DOTT. EUGENIO ELIA LEVI

SAGGIO

SULLA

TEORIA DELLE SUPERFICIE A DUE DIMENSIONI

IMMERSE IN UN IPERSPAZIO

TESI DI LAUREA.

INTRODUZIONE

Si indichino con $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ le coordinate cartesiane ortogonali di uno spazio euclideo ad n dimensioni. Determineremo in questo una superficie coll'assegnare $x_1, x_2 \ldots x_n$ quali funzioni di due variabili $u_1\, u_2$: noi supporremo che tali funzioni siano finite continue ed ammettano derivate di ordine sufficientemente elevato. Porremo costantemente $\frac{\partial^{h_1+h_2} x_i}{\partial u_1^{h_1}\, \partial u_2^{h_2}} = x_{i\,,\,h_1 h_2}$. Perchè si abbia una superficie effettiva dovremo supporre che tra le $x_1, x_2 \ldots x_n$ vi siano due funzioni indipendenti; il che analiticamente si tradurrà nel supporre che la matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_{1,10} & x_{2,10} & \cdots & x_{n,10} \\ x_{1,01} & x_{2,01} & \cdots & x_{n,01} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \end{matrix} \right\|$$

non sia nulla. Supporremo generalmente che il suo primo minore sia diverso da zero: il che è permesso bastando scegliere convenientemente fra le x_i quelle cui si attribuiscono gli indici 1 e 2.

Con ciò la superficie sarà individuata nella sua forma e posizione nello spazio non solo, ma su essa sarà assegnato un particolare sistema di linee coordinate. Se noi vorremo considerare la superficie per la sola sua forma e posizione nello spazio bisognerà ritenere arbitraria la scelta delle linee coordinate $u_1\, u_2$, se solo vogliamo considerare la forma noi dovremo ancora operare una trasformazione arbitraria per uguaglianza dello spazio ambiente. Tale trasformazione è un movimento od una simetria: per brevità io intenderò con movimento una qualunque tale trasformazione, dicendo movimento propriamente detto quando dal gruppo vorrò escludere le simetrie.

Per caratterizzare la superficie converrà quindi studiarne gli invarianti differenziali per movimenti e per trasformazione di variabili $u_1\, u_2$; tale studio è brevemente fatto nei primi due capitoli. Nel primo è risoluto completamente il problema di trovare gli invarianti differenziali della superficie per il gruppo (misto) dei movimenti dello spazio, e quali di essi siano sufficienti ad individuare la superficie.

Nel secondo è anzitutto ridotto il problema della ricerca degli invarianti differenziali per una trasformazione di linee coordinate al problema di trovare gli invarianti simultanei di un sistema di forme che hanno in certo modo l'ufficio delle due forme fondamentali dell'ordinaria teoria. Indi si studiano le condizioni affinchè due superficie siano congruenti: questione equivalente a quella della determinazione della superficie per i suoi invarianti assoluti. Le discussioni ivi fatte si applicano infine a dimostrare che le sole superficie che ammettono un G_3 di movimenti dello spazio ambiente sono le sfere dell'S_3.

Nel terzo capitolo, premesse alcune formule sulla teoria delle curve, dò una generalizzazione del teorema di Meusnier alle curvature di ordine superiore delle curve tracciate su una superficie o più generalmente su una varietà qualunque ad m dimensioni.

Nel quarto studio la curvatura delle sezioni normali della superficie: sono così indotto a distinguere tre specie di punti; definiti dalla natura projettiva della varietà delle normali principali delle sezioni normali e che chiamo generici, planari, assiali. Tra i punti planari si distingue una classe speciale che dico dei punti parabolici. Lo studio delle curvature delle sezioni normali mi porta all'interpretazione geometrica degli invarianti trovati nel capitolo II.

Nel quinto capitolo studio le superficie di punti assiali e di punti

planari. Le superficie di punti assiali sono superficie dell'S_3 o superficie sviluppabili rigate. Le superficie di punti planari non parabolici ammettono una coppia di sistemi di linee che dico sistemi coniugati: esse sono le superficie che contengono una rete (*réseau*) del Guichard; ad esse appartiene una notevole classe di superficie: le superficie di traslazione, di cui sono un caso particolare, come io dimostro, le superficie minime. Estendo parecchie delle proprietà delle superficie minime dello spazio ordinario a quelle dello S_n. Le superficie di punti planari parabolici ammettono un sistema di linee che dico asintotiche: ad esse appartengono le superficie rigate non sviluppabiil. Un'ultima proprietà caratteristica delle superficie di punti planari è che, se una superficie ammette una superficie parallela non omotetica, essa è di punti planari.

Capitolo I.

Gli invarianti differenziali della superficie pel gruppo dei movimenti

Gli invarianti fondamentali I_{hk,h_1k_1}.

1. — Consideriamo un movimento dello spazio ad n dimensioni

$$(1) \qquad x'_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \ldots + \alpha_{in} x_n + a_i$$

dove le α_{ij} sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale.

Le formule di trasformazione per le derivate $x_{i,hk}$ saranno date dalle equazioni

$$(2) \qquad x'_{i,hk} = \alpha_{i1} x_{1,hk} + \alpha_{i2} x_{2,hk} + \ldots + \alpha_{in} x_{n,hk}.$$

Gli invarianti differenziali della superficie per il gruppo dei movimenti dello spazio ambiente sono gli invarianti finiti del sistema di variabili x_i, $x_{i,\gamma k}$ per il gruppo di trasformazioni (1) e (2). Assegnate le γ_{ij}, che sono i soli parametri che entrino in (1) e (2), si possono scegliere le a_i per modo che le x'_i assumano valori arbitrari: gli invarianti saranno perciò indipendenti dalle x_i e nella ricerca degli invarianti potremo limitarci alla considerazione delle equazioni (2). Queste ci dicono che le serie di variabili $x_{i,hk}$ $(i = 1 \ldots n)$ sono trasformate per una stessa sostituzione ortogonale; se quindi in uno spazio Σ_n, in cui le coordinate siano le ξ_i, si considerano i punti definiti da $\xi_i = x_{i,hk}$ $(h,k = 0,1,2,\ldots; h$ e k non entrambi nulli) e che indicheremo con $(x_{i,hk})$, la ricerca degli invarianti nelle $x_{i,hk}$ per il gruppo (2) sarà equivalente alla ricerca degli invarianti dei punti $(x_{i,hk})$ per i movimenti di Σ_n che lascian fissa l'origine. Questi invarianti si possono tutti esprimere in funzione delle lunghezze dei vettori uscenti dall'origine e terminati ai punti $(x_{i,hk})$ e dei coseni degli angoli di questi vettori. Poniamo

$$\mathrm{I}_{hk,h_1k_1} = \Sigma x_{i,hk}\, x_{i,h_1k_1}\,. \tag{3}$$

La lunghezza del vettore terminato ad $(x_{i,hk})$ è data da $\sqrt{\mathrm{I}_{hk\ hk}}$ il coseno dell'angolo dei vettori terminati ad $(x_{i,hk})$ ed (x_{i,h_1k_1}) è $\dfrac{\mathrm{I}_{hk,h_1k_1}}{\sqrt{\mathrm{I}_{hk,hk}\mathrm{I}_{h_1k_1,h_1k_1}}}$. Quindi tutti gli invarianti sono funzioni di I_{hk,h_1k_1} e viceversa ogni funzione I_{hk,h_1k_1} è un invariante. Quindi *le espressioni* I_{hk,h_1k_1} *formano un sistema completo di invarianti della superficie per il gruppo dei movimenti dello spazio ambiente* [1].

Noteremo che si ha $\mathrm{I}_{hk,h_1k_1} = \mathrm{I}_{h_1k_1\,hk}$. In generale supporrò $h_1 + k_1 \leqq h+k$, ed in numero $h+k$ si dirà *l'ordine dell'invariante* I_{hk,h_1k_1}.

---

[1]) I coefficienti dell'elemento lineare della superficie E, F, G, sono gli invarianti $\mathrm{I}_{1010}\ \mathrm{I}_{1001}\ \mathrm{I}_{0101}$. I coefficienti della seconda forma fondamentale D D' D'' delle superficie dello S_3 si ottengono in funzione degli invarianti di primo e secondo ordine poichè si ha evidentemente

$$\mathrm{D}^2 = \frac{1}{\begin{vmatrix} \mathrm{I}_{1010} & \mathrm{I}_{1001} \\ \mathrm{I}_{0110} & \mathrm{I}_{0101} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{1010} & \mathrm{I}_{1001} & \mathrm{I}_{1020} \\ \mathrm{I}_{0120} & \mathrm{I}_{0101} & \mathrm{I}_{0120} \\ \mathrm{I}_{2010} & \mathrm{I}_{2001} & \mathrm{I}_{2020} \end{vmatrix}, \mathrm{D}'^2 = \ldots$$

Qualora si volessero gli invarianti pel gruppo dei movimenti propriamente detti bisognerebbe introdurre al posto di uno degli I un determinante di ordine n, analogo ai D, D', D'' dell'ordinaria teoria, della forma $\begin{vmatrix} x_{1,10} & x_{210}\ldots\ldots & x_{n10} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1,hk} & x_{2,hk}\ldots & x_{nhk} \end{vmatrix}$: esso non cambierebbe segno per un movimento propriamente detto, lo muterebbe per una simmetria; il suo quadrato sarebbe un determinante formato cogli I.

2. — Quando si voglia individuare la superficie mediante gli I occorrerà pensare gli I quali funzioni assegnate delle variabili $u_1\, u_2$ e le equazioni (3) che definiscono gli I quali equazioni differenziali nelle funzioni incognite x_i. Affinchè queste equazioni ammettano una soluzione occorrerà:

1.° Che il sistema di queste equazioni considerato come sistema di equazioni finite nelle variabili $x_{i,hk}$ sia compatibile.

2.° Che, tenuto conto delle equazioni $\dfrac{\partial x_{i,hk}}{\partial u_1} = x_{i,h+1k}$, $\dfrac{\partial x_{i,hk}}{\partial u_2} = x_{i,hk+1}$, esso sistema sia integrabile.

Nei numeri seguenti esamineremo quali condizioni siamo perciò indotti ad imporre agli I affinchè rappresentino una superficie.

Condizioni di compatibilità degli I in termini finiti.

3. — Premettiamo una osservazione. Ampliando convenientemente il sistema delle derivate delle x rapporto ad $u_1\, u_2$ che si considerano, si può sempre supporre che lo spazio lineare minimo cui appartengono i vettori rappresentativi del n. 1 abbia le dimensioni dello spazio in cui è immersa la superficie. Poichè se la matrice delle derivate di ordine $\leqq l$ ha la stessa caratteristica λ che la matrice delle derivate di ordine $< l$ è facile dimostrare che la superficie è immersa in uno spazio a λ dimensioni. Supposto infatti che un minore non nullo di ordine λ sia contenuto nelle prime λ colonne, si potranno scrivere le $x_{i,hk}$ per $i > \lambda$ $h+k = 1, 2\ldots l$ come le stesse funzioni lineari dello $x_{j,hk}$ $(j \leqq \lambda)$: si avrà cioè

$$x_{i,hk} = \Sigma \mu_{ij}\, x_{j,hk} \quad (i = \lambda+1\ldots n\,, j = 1\ldots\lambda\,, h+k = 1\ldots l)\,. \tag{4}$$

Consideriamo il sistema delle equazioni rispondenti ad un dato valore di i: derivando rapporto ad u_α le equazioni per cui $h+k<l$ e confrontando col sistema stesso di equazioni si ha $\Sigma \dfrac{\partial \mu_{ij}}{\partial u_\alpha} x_{j,hk} = 0$ $(h+k<l)$. Ma per ipotesi la matrice dei coefficienti di queste equazioni omogenee nelle λ incognite $\dfrac{\partial \mu_{ij}}{\partial u_\alpha}$ $(j = 1\ldots\lambda)$ ha già caratte

ristica λ, quindi $\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial u_\alpha} = 0$. Ne segue che le μ_{ij} sono costanti e quindi integrando quelle delle (4) per cui è $h, k = 0, 1$ od $k, h = 1, 0$ si ottiene

$$x_i = \Sigma \mu_{ij} x_j + \nu_i$$

con μ_{ij}, ν_i costanti; il che dimostra l'asserto.

4. — Premesso ciò, osserviamo che un sistema di m vettori aventi a comune l'origine e contenuti in uno spazio lineare minimo ad n dimensioni è individuato, a meno di movimenti che lascino fissa l'origine, quando siano noti: 1° le loro lunghezze, 2° gli angoli che fanno fra loro una prima n-*pla* di vettori non contenuta in uno spazio a meno di n dimensioni, 3° gli angoli dei residui $m - n$ vettori con questi primi n. Queste lunghezze e questi angoli sono d'altronde arbitrari. Quindi fra le espressioni che danno le lunghezze e gli angoli di questi vettori solo $\frac{n(2m - n + 1)}{2}$ sono indipendenti. Applicando questa osservazione ai vettori rappresentativi delle $x_{i,hk}$ si deduce che *tra gli* $\frac{m(m+1)}{2}$ *invarianti* I *costruiti con* m *sistemi di derivate di cui* n *linearmente indipendenti solo* $\frac{n(2m-n+1)}{2}$ *sono indipendenti.*

È facile ottenere le relazioni che legano gli I costruiti con queste m derivate. Consideriamo la matrice di m linee ed n colonne

$$\left\| \begin{matrix} x_{1,10} & x_{2,10} & \dots & x_{n,10} \\ x_{1,01} & x_{2,01} & \dots & x_{n,01} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1,hk} & x_{2hk} & \dots & x_{n,hk} \end{matrix} \right\|$$

il quadrato per linee di questa matrice è un determinante simmetrico di I di ordine m: d'altra parte esso è di caratteristica n perchè: 1.° ogni suo minore di ordine $n+1$ è il prodotto per linee di due matrici di $n+1$ linee ed n colonne e quindi è nullo; 2.° esistono minori di ordine n non nulli per es.: quel minore principale

che rappresenta il quadrato di uno dei determinanti non nulli di ordine n che abbiamo supposto esistere nella matrice precedente. Ora lo scrivere che questo determinante simmetrico ha caratteristica n è scrivere $\frac{(m-n)(m-n+1)}{2}$ equazioni indipendenti fra gli I, e quindi tutte le equazioni indipendenti, poichè è

$$\frac{m(m+1)}{2} - \frac{n(2m-n+1)}{2} = \frac{(m-n)(m-n+1)}{2}.$$

Condizioni di integrabilità. Prima trasformazione di queste condizioni. I_{hk,h_1k_1} dedotti e I_{hk,h_1k_1} principali.

5. — È noto che affinchè un sistema sia integrabile è necessario e sufficiente che siano compatibili, considerate come equazioni in termini finiti, le equazioni del sistema e le loro conseguenze differenziali. Se si deriva l'equazione $I_{hk,h_1k_1} = \Sigma x_{i,hk}\, x_{i,h_1k_1} \, (h + k \geq h_1 + k_1)$ rispetto ad u_1 u_2 si ottengono le equazioni $\frac{\partial I_{hk,h_1k_1}}{\partial u_1} = I_{h+1k,h_1k_1} + I_{hk,h_1+1k_1}$, $\frac{\partial I_{hk,h_1k_1}}{\partial u_2} = I_{hk+1,h_1k_1} + I_{hk,h_1k_1+1}$. Cambiando leggermente gli indici in modo da ottenere una forma più utile in seguito avremo le equazioni

$$(5) \qquad \left. \begin{aligned} \frac{\partial I_{h-1k,h_1k_1}}{\partial u_1} &= I_{hk,h_1k_1} + I_{h-1k,h_1+1k_1} \\ \frac{\partial I_{hk-1,h_1k_1}}{\partial u_2} &= I_{hk,h_1k_1} + I_{hk-1,h_1k_1+1} \end{aligned} \right\} \quad (h + k > h_1 + k_1).$$

Le equazioni differenziali (2) che definiscono le x_i per gli I si possono dunque soddisfare quando insieme colle equazioni in termini finiti del n. 4 gli I soddisfanno le equazioni (5).

Queste relazioni (5) possono subire un'interessante trasformazione. Ordiniamole perciò per valori crescenti di $h + k = l$, ed in ogni gruppo distinguiamo i casi seguenti a seconda dei valori di h, k, h_1, k_1 $(h + k > h_1 + k_1)$.

1.° $h_1 + k_1 < l - 1$. Le (5) divengono

$$(6)\quad \mathrm{I}_{hk,h_1k_1} = \frac{\partial \mathrm{I}_{h-1kh_1k_1}}{\partial u_1} - \mathrm{I}_{h-1k.h_1+1k_1} = \frac{\partial \mathrm{I}_{hk-1,h_1k_1}}{\partial u_2} - \mathrm{I}_{hk-1,h_1k_1+1}$$

che ci dicono che queste $\mathrm{I}_{hkh_1k_1}$ di ordine l si possono esprimere per I di ordine $< l$ e per le loro derivate poichè tali sono in virtù della disuguaglianza $h_1 + k_1 < l - 1$ gli I dei secondi membri.

2° $h_1 + k_1 = l - 1$, $h_1 = h - 1$, $k_1 = k$. Le (5) divengono:

$$(7a)\quad 2\,\mathrm{I}_{hk,h-1k} = \frac{\partial \mathrm{I}_{h-1k,h-1k}}{\partial u_1} ,$$

$$(7b)\quad \mathrm{I}_{hk-1,h-1k+1} = \frac{\partial \mathrm{I}_{hk-1,h-1k}}{\partial u_2} - \mathrm{I}_{hk,h-1k} = \frac{\partial \mathrm{I}_{hk-1,h-1k}}{\partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{I}_{h-1k,h-1k}}{\partial u_1}$$

3.° $h_1 + k_1 = l - 1$, $h_1 = h$, $k_1 = k - 1$.

$$(8a)\quad 2\,\mathrm{I}_{hk,hk-1} = \frac{\partial \mathrm{I}_{hk-1,hk-1}}{\partial u_2} ,$$

$$(8b)\quad \mathrm{I}_{h+1k-1,h-1k} = \frac{\partial \mathrm{I}_{hk-1,h-1k}}{\partial u_1} - \mathrm{I}_{hk,hk-1} = \frac{\partial \mathrm{I}_{hk-1,h-1k}}{\partial u_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{I}_{hk-1,hk-1}}{\partial u_2}$$

In entrambi questi casi le (7) e le (8) ci dicono che $\mathrm{I}_{hk,h-1k}$ · $\mathrm{I}_{h-1k+1hk-1}$, I_{hkhk-1} , $\mathrm{I}_{h+1k-1h-1k}$ si esprimono per derivate di I di ordine $l - 1$.

4.° $h_1 + k_1 = l - 1$, $h_1 \leq h - 2$, $k_1 \geq k + 1$

$$(9a)\qquad \mathrm{I}_{hk,h_1k_1} = \frac{\partial \mathrm{I}_{h-1k,h_1k_1}}{\partial u_1} - \mathrm{I}_{h-1k.h_1+1k_1}$$

$$(9b)\qquad \mathrm{I}_{hk,h_1k_1} = \frac{\partial \mathrm{I}_{hk-1,h_1k_1}}{\partial u_2} - \mathrm{I}_{hk-1,h_1k_1+1} .$$

5.° $h_1 + k_1 = l - 1$, $h_1 \geq h + 1$, $k_1 \leq k - 2$

$$(10a)\qquad \mathrm{I}_{hk,h_1k_1} = \frac{\partial \mathrm{I}_{h-1k,h_1k_1}}{\partial u_1} - \mathrm{I}_{h-1k,h_1+1k_1} ,$$

$$(10b)\qquad \mathrm{I}_{hk,h_1k_1} = \frac{\partial \mathrm{I}_{hk-1,h_1k_1}}{\partial u_2} - \mathrm{I}_{hk-1,h_1k_1+1} .$$

In queste equazioni (9) e (10) si nota che nel secondo membro è la derivata di un I di ordine $< l$ ed un I di ordine l poichè $h_1 + k_1 + 1 = l$. Ma se consideriamo in particolare per es. la (9 *a*), l'I di ordine l del secondo membro appartiene al tipo degli I dei primi membri delle (10) con questa semplificazione che la differenza fra i k è minore di una unità della differenza fra gli h nell'I da cui siamo partiti. Ugualmente nella (10 *b*) l'$\mathrm{I}_{hk-1,h_1k_1+1}$ del secondo membro è del tipo degli I dei primi membri di (9) colla stessa semplificazione scambiati gli indici h e k. Se quindi facciamo seguire alla (9 *a*) la (10 *b*) costruita per $\mathrm{I}_{h_1+1k_1,h-1k}$ otterremo I_{hk,h_1k_1} come combinazione lineare di derivate di I di ordine $< l$ e di un I dello stesso tipo di quello da cui siamo partiti ma in cui la differenza fra gli indici h è diminuita di due unità. E così procedendo si ha una serie ricorrente di equazioni finchè la differenza fra gli indici h ed h_1 si ridurrà ad 1 o 2, ed allora si ricadrà nelle (7 *a*) od (8 *b*). Quindi si potranno esprimere gli I in cui $h_1 + k_1 = l - 1$, $h > h_1$ come funzioni lineari di derivate di I di ordine inferiore. Analogamente alternando le equazioni (10 *a*) (9 *b*) ed infine ricorrendo alle (7 *b*) od (8 *a*) si esprimono gli I per cui $h_1 + k_1 = l - 1$, $k > k_1$.

