Dott. ENEA BORTOLOTTI

I SISTEMI DI DARBOUX

ALLE

DERIVATE PARZIALI

INTRODUZIONE

I. — Oggetto del presente studio sono i *sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine,* ad n variabili indipendenti ed m funzioni incognite, che rientrano nel tipo

$$(D) \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x_h} = f_{ih}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

ove gli indici i ed h possono assumere — l'uno indipendentemente dall'altro — valori diversi, ($i = 1, 2 \ldots m$; $h = 1, 2 \ldots n$), e le f_{ih} designano funzioni delle variabili indipendenti, e delle funzioni incognite (eventualmente, anche di uno o più parametri).

Tali sistemi del 1.° ordine, *risoluti rispetto a tutte le derivate che vi figurano,* godono, per la loro forma particolare, di proprietà molto semplici e notevoli, che li avvicinano ai sistemi differenziali ordinari: notevolissimo soprattutto è il fatto che essi ammettono un *Teorema generale di esistenza e unicità degli integrali,* soddisfacenti a certe condizioni iniziali, *nelle ordinarie ipotesi di continuità e derivabi-*

lità relativamente alle funzioni che figurano nei loro secondi membri e nelle condizioni iniziali: senza bisogno di presupporne l'analiticità. Essi trovano poi svariate applicazioni nel campo della Geometria differenziale, segnatamente nella *Teoria dei sistemi tripli* (od n^{upli}) *ortogonali.*

È appunto nel suo libro sui « Sistemi ortogonali » che il Darboux [1] ha — per il primo — introdotta la considerazione di tali sistemi: (anzi egli è l'unico finora — ritengo — che ne abbia fatto oggetto di particolare studio).[2] Per questo designerò, d'ora in poi, i sistemi (D) come *sistemi di Darboux.*

Richiamo qui brevemente i risultati che il Darboux stesso stabilisce per essi. Egli considera anzitutto i due casi particolari, in cui per ogni funzione incognita figurano, nei primi membri, *una sola,* o *tutte* le derivate prime, (prese rispetto a variabili indipendenti). (Il 1.° caso è quello dei sistemi che nel seguito chiamerò *sistemi semplici* del Darboux: il 2.° quello ben noto dei sistemi ai differenziali totali). Per ciascuno di questi due casi estremi il Darboux enuncia e dimostra, sotto condizioni assai poco restrittive, un relativo teorema di esistenza e unicità degli integrali che soddisfano a certe condizioni iniziali. Indi egli enuncia un *analogo teorema per il caso generale:* lo dimostra però soltanto pei sistemi a 2 o a 3 variabili.

Per le applicazioni geometriche che il Darboux ha in

[1] DARBOUX. *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, 2.e éd. Paris 1910, Livre III, Chap. 1.er, pag. 325-343.

[2] Il BIANCHI nelle sue lezioni di *Analisi Superiore*, anno 1919-1920, ha esposto (§§ 18-20) i risultati stabiliti dal Darboux per questi sistemi (D), con l'aggiunta di alcune notevoli osservazioni, di cui mi sono valso nel presente lavoro.

vista — nello studio dei sistemi a linee coniugate, ed in particolare dei sistemi tripli ortogonali nello spazio ordinario — è sufficiente, in effetto, fermarsi al caso $n=3$, ma negli studi analoghi negli iperspazî si presentano pure sistemi di Darboux, del tipo generale, ad un numero qualunque di variabili [1]. Quindi era opportuno cercare una dimostrazione generale, valida per n qualunque: e insieme, completare l'enunciato del Darboux, il quale non precisa le condizioni di continuità e derivabilità da richiedere ai secondi membri e alle funzioni arbitrarie che figurano nelle condizioni iniziali: nè il campo in cui viene assicurata l'esistenza ed unicità degli integrali.

Lo scopo principale che mi sono proposto, nelle presenti ricerche, è stato appunto di *enunciare sotto forma completa e precisa, e di dimostrare nelle ipotesi più generali, il teorema di esistenza e unicità degli integrali pei sistemi* (D) *di Darboux.* Di questo teorema (enunciato al § 7, n. 22-24, e completato poi dal teorema dato al § 12, n. 49) ho stabilito due differenti dimostrazioni (vedi §§ 8-9 e 14). La prima di esse, richiedendo la preventiva dimostrazione di una proprietà relativa ai sistemi semplici,[2] mi ha condotto ad occuparmi in particolare di questi interessanti sistemi.

[1] Vedi ad es. i sistemi (III), (VII) nella memoria di BIANCHI « Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{upli} ortogonali e il teorema generale di permutabilità », (*Annali di Mat.* Tomo XXVII della Serie III, 1918).

[2] La derivabilità degli integrali rispetto alle variabili parametriche (vedi Introd. II) per le corrispondenti funzioni incognite (vedi § 5, n. 18; § 7, n. 27; § 8, n. 35). Di questa proprietà si vale implicitamente il DARBOUX per le sue dimostrazioni, relative ai casi $n=2$ ed $n=3$. Ad es. a pag. 338 il DARBOUX determina le w^0_ε risolvendo il sistema $W'_{1\varepsilon}=0$, e i valori trovati dà come valori ini-

La *prima parte* del presente lavoro è appunto dedicata ai sistemi semplici del Darboux. Dopo aver riportato l'enunciato e un brevissimo cenno (§ 1) della dimostrazione (ottenuta mediante estensione del noto metodo di Picard, delle approssimazioni successive) del teorema di esistenza ed unicità degli integrali dato dal Darboux per tali sistemi, io estendo (§§ 1-6) ad essi alcune note proprietà dei sistemi differenziali ordinari. Dimostro (§§ 1-2) la *continuità* degli integrali, in certi campi, rispetto ai valori iniziali e ai parametri contenuti nei secondi membri: e poi la *derivabilità* (§ 5) rispetto agli stessi argomenti, e rispetto a *tutte* le variabili indipendenti. Alla dimostrazione della derivabilità premetto alcuni cenni (§ 3) sui *sistemi alle variazioni* relativi ai sistemi semplici di Darboux, (che sono nuovi sistemi dello stesso tipo, *lineari* nelle funzioni incognite), e la dimostrazione (§ 4) di due interessanti proprietà[1] relative alle serie delle approssimazioni successive.

Questa prima parte è, in sostanza, una introduzione e preparazione alle seguenti, in cui mi occupo dei più generali sistemi del Darboux. Nella *seconda parte* anzitutto enuncio (§ 7) il *teorema fondamentale* di esistenza ed unicità degli integrali per tali sistemi (sotto certe condizioni iniziali), e stabilito un sistema di notazioni abbastanza semplice ed uniforme, dimostro tale teorema per conclusione da $n-1$ ad n

ziali alle w_ε nelle (31). Ma poi, per dimostrare che le funzioni w_ε ottenute con l'integrazione delle (31) soddisfano in effetto alle $W_{1\varepsilon}=0$, egli deve presupporre tali w_ε *derivabili rispetto ad* y, e questo non è evidente: soltanto per $x=x_0$, riducendosi alle w^0_ε lo sono senz'altro, ma per $x \neq x_0$ occorre dimostrarlo (vedi BIANCHI l. c. § 20).

[1] Di cui la prima è l'estensione di un noto teorema del LICHTENSTEIN (vedi § 4, n. 12).

(§§ 8-9). Dalla dimostrazione stessa segue (§ 10) un metodo per l'*effettiva integrazione* di un sistema di Darboux: precisamente, tale integrazione viene ricondotta a successive integrazioni di soli sistemi semplici.[1] Questo risultato mi permette di completare il teorema del § 7, determinando un *campo di esistenza* per gli integrali (§ 12); e poi di estendere ai più generali sistemi di Darboux la maggior parte dei risultati stabiliti nella prima parte pei sistemi semplici (§§ 12-13).

Nella *terza parte* dò una seconda dimostrazione (§ 14) del teorema fondamentale del § 7, a cui è pure collegato un metodo per l'effettiva integrazione. (Questa viene ora ricondotta a successive integrazioni di sistemi di un tipo noto: precisamente, di quelli che io chiamo *iperbolici* (i sistemi (3) del n 58) perchè sono evidente estensione degli ordinari sistemi del 2.° ordine del tipo iperbolico).

Il procedimento usato nella seconda dimostrazione, e il metodo che ne segue pel calcolo degli integrali, sono suscettibili di estensione a sistemi di una classe molto più vasta, di ordine superiore al primo, che comprendono i sistemi di Darboux come caso particolare: anche per tali sistemi ((III) del n. 65) riesco così a stabilire un teorema di esistenza e unicità degli integrali e un corrispondente metodo di integrazione (§ 15), che applico ad alcuni esempi (§ 16). Infine mostro (§ 17) come tali sistemi si possano ricondurre, mediante l'introduzione di nuove funzioni incognite, a sistemi di Darboux equivalenti: il che permette di verificare in modo semplice e chiaro i risultati per essi già ottenuti.

[1] Il metodo è dato sotto una forma generale e poi sotto una forma modificata, più utile nell'applicazione ai singoli casi particolari (§ 10, n. 37-42 e 43-46).

Allo svolgimento degli argomenti indicati premetterò alcune avvertenze sulla nomenclatura che userò costantemente nel seguito, e alcune considerazioni di carattere generale, relative ai sistemi di Darboux e a classi assai più vaste di sistemi, che li comprendono come caso particolare.

II. — Per un qualunque sistema Z di equazioni alle derivate parziali, risolte rispetto ad un certo numero di derivate delle funzioni incognite che vi figurano, (in particolare pei sistemi di Darboux), diremo, con Méray e Riquier,[1] *principali* le derivate delle funzioni incognite, che coincidono con qualcuno dei primi membri o con qualcuna delle loro derivate: *parametriche* tutte le altre. Poi col Riquier,[2] detta *risultante* di due derivate di una qualunque funzione di più variabili, ogni loro derivata comune, per ogni sistema del tipo Z accennato diremo *derivate cardinali* delle sue diverse funzioni incognite tutte le risultanti di ordine minimo dei due primi membri di due qualunque equazioni del sistema, che diano derivate di quella stessa funzione incognita.

Inoltre, pei sistemi Z_1 del 1.° ordine appartenenti al tipo in considerazione (i sistemi di Darboux sono sempre com-

[1] MÉRAY, «Démonstration génerale de l' existence des intégrales des équations aux derivées partielles» (*Journal de Mathém. pures et appl.* 3.e série, t. VI, 1880, pag. 337): MÉRAY et RIQUIER, «Sur la convergence des développements des intégrales d' un système d' équations différentielles partielles», (*Ann. de l' Éc. Norm. Sup.* 3.e série, t. VII, 1890, pag. 23): RIQUIER, «Les systèmes d' équations aux dérivées partielles», Paris 1910, Chap. VI, n. 90, pag. 169.

[2] RIQUIER, libro ora citato pag. 174.

presi) diremo col Bourlet[1] *principale* o *parametrica* una variabile x_k rispetto ad una funzione incognita z_i, secondochè $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}$ è principale o parametrica, (ossia, figura o no nei primi membri).

Il Bourlet distingue anche, per tali sistemi, le derivate principali di una stessa funzione incognita in derivate *semplicemente, doppiamente, . . . , r* — uplamente principali, secondochè tra le variabili rispetto a cui sono prese figurano 1, 2, ..., r variabili, principali per quella stessa funzione incognita, (distinte o coincidenti).

Le derivate cardinali per un tale sistema Z_1 sono *tutte e sole le derivate seconde miste doppiamente principali.*

Una classe particolare di sistemi del 1.° ordine che rientra nel tipo indicato Z_1, (e che comprende ancora, in particolare, ogni sistema di Darbou), è data dai *sistemi canonici* (B) del Bourlet,[2] sistemi che si possono scrivere sotto la forma

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x_h} = a_{00}^{ih} + \sum_{j>i} a_{jh}^{ih} \frac{\partial z_j}{\partial x_h} + \sum_{k>h} a_{ik}^{ih} \frac{\partial z_i}{\partial x_k}$$

dove le a_{sk}^{ih} sono funzioni di $x_1 x_2 \ldots x_n, z_1 z_2 \ldots z_m$.

Il teorema stesso di esistenza e unicità degli integrali, che il Bourlet dimostra per questi sistemi (B) nel *caso analitico*[3] vale pei sistemi di Darboux in ipotesi più generali, come vedremo distesamente in seguito.

I sistemi di Darboux appartengono anche alla classe

[1] BOURLET, «Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues». (*Ann. de l'Éc. Norm. Sup.*, 3.e Série, t. VIII, 1891, Supplément pag. S. 28.

[2] BOURLET l. c. pag. S. 27.

[3] BOURLET, l. c. pag. S. 35.

molto estesa di sistemi alle derivate parziali che Riquier chiama *ortonomi.*[1]

Pei sistemi ortonomi S^0 i cui secondi membri siano funzioni analitiche di tutti i loro argomenti, entro certi campi, il Riquier dà un teorema generale[2] di esistenza e unicità degli integrali che soddisfano a certe condizioni iniziali[3]: la condizione (necessaria e sufficiente) sotto la quale egli

[1] Riquier, l. c. pag. 201. Ricordiamo brevemente che cosa intenda il Riquier per sistema ortonomo. Essendo $x, y, \dots u, v, \dots$ notazioni che indicano un certo numero di variabili indipendenti, e di funzioni di tali variabili, egli immagina di far corrispondere a ciascuna delle quantità $x, y, \dots u, v, \dots$ un numero intero ($\gtreqless 0$) che chiama la *quota* di tale quantità: mentre chiama quota di una qualunque derivata di una delle $u, v \dots$ rispetto alle variabili $x, y, \dots$ la somma delle quote della funzione e delle sue variabili di derivazione, (distinte o coincidenti). Ciò posto, egli chiama *ortonomo* un sistema alle derivate parziali se: α) è risolto rispetto ad un certo numero di derivate (ossia è un sistema della classe che abbiamo indicato con Z): β) non contiene nei secondi membri derivate principali: γ) è possibile, per esso, attribuire a ciascuna delle variabili indipendenti e delle funzioni incognite uno stesso numero, convenientemente scelto, p, di quote, (sotto la condizione che le prime quote delle variabili indipendenti abbiano tutte come valore comune l'unità), in modo che dette $c_1, c_2 \dots c_p$ le quote del 1.° membro generico, $c'_1, c'_2 \dots c'_p$ le quote di una qualunque tra le funzioni incognite o loro derivate contenute nel corrispondente secondo membro, le differenze

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \dots, c_p - c'_p$$

non siano tutte nulle, e la prima di esse che non è nulla sia positiva. Pei sistemi di Darboux, le condizioni α), β), sono soddisfatte per la loro stessa definizione; la terza si verifica assegnando alle variabili indipendenti ed alle funzioni incognite un solo sistema di quote, tutte eguali ad 1 per le variabili indipendenti, a 0 per le funzioni: con questo la quota (unica) di ogni derivata risulta eguale al suo ordine.

[2] Riquier, l. c. pag. 254.

[3] Riquier, l. c. pag. 126-168, 170.

stabilisce l'esistenza e unicità delle soluzioni, è che il sistema sia *passivo,* (ossia che da esso, prolungato illimitatamente per derivazione, sia possibile ricavare, per via d'eliminazione, *espressioni uniche* per tutte le derivate principali di tutti gli ordini in funzione delle variabili indipendenti, delle funzioni incognite, e delle loro derivate parametriche). Il Riquier non esce mai dal caso analitico, e la maggior parte dei suoi risultati perde significato, in ipotesi più generali sulla natura delle funzioni che vi figurano. Ma la definizione di sistema ortonomo è del tutto indipendente da tali ipotesi: dunque è lecito considerare sistemi ortonomi più generali di quelli del Riquier, pei quali non s'introduca la restrizione dell'analiticità per le funzioni dei secondi membri.

Precisamente prendiamo in considerazione un sistema ortonomo $\overline{S}^0$ pel quale sia assicurata la derivabilità dei secondi membri, rispetto ai loro vari argomenti, fino a certi ordini determinati, così da render possibile di *prolungare il sistema per derivazione fino a formare tutte le possibili equazioni, nei cui primi membri figurino derivate principali di 1.^a^ quota C: essendo C un numero determinato, maggiore od eguale ad Ω, quota 1^a^ massima delle derivate cardinali del sistema.*

Per $\overline{S}^0$ non sarà più valido il teorema del Riquier, e neppure avrà senso parlare di *passività* di un tale sistema. Però, anche nelle attuali ipotesi,[1] si può osservare che ogni eventuale sistema di integrali (finiti e continui, e che ammettano tutte le derivate dei vari ordini di 1.^a^ quota $\leq C$) del sistema deve necessariamente verificare tutte le condi-

[1] Cfr. Riquier l. c. pag. 223-224.

zioni che si ottengono, *eguagliando due qualunque tra le espressioni ultime ricavabili dal sistema per qualsivoglia derivata parziale di 1.ª quota $\leq C$ di una funzione incognita.* (*Espressioni ultime*[1] delle derivate principali chiama il Riquier le espressioni che per esse si ottengono dal sistema stesso prolungato per derivazione, eliminando dai secondi membri tutte le derivate principali che vi figurano).

Se si vuole che le (eventuali) soluzioni del sistema non siano legate da altre relazioni, all' infuori delle equazioni del sistema, ossia che la generalità delle soluzioni sia la *massima* che può competere alle soluzioni di un sistema S^0 che abbia — dal punto di vista formale — la stessa composizione del dato, (in altri termini: che ne differisca soltanto per la natura delle funzioni dei secondi membri) si dovrà supporre che *tali condizioni siano tutte identicamente verificate dalle variabili indipendenti, dalle funzioni incognite, e dalle loro derivate parametriche, considerate come altrettante variabili indipendenti.* In tali ipotesi diremo che S^0 è *compatibile*: (come caso limite, se C tende all' ∞, i sistemi $\overline{S}^0$ comprendono i sistemi S^0 del Riquier: le condizioni per la compatibilità divengono allora le condizioni di passività).

Per assicurarsi della passività di un sistema ortonomo S^0 non occorre fare un numero infinito di verifiche: il Riquier dimostra, che condizione sufficiente perchè un tale sistema sia passivo, è che dal sistema, prolungato per derivazione fino ad ottenerne tutte le equazioni che hanno nei primi membri derivate principali di 1.ª quota $\leq \Omega$ (1.ª quota massima delle derivate cardinali), sia possibile ricavare in

[1] RIQUIER l. c. pag. 215.

modo unico le espressioni ultime di tutte le derivate cardinali.[1]

Ora la dimostrazione che dà il Riquier di questa proprietà, come è facile constatare, non presuppone necessariamente l' esistenza di *tutte* le derivate successive dei secondi membri: si può, senza mutamenti sostanziali, ripetere la stessa dimostrazione per un sistema $\overline{S}^0$, fino a concludere che: condizione sufficiente perchè un tale sistema sia *compatibile,* è che

δ) « *tutte le espressioni ultime che dal sistema $\overline{S}^0$ stesso prolungato per derivazione si possono ricavare per ciascuna delle sue derivate cardinali, siano identicamente eguali* ». Diremo perciò le δ) *condizioni di compatibilità* pel sistema $\overline{S}^0$.

Pei *sistemi di Darboux*[2] le condizioni di compatibilità si riducono alla identità delle due espressioni ultime ottenibili per ciascuna derivata cardinale: esse coincidono con le condizioni sotto le quali il Bourlet[3] chiama *completamente integrabile* un sistema canonico: ma si vede subito, andando a scrivere tali condizioni, che le derivate parametriche che eventualmente potrebbero apparire nei due membri di ciascuna di esse sono essenzialmente distinte (prese rispetto a variabili differenti), onde per la identità è necessario che le condizioni di compatibilità risultino *in termini finiti,* che nessuna derivata parametrica vi appaia effettivamente.

[1] RIQUIER l. c. pag. 213-223. Il risultato che il Riquier ivi stabilisce, è da lui enunciato sotto forma un po' diversa, ma risulta dal corso stesso della sua dimostrazione che esso può esprimersi anche sotto la forma qui indicata.

[2] Pei quali siano soddisfatte certe condizioni di continuità e derivabilità relative ai secondi membri (vedi α) n. 21).

[3] BOURLET, l. c. pag. S. 28.

Questo porta ad una limitazione riguardo alle funzioni incognite che possono effettivamente figurare nel secondo membro delle singole equazioni del sistema. Precisamente, si verifica subito che: « perchè un sistema di Darboux sia compatibile, è *necessario* che, se per una funzione incognita z si hanno più variabili principali, $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_s}$, nel secondo membro della equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x_{h_i}} = f_{h_i}(x, z) \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

che ne dà la derivata rispetto ad una qualunque di esse, x_{h_i}, possano figurare (al più) quelle z, (e quelle soltanto), per le quali (almeno) le variabili

$$x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_{i-1}}, x_{h_{i+1}}, \ldots, x_{h_s},$$

(ossia le variabili principali relative alla z del primo membro, eccettuata al più la x_{h_i}), sono ancora variabili principali ».

Le condizioni di compatibilità pei sistemi di Darboux, — che sono dunque, sotto questa ipotesi, equazioni in termini finiti tra le x, z — si possono dire anche, col Darboux,[1] *condizioni di integrabilità:* questa denominazione è giustificata dal fatto che, come vedremo, se esse sono soddisfatte il sistema di Darboux è realmente integrabile, e possiede uno e un solo sistema integrale che soddisfi a certe condizioni iniziali.

[1] Darboux, l. c. pag. 336.

PARTE PRIMA.

I sistemi semplici del Darboux

§ 1.

Sistemi semplici. Teorema generale di esistenza ed unicità. Gli integrali come funzioni dei valori iniziali.

1. — Tra i sistemi alle derivate parziali del Darboux[1] sono soprattutto notevoli, per la grande semplicità delle loro proprietà, che li riavvicinano ai sistemi differenziali ordinari, quelli in cui per ogni funzione incognita vi è una e una sola derivata principale. Se rappresentiamo con $z_{i\lambda}$ genericamente le funzioni incognite che hanno x_i come variabile principale, (ove $\lambda = 1, 2 \ldots \tau_i$, e $\sum_1^n \tau_i = m$, numero delle funzioni incognite), potremo indicare un tale sistema nel seguente modo:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial z_{i\lambda}}{\partial x_i} = f_{i\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z_{\gamma\beta}).$$

[1] I sistemi (D) dell' Introduzione.

Questi sistemi (I), che diremo anche *sistemi semplici* del Darboux, comprendono come caso particolare, per $n = 1$, i sistemi differenziali del primo ordine del tipo normale, ossia risoluti rispetto alle derivate. Una prima proprietà fondamentale dei sistemi (I) è espressa dal *Teorema di esistenza ed unicità degli integrali,* stabilito dal Darboux [1] e da lui dimostrato mediante estensione del noto metodo del Picard,[2] delle approssimazioni successive: che dà anche l'indicazione di un procedimento per la effettiva determinazione degli integrali, sotto forma di serie convergenti in egual grado entro certi campi. Per quel che riguarda il campo di convergenza, riesce opportuno però modificare la dimostrazione del Darboux, (che applica il processo primitivo di Picard), nel modo stesso indicato dal Lindelöf [3] pei sistemi differenziali ordinari: infatti si può così assicurare la convergenza in egual grado in campi in generale assai più estesi.

Esporremo l'enunciato del Teorema così modificato,[4] e un rapido accenno alla sua dimostrazione.

2. — Detto teorema si enuncia:

« Dato un sistema del tipo (I) di Darboux, se nel campo (ad $n + m$ dimensioni) definito dalle limitazioni

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leq a, \tag{1}$$

[1] È il primo dei tre teoremi dati dal DARBOUX nel già citato capitolo (Chap. I, Livre III, pag. 326) dei *Systèmes orthogonaux*, 2.a ediz.

[2] PICARD, *Journ. de Math.*, t. 6, 1890, pag. 145.

[3] LINDELÖF, *Journ. de Math.*, t. 10, 1894, pag. 117.

[4] L'applicazione della modificazione del Lindelöf non presenta difficoltà. Vedi BIANCHI, l. c. §§ 18-19.

e, (per ciascun sistema di valori delle x nel campo (1)),

$$|z_{i\lambda} - z_{i\lambda}^{(0)}| \leq b, \tag{2}$$

(ove le $z_{i\lambda}^{(0)}$ rappresentano funzioni scelte ad arbitrio, purchè finite e continue in (1),

$$z^{(0)}_{i\lambda} = \theta_{i\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

delle variabili parametriche relative alle corrispondenti $z_{i\lambda}$), le funzioni $f_{i\lambda}$ sono finite e continue rispetto a tutti i loro argomenti e soddisfano alle condizioni di Lipschitz rispetto alle z, cosicchè entro tale campo si ha insieme

$$|f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta})| \leq M \tag{3}$$

e

$$|f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}) - f_{i\lambda}(x, z'_{\alpha\beta})| < L \sum_r \sum_s |z_{rs} - z'_{rs}|, \tag{4}$$

essendo M, L numeri finiti, *il sistema* (I) *ammette uno e un solo sistema integrale che soddisfi alle condizioni iniziali*

$$(z_{i\lambda})_{(x_i = x_i^{(0)})} = z^{(0)}_{i\lambda} = \theta_{i\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \text{ ».} \tag{5}$$

Gli integrali sono dati dalle *serie delle approssimazioni successive*

$$z_{i\lambda} = z^{(0)}_{i\lambda} + \sum_{1}^{\infty}{}_r (z^{(r)}_{i\lambda} - z^{(r-1)}_{i\lambda}), \tag{6}$$

i cui termini sono formati coi successivi sistemi di soluzioni approssimate, o *sistemi ausiliarî,*

$$\left\{ \begin{aligned} & z^{(0)}_{i\lambda} = \theta_{i\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \\ & z^{(r)}_{i\lambda} = z^{(0)}_{i\lambda} + \int_{x_i^{(0)}}^{x_i} f_{i\lambda}(x, z^{(r-1)}_{\alpha\beta})\, dx_i \qquad (r = 1, 2, \ldots), \end{aligned} \right. \tag{7}$$

e il *campo di convergenza in egual grado* di tali serie, ossia il campo in cui è assicurata l'esistenza ed unicità degli integrali, detto δ il minore dei numeri a, $\frac{b}{M}$, è definito dalle limitazioni

$$(8) \qquad |x_i - x_i^{(0)}| \leq \delta.$$

Il sistema (I), insieme alle condizioni iniziali (5), equivale al sistema di equazioni integrali

$$(9) \qquad \left\{ z_{i\lambda} = z^{(0)}_{i\lambda} + \int_{x_i^{(0)}}^{x_i} f_{i\lambda}(x, z_{\gamma\beta})\, d x_i ; \right.$$

è su questa osservazione che si basa la costruzione dei successivi sistemi ausiliarî (7). Ove occorra, indicheremo con $c_{i\lambda}$ i valori delle $\theta_{i\lambda}$ nel punto iniziale $(x_i^{(0)})$, e con c il maggiore degli m numeri $c_{i\lambda}$. Le $\theta_{i\lambda}$, (finite e continue in (1)), apparterranno, nel loro campo (1) di definizione, ad un certo intorno (d) dei corrispondenti numeri $c_{i\lambda}$, cosicchè sarà in (1)

$$(10) \qquad |x^{(0)}_{i\lambda} - c_{i\lambda}| \leq d$$

Per dimostrare il precedente teorema anzitutto si prova la convergenza in egual grado delle serie (6) nel campo (8). Questo è il punto essenziale, e si raggiunge osservando in primo luogo che le funzioni ausiliarie $z^{(r)}_{i\lambda}$ definite dalle (7), per r comunque grande restano sempre nel campo (2), (quando le x_i restino nel campo (8)): stabilito ciò, dalle (7) stesse, con successive applicazioni delle diseguaglianze (4) di Lipschitz ed integrazioni si ricava pel termine generale della serie (6) generica la limitazione (valida in (8))

$$(11) \qquad |z^{(r)}_{i\lambda} - z^{(r-1)}_{i\lambda}| < \frac{M}{Lm} \frac{\left(|Lm \sum_1^n{}_j |x_j - x_j^{(0)}|\right)^r}{r!}$$

il che prova appunto che nel campo (8) le serie (6) delle approssimazioni successive convergono tutte più rapidamente dell'unica serie (esponenziale) a termini fissi

$$(12) \qquad c + d + \frac{M}{Lm} \sum_1^{\infty}{}_r \frac{(L m n \delta)^r}{r!}.$$

Ciò posto si verifica immediatamente che le somme di tali serie sono effettive soluzioni del sistema (I), soddisfacenti alle (5): così risulta dimostrata la parte relativa all'esistenza: l'unicità si prova poi subito seguendo lo stesso metodo seguito dal Goursat[1] per le equazioni differenziali ordinarie.

3\. — D'ora innanzi, parlando di sistemi semplici del Darboux, supporremo sempre soddisfatte le condizioni del precedente teorema, nelle quali è assicurata l'esistenza ed unicità degli integrali. Nel caso particolare dei sistemi *lineari* rispetto alle funzioni incognite, (e più in generale per tutti i sistemi pei quali le condizioni di continuità e di Lipschitz per le $f_{i\lambda}$ sono soddisfatte illimitatamente rispetto alle $z_{i\lambda}$), l'esistenza e unicità degli integrali è assicurata in tutto il campo primitivo (1).

