gli stessi campi ».

II. « Quando una funzione di più variabili complesse è monodroma, finita e continua dentro cerchi descritti dai punti x_1^0, x_2^0, x_3^0, ... come centri, con raggi R_1, R_2, R_3, ..., essa è sviluppabile in serie ordinata per le potenze intere, positive e crescenti di $x_1-x_1^0$, $x_2-x_2^0$, $x_3-x_3^0$, ... e convergente dentro gli stessi limiti ».

Non potendosi però dire che sussistano anche per queste funzioni gli sviluppi abbreviati (4) e (5), è necessario aggiungere altre osservazioni per rendere uniforme il metodo da seguire nelle ricerche susseguenti.

Ritorniamo a considerare il solito sistema delle m funzioni f_r contenenti $n+m$ variabili, ma coll' ipotesi che ora siano funzioni di variabili complesse, e, per semplicità, supponiamo $n=1$, $m=2$, occupandoci, in conseguenza, delle due funzioni

$$f_1(x\,,\,y_1\,,\,y_2)\ ,\ f_2(x\,,\,y_1\,,\,y_2).$$

Ritenendo valido per ciascuna delle f_1, f_2 il teorema II

(*) Cfr. Briot et Bouquet — Théorie des Fonctions Elliptiques — pag. 163 e seg.

sopraenunciato e notando che ora si ha:

$$x_1=x\quad,\quad x_2=y_1\quad,\quad x_3=y_2$$

poniamo anche

$$x-x^0=h\quad,\quad y_1-y_1^0=k_1\quad,\quad y_2-y_2^0=k_2\,;$$

si avrà:

$$x=x^0+h\quad,\quad y_1=y_1^0+k_1\quad,\quad y_2=y_2^0+k_2$$

e perciò

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{array}{l} f_1(x^0+h\,,\,y_1^0+k_1\,,\,y_2^0+k_2)=f_1(x^0\,,\,y_1^0\,,\,y_2^0)+\\ h\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+k_1\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}+k_2\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}+\dfrac{1}{\Pi(2)}h^2\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\dfrac{1}{\Pi(2)}k_1^2\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2}+\dfrac{1}{\Pi(2)}k_2^2\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y_2^2}+\\ \qquad\qquad hk_1\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y_1}+hk_2\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y_2}+k_1k_2\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y_1\partial y_2}+\cdots\\ f_2(x^0+h\,,\,y_1^0+k_1\,,\,y_2^0+k_2)=f_2(x^0\,,\,y_1^0\,,\,y_2^0)+\\ h\dfrac{\partial f_2}{\partial x}+k_1\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}+k_2\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}+\dfrac{1}{\Pi(2)}h^2\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\dfrac{1}{\Pi(2)}k_1^2\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y_1^2}+\dfrac{1}{\Pi(2)}k_2^2\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y_2^2}+\\ \qquad\qquad hk_1\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y_1}+hk_2\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y_2}+k_1k_2\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y_1\partial y_2}+\cdots \end{array}\right.$$

Per analogia colle funzioni di variabili reali, diremo che questi sviluppi, in cui le derivate parziali sono, com'è noto, calcolate per $x=x^0$, $y_1=y_1^0$, $y_2=y_2^0$, dànno i valori delle funzioni f_1, f_2 *in un intorno del punto* $(x^0\,,\,y_1^0\,,\,y_2^0)$.

Lasciando invariato il valore di h e supponendo che (k_1', k_2'), (k_1'', k_2'') siano due speciali sistemi di valori delle k, le condizioni affinchè si abbia:

$$f_1(x^0+h, y_1^0+k_1'', y_2^0+k_2'')=f_1(x^0+h, y_1^0+k_1', y_2^0+k_2')$$

$$f_2(x^0+h, y_1^0+k_1'', y_2^0+k_2'')=f_2(x^0+h, y_1^0+k_1', y_2^0+k_2')$$

sono evidentemente date da:

$$0=(k_1''-k_1')\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+(k_2''-k_2')\frac{\partial f_1}{\partial y_2}+\frac{1}{\Pi(2)}(k_1''^2-k_1'^2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2}+$$
$$\frac{1}{\Pi(2)}(k_2''^2-k_2'^2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_2^2}+h(k_1''-k_1')\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y_1}+h(k_2''-k_2')\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y_2}+$$
$$(k_1''k_2''-k_1'k_2')\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1\partial y_2}+\dots$$

$$0=(k_1''-k_1')\frac{\partial f_2}{\partial y_1}+(k_2''-k_2')\frac{\partial f_2}{\partial y_2}+\frac{1}{\Pi(2)}(k_1''^2-k_1'^2)\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1^2}+$$
$$\frac{1}{\Pi(2)}(k_2''^2-k_2'^2)\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_2^2}+h(k_1''-k_1')\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y_1}+h(k_2''-k_2')\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y_2}+$$
$$(k_1''k_2''-k_1'k_2')\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1\partial y_2}+\dots$$

e tenendo conto dell' identità:

$$k_1''^{\alpha}k_2''^{\beta}-k_1'^{\alpha}k_2'^{\beta}=(k_1''^{\alpha}-k_1'^{\alpha})k_2''^{\beta}+(k_2''^{\beta}-k_2'^{\beta})k_1'^{\alpha}$$

anche da:

$$0=(k_1''-k_1')\left\{\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+\frac{1}{\Pi(2)}\frac{k_1''^2-k_1'^2}{k_1''-k_1'}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2}+h\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y_1}+k_2''\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1\partial y_2}+\dots\right\}$$
$$+(k_2''-k_2')\left\{\frac{\partial f_1}{\partial y_2}+\frac{1}{\Pi(2)}\frac{k_2''^2-k_2'^2}{k_2''-k_2'}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_2^2}+h\frac{\partial^2 f_1}{x\partial y_2}+k_1'\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1\partial y_2}+\dots\right\}$$
$$0=(k_1''-k_1')\left\{\frac{\partial f_2}{\partial y_1}+\frac{1}{\Pi(2)}\frac{k_1''^2-k_1'^2}{k_1''-k_1'}\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1^2}+h\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y_1}+k_2''\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1\partial y_2}+\dots\right\}$$
$$+(k_2''-k_2')\left\{\frac{\partial f_2}{\partial y_2}+\frac{1}{\Pi(2)}\frac{k_2''^2-k_2'^2}{k_2''-k_2'}\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_2^2}+h\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y_2}+k_1'\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1\partial y_2}+\dots\right\}.$$

Per soddisfare contemporaneamente a queste due condizioni, quando, come si suppone, k_1'' è differente da k_1' e k_2'' da k_2', si richiede che si annulli il determinante:

$$D=\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}+\frac{1}{\Pi(2)}\frac{k_1''^2-k_1'^2}{k_1''-k_1'}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2}+\dots\right), & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}+\frac{1}{\Pi(2)}\frac{k_2''^2-k_2'^2}{k_2''-k_2'}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y_2^2}+\dots\right)\\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1}+\frac{1}{\Pi(2)}\frac{k_1''^2-k_1'^2}{k_1''-k_1'}\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_1^2}+\dots\right), & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2}+\frac{1}{\Pi(2)}\frac{k_2''^2-k_2'^2}{k_2''-k_2'}\frac{\partial^2 f_2}{\partial y_2^2}+\dots\right)\end{vmatrix}$$

formato coi coefficienti di $k_1''-k_1'$, $k_2''-k_2'$. Ora osserviamo, che avendosi in generale

$$\frac{k^r-k'^r}{k-k'}=k^{r-1}+k^{r-2}k'+\dots+k\,k'^{r-2}+k'^{r-1}$$

e

$$\text{mod}\,(k^{r-1}+k^{r-2}k'+\dots)<\text{mod}\,k^{r-1}+\text{mod}\,k^{r-2}k'+\dots\leq r\,\text{mod}\,k^{r-1}$$

