MAURO PICONE

SU UN PROBLEMA AL CONTORNO NELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE

TESI DI LAUREA.

INTRODUZIONE

In molti classici problemi della Fisica Matematica si è condotti alla ricerca di integrali di equazioni differenziali lineari ordinarie del 2° ordine, soddisfacenti a determinate condizioni ai limiti.

Nel trattato del *Pockels: Ueber die partielle Differentialgleichunge:* $\Delta u + k^2 u = 0$, è mostrato come nel problema delle corde vibranti e nel problema del raffreddamento d'una sbarra, ci si riduce alla ricerca di integrali dell'equazione differenziale del 2° ordine:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y\,\mathrm{A}(x) = 0\,, \tag{1}$$

soddisfacenti a condizioni ai limiti che son tutte contenute nelle due seguenti:

$$\begin{aligned} a_1 [y]_a + a_2 \left[\frac{dy}{dx}\right]_a &= \alpha \\ b_1 [y]_b + b_2 \left[\frac{dy}{dx}\right]_b &= \beta \end{aligned} \tag{2}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha$ e β essendo quantità assegnate, supposta $\mathrm{A}(x)$ una funzione della x che nel tratto (a, b) è finita, continua e non negativa. Nel presente lavoro noi conduciamo a termine la detta ricerca nei seguenti quattro casi:

$$\left\{\begin{array}{llll} a_1 = 1\,, & b_1 = 1\,, & a_2 = 0\,, & b_2 = 0 \\ a_1 = 0\,, & b_1 = 0\,, & a_2 = 1\,, & b_2 = 1 \\ a_1 = 1\,, & b_1 = 0\,, & a_2 = 0\,, & b_2 = 1 \\ a_1 = 0\,, & b_1 = 1\,, & a_2 = 1\,, & b_2 = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Il primo caso fu già trattato dal *Picard* [1]), il secondo dal *Mason* [2]). I quattro casi che noi esaminiamo vengono, nel presente lavoro, discussi contemporaneamente e, quel che ci sembra notevole, discussi servendosi di una medesima funzione di Green.

Per la nostra trattazione abbiamo preso a modello quella che, nell'anno scolastico 1905-1906, presentò il prof. *Bianchi* in lezione. Egli espose, in quell'anno, le ricerche su menzionate del *Picard* pel problema al contorno nel caso $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, riuscendo a render rigorosi quei risultati che nell'esposizione data dal *Picard* non lo sono completamente.

Noi, come il *Picard,* nei capitoli IV, V e VI, seguendo una geniale idea di *Schwarz* [3]), costruiamo la successione delle cosidette *costanti di situazione* per ciascuno dei casi (3) e dai valori di quelle costanti deduciamo la possibilità o meno dei corrispondenti problemi al contorno e studiamo con molta approssimazione le singole curve integrali, riuscendo, per altra via, al rigore del prof. *Bianchi*.

Nel capitolo II presentiamo uno studio sulla distribuzione degli zeri di un integrale dell'equazione:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\, y = 0\,, \tag{4}$$

e della sua derivata, studio ch'è fondamentale per le nostre ricerche. In questo capitolo otteniamo per gli zeri della derivata di un integrale della (1) tutti i teoremi che *Sturm* dimostrò per gli zeri di un integrale della (4).

Nel capitolo VIII otteniamo le inverse delle suddette costanti di situazione come minimi del quoziente di due integrali. Ciò fecero già l'*Hilbert* [4]) e il suo allievo *Mason* (loc. cit.), ma in campi funzionali diversi e meno ampî di quelli da noi considerati.

Nel capitolo IX studiamo delle trascendenti intiere aventi per zeri le inverse delle costanti di situazione e mostriamo un elegante

[1]) Picard. Traité d'Analyse. Tome III, Chap. VI.
[2]) Mason. Math. Ann. Bd. 58.
[3]) Schwarz. Ges. Math. Abh., Vol. I, pag. 251 e seg.
[4]) Hilbert. Zweite Mittheilung, Göttinger Nachrichten, 1904.

calcolo per l'ottenimento delle costanti di situazione relative ai due ultimi dei casi (3). Le idee ivi sviluppate non sono nuove e il calcolo di cui parliamo fu ideato dal *Picard,* pel primo dei casi (3) (v. loc. cit.); però, nella nostra trattazione, valendoci di alcuni risultati contenuti in una recente memoria del *Dini* [1]), raggiungiamo un perfetto rigore. Nella detta memoria è fatto uno studio molto generale sugli integrali di un'equazione differenziale lineare ordinaria di ordine qualunque, soddisfacenti a condizioni ai limiti, ed è nostro proposito di generalizzare, in un futuro lavoro, i risultati che qui otteniamo, valendoci dei risultati ottenuti dal *Dini.*

Nel capitolo X mostriamo come la teoria delle costanti di situazione possa spesso servire per la trattazione dei problemi al contorno nei casi (3), per l'equazione (1), anche quando la $A(x)$ non si serbi sempre non negativa nel tratto (a, b).

Nel capitolo XI, infine, trattiamo il problema della determinazione degli integrali per l'equazione (1) e per l'equazione:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y\,A(x) = f(x)\,,$$

soddisfacenti alle condizioni ai limiti (2) nei due ultimi casi (3), con la sola ipotesi che la $A(x)$ e la $f(x)$ siano finite e continue nel tratto (a, b). Ci valiamo perciò della memoria del *Fredholm* [2]) sulle equazioni integrali lineari. La trattazione nel detto capitolo esposta, per quanto concerne i teoremi d'esistenza è più rapida e più generale di quella esposta nei capitoli precedenti, ma questa ha su quella l'indiscutibile vantaggio di far conoscere più addentro l'intima natura della questione e di mostrare un gran numero di proprietà degli integrali.

[1]) Dini. Annali di Mat. Tomo XII, Serie III, pag. 179 e seg.
[2]) Fredholm. Acta Math., Vol. 27.

I.

Preliminari

1. — I coefficienti $p(x)$ e $q(x)$ nell'equazione:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0 \tag{1}$$

soddisfino alle condizioni di integrabilità dell'equazione (1) nel tratto (t_1, t_2). Ci proponiamo di esaminare la questione se agli integrali della (1) si possono assegnare a *priori*, nei punti a e b di (t_1, t_2), le condizioni:

$$[y]_a = \alpha\,, \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = \beta\,, \tag{2}$$

α e β essendo quantità assegnate affatto arbitrariamente, se, cioè, esistono soluzioni della (1) soddisfacenti alla (2) e quante ne esistono.

Siano $y_1(x)$, $y_2(x)$ due soluzioni particolari e indipendenti dell'equazione (1), ogni altra soluzione della (1) avrà la forma:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \tag{3}$$

c_1 e c_2 essendo quantità costanti. Le condizioni (2) si traducono nelle equazioni nelle c_1 e c_2:

$$c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = \alpha$$
$$c_1 y'_1(b) + c_2 y'_2(b) = \beta\,.$$

Ne viene, dunque, che *condizione necessaria e sufficiente perchè le* (2) *determinino e determinino univocamente una soluzione della* (1) *è che non esista che la soluzione* $y \equiv 0$ *(che non prenderemo in considerazione) che, annullandosi in* a, *ha la derivata nulla in* b.

Nel caso che esista una soluzione della (1), non identicamente nulla, nulla in a e con la derivata nulla in b, le (2) non possono prescriversi ad un integrale della (1) che per i particolari valori di α e β soddisfacenti alla relazione:

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & \alpha \\ y'_1(b) & \beta \end{vmatrix} = 0 , \begin{vmatrix} y_2(a) & \alpha \\ y'_2(b) & \beta \end{vmatrix} = 0 .$$

Questa relazione verificata, sono infinite le soluzioni della (1) soddisfacenti alle (2), esse sono rappresentate dalla (3), dove le c_1 e c_2 sono legate dall'equazione:

$$c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = \alpha .$$

Dopo ciò è ben chiaro che la risoluzione della questione proposta è intimamente collegata con lo studio della distribuzione degli zeri di una soluzione della (1) e della sua derivata. E dedicheremo alcuni dei paragrafi seguenti a tale studio.

2. — Due soluzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ della (1) per le quali si verifichi una delle seguenti coppie di eguaglianze, o:

$$y_1(a) = 0 \quad , \quad y_2(a) = 0$$

o:

$$y'_1(a) = 0 \quad , \quad y'_2(a) = 0 ,$$

a essendo un punto di (t_1, t_2), avendo il loro Wronsckiano nullo in a, saranno dipendenti, si avrà cioè:

$$y_2 = ky_1 \quad , \quad y'_2 = ky'_1 \quad , \quad y''_2 = ky''_1 ,$$

con k costante. Pertanto le due soluzioni y_1, y_2 avranno, come le loro derivate, gli stessi punti di zero.

Sono dunque giustificate le seguenti denominazioni che noi ci permettiamo di introdurre per brevità di linguaggio:

Il punto b si dirà *coniugato* di a, a destra (a sinistra), rispetto all'equazione (1), se esso b è uno zero a destra di a (a sinistra di a) delle soluzioni della (1) che si annullano in a.

Il punto b si dirà *pseudoconiugato* di a, a destra (a sinistra), rispetto all'equazione (1), se esso b è uno zero a destra di a (a sinistra di a) della derivata delle soluzioni della (1) che si annullano in a.

Il punto b si dirà *emiconiugato* di a, a destra (a sinistra), rispetto all'equazione (1), se esso b è uno zero a destra di a (a sinistra di a) delle soluzioni della (1) che hanno la derivata nulla in a.

Il punto b si dirà *deconiugato* di a, a destra (a sinistra), rispetto all'equazione (1), se esso b è uno zero a destra di a (a sinistra di a) della derivata delle soluzioni della (1) che hanno la derivata nulla in a.

Se b è coniugato di a, a è coniugato di b. Se b è deconiugato di a, a è deconiugato di b. Se b è pseudoconiugato di a, a è emiconiugato di b.

In tratti finiti di (t_1, t_2) non può cadere che un numero finito di zeri per ogni soluzione della (1). Difatti, ove in un tal tratto cadesse un numero infinito di zeri per una soluzione, in un punto limite dell'insieme da essi costituito, si annullerebbero la soluzione e la sua derivata, e la soluzione sarebbe identicamente nulla.

Nell'intorno di un punto a di zero di una soluzione della (1) non possono esistere infiniti punti di zero per la derivata. Difatti, nell'ipotesi contraria, sarebbe nulla in a anche la derivata della soluzione e quindi la soluzione identicamente nulla.

Si potrà dunque parlare di punti coniugati consecutivi, e, rispettivamente, del punto coniugato, emiconiugato, pseudoconiugato di un dato ad esso più prossimo.

Non sempre sarà lecito parlare del punto deconiugato di un dato ad esso più prossimo; lo si potrà certo fare quando il punto, che si considera, non è di zero per $q(x)$. Difatti è facile vedere che nei tratti finiti di (t_1, t_2) in cui $q(x)$, gli estremi del tratto inclusi, si mantiene diverso da zero, è finito il numero dei punti di zero della derivata di ogni soluzione e ciascun di quei punti è di mass. o di min. per la soluzione: supposta $q(x)$ positiva, di mass. o di min. secondochè y è positiva o negativa, supposta $q(x)$ negativa, di mass. o di min. secondochè y è negativa o positiva. Supposto, invero, che, nel tratto finito (a, b) di (t_1, t_2), $q(x)$ non si annulli mai (gli estremi del tratto inclusi), ove la derivata y' di un integrale y della (1) avesse in (a, b) infiniti punti di zero, in un loro punto limite c si annullerebbero y' e y'' e quindi, per la (1), poichè y non può annullarsi dove s'annulla y', sarà in c, $q(x)=0$, il che, per le ipotesi fatte, è assurdo. In un punto c di (a, b) di zero per y', si ha:

$$y'' = -qy,$$

e quindi, se $q(x)$ si mantiene positiva in (a, b), si avrà in c un mass. o un min. secondochè è ivi y positiva o negativa, se $q(x)$ si mantiene negativa in (a, b) si avrà in c un mass. o un min. secondochè è ivi y negativa o positiva.

Supponiamo che in (a, b) sia $q(x) > 0$, allora, per quanto precede, tenendo presente che y cambia segno nell'annullarsi, i punti di zero di y' separano quelli di y, cioè: fra due punti di zero di y v'è uno ed un sol punto di zero di y' e fra due punti di zero di y' v'è uno ed un sol punto di zero di y.

Supponiamo che in (a, b) sia $q(x) < 0$, allora in (a, b) non possono coesistere un punto e un suo pseudoconiugato, un punto e un suo coniugato, un punto e un suo deconiugato. Difatti la soluzione y di (1) che è, in un punto c di (a, b), nulla e crescente, non potrà avere derivata nulla in nessun punto di (a, b), perchè, ove avvenisse il contrario, supposto d il primo punto di zero di y' a destra (a sinistra) di c, ivi non potrebbe verificarsi un min. (un mass.) per y, essendo, a sinistra (a destra) di d, y crescente. La soluzione y di (1) di derivata nulla in c ed ivi positiva, non potendosi dunque annullare in (a, b), resterà positiva in (a, b), ma allora la y' non potrà annullarsi in nessun altro punto di (a, b) diverso da c, poichè, nel caso contrario, se d è il punto di zero di y' più prossimo a c, ivi non potrà verificarsi un min. per y, essendo c min. per y.

Segue di qua che anche se a è un punto di zero di $q(x)$, purchè esso non sia un punto limite dei pnnti di zero di $q(x)$, si potrà parlare del punto deconiugato di un dato a ad esso più prossimo. Difatti si considerino, per fissare le idee, i punti deconiugati di a, a destra. Sia b un punto, a destra di a, tale che in (a, b), $q(x)$ mantenga segno invariato, annullandosi solo in a. Sia, in (a, b), $q(x) < 0$, allora, per quanto precede, non potrà esistere in (a, b) più di un punto deconiugato di a. Sia, in (a, b), $q(x) > 0$, diciamo a' un punto interno ad (a, b), i punti deconiugati di a, interni ad (a', b), sono, per quanto precede, separati dai punti emiconiugati di a, quindi, al tendere di a' ad a, il numero dei punti deconiugati di a interni ad (a', b) non potrà crescere indefinitamente.

3. — Con un'analisi simile a quella fatta al n. 1, si trova che, condizione necessaria e sufficiente perchè un integrale della (1) venga determinato e determinato univocamente prescrivendogli una delle coppie di condizioni ai limiti:

$$(3) \qquad \begin{array}{ll} y_a = \alpha & y_b = \beta \\ \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_a = \alpha & y_b = \beta \\ \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_a = \alpha & \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_b = \beta, \end{array}$$

è che, rispettivamente, b non sia coniugato, emiconiugato, deconiugato di a. Per cui, in forza d'un teorema dimostrato nel n. 2, *se nel tratto* (a, b), *gli estremi inclusi*, $q(x)$ *si mantiene negativa, le condizioni ai limiti* (2) *o una coppia delle* (3) *determinano e determinano univocamente un integrale della* (1).

II.

Sui punti coniugati, deconiugati, pseudoconiugati, emiconiugati. Teoremi di confronto.

4. — Rammentiamo i ben noti teoremi di *Sturm:*

In un tratto di (t_1, t_2), *in cui una soluzione della:*

$$(1) \qquad y'' + py' + qy = 0$$

mantiene segno invariato non può cadere più di uno zero di ogni altra soluzione.

Fra due consecutivi punti coniugati in (t_1, t_2) *esiste uno ed un sol punto di zero per ogni altra soluzione indipendente da quelle che hanno gli zeri in quei punti.* In altre parole: *Le coppie di punti coniugati consecutivi si separano.*

Fondandoci su questi teoremi, riusciamo all'altro:

Il primo pseudoconiugato di a, a destra, sia b, il primo pseudoconiugato d di c, a destra, se il punto c è nell'interno di (a, b) o non esiste o cadrà a destra di b.

Difatti, il punto d non cadrà certo in b, poichè, non potendo a e c essere coniugati, una soluzione u_1 che ha come punto di zero a, sarà indipendente da una u_2 che ha come punto di zero c. Nè d potrà cadere fra c e b. Per dimostrare ciò, supponiamo che d potesse cadere fra c e b, perverremo ad un assurdo. Supposta la u_1 crescente in a, essa sarà sempre crescente fra a e b. La u_2 ha derivata nulla in d, supponiamo che u_2 prenda in d il valore che vi prende u_1. Consideriamo la soluzione $u_1 - u_2$, essa è nulla in d ed è ivi crescente, per cui, nell'intorno sinistro di d, $u_1 - u_2$ sarà negativa, ma $u_1 - u_2$ ha in c il valore di u_1 ed è quindi positiva in c, esisterà, pertanto, un punto t fra c e d in cui $u_1 - u_2$ è nulla. Ma, pel citato teorema di *Sturm*, è assurdo che il tratto (a, b) contenga la coppia t, d di punti coniugati.

Possiamo evidentemente di più affermare:

In un tratto in cui una soluzione di (1), *mantenendovisi positiva, non è mai decrescente (non è mai crescente) non possono coesistere un punto e un suo pseudoconiugato destro (un punto e un suo emiconiugato destro).*

In un tratto in cui una soluzione di (1), *mantenendovisi negativa, non è mai crescente (non è mai decrescente) non possono coesistere un punto e un suo pseudoconiugato destro (un punto e un suo emiconiugato destro).*

Segue di qua:

Fra due punti b e c, pseudoconiugati di uno stesso a, tali che a sia fra b e c, cade almeno un punto di mass. o di min. di ogni soluzione indipendente da quelle che si annullano in a. Difatti, supposta l'esistenza di una soluzione non mai decrescente o non mai crescente in (b, c) ove essa non s'annulli in (b, c) l'assurdo deriva immediatamente dal teorema che precede; che se essa s'annulla, ciò, per la fatta ipotesi, non potrà avvenire che in un sol punto di (b, c), avvenga, per es., in un punto d di (b, a), allora è assurda, pel teorema precedente, l'esistenza dei punti a e c nel tratto (d, c).

Se $q(x)$ si mantiene, nel tratto (t_1, t_2), maggiore di zero, allora, (v. n. 2) fra due punti deconiugati consecutivi, v'è sempre uno ed un sol zero delle soluzioni che hanno derivata nulla in quei punti, ne viene, pel teorema che immediatamente precede, che le coppie di punti deconiugati consecutivi si separano. Ciò del resto, dopo il teorema di *Sturm*, è evidente a *priori*, poichè i punti deconiugati rispetto alla (1), sono coniugati rispetto all'equazione a cui soddisfa la derivata della soluzione generale dell'equazione (1). E nel nostro caso, essendo, in (t_1, t_2), $q(x) > 0$, la derivata soddisfa ad un'equazione del 2° ordine con coefficienti finiti e continui in (t_1, t_2).

5. — Supponiamo $p(x)$ derivabile in (t_1, t_2), è in quest'ipotesi che resteremo in seguito. Colla trasformazione:

$$y = z \, . \, e^{\frac{1}{2} \int p \, dx}$$

della funzione incognita y nella z, si trova per la z l'equazione

$$z'' + z \, \mathrm{A}(x) = 0 \, ,$$

dove $\mathrm{A}(x)$ è il così detto *invariante* dell'equazione (1), ed è:

$$\mathrm{A}(x) = - q(x) - \frac{1}{4} p^2(x) + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \, .$$

Noi intenderemo sempre fatta questa trasformazione e studieremo le equazioni differenziali lineari omogenee del 2° ordine nella loro *forma normale:*

$$y'' + y \, \mathrm{A}(x) = 0 \, , \tag{2}$$

$\mathrm{A}(x)$ essendo una funzione della x finita e continua in (t_1, t_2).

Per non incorrere in lungaggini e per non trattare casi senza vero interesse, noi, inoltre, *escluderemo in tutte le ricerche dell'intiero presente lavoro, che la funzione $\mathrm{A}(x)$ possa serbarsi nulla in tutto un tratto.* È facilissimo, d'altronde, modificare, quando si voglia, i risultati che otterremo, nell'ipotesi che si verifichi il fatto che noi vogliamo escludere.

Sia y una soluzione della (2). Sono immediate dall'equazione (2) alcune proprietà della curva C rappresentata dall'equazione:

$$y = y(x),$$

proprietà che ci saranno molto utili nel seguito. Sia la y diversa da zero nel punto a di (t_1, t_2), allora la curva C presenterà all'asse delle x, nel punto a, una convessità o una concavità secondochè A è negativa e positiva in quel punto. La $A(x)$ si annulli in a ed a non sia un punto limite dei punti di zero di $A(x)$, allora la C presenterà un flesso in a quando A nell'annullarsi cambia segno, supposto qui a nell'interno di (t_1, t_2), altrimenti la C presenterà in a una convessità o una concavità secondochè A annullandosi si mantiene negativa o positiva.

Sia sempre in a, $y \neq 0$, sia a un punto di zero di $A(x)$ che possa anche essere un punto limite dei punti di zero di $A(x)$, sieno c e b due punti, l'uno a sinistra l'altro a destra di a, tali che in (c, b) la y non cambi segno e siano infine c' e b' due punti mobili, l'uno interno a (c, a), l'altro a (a, b). Le relazioni.

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_a - \left[\frac{dy}{dx}\right]_{c'} = \int_{c'}^{a} \frac{d^2y}{dx^2}\, dx = -\int_{c'}^{a} \mathrm{A} y\, dx$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{b'} - \left[\frac{dy}{dx}\right]_{a} = \int_{a}^{b'} \frac{d^2y}{dx^2}\, dx = -\int_{a}^{b'} \mathrm{A} y\, dx$$

dicono che la C presenta in a una convessità o una concavità secondochè in un intorno (c', b') di a si ha $A(x) \leq 0$ o $A(x) \geq 0$, dicono che, supposto a nell'interno di (t_1, t_2), la C presenta in a un flesso se in un intorno sinistro (c', a) di a è $A(x) \geq 0$ (≤ 0) mentre in un intorno destro (a, b') è $A(x) \leq 0$ (≥ 0).

Ne deriva:

1.° Se in un tratto (a, b) di (t_1, t_2) la $A(x)$ si mantiene non negativa, pur potendosi infinite volte annullare, la curva C presenterà in ogni punto di (a, b) la sua concavità all'asse delle x. Quindi, ogni punto nell'interno di (a, b) di zero per la derivata di una soluzione, è di mass. o di min. per la soluzione: di mass. o di min. secondochè la soluzione è in quel punto positiva o negativa. Per cui, fra due punti di (a, b), zeri consecutivi di una soluzione, vi è un sol punto di zero per la derivata e la soluzione non potrà dopo un mass. assumere un min., nè dopo un min. un mass. se prima non s'annulla [1]).