4\. — Nello stesso campo (8) gli integrali sono *funzioni finite e continue* delle variabili indipendenti, e soddisfano essi stessi alle limitazioni (2).

Ma si presenta subito il problema della loro *dipendenza dai valori iniziali,* (dalle coordinate $x_i^{(0)}$ del punto iniziale, e dalle corrispondenti funzioni $z^{(0)}_{i\lambda}$), da cui sono univocamente determinati. Come nel caso particolare dei sistemi

---

[1] GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, 1905, pag. 372.

differenziali ordinari, tale questione si risolve dimostrando che sotto certe condizioni, ed entro certi campi, anche rispetto a tali argomenti gli integrali sono funzioni finite, continue e derivabili.

Sulla *derivabilità* torneremo più innanzi (vedi § 5): per quanto riguarda la *continuità*, non presenta alcuna difficoltà l'estendere ai sistemi (I) la dimostrazione che di tale proprietà dà il Goursat[1] pei sistemi differenziali ordinari: si giunge così a stabilire che « se nel campo

$$(1)^* \qquad |x_j - a_j| \leq a$$

è definito un sistema di funzioni $\varphi_{i\lambda}(x_1 x_2 \ldots x_n)$, finite e continue nel campo stesso, e nel campo $(1)^*$ per le x, nel campo

$$(2)^* \qquad |z_{ij} - \varphi_{ij}| \leq b$$

per le $z_{i\lambda}$, sono soddisfatte le condizioni (3), (4) per le f_{ij}, nel campo

$$(13) \qquad \begin{cases} |x_j \;\, - a_j \,| \leq \dfrac{\delta}{4}, \\ |x_j^{(0)} - a_j \,| \leq \dfrac{\delta}{4}, \\ |z^{(0)}_{i\lambda} - \varphi_{ij}| \leq \dfrac{b}{2}, \end{cases}$$

(col solito significato per δ), le serie (6) sono convergenti in egual grado rispetto a tutti gli argomenti $x_j, x_j^{(0)}, z^{(0)}_{ij}$ da cui vengono a dipendere i loro termini, quando i valori iniziali $x_j^{(0)}, z^{(0)}_{ij}$ non si suppongano prefissati ». E ciò equivale a dire che nello stesso campo (13) gli integrali sono appunto funzioni finite e continue degli stessi argomenti.

---

[1] GOURSAT, l. c. 2e éd. t. III, pag. 7-8.

Se soltanto le $x_j^{(0)}$ o le $z^{(0)}_{i\lambda}$ si suppongono variabili, la continuità è assicurata rispettivamente nei campi

$$(14) \qquad \begin{cases} |x_j \;\, - a_j| \leq \dfrac{\delta}{2} \\ |x_j^{(0)} - a_j| \leq \dfrac{\delta}{2} \end{cases}$$

o

$$(15) \qquad \begin{cases} |x_j \;\, - x_j^{(0)}| \leq \dfrac{\delta}{2} \\ |z^{0}_{i\lambda} - \varphi_{i\lambda}| \leq \dfrac{b}{2}. \end{cases}$$

§ 2.

Sistemi dipendenti da parametri. Integrale generale.

5. — Per rendere variabili le $z^{(0)}_{i\lambda}$ o le $x_j^{(0)}$ si può, in particolare assegnarle come funzioni determinate di un certo numero di parametri variabili. Ma possiamo supporre che anche esplicitamente *nei secondi membri f_{ij} figurino uno o più parametri* $\alpha_\mu\,(\mu = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Indicheremo, ove occorra, con $(I)^*$ tali sistemi più generali

$$(I)^* \qquad \frac{\partial z_{i\lambda}}{\partial x_i} = f_{i\lambda}(x_j, z_{\rho\beta}, \alpha_\mu)$$

che comprendono, (per $\nu = 0$), i sistemi (I).

Supporremo in ogni caso che *le f_{ij}, le $x_j^{(0)}$, le $z^{(0)}_{ij}$, siano funzioni finite e continue dei parametri α_μ che in esse eventualmente figurino, in un campo finito*

$$(16) \qquad |\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma.$$

Siano le condizioni (3), (4), per le $f_{i\lambda}$ soddisfatte nei campi (1)*, (2)*, (16) rispetto agli argomenti da cui tali funzioni dipendono: la dimostrazione del teorema generale del n. 2 anche nelle attuali ipotesi più generali si può ripetere senza mutamenti notevoli, e si ottiene che « gli integrali $z_{i\lambda}$ del sistema (I)* corrispondenti alle condizioni iniziali

$$(17) \qquad (z_{i\lambda})_{(x_i = x_i^{(0)})} = z^{(0)}_{i\lambda} = \theta_{i\lambda}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, \alpha_\mu)$$

sono funzioni finite e continue, univocamente determinate, di tutti gli argomenti $(x_j, x_i^{(0)}, z^{(0)}_{i\lambda}, \alpha_\mu)$ da cui dipendono, nel campo

$$(18) \qquad \begin{cases} |x_j \ - a_j \ | \leq \dfrac{\delta}{4} \\ |x_j^{(0)} - a_j \ | \leq \dfrac{\delta}{4} \\ |z^{(0)}_{i\lambda} - \varphi_{i\lambda}| \leq \dfrac{b}{2} \\ |\alpha_\mu \ - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma \text{ ».} \end{cases}$$

Qui intendiamo che δ abbia il solito significato: minore dei due numeri a, $\dfrac{b}{M}$. Per la supposta continuità delle $f_{i\lambda}$ rispetto ai parametri α_μ, se indichiamo con M_0, δ_0 i valori corrispondenti al caso particolare in cui si faccia $\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}$, si potrà prendere $\sigma' \leq \sigma$ in modo che per

$$(19) \qquad |\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma'$$

il corrispondente valore δ' differisca da δ_0 tanto poco quanto si vuole.

Se i valori iniziali $x_j^{(0)}$, $z^{(0)}_{i\lambda}$ si suppongono prefissati, e non dipendenti dai parametri α_μ, e le condizioni (3), (4),

soddisfatte nel campo (1), (2), (16), l'esistenza, unicità e continuità degli integrali è assicurata nel campo

$$(20) \qquad \begin{cases} |x_j - x_j^{(0)}| \leq \delta, \\ |\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma. \end{cases}$$

Pei *sistemi lineari*, il campo di convergenza degli integrali è tutto il campo primitivo (1), (16), in cui è assicurata la continuità dei coefficienti.[1]

6\. — Consideriamo ora il caso, in cui *si supponga già noto un sistema integrale particolare,*

$$(21) \qquad \bar{z}_{i\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

che soddisfi alle (I)* per $\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}$.

Possiamo proporci di *trovare gli integrali di* (I)* *che per* $\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}$ *si riducono agli integrali noti* $\bar{z}_{i\lambda}$.

Sia $(x_j^{(0)})$ un punto, interno al campo di continuità di questi integrali (21), tale che entro certi intorni delle $x_j^{(0)}$, delle $z^{(0)}_{i\lambda} = (z_{i\lambda})_{(x_i = x_i^{(0)})}$ e di particolari valori $\alpha_\mu^{(0)}$ dei parametri siano soddisfatte le solite condizioni (n. 2, 5) di continuità e di Lipschitz per le $f_{i\lambda}$. Pei risultati indicati al numero precedente, avremo che basta — per risolvere il problema ora posto — prendere come valori iniziali per le $z_{i\lambda}$ i rispettivi valori $\bar{z}^{(0)}_{i\lambda}$ a cui si riducono le $\bar{z}_{i\lambda}$ per $x_i = x_i^{(0)}$: gli integrali corrispondenti si ridurranno in effetto per $\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}$ alle $\bar{z}_{i\lambda}$, e saranno funzioni finite e continue delle x, α, in un campo (20).[2]

---

[1] Se però anche le $\theta_{i\lambda}$ si suppongono finite e continue in (1).

[2] Ove δ s'intenda tale che il campo $|x_j - x^{(0)}_j| < \delta$ sia interno al campo di continuità degli integrali $\bar{z}_{i\lambda}$.

Ma risultati più precisi si ottengono procedendo direttamente.[3]

Supponiamo che gli integrali particolari $\bar{z}_{i\lambda}$ supposti noti siano finiti e continui in un campo

$$|x_i - \bar{x}_i^{(0)}| \leq p; \tag{22}$$

supponiamo inoltre che nel campo

$$\left\{ \begin{array}{l} |x_i - \bar{x}_i^{(0)}| \leq p, \\ |z_{i\lambda} - \bar{z}_{i\lambda}| \leq b, \\ |\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma, \end{array} \right. \tag{23}$$

le funzioni $f_{i\lambda}$ siano finite e continue e soddisfino, rispetto alle $z_{\alpha\beta}$, alle condizioni di Lipschitz: cosicchè si avrà, in tale campo,

$$\left\{ \begin{array}{l} |f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)| \leq N, \\ |f_{i\lambda}(x, z_{\gamma\beta}, \alpha_\mu) - f_{i\lambda}(x, z'_{\gamma\beta}, \alpha_\mu)| < L \sum_r \sum_s |z_{rs} - z'_{rs}|, \end{array} \right. \tag{24}$$

con N, L, determinati e finiti, e si potrà sempre determinare $\eta \leq \sigma$ tale che per

$$|\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \eta, \tag{25}$$

sia

$$|f_{i\lambda}(x, \bar{z}_{\gamma\beta}, \alpha_\mu) - f_{i\lambda}(x, \bar{z}_{\gamma\beta}, \alpha_\mu^{(0)})| < h, \tag{26}$$

con h arbitrariamente prefissato.

Ciò premesso, costruiamo direttamente, col metodo delle approssimazioni successive, gli integrali cercati, — che per $\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}$ si riducono alle corrispondenti $\bar{z}_{i\lambda}$ — *con questa modificazione, che per primi valori approssimati prenderemo le* $\bar{z}_{i\lambda}$ *stesse invece che le* $\bar{z}^{(0)}_{i\lambda}$. Questo sarà lecito, purchè le

[3] Vedi Goursat, l. c. pag. 14.

serie (6) risultino ancora convergenti: sotto questa condizione è immediata la verifica, che le somme di tali serie sono ancora effettive soluzioni del sistema, soddisfacenti alle condizioni iniziali imposte, e che non ve ne è altre.[1]

I successivi sistemi ausiliari saranno dati da

$$z^{(0)}_{i\lambda} = \bar{z}_{i\lambda}$$

$$z^{(r)}_{i\lambda} = \bar{z}^{(0)}_{i\lambda} + \int_{x_i^{(0)}}^{x_i} f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}^{(r-1)}, \alpha_\mu)\, dx_i, \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

D' altra parte gl' integrali $\bar{z}_{i\lambda}$ soddisfano alle equazioni

$$\bar{z}_{i\lambda} = z^{(0)}_{i\lambda} + \int_{\bar{x}_i^{(0)}}^{x_i} f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}, \alpha_\mu^{(0)})\, dx_i.$$

Costruiamo le differenze successive

$$z^{(1)}_{i\lambda} - \bar{z}_{i\lambda}, \quad z^{(2)}_{i\lambda} - \bar{z}_{i\lambda}, \ldots, z^{(r)}_{i\lambda} - \bar{z}_{i\lambda}, \ldots :$$

restringendo successivamente l' intervallo η possiamo fare in modo che tali differenze restino tutte, per r comunque grande, entro il campo (22), (25), inferiori al numero b. Infatti si ha

$$z^{(r)}_{i\lambda} - z_{i\lambda} = \int_{\bar{x}_i^{(0)}}^{x_i} \{ f_{i\lambda}(x, z_{\gamma\beta}^{(r-1)}, \alpha_\mu) - f_{i\lambda}(x, \bar{z}_{\alpha\beta}, \alpha_\mu) \}\, dx_i + \tag{27}$$

$$+ \int_{\bar{x}_i^{(0)}}^{x_i} \{ f_{i\lambda}(x, \bar{z}_{\gamma\beta}, \alpha_\mu) - f_{i\lambda}(x, \bar{z}_{\gamma\beta}, \alpha_\mu^{(0)}) \}\, dx_i,$$

[1] Vedi più innanzi, § 4, n. 13.

e da questa si ottiene, successivamente,

$$|z^{(1)}_{i\lambda} - z_{i\lambda}| < h|x_i - x_i^{(0)}| < h\sum_1^n |x_j - x_j^{(0)}| < hnp < b,$$

$$|z^{(2)}_{i\lambda} - \bar{z}_{i\lambda}| < Lmh\,\frac{\left(\sum_1^n |x_j - x_j^{(0)}|\right)^2}{2!} + h\sum_1^n |x_j - x_j^{(0)}|$$

$$< \frac{h}{Lm}\left(\frac{(Lmnp)^2}{2!} + Lmnp\right) < b,$$

. . . .

e in generale (per ogni $r \geq 1$)

$$|z^{(r)}_{i\lambda} - \bar{z}_{i\lambda}| < L^{r-1}m^{r-1}h\,\frac{\left(\sum_1^n |x_j - x_j^{(0)}|\right)^r}{r!} + \ldots + h\sum_1^n |x_j - x_j^{(0)}|$$

$$< \frac{h}{Lm}\left(\frac{(Lmnp)^r}{r!} + \ldots + Lmnp\right) < b,$$

purchè η venga successivamente ristretto, sì da rendere valida la (26) per valori

$$h < \frac{b}{np},$$

$$h < \frac{bLm}{Lmnp + \frac{(Lmnp)^2}{2!}}$$

. . . .

$$h < \frac{bLm}{Lmnp + \ldots + \frac{(Lmnp)^r}{r!}}$$

Dunque basterà prendere η tale che la (26) valga per un valore

$$h < \frac{bLm}{e^{Lmnp} - 1}$$

perchè per ogni r si abbia appunto

$$|z^{(r)}_{i\lambda} - z_{i\lambda}| < b.$$

Ciò stabilito, non presenta alcuna difficoltà il ripetere, per le serie delle approssimazioni successive costruite coi nuovi sistemi ausiliari, la solita dimostrazione della convergenza in egual grado: e si ottiene così il seguente risultato: « gli integrali del sistema (I)* che per $\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}$ si riducono agli integrali particolari supposti noti sono funzioni finite e continue delle x e delle α in tutto il campo

(29) $$|x_j - x_j^{(0)}| \leq p, \ |\alpha_\nu - \alpha_\nu^{(0)}| \leq \eta \text{ »},$$

ossia, rispetto alle x, in tutto il campo in cui lo sono gli integrali $\bar{z}_{i\lambda}$; mentre applicando i precedenti risultati si assicurava (rispetto alle x) un campo di convergenza in generale assai più ristretto.[1]

7. — Gli integrali considerati nel precedente teorema non sono gli integrali più generali di (I)* che per $\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}$ si riducono alle $z_{i\lambda}$. Infatti possiamo considerare gli integrali che per

$$x_j = x_j^{(0)} = x_j^{(0)} + \varepsilon_j$$

si riducono alle

$$z^{(0)}_{i\lambda} = z^{(0)}_{i\lambda} + q_{i\lambda},$$

essendo le ε_j parametri arbitrari, e le $q_{i\lambda}$ funzioni arbitrarie (finite e continue) delle x, con la restrizione che i valori assoluti $|\varepsilon_j|$, $|q_{i\lambda}|$, siano opportunamente limitati. Tali integrali per

$$\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}, \quad \varepsilon_j = 0, \quad q_{i\lambda} = 0$$

[1] Il contrario accade rispetto ai parametri α.

si ridurranno appunto alle $\overline{z}_{i\lambda}$, e se nel campo

$$(30)\qquad \begin{cases} |x_j - \overline{x}_j^{(0)}| \leq p, \\ |z_{i\lambda} - \overline{z}_{i\lambda}| \leq b, \\ |\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma, \end{cases}$$

sono soddisfatte le solite condizioni (vedi numero precedente) per le $\overline{z}_{i\lambda}$ e le $f_{i\lambda}$, nel campo

$$(31)\qquad \begin{cases} |x_j - \overline{x}_j^{(0)}| \leq \frac{p}{4}, \\ |\varepsilon_j| = |x^{(0)} - \overline{x}_j^{(0)}| \leq \frac{p}{4}, \\ |q_{i\lambda}| = |z^{(0)}_{i\lambda} - z^{(0)}_{i\lambda}| \leq \frac{b}{2}, \\ |\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \eta \end{cases}$$

saranno funzioni finite e continue di tutti i loro argomenti.

8. — Dato un sistema (I)*, supponiamo di avere effettivamente determinato le espressioni

$$(32)\qquad z_{i\lambda} = z_{i\lambda}(x_j, x_j^{(0)}, z^{(0)}_{\gamma\delta}, \alpha_\mu)$$

degli integrali corrispondenti alle condizioni iniziali generiche, e ai valori generici dei parametri: le (32) ci dànno l'*integrale generale* del sistema (I)*, nel senso del Darboux[1] infatti colla opportuna specializzazione delle arbitrarie; dalle (32) si può ottenere ognuna delle soluzioni di cui il teorema generale del n. 2 e i successivi corollari ci assicurano l'esistenza.

[1] DARBOUX, *Théorie des surfaces II*, Chap. IV, pag. 98.

Però nelle (32) si possono anche dare alle $x_j^{(0)}$ valori fissi, senza diminuire la generalità: dalle espressioni che così si ottengono

$$(32)^*\qquad z_{i\lambda} = z_{i\lambda}(x_j, x^{(0)}_{\gamma\beta}, \alpha_\mu)$$

si può ancora ricavare, disponendo opportunamente delle funzioni arbitrarie $z^{(0)}_{\gamma\beta}$, ogni integrale particolare del sistema (I)* ottenibile dalle (32).

Di più: se in qualunque modo si è trovato un sistema di soluzioni del sistema (I)* proposto

$$(32)^{**}\qquad z_{i\lambda} = z_{i\lambda}(x, \Omega_{\gamma\beta}, \alpha_\mu),$$

dipendenti dai parametri α_μ e da m funzioni arbitrarie

$$\Omega_{\gamma\beta}(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_n, \alpha_\mu)$$

delle $n-1$ variabili indicate e dei parametri stessi, potremo dire che le (32)** rappresentano ancora l'integrale generale del sistema, sotto la condizione che sia possibile disporre delle $\Omega_{\alpha\beta}$ in modo, da fare assumere agli integrali, quando alle rispettive variabili principali si dia il valore iniziale, valori arbitrariamente assegnati in funzione delle rimanenti variabili (parametriche).[1]

[1] Questa condizione sarà soddisfatta in particolare se:

1) nella (32)** generica, corrispondente a $z_{i\lambda}$, figurano soltanto le $\Omega_{it}(t = 1, 2, \ldots, \tau_i)$.

2) gli n Jacobiani, di ordine τ_i, $\frac{\partial(z^{(0)}_{i\lambda})}{\partial(\Omega_{i\nu})}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ovvero, che è lo stesso, l'Jacobiano di ordine m $\frac{\partial(z^{(0)}_{i\lambda})}{\partial(\Omega_{\alpha\beta})}$, che è il loro prodotto, non si annullino in un certo campo finito.

§ 3.

Sistemi alle variazioni relativi ai sistemi (I)* di Darboux.

9. — Abbiamo visto ai n. 6, 7, come supposto noto un particolare sistema integrale z_{ii} di un sistema (I)*, sotto certe condizioni di continuità sia assicurata l'esistenza di molteplicità più volte infinite e *continue* di integrali del sistema stesso, che comprendono quello dato: in particolare l'esistenza di *integrali vicini quanto si vuole ad esso.* Ora l'argomento degli integrali di un dato sistema differenziale infinitamente vicini ad un dato si collega, come è noto, a quello dei suoi *sistemi alle variazioni.*[1] Siamo così condotti ad occuparci brevemente di quest'ultimo argomento.

10. — Introduciamo una *nuova ipotesi,* che d'ora innanzi supporremo sempre soddisfatta: *che le funzioni $f_{i\lambda}$ posseggano derivate parziali prime rispetto alle $z_{i\lambda}$, finite e continue* nel campo (1), (2) relativo alle x_j, $z_{i\lambda}$. (Questa condizione comprende manifestamente le condizioni (4) di Lipschitz pel sistema (I)*). Supporremo inoltre che *se nelle $f_{i\lambda}$ e nelle $x_j^{(0)}$, $z^{(0)}_{i\lambda}$, sono contenuti uno o più parametri α_μ, anche rispetto ad essi le $f_{i\lambda}$, $x_j^{(0)}$, $z^{(0)}_{i\lambda}$, (queste ultime anche rispetto alle $x_j^{(0)}$, se ne dipendono), ammettano le derivate prime finite e continue.*

11. — Ciò posto, sia

$$z_{i\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{33}$$

[1] Vedi POINCARÉ, *Méthodes nouvelles de Mecanique céleste*, 1, Paris 1892, pag. 162. DARBOUX, *Sur les équations aux dérivées partielles*, (Comptes rendus de l'Acad. de Sciences, Paris, t. XCVI, pag. 716), e *Théorie des surfaces*, IV, note XI, pag. 506-16. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, 2e éd., t. III, pag. 14-19.

un sistema integrale, supposto noto, del dato sistema (I)*, corrispondente ai valori iniziali

$$x_j^{(0)},\ z^{(0)}_{i\lambda},\ \alpha_\mu^{(0)}. \tag{34}$$

Facciamo variare, infinitamente poco, le arbitrarie (34): se gli integrali (33), insieme alle funzioni $f_{i\lambda}$, soddisfano a certe condizioni di continuità, (indicate ai n. 6, 7), sarà assicurata l'esistenza di nuovi integrali infinitamente vicini ad essi, corrispondenti ai valori variati. Detta ε una costante infinitesima del 1.° ordine, potremo sempre indicare, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, con

$$\zeta_{i\lambda} = z_{i\lambda} + \varepsilon u_{i\lambda} \tag{35}$$

i nuovi integrali, e con

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j^{(0)} + \varepsilon \varrho_j, \\ \theta_{i\lambda} + \varepsilon \psi_{i\lambda} = z^{(0)}_{i\lambda} + \varepsilon \psi_{i\lambda}, \\ \alpha_\mu^{(0)} + \varepsilon \beta_\mu \end{array} \right. \tag{36}$$

i nuovi valori delle arbitrarie che hanno variato.

Le $u_{i\lambda}$ saranno soluzioni del *sistema alle variazioni* relativo al dato sistema (I)*, *costruito rispetto al sistema integrale noto* (33): e se le ϱ_j, $\psi_{i\lambda}$, β_μ sono del tutto arbitrarie, ne rappresenteranno anzi la soluzione più generale.

È noto come si costruiscano i sistemi alle variazioni relativi a un dato sistema differenziale[1]: nel nostro caso

[1] Vedi DARBOUX *Theorie des surfaces*, IV, note XI, pag. 506. (La costruzione — nel nostro caso — è questa: si sostituisce, nel sistema (I)*, ad ogni funzione incognita $z_{i\lambda}$, $z_{i\lambda} + \varepsilon u_{i\lambda}$: ad ogni parametro α_μ contenuto esplicitamente nei secondi membri, $\alpha_\mu + \varepsilon\beta_\mu$: indi si deriva ciascuna equazione del sistema rispetto ad ε e si pone $\varepsilon = 0$ dopo la derivazione).

otteniamo il sistema

$$\frac{\partial u_{i\lambda}}{\partial x_i} + \sum_\gamma \sum_\beta \frac{\partial f_{i\lambda}}{\partial z_{\gamma\beta}} u_{\gamma\beta} + \sum_1^{l} {}_\mu \frac{\partial f_{i\lambda}}{\partial \alpha_\mu} \beta_\mu . \tag{37}$$

(Nelle derivate che figurano nei secondi membri, dopo la derivazione si debbono intendere sostituiti alle $z_{i\lambda}$ i corrispondenti integrali (33), funzioni note delle x; ed alle α_μ, le $\alpha_\mu^{(0)}$).

Come si vede, questo sistema dipende dall' integrale noto (33) rispetto a cui è costruito e inoltre contiene, in generale, i nuovi parametri β_μ, ossia *dipende anche dal modo di variare dei parametri* α_μ: ma le sue singole soluzioni dovranno essere in relazione anche col modo di variare delle $x_i^{(0)}$ e delle $z^{(0)}_{i\lambda}$, ossia dovranno dipendere dalle β_μ, ϱ_i, $\psi_{i\lambda}$. Su questa dipendenza torneremo in seguito (v. § 6, n. 20).

Il sistema (37) alle variazioni è un nuovo *sistema semplice del Darboux, lineare nelle funzioni incognite*: onde segue (n. 2, 6) che in tutto il campo, relativo alle x, in cui è assicurata l'esistenza e la continuità degli integrali (33), (e delle $f_{i\lambda}$, con le loro derivate prime: vedi n. 10), esso *ammette uno e un solo sistema d'integrali,* corrispondenti a condizioni iniziali prefissate ad arbitrio

$$(u_{i\lambda})_{(x_i = x_i^{(0)})} = u^{(0)}{}_{i\lambda} = w_{i\lambda}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, \alpha_\mu). \tag{38}$$

e rappresentati dagli sviluppi in serie, sempre convergenti in tale campo

$$u_{i\lambda} = u^0{}_{i\lambda} + \sum_1^\infty {}_r (u^{(r)}{}_{i\lambda} - u^{(r-1)}{}_{i\lambda}). \tag{39}$$

Finora abbiamo supposto che il sistema integrale (33) sia un sistema integrale particolare, corrispondente a condizioni (34) prefissate, ma evidentemente possiamo anche

supporre che alcune (in numero qualunque) delle $x_i^{(0)}, z^{(0)}_{i\lambda}, \alpha_\mu^{(0)}$, o anche tutte, non siano prefissate, e prendere in considerazione il sistema alle variazioni relativo, dato ancora dalle (37) (in cui si intendano poste per le $z_{\alpha\beta}$ le espressioni attuali degli integrali e i corrispondenti valori dei parametri). In base ai risultati dei precedenti §§ avremo, anche in tali ipotesi più generali, che gli integrali del sistema (37) saranno funzioni finite e continue delle x e delle arbitrarie da cui dipendono i corrispondenti integrali del dato sistema (I)*, in tutto il campo in cui questi stessi integrali lo sono.

§ 4.

Due proprietà delle serie delle approssimazioni successive, pei sistemi (I) di Darboux.

12. — Questi brevi cenni sui sistemi alle variazioni relativi ai sistemi (I)* troveranno tra breve applicazione nella risoluzione di una notevole questione: quella della *derivabilità* degli integrali, considerati come funzioni dei valori iniziali $x_i^{(0)}$, $z^{(0)}_{i\lambda}$, e dei parametri α_μ, rispetto a tali argomenti. Ma prima di venire a questo premetteremo ancora la dimostrazione di *due proprietà* delle serie (6) delle approssimazioni successive pei sistemi (I): di cui la prima è l' estensione, a questi sistemi, di un noto risultato stabilito dal Lichtenstein [1] pei sistemi differenzali ordinari.

Considereremo per semplicità, il caso dei sistemi (I) in

[1] LICHTENSTEIN, *Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung,* (Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXVIII, 1909, pag. 267.

cui non figurano parametri: ma tutto ciò che diremo vale anche pei più generali sistemi (I)*.

Nel formare i successivi sistemi ausiliari (7), *alle funzioni* $f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}^{(t)})$, *sostituiamo ordinatamente le altre* $f^{(t)}_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}^{(t)})$, *variabili con l'indice t,* come le $f_{i\lambda}$ finite e continue nel campo (1), (2), e *tali che al crescere indefinito dell'indice t, convergano in egual grado verso le* $f_{i\lambda}$, cosicchè preso ε ad arbitrio, per r sufficientemente grande si abbia, per $k \geq 0$

$$(40) \qquad |f^{(r+k)}_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}) - f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta})| < \varepsilon$$

in tutto il campo (1), (2), ora ricordato.

Dimostriamo che *le serie* (6) *delle approssimazioni successive, costruite col processo modificato,* ossia coi nuovi sistemi ausiliari

$$(41) \qquad \left\{ \begin{aligned} & z^{(0)}_{i\lambda} = \theta_{i\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ & z^{(t)}_{i\lambda} = z^{0}_{i\lambda} + \int_{x_i^{0)}}^{x_i} f^{(t-1)}_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}^{(t-1)})\, dx_i \qquad (t = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \right.$$

(che per semplicità indichiamo con le solite notazioni), *convergono ancora in egual grado verso gli integrali* $z_{i\lambda}$ del sistema proposto, che soddisfano alle (5), nel campo

$$(42) \qquad |x_j - x_j^{0)}| \leq \varrho$$

essendo ϱ il minore dei numeri $a, \dfrac{b}{N}$, ed N il limite superiore dei valori $|f^{k}_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta})|$ nel campo (1), (2).[1]

Infatti: valendoci delle (9), (41), costruiamo le differenze

[1] Sarà in generale $N \neq M$, ma finito, per le ipotesi fatte sulle $f^{k)}_{i\lambda}$.