Raccogliamo intanto da questa discussione che gli I_{hk,h_1k_1}, *per cui* $h + k = l$, $h_1 + k_1 < l$ *sono tutte funzioni lineari di* I *di ordine minore e delle loro derivate.*

6. — Applicando ripetutamente il teorema precedente otteniamo che gli I_{hk,h_1k_1} per cui $h + k \neq h_1 + k_1$ $(h + k > h_1 + k_1)$ si possono esprimere quali funzioni lineari degli I per cui $h + k = h_1 + k_1$ e delle loro derivate: in virtù di questa osservazione diremo I *principali* quelli per cui $h + k = h_1 + k_1$, *dedotti* quelli per cui $h + k > h_1 + k_1$; onde potremo enunciare che *gli* I *dedotti sono funzioni lineari degli* I *principali e delle loro derivate.* Assegnati gli I principali si possono immaginare ottenuti gli I dedotti e *le condizioni di integrabilità* (5) *del n. precedente saranno contenute nell'uguagliare le varie espressioni degli* I *dedotti.* Ci resta ad esaminare quali sono le equazioni che così rimangono fra gli I principali.

Le equazioni residue fra gli I_{hk,h_1k_1} principali. La curvatura della superficie.

7. — Ammettiamo che siano già note le equazioni che provengono dall' uguagliare le espressioni degli I dedotti di ordine $< l$ onde si possa ritenere unica l'espressione di tali I e quindi ad essa applicare la identità di derivazione (5). Quali nuove relazioni si introducono coll' uguagliare le diverse espressioni degli I dedotti di ordine l?

Dai ragionamenti del n. 6 segue che l'espressione degli I dedotti per cui $h+k=l$, $h_1+k_1=l-1$ è unica.

Ma non risulta lo stesso per gli I per cui $h+k=l$ $h_1+k_1<l-1$: da (6) si ha allora l'equazione

$$\frac{\partial I_{h-1k,\,h_1k_1}}{\partial u_1}-\frac{\partial I_{hk-1,\,h_1k_1}}{\partial u_2}=I_{h-1k,h_1+1k_1}-I_{hk-1,h_1k_1+1}\,. \tag{11}$$

Non tutte queste equazioni sono indipendenti fra loro e dalle equazioni precedenti. Facilmente si ottiene:

1.° Le equazioni corrispondenti al caso in cui $h_1+k_1<l-2$ contenendo nel secondo membro I dedotti di ordine $l-1$ si riducono ad identità quando si sostituiscano agli I dedotti le loro espressioni.

2.° Le equazioni corrispondenti al caso in cui $h_1+h_1=l-2$ si riducono ad identità solo quando sono singolarmente nulli i due membri (si dovrà perciò avere $h=h_1+1$ $k=k_1+1$); negli altri casi esse sono effettive equazioni ma a due a due coincidono; precisamente coincidono quelle che si ottengono uguagliando le espresssioni di I_{hk,h_1k_1} e di $I_{h_1+1k_1+1,h-1k-1}$. Ne segue che il numero delle equazioni (11) indipendenti fra loro e da quelle che si sono già ammesse verificate quali provenienti dall' uguagliare I di ordine $<l$ è $\frac{(l-1)(l-2)}{2}$.

8. — Applichiamo le cose precedenti al caso $l=3$. (I casi $l=1$

od $l=2$ non danno nessuna equazione come risulta dalla discussione fatta or ora). Otterremo una sola equazione:

$$\frac{\partial I_{0210}}{\partial u_1}-\frac{\partial I_{1110}}{\partial u_2}=I_{0220}-I_{1111}\,. \tag{12}$$

Sostituiamo ad I_{0210} I_{1110} le loro espressioni per gli I principali; si ha

$$\frac{\partial I_{1010}}{\partial u_2}=2\,I_{1110}\qquad \frac{\partial I_{1001}}{\partial u_2}=I_{1101}+I_{0210}\qquad \frac{\partial I_{0101}}{\partial u_1}=2\,I_{1101}$$

e quindi

$$I_{1110}=\frac{1}{2}\frac{\partial I_{1010}}{\partial u_2}\qquad I_{0210}=\frac{\partial I_{1001}}{\partial u_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial I_{0101}}{\partial u_1}\,.$$

La (12) diviene

$$\frac{\partial^2 I_{1001}}{\partial u_1\partial u_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_{0101}}{\partial u_1^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_{1010}}{\partial u_2^2}=I_{0220}-I_{1111}\,. \tag{13}$$

Richiamiamo la espressione della curvatura di una superficie:

$$K=\frac{1}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001}\\ I_{1001} & I_{0101}\end{vmatrix}}\left\{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 I_{1001}}{\partial u_1\partial u_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_{0101}}{\partial u_1^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_{1010}}{\partial u_2^2} & \frac{\partial I_{1001}}{\partial u_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial I_{0101}}{\partial u_1} & \frac{1}{2}\frac{\partial I_{0101}}{\partial u_2}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial I_{1010}}{\partial u_1} & I_{1010} & I_{1001}\\ \frac{\partial I_{1001}}{\partial u_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial I_{1010}}{\partial u_2} & I_{0110} & I_{0101}\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial I_{1010}}{\partial u_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial I_{0101}}{\partial u_1}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial I_{1010}}{\partial u_2} & I_{1010} & I_{1001}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial I_{0101}}{\partial u_1} & I_{0110} & I_{0101}\end{vmatrix}\right\}$$

Sostituiamo nel primo determinante al primo termine il suo valore dato da (13): dopo facili riduzioni si ha

$$K = \frac{1}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{1001} & I_{0101} \end{vmatrix}} \left\{ \begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} & I_{1020} \\ I_{0110} & I_{0101} & I_{0120} \\ I_{0210} & I_{0201} & I_{0220} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} & I_{1011} \\ I_{0110} & I_{0101} & I_{0111} \\ I_{1110} & I_{1101} & I_{1111} \end{vmatrix} \right\}$$

Se quindi noi poniamo i simboli:

$$D = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}}} \left\| \begin{matrix} x_{110} & x_{210} & \dots & x_{n10} \\ x_{101} & x_{201} & \dots & x_{n01} \\ x_{120} & x_{220} & \dots & x_{n20} \end{matrix} \right\| \qquad D' = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}}} \left\| \begin{matrix} x_{110} & x_{210} & \dots & x_{n10} \\ x_{101} & x_{201} & \dots & x_{n01} \\ x_{111} & x_{211} & \dots & x_{n11} \end{matrix} \right\|$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}}} \left\| \begin{matrix} x_{110} & x_{210} & \dots & x_{n10} \\ x_{101} & x_{201} & \dots & x_{n01} \\ x_{102} & x_{202} & \dots & x_{n02} \end{matrix} \right\|$$

intendendo il prodotto fatto per linee, si ha

$$K = \frac{D\,D'' - D'^2}{I_{1010}\,I_{0101} - I^2_{1001}} \tag{15}$$

che è la manifesta generalizzazione della formula di Gauss agli spazii ad un qualunque numero di dimensioni.

Gli invarianti sufficienti ad individuare la superficie.

9. — Riprendiamo ora la questione propostaci al n. 2 della rappresentazione della superficie mediante gli invarianti I. Ci porremo però da un punto di vista differente alquanto che nel n. 2. Là infatti consideravamo la superficie come individuata da *tutti* gli invarianti I che le appartengono: ora vogliamo invece studiare come da questo sistema di infiniti invarianti se ne possa staccare uno minore che tuttavia individui la superficie. Ora le osservazioni del n. 6 ci dicono anzitutto che basterà assegnare *a priori* il sistema degli I principali. Ma si può fare di più: supponiamo assegnati gli I principali fino ad un certo ordine l; noi potremo ottenere per derivazione da questi gli I dedotti di ordine $\leq l+1$; d'altra parte dal n. 4 noi sappiamo che fra gli I di ordine $\leq l+1$ esisteranno delle relazioni finite, le quali, se l è sufficientemente elevato, permettono di ricavare gli I principali di ordine $l+1$ in funzione degli I principali di ordine minore e degli I dedotti: e similmente noi potremo procedere per ottenere tutti gli I successivi. Abbiamo con ciò scisso il sistema delle equazioni cui debbono soddisfare gli I in due sistemi; l'uno ci serve ad individuare gli I quando ne siano dati alcuni, l'altro costituirà il sistema delle equazioni differenziali cui debbono soddisfare questi ultimi.

Per determinare la superficie basterà quindi assegnare gli I principali fino ad un conveniente ordine m [1].

---

[1] Sarebbe facile per ogni caso fissare questo numero m e scrivere esplicitamente le equazioni cui gli I debbono soddisfare coi metodi da noi svolti. Nel caso dello spazio ordinario basta dare gli I di primo e secondo ordine, e le equazioni cui questi debbono soddisfare sono le equazioni di Gauss e Codazzi. Nel caso dello spazio a quattro dimensioni le equazioni di condizione furono sotto altra forma calcolate dal SERVANT. *Bulletin de la Société Mathématique de France,* 1902. Debbo quest'ultima indicazione al chiar. prof. Bianchi.

CAPITOLO II.

Gli invarianti assoluti della superficie.

I simboli J.

10. — Abbiamo finora studiato gli invarianti simultanei per movimenti di una superficie e dei sistemi di linee coordinate $u_1\, u_2$ tracciati su essa: ma, come si è osservato nell'introduzione, è ora necessario liberarsi dalla particolare scelta delle variabili $u_1\, u_2$ cercando gli invarianti assoluti della superficie per un movimento arbitrario e per un'arbitraria trasformazione di variabili $u_1\, u_2$ in $u'_1\, u'_2$.

Essendo gli I già invarianti per movimenti basterà studiare come un cambiamento qualunque di variabili operi sugli I; ed ottenere gli invarianti di questo gruppo indotto.

Otterremo più simmetricamente il risultato stesso nel modo seguente: Consideriamo in luogo delle derivate ordinarie delle $u_1\, u_2$ le derivate covarianti rispetto al ds^2 della superficie; per quanto riguarda un movimento dello spazio ambiente queste derivate covarianti si trasformano come le derivate ordinarie e cioè per una sostituzione ortogonale. Infatti la derivata covariante di certo ordine di una funzione è una combinazione lineare omogenea delle derivate dello stesso ordine e di ordine inferiore i cui coefficienti sono prodotti dei simboli a tre indici di seconda specie di Christoffel: ora questi sono invarianti per un movimento dello spazio ambiente [1],

[1] Infatti essi sono formati con E, F, G e colle loro derivate che sono espressioni invarianti per movimenti. Si hanno del resto le formule

le derivate delle x si trasformano d'altra parte per una stessa sostituzione ortogonale, quindi anche le derivate covarianti si trasformano per quella sostituzione ortogonale. Ora ricordiamo che solo su questa osservazione si fonda il ragionamento usato al n. 1 per dimostrare che gli I sono invarianti per il gruppo dei movimenti: conchiuderemo che le espressioni analoghe agli I formate colle derivate covarianti in luogo delle derivate ordinarie sono invarianti per movimenti. Indicando con $x_{i|\alpha_1\alpha_2\dots}$ la derivata covariante di x_i presa successivamente rapporto ad $u_{\alpha_1}\, u_{\alpha_2}\dots$ $(\alpha_1, \alpha_2 \dots = 1, 2)$, queste funzioni saranno

$$(\mathrm{J}) \qquad [(\alpha_1\, \alpha_2 \dots)\, (\beta_1\, \beta_2 \dots)] = \Sigma_i\, x_{i|\alpha_1\alpha_2\dots}\, x_{i|\beta_1\beta_2\dots}$$

Indicheremo queste espressioni col nome di *simboli J.*

Evidentemente essi si trasformano quando si operi un qualunque mutamento di variabili $u_1\, u_2$ in $u'_1\, u'_2$ mediante la formula

$$(1) \quad [(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_\mu)\; (\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_\nu)]' =$$

$$= \Sigma[(a_1 a_2 \dots a_\mu)\; (b_1 b_2 \dots b_\nu)]\, \frac{\partial u_{a_1}}{\partial u'_{\alpha_1}} \frac{\partial u_{a_2}}{\partial u'_{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial u_{a_\mu}}{\partial u_{\alpha_\mu}} \frac{\partial u_{b_1}}{\partial u'_{\beta_1}} \frac{\partial u_{b_2}}{\partial u'_{\beta_2}} \cdots \frac{\partial u_{b_\nu}}{\partial u'_{\beta_\nu}}$$

$$(\alpha_1\,,\, \alpha_2\,, \dots ,\, \beta_1\,,\, \beta_2\,, \dots ,\, a_1\,,\, a_2\,, \dots b_1\,,\, b_2 \dots = 1, 2)$$

la sommatoria nei secondi membri essendo estesa a tutti gli J contenenti μ e ν indici nel primo e nel secondo gruppo. Quindi l'insieme degli J contenenti μ e ν indici nel primo e nel secondo membro si trasforma nell'insieme degli J analoghi per la superficie trasformata quasi fossero i coefficienti di una forma $(\mu+\nu)$ — lineare

$$(\mathrm{F}_{\mu\nu}) \quad \sum [(\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_\mu)\; (\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_\mu)] \times$$

$$\times\, v'_{\alpha_1}\, v''_{\alpha_2} \dots v^{(\mu)}_{\alpha_\mu}\; v^{(\mu+1)}_{\beta_1}\, v^{(\mu+2)}_{\beta_2} \dots v^{(\mu+\nu)}_{\beta_\nu}$$

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} I_{2010} & I_{2001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}}, \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{2010} & I_{2001} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}}, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} I_{1110} & I_{1101} \\ I_{1001} & I_{0101} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{1000} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}}, \quad \dots\dots$$

in cui le coppie di variabili $v_1^{(h)}\, v_2^{(h)}$ sono sottoposte ad una stessa trasformazione projettiva

$$(2)\qquad v_1^{(h)} = \frac{\partial u_1}{\partial u'_1}\, v_1^{(h)\prime} + \frac{\partial u_1}{\partial u'_2}\, v_2^{(h)\prime} \qquad v_2^{(h)} = \frac{\partial u_2}{\partial u'_1}\, v_1^{(h)\prime} + \frac{\partial u_2}{\partial u'_2}\, v_2^{(h)\prime}$$

Le forme $F_{\mu\nu}$ *compiono, come si vedrà nel seguito, l'ufficio che nell'ordinaria teoria compiono le due forme fondamentali.* La forma F_{11} coincide, quando si uguaglino le serie di variabili, col ds^2 della superficie.

11. — Sui simboli J si può svolgere una teoria affatto analoga a quella svolta sugli I. Noi non lo faremo. Rammenteremo tuttavia alcune poche cose necessarie pel seguito. Gli J con μ e ν indici formano un sistema covariante, come segue da (1); si può quindi derivare gli J covariantemente; indicando con $[(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu)\ (\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_\nu)]_i$ la derivata covariante di $[(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu)\ (\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_\nu)]$ rapporto ad u_i si ha

$$(3)\quad [(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu)\ (\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_\nu)]_i = [(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu\, i)\ (\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_\nu)] + \\ + [(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_\mu)\ (\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_\nu\, i)]\ .$$

Se ne deduce che si possono distinguere gli J dedotti e gli J principali. Quindi si potrà individuare la superficie mediante gli J in quel modo stesso che mediante gli I. Ed è facile vedere che, allo stesso modo che la superficie si poteva individuare assegnando gli I principali fino ad un certo ordine m, come è descritto nel numero 9, così essa si potrà individuare assegnando gli J principali fino allo stesso ordine m.

Gli invarianti assoluti.

12. — Le (1) sono le formule di trasformazione degli J per un cambiamento di variabili. Esse rappresentano quindi un gruppo; essendo gli J invarianti per movimenti, gli invarianti di questo gruppo sono invarianti assoluti della superficie. Può sorgere il dubbio che

non siano questi tutti gli invarianti assoluti. Toglieremo questo dubbio osservando che per avere gli invarianti assoluti della superficie bisogna eliminare dalle formule di trasformazione delle x e delle loro derivate: 1° i parametri del movimento, 2° le derivate prime $\frac{\partial u_i}{\partial u'_j}$, 3° le derivate di ordine superiore $\frac{\partial^2 u_i}{\partial u'_j\, \partial u'_h}$, $\frac{\partial^3 u_i}{\partial u'_j\, \partial u'_k\, \partial u'_l} \ldots$ Ora incominciamo dall'eliminare queste ultime; il risultato si può raccogliere come è ben noto nelle formule di trasformazione delle derivate covarianti; eliminiamo di poi i parametri del movimento: si giungerà come risulta dal n. 10, alle formule di trasformazione (1) degli J; talchè ormai non resterà più che ad eliminare le $\frac{\partial u_i}{\partial u'_j}$, e cioè a cercare gli invarianti del gruppo di trasformazioni dato dalle (1). Quindi *il problema della ricerca degli invarianti assoluti, è ricondotto alla ricerca degli invarianti simultanei del sistema delle forme fondamentali* $F_{\mu\nu}$.

Gli J di primo e secondo ordine.

13. — I simboli J principali di primo ordine coincidono coi coefficienti E, F, G dell'elemento lineare della superficie.

$$(4)\quad [(1)\,(1)] = I_{1010} = E \qquad [(1)\,(2)] = [(2)\,(1)] = I_{1001} = F \\ [(2)\,(2)] = I_{0101} = G\ .$$

Segue di qui che i simboli J dedotti di secondo ordine sono identicamente nulli. Infatti per considerazioni identiche a quelle del n. 5, essi sono, per la (3), combinazioni lineari delle derivate covarianti degli J che hanno un solo indice in ognuno dei due gruppi e cioè di E, F, G; le cui derivate covarianti sono nulle.

Quanto ai simboli J principali di secondo ordine cominciamo dall'osservare che l'ordine degli indici in ogni gruppo non è essenziale poichè nelle derivate covarianti seconde di una x

$$(5) \qquad x_{i|lm} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_l \, \partial u_m} - \sum_r \begin{Bmatrix} l\,m \\ r \end{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u_r}$$

si può invertire l'ordine delle derivazioni. Potremo quindi per questi simboli J usare una notazione analoga a quella degli I: scriveremo:

$$[(11)(11)] = \mathrm{J}_{2020}, \quad [(11)(22)] = \mathrm{J}_{2002}$$

$$[(11)(12)] = [(11)(21)] = [(12)(11)] = [(21)(11)] = \mathrm{J}_{2011}$$

$$[(22)(22)] = \mathrm{J}_{0202}, \ [(12)(22)] = [(21)(22)] = \ldots = \mathrm{J}_{0211}, \quad [(12)(12)] = \mathrm{J}_{1111}.$$

Tenuto conto delle formule della nota al n. 10 si ha per la (5) dopo alcune riduzioni

$$(6) \qquad \mathrm{J}_{2020} = \sum x^2_{i\,|\,11} = \sum_i \left[\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1^2} - \sum_r \begin{Bmatrix} 11 \\ r \end{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} \mathrm{I}_{1010} & \mathrm{I}_{1001} \\ \mathrm{I}_{0110} & \mathrm{I}_{0101} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{1010} & \mathrm{I}_{1001} & \mathrm{I}_{1020} \\ \mathrm{I}_{0110} & \mathrm{I}_{0101} & \mathrm{I}_{0120} \\ \mathrm{I}_{2010} & \mathrm{I}_{2001} & \mathrm{I}_{2020} \end{vmatrix} .$$

Od anche usando dei simboli D, D′, D″ introdotti al n. 8:

$$(7) \qquad \mathrm{J}_{2020} = \mathrm{D}^2 .$$

Analogamente si ha

$$(8) \quad \mathrm{J}_{1120} = \mathrm{D\,D'} \quad \mathrm{J}_{0220} = \mathrm{D\,D''} \quad \mathrm{J}_{1111} = \mathrm{D'^2} \quad \mathrm{J}_{1102} = \mathrm{D'\,D''} \quad \mathrm{J}_{0202} = \mathrm{D''^2} .$$

Di qui e dalla (15) del capitolo I (n. 8) ricordando che $\mathrm{K} = \dfrac{(12,12)}{\begin{vmatrix} \mathrm{I}_{1010} & \mathrm{I}_{1001} \\ \mathrm{I}_{0110} & \mathrm{I}_{0101} \end{vmatrix}}$ si deduce che il simbolo di Riemann (12, 12) si esprime per gli J mediante la formula

$$(9) \qquad (12, 12) = \mathrm{J}_{2002} - \mathrm{J}_{1111} .$$

Gli invarianti assoluti di primo e secondo ordine.