Si potrà dunque parlare, nell'ipotesi in cui siamo, di coppia di punti deconiugati cousecutivi e, in forza dell'ultimo teorema del n.° precedente, si avrà:

Le coppie di punti deconiugati consecutivi si separano.

2.° Se $A(x)$, in un tratto (a, b) di (t_1, t_2), si mantiene non positiva, pur potendosi infinite volte annullare, la curva C presenterà, in ogni punto di (a, b), la sua convessità all'asse delle x. Quindi, ogni punto nell'interno di (a, b) di zero per la derivata di una soluzione è di mass. o di min. per la soluzione: di mass. o di min. secondochè la soluzione è in quel punto negativa o positiva. Per cui, in forza di un ragionamento già fatto al n. 2, non possono coesistere in (a, b) due punti coniugati, nè due punti deconiugati, nè un punto e un suo pseudoconiugato.

Di questi ultimi risultati si può anche dare la dimostrazione seguente, indipendente dalle considerazioni che precedono. Posto $A(x) = -B(x)$, $B(x)$ sarà positiva o nulla in (a, b). Dico che se x_1 e x_2 sono punti di (a, b) non potranno x_1 e x_2 essere coniugati, nè deconiugati, nè uno di essi pseudoconiugato dell'altro (quest'ultimo fatto ha di conseguenza il primo). Difatti, in ognuna delle tre ipotesi: la y nulla in x_1 e x_2, la y' nulla in x_1 e x_2, la y nulla in

---

[1]) Che in un tratto di (a, b) in cui y non cambia segno, non possono cadere due punti di zero per y', si può vedere anche con la considerazione che se x_1 e x_2 fossero, in un tal tratto, zeri di y', si avrebbe:

$$\int_{x_1}^{x_2} y''\, dx = 0,$$

e quindi l'assurdo:

$$-\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{A} y\, dx = 0.$$

x_1 e la y' nulla in x_2, si avrebbe:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d(yy')}{dx}\,dx = 0$$

e quindi l'assurdo:

$$\int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{B}y^2 + y'^2)\,dx = 0\,.$$

6. — **Teoremi di confronto.** *Esista in* (t_1, t_2) *il primo emiconiugato* b *di* a, *a destra (a sinistra), rispetto all'equazione* (2), *supposto:*

$$\mathrm{B}(x) \geq \mathrm{A}(x)$$

in tutto (a, b), *senza che valga sempre il segno eguale, esisterà e cadrà fra* a *e* b, *l'emiconiugato di* a, *a destra (a sinistra), rispetto all'equazione*

$$y'' + y\mathrm{B}(x) = 0\,. \tag{3}$$

Difatti siano u e v soluzioni, rispettivamente, dell'equazione (2) e dell'equazione (3), entrambe con derivata nulla in a. Poniamo

$$f(x) = vu' - uv'\,, \tag{4}$$

si avrà:

$$f'(x) = vu'' - uv'' = (\mathrm{B} - \mathrm{A})\,uv\,. \tag{5}$$

Supponiamo che b sia a destra di a e che in a, u e v siano entrambe positive, u si manterrà tale fino a b. Se v non s'annullasse mai prima di b, in quei tratti di (a, b) in cui è $\mathrm{B} > \mathrm{A}$, la $f'(x)$ sarebbe positiva ed in quei tratti la $f(x)$ crescerebbe. Ne verrebbe per la $f(x)$ un valore positivo in b, sarebbe cioè in b: $u'v > 0$. Per cui se v non s'annulla prima di b, ivi non è nulla. Ora sè v non s'annulla prima di b, essendo in a positiva, sarà positiva in b. Perciò da $u'v > 0$, seguirebbe $u' > 0$. Questo è assurdo poichè u nell'annullarsi deve decrescere, essendo u positiva a sinistra di b.

Esista in (t_1, t_2) *il primo pseudoconiugato* b *di* a, *a destra (a sinistra), rispetto alla* (2); *esisterà, fra* a *e* b, *il primo pseudoconiugato di* a, *a destra (a sinistra), rispetto alla* (3).

Difatti, sia b a destra di a. Siano u e v due soluzioni, rispettivamente, di (2) e di (3), nulle in a ed ivi crescenti. Ove il primo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto alla (3) cadesse in b oltre b, v sarebbe certo positiva in (a, b). Quindi la $f(x)$ definita da (4) sarebbe, per la (5), positiva in b, e quindi in b: $v' < 0$, il che è assurdo poichè in b si è supposto $v' \geq 0$.

A questi primi teoremi di confronto, valevoli nella sola ipotesi che $\mathrm{A}(x)$ e $\mathrm{B}(x)$ siano finite e continue in (t_1, t_2), è da aggiungere quello di *Sturm* valevole nella stessa ipotesi:

Esista in (t_1, t_2) *l'* n^{mo} *coniugato* b *di* a, *a destra (a sinistra), rispetto alla* (2); *esisterà, fra* a *e* b, *l'* n^{mo} *coniugato di* a, *a destra (a sinistra), rispetto alla* (3).

Facciamo l'ipotesi che nel tratto (a, b) di (t_1, t_2) le soluzioni di (2) e di (3) si possano annullare e che i punti emiconiugati di un dato separino i suoi punti deconiugati, per modo quindi, che si possa parlare di coppie di punti deconiugati consecutivi e si possa asserire che le coppie di punti deconiugati consecutivi si separino. La fatta ipotesi comprende quella per cui $\mathrm{A}(x)$ e $\mathrm{B}(x)$ sono non negativi in tutto (a, b) ed esistono in (a, b) punti di zero per ogni soluzione di (2) e di (3).

Varranno allora i teoremi:

Esista in (a, b) *l'* n^{mo} *pseudoconiugato* d *di* c, *a destra (a sinistra), rispetto alla* (2); *esisterà, fra* c *e* d, *l'* n^{mo} *pseudoconiugato di* c, *a destra (a sinistra), rispetto alla* (2).

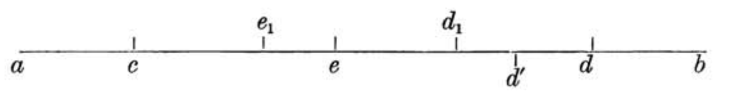
Esista in (a, b) *l'* n^{mo} *emiconiugato* d *di* c, *a destra (a sinistra), rispetto alla* (2); *esisterà, fra* c *e* d, *l'* n^{mo} *emiconiugato di* c, *a destra (a sinistra), rispetto alla* (3).

Esista in (a, b) *l'* n^{mo} *deconiugato* d *di* c, *a destra (a sinistra), rispetto alla* (2); *esisterà, fra* c *e* d, *l'* n^{mo} *deconiugato di* c, *a destra (a sinistra), rispetto alla* (3).

Questi teoremi si dimostrano tutti nel medesimo modo, applicando i teoremi di confronto già stabiliti e i teoremi dei n. 4 e 5. In questo stesso modo si potrebbe ridimostrare il teorema di confronto di *Sturm,* nel caso particolare che consideriamo. Dimostriamo, per es., il 3° teorema, e dimostriamolo nell'ulteriore ipotesi che d sia il primo deconiugato di c, a destra, rispetto alla (2). Si avrà la dimostrazione del teorema nel caso generale ripetendo più volte il ragionamento che ora faremo.

Se d è il primo deconiugato di c, a destra, rispetto alla (2), detto e il primo emiconiugato di c, a destra, rispetto alla (2), d sarà il primo pseudoconiugato di e, a destra, rispetto alla (2).

Diciamo e_1 il primo



emiconiugato di c, a destra, rispetto alla (3). Pel teorema dimostrato in principio di questo numero, e_1 cadrà fra c ed e. Il primo pseudoconiugato d' di e_1, a destra rispetto alla (2), dovrà esistere fra e_1 e d, poichè, altrimenti, esisterebbe in (e_1, d) una soluzione di (2) sempre crescente e sarebbe assurda, per un teorema del n. 4, la coesistenza di e e di d nel tratto (e_1, d). Pel secondo teorema dimostrato in questo numero, esisterà, fra e_1 e d', il primo pseudoconiugato d_1 di e_1, a destra, rispetto alla (3). Ora d_1 è il primo deconiugato di c, a destra, rispetto alla (3), e il teorema è dimostrato.

7\. — I teoremi di confronto ci permettono di dare un limite superiore dell'ampiezza dei tratti di (t_1, t_2) nei quali si può escludere la coesistenza di un punto e di un suo pseudoconiugato, di un punto e di un suo coniugato, rispetto alla (2).

Supponiamo di non essere nel caso $\mathrm{A}(x) \leq 0$, nel quale (n. 5) non possono esistere in tutto (t_1, t_2) un punto e un suo pseudoconiugato e diciamo $\mathrm{M}, \mathrm{M} > 0$, il massimo di $\mathrm{A}(x)$ in (t_1, t_2). Dal confronto delle due equazioni:

$$(4) \qquad \begin{cases} y'' + y\mathrm{A}(x) = 0 \\ y'' + y\mathrm{M} \quad\;\; = 0 \end{cases},$$

per le quali è $\mathrm{A}(x) \leq \mathrm{M}$, ricavasi immediatamente:

In un tratto di (t_1, t_2), di ampiezza non superiore a

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\mathrm{M}}},$$

non possono coesistere un punto e un suo pseudoconiugato.

In un tratto di (t_1, t_2), di ampiezza non superiore a

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{M}}},$$

non possono coesistere un punto e un suo coniugato.

Nell'ipotesi fatta al n.° precedente per stabilire gli ultimi teoremi di confronto e, in particolare, nell'ipotesi che in (t_1, t_2) si verifichi $\mathrm{A}(x) \geq 0$, dal confronto delle due equazioni (4), noi troviamo che in un tratto di (t_1, t_2) di ampiezza non superiore a

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{M}}},$$

non possono coesistere un punto e un suo deconiugato.

Noi già sappiamo quale significato abbiano questi teoremi per la determinazione degli integrali della (2) soddisfacenti a condizioni ai limiti come le (2) del n. 1 o come quelle del n. 3.

III.

La funzione di Green.

8\. — Sia proposto di costruire le soluzioni dell'equazione del 2° ordine:

$$(1) \qquad y'' + \varphi(x) = 0,$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione finita e continua in (a, b). Vogliamo dimostrare che esiste una ed un'unica soluzione della (1) che soddisfi alle condizioni:

$$(2) \qquad [y]_a = \alpha \quad , \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = \beta .$$

E cominciamo col dimostrare la cosa nel caso $\alpha = \beta = 0$. Intanto per la funzione di x, definita dall'eguaglianza:

$$y(x) = \int_a^x \varphi(\xi)(\xi - x)\, d\xi \,,$$

è

$$y''(x) = -\varphi(x)\,,$$

per cui questa y è una soluzione di (1). Ogni altra soluzione di (1) avrà la forma:

$$y = \int_a^x \varphi(\xi)(\xi - x)\, d\xi + c_1 x + c_2\,,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Le condizioni (2), per $\alpha = \beta = 0$, dànno il seguente unico sistema di valori per c_1 e per c_2:

$$c_1 = \int_a^b \varphi(\xi)\, d\xi \quad , \quad c_2 = -a \int_a^b \varphi(\xi)\, d\xi \,.$$

Ne viene per la domandata soluzione la forma:

$$y = \int_a^x \varphi(\xi)(\xi - x)\, d\xi + (x-a)\int_a^b \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_a^x \varphi(\xi)(\xi - a)\, d\xi + \int_x^b \varphi(\xi)(x - a)\, d\xi \,.$$

La funzione della ξ definita, in tutto il tratto (a, b), col darle i valori

$$\xi - a \quad \text{per} \quad \xi \leq x$$

e il valore

$$x - a \quad \text{per} \quad \xi \geq x,$$

dipende dal parametro x; noi la indicheremo con $G(x, \xi)$ e la chiameremo *la funzione di Green relativa al tratto* (a, b) [1]).

---

[1]) A questa stessa funzione pervenne HILBERT, per altra via, nella sua Zweite Mittheilung dei Göttinger-Nachrichten del 1904.

Per ogni valore del parametro x, la $G(x, \xi)$ è una funzione di ξ continua, la derivata $\dfrac{dG}{d\xi}$, è in (a, x) costantemente l'unità, in x subisce un salto eguale ad uno, per divenire costantemente nulla in (x, b).

Colla notazione introdotta, per la soluzione $y(x)$ della (1) soddisfacente alle condizioni (2), per $\alpha = \beta = 0$, si avrà:

(3) $$y(x) = \int_a^b \varphi(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi \,.$$

Se poi si volesse costruire una soluzione della (1) che soddisfi alle condizioni (2) con le α e β affatto arbitrarie, l'unico modo di poterlo fare sarà di aggiungere al secondo membro della (3) la funzione di primo grado:

$$\beta x + \alpha - \beta a \,.$$

Si perviene pertanto al risultato: *L'unica soluzione della* (1) *che soddisfa alle condizioni* (2), *è definita dall'eguaglianza:*

(4) $$y(x) = \int_a^b \varphi(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi + \beta(x - a) + \alpha \,.$$

Se la $\varphi(x)$ si mantiene sempre non negativa (non positiva) in (a, b), senza essere identicamente nulla (nel qual caso la soluzione di (1) che soddisfa alle (2), per $\alpha = \beta = 0$, è identicamente nulla in (a, b)) essendo G, per ogni valore di x, una funzione di ξ costantemente positiva, la formola (3) dice chiaramente che la funzione $y(x)$ soluzione di (1) soddisfacente alle (2) per $\alpha = \beta = 0$, è costantemente positiva (costantemente negativa) in (a, b).

Si osservi che essendo $x' > x$, è:

$$G(x, \xi) = G(x', \xi) \quad \text{per} \quad a \leq \xi \leq x$$

$$G(x, \xi) < G(x', \xi) \quad \text{per} \quad x < \xi \leq b \,.$$

E ne deriva: Se la $\varphi(x)$ si mantiene sempre non negativa (non positiva) in (a, b), la soluzione $y(x)$ di (1), soddisfacente alle (2) per

$\alpha=\beta=0$, è sempre crescente (è sempre decrescente) in (a,b), salvo in b in cui $\frac{dy}{dx}$ è nulla. Per cui in tutti i casi, $\varphi(x)\geq 0$ o ≤ 0 in (a,b), la curva $y=y(x)$ presenta la sua concavità all'asse delle x, in ogni punto di (a,b), v. i ragionamenti del n. 5.

Indichi $\varphi_1(x)$ una funzione della x finita e continua in (a,b) e sia sempre:

$$\varphi_1(x)\leq\varphi(x),$$

senza che valga costantemente il segno eguale. Se y indica una soluzione della (1) soddisfacente alle (2) e y_1 una soluzione della

$$y''+\varphi_1(x)=0,$$

soddisfacente alle (2) colle stesse α e β; nell'interno di (a,b) e in b è sempre:

$$y_1<y,$$

e la differenza $y-y_1$ è sempre crescente in (a,b), salvo in b. Difatti $y-y_1$ è la soluzione di $y''+\varphi(x)-\varphi_1(x)=0$, che soddisfa alle (2) per $\alpha=\beta=0$.

Se si volesse costruire una soluzione di (1) con le condizioni ai limiti:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_a=\alpha,\quad [y]_b=\beta, \tag{5}$$

si dovrebbe anzitutto costruire la soluzione y di (1) con le condizioni ai limiti (5) per $\alpha=\beta=0$; si troverebbe per questa y l'espressione:

$$y(x)=\int_a^b\varphi(\xi)\,\overline{G}(x,\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

dove è:

$$\overline{G}(x,\xi)=b-x \quad \text{per} \quad \xi\leq x$$

$$\overline{G}(x,\xi)=b-\xi \quad \text{per} \quad \xi\geq x.$$

La soluzione (6) è sempre positiva, e decrescente in (a,b) (negativa e crescente in (a,b)) se $\varphi(x)$ è non negativa in (a,b) (non positiva in (a,b)).

La soluzione $y(x)$ che soddisfa alle (5) con le α e β affatto arbitrarie, avrà la forma:

$$y(x)=\int_a^b\varphi(\xi)\,\overline{G}(x,\xi)d\xi+\alpha(x-b)+\beta.$$

Per distinguere le due funzioni $G(x,\xi)$ e $\overline{G}(x,\xi)$ converremo di chiamare, la prima, *la funzione di Green relativa al tratto* (a,b) e la seconda, *la funzione di Green relativa al tratto* (b,a).

IV.

Il metodo delle approssimazioni successive di Picard.

9. — $A(x)$, funzione finita e continua in (a,b), *non sia ivi negativa*, pur potendosi infinite volte annullare; vogliamo dedicarci alla ricerca delle funzioni che nei punti di (a,b) soddisfano all'equazione:

$$y''+yA(x)=0, \tag{1}$$

e alle condizioni ai limiti

$$[y]_a=\alpha,\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_b=\beta. \tag{2}$$

Un metodo per la ricerca indicata è quello delle *approssimazioni successive* [1]) *e vale nell'ipotesi che nel tratto* (a,b) [2]), *esista una*

[1]) Il metodo che qui esponiamo non è che un'estensione del metodo che espone il Picard nel Cap. VI del Vol. III del suo Trattato d'Analisi, per la costruzione degli integrali della (1) soddisfacenti alle condizioni ai limiti

$$[y]_a=\alpha,\quad [y]_b=\beta.$$

[2]) Quando nominiamo il tratto (a,b), senz'altro, intendiamo di indicare tutti i punti del tratto *gli estremi inclusi*.

soluzione della (1) *positiva e sempre crescente in* (a, b). Quest'ipotesi è equivalente all'altra che *nel tratto* (a, b) *non esistano insieme un punto e un suo pseudoconiugato destro,* difatti, quella ha di conseguenza questa, come risulta dal n. 2, e, viceversa, ammesso che nel tratto (a, b) non coesistano un punto e un suo pseudoconiugato destro, le soluzioni di (1) positive in a e di derivata positiva in b (che in questa ipotesi esistono certamente) son sempre crescenti in (a, b), poichè, il fatto contrario, in forza dei teoremi del n. 5, porta all'esistenza in (a, b) di un punto e di un suo pseudoconiugato destro.

Mostriamo dapprima come, nella detta ipotesi, col metodo delle approssimazioni successive, si possa ottenere una soluzione y della (1) sempre positiva e sempre crescente nel tratto (a, b). Supponiamo, perciò, nella (2):

$$\alpha > 0 \quad \text{e} \quad \beta > 0.$$

Indichiamo con y_0 la soluzione dell'equazione:

$$y'' = 0,$$

soddisfacente alle (2). Per essere $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, sarà y_0 sempre positiva e crescente in (a, b). Indichiamo con y_1 la soluzione di:

$$y'' + y_0 \mathrm{A}(x) = 0,$$

soddisfacente alla (2), soluzione di cui al n. 8 abbiamo dimostrata l'esistenza e di cui abbiamo dato l'effettiva costruzione. La forma:

$$y_1(x) = \int_a^b y_0(\xi) \mathrm{A}(\xi) \mathrm{G}(x, \xi)\, d\xi + \beta(x - a) + \alpha,$$

della $y_1(x)$, dice chiaramente ch'essa è positiva e crescente in (a, b). Così la soluzione y_2 di:

$$y'' + y_1 \mathrm{A}(x) = 0,$$

soddisfacente alle (2), esiste ed è in (a, b) positiva e crescente. E così proseguendo indefinitamente, si costruirà una successione di funzioni:

(3) $$y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$$

positive e crescenti in (a, b), soddisfacenti alle (2) e tali che fra due successive esiste la relazione:

$$y''_n + y_{n-1} \mathrm{A}(x) = 0.$$

I valori delle funzioni della successione (3), in uno stesso punto di (a, b), salvo in a, sono costantemente crescenti con n. Infatti, per essere, in (a, b), $y_0 \mathrm{A}(x) \geq 0$, senza che valga sempre il segno eguale, è $y_1 > y_0$ in ogni punto di (a, b), salvo in a e $y_1 - y_0$ crescente in (a, b) salvo in b. E supposto d'avere dimostrato che, in ogni punto di (a, b) salvo in a, è $y_n > y_{n-1}$, ne viene $y_n \mathrm{A}(x) \geq y_{n-1} \mathrm{A}(x)$, e quindi $y_{n+1} > y_n$ in ogni punto di (a, b) salvo in a e $y_{n+1} - y_n$ crescente in (a, b) salvo in b.

Per essere la soluzione y della (1) costantemente positiva in (a, b) è, in (a, b), $y\mathrm{A}(x) \geq 0$, e quindi, in ogni punto di (a, b), salvo in a, è $y - y_0 > 0$ e $y - y_0$ crescente in (a, b) salvo in b. E procedendo per induzione segue, qualunque sia n, $y - y_n > 0$ in ogni punto di (a, b) salvo in a, e $y - y_n$ crescente in (a, b) salvo in b.

Vogliamo ora dimostrare che la successione (3) tende, per n crescente all'infinito, alla y, in egual grado in (a, b). Equivale ciò a dimostrare che la serie:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots,$$

è convergente in egual grado in (a, b) ed ha per somma y.

Consideriamo, a tale scopo, la funzione:

$$\frac{y - y_0}{y},$$

finita, continua, costantemente positiva e minor d'uno in (a, b). Diciamo M il suo massimo in (a, b), è anche $\mathrm{M} < 1$, per cui se è:

$$\mathrm{M} < q < 1,$$

sarà in (a, b) costantemente:

(4) $$y - y_0 < qy.$$

Segue, in (a, b), qualunque sia n:

$$y - y_n < q^{n+1} y.$$

Difatti è:

$$(y-y_1)''+(y-y_0)\,\mathrm{A}(x)=0\,,$$

ed anche:

$$q(y-y_0)''+qy\,\mathrm{A}(x)=0\,,$$

ma per la (4) è $y-y_0<qy$, e quindi $(y-y_0)\,\mathrm{A}(x)\leq qy\,\mathrm{A}(x)$, per cui è in (a,b):

$$y-y_1<q(y-y_0)<q^2y.$$

E se si suppone d'aver dimostrato che in (a,b) è:

$$y-y_i<q^{i+1}y$$
$$y-y_i<q(y-y_{i-1})\,,$$

per $i\leq n-1$, dalle due relazioni:

$$(y-y_n)''+(y-y_{n-1})\,\mathrm{A}(x)=0$$
$$q(y-y_{n-1})+q(y-y_{n-2})\,\mathrm{A}(x)=0\,,$$

segue anche:

$$y-y_n<q(y-y_{n-1})<q^{n+1}y.$$

Ed ora, per essere $q<1$, potremo trovare un tal numero intiero e positivo ν, che per $n\geq\nu$, sia:

$$q^{n+1}\leq\frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}\,,$$

con ε positivo. Da cui segue, in (a,b) qualunque sia x:

$$y-y_n<\varepsilon$$

per $n\geq\nu$. Il che dimostra quanto volevamo.