$z_{i\lambda} - z^{(r+1)}_{i\lambda}, \ldots z_{i\lambda} - z^{(r+k)}_{i\lambda}$: applicando le diseguaglianze (4) (di Lipschitz) e (40), troviamo, pei loro valori assoluti, la limitazione ricorrente

$$(43) \quad |z_{i\lambda} - z^{(r+k)}_{i\lambda}| < L \left| \int_{x_i^{(0)}}^{x_i} \left\{ \sum_t \sum_s |z_{ts} - z_{ts}^{r+k-1}| \right\} dx_i \right| + \varepsilon |x_i - x_i^{0)}|.$$

Ora, detto A il massimo valore assoluto delle differenze

$$z_{ts} - z_{ts}^{r}$$

nel campo (42), dalla (43), scritta per $k = 1, 2, \ldots$, con successive sostituzioni nei secondi membri ed integrazioni, abbiamo facilmente l'altra limitazione

$$|z_{i\lambda} - z^{(r+k)}_{i\lambda}| < A \frac{\left(m L \sum_1^n{}_j |x_j - x_j^{0)}|\right)^k}{k!} +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{Lm} \left(\frac{(m L \sum_1^n{}_j |x_j - x_j^{0)}|)^k}{k!} + \ldots + \frac{m L \sum_1^n{}_j |x_j - x_j^{(0)}|}{1!} \right)$$

onde a fortiori (per ogni k)

$$(44) \qquad |z_{i\lambda} - z^{(r+k)}_{i\lambda}| < A \frac{(m n L a)^k}{k!} + \frac{\varepsilon}{m L}(e^{mnLa} - 1).$$

Dunque posto $B = \dfrac{1}{m L}(e^{mnLa} - 1)$, preso k_0 tale che per $k \geq k_0$ sia $A \dfrac{(m n L a)^k}{k!} < \varepsilon B$, avremo, nel campo (42), (in cui i successivi sistemi ausiliari (41) hanno un significato), per $k \geq k_0$

$$|z_{i\lambda} - z^{(r+k)}_{i\lambda}| < 2 \varepsilon B \qquad \text{c. d. d.}$$

Nel *caso lineare* le convergenza delle serie modificate è assicurata in tutto il campo primitivo (1).

13. — Ma si può fare di più: anche alle funzioni iniziali $\theta_{i\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, nella costruzione delle successive funzioni ausiliarie (7) si possono sostituire funzioni

$$\theta^{(t)}_{i\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

variabili con l'indice t, finite e continue nel campo (1), (o anche soltanto in (8)), e convergenti in egual grado in esso, al crescere indefinito di t, verso le $\theta_{i\lambda}$, con la sola restrizione che le $\theta^{(t)}_{i\lambda}$ restino *sempre* nel campo

$$|\theta^{(t)}_{i\lambda} - \theta_{i\lambda}| \leq \frac{b}{2}. \tag{45}$$

Le nuove funzioni ausiliarie saranno

$$\left\{\begin{aligned} z^{(0)}_{i\lambda} &= \theta^{(0)}_{i\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ z^{(t)}_{i\lambda} &= \theta^{(t)}_{i\lambda} + \int_{x_i^{(0)}}^{x_i} f_{i\lambda}(x, z^{(t-1)}_{\alpha\beta})\, d x_i \qquad (t = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Dimostriamo che *anche i nuovi sistemi ausiliari* (46) *convergono in egual grado, al crescere di t, verso gli integrali $z_{i\lambda}$* nel campo

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leq \frac{\delta}{2}. \tag{8)*}$$

La dimostrazione di questa seconda proprietà è analoga a quella della prima; si verifica subito che in questo campo (8)* i secondi membri delle (46) hanno un effettivo significato: ciò posto si prenda ε piccolo ad arbitrio, ed r tale che nel campo (8)* sia, per $k \geq 0$

$$|\theta_{i\lambda} - \theta^{(r+k)}_{i\lambda}| < \varepsilon. \tag{47}$$

Dalle (9), (46) abbiamo facilmente (per ogni k)

$$|z_{i\lambda} - z^{(r+k)}_{i\lambda}| < |\theta_{i\lambda} - \theta^{(r+k)}_{i\lambda}| + L \left| \int_{x_i^{(0)}}^{x_i} \left\{ \sum_t \sum_s |z_{ts} - z^{(r+k-1)}_{ts}| \right\} d x_i \right| : \tag{48}$$

e da questa, detto ancora A il massimo valore assoluto in (8)* delle differenze $z_{ts} - z^{(r)}_{ts}$, l'altra

$$|z_{i\lambda} - z^{(r+k)}_{i\lambda}| < \varepsilon \left(1 + m L \frac{\sum_{1}^{n}{}_j |x_j - x_j^{(0)}|}{1!} + \ldots + \frac{\left(m L \sum_{1}^{n}{}_j |x_j - x_j^{(0)}| \right)^{k-1}}{(k-1)!} \right) + \\ + \frac{\left(m L \sum_{1}^{n}{}_j |x_j - x_j^{(0)}| \right)^{k}}{k!} A, \tag{49}$$

onde segue subito quanto volevamo stabilire.

Un caso assai particolare di questa modificazione è quella di cui ci siamo serviti al n. 6.

§ 5.

Derivabilità degli integrali di un sistema (I)* rispetto ai valori iniziali $x_j^{(0)}$ e $z^{(0)}_{i\lambda}$. Derivabilità rispetto ai parametri α_μ e alle variabili indipendenti parametriche.

14. — Possiamo ora facilmente risolvere la questione già accennata, della *derivabilità degli integrali di un sistema* (I)*, considerati come funzioni dei valori iniziali $x_j^{(0)}$ e $z^{(0)}_{i\lambda}$ e dei parametri α_μ, rispetto a tutti questi argomenti.

Mostreremo che in effetto, *l'esistenza delle derivate finite* *e continue degli integrali rispetto ad uno qualunque di essi è assicurata entro gli stessi campi in cui è assicurata,* rispetto ad esso, *la continuità* degli integrali medesimi, e nello stesso tempo l'esistenza delle derivate prime finite e continue delle $f_{i\lambda}$ e $\theta_{i\lambda}$.

Per la dimostrazione, non c'è che da constatare che di tale proprietà godono i successivi termini delle serie (6) delle approssimazioni successive — il che è immediato — e poi che *nei detti campi è assicurata la convergenza in egual grado delle serie delle derivate.*

Cominciamo dal considerare gli integrali come *dipendenti dalla $x_j^{(0)}$ generica.* Derivando rispetto ad essa le funzioni dei successivi sistemi ausiliari (7) abbiamo (supponendo, per maggior generalità, che anche le $\theta_{i\lambda}$ possano dipendere dalla $x_j^{(0)}$),

$$(50)\qquad \text{per } i \neq j, \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}} = \frac{\partial \theta_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}}, \\ &\frac{\partial z^{(r)}_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}} = \frac{\partial \theta_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}} + \int_{x_j^{(0)}}^{x_i} \left\{ \sum_t \sum_s \frac{\partial f_{i\lambda}(x, z^{(r-1)}_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)}{\partial z^{(r-1)}_{ts}} \frac{\partial z^{(r-1)}_{ts}}{\partial x_j^{(0)}} \right\} dx, \\ &\qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots); \end{aligned} \right.$$

$$(50)^*\qquad \text{per } i = j, \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial z^{(0)}_{j\lambda}}{\partial x_j^{(0)}} = \frac{\partial \theta_{j\lambda}}{\partial x_j^{(0)}}, \\ &\frac{\partial z^{(r)}_{j\lambda}}{\partial x_j^{(0)}} = \frac{\partial \theta_{j\lambda}}{\partial x_j^{(0)}} - [f_{j\lambda}(x, z^{(r-1)}_{\alpha\beta}\, \alpha_\mu)]_{(x_j = x_j^{(0)})} + \\ &\quad + \int_{x_j^{(0)}}^{x_j} \left\{ \sum_t \sum_s \frac{\partial f_{j\lambda}(x, z^{(r-1)}_{\gamma\beta}, \alpha_\mu)}{\partial z^{(r-1)}_{ts}} \frac{\partial z^{(r-1)}_{ts}}{\partial x_j^{(0)}} \right\} dx, \\ &\qquad\qquad (r = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Le successive derivate sono finite e continue nel campo (18) (vedi n. 10).

Ora lasciando invariate tutte le altre arbitrarie,[1] mutiamo la $x_j^{(0)}$ in $x_j^{(0)} + \varepsilon$, (ove ε indica, al solito, una costante infinitesima del 1.° ordine), il che equivale (vedi le (36), n. 11) a porre

$$\varrho_i = \varepsilon_{ij},\ \psi_{i\lambda} = \frac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}},\ \beta_\mu = 0,$$

$$\left(\text{con}\quad \begin{matrix} \varepsilon_{ij} = 1 \ \text{per}\ i = j \\ \varepsilon_{ij} = 0 \ \text{per}\ i \neq j \end{matrix}\right).$$

Dette $\varepsilon u_{i\lambda}$ le corrispondenti variazioni prime degli integrali, le $u_{i\lambda}$ soddisferanno al sistema alle variazioni

$$(51)\qquad \frac{\partial u_{i\lambda}}{\partial x_i} = \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial f_{i\lambda}}{\partial z_{\alpha\beta}} u_{\alpha\beta}:$$

ma *ammesso per un momento che si sia provata l'esistenza delle derivate $\frac{\partial z_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}}$ finite e continue,*[2] a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo abbiamo, per ogni i,

$$(52)\qquad z_{i\lambda}(x_j^{(0)} + \varepsilon) = z_{i\lambda}(x_j^{(0)}) + \varepsilon \frac{\partial z_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}}.$$

Dunque se poniamo

$$(53)\qquad u_{i\lambda} = \frac{\partial z_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}}$$

---

[1] s'intende, a meno delle variazioni che conseguono dai legami che esse possono avere con la $x_j^{(0)}$.

[2] insieme alle loro derivate rispetto ad x .

le $u_{i\lambda}$ formeranno un sistema integrale del sistema (51) alle variazioni: precisamente, quello che corrisponde alle condizioni iniziali

$$(54) \qquad \text{per } i \neq j, \quad u^{(0)}_{i\lambda} = \frac{\partial \theta_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}},$$

$$(54)^* \qquad \text{per } i = j, \quad u^{(0)}_{j\lambda} = \frac{\partial \theta_{j\lambda}}{\partial x_j^{(0)}} - [f_{j\lambda}(x, z_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)]_{(x_j = x_j^{(0)})}.$$

Ora se, *indipendentemente da ogni ipotesi sulla derivabilità degli integrali* $z_{i\lambda}$, andiamo a costruire il sistema integrale del sistema (51) che corrisponde a queste condizioni iniziali, modificando (secondo i risultati del § precedente) nella costruzione delle l^{me} funzioni ausiliarie, $u^{(l)}_{i\lambda}$, le funzioni

$$\frac{\partial f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta})}{\partial z_{ts}}$$

nelle altre

$$\frac{\partial f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}^{(l-1)})}{\partial z_{ts}^{(l-1)}}$$

e, *per le sole funzioni incognite per le quali è* $i = j$, anche le funzioni iniziali

$$u^{(0)}_{j\lambda} = \frac{\partial \theta_{j\lambda}}{\partial x_j^{(0)}} - [f_{j\lambda}(x, z_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)]_{(x_j = x_j^{(0)})}$$

nelle

$$\frac{\partial \theta_{j\lambda}}{\partial x_j^{(0)}} - [f_{j\lambda}(x, z_{\alpha\beta}^{(l-1)}, \alpha_\mu)]_{(x_j = x_j^{(0)})} \qquad \text{per } l \geq 1,$$

nelle

$$\frac{\partial \theta_{j\lambda}}{\partial x_j^{(0)}} \qquad \text{per } l = 0,$$

verifichiamo subito che le $u^{(r)}_{i\lambda}$ così costruite coincidono, per tutti i valori di r, con le $\dfrac{\partial z^{(r)}_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}}$ date dalle (50) o (50)*.

Ma le serie (39) delle approssimazioni successive pel sistema (lineare) (51) convergono in egual grado, (anche col processo modificato), nel campo (18)[1] di continuità dei coefficienti. Risulta così dimostrato l'asserto, per quanto riguarda la $x_j^{(0)}$ generica.

15. — In modo perfettamente analogo si possono ottenere le dimostrazioni relative alle $z^{(0)}_{i\lambda}$, e ai parametri α_μ: basterà darne un rapido cenno.

Sia $z_{pq}^{(0)}$ la generica funzione iniziale: conveniamo di indicare con $\varepsilon_{(ip),(\lambda q)}$ l'*unità* se $i = p$, $\lambda = q$, lo *zero* in ogni altro caso. Dalle (7) derivando abbiamo

$$(55) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial z_{pq}^{(0)}} = \varepsilon_{(ip),(\lambda q)} \\[2ex] \dfrac{\partial z^{(r)}_{i\lambda}}{\partial z_{pq}^{(0)}} = \dfrac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial z_{pq}^{(0)}} + \displaystyle\int_{x_i^{(0)}}^{x_i} \left\{ \sum_t \sum_s \frac{\partial f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}^{(r-1)}, \alpha_\mu)}{\partial z_{ts}^{(r-1)}} \frac{\partial z_{ts}^{(r-1)}}{\partial x_{pq}^{(0)}} \right\} dx_i; \\[2ex] \hfill (r = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Tutte le successive derivate sono finite e continue in un campo (18) (in generale: in un campo (15) se le $x_j^{(0)}$ e le α_μ sono prefissate).

Ora se si costruiscono le successive funzioni ausiliarie pel calcolo degli integrali di quello stesso sistema alle variazioni (50), che corrispondono alle condizioni iniziali

$$(56) \qquad u^{(0)}_{i\lambda} = \varepsilon_{(ip),(\lambda q)}$$

---

[1] o nel caso dei sistemi (I), nel campo (13): se poi le $z^{(0)}_{i\lambda}$ non dipendono dalle $x_j^{(0)}$, nel campo (14).

modificando, nella costruzione delle l^{me} funzioni ausiliarie, $u^{(l)}_{i\lambda}$, le

$$\frac{\partial f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)}{\partial z_{ts}}$$

nelle

$$\frac{\partial f_{i\lambda}(x, z^{(l-1)}_{\gamma\beta}, \alpha_\mu)}{\partial z^{(l-1)}_{ts}},$$

si ha per ogni r

$$u^{(r)}_{i\lambda} = \frac{\partial z^{(r)}_{i\lambda}}{\partial z^{(0)}_{pq}},$$

onde risulta appunto che nel campo (18) [o (15): vedi poco sopra] gli integrali $z_{i\lambda}$ ammettono derivate prime finite e continue rispetto alla generica $z^{(0)}_{pq}$.

16. — Sia ora α_p il parametro generico (tra i ν parametri che figurano nelle $f_{i\lambda}, \theta_{i\lambda}$). Abbiamo subito

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial \alpha_p} = \frac{\partial \theta_{i\lambda}}{\partial \alpha_p}, \\ &\frac{\partial z^{(r)}_{i\lambda}}{\partial \alpha_p} = \frac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial \alpha_p} - [f_{i\lambda}(x, z^{(r-1)}_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)]_{(x_i = x_i^{(0)})} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial \alpha_p} + \\ &+ \int_{x_i^{(0)}}^{x_i} \left\{ \sum_t \sum_s \frac{\partial f_{i\lambda}(x, z^{(r-1)}_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)}{\partial z^{(r-1)}_{ts}} \frac{\partial z^{(r-1)}_{ts}}{\partial \alpha_p} + \frac{\partial f_{i\lambda}}{\partial \alpha_p} \right\} d x_i. \end{aligned}\right.$$

Il sistema alle variazioni (37) corrispondente al sistema integrale generico $z_{i\lambda}$ e ad una variazione, di ε, del solo parametro α_p (onde $\beta_\mu = \varepsilon_{\mu p}$) ha la forma particolare

$$(58)\qquad \frac{\partial u_{i\lambda}}{\partial x_i} = \sum_\alpha \sum_\beta \frac{\partial f_{i\lambda}}{\partial z_{\alpha\beta}} u_{\alpha\beta} + \frac{\partial f_{i\lambda}}{\partial \alpha_p}.$$

Se costruiamo gli integrali di questo sistema corrispondenti alle condizioni iniziali

$$(59)\qquad u^{(0)}_{i\lambda} = \frac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial \alpha_p} - [f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)]_{(x_i = x_i^{(0)})} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial \alpha_p}$$

modificando, nella costruzione delle l^{me} funzioni ausiliarie $u^{(l)}_{i\lambda}$,

per $l \geq 1$ le $\dfrac{\partial f_{i\lambda}(x, z_{\gamma\beta}, \alpha_\mu)}{\partial z_{ts}}$ nelle $\dfrac{\partial f_{i\lambda}(x, z^{(l-1)}_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)}{\partial z^{(l-1)}_{ts}}$

e le $\dfrac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial \alpha_p} - [f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)]_{(x_i = x_i^{(0)})} \dfrac{\partial x_i^{(0)}}{\partial \alpha_p}$

nelle $\dfrac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial \alpha_p} - [f_{i\lambda}(x, z^{(l-1)}_{\gamma\beta}, \alpha_\mu)]_{(x_i = x_i^{(0)})} \dfrac{\partial x_i^{(0)}}{\partial \alpha_p}$,

per $l = 0$ le $\dfrac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial \alpha_p} - [f_{i\lambda}(x, z_{\alpha\beta}, \alpha_\mu)]_{(x_i = x_i^{(0)})} \dfrac{\partial x_i^{(0)}}{\partial \alpha_p}$

nelle $\dfrac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial \alpha_p}$,

verifichiamo subito che risulta

$$u^{(r)}_{i\lambda} = \frac{\partial z^{(r)}_{i\lambda}}{\partial \alpha_p},$$

onde resta provata, anche rispetto ai parametri α_μ, l'esistenza delle derivate degli integrali $z_{i\lambda}$, finite e continue nel campo (18).

17. — Risultati del tutto analoghi si ottengono — seguendo la stessa via — per gli integrali dedotti da un integrale particolare $\bar{z}_{i\lambda}$ supposto noto: anche per essi, sotto le ipotesi indicate al n. 10, negli stessi campi (29) o (31)

(vedi n. 6, 7) in cui è assicurata la continuità, è assicurata anche l'esistenza delle derivate prime finite e continue rispetto ai vari argomenti da cui essi dipendono.

18. — Lo stesso procedimento, accennato al n. 16, che serve a provare la derivabilità degli integrali $z_{i\lambda}$ rispetto ai parametri α_μ, ripetuto senza mutamenti sostanziali, porta a stabilire, sotto certe condizioni, anche la loro *derivabilità rispetto a tutte le variabili indipendenti*. E precisamente si ottiene che « *se, nel campo* (8) *per le x, le $f_{i\lambda}$ e le $\theta_{i\lambda}$ ammettono derivate prime finite e continue rispetto a tutte o ad alcune delle variabili indipendenti, della stessa proprietà godono anche gli integrali $z_{i\lambda}$, nello stesso campo* ».[1]

Infatti in questo campo è assicurata la *continuità* degli integrali, e l'esistenza e continuità delle derivate delle successive funzioni ausiliarie rispetto ad esse: ora nulla vieta di considerare il sistema alle variazioni corrispondente ad un integrale particolare, e a date variazioni delle stesse variabili indipendenti: dette εv_j $(j=1,2,\dots,n)$ le parti principali delle variazioni delle x_j, esso ha la forma

$$\frac{\partial u_{i\lambda}}{\partial x_i}=\sum_\alpha\sum_\beta\frac{\partial f_{i\lambda}}{\partial z_{\alpha\beta}}u_{\alpha\beta}+\sum_j^{(i)}\frac{\partial f_{i\lambda}}{\partial x_j}v_j, \tag{60}$$

(ove il simbolo sommatorio $\sum\limits_j^{(i)}$[2] indica che l'indice variabile j deve percorrere tutta la serie $1,2,\dots,n$, *con esclusione* dell'indice fisso i). Ciò posto, non presenta difficoltà il ripetere le stesse considerazioni svolte pei parametri α_μ, per le variabili indipendenti x_j.

Qui è opportuno osservare che nelle primitive ipotesi sul sistema (I), o (I)*, dalla dimostrazione stessa dell'esistenza degli integrali seguiva la derivabilità di ciascuna $z_{i\lambda}$ rispetto alla sua variabile principale x_i, ma non rispetto alle variabili rimanenti (parametriche). Della proprietà ora stabilita ci varremo nello studio dei sistemi più generali di cui ci occuperemo tra breve.

[1] Questo nelle ipotesi, che le arbitrarie da cui dipendono gli integrali siano prefissate: altrimenti, nel campo (18).

[2] notazione introdotta da BIANCHI (vedi: « *Le trasformazioni di Ribaucour...* », *Annali di Matem.* Tomo XXVII della serie III, 1918, p. 186 187).

§ 6.

Altri cenni sui sistemi alle variazioni.

19. — Prima però di lasciare l'argomento dei sistemi (I)*, aggiungiamo a quanto già si disse al § 4 alcune altre osservazioni sui loro sistemi alle variazioni.

Applicando al nostro caso particolare una osservazione generale dovuta al Darboux,[1] notiamo che se per un sistema (I)* è conosciuta l'espressione (32) o (32)* dell'integrale generale, *risultano noti senz'altro gli integrali generali di tutti i suoi sistemi alle variazioni.*

Infatti eguagliando le variazioni prime dei due membri di ciascuna delle (32), o (32)*, (ottenute facendo variare tutte le arbitrarie, costanti e funzioni, che vi figurano, si ha appunto

$$u_{i\lambda}=\sum_\alpha\sum_\beta\frac{\partial z_{i\lambda}}{\partial z_{\alpha\beta}^{(0)}}\psi_{\alpha\beta}+\sum_\mu\frac{\partial z_{i\lambda}}{\partial \alpha_\mu}\beta_\mu+\sum_j\frac{\partial z_{i\lambda}}{\partial x_j^{(0)}}\varrho_j, \tag{61}$$

[1] DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. IV, note XI, pag. 506.

o

$$u_{i\lambda} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial z^*_{i\lambda}}{\partial z^{(0)}_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta} + \sum_{\mu} \frac{\partial z^*_{i\lambda}}{\partial \alpha_{\mu}} \beta_{\mu}. \tag{61*}$$

Ponendo nella (61)* generica $x_i = x_i^{(0)}$, essa diviene

$$u^{(0)}_{i\lambda} = \psi_{i\lambda} + \sum_{\mu} \frac{\partial z^{(0)}_{i\lambda}}{\partial \alpha_{\mu}} \beta_{\mu}. \tag{62*}$$

Dalle (62)* ricaviamo subito i valori da porre per le $\psi_{\gamma\beta}$ nelle (61)* onde ottenerne la soluzione che corrisponde a condizioni ai limiti

$$u^{(0)}_{i\lambda} = w_{i\lambda}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, \alpha_{\mu}) \tag{63}$$

arbitrariamente assegnate: così verifichiamo (vedi § 4, n. 8) che le (61)* dànno effettivamente l'integrale generale del sistema alle variazioni (37) generico relativo od (I)*.

20. — Notiamo infine che le (62)*, (in cui non figurano più gli integrali generali (32)*), o — se anche le $x_j^{(0)}$ si suppongono variabili, — le formole più generali che si ottengono analogamente dalle (61),

$$u^{(0)}_{i\lambda} = \psi_{i\lambda} + \sum_{\mu} \frac{\partial z^{(0)}_{i\nu}}{\partial \alpha_{\mu}} \beta_{\mu} - [f_{i\lambda}(x, z_{\gamma\beta}, \alpha_{\mu})]_{(x_i = x_i^{(0)})} \varrho_i, \tag{62}$$

dànno le *condizioni iniziali da imporre al sistema* (37) *alle variazioni per ottenerne gli integrali corrispondenti a supposte variazioni — definite dalle funzioni* $\psi_{i\lambda}$ *e dai parametri* β_{μ}, ϱ_i *— delle arbitrarie:* risolvendo così in modo preciso la questione — che già ci s'era presentata (vedi § 3, n. 11), — della dipendenza degli integrali del sistema alle variazioni dal modo di variare delle arbitrarie $z^{(0)}_{i\lambda}, \alpha_{\mu}, x_j^{(0)}$.

PARTE SECONDA

I sistemi intermediari (II) di Darboux.

Prima dimostrazione del Teorema generale di esistenza ed unicità.

§ 7.

Enunciato del Teorema d'esistenza e unicità degli integrali pei sistemi (II) di Darboux. Convenzioni e definizioni.

21. — Premessi questi studi sui sistemi di Darboux del tipo (I), *o semplici,* andiamo ad occuparci dei più generali sistemi del Darboux,[1] che rientrano nel tipo

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_h} = f_{ih}(x_l, z_k) \tag{II}$$

sistemi che dànno di ogni funzione incognita, *almeno una, ed in generale più derivate,* espresse per le funzioni incognite e per le variabili indipendenti.

Valendoci dei risultati ottenuti pei sistemi del tipo (I), possiamo anche per questi sistemi (II) più generali dimo-

[1] Darboux, *Systèmes orthogonaux,* 2e éd. §§ 180-182, pag. 335. Vedi Introd. I.

strare un teorema di *esistenza e unicità* degli integrali sotto certe condizioni: vedremo poi come molti altri dei risultati fin qui stabiliti si possano estendere ad essi.

22. — Porremo le seguenti ipotesi:

α). I secondi membri delle equazioni del sistema siano funzioni finite e continue, con le derivate prime, rispetto a tutti i loro argomenti x, z, in tutto il campo di variabilità loro assegnato (che preciseremo in seguito, n. 24).

β). Le condizioni di compatibilità,[1] o di integrabilità,[2] che si scrivono eguagliando le due espressioni ultime[3] ottenibili per ogni derivata seconda doppiamente principale,[4] (ossia, per ogni derivata cardinale),[5] di una funzione incognita, non introducano alcuna derivata nuova, e siano identicamente verificate dalle x, z, considerate come altrettante variabili indipendenti.

La prima parte di questa ipotesi, (come già s'è notato nella Introd. II), equivale all'altra che: « se per una funzione z si hanno più variabili principali, $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_s}$, nel secondo membro della equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x_{h_i}} = f_{h_i}(x, z) \qquad (i = 1, 2, \dots, s)$$

che ne dà la derivata rispetto ad una qualunque di esse, x_{h_i}, possano figurare (al più) quelle z, (e quelle soltanto), per le quali (almeno) tutte le variabili $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_{i-1}}, x_{h_{i+1}}, \dots, x_{h_s}$,

[1] Vedi Introd. II.
[2] Darboux, l. c. pag. 336. Vedi Introd. II.
[3] Riquier, l. c. pag. 215. Vedi Introd. II.
[4] Bourlet, l. c. pag. S. 27. Vedi Introd. II.
[5] Riquier, l. c. pag. 174. Vedi Introd. II.

(ossia le variabili principali relative alla z del primo membro, eccettuata al più la x_{h_i}), siano ancora variabili principali ».

23. — D'ora innanzi, ove si faccia cenno di sistemi del tipo (II), s'intenderà senz'altro, (salvo contrario avviso), che per essi valgano le α), β).

Tali sistemi, come osserva il Darboux,[1] si possono considerare, in certo modo, di una forma *intermedia* tra quelle dei sistemi del tipo semplice (I), e dei sistemi ai differenziali totali, (che pure sono sistemi di Darboux): nei quali di ogni funzione incognita sono date, rispettivamente, le espressioni di *una* o di *tutte* le derivate. Perciò li indicheremo talora con la denominazione di *sistemi intermediari* del Darboux.

Nelle ipotesi indicate α), β), dimostreremo che:

« *Fissato un sistema iniziale di valori per le variabili indipendenti, ogni sistema alle derivate parziali del tipo* (II) *di Darboux ammette uno e un solo sistema integrale, tale che ciascuna funzione incognita z, quando vi si ponga per ciascuna variabile principale il suo valore iniziale, si riduca ad una funzione assegnata ad arbitrio, (finita e continua con le derivate prime) delle sue variabili parametriche: e tali integrali sono alla loro volta funzioni finite e continue, con le derivate prime, di tutte le variabili indipendenti* $x_1 \dots x_n$ ».

24. — Precisiamo il campo in cui si dovranno supporre verificate le condizioni α):

Poniamo per semplicità l'origine delle coordinate (nell'S_n delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$), nel punto iniziale ($x_i^{(0)}$): ossia poniamo $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \dots = x_n^{(0)} = 0$.

[1] Darboux, l. c. § 180, pag. 335.