— se, come può ammettersi, si ha mod $k \geq$ mod k', — sarà :

$$\text{mod}\left(\frac{k^r - k'^r}{k - k'}\right) < r \text{ mod } k^{r-1}.$$

Col mezzo di questa diseguaglianza si giunge a riconoscere la convergenza delle serie che compariscono in ciascun elemento del determinante D, dentro lo stesso intorno del punto (x^0, y_1^0, y_2^0) (*) e quando il determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

sia differente da zero, apparisce altresì che potrà ancora restringersi il campo di variabilità delle h, k_1, k_2 attorno al punto (x^0, y_1^0, y_2^0), in modo che sia sempre differente da zero anche il determinante D; e sia quindi

(*) Ciò resulta dal fatto che, nel campo in cui sono convergenti gli sviluppi (A), convergono anche quelli che si ottengono derivandoli rapporto a k_1 e k_2. Ed il confronto che si può fare termine a termine di queste serie derivate con quelle degli elementi del determinante, avuto riguardo all' ultima diseguaglianza stabilita, porta che i moduli dei termini che si trovano negli elementi di D, sono uguagliati o superati da quelli dei termini delle serie ottenute colla derivazione.

impossibile che ad ogni valore di h in questo campo, corrispondano due sistemi distinti (k_1', k_2'), (k_1'', k_2'') delle k_1, k_2 per i quali ciascuna delle f_1, f_2 riacquisti lo stesso valore, o, in particolare, si annulli.

Avendo riguardo all' identità :

$$\begin{aligned} k_1''^{\alpha} k_2''^{\beta} k_3''^{\gamma} \ldots k_{m-1}''^{\lambda} k_m''^{\mu} - k_1'^{\alpha} k_2'^{\beta} k_3'^{\gamma} \ldots k_{m-1}'^{\lambda} k_m'^{\mu} = \\ (k_1''^{\alpha} - k_1'^{\alpha}) k_2''^{\beta} k_3''^{\gamma} \ldots k_{m-1}''^{\lambda} k_m''^{\mu} + (k_2''^{\beta} - k_2'^{\beta}) \\ k_1'^{\alpha} k_3''^{\gamma} \ldots k_{m-1}''^{\lambda} k_m''^{\mu} + (k_3''^{\gamma} - k_3'^{\gamma}) k_1'^{\alpha} k_2'^{\beta} k_4''^{\delta} \ldots k_{m-1}''^{\lambda} k_m''^{\mu} + \\ \ldots\ldots + (k_{m-1}''^{\lambda} - k_{m-1}'^{\lambda}) k_1'^{\alpha} k_2'^{\beta} k_3'^{\gamma} \ldots k_{m-2}'^{\varkappa} k_m''^{\mu} + \\ (k_m''^{\mu} - k_m'^{\mu}) k_1'^{\alpha} k_2'^{\beta} k_3'^{\gamma} \ldots k_{m-2}'^{\varkappa} k_{m-1}'^{\lambda} \quad (*) \end{aligned}$$

facilmente si estende la dimostrazione ora fatta al caso del sistema di m funzioni con $n+m$ variabili, cui alludevamo da principio.

Sia finalmente $f(x_1, x_2 \ldots x_n, y)$ una funzione di $n+1$ variabili complesse, data in un intorno del punto $(x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0, y^0)$ dalla formula:

(*) Sopprimendo, come può evidentemente farsi, tutti gli esponenti e in parte gli apici, si dimostra subito la legge di formazione dell' identità, nel caso di m variabili, quando sia conosciuta in quello di $m-1$. Basta infatti osservare, che ponendo:

$$K'_{m-1} = k_1' k_2' \ldots . k'_{m-1}, \quad K_{m-1} = k_1 k_2 \ldots . k_{m-1}$$

si ha :

$$K'_{m-1} k'_m - K_{m-1} k_m = (K'_{m-1} - K_{m-1}) K'_m + (k'_m - k_m) K_{m-1}$$

$$f(x_1^0+h_1,\dots x_n^0+h_n\,,\,y^0+k)=f(x_1^0\,,\dots x_n^0\,,\,y^0)+$$
$$h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\dots.$$

Come caso particolare del teerema precedente, abbiamo intanto che se nel punto iniziale $(x_1^0\dots y^0)$ la $\frac{\partial f}{\partial y}$ è differente da zero, si potrà formare un campo tale per le $h_1\,,\dots h_n\,,\,k$ da rendere impossibile che a ciascun sistema di valori per le h dentro questo campo, corrispondano due valori differenti $k'\,,\,k''$, in cui la f riacquisti lo stesso valore o si annulli. Ma è altresì facile a vedere che se è diversa da zero la $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ — la quale pure, come è già stato notato, intendesi calcolata nel punto $(x_1^0\,,\dots y^0)$, dove può ora anche esser nulla la $\frac{\partial f}{\partial y}$ — esiste un campo in cui non possono trovarsi tre valori differenti $k'\,,\,k''\,,\,k'''$, per i quali la f abbia ancora la stessa proprietà di avere valori uguali o nulli. Ciò, infatti, resulta dall' osservare che le due condizioni distinte

$$0=\frac{\partial f}{\partial y}+h_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial y}+\dots+\frac{1}{2}(k''+k')\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dots$$
$$0=\frac{\partial f}{\partial y}+h_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial y}+\dots+\frac{1}{2}(k'''+k')\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dots$$

le quali a tal uopo dovrebbero essere verificate, dànno luogo confrontate tra loro all' unica:

$$0=(k''-k''')\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\varepsilon\right\},$$

oppure:

$$0=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\varepsilon\,;$$

e, come nei casi precedenti, questa condizione non sarà sodisfatta, se, per la natura della quantità indicata con ε, determiniamo un campo convenientemente ristretto attorno al punto $(x_1^0\,.\,.\,.\,y^0)$, in tutti i punti del quale si abbia

$$\text{mod}\ \varepsilon<\text{mod}\,\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Estesa quest' ultima proprietà al caso in cui la $\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$ è differente da zero, si rende di per sè manifesta la perfetta analogia di tutti questi risultati con quelli ottenuti nel paragrafo precedente.

§. 4.

Riferendoci alla nota rappresentazione geometrica delle quantità complesse, ricordiamo che se Z ed A sono gl' indici dei numeri complessi z ed a, l' indice M della differenza $z-a$ si ottiene conducendo dall'origine O una retta O M che ha la stessa *lunghezza* e *direzione* di quella che congiunge A con Z, per cui si ha:

$$O\,M = \text{mod}\,(z - a),$$

e, all' infuori di multipli del 2π:

$$x\,O\,M = \arg.\,(z - a)\,;$$

essendo in ogni caso da aver riguardo anche alla convenzione solita a farsi sul senso positivo secondo il quale si contano gli angoli, che è quello in cui deve ruotare di un angolo retto la parte positiva dell' asse delle x, per coincidere colla positiva dell' asse delle y.