Ma il metodo delle approssimazioni successive ora esposto, deve convergere, nelle nostre ipotesi, anche quando lo si adotti con le α e β affatto arbitrarie non entrambe nulle. Difatti, non essendo b pseudoconiugato di a, ad una soluzione di (1) si possono prescrivere le condizioni (2), con le α e β affatto arbitrarie, non entrambe nulle, in seguito a che essa viene univocamente determinata come combinazione lineare e omogenea a coefficienti costanti di due soluzioni della (1), indipendenti e del resto arbitrarie. Siano u e v due soluzioni della (1), che soddisfino alle condizioni ai limiti:

$$u(a)=\alpha_1>0 \qquad u'(b)=\beta_1>0$$
$$v(a)=\alpha_2>0 \qquad v'(b)=\beta_2>0\,,$$

con

$$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq0\,.$$

Le soluzioni u e v sono indipendenti, costantemente positive e crescenti in (a,b) e la soluzione y della (1) che soddisfa alle (2) con due valori arbitrarî per le α e β, non entrambi nulli, avrà la forma:

$$y=c_1u+c_2v\,,$$

dove c_1 e c_2 sono costanti determinate dalle due equazioni:

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=\alpha \quad , \quad c_1\beta_1+c_2\beta_2=\beta\,.$$

Ora il metodo precedente dà:

$$u=\lim u_n \quad , \quad v=\lim v_n\,,$$

in egual grado in (a,b), u_n e v_n soddisfacendo alle relazioni:

$$u''_n+u_{n-1}\mathrm{A}(x)=0 \quad , \quad v''_n+v_{n-1}\mathrm{A}(x)=0$$
$$u_n(a)=\alpha_1 \quad , \quad u'_n(b)=\beta_1$$
$$v_n(a)=\alpha_2 \quad , \quad v'_n(b)=\beta_2\,.$$

Posto:

$$y_n=c_1u_n+c_2v_n\,,$$

ne segue:

$$y=\lim y_n\,,$$

in egual grado in (a,b), le y_n soddisfacendo alle relazioni:

$$y''_n+y_{n-1}\mathrm{A}(x)=0\,,$$
$$y_n(a)=\alpha \quad , \quad y'_n(b)=\beta\,.$$

Ciò dimostra quanto si voleva.

Si osservi inoltre che essendo le serie:

$$u_0+\sum(u_n-u_{n-1}) \quad , \quad v_0+\sum(v_n-v_{n-1})\,,$$

a termini positivi e convergenti, la serie:

$$y_0 + \sum (y_n - y_{n-1})$$

sarà assolutamente convergente in (a, b). Difatti, la serie

$$|c_1| u_0 + |c_2| v_0 + \sum \{ |c_1| (u_n - u_{n-1}) + |c_2| (v_n - v_{n-1}) \}$$

è convergente, ed è:

$$|y_0| = |c_1 u_0 + c_2 v_0| \leq |c_1| u_0 + |c_2| v_0$$

$$|y_n - y_{n-1}| = |c_1(u_n - u_{n-1}) + c_2(v_n - v_{n-1})| \leq |c_1|(u_n - u_{n-1}) + |c_2| (v_n - v_{n-1})$$

Nel caso che le condizioni ai limiti prescritte ad una soluzione y dalle (1), fossero:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_a = \alpha \quad , \quad [y]_b = \beta \,, \tag{5}$$

le condizioni di applicabilità del metodo delle approssimazioni successive saranno: nel tratto (a, b) non devon coesistere un punto e un suo pseudoconiugato sinistro, cioè, in (a, b), deve verificarsi l'esistenza di una soluzione sempre positiva e decrescente.

10. — Il metodo delle approssimazioni successive per la costruzione della soluzione della (1) soddisfacente alle condizioni ai limiti (2) è certamente adottabile, come s'è visto, nel caso che, nel tratto (a, b), non coesistano un punto e un suo pseudoconiugato destro; ma tutte le volte che lo si voglia adottare senza aver nozione di questa circostanza, bisogna anzitutto accertarsi se le funzioni della successione (3) convergono verso una funzione derivabile due volte almeno, e, ciò fatto, bisognerà verificare se la funzione limite soddisfa all'equazione. Si noti che perchè si verifichi quanto precede è sufficiente che la serie:

$$y_0 + \sum (y_n - y_{n-1})$$

sia uniformemente convergente in (a, b), poichè se questa serie è uniformemente convergente in (a, b), lo è anche:

$$y_0 \mathrm{A}(x) + \sum \mathrm{A}(x) (y_n - y_{n-1}) = -[y''_0 + \sum (y''_n - y''_{n-1})]$$

e quindi anche:

$$y'_0 + \sum (y'_n - y'_{n-1}) \,.$$

Si presenta dunque di capitale importanza la risoluzione del problema di vedere, data l'equazione (1) e il tratto (a, b) (in cui si suppone $\mathrm{A}(x)$ finita, continua e non negativa), se in (a, b) possono coesistere un punto, e un suo pseudoconiugato destro, per l'assegnabilità delle condizioni (2), un punto e un suo pseudoconiugato sinistro, per l'assegnabilità delle condizioni (5).

La teoria che segue ha appunto per iscopo di trattare questo problema.

V.

La costante di situazione.

11. — La funzione $\mathrm{A}(x)$ dell'equazione:

$$y'' + y \mathrm{A}(x) = 0 \,, \tag{1}$$

per ora e nel seguito, fino a che non avvertiremo espressamente il contrario, sarà per noi finita, continua e non negativa in (a, b).

La soluzione y_0 dell'equazione:

$$y'' = 0 \,,$$

che è uno in a ed ha in b la derivata nulla, è identicamente eguale ad uno in (a, b). La soluzione y_1 dell'equazione:

$$y'' + y_0 \mathrm{A}(x) \equiv y'' + \mathrm{A}(x) = 0 \,,$$

eguale ad uno in a e di derivata nulla in b è data da:

$$y_1 = 1 + \int_a^b \mathrm{A}(\xi) \, \mathrm{G}(x, \xi) \, d\xi \,,$$

così la soluzione y_2 dell'equazione:

$$y'' + y_1 \mathrm{A}(x) = 0 \,,$$

eguale ad uno in a e di derivata nulla in b è data da:

$$y_2 = 1 + \int_a^b y_1(\xi) \, A(\xi) \, G(x, \xi) \, d\xi .$$

Così proseguendo indefinitamente, si viene a costruire una successione di funzioni tutte positive e crescenti in (a, b) salvo in b:

(2) $$y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$$

aventi in a il valore uno e aventi in b derivata nulla e tali che fra due successive esiste la relazione:

$$y''_n + y_{n-1} A(x) = 0 .$$

Le differenze:

$$u_n = y_n - y_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

sono positive in (a, b), salvo in a, e crescenti, salvo in b.

Poniamo $u_0 = y_0$. Si consideri la successione di funzioni:

(3) $$u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$$

Fra due successive u vale la relazione:

$$u''_n + u_{n-1} A(x) = 0 .$$

Introduciamo le quantità:

$$W_{m,n} = \int_a^b A(x) \, u_m(x) \, u_n(x) \, dx ,$$

$$W_{m,n} = \int_a^b \frac{du_m}{dx} \frac{du_n}{dx} \, dx .$$

Dall'eguaglianza:

$$u_m(x) \, A(x) = - \frac{d^2 u_{m+1}}{dx^2} ,$$

moltiplicando ambo i membri per u_n e integrando fra a e b, s'ottiene:

$$W_{m,n} = - \int \frac{d^2 u_{m+1}}{dx^2} u_n \, dx ,$$

e integrando per parti:

(4) $$W_{m,n} = \int_a^b \frac{du_{m+1}}{dx} \frac{du_n}{dx} dx = V_{m+1, n-1} ,$$

da cui integrando ancora per parti:

$$W_{m,n} = - \int_a^b u_{m+1} \frac{d^2 u_n}{dx^2} dx = \int_a^b A(x) \, u_{m+1}(x) \, u_{n-1}(x) \, dx = W_{m+1, n-1} .$$

Ne segue che ogni $W_{m,n}$ dipende solo dalla somma dei suoi due indici e si potrà porre pertanto:

$$W_{n-i, i} = W_{n,0} = W_n = \int_a^b A(x) \, u_n(x) \, dx .$$

E dalla (4) segue anche che ogni $V_{m,n}$ dipende solo dalla somma dei suoi indici, purchè nessun d'essi si annulli che allora la V corrispondente s'annulla, ed è precisamente:

$$V_{m,n} = W_{m+n-1} .$$

Dalla definizione delle W e delle V, appare subito ch'esse sono quantità positive.

Vogliamo ora dimostrare che *la successione di numeri positivi:*

(5) $$\frac{W_1}{W_0}, \frac{W_2}{W_1}, \dots, \frac{W_n}{W_{n-1}}, \dots$$

è crescente ed ha un limite finito.

Ci varremo perciò del lemma di *Schwarz:* Siano φ e ψ due funzioni finite e continue della x, in un comune tratto (a, b), poniamo:

$$A = \int_a^b \varphi^2 dx , \quad B = \int_a^b \varphi\psi \, dx , \quad C = \int_a^b \psi^2 dx ,$$

vale la relazione:

$$B^2 \leq AC ,$$

il segno eguale sussistendo solo nel caso che φ e ψ differiscano solo per un fattore costante [1]).

La successione (5) è sempre crescente. Difatti, poniamo nella relazione di *Schwarz:*

$$\varphi = u_n \sqrt{A} \quad , \quad \psi = u_{n-1} \sqrt{A} ;$$

si avrà allora:

$$A = W_{2n} \ , \ B = W_{2n-1} \ , \ C = W_{2n-2} \, ,$$

e siccome u_n e u_{n-1} non differiscono solo per una costante moltiplicativa, come è facile convincersi, si ricava:

$$W^2_{2n-1} < W_{2n} W_{2n-2} \, ,$$

cioè

$$\frac{W_{2n-1}}{W_{2n-2}} < \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} .$$

Si ponga ora nella relazione di *Schwarz:*

$$\varphi = \frac{du_n}{dx} \ , \ \psi = \frac{du_{n+1}}{dx} \, ,$$

φ e ψ non sono in rapporto costante, ma è:

$$A = \int_a^b \left(\frac{du_n}{dx}\right)^2 dx = V_{n,n} = W_{2n-1} \ , \ B = W_{2n} \ , \ C = W_{2n+1} \, ,$$

per cui ricavasi:

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} .$$

Evidentemente, questa diseguaglianza colla precedente dimostra che la successione (5) è sempre crescente.

La successione (5) non cresce indefinitamente, i termini di essa si mantengono inferiori al massimo $g = u_1(b)$ di $u_1(x)$ nel tratto (a, b). Difatti, per essere:

$$g u_0 \geq u_1(x) \, ,$$

---

[1]) Schwarz. Ges. Mat. Abh., Vol. I, pag. 251.

dal confronto delle due equazioni a cui soddisfano gu_1 e u_2:

$$u''_2 + u_1 A(x) = 0 \quad , \quad g u''_1 + g u_0 A(x) = 0 \, ,$$

segue:

$$u_2 < g u_1 \, ,$$

e procedendo per induzione, si ottiene, per n qualunque:

$$u_n < g u_{n-1} \, ,$$

da cui:

$$\int_a^b A u_n \, dx < g \int_a^b A u_{n-1} \, dx \, ,$$

e quindi:

$$\frac{W_n}{W_{n-1}} < g \, ,$$

per n qualunque. Pertanto la successione (5) ha un limite finito c. Sarà $0 < c \leq g$.

Questa costante positiva c chiameremo: *la costante di situazione dell'equazione* (1) *relativa al tratto* (a, b).

Si consideri la successione di funzioni:

$$\bar{u}_0 \ , \ \bar{u}_1 \ , \ldots , \ \bar{u}_n \, , \ldots ,$$

che, salvo la prima costantemente eguale ad uno in (a, b) sono nulle in b ed hanno derivata nulla in a, tali che fra due consecutive sussiste la relazione:

$$\bar{u}''_n + \bar{u}_{n-1} A(x) = 0 .$$

Le funzioni $\bar{u}$ si costruiscono in modo analogo a quello tenuto per le u, servendosi della funzione di *Green* $\bar{G}(x, \xi)$ relativa al tratto (b, a). Le funzioni $\bar{u}$, la prima eccettuata, sono positive in (a, b), salvo in b e sono sempre decrescenti in (a, b), salvo in a. Posto:

$$\bar{W} = \int_a^b A \bar{u}_n \, dx \, ,$$

la successione di numeri positivi:

$$\frac{\overline{W}_1}{\overline{W}_0}, \ldots, \frac{\overline{W}_n}{\overline{W}_{n-1}}, \ldots,$$

è sempre crescente ed ha un limite $\overline{c}$ non superiore al massimo $g = \overline{u}_1(a)$ della $\overline{u}_1(x)$ nel tratto (a, b).

La costante positiva $\overline{c}$ chiameremo *la costante di situazione dell'equazione* (1) *relativa al tratto* (b, a).

12. — È:

$$g = u_1(b) = \int_a^b A(\xi) G(b, \xi) d\xi < M(b-a)^2$$

$$g = \overline{u}_1(a) = \int_a^b A(\xi) \overline{G}(a, \xi) d\xi < M(b-a)^2,$$

e quindi:

$$0 < c < M(b-a)^2 \quad , \quad 0 < \overline{c} < M(b-a)^2,$$

indicando con M il massimo di $A(x)$ in (a, b). Segue di qua che col tendere a zero dell'ampiezza del tratto (a, b), le due costanti di situazione c e $\overline{c}$ sono infinitesime, del second'ordine almeno, rispetto all'ampiezza del tratto.

Oss. Se c è la costante di situazione della (1) relativa al tratto (a, b), la costante di situazione della:

$$y'' + ky\,A(x) = 0, \tag{6}$$

k essendo una costante positiva, relativa allo stesso tratto, sarà kc. Ciò appare subito dalla definizione di c come limite della successione (5) e dall'osservare che, detti W'_n i numeri W_n per la (6), è:

$$W'_n = k^{n+1} W_n.$$

Segue di qua che per la cost. di sit. di un'equazione del tipo (1) è lecito pensare ad un qualunque valore maggior di zero, poichè disponendo di k nella (6) si otterranno equazioni del tipo (1) le cui cost. di sit. sono proporzionali al numero positivo k.

13. — *Se la costante di situazione* c *della* (1) *relativa al tratto* (a, b) *è minor d'uno, nel tratto* (a, b) *non possono coesistere un punto e un suo pseudoconiugato destro.* Difatti, nell'ipotesi $c < 1$, si consideri la serie:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots \tag{7}$$

formata colle funzioni della successione (3), dimostriamo che essa è convergente in egual grado in (a, b). Invero è in (a, b):

$$u_n(x) \leq u_n(b) = \int_a^b A(\xi) G(b, \xi) u_{n-1}(\xi) d\xi < (b-a) W_{n-1}.$$

Ora la serie a termini positivi:

$$(b-a)(W_0 + W_1 + \ldots + W_n + \ldots) \tag{8}$$

è convergente, poichè è:

$$\lim_{n=\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = c < 1,$$

e quindi la serie:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

che ha i suoi termini, in ogni punto di (a, b), minori dei termini corrispondenti della serie (8), è convergente in (a, b) e lo è in egual grado. Ciò basta per potere affermare che la somma $u(x)$ della serie (7), anch'essa convergente in egual grado in (a, b), è (n. 10) soluzione dell'equazione (1). Evidentemente, questa soluzione u è uno in a, è di derivata nulla in b ed è sempre crescente in (a, b). L'esistenza di questa soluzione dimostra l'impossibilità della coesistenza in (a, b) di un punto e di un suo pseudoconiugato destro, che è quanto volevamo.

Allo stesso modo si proverà che: *Se la costante di situazione* $\overline{c}$ *della* (1) *relativa al tratto* (b, a) *è minor d'uno non possono, nel tratto* (a, b) *coesistere un punto e un suo pseudoconiugato sinistro.*

Si osservi che quanto precede dimostra anche: *Se la cost. di sit.* c *(la cost. di sit.* $\overline{c}$*) è minor d'uno è assicurata la convergenza* *del metodo delle approssimazioni successive con le condizioni ai limiti* (2) *(con le condizioni ai limiti* (5)) *del n. 9, le* α *e* β *non essendo entrambe nulle.*

Oss. Siccome fra due punti di zero di una soluzione vi è un punto di zero per la derivata e fra due punti di zero per la derivata di una soluzione vi è un punto di zero della soluzione (v. n. 5), *se una delle cost. di sit.,* c *o* $\bar{c}$*, è minor d'uno, il tratto* (a, b) *è privo di coppie di punti coniugati e di coppie di punti deconiugati.* Se è:

$$M(b-a)^2 \leq 1,$$

sia c che $\bar{c}$, sono (n. 12) minori d'uno, e quindi nel tratto (a, b) non possono coesistere un punto e un suo pseudoconiugato. Ma la limitazione qui stabilita dà meno della limitazione trovata al n. 7. Ivi, infatti, fu stabilito che se è:

$$M(b-a)^2 \leq \frac{\pi^2}{4},$$

nel tratto (a, b) non possono coesistere un punto e un suo pseudoconiugato.

14. — *Se la cost. di sit.* c *è maggior d'uno, non può esistere una soluzione che in* (a, b) *si mantenga positiva e crescente, deve cioè il primo pseudoconiugato di* a*, a destra, esistere in* (a, b). Difatti, ove con $c > 1$, avvenisse che le soluzioni che hanno derivata nulla in b fossero sempre positive e sempre crescenti in (a, b), si verificherebbe in (a, b) l'esistenza di una soluzione di valore uno in a e sempre crescente in (a, b), salvo in b. I teoremi del n. 9 ci assicurerebbero allora l'uniforme convergenza in (a, b) della serie (7) verso la soluzione indicata e ne seguirebbe la convergenza della serie:

$$\int_a^b A(x) u_0(x)\, dx + \dots + \int_a^b A(x) u_n(x)\, dx + \dots,$$

cioè della serie a termini positivi:

$$W_0 + W_1 + \dots + W_n + \dots,$$

ma ciò è assurdo per essere:

$$\lim_{n=\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = c > 1.$$

Allo stesso modo si proverà che: *Se la cost. di sit.* $\bar{c}$ *è maggior d'uno non può esistere una soluzione che in* (a, b) *si mantenga positiva e decrescente.*

15. — Nessuna ipotesi fatta sul valore di c, poniamo:

$$c_1 = \frac{W_1}{W_0}, \dots, c_n = \frac{W_n}{W_{n-1}}, \dots,$$

e consideriamo il prodotto infinito:

$$(9) \qquad \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{c_i}{c}.$$

Pel seguito ci occorre di dimostrare che *il prodotto infinito* (9), convergente, per essere $\frac{c_i}{c} < 1$, *ha un limite diverso da zero.*

I ragionamenti che faremo per raggiungere questi risultati sono di *Schwarz* [1]). Anzitutto notiamo che essendo il prodotto (9) convergente indipendentemente dall'ordine dei suoi fattori, si potrà dimostrare quanto vogliamo in un ordine conveniente dei fattori. Abbiamo visto essere:

$$u_n(x) < (b-a) \int_a^b A(\xi) u_{n-1}(\xi)\, d\xi,$$

applicando la relazione di *Schwarz* con $\varphi = A(x) u_{n-1}(x)$ e $\psi = 1$, si ha:

$$u_n^2(x) < (b-a)^3 \int_a^b A^2(\xi) u_{n-1}^2(\xi)\, d\xi.$$

Detto M il massimo di $A(x)$ in (a, b) e posto $H = M(b-a)^3$, ne verrà:

$$u_n^2(x) < H W_{2n-2}.$$

---

[1]) SCHWARZ. Ges. Math. Abh., pag. 254 e seg.

Di qua si trae:

$$\frac{u_n^2(x)}{W_{2n}} < H \frac{W_{2n-2}}{W_{2n}}.$$

Questa relazione vale qualunque sia n e in qualunque punto di (a, b), e siccome è:

$$\lim_{n=\infty} \frac{W_{2n-2}}{W_{2n}} = \left(\frac{1}{c}\right)^2,$$

segue che si potrà trovare un tal numero intiero e positivo ν e un numero positivo K, tali che per $n \geq \nu$, in qualunque punto di (a, b), sia:

$$\frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} < K.$$

Ora è:

$$1 = \int_a^b A(x) \frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} \frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} dx,$$

e quindi, per $n \geq \nu$:

$$1 < K \int_a^b A(x) \frac{u_n(x)}{\sqrt{W_{2n}}} dx = \frac{K W_n}{\sqrt{W_{2n}}},$$

da cui:

$$\frac{W_n^2}{W_{2n}} > \frac{1}{K^2},$$

per $n \geq \nu$. Ma è:

$$W_n = c_1 . c_2 \dots c_n W_0 \quad , \quad W_{2n} = c_1 . c_2 \dots c_{2n} W_0,$$

e quindi, ponendo $\frac{1}{W_0 K^2} = H$, segue:

$$\frac{c_1^2}{c_1 . c_2} \cdot \frac{c_2^2}{c_3 . c_4} \dots \frac{c_n^2}{c_{2n-1} . c_{2n}} > H \qquad (n \geq \nu),$$

ed anche:

$$\left(\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_2}{c_4} \dots \frac{c_n}{c_{2n}}\right)\left(\frac{c_2}{c_3} \cdot \frac{c_3}{c_5} \dots \frac{c_n}{c_{2n-1}}\right) > H \qquad (n \geq \nu),$$

per cui, osservando che, comunque sia n, i due prodotti fra parentesi sono minori di uno, si trova, facendo crescere n all'infinito, che il prodotto infinito:

$$\text{(10)} \qquad \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{c_{2n}}$$

è convergente verso un limite maggiore di H, e quindi diverso da zero. Dal prodotto (9) prendiamo i prodotti infiniti:

$$\text{(11)} \qquad \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{c_{2^{i-1}}}{c_{2^i}}, \ \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{c_{3.2^{i-1}}}{c_{3.2^i}}, \dots, \ \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{c_{(2n-1).2^{i-1}}}{c_{(2n-1).2^i}}, \dots .$$

Tutti i fattori di questi prodotti esauriscono i fattori del prodotto (10), e ciascuno dei fattori dei prodotti (11) trova posto, una sola volta, nel prodotto (10), per cui il prodotto infinito:

$$\text{(12)} \qquad \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_{2n-1}}{c},$$

formato coi limiti di ciascuno dei prodotti (11), avrà il limite del prodotto (10) e quindi un limite diverso da zero. Ma allora anche il prodotto

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_{2n}}{c},$$

che ha i suoi termini più grandi dei corrispondenti del prodotto (12) ha un limite diverso da zero e ne segue la convergenza del prodotto (9) verso un limite diverso da zero.