Chiamiamo θ le funzioni arbitrarie a cui si debbono ridurre le z, quando vi si pongano eguali a zero le relative variabili principali, e c i valori delle θ (e quindi delle z stesse) nel punto iniziale, (convenendo fin d'ora di attribuire a ciascuna θ, c gli stessi indici che si apporranno alla corrispondente z). Ciò posto: intenderemo che il campo in cui le condizioni α) sono verificate sia definito dalle limitazioni

(1) $$|x_i| \leq a,$$

e, (per ogni sistema di valori delle x in tale campo),

(2) $$|z - \theta| \leq b.$$

25. — Per semplicità di notazioni, indicheremo d'ora in poi con

(3) $$z_{h_1 h_2 \dots h_s}$$

una funzione incognita che abbia le s variabili indipendenti

$$x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_s},$$

ed esse soltanto, come variabili principali: essendo $(h_1 h_2 \dots h_s)$, con

$$h_1 < h_2 < \dots < h_s,$$

una qualunque combinazione semplice della classe s $(1 \leq s \leq n)$ degli indici $1, 2, \dots, n$, nella quale *gli elementi si suppongano disposti in ordine di grandezza crescente.*

Questa notazione non si presta per indicare genericamente le z che possono figurare (in forza delle β)) nei secondi membri di una data equazione del sistema: ma siccome per la z del 2.° membro dell'equazione che dà

$$\frac{\partial z_{h_1 h_2 \dots h_s}}{\partial x_{h_i}} \qquad (i = 1, 2, \dots, s),$$

sono variabili principali almeno le

$$x_{h_1}, \dots, x_{h_{i-1}}, x_{h_{i+1}}, \dots, x_{h_s},$$

viene naturale, estendendo la precedente notazione, di indicare con

$$z_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_s \dots}$$

o con

$$z_{h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_s h'_1 \dots h'_{s'}},$$

tali funzioni, essendo $(s-1) + s' \leq n$, ed intendendosi ancora che gli indici $h'_1, h'_2, \dots, h'_{s'}$ siano posti in ordine di grandezza crescente.

La funzione incognita generica $z_{h_1 h_2 \dots h_s}$ ha le s *variabili principali* $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_s}$, ed $n-s$ *variabili parametriche,* che indicheremo analogamente (sempre relativamente ad essa) con

$$x_{k_{s+1}}, x_{k_{s+2}}, \dots, x_{k_n}.$$

26. — Quando occorra distinguere le varie funzioni incognite che hanno le stesse variabili principali, si aggiungerà *un nuovo indice,* separato col segno ; dagli altri: indicheremo con

(4) $$z_{h_1 h_2 \dots h_s;\, r_{h_1 \dots h_s}}$$

la funzione z generica che ha le variabili principali indicate: dove

$$r_{h_1 h_2 \dots h_s} = 1, 2, \dots, \varrho_{h_1 h_2 \dots h_s},$$

essendo $\varrho_{h_1 h_2 \dots h_s}$ il numero delle funzioni z che hanno le $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_s}$, ed esse soltanto, come variabili principali. Il numero $\varrho_{h_1 h_2 \dots h_s}$ sarà *compreso tra* 0 *ed* m, (estremi inclusi), essendo m il numero delle funzioni incognite: e la somma di tutti i numeri ϱ relativi a tutte le possibili combinazioni delle classi $1, 2, \ldots, n$ degli indici $(1, 2, \ldots, n)$ dovrà naturalmente essere

$$\Sigma \varrho = m; \tag{5}$$

questa sarà l'unica limitazione imposta alle ϱ in un sistema (II) generico.

Disponendo opportunamente delle ϱ si ottengono, come casi particolari:

1) I sistemi differenziali ordinari del tipo normale, quando per una certa x_i si ha $\varrho_i = m$, e tutte le altre ϱ sono nulle:

2) I sistemi semplici (I) di Darboux, quando tutte o in parte le ϱ_i sono $\neq 0$, e le altre ϱ con più di un indice sono nulle, sicchè $\Sigma \varrho_i = m$:

3) I sistemi ai differenziali totali, quando $\varrho_{12\ldots n} = m$, e tutte le altre ϱ sono nulle.

27. — Sono note le dimostrazioni del teorema enunciato, (sotto ipotesi meno restrittive, ma che rientrano in quelle da noi poste), pei tre casi particolari sopra ricordati [1]: su di esse non occorre ritornare. Ma osservando che per $n = 1$ si ha appunto il primo dei tre casi ora indicati, ricorreremo per la dimostrazione generale al *procedimento per induzione:* supporremo di aver dimostrato il teorema pei sistemi del tipo (II) ad $n - 1$ variabili indipendenti, e proveremo che in tale ipotesi esso risulta vero anche per quelli ad n variabili.

Per $n = 2$ ed $n = 3$ la dimostrazione è stata data dal

[1] V. Picard, Darboux, l. c.

Darboux,[1] che riconduce, per $n = 2$, la integrazione del sistema a quelle, successive, di un sistema differenziale ordinario, e di un sistema semplice: e per $n = 3$ a quelle di un sistema del tipo (II) con $n = 2$, e di due sistemi semplici, uno a due variabili, uno a tre.[2]

Però per completare tali dimostrazioni e renderle del tutto rigorose occorreva [3] l'estensione del metodo di Lichtenstein al caso dei sistemi semplici del Darboux, (da noi data al § 4), che dà il modo di provare la derivabilità degli integrali di tali sistemi rispetto a *tutte* le variabili indipendenti (vedi § 5, n. 18).

§ 8.

Dimostrazione dell'unicità degli integrali.

28. — Consideriamo un sistema (generico) del tipo (II) di Darboux, ad n variabili; che indicheremo abbreviatamente, con le notazioni introdotte, (tralasciando per brevità gli indici r) nel seguente modo

$$\frac{\partial z_{h_1 h_2 \ldots h_s}}{\partial x_{h_r}} = f_{h_1 \ldots h'_r \ldots h_s}(x_1, \ldots, x_n, z_{h_1 \ldots h_{r-1} h_{r+1} \ldots h_s} \ldots) \tag{A}$$

ove distinguiamo le funzioni dei secondi membri cogli stessi indici delle funzioni incognite che sono ai primi, e

[1] Darboux, l. c. §§ 181, 182.
[2] Id. i sistemi (34) e (31); (41) bis, (39) e (38) rispettivamente, pag. 337-342.
[3] Vedi Introd. I, nota [2] a pag. 5, e Bianchi l. c. § 20.

apponendo, per ciascuna, *il segno ' all'indice della variabile rispetto a cui è presa la derivata che è al primo membro.*

Le condizioni iniziali che imponiamo alle eventuali soluzioni del sistema sono le seguenti:

$$a)\qquad [z_{h_1 h_2 \ldots h_s}]_{(x_{h_1}=x_{h_2}=\ldots=x_{h_s}=0)} = \theta_{h_1 h_2 \ldots h_s}(x_{k_{s+1}}, \ldots, x_{k_n}),$$

o usando la notazione

$$(5)\qquad \Phi^{(i_1 i_2 \ldots i_t)}(x_1 x_2 \ldots x_n) = [\Phi(x_1 x_2 \ldots x_n)]_{(x_{i_1}=x_{i_1}^{(0)},\, x_{i_2}=x_{i_2}^{(0)},\, \ldots,\, x_{i_t}=x_{i_t}^{(0)})}$$

(che generalizza l'analoga notazione usata dal Darboux),[1]

$$a)^*\qquad z_{h_1 h_2 \ldots h_s}^{(h_1 h_2 \ldots h_s)} = \theta_{h_1 h_2 \ldots h_s}(x_{k_{s+1}}, \ldots, x_{k_n}).$$

Nelle *a*) (od *a*)*), in conseguenza delle convenzioni fatte, $(h_1 h_2 \ldots h_s k_{s+1} \ldots k_n)$ è una qualunque permutazione degli n indici $(1\,2 \ldots n)$, in cui i primi s indici si suppongono ordinati per grandezze crescenti.

29. — Cominciamo dall'*isolare le equazioni che di ciascuna funzione incognita z dànno la derivata rispetto alla variabile principale di indice minore*, x_{h_1}.

Gli integrali del sistema *A se esistono* dovranno in particolare soddisfare a tale sistema parziale *B*. Ora questo è evidentemente *un sistema semplice di Darboux,* perchè di ogni funzione incognita dà una ed una sola derivata. D'altra parte le funzioni dei suoi secondi membri soddisfano tutte alle condizioni *a*) (n. 22), e a maggior ragione alle condizioni del teorema del § 1, n. 2, relativo ai sistemi

[1] Darboux l. c. § 182, pag. 341.

semplici: ne segue che tale sistema *B* ammette un sistema integrale, *Z*, unico e determinato, tale che indicando con ζ certe *funzioni arbitrarie,* (che supporremo però *finite e continue con le derivate prime* rispetto a tutti i loro argomenti), soddisfi alle condizioni iniziali

$$b)\qquad Z_{h_1 h_2 \ldots h_s}^{(h_1)} = \zeta_{h_1 h_2 \ldots h_s}(x_{h_2}, \ldots, x_{h_s}, x_{k_{s+1}}, \ldots, x_{k_n}).$$

Anzi, per le ipotesi *a*) sulle *f*, e quelle fatte ora sulle ζ, anche gli integrali *Z* stessi (vedi § 5, n. 18), risulteranno funzioni finite e continue, con le derivate prime, rispetto a tutte le variabili indipendenti.

30. — Possiamo imporre agli integrali *Z* di soddisfare anche alle primitive condizioni iniziali *a*): basterà per questo imporre alla variabilità delle ζ le limitazioni

$$(6)\qquad \zeta_{h_1 h_2 \ldots h_s}^{(h_2 \ldots h_s)} = \theta_{h_1 h_2 \ldots h_s}(x_{k_{s+1}}, \ldots, x_{k_n}):$$

in particolare, per $s = 1$ porre

$$(7)\qquad \zeta_1 = \theta_1, \zeta_2 = \theta_2, \ldots, \zeta_n = \theta_n.$$

Supporremo senz'altro di prendere le ζ_{h_1} in modo da soddisfare alle (7): quanto alle rimanenti ζ, (per le quali $s > 1$), mostreremo ora come esse possano venire determinate, (appunto quali funzioni finite e continue con le derivate prime rispetto a tutti i loro argomenti), in modo da soddisfare alle relative condizioni (6), col tener conto di tutte le equazioni di *A*, anche di quelle finora trascurate (non poste nel sistema parziale *B*).

31. — Riprendiamo l'intero sistema *A*, e formiamo con

le sue equazioni $n-1$ gruppi

(8) $$C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(r)}, \dots, C^{(n-1)},$$

con la seguente regola: *poniamo in* $C^{(r)}$, $(r=1,2,\dots,n-1)$, *le equazioni di A che dànno derivate di funzioni $z_{h_1 \dots r \dots}$, aventi almeno due variabili principali e tra queste la x_r, rispetto alle rimanenti variabili principali,* esclusa la x_r.

Ciascuna delle equazioni di A allora viene a trovarsi almeno in uno dei gruppi $C^{(r)}$, fatta eccezione per quelle che dànno la derivata rispetto ad x_t $(t=1,2,\dots,n-1)$, delle $z_{t,n}$, o la derivata rispetto ad x_{h_s} delle z_{h_s}: le quali sono evidentemente comprese in B.

Indi facciamo, in ciascuna equazione di ciascun gruppo $C^{(r)}$, $z=Z$, ossia scriviamo che gli integrali Z del sistema B debbono soddisfare ad essa. Infine diamo ad x_r il suo valore iniziale, ossia poniamo $x_r=0$. Gli integrali Z, (e così i valori $Z^{(r)}$ a cui si riducono per $x_r=0$), vanno considerati come funzioni incognite, finchè non è fissata la forma dei valori iniziali ζ. Ora se indichiamo con z_r le funzioni incognite per le quali $h_1=r$, ossia, per le quali x_r è la variabile principale di minimo indice, (ed $s>1$), e osserviamo che è

$$Z^{(r)}_{r\dots}=\zeta_r.$$

per le b), e infine se ricordiamo che in forza delle condizioni β) del § preced. (supposte soddisfatte per A) nei secondi membri delle equazioni $C^{(r)}$ non possono figurare che funzioni incognite aventi la x_r tra le loro variabili principali, abbiamo senz'altro che *ogni gruppo di equazioni $C^{(r)}$, $(r=1,2,\dots,n-1)$, dà luogo ad un sistema $D^{(r)}$ del 1.° ordine, del tipo* (II) *di Darboux, ad $n-1$ variabili, nelle funzioni incognite $Z^{(r)}_{h_1\dots r\dots}$; $\zeta_{r\dots}$.*

Infatti, nei secondi membri di $D^{(r)}$, per quanto ora s'è osservato riguardo a $C^{(r)}$, non possono figurare che le funzioni stesse $Z^{(r)}_{h_1\dots r\dots}$, $\zeta_{r\dots}$ che figurano, ciascuna con una o più derivate, nei suoi primi membri, e inoltre, eventualmente, in alcune equazioni del sistema le $Z^{(r)}_r=\zeta_r=\theta_r(x_1 x_2\dots x_{r-1} x_{r+1}\dots x_n)$, che sono funzioni note, per le a).

Le condizioni α), β) del § prec. essendo supposte verificate per A, lo sono anche per ciascuno dei nuovi sistemi di Darboux $D^{(r)}$.

Dunque, avendo noi supposto vero il Teorema di esistenza ed unicità degli integrali, (enunciato nel § preced.) pei sistemi di Darboux ad $n-1$ variabili, potremo senz'altro concludere che *sotto le condizioni iniziali*

$$d^{(r)} \left\{ \begin{aligned} & \zeta^{(h_2\dots h_s)}_{r\,h_2\dots h_s} = \theta_{r\,h_2\dots h_s}(x_{k_{s+1}}, x_{k_{s+2}}, \dots, x_{k_n}) \\ & Z^{(r)(h'_1\dots h'_{s'}\,h''_{s'+2}\dots h''_s)}_{h'_1\dots h'_{s'}\,r\,h''_{s'+2}\dots h''_s} = \theta_{h'_1\dots h'_{s'}\,r\,h''_{s'+2}\dots h''_s}(x_{k_{s+1}}, x_{k_{s+2}}, \dots, x_{k_n}) \end{aligned} \right.$$

(ove intendiamo, al solito, gli indici $(r, h_1, \dots, h_s)$ ed $(h'_1\dots h'_{s'}\,r\,h''_{s'+2}\dots h''_s)$ disposti in ordine di grandezza crescente, e naturalmente con s, s' indichiamo numeri qualunque purchè soddisfacenti alla condizione $1<s\leq n$, e per le funzioni della seconda riga anche alle $1\leq s'\leq n-2$, $s\geq s'+1$), *il sistema $D^{(r)}$ ammette uno e un solo sistema integrale, e gli integrali sono funzioni finite e continue, con le derivate prime, rispetto a tutte le variabili indipendenti da cui dipendono (ossia alle $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n$).*

32. — Ciascuna delle $\zeta_{h_1 h_2 \dots h_s}$, per $s>1$, figura in uno e in uno solo dei sistemi $D^{(r)}$, e precisamente nel sistema $D^{(h_1)}$. Dunque *se si integrano i sistemi $D^{(r)}$ sotto le condizioni*

$d^{r)}$), *si ottengono per ciascuna delle* $\zeta_{h_1 h_2 \ldots h_s}$ *espressioni uniche e determinate,* finite e continue con le derivate prime, in funzione delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n$, che soddisfano alle condizioni (6).

Poniamo le funzioni $\zeta_{h_1 \ldots h_s}$ così determinate nelle *b*), ossia assegniamo le funzioni stesse, (insieme alle $\zeta_{h_1} = \theta_{h_1}$ relative alle z_{h_1}) come funzioni iniziali alle corrispondenti z per l'integrazione del sistema B: *questa integrazione darà luogo a integrali Z, pure univocamente determinati, finiti e continui con le derivate prime rispetto a tutte le variabili indipendenti, e soddisfacenti alle condizioni iniziali a*).

Ma da questo segue subito che *se gli integrali cercati del sistema proposto A esistono, essi sono unici e determinati.*

Infatti: *se gli integrali cercati esistono,* essi debbono soddisfare in particolare a tutte le equazioni dei singoli gruppi $C^{r)}$, (e quindi anche a quelle dei singoli sistemi $D^{r)}$, e alle corrispondenti condizioni iniziali $d^{(r)}$): e insieme, alle equazioni B e alle condizioni iniziali relative *b*), (nelle quali si intendano poste per le ζ funzioni soddisfacenti alle condizioni (6)): e siccome le integrazioni di tali sistemi $D^{r)}$, B, sotto le condizioni rispettivamente indicate, sono tutte operazioni a carattere univoco e determinato, gli integrali di A *coincidono necessariamente con gli integrali Z di B,* determinati nel modo detto, ossia:

1) integrando i sistemi D^r sotto le condizioni iniziali $d^{(r}$:

2) integrando il sistema B sotto le condizioni *b*), nelle quali si intendano posti per le $\zeta_{h_1 h_2 \ldots h_s}$ i corrispondenti valori dati dalle *a*) per $s = 1$, calcolati invece mediante l'integrazione dei sistemi $D^{(r)}$ per $s > 1$.

33. — È ottenuta così la dimostrazione della parte del Teorema relativa all'*unicità,* (e insieme, alla continuità e derivabilità) degli integrali,[1] e abbiamo anche visto come l'integrazione di un sistema del tipo (II) ad n variabili, (sempre sotto l'ipotesi dell'esistenza degli integrali), si possa ricondurre a quella di $n-1$ sistemi di Darboux dello stesso tipo (II) ad $n-1$ variabili, e di un sistema semplice ad n variabili.

Questo risultato verrà applicato nel seguito (vedi § 10): ora andiamo a dimostrare la parte del Teorema generale relativa all'esistenza degli integrali.

§ 9.

Dimostrazione dell'esistenza degli integrali.

34. — Le funzioni Z determinate nel modo indicato nel precedente § *soddisfano,* per la loro costruzione stessa, *ad alcune delle equazioni del sistema A,* (a quelle poste nel sistema parziale *B*), *per ogni sistema di valori delle n variabili indipendenti,* (corrispondente a un punto interno a un certo campo ad n dimensioni, che preciseremo in seguito, vedi § 12): evidentemente *per la dimostrazione dell'esistenza*

---

[1] in particolare abbiamo che tutti gli integrali $Z_{h_1 \ldots r}$ relativi a funzioni incognite che hanno la x_r tra le loro variabili principali, si riducono effettivamente per $x_r = 0$ alle funzioni $Z^{(r)}_{h_1 \ldots r}$ che si ottengono integrando il sistema $D^{r)}$.

sarà sufficiente provare che le Z stesse soddisfano, (in tale campo), *anche a tutte le rimanenti equazioni di A.*[1]

35. — Poniamo, intendendo per un momento che le z rappresentino funzioni qualunque delle x, soltanto finite e continue con le derivate prime,

$$(9)\quad \Omega_{h_1 h_2 \ldots h'_r \ldots h_s} = \frac{\partial z_{h_1 h_2 \ldots h_s}}{\partial x_{h_r}} - f_{h_1 \ldots h'_r \ldots h_s}(x, z_{h_1 \ldots h_{r-1} h_{r+1} \ldots h_s \ldots}).$$

Se in particolare nelle Ω mettiamo per le z i corrispondenti integrali Z di B, posto

$$(10)\qquad (\Omega)_{(z=Z)} = \overline{\Omega},$$

per ogni possibile combinazione $(h_1, h_2, \ldots, h_s)$ risulterà identicamente

$$(11)\qquad \overline{\Omega}_{h'_1 h_2 \ldots h_s} = 0,$$

mentre per $r > 1$ sappiamo finora soltanto che le $\Omega_{h_1 \ldots h'_r \ldots h_s}$ si annullano *sugli iperpiani che contengono l'asse delle* x_{h_r}, *e quello delle* x_n, in particolare sull'iperpiano $x_{h_1} = 0$.

Tutto si riduce a dimostrare che anche per r qualunque è identicamente

$$\Omega_{h_1 \ldots h'_r \ldots h_s} = 0.$$

Qui è opportuno notare che la sostituzione degli integrali Z al luogo delle z nelle (9) è lecita, in quanto si è

[1] Per ora sappiamo soltanto che soddisfano ad esse su certi iperpiani coordinati, le cui equazioni si ottengono annullando una qualunque delle variabili principali relative alla corrispondente z, esclusa la x_n, se ne fa parte, e la variabile di derivazione del 1° membro.

dimostrato che essi sono funzioni finite e continue, con le derivate prime, di tutte le variabili indipendenti.[1]

36. — Siano r, l due indici qualunque tra 1 ed s, ad es. sia $r < l$. Insieme alle (9) possiamo scrivere anche

$$(9)^*\quad \Omega_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s} = \frac{\partial z_{h_1 \ldots h_s}}{\partial z_{h_l}} - f_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}(x, z_{h_1 \ldots h_{l-1} h_{l+1} \ldots h_s \ldots})$$

e dedurne, derivando

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{h_1 \ldots h'_r \ldots h_s}}{\partial x_{h_l}} - \frac{\partial \Omega_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}}{\partial x_{h_r}} &= \\ = \frac{\partial f_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}}{\partial x_{h_r}} - \frac{\partial f_{h_1 \ldots h'_r \ldots h_s}}{\partial x_{h_l}} &+ \\ + \sum \frac{\partial f_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}}{\partial z_{h_1 \ldots h_{l-1} h_{l+1} \ldots h_s \ldots}} \frac{\partial z_{h_1 \ldots h_{l-1} h_{l+1} \ldots h_s \ldots}}{\partial x_{h_r}} & \\ - \sum \frac{\partial f_{h_1 \ldots h'_r \ldots h_s}}{\partial z_{h_1 \ldots h_{r-1} h_{r+1} \ldots h_s \ldots}} \frac{\partial z_{h_1 \ldots h_{r-1} h_{r+1} \ldots h_s \ldots}}{\partial x_{h_l}}&. \end{aligned}$$

Queste equazioni sono soddisfatte identicamente dalle x, z, *in forza delle* (9), (9)*. Eliminiamo dai secondi membri delle (10), per mezzo delle (9), (9)* stesse, le derivate $\frac{\partial z_{h_1 \ldots h_{l-1} h_{l+1} \ldots h_s \ldots}}{\partial x_{h_r}}$, $\frac{\partial z_{h_1 \ldots h_{r-1} h_{r+1} \ldots h_s \ldots}}{\partial x_{h_l}}$ che vi figurano: in cia-

[1] Vediamo dunque come, almeno per questa dimostrazione dell'esistenza, siano necessarie le ipotesi fatte sulla derivabilità dei secondi membri e delle funzioni iniziali, e la preventiva dimostrazione della derivabilità, rispetto a tutte le variabili indipendenti, degli integrali di un sistema (I), sotto analoghe ipotesi (vedi Intr. I, nota già citata, e § 7, n. 27). Tutta la dimostrazione del Teorema è essenzialmente basata sulla premessa, che il teorema sia vero per $n = 1$, *e inoltre pei sistemi semplici* del Darboux.

scuna delle nuove identità che così si ottengono si può sopprimere la parte che non dipende dalle Ω, infatti eguagliata a 0 dà la condizione generica di integrabilità relativa alla generica funzione incognita $z_{h_1 \ldots h_s}$, e quindi, nelle nostre ipotesi circa il sistema A, è identicamente nulla. Restano così le identità

$$\frac{\partial \Omega_{h_1 \ldots h'_r \ldots h_s}}{\partial x_{h_l}} - \frac{\partial \Omega_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}}{\partial x_{h_r}} =$$

$$(11) \qquad = \sum \frac{\partial f_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}}{\partial z_{h_1 \ldots h_{l-1} h_{l+1} \ldots h_s \ldots}} \Omega_{h_1 \ldots h'_r \ldots h_{l-1} h_{l+1} \ldots h_s \ldots}$$

$$- \sum \frac{\partial f_{h_1 \ldots h'_r \ldots h_s}}{\partial z_{h_1 \ldots h_{r-1} h_{r+1} \ldots h_s \ldots}} \Omega_{h_1 \ldots h_{r-1} h_{r+1} \ldots h'_l \ldots h_s \ldots}$$

(nelle x, z), che possiamo considerare come un sistema di equazioni lineari alle derivate parziali del 1.° ordine nelle funzioni Ω, a cui queste debbono soddisfare in forza della loro definizione (9) o (9)*, (e delle condizioni di integrabilità pel sistema A).

Ma supponiamo, in particolare, che nelle (11) sia $r = 1$. Allora se in esse poniamo $z = Z$, essendo, come già s'è notato, $\overline{\Omega}_{h'_1 \ldots h_s} = 0$, identicamente, (ed anche $\overline{\Omega}_{h'_1 \ldots h_{l-1} h_{l+1} \ldots h_s \ldots} = 0$ se h_1 è ancora il minimo tra gli indici delle variabili principali per la relativa z: mentre se ciò non è, la Ω corrispondente rientra tra quelle indicate dalla notazione $\Omega_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}$), ne otteniamo il sistema di equazioni

$$(12) \qquad \frac{\partial \overline{\Omega}_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}}{\partial x_{h_1}} = \sum \frac{\partial f_{h'_1 h_2 \ldots h_l \ldots h_s}}{\partial z_{h_2 \ldots h_l \ldots h_s \ldots}} \overline{\Omega}_{h_2 \ldots h'_l \ldots h_s \ldots}$$

$$- \sum \frac{\partial f_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}}{\partial z_{h_1 \ldots h_{l-1} h_{l+1} \ldots h_s \ldots}} \overline{\Omega}_{h'_1 \ldots h_{l-1} h_{l+1} \ldots h_s \ldots}$$

(in cui dopo le derivazioni, nei secondi membri si dovrà intendere posto $z = Z$). Le (12) debbono essere soddisfatte dalle $\overline{\Omega}_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}$, funzioni note delle x, che soddisfano, per quanto abbiamo già notato, alle condizioni

$$(13) \qquad \overline{\Omega}^{(h_1)}_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s} = 0.$$

Ma possiamo anche considerare, entro le (12), le $\Omega_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s}$ come funzioni incognite, da determinare, sotto le condizioni iniziali (13), mediante l'integrazione del sistema (12) stesso: ora questo *è un sistema lineare omogeneo del tipo* (I) *di Darboux,* onde segue subito (vedi § 1) che è sempre

$$\overline{\Omega}_{h_1 \ldots h'_l \ldots h_s} = 0,$$

e con ciò, il teorema d'esistenza resta dimostrato.

§ 10.

Integrazione effettiva di un sistema (II) di Darboux. Metodo generale. Metodo delle aggiunte successive.

37. — Introduciamo una convenzione, utile per la concisione del linguaggio.

Riferendoci sempre alla interpretazione delle $x_1 x_2 \ldots x_n$ come coordinate cartesiane ortogonali in un S_n euclideo, per ciascuna funzione incognita $z_{h_1 h_2 \ldots h_s}$ conveniamo di chiamare *principali* gli assi delle $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_s}$, e ogni spazio coordinato che contenga almeno uno di essi: *parametrici* tutti gli altri spazi coordinati di qualunque dimensione, in particolare l'S_{n-s} $(x_{h_1} = x_{h_2} = \ldots = x_{h_s} = 0)$, che è quello di dimensione massima, e contiene tutti gli altri. Secondo tale convenzione, il teorema del § 7 si enuncierà dicendo che « *un sistema* (II) *ammette uno e un solo sistema integrale tale che ogni z assuma valori prefissati* (in funzione delle sue variabili parametriche) *nello spazio coordinato parametrico di dimensione massima ad essa relativo* ».

38. — Ciò premesso, andiamo a stabilire, come conseguenza e completamento del Teorema generale di esistenza e unicità, un effettivo metodo di integrazione per un sistema del tipo (II) di Darboux, o più precisamente, un metodo per *ricondurre la sua integrazione a quella di soli sistemi semplici del Darboux*, che sappiamo integrare.[1]

Abbiamo visto, al § 8, come l'integrazione di un sistema A del tipo (II) di Darboux ad n variabili, sotto date condizioni iniziali a), si possa ricondurre a quelle di $n-1$ sistemi $D^{1)}, D^{2)}, \dots, D^{(n-1}$, dello stesso tipo, ad $n-1$ variabili, seguite da quella di un sistema semplice B ad n variabili. L'integrazione dei sistemi D serve soltanto a procurare i valori iniziali che occorre aggiungere a quelli dati dalle condizioni iniziali a), assegnate per A, per ottenere le condizioni iniziali relative al sistema B. Ora per ciascuno dei sistemi D, si potrà ripetere la stessa cosa: col procedimento indicato al § 8 si potrà ricondurre la sua integrazione a quella di $n-2$ sistemi del tipo (II) ad $n-2$ variabili, seguita da quella di un sistema del tipo semplice ad $n-1$ variabili: così proseguendo, si giungerà appunto a ricondurre l'integrazione di A a quelle di soli sistemi semplici ad $1, 2, 3, \dots, n$ variabili.

[1] s'intende bene, sotto date condizioni iniziali: col metodo delle approssimazioni successive, vedi § 1.

39 — Non presenta alcuna difficoltà il determinare la *legge di formazione* di questi sistemi semplici: basta applicare ripetutamente lo stesso procedimento indicato al § 8: si giunge così a stabilire la seguente *regola generale* per la integrazione di un sistema A del tipo (II) di Darboux:

1) *Si formino i seguenti sistemi semplici del Darboux:*

$$\binom{n-1}{n-1} = 1 \quad \textit{sistema } B_1 \textit{ ad } 1 \textit{ variabile,}$$

$$\binom{n-1}{n-2} \quad \textit{sistemi } B_2 \textit{ a } 2 \textit{ variabili,}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{n-1}{n-r} \quad \textit{sistemi } B_r \textit{ ad } r \textit{ variabili,}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{n-1}{1} \quad \textit{sistemi } B_{n-1} \textit{ ad } n-1 \textit{ variabili,}$$

$$\binom{n-1}{0} = 1 \quad \textit{sistema } B_n \textit{ ad } n \textit{ variabili,}$$

ove il sistema B_r generico è costituito dalle equazioni del sistema proposto A, che contengono ai primi membri le derivate di tutte le funzioni incognite che in A hanno un determinato gruppo di $n-r$ variabili, scelte tra le $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, come variabili principali, ed oltre ad esse almeno un'altra variabile principale, rispetto ad una delle rimanenti, e precisamente, rispetto a quella di indice minimo: nelle quali equazioni s'intenda posto, per ciascuna di quelle $n-r$ variabili, il suo valore iniziale (lo zero).