Suppongasi che il punto Z si trovi sopra una circonferenza di raggio ρ col centro nell'origine, e il punto A nell' interno di un' altra circonferenza di raggio $\rho_1 < \rho$ concentrica alla precedente. Ad una data posizione $(\rho\,,\,\theta_0)$ del punto Z corrispondendo due tangenti T Z, T' Z al cerchio interno, coi punti di contatto in T e T', e conseguentemente due parallele ad esse O P, O P' condotte dal centro nelle direzioni respettive da T a Z e da T' a Z, è chiaro che per qualsivoglia posizione del punto A, la retta O M parallela ad A Z e sulla quale trovasi l'indice della differenza $z - a$, sarà interna all' angolo $POP' < \pi$. Se a partire da questa posizione iniziale si fa percorrere a Z una sola volta la circonferenza di raggio ρ, nel senso positivo, facendo variare con continuità da θ_0 a $\theta_0 + 2\pi$ l'argomento di z e ruotare corrispondentemente l'angolo P O P', la retta O M — che deve rimanere entro quest'angolo se, per ipotesi, A, pur variando

di posizione, non esce dal cerchio di raggio ρ_1 — quando Z avrà compiuto il suo giro, dipendentemente dalla posizione finale di A, avrà deviato dalla posizione iniziale di un angolo compreso tra $2\pi - POP' > \pi$ e $2\pi + POP' < 3\pi$. Laonde se A è l'indice dei valori di una funzione $a(z)$ monodroma, finita e continua per tutti i valori di z interni e sulla circonferenza del cerchio di raggio ρ, la quale per questi valori al contorno soddisfa appunto alla diseguaglianza

$$\text{mod}\ a(z) < \rho_1$$

con $\rho_1 < \rho$, e poniamo

$$\varphi(z) = z - a(z)$$

la posizione finale del punto A, per la monodromia di $a(z)$ coinciderà ora colla iniziale, e perciò la variazione subìta dall' argomento Θ della funzione $\varphi(z)$, o la deviazione di O M dalla posizione iniziale, sarà in questo caso, precisamente uguale a 2π. Ne segue che « esisterà almeno « un valore z_1 di z, interno al cerchio considerato, per il « quale sarà:

$$\varphi(z_1) = 0 \text{ ».}$$

Infatti se ciò non fosse, il resultato precedente sarebbe in contradizione col teorema:

« Quando una funzione di variabile complessa è monodroma, finita e continua in una parte del piano che non comprende nessuna radice, (*) la variazione dell'argomento sopra il contorno dell'area è nulla » (**).

(*) È sottinteso che non vi sono radici neppure sul contorno.

(**) V. Briot et Bouquet, l. c. pag. [illegible]0 — Indipendentemente anche da questo teorema, se si pone

$$z = r\, e^{i\theta}, \quad \varphi(z) = \mathrm{R}\, e^{i\Theta},$$

da cui, sulla circonferenza c del cerchio di raggio ρ

$$dz = i\rho\, e^{i\theta}\, d\theta$$

e

$$\frac{dz}{\varphi(z)} = \frac{i\rho\, e^{i\theta}}{\mathrm{R}\, e^{i\Theta}}\, d\theta = \frac{i\rho}{\mathrm{R}}\, e^{i(\theta-\Theta)}\, d\theta,$$

si trova:

$$\int_c \frac{dz}{\varphi(z)} = i\rho \int_c \frac{1}{\mathrm{R}}\, e^{i(\theta-\Theta)}\, d\theta =$$

$$= i\rho \int_c \frac{1}{\mathrm{R}} \cos(\theta-\Theta)\, d\theta - \rho \int_c \frac{1}{\mathrm{R}} \operatorname{sen}(\theta-\Theta)\, d\theta$$

e perchè, com'è facile a vedere, per i valori di z sulla circonferenza c, R è diverso da zero e la differenza $\theta-\Theta$ è sempre in valore assoluto inferiore a $\frac{\pi}{2}$, il coefficiente

$$\rho \int_c \frac{1}{\mathrm{R}} \cos(\theta-\Theta)\, d\theta$$

dell' immaginario i, e con esso l'integrale, $\int_c \frac{dz}{\varphi(z)}$, è essenzialmente differente da zero. Ciò prova che la funzione monodroma e continua $\frac{1}{\varphi(z)}$ non può essere *finita* per tutti i valori *interni* alla circonferenza, perchè, per

Non è qui fuor di luogo il notare che alla proprietà ora dimostrata dell' esistenza di punti di zero per una funzione di z monodroma, finita e continua in un cerchio dato, quando si verifichi la variazione di 2π nell' argomento della funzione per i valori di z situati sul contorno, va sostituita — nel caso che vengano in considerazione soltanto funzioni di variabili reali — l'altra correlativa, contenuta nel teorema:

« Se una funzione di variabile reale $f(x)$ è finita e continua fra α e β e per il valore α è positiva, mentre per il valore β è negativa, almeno per un valore della x fra α e β prenderà il valore zero ».

§. 5.

Riprendiamo le equazioni (3), in cui i primi membri possono ora essere tanto funzioni di variabili reali, quanto funzioni di variabili complesse. Una prima condizione della possibilità ch' esse definiscano le y come funzioni delle x, capaci di renderle identicamente soddisfatte, si trova, com'è naturale, nell'ammettere l'esistenza di *almeno un sistema* di $n+m$ valori finiti $(x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0, y_1^0 \ldots y_m^0)$

---

un ben noto teorema, dovrebbe essere allora

$$\int_c \frac{dz}{\varphi(z)} = 0.$$

Quindi, almeno per un valore z_1 di z dentro il cerchio, si ha:

$$\varphi(z_1) = 0,$$

come dovevasi dimostrare.

per i quali esse siano contemporaneamente verificate. Partendo dunque da questa ipotesi, stabiliamo che per $r = 1, 2, \dots m$, si abbia:

$$f_r(x_1^0, \dots x_n^0, y_1^0, \dots y_m^0) = 0$$

e, per incominciare dal caso più semplice, supponiamo altresì che sia:

$$(6)\quad \begin{cases} f_1(x_1^0+h_1, \dots x_n^0+h_n, y_1^0+k_1, \dots y_m^0+k_m) = h_1 P_1^{(1)} \\ \qquad + \dots + h_n P_n^{(1)} + k_1 Q_1^{(1)} + \dots + k_m Q_m^{(1)} \\ f_2(x_1^0+h_1, \dots x_n^0+h_n, y_1^0+k_1, \dots y_m^0+k_m) = h_1 P_1^{(2)} \\ \qquad + \dots + h_n P_n^{(2)} + k_1 Q_1^{(2)} + \dots + k_m Q_m^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1^0+h_1, \dots x_n^0+h_n, y_1^0+k_1, \dots y_m^0+k_m) = h_1 P_1^{(m)} \\ \qquad + \dots + h_n P_n^{(m)} + k_1 Q_1^{(m)} + \dots + k_m Q_m^{(m)}. \end{cases}$$

Il significato d'attribuirsi alle P e Q quando le f_r sono funzioni di variabili reali, resulta chiaramente da quanto è stato stabilito alla fine del §. 1. Ma la forma dei secondi membri delle (6) conviene anche alle funzioni di variabili complesse, se s' intende che in questo caso si abbia

$$P_s^{(r)} = \frac{\partial f_r}{\partial x_s} + \varphi_s^{(r)}(h_1, \dots h_n, k_1, \dots k_m)$$

$$Q_s^{(r)} = \frac{\partial f_r}{\partial y_s} + \psi_s^{(r)}(h_1, \dots h_n, k_1, \dots k_m)$$

dove le $\frac{\partial f_r}{\partial x_s}$, $\frac{\partial f_r}{\partial y_s}$ sono, secondo il solito, calcolate nel punto $(x_1^0, \dots x_n^0, y_1^0, \dots y_m^0)$, e dove le $\varphi_s^{(r)}, \psi_s^{(r)}$, rappresentano funzioni ad un valore, finite e continue in un intorno dello stesso punto, quantunque siavi dell' arbitrarietà nella loro formazione, bastando supporre che i secondi membri delle (6) si possano identificare a sviluppi in serie analoghi a quelli dati dalle (A) del §. 3.