16. — Per discutere il caso $c = 1$ $(\bar{c} = 1)$ ed anche per conseguire un risultato di estrema importanza pel seguito, consideriamo la successione di funzioni:

$$\text{(13)} \qquad u'_0, \ u'_1, \dots, \ u'_n, \dots,$$

con

$$u'_n = \frac{u_n}{c^n}. \text{ [1]}$$

[1] Cfr. Picard. Traité d'A. Tom. III, Chap. VI.

Vogliamo dimostrare *la uniforme convergenza in* (a, b) *della successione* (13) *verso una funzione* u', *sempre positiva in* (a, b), *salvo in* a, *e sempre crescente in* (a, b), *salvo in* b, *che soddisfa all'equazione:*

$$\frac{d^2 u'}{dx^2} + \frac{A(x)}{c} u' = 0. \tag{14}$$

Poniamo:

$$k = \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{c},$$

è $k > 0$. Poniamo:

$$W'_n = \int_a^b A(x) u'_n(x)\, dx.$$

È $W'_n = \frac{W_n}{c^n}$, e quindi:

$$\lim_{n=\infty} W'_n = W_0 \prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{c} = W_0 k > 0.$$

Si ha evidentemente:

$$\frac{d^2 u'_n}{dx^2} + \frac{A(x)}{c} u'_{n-1} = 0,$$

e quindi:

$$u'_{n+1}(x) - u'_{n+k+1}(x) = \frac{1}{c} \int_a^b A(\xi) \{u'(\xi) - u'_{n+k}(\xi)\} G(x, \xi)\, d\xi,$$

e per la relazione di *Schwarz:*

$$\{u'_{n+1}(x) - u'_{n+k+1}(x)\}^2 \leq \frac{1}{c^2} \int_a^b A^2(\xi) \{u'_n(\xi) - u'_{n+k}(\xi)\}^2 d\xi \int_a^b G^2(x, \xi)\, d\xi.$$

Detto M il massimo di $A(x)$ in (a, b), poniamo:

$$H = \frac{1}{c^2} M (b - a)^3,$$

risulterà:

$$\{u'_{n+1}(x) - u'_{n+k+1}(x)\}^2 < H(|W'_{2n} - W'_{2n+k}| + |W'_{2n+2k} - W'_{2n+k}|).$$

Ma le quantità W'_n, al crescere infinito di n, hanno un limite, per cui, preso un numero positivo σ arbitrario, ne verrà determinato un numero intiero e positivo ν tale che per $n \geq \nu$ e qualunque sia k risulti:

$$|W'_n - W'_{n+k}| < \sigma.$$

Ne segue:

$$|u'_{n+1}(x) - u'_{n+k+1}(x)| < |(2\sigma H)^{\frac{1}{2}}|,$$

per $n \geq \nu$, qualunque sia k, in un qualsiasi punto di (a, b), con σ positivo arbitrariamente preso.

La successione (13) ha dunque un limite a cui tende uniformemente in (a, b), cioè la serie:

$$u'_0 + \sum (u'_n - u'_{n-1}) \tag{15}$$

è uniformemente convergente in (a, b). Tanto basta per potere affermare che la $u'(x)$, limite della successione (13), somma della serie (15), è derivabile due volte almeno e soddisfa all'equazione (14).

La $u'(x)$ non è identicamente nulla in (a, b). Difatti, u'_n tende, per $n = \infty$, uniformemente in (a, b) verso u', e quindi si avrà:

$$\int_a^b A(x) u'(x) dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b A(x) u'_n(x)\, dx = \lim_{n=\infty} W'_n = k W_0 > 0.$$

La $u'(x)$, evidentemente, è nulla in a ed ha derivata nulla in b. La $u'(x)$ non può mai essere negativa in (a, b), difatti, le $u'_n(x) = \frac{u_n(x)}{c^n}$ sono, salvo in a, sempre positive in (a, b). La $u'(x)$ (che, non essendo identicamente nulla, cambia segno nei suoi punti di zero) se si eccettua il punto a, non potrà dunque mai annullarsi in (a, b) e ne segue che la $u'(x)$ è sempre crescente in (a, b), salvo in b (n. 5).

17. — Possiamo dunque concludere:

Se c è la cost. di sit. della (1) *relativa al tratto* (a, b), *b è il primo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto all'equazione:*

$$y'' + y \frac{A(x)}{c} = 0 .$$

Se $\bar{c}$ è la cost. di sit. della (1) *relativa al tratto* (b, a), *b è il primo emiconiugato di a, a destra, rispetto all'equazione:*

$$y'' + y \frac{A(x)}{\bar{c}} = 0 .$$

Ne viene: *Se la cost. di sit. c della* (1) *relativa al tratto* (a, b) *è eguale ad uno, b è il primo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto alla* (1); *se la cost. di sit. $\bar{c}$ della* (1) *relativa al tratto* (b, a) *è eguale ad uno, b è il primo emiconiugato di a, a destra rispetto alla* (1).

Siamo ora in grado altresì di dimostrare che: *Il primo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto alla* (1), *cadrà fuori di* (a, b) *o nell'interno di* (a, b), *secondochè la cost. di sit. c della* (1) *relativa al tratto* (a, b) *è minore o maggiore d'uno.*

La prima parte di questo teorema è stata già dimostrata al n. 13. Si confrontino le due equazioni:

$$y'' + y A(x) = 0 \quad , \quad y'' + y \frac{A(x)}{c} = 0 ,$$

sarà in (a, b), $A(x)$ minore o maggiore di $\frac{A(x)}{c}$ secondochè è c minore o maggiore d'uno e quindi il secondo teorema di confronto del n. 6 dimostra il nostro asserto.

E pel primo teorema di confronto del n. 6, si avrà anche: *Il primo emiconiugato di a, a destra, rispetto alla* (1), *cadrà fuori di* (a, b) *o nell'interno di* (a, b) *secondochè la cost. di sit. $\bar{c}$ della* (1) *relativa al tratto* (b, a) *è minore o maggiore d'uno.*

Ed ora evidentemente valgono i teoremi reciproci:

La cost. di sit. c della (1) *relativa al tratto* (a, b) *sarà minore, eguale, maggiore di uno, secondochè il primo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto alla* (1), *è fuori di* (a, b), *in b, nell'interno di* (a, b).

La cost. di sit. $\bar{c}$ della (1) *relativa al tratto* (b, a) *sarà minore, eguale, maggiore di uno, secondochè il primo emiconiugato di a, a destra, rispetto alla* (1), *è fuori di* (a, b), *in b, nell'interno di* (a, b).

18. — Vogliamo ora studiare le cost. di sit. c e $\bar{c}$ come funzioni dell'ampiezza del tratto (a, b), a cui esse si riferiscono, supponendo, naturalmente, che (a, b) varî in modo che, in (a, b), $A(x)$ serbi sempre le indicate particolarità.

La cost. di sit. della equazione (1), *relativa al tratto* (a, b'), *b' essendo un punto interno ad* (a, b), *è minore della cost. di sit. della stessa equazione relativa al tratto* (a, b). Diciamo c la cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, b), c' la cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, b'). Sarà b' il primo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto all'equazione:

$$y'' + y \frac{A(x)}{c'} = 0$$

e b il primo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto all'equazione:

$$y'' + y \frac{A(x)}{c} = 0 ,$$

non potrà perciò essere:

$$\frac{A(x)}{c'} \leq \frac{A(x)}{c} ,$$

e sarà quindi:

$$c' < c .$$

Identico teorema, con analoga dimostrazione, vale per la cost. di sit. $\bar{c}'$ relativa al tratto (b', a).

Dunque c' e $\bar{c}'$ sono funzioni sempre crescenti di $b' - a$, infinitesime (n. 12) del second'ordine almeno rispetto a $b' - a$.

Le c' e $\bar{c}'$ sono funzioni continue di $b' - a$. Per dimostrare l'asserto, faremo vedere che la cost. di sit. c'' della (1) relativa ad un tratto (a, b''), il cui estremo b'' tende, a sinistra per es., verso b' ha per limite c'. Se $b''-a$, crescendo continuamente, tende a $b'-a$, la c'' crescerà continuamente e si manterrà inferiore a c', per cui essa tenderà ad un limite $c_1 \leq c'$. Ma deve essere $c_1 = c'$. Difatti, ove fosse $c_1 < c'$, pel secondo teorema di confronto del n. 6, essendo b' il primo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto all'equazione:

$$y'' + y\frac{A(x)}{c'} = 0\,,$$

il primo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto all'equazione:

$$y'' + y\frac{A(x)}{c_1} = 0\,,$$

esisterà e cadrà in un certo punto b_1 nell'interno di (a, b'). Allora la cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, b_1), sarà c_1. Ne segue che le cost. di sit. della (1) relative a tutti i tratti limitati da a e da un punto b'', fra b_1 e b', saranno maggiori di c_1, il che è assurdo. In modo affatto simile si dimostrerà che la cost. di sit. c'' della (1) relativa al tratto (a, b'') il cui estremo b'' tende verso b', a destra, ha per limite c'. E così per la $\bar{c}'$.

VI.

I valori eccezionali del parametro λ nell'equazione $y'' + \lambda A(x)\, y = 0$.

19. — La precedente trattazione delle cost. di sit. c e $\bar{c}$ non ci ha dato una completa risposta ai problemi al contorno posti al n. 9, che nei casi in cui esse costanti c e $\bar{c}$ sono minori od eguali ad uno: nel caso $c < 1$ $(\bar{c} < 1)$ esiste una sola soluzione soddisfacente alle condizioni ai limiti (2) (alle condizioni ai limiti (5)) del n. 9, con le α e β non entrambe nulle, ottenibile col metodo delle approssimazioni successive; nel caso $c = 1$ $(\bar{c} = 1)$ non esiste una soluzione soddisfacente alle condizioni ai limiti (2) (alle condizioni ai limiti (5)) del n. 9 con le α e β affatto arbitrarie. Ma nei casi $c > 1$ $(\bar{c} > 1)$ si è solo potuto stabilire che esiste nell'interno di (a, b) il primo pseudoconiugato (emiconiugato) di a, a destra, rispetto all'equazione:

(1) $$y'' + y\,A(x) = 0\,,$$

senza però poter decidere se b è o non è uno pseudoconiugato (emiconiugato) di a, e quindi, in questi casi, un'effettiva risposta ai problemi del n. 9 non è stata ancor data.

Ha fondamentale utilità, per l'ulteriore trattazione dei nostri problemi, la considerazione dell'equazione:

(2) $$y'' + y\lambda A(x) = 0\,,$$

contenente il parametro arbitrario λ. Le soluzioni della (2) saranno funzioni, oltre che di x, del parametro λ.

Per valori negativi o nulli del parametro λ, le soluzioni $y(x, \lambda)$ dell'equazione (2) non avranno in (a, b) contemporaneamente un punto di zero per esse e uno per la loro derivata.

È possibile dare a λ un tal valore positivo che in (a, b) esistano un punto e un suo pseudoconiugato rispetto all'equazione (2)? Abbiamo visto che se c è la cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, b), b è il primo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto all'equazione:

$$y'' + y\frac{A(x)}{c} = 0\,.$$

Quindi, per $\lambda = \dfrac{1}{c}$, esistono un punto e un suo pseudoconiugato destro in (a, b).

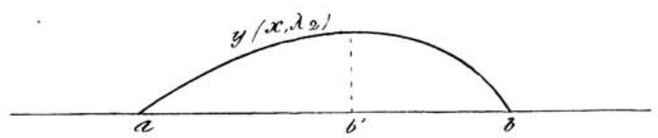
Poniamo $c_1 = c$ e $\lambda_1 = \dfrac{1}{c_1}$. I teoremi di confronto del n. 6 ci dicono immediatamente che per nessun altro valore di λ, diverso da λ_1, b potrà essere il primo pseudoconiugato di a, a destra; per $\lambda < \lambda_1$ non esisterà in (a, b) un punto e un suo pseudoconiugato destro, per $\lambda > \lambda_1$, è nell'interno di (a, b) il primo pseudoconiugato di a, a destra. Dobbiamo dunque rispondere affermativamente alla domanda fattaci.

La c_1 chiameremo *la prima cost. di sit. della* (1) *relativa a tratto* (a, b) *e* λ_1 *il primo valore della prima successione dei valor eccezionali del parametro* λ.

Ci domandiamo ora se è possibile, ed in quanti modi, dare a λ un tal valore λ_2 che le soluzioni $y(x, \lambda_2)$ dell'equazione:

$$(3) \qquad y'' + y\lambda_2 A(x) = 0 ,$$

nulle in a, abbiano in b il secondo punto di zero, in modo, cioè, che b risulti il primo coniugato di a, a destra, rispetto all'equazione (3).



Esista un tal valore λ_2 di λ. Sia b' il primo pseudoconiugato di a a destra, rispetto all'equazione (3), b sarà il primo emiconiugato di b', a destra, rispetto alla (3). Vorrà dire che la cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, b') è eguale a quella della stessa (1) relativa al tratto (b, b'), ed il loro comune valore è $\frac{1}{\lambda_2}$. Sarà dunque dimostrata l'esistenza dell'indicato valore λ_2 di λ, quando si sia dimostrato che nell'interno del tratto (a, b) esiste un punto b' tale che la cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, b') è eguale a quella della stessa (1) relativa al tratto (b, b'). Dimostreremo anche che questo punto è unico, e ne seguirà l'esistenza e l'unicità del voluto valore λ_2 di λ. Sia un punto x interno ad (a, b), diciamo $\alpha(x)$ la cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, x) e $\beta(x)$ quella relativa al tratto (b, x). La funzione $\alpha(x) - \beta(x)$, continua in (a, b), è negativa in a e positiva in b, esisterà dunque un valore b' di x pel quale sarà:

$$\alpha(b') - \beta(b') = 0 ,$$

e sarà unico poichè a destra di b', $\alpha(x)$ è sempre crescente e $\beta(x)$ sempre decrescente, e a sinistra viceversa.

Poniamo $\frac{1}{\lambda_2} = c_2$. La c_2 sarà per noi *la seconda cost. di sit. della* (1) *relativa al tratto* (a, b) *e* λ_2 *il secondo valore della prima successione dei valori eccezionali del parametro* λ. È $c_1 > c_2$ e quindi $\lambda_1 < \lambda_2$.

Abbiamo visto, e si può tornare a vedere applicando i teoremi di confronto, che per nessun altro valore di λ, diverso da λ_2, b potrà essere il primo coniugato di a rispetto alle equazioni che corrispondono a quei valori di λ. Ne viene che condizione necessaria e sufficiente perchè b sia il primo coniugato di a rispetto all'equazione (1) è che la seconda cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, b) sia uno.

I teoremi di confronto dimostrano anche che condizione necessaria e sufficiente perchè il primo coniugato di a, a destra, rispetto alla (1), cada nell'interno di (a, b) o non esista in (a, b) è che sia $c_2 > 1$ o $c_2 < 1$ [1].

Sia b' un punto mobile interno ad (a, b), c'_1, c'_2 le costanti c_1, c_2 relative al tratto (a, b'). Per essere $c'_2 < c'_1$, sarà c'_2 infinitesimo, del second'ordine almeno, rispetto a $b' - a$.

Con ragionamenti affatto simili a quelli tenuti per studiare la costante c'_1 come funzione di $b' - a$, applicando anche qui i teoremi di confronto, si dimostrerà che la c'_2 *è funzione continua e sempre crescente di* $b' - a$.

Passiamo a dimostrare l'esistenza e l'unicità di un terzo valore λ_3 di λ, che chiameremo il *terzo valore della prima successione dei valori eccezionali di* λ, tale che b sia il secondo pseudoconiugato di a, a destra, rispetto all'equazione:

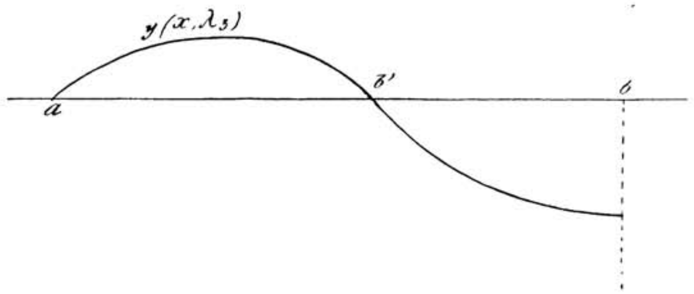
$$(4) \qquad y'' + y\lambda_3 A(x) = 0 ,$$

cioè tale che le soluzioni $y(x, \lambda_3)$ della (4) che s'annullano in a,

---

[1]) **Questa costante c_2 non è che la costante c usata da Picard nel Cap. VI del Vol. III del suo Trattato d'Analisi.**

hanno in (a, b) due punti di zero per la derivata di cui il secondo è in b.



Esista l'indicato valore λ_3 di λ. Detto b' il primo coniugato di a, a destra, rispetto alla (4), punto che per la fatta ipotesi dovrà esistere nell'interno di (a, b), b sarà il primo pseudoconiugato di b' a destra, rispetto alla (4). Per cui $\frac{1}{\lambda_3}$ sarà la seconda cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, b') e la prima della stessa (1) relativa al tratto (b', b). Per dimostrare dunque l'esistenza e l'unicità di λ_3, basterà far vedere che esiste ed è unico, un punto b', interno ad (a, b), tale che la seconda cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, b') è eguale alla prima della stessa (1) relativa al tratto (b', b). E questo è immediatamente visto servendosi della continuità e delle altre stabilite proprietà della prima e seconda cost. di sit. della (1) relative, rispettivamente, ai tratti (x, b), (a, x), x essendo un punto variabile, interno ad (a, b).

La $c_3 = \frac{1}{\lambda_3}$, chiameremo *la terza cost. di sit. della* (1) *relativa al tratto* (a, b).

È $c_3 < c_2 < c_1$, e quindi $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Sia b' un punto mobile nell'interno dl (a, b) e c'_1, c'_2, c'_3 indichino le costanti c_1, c_2, c_3 relative al tratto (a, b'), per essere $c'_3 < c'_2 < c'_1$, c'_3 è infinitesimo del second'ordine almeno con $b' - a$.

E servendosi dei teoremi di confronto si proverà essere c'_3 funzione continua sempre crescente di $b' - a$.

Ed ora evidentemente, così procedendo indefinitamente, si perviene alla costruzione della *prima successione dei valori eccezionali di* λ:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \tag{5}$$

e della *successione delle costanti di situazione della* (1) *relative al tratto* (a, b):

$$c_1 > c_2 > \dots > c_n > \dots \qquad \left(c_n = \frac{1}{\lambda_n}\right), \tag{6}$$

successioni entrambe non limitate e tali che se si vuole che b sia i^{mo} coniugato di a, rispetto alla (2), bisognerà dare a λ il valore $\lambda_{2i} = \frac{1}{c_{2i}}$ e quello soltanto, cioè il $(2i)^{mo}$ valore della prima successione dei valori eccezionali di λ; e se si vuole che b sia i^{mo} pseudoconiugato di a rispetto alla stessa (2), bisognerà dare a λ il valore $\lambda_{2i-1} = \frac{1}{c_{2i-1}}$ e quello soltanto, cioè il $(2i-1)^{mo}$ valore della prima successione dei valori eccezionali di λ.

La c_i sarà per noi la i^{ma} *cost. di sit. delle* (1) *relativa al tratto* (a, b). Detta c'_i la i^{ma} cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, b'), b' essendo un punto mobile interno ad (a, b), la c'_i è funzione finita, continua, sempre crescente di $b' - a$, infinitesima, del second'ordine almeno, con $b' - a$.

La successione (6) *ha per limite lo zero e quindi la* (5) *l'infinito.* Difatti, la successione (6) ha certo un limite $c \geq 0$, e ove fosse $c > 0$, risultando, qualunque sia n, $c < c_{2n}$, dal confronto delle due equazioni:

$$y'' + y\,\frac{A(x)}{c} = 0 \quad , \quad y'' + \frac{A(x)}{c_{2n}} = 0 ,$$

seguirebbe che le soluzioni della prima equazione annullantesi in a, hanno n zeri entro (a, b), ora, n essendo in nostro arbitrio, ciò avrebbe di conseguenza che quelle soluzioni sono identicamente nulle in (a, b), il che è assurdo.

Procedendo in modo analogo al precedente, prendendo come punto di partenza la cost. di sit. $\bar{c}$ della (1) relativa al tratto (b, a), si perverrà alla costruzione della *seconda successione dei valori eccezionali di* λ:

$$(5_1) \qquad \bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \ldots < \bar{\lambda}_n < \ldots$$

e della *successione delle costanti di situazione della* (1) *relative al tratto* (b, a):

$$(6_1) \qquad \bar{c}_1 > \bar{c}_2 > \ldots > \bar{c}_n > \ldots \qquad \left(\bar{c}_n = \frac{1}{\bar{\lambda}_n}\right),$$

successioni non limitate di cui la prima ha per limite l'infinito e la seconda ha per limite lo zero e tali che se si vuole che b sia i^{mo} deconiugato di a, rispetto alla (2), bisognerà dare a λ il valore $\bar{\lambda}_{2i} = \frac{1}{\bar{c}_{2i}}$ e quello soltanto, cioè il $(2i)^{mo}$ valore della seconda successione dei valori eccezionali di λ; e se si vuole che b sia i^{mo} emiconiugato di a, rispetto alla stessa (2), bisognerà dare a λ il valore $\bar{\lambda}_{2i-1} = \frac{1}{\bar{c}_{2i-1}}$ e quello soltanto, cioè il $(2i-1)^{mo}$ valore della seconda successione dei valori eccezionali di λ.