Siccome in $\binom{n-1}{n-r}$ modi si può scegliere un tale gruppo di variabili, i sistemi B_r $(r=1,2,\dots,n-1)$ sono appunto in numero di $\binom{n-1}{n-r}$. Il sistema qui indicato con B_n non è che il sistema B del § 8 (n. 29).

2) Si integrino successivamente le B_1 coi valori iniziali dati, per le loro funzioni incognite, (le $z_{12\dots n}$), dalle condizioni iniziali a) imposte al sistema A (v. § 8), poi le B_2, con valori iniziali dati dalle a) od ottenuti mediante l'integrazione delle B_1,[1]... le B_r, con valori iniziali dati dalle a), od ottenuti mediante la integrazione delle B_{r-1},... le B_n con valori iniziali dati dalle a), od ottenuti mediante la integrazione delle B_{n-1}. *L'integrazione delle B_n dà gli integrali cercati,* soddisfacenti a tutte le equazioni del sistema proposto A, ed alle condizioni iniziali a).

40. — Facilmente possiamo verificare come la integrazione delle B_{r-1} fornisca in effetto tutti i valori iniziali che occorre aggiungere a quelli dati dalle a), per avere le condizioni iniziali relative alle B_r. Infatti l'integrazione dei sistemi B_{r-1} dà i valori di ogni funzione incognita per la quale il numero delle variabili principali è $s \geq n-r+2$ sugli $\binom{s'}{n-r+1}$ spazi S_{r-1} coordinati le cui equazioni si hanno ponendo $=0$ $n-r+1$ delle variabili principali relative a quella funzione incognita (comunque scelte, soltanto esclusa la x_n, se ne fa parte), ove

$$s'=s-1 \text{ od } s'=s,$$

secondochè x_n è, o non è, variabile principale per la funzione stessa.

[1] dati dalle a) per le $z_{h_1h_2\dots h_{n-1}}$; mentre i valori $z_{12\dots n}^{(12\dots n-1)}$ vengono determinati integrando le B_1.

Ora le condizioni iniziali da imporre alle B_r sono le seguenti: bisogna assegnare i valori di tutte le z per le quali $s \geq n-r+1$ sugli $\binom{s'}{n-r}$ spazi S_{r-1} coordinati le cui equazioni si ottengono ponendo $=0$ $n-r$ delle relative variabili principali, (comunque scelte, esclusa eventualmente la x_n: con lo stesso significato, indicato poco sopra, per la s'), *e inoltre,* tra le rimanenti, quella di indice minimo.

Tali valori per le $z_{h_1h_2\dots h_{n-r}h_{n-r+1}}$, per le quali è proprio $s=n-r+1$, sono dati dalle a), che assegnano per tali funzioni incognite il valore

$$z_{h_1h_2\dots h_{n-r}h_{n-r+1}}^{(h_1h_2\dots h_{n-r}h_{n-r+1})}=\theta_{h_1h_2\dots h_{n-r}h_{n-r+1}}(x_{k_{n-r+2}},\dots,x_{k_n})$$

nello spazio coordinato (param.) $(x_{h_1}=x_{h_2}=\dots=x_{h_{n-r}}=x_{h_{n-r+1}}=0)$: per le altre funzioni incognite, essendo $s>n-r+1$ e quindi $s \geq n-r+2$, per quanto poco sopra abbiamo detto, i valori occorrenti, (ed anche altri, in generale, che ora non servono), sono ottenuti appunto con l'integrazione delle B_{r-1}. Il caso in cui quella variabile principale rimanente di indice minimo, a cui ora si è accennato, sia proprio la x_n, non fa eccezione: perchè allora oltre alla x_n stessa ed alle variabili poste $=0$ non possono esservi altre variabili principali per la funzione di cui trattasi, e quindi si ricade nel caso $s=n-r+1$.

41. — Il metodo stesso col quale abbiamo determinato la legge di formazione dei sistemi $B_1, B_2, \dots, B_n$, basato sulla dimostrazione data nei §§ precedenti pel teorema generale di esistenza e unicità, ci mostra chiaramente che le fun-

zioni che si ottengono con l'ultima integrazione, (quella del sistema B_n), sono appunto gli integrali cercati.

Del resto, si può osservare in generale, (e questa osservazione risulterà utile anche nel seguito), che se *in qualunque modo* si è costruito (con equazioni tratte da A, in cui a certe variabili opportunamente scelte, volta a volta, si sia dato il valore iniziale), un gruppo di sistemi semplici del Darboux $B_1, B_2, \ldots, B_n$, ad $1, 2, \ldots, n$ variabili rispettivamente, tali che:

Y) 1. - Nel sistema B_r $(r = 1, 2, \ldots, n-1)$ generico, figurino quali funzioni incognite i valori di un gruppo di funzioni incognite del sistema A, in un certo S_r coordinato, e in B_n tutte (e sole) le funzioni incognite di A:

2. - ciascuno dei sistemi B sia necessariamente soddisfatto dagli integrali cercati del sistema A, (la cui esistenza e unicità è assicurata dal Teorema generale):

3. - la integrazione dei sistemi B_1, sotto condizioni iniziali b_1) tratte dalle a) relative ad A, (e quindi soddisfatte dagli integrali cercati), dia tutti i valori iniziali che occorre aggiungere alle a) per avere le condizioni iniziali b_2) da imporre alle B_2: la integrazione dei sistemi $B_r (r=2,3,\ldots,n-1)$, [sotto condizioni iniziali b_r) ottenute in parte dalla a), in parte dall'integrazione dei sistemi B_{r-1}], fornisca (in modo unico) tutti i valori iniziali che occorre aggiungere alle a) per avere le condizioni iniziali b_{r+1}) da imporre alle B_{r+1},[1]

l'integrazione successiva delle $B_1, B_2, \ldots, B_n$, sotto le rispettive condizioni iniziali $b_1), b_2), \ldots, b_n)$, dà come risultato finale appunto gli integrali cercati di A.

La dimostrazione è immediata: basta ricordare (v. § 1) che la integrazione di un sistema semplice del Darboux sotto date condizioni iniziali è sempre una operazione a carattere univoco e determinato: da questo segue successivamente che gli integrali cercati di A soddisfano non soltanto alle condizioni iniziali b_1) ma anche a tutte le $b_2), \ldots, b_r), \ldots$ e infine alle b_n): siccome d'altra parte soddisfano alle equazioni B_n, essi coincidono appunto con gli integrali di tali equazioni, sotto le condizioni b_n).

Nel caso attuale, è evidente che le condizioni Y) sono soddisfatte.

42. — Abbiamo così stabilito, per un qualunque sistema (II), un effettivo metodo di integrazione, che consiste, in sostanza, nella *determinazione successiva dei valori di ciascuna funzione incognita $z_{h_1 h_2 \ldots h_s}$*, su tutti gli spazi coordinati, principali per la funzione stessa, che contengono lo spazio parametrico di dimensione massima S_{n-s} (di equazioni $x_{h_1} = x_{h_2} = \ldots = x_{h_s} = 0$) ad essa relativo, (nel quale essa è assegnata dalle condizioni iniziali), e inoltre $1, 2, \ldots s$ degli assi coordinati principali $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_s}$, compreso sempre tra questi l'asse delle x_n, se esso è principale: in altri termini, *su tutti gli $S_{n-s+1}, S_{n-s+2}, \ldots, S_{n-s+s} = S_n$ per essa principali, che contengono insieme lo spazio coordinato parametrico di dimensione massima S_{n-s} ad essa relativo, e l'asse delle x_n.*

43. — Insieme al metodo ora indicato per l'integrazione di un sistema A del tipo (II) di Darboux, o più esattamente: per la determinazione dei sistemi semplici di Darboux a cui essa si riconduce, ne esporremo un altro, che pur pre-

[1] Qui naturalmente intendiamo che le condizioni iniziali b_r) $(r = 1, 2, \ldots, n)$ dal punto di vista formale siano quelle che occorre e basta assegnare alle B_r per la loro integrazione, secondo il Teorema generale del § 1.

sentando maggiore complessità formale, può riuscire più utile nella sua applicazione ai singoli casi particolari.

Disponiamo le equazioni del sistema A in un quadro Q,[1] ponendo nella stessa orizzontale le equazioni che dànno le derivate di una stessa funzione incognita, e per la funzione incognita generica $z_{h_1 h_2 \ldots h_s}$, $(1 \leq s \leq n)$, ponendo al $1^o, 2^o, \ldots, s^{mo}$ posto a partire dalla destra, ossia nella n^{ma}, $(n-1)^{ma}, \ldots (n-s+1)^{ma}$ verticale, (numerando le verticali della sinistra), l'equazione che ne dà la derivata rispetto ad $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_s}$. Così nella verticale r^{ma} figureranno nei primi membri tutte le funzioni per le quali $s \geq n-r+1$, ed esse soltanto. Nella verticale r^{ma}, $(r=1, 2, \ldots, n-1)$, poniamo, in ciascuna equazione, per ciascuna delle $n-r$ variabili principali $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_{n-r}}$ relative alla funzione incognita che è al primo membro, (le prime $n-r$ nell'ordine di grandezza crescente degli indici), il suo valore iniziale (lo zero). Così veniamo a separare le equazioni poste nella verticale r^{ma} in $\binom{n-1}{n-r}$ gruppi che indicheremo genericamente con G_r, (in quanto la $(h_1, h_2, \ldots, h_{n-r})$ è una qualunque combinazione (ordinata) degli indici $1, 2, \ldots, n-1$, della classe $n-r$). Non è escluso che qualcuno dei gruppi, o anche qualche intera verticale possa anche non contenere alcuna equazione).

Il gruppo G_r generico è un sistema del primo ordine ad r variabili, che nei primi membri contiene le derivate

$$\frac{\partial z_{h_1 h_2 \ldots h_{n-r} h_{n-r+1} \ldots h_{n-r+t}}}{\partial x_{h_{n-r+1}}} : \qquad (1 \leq t \leq r)$$

nei secondi membri esso potrà contenere soltanto funzioni

[1] un quadro a scacchiera, o a reticolato rettangolare.

che hanno quello stesso gruppo $(x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_{n-r}})$ di variabili, tra le loro variabili principali: ma *in generale non accadrà che tutte le funzioni incognite contenute nei secondi membri figurino anche nei primi, entro lo stesso gruppo.* Se questo particolare caso si presenta per tutti i gruppi G_r $(r=1, 2, \ldots, n)$, [ciò accade sempre pei gruppi G_1, G_n], tali gruppi di equazioni sono altrettanti sistemi (I) di Darboux, ed è facile constatare che per essi sono soddisfatte le condizioni Y): onde la loro integrazione successiva (vedi n. 41) conduce senz'altro alla determinazione degli integrali cercati.

44. — Ma in generale, nei secondi membri delle equazioni appartenenti al gruppo G_r generico, $(r=2, 3, \ldots, n-1)$, potranno figurare funzioni incognite

$$z_{h_1 h_2 \ldots h_{n-r} h'_1 h'_2 \ldots h'_{s'}} \qquad (s' \leq r)$$

che oltre alle $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_{n-r}}$ (ed alle altre variabili principali per la z del 1.° membro, esclusa al più la $x_{h_{n-r-1}}$), ammettono variabili principali di indice minore di almeno uno degli indici $h_1, h_2, \ldots, h_{n-r}$: ossia, ciò che è lo stesso, minore di h_{n-r}. Supponiamo al solito (vedi n. 25) $h'_1 h'_2 \ldots h'_{s'}$ disposti in ordine di grandezza crescente: sia h'_t $(1 \leq t \leq s')$ il più grande dei numeri h' che non superi h_{n-r}. *Aggiungiamo al gruppo G_r le equazioni* (tratte da A), *che dànno le derivate di quelle funzioni incognite rispetto alle relative variabili principali $x_{h'_1}$, di indice minimo, all'infuori delle $x_{h_1} x_{h_2} \ldots x_{h_{n-r}}$,* che anche in tali equazioni porremo $=0$: con queste *aggiunte, (di 1ª specie),* — ripetute poi, se occorre, una o più volte sul sistema complessivo —, giungeremo infine ad ottenere che tutte le funzioni incognite che figurano nei secondi membri (delle equazioni primitive di G_r, o delle equazioni aggiunte), figurino anche nei primi. L' operazione ha termine dopo un numero finito di aggiunte: al più potrà accadere di dovere far figurare nei primi membri tutte le funzioni incognite che hanno $x_{h_1} x_{h_2} \dots x_{h_{n-r}}$ come variabili principali[1]: ossia, *al più, dopo le aggiunte di 1ª specie, il gruppo generico G_r potrà venire a coincidere col corrispondente sistema B_r costruito con l' altro metodo prima indicato.*

Le *condizioni iniziali* per le equazioni del gruppo G_r primitivo, in altri termini i valori

$$z^{(h_1 h_2 \dots h_{n-r} h_{n-r+1})}_{h_1 h_2 \dots h_{n-r} h_{n-r+1} \dots h_{n-r+t}}$$

sono dati dalla integrazione delle equazioni della colonna precedente[2]: ma altrettanto non si può dire, in generale, delle condizioni iniziali relative alle equazioni aggiunte: infatti i valori

$$z^{(h_1 h_2 \dots h_{n-r} h'_1)}_{h_1 h_2 \dots h_{n-r} h'_1 h'_2 \dots h'_s,}$$

si hanno integrando le G_{r-1}, soltanto se $(h_1 h_2 \dots h_{n-r} h'_1)$ sono i più piccoli indici relativi alla funzione incognita indicata: ossia, se per essa è $t = 1$. Però, qualunque sia t, possiamo osservare che i valori

$$z^{(h_1 \dots h_{n-r} h'_1 \dots h'_t)}_{h_1 h_2 \dots h_{n-r} h'_1 \dots h'_s,}$$

risultano dati dall' integrazione di equazioni della colonna $(r-t)^{ma}$: dunque basterà aggiungere, rispettivamente nelle

[1] escluse naturalmente le $z_{h_1 h_2 \dots h_{n-r}}$, perchè i valori $z^{(h_1 h_2 \dots h_{n-r})}_{h_1 h_2 \dots h_{n-r}}$ sono noti, per le a) n. 28.

[2] s' intende bene quando sia reso possibile effettuarla.

colonne $(r-t+1)^{ma}, \dots (r-1)^{ma}$), (ciascuna nel gruppo corrispondente alla combinazione di indici relativa alle variabili che in essa sono poste $=0$), le equazioni (tratte da A), che dànno le derivate

$$\frac{\partial z^{(h_1 \dots h_{n-r} h'_1 \dots h'_{t-1})}_{h_1 \dots h_{n-r} h'_1 \dots h'_s,}}{\partial x_{h'_t}}, \quad \frac{\partial z^{(h_1 \dots h_{n-r} h'_1 \dots h'_{t-2})}_{h_1 \dots h_{n-r} h'_1 \dots h'_s,}}{\partial x_{h'_{t-1}}}, \dots, \frac{\partial z^{(h_1 \dots h_{n-r} h'_1)}_{h_1 \dots h_{n-r} h'_1 \dots h'_s,}}{\partial x_{h'_r}}$$

per rendere possibile la successiva determinazione dei valori di quelle funzioni incognite su spazi di dimensione sempre maggiore, contenenti lo spazio $(x_{h_1} = x_{h_2} = \dots = x_{h_{n-r}} = x_{h'_1} = \dots = x_{h'_t} = 0)$, e infine, precisamente i valori che occorre dare come condizioni iniziali per le equazioni di G_r.

Diremo *di seconda specie* queste nuove aggiunte: vediamo che un' aggiunta di 1ª specie, effettuata in una colonna, ne porta in generale una o più di seconda specie, da effettuare nelle colonne precedenti.

45. — Per la colonna n^{ma}, come abbiamo già notato, non occorrono aggiunte: il gruppo G_n coincide col sistema parziale B del § 7. Si effettuino le aggiunte di 1ª specie occorrenti per completare i sistemi G_{n-1} della colonna $(n-1)^{ma}$, e le conseguenti aggiunte di 2ª specie nelle colonne precedenti: poi si ripeta la stessa operazione sui sistemi, *così modificati,* della colonna $(n-2)^{ma}, \dots$ così proseguendo si giungerà infine al sistema (unico) G_1 della 1ª colonna, che non richiede aggiunte di 1ª specie, nè può essere modificato da aggiunte di 2ª specie relative alle colonne seguenti: come è evidente se si pensa che le sole $z^{(12 \dots n-1)}_{12 \dots n}$ possono figurare nei primi membri delle sue equazioni.

Chiamiamo Q^* il quadro che risulta da Q, quando siano eseguite, nel modo ora detto, tutte le aggiunte di 1ª e 2ª specie: indichiamo con $B_1, B, \dots, B_n$, i sistemi complessivi ottenuti dai corrispondenti gruppi $G_1, G_2, \dots, G_n$. È evidente che tali sistemi - contenuti rispettivamente nella $1^a, 2^a, \dots, n^{ma}$ colonna di Q^* - soddisfano alle condizioni γ) del n. 41: ciò segue dalla loro stessa costruzione.

Dunque: *l'integrazione successiva dei sistemi contenuti nella $1^a, 2^a, \dots, n^{ma}$ colonna del quadro Q^* conduce precisamente alla determinazione degli integrali cercati.*

46. — Distingueremo, ove occorra, il metodo ora esposto con la denominazione di «*metodo delle aggiunte successive*», per distinguerlo dal primo metodo indicato, che diremo *metodo generale,* non perchè comprenda l'altro come caso particolare, il che non è, ma per il carattere di maggiore generalità ed uniformità della sua definizione, del tutto indipendente dalle particolarità che può presentare ogni singolo sistema a cui esso si applichi.

Come abbiamo già osservato, le equazioni di ciascuno dei sistemi B_r costruiti col procedimento delle aggiunte successive sono sempre tutte contenute anche nel sistema corrispondente, costruito col metodo generale. Soltanto nelle ipotesi più generali, in cui i secondi membri si pensino *effettivamente dipendenti* da tutte le funzioni incognite che in conformità delle condizioni β) (n. 22) possono figurarvi, e inoltre, vi sia *almeno una funzione incognita* corrispondente a ciascuna combinazione $(h_1 h_2 \dots h_r)$, i due metodi conducono a formare gli *stessi* sistemi B.

In tali ipotesi più generali, in altre parole, se si applica il 2° metodo il numero delle aggiunte da eseguire per completare i singoli sistemi B_r (per ogni n, e per ogni composizione formale del sistema dato), è *massimo.* L'altro caso estremo è quello, già notato, in cui non occorrono aggiunte: questo caso si presenta sempre per $n=2$, infatti nè alla 1^a nè alla n^{ma} colonna occorrono mai aggiunte: e anche si presenta per tutti i sistemi, in cui le funzioni f dei secondi membri non dipendono che dalle variabili indipendenti, ed eventualmente anche dalla z del 1° membro, o più in generale, dalle z che hanno le stesse sue variabili principali (eccettuata al più quella rispetto a cui è presa la derivata nel 1° membro), ed esse soltanto.

§ 11.

Esempi dell'applicazione del metodo delle aggiunte successive.

47. — Applichiamo il procedimento ora indicato — delle aggiunte successive — a due esempi.

In primo luogo consideriamo il più generale sistema (II) pel quale sia $n=3$. Tralasciando di distinguere[1] le diverse funzioni aventi le stesse variabili principali, (come fa anche il Darboux,[2] nelle sue notazioni), costruiamo per tale sistema il quadro Q^*:

[1] con gli indici r: vedi § 7, n. 26.
[2] DARBOUX, *Systèmes orthogonaux*, § 182.

	B_1	B_2	B_3
z_1			$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = f_{1'}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3, z_{12}, z_{13}, z_{23}, z_{123})$
z_2			$\frac{\partial z_2}{\partial x_2} = f_{2'}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3, z_{12}, z_{13}, z_{23}, z_{123})$
z_3			$\frac{\partial z_3}{\partial x_3} = f_{3'}(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3, z_{12}, z_{13}, z_{123})$
z_{12}		$\frac{\partial z_{12}^{(1)}}{\partial x_2} = f_{2'}(0, x_2, x_3, z_1^{(1)}, z_{12}^{(1)}, z_{13}^{(1)}, z_{123}^{(1)})$	$\frac{\partial z_{12}}{\partial x_1} = f_{1'2}(x_1, x_2, x_3, z_2, z_{12}, z_{23}, z_{123})$
z_{13}		$\frac{\partial z_{13}^{(1)}}{\partial x_3} = f_{3'}(0, x_2, x_3, z_1^{(1)}, z_{12}^{(1)}, z_{13}^{(1)}, z_{123}^{(1)})$	$\frac{\partial z_{13}}{\partial z_1} = f_{1'3}(x_1, x_2, x_3, z_3, z_{13}, z_{23}, z_{123})$
z_{123}	$\frac{\partial z_{123}^{(12)}}{\partial x_3} = f_{123'}(0, 0, x_3, z_3^{(12)}, z_{123}^{(12)})$	$\frac{\partial z_{123}^{(1)}}{\partial x_2} = f_{12'3}(0, x_2, x_3, z_{13}^{(1)}, z_{123}^{(1)})$	$\frac{\partial z_{123}}{\partial x_1} = f_{1'23}(x_1, x_2, x_3, z_{23}, z_{123})$
z_{23}		$\frac{\partial z_{23}^{(2)}}{\partial x_3} = f_{23'}(x_1, 0, x_3, z_2^{(2)}, z_{12}^{(2)}, z_{23}^{(2)}, z_{123}^{(2)})$	$\frac{\partial z_{23}}{\partial x_2} = f_{2'3}(x_1, x_2, x_3, z_3, z_{13}, z_{23}, z_{123})$
Equ. aggiunte (1.ª specie)		$\frac{\partial z_{12}^{(2)}}{\partial x_1} = f_{1'2}(x, 0, x_3, z_2^{(2)}, z_{12}^{(2)}, z_{23}^{(2)}, z_{123}^{(2)})$	
		$\frac{\partial z_{123}^{(2)}}{\partial x_1} = f_{1'23}(x_1, 0, x_3, z_{23}^{(2)}, z_{123}^{(2)})$	

Verifichiamo come in questo caso ciascuno dei sistemi B_r sia appunto quale si otterrebbe applicando il metodo generale.

Non sono occorse aggiunte di seconda specie, come era prevedibile, essendo $n=3$: in quanto tali aggiunte non modificano mai la n^{ma}, nè la $(n-1)^{ma}$, nè la 1^a colonna.

48. — Consideriamo ora un sistema particolare, pel quale è $n=5$. (Come per l'esempio precedente, non scriviamo esplicitamente il sistema proposto, perchè esso risulta chiaramente dal seguente quadro):

Per questo sistema, nel quadro primitivo Q alcuni dei gruppi G_r non figuravano affatto: e anche in Q^* non figurano alcuni dei sistemi B_r.

§ 12.

Campo in cui è assicurata l'esistenza ed unicità degli integrali. Derivabilità rispetto alle funzioni iniziali e rispetto ad uno o più parametri contenuti nei secondi membri.

49 — Abbiamo visto (§ 10) come sia sempre possibile ricondurre l'integrazione di un sistema (II) di Darboux a quella di soli sistemi del tipo (I), $B_1, B_2,\ldots,B_n$, ad $1, 2,\ldots,n$ variabili. Valendoci di questo risultato possiamo facilmente estendere ai sistemi intermediari (II) varie proprietà stabilite (§§ 1-6) pel caso particolare dei sistemi semplici.

Per prima cosa completiamo il teorema generale del § 7 con la determinazione di *un campo ad n dimensioni,* contenente il punto iniziale $(0\,0\ldots 0)$, *entro cui sia assicurata l'esistenza e l'unicità degli integrali* di un sistema (II), che corrispondono a date condizioni iniziali (del tipo *a*) n. 28). Insieme risolveremo anche la questione della dipendenza degli integrali dai valori iniziali.

Abbiamo supposto finora (vedi n. 24) che le condizioni *a*) (n. 22) pei sistemi (II) considerati fossero soddisfatte entro il campo

(1) $$|x_i| \leq a,$$

(2) $$|z - \theta| \leq b,$$

le θ essendo funzioni arbitrarie, ma *prefissate.*

Possiamo considerare anche il caso in cui non si assegni alle θ una forma determinata, ma soltanto si imponga ad esse di variare entro certi intorni di funzioni prefissate φ: in tale caso intenderemo che il campo in cui sono valide le *a*) sia per le x, il campo stesso (1), per le z il campo

(14) $$|z - \varphi| \leq b.$$

Le funzioni φ, come le θ, si intenderanno sempre finite e continue con le derivate prime nel comune campo (1) di definizione.

Ciò posto, andiamo a dimostrare che:

« *nel caso in cui le θ abbiano forme prefissate,* gli integrali di un sistema (II), soddisfacenti a certe condizioni iniziali *a*) sono funzioni (univocamente determinate) finite e continue con le derivate prime nel campo

(15) $$|x_i| \leq \delta,$$

essendo δ il minore dei due numeri a, $\dfrac{b}{nM}$, ed M a sua volta il massimo valore assoluto delle funzioni f dei secondi membri nel campo (1), (2): *e se invece le θ non sono prefissate,* basta imporre alla loro variabilità le limitazioni

(16) $$|\theta - \varphi| \leq \frac{n-s+1}{2n}\,b,$$

(col solito significato di s, relativo alla corrispondente z: numero delle sue variabili principali), perchè l'esistenza e unicità degli integrali del sistema sia assicurata nel campo

(17) $$|x_i| \leq \frac{\delta}{2},$$

e gli integrali stessi risultino funzioni finite e continue, con le derivate prime, rispetto a tutti i loro argomenti x, θ, nel campo (17) rispetto alle x, nel campo (16) rispetto alle θ ».

50. — Indichiamo con z_s genericamente le funzioni incognite ad s variabili principali, con θ_s le relative funzioni iniziali: con $z_s^{[n-s+1]}, z_s^{[n-s+2]},\dots,z_s^{[n-1]}$, i valori delle z_s, (su spazi $S_{n\,s+1}, S_{n\,s+2},\dots,S_{n-1}$ coordinati principali ad esse relativi), che si ottengono con la integrazione dei sistemi $B_{n\,s+1}, B_{n\,s+2},\dots,B_{n\,1}$[1]: e ricordiamo che nel sistema B possono figurare (vedi n. 39 o 43) quali funzioni incognite soltanto le $z_n^{[1]}$, nei sistemi B_2, le $z_n^{[2]}, z_{n\,1}^{[2]}$,... nei sistemi $B_{n\,s+1}$ le $z_n^{[n\,s+1]}, z_{n-1}^{[n\,s+1]},\dots,z_s^{[n\,s+1]}$,..., nei sistemi B_{n-1} le $z_n^{[n-1]}, z_{n\,1}^{[n-1]},\dots,z_2^{[n-1]}$: nel sistema B_n tutte le funzioni $z_1 . z_2,\dots,z_n$, ossia le funzioni incognite stesse.

Ciò posto, occupiamoci dapprima del *caso in cui le* θ *sono prefissate.*

Notiamo che i valori iniziali che imponiamo alle $z_n^{[1]}$ per la integrazione del sistema B_1, sono le corrispondenti θ_n: così i valori iniziali che imponiamo alle $z_{n-1}^{[2]}$ per la integrazione dei sistemi B_2 sono dati dalle $\theta_{n\,1}$ corrispondenti: ma quelli che imponiamo alle $z_n^{[2]}$ sono le funzioni $z_n^{[1]}$ ottenute con la integrazione delle B_1: analoga osservazione può farsi pei sistemi B_3,... in generale per la integrazione dei sistemi B_r, imponiamo alle $z_{n\,r+1}^{[r]}$ quali valori iniziali le corrispondenti θ_{n-r+1}, e alle $z_{n\,r+2}^{[r]}, z_{n\,r+3}^{[r]},\dots,z_n^{[r]}$ invece le funzioni $z_{n\,r+2}^{[r-1]}, z_{n\,r+3}^{[r-1]},\dots,z_n^{[r-1]}$, ottenute con la integrazione dei sistemi B_{r-1}.

Ora queste funzioni si riducono alle relative θ quando per alcune delle variabili[2] vi si ponga il valore iniziale $(=0)$: ma non coincidono con esse, mentre il campo (2) per le z, in cui sono soddisfatte le ipotesi α), è relativo alle

[1] costruiti con l'uno o l'altro dei metodi indicati al § 10: questo è ora indifferente.

[2] le variabili, principali per la corrispondente z, che in esse non sono già poste $=0$.