14. Vogliamo ora trovare gli invarianti assoluti che contengono J di primo e secondo ordine. Essi sono 5 poichè dalle equazioni di trasformazione dei 9 simboli J di primo e secondo ordine dobbiamo eliminare le 4 derivate prime di $u_1\, u_2$ rapporto ad $u'_1\, u'_2$. Non condurremo però la ricerca direttamente.

Fatta la trasformazione delle $u_1\, u_2$ in $u'_1\, u'_2$ potremo costruire le matrici analoghe a D, D′, D″; le diremo matrici trasformate e le indicheremo con d, d', d''. Esse sono combinazioni lineari [1] delle matrici primitive D D′ D″:

$$d = \mathrm{D}\left(\frac{\partial u_1}{\partial u'_1}\right)^2 + 2\,\mathrm{D'}\,\frac{\partial u_1}{\partial u'_1}\frac{\partial u_2}{\partial u'_1} + \mathrm{D''}\left(\frac{\partial u_2}{\partial u'_1}\right)^2$$

$$(10) \qquad d' = \mathrm{D}\,\frac{\partial u_2}{\partial u'_1}\frac{\partial u_1}{\partial u'_2} + \mathrm{D'}\left(\frac{\partial u_1}{\partial u'_1}\frac{\partial u_2}{\partial u'_2} + \frac{\partial u_1}{\partial u'_2}\frac{\partial u_2}{\partial u'_1}\right) + \mathrm{D''}\,\frac{\partial u_2}{\partial u'_1}\frac{\partial u_2}{\partial u'_2}$$

$$d'' = \mathrm{D}\left(\frac{\partial u_1}{\partial u'_2}\right)^2 + 2\,\mathrm{D'}\,\frac{\partial u_1}{\partial u'_2}\frac{\partial u_2}{\partial u'_2} + \mathrm{D''}\left(\frac{\partial u_2}{\partial u'_2}\right)^2 .$$

D D′ D″ si trasformano quindi quasi fossero i coefficienti di una forma quadratica le cui variabili si trasformassero per la (2). Noi sappiamo

[1] Qui e nel seguito trattiamo le matrici quasi fossero effettive espressioni numeriche. Per legittimare questo modo di calcolare, si osservi che nelle formule finali entreranno sempre prodotti *per linee* delle matrici su cui si opera. Ora ricordando la legge con cui si formano i determinanti prodotti si vede immediatamente che essi non mutano quando sulle linee delle matrici si opera come se fossero linee di un determinante. Si può in particolare: scambiare le linee della matrice cambiando al più il segno alla matrice, porre in evidenza un fattore comune ad una linea, scomporre una matrice in cui una linea sia somma di più linee, in una somma di matrici in cui la linea è sostituita dai suoi addendi. E così via. Inversamente verrà quindi ad essere attribuito un senso preciso ad una somma di matrici che abbiano tutte le linee comuni tranne una (quali D D′ D″) e quindi alle combinazioni lineari di tali matrici ecc.

In modo analogo si vede che alle matrici si può applicare la regola di derivazione dei determinanti.

che lo stesso avviene per $I_{1010}\, I_{1001}\, I_{0101}$;[1] ora esistono notoriamente due invarianti comuni di due forme quadratiche: il quoziente dei due discriminanti e l' invariante simultaneo: quindi avremo due invarianti simbolici $\frac{D\,D'' - D'^2}{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}$, e $\frac{I_{1010}\, D'' + I_{0101}\, D - 2\, I_{1001}\, D'}{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}$. Il primo soltanto di questi invarianti ha un valore effettivo: noi l'abbiamo già incontrato al n. 8 ed è la curvatura K. Per avere dal secondo invariante simbolico uno effettivo ne faremo il quadrato simbolico; si hanno così i due invarianti

$$\Delta_1 = \frac{J_{2002} - J_{1111}}{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2} \tag{11}$$

$$\Delta_2 = \frac{I_{1010}^2 J_{0202} + I_{0101}^2 J_{2020} + 4\, I_{0110}^2 J_{1111} - 4\, I_{1010} I_{1001} J_{0211} - 4\, I_{0101} I_{1001} J_{2011} + 2\, I_{1010} I_{0101} J_{2002}}{(I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2)^2} \tag{12}$$

Per avere gli altri invarianti consideriamo il determinante degli I di primo e secondo ordine:

$$A = \begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} & I_{1020} & I_{1011} & I_{1002} \\ I_{0110} & I_{0101} & I_{0120} & I_{0111} & I_{0102} \\ I_{2010} & I_{2001} & I_{2020} & I_{2011} & I_{2002} \\ I_{1110} & I_{1101} & I_{1120} & I_{1111} & I_{1102} \\ I_{0210} & I_{0201} & I_{0220} & I_{0211} & I_{0202} \end{vmatrix} = \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20} \\ x_{11} \\ x_{02} \end{matrix} \right\|^2 . \tag{13}$$

Formiamo un qualunque minore estratto del determinante degli J di secondo ordine $\begin{vmatrix} J_{2020} & J_{2011} & J_{2002} \\ J_{1120} & J_{1111} & J_{1102} \\ J_{0220} & J_{0211} & J_{0202} \end{vmatrix}$ per es: $\begin{vmatrix} J_{2020} & J_{2011} \\ J_{1120} & J_{1111} \end{vmatrix}$. Ricordiamo le (6) (7) (8) del n. 13 e sostituiamo agli J i loro valori: il determinante precedente risulterà a meno del fattore $\frac{1}{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}$ un minore del determinante degli aggiunti del primo minore principale di A, e precisamente quello formato dagli aggiunti degli ele-

[1] D'ora innanzi, conformemente all'osservazione iniziale del n. 13, al posto degli J principali di primo ordine si scriverà $I_{1010} \ldots$; $I_{1010}\, I_{1001}\, I_{0101}$ sono quindi i coefficienti di F_{11}.

menti del minore complementare di $\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}$. Per un noto teorema della teoria dei determinanti si ha quindi

$$\begin{vmatrix} J_{2020} & J_{2011} \\ J_{1120} & J_{1111} \end{vmatrix} = \frac{1}{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2} \begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} & I_{1020} & I_{1011} \\ I_{0110} & I_{0101} & I_{0120} & I_{0111} \\ I_{2010} & I_{2001} & I_{2020} & I_{2011} \\ I_{1110} & I_{1101} & I_{1120} & I_{1111} \end{vmatrix} = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20} \\ x_{11} \end{matrix} \right\|^2 .$$

Analoghe formule si hanno per gli altri minori del determinante degli J. Introduciamo i simboli

$$C_1 = \frac{1}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20} \\ x_{11} \end{matrix} \right\| \qquad 2\, C_2 = \frac{1}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20} \\ x_{02} \end{matrix} \right\| \tag{15}$$

$$C_3 = \frac{1}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{11} \\ x_{02} \end{matrix} \right\| .$$

Si avrà

$$\begin{vmatrix} J_{2020} & J_{2011} \\ J_{1120} & J_{1111} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix} C_1^2 , \quad \begin{vmatrix} J_{2020} & J_{2002} \\ J_{1120} & J_{1102} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix} C_1\, C_2 \ldots \tag{16}$$

Premesso ciò, analogamente a quanto si fece per $D\, D'\, D''$, si immagini di costruire i simboli analoghi a $C_1\, C_2\, C_3$ per le variabili trasformate, e diciamoli $c_1\, c_2\, c_3$; $c_1\, c_2\, c_3$ si esprimono per $C_1\, C_2\, C_3$

quasi fossero coefficienti di una forma quadratica le cui variabili si trasformassero per (2). Si hanno quindi gli invarianti simbolici $\frac{C_1 C_3 - C_2^2}{I_{1010} I_{0101} - I_{1001}^2}$, $\frac{I_{1010} C_3 + I_{0101} C_1 - 2 I_{1001} C_2}{I_{1010} I_{0101} - I_{1001}^2}$ e di qui gli invarianti effettivi

$$\Delta_3 = \frac{\begin{vmatrix} J_{2011} & J_{2002} \\ J_{1111} & J_{1102} \end{vmatrix} - \frac{1}{4} \begin{vmatrix} J_{2020} & J_{2002} \\ J_{0220} & J_{0202} \end{vmatrix}}{(I_{1010} I_{0101} - I_{1001}^2)^2} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 = \frac{1}{\{ I_{1010} I_{0101} - I_{1001}^2 \}^3} \Big\{ & I_{1010}^2 \begin{vmatrix} J_{1111} & J_{1102} \\ J_{0211} & J_{0202} \end{vmatrix} + I_{0101}^2 \begin{vmatrix} J_{2020} & J_{2011} \\ J_{1120} & J_{1111} \end{vmatrix} + \\ & + I_{1001}^2 \begin{vmatrix} J_{2020} & J_{2002} \\ J_{0220} & J_{0202} \end{vmatrix} - 2 I_{1001} I_{1010} \begin{vmatrix} J_{2011} & J_{2002} \\ J_{0211} & J_{0202} \end{vmatrix} \\ & - 2 I_{1001} I_{0101} \begin{vmatrix} J_{2020} & J_{1102} \\ J_{1120} & J_{1102} \end{vmatrix} + 2 I_{1010} I_{0101} \begin{vmatrix} J_{2011} & J_{2002} \\ J_{1111} & J_{1102} \end{vmatrix} \Big\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Infine per trovare un quinto invariante osserviamo il determinante degli J del secondo ordine; esso è, a meno del fattore $\frac{1}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}^3}$ il determinante dei minori di 3.° ordine contenenti il primo minore principale di A, e questo, per una generalizzazione[1] di un noto teorema della teoria dei determinanti, è uguale ad A moltiplicato per $\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}^2$.

D'altra parte il trasformato di A è uguale ad $A \times \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u'_1} & \frac{\partial u_2}{\partial u'_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial u'_2} & \frac{\partial u_2}{\partial u'_2} \end{vmatrix}^8$, quindi si avrà che

---

[1] Cfr. Netto. *Acta mathematica*, vol. 17, 1894. Zwei Determinantensätze.

$$\Delta_5 = \frac{A}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0111} \end{vmatrix}^4} = \frac{\begin{vmatrix} J_{2020} & J_{2011} & J_{2002} \\ J_{1120} & J_{1111} & J_{1102} \\ J_{0220} & J_{0211} & J_{0202} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0120} & I_{0101} \end{vmatrix}^3} \tag{19}$$

è un invariante. Δ_1 Δ_2 Δ_3 Δ_4 Δ_5 formano il sistema completo degli invarianti cercati: per provarlo basterà dimostrare che essi sono indipendenti. Noi non daremo questa dimostrazione; poichè l'interpretazione geometrica che si troverà nel 4.° capitolo mostrerà chiaramente tale indipendenza.

Condizioni per la congruenza di due superficie. Considerazioni preliminari.

15. — Supponiamo date due superficie: l'una S riferita alle coordinate u_1 u_2, l'altra S' riferita alle coordinate u'_1 u'_2. Perchè le due superficie siano congruenti è necessario e sufficiente che i loro invarianti assoluti uguagliati diano equazioni in u_1 u_2, u'_1 u'_2 compatibili, e cioè tali che si possa ottenere u_1 u_2 in funzione di u'_1 u'_2 e non si possa dedurre nessuna equazione in u_1 u_2 od in u'_1 u'_2 soltanto. Però le condizioni così enunciate non sono indipendenti: non sarà necessario uguagliare tutti gli invarianti ma solo parte di essi: ci proponiamo di approfondire questa ricerca.

16. — Supponiamo costruiti gli J per le due superficie: le (1), quando nei primi membri siano posti gli J relativi ad S' nei secondi gli J relativi ad S, sono le equazioni differenziali da cui si deve dedurre, se possibile, la trasformazione di S in S'. Le prime tre equazioni di trasformazione degli J di primo ordine sono indipendenti; sono le equazioni di trasformazione di E, F, G e, come è noto, da esse si possono dedurre le derivate seconde di u_1 u_2 rapporto u'_1 u'_2 in funzione delle derivate prime e di u_1 u_2 u'_1 u'_2. Però noi ci proponiamo di mostrare che di più *tolto un caso eccezionale,*

facile ad esaurirsi, *dalle* (1) *si possono ottenere le derivate prime in funzione di* $u_1\, u_2\, u'_1\, u'_2$.

Supponiamo infatti che dalle equazioni (1) non si possano ottenere le derivate prime in funzione di $u_1\, u_2\, u'_1\, u'_2$; ciò significa che fra le projettività che soddisfano le prime tre equazioni (1), e cioè trasformano F_{11} in F'_{11} ne esiste una serie, ad un parametro almeno, che soddisfa le residue (1) e cioè trasforma $F_{\mu\nu}$ in $F'_{\mu\nu}$, in particolare F_{22} in F'_{22}. Ma se S e T trasformano F_{11} in F'_{11}, F_{22} in F'_{22}, $S\,T^{-1}$ trasforma in sè F_{11} ed F_{22}: e quindi nella nostra ipotesi esiste un gruppo ad un parametro che trasforma in sè F_{11} ed F_{22}.

Scriviamo per disteso F_{11} ed F_{22}, modificandole però alquanto. Notiamo che le forme introdotte al n. 10 erano scritte in $\mu+\nu$ serie di variabili perchè, non sapendo se l'ordine degli indici negli J era indifferente, dovevamo tenerne conto nello scrivere le (1) e quindi tale ordine doveva risultare ancora nello scrivere le $F_{\mu\nu}$. Ma nel n. 13 abbiamo visto che per gli J del primo e secondo ordine l'ordine degli indici in ogni gruppo non è essenziale; usando quindi le notazioni là introdotte potremo scrivere in luogo di F_{22} la seguente forma quadratica in due sole serie di variabili che ancora chiameremo F_{22}

$$(F_{22})\quad J_{2020}\, v_1^2 v_1^{(1)2} + 2\, J_{2011}\,(v_1^2 v_1^{(1)} v_2^{(1)} + v_1 v_2 v_1^{(1)2}) + J_{2002}\,(v_1^2 v_2^{(1)2} + v_2^2 v_1^{(1)2}) + \\ + 2\, J_{1102}\,(v_1 v_2 v_2^{(1)2} + v_2^2 v_1^{(1)} v_2^{(1)}) + 4\, J_{1111}\, v_1 v_2 v_1^{(1)} v_2^{(1)} + J_{0202}\, v_2^2 v_2^{(2)2}.$$

Analogamente facilmente si vede che per gli effetti di individuare la trasformazione degli J di primo ordine ad F_{11} si può sostituire

$$(F_{11})\qquad I_{1010}\, v_1^2 + 2\, I_{1001}\, v_1 v_2 + I_{0101}\, v_2^2$$

La nostra ipotesi si traduce nell'altra: esiste un gruppo ad un parametro almeno di projettività che agisce separatamente e nello stesso modo sulle due serie di variabili $v_1\, v_2$; $v_1^{(1)}\, v_2^{(1)}$ e trasforma in se $F_{22}\, F_{11}$ e quindi anche l'analoga

$$(F_{11}^{(1)})\qquad I_{1010}\, v_1^{(1)2} + 2\, I_{1001}\, v_1^{(1)} v_2^{(1)} + I_{0101}\, v_2^{(1)2}$$

17. — Per esaminare quando ciò è possibile consideriamo $v_1\, v_2\, v_1^{(1)}\, v_2^{(1)}$ come coordinate omogenee di un S_3; le nostre projettività trasformano in sè e nello stesso modo le rette $v_1 = v_2 = 0$ e $v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = 0$ e lasciano fissi o scambiano fra loro due punti su ciascuna di queste rette aventi uguali coordinate sulle rette medesime, radici delle equazioni $F_{11}=0$ $F_{11}^{(1)}=0$. Questi punti sono immaginarii coniugati essendo F_{11} ed $F_{11}^{(2)}$ definite positive. Le projettività che noi studiamo costituiscono dunque un gruppo misto: le projettività P che lasciano fissi i due punti su ogni retta e le involuzioni I che li scambiano. Il prodotto di due I è una P, quindi il gruppo da noi cercato contiene un sottogruppo ad un parametro almeno di projettività P: noi dovremo esaminare se un tale sottogruppo può trasformare F_{22} in sè.

Con un mutamento di variabili possiamo fare che i punti fissi su $v_1 = v_2 = 0$ e $v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = 0$ siano i vertici del tetraedro fondamentale: di questo cambiamento di variabili si può disporre per modo che esso agisca separatamente ed in ugual modo su $v_1\, v_2$ e su $v_1^{(1)}\, v_2^{(1)}$. Quindi F_{11} e $F_{11}^{(1)}$ saranno ancora forme quadratiche nelle due nuove serie di variabili, F_{22} sarà quadratica e simmetrica e nelle due serie di variabili; le projettività P agiranno ancora in ugual modo e separatamente sulle due coppie. Dette $\bar v_1\, \bar v_2\, \bar v_1^{(1)}\, \bar v_2^{(1)}$ le nuove variabili, i piani $\bar v_1 = 0$ e $\bar v_2 = 0$ sono, nelle variabili primitive, immaginarii coniugati e così pure $\bar v_1^{(1)} = 0$ e $\bar v_2^{(1)} = 0$. Le projettività P hanno la forma

$$(20)\qquad \xi_1 = a_1\, \bar v_1 \quad \xi_2 = a_2\, \bar v_2 \quad \xi_1^{(1)} = \rho\, a_1\, \bar v_1^{(1)} \quad \xi_2^{(1)} = \rho\, a_2\, \bar v_2^{(1)}$$

ed un punto $\bar v_1\, \bar v_2\, \bar v_1^{(1)}\, \bar v_2^{(1)}$ è portato dalle P nei punti della quadrica

$$(21)\quad A\, \xi_1^{(1)}\, \xi_2 + B\, \xi_1\, \xi_2^{(1)} = 0 \quad A = \bar v_1\, \bar v_2^{(1)} \quad B = -\bar v_2\, \bar v_1^{(1)} \quad A \text{ e } B \neq 0$$

Fanno eccezione i punti appartenenti ad un piano coordinato che restano in esso piano. La F_{22} uguagliata a 0 rappresenta una superficie di 4.° ordine e dovendo per ipotesi restare fissa per qualunque projettività P deve essere costituita da due quadriche (21) o da una quadrica e due piani coordinati e da quattro piani coordinati distinti o coincidenti. Nel primo caso essa è il prodotto

$(A\,\overline{v}_1^{(1)}\,\overline{v}_2 + B\,\overline{v}_1\,\overline{v}_2^{(1)})\,(A_1\,\overline{v}_1^{(1)}\,\overline{v}_2 + B_1\,\overline{v}_1\,\overline{v}_1^{(2)})$; perchè essa sia simmetrica nelle due serie di variabili come F_{22} occorre che $A\,A_1 = B\,B_1$ e quindi a meno di un fattore di proporzionalità $A = B_1$, $A_1 = B$; *le due quadriche di cui F_{22} è prodotto si ottengono l' una dall' altra scambiando le due serie di variabili.* Il secondo caso si esclude perchè F_{22} essendo a coefficienti reali dovrebbe essere il prodotto di una quadrica (21) per due piani immaginarii coniugati ed allora non sarebbe più simmetrica nelle due serie di variabili. Ed analogamente discutendo il terzo caso, si conchiude che, oltre al caso enunciato, F_{22} non può essere che della forma $\overline{v}_1\,\overline{v}_2\,.\,\overline{v}_1^{(1)}\,\overline{v}_2^{(2)}$ o nelle antiche variabili *uguale al prodotto* $F_{11}^{(1)}\,F_{11}$.

In tutti i casi essa è il prodotto di due forme quadratiche che si ottengono l' una dall'altra scambiando le due serie di variabili e quindi deve aversi

$$(22) \qquad J_{2020}\,J_{1111} = J_{2011}^2 \quad J_{2020}\,J_{0202} = J_{2002}^2 \quad J_{0202}\,J_{1111} = J_{0211}\,,$$

o, sostituendo i valori (8) delle J

$$(23) \quad D^2 \,.\, D'^2 = (D\,D')^2 \quad D^2 \,.\, D''^2 = (D\,D'')^2 \quad D'^2 \,.\, D''^2 = (D'D'')^2$$

Ci sarà quindi permesso di assegnare a $D\,D'\,D''$ un valore numerico: $D = \sqrt{J_{2020}}$ ecc. ed, uguagliate in F_{22} le due serie di variabili, F_{22} si potrà scrivere come il quadrato di

$$(24) \qquad D v_1^2 + 2\,D' v_1\,v_2 + D''\,v_2^2\,.$$

Noi dovremo cercare quando accadrà che (24) ed F_{11} ammettano un gruppo ad un parametro di projettività che le trasformi in sè. Occorre però anzitutto che studiamo il significato delle (23).