La $\bar{c}'_i$ sarà per noi la i^{ma} *cost. di sit. della* (1) *relativa al tratto* (b, a).

Detta $\bar{c}'_i$ la i^{ma} cost. di sit. della (1) relativa al tratto (b', a), b' essendo un punto mobile interno ad (a, b), la $\bar{c}'_i$ è funzione finita, continua, sempre crescente di $b' - a$, infinitesima, del second'ordine almeno, con $b' - a$.

Oss. Si noti che si possono scrivere, insieme alle (6) e (6_1), le altre due serie di diseguaglianze:

$$\bar{c}_1 > c_2 > \bar{c}_3 > \ldots > \bar{c}_{2i-1} > c_{2i} > \bar{c}_{2i+1} > \ldots$$
$$c_1 > \bar{c}_2 > c_3 > \ldots > c_{2i-1} > \bar{c}_{2i} > c_{2i+1} > \ldots .$$

Dimostriamo, per es., essere $\bar{c}_{2i} > c_{2i+1}$. Si rammenti che le soluzioni dell'equazione:

$$(7) \qquad y'' + y \frac{A(x)}{\bar{c}_{2i}} = 0,$$

aventi in a derivata nulla, hanno in (a, b) altri i punti di zero per la derivata, punti di cui l'i^{mo} è b, per cui la derivata di ogni altra soluzione della (7) avrà in (a, b), i punti di zero ed i soltanto (v. n. 5).

Ora, ove fosse $\bar{c}_{2i} \leq c_{2i+1}$, dal confronto dell'equazione (7) con la:

$$y'' + y \frac{A(x)}{c_{2i+1}} = 0,$$

seguirebbe che le soluzioni della (7), nulle in a, hanno in (a, b), $i+1$ punti di zero per la derivata.

20. — Costruite le successioni:

$$(8) \qquad \lambda_1, \lambda_3, \ldots, \lambda_{2n-1}, \ldots$$

$$(9) \qquad \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_3, \ldots, \bar{\lambda}_{2n-1}, \ldots$$

dei valori di λ di posto dispari delle due successioni (5) e (5_1) siamo in grado di dare una completa risposta ai problemi posti al n. 9. Le stabilite proprietà dei valori di λ delle due successioni (8) e (9), ci dicono, infatti, che condizione necessaria e sufficiente perchè b non sia pseudoconiugato (emiconiugato) di a, rispetto all'equazione (1), è che fra i valori di λ della successione (8) (della successione (9)) non vi sia l'unità.

E potremo dunque concludere:

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e per l'unicità di soluzioni della (1), *soddisfacenti alle condizioni ai limiti* (2) *del n. 9, con le* α *e* β *affatto arbitrarie, è che fra i valori di posto dispari della prima successione di valori eccezionali di* λ, *non vi sia l'unità.*

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e per l'unicità di soluzioni della (1), *soddisfacenti alle condizioni ai limiti* (5) *del n. 9, con le* α *e* β *affatto arbitrarie, è che fra i valori di posto dispari della seconda successione di valori eccezionali di* λ *non vi sia l'unità.*

21. — Due altri problemi al contorno ricevono dalla nostra analisi una completa risposta. Possiamo, infatti, evidentemente, affermare:

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e l'unicità di soluzioni della (1) *soddisfacenti alle condizioni ai limiti:*

$$y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta \, ,$$

con le α *e* β *affatto arbitrarie, è che fra i valori di posto pari della prima successione di valori eccezionali di* λ, *non vi sia l'unità.*

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e l'unicità di soluzioni della (1) *soddisfacente alle condizioni ai limiti:*

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_a = \alpha \quad , \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = \beta \, ,$$

con le α *e* β *affatto arbitrarie, è che fra i valori di posto pari della seconda successione di valori eccezionali di* λ, *non vi sia l'unità.*

22. — Costruite le successioni (5) e (5_1), (6) e (6_1), con l'aiuto delle due prime cost. di sit. della (1) relative al tratto (a', b'), supposte, come ci permette la teoria precedente, funzioni note dei due estremi a' e b' mobili nell'interno di (a, b), si può studiare con relativa approssimazione l'andamento della curva $y = y(x)$, $y(x)$ essendo una soluzione della (1), nulla in a o avente ivi derivata nulla.

Supponiamo, per es., che la $y(x)$ sia nulla in a e che nella prima successione dei valori eccezionali di λ, non vi sia l'unità. Gli elementi della successione (5) vanno infinitamente crescendo, per cui vi sarà un ben determinato valore i di n, pel quale è:

$$\lambda_{i-1} < 1 < \lambda_i \, ,$$

e quindi in (a, b):

$$\lambda_{i-1} \mathrm{A}(x) \leq \mathrm{A}(x) \leq \lambda_i \mathrm{A}(x) \, .$$

Supponiamo, per es., $i = 2\nu$. Il confronto delle due equazioni:

$$y'' + y\mathrm{A}(x) = 0 \quad , \quad y'' + y\lambda_{2\nu-1}\mathrm{A}(x) = 0 \, ,$$

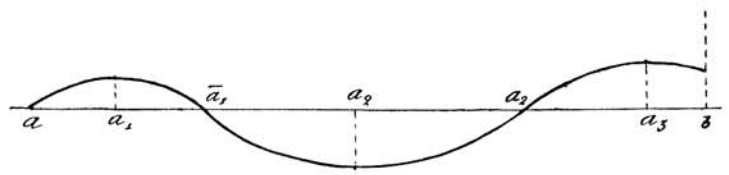
ci dice che esiste nell'interno di (a, b) il ν^{mo} pseudoconiugato di a, a destra, rispetto alla (1), e che quindi la $y(x)$ si annulla, dopo a, $\nu - 1$ volte almeno nell'interno di (a, b). Ma la $y(x)$ non si potrà dopo a annullare più di $\nu - 1$ volte, come risulta dal confronto delle

due equazioni:

$$y'' + y\mathrm{A}(x) = 0 \quad , \quad y'' + y\lambda_{2\nu}\mathrm{A}(x) = 0 \, .$$

Per cui una soluzione $y(x)$ della (1), nulla in a, si annulla, dopo a, $\nu - 1$ volte in (a, b); la $y(x)$ sia crescente in a, dopo il suo ultimo punto di zero b', essa sarà sempre negativa o sempre positiva, secondochè ν è pari o dispari; nell'interno di (b', b) la $y'(x)$ avrà un ultimo punto di zero che sarà di mass. o di min., per y, secondochè ν è dispari o pari.

Sia, per es., $\nu = 3$. La $y = y(x)$ avrà la forma qui riprodotta:



I punti a_1, a_2, a_3 in cui si annulla $y'(x)$ e $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ in cui si annulla $y(x)$ possono bene individuarsi: a_1 è quel determinato punto a destra di a, per cui la cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a, a_1) è eguale all'unità, $\bar{a}_1$ è quel determinato punto, a destra di a_1, per cui la cost. di sit. della (1) relativa al tratto $(\bar{a}_1, a_1)$ è eguale all'unità, ecc.

VII.

Le funzioni eccezionali e il teorema d'oscillazione.

23. — Poniamo:

$$h_i = \lambda_{2i-1} \quad , \quad k_i = \lambda_{2i} \quad , \quad \bar{h}_i = \bar{\lambda}_{2i-1} \quad , \quad \bar{k}_i = \bar{\lambda}_{2i} \, .$$

Supponiamo che il parametro λ dell'equazione:

$$\text{(1)} \qquad y'' + y\lambda\mathrm{A}(x) = 0 \, ,$$

non prenda che i valori delle quattro successioni $h_i, k_i, \bar{h}_i, \bar{k}_i$.

Indichiamo con $y(x, h_i)$, $y(x, k_i)$ due soluzioni, rispettivamente, delle equazioni:

$$y'' + y h_i \mathrm{A}(x) = 0 \quad , \quad y'' + y k_i \mathrm{A}(x) = 0 \, ,$$

nulle in a, e con $y(x, \bar{h}_i)$, $y(x, \bar{k}_i)$ due soluzioni, rispettivamente, delle equazioni:

$$y'' + y \bar{h}_i \mathrm{A}(x) = 0 \quad , \quad y'' + y \bar{k}_i \mathrm{A}(x) = 0 \, ,$$

aventi in a derivata nulla.

Le funzioni $y(x, h_i)$ e $y(x, \bar{k}_i)$ avranno la derivata nulla in b, le funzioni $y(x, k_i)$, $y(x, \bar{h}_i)$ saranno nulle in b.

Le funzioni $y(x, h_i)$, $y(x, k_i)$, $y(x, \bar{h}_i)$, $y(x, \bar{k}_i)$ si diranno le *soluzioni eccezionali corrispondenti,* rispettivamente, *ai valori eccezionali* $h_i, k_i, \bar{h}_i, \bar{k}_i$.

Poniamo:

$$\varphi_i(x) = \frac{y(x, h_i)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{A}(x) y^2(x, h_i)\, dx}} \quad , \quad \psi_i(x) = \frac{y(x, k_i)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{A}(x) y^2(x, k_i)\, dx}}$$

$$\bar{\varphi}_i(x) = \frac{y(x, \bar{h}_i)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{A}(x) y^2(x, \bar{h}_i)\, dx}} \quad , \quad \bar{\psi}_i(x) = \frac{y(x, \bar{k}_i)}{\sqrt{\int_a^b \mathrm{A}(x) y^2(x, \bar{k}_i)\, dx}} \, .$$

Le $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$, $\bar{\varphi}_i(x)$, $\bar{\psi}_i(x)$ si diranno le *soluzioni eccezionali normalizzate corrispondenti,* rispettivamente, *ai valori eccezionali* $h_i, k_i, \bar{h}_i, \bar{k}_i$. Esse soddisfano all'equazione:

$$\int_a^b \mathrm{A}(x) f^2(x)\, dx = 1 \, , \tag{2}$$

nella funzione incognita $f(x)$.

Sia $i \neq j$ e $f_i(x)$ e $f_j(x)$ rappresentino due soluzioni eccezionali, normalizzate o no, corrispondenti a due valori eccezionali l_i, l_j del parametro λ appartenenti ad una medesima delle quattro successioni $h_i, k_i, \bar{h}_i, \bar{k}_i$. Sarà verificata la relazione:

$$\int_a^b \mathrm{A} f_i f_j\, dx = 0 \, . \tag{3}$$

Difatti è:

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = - l_i \mathrm{A} f_i \quad , \quad \frac{d^2 f_j}{dx^2} = - l_j \mathrm{A} f_j \, ,$$

e quindi:

$$(l_j - l_i) \mathrm{A} f_i f_j = \frac{d^2 f_i}{dx^2} f_j - \frac{d^2 f_j}{dx^2} f_i \, ,$$

da cui integrando:

$$(l_j - l_i) \int_a^b \mathrm{A} f_i f_j\, dx = \left[\frac{df_i}{dx} f_j - \frac{df_j}{dx} f_i \right]_a^b . \tag{4}$$

Ora, per le ipotesi fatte su f_i e f_j, il primo membro della (4) è nullo, e non essendo $l_j - l_i = 0$, segue la (3).

Se dunque f_i e f_j sono soluzioni eccezionali normalizzate e ε_{ij} è eguale ad uno per $i = j$, ed è eguale a zero per $i \neq j$, si potrà scrivere:

$$\int_a^b \mathrm{A} f_i f_j\, dx = \varepsilon_{ij} \, .$$

Ne viene:

$$\int_a^b \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx = - \int_a^b f_i \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx = l_j \int_a^b \mathrm{A} f_i f_j\, dx = \varepsilon_{ij} l_j = \varepsilon_{ij} l_i \, .$$

24. — Ci proponiamo di studiare il comportamento delle soluzioni eccezionali f_i al tendere di i all'infinito. Segue subito dal n. 19 che al crescere di i all'infinito il numero degli zeri di f_i in (a, b) oltrepassa ogni limite. Ma vogliamo dimostrare di più che al crescere di i all'infinito, i punti di zero di f_i invadono qualunque segmento (a', b') di (a, b), arbitrariamente preso, per modo, quindi, che la distanza fra due consecutivi punti di zero di f_i può rendersi inferiore ad ogni termine assegnato. Sia c'_2 la 2ª cost. di sit. del-

l'equazione:

$$y'' + y\,A(x) = 0\,,$$

relativa al tratto (a', b'). Le soluzioni dell'equazione:

$$y'' + y\,\frac{A(x)}{c'_2} = 0\,,$$

nulle in a', s'annullano in b'. Ora, comunque sia c'_2, si potrà trovare un numero intiero e positivo ν tale che per $i \geq \nu$, sia:

$$l_i\,A(x) \geq \frac{A(x)}{c'_2}\,,$$

e quindi (v. teor. di confr.) le soluzioni dell'equazione:

$$y'' + y\,l_i\,A(x) = 0\,,$$

nulle in a', hanno, per $i \geq \nu$, almeno un ulteriore punto di zero in (a', b'), ne viene, pel teorema di *Sturm* citato al n. 4, che le f_i, per $i \geq \nu$, hanno almeno un punto di zero in (a', b'), c. v. d.

Possiamo dunque enunciare il *teorema d'oscillazione:*

Quando λ *percorre la successione di valori eccezionali* l_i *la soluzione eccezionale* f_i, *può farsi annullare, in* (a, b), *un numero arbitrario di volte corrispondentemente ad adeguati valori di i, in guisa che attribuendo a* λ *valori eccezionali* l_i *crescenti all'infinito, quella soluzione subisca in* (a, b) *un numero d'oscillazioni crescente all'infinito, l'ampiezza di ciascuna decrescendo a zero.*

VIII.

I valori eccezionali come minimi.

25. — I valori eccezionali $h_i, k_i, \overline{h}_i, \overline{k}_i$, si presentano anche nel problema del calcolo delle variazioni che tratta della ricerca dei

massimi e minimi del quoziente di due integrali:

$$\text{(1)} \qquad I(u) = \frac{\displaystyle\int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx}{\displaystyle\int_a^b A(x)\,u^2(x)\,dx}$$

in determinati campi funzionali per la funzione u [1]).

Diciamo $\{u\}$ l'aggregato di funzioni, la cui funzione qualunque u è in (a, b) finita e continua con la sua derivata prima, ed è nulla in a.

Il quoziente (1) non ha massimo in un tale aggregato. Difatti le soluzioni eccezionali φ_i e ψ_i sono di $\{u\}$, ed è (n. 23):

$$I(\varphi_i) = h_i\,, \quad I(\psi_i) = k_i \quad \text{con} \quad \lim_{i=\infty} h_i = \infty\,, \quad \lim_{i=\infty} k_i = \infty\,.$$

Vogliamo dimostrare che il *valore eccezionale* h_1 *è il minimo di* $I(u)$ *per le funzioni dell'aggregato* $\{u\}$.

Poniamo:

$$I_1(u) = \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \quad , \quad I_0(u) = \int_a^b A(x)\,u^2(x)\,dx\,.$$

Indichi h un qualunque numero positivo minore di h_1, dico che, per qualunque funzione u di $\{u\}$, è:

$$I(u) > h\,,$$

cioè:

$$I_1(u) - h\,I_0(u) > 0\,.$$

Difatti a è il primo emiconiugato di b, a sinistra, rispetto all'equazione:

$$\text{(2)} \qquad y'' + y h_1\,A(x) = 0\,,$$

[1]) Cfr.: Picard. Traité d'A. Tom. III, Chap. VI. — Mason. Math. Ann. Bd. 58 — Hilbert. Zweite Mittheilung, Göttinger Nachrichten, 1904.

e quindi, per essere

$$h\,\mathrm{A}(x) \leq h_1\,\mathrm{A}(x)\,,$$

il primo emiconiugato di b, a sinistra, rispetto all'equazione:

$$(3)\qquad y'' + yh\,\mathrm{A}(x) = 0\,,$$

non esisterà in $(a\,,b)$, cioè, una soluzione v di quest'equazione, di derivata nulla in b ed ivi positiva, è sempre positiva in $(a\,,b)$. Ora è identicamente:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 = \left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{v}\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{v}\frac{dv}{dx}\right) - \frac{u^2}{v}\frac{d^2v}{dx^2}\,,$$

e per essere v soluzione di (3):

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - h\,\mathrm{A}(x)\,u^2 = \left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{v}\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{v}\frac{dv}{dx}\right),$$

e quindi, u essendo dell'aggregato $\{u\}$, integrando fra a e b, si ha:

$$\mathrm{I}_1(u) - h\,\mathrm{I}_0(u) = \int_a^b \left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{v}\frac{dv}{dx}\right)^2 dx\,.$$

Ma non può essere identicamente:

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{v}\frac{dv}{dx} = 0\,,$$

per cui è:

$$\mathrm{I}_1(u) - h\,\mathrm{I}_0(u) > 0\,.$$

Il limite inferiore di $\mathrm{I}(u)$, nell'aggregato $\{u\}$, è pertanto h_1, ma la soluzione eccezionale φ_1 è di $\{u\}$ e per essa è (n. 23):

$$\mathrm{I}(\varphi_1) = h_1\,,$$

h_1 è dunque il minimo di $\mathrm{I}(u)$ nell'aggregato $\{u\}$, c. v. d.

Il risultato ottenuto può, evidentemente, porsi sotto la forma: Detto r un numero positivo, il minimo di $\mathrm{I}_1(u)$ per le funzioni di $\{u\}$ che rendono:

$$\mathrm{I}_0(u) = r\,,$$

è $r.h_1$ e la funzione minimizzante è $\sqrt{r}\,\varphi_1(x)$.

In modo perfettamente analogo trovasi che il minimo di $\mathrm{I}(u)$, nell'aggregato $\{u\}$ la cui funzione qualunque u è in $(a\,,b)$ finita e continua con la sua derivata prima, e si annulla in b, è $\overline{h}_1$ e la funzione minimizzante è $\overline{\varphi}_1(x)$. Fra le indicate funzioni sono le $\overline{\varphi}_i(x)$ e le $\psi_i(x)$, per le quali è:

$$\mathrm{I}(\overline{\varphi}_i) = \overline{h}_i \quad , \quad \mathrm{I}(\psi_i) = k_i\,,$$

quindi $\mathrm{I}(u)$ non ha massimo nell'indicato aggregato.

26. — L'aggregato $\{u\}$ sia ora quello la cui funzione qualunque u è in $(a\,,b)$ finita e continua con la sua derivata prima, e si annulla in a e in b. Il massimo di $\mathrm{I}(u)$ in un tale aggregato non esiste, difatti le soluzioni eccezionali $\psi_i(x)$ sono di $\{u\}$ e per esse è:

$$\mathrm{I}(\psi_i) = k_i \quad \text{con} \quad \lim_{i=\infty} k_i = \infty\,.$$

Si tratta di trovare il minimo di $\mathrm{I}(u)$ nell'aggregato $\{u\}$. Si potrebbe dimostrare, procedendo in modo analogo a quello tenuto al n.° precedente (cfr. *Picard* loc. cit.) che *k_1 è il minimo di* $\mathrm{I}(u)$ *nell'aggregato* $\{u\}$, ma noi dedurremo ciò, in modo immediato, da quanto precedentemente si è stabilito.

Per quanto si vide al n. 19, vi è un punto ξ, nell'interno di $(a\,,b)$, pel quale avviene che le prime cost. di sit. dell'equazione:

$$(4)\qquad y'' + y\,\mathrm{A}(x) = 0\,,$$

relative, rispettivamente, ai tratti $(a\,,\xi)$, $(b\,,\xi)$ sono eguali alla seconda cost. di sit. $\dfrac{1}{k_1}$ della (4) relativa al tratto $(a\,,b)$.

Ora se u è una funzione di $\{u\}$, pel n.° precedente, potremo scrivere la diseguaglianza:

$$\mathrm{I}_1(u) = \int_a^\xi \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \int_\xi^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq k_1 \int_a^\xi \mathrm{A}u^2\,dx + k_1 \int_\xi^b \mathrm{A}\,u^2\,dx = k_1\,\mathrm{I}_0(u)\,,$$

e quindi:

$$\mathrm{I}(u) \geq k_1 ,$$

che, con la relazione:

$$\mathrm{I}(\psi_1) = k_1 ,$$

considerando che ψ_1 appartiene ad $\{u\}$, dimostra quanto si voleva.

Evidentemente, il risultato ottenuto può anche enunciarsi:

Il minimo di $\mathrm{I}_1(u)$ per le funzioni dell'aggregato $\{u\}$ che rendono:

$$\mathrm{I}_0(u) = r ,$$

r essendo un numero positivo, è rk_1, e la funzione minimizzante è $\sqrt{r}\,\psi_1(x)$.

27. — Siano x_1 e x_2 due punti di (a, b), conveniamo di indicare con $h(x_1, x_2)$ l'inversa della 1.ª cost. di sit. della (4) relativa al tratto (x_1, x_2), con $\overline{h}(x_1, x_2)$ l'inversa della 1.ª cost. di sit. della (4) relativa al tratto (x_2, x_1), con $k(x_1, x_2)$ l'inversa della 2.ª cost. di di sit. della (4) relativa al tratto (x_1, x_2). È a noi ben noto il modo di comportarsi delle funzioni $h(x_1, x_2)$, $\overline{h}(x_1, x_2)$, $k(x_1, x_2)$ delle variabili x_1 e x_2, variabili entrambe nel tratto (a, b), e sappiamo costruire i valori che a quelle funzioni competono per ogni sistema di valori delle x_1 e x_2. Potremo perciò riguardare quelle funzioni come assegnate in (a, b) [1].

Ciò posto ci sarà facile trovare i valori eccezionali $\overline{k}_i, h_i\ (i > 1)$, $k_i\ (i > 1)$, $\overline{h}_i\ (i > 1)$, come minimi di $\mathrm{I}(u)$ in determinati campi funzionali.

Cominciamo da $\overline{k}_1$. V'è un unico e ben determinato punto ξ, nell'interno di (a, b), per cui è

$$\overline{h}(a, \xi) = h(\xi, b)$$

il valore eccezionale $\overline{k}_1$ è, come sappiamo dal n. 19, eguale al valore comune di $\overline{h}(a, \xi)$, $h(\xi, b)$.

[1] Per il calcolo dei valori di $h(x_1, x_2)$ vedasi anche a pag. 107 e seg. del III volume del Trattato d'A. del Picard.