θ. Dunque non si potrà senz' altro applicare successivamente il teorema generale del n. 2 ai sistemi $B_1, B_2,\dots,B_n$. Tuttavia basterà stabilire che gli integrali dei sistemi $B_r\,(r=1,2,\dots,n-1)$:

1) *sono funzioni finite e continue, con le derivate prime, delle variabili indipendenti:*

2) *restano sempre — stando le* x *nel campo* (15) — *entro certi intorni delle* θ, perchè ai sistemi B_{r+1} si possano applicare i risultati stabiliti ai §§ 1, 5, pel caso delle *funzioni iniziali non prefissate.* E in effetto, abbiamo successivamente[1] che nel campo (15) gli integrali $z_n^{[1]}$ del sistema B_1 soddisfano alla condizione 1) e alle limitazioni

$$|z_n^{[1]}-\theta_n|\leq\frac{b}{n};$$

nel campo

$$|x_1|\leq\delta,\ |z_n^{[1]}-\theta_n|\leq\frac{b}{n}$$

gli integrali $z_n^{[2]}, z_{n\,1}^{[2]}$ dei sistemi B_2 soddisfano pure alla 1) e alle limitazioni

$$|z_n^{[2]}-z_n^{[1]}|\leq\frac{b}{n},\ |z_{n-1}^{[2]}-\theta_{n-1}|\leq\frac{b}{n},$$

e con maggior ragione alle

$$|z_{n-t}^{[2]}-\theta|\leq\frac{2b}{n};\qquad (t=0,1)$$

e supposto dimostrato che gli integrali $z_{n\,t}^{[r-1]}\ (t=0,1,\dots,r-2)$ dei sistemi B_{r-1} soddisfano alla 1) e restano nel campo

$$|z_{n\,t}^{[r-1]}-\theta_{n\,t}|<\frac{(r-1)\,b}{n},$$

[1] per le α) n. 22, le note proprietà dei sistemi differenziali ordinari, e quelle indicate ai §§ 1, 5 pei sistemi semplici di Darboux.

vediamo che alla loro volta gli integrali $z^{[r]}_{n\,t}$ $(t=0,1,\dots,r-1)$ dei sistemi B_r, nel campo

$$|x_i| \leq \delta,\ |z^{[r-1]}_{n\,t} - \theta_{n\,t}| \leq \frac{(r-1)\,b}{n}, \quad (t=0,1,\dots,r-2)$$

soddisfano essi pure alla 1) e alle limitazioni

$$\begin{cases} |z^{[r]}_{n\,t} - z^{[r-1]}_{n\,t}| \leq \dfrac{b}{n} & (t=0,1,\dots,r-2) \\ |z^{[r]}_{n\,r-1} - \theta_{n\,r-1}| \leq \dfrac{b}{n}, & \end{cases}$$

e a maggior ragione alle

$$|z^{[r]}_{n\,t} - \theta_{n\,t}| \leq \frac{rb}{n} \quad (t=0,1,\dots,r-1).$$

Per $r=n$ abbiamo dunque che gli integrali z_n di B_n, ossia gli integrali del sistema proposto A, *soddisfano, nel campo* (15) *rispetto alle x, alle condizioni* 1): onde risulta appunto quanto volevamo dimostrare: e inoltre resta stabilito che nel campo (15) stesso gli integrali soddisfano essi stessi alle limitazioni (2).

51. — In modo analogo si procede per la dimostrazione della 2ª parte del teorema enunciato al n. 49, relativa al caso in cui le funzioni θ non siano prefissate, ma soddisfino alle limitazioni (16). Indichiamo partitamente con $(16)^{(r)}$ $(r=1,2,\dots,n)$, i campi concessi alla variabilità delle $\theta_{n\,r-1}$. Supponiamo ancora ricondotto il sistema A ad un gruppo di sistemi semplici $B_1, B_2, \dots, B_n$, in uno dei modi indicati nel § 10: abbiamo subito che gli integrali $z^{[1]}_n$ del sistema differenziale ordinario B_1, nel campo (17), (16)′, sono funzioni

finite e continue, con le derivate prime, rispetto alle variabili indipendenti ed alle θ_n, e soddisfano alle limitazioni

$$|z^{[1]}_n - \theta_n| \leq \frac{b}{2n},$$

e a maggior ragione alle

$$|z^{[1]}_n - \varphi_n| \leq \frac{b}{n},$$

poi, che gli integrali $z^{[2]}_n, z^{[2]}_{n\,1}$ dei sistemi B_2 nel campo

$$|x_i| \leq \frac{\delta}{2},\ |z^{[1]}_n - \varphi_n| \leq \frac{b}{n},\ |\theta_{n\,1} - \varphi_{n\,1}| \leq \frac{b}{n},$$

sono funzioni finite e continue con le derivate prime rispetto alle x ed alle relative $\theta_{n\,1}$ e $z^{[1]}_n$, (e quindi anche rispetto a tutti i valori iniziali θ_n, $\theta_{n\,1}$ delle funzioni incognite che vi figurano, nei rispettivi campi (16)′, (16)″), e restano nel campo

$$|z^{[2]}_n - z^{[1]}_n| \leq \frac{b}{2n},\quad |z^{[2]}_{n\,1} - \theta_{n\,1}| \leq \frac{b}{2n},$$

onde in ogni caso soddisfano alle limitazioni

$$|z^{[2]}_{n\,t} - \theta_{n\,t}| \leq \frac{b}{n} \qquad (t=0,1)$$

e a fortiori alle altre

$$|z^{[2]}_{n\,t} - \varphi_{n\,t}| \leq \frac{2b}{n}. \qquad (t=0,1)$$

È supposto dimostrato che nel campo (17), (16)′, (16)″, ..., $(16)^{(r-1)}$ gli integrali $z^{[r-1]}_{n\,t}$ $(t=0,1,\dots,r-2)$ dei sistemi B_{r-1} sono funzioni finite e continue con le derivate prime rispetto alle x e a tutte le funzioni iniziali relative alle loro funzioni incognite, e soddisfano alle limitazioni

$$|z_{n\,t}^{[r-1]} - \theta_{n\,t}| \leq \frac{(r-1)\,b}{n}, \quad (t=0,1,\ldots,r-2)$$

e quindi a maggior ragione, per le $(16)', (16)'', \ldots, (16)^{(r-1)}$, alle

$$|z_{n-t}^{[r-1]} - \varphi_{n\,t}| \leq \frac{(r-1)\,b}{n}, \quad (t=0,1,\ldots,r-2)$$

abbiamo che nel campo

$$\begin{cases} |x_i| \leq \dfrac{\delta}{2}, \; |z_{n\,t}^{[r-1]} - \varphi_{n\,t}| \leq \dfrac{(r-1)\,b}{n} & (t=0,1,\ldots,r-2) \\ |\theta_{n-r+1} - \varphi_{n\,r-1}| \leq \dfrac{(r-1)\,b}{n} \end{cases}$$

rispetto alle $x, z_{n\,t}^{[r-1]}, \theta_{n\,r-1}$ (e quindi anche nel campo (17), $(16)', (16)'', \ldots, (16)^{(r)}$ rispetto alle x ed ai valori iniziali di tutte le funzioni incognite), gli integrali $z_{n\,t}^{[r]} (t=0,1,\ldots,r-1)$ dei sistemi B_r sono pure funzioni finite e continue con le derivate prime, e soddisfano alle limitazioni

$$|z_{n\,t}^{[r]} - z_{n\,t}^{[r-1]}| \leq \frac{b}{2\,n} \qquad (t=0,1,\ldots,r-2)$$

$$|z_{n-r+1}^{[r]} - \theta_{n\,r-1}| \leq \frac{b}{2\,n},$$

onde in ogni caso alle altre

$$|z_{n\,t}^{[r]} - \theta_{n\,t}| \leq \frac{r\,b}{2\,n} \quad (t=0,1,\ldots,r-2,r-1)$$

e a maggior ragione, per le $(16)', (16)'', \ldots, (16)^{(r)}$, alle

$$|z_{n\,t}^{[r]} - \varphi_{n-t}| \leq \frac{r\,b}{n} \qquad (t=0,1,\ldots,r-1).$$

Per $r=n$ abbiamo appunto quanto volevamo dimostrare: e vediamo inoltre che gli integrali, restando le x, θ nei rispettivi campi (17), (16), restano nel campo (14).

Per $n=1$ il teorema ora dimostrato comprende note proprietà dei sistemi differenziali ordinari.

52. — Andiamo ora ad estendere ai sistemi (II) le altre principali proprietà stabilite nella I parte (§§ 2-6) pei sistemi semplici.

Possiamo supporre che nei secondi membri delle equazioni del sistema (II) di Darboux che si considera, ed eventualmente anche nelle funzioni θ, figurino uno o più parametri $\alpha_\mu (\mu=1,2,\ldots,\nu)$, di cui le f, θ, siano funzioni finite e continue in un campo

$$(18) \qquad |\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma.$$

Se chiamiamo ancora M il massimo valore assoluto delle $f(x, z, \alpha)$ in (1), (2), (18), e δ il minore dei due numeri $a, \dfrac{b}{nM}$, avremo subito che nel campo

$$(19) \qquad \begin{cases} |x_i| \leq \dfrac{\delta}{2} \\ |\theta - \varphi| \leq \dfrac{n-s+1}{2\,n}\, b \\ |\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma \end{cases}$$

nelle ipotesi più generali, e se le funzioni θ sono prefissate e non dipendono dai parametri α_μ, nel campo

$$(20) \qquad \begin{cases} |x_i| \leq \delta \\ |\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma, \end{cases}$$

anche gli integrali sono, rispetto ai parametri stessi, funzioni finite e continue: e se nello stesso campo (18) le f, θ

posseggono anche derivate prime finite e continue rispetto alle α_μ, della stessa proprietà godono, nel campo (19) o (20), gli integrali del sistema.

Distingueremo, ove occorra, con (II)* (vedi n. 5) i sistemi intermediari di Darboux più generali, in cui i secondi membri si pensino dipendenti anche da parametri.

53. — Finora abbiamo sempre supposto, per semplicità, *che il punto iniziale $x_i^{(0)}$ sia l'origine*: ma evidentemente è lo stesso supporre che sia un punto qualunque: o anche (vedi n. 4), che esso *non sia prefissato* (ossia che le x_i^0 siano parametri variabili), purchè resti entro un certo intorno di un punto fisso (a_i).

Ricordando i risultati ottenuti pei sistemi semplici (vedi §§ 1, 5) abbiamo subito che se le condizioni α) rispetto alle x si suppongono verificate nel campo

$$(1)^* \qquad |x_i - a_i| \leq a,$$

anche rispetto alle $x_i^{(0)}$ supposte variabili gli integrali sono funzioni finite e continue con le derivate prime, almeno nel campo

$$(21) \qquad \begin{cases} |x_i - a_i| \leq \dfrac{\delta}{4}, & |\theta - \varphi| \leq \dfrac{n-s+1}{2n}\, b \\[2ex] |x_i^{(0)} - a_i| \leq \dfrac{\delta}{4}, & |\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma \end{cases}$$

nel caso più generale: se le θ sono prefissate e indipendenti dalle $x_i^{(0)}$, e non figurano parametri α_μ in esse o nelle f, nel campo

$$(22) \qquad \begin{cases} |x_i - a_i| \leq \dfrac{\delta}{2} \\[2ex] |x_i^{(0)} - a_i| \leq \dfrac{\delta}{2}. \end{cases}$$

54. — Di un sistema (II)* si supponga noto un sistema integrale particolare $\bar{z}$, che soddisfi alle (II)* pei valori $\alpha_\mu^{(0)}$ dei parametri α_μ: estendendo i risultati del § 2, (n. 6, 7) abbiamo subito che sotto certe condizioni[1] posto

$$\bar{\theta}_{h_1 h_2 \ldots h_s} = [\bar{z}_{h_1 h_2 \ldots h_s}]_{(x_{h_1} = \bar{x}_{h_1}^{(0)}, \ldots, x_{h_s} = \bar{x}_{h_s}^{(0)})}$$

le $\bar{z}$ sono i valori, corrispondenti ad

$$\alpha_\mu = \alpha_\mu^{(0)}, \qquad x_i^{(0)} = \bar{x}_i^{(0)}, \qquad \theta = \bar{\theta}$$

di integrali più generali $z\,(x_i, x_i^{(0)}, \theta, \alpha_\mu)$, finiti e continui con le derivate prime rispetto a tutti i loro argomenti, entro certi campi.

Osserviamo infine che nel caso particolare dei *sistemi lineari* del tipo (II)*, nel campo stesso in cui i coefficienti delle funzioni lineari f e le funzioni arbitrarie θ, oppure gli integrali supposti noti $\bar{z}$, sono finiti e continui con le derivate, lo sono anche gli integrali del sistema, rispetto a tutti i loro argomenti.

[1] precisamente: che in un campo $|x_i - \bar{x}_i^{(0)}| \leq p$ le $\bar{z}$ siano finite e continue con le derivate prime rispetto alle x: e che nello stesso campo rispetto alle x, in campi $|z - \bar{z}| \leq b$ per le z, $|\alpha_\mu - \alpha_\mu^{(0)}| \leq \sigma$ per le α_μ, le f siano pure finite e continue con le derivate prime rispetto alle x, z, α_μ.

§ 13.

Sistemi alle variazioni relativi ad un sistema (II)*.

55. — Anche i risultati stabiliti ai §§ 3, 6 pei *sistemi alle variazioni* relativi ad un sistema (I)* si possono facilmente estendere al caso dei sistemi (II)*.

Dato un tale sistema, che potremo sempre indicare

$$A)^* \qquad \frac{\partial z_{h_1 h_2 \dots h_s}}{\partial x_{h_r}} = f_{h_1 \dots h'_r \dots h_s}(x, z_{h_1 \dots h_{r-1} h_{r+1} \dots h_s \dots}, \alpha_\mu),$$

il suo sistema alle variazioni generico, relativo all'integrale (z) che corrisponde alle condizioni iniziali generiche

$$a)^* \qquad z^{(h_1 h_2 \dots h_s)}_{h_1 h_2 \dots h_s} = \theta_{h_1 h_2 \dots h_s}(x_{k_{s+1}}, \dots, x_{k_n}, \alpha_\mu)$$

e ai valori generici α_μ dei parametri, è il sistema

$$(23) \qquad \frac{\partial u_{h_1 h_2 \dots h_s}}{\partial x_{h_r}} = \sum \frac{\partial f_{h_1 \dots h'_r \dots h_s}}{\partial x_{h_1 \dots h_{r-1} h_{r+1} \dots h_s \dots}} u_{h_1 \dots h_{r-1} h_{r+1} \dots h_s \dots} + \\ + \sum_1^\nu{}_\mu \frac{\partial f_{h_1 \dots h'_r \dots h_s}}{\partial \alpha_\mu} \beta_\mu,$$

ove la prima somma del secondo membro è estesa a tutte le z che figurano nella funzione $f_{h_1 \dots h'_r \dots h_s}$, e nelle derivate dei secondi membri s'intendono, dopo le derivazioni, sostituiti alle z i corrispondenti integrali (z), e alle α_μ i valori prefissati supposti: le β_μ rappresentano nuovi parametri arbitrari.

Il sistema (23) è *un nuovo sistema del tipo* (II)* *di Darboux, lineare,* e per esso sono soddisfatte identicamente le condizioni di integrabilità, in forza dell'ipotesi che lo siano quelle del sistema primitivo (n. 22). Infatti, basta, per ottenerle, applicare a queste ultime lo stesso procedimento[1] che si applica alle equazioni (II)* per ottenerne le relative equazioni alle variazioni. La condizione d'integrabilità generica pel sistema (II)* si può scrivere, essendo r ed l $(r < l)$ due qualunque dei numeri $1, 2, \dots, s$:

$$(24) \qquad \frac{\partial f_{h_1 \dots h'_r \dots h_s}}{\partial x_{h_l}} + \sum \frac{\partial f_{h_1 \dots h'_r \dots h_s}}{\partial z_{h_1 \dots h_{r-1} h_{r+1} \dots h_s \dots}} f_{h_1 \dots h_{r-1} h_{r+1} \dots h'_l \dots h_s \dots} =$$

$$= \frac{\partial f_{h_1 \dots h'_l \dots h_s}}{\partial x_{h_r}} + \sum \frac{\partial f_{h_1 \dots h_l \dots h_s}}{\partial z_{h_1 \dots h_{l-1} h_{l+1} \dots h_s \dots}} f_{h_1 \dots h'_r \dots h_{l-1} h_{l+1} \dots h_s \dots}$$

Se a ciascuna z sostituiamo $z + \varepsilon u$, a ciascuna α_μ, $\alpha_\mu + \varepsilon \beta_\mu$, e deriviamo entrambi i membri rispetto ad ε, indi poniamo $\varepsilon = 0$, *la nuova identità* che così si ottiene è *appunto la condizione d'integrabilità generica relativa al sistema* (23) *alle variazioni,* infatti il suo primo membro non è che la derivata rispetto ad x_{h_l} del secondo membro della equazione generica (23), scritta tenendo conto del fatto che le z soddisfano alle $A)^*$, e le u alle (23) stesse.

56. — Dato un sistema $A)^*$, supponiamo di aver potuto determinare le espressioni dell'integrale corrispondente a valori iniziali $x_i^{(0)}$, θ non prefissati, e a valori non prefissati dei parametri α_μ. Tali espressioni

$$(25) \qquad z = z(x_i, x_i^{(0)}, \theta, \alpha_\mu)$$

[1] Vedi § 3, n. 11, e DARBOUX, *Théorie des surfaces*, IV, note XI[e] pag. 505.

daranno (vedi n. 8) l'*integrale generale* del sistema A^* supposto. Ora se a ciascuna delle (35) sostituiamo la sua variazione prima, ottenuta facendo variare le arbitrarie contenute nel secondo membro, otteniamo (vedi n. 19) l'integrale generale del più generale sistema alle variazioni corrispondente al dato sistema. Precisamente, indicando (come al § 3, n. 11) con

$$\theta + i\psi, \quad x_i^0 + \varepsilon \varrho_i, \quad \alpha_\nu + \varepsilon \beta_\mu$$

i valori variati delle arbitrarie, abbiamo

$$u = \sum \frac{\partial z}{\partial \theta} \psi + \sum_1^n{}_i \frac{\partial z}{\partial x_i^{(0)}} \varrho_i + \sum_1^\nu{}_\mu \frac{\partial z}{\partial \alpha_\mu} \beta_\mu. \tag{26}$$

Se in ciascuna di queste diamo il valore iniziale alle variabili principali relative alla u che è al primo membro, (ossia alla corrispondente z), ne otteniamo (come al § 6, n. 19, 20) le *relazioni che legano i valori iniziali da assegnare al sistema alle variazioni, con le funzioni* ψ *e i parametri* ϱ_i, β_μ, *che determinano il modo di variare delle arbitrarie:*

$$\begin{aligned} w_{h_1 h_2 \dots h_s} &= u_{h_1 h_2 \dots h_s}^{(h_1 h_2 \dots h_s)} \\ &= \psi_{h_1 h_2 \dots h_s} - \sum_1^s{}_r \left[f_{h_1 \dots h'_r \dots h_s} (x, z_{h_1 \dots h_{r-1} h_{r+1} \dots h_s \dots}, \alpha_\mu) \right]^{(h_1 \dots h_s)} \varrho_{h_s} + \\ &\quad + \sum_1^n{}_i \frac{\partial \theta_{h_1 \dots h_s}}{\partial x_i^{(0)}} \varrho_i + \sum_1^\nu{}_\mu \frac{\partial \theta_{h_1 \dots h_s}}{\partial \alpha_\mu} \beta_\mu. \end{aligned} \tag{27}$$

PARTE TERZA.

Nuova dimostrazione del teorema d'esistenza e d'unicità pei sistemi intermediari di Darboux.

Estensione a sistemi più generali.

§ 14.

Nuova dimostrazione del teorema di esistenza e unicità per un sistema (II).

57. — Daremo ora una nuova dimostrazione del teorema generale enunciato al § 7 (n. 23) per un sistema del tipo (II): notevole soprattutto per la possibilità, che presenta, di una facile estensione a sistemi più generali (§§ 15-17).

Consideriamo dunque il sistema generico

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_h} = f_{ih}(x_l, z_k). \tag{II}$$

Come al § 7, supponiamo per un tale sistema soddisfatte le condizioni β) (n. 22), e al posto delle α), invece, le altre (più restrittive):

α') Le funzioni f dei secondi membri siano funzioni finite e continue, e ammettano tutte le derivate parziali di ordine (complessivo) $\leq n$, prese rispetto ad un certo numero (≥ 0) di variabili indipendenti, tutte diverse tra loro e da quella rispetto a cui è presa la derivata che è al primo membro, e inoltre, rispetto ad un certo numero (≥ 0) delle funzioni incognite che figurano in esse.

Se consideriamo le x come contenute nelle f anche implicitamente per mezzo delle z, ciò equivale a supporre che si possa prolungare il sistema per derivazione successiva fino ad ottenere, da ogni equazione che dà una derivata $\frac{\partial z_i}{\partial x_h}$ di una funzione incognita z_i, le equazioni che ne dànno tutte le possibili derivate principali miste, prese rispetto a variabili tutte distinte, una delle quali sia la x_h: fino all'equazione che dà la $\frac{\partial^n z_i}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$.

58. — Ciò premesso formiamo, con la derivazione successiva, per ciascuna z_i le equazioni che ne dànno tutte le derivate principali seconde, terze, ... n^{ma} *miste*: (d'ora in poi, per brevità, diciamo *derivate miste* le derivate delle funzioni incognite prese rispetto ad un certo numero di variabili indipendenti, *tra loro distinte*). Nei secondi membri delle equazioni così ottenute sostituiamo successivamente alle derivate principali che vi appaiono le loro espressioni, date dalle equazioni già scritte, fino a che non restino nei secondi membri che derivate parametriche. In altri termini, calcoliamo le espressioni ultime[1] di tutte le derivate principali miste: le quali, essendo il sistema (II) ortonomo e compatibile,[2] in forza delle ipotesi $\alpha)'$, β), sono *uniche* e *determinate,* qualunque sia l'ordine in cui si eseguono le successive derivazioni e sostituzioni.

Riunendo tutte le equazioni così formate e quelle del

[1] Vedi RIQUIER, l. c. pag. 215. Introd. II, pag. 12.
[2] Introd. II, pag. 12.

sistema primitivo (II), abbiamo un sistema R, dell'ordine n, equivalente al sistema (II) stesso, e insieme ad esso ortonomo e compatibile. Le sue equazioni, a seconda del loro ordine, si potranno distribuire in n gruppi

$$(1) \qquad R_1, R_2, \ldots, R_n :$$

in R_r essendo contenute le equazioni che dànno le espressioni ultime di *tutte* le derivate r^{me} principali miste. Il gruppo R_1 coinciderà col sistema (II) primitivo.

È evidente che *basterà dimostrare l'esistenza e unicità degli integrali del sistema R,* che soddisfano alle condizioni iniziali

$$a) \qquad z_{h_1 h_2 \ldots h_s}^{(h_1 h_2 \ldots h_s)} = \theta_{h_1 h_2 \ldots h_s}(x_{k_{s+1}}, \ldots, x_{k_n}),$$

ossia, che prendono valori assegnati ad arbitrio sui rispettivi spazi parametrici di massima dimensione, perchè ciò risulti provato pel sistema (II) proposto. (Anche per le funzioni θ supporremo ora l'esistenza di tutte le loro derivate miste).

Entro ciascun gruppo R_r di equazioni R, dell'ordine r, ($r = 1, 2, \ldots, n$), separiamo gli $\binom{n}{r}$ sistemi parziali formati dalle equazioni che dànno le derivate

$$\frac{\partial^r z}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}},$$

essendo $(i_1 i_2 \ldots i_r)$ una qualunque combinazione semplice della classe r dei numeri $1, 2, \ldots, n$. Le funzioni incognite che figureranno nei primi membri di tali equazioni saranno tutte e sole quelle che hanno *almeno una* delle $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ tra le loro variabili principali.

Nei secondi membri potranno figurare, direttamente o per mezzo di loro derivate parametriche (di ordine complessivamente inferiore e singolarmente — cioè rispetto alle singole variabili — non superiore a quello della derivata che è nel 1.° membro), oltre alle funzioni che figurano nei primi membri, anche altre funzioni incognite, che non hanno alcuna delle $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ tra le loro variabili principali: se nelle equazioni in considerazione poniamo

$$(2) \qquad x_{i_{r+1}} = x_{i_{r+2}} = \dots = x_{i_n} = 0,$$

(supponendo qui di nuovo, come al § 7, il punto iniziale nell'origine), queste ultime funzioni incognite si riducono, in forza delle a), a funzioni note delle x rimanenti.

Dunque il sistema parziale generico, tra gli $\binom{n}{r}$ ottenuti nel modo detto da R_r, diviene, con la posizione (2), un sistema I_r ad r variabili, $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$, che ha per funzioni incognite i valori, sull'S_r coordinato (2), di tutte e sole le funzioni incognite di (II) per le quali tale spazio è principale: e per ciascuna di esse contiene *una e una sola equazione,* che ne dà la $\dfrac{\partial^r}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}}$ espressa in funzione delle x, e dei valori su quell'S_r delle z e di loro derivate parametriche di ordine complessivamente inferiore e singolarmente non superiore. In altri termini tutti i sistemi I_r appartengono al tipo

$$(3) \qquad \frac{\partial^r u_l}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_r}} = F_l\left(x_1 \dots x_n, \frac{\partial^{r'} u_{l'}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{r'}}}\right),$$

ove

$$0 \leq r' \leq r - 1,$$

ed $(j_1 j_2 \dots j_{r'})$ è una qualunque combinazione della classe r' di $(i_1 i_2 \dots i_r)$.

Diremo *sistemi iperbolici* questi sistemi (3), evidente generalizzazione dei noti sistemi di equazioni iperboliche del 2.° ordine. Tali sistemi (3) sono stati oggetto di svariati

studi[1]: è noto che « entro un certo campo, interno a quello in cui è assicurata *la continuità e la derivabilità dei secondi membri almeno rispetto alle $u_{l'}$ e alle loro derivate che vi figurano,*[2] essi ammettono un solo sistema integrale, tale che (nello spazio S_r delle $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_r}$) ciascuna z si riduca, su ciascuno degli iperpiani $x_{i_1} = 0, x_{i_2} = 0, \dots, x_{i_r} = 0$, a valori assegnati in funzione delle rimanenti variabili ».

(Ai sistemi (3) stessi è stato anzi esteso[3] il metodo di Picard,[4] (delle approssimazioni successive), che dà il modo di ottenere le effettive espressioni degli integrali sotto forma di serie convergenti in egual grado, e *nel caso lineare* il metodo del Riemann,[5] basato sulla considerazione del sistema aggiunto).

Nel caso particolare dei sistemi I_r, le condizioni del teorema ora citato sono soddisfatte, in forza delle a').

---

[1] Vedi ad es. tre memorie di BIANCHI (*Atti della R. Accad. dei Lincei*, vol. IV (1895), pag. 8, 89, 133) e tre di NICCOLETTI (id. pag. 197, 330, e negli *Atti della R. Accad. delle Scienze* di Napoli, vol. VIII, serie 2a, n. 2, 1895), la memoria « Sull'estensione dei metodi di Picard e di Riemann ad una classe di equazioni a derivate parziali ». In quest'ultima memoria l'A. studia una classe di sistemi assai più generali, che comprendono i sistemi (3): mentre le memorie prima citate riguardano equazioni e sistemi di equazioni, che rientrano nel tipo (3).

[2] Vedi NICCOLETTI, memoria ora citata, n. 6. Precisamente, è nel caso *non lineare*, per la dimostrazione dell'*unicità* che l'A. richiede l'applicabilità del teorema degli accrescimenti finiti alle funzioni dei secondi membri, considerate come funzioni di tali argomenti, e quindi la derivabilità rispetto ad essi.

[3] Vedi per queste estensioni le memorie ora citate di BIANCHI e di NICCOLETTI.

[4] Nota I del t. IV della *Théorie des surfaces*, di DARBOUX - *Journal de Mathém.*, 1890.

[5] t. VIII, *Göttingen Abhandlugen*, 1860. Vedi DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, Chap. IV, pag. 71-98.

59. — Vediamo ora come, supposta per un momento dimostrata *l'esistenza* degli integrali cercati del sistema R, soddisfacenti alle a), ne segua la loro *unicità*, e insieme l'*indicazione di un procedimento pel loro calcolo effettivo*.

Osserviamo nel punto iniziale, ossia nell'origine, per le a) tutte le z sono note: in particolare sono note le condizioni iniziali i_1) pei sistemi (differenziali ordinari) I_1. Sotto tali condizioni, l'integrazione di questi sistemi dà i valori di ciascuna z lungo tutti i rispettivi assi coordinati principali: lungo i rimanenti (parametrici) esse sono già note, per le a). Ottenuti così i valori delle z lungo tutti gli assi, restano fissate le condizioni iniziali i_2) per tutte le equazioni dei sistemi I_2: che integrati dànno i valori delle z sui loro piani principali, ossia sui piani, sui quali esse non erano già assegnate dalle a).