Le superficie che soddisfano le equazioni (23)

18. — Diciamo a_i, b_i, c_i i determinanti corrispondenti di D, D', D''; le (23) equivalgono alle altre

$$(25) \qquad \sum a_i^2 \cdot \sum b_i^2 = \left(\sum a_i b_i\right)^2 \quad \sum a_i^2 \cdot \sum c_i^2 = \left(\sum a_i c_i\right)^2$$
$$\sum b_i^2 \cdot \sum c_i^2 = \left(\sum b_i c_i\right)^2$$

od anche

$$(26) \qquad \sum (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 0 \quad \sum (a_i c_j - a_j c_i)^2 = 0$$
$$\sum (b_i c_j - b_j c_i)^2 = 0$$

Nel campo reale dovrà quindi aversi

$$(27) \qquad \frac{a_i}{a_j} = \frac{b_i}{b_j} = \frac{c_i}{c_j} = K_{ij}$$

Notiamo che queste equazioni equivalgono al supporre nulli tutti i minori di 4.º ordine della matrice delle derivate prime e seconde delle x.

Fra i determinanti a_i b_i c_i consideriamo quelli che contengono le due prime colonne delle rispettive matrici, e sia K_j il rapporto di uno di questi aventi per terza colonna la j^{esima}, a quello contenente la terza colonna della matrice rispettiva: le (27) divengono

$$(28) \qquad \begin{vmatrix} x_{110} & x_{210} & x_{j10} - K_j\,x_{310} \\ x_{101} & x_{201} & x_{j01} - K_j\,x_{301} \\ x_{120} & x_{220} & x_{j20} - K_j\,x_{320} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x_{110} & x_{210} & x_{j10} - K_j\,x_{310} \\ x_{101} & x_{201} & x_{j01} - K_j\,x_{301} \\ x_{111} & x_{211} & x_{j11} - K_j\,x_{311} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_{110} & x_{210} & x_{j10} - K_j\,x_{310} \\ x_{101} & x_{201} & x_{j01} - K_j\,x_{301} \\ x_{102} & x_{202} & x_{j02} - K_j\,x_{302} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Queste equazioni esprimono che esisteranno coefficienti α_j β_j tali che

$$(29) \quad x_{j.10} = \alpha_j x_{1.10} + \beta_j x_{2.10} + K_j x_{3.10}\,, \quad x_{j.01} = \alpha_j x_{1.01} + \beta_j x_{2.01} + K_j x_{3.01}$$

$$(30) \qquad \begin{cases} x_{j.20} = \alpha_j x_{1.20} + \beta_j x_{2.20} + K_j x_{3.20}\,, \\ x_{j.11} = \alpha_j x_{1.11} + \beta_j x_{2.11} + K_j x_{3.11}\,, \\ x_{j.02} = \alpha_j x_{1.02} + \beta_j x_{2.02} + K_j x_{3.02}\,. \end{cases}$$

Derivando rapporto ad $u_1\, u_2$ le (29) e confrontando con (30), si deduce

$$(31)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial u_1} x_{1,10} + \dfrac{\partial \beta_j}{du_1} x_{2,10} + \dfrac{\partial K_j}{du_1} x_{3,10} \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial \alpha_j}{du_1} x_{1,01} + \dfrac{\partial \beta_j}{du_1} x_{2,01} + \dfrac{\partial K_j}{du_1} x_{3,01} \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial \alpha_j}{du_2} x_{1,10} + \dfrac{\partial \beta_j}{du_2} x_{2,10} + \dfrac{\partial K_j}{du_2} x_{3,10} \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial \alpha_j}{du_2} x_{1,01} + \dfrac{\partial \beta_j}{du_2} x_{2,01} + \dfrac{\partial K_j}{du_2} x_{3,01} \end{cases}$$

Derivando la prima di queste rapporto ad u_2, la terza rapporto ad u_1 e sottraendo; ed analogamente operando sulla seconda e quarta:

$$(32)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \alpha_j}{du_1} x_{1,11} + \dfrac{\partial \beta_j}{du_1} x_{2,11} + \dfrac{\partial K_j}{du_1} x_{3,11} - \\[2ex] \qquad - \dfrac{\partial \alpha_j}{du_2} x_{1,20} - \dfrac{\partial \beta_j}{du_2} x_{2,20} - \dfrac{\partial K_j}{du_2} x_{3,20} \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial \alpha_j}{du_1} x_{1,01} + \dfrac{\partial \beta_j}{du_1} x_{2,02} + \dfrac{\partial K_j}{du_2} x_{3,03} - \\[2ex] \qquad - \dfrac{\partial \alpha_j}{du_2} x_{1,01} - \dfrac{\partial \beta_j}{du_2} x_{2,11} - \dfrac{\partial K_j}{du_2} x_{3,11} \end{cases}.$$

Segue dalle (31), (32) considerate come equazioni lineari nelle derivate di $\alpha_j\, \beta_j\, K_j$, che se non è nullo il determinante dei coefficienti tali derivate sono nulle e quindi le α_j, β_j K_j costanti. Integrando allora (29) si deduce

$$(33)\qquad x_j = \alpha_j\, x_j + \beta_j\, x_2 + K_j\, x_3 + m_j \quad (j > 3)$$

e quindi la superficie è contenuta in un S_3 subordinato.

Resta ad esaminarsi l'ipotesi che il determinante dei coefficienti di (31), (32) sia nullo. Esso è:

$$(34)\quad \begin{vmatrix} x_{1,10} & x_{2,10} & x_{3,10} \\ x_{1,01} & x_{2,01} & x_{3,01} \\ x_{1,20} & x_{2,20} & x_{3,20} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{1,10} & x_{2,10} & x_{3,10} \\ x_{1,01} & x_{2,01} & x_{3,01} \\ x_{1,02} & x_{2,02} & x_{3,02} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{1,10} & x_{2,10} & x_{3,10} \\ x_{1,01} & x_{2,01} & x_{3,01} \\ x_{1,11} & x_{2,11} & x_{3,11} \end{vmatrix}^2 = 0$$

Se questa equazione è soddisfatta possiamo scegliere, invece che l'associazione di indici 1, 2, 3, un'altra associazione e si giungerà alla conclusione di prima, salvo quando qualunqne siano gli indici $r\, s\, t$ che si sostituiscono ad 1, 2, 3 la (34) resta soddisfatta. In questo ultimo caso la somma delle equazioni analoghe a (34) dà $D\, D'' - D'^2 = 0$; quindi per la (15) del cap. I. (n.8), la superficie è sviluppabile; di più le (34) dicono che la projezione su un qualunque S_3 coordinato, (e quindi pel carattere invariantivo delle equazioni (23) da cui siamo partiti, su un qualunque S_3) è una sviluppabile. Ora una sviluppabile di S_3 è una superficie rigata quindi saranno pure superficie rigate le sviluppabili di S_n che noi consideriamo.

Inversamente una qualunque sviluppabile rigata soddisfa l'equazione (34) e le analoghe. Per essa si ha infatti, supposto che le $u_2 =$ cost siano le rette ed u_1 misuri su queste rette la lunghezza:

$$(35)\qquad x_i = \xi_i + \eta_i\, u_1$$

ξ_i, η_i essendo funzioni di u_2. Sarà quindi $x_{i,20} = 0$ quindi, i minori di D sono nulli. L'equazione $D\, D'' - D'^2 = 0$ si riduce allora $D'^2 = 0$ che, per la condizione di realità, equivale a dire che i minori di D' sono nulli. Una tal superficie soddisfa quindi le (34) come si era enunciato. Si conchiude *Le sole superficie che soddisfanno le equazioni* (23) *sono le superficie sviluppabili rigate e le superficie dell'* S_3.

19. — Ritorneremo più tardi sulla determinazione delle superficie sviluppabili rigate e troveremo che tali superficie sono i coni, i cilindri e le superficie delle tangenti ad una curva di S_n: cfr. n. 47.

Soluzione della questione del n. 16.

20. — Ritornando ormai alla questione proposta al n. 16, riprendiamo a considerare la trasformazione che ne davamo al n. 17. Per-

essa noi dovevamo studiare quando, supposte soddisfatte le (23), F_{11} e (24) ammettono un gruppo di projettività. Dovrà perciò essere $\rho\, I_{1100} = D$, $\rho\, I_{1001} = D'$, $\rho\, I_{0101} = D''$, e quindi $DD'' - D'^2 = \rho^2 (I_{1010}\, I_{0101} - I^2_{1001})$. Ma per il teorema del n. 18 se sono soddisfatte le (23) e la superficie non è di S_3, $D\, D'' - D'^2 = 0$, quindi, poichè $I_{1010}\, I_{0101} - I^2_{1001} \neq 0$ sarà $\rho = 0$ e $D = D' = D'' = 0$. Il ragionamento del n. 3 ci dice che la superficie è allora un piano. Quindi, se la superficie è immersa in uno spazio a più di 3 dimensioni, almeno una delle (1) nei simboli J del secondo ordine è indipendente da quelle nei simboli J del primo ordine quando si considerino come equazioni nelle derivate delle u rapporto alle u'; in altri termini *dai primi due gruppi di equazioni* (1) *si possono ricavare le derivate prime delle u rapporto alle u' appena la superficie è immersa in uno spazio a più di 3 dimensioni.*

Nel caso dello spazio a 3 dimensioni è ben noto che fa eccezione *il solo caso della sfera.*

Invarianti assoluti sufficienti a determinare la superficie.

21 Possiamo di qui dedurre la risposta alla questione proposta nel n. 15 della congruenza di due superficie. Supponiamo che le superficie si possano individuare cogli J di ordini $\leq m$ [1]. Affinchè due superficie siano congruenti è necessario e sufficiente che le (1) relative agli J di ordine $\leq m$ si possano soddisfare col porre u_1, u_2 funzioni convenienti di $u'_1\, u'_2$. Diremo tale sistema di equazioni sistema A. Escluso il caso della sfera, dal sistema A si può, per il precedente teorema, dedurre le derivate di $u_1\, u_2$ rapporto ad $u'_1\, u'_2$ in funzione di $u_1\, u_2\, u'_1\, u'_2$; dopo di che si avranno ancora equazioni in termini finiti in $u_1\, u_2\, u'_1\, u'_2$ esprimenti che le A sono compatibili nelle dette derivate: esse risulteranno dall'uguagliare gli invarianti assoluti delle due superficie costruite con J di ordine $\leq m$. Supponiamo che queste equazioni non siano fra loro

[1] Cfr. n. 11.

contraddittorie, bisognerà esaminare se non hanno conseguenze differenziali contraddittorie con quelle equazioni che esprimono le derivate prime in funzione di $u_1\, u_2\, u'_1\, u'_2$, e se queste ultime non hanno conseguenze differenziali contraddittorie fra loro.

Consideriamo perciò il sistema delle equazioni di trasformazione degli J di ordine $m + 1$, che per quanto si vide al n. 11 sono equavalenti alle formole di trasformazione delle derivate covarianti degli J di ordine $\leq m$: sia esso B. Questo sistema può intendersi ottenuto derivando A e sostituendo alle derivate seconde delle u rapporto alle u', le note espressioni che di esse si deducono in funzione delle derivate prime; esso esprime quindi le conseguenze differenziali di A. Se B è conseguenza di A, le condizioni di integrabilità sono soddisfatte. Se no si aggiungerà una equazione almeno in termini finiti fra $u_1\, u_2\, u'_1\, u'_2$. Procediamo allora su B come su A: aggiungiamo le equazioni di trasformazione degli J di ordine $m + 2$, sarà C il nuovo sistema; se è conseguenza di B le superficie sono congruenti, se no si aggiungerà almeno una seconda equazione in termini finiti. Avendosi già in tal modo almeno due equazioni nelle $u_1\, u_2\, u'_1\, u'_2$ in termini finiti, un ulteriore passo sarà sufficiente a distinguere se le superficie sono oppure no congruenti. Quindi *ritenendo per m il significato attribuito ai numeri 9 od 11, perchè due superficie siano congruenti basta che siano compatibili le equazioni che si ottengono uguagliando gli invarianti assoluti fino all'ordine* $m + 3$ (e che non leghino fra loro le $u'_1\, u'_2$ nè le $u_1\, u_2$).

Le superficie che ammettono un G_3 di movimenti dello spazio ambiente.

22. — Del teorema del n. 20 diamo subito un'altra applicazione ricercando quali superficie ammettono un G_3 di movimenti dello spazio ambiente.

Supponiamo che una superficie ammetta un movimento μ. Siano $u'_1\, u'_2$ le linee coordinate che per μ si sovrappongono ad $u_1\, u_2$. Sia O un punto della superficie di coordinate a, b rapporto ad $u_1\, u_2$;

μO, trasformato di esso per μ, ha nel sistema $u'_1\, u'_2$ le coordinate $a\ b$. D'altra parte le coordinate x di O e x' di μO: non differiscono che per un movimento sicchè x ed x' sono, a meno di un movimento, le stesse funzioni rispettivamente di $u_1\, u_2$ ed $u'_1\, u'_2$. E viceversa se si può fare un tale mutamento di variabili u_1, u_2 in $u'_1\, u'_2$ che le x di due punti aventi uguali coordinate nei due sistemi siano, a meno di un movimento μ, le stesse funzioni di $u_1\, u_2$, $u'_1\, u'_2$ rispettivamente, la superficie ammette μ. Ora gli J, essendo invarianti per movimenti, sono le stesse funzioni di $u_1\, u_2$ ed $u'_1\, u'_2$; quindi perchè esista un movimento che trasformi in sè la superficie debbono potersi soddisfare le (1) quando nel primo membro siano poste le stesse funzioni di $u'_1\, u'_2$ che nel secondo membro di $u_1\, u_2$.

Se ora una superficie ammette un G_3 di movimenti, le (1) scritte come si disse debbono ammettere soluzioni dipendenti da tre costanti arbitrarie: ma, tolto il caso della sfera, ciò contraddice alle conclusioni del n. 20 secondo cui si possono ottenere le derivate prime in funzione di $u'_1\, u'_2\, u_1\, u_2$ e secondo cui quindi le (1) non hanno che soluzioni con due costanti arbitrarie. Se ne conclude: *Non esistono superficie reali appartenenti ad uno spazio a più di 3 dimensioni che ammettano un* G_3 *di movimenti dello spazio ambiente: nel caso dello spazio a 3 dimensioni si ha il noto caso della sfera* [1].

Possiamo generalizzare questo teorema agli spazi ad n dimensioni a curvatura costante positiva: un tale spazio Σ_n è rappresentato da una ipersfera dell'S_{n+1} euclideo; e in tale rappresentazione un movimento è una rotazione dell'S_{n+1} attorno al centro dell'ipersfera ed una superficie appartenente a Σ_n e non ad uno spazio minore appartiene ad S_{n+1} o ad un S_n non passante pel centro. Se una tale superficie ammettesse un G_3 sarebbe una superficie di un S_{n+1} che ammette un G_3 di movimenti, oppure una superficie di un S_n non pel centro che ammette un G_3 di rotazioni attorno al centro. Il primo

[1] In una mia Nota *Sui gruppi di movimenti*, pubblicata nei Rendiconti della Accademia dei Lincei (vol. XIV, 1° sem. serie 5ª), ricorrendo ai metodi della teoria dei gruppi di Lie, ho determinato e classificato le superficie che ammettono un G_2 di movimenti dello spazio ambiente.

caso è assurdo per quanto precede: il secondo si esclude pure se $n > 3$ osservando che, perchè ciò fosse possibile in G_3 dovrebbe essere almeno un G_1 che lasciasse fisso ogni punto di S_n, il che non è, perchè un movimento di S_{n+1} che lasci fisso un S_n ed un punto fuori di esso è l'identità. Quindi si conchiude che *in uno spazio a curvatura costante positiva a più di 3 dimensioni non esistono superficie che ammettono un gruppo a tre parametri di movimenti dello spazio ambiente.*

Capitolo III.

Il teorema di Meusnier generalizzato [1]

Alcune formule della teoria delle curve.

23. — Ricordiamo anzitutto alcune formule relative ad una curva immersa in un S_n. Una curva in un S_n si ottiene ponendo le coordinate x funzioni di una variabile t. Indichiamo *la curvatura* ν*—esima,* e cioè il limite del rapporto dell'angolo di due piani osculatori a ν dimensioni all'arco, con $\frac{1}{\rho_\nu}$. Posto

$$(1) \qquad M_\nu = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots\cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} & \frac{d^2x_1}{dt^2} & \cdots\cdots & \frac{d^2x_n}{dt^2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{d^\nu x_1}{dt^\nu} & \frac{d^\nu x_2}{dt^\nu} & \cdots & \frac{d^\nu x_n}{dt^\nu} \end{array} \right\|^2 = \left\| \begin{array}{c} \frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} \\ \cdot \\ \frac{d^\nu x}{dt^\nu} \end{array} \right\|^2, \quad M_0 = 1$$

[1] Del teorema di Meusnier furono già date varie generalizzazioni: alla flessione delle curve tracciate su una ipersuperficie (Bianchi, *Lezioni,* vol. I, pag. 367), alla flessione delle curve tracciate su una superficie dell'S_4 (Kommerell, *Die Krümmung der zwei-dimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen. Inaug.-Diss.* Tübingen 1897); più generalmente alla flessione di una varietà V_h tracciata su una V_m immersa in uno spazio a curvatura costante (Berzolari, *Sulla curvatura delle varietà tracciate su una varietà qualunque.* Note I e II. Atti Torino 1898. *Un'osservazione sui teoremi di Meusnier e di Eulero negli iperspazii.* Rendiconti Lincei, vol. VI, 1897 e vol. VII, 1898). Di natura affatto distinta da queste è quella data nel testo.

si ha la formula [1]

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho_\nu^2} = \frac{M_{\nu-1}\, M_{\nu+1}}{M_\nu^2\, M_1}.$$

In ogni punto della curva diremo *ennaedro principale* l'n—edro costituito dalla tangente, dalla normale all'S_1 tangente nell'S_2 osculatore, dalla normale al S_2 osculatore nell'S_3 osculatore ecc.; ν*-esima direzione principale* diremo la normale all'$S_{\nu-1}$ osculatore nell'S_ν osculatore, intendendo che la prima direzione principale sia la tangente. Con $c_{\nu i}$ indicheremo l'iesimo coseno di direzione della ν-esima direzione principale. Chiamiamo $M_{\nu,\alpha}$ il complemento in M_ν del termine appartenente alla linea ν — esima ed alla α — esima colonna, si avrà allora [2]:

$$(3) \qquad c_{\nu i} = \frac{\Sigma_\alpha M_{\nu,\alpha} \frac{d^\alpha x_i}{dt^\alpha}}{\sqrt{M_{\nu-1}\, M_\nu}}.$$

Questa formula si può anche scrivere

$$(4)\; c_{\nu i} = \frac{1}{\sqrt{M_{\nu-1}\, M_\nu}} \left| \begin{array}{ccccc} \Sigma \left(\frac{dx}{dt}\right) & \Sigma \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} & \cdots & \Sigma \frac{dx}{dt}\frac{d^{\nu-1}x}{dt^{\nu-1}} & \frac{dx_i}{dt} \\ \Sigma \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} & \Sigma \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 & \cdots & \Sigma \frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^{\nu-1}x}{dt^{\nu}\ 1} & \frac{d^2x_i}{dt^2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \Sigma \frac{dx}{dt}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & \Sigma \frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & \cdots & \Sigma \frac{d^\nu x}{dt^\nu}\frac{d^{\nu-1}x}{dt^{\nu-1}} & \frac{d^\nu x_i}{dt^\nu} \end{array} \right|$$

[1] Vedi Jordan, *Comptes Rendus,* tomo 79.

[2] Landsberg, *Ueber die Theorie der Krümmungen,* Crelles Journal. Vol. 114.

od anche

$$(5)\qquad c_{\nu i} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{M}_{\nu-1}\,\mathrm{M}_\nu}} \begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} & \frac{d^2x_2}{dt^2} & \cdots & \frac{d^2x_n}{dt^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{\nu-1}x_1}{dt^{\nu-1}} & \frac{d^{\nu-1}x_2}{dt^{\nu-1}} & \cdots & \frac{d^{\nu-1}x_n}{dt^{\nu-1}} \\ \frac{d^\nu x_1}{dt^\nu} & \frac{d^\nu x_2}{dt^\nu} & \cdots & \frac{d^\nu x_n}{dt^\nu} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots & \frac{dx_i}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} & \frac{d^2x_2}{dt^2} & \cdots & \frac{d^2x_i}{dt^2} & \cdots & \frac{d^2x_n}{dt^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{\nu-1}x_1}{dt^{\nu-1}} & \frac{d^{\nu-1}x_2}{dt^{\nu-1}} & \cdots & \frac{d^{\nu-1}x_i}{dt^{\nu-1}} & \cdots & \frac{d^{\nu-1}x_n}{dt^{\nu-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}$$

24. — Occorre su queste formule fare qualche osservazione. Se la curvatura $(\nu-1)$ esima è nulla, sarà $\mathrm{M}_\nu = 0$ e quindi saranno nulli tutti i minori della matrice di cui M_ν è quadrato. Ne segue che le (5) [e quindi le equivalenti (3)] perdono senso perchè numeratore e denominatore saranno nulli. Viceversa, se tutti i numeratori delle $c_{\nu i}$ sono nulli, anche M_ν è nullo, poichè M_ν è la somma dei numeratori delle $c_{\nu i}$ moltiplicati rispettivamente per $\dfrac{d^\nu x_i}{dt^\nu}$.