La funzione qualunque $u(x)$ dell'aggregato $\{u\}$, sia, in (a, b), finita e continua con la sua derivata, abbia, *nell'interno di* (a, b), almeno un punto di zero, soddisfi in fine alla relazione:

$$(5)\quad \overline{h}(a, x_1)\int_a^{x_1} \mathrm{A}u^2\,dx + h(x_1, b)\int_{x_1}^{b} \mathrm{A}u^2\,dx \geq \begin{cases} \overline{h}(a, \xi)\displaystyle\int_a^b \mathrm{A}u^2\,dx \\ h(\xi, b)\displaystyle\int_a^b \mathrm{A}u^2\,dx \end{cases} ,$$

dove x_1 è un punto di zero di $u(x)$ nell'interno di (a, b).

Si osservi che la relazione (5), quando è $x_1 = \xi$, lascia completamente arbitraria la $u(x)$. È facile poi convincersi che la relazione (5), anche quando la $u(x)$ non abbia fra i suoi punti di zero il punto ξ, può esser soddisfatta da infinite funzioni $u(x)$; difatti, la (5) può anche scriversi:

$$(5_1)\quad \left\{\overline{h}(a, x_1) - \overline{h}(a, \xi)\right\}\int_a^{x_1} \mathrm{A}u^2\,dx + \left\{h(x_1, b) - h(\xi, b)\right\}\int_{x_1}^{b} \mathrm{A}u^2\,dx \geq 0 ,$$

e poichè una delle due quantità:

$$\overline{h}(a, x_1) - \overline{h}(a, \xi) \quad , \quad h(x_1, b) - h(\xi, b),$$

è positiva, assunto arbitrariamente il punto x_1, di zero di $u(x)$, e assegnati arbitrariamente i valori di $u(x)$ o nel tratto (a, x_1) o nel tratto (x_1, b), si potranno poi, evidentemente, attribuire tali valori alla $u(x)$ nell'altro tratto che risulti verificata la (5_1), e questi valori conservano anch'essi una grande arbitrarietà, notisi, invero, che se $v(x)$ è una funzione soddisfacente alla (5_1), e supponiamo, per es., $x_1 < \xi$, qualunque altra funzione $u(x)$, nulla in x_1 e verificante le relazioni:

$$|u(x)| \geq |v(x)| \quad \text{per} \quad a \leq x \leq x_1$$
$$|u(x)| \leq |v(x)| \quad \text{per} \quad x_1 \leq x \leq b ,$$

soddisfa alla (5_1).

Vogliamo dimostrare che $\overline{k}_1$ è il minimo di $\mathrm{I}(u)$ nell'aggregato $\{u\}$.

Perciò faremo anzitutto vedere che, quando u è funzione di $\{u\}$, si ha:

$$\mathrm{I}_1(u) - \overline{k}_1 \mathrm{I}_0(u) \geq 0 .$$

Sia x_1 quel punto di zero di $u(x)$, interno ad (a, b), per cui è verificata la (5), si ha:

$$\mathrm{I}_1(u) - \overline{k}_1 \mathrm{I}_0(u) = \int_a^{x_1} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{b} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \overline{k}_1 \mathrm{I}_0(u) ,$$

ma per quanto si vide al n. 25, è:

$$\int_a^{x_1} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq \overline{h}(a, x_1) \int_a^{x_1} \mathrm{A}u^2 dx$$

$$\int_{x_1}^{b} \left(\frac{du}{da}\right)^2 dx \geq h(x_1, b) \int_{x_1}^{b} \mathrm{A}u^2 dx ,$$

e quindi:

$$\mathrm{I}_1(u) - \overline{k}_1 \mathrm{I}_0(u) \geq \overline{h}(a, x_1) \int_a^{x_1} \mathrm{A}u^2 dx + h(x_1, b) \int_{x_1}^{b} \mathrm{A}u^2 dx - \overline{k}_1 \mathrm{I}_0(u) .$$

Ora è $\overline{k}_1 = h(\xi, b) = \overline{h}(a, \xi)$, e quindi, per la relazione (5) a cui soddisfa la $u(x)$, si avrà:

$$\mathrm{I}_1(u) - \overline{k}_1 \mathrm{I}_0(u) \geq 0 ,$$

cioè

$$\mathrm{I}(u) \geq \overline{k}_1 .$$

Ma $\overline{\psi}_1$ è di $\{u\}$ e per essa è:

$$\mathrm{I}(\overline{\psi}_1) = \overline{k}_1 .$$

È dunque dimostrato quanto si voleva.

Collo stesso semplice processo si dimostra che il valore eccezionale h_2 è il minimo di $\mathrm{I}(u)$ nell'aggregato $\{u\}$ la cui funzione qualunque $u(x)$ è, in (a, b), finita e continua con la sua derivata,

è nulla in a, ha *nell'interno di* (a, b), almeno un ulteriore punto di zero e soddisfa alla relazione:

$$(6) \quad k(a, x_1) \int_a^{x_1} \mathrm{A}u^2 dx + h(x_1, b) \int_{x_1}^{b} \mathrm{A}u^2 dx \geq \begin{cases} k(a, \xi) \int_a^b \mathrm{A}u^2 dx \\ h(\xi, b) \int_a^b \mathrm{A}u^2 dx \end{cases} ,$$

x_1 essendo un punto di zero di $u(x)$, interno ed (a, b), e ξ quell'unico punto, nell'interno di (a, b), per cui è:

$$k(a, \xi) = h(\xi, b) .$$

Sia $u(x)$ una funzione di $\{u\}$ e x_1 quel suo punto di zero per cui è verificata la (6), è:

$$\mathrm{I}_1(u) - h_2 \mathrm{I}_0(u) = \int_a^{x_1} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \int_{x_1}^{b} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - h_2 \mathrm{I}(u) ,$$

ed essndo, pei nn. 19, 25, 26:

$$h_2 = k(\xi, b) = h(\xi, b)$$

$$\int_a^{x_1} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq k(a, x_1) \int_a^{x_1} \mathrm{A}u^2 dx$$

$$\int_{x_1}^{b} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq h(x_1, b) \int_{x_1}^{b} \mathrm{A}u^2 dx ,$$

riuscirà, in virtù di (6), soddisfatta la relazione:

$$\mathrm{I}(u) \geq h_2 ,$$

la quale, con la considerazione che $\varphi_2(x)$ è di $\{u\}$ e che per essa è:

$$\mathrm{I}(\varphi_2) = h_2 ,$$

dimostra quanto si voleva.

Ed ora, analogamente procedendo nel caso generale, potremo enunciare i teoremi:

Il valore eccezionale $h_i\,(i>1)$ *è il minimo di* $\mathrm{I}(u)$ *nell'aggregato* $\{u\}$ *la cui funzione qualunque* $u(x)$ *è, in* (a,b) *finita e continua con la sua derivata, è nulla in* a*, ha, nell'interno di* (a,b)*, almeno* $i-1$ *ulteriori punti di zero e soddisfa alla relazione:*

$$k(a,x_1)\int_a^{x_1}\mathrm{A}u^2dx+\sum_{\nu=2}^{\nu=i-1}k(x_{\nu-1},x_\nu)\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\mathrm{A}u^2dx+ \tag{7}$$

$$+\,h(x_{i-1},b)\int_{x_{i-1}}^{b}\mathrm{A}u^2dx\geq\begin{cases}k(a,\xi_1)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx\\ k(\xi_{\nu-1},\xi_\nu)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx,\\ h(\xi_{i-1},b)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx\end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ *essendo* $i-1$ *punti di zero di* $u(x)$ *nell'interno di* (a,b) *e* $\xi_1, \xi_2 \dots, \xi_{i-1}$ *quell'unico sistema di valori per cui riescono soddisfatte le* $i-1$ *equazioni:*

$$k(a,\xi_1)=k(\xi_1,\xi_2)=\dots=k(\xi_{i-2},\xi_{i-1})=h(\xi_{i-1},b)\ ^{1)}.$$

---

[1]) Alla relazione (7) soddisfano infinite funzioni. Essa infatti lascia la $u(x)$ completamente arbitraria quando fra i suoi punti di zero vi sono $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}$, e in ogni altro caso, ponendo la (7) sotto la forma:

$$\{k(a,x_1)-k(a,\xi_1)\}\int_a^{x_1}\mathrm{A}u^2dx+\sum_{\nu=2}^{\nu=i-1}\{k(x_{\nu-1},x_\nu)-k(\xi_{\nu-1},\xi_\nu)\}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\mathrm{A}u^2dx+ \tag{7_1}$$

$$+\{h(x_{i-1},b)-h(\xi_{i-1},b)\}\int_{x_{i-1}}^{b}\mathrm{A}u^2dx\geq 0,$$

si vede che le funzioni $u(x)$ ad essa soddisfacente conservano sempre una grande arbitrarietà, poichè almeno uno dei tratti

$$(a,x_1)\ ,\ (x_{\nu-1},x_\nu)\ ,\ (x_{i-1},b)\qquad(\nu=2,\dots,i-1)$$

dovrà essere intieramente contenuto in uno dei tratti:

$$(a,\xi_1)\ ,\ (\xi_{\nu-1},\xi_\nu)\ ,\ (\xi_{i-1},b)\ ,\qquad(\nu=2,\dots,i-1)$$

e quindi almeno uno dei coefficienti delle quantità:

$$\int_a^{x_1}\mathrm{A}u^2dx\ ,\ \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\mathrm{A}u^2dx\ ,\ \int_{x_{i-1}}^{b}\mathrm{A}u^2dx\ ,\qquad(\nu=2,\dots,i-1)$$

La funzione eccezionale $\varphi_i(x)$ *è di* $\{u\}$ *ed è la funzione minimizzante.*

Il valore eccezionale $k_i\,(i>1)$ *è il minimo di* $\mathrm{I}(u)$ *nell'aggregato* $\{u\}$ *la cui funzione qualunque* $u(x)$ *è, in* (a,b)*, finita e continua con la sua derivata, è nulla in* a *e in* b*, ha, nell'interno di* (a,b)*, almeno* $i-1$ *ulteriori punti di zero e soddisfa alla relazione:*

$$k(a,x_1)\int_a^{x_1}\mathrm{A}u^2dx+\sum_{\nu=2}^{\nu=i-1}k(x_{\nu-1},x_\nu)\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\mathrm{A}u^2dx+ \tag{8}$$

$$+\,k(x_{i-1},b)\int_{x_{i-1}}^{b}\mathrm{A}u^2dx\geq\begin{cases}k(a,\xi_1)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx\\ k(\xi_{\nu-1},\xi_\nu)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx,\\ k(\xi_{i-1},b)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx\end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$, *essendo* $i-1$ *punti di zero di* $u(x)$ *nell'interno di* (a,b) *e* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}$ *quell'unico sistema di valori per cui riescono soddisfatte le* $i-1$ *equazioni:*

$$k(a,\xi_1)=k(\xi_1,\xi_2)=\dots=k(\xi_{i-2},\xi_{i-1})=k(\xi_{i-1},b).$$

La funzione eccezionale $\psi_i(x)$ *è di* $\{u\}$ *ed è la funzione minimizzante.*

---

dovrà essere positivo. Supposto, per es., che il tratto $(x_{\nu-1},x_\nu)$ sia contenuto nel tratto $(\xi_{\nu-1},\xi_\nu)$, sarà: $k(x_{\nu-1},x_\nu)-k(\xi_{\nu-1},\xi_\nu)>0$, e quindi, se la funzione $u(x)$, finita e continua con la sua derivata in tutto (a,b), è nulla in $a, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$, qualunque sia il comportamento suo nei tratti $(a,x_{\nu-1})$, (x_ν,b), si potranno poi attribuire alla $u(x)$ valori nel tratto $(x_{\nu-1},x_\nu)$, di valore assoluto talmente grande, che risulti soddisfatta la (7_1). Si noti che $k(x_{\nu-1},x_\nu)$ cresce continuamente e indefinitamente al decrescere verso zero dell'ampiezza $x_\nu-x_{\nu-1}$ e che quindi i valori da attribuire alla $u(x)$ nel tratto $x_\nu-x_{\nu-1}$, al decrescere dell'ampiezza $x_\nu-x_{\nu-1}$, possono essere limitati come si conviene alla continuità della funzione.

Il valore eccezionale $\overline{h}_i\,(i>1)$ *è il minimo di* $\mathrm{I}(u)$ *nell'aggregato* $\{u\}$ *la cui funzione qualunque* $u(x)$ *è, in* $(a\,,b)$, *finita e continua con la sua derivata, è nulla in* b, *ha, nell'interno di* $(a\,,b)$, *almeno* $i-1$ *ulteriori punti di zero e soddisfa alla relazione:*

$$\overline{h}(a,x_1)\int_a^{x_1}\mathrm{A}u^2dx+\sum_{\nu=2}^{\nu=i-1}k(x_{\nu-1},x_\nu)\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\mathrm{A}u^2dx+$$
$$+\,k(x_{i-1},b)\int_{x_{i-1}}^{b}\mathrm{A}u^2dx\geq\begin{cases}\overline{h}(a,\xi_1)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx\\ k(\xi_{\nu-1},\xi_\nu)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx,\\ k(\xi_{i-1},b)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx\end{cases}$$

$x_1\,,x_2\,,\ldots,x_{i-1}$, *essendo* $i-1$ *punti di zero di* $u(x)$ *nell'interno di* $(a\,,b)$ *e* $\xi_1\,,\xi_2\,,\ldots,\xi_{i-1}$ *quell'unico sistema di valori per cui riescono soddisfatte le* $i-1$ *equazioni:*

$$\overline{h}(a\,,\xi_1)=k(\xi_1\,,\xi_2)=\ldots=k(\xi_{i-2}\,,\xi_{i-1})=k(\xi_{i-1}\,,b).$$

La funzione eccezionale $\overline{\varphi}_i\,(x)$ *è di* $\{u\}$ *ed è la funzione minimizzante.*

Il valore eccezionale $\overline{k}_i(i\geq 1)$ *è il minimo di* $\mathrm{I}(u)$ *nell'aggregate* $\{u\}$ *la cui funzione qualunque* $u(x)$ *è, in* $(a\,,b)$, *finita e continua con la sua derivata, ha, nell'interno di* $(a\,,b)$, *almeno* i *punti di zero e soddisfa alla relazione:*

$$\overline{h}(a\,,x_1)\int_a^{x_1}\mathrm{A}u^2dx+\sum_{\nu=2}^{\nu=i}k(x_{\nu-1}\,,x_\nu)\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}\mathrm{A}u^2dx+$$
$$+\,h(x_i\,,b)\int_{x_i}^{b}\mathrm{A}u^2dx\geq\begin{cases}\overline{h}(a\,,\xi_1)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx\\ k(\xi_{\nu-1}\,,\xi_\nu)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx\,,\\ h(\xi_i\,,b)\int_a^b\mathrm{A}u^2dx\end{cases}$$

$x_1\,,x_2\,,\ldots,x_i$ *essendo i punti di zero di* $u(x)$ *nell'interno di* $(a\,,b)$ *e* $\xi_1\,,\xi_2\,,\ldots,\xi_i$ *quell'unico sistema di valori per cui riescono soddisfatte le i equazioni:*

$$\overline{h}(a\,,\xi_1)=k(\xi_1\,,\xi_2)=\ldots=k(\xi_{i-1}\,,\xi_i)=h(\xi_i\,,b).$$

La funzione eccezionale $\overline{\psi}_i\,(x)$ *è di* $\{u\}$ *ed è la funzione minimizzante.*

Già *Hilbert* e *Mason* hanno trovato (cfr. luoghi citati) i valori eccezionali k_i e $\overline{k}_i$ come minimi di $\mathrm{I}(u)$ in campi funzionali che non sono quelli da noi considerati. A noi sembra, però, che, sebbene non sia lecito affermare che i campi funzionali *Hilbert-Mason* sono contenuti nei nostri, questi siano molto più ampî di quelli.

Hilbert e *Mason* trovano, per es., il valore eccezionale $k_i\,(i>1)$ come minimo di $\mathrm{I}(u)$ in un aggregato la cui funzione qualunque è in $(a\,,b)$ finita e continua con le sue derivate dei due primi ordini, è nulla in a e in b e soddisfa alle $i-1$ relazioni:

$$\int_a^b\mathrm{A}\psi_1u\,dx=0\;,\;\int_a^b\mathrm{A}\psi_2u\,dx=0\;,\ldots,\int_a^b\mathrm{A}\psi_{i-1}u\,dx=0\,.$$

Ora queste relazioni sono più restrittive, per la $u(x)$, dell'unica diseguaglianza (8): si consideri, per es., il valore eccezionale k_2, esso, secondo *Hilert* e *Mason,* è minimo di $\mathrm{I}(u)$ per le dette funzioni nulle in a e in b e rendenti:

$$\int_a^b\mathrm{A}\psi_1u\,dx=0\,,\tag{9}$$

siccome, in $(a\,,b)$, $\mathrm{A}\psi_1$ si mantiene di segno invariato, quest'eguaglianza ha di conseguenza che $u(x)$ ha, nell'interno di $(a\,,b)$, almeno un punto di zero, proprietà questa a cui devon soddisfare anche le funzioni dell'aggregato da noi considerato pel valore eccezionale k_2, diciamo ξ il punto di $(a\,,b)$ per cui è $k(a\,,\xi)=k(\xi\,,b)$, mentre nel nostro campo funzionale le funzioni che si annullano in a, in b e in ξ, non debbono soddisfare ad alcuna relazione, nel campo *Hilbert-Mason*, debbono quelle funzioni soddisfare ulteriormente alla (9).

IX.

I valori eccezionali come zeri di una trascendente intiera.

28. — I valori eccezionali h_i, k_i, $\overline{h}_i$, $\overline{k}_i$ possono altresì considerarsi come zeri di trascendenti intiere. Ciò è noto.

Devesi al *Mason* (loc. cit.) la costruzione effettiva di trascendenti intiere aventi per zeri i valori k_i e $\overline{k}_i$. Egli vi riuscì servendosi della memoria del *Fredholm*, sulla risoluzione delle equazioni integrali lineari [1]. Nell'ultimo capitolo, utilizzando anche noi i risultati del *Fredholm*, costruiremo due trascendenti intiere aventi per zeri i valori h_i, $\overline{h}_i$; per ora vogliamo solo fare un breve studio di due tali trascendenti intiere che subito si presentano.

L'integrale $u(x, h)$ dell'equazione:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + yh\,A(x) = 0\,, \tag{1}$$

determinato dalle condizioni iniziali:

$$[u]_{x=a} = \alpha \quad , \quad \left[\frac{du}{dx}\right]_{x=a} = \beta\,,$$

è funzione di h.

Come caso particolare di un teorema del *Picard* [2]) e di più generali teoremi del *Dini* [3]), discende essere, per x in (a, b), $u(x, h)$, $\dfrac{\partial u(x, h)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u(x, h)}{\partial x^2}$ funzioni intiere di h in tutto il piano complesso e, posto:

$$u(x, h) = \sum_0^\infty u_n(x)\,h^n\,,$$

la serie del secondo membro, considerata rispetto ad x, uniformemente convergente in (a, b). Nella citata memoria del *Dini* è dimostrato, di più, che le funzioni $u_n(x)$ sono in (a, b) finite e continue con le loro derivate dei due primi ordini e le serie:

$$\sum_0^\infty \frac{du_n}{dx}h^n \quad , \quad \sum_0^\infty \frac{d^2u_n}{dx^2}h^n\,,$$

sono, considerate rispetto ad x, uniformemente convergenti in (a, b), per qualunque valore di h, per modo che si potrà scrivere:

$$\frac{\partial u(x, h)}{\partial x} = \sum_0^\infty \frac{du_n}{dx}h^n \quad , \quad \frac{\partial^2 u(x, h)}{\partial x^2} = \sum_0^\infty \frac{d^2u_n}{dx^2}h^n\,.$$

La $u(x, h)$, per valori reali di h e per x in (a, b), soddisfa all'equazione (1), cioè la trascendente intiera in h:

$$\frac{\partial^2 u(x, h)}{\partial x^2} + h\,A(x)\,u(x, h)$$

è nulla sull'asse reale, essa sarà pertanto nulla in tutto il piano complesso. Ne segue che anche per valori complessi di h, la $u(x, h)$ soddisfa alla (1).

Diciamo $v(x, h)$ l'integrale della (1) determinato dalle condizioni iniziali:

$$[v]_{x=a} = \alpha \quad , \quad \left[\frac{dv}{dx}\right]_{x=b} = \beta'\,.$$

Noi supponiamo

$$\alpha \neq 0 \quad , \quad \beta' \neq \beta$$

e quindi gli integrali $u(x, h)$, $v(x, h)$ saranno indipendenti. Diciamo $y(x, h)$ un integrale della (1), nullo in a. Per $h = h_n$, $y(x, h_n)$ sarà una soluzione eccezionale, essa sarà cioè soluzione dell'equazione:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + yh_n\,A(x) = 0\,,$$

nulla in a, di derivata nulla in b, non identicamente nulla in (a, b).

[1]) Fredholm. Acta Math. 27.
[2]) Picard. Traité d'Analyse, Tom. III, pag. 92.
[3]) Dini. Annali di Mat., Tom. XII della Serie III.

D'altro canto, essendo:

$$y(x, h_n) = c_1 u(x, h_n) + c_2 v(x, h_n),$$

devon verificarsi le equazioni:

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha(c_1 + c_2) = 0 \\ c_1\left[\dfrac{\partial u(x, h)}{\partial x}\right]_{\substack{x=b\\h=h_n}} + c_2\left[\dfrac{\partial v(x, h)}{\partial x}\right]_{\substack{x=b\\h=h_n}} = 0, \end{cases}$$

con le c_1 e c_2 non entrambe nulle. Ne viene necessariamente che: *I valori eccezionali h_n sono zeri della trascendente intiera in h:*

$$D(h) \equiv \left[\frac{\partial u(x, h)}{\partial x}\right]_{x=b} - \left[\frac{\partial v(x, h)}{\partial x}\right]_{x=b}.$$

La $D(h)$ non ha altri zeri reali diversi dagli h_n. Difatti, ad ogni zero (reale o complesso) h della $D(h)$ corrisponde un integrale della (1), non identicamente nullo, nullo in a e di derivata nulla in b, ora gli unici valori reali di h per cui ciò è possibile sono i valori eccezionali h_n (n. 19).