E allora, note le z su tutti i piani coordinati, restano fissate le condizioni iniziali i_3) pei sistemi I_3.... Si comprende bene come si possa proseguire, e giungere alfine a determinare un sistema di funzioni

$$(4) \qquad (z_1), (z_2), \dots, (z_m),$$

che sotto condizioni iniziali i_n) date in parte dalle a), in parte dalla integrazióne delle I_{n-1}, risolvono il sistema I_n, (o, che è lo stesso, il sistema R_n).

Le (4) soddisfano alle a) stesse, e siccome le successive operazioni ora indicate per ottenerle sono tutte a risultato unico e determinato, abbiamo senz'altro che *se esiste un sistema integrale delle R (e quindi delle* (II)) *soddisfacente alle a), esso coincide necessariamente col sistema integrale* (4).[1]

[1] Infatti ogni eventuale sistema di soluzioni delle R, soddisfacenti alle a), deve soddisfare anche a ciascuno dei sistemi I_r, sotto le stesse condizioni iniziali i_r). Vedi analoga dimostrazione al n. 41.

Così è provata la prima parte del Teorema enunciato al § 7, quella relativa all' *unicità* degli integrali: e non resta che a provare, che le (4) *soddisfano in effetto a tutte le equazioni di R,* perchè anche l'altra parte, relativa all'*esistenza,* risulti di nuovo dimostrata.

60. — Introduciamo, per semplicità di parola, ancora una *convenzione* (in aggiunta a quelle note di Méray, Riquier, Bourlet[1] e a quelle qui poste al § 10, n. 37).

Diremo che *per una equazione di R,* e in generale, di un qualunque sistema risolto rispetto ad un certo numero di derivate, è *principale* ogni spazio coordinato che contiene tutti gli assi relativi alle variabili rispetto a cui è presa la derivata che è nel 1.° membro, *parametrici* tutti gli altri: per una *funzione incognita* in ogni tale sistema diremo che è *principale* ogni spazio tale per una (almeno) delle equazioni del sistema che ne dànno le derivate principali,[2] *parametrici* i rimanenti.[3]

Ciò posto: per ora sappiamo soltanto che gli integrali (4) soddisfano alle R_r, relative ad un certo gruppo di r variabili, quando sono poste $=0$ le rimanenti, ossia sul relativo S_r coordinato principale.

Per dimostrare che in una regione dell'S_n tali integrali soddisfano a tutte le equazioni di R, ci varremo del procedimento per *induzione*: mostreremo che non soltanto essi soddisfano alle R_1 sui relativi S_1 principali, ma alle R_1, R_2 sui

[1] Introd. II pag. 8.

[2] in altri termini, ogni spazio che contenga tutti gli assi relativi ad una (qualunque) delle sue derivate principali.

[3] Nel caso particolare dei sistemi di DARBOUX questa definizione coincide con quella data al § 10, n. 37.

relativi S_2: poi che se si suppone che soddisfino alle $R_1 R_2 \ldots R_r$ sui relativi S_r principali, ne segue che soddisfano alle $R_1, R_2, \ldots, R_r, R_{r+1}$ sui relativi S_{r+1}: onde risulterà appunto che soddisfano a tutte le R in S_n.

L'equazione generica di $R_r\,(r=1,2,\ldots,n)$ si può indicare brevemente:

$$\frac{\partial^r z_l}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_r}} = F^{r)}_{l,i_1 i_2\ldots i_r}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^{r-1} z}{\partial x_p \ldots \partial x_q}\right).$$

In questa *almeno uno* dei numeri $i_1 i_2 \ldots i_r$ dovrà essere eguale ad uno dei numeri h relativi alle variabili principali x_h della z che è al primo membro.

Ora — inteso per un momento che le z rappresentino funzioni qualunque delle x, purchè finite e continue con le derivate miste fino all'ordine n — poniamo (v. n. 35)

$$\Omega^{r)}_{l,i_1 i_2\ldots i_r} = \frac{\partial^r z_l}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_r}} - F^{r)}_{l,i_1 i_2\ldots i_r}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^{r-1} z}{\partial x_p \ldots \partial x_q}\right). \tag{5}$$

Se in queste al posto delle z poniamo gli integrali (4) abbiamo identicamente, posto (n. 35)

$$(\Omega)_{(z=(z))} = \overline{\Omega}, \tag{6}$$

$$\overline{\Omega}^{r)(i_{r+1} i_{r+2}\ldots i_n)}_{l,i_1 i_2\ldots i_r} = 0. \tag{7}$$

61. — Ciò posto, deriviamo la generica

$$\Omega^{1)}_{l,i_1} = \frac{\partial z_l}{\partial x_{i_1}} - f_{l,i_1}(x, z) = \frac{\partial z_l}{\partial x_{i_1}} - F^{1)}_{l,i_1}(x, z)$$

rispetto ad un'altra variabile qualunque x_{i_2}: avremo, (distinguendo momentaneamente con z, z^* le funzioni incognite

che non hanno od hanno la x_{i_2} tra le loro variabili principali),

$$\frac{\partial \Omega^{1)}_{l,i_1}}{\partial x_{i_2}} = \frac{\partial^2 z_l}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} - \frac{\partial F^{1)}_{l,i_1}}{\partial x_{i_2}} - \sum \frac{\partial F^{1)}_{l,i_1}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_{i_2}} - \sum \frac{\partial F^{1)}_{l,i_1}}{\partial z^*}\frac{\partial z^*}{\partial x_{i_2}}$$

ossia, con notazione evidente,

$$\frac{\partial \Omega^{1)}_{l,i_1}}{\partial x_{i_2}} = \frac{\partial^2 z_l}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} - \overline{F}^{2)}_{l,i_1 i_2}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x_{i_2}}, \frac{\partial z^*}{\partial x_{i_2}}\right). \tag{8}$$

Ma d'altra parte è

$$\Omega^{2)}_{l,i_1 i_2} = \frac{\partial^2 z_l}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} - F^{2)}_{l,i_1 i_2}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x_{i_2}}, f^*\right), \tag{9}$$

ove le f^* indicano i secondi membri delle equazioni di (II), (ossia di R_1) che dànno le $\dfrac{\partial z^*}{\partial x_{i_2}}$, (infatti per la stessa costruzione di R, *in forza delle equazioni di* $R_1 R_2 \ldots R_r$ si deve avere

$$\frac{\partial \Omega^{r)}_{l,i_1 i_2\ldots i_r}}{\partial x_{i_{r+1}}} = \Omega^{r+1)}_{l,i_1 i_2\ldots i_r i_{r+1}}, \quad (r=1,2,\ldots,n-1) \tag{10}$$

se $x_{i_{r+1}}$ indica una qualunque delle rimanenti variabili, escluse le $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$).

Sottraendo, membro a membro, dalle (8) le (9), abbiamo

$$\frac{\partial \Omega^{1)}_{l,i_1}}{\partial x_{i_2}} - \Omega^{2)}_{l,i_1 i_2} = \overline{F}^{2)}_{l,i_1 i_2}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial z^*}{\partial x_{i_2}}\right) - \overline{F}^{2)}_{l,i_1 i_2}\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial x_{i_2}}, f^*\right), \tag{11}$$

ossia

$$\frac{\partial \Omega^{1)}_{l,i_1}}{\partial x_{i_2}} - \Omega^{2)}_{l,i_1 i_2} = \sum A_{lv,i_1 i_2}\left(\frac{\partial z_v^*}{\partial x_{i_2}} - f_v^*\right), \tag{11*}$$

dove le A sono funzioni delle x, z, e delle loro derivate prime parametriche, e la somma è estesa a tutte le z_v^*

aventi x_{i_2} tra le loro variabili principali, che figurano nelle $F^{1)}_{l,i_1}$: infatti nelle nostre ipotesi sono applicabili le formule degli accrescimenti finiti ai secondi membri delle (8). Ma le differenze

$$\frac{\partial z_{l'}^*}{\partial x_{i_2}} - f_{l'}^*$$

sono, per le (5), le $\Omega^{1)}_{l' i_2}$ relative alle funzioni stesse $z_{l'}^*$. Dunque si deve avere

$$\frac{\partial \Omega^{1)}_{l,i_1}}{\partial x_{i_2}} - \Omega^{2)}_{l,i_1 i_2} = \sum A_{ll',i_1 i_2} \Omega^{1)}_{l',i_2}. \tag{12}$$

Se in queste formule poniamo per le z gli integrali (4), e facciamo poi

$$x_{i_3} = x_{i_4} = \ldots = x_{i_n} = 0,$$

essendo per le (7)

$$\overline{\Omega}^{2)(i_3 i_4 \ldots i_n)}_{l,i_1 i_2} = 0$$

otteniamo infine le equazioni

$$\frac{\partial \overline{\Omega}^{1)(i_3 i_4 \ldots i_n)}_{l,i_1}}{\partial x_{i_2}} = \sum \overline{A}_{ll',i_1 i_2} \overline{\Omega}^{1)(i_3 \ldots i_n)}_{l',i_2} \tag{13}$$

(ove le $\overline{A}$ indicano funzioni note delle x_{i_1}, x_{i_2}), alle quali possiamo associare le altre, ottenibili in modo del tutto analogo, scambiato i_2 con i_1,

$$\frac{\partial \overline{\Omega}^{1)(i_3 \ldots i_n)}_{l,i_2}}{\partial x_{i_1}} = \sum \overline{B}_{ll',i_1 i_2} \overline{\Omega}^{1)(i_3 \ldots i_n)}_{l',i_2}. \tag{13)*}$$

A queste equazioni (13), (13)*, le $\overline{\Omega}^{1)}$ relative alle equazioni che dànno la derivata rispetto ad x_{i_1} (o ad x_{i_2}) di

una qualunque delle funzioni incognite che hanno x_{i_1} (o x_{i_2}) tra le loro variabili principali, debbono soddisfare in conseguenza della stessa definizione (5), e del fatto che in esse si sono posti gli integrali (4) di R_n, calcolati nel modo indicato. Per ogni possibile coppia $(i_1 i_2)$ le (13), (13)* formano un *sistema lineare omogeneo del 1.° ordine, del tipo* (I) *di Darboux,* onde applicando il teorema di esistenza e unicità indicato al § 1, e ricordando che per le (7) è identicamente

$$\overline{\Omega}^{1)(i_3 \ldots i_n)(i_2)}_{l,i_1} = 0 \quad \text{ed} \quad \overline{\Omega}^{1)(i_3 \ldots i_n)(i_1)}_{l,i_2} = 0$$

abbiamo che è anche identicamente

$$\overline{\Omega}^{1)(i_3 \ldots i_n)}_{l,i_1} = 0, \quad \overline{\Omega}^{1)(i_3 \ldots i_n)}_{l,i_2} = 0,$$

cioè che *le R_1 sono in effetto soddisfatte dagli integrali* (4) *non soltanto sui rispettivi assi principali ma anche sui piani (coordinati) che passano per tali assi,* ossia appunto *su tutti i loro piani principali, come lo sono* (per le (7)) *le R_2.*

62. — E ora supponiamo provato che gli integrali (4) stessi soddisfino alle $R_1, R_2, \ldots, R_r$ su tutti i rispettivi S_r coordinati principali. Se deriviamo le $\Omega^{r)}_{l,i_1 i_2 \ldots i_r}$ rispetto alla variabile generica $x_{i_{r+1}}$ scelta tra le rimanenti (escluse le $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$), e confrontiamo con la corrispondente $\Omega^{r+1)}_{l,i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1}}$, abbiamo subito una formula analoga alla (11)*,

$$\frac{\partial \Omega^{r)}_{l,i_1 i_2 \ldots i_r}}{\partial x_{i_{r+1}}} - \Omega^{r+1}_{l,i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} \tag{14}$$

$$= \sum \sum_{0}^{r-1} {}_{r'} A_{ll',j_1 \ldots j_{r'} i_{r+1}} \left(\frac{\partial^{r+1} z^{l'}}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{r'}} \partial x_{i_{r+1}}} - F^{r'+1)}_{l',j_1 \ldots j_{r'} i_{r+1}} \right),$$

ove $j_1 j_2 \ldots j_{r'}$ sono r' indici $(0 \leq r' \leq r-1)$ comunque presi tra $(i_1 i_2 \ldots i_r)$, e la prima somma è estesa a tutte le $z_{r'}$ rispetto alle quali (dopo la derivazione eseguita rispetto ad $x_{i_{r+1}}$), nei secondi membri delle equazioni ottenute sono apparse derivate principali.

Per le (5) le (14) possono scriversi:

$$(15)\quad \frac{\partial \Omega^{r)}_{l,i_1\ldots i_r}}{\partial x_{i_{r+1}}} - \Omega^{r+1)}_{l,i_1\ldots i_r i_{r+1}} = \sum \sum_{0}^{r-1}{}_{r'} A_{ll',j_1\ldots j_{r'} i_r} \, \Omega^{r'+1)}_{l',j_1\ldots j_{r'} i_{r+1}}.$$

In queste poniamo al posto delle z gli integrali (4), e poi facciamo

$$x_{i_{r+2}} = x_{i_{r+3}} = \ldots = x_{i_n} = 0:$$

in forza delle 7) esse diverranno

$$(16)\quad \frac{\partial \overline{\Omega}^{r)(i_{r+2}\ldots i_n)}_{l,i_1\ldots i_r}}{\partial x_{i_{r+1}}} = \sum \sum_{0}^{r-1}{}_{r'} \overline{A}_{ll',j_1\ldots j_{r'} i_{r+1}} \, \overline{\Omega}^{r'+1)(i_{r+2}\ldots i_n)}_{l',j_1\ldots j_{r'} i_{r+1}}.$$

Notiamo che in queste equazioni (16), $(i_1 i_2 \ldots i_r)$ è una qualunque combinazione della classe r degli indici $1,2,\ldots,n$: mentre i_{r+1} è uno qualunque degli indici rimanenti. In altri termini, $(i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1})$ è una qualunque disposizione della classe $r+1$ degli indici $1, 2,\ldots n$, *considerandosi però come distinte due di tali disposizioni solo se differiscono per l'ultima lettera.*

Nei secondi membri delle (16) in generale figureranno alcune $\overline{\Omega}^{t)}$, con $t<r$: perciò aggiungiamo alle (16) stesse tutte le equazioni, analoghe alle (15), che si ottengono derivando una qualunque $\Omega^{t)}_{l,j_1\ldots j_t}$ rispetto ad $x_{j_{t+1}}$, (ove $(j_1 j_2 \ldots j_t)$ è una qualunque combinazione della classe t $(t=1,2\ldots r-1)$ degli indici $(i_1, i_2,\ldots, i_r, i_{r+1})$, e j_{t+1} è un indice scelto ad arbitrio tra gli $r+1-t$ rimanenti): ponendovi poi per le z gli integrali (4), e infine facendovi $x_{i_{r+1}} = \ldots = x_{i_n} = 0$:

$$(17)\quad \frac{\partial \overline{\Omega}^{t)(i_{r+2}\ldots i_n)}_{l,j_1\ldots j_t}}{\partial x_{j_{t+1}}} = \sum \sum_{0}^{t-1}{}_{r'} A_{ll',d_1\ldots d_{r'} j_{t+1}} \, \overline{\Omega}^{r'+1)(i_{r+2}\ldots i_n)}_{l',d_1\ldots d_{r'} j_{t+1}} +$$

$$+ \overline{\Omega}^{t+1)(i_{r+2}\ldots i_n)}_{l,j_1\ldots j_t j_{t+1}}.$$

Le (16), (17), scritte per ciascun gruppo determinato di $r+1$ variabili $(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} x_{i_{r+1}})$, (vedi osserv. preced.) *formano un sistema lineare ed omogeneo del tipo* (I) *di Darboux*: ora per le (7) è identicamente

$$\overline{\Omega}^{r)(i_{r+1} i_{r+2}\ldots i_n)}_{l,i_1\ldots i_r} = 0,$$

e per l'ipotesi fatta, che gli integrali (4) soddisfino anche alle $R_1 R_2 \ldots R_{r-1}$ (come alle R_r) su tutti i loro S_r coordinati principali, abbiamo anche

$$\overline{\Omega}^{t)(j_{t+1} i_{r+2}\ldots i_n)}_{l,j_1\ldots j_t} = 0,$$

perchè l'S_r $(x_{j_{t+1}} = x_{i_{r+2}} = \ldots = x_{i_n} = 0)$, contenendo l'$S_t$ $(x_{j_{t+1}} = x_{j_{t+2}} = \ldots = x_{j_r} = x_{i_{r+1}} = \ldots = x_{i_n} = 0)$, *principale* per la corrispondente equazione di R_t, è pure principale per essa. Dunque su tutto l'S_{r+1} $(x_{i_{r+2}} = \ldots = x_{i_n} = 0)$ le $\overline{\Omega}$ stesse sono identicamente nulle, e ciò dimostra che le $R_1 R_2 \ldots R_r$ sono, come le R_{r+1}, soddisfatte dagli integrali (4) su tutti i loro S_{r+1} coordinati principali.

Per quanto abbiamo già osservato, ne segue che *anche il teorema di esistenza è così pienamente dimostrato.*

63. — Questa seconda dimostrazione, come la prima, dà subito (come già risulta da quanto si è detto al n. 59) un

metodo per l'effettiva risoluzione di un sistema (II): precisamente indica come si possa ricondurre l'integrazione del sistema (II) a quelle di sistemi $I_1, I_2, \ldots, I_n$ del tipo iperbolico (3), degli ordini $1, 2, \ldots, n$ [1], ad $1, 2, \ldots, n$ variabili.

Però l'applicazione di questo metodo non risulterà in generale opportuna nella pratica, in quanto l'integrazione di un sistema iperbolico, (ad es. col metodo delle approssimazioni successive), per $n > 2$ è in generale assai più difficile e laboriosa di quella di un sistema semplice di Darboux con lo stesso numero di variabili.

Poi questo metodo richiede il successivo calcolo di ognuna delle z su *tutti* i suoi S_r $(1 \leq r \leq n)$ coordinati principali, mentre gli altri metodi indicati al § 10 richiedono (vedi n. 42) soltanto il calcolo successivo di ciascuna z su spazi, di dimensione sempre maggiore, *contenenti lo spazio coordinato parametrico di massima dimensione,* su cui la z è assegnata dalle condizioni iniziali, *e l'asse delle* x_n.

Pure è degno di nota il legame così messo in luce tra i sistemi di Darboux e i sistemi iperbolici, che dividono con essi la notevolissima proprietà di *ammettere classi molto vaste di soluzioni in ipotesi e sotto condizioni iniziali anche non analitiche.*

Nei §§ successivi studieremo sistemi più generali, che comprendono appunto queste due classi di sistemi come casi particolari.

---

[1] e quindi ad applicazioni successive del *metodo di Picard*, o anche, se il sistema (II) è lineare, del *metodo di Riemann*. Vedi le memorie già citate (n. 58) di BIANCHI e di NICCOLETTI, in cui tali metodi sono estesi ai più generali sistemi iperbolici.

§ 15.

Estensione del teorema di esistenza e d'unicità a sistemi più generali (III).

64. — Dato un sistema (II), (pel quale valgano le α'), β) dei §§ 14, 7), supponiamo di avere costruito per esso (nel modo indicato al § precedente) il relativo sistema R, costituito da equazioni $R_1, R_2, \ldots, R_n$, degli ordini $1, 2, \ldots, n$. Possiamo disporre tali equazioni in un quadro T, ponendo nella stessa verticale r^{ma} (ad es. dalla sinistra) le equazioni appartenenti ad R_r, ed in uno stesso gruppo (l^{mo}) di orizzontali consecutive tutte le equazioni T_l che dànno derivate (tutte le derivate principali *miste,* ossia prese rispetto a variabili tutte distinte, fino all'ordine n) di una stessa funzione incognita z_l. Il quadro avrà così *n colonne, ed m gruppi di orizzontali.*

Le equazioni, di una stessa colonna o di colonne diverse, appartenenti ad uno stesso gruppo T_l, sono tra loro legate da determinate relazioni, le *condizioni di compatibilità*: precisamente, tutte le *espressioni ultime* di ciascuna derivata *cardinale,*[1] ossia, per la particolare forma del sistema R, di ciascuna derivata principale *mista* r^{ma} $(2 \leq r \leq n)$, ottenibili dal sistema stesso (o direttamente, o per derivazioni e conseguenti sostituzioni) debbono identicamente coincidere. Oltre a ciò, i secondi membri di R godono anche di altre proprietà, di continuità e derivabilità rispetto ai loro

---

[1] Vedi Introd. II, pag. 8: *Riquier* l. c. pag. 174.

vari argomenti, conseguenze immediate delle ipotesi α'), β) fatte sul sistema (II).

Ora è evidente che possiamo anche supporre *dato a priori* un sistema R dello stesso tipo, pel quale valgano le le stesse proprietà ora accennate: tutto ciò che si è detto pel sistema dedotto da (II), si potrà ripetere senza alcun mutamento. Poste le equazioni di tale sistema R in un quadro T, nel modo indicato, assegnate ad arbitrio le condizioni iniziali a) (vedi n. 28), l'integrazione delle equazioni contenute nelle successive colonne (eseguita sui rispettivi spazi principali di minima dimensione, sotto condizioni date o dalle a) o dalla integrazione delle equazioni della relativa colonna precedonte), dà, come risultato finale, uno e un solo sistema integrale di R.

65. — Ma di più: possiamo considerare i sistemi R' di tipo assai più generale, che si ottengono da un tale sistema R *sopprimendo,* nel relativo quadro, T, *in modo arbitrario un numero qualunque* (≥ 0) *di equazioni, con la sola condizione che per ognuna delle funzioni incognite resti nei primi membri almeno una derivata*: e notate, (il che è immediato), le proprietà caratteristiche del sistema residuo R', proporci anche *a priori* un sistema dello stesso tipo

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial^r z_l}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}} = f_{l, i_1 i_2 \ldots i_r}\left(x, \frac{\partial^{r-t} z_{l'}}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{r-t}}}\right),$$

dove

1) $\qquad r = 1, 2, \ldots, n; \quad t = 1, 2, \ldots, r; \quad l, l' = 1, 2, \ldots, m,$

$(i_1 i_2 \ldots i_r)$ è una qualunque combinazione (semplice) della classe r dei numeri $1, 2, \ldots, n$, indipendente dall'indice l (a differenza di ciò che accadeva pei sistemi (iperbolici) (3

del § prec., in cui per ogni funzione incognita si aveva una ed una sola equazione): $(j_1 j_2 \ldots j_{r-t})$ è una qualunque combinazione (semplice) della classe $r-t$ dei numeri $i_1 i_2 \ldots i_r$, colla condizione però che la derivata $\dfrac{\partial^{r-t} z_{l'}}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{r-t}}}$ sia *parametrica* per la funzione $z_{l'}$ nel sistema:

2) le funzioni $f_{l, i_1 \ldots i_r}$ dei secondi membri sono finite e continue e ammettono tutte le derivate parziali di ordine (complessivo) $\leq n - r + 1$, prese rispetto ad un certo numero (≥ 0) di variabili indipendenti distinte tra loro e dalle $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$, e ad un certo numero (pure ≥ 0) di funzioni z e di loro derivate parametriche, contenute in esse.

Ogni sistema (III) è *ortonomo.*[1] (Infatti esso è risolto rispetto ad un certo numero di derivate, non contiene derivate principali nei secondi membri: e basta assegnare alle variabili indipendenti e alle funzioni incognite *un solo* sistema di quote, tutte eguali ad 1 per le prime, allo zero per le seconde, (il che porta di conseguenza, che la quota di ogni derivata risulta eguale al suo ordine), per verificare che le quote dei primi membri risultano tutte superiori alle quote dei secondi). Ma supporremo, di più, che i sistemi (III) presi in considerazione siano *compatibili,*[2] cioè, che per essi:

3) *siano identiche, nelle x, nelle z e nelle loro derivate parametriche, tutte le espressioni ultime ottenibili per le derivate cardinali.*[3]

---

[1] Riquier, l. c. pag. 202. Introd. II, pag. 10.

[2] Introd. II, pag. 13.

[3] Ciò porterà a limitazioni circa le z e le loro derivate che possono effettivamente figurare nei singoli secondi membri.

66. — Pel sistema particolare R', dedotto da R nel modo detto, valgono (per le ipotesi fatte su (II) o su R) le 1), 2), ma in generale non sono verificate tutte le *condizioni di compatibilità* 3), pur essendo compatibile R.

Infatti se entro il complesso delle condizioni di compatibilità relative ad R prendiamo quelle che si riferiscono alle equazioni di R', vediamo che esse sono costruite tenendo conto (in generale) anche di alcune delle equazioni soppresse. L'ipotesi che R' sia compatibile è più restrittiva dell'ipotesi di compatibilità delle sue equazioni entro R, (tra loro e con le rimanenti): ma possiamo sempre supporre che il sistema R godesse anche di questa particolare proprietà, che entro esso le equazioni di R' fossero compatibili anche se considerate a parte, indipendentemente dalle rimanenti.

In questa ipotesi è possibile, in uno e in un sol modo, pel sistema R' *completare verso destra il relativo quadro T*, ossia ricostruire quelle, tra le equazioni soppresse di R, i cui primi membri sono rimasti anche per R' *derivate principali*. Ma anche *per un qualunque sistema* (III) *dato a priori*, e dotato delle proprietà indicate, 1), 2), 3), (in particolare, *compatibile*), è possibile in uno e in sol modo, disposte le sue equazioni in un quadro T costruito nel modo indicato poco sopra per R, completare il quadro verso destra, fino a formare tutte le equazioni che dànno le espressioni ultime (uniche) delle derivate principali miste di tutte le funzioni incognite.

È inutile proseguire in questo raffronto: si comprende come sia lecito limitarsi allo studio di un sistema R', con l'avvertenza di non usufruire delle sue eventuali proprietà che abbiano relazione con le equazioni di R soppresse; i risultati che così si otterranno saranno integralmente

validi per un sistema (III) qualunque (sempre nelle ipotesi sopra indicate).

Nel quadro relativo ad R', completato nel modo detto, resteranno in generale, rispetto al quadro primitivo, alcune lacune, corrispondenti a derivate principali che sono divenute parametriche. A ciascuna di queste derivate corrisponderà uno spazio coordinato, che era principale per la relativa funzione incognita, ed è divenuto parametrico. Nella integrazione del sistema R, (effettuata nel modo indicato al § prec.), ciascuna equazione serve appunto a dare il valore, sul proprio spazio coordinato principale di minima dimensione,[1] della funzione che figura nel suo primo membro: i valori su tutti gli spazi coordinati parametrici sono invece assegnati dalle condizioni iniziali a). Si presenta quindi come naturale il *sostituire a ciascuna equazione soppressa,* in aggiunta alle a), una *nuova condizione iniziale* per la z corrispondente: precisamente, assegnare i valori delle z[2] anche sui nuovi spazi parametrici.

Cosicchè, riunendo le nuove condizioni alle a), verremo ad assegnare *i valori di ciascuna z su tutti i relativi spazi parametrici di dimensione massima,* ossia non contenuti in altri spazi parametrici: naturalmente sotto la condizione che se due o più di questi spazi hanno qualche spazio a comune, i valori siano dati *in modo compatibile,* cioè negli spazi subordinati comuni risultino dati in modo unico.

Sotto le nuove condizioni iniziali, se supponiamo per un momento che pel sistema R' (supposto compatibile) sia

[1] lo spazio individuato dagli assi relativi alle sue variabili di derivazione.

[2] al solito, come funzioni finite e continue, e che ammettono tutte le derivate miste (vedi n. 58).

ancora valido il teorema di ***esistenza*** degli integrali, ne deduciamo subito l'***unicità,*** e insieme vediamo come essi possano, in effetto, venir calcolati: non c'è che da applicare lo stesso metodo indicato al § prec. (n. 59) pei sistemi R.

Infatti le nuove condizioni iniziali dànno appunto ciò che occorre aggiungere al risultato della integrazione delle equazioni R_{r-1} della colonna $(r-1)^{ma}$ $(r=2,3,\ldots,n)$ del relativo quadro T, per determinare le condizioni iniziali per quelle (R'_r) della r^{ma}.[1] Gli integrali (unici) (z) che così si ottengono per R_n coincidono con gli integrali — supposti esistenti — di R'.

Ma anche il *teorema di esistenza* è ancora valido: la dimostrazione (per induzione) data al § precedente pei sistemi R si può infatti ripetere senza modificazioni sostanziali, perchè, come è facile constatare, *in tale dimostrazione, data per un sistema R, non sono effettivamente introdotte le particolari proprietà di R che lo distinguono da R', ossia* — sostanzialmente è la stessa cosa — *da un qualunque sistema* (III) (compatibile, e supposto prolungato (vedi n. 58) fino all'ordine n).

67. — Possiamo dunque enunciare il Teorema: « ***Ogni sistema alle derivate parziali*** [di ordine $\leq n$, ad n variabili, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, in m funzioni incognite $z_1, z_2, \ldots, z_m$], *del tipo*

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial^r z_i}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}} = f_{i i_1 i_2 \ldots i_r}\left(x, \frac{\partial^{r'} z_l}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_{r'}}}\right),$$

sotto le ipotesi 1), 2), 3) del n. 65 (ed essendo indicato dalle 1) stesse il significato delle notazioni) ***ammette uno ed un solo sistema integrale tale che ciascuna funzione incognita assuma valori assegnati ad arbitrio***[1] (in modo compatibile) ***su tutti i rispettivi spazi coordinati parametrici di massima dimensione*** ».