In queste ipotesi dunque la ν esima direzione principale non è più determinata dalle derivate ν esime. Per avere la formula che dà tale ν-esima direzione basterà applicare a (5) la regola dell'Hopital. Si avrà, derivando denominatore e numeratore di (5) dopo avere quadrato e moltiplicato per $\mathrm{M}_{\nu-1}$ [1]:

$$\mathrm{M}_{\nu-1}\, c^2_{\nu i} = \frac{\begin{Vmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \cdots \\ \frac{d^{\nu-1}x}{dt^{\nu-1}} \\ \frac{d^\nu x}{dt^\nu} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \cdots & \frac{dx_i}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{\nu-1}x_1}{dt^{\nu-1}} & \cdots & \frac{d^{\nu-1}x_i}{dt^{\nu-1}} & \cdots & \frac{d^{\nu-1}x_n}{dt^{\nu-1}} \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \cdots \\ \frac{d^{\nu-1}x}{dt^{\nu-1}} \\ \frac{d^\nu x}{dt^\nu} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \cdots \\ \frac{d^{\nu-1}x}{dt^{\nu-1}} \\ \frac{d^{\nu+1}x}{dt^{\nu+1}} \end{Vmatrix}} \times$$

$$\times \left\{ \begin{Vmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \cdots \\ \frac{d^{\nu-1}x}{dt^{\nu-1}} \\ \frac{d^{\nu+1}x}{dt^{\nu+1}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \cdots & \frac{dx_i}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{\nu-1}x_1}{dt^{\nu-1}} & \cdots & \frac{d^{\nu-1}x_i}{dt^{\nu-1}} & \cdots & \frac{d^{\nu-1}x_n}{dt^{\nu-1}} \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \cdots \\ \frac{d^{\nu-1}x}{dt^{\nu-1}} \\ \frac{d^\nu x}{dt^\nu} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \cdots & \frac{dx_i}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^\nu x_1}{dt^\nu} & \cdots & \frac{d^\nu x_i}{dt^\nu} & \cdots & \frac{d^\nu x_n}{dt^\nu} \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{Vmatrix} \right\}$$

Questa formula presentandosi ancora sotto la forma $\frac{0}{0}$, occor-

---

[1] Quanto alla derivazione delle matrici qui usata confronta la nota al n. 14.

rerà ancora derivare numeratore e denominatore; dopo di che, soppressi i termini che s'annullano per $M_\nu = 0$, risulta

$$(6)\quad c_{\nu i} = \frac{1}{\sqrt{M_{\nu-1}\left\|\begin{matrix}\frac{dx}{dt}\\ \cdots\\ \frac{d^{\nu-1}x}{dt^{\nu-1}}\\ \frac{d^{\nu+1}x}{dt^{\nu+1}}\end{matrix}\right\|^2}}\left\|\begin{matrix}\frac{dx}{dt}\\ \cdots\\ \frac{d^{\nu-1}x}{dt^{\nu-1}}\\ \frac{d^{\nu+1}x}{dt^{\nu+1}}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\frac{dx}{dt} & \cdots & \frac{dx_i}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{d^{\nu-1}x_1}{dt^{\nu-1}} & \cdots & \frac{d^{\nu-1}x_1}{dt^{\nu-1}} & \cdots & \frac{d^{\nu-1}x_n}{dt^{\nu-1}}\\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\end{matrix}\right\|$$

che avrà senso appena la matrice formata colle derivate prime, seconde, … $(\nu-1)^e$, $(\nu+1)^e$ sia diversa da 0.

Un'altra osservazione dobbiamo aggiungere, la quale risulta immediata dalla definizione di spazio osculatore e che del resto è facile conseguenza delle (3). Lo spazio osculatore ν esimo è determinato completamente dalle direzioni i cui coseni sono proporzionali a $\frac{dx_i}{dt}, \frac{d^2x_i}{dt^2}, \ldots \frac{d^\nu x_i}{dt^\nu}$. $(i = 1 \,.\,.\, n)$ fatta eccezione pel caso in cui $M_\nu = 0$.

Le curve tracciate su una varietà ad m dimensioni.

25. — In questo capitolo considereremo invece che superficie varietà V_m ad m dimensioni: esse si otterranno col dare le coordinate dello S_n ambiente in funzione di m variabili $u_1\, u_2 \ldots u_m$. Posto $\frac{\partial^{h_1+h_2\ldots+h_m} x_i}{\partial u_1^{h_1}\,\partial u_2^{h_2}\ldots\partial u_m^{h_m}} = x_{i,\,h_1 h_2\ldots h_m}$ dovrà essere la matrice jacobiana

$$(7)\qquad \left\|\begin{matrix} x_{1,10\ldots0} & x_{2,10\ldots0} & \ldots & x_{n,100\ldots0}\\ x_{1,01\ldots0} & x_{2,01\ldots0} & \ldots & x_{n,010\ldots0}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{1,00\ldots1} & x_{2,00\ldots1} & \ldots & x_{n,00\ldots1}\end{matrix}\right\|$$

diversa da 0. L'S_m individuato dalle direzioni i cui coseni sono gli elementi delle linee di (7) è l'S_m tangente la superficie.

Una curva su V_m è data quando si assegnino $u_1\, u_2 \ldots u_m$ in funzione di un parametro t; si avrà:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_{i,10\ldots0}\,\frac{du_1}{dt} + x_{i,01\ldots0} + \ldots + x_{i,00\ldots1}\,\frac{du_m}{dt}\\ \frac{d^2x_i}{dt^2} &= x_{i,10\ldots0}\,\frac{d^2u_1}{dt^2} + x_{i,01\ldots0}\,\frac{d^2u_2}{dt^2} + \ldots + x_{i,00\ldots1}\,\frac{d^2u_m}{dt^2} +\\ &\quad + x_{i,200\ldots0}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2x_{i,110\ldots0}\,\frac{du_1}{dt}\,\frac{du_2}{dt} + \ldots + x_{i,00\ldots02}\left(\frac{du_m}{dt}\right)^2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d^\nu x_i}{dt^\nu} &= x_{i,10\ldots0}\,\frac{d^\nu u_1}{dt^\nu} + x_{i,01\ldots0}\,\frac{d^\nu u_2}{dt^\nu} + \ldots + x_{i,00\ldots1}\,\frac{d^\nu u_m}{dt^\nu} + \Xi_i \end{aligned}\right.$$

dove Ξ_i dipende solo dalle $\frac{du_i}{dt}, \frac{d^2u_i}{dt^2}, \ldots \frac{d^{\nu-1}u_i}{dt^{\nu-1}}$ e non dalle $\frac{d^\nu u_i}{dt^\nu}$.

Diremo che per una curva tracciata sulla varietà V_m le prime ν direzioni principali sono *regolari* se lo spazio minimo contenente l'S_m tangente a V_m insieme con queste ν direzioni principali è uno $S_{m+\nu-1}$ (poichè la tangente giace in S_m le ν direzioni principali ed S_m giacciono sempre in un $S_{m+\nu-1}$). Questa ipotesi si traduce analiticamente nel supporre che sia $\neq 0$ la matrice

$$
(9)\qquad
\left\|\begin{matrix}
\frac{d^2x_1}{dt^2} & \frac{d^2x_2}{dt^2} & \cdots\cdots & \frac{d^2x_n}{dt^2} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\frac{d^\nu x_1}{dt^\nu} & \frac{d^\nu x}{dt^\nu} & \cdots & \frac{d^\nu x_n}{dt^\nu} \\
x_{1,10\ldots0} & x_{2,10\ldots0} & \cdots & x_{n,100\ldots0} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
x_{2,0\ldots01} & x_{2,0\ldots01} & \cdots & x_{n,00\ldots1}
\end{matrix}\right\|
$$

Generalizzazione del teorema di Meusnier.

26. — Consideriamo due curve qualunque C e C′ riferite ai parametri t e t' per cui sia $\frac{du_j}{dt} = \frac{du_j}{dt'} \ldots \frac{d^\nu u_j}{dt^\nu} = \frac{d^\nu u_j}{dt'^\nu}$: in virtù delle formole (8) esse hanno le stesse prime $\nu - 1$ curvature e le stesse prime ν direzioni principali.

Vogliamo cercare quali relazioni legano le curvature ν esime e le $(\nu+1)$ esime direzioni principali. Supporremo che: 1.° nessuna delle prime $\nu - 1$ curvature comuni sia nulla; 2.° che le prime ν direzioni principali comuni siano regolari [1]. Immagineremo che la curva C, riferita al parametro t, sia una qualunque delle curve considerate e fisseremo in modo opportuno quella C′ riferita al parametro t': una qualunque quantità relativa a quest'ultima curva indicheremo coll'accento.

[1] La prima di queste restrizioni non è essenziale. Essa proviene dal fatto che nell'ipotesi opposta le formule del n. 23 che danno le curvature successive perdono senso e si dovrebbe quindi procedere a dedurne delle analoghe ancora valide come al n. 24. Per semplicità non ci indugeremo in questo studio e riterremo soddisfatta la prima ipotesi. Quanto alla seconda risulterà dal seguito che essa è contenuta, tranne un caso eccezionale, nella prima.

Dalle (2) (4) si ha per C

$$
(10)\qquad \frac{c_{\nu+1i}}{\rho_\nu} = \sqrt{\frac{M_{\nu-1}}{M_\nu^3 M_1}}
\left|\begin{matrix}
\Sigma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 & \cdots & \Sigma\frac{dx}{dt}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & \frac{dx_i}{dt} \\
\Sigma\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} & \cdots & \Sigma\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & \frac{d^2x_i}{dt^2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\Sigma\frac{d^{\nu+1}x}{dt^{\nu+1}}\frac{dx}{dt} & \cdots & \Sigma\frac{d^{\nu+1}x}{dt^{\nu+1}}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & \frac{d^{\nu+1}x_i}{dt^{\nu+1}}
\end{matrix}\right|
$$

o, per le (8) e per una osservazione del n. precedente,

$$
(11)\qquad \frac{c_{\nu+1i}}{\rho_\nu} = \sqrt{\frac{M_{\nu-1}}{M_\nu^3 M_1}}\left[A_{1i}\frac{d^{\nu+1}u_1}{dt^{\nu+1}} + A_{2i}\frac{d^{\nu+1}u_2}{dt^{\nu+1}} + \ldots A_{mi}\frac{d^{\nu+1}u_m}{dt^{\nu+1}} + B_i\right]
$$

dove le A_{ji}, B_i non dipendono, come M_ν $M_{\nu-1}$ M_1 che dalle derivate delle u rapporto a t di ordine $\leq \nu$ e quindi hanno lo stesso valore per tutte le curve che consideriamo.

Detto ω l'angolo delle $(\nu+1)$ esime direzioni principali di C e di C′ si ha

$$
(12)\qquad \frac{\cos\omega}{\rho_\nu} = \sum \frac{c_{\nu+1i}\, c'_{\nu+1i}}{\rho_\nu} =
$$

$$
= \sqrt{\frac{M_{\nu-1}}{M_\nu^3 M_1}}\sum_i\left[A_{1i}\frac{d^{\nu+1}u_1}{dt^{\nu+1}} + A_{2i}\frac{d^{\nu+1}u_2}{dt^{\nu+1}} + \ldots + A_{mi}\frac{d^{\nu+1}u_m}{dt^{\nu+1}} + B_i\right] c'_{\nu+1i}.
$$

Ammesso quindi che si possa soddisfare al sistema di equazioni

$$
(13)\qquad \Sigma A_{ji}\, c'_{\nu+1i} = 0 \qquad (j = 1\ldots m)
$$

ed in un modo unico, detta C′ la curva che a tale sistema soddisfa, la (12) diverrà

$$
(14)\qquad \frac{\cos\omega}{\rho_\nu} = \sqrt{\frac{M_{\nu-1}}{M_\nu^3 M_1}}\, \Sigma B_i\, c'_{\nu+1i}.
$$

Il secondo membro rappresenterà una quantità dipendente soltanto dagli elementi comuni a tutte le curve che consideriamo quali sono $M_{\nu-1}$, M_ν, M_1, B_1 e dalla C′, non dalla C da cui dipendono ω e ρ_ν. Potremo in particolare scegliere per C la C′ stessa: quindi si avrà

$$\frac{\cos\omega}{\rho_\nu} = \frac{1}{\rho'_\nu}\,. \tag{15}$$

Nei n. seguenti dimostreremo che il sistema (13) determina effettivamente una curva almeno nei suoi elementi di ordine $\nu+1$. Ammettendo questo risultato la (15) ci dice che: *Tra le curve che soddisfanno le condizioni* $\frac{d^\mu u_h}{dt^\mu} = \frac{d^\mu u_h}{dt'^\mu}$ $(\mu = 1 \ldots \nu,\ h = 1 \ldots m)$ *e che quindi hanno a comune le prime* ν *direzioni principali e le prime* $\nu-1$ *curvature esiste una curva* C′ *tale che il raggio di* ν — *esima curvatura di una qualunque altra* C *di queste curve è uguale al raggio di* ν — *esima curvatura di* C′ *moltiplicato per il coseno dell'angolo delle* $(\nu+1)$ — *esime direzioni principali delle due curve.*

27. — Importa stabilire alcune proprietà del sistema dei coefficienti A e B delle (11).

Dal confronto di (11) e (10) e dalle (8) risulta che le A sono i minori di ordine $\nu+1$ contenenti il primo determinante principale d'ordine ν estratti dalla matrice

$$\left\|\begin{matrix}
\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 & \sum\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} & \cdots & \sum\frac{dx}{dt}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \cdots & \frac{dx_n}{dt} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sum\frac{d^\nu x}{dt^\nu}\frac{dx}{dt} & \sum\frac{d^\nu x}{dt^\nu}\frac{d^2x}{dt^2} & \cdots & \sum\left(\frac{d^\nu x}{dt^\nu}\right)^2 & \frac{d^\nu x_1}{dt^\nu} & \frac{d^\nu x_2}{dt^\nu} & \cdots & \frac{d^\nu x_n}{dt^\nu} \\
\sum x_{10\cdots0}\frac{dx}{dt} & \sum x_{10\cdots0}\frac{d^2x}{dt^2} & \cdots & \sum x_{10\cdots0}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & x_{1,10\cdots0} & x_{2,10\cdots0} & \cdots & x_{n10..0} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sum x_{00\cdots01}\frac{dx}{dt} & \sum x_{0\cdots01}\frac{d^2x}{dt^2} & \cdots & \sum x_{0\cdots01}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & x_{1,0\cdots01} & x_{2,0\cdots01} & \cdots & x_{n0..01}
\end{matrix}\right\| \tag{16}$$

Ora questa matrice è nulla. Poichè se moltiplichiamo le ultime linee per $\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{dt}\cdots\frac{du_m}{dt}$, sommiamo e sottragghiamo dalla prima, questa si ridurrà a 0. Ma la matrice che si ottiene togliendo una conveniente delle ultime linee non è nulla. Poichè supposto $\frac{du_m}{dt} \neq 0$ [1], si consideri la matrice che si ottiene sopprimendo l'ultima linea. Moltiplicando le ultime $m-1$ linee residue per $\frac{du_1}{dt}\cdots\frac{du_{m-1}}{dt}$ e sottraendo dalla prima linea si otterrà una matrice che a meno del segno e del coefficiente $\frac{du_m}{dt} \neq 0$ coincide colla matrice (16) da cui sia tolta la prima linea. Tale matrice è diversa da 0, poichè la matrice formata dalle ultime n colonne è la matrice (9) che è diversa da 0 per l'ipotesi che le prime ν direzioni principali siano regolari. Ne segue che anche la matrice che si ottiene sopprimendo l'ultima linea non è nulla. E quindi non sono neppure nulli tutti i minori che contengono le prime ν colonne; infatti, affinchè ciò fosse pur non essendo nulla la matrice totale, dovrebbe essere nulla la matrice delle prime ν colonne, il che è escluso dall'ipotesi che le prime $\nu-1$ curvature non siano nulle e quindi $M_\nu \neq 0$.

Segue che la matrice dei coefficienti delle (13) ha caratteristica $m-1$. Perchè un qualunque determinante D di ordine $m-i$ della matrice degli A è formato coi minori della matrice (16) di ordine $\nu+1$ contenenti il primo minore principale M_ν e contenuti in un conveniente determinante Δ di ordine $\nu+m-i$ (che conterrà anch'esso il primo minore principale M_ν di ordine ν di (16)). E viceversa ad ogni tale determinante Δ corrisponde un determinante D. Quindi D è uguale, per un teorema già citato del Netto [2], al prodotto di Δ per una conveniente potenza di M_ν: essendo $M_\nu \neq 0$, sarà D nullo o no insieme con Δ; quindi segue dalla discussione precedente il nostro enunciato.

---

[1] Il che è possibile poichè almeno una dalle derivate $\frac{du_i}{dt}$ è $\neq 0$.

[2] Netto, *Acta Math.* vol. 17, 1894.

28. — Ciò posto osserviamo che, siccome gli A e B non dipendono dalle derivate $(\nu+1)$ esime $\frac{d^{\nu+1}u_j}{dt'^{\nu+1}}$, si possono scrivere le $c'_{\nu+1i}$ nella forma

$$(17)\quad c'_{\nu+1i} = \frac{1}{\sqrt{M_\nu M'_{\nu+1}}}\left(A_{1i}\frac{d^{\nu+1}u_1}{dt'^{\nu+1}} + A_{2i}\frac{d^{\nu+1}u_2}{dt'^{\nu+1}} + \cdots A_{mi}\frac{d^{\nu+1}u_m}{dt'^{\nu+1}} + B_i\right)$$

Sostituendo questi valori nelle (13), trascurando il coefficiente $\frac{1}{\sqrt{M_\nu M'_{\nu+1}}}$ si ottiene

$$(18)\qquad \Sigma_i A_{ji} A_{1i}\frac{d^{\nu+1}u_1}{dt'^{\nu+1}} + \Sigma A_{ji} A_{2i}\frac{d^{\nu+1}u_2}{dt'^{\nu+1}} + \ldots.$$

$$+ \Sigma A_{ji} A_{mi}\frac{d^{\nu+1}u_m}{dt'^{\nu+1}} + \Sigma A_{ji} B_i = 0 \quad (j = 1 \ldots m).$$

Queste equazioni lineari nelle $\frac{d^{\nu+1}u_h}{dt'^{\nu+1}}$ sono compatibili. Infatti il determinante dei coefficienti è il quadrato della matrice degli A e quindi come questa, ha caratteristica $m-1$. D'altra parte anche la matrice che da questo determinante si ottiene aggiungendo la colonna dei termini noti è nulla, poichè ogni suo determinante contenente l'ultima colonna è uguale al prodotto della matrice degli A che è nulla per la matrice che da questa si ottiene sostituendo ad una linea la linea dei B. Se ne deduce che le (18) sono compatibili. Se $v_1 v_2 \ldots v_m$ è una soluzione, è facile vedere che la più generale soluzione sarà anzi $v_1 + \lambda\frac{du_1}{dt} \ldots v_m + \lambda\frac{du_m}{dt}$, poichè risulta immediatamente dal valore di A_{hi} che $\Sigma A_{hi}\frac{du_h}{dt} = 0$ e quindi $\Sigma_i A_{ij} \Sigma_h A_{hi}\frac{du_h}{dt} = 0$.

L'indeterminazione così trovata nella soluzione di (13) proviene dal fatto che finora si è lasciata arbitraria la variabile t' o meglio

la si è vincolata solo alla variabile t per le relazioni $\frac{d^\mu u_h}{dt^\mu} = \frac{d^\mu u_h}{dt'^\mu}$ $(\mu \leq \nu\ h = 1 \ldots m)$, talchè su essa si può fare ancora un qualunque mutamento di variabili, subordinatamente alla condizione di lasciare inalterate le A e le B o, in altri termini, di non mutare i valori delle prime ν derivate.