Trattandosi di dimostrare l' esistenza di sistemi di valori delle h, k per i quali i primi o i secondi membri delle (6) si annullano, sarà lecito di sostituire in luogo di una qualunque linea:

$$(7)\qquad h_1 P_1^{(s)} + \dots + h_n P_n^{(s)} + k_1 Q_1^{(s)} + \dots + k_m Q_m^{(s)}$$

una funzione equivalente.

A tale effetto risolviamo le equazioni formate dai secondi membri delle (6) rispetto alle k poste in evidenza, riguardando le h, P, Q come costanti, o, ciò ch' è lo stesso, introduciamo delle quantità ausiliarie $\frac{\alpha_r}{D}$ definite dalle equazioni

$$h_1 P_1^{(1)} + \dots + h_n P_n^{(1)} + \frac{\alpha_1}{D} Q_1^{(1)} + \dots + \frac{\alpha_m}{D} Q_m^{(1)} = 0$$

$$h_1 P_1^{(2)} + \dots + h_n P_n^{(2)} + \frac{\alpha_1}{D} Q_1^{(2)} + \dots + \frac{\alpha_m}{D} Q_m^{(2)} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$h_1 P_1^{(m)} + \dots + h_n P_n^{(m)} + \frac{\alpha_1}{D} Q_1^{(m)} + \dots + \frac{\alpha_m}{D} Q_m^{(m)} = 0.$$

Essendo dunque

$$D = \begin{vmatrix} Q_1^{(1)}, & Q_2^{(1)} & \dots & Q_m^{(1)} \\ Q_1^{(2)}, & Q_2^{(2)} & \dots & Q_m^{(2)} \\ . & . & . & . \\ Q_1^{(m)}, & Q_2^{(m)} & \dots & Q_m^{(m)} \end{vmatrix}$$

ed

$$\alpha_r = - \begin{vmatrix} Q_1^{(1)}, \dots Q_{r-1}^{(1)}, h_1 P_1^{(1)} + \dots + h_n P_n^{(1)}, Q_{r+1}^{(1)}, \dots Q_m^{(1)} \\ Q_1^{(2)}, \dots Q_{r-1}^{(2)}, h_1 P_1^{(2)} + \dots + h_n P_n^{(2)}, Q_{r+1}^{(2)}, \dots Q_m^{(2)} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ Q_1^{(m)}, \dots Q_{r-1}^{(m)}, h_1 P_1^{(m)} + \dots + h_n P_n^{(m)}, Q_{r+1}^{(m)}, \dots Q_m^{(m)} \end{vmatrix}$$

la (7) sarà identicamenre uguale a

$$Q_1^{(s)}\left(k_1 - \frac{\alpha}{D}\right) + Q_2^{(s)}\left(k_2 - \frac{\alpha_2}{D}\right) + \dots + Q_m^{(s)}\left(k_m - \frac{\alpha_m}{D}\right)$$

ed al sistema (6) si potrà sostituire l' altro:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & f_1(x_1^0 + h_1, \dots x_n^0 + h_n, y_1^0 + k_1, \dots y_m^0 + k_m) = \\ & Q_1^{(1)}\left(k_1 - \frac{\alpha_1}{D}\right) + Q_2^{(1)}\left(k_2 - \frac{\alpha_2}{D}\right) + \dots + Q_m^{(1)}\left(k_m - \frac{\alpha_m}{D}\right) \\ & f_2(x_1^0 - h_1, \dots x_n^0 + h_n, y_1^0 + k_1, \dots y_m^0 + k_m) = \\ & Q_1^{(2)}\left(k_1 - \frac{\alpha_1}{D}\right) + Q_2^{(2)}\left(k_2 - \frac{\alpha_2}{D}\right) + \dots + Q_m^{(2)}\left(k_m - \frac{\alpha_m}{D}\right) \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & f_m(x_1^0 + h_1, \dots x_n^0 + h_n, y_1^0 + k_1, \dots y_m^0 + k_m) = \\ & Q_1^{(m)}\left(k_1 - \frac{\alpha_1}{D}\right) + Q_2^{(m)}\left(k_2 - \frac{\alpha_2}{D}\right) + \dots + Q_m^{(m)}\left(k_m - \frac{\alpha_m}{D}\right). \end{aligned} \right.$$

Ritornando a considerare le P, Q, e conseguentemente il determinante D, come dipendenti effettivamente da tutte le variabili h, k, supponiamo, senz'altro, che sieno verificate le condizioni stabilite nei §§. 2 e 3, per le quali il determinante D è differente da zero dentro un certo campo attorno al punto $(x_1^0, \dots x_n^0, y_1^0, \dots y_m^0)$ e ad un dato sistema delle h non può corrispondere altro che un solo sistema delle k che annullano i primi membri delle (8). Così non rimane altro che da dimostrare l' esistenza di questo sistema (*).

Intanto la condizione supposta per D, non potendo essere soddisfatta se una almeno delle Q in ciascuna linea e colonna non è differente da zero, fa sì che i secondi membri delle (8) vengano effettivamente a dipendere da tutti i binomi $k_r - \frac{\alpha_r}{D}$. Consideriamo il primo di essi

$$k_1 - \frac{\alpha_1}{D}$$

ed osserviamo che, anche le P mantenendosi finite e continue in tutto il campo, il binomio stesso sarà una funzione ad un valore, finita e continua delle $n+m$ variabili h, k. Ora, sebbene la funzione α_1 dipenda da tutte le $n+m$ variabili, è chiaro, dalla sua definizione e dalle con-

(*) Questa dimostrazione e le seguenti sono fatte più particolarmente per le funzioni di variabili complesse, ma si vedono con facilità le leggiere modificazioni che le rendono valide anche per le funzioni di variabili reali.

dizioni sinora imposte, che la grandezza dei suoi moduli, e conseguentemente dei moduli del rapporto $\frac{\alpha_1}{D}$ dipende *principalmente* dai moduli del sistema di valori attribuiti alle h, tantochè per

$$\operatorname{mod} h_1 = \operatorname{mod} h_2 = \ldots. = \operatorname{mod} h_n = 0$$

si ha:

$$\operatorname{mod} \alpha_1 = 0$$

e colla scelta di convenienti sistemi di valori per le h, si possono mantenere i moduli di α_1, o di $\frac{\alpha_1}{D}$, entro un limite determinato ed arbitrariamente piccolo. Indicando quindi con r_1 un numero positivo piccolo a piacere e non superiore al più grande dei moduli dei valori assegnabili a k_1, determiniamo il campo di variabilità delle h, colla condizione che per qualunque sistema delle $n+m$ variabili si abbia