La $D(h)$ non ha zeri complessi. Difatti, la $D(h)$ ha i coefficienti delle varie potenze di h, tutti reali, quindi, se essa ammette uno zero complesso h', ammetterà lo zero coniugato h'_0; a questi valori h', h'_0 di h corrispondono due integrali coniugati $y' = y(x, h')$, $y'_0 = y(x, h'_0)$, rispettivamente delle equazioni:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + yh' A(x) = 0 \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} + yh'_0 A(x) = 0,$$

nulli in a e di derivata nulla in b, per i quali quindi (n. 23, formula (4)), è:

$$(h' - h'_0)\int_a^b A y' y'_0\, dx = 0.$$

Ora, essendo y' e y'_0 coniugati quest'eguaglianza è assurda se non è nullo il coefficiente dell'immaginario di h'.

Gli unici zeri della trascendente intiera $D(h)$ sono dunque i valori eccezionali h_n, essi sono zeri semplici. Per dimostrar ciò

stabiliamo dapprima una formula notevole. Poniamo $y_n = y(x, h_n)$. Si ha (n. 23, formula (4)):

$$(3)\qquad (h - h_n)\int_a^b A y_n y\, dx = -\left[\frac{\partial y}{\partial x} y_n\right]_{x=b}.$$

Sia $h = h_n + \varepsilon$, si avrà:

$$y = y_n + \varepsilon\left[\frac{\partial y}{\partial h}\right]_{h=h_n} + \ldots$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{h=h_n} + \varepsilon\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial h}\right]_{h=h_n} + \ldots,$$

introducendo queste relazioni nella (3), si ricava:

$$\varepsilon\int_a^b A y_n^2\, dx + \varepsilon^2\int_a^b A y_n\left[\frac{\partial y}{\partial h}\right]_{h=h_n} dx + \ldots = -\varepsilon\left[y_n \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial h}\right]_{\substack{x=b\\h=h_n}} + \ldots$$

e quindi, dividendo per ε, e passando al limite per ε infinitesimo:

$$(4)\qquad \int_a^b A y_n^2\, dx = -\left[y_n \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial h}\right]_{\substack{x=b\\h=h_n}},$$

che è la formula che volevamo stabilire. Dalla (4) segue:

$$(5)\qquad \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial h}\right]_{\substack{x=b\\h=h_n}} \neq 0.$$

Ciò posto, potremo dimostrare immediatamente che h_n è radice semplice della equazione

$$D(h) = 0.$$

Difatti, ove si avesse contemporaneamente:

$$D(h_n) = 0 \quad , \quad \left[\frac{dD}{dh}\right]_{h=h_n} = 0,$$

si potrebbe soddisfare, con valori non tutti nulli delle c_1, c_2 alle (2) e contemporaneamente alla:

$$c_1\left[\frac{\partial^2 u(x,h)}{\partial x\partial h}\right]_{\substack{x=b\\h=h_n}}+c_2\left[\frac{\partial^2 v(x,h)}{\partial x\partial h}\right]_{\substack{x=b\\h=h_n}}=0\,,$$

ne verrebbe per la y_n:

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial h}\right]_{\substack{x=b\\h=h_n}}=0\,.$$

il che, per la (5), è assurdo.

In modo perfettamente analogo vedesi che:

Detti $u(x,h)$, $v(x,h)$ due integrali indipendenti della (1) *aventi in b valori eguali diversi da zero, la trascendente intiera:*

$$\overline{\mathrm{D}}(h)\equiv\left[\frac{\partial u(x,h)}{\partial x}\right]_{x=a}-\left[\frac{\partial v(x,h)}{\partial x}\right]_{x=a},$$

non ha per zeri che i valori eccezionali $\overline{h}_n$ e ciascun di essi come semplice.

Detti $u(x,h)$, $v(x,h)$ due integrali indipendenti della (1) *aventi in a valori eguali diversi da zero, la trascendente intiera:*

$$\Delta(h)\equiv\Big[u(x,h)\Big]_{x=b}-\Big[v(x,h)\Big]_{x=b},$$

non ha per zeri che i valori eccezionali k_n e ciascun di essi come semplice [1]).

Detti $u(x,h)$, $v(x,h)$ due integrali indipendenti della (1) *aventi in a derivate prime eguali e diverse da zero, la trascendente intiera:*

$$\overline{\Delta}(h)\equiv\left[\frac{\partial u(x,h)}{\partial x}\right]_{x=b}-\left[\frac{\partial v(x,h)}{\partial x}\right]_{x=b},$$

non ha per zeri che i valori eccezionali $\overline{k}_n$ e ciascun di essi come semplice.

Per la forma di trascendenti intiere aventi, come $\Delta(h)$ e $\overline{\Delta}(h)$, i soli punti k_n e $\overline{k}_n$ per zeri, vedi il lavoro citato del *Mason*.

---

[1]) Cfr. PICARD. l. c.

29. — Il *Picard* nel capitolo VI del 3.° volume del suo Trattato d'Analisi, raggiunge il risultato:

« *I valori eccezionali k_i possono essere ottenuti l'un dopo l'altro* « *per mezzo d'un calcolo regolare insieme alle soluzioni eccezionali* « *che a quei valori corrispondono* ».

Noi, in grazia dei risultati ottenuti al capitolo V ed al n.° precedente, in modo tutt'affatto simile a quello tenuto dal *Picard*, otteniamo il risultato:

I valori eccezionali h_i, $\overline{h}_i$ possono essere ottenuti l'un dopo l'altro per mezzo d'un calcolo regolare, insieme alle soluzioni eccezionali che a quei valori corrispondono.

Mostriamo il calcolo regolare di cui si parla nell'enunciato.

Diciamo $u(x,h)$ l'integrale dell'equazione (1) che ha in a il valore assegnato A e in b la derivata di valore assegnato B. Per quanto s'è stabilito nel n.° precedente, per ogni valore di h diverso da h_i, si potrà porre:

$$u(x,h)=\frac{\sum_0^\infty f_n(x)h^n}{\mathrm{D}(h)},$$

dove le serie:

$$\sum_0^\infty f_n(x)h^n\,,\quad \sum_0^\infty\frac{df_n}{dx}h^n\,,\quad \sum_0^\infty\frac{d^2f_n}{dx^2}h^n\,,$$

sono, per h qualunque, considerate rispetto ad x, uniformemente convergenti in (a,b). La funzione $u(x,h)$ sarà dunque, per ogni valore di x, una funzione uniforme di h, non avente per poli che i punti h_i e ciascun d'essi come semplice.

Per $|h|<h_1$, potrà, pertanto, porsi:

$$(6)\qquad u(x,h)=u_0+u_1h+\ldots+u_nh^n+\ldots\,.$$

Per calcolare le funzioni $u_0(x)$, $u_1(x)$, ..., $u_n(x)$, ..., consideriamo per h valori reali compresi fra 0 e h_1. Per tali valori di h, la 1.ª cost. di sit. della (1) relativa al tratto (a,b) è minor d'uno, e quindi, per il calcolo di $u(x,h)$, sarà applicabile il metodo delle approssimazioni successive del capitolo IV, secondo il quale metodo risulterà:

$$u(x, h) = \sum_0^\infty u_n h^n ,$$

con

(7) $\quad [u_0]_a = A , \left[\frac{du_0}{dx}\right]_b = B ; \ldots ; [u_n]_a = 0 , \left[\frac{du_n}{dx}\right]_b = 0 ; \ldots$

(7_1) $\quad \frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0 , \ldots , \frac{d^2 u_n}{dx^2} + u_{n-1} A(x) = 0 , \ldots$

Poniamo:

$$U_n = \int_a^b A(x) u_0(x) u_n(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

In virtù delle (7) e (7_1), per n pari $= 2\nu$, si avrà:

$$U_n = \int_a^b A(x) [u_\nu(x)]^2 dx$$

e per n dispari $= 2\nu + 1$:

$$U_n = \int_a^b \left(\frac{du_\nu}{dx}\right)^2 dx .$$

Le quantità U_n sono dunque positive. Valendosi della diseguaglianza di *Schwarz*, si dimostrerà, come al n. 11, essere:

$$\frac{U_1}{U_0} < \frac{U_2}{U_1} < \ldots < \frac{U_n}{U_{n-1}} < \ldots$$

La serie (6) per ogni valore di h per cui è $|h| < h_1$, considerata rispetto ad x, converge uniformemente in (a, b), e quindi, per quei valori di h, riesce:

$$\int_a^b \left(u_0(x) A(x) \sum_0^\infty u_n(x) h^n \right) dx = \sum_0^\infty U_n h^n .$$

Il raggio di convergenza della serie $\sum U_n h^n$ sarà pertanto $\geq h_1$,

cioè il limite di $\frac{U_n}{U_{n-1}}$, per $n = \infty$, è determinato e finito e non supera $\frac{1}{h_1}$.

Ora dalla equazione:

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + A(x) u_{n-1} = 0 ,$$

segue:

$$u_n(x) = \int_a^b A(\xi) G(x, \xi) u_{n-1}(\xi) d\xi ,$$

ma è:

$$|u_n(x)| \leq \int_a^b A(\xi) G(x, \xi) |u_{n-1}(\xi)| d\xi ,$$

e quindi sarà:

$$|u_n(x)| < (b - a) \int_a^b A(\xi) |u_{n-1}(\xi)| d\xi .$$

Da questa diseguaglianza, tenendo presente che il limite di $\frac{U_n}{U_{n-1}}$, per $n = \infty$, è determinato e finito, si dedurrà, proprio come al n. 15, l'esistenza di un numero intiero e positivo ν e di un numero positivo K, tali che per $n \geq \nu$, in qualunque punto di (a, b), sia:

$$|u_n(x)| < K \sqrt{U_{2n}} .$$

Ne segue che il raggio di convergenza della serie $\sum U_n h^n$ non è maggiore di quello della serie $\sum u_n h^n$, sarà quindi:

$$\lim_{n=\infty} \frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{1}{h_1} .$$

Abbiamo così ottenuto h_1.

Per il calcolo di h_2, dimostreremo anzitutto che, essendo h_1 polo semplice di $u(x, h)$, si potrà porre:

(8) $\quad u(x, h) = \frac{u'(x)}{1 - \frac{h}{h_1}} + v_0(x) + v_1(x) h + \ldots + v_n(x) h^n + \ldots ,$

dove $u'(x)$ e le $v_n(x)$ sono in (a, b) finite e continue con le loro derivate dei due primi ordini e la serie $\sum_0^\infty v_n h^n$, considerata rispetto ad h, ha, per x in (a, b), per raggio di convergenza h_2 e, considerata rispetto ad x, è uniformemente convergente in (a, b), per ogni valore di h per cui è $|h| < h_2$. Difatti, essendo h_1 zero semplice di $D(h)$, si potrà dire che:

$$\frac{h - h_1}{D(h)},$$

è una funzione di h monodroma, finita e continua nell'interno del cerchio di centro nell'origine e di raggio h_2. Si potrà pertanto porre:

$$\frac{h - h_1}{D(h)} \sum_0^\infty f_n(x) h^n = \sum_0^\infty \varphi_n(x) h^n,$$

dove la serie del secondo membro, considerata rispetto ad h, avrà per ogni valore di x in (a, b), il raggio di convergenza h_2, e, considerata rispetto ad x, sarà uniformemente convergente in (a, b), per ogni valore di h per cui è $|h| < h_2$. Le $\varphi_n(x)$ risulteranno combinazioni lineari e omogenee delle $f_n(x)$ e quindi, esse saranno in (a, b) finite e continue con le loro derivate dei due primi ordini. Come la serie $\sum \varphi_n h^n$, così anche la serie:

$$\sum_0^\infty \frac{d\varphi_n}{dx} h^n, \quad \sum_0^\infty \frac{d^2\varphi_n}{dx^2} h^n, \tag{9}$$

considerate rispetto ad x, saranno uniformemente convergenti in (a, b), per ogni valore di h per cui è $|h| < h_2$.

Si ha dunque:

$$u(x, h) = \frac{1}{h - h_1} \sum_0^\infty \varphi_n(x) h^n =$$

$$= \frac{1}{h - h_1} \sum_0^\infty \varphi_n(x) h_1^n + \frac{1}{h - h_1} \left(\sum_0^\infty \varphi_n(x) h^n - \sum_0^\infty \varphi_n(x) h_1^n \right) =$$

$$= \frac{1}{h - h_1} \sum_0^\infty \varphi_n(x) h_1^n + \sum_1^\infty \varphi_n(x) \left(h^{n-1} + h^{n-2} h_1 + \dots + h h_1^{n-2} + h_1^{n-1} \right).$$

Ora la serie:

$$\sum_1^\infty \left(|\varphi_n(x) h^{n-1}| + |\varphi_n(x) h^{n-2} h_1| + \dots + |\varphi_n(x) h h_1^{n-2}| + |\varphi_n(x) h_1^{n-1}| \right), \tag{10}$$

converge per ogni valore di h per cui è $|h| < h_2$. Invero, considerando tali valori di h, diciamo ρ la più grande fra le due quantità $|h|$ e h_1, sarà $\rho < h_2$. Evidentemente è allora:

$$|\varphi_n(x) h^{n-1}| + |\varphi_n(x) h^{n-2} h_1| + \dots + |\varphi_n(x) h_1^{n-1}| \leq n |\varphi_n(x)| \rho^{n-1},$$

e quindi, la serie (10) è convergente se lo è la serie:

$$\sum_1^\infty n |\varphi_n(x)| \rho^{n-1}. \tag{11}$$

Ma questa serie (11) è la serie dei moduli della serie derivata della $\sum_0^\infty \varphi_n(x) h^n$, considerata pei valori di h di modulo ρ minore di h_2, quindi la serie (11) converge. Per cui la (10) converge e ne viene che la serie:

$$\sum_1^\infty \left(\varphi_n(x) h^{n-1} + \varphi_n(x) h^{n-2} h_1 + \dots + \varphi_n(x) h_1^{n-1} \right), \tag{12}$$

converge assolutamente, potremo dunque ordinare i termini della serie (12) secondo le potenze di h ed essa prenderà la forma:

$$\sum_1^\infty h^{n-1} \left(\varphi_n(x) + h_1 \varphi_{n+1}(x) + h_1^2 \varphi_{n+2}(x) + \dots \right).$$

Pertanto ponendo:

$$u'(x) = -\sum_0^\infty \varphi_i(x) h_1^{i-1},$$

$$v_0(x) = \sum_1^\infty \varphi_i(x) h_1^{i-1},$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$v_n(x) = \sum_{n+1}^\infty \varphi_i(x) h^{i-(n+1)},$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

si avrà la forma (8) dello sviluppo di $u(x, h)$ dove, ora evidentemente, la u' e le v e la serie $\sum_0^\infty v_n(x)h^n$ soddisfano alle proprietà indicate. Usando delle serie (9) come si è usato della serie $\sum \varphi_n h^n$, si proverà che anche le serie:

$$\sum_0^\infty \frac{dv_n}{dx} h^n \ , \ \sum_0^\infty \frac{d^2 v_n}{dx^2} h^n \ ,$$

godono, per quanto riguarda la convergenza, delle proprietà della serie $\sum_0^\infty v_n h^n$.

Ciò posto, ecco come si deducono la u' e le v_n dalle u_n. Per $|h|<h_1$, si avrà:

$$u(x, h) = \sum_0^\infty \left(v_n(x) + \frac{u'(x)}{h_1^n} \right) h^n \ ,$$

ma per $|h|<h_1$, vale anche lo sviluppo (6) e quindi le relazioni:

$$v_n(x) + \frac{u'(x)}{h_1^n} = u_n(x) \ . \tag{13}$$

Dalle (13), essendo $\lim_{n=\infty} v_n h_1^n = 0$, si deduce:

$$u'(x) = \lim_{n=\infty} h_1^n u_n(x) \ . \tag{14}$$

La funzione $u'(x)$ è la soluzione eccezionale corrispondente al valore eccezionale h_1. Difatti, la serie $\sum v_n h_1^n$ è uniformemente convergente in (a, b) e quindi $v_n(x)h_1^n$, per $n=\infty$, tende uniformemente, in (a, b), a zero, ne viene che $h_1^n u_n(x)$ tende uniformemente, in (a, b), ad $u'(x)$. Pertanto, in forza delle (7), (7_1), la $u'(x)$ soddisfa all'equazione:

$$\frac{d^2 u'}{dx^2} + h_1 \mathrm{A}(x) u' = 0 \ ,$$

s'annulla in a ed ha derivata nulla in b.

Effettuato, per mezzo della (14), il calcolo della $u'(x)$, le relazioni (13) danno immediatamente tutte le $v_n(x)$. Si verificano le relazioni:

$$[v_0]_a = \mathrm{A} \ , \ \left[\frac{dv_0}{dx}\right]_b = \mathrm{B}$$

$$[v_n]_a = 0 \ , \ \left[\frac{dv_n}{dx}\right]_b = 0 \ , \qquad (n>0) \tag{15}$$

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} - h_1 \mathrm{A}(x) u' = 0 \ ,$$

$$\frac{d^2 v_n}{dx^2} + \mathrm{A}(x) v_{n-1} = 0 \ , \qquad (n>0) \ . \tag{15_1}$$

Introduciamo le quantità:

$$\mathrm{V}_n = \int_a^b \mathrm{A}(x) v_0(x) v_n(x) dx \ ,$$

le relazioni (15), (15_1) ci permettono d'affermare, collo stesso metodo tenuto per le U_n, essere le V_n positive. E ripetendo i ragionamenti precedenti si proverà essere:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathrm{V}_n}{\mathrm{V}_{n-1}} = \frac{1}{h_2} \ .$$

Per calcolare h_3, si porrà per $|h|<h_2$:

$$\sum_0^\infty v_n(x) h^n = \frac{v'(x)}{1 - \frac{h}{h_2}} + \sum_0^\infty w_n h^n \ ,$$

dove $v'(x)$ e le w_n sono, in (a, b), finite e continue con le loro derivate dei due primi ordini e la serie $\sum_0^\infty w_n h^n$, considerata rispetto ad h, ha, per ogni valore di x in (a, b), per raggio di convergenza h_3, e, considerata rispetto ad x, è uniformemente convergente in (a, b), per ogni valore di h per cui è $|h|<h_3$. E si otterrà:

$$v'(x) = \lim_{n=\infty} h_2^n v_n(x) \ ,$$

uniformemente in (a, b), da cui segue, in forza delle (15) e (15_1), essere $v'(x)$ la soluzione eccezionale corrispondente al valore eccezionale h_2. Si otterrà anche:

$$w_n(x) = v_n(x) - \frac{v'(x)}{h_2^n},$$

e, posto:

$$W_n = \int_a^b A(x)\, w_0(x)\, w_n(x)\, dx,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{W_n}{W^{n-1}} = \frac{1}{h_3}.$$

Ecc.

Tanto basta per giustificare quanto abbiamo asserito.

X.

La funzione $A(x)$ di segno variabile in (a, b).

30. — La teoria del capitolo VI dei valori eccezionali del parametro λ, serve in molti casi per decidere sull'esistenza di un integrale dell'equazione:

$$y'' + y\, A(x) = 0, \tag{1}$$

soddisfacente ad una delle quattro coppie di condizioni ai limiti:

$$\text{(I)}\quad [y]_a = \alpha,\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = \beta\ ; \qquad \text{(II)}\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_a = \alpha,\ [y]_b = \beta\ ;$$

$$\text{(III)}\quad [y]_a = \alpha,\ [y]_b = \beta\ ; \qquad \text{(IV)}\quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_a = \alpha,\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_b = \beta\ ;$$

anche quando $A(x)$ *non serbi segno invariato in* (a, b).

Si prenda, per primo, a considerare il caso in cui $A(x)$ sia in (a, c) non negativa e in (c, b) non positiva, c essendo un punto interno ad (a, b). Dico che se la 1.ª cost. di sit. della (1), relativa al tratto (a, c), è minore od eguale ad uno, sarà possibile ad ogni integrale della (1) assegnare una delle coppie di condizioni ai limiti (I) o (III).

Difatti, diciamo y un integrale di (1), nullo in a, per le fatte ipotesi, sarà in c: $yy' \geq 0$. Consideriamo l'integrale:

$$\int_c^b \frac{d(yy')}{dx}\, dx = \int_c^b [y'^2 - y^2 A(x)]\, dx,$$

poichè $A(x)$ è non positiva in (c, b), l'integrale risulterà positivo, si avrà cioè:

$$\int_c^b \frac{d(yy')}{dx} = [yy']_b - [yy']_c > 0,$$

ma è $[yy']_c \geq 0$, e quindi:

$$[yy']_b > 0,$$

per cui b non sarà nè pseudoconiugato nè coniugato di a.

Più in generale, costruita la 1.ª successione λ_n (n. 19) dei valori eccezionali del parametro λ dell'equazione:

$$y'' + y\lambda\, A(x) = 0, \tag{2}$$

rispetto al tratto (a, c), le condizioni ai limiti (I) o (III), sono assegnabili nei casi in cui è:

$$\lambda_{2i} \leq 1 \leq \lambda_{2i+1},$$

nei casi, cioè, in cui o nella 1.ª successione di valori eccezionali trovasi l'unità o il primo valore eccezionale che supera l'unità è di posto dispari. Difatti, in questa ipotesi, detto y un integrale di (1), nullo in a, è (n. 22):

$$[yy']_c \geq 0,$$

ma è:

$$[yy']_b - [yy']_c > 0,$$

quindi sarà $[yy']_b > 0$, cioè b non sarà nè pseudoconiugato nè coniugato di a.

Allo stesso modo si vedrà che: Costruita la 2.ª successione $\overline{\lambda}_n$ dei valori eccezionali del parametro λ dell'equazione (2), rispetto al tratto (a, c), le condizioni ai limiti (II) o (IV) sono certo assegnabili nei casi in cui è:

$$\overline{\lambda}_{2i-1} \leq 1 \leq \overline{\lambda}_{2i} .$$

In questi casi infatti b non è nè emiconiugato, nè deconiugato di a.

Sia $A(x)$ non negativa in (a, c), non positiva in (c, d), non negativa in (d, b), c e d essendo due punti nell'interno di (a, b). Si costruiscano la 1.ª successione λ_n dei valori eccezionali di λ della (2), rispetto al tratto (a, c) e la 1.ª successione λ'_n dei valori eccezionali di λ della stessa (2), rispetto al tratto (d, b).

Se vi sono due numeri i e j, pei quali è:

$$\lambda_{2i} \leq 1 \leq \lambda_{2i+1}$$
$$\lambda'_{2j-1} \leq 1 \leq \lambda'_{2j} ,$$

b non è pseudoconiugato di a. Difatti una soluzione y di (1), nulla in a, non avrà derivata nulla in b, poichè ove avvenisse il contrario, si avrebbe per le fatte ipotesi:

$$[yy']_c \geq 0 \quad , \quad [yy']_d \leq 0 ,$$

e quindi:

$$[yy']_d - [yy']_c \leq 0 ,$$

il che è assurdo.