Ci converrà quindi, per avere una determinazione unica delle $\frac{d^{\nu+1}u_h}{dt'^{\nu+1}}$, fissare la t' (almeno per quanto riguarda le derivate $(\nu+1)$ esime): noi prenderemo per t' l'arco, dopo di che, perchè siano soddisfatte le $\frac{d^\mu u_h}{dt^\mu} = \frac{d^\mu u_h}{dt'^\mu}$ anche t dovrà soddisfare le equazioni cui soddisfanno le derivate rapporto all'arco fino all'ordine ν. Avremo da questa ipotesi $\sum\left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 = 1$, $\sum\frac{dx}{dt'}\frac{d^2x}{dt'^2} = 0$, $\sum\frac{dx}{dt'}\frac{d^3x}{dt'^3} = -\sum\left(\frac{d^2x}{dt'^2}\right)^2, \ldots$ $\sum\frac{dx}{dt}\frac{d^{\nu+1}x}{dt'^{\nu+1}} = D'$ dove D' non dipende che dalle derivate delle x rapporto a t' di ordine $< \nu+1$. Questa equazione si scriverà nelle $\frac{d^{\nu+1}u_h}{dt'^{\nu+1}}$:

$$(19)\qquad \left(\sum\frac{dx}{dt}x_{10\cdots0}\right)\frac{d^{\nu+1}u_1}{dt'^{\nu+1}} + \left(\sum\frac{dx}{dt}x_{01\cdots0}\right)\frac{d^{\nu+1}u_2}{dt'^{\nu+1}} + \ldots$$

$$+ \left(\sum\frac{dx}{dt}x_{00\cdots1}\right)\frac{d^{\nu+1}u_m}{dt'^{\nu+1}} = D'_1$$

dove D'_1, come D', dipende solo dalle derivate delle u rapporto a t' ordine di $\leq \nu$. Questa equazione è indipendente dalle (18). Poichè, soppresso il termine noto nelle (18), esse erano soddisfatte da $\frac{du_h}{dt'}$ mentre il primo membro di (19) si riduce per tale sostituzione a $\sum\left(\frac{dx}{dt'}\right)^2 = 1$. Le (18) (19) determinano quindi completamente le

$\dfrac{d^{\nu+1}u_h}{dt'^{\nu+1}}$ per modo che le $c'_{\nu+1i}$ risultanti dalle (17) soddisfacciano a (13).

Si noti però che quando in conseguenza di (18) (19) si avesse

$$(20)\quad A_{1i}\frac{d^{\nu+1}u_1}{dt'^{\nu+1}}+A_{2i}\frac{d^{\nu+1}u_2}{dt'^{\nu+1}}\cdots+A_{mi}\frac{d^{\nu+1}u_m}{dt'^{\nu+1}}+B_i=0$$

sarebbe $M'_{\nu+1}=0$, le formule (18) perderebbero senso e non risulterebbe più dimostrata l'equivalenza di (18) e di (13). Tuttavia determinate le $\dfrac{d^{\nu+1}u_h}{dt'^{\nu+1}}$ in modo da soddisfare (18) e (19) esisteranno fra le C curve per cui le derivate $(\nu+1)$ esime avranno questi valori, e per tali curve si cadrà nel caso di eccezione del n. 24. Si applicherà a queste curve la formula (6) e sarà

$$(21)\qquad c'_{\nu+1i}=K\left(A_{1i}\frac{d^{\nu+2}u_1}{dt'^{\nu+2}}+A_{2i}\frac{d^{\nu+2}u_2}{dt'^{\nu+2}}+\cdots\right.$$

$$\left.+A_{mi}\frac{d^{\nu+2}u_m}{dt'^{\nu+2}}+\overline{B}_i\right),\qquad K=\frac{1}{\sqrt{M_{\nu-1}\left\|\begin{matrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \cdots\\ \dfrac{d^{\nu-1}x}{dt'^{\nu-1}}\\ \dfrac{d^{\nu+1}x}{dt'^{\nu+1}}\end{matrix}\right\|^2}}$$

e gli A sono gli stessi che in (17), ma i $\overline{B}$ sono mutati. Si procederà in modo affatto analogo al precedente e si giungerà così a

determinare la C'. Ritorneremo del resto nell'ultimo numero di questo capitolo su questo caso di eccezione.

Trasformazione del teorema di Meusnier.

29. — Cerchiamo anzitutto il significato geometrico delle equazioni (13). Consideriamo le m direzioni i cui coseni sono proporzionali ad A_{ji}; le (13) dicono che la $(\nu+1)$ esima direzione principale di C' è normale a queste direzioni. D'altra parte essa è normale per definizione alle prime ν direzioni principali comuni alle curve che consideriamo, quindi è normale allo spazio lineare minimo contenente queste ν direzioni principali e quelle corrispondenti alle A.

Ricordiamo che A_{ji} sono i minori di ordine $\nu+1$ di (16) contenenti il primo minore principale di ordine ν: quindi sono combinazioni lineari a coefficienti fissi al mutare di i delle $\dfrac{dx_i}{dt}$, $\dfrac{d^2x_i}{dt^2}\cdots\dfrac{d^\nu x_i}{dt^\nu}$, $x_{i,\underset{(1)}{0}\underset{(2)}{0}\ldots\underset{(j)}{1}\ldots\underset{(m)}{0}}$. Le direzioni individuate da essi giaciono quindi nell'$S_{m+\nu-1}$ contenente l'S_m tangente e le prime ν direzioni principali. Se noi riusciamo a dimostrare che le direzioni individuate dalle A insieme colle ν direzioni principali determinano questo $S_{m+\nu-1}$ come spazio lineare minimo di appartenenza, conchiuderemo che la $(\nu+1)$ esima direzione principale di C' è normale a tale $S_{m+\nu-1}$. Perciò osserviamo che lo spazio minimo contenente le prime ν direzioni principali è lo spazio determinato dalle direzioni $\dfrac{dx_i}{dt}\cdots\dfrac{d^2x_i}{dt^2}\cdots\dfrac{d^\nu x_i}{dt^\nu}$ (n. 24): basterà quindi dimostrare che queste e le direzioni determinate dalle A sono indipendenti.

La matrice dei coseni di tutte queste direzioni o di quantità proporzionali a questi è la matrice dei minori di ordine $\nu+1$ contenenti il primo minore principale di ordine ν della matrice

$$(22)\qquad \begin{Vmatrix}
\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 & \dots & \sum\frac{dx}{dt}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \dots & \frac{dx_n}{dt} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sum\frac{d^\nu x}{dt^\nu}\frac{dx}{dt} & \dots & \sum\left(\frac{d^\nu x}{dt^\nu}\right)^2 & \frac{d^\nu x_1}{dt^\nu} & \frac{d^\nu x_2}{dt^\nu} & \dots & \frac{d^\nu x_n}{dt^\nu} \\
\sum x_{10\cdots0}\frac{dx}{dt} & \dots & \sum x_{10\cdots0}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & x_{1,10\cdots0} & x_{2,10\cdots0} & \dots & x_{n,10\cdots0} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sum x_{0\cdots01}\frac{dx}{dt} & \dots & \sum x_{0\cdots01}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & x_{1,0\cdots01} & x_{2,0\cdots01} & \dots & x_{n,0\cdots01} \\
0 & \dots\dots & 0 & \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \dots & \frac{dx_n}{dt} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots\dots & 0 & \frac{d^\nu x_1}{dt^\nu} & \frac{d^\nu x_2}{dt^\nu} & \dots & \frac{d^\nu x_n}{dt^\nu}
\end{Vmatrix}$$

Ragionando come al n. 27 basterà mostrare che questa matrice è di caratteristica $2\nu+m-1$. Perciò supponiamo come al n. 27 $\frac{du_m}{dt}\neq 0$ e consideriamo la matrice che si ottiene da (22) sopprimendo la $(\nu+m)$ — esima linea. Sottraendo in questa matrice la $(\nu+m+i-1)$ — esima linea dalla i — esima si otterrà l'altra

$$(23)\qquad \begin{Vmatrix}
\sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 & \dots\dots & \sum\frac{dx}{dt}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sum\frac{d^\nu x}{dt^\nu}\frac{dx}{dt} & \dots & \sum\left(\frac{d^\nu x}{dt^\nu}\right) & 0 & 0 & \dots\dots & 0 \\
\sum x_{10\cdots0}\frac{dx}{dt} & \dots\dots & \sum x_{10\cdots0}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & x_{1,10\cdots0} & x_{2,10\cdots0} & \dots\dots & x_{n,10\cdots0} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\sum x_{0\cdots10}\frac{dx}{dt} & \dots\dots & \sum x_{0\cdots10}\frac{d^\nu x}{dt^\nu} & x_{1,0\cdots10} & x_{2,0\cdots10} & \dots\dots & x_{n,0\cdots10} \\
0 & \dots\dots & 0 & \frac{dx_1}{dt} & \frac{dx_2}{dt} & \dots\dots & \frac{dx_n}{dt} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots\dots & 0 & \frac{d^\nu x_1}{dt^\nu} & \frac{d^\nu x_2}{dt^\nu} & \dots\dots & \frac{d^\nu x_n}{dt^\nu}
\end{Vmatrix}$$

Un qualunque determinante di ordine $m+2\nu-1$ estratto da questa matrice e contenente le prime ν colonne è uguale al prodotto di $M\nu\neq 0$ per un determinante di ordine $m+\nu-1$ estratto dalla matrice formata dalle ultime sue n colonne ed $\nu+m-1$ righe.

Ma questa matrice non differisce che per il fattore $\pm\frac{du_m}{dt}$ dalla matrice (9) e, essendo $\frac{du_m}{dt}\neq 0$, essa è come la matrice (9) diversa da zero. Talchè risulta, come si voleva dimostrare, che la (23) è di caratteristica $m+2\nu-1$.

Noi potremo quindi dire che la $(\nu+1)$ esima direzione principale della C' determinata dalle (13) è normale all'$S_{m+\nu-1}$ determinato dall'S_m tangente e dalle prime ν direzioni principali comuni alle curve che si considerano. E questa proprietà l'individua.

30. — Ancora una osservazione. Se due curve C e C' riferite all'arco hanno le stesse tangenti si ha $\frac{du_h}{dt} = \frac{du_h}{dt'}$ $(h = 1 \ldots m)$. Supponiamo che le curve C e C' abbiano le stesse normali principali regolari. Si dedurrà dal teorema di Meusnier che hanno anche le stesse prime curvature $\frac{1}{\rho_1}$. Ma allora, indicate con $A^{(2)}_{ji}$ le A_{ji} relative a questo caso, si avranno le equazioni

$$0 = \frac{c_{2i} - c'_{2i}}{\rho_1} = A^{(2)}_{1i}\left(\frac{d^2u_1}{dt^2} - \frac{d^2u_1}{dt'^2}\right) + A^{(2)}_{2i}\left(\frac{d^2u_2}{dt^2} - \frac{d^2u_2}{dt'^2}\right) + \cdots$$
$$+ A^{(2)}_{mi}\left(\frac{d^2u_m}{dt^2} - \frac{d^2u_m}{dt'^2}\right).$$

Alle quali aggiungendo l'equazione $\sum \frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt'^2}\right) = 0$ ossia

$$0 = \sum x_{10\cdots0}\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2u_1}{dt^2} - \frac{d^2u_1}{dt'^2}\right) + \sum x_{01\cdots0}\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2u_2}{dt^2} - \frac{d^2u_2}{dt'^2}\right) + \cdots$$
$$+ \sum x_{0\cdots01}\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2u_m}{dt^2} - \frac{d^2u_m}{dt'^2}\right)$$

che proviene dall'essere t e t' l'arco rispettivamente sulle due curve C e C', otterremo un sistema di equazioni lineari omogenee per le $\frac{d^2u_h}{dt^2} - \frac{d^2u_h}{dt'^2}$ che pei ragionamenti dei n. 27, 28 sono indipendenti; onde conchiuderemo $\frac{d^2u_h}{dt^2} = \frac{d^2u_h}{dt'^2}$.

Così procedendo otteniamo che se due curve C e C' hanno le stesse prime ν direzioni principali regolari hanno pure le stesse $\nu - 1$ prime curvature e che per esse $\frac{d^\mu u_h}{dt^\mu} = \frac{d^\mu u_h}{dt'^\mu}$ $(\mu = 1 \ldots \nu)$.

Nuovo enunciato del teorema di Meusnier generalizzato.

31. — Raccogliendo quindi le discussioni dei due numeri precedenti potremo ormai conchiudere:

Supposto che una curva C tracciata su una varietà V_m abbia le prime ν direzioni principali regolari, il raggio di ν — esima curvatura è uguale al raggio di ν — esima curvatura della curva C' che ha le stesse prime ν direzioni principali che C e la $(\nu + 1)$ — esima direzione principale normale all' $S_{m+\nu-1}$ contenente l' S_m tangente e le prime ν direzioni principali, moltiplicato per il coseno dell' angolo che la $(\nu+1)$ — esima direzione principale di C fa con questa normale.

32. — Chiuderemo questo capitolo con una osservazione relativa al caso eccezionale segnalato alla fine del n. 28. Vogliamo dimostrare senza far uso delle considerazioni là indicate il teorema seguente che in tal caso si sostituisce al teorema di Meusnier: *Quando una curva C ha le prime ν direzioni principali regolari e quindi le prime $\nu - 1$ curvature non nulle, ma la ν esima nulla le curve che hanno con essa comuni le prime ν direzioni principali hanno tutte la curvatura ν — esima nulla tranne quelle che hanno la $(\nu + 1)$ esima direzione principale irregolare.* Poichè in tal caso dovranno essere risolubili le equazioni $\sum A_{ij}\frac{d^{\nu+1}u_j}{dt^{\nu+1}} + B_i = 0$ $(i = 1 \ldots n)$; ma la caratteristica della matrice delle A è $m - 1$, quindi tale deve ancora essere la caratteristica della matrice che si ottiene aggiungendo la linea delle B_i. Le B_i sono quindi combinazioni lineari delle A e quindi i numeratori delle $c_{\nu+1i}$ per qualunque altra curva che abbia a comune con C le prime ν direzioni principali sono nulli o sono combinazioni lineari delle A e quindi appartengono all'$S_{m+\nu-1}$ contenente l'S_m e le prime ν direzioni principali, *c. v. d.*

CAPITOLO IV.

La curvatura delle sezioni normali e l'interpretazione geometrica degli invarianti di 2.° ordine

La curvatura delle sezioni normali.

33. — Ritorniamo allo studio di una superficie. In tal caso le (8) del capitolo III diverranno

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = x_{i10}\dfrac{du_i}{dt} + x_{i01}\dfrac{du_2}{dt} \\ \dfrac{d^2x_i}{dt^2} = x_{i10}\dfrac{d^2u_1}{dt^2} + x_{i01}\dfrac{d^2u_2}{dt^2} + x_{i20}\left(\dfrac{du_1}{dt}\right)^2 + 2x_{i11}\dfrac{du_1}{dt}\dfrac{du_2}{dt} + x_{i02}\left(\dfrac{du_2}{dt}\right)^2 \end{cases}$$

Assumeremo come parametro l'arco. Sarà quindi

$$(2)\qquad \sum\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 \qquad \sum\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

e quindi la curvatura della curva è

$$(3)\qquad k^2 = \frac{1}{\rho^2} = \sum\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2$$

e la direzione della normale principale è data dai coseni ξ_i:

$$(4)\qquad k\,\xi_i = \frac{d^2x_i}{dt^2} = x_{i10}\frac{d^2u_1}{dt^2} + x_{i01}\frac{d^2u_2}{dt^2} + \\ + x_{i20}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2x_{i11}\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{dt} + x_{i02}\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2$$

Chiameremo sezioni normali le curve le cui normali principali stanno nell' S_{n-2} normale alla superficie. Il teorema di Meusnier ci mostra che la curvatura di una curva qualunque non dipende che dall'angolo che la sua normale principale fa colla normale principale della sezione normale tangente ad essa. Quindi ci potremo limitare allo studio delle curvature delle sezioni normali.

Perchè la direzione determinata da (4) sia la normale principale di una sezione normale è necessario e sufficiente che

$$\sum x_{i10}\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum x_{i01}\frac{d^2x_i}{dt^2} = 0$$

e cioè che

$$(5)\quad \begin{aligned} &I_{1010}\frac{d^2u_1}{dt^2} + I_{1001}\frac{d^2u_2}{dt^2} + I_{1020}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2I_{1011}\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{dt} + I_{1002}\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2 = 0 \\ &I_{0110}\frac{d^2u_1}{dt^2} + I_{0101}\frac{d^2u_2}{dt^2} + I_{0120}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2I_{0111}\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{dt} + I_{0102}\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Eliminiamo fra (4) e (5) $\dfrac{d^2u_1}{dt^2}\ \dfrac{d^2u_2}{dt^2}$, il che è possibile poichè $\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix} \neq 0$. Posto, per brevità, $\dfrac{du_1}{dt} = \alpha_1\ \dfrac{du_2}{dt} = \alpha_2$, si ha

$$(6)\quad k\xi_i = \frac{1}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} x_{i10} & x_{i01} & x_{i20}\alpha_1^2 + 2x_{i11}\alpha_1\alpha_2 + x_{i02}\alpha_2^2 \\ I_{1010} & I_{1001} & I_{1020}\alpha_1^2 + 2I_{1011}\alpha_1\alpha_2 + I_{1002}\alpha_2^2 \\ I_{0110} & I_{0101} & I_{0120}\alpha_1^2 + 2I_{0111}\alpha_1\alpha_2 + I_{0102}\alpha_2^2 \end{vmatrix}$$

e questa formula ci darà i rapporti fra i coseni di direzione della normale principale della sezione normale che ha la tangente individuata dal parametro $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

È facile avere la formula della curvatura delle sezioni normali. Per una curva qualunque si ha da (3) e (1)

$$k^2 = \frac{1}{\rho_2} = \mathrm{I}_{2020}\,\alpha_1^4 + 4\,\mathrm{I}_{1111}\,\alpha_1^2\,\alpha_2^2 + \mathrm{I}_{0202}\,\alpha_2^4 + 4\,\mathrm{I}_{1120}\,\alpha_1^3\,\alpha_2 + 4\,\mathrm{I}_{1102}\,\alpha_1\,\alpha_2^3 +$$
$$+ 2\,\mathrm{I}_{0220}\,\alpha_1^2\,\alpha_2^2 + 2\,\frac{d^2u_1}{dt^2}\left[\mathrm{I}_{1020}\,\alpha_1^2 + 2\,\mathrm{I}_{1011}\,\alpha_1\,\alpha_2 + \mathrm{I}_{1002}\,\alpha_2^2\right] +$$
$$+ 2\,\frac{d^2u_1}{dt^2}\left[\mathrm{I}_{0120}\,\alpha_1^2 + 2\,\mathrm{I}_{0111}\,\alpha_1\,\alpha_2 + \mathrm{I}_{0101}\,\alpha_2^2\right]$$
$$+ \mathrm{I}_{1010}\left(\frac{d^2u_1}{dt^2}\right)^2 + 2\,\mathrm{I}_{1001}\,\frac{d^2u_1}{dt^2}\,\frac{d^2u_1}{dt_2} + \mathrm{I}_{0101}\left(\frac{d^2u_2}{dt^2}\right)^2$$

Per una sezione normale sono soddisfatte le (5) quindi

$$k^2 = \mathrm{I}_{2020}\,\alpha_1^4 + 4\,\mathrm{I}_{1111}\,\alpha_1^2\,\alpha_2^2 + \mathrm{I}_{0202}\,\alpha_2^4 + 4\mathrm{I}_{1120}\,\alpha_1^3\alpha_2 + 4\,\mathrm{I}_{1102}\,\alpha_1\alpha_2^3 + 2\mathrm{I}_{0220}\,\alpha_1^2\alpha_2^2 +$$
$$+ \frac{d^2u_1}{dt^2}\,[\mathrm{I}_{1020}\,\alpha_1^2 + 2\,\mathrm{I}_{0111}\,\alpha_1\,\alpha_2 + \mathrm{I}_{1002}\,\alpha_2^2]$$
$$+ \frac{d^2u_2}{dt^2}\,[\mathrm{I}_{0120}\,\alpha_1^2 + 2\,\mathrm{I}_{0111}\,\alpha_1\,\alpha_2 + \mathrm{I}_{0102}\,\alpha_2^2]$$

ed ancora eliminando $\frac{d^2u_1}{dt^2}$ e $\frac{d^2u_2}{dt^2}$ tra questa e le (5)

$$k^2 = \frac{1}{\begin{vmatrix} \mathrm{I}_{1010} & \mathrm{I}_{1001} \\ \mathrm{I}_{0110} & \mathrm{I}_{0101} \end{vmatrix}} \times$$
$$\times \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{1020}\,\alpha_1^2 + \mathrm{I}_{1002}\,\alpha_2^2 & \mathrm{I}_{0120}\,\alpha_1^2 + \mathrm{I}_{0102}\,\alpha_2^2 & \mathrm{I}_{2020}\,\alpha_1^4 + 2\,\mathrm{I}_{0220}\,\alpha_1^2\,\alpha_2^2 + \mathrm{I}_{0202}\,\alpha_2^4 \\ + 2\,\mathrm{I}_{1011}\,\alpha_1\,\alpha_2 & + 2\,\mathrm{I}_{0111}\,\alpha_1\,\alpha_2 & + 4\,\alpha_1\alpha_2\,[\mathrm{I}_{1120}\,\alpha_1^2 + \mathrm{I}_{1111}\,\alpha_1\,\alpha_2 + \mathrm{I}_{1102}\,\alpha_2^2 \\ \mathrm{I}_{1010} & \mathrm{I}_{1001} & \mathrm{I}_{1020}\,\alpha_1^2 + 2\,\mathrm{I}_{1011}\,\alpha_1\,\alpha_2 + \mathrm{I}_{1002}\,\alpha_2^2 \\ \mathrm{I}_{0110} & \mathrm{I}_{0101} & \mathrm{I}_{0120}\,\alpha_1^2 + 2\,\mathrm{I}_{0111}\,\alpha_1\,\alpha_2 + \mathrm{I}_{0102}\,\alpha_2^2 \end{vmatrix}$$

E cioè

$$(7)\quad k^2 = \frac{1}{(\mathrm{I}_{1010}\,du_1^2 + 2\,\mathrm{I}_{1001}\,du_1\,du_2 + \mathrm{I}_{0102}\,du_2^2)^2}\left\{ \mathrm{J}_{2020}\,du_1^4 + \mathrm{J}_{0202}\,du_2^4 + \right.$$
$$\left. + (2\,\mathrm{J}_{1111} + \mathrm{J}_{2002})\,du_1^2\,du_2^2 + 4\,\mathrm{J}_{1120}\,du_1^3\,du_2 + 4\,\mathrm{J}_{1102}\,du_1\,du_2^3 \right\}$$

Quindi *il quadrato della curvatura di una sezione normale è uguale al rapporto di* F_{22} *al quadrato di* F_{11} *quando si siano uguagliate tutte le variabili* $v_1\,v_2$ *ai differenziali* $du_1\,du_2$ *che individuano la tangente alla sezione normale.*

La varietà delle normali principali delle sezioni normali.