E gli integrali si ottengono mediante la successiva integrazione *al più* di $\binom{n}{1}$ sistemi differenziali ordinari, del 1° ordine, $\binom{n}{2}$ sistemi iperbolici a 2 variabili, del 2° ordine... $\binom{n}{r}$ sistemi iperbolici ad r variabili, dell'ordine r... $\binom{n}{n}=1$ sistema iperbolico ad n variabili, dell'ordine n: integrazioni tutte eseguibili col metodo di Picard, e nel caso lineare, col metodo di Riemann.[2]

68. — I sistemi (III) *comprendono in particolare* ***i sistemi*** *di Darboux* (II), *e i sistemi* ***iperbolici*** (3) *di qualunque ordine* (vedi osserv. alla fine del § prec.): anzi comprendono anche una classe più vasta di sistemi, di cui i sistemi (3) non sono che un caso particolare, e che rientrano alla loro volta in sistemi assai più generali, studiati dal Niccoletti.[3]

---

[1] E nelle nostre ipotesi, i valori che di ciascuna z si ottengono sopra un qualunque S_r principale sono compatibili con quelli assegnati ad arbitrio su un qualunque spazio parametrico che abbia con esso uno spazio a comune: infatti questo spazio comune non potrà essere che parametrico.

---

[1] Le funzioni iniziali però dovranno essere finite e continue ammettere tutte le derivate miste (n. 58).

[2] Vedi nota al n. 63.

[3] Vedi la memoria già citata (nota al n. 58) negli *Atti* della R. Accad. delle Scienze di Napoli, vol. VIII, 1895. I sistemi in parola sono i sistemi (III) pei quali di ogni z figura, nei primi membri, una e una sola derivata, e inoltre gli ordini di derivazione di *tutte* le derivate di una funzione incognita che figurano nei secondi membri siano non superiori singolarmente, ed inferiori complessivamente, o quello dell'unica derivata di essa che figura in un primo membro.

§ 16.

Esempi sull'applicazione della precedente teoria.

69. — Diamo qualche esempio per chiarire la portata e il significato delle considerazioni svolte nel precedente §.

Anzitutto, dato un sistema R (n. 58) e soppresse alcune sue equazioni, vediamo come in effetto si possono assegnare nuove condizioni iniziali che ne tengano il luogo.[1]

Sia $n=3$: figuri in R_1, rispetto ad una data funzione incognita z, una sola equazione che dia la $\frac{\partial z}{\partial x_1}$: ciò significa che per la z è principale l'asse delle x_1, i piani che la contengono, e naturalmente l'S_3. In R_2 figureranno le equazioni che dànno $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3}$, in R_3 quella che dà $\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$. Relativamente a z, la condizione iniziale sarà, che sia assegnato il valore $z^{(1)} (= (z_1)_{(x_1=0)})$, valore di z sul piano $x_1 = 0$. In particolare risulteranno noti i valori $z^{(123)}, z^{(12)}, z^{(13)}$: integrando le R_1 sui rispettivi assi principali si otterrà (in particolare) il valore $z^{(23)}$: integrando le R_2 sui rispettivi piani principali, i valori $z^{(2)}, z^{(3)}$, e infine integrando le R_3, l'espressione cercata della z. Ora sopprimiamo, in R, le equazioni che dànno $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_1 \partial x_2}$, e supponiamo che le rimanenti siano ancora tra loro compatibili: risulteranno allora, per z, parametrici tutti gli assi

[1] Agli effetti della determinazione di integrali che abbiano lo stesso grado di generalità.

coordinati, e i piani $x_1 x_2, x_2 x_3$: basterà dunque assegnare i valori $z^{(3)}, z^{(1)}$, (in modo compatibile, ossia in modo che calcolando da ciascuno di essi il valore z^{13} si ottenga lo stesso risultato) su tali piani, che complessivamente contengono tutti gli assi.

Essendo allora noti in particolare i valori $z^{(12)}, z^{(32)}$, saranno determinate le condizioni iniziali occorrenti, relativamente alla z, per integrare le R_2 sui rispettivi piani principali: questa integrazione darà il valore $z^{(2)}$, e noti così $z^{(1)}$, $z^{(2)}, z^{(3)}$, avremo quanto occorre e basta assegnare — relativamente alla z — per integrare le R_3.

70. — In secondo luogo, mostriamo come si applichi il teorema del n. 67 per determinare l'arbitrarietà delle soluzioni di un sistema (III). Per questo basta stabilire, per ciascuna z, quali sono i relativi spazi coordinati parametrici di massima dimensione. Procedendo per via d'esclusione, si cercheranno dapprima gli spazi parametrici, ossia gli spazi coordinati che non contengono alcuno degli spazi coordinati principali di minima dimensione ad essa relativi: poi tra di essi si prenderanno quelli che non sono contenuti in alcun altro di essi.

Ad es., di una z sia data soltanto (dal sistema (III)) la $\frac{\partial^4 z}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4}$: spazi parametrici sono tutti gli spazi che non contengono l'S_4 $(x_1 x_2 x_3 x_4)$: in particolare i quattro iperpiani $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$, di cui ciascuno non è contenuto in altri spazi parametrici, e che invece contengono (complessivamente) tutti gli altri: onde i valori iniziali da assegnare per z saranno:

$$z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}, z^{(4)}.$$

Siano invece date, di una z, le

$$\frac{\partial z}{\partial x_6}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_4 \partial x_5}, \frac{\partial^3 x}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_4}:$$

vediamo che per determinare gli spazi parametrici bisogna escludere — tra gli spazi che contengono gli assi $x_7, x_8, \ldots, x_n$ — quelli che contengono l'asse delle x_6, o i piani $x_1 x_2$, $x_4 x_5$, o lo spazio $S_3 (x_1 x_2 x_3)$. Si trovano così 4 spazi parametrici di massima dimensione: precisamente, gli S_{n-3}

$$(x_1 x_3 x_5 x_7 \ldots x_n),\ (x_2 x_3 x_4 x_7 \ldots x_n),\ (x_2 x_3 x_5 x_7 \ldots x_n),$$

e l'S_{n-4}

$$(x_1 x_4 x_7 \ldots x_n),$$

e corrispondentemente si ha che di quella z bisogna e basta assegnare i valori

$$z^{(246)},\ z^{(156)},\ z^{(146)},\ z^{(2356)},$$

(sempre, s'intende, in modo compatibile, cosicchè ad es. i valori sull'asse delle x_3, calcolati servendosi dei valori assegnati sui tre S_{n-3} che lo contengono, risultino gli stessi).

71. — Diamo infine due semplici esempi della formazione del quadro T per la integrazione di un dato sistema del tipo (III).

Sia da integrare il seguente sistema (che supporremo compatibile):

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 z_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = f_{1,123}\left(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x_1 \partial x_3} = f_{2,13}(x_1, x_2, x_3, z_3) \\[2ex] \dfrac{\partial z_2}{\partial x_2} = f_{2,2}(x_1, x_2, x_3, z_1) \\[2ex] \dfrac{\partial z_3}{\partial x_2} = f_{3,2}(x_1, x_2, x_3, z_1). \end{cases}$$

I valori iniziali da assegnare sono:

$$z_1^{(1)}(x_2 x_3),\ z_1^{(2)}(x_1 x_3),\ z_1^{(3)}(x_1 x_2),\ z_2^{(32)}(x_1),\ z_2^{(12)}(x_3),\ z_3^{(2)}(x_1 x_3).$$

E il quadro T — (in cui abbiamo già posto $= 0$, in ciascuna equazione, le variabili relative ai suoi assi parametrici) — è il seguente:

	I_1	I_2: $\binom{*}{}$ $\binom{*}{*}$ $\left(\begin{smallmatrix}*\\ *\\ *\end{smallmatrix}\right)$	I_3
z_1			$\dfrac{\partial^3 z_1}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = f_{1,123}\left(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, \dfrac{\partial z_2}{\partial x_1}\right)$
z_2	$\dfrac{\partial z_2^{(13)}}{\partial x_2} = f_{2,2}(0, x_2, 0, z_1^{(13)})$	$\dfrac{\partial^2 z_2^{(2)}}{\partial x_1 \partial x_3} = f_{2,13}(x_1, 0, x_3, z_3^{(2)})$ $\binom{*}{*}$ $\dfrac{\partial^2 z_2^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(\dfrac{\partial f_{2,2}}{\partial x_1}\right)^{(3)} + \left(\dfrac{\partial f_{2,2}}{\partial z_1}\right)^{(3)} \dfrac{\partial z_1^{(3)}}{\partial x_1}$ $\binom{*}{}$ $\dfrac{\partial^2 z_2^{(1)}}{\partial x_2 \partial x_3} = \left(\dfrac{\partial f_{2,2}}{\partial x_3}\right)^{(1)} + \left(\dfrac{\partial f_{2,2}}{\partial z_1}\right)^{(1)} \dfrac{\partial z_1^{(1)}}{\partial x_3}$ $\left(\begin{smallmatrix}*\\ *\\ *\end{smallmatrix}\right)$	$\dfrac{\partial^3 z_2}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \dfrac{\partial f_{2,13}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_{2,13}}{\partial z_3} f_{3,2}$
z_3	$\dfrac{\partial z_3^{(13)}}{\partial x_2} = f_{3,2}(0, x_2, 0, z_1^{(13)})$	$\dfrac{\partial^2 z_3^{(3)}}{\partial x_1 \partial x_2} = \left(\dfrac{\partial f_{3,2}}{\partial x_1}\right)^{(3)} + \left(\dfrac{\partial f_{3,2}}{\partial z_1}\right)^{(3)} \dfrac{\partial z_1^{(3)}}{\partial x_1}$ $\binom{*}{}$ $\dfrac{\partial^2 z_3^{(1)}}{\partial x_2 \partial x_3} = \left(\dfrac{\partial f_{3,2}}{\partial x_3}\right)^{(1)} + \left(\dfrac{\partial f_{3,2}}{\partial z_1}\right)^{(1)} \dfrac{\partial z_1^{(1)}}{\partial x_3}$ $\left(\begin{smallmatrix}*\\ *\\ *\end{smallmatrix}\right)$	$\dfrac{\partial^3 z_3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \dfrac{\partial^2 f_{3,2}}{\partial x_1 \partial x_3} + \dfrac{\partial^2 f_{3,2}}{\partial x_1 \partial z_1} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_3} +$ $+ \dfrac{\partial^2 f_{3,2}}{\partial x_3 \partial z_1} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2 f_{3,2}}{\partial z_1^2} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial z_1}{\partial x_3} +$ $+ \dfrac{\partial f_{3,2}}{\partial z_1} \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x_1 \partial x_3}$

Per $\dfrac{\partial^3 z_2}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$ le espressioni ottenibili sono due, ma esse debbono coincidere, per le condizioni di compatibilità.

Nella 2.ª colonna abbiamo tre sistemi parziali $\left(\binom{3}{2} = 3\right)$.

72. — Come secondo esempio diamo il sistema (in due funzioni incognite, a 4 variabili indipendenti):

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = x_3 z_1 + x_1 z_2 \\
&\frac{\partial^3 z_2}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = (1 + 2x_2 x_3) z_1 + x_3^2 z_2 + x_3(1 + x_2 x_3) \frac{\partial z_1}{\partial x_3} + x_3 x_2^2 \frac{\partial z_2}{\partial x_3} + 2 \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2 \partial x_3} \\
&\frac{\partial^2 z_2}{\partial x_1 \partial x_4} = x_3 x_2 \frac{\partial z_1}{\partial x_4} + 2 \frac{\partial z_2}{\partial x_4}.
\end{aligned}
\right.
$$

Vi è una sola condizione di compatibilità da verificare: l'eguaglianza identica delle due espressioni ultime dell'unica derivata cardinale $\dfrac{\partial^4 z_2}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4}$, che si possono ricavare, rispettivamente, dalla seconda e dalla terza equazione del sistema. Si verifica subito che tali espressioni sono in effetto identiche, nelle x, nelle z e nelle loro derivate parametriche. Dunque si potrà procedere alla integrazione col metodo indicato.

Come condizioni iniziali, si dovranno assegnare i valori

$$z_1^{(3)}(x_1 x_2 x_4),\ z_2^{(1)}(x_2 x_3 x_4),\ z_1^{(34)}(x_1 x_2),\ z_2^{(34)}(x_1 x_3)$$

(in modo compatibile).

Si formerà il quadro T:

poi in ciascuna delle equazioni R_r si porranno $= 0$ le variabili che non figurano nella derivata che è al primo membro, ottenendo così un sistema I_1, 4 sistemi I_2, 4 sistemi I_3, un sistema I_4.

§ 17.

Riduzione di un sistema (III) ad un sistema di Darboux equivalente.

73. — Dato un sistema (M) del tipo (III), possiamo facilmente ***trasformarlo in un sistema** (N), **del tipo** (II) **di Darboux, ad esso equivalente, introducendo come nuove funzioni incognite tutte le derivate parametriche.*** (Intendiamo, qui e nel seguito, di parlare sempre esclusivamente di *derivate miste, prese rispetto a variabili tutte distinte tra loro*).

Poniamo dunque

$$(20) \qquad \frac{\partial^r z_i}{\partial x_{\iota_1} \partial x_{\iota_2} \ldots \partial x_{\iota_r}} = z_{i,\iota_1\iota_2\ldots\iota_r},$$

(ove col 1.° membro indichiamo la derivata parametrica generica del sistema (M)).

Consideriamo le funzioni incognite stesse come derivate parametriche di ordine zero. A ciascuna derivata parametrica di ordine r corrisponde uno spazio coordinato parametrico, ad r dimensioni, contenente gli r assi relativi alle sue variabili di derivazione: per le funzioni incognite tale spazio si riduce al punto iniziale, ossia all'origine.

Formiamo, di ciascuna derivata parametrica, ossia di ciascuna delle nuove funzioni incognite, la derivata rispetto a ciascuna delle variabili corrispondenti agli assi coordinati non contenuti nel relativo spazio parametrico, (ossia, distinte dalle sue variabili di derivazione). La derivata generica così ottenuta, sarà, a meno delle notazioni, una derivata (principale o parametrica) di una delle funzioni incognite primitive, (le cui variabili di derivazione saranno tutte diverse tra loro): se è principale, la eguaglieremo all'espressione ultima che per essa dà il sistema dato, prolungato per derivazione: (nella quale espressione intenderemo indicata con la nuova notazione, ossia come nuova funzione incognita, ogni derivata parametrica che vi figura): se è parametrica, alla corrispondente nuova funzione incognita. Otteniamo così un sistema differenziale (N) del 1.° ordine, che *è un sistema del tipo* (II) *di Darboux*: infatti i suoi primi membri sono derivate prime delle nuove funzioni incognite, (ossia delle antiche derivate parametriche, comprese tra queste le antiche funzioni incognite): i secondi membri sono costituiti in parte semplicemente da funzioni incognite, in parte dagli antichi secondi membri del sistema, che ora sono funzioni delle variabili indipendenti e delle funzioni incognite soltanto: in parte da derivate degli antichi secondi membri, (prese rispetto a variabili diverse dalle variabili di derivazione dei corrispondenti primi membri), in cui, dopo le derivazioni, a tutte le derivate principali che vi sono apparse abbiamo sostituito le loro espressioni ultime, e poi ad ogni derivata parametrica la nuova funzione incognita: dunque in ogni caso i secondi membri non contengono derivate delle nuove funzioni incognite. Ogni sistema di soluzioni del primitivo sistema (M), ossia ogni sistema di funzioni z_i che soddisfano a tale sistema, se mediante derivazione se ne traggono i corrispondenti valori di tutte le $z_{i,\iota_1\iota_2\ldots\iota_r}$, dà luogo ad un sistema di soluzioni del nuovo sistema (N): infatti ponendo tali valori nelle equazioni di questo sistema, dette equazioni si riducono o a semplici identità formali, o ad equazioni del sistema dato, soddisfatte per ipotesi, o a conseguenze differenziali del sistema stesso. Viceversa, ogni sistema di soluzioni del sistema (N) dà in particolare un sistema di soluzioni del sistema (M) primitivo, come è evidente.

74. — Dunque abbiamo costruito un sistema (N) del tipo (II) di Darboux, equivalente al dato sistema (M). Vediamo facilmente che *il sistema (N) è completamente integrabile, ossia per esso sono soddisfatte le condizioni di compatibilità, se ciò avviene pel sistema (M) primitivo;* infatti per due equazioni di (N), (che diano derivate di una stessa funzione incognita), tali che almeno uno dei rispettivi secondi membri sia una delle nuove funzioni incognite, la relativa condizione di compatibilità è soddisfatta identicamente per la stessa costruzione del sistema (N): lo stesso accade quando entrambi i secondi membri sono ottenuti per derivazione, da *uno stesso* secondo membro del sistema (M) primitivo: se invece i due secondi membri sono ottenuti, o direttamente o per derivazione, da due antichi secondi membri *distinti,* la relativa condizione è senz'altro una delle condizioni di compatibilità del sistema primitivo.

Per la nuova funzione incognita generica $z_{i,s_1 s_2 \ldots s_r}$, $(r \geq 0)$, nel sistema (N), le variabili principali sono $x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}, \ldots, x_{i_n}$, (in particolare per le z_i sono tutte le variabili indipendenti): dunque le nuove condizioni iniziali (che si dovranno assegnare ad esse per avere uno qualunque degli integrali di cui il teorema generale del § 7 dimostra l'esistenza e l'unicità), saranno le seguenti: di ogni nuova funzione incognita, ossia di ogni antica derivata parametrica, si deve assegnare il valore nell'S_r coordinato parametrico che contiene gli

assi relativi alle sue antiche r variabili di derivazione. Così delle z_i si deve assegnare il valore nell'origine: delle antiche derivate prime parametriche, sul rispettivo asse parametrico; delle derivate seconde parametriche nel rispettivo piano parametrico,.... delle derivate parametriche corrispondenti ai gruppi di variabili relativi agli spazi coordinati parametrici di massima dimensione, (relativi a ciascuna z_i), [ossia: delle derivate parametriche tali che ogni loro derivata, (presa rispetto a variabili diverse dalle sue variabili di derivazione), è principale], nel corrispondente spazio parametrico di massima dimensione.

Ma *questo equivale perfettamente a dare le z sui rispettivi spazi coordinati parametrici di massima dimensione;* infatti coi dati iniziali ora indicati: mediante integrazione successiva di sistemi del tipo iperbolico (3) (n. 58), di ordini $1, 2, \ldots, r, \ldots$, (ottenuti semplicemente eguagliando ciascuna derivata parametrica alla corrispondente funzione iniziale, arbitrariamente assegnata), possiamo determinare, in uno e in un solo modo, tutte le z successivamente sui rispettivi assi, piani,... S_r... parametrici,... e infine su tutti i rispettivi spazi parametrici di massima dimensione. È ovvio poi come dai dati iniziali primitivi, relativi al sistema (M), si possano ottenere quelli occorrenti per l'integrazione di (N).

Queste considerazioni dànno dunque una molto semplice verifica, (che sostanzialmente, anzi, è una nuova dimostrazione), dei risultati generali ottenuti (nel § 15) pei sistemi (III), e dànno ragione della notevole particolarità presentata da tali sistemi, di ammettere un teorema di esistenza e unicità degli integrali anche *fuori del caso analitico*: particolarità dovuta appunto al fatto, che tali sistemi sono equivalenti a sistemi di Darboux.

Notiamo, infine, che nell'indicato processo di riduzione di un sistema (M) del tipo (III) al corrispondente sistema (N), si vede bene come entrino in giuoco, (e anzi figurino come presupposti essenziali), le ipotesi fatte pei sistemi (III): che non vi figurino, nei primi membri, che derivate prese rispetto a variabili distinte, e che nei secondi membri di ciascuna equazione figurino soltanto derivate, d'ordine minore di quello della derivata che è al primo membro, prese esclusivamente rispetto a variabili (tra loro distinte) scelte tra le sue variabili di derivazione.

75. — Diamo un esempio assai semplice della riduzione di un sistema (III) al corrispondente sistema (N) di Darboux, nel modo sopra indicato: esempio sul quale riuscirà assai agevole e chiara la verifica di ciò che abbiamo detto in generale.

Sia dato il sistema, del tipo (III),

$$
(21)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=f_1(x,y,z,r,t,u)\\
&\frac{\partial u}{\partial y}=f_2(x,y,z,r,t,u,v)\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial t}=f_3\left(x,y,z,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial r},\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\
&\frac{\partial v}{\partial x}=\varphi_1(x,y,z,r,t,u,v)\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}=\varphi_2\left(x,y,z,r,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
&\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial r\,\partial t}=\varphi_3\left(x,y,z,r,t,u,v,\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial r},\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t},\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial t}\right)
\end{aligned}\right.
$$

Le derivate cardinali delle due funzioni incognite sono le seguenti:

$$
(22)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial r\,\partial t},\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial r\,\partial t},\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial z},\frac{\partial^4 v}{\partial y\,\partial z\,\partial r\partial t},\frac{\partial^4 v}{\partial x\partial y\partial r\partial t}.
$$

Le condizioni di compatibilità, che supporremo identicamente soddisfatte, (il che potrà naturalmente portare che le funzioni dei secondi membri del sistema non possano in effetto dipendere da *tutti* gli argomenti indicati), sono

$$
(23)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial r\,\partial t}=\frac{\partial f_3}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial r\,\partial t}=\frac{\partial f_3}{\partial y},\\
&\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial \varphi_2}{\partial x},\quad \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial y\partial r\,\partial t}=\frac{\partial \varphi_3}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r\,\partial t}=\frac{\partial \varphi_3}{\partial z},
\end{aligned}\right.
$$

(ove intendiamo naturalmente che dopo le derivazioni a tutte le derivate principali siano state sostituite le loro espressioni ultime).

Introduciamo come nuove funzioni incognite tutte le derivate parametriche (prese rispetto a variabili distinte), ponendo

$$
(24)\quad\left\{\begin{aligned}
&u'_z=\frac{\partial u}{\partial z},\,u'_r=\frac{\partial u}{\partial r},\,u'_t=\frac{\partial u}{\partial t};\\
&u'_{zr}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial r},\,u''_{zt}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial t};\\
&v'_y=\frac{\partial v}{\partial y},\,v'_z=\frac{\partial v}{\partial z},\,v'_r=\frac{\partial v}{\partial r},\,v'_t=\frac{\partial v}{\partial t};\\
&v''_{yr}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial r},\,v''_{yt}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t},\,v''_{zr}=\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial r},\,v''_{zt}=\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial t},\,v''_{rt}=\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial t};\\
&v'''_{zrt}=\frac{\partial^3 v}{\partial z\,\partial r\,\partial t}.
\end{aligned}\right.
$$

Il sistema (N) di Darboux corrispondente al sistema (21) dato sarà:

$$
\left\{
\begin{array}{l|l|l|l|l}
\dfrac{\partial u}{\partial x}= f_1 & \dfrac{\partial u}{\partial y}= f_2 & \dfrac{\partial u}{\partial z}= u'_z & \dfrac{\partial u}{\partial r}= u'_r & \dfrac{\partial u}{\partial t}= u'_t \\
\dfrac{\partial u'_z}{\partial x}=\dfrac{\partial f_1}{\partial z} & \dfrac{\partial u'_z}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2}{\partial z} & - & \dfrac{\partial u'_z}{\partial r}= u''_{zr} & \dfrac{\partial u'_z}{\partial t}= u''_{zt} \\
\dfrac{\partial u'_r}{\partial x}=\dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{\partial u'_r}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{\partial u'_r}{\partial z}= u''_{zr} & - & \dfrac{\partial u'_r}{\partial t}= f_3 \\
\dfrac{\partial u'_t}{\partial x}=\dfrac{\partial f_1}{\partial t} & \dfrac{\partial u'_t}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2}{\partial t} & \dfrac{\partial u'_t}{\partial z}= u''_{zt} & \dfrac{\partial u'_t}{\partial u_r}= f_3 & - \\
\dfrac{\partial u''_{zr}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z\,\partial r} & \dfrac{\partial u''_{zr}}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z\,\partial r} & - & - & \dfrac{\partial u''_{zr}}{\partial t}=\dfrac{\partial f_3}{\partial z} \\
\dfrac{\partial u''_{zt}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z\,\partial t} & \dfrac{\partial u''_{zt}}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial z\,\partial t} & - & \dfrac{\partial u''_{zt}}{\partial r}=\dfrac{\partial f_3}{\partial z} & - \\
\dfrac{\partial v}{\partial x}= \varphi_1 & \dfrac{\partial v}{\partial y}= v'_y & \dfrac{\partial v}{\partial z}= v'_z & \dfrac{\partial v}{\partial r}= v'_r & \dfrac{\partial v}{\partial t}= v'_t \\
\dfrac{\partial v'_y}{\partial x}=\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} & - & \dfrac{\partial v'_y}{\partial z}= \varphi_2 & \dfrac{\partial v'_y}{\partial r}= v''_{yr} & \dfrac{\partial v'_y}{\partial t}= v''_{yt} \\
\dfrac{\partial v'_z}{\partial x}=\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \dfrac{\partial v'_z}{\partial y}= \varphi_2 & - & \dfrac{\partial v'_z}{\partial r}= v''_{zr} & \dfrac{\partial v'_z}{\partial t}= v''_{zt} \\
\dfrac{\partial v'_r}{\partial x}=\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial r} & \dfrac{\partial v'_r}{\partial y}= v''_{yr} & \dfrac{\partial v'_r}{\partial z}= v''_{zr} & - & \dfrac{\partial v'_r}{\partial t}= v''_{rt} \\
\dfrac{\partial v'_t}{\partial x}=\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \dfrac{\partial v'_t}{\partial y}= v''_{yt} & \dfrac{\partial v'_t}{\partial z}= v''_{zt} & \dfrac{\partial v'_t}{\partial r}= v''_{rt} & - \\
\dfrac{\partial v''_{yr}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y\,\partial r} & - & \dfrac{\partial v''_{yr}}{\partial z}=\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial r} & - & \dfrac{\partial v''_{yr}}{\partial t}= \varphi \\
\dfrac{\partial v''_{yt}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y\,\partial t} & - & \dfrac{\partial v''_{yt}}{\partial z}=\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t} & \dfrac{\partial v''_{yt}}{\partial r}= \varphi_3 & - \\
\dfrac{\partial v''_{zr}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z\,\partial r} & \dfrac{\partial v''_{zr}}{\partial y}=\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial r} & - & - & \dfrac{\partial v''_{zr}}{\partial t}= v''' \\
\dfrac{\partial v''_{zt}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z\,\partial t} & \dfrac{\partial v''_{zt}}{\partial y}=\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t} & - & \dfrac{\partial v''_{zt}}{\partial r}= v'''_{zrt} & - \\
\dfrac{\partial v''_{rt}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r\,\partial t} & \dfrac{\partial v''_{rt}}{\partial y}= \varphi_3 & \dfrac{\partial v''_{rt}}{\partial z}= v'''_{zrt} & - & - \\
\dfrac{\partial v'''_{zrt}}{\partial x}=\dfrac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z\,\partial r\,\partial t} & \dfrac{\partial v'''_{zrt}}{\partial y}=\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial z} & - & - & -
\end{array}
\right. \tag{25}
$$

(Nelle derivate delle funzioni f, φ, che figurano nei secondi membri di alcune di queste equazioni, intendiamo al solito sostituita, (dopo la derivazione), a ciascuna derivata principale che vi figuri, la sua espressione ultima, e poi intendiamo poste, in tutti i secondi membri, in luogo delle derivate parametriche che vi figurano, le nuove funzioni incognite, introdotte con le (24)).

Si verifica subito che le condizioni di integrabilità di questo sistema si riducono o ad identità formali, o (salvo le notazioni), alle (23), condizioni di compatibilità pel sistema (21) dato.

Le condizioni iniziali da imporre per questo sistema (21), in conformità del Teorema generale (§ 15), sono le seguenti: si deve assegnare u (in modo compatibile), nei piani zr, zt, e v nell' S_3 zrt e nei piani yr, yt. Le condizioni iniziali pel sistema (25), del tipo (II) di Darboux, sono (§ 7) le seguenti: assegnare, in modo compatibile:

u in 0;
u'_z sull'asse z, u'_r sull'asse r, u'_t sull'asse t;
u''_{zr} nel piano zr, u''_{zt} nel piano zt;
v in 0;
v'_y sull'asse y, v'_z sull'asse z, v'_r sull' asse r, v'_t sull'asse t;
v''_{yr} nel piano yr, v''_{yt} nel piano yt, v''_{zr} nel piano zr,
v''_{zt} nel piano zt, v''_{rt} nel piano rt;
v'''_{zrt} nell' S_3 zrt.

Vediamo bene come *queste condizioni equivalgano perfettamente alle primitive.*

INDICE

PARTE II. — *I sistemi intermediari* (II) *di Darboux. Prima dimostrazione del Teorema generale di esistenza ed unicità.*

PARTE III. — *Nuova dimostrazione del teorema d'esistenza e unicità pei sistemi intermediari di Darboux. Estensione a sistemi più generali.*