Così, costruita la 2.ª successione $\overline{\lambda}'_n$ dei valori eccezionali di λ della (2), rispetto al tratto (d, b), se vi sono due numeri i e j, pei quali è:

$$\lambda_{2i} \leq 1 \leq \lambda_{2i+1}$$
$$\overline{\lambda}'_{2j} \leq 1 \leq \overline{\lambda}'_{2j+1} ,$$

b non è coniugato di a. Ecc.

Sia $A(x)$ non positiva in (a, c), non negativa in (c, d), non positiva in (b, d), c e d essendo due punti nell'interno di (a, b).

Costruite le due successioni λ_n e $\overline{\lambda}_n$ dei valori eccezionali di λ, dell'equazione (2), rispetto al tratto (c, d), dico che se vi è un tal numero i per cui è:

$$\lambda_{2i} \leq 1 \leq \overline{\lambda}_{2i} ,$$

b non è nè coniugato, nè pseudoconiugato, nè emiconiugato, nè deconiugato di a.

Dimostriamo anzitutto che, nell'ipotesi $\lambda_{2i} \leq 1 \leq \overline{\lambda}_{2i}$, se per una soluzione y di (1) è $[yy']_c > 0$, è anche $[yy']_d > 0$.

Per essere $\lambda_{2i} \leq 1$, le soluzioni di (1) nulle in c, sono nulle in i punti di (c, d): $a_1, a_2, \ldots, a_i$. La soluzioue y che consideriamo avrà, pertanto, uno zero b_1 in (c, a_1), uno b_2 in $(a_1, a_2), \ldots$, uno b_i in (a_{i-1}, a_i). Dopo questo zero b_i, la derivata y' non s'annullerà più in (b_i, d), difatti ove la y' si annullasse in un punto d' di (b_i, d), la y' avrebbe $i+1$ punti di zero: uno c_1 in (c, b_1), uno c_2 in $(b_1, b_2), \ldots$, uno c_i in (b_{i-1}, b_i) e uno in d', ne verrebbe che le soluzioni di (1) con derivata nulla in c hanno derivata nulla in altri i punti *interni* a (c, d): in un punto di (c_1, c_2), in un punto di $(c_2, c_3), \ldots$, in un punto di (c_{i-1}, c_i) e in un punto di (c_i, d'). Ora questa conclusione è assurda con la diseguaglianza $\overline{\lambda}_{2i} \geq 1$. Ne viene che in d è $yy' > 0$.

Ciò posto, per una soluzione y di (1) che s'annulla in a ed ha ivi derivata nulla, è $[yy']_a = 0$, quindi sarà $[yy']_c > 0$, ma allora, per quanto precede, sarà anche $[yy']_d > 0$ e quindi $[yy']_b > 0$. Ed è dimostrato quanto si voleva.

Ecc.

Reputiamo sufficienti questi esempi per mostrare come, tutte le volte che si possa dividere il tratto (a, b) in un numero finito di tratti in ciascuno dei quali la funzione $A(x)$, pur potendo subirvi infinite oscillazioni, non prenda valori di segno contrario, la teoria dei valori eccezionali del capitolo VI, riferentesi ai tratti di (a, b) in cui $A(x)$ è non negativa, dia contributi allo studio degli integrali di (1) definiti con una delle condizioni ai limiti (I), (II), (III), (IV). Si consideri, ad esempio, il caso per il quale (a, b) è terminato da tratti in cui $A(x)$ si serbi non positiva, allora, se per ciascuno dei tratti di (a, b): (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_ν, b_ν), in cui $A(x)$ è non negativa, esistono i numeri $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$, pei quali è:

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda_{2i_1} \leq 1 \leq \bar{\lambda}_{2i_1} \\ \lambda_{2i_2} \leq 1 \leq \bar{\lambda}_{2i_2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_{2i_\nu} \leq 1 \leq \bar{\lambda}_{2i_\nu} \end{cases}$$

b non sarà nè coniugato, nè pseudoconiugato, nè emiconiugato, nè deconiugato di a. Che se (a, b) è terminato dal tratto (a, c) in cui $A(x)$ è non negativa e dal tratto (d, b) in cui $A(x)$ è non positiva supposto che per i tratti (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_ν, b_ν), interni ed (a, b), nei quali $A(x)$ è non negativa, valgano le (3), b non sarà nè coniugato, nè pseudoconiugato di a se per il tratto (a, c) esiste un numero i per cui è:

$$\lambda_{2i} \leq 1 \leq \lambda_{2i+1},$$

b non sarà nè emiconiugato, nè deconiugato di a se per il trattto (a, c) esiste un numero i per cui è:

$$\bar{\lambda}_{2i-1} \leq 1 \leq \bar{\lambda}_{2i}.$$

XI.

Un'equazione integrale di Fredholm.

31. — In quest'ultimo capitolo ci proponiamo di dare una risposta al problema della determinazione degli integrali dell'equazione:

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y\,A(x) = f(x),$$

soddisfacenti ed una delle coppie di condizioni ai limiti:

$$(\mathrm{I}) \ [y]_a = \alpha, \ \left[\frac{dy}{dx}\right]_a = \beta \quad ; \quad (\mathrm{II}) \ \left[\frac{dy}{dx}\right]_a = \alpha, \ [y]_b = \beta,$$

non supponendo verificata per le funzioni $A(x)$ e $f(x)$, che l'ipotesi ch'esse siano finite e continue in (a, b).

Noi raggiungeremo il nostro intento valendoci dei risultati del *Fredholm* sulle equazioni integrali lineari [1]).

32. — L'equazione (1) si ottiene dall'equazione:

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y\lambda A(x) = f(x),$$

contenente il parametro arbitrario λ, col farvi $\lambda = 1$. Perciò, discutendo le condizioni ai limiti (I) e (II) per gli integrali dell'equazione (2), verra fatta, come caso particolare, la discussione per gli integrali dell'equazione (1).

Supponiamo che la funzione $y(x)$ soddisfi alla (2) e alle (I), ponendo:

$$\lambda y(x) A(x) - f(x) = \varphi(x),$$

la formula (4) del capitolo III, ci dà:

$$(3) \qquad y(x) = \alpha + \beta(x - a) + \int_a^b \varphi(\xi)\, G(x, \xi)\, d\xi,$$

cioè, ponendo:

$$\Phi(x) = \alpha + \beta(x - a) - \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$F(x, \xi) = -A(\xi)\, G(x, \xi),$$

$$(4) \qquad y(x) + \lambda \int_a^b F(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = \Phi(x).$$

Questa è un'equazione integrale lineare di *Fredholm*. Ogni integrale della (2) soddisfacente alle condizioni (I), è, dunque, soluzione dell'equazione di *Fredhom* (4).

---

[1]) Fredholm. Acta Math. Bd. 27 — Confronta il lavoro del Mason nei Math. Ann. Bd. 58.

Viceversa, ogni soluzione $y(x)$ dell'equazione (4) è un integrale della (2) soddisfacente alle condizioni ai limiti (I), come immediatamente si verifica con effettiva derivazione, tenendo conto della forma della $G(x, \xi)$.

Possiamo dunque affermare: *Il problema della determinazione degli integrali della* (2) *con le condizioni ai limiti* (I) *è perfettamente equivalente alla risoluzione dell'equazione integrale* (4).

Analogamente, *il problema della determinazione degli integrali della* (2) *con le condizioni ai limiti* (II) *è perfettamente equivalente alla risoluzione dell'equazione integrale:*

$$y(x) + \lambda \int_a^b \overline{F}(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = \overline{\Phi}(x),$$

dove è:

$$\overline{\Phi}(x) = \beta + \alpha(x-a) - \int_a^b \overline{G}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$\overline{F}(x, \xi) = -A(\xi)\, \overline{G}(x, \xi).$$

Non ci resterà dunque che a fare l'immediata applicazione dei risultati di *Fredholm*.

33. — Poniamo:

$$F\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \dots x_n \\ x_1\, x_2 \dots x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} F(x_1, x_1) & F(x_1, x_2) & \dots & F(x_1, x_n) \\ F(x_2, x_1) & F(x_2, x_2) & \dots & F(x_2, x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F(x_n, x_1) & F(x_n, x_2) & \dots & F(x_n, x_n) \end{vmatrix},$$

$$D_{\lambda F} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b F\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \dots x_n \\ x_1\, x_2 \dots x_n \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \dots dx_n,$$

$$D_{\lambda F}\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_\nu \\ \eta_1 \dots \eta_\nu \end{pmatrix} = \lambda^\nu F\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_\nu \\ \eta_1 \dots \eta_\nu \end{pmatrix} + \lambda^\nu \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b F\begin{pmatrix} \xi_1 \dots \xi_\nu\, x_1 \dots x_n \\ \eta_1 \dots \eta_\nu\, x_1 \dots x_n \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_n.$$

« Le $D_{\lambda F}$ e $D_{\lambda F}\begin{pmatrix} \xi \dots \xi_\nu \\ \eta_1 \dots \eta_\nu \end{pmatrix}$ sono trascendenti intiere in tutto il piano complesso » [1]).

La prima viene denominata *il determinante dell'equazione* (4) e la seconda *un minore d'ordine* ν *di* $D_{\lambda F}$.

Calcoliamo il determinante $F\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \dots x_n \\ x_1\, x_2 \dots x_n \end{pmatrix}$. È:

$$\begin{pmatrix} x_1\, x_2 \dots x_n \\ x_1\, x_2 \dots x_n \end{pmatrix} = (-1)^n A(x_1)\, A(x_2) \dots A(x_n) \begin{vmatrix} G(x_1, x_1) & G(x_1, x_2) & \dots & G(x_1, x_n) \\ G(x_2, x_1) & G(x_2, x_2) & \dots & G(x_2, x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G(x_n, x_1) & G(x_n, x_2) & \dots & G(x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

in grazia delle posizioni fatte. Diciamo G_n il determinante del secondo membro. Si osservi che se x_1 e x_2 sono due qualunque punti di (a, b), è:

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1) = \xi - a,$$

con ξ indicando la minore delle due quantità x_1 e x_2. Il determinante G_n è dunque simmetrico, esso s'annulla quando una x è eguale ad a o quando due x sono eguali tra loro.

Supponiamo perciò che nessuna x sia eguale ad a, nè due x siano eguali tra loro e supponiamo che, detto $i_1, i_2, \dots, i_n$, i numeri $1, 2, \dots, n$, in un certo ordine, si abbia:

$$a < x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_{n-1}} < x_{i_n},$$

vogliamo dimostrare essere:

$$G_n = (x_{i_1} - a)(x_{i_2} - x_{i_1}) \dots (x_{i_n} - x_{i_{n-1}}).$$

Il nostro asserto è subito verificato per $n = 2$, procedendo dunque per induzione, supponiamolo verificato fino al determinante G_{n-1}.

Sia, per fissare le idee, $i_{n-1} > i_n$, il determinante G_n avrà la

---

[1]) Poniamo fra virgolette i risultati ottenuti dal FREDHOLM nella Memoria citata.

forma:

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} G(x_1,x_1) & \cdot\;\cdot\;\cdot & x_1-a & & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & G(x_1,x_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & & & & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ G(x_{i_n-1},x_1) & \cdot\;\cdot\;\cdot & x_{i_n-1}-a & & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & G(x_{i_n-1},x_n) \\ x_1-a & \ldots & x_{i_n-1}-a & x_{i_n}-a & x_{i_n+1}-a & \ldots & x_{i_{n-1}}-a & \ldots\; x_n-a \\ G(x_{i_n+1},x_1) & \cdot\;\cdot\;\cdot & x_{i_n+1}-a & & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & G(x_{i_n+1},x_n) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & & & & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_1-a & \ldots & x_{i_n-1}-a & x_{i_{n-1}}-a & x_{i_n+1}-a & \ldots & x_{i_{n-1}}-a & \ldots\; x_n-a \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & & & & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ G(x_n,x_1) & \cdot\;\cdot\;\cdot & x_n-a & & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & G(x_n,x_n) \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{oriz. } i_n^{ma} \\ \\ \\ \text{oriz. } i_{n-1}^{ma} \\ \\ \\ \end{array}$$

Sviluppiamo questo determinante secondo gli elementi della colonna i_n^{ma}, i complementi algebrici degli elementi di questa colonna, eccettuati quelli di $x_{i_n} - a$ e di $x_{i_{n-1}} - a$, sono nulli, perchè contengono due orizzontali eguali, i complementi algebrici di $x_{i_n} - a$, e di $x_{i_{n-1}} - a$ sono eguali e di segno contrario e il complemento algebrico di $x_{i_n} - a$ è per ipotesi:

$$(x_{i_1} - a)(x_{i_2} - x_{i_1}) \ldots (x_{i_{n-1}} - x_{i_{n-2}}).$$

Si ha dunque come sviluppo di G_n:

$$(x_{i_n} - a)(x_{i_1} - a) \ldots (x_{i_{n-1}} - x_{i_{n-2}}) - (x_{i_{n-1}} - a)(x_{i_1} - a) \ldots (x_{i_{n-1}} - x_{i_{n-2}}) =$$
$$= (x_{i_1} - a)(x_{i_2} - x_{i_1}) \ldots (x_{i_n} - x_{i_{n-1}}),$$

ed è dimostrato quanto si voleva.

Di qua, evidentemente, segue essere il determinante G_n positivo o nullo: G_n sarà nullo solo nei casi in cui una x sia eguale ad a o in cui due x sono eguali tra loro.

Si ha infine:

$$F\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ x_1 x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} = (-1)^n A(x_1) A(x_2) \ldots A(x_n)(x_{i_1} - a)(x_{i_2} - x_{i_1}) \ldots (x_{i_n} - x_{i_{n-1}}).$$

Ne viene che: se è, in (a, b), $A(x) \geqq 0$, i coefficienti delle varie potenze di λ, nello sviluppo di $D_{\lambda F}$, sono positivi o negativi secondochè la potenza di λ è ad esponente pari o dispari, se è, in (a, b), $A(x) \leqq 0$, i coefficienti delle varie potenze di λ sono positivi.

34. — « Pei valori di λ pei quali è:

$$D_{\lambda F} \neq 0,$$

vi è una sola soluzione dell'equazione (4), data dalla formula:

$$y(x) = \Phi(x) - \int_a^b \frac{D_{\lambda F}\binom{x}{\xi}}{D_{\lambda F}} \Phi(\xi)\, d\xi \text{ ».}$$

Per quei valori di λ vi è dunque uno ed un solo integrale della (2) soddisfacente alle (I).

La funzione $\Phi(x)$ può essere identicamente nulla solo nel caso che sia $f(x)$ identicamente nulla e $\alpha = \beta = 0$. Difatti, in questo caso, la $\Phi(x)$ è identicamente nulla, e, supposta $\Phi(x) \equiv 0$, ne viene:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} \equiv f(x) \equiv 0,$$

e poi $\alpha = \beta = 0$.

Un integrale $y(x)$ dell'equazione omogenea:

$$(5) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + y\lambda A(x) = 0,$$

soddisfacente alle (I) con $\alpha = \beta = 0$, è dunque soluzione dell'equazione integrale lineare omogenea:

$$(6) \qquad y(x) + \lambda \int_a^b F(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = 0,$$

e viceversa.

L'equazione (6), pei valori di λ pei quali è $D_{\lambda F} \neq 0$, non è soddisfatta che dalla $y(x)$ identicamente nulla, come segue dal teorema di univocità su enunciato.

« Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (6) ammetta una soluzione diversa da zero è che λ sia radice dell'equazione:

$$D_{\lambda F} = 0 \,. \text{»}$$

Ogni radice di quest'equazione chiameremo *un valore eccezionale del parametro* λ e la corrispondente soluzione della (6), *la soluzione eccezionale corrispondente a quel valore eccezionale di* λ.

Quando dunque sono assegnabili le condizioni (I), con le α e β affatto arbitrarie, ad un integrale della (5), lo sono anche ad un integrale della (2) e viceversa, ciò del resto è evidente a *priori,* considerando che l'integrale generale della (2) è la somma di un suo integrale particolare e dell'integrale generale della (5).

« Nel caso che λ abbia un valore eccezionale non esistono, in generale, soluzioni dell'equazione non omogenea (4) » e quindi non esistono integrali della (2) o della (5) soddisfacenti alle (I) con le α e β affatto arbitrarie.

Dopo ciò, diciamo $u(x, \lambda)$, $v(x, \lambda)$ due integrali indipendenti della (5), aventi in a uno stesso valore diverso da zero, le due trascendenti intiere:

$$\left[\frac{\partial u(x, \lambda)}{\partial x}\right]_{x=b} - \left[\frac{\partial v(x, \lambda)}{\partial x}\right]_{x=b} \quad \text{e} \quad D_{\lambda F}\,,$$

hanno, evidentemente, gli stessi zeri.

Ne viene (n. 28) che *la trascendente intiera* $D_{\lambda F}$, *quando la funzione* $A(x)$ *è in* (a, b) *non negativa, ha per soli punti di zero i punti* h_i.

Che la trascendente $D_{\lambda F}$, per $A(x) \geq 0$, non ha punti di zero negativi o nulli, segue subito anche dalla forma della $D_{\lambda F}$. Difatti, per quanto si vide al n. 33, supposto in (a, b) $A(x) \geq 0$, sarà:

$$D_{\lambda F} = 1 + \sum (-1)^n a_n \lambda^n\,,$$

con $a_n > 0$, qualunque sia n, e quindi una quantità negativa o nulla, non potrà annullare $D_{\lambda F}$.

Così, se in (a, b), è $A(x) \leq 0$, fra i valori eccezionali non vi saranno numeri positivi o nulli, come già sapevamo e come immediatamente si deduce dalla considerazione che, per $A(x) \leq 0$, i coefficienti delle varie potenze di λ sono positivi. Come è facilissimo vedere, coi ragionamenti del n. 28, per $A(x) \leq 0$ in (a, b), la $D_{\lambda F}$ non avrà nemmeno zeri complessi. Evidentemente poi, per $A(x) \leq 0$ in (a, b), la $D_{\lambda F}$ avrà per unici zeri negativi le quantità $-l_i$, indicando con l_i i valori di posto dispari della prima successione dei valori eccezionali di λ nella equazione:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y\lambda A(x) = 0\,.$$

È ovvio notarlo, identiche considerazioni valgono per la $D_{\lambda \overline{F}}$.

Concludiamo che: *Condizione necessaria e sufficiente perchè ad un integrale della* (1) *si possano assegnare le condizioni* (I) *(le condizioni* (II)*), con le* α *e* β *affatto arbitrarie, è che sia:*

$$D_F \neq 0 \quad (D_{\overline{F}} \neq 0)\,.$$

35. — I risultati del *Fredholm* danno anche subito le condizioni a cui debbono soddisfare le α e β perchè esistono integrali della (2) o della (5) soddisfacenti alle (I), nel caso che λ abbia un valore eccezionale.

« Nel caso $D_{\lambda F} = 0$, se n è l'ordine del primo minore di $D_{\lambda F}$, diverso da zero, l'equazione (6) possiede n soluzioni linearmente indipendenti ». Ne viene $n = 1$, poichè due integrali della (5) con gli stessi punti di zero sono linearmente dipendenti.

Si ha dunque: per ogni valore eccezionale λ_i di λ, il minore

$$D_{\lambda_i F}\binom{\xi_1}{\eta_1}$$

non è identicamente nullo. « Considerando valori di ξ_1 e di η_1 pei quali $D_{\lambda_i F}\binom{\xi_1}{\eta_1}$ è diverso da zero, la soluzione eccezionale $\varphi_i(x)$ corrispondente al valore eccezionale λ_i, ha la forma:

$$\varphi_i(x) = -\frac{D_{\lambda_i F}\binom{x}{\eta_1}}{D_{\lambda_i F}\binom{\xi_1}{\eta_1}} \text{»}\,.$$

Poniamo:

$$\Psi_i(x) = -\frac{D_{\lambda_i F}\begin{pmatrix}\xi_1\\ x\end{pmatrix}}{D_{\lambda_i F}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \eta_1\end{pmatrix}} \quad , \quad H_i(x, \xi) = -\frac{D_{\lambda_i F}\begin{pmatrix}x\ \xi_1\\ \xi\ \eta_1\end{pmatrix}}{D_{\lambda_i F}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \eta_1\end{pmatrix}} .$$

« Condizione necessaria e sufficiente perchè la (4), pel valore eccezionale λ_i di λ, ammetta soluzioni, è che si verifichi la relazione:

$$\int_a^b \Phi(x)\, \Psi_i(x)\, dx = 0 . \tag{7}$$

In questo caso la (4), con $\lambda = \lambda_i$, ha infinite soluzioni, tutte definite dall'eguaglianza:

$$y(x) = \Phi(x) + \int_a^b H_i(x, \xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi + c\varphi_i(x) .$$

dove c è costante arbitraria ».

La relazione (7) dà per le α e β la condizione lineare:

$$\alpha \int_a^b \Psi_i(x)\, dx + \beta \int_a^b (x-a)\, \Psi_i(x)\, dx - \int_a^b \int_a^b G(x, \xi)\, f(\xi)\, \Psi_i(x)\, dx\, d\xi = 0 ,$$

che si riduce omogenea:

$$\alpha \int_a^b \Psi_i(x)\, dx + \beta \int_a^b (x-a)\, \Psi_i(x)\, dx = 0 ,$$

nel caso dell'equazione omogenea (5).

Parma, ottobre 1907.

NOTA

Solo dopo ch'io ebbi compiuta e presentata la presente Tesi venni a conoscenza dei risultati ottenuti, sull'argomento che in essa tratto, dai Signori:

Tzitzéica. Comptes rendus, vol. 140 (1905), pp. 223, 492.

Mason. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 7 (1906), p. 337.

Per questa ragione ho omesso di citare nel testo i lavori dei detti Signori e non ho tenuto conto nella mia ricerca dei loro notevoli risultati. Mi permetto, peraltro, di notare che ben poche modificazioni avrei dovuto apportare alla mia esposizione anche se avessi conosciuto in tempo quei lavori.

ERRATA

Pag.	30	*linea*	18	dall'alto	*in luogo di*	$W_{m,n}$	*leggi*	$V_{m,n}$
»	31	»	2	»	»	$W_{m+1,n-1}$	»	$V_{m+1,n}$

INDICE