34. — Le equazioni della varietà delle normali principali delle sezioni normali si ottengono eliminando $\alpha_1\,\alpha_2$ dalle (6). Per compiere l'eliminazione si incominci dal considerare le (6) quali equazioni lineari in $\alpha_1^2, \alpha_1\,\alpha_2, \alpha_2^2$; la loro eliminazione darà luogo ad $n - 3$ equazioni lineari fra le ξ. Le normali principali delle sezioni normali giacciono quindi in un S_3 dell'S_{n-2} normale. Assumiamo quale n-edro coordinato un n—edro tale che il piano tangente sia il piano $x_1\,x_2$ e l'S_3 delle normali principali l'S_3 $x_{n-2}\,x_{n-1}\,x_n$. La prima ipotesi dà $x_{i,10} = x_{i,01} = 0$ per $i \geq 3$. Per la seconda dovendo essere $\xi_3 = \xi_4 = \ldots = \xi_{n-3} = 0$, sostituiti in (6) i valori ora trovati per le derivate prime, si deduce che deve essere $x_{i20}\,\alpha_1^2 + 2\,x_{i11}\,\alpha_1\,\alpha_2 + x_{i02}\,\alpha_2^2 = 0$ $(3 \leq i \leq n-3)$ qualunque siano $\alpha_1\,\alpha_2$, e quindi $x_{i20} = x_{i11} = x_{i02} = 0$. Le condizioni $\xi_1 = \xi_2 = 0$ sono soddisfatte per la forma stessa delle (6) in forza di $x_{i10} = x_{i01} = 0$ $(i \geq 3)$. Le (6) si riducono quindi alle sole tre seguenti

$$(8)\quad \begin{aligned} k\,\xi_{n-2} &= x_{n-220}\,\alpha_1^2 + 2\,x_{n-211}\,\alpha_1\,\alpha_2 + x_{n-202}\,\alpha_2^2 \\ k\,\xi_{n-1} &= x_{n-120}\,\alpha_1^2 + 2\,x_{n-111}\,\alpha_1\,\alpha_2 + x_{n-102}\,\alpha_2^2 \\ k\,\xi_n &= x_{n20}\,\alpha_1^2 + 2\,x_{n11}\,\alpha_1\,\alpha_2 + x_{n02}\,\alpha_2^2 \end{aligned}$$

Supponiamo che sia, come avverrà in generale,

$$(9)\quad \begin{vmatrix} x_{n-220} & x_{n-211} & x_{n-202} \\ x_{n-120} & x_{n-111} & x_{n-102} \\ x_{n20} & x_{n11} & x_{n02} \end{vmatrix} \neq 0$$

Le (8) rappresentano un cono quadrico. Ne troviamo facilmente l'equazione risolvendo le (8) rapporto ad α_1^2, $\alpha_1\,\alpha_2$, α_2^2 e scrivendo che $\alpha_1^2\,\alpha_2^2 = (\alpha_1\,\alpha_2)^2$:

$$(10)\qquad \sigma_1^2 = k\,\frac{\begin{vmatrix} \xi_{n-2} & x_{n-211} & x_{n-202} \\ \xi_{n-1} & x_{n-111} & x_{n-102} \\ \xi_n & x_{n11} & x_{n02} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{n-220} & x_{n-211} & x_{n-202} \\ x_{n-120} & x_{n-111} & x_{n-102} \\ x_{n20} & x_{n11} & x_{n02} \end{vmatrix}}$$

$$\alpha_1\,\alpha_2 = k\,\frac{\begin{vmatrix} x_{n-220} & \xi_{n-2} & x_{n-202} \\ x_{n-120} & \xi_{n-1} & x_{n-102} \\ x_{n20} & \xi_n & x_{n02} \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} x_{n-220} & x_{n-211} & x_{n-202} \\ x_{n-120} & x_{n-111} & x_{n-102} \\ x_{n20} & x_{n11} & x_{n02} \end{vmatrix}}\qquad \sigma_2^2 = k\,\frac{\begin{vmatrix} x_{n-211} & x_{-n211} & \xi_{n-2} \\ x_{n-120} & x_{n-111} & \xi_{n-2} \\ x_{n20} & x_{n11} & \xi_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{n-220} & x_{n-211} & x_{n-202} \\ x_{n-220} & x_{n-111} & x_{n-102} \\ x_{n20} & x_{n11} & x_{n02} \end{vmatrix}}$$

Quindi l'equazione del cono sarà

$$(11)\qquad 4\begin{vmatrix} \xi_{n-2} & x_{n-211} & x_{n-202} \\ \xi_{n-1} & x_{n-111} & x_{n-102} \\ \xi_n & x_{n11} & x_{n02} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_{n-220} & x_{n-211} & \xi_{n-1} \\ x_{n-120} & x_{n-111} & \xi_{n-1} \\ x_{n20} & x_{n11} & \xi_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{n-220} & \xi_{n-2} & x_{n-202} \\ x_{n-120} & \xi_{n-1} & x_{n-102} \\ x_{n20} & \xi_n & x_{n02} \end{vmatrix}^2$$

Quindi in generale *le normali principali delle sezioni normali stanno in un S_3 dell'S_{n-2} normale e vi formano un cono del secondo ordine. Questo cono finchè è soddisfatta la* (9) *non è mai degenere.* Diremo allora il punto *punto generale.* L'equazione del cono in coordinate qualunque sarà:

$$(12)\qquad 4\left\|\begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ \xi \\ x_{11} \\ x_{02} \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20} \\ x_{11} \\ \xi \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20} \\ \xi \\ x_{02} \end{matrix}\right\|^2$$

Infatti tale equazione si riduce a (11) se ci portiamo nelle particolari coordinate in cui è scritta (11), e d'altra parte è invariantiva per un movimento come immediatamente risulta se si eseguisce il prodotto per linee [1].

Se invece di studiare le normali principali delle sezioni normali avessimo studiato le normali principali di una curva qualunque, si sarebbe trovata una varietà conica a tre dimensioni costituita da ∞^1 S_2 ed immersa in un S_5 contenente il piano tangente. Il cono precedentemente trovato ne è la sezione coll'S_{n-2} normale.

Punti planari e punti assiali.

35. — Noi abbiamo supposto soddisfatta la (9) e cioè: in coordinate generali, abbiamo supposto che la matrice

$$(13)\qquad \left\|\begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20} \\ x_{11} \\ x_{02} \end{matrix}\right\| .$$

fosse $\neq 0$, Questa ipotesi può non essere soddisfatta: la (13) può avere caratteristica 4 o 3 [2], anzi così accade sempre se siamo in un S_4 o in un S_3. A seconda poi che la caratteristica è 3 o 4 esisteranno $n-1$ od $n-2$ equazioni lineari fra le ξ, e quindi le normali principali coincideranno o saranno in un piano. A seconda dell'un caso o l'altro diremo il punto *assiale* o *planare.*

Nel caso del punto planare, assunto quale n—edro coordinato uno che abbia come piano $x_1\,x_2$ il piano tangente come piano $x_{n-1}\,x_n$ quello delle normali principali, saranno nulle le derivate prime

---

[1] Si ottiene infatti per ogni membro di (12) un determinante formato con I e con espressioni della forma $\Sigma x_{i,hk}\,\xi_i$ che, come gli I, sono invariantive per movimenti.

[2] Non mai 2: Cfr. n. 3.

delle x_i per $i > 3$, e così pure saranno nulle le derivate seconde di $x_3\ x_4 \ldots x_{n-2}$: le (6) divengono

$$(14) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{n-2} = 0 \\ k\,\xi_{n-1} = x_{n-120}\,\alpha_1^2 + 2\,x_{n-111}\,\alpha_1\,\alpha_2 + x_{n-102}\,\alpha_2^2 \\ k\,\xi_n = x_{n20}\,\alpha_1^2 + 2\,x_{n11}\,\alpha_1\,\alpha_2 + x_{n02}\,\alpha_2^2 \end{cases}$$

Nel caso del punto assiale, assunto quale ennaedro principale uno che abbia come piano x_1, x_2 il piano tangente, come asse x_n la normale principale comune, saranno al solito nulle le derivate prime di $x_3\,x_4 \ldots x_n$ e le seconde di $x_3\,x_4, \ldots x_{n-1}$: le (6) si riducono a

$$(15) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = 0 \\ k\,\xi_n = x_{n20}\,\alpha_1^2 + 2\,x_{n11}\,\alpha_1\,\alpha_2 + x_{n02}\,\alpha_2^2 \end{cases}$$

La corrispondenza fra normali e tangenti. I punti planari parabolici.

36. — *Se il punto è generale la corrispondenza fra tangenti e normali è biunivoca.* Infatti le (9) danno ξ quando siano date le α; le (10) danno le α, quando siano date le ξ.

Ma *quando il punto è planare la corrispondenza fra normali e tangenti in generale non è biunivoca; ad una normale corrispondono due tangenti.* Poichè posto $\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} = \lambda$ le tangenti corrispondenti, per le (14), a dati valori di $\xi_{n-1}\ \xi_n$, sono date dai valori di $l = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ radici dell'equazione

$$(16) \qquad l^2\,(x_{n-120} - \lambda\,x_{n20}) + 2\,l\,(x_{n-111} - \lambda\,x_{n11}) + (x_{n-102} - \lambda\,x_{n02}) = 0\,.$$

La corrispondenza potrebbe quindi essere biunivoca solo quando la (16) si riducesse ad un quadrato od avesse un fattore fisso al mutare di λ. Il primo caso non può accadere poichè si avrebbe

identicamente, qualunque sia λ,

$$(17) \qquad (x_{n-120} - \lambda x_{n20})\ (x_{n-102} - \lambda\,x_{n02}) = (x_{n-111} - \lambda x_{n11})^2$$

e cioè

$$(18) \qquad \begin{cases} x_{n-120}\,x_{n-102} = x_{n-111}^2\,,\ x_{n20}\,x_{n02} = x_{n11}^2 \\ x_{n-120}\,x_{n02} + x_{n20}\,x_{n-102} = 2x_{n-111}\,x_{n11} \end{cases}.$$

Quadrando l'ultima equazione e togliendone quattro volte il prodotto delle due prime si deduce

$$(19) \qquad x_{n-120}\,x_{n02} - x_{n-102}\,x_{n20} = 0$$

e di qui $\frac{x_{n-120}}{x_{n20}} = \frac{x_{n-102}}{x_{n02}} = \sigma$. Dividendo il primo e secondo membro della terza delle (18) rispettivamente per il primo e secondo membro della seconda si ha $\frac{x_{n-120}}{x_{n20}} + \frac{x_{n-102}}{x_{n02}} = 2\,\frac{x_{n-111}}{x_{n11}}$ e cioè $\sigma = \frac{x_{n-111}}{x_{n11}}$. Quindi nelle nostre ipotesi si avrebbe

$$(20) \qquad \frac{x_{n-120}}{x_{n20}} = \frac{x_{n-111}}{x_{n11}} = \frac{x_{n-102}}{x_{n02}}\,.$$

Il punto sarebbe quindi assiale.

Può invece accadere che (16) abbia un fattore fisso indipendente da λ. In tal caso il punto si dirà *planare parabolico.* Corrispondentemente al valore di l che annulla questo fattore, le formule (14) che danno la direzione della normale principale risultano indeterminate. Quindi si cade nel caso di eccezione segnalato al n. 24; la curvatura corrispondente a tale direzione è nulla, e la direzione della normale principale non risulta più determinata dalle derivate seconde delle x rapporto a t, ma occorre ricorrere alle derivate di ordine superiore. Quindi *in un punto planare parabolico la corrispondenza fra normali e tangenti è biunivoca; esiste una direzione eccezionale per cui la curvatura delle linee generiche aventi tale direzione è nulla e la normale principale a ciascuna di queste curve non è determinata dalle derivate seconde.*

Inversamente se in un punto che non sia assiale una curvatura è nulla il punto è planare parabolico. Il punto non può infatti essere generico poichè, affinchè $k = \sum \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 = 0$, è necessario, nel campo reale, che sia $\frac{d^2x_i}{dt^2} = 0$, e quindi che si possa soddisfare alle (8) uguagliate a 0. Il che è assurdo se vale la (9). Il punto è quindi planare. Ma le equazioni che si ottengono uguagliando a 0 le (14) debbono essere compatibili. La loro soluzione comune annulla (16) che è una loro combinazione lineare, qualunque sia λ quindi il punto è parabolico.

Se in un punto vi sono due curvature nulle il punto è assiale. Le (8) uguagliate a 0, debbono infatti avere due soluzioni comuni, quindi i loro coefficienti sono proporzionali e la matrice (9) ha caratteristica 1: il punto è assiale.

Nel caso del punto assiale non si può più parlare di corrispondenza fra normali e tangenti. Uguagliando a 0 le (15) si deduce che *in un punto assiale esistono sempre due direzioni reali e distinte o coincidenti od immaginarie coniugate con curvatura nulla.*

La conica delle curvature.

37. — Particolarizziamo le linee coordinate sulla superficie per modo che, nel punto, l'elemento lineare assuma la forma $du_1^2 + du_2^2$: posto $\frac{du_1}{du_2} = m$ sarà $\gamma_1^2 = \left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 = \frac{m^2}{1+m^2}, \alpha_1\gamma_2, = \frac{m}{1+m^2}, \alpha_2^2 = \frac{1}{1+m^2}$; quindi le (8) divengono

$$
\begin{aligned}
k\xi_{n-2} &= \frac{1}{1+m^2}\left[x_{n-220}\, m^2 + 2\, x_{n-211}\, m + x_{n-202}\right] \\
(21) \qquad k\xi_{n-1} &= \frac{1}{1+m^2}\left[x_{n-120}\, m^2 + 2\, x_{n-111}\, m + x_{n-102}\right] \\
k\xi_{n} &= \frac{1}{1+m^2}\left[x_{n20}\, m^2 + 2\, x_{n11}\, m + x_{n02}\right].
\end{aligned}
$$

Nell'S_3 $x_{n-2}\, x_{n-1}\, x_n$ consideriamo il punto $k\xi_{n-2}, k\xi_{n-1}, k\xi_n$; esso è sulla normale $\xi_{n-2}\, \xi_{n-1}\, \xi_n$ e su essa stacca un segmento uguale

a k. Se il punto è generico, tutti questi punti stanno su un piano che non passa per l'origine. Infatti: a causa della disuguaglianza (19) esistono, e sono determinati, valori di abc che soddisfanno le

$$
\begin{aligned}
& a x_{n-220} + b x_{n-120} + c x_{n20} = 1 \\
(22) \qquad & a x_{n-211} + b x_{n-111} + c x_{n11} = 0 \\
& a x_{n-202} + b x_{n-102} + c x_{n02} = 1 .
\end{aligned}
$$

Ora è chiaro per (21) che il punto $k\xi_{n-2}, k\xi_{n-1}, k\xi_n$ sta nel piano $ax_{n-2} + bx_{n-1} + cx_n = 1$. *Se stacchiamo sulle normali dei segmenti uguali alle curvature corrispondenti gli estremi di questi segmenti stanno in un piano e quindi descrivono una conica sul cono delle curvature.* La diremo *conica delle curvature: essa è sempre una ellisse* perchè la curvatura di una sezione normale non può essere infinita che in un punto singolare della superficie, onde la conica non può avere punti all'infinito.

Per una trasformazione per raggi vettori reciproci si ha: *Se sulle normali principali stacchiamo dei segmenti uguali ai raggi di curvatura gli estremi stanno sull'intersezione del cono delle normali principali con una sfera passante per il punto della superficie.*

Risulta di qui, per via geometrica, che gli invarianti assoluti di 2° ordine debbono essere 5: per tali possono prendersi 5 qualunque elementi geometrici che determinino la forma del cono e della conica delle curvature. Per esempio: i due invarianti che individuano il cono, la distanza del piano della conica dal punto della superficie, e 2 dei 3 coseni di direzione della normale a questo piano rispetto ai tre assi del cono.

Data la forma del cono e della conica delle curvature, occorrerà ancora assegnare la corrispondenza fra normali e tangenti. Ora questa è perfettamente determinata quando si conosca il parametro m che individua la tangente corrispondente ad una data normale, ed è del resto ben evidente che tale parametro dovrà restare arbitrario poichè con un movimento che lasci fisso l'S_{n-2} normale e muti in sè l'S_2 tangente tale parametro si può assegnare ad arbitrio. Per mostrare che dopo ciò la corrispondenza è determinata osserviamo che, data la forma e la posizione del cono e della conica delle curvature noi possiamo trovare le proiezioni delle curvature su un qualunque asse: ma queste sono date dalle (21), e di queste formule stesse noi sappiamo che si possono trovare, a meno di un fattore di proporzionalità, i coefficienti quando siano dati i soli massimi e minimi dei loro primi membri. Ora questi sono dati appena sono noti il cono e la conica delle curvature, il fattore di proporzionalità risulta immediatamente dal valore assegnato di m per una data normale, quindi la corrispondenza è perfettamente determinata.

38. — *Corollari.* — Affinchè più curvature siano uguali è necessario che i loro estremi siano su una sfera di centro il vertice del cono, questa segherà il piano delle curvature in un cerchio, la conica in quattro punti. Quindi *esisteranno quattro direzioni reali od immaginarie per cui la curvatura della sezione normale ha un valore assegnato. Le normali corrispondenti sono l'intersezione del cono delle normali con un cono di rotazione di asse la normale condotta dal punto al piano delle curvature. Esistono 4 direzioni per cui le curvature corrispondenti soddisfanno alle condizioni di massimo o minimo;* le normali principali corrispondenti a queste direzioni passano pei piedi delle normali alla conica delle curvature condotte dal punto di incontro della perpendicolare calata dal punto della superficie sul piano delle curvature. *Se tre distinte di queste curvature soddisfacenti alle condizioni di massimo e di minimo sono uguali tutte le curvature sono uguali,* e la conica delle curvature è un cerchio, il cono delle normali è un cono di rotazione.

39. — Consideriamo il caso di un punto planare. Le (14), supponendo le linee coordinate scelte in modo analogo a quanto si fece nel n. 37, divengono

$$\text{(23)}\qquad \begin{aligned} k\xi_{n-1} &= \frac{1}{1+m^2}\left[x_{n-120}\, m^2 + 2x_{n-11}\, m + x_{n-102}\right] \\ k\xi_n &= \frac{1}{1+m^2}\left[x_{n20}\, m^2 + 2x_{n11}\, m + x_{n02}\right] \end{aligned} .$$

Il punto $k\xi_{n-1}$, $k\xi_n$ nel piano $x_{n-1}\, x_n$ stacca sulla normale ξ_{n-1}, ξ_n un segmento uguale a k. Questi punti si trovano su una conica la cui equazione è il risultante delle due equazioni (23).