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{mod}\left(\frac{\alpha_1}{D}\right) < r_1$$

e nel piano della variabile k_1, col centro nell'origine, descriviamo un cerchio di raggio r_1. Allora per ciascun sistema delle $n+m-1$ variabili, $h_1, h_2 \ldots h_n, k_2 \ldots k_m$, la quantità $\frac{\alpha_1}{D}$ divenendo funzione della sola k_1, può es-

sere indicata con $a_1(k_1)$ e posto

$$\varphi_1(k_1) = k_1 - a_1(k_1)$$

resulta dalla condizione (9) che la $\varphi_1(k_1)$ gode delle proprietà della funzione $\varphi(z) = z - a(z)$ del paragrafo precedente, e perciò si annulla almeno in un punto interno al cerchio di raggio r_1. Questi valori di k_1, se — pure ve ne può essere più di uno — hanno dunque i moduli inferiori ad r_1 e ciò mostra intanto che coll'impiccolire di r_1 dovranno bensì essere impiccoliti i moduli delle h, affinchè la diseguaglianza (9) rimanga sempre soddisfatta, ma al tempo stesso diverranno sempre più piccoli i moduli di k_1 che annullano $\varphi_1(k_1)$ e può quindi affermarsi che *tali moduli divengono infinitesimi insieme coi moduli delle h*. Indicheremo con

$$\text{(10)} \qquad k_1 = k_1(h_1 \ldots h_n, k_2 \ldots k_m)$$

uno qualunque di questi valori di k_1, i quali dipendono dalle rimanenti $n+m-1$ variabili riguardate come indipendenti ed annullano il binomio $k_1 - \frac{\alpha_1}{D}$, ora che di tali valori è stata dimostrata l' esistenza.

Passando poi a considerare il binomio

$$k_2 - \frac{\alpha_2}{D}$$

il quale è funzione anch'esso di tutte le $n+m$ variabili primitive, è chiaro che quando vi si limiti la variabilità di k_1 ai soli valori contenuti nella (10), verrà a dipendere soltanto dalle rimanenti $n+m-1$ variabili. Ed in tale ipotesi, come nel caso precedente, si giunge a dimostrare l' esistenza di un valore almeno di k_2

$$k_2 = k_2 (h_1 , h_2 \dots h_n , k_3 \dots k_m) \tag{11}$$

dipendente da $n+m-2$ variabili arbitrarie e di modulo inferiore ad un numero r_2 piccolo a piacere, per il quale si ha:

$$k_2 - \frac{\alpha_2}{D} = k_2 - a_2 (k_2) = \varphi_2(k_2) = 0.$$

Così seguitando, si trova infine che esiste almeno un valore di k_m

$$k_m = k_m (h_1 , h_2 \dots h_n) \tag{12}$$

dipendente dalle n variabili h, avente inoltre il modulo inferiore ad un numero arbitrariamente piccolo r_m e per il quale è nullo il binomio $k_m - \frac{\alpha_m}{D}$ ridotto ad essere unicamente funzione delle $n+1$ variabili $h_1 , h_2 \dots h_n , k_m$.

Pongasi:

$$\left\{\begin{array}{l} K_m (h_1 , \dots h_n) = k_m(h_1 , \dots h_n) \\ K_{m-1}(h_1 ,\dots h_n) = k_{m-1}\{ h_1 \dots h_n , k_m(h_1 \dots h_n)\} \\ K_{m-2}(h_1 ,\dots h_n) = k_{m-2}\{ h_1 \dots h_n , k_{m-1}[h_1 \dots h_n, k_m(h_1 \dots h_n)], k_m(h_1 \dots h_n)\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K_1(h_1 ,\dots h_n) = k_1\{ h_1 \dots h_n, k_2[h_1 \dots h_n, k_3(h_1 \dots h_n \dots)\dots], k_3[h_1 \dots h_n \dots]\dots\} \end{array}\right. \tag{13}$$

ne risulterà, a causa delle (10), (11), (12):

$$\left\{\begin{array}{l} k_1 = K_1 (h_1 , h_2 \dots h_n) \\ k_2 = K_2 (h_1 , h_2 \dots h_n) \\ \dots\dots\dots \\ k_m = K_m (h_1 , h_2 \dots h_n) . \end{array}\right. \tag{14}$$

Ed ora se nelle (14) s'intende di prendere per le h uno stesso sistema di valori scelto tra quelli (in numero infinito) per i quali tutte le condizioni analoghe alla (9) sono contemporaneamente soddisfatte, i valori che ne risulteranno per le k annulleranno le equazioni (8), giacchè per le considerazioni precedenti, ognuna di esse, k_r, annullerà il binomio corrispondente $k_r - \frac{\alpha_r}{D}$, e con ciò, ricordando di aver già notato che se esiste un sistema di siffatti valori delle k, questo non può esser altro che unico, rimane dimostrata l' esistenza di *un solo* sistema di valori delle k che insieme ai valori scelti per le h annullano i primi membri delle equazioni (6) od (8) uguagliati a zero. I secondi membri delle (14) resultano quindi funzioni ad un valore delle n variabili indipendenti h, fintantochè i moduli di queste si mantengono dentro i limiti loro assegnati. Riassumendo, si ha dunque, che quando siano soddisfatte tutte le condizioni imposte, e per un determinato sistema di valori $x_1^0 , x_2^0 \dots x_n^0$ delle variabili x, esiste un sistema di valori $y_1^0 , y_2^0 \dots y_m^0$ delle y, che insieme annullano le equazioni (3), variando i valori iniziali delle x coll' aggiunta di quantità convenientemente scelte $h_1 , h_2 , \dots h_n$, anche i valori iniziali delle y, in virtù delle stesse equazioni, aumenteranno di quantità determinate $k_1, k_2 \dots k_m$ e i moduli delle k divenendo infinitesimi insieme a quelli delle h, le y potranno riguardarsi come funzioni continue delle x nel punto $(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$.

Valendosi ora dell' arbitrarietà delle h e ponendole successivamente tutte, all' infuori di una, uguali a zero, si avranno in conformità delle (6), n sistemi d'equazioni analoghi al seguente:

$$(6') \begin{cases} f_1(x_1^0, \dots x_{r-1}^0, x_r^0+h_r, x_{r+1}^0, \dots x_n^0, y_1^0+k_1, \dots) = \\ \qquad h_r P_r^{(1)} + k_1 Q_1^{(1)} + \dots + k_m Q_m^{(1)} \\ f_2(x_1^0, \dots x_{r-1}^0, x_r^0+h_r, x_{r+1}^0, \dots x_n^0, y_1^0+k_1, \dots) = \\ \qquad h_r P_r^{(2)} + k_1 Q_1^{(2)} + \dots + k_m Q_m^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1^0, \dots x_{r-1}^0, x_r^0+h_r, x_{r+1}^0, \dots x_n^0, y_1^0+k_1, \dots) = \\ \qquad h_r P_r^{(m)} + k_1 Q_1^{(m)} + \dots + k_m Q_m^{(m)} \end{cases}$$

in cui, nelle P e Q che qui compariscono, è supposto:

$$h_r = h_r$$
$$h_1 = h_2 = \dots = h_{r-1} = h_{r+1} = \dots = h_n = 0$$

e quando per la h_r e le k che vi son contenuti i primi membri si annullino, avranno luogo le equazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= h_r P_r^{(1)} + k_1 Q_1^{(1)} + \dots + k_m Q_m^{(1)} \\ 0 &= h_r P_r^{(2)} + k_1 Q_1^{(2)} + \dots + k_m Q_m^{(2)} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ 0 &= h_r P_r^{(m)} + k_1 Q^{(m)} + \dots + k_m Q_m^{(m)} \end{aligned}$$

e queste — supponendo di far decrescere la h_r e le k sempre però in modo che i primi membri delle (6') si annullino — possono servire a determinare i limiti degli m rapporti $\frac{k_s}{h_r}$ $(s = 1, 2, \dots m)$ per $k_s = 0$, $h_r = 0$, vale a dire le derivate parziali $\frac{\partial y_s}{\partial x_r}$ delle y rapporto ad x_r prese nel punto iniziale. Variando poi opportunamente questo punto, finchè tutte le condizioni stabilite rimangono soddisfatte, si avranno per le funzioni y e per le loro derivate prime parziali altri valori univoci che si attaccheranno con continuità ai precedenti. Si ha quindi il teorema:

« Se un sistema di m equazioni (3) fra $n+m$ variabili è soddisfatto dai valori speciali $x_1 = x_1^0, \dots x_n = x_n^0$, « $y_1 = y_1^0, \dots y_m = y_m^0$, e se dentro un campo ad $n+m$ « dimensioni, a cui appartiene come interno il punto « $(x_1^0, \dots x_n^0, y_1^0, \dots y_m^0)$, i primi membri delle (3) sono « funzioni ad un valore, finite e continue insieme colle « loro derivate parziali del prim' ordine e il determinante « funzionale relativo alle m variabili y è differente da « zero, allora le equazioni (3) definiscono le $y_1, y_2 \dots y_m$ « come funzioni ad un valore, finite e continue delle ri- « manenti n variabili (dentro un campo ad n dimensio- « ni) unitamente alle loro derivate parziali del prim' or- « dine ».

Queste derivate sono date da n sistemi di equazioni tutti della forma:

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r}+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_r}+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_r}+\cdots+\dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_r}=0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_r}+\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_r}+\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_r}+\cdots+\dfrac{\partial f_2}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_r}=0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_r}+\dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_r}+\dfrac{\partial f_m}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_r}+\cdots+\dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial y_m}{\partial x_r}=0 \end{cases}$$

e questi sistemi possono altresì essere stabiliti, notando che come conseguenza dei precedenti resultati, alle f è applicabile rigorosamente il teorema di derivazione delle funzioni composte.

Dal teorema enunciato si deducono facilmente come casi particolari quelli relativi alle equazioni (1) e (2).

Avendo così stabilite le condizioni sufficienti affinchè un sistema di m equazioni fra $n+m$ variabili definisca m di esse come funzioni ad un valore, finite e continue delle altre n, insieme colle loro derivate parziali del primo ordine, non resta altro da aggiungere, a complemento di quanto è stato detto, che se i primi membri delle (3), quando sono funzioni di variabili reali, hanno determinate, finite e continue anche le derivate degli ordini superiori fino a quello dell'ordine n, allora essendo applicabili ai sistemi delle equazioni (15) le regole ordinarie della derivazione delle funzioni composte, si potrà concludere che anche le funzioni implicite, di cui è stata dimostrata l'esistenza, avranno determinate finite e continue tutte le derivate parziali fino a quelle dell' ordine n inclusivamente.

Quest' ultima proprietà, ed anzi una più generale in quanto non vi sarà limite al crescere di n, si avvererà

senza dubbio, a causa del teorema I. del §. 3., se i primi membri delle equazioni proposte sono funzioni di variabili complesse. Per l' importanza delle conseguenze che se ne deducono ci limiteremo a considerare il caso in cui un' equazione:

$$f(x\ ,\ y)=0,$$

il primo membro della quale sia funzione di due variabili complesse, è atta a definire una funzione $y(x)$ monodroma, finita e continua che per $x=x_0$ ha il valore y_0. Allora valendo per la $f(x\ ,\ y)$ il teorema I. e per la $y(x)$ il teorema II. ridotto al caso delle funzioni di una sola variabile, sarà sempre la $y(x)$, per i valori della x dentro un determinato cerchio, sviluppabile in serie del Taylor della forma:

$$(16)\quad y=y_0+\frac{x-x_0}{\Pi(1)}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}+\frac{(x-x_0)^2}{\Pi(2)}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}+\cdots$$

ed i coefficienti $\left(\dfrac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=x_0}$ saranno successivamente ed univocamente determinati dalle equazioni:

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dx^2}=0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{cases}$$

in cui s' intende che i valori delle varie derivate parziali di f siano calcolati nel punto (x_0, y_0).

Per maggior semplicità supponiamo che si abbia $x_0=0$, $y_0=0$, allora posto anche

$$a_n = \frac{1}{\Pi(n)}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=0}$$

la (16) prenderà la forma

(16') $$y=a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

oppure

(16'') $$F(y, x) = y - \sum_1^\infty a_n x^n = 0.$$

Partendo da questa formula si può dimostrare con grande facilità la proprietà dell' *inversione delle serie* di cui si fa frequente uso nella teoria delle funzioni polidrome. Suppongasi, infatti, che nella (16'') sia

(18) $$\mathrm{mod}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0\,,\,y=0} = \mathrm{mod}\, a_1 > 0;\ (^*)$$

(*) Qui e nel seguito, la notazione mod Q > 0, sta ad indicare, che di tutti i moduli, naturalmente positivi, della quantità Q si deve eccettuare il valore *zero*, il quale, all' occorrenza, sarà sempre considerato separatamente.

per tutto quello che precede, l'equazione stessa definirà una funzione x della y, ad un valore, finita e continua insieme colle sue derivate, che si annulla per $y=0$ e che per tutti i punti di un cerchio determinato, descritto nel piano della y col centro nell' origine, è espressa analiticamente dalla serie

(19) $$x = \frac{1}{a_1} y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots + b_n y^n + \ldots$$

Così la proprietà suddetta è dimostrata.

E se si osserva che per essere:

$$a_1 = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0\,,\,y=0}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=0\,,\,y=0}}$$

la (18) porta che debba aversi:

$$\mathrm{mod}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0\,,\,y=0} > 0$$

e questa, unita alle altre, è condizione sufficiente affinchè la $f(x, y) = 0$, definisca x come funzione della y godente di proprietà analoghe a quelle trovate per la $y(x)$, è lecito concluderne che questa funzione $x(y)$ non può differire da quella espressa dalla (19). Infatti, come già apparisce dai coefficienti dei termini di primo grado nelle (16') e (19), e come si può verificare per gli altri, i valori di $\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=0}$, $\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_{y=0}$ . . . , sono gli stessi sia che si calcolino dalla $f(x, y)=0$, o dalla (16″), con equazioni analoghe alle (17).

Le funzioni $y(x)$ e $x(y)$ si chiamano funzioni *inverse* o *reciproche* l' una dell' altra.

§. 6.

Giova ora notare che i resultati a cui siamo giunti nel precedente paragrafo sono fondati principalmente sull' ipotesi che nell' intorno di un dato punto iniziale $(x_1^0, \dots x_n^0, y_1^0, \dots y_m^0)$ tutte le funzioni f_r siano sviluppabili sotto la forma data dalle (6), la quale, astrazion fatta dalla variabilità dei coefficienti P, Q, è quella di un sistema di equazioni lineari rispetto alle k che vi compariscono esplicitamente; e che dalla possibilità di risolvere questo sistema, vale a dire dalla condizione mod D $>$ 0, dipende, in particolare, l' *esistenza* e l' *unicità* del sistema delle funzioni y definite da quelle equazioni. D' altronde la condizione mod D $>$ 0, per essere soddisfatta non esige altro, a causa della continuità ammessa per le funzioni Q, che l' essere differente da zero il determinante funzionale nel punto iniziale, per cui quando nel punto $(x_1^0, \dots x_n^0, y_1^0, \dots y_m^0)$ questo determinante sia nullo, i risultati precedenti cesseranno d' aver luogo. Ed invero, non essendo, per tal ragione, da stabilire il sistema delle equazioni (6), sarà invece da vedere, supposto valido per alcune o per tutte le f_r il loro sviluppo limitato alle derivate seconde, sotto quali

condizioni il nuovo sistema di equazioni — ora di grado superiore al primo, rispetto alle k poste in evidenza — è risolvibile come se i coefficienti di queste k fossero tutti costanti, e da tener conto del numero delle differenti soluzioni che si trovano. Questo numero sarà ancora quello delle varie funzioni k delle h, o y delle x, definite dalle equazioni (3) in quel campo in cui le stesse condizioni riescano soddisfatte quando sia ristabilita la variabilità dei coefficienti; e le verificazioni, nei casi ordinarii, basterà farle relativamente al solo punto iniziale. Si vede adunque che « in queste ricerche non si presentano difficoltà « maggiori di quelle incontrate nell'Algebra, per la riso- « luzione dei sistemi d' equazioni di grado superiore « al primo ».

Un esempio dell' applicazione di questo metodo si ha studiando la funzione y definita dall' equazione

$$f(x, y) = 0$$

e supponendo che nel punto iniziale (x_0, y_0) oltre ad annullarsi la funzione, si annulli altresì la sua derivata prima parziale $\frac{\partial f}{\partial y}$. Se s' indicano con P_0 il valore di $\frac{\partial f}{\partial x}$ nel punto (x_0, y_0) e con R, S, T, respettivamente le derivate seconde

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0+\theta h, y_0+\theta k}, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{x_0+\theta h, y_0+\theta k}, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{x_0+\theta h, y_0+\theta k}$$

quando $f(x, y)$ è funzione di variabili reali, o le derivate stesse, calcolate nel punto iniziale ed aumentate di convenienti funzioni di h e k, allorchè la f è funzione di variabili complesse, il caso più semplice, dopo quello già discusso, è che per tutti i valori di h, k di moduli non superiori a certi limiti, sia

$$(20)\quad f(x_0+h, y_0+k) = h\,P_0 + \frac{h^2}{2}R + h\,k\,S + \frac{k^2}{2}T$$

ovvero,

$$(20')\qquad f(x_0+h\,,\, y_0+k) = A\,k^2 + B\,k + C$$

ponendo per brevità

$$h\,P_0 + \frac{h^2}{2}R = C,\ h\,S = B,\ \frac{T}{2} = A:$$

ed anche

$$(20'')\qquad f(x_0+h\,,\, y_0+k) = A(k-\alpha)(k-\beta),$$

se

$$\alpha = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\,,\ \beta = \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

Ora le α, β, sono evidentemente funzioni *ad un valore e distinte* delle variabili h, k quando si supponga che per *tutti* i sistemi di valori che si possono a queste

attribuire — eccettuato, qualunque sia k, il valore $h=0$ — si abbia

$$\mathrm{mod}(B^2-4AC) = \mathrm{mod}[h\{h(S^2-RT)-2P_0T\}] > 0,$$

o, più semplicemente:

$$(21)\qquad \mathrm{mod}\{h(S^2-R\,T) - 2\,P_0\,T\} > 0\,.$$

Ammesso che, dentro i limiti stabiliti, le R, S, T, siano finite e continue, e la T sia inoltre *differente da zero*, distingueremo i due casi:

$$\mathrm{mod}\ P_0 > 0\ ,\ \mathrm{mod}\ P_0 = 0$$

nel primo dei quali alla (21) si potrà *sempre* soddisfare col restringere convenientemente il campo della h, mentre nel secondo la condizione stessa si riduce a

$$\mathrm{mod}(S^2 - R\,T) > 0\,,$$

che sarà verificata in tutto un campo determinato se si trova soddisfatta nel punto iniziale (x_0, y_0). Però non escluderemo che in questo punto, vale a dire per il *solo sistema* $k=0$, $h=0$, possa essere

$$\mathrm{mod}(S^2 - R\,T) = 0\,.$$

Oltre a ciò, quando già non accada che per tutti i valori i quali, dopo tali restrizioni, si possono assegnare ad h e k, i moduli delle funzioni α, β si mantengano inferiori ad r, se r è il raggio del cerchio col centro nell'origine, che limita i valori di k, ben s'intende che il campo della h potrà ancora essere ristretto in modo che le diseguaglianze

$$(22) \qquad \mathrm{mod}\ \alpha < r \quad , \quad \mathrm{mod}\ \beta < r$$

siano ambedue soddisfatte, ed allora per ogni valore determinato h_1 di h, posto

$$\alpha = a\,(k) \quad , \quad \beta = a_1\,(k)$$

le funzioni

$$\varphi(k) = k - a(k) \quad , \quad \varphi_1(k) = k - a_1(k)$$

a causa delle (22) sono ancora del genere della funzio- $\varphi(z) = z - a(z)$ del §. 4. e quindi si annullano per valori di k interni al cerchio di raggio r. Supponiamo infine — ciò che per le ipotesi fatte è ammissibile, — che il campo di variabilità di h, k sia determinato in modo da render valido quanto è rimasto stabilito nella fine dei §§. 2. e 3, e sarà impossibile che, se k_1 e k_2 sono respettivamente i due valori distinti, corrispondenti ad h_1 e per i quali

$$\varphi(k_1) = 0 \quad , \quad \varphi_1(k_2) = 0$$

l'una o l'altra delle $\varphi(k)$, $\varphi_1(k)$ si annulli anche per un terzo valore.

Così dentro i limiti assegnati, a ciascun valore di h, corrisponderanno due e due soli valori di k capaci di an-

nullare l'equazione:

$$f(x_0+h\,,\,y_0+k) = 0$$

e questi valori di k costituiranno due funzioni finite e continue della h, che potremo indicare con $k_1(h)$, $k_2(h)$, tali che per $h=0$ si ha contemporaneamente:

$$k_1(0) = 0 \quad , \quad k_2(0) = 0\,.$$

Ora nell'ipotesi che si prendano per h e k i valori che annullano il primo membro della (20), dovrà aversi l'equazione:

$$0 = h\,\mathrm{P}_0 + \frac{h^2}{2}\,\mathrm{R} + h\,k\,\mathrm{S} + \frac{k^2}{2}\mathrm{T}$$

e dividendo per h^2 e ordinando per le potenze di $\frac{k}{h}$,

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}\,\frac{k^2}{h^2} + \mathrm{S}\,\frac{k}{h} + \frac{1}{2}\mathrm{R} + \frac{\mathrm{P}_0}{h} = 0$$

donde

$$\frac{k}{h} = -\,\mathrm{S} \pm \frac{\sqrt{\mathrm{S}^2 - \mathrm{T}\left(\mathrm{R} + \frac{2\,\mathrm{P}_0}{h}\right)}}{\mathrm{T}}\;;$$

e questa ci mostra che al limite per $k=0$, $h=0$ il modulo del rapporto $\frac{k}{h}$ va crescendo indefinitamente e quindi nel punto iniziale in cui si riuniscono le due funzioni $k_1(h)$, $k_2(h)$, la derivata ha il valore infinito, quando oltre all' essere soddisfatte tutte le condizioni imposte si abbia anche P_0 differente da zero, mentre se $P_0=0$ il limite di $\frac{k}{h}$ avrà in generale due valori finiti e differenti fra loro, a meno che non sia per $h=0$, $k=0$

$$S^2 - T R = 0$$

nel qual caso i due valori divengono uguali.

Rimane dunque dimostrato il teorema:

« Se un' equazione

$$f(x, y) = 0$$

« è soddisfatta dai valori speciali $x=x_0$, $y=y_0$ e nel « medesimo punto (x_0, y_0) si annulla la $\frac{\partial f}{\partial y}$ ma è differente « da zero la $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, l' equazione stessa, dentro un campo « a due dimensioni in cui siano soddisfatte tutte le altre « condizioni precedentemente stabilite, è atta a definire « *due funzioni distinte* $y_1(x)$, $y_2(x)$ finite e continue « per tutti i valori della x che cadono entro un certo « campo, e queste funzioni pel valore x_0 della variabi- « le x, divengono ambedue uguali ad y_0 ed hanno al- « tresì determinate nel punto x_0, le derivate prime, le

« quali a seconda dei varii casi possono essere uguali o « differenti, infinite o finite ».

Merita di essere notato che, scegliendo tra i valori assegnabili alla x un valore x_1 differente da x_0 e dando alla y l'uno o l'altro dei valori $y_1(x_1)$, $y_2(x_1)$, nei punti $\{x_1, y_1(x_1)\}$, $\{x_1, y_2(x_1)\}$ sarà ancora nulla la $f(x,y)$, ma se le soluzioni comuni alle equazioni:

$$f(x, y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

non si succedono con continuità, la $\frac{\partial f}{\partial y}$ sarà negli stessi punti differenti da zero, e lo studio delle funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ in campi convenientemente determinati che non contengono il punto x_0 si ridurrà al caso svolto nel paragrafo precedente.

Per la determinazione della funzione reciproca x della y, osserviamo che se si pone:

$$\alpha_1 = \frac{-(P_0 + k S) + \sqrt{(P_0 + k S)^2 - k^2 R T}}{R}$$

$$\beta_1 = \frac{-(P_0 + k S) - \sqrt{(P_0 + k S)^2 - k^2 R T}}{R}$$

la (20) assumerà la forma:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = \frac{R}{2}(h - \alpha_1)(h - \beta_1)$$

e si vede facilmente che con tutte le ipotesi fatte, alle quali basterà aggiungere l'altra che la R sia finita e differente da zero per tutti i valori di h e k che vengono in considerazione, nel caso che sia

$$\text{mod } P_0 > 0$$

non sarà possibile, anche restringendo il campo della k di rendere ad un tempo

$$\text{mod } \alpha_1 < r_1 \quad , \quad \text{mod } \beta_1 < r_1$$

se r_1 è il raggio del cerchio, col centro nell'origine che, limita i valori della h; giacchè mentre coll' impiccolire del modulo di k il modulo di α_1 tende a zero, il modulo di β_1 tende invece alla quantità finita e differente da zero

$$\text{mod } \left(\frac{2P_0}{R}\right),$$

e posto quindi per un valore k_1 di k:

$$\alpha_1 = b(h) \quad , \quad \beta_1 = b_1(h)$$

delle due funzioni

$$\varphi(h) = h - b(h) \quad , \quad \varphi_1(h) = h - b_1(h),$$

soltanto la prima godrà delle proprietà più volte rammen-

tate: da cui s' inferisce che nelle vicinanze del punto y_0 la x è una funzione ad un valore della y, ciò che, in sostanza, era facile a dedurre dall' osservare che per l' ipotesi di mod $P_0 > 0$, alla $f(x, y) = 0$, in cui si riguardi la y come variabile indipendente, è applicabile il teorema generale del precedente paragrafo.

Se invece si ha

$$\text{mod } P_0 = 0$$

allora la (20) che resulta simmetrica rispetto alle h, k poste in evidenza, colle condizioni già stabilite sarà atta a definire due funzioni $x_1(y)$, $x_2(y)$ della y che godranno proprietà analoghe a quelle trovate per le funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$.

A questo punto è appena necessario l' osservare che tutte le conclusioni a cui siamo giunti, applicate al caso particolare che $f(x, y)$ sia una funzione delle variabili reali x, y e $f(x, y) = 0$ sia rappresentabile mediante una curva, possono servire alla dimostrazione dell' esistenza e alla determinazione delle proprietà caratteristiche dei suoi *punti singolari*, come *punti doppi*, *cuspidi* ecc. in un determinato intorno dei quali la curva stessa si presenta con *due* rami.

L' equazione (20) non potrà più essere stabilita, quando, pure rimanendo soddisfatte le altre condizioni, non si avveri quella speciale che nel punto (x_0, y_0) sia la $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ differente da zero; ma ognun vede come — se nel punto stesso in cui si annullano la funzione e le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, è invece diversa da zero la $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ e perciò si stabilisce un'equazione analoga alla (20), ma del *terzo grado* rispetto a k — sarebbe facile il dimostrare che in un campo convenientemente determinato il quale racchiuda il punto x_0 esisteranno, in generale, tre funzioni y della x, che per $x=x_0$ hanno il valore comune $y=y_0$, capaci di rendere identica l' equazione $f(x, y)=0$; come pure che in un certo campo contenente y_0 esisteranno corrispondentemente una, due o tre funzioni x della y — secondochè nel punto iniziale sarà differente da zero la $\frac{\partial f}{\partial x}$ o la $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ o la $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ — le quali avendo per $y=y_0$ il valore $x=x_0$, verificheranno ancora la stessa equazione a due variabili.

E così generalizzando, se M ed N sono due numeri interi e positivi, essendo $M<N$, e se, per esempio, M denota l'ordine della prima delle derivate parziali *rapporto alla sola x*, ed N l'ordine della prima di quelle *rapporto alla sola y*, le quali non si annullano insieme alla $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0), basterà che la $f(x, y)$, come funzione di due variabili sia sviluppabile secondo la formula (5), postovi $n=N$, per esser sicuri dell'esistenza di N funzioni y della x, che per i valori della x contenuti dentro un determinato campo verificano l' equazione $f(x, y)=0$ e si riducono tutte eguali ad y_0 per il valore x_0 della variabile x, come pure dell'esistenza di M funzioni x della y le quali per i valori della y interni ad un campo parimente determinato, rendono identica la stessa equazione ed hanno il valore comune x_0 per $y=y_0$; *quando però si possa verificare* che la $f(x,y)$, le sue derivate parziali fino a quelle dell' ordine N ed alcune funzioni di queste derivate, la cui formazione è da ricercare nella teoria delle equazioni algebriche dei gradi N ed M, soddisfano alle solite condizioni di esser finite e continue, di annullarsi o no, nel punto (x_0, y_0) ed in un campo a due dimensioni al quale appartiene il punto stesso.

Per queste ultime deduzioni, di cui la generalità e semplicità verrebbero notevolmente menomate allorchè si volesse restringersi alla considerazione delle sole variabili reali, la teoria della funzione y, definita da una equazione qualunque

$$f(x, y)=0,$$

tra variabili complesse, si trova ravvicinata a quella della funzione y, che chiamasi *algebrica* perchè è definita da un' equazione della forma

$$\sum_0^{\mu}{}_r \sum_0^{\nu}{}_s A_{r,s}\, y^r\, x^s = 0,$$

nella quale, per essere le $A_{r,s}$ costanti e μ, ν numeri interi, positivi e finiti, il primo membro è un polinomio razionale. Colla scorta di quest' ultima teoria, non è difficile, da questo punto in poi, il riconoscere e stabilire le più importanti proprietà comuni ai due casi. Ma qui ne tralasceremo la esposizione, limitandoci su tal proposito a ricordare soltanto, che l'analogia del caso da noi considerato, con quello delle funzioni algebriche, cessa generalmente, d' esistere quando i valori iniziali x_0, y_0, che sinora erano stati supposti sempre fiuiti, divengono invece infinitamente grandi (*).

(*) Cfr. Briot et Bouquet, l. c. pag. 207 e seg.