Posto per brevità $k\xi_{n-1} = t_1$, $k\xi_n = t_2$, l'equazione della conica diverrà dopo alcune riduzioni:

$$\text{(24)}\quad \begin{aligned} & t_1^2 \{[x_{n20} - x_{n02}]^2 + 4x_{n11}^2\} + t_2^2\{[x_{n-102} - x_{n-120}]^2 + 4x_{n-111}^2\} + \\ & + 2t_1 t_2\{[x_{n-102} - x_{n-120}]\,[x_{n20} - x_{n02}] - 2x_{n-111}\, x_{n11}\} + \\ & + 2t_2\{[x_{n-120} - x_{n-102}]\,[x_{n-120}\, x_{n02} - x_{n-102}\, x_{n20}] - 2x_{n-111}^2 [x_{n20} + \\ & \qquad\qquad + x_{n-102}] + 2x_{n-111}[x_{n02} + x_{n20}]\} + \\ & + 2t_1\{[x_{n20} - x_{n02}]\,[x_{n-120}\, x_{n02} - x_{n-102}\, x_{n20}] - 2x_{n11}^2 [x_{n-120} + \\ & \qquad\qquad + x_{n02}] + 2x_{n11}[x_{n-102} + x_{n-120}]\} + \\ & + [x_{n120}\, x_{n02} - x_{n-102}\, x_{n20}]^2 + 4x_{n-111}^2\, x_{n02}\, x_{n20} + 4x_{n11}^2\, x_{n-120}\, x_{n-102} - \\ & + 4x_{n-111}\, x_{n11}[x_{n-120}\, x_{n02} + x_{n-102}\, x_{n20}] = 0 \end{aligned}$$

Quindi *se su ogni normale stacchiamo due segmenti uguali alle curvature corrispondenti a queste normali, gli estremi descrivono una conica che diremo ancora conica delle curvature. Questa conica è sempre un'ellisse e non può degenerare* perchè non possono esistere curvature infinite. *Se stacchiamo sulle normali segmenti uguali ai raggi di curvatura gli estremi sono su una quartica (lemniscata)*, inversa della conica delle curvature. È necessario per dare questa conica nel piano delle normali dare 4 invarianti: per esempio la distanza del centro della conica dal punto della superficie, la lunghezza degli assi e l'angolo di uno di essi colla congiungente il centro col punto della superficie.

Assegnati questi invarianti si potrà in modo analogo a quello del n. 37 dedurre la corrispondenza fra normali e tangenti.

Come precedentemente *esistono 4 curvature eguali ad una data, 4 sono i massimi ed i minimi delle curvature etc.*

Se il punto è interno alla conica lo diremo *ellittico,* se esterno *iperbolico,* se sulla conica esso è *parabolico* (n. 36). Quando si sappia che il punto è parabolico basterà dare 3 invarianti. Dal punto escono due tangenti alla conica, reali se il punto è iperbolico, immaginarie coniugate se ellittico; a ciascuna di queste normali corrisponde una sola direzione nel piano tangente; diremo queste due direzioni (raggi doppi dell'involuzione delle tangenti che si ottiene chiamando corrispondenti due direzioni che corrispondono ad una stessa normale) *direzioni coniugate.* Nel caso del punto parabolico esiste una sola tangente la conica delle curvature, questa è la direzione eccezionale di curvatura nulla già notata al n. 36; la diremo *direzione asintotica.* Nell'ultimo capitolo vedremo il perchè di queste denominazioni nelle analogie coll'ordinaria teoria delle superficie [1].

40. — Se infine si tratta di un punto assiale non avremo nulla a mutare all'ordinaria teoria delle curvature in un punto di una superficie di S_3. Invero nei nostri studii ci potremo limitare a considerare le coordinate x_1, x_2, x_n e quindi ci basterà restare nell'S_3 determinato dal piano tangente e dalla direzione comune delle normali principali delle sezioni normali.

---

[1] Il KOMMERELL nella citata memoria *Die Krümmung etc.* studiando i punti di una superficie dell'S_4 studia i punti da noi detti planari, poichè, come fu già notato al n. 35, a questo tipo appartengono in generale i punti delle superficie dell'S_4. Egli dà però una rappresentazione assai più complicata della nostra: egli introduce direttamente la lemniscata dei raggi di curvatura ed a queste collega una conica (podaria della lemniscata rapporto al punto) che egli dice *caratteristica* § 6 e § 11. A seconda che la caratteristica è un'iperbole, una parabola, o un'ellisse egli dice il punto iperbolico, parabolico, ellittico. Questa classificazione non differisce dalla nostra come è facile dimostrare osservando che una lemniscata è podaria rispetto ad un punto di un iperbole di una parabola o di un ellisse a seconda che è l'inversa di una conica rispetto a cui il punto è esterno o si trova sulla conica o le è interno. Il KOMMERELL introduce pure le direzioni che noi dicemmo coniugate e che egli dice asintotiche (§ 8, nell'enunciato di pag. 30-31 il K. stesso dice queste direzioni coniugate); noi abbiamo riservata tale denominazione per la direzione eccezionale nei punti parabolici (di cui il K. non considera le notevoli proprietà) per le analogie che questa direzione asintotica presenta colle asintotiche della ordinaria teoria delle superficie. Una tale analogia è fin d'ora evidente nel fatto che le une e le altre sono le direzioni di curvatura nulla.

La curvatura media della superficie.

41. — Da un teorema del Killing [1] applicato al caso particolare delle superficie deduciamo: *La somma dei quadrati delle curvature medie delle superficie projezioni della superficie data su $n-2$ S_3 ortogonali passanti pel piano tangente è costante,* qualunque siano questi $n-2$ S_3 ed è un invariante della superficie. Noi chiameremo curvatura media la radice quadrata di questa somma che indicheremo con H: si ha

$$H = \sqrt{\Delta_2} \tag{25}$$

Infatti sia $x_1\, x_2$ il piano tangente, supponiamo che l'elemento lineare della superficie sia, nel punto, $du_1^2 + du_2^2$, ossia che $I_{1010} = 1$ $I_{0101} = 1$ $I_{1001} = 0$. Supponiamo che gli $n-2$ S_3 ortogonali del teorema precedente siano gli S_3 contenenti gli assi $x_1\, x_2\, x_i$ $(i \geq 3)$. *La formula che dà le curvature delle sezioni normali della superficie projezione sullo spazio $x_1\, x_2\, x_i$ è,* posto $\frac{du_1}{du_2} = m$:

$$k_i = k\dot{\xi}_i = \frac{1}{1+m^2}\left[x_{i20}\, m^2 + 2x_{i11}\, m + x_{i02}\right]. \tag{26}$$

Quindi la curvatura media di tale projezione è $x_{i20} + x_{i02}$. Quindi

$$H = \sqrt{\sum_{i\geq 3} (x_{i20} + x_{i02})^2} = \sqrt{\sum_{i\geq 3} x_{i20}^2 + 2\sum x_{i20}\, x_{i02} + \sum x_{i02}^2}. \tag{27}$$

D'altra parte, poichè $I_{1010} = I_{0101} = 1$ $I_{1001} = 0$ si ha

$$\Delta_2 = J_{2020} + J_{0202} + 2\, J_{2002}. \tag{28}$$

Ma ricordiamo il valore degli J: si ha, nelle coordinate attuali, $x_{i,10} = x_{i,01} = 0$ $(i \geq 3)$, quindi

---

[1] KILLING, *Nicht Euklidischen Raumformen in Analitischer Behandlung.*, pag. 245.

$$(29)\quad J_{2020} = \frac{1}{\begin{vmatrix} x_{110} & x_{210} \\ x_{101} & x_{401} \end{vmatrix}^2} \left\| \begin{matrix} x_{1,10} & x_{210} & \ldots & 0 \\ x_{101} & x_{201} & \ldots & 0 \\ x_{120} & x_{220} & \ldots & x_{n20} \end{matrix} \right\|^2 = \sum_{i \geq 3} x_{i20}^2,\ J_{0202} = \sum_{i \geq 3} x_{i02}^2,\ J_{2002} = \sum_{i \geq 3} x_{i20} x_{i02}$$

Quindi $\Delta_2 = \Sigma x_{i20}^2 + \Sigma x_{i02}^2 + 2 \Sigma x_{i02} x_{i20}$. Confrontando con (27) si deduce la (25) che sarà valida in un qualunque sistema di coordinate, perchè Δ_2 è invariante. Questa dimostrazione ci permette anzi di ritrovare il teorema del Killing: basterà definire la curvatura media $H = \sqrt{\Delta_2}$ e ricordando che Δ_2 è invariante trovare secondo la formula precedente il valore di Δ_2 da cui risalendo per (26) si dedurrà il significato di H.

Possiamo dare di H una notevole interpretazione geometrica. Per fissare le idee supponiamo di considerare il caso del punto generale. Assumiamo come n-edro coordinato uno per cui $x_1 x_2$ sia il piano tangente e che abbia per assi $x_{n-2} x_{n-1} x_n$ rispettivamente la congiungente il punto col centro della conica delle curvature e due direzioni perpendicolari a tale congiungente, nell'S_3 delle normali mentre gli assi residui sono fuori dell'S_3 delle normali principali. Il contributo portato ad H dagli S_3 contenenti il piano tangente e passanti per queste ultime direzioni è nullo: quanto agli S_3 per gli altri assi, occorre projettare la conica delle curvature su questi assi: il doppio della distanza del punto medio del segmento projezione dal punto della superficie è la curvatura media della superficie projezione sull'S_3 che contiene $x_1 x_2$ e l'asse considerato. Ora il punto medio della projezione sulla congiungente col centro della conica è il centro della conica stessa, mentre la projezione della conica sugli altri due assi ha per punto medio il punto della superficie. Quindi una sola delle curvature medie non è nulla ed è uguale al doppio della distanza del centro della conica delle curvature dal punto della superficie. Quindi *la curvatura media della superficie è uguale al doppio della distanza del punto della superficie dal centro della conica delle curvature.*

Lo stesso ragionamento vale pel punto planare; basta prendere l'n-edro coordinato tale che abbia come piano $x_1 x_2$ il piano tangente e come assi $x_{n-1} x_n$ la congiungente il punto col centro della conica delle curvature e la sua normale nel piano delle normali. Nel caso del punto assiale questa interpretazione dà apertamente l'ordinaria definizione della curvatura media.

La curvatura totale della superficie.

42. — Ancora da un teorema del Killing [1] si deduce che *la curvatura totale* (n. 8, 14)

$$(30)\qquad K = \Delta_1$$

è uguale alla somma delle curvature totali delle superficie projezioni su $n-2$ S_3 ortogonali passanti per il piano tangente. Sarebbe facile del resto ottenerne una dimostrazione diretta analoga a quella data per H. Anche di K possiamo dare una interpretazione geometrica. Ritenendo sempre come $x_1 x_2$ il piano tangente, assumiamo come assi $x_{n-2} x_{n-1} x_n$ la normale al piano della conica delle curvature e due parallele ai due assi della conica delle curvature, i cui semiassi diciamo a e b. Il contributo in K degli S_3 per gli assi diversi da questi è nullo. Il contributo in K dello S_3 per l'asse x_{n-2} normale al piano delle curvature è il quadrato della distanza d del punto dal piano. Infine siano α e β le coordinate del centro della conica delle curvature rispetto ai due assi $x_{n-1} x_n$: il contributo in K degli S_3 per gli assi $x_{n-1} x_n$ è allora $(\alpha - a)(\alpha + a) = \alpha^2 - a^2$, $(\beta - b)(\beta + b) = \beta^2 - b^2$. Si deduce $K = d^2 + \alpha^2 + \beta^2 - (a^2 + b^2)$. Ma $d^2 + \alpha^2 + \beta^2$ è il quadrato della distanza del punto dal centro della conica delle curvature, $a^2 + b^2$ è la distanza dei vertici della conica: quindi *la curvatura totale è la differenza fra il quadrato della distanza del punto dal centro della conica della curvatura e la distanza dei vertici della conica.* Od anche *la distanza fra i vertici della conica delle curvature vale* $\frac{1}{4} H^2 - K$.

[1] KILLING, l. c., pag. 247.

L'analogo per il caso di un punto planare: per un punto assiale questa interpretazione si riduce all'ordinaria interpretazione di K per i raggi principali di curvatura.

Osserviamo che segue di qui che *se un punto planare è parabolico od ellittico la curvatura in esso è necessariamente negativa.*

I residui invarianti di secondo ordine.

43. — La curvatura media e la curvatura totale sono i soli invarianti che abbiano senso per tutte le tre specie di punti. Andiamo a costruirne altri che servano a distinguere queste tre specie diverse.

Un primo di tali invarianti è *la distanza del piano delle curvature dal punto della superficie.* Esso *è nullo se il punto non è generale e viceversa* poichè noi sappiamo che allora e solo allora il piano della conica delle curvature non passa pel punto.

Esso è dato da

$$\text{(31)} \qquad L = \sqrt{\frac{\Delta_5}{\Delta_4}}\,.$$

Infatti poniamo l'n-edro coordinato nella posizione del n. precedente. Allora $k\xi_{n-2}$ è indipendente da m ed uguale alla distanza cercata. Ma $k\xi_{n-2} = \frac{1}{1+m^2}\left[x_{n-220}\, m^2 + 2x_{n-211}\, m + x_{n-202}\right]$; dovendo essere costante sarà $x_{n-211} = 0$, $x_{n-220} = x_{n-202} =$ distanza cercata. D'altra parte in queste coordinate si ha

$$\text{(32)} \qquad \Delta_5 = \frac{1}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}} \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20} \\ x_{11} \\ x_{02} \end{matrix} \right\|^2 = \begin{vmatrix} x_{n-220} & x_{n-120} & x_{n20} \\ 0 & x_{n-111} & x_{n11} \\ x_{n-220} & x_{n-102} & x_{n02} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= x_{n-220}^2 \begin{vmatrix} x_{n-120} - x_{n-102} & x_{n20} - x_{n02} \\ x_{n-111} & x_{n11} \end{vmatrix}^2 .$$

Analogamente

$$\Delta_4 = \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{11} \\ x_{02} \end{matrix} \right\|^2 + \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20} \\ x_{11} \end{matrix} \right\|^2 + 2 \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{11} \\ x_{02} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20} \\ x_{11} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 0 & x_{n-111} & x_{n11} \\ x_{n-220} & x_{n-102} & x_{n02} \end{matrix} \right\|^2 + \left\| \begin{matrix} x_{n-220} & x_{n-120} & x_{n20} \\ 0 & x_{n-111} & x_{n11} \end{matrix} \right\|^2 +$$

$$+ 2 \left\| \begin{matrix} 0 & x_{n-111} & x_{n11} \\ x_{n-102} & x_{n-102} & x_{n02} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_{n-220} & x_{n-120} & x_{n20} \\ 0 & x_{n-111} & x_{n11} \end{matrix} \right\| .$$

Od anche, osservando che questa espressione è il quadrato della differenza di due matrici aventi una linea a comune,

$$\text{(33)} \qquad \Delta_4 = \left\| \begin{matrix} 0 & x_{n-120} - x_{n-102} & x_{n20} - x_{n02} \\ 0 & x_{n-111} & x_{n11} \end{matrix} \right\|^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} x_{n-120} - x_{n-102} & x_{n20} - x_{n102} \\ x_{n-111} & x_{n11} \end{vmatrix}^2 .$$

Di qui e da (32) segue che $\frac{\Delta_5}{\Delta_4}$ è uguale a x_{n-220}^2 e quindi al quadrato della distanza cercata; ne segue (31).

44. — Per avere altri invarianti cerchiamo gli elementi della conica delle curvature. Premettiamo alcune osservazioni per trattare uniformemente i due casi del punto generico e del punto planare. Se, come nel n. precedente, supponiamo che x_{n-2} sia normale al piano della conica delle curvature, l'equazione di questa conica nel piano $x_{n-1}\,x_n$ si otterrà cercando il risultante delle formule relative a questi ultimi assi, equazioni che hanno la stessa forma che quella del n. 39 pel caso del punto planare. Talchè nel caso del punto generale l'equazione della conica, riferita nel piano in cui giace ai due assi $x_{n-1}\,x_n$ passanti pel piede della perpendicolare condotta dal punto al piano stesso, sarà la stessa che l'equazione della conica nel piano delle normali nel caso del punto planare; e perciò i calcoli si po-

tranno condurre nello stesso modo per i due casi finchè restiamo nelle particolari coordinate di cui si è parlato. Non si può però dire lo stesso quando si vorrà di qui passare alle coordinate generali: bisognerà studiare l'effetto delle diverse ipotesi.

Premesso ciò, partiamo dall'equazione (24): e cominciamo a cercare il discriminante D della conica. Facilmente si vede che lo si può scrivere nella forma

$$(34)\quad D=\left\|\begin{matrix} x_{n20}-x_{n02} & -2x_{n11} \\ x_{n-102}-x_{n-120} & -2x_{n-111} \\ x_{n-120}x_{n-2}-x_{n-102}x_{n20} & x_{n-111}(x_{n20}+x_{n02})-x_{n11}(x_{n-120}+x_{n-102}) \end{matrix}\right\|^2 - 4\left|\begin{matrix} x_{n-120}-x_{n-102} & x_{n20}-x_{n02} \\ x_{n-111} & x_{n11} \end{matrix}\right|^4$$

dove bisogna intendere il quadrato della matrice fatto per linee. Ma il quadrato di tale matrice è nullo poichè essa contiene più linee che colonne, quindi risulterà

$$(35)\qquad D=-4\left|\begin{matrix} x_{n-120}-x_{n-102} & x_{n20}-x_{n02} \\ x_{n-111} & x_{n11} \end{matrix}\right|^4 .$$

Ricordiamo la (33) ed osserviamo che essa è valida sia nel caso del punto planare che nel caso del punto generico; si ha

$$(36)\qquad D=-4\,\Delta_4^2 .$$

Analogamente calcoliamo il primo minore A_{33} di D: si verifica che esso è

$$(37)\qquad A_{33}=4\left|\begin{matrix} x_{n-120}-x_{n-102} & x_{n20}-x_{n02} \\ x_{n-111} & x_{n11} \end{matrix}\right|^2=4\,\Delta_4 .$$

Si noti che risulta che il primo minore principale di D è positivo e cioè di segno contrario a D, il che concorda con quanto si è notato ai n. 37, 39 che la conica è una ellisse.

45. — È facile ormai calcolare il prodotto dei semiassi. Noi sappiamo infatti che il prodotto dei semiassi di una conica è uguale, a meno del segno, al quoziente del discriminante per la radice quadrata della terza potenza del primo minore principale del discriminante stesso. Quindi da (36) (37) si deduce *il prodotto dei semiassi della conica delle curvature è*

$$(38)\qquad M=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_4} .$$

Il termine noto dell'equazione della conica delle curvature si può scrivere, come facilmente si verifica sviluppando Δ_3 nelle nostre ipotesi, sotto la forma

$$(39)\qquad -4\left[L^2\left[\frac{1}{4}\Delta_2-\Delta_1\right]+\Delta_3\right].$$

Quindi

$$(40)\qquad N=4\,\frac{L^2\left[\Delta_1-\frac{1}{4}\Delta_2\right]-\Delta_3}{\Delta_4}$$

che rappresenta *il rapporto fra il quadrato di una tangente condotta dall'origine al quadrato del semi diametro parallelo* è l'ultimo invariante, dove si deve ricordare, che nei casi del punto planare e generale il punto che qui si chiama origine è rispettivamente *il punto della superficie od il piede della normale al piano delle curvature.*

Se il punto è planare $L=0$, $N=-4\dfrac{\Delta_3}{\Delta_4}$.

Se $L=0$ *il punto è planare od assiale; e se è planare, secondochè* $N \lesseqgtr 0$ *è ellittico parabolico od iperbolico, se il punto è assiale* $L=N=M=0$.

Notiamo che però perchè queste equazioni rappresentino le condizioni predette occorre tenere conto delle *condizioni di realità.*

Notiamo infine che da questa discussione risulta quanto si era asserito al n. 14 che $\Delta_1\,\Delta_2\,\Delta_3\,\Delta_4\,\Delta_5$ sono indipendenti poichè per essi si esprimono H K L M N evidentemente indipendenti.

I punti di una superficie generica.

46. — I punti generici sopra una superficie generica sono i punti finora da noi considerati come tali. Sole *le superficie di* S_4 *sono di necessità di punti planari, quelle di* S_3 *di punti assiali.*

Su una superficie di S_5 *esiste in generale una linea di punti planari e su essa singoli punti planari parabolici. Su una superficie di* S_6 *esistono punti planari isolati ed in generale non esistono punti planari parabolici. Su una superficie di* S_n *per* $n \geq 7$ *non esistono in generale punti planari. Su una superficie di* S_n *per* $n \geq 5$ *non esistono in generale punti assiali.*

Su una superficie di S_4 *esiste una linea parabolica*[1] (di punti parabolici) *che divide la regione dei punti ellittici dalla regione dei punti iperbolici. Su essa esistono punti assiali isolati.*

Nel prossimo Capitolo tratteremo di alcune superficie che presentano delle singolarità da questo punto di vista.

[1] KOMMERELL, l. c., pag. 39.

CAPITOLO V.

Le superficie di punti assiali e di punti planari. Le superficie minime

Classificazione delle superficie di punti assiali. Applicazione.

47. — Perchè una superficie sia di punti assiali è necessario e sufficiente come si disse al n. 35 che la matrice delle derivate prime e seconde abbia caratteristica 3 in ogni punto della superficie. I risultati del n. 18 ci danno allora immediatamente il teorema seguente: *Se una superficie è tutta di punti assiali o è una superficie dell'* S_3 *od è una superficie sviluppabile rigata.*

È qui opportuno stabilire che *le superficie sviluppabili rigate sono i coni (i cilindri) e le superficie formate dalle tangenti ad una curva dell'* S_n. Supponiamo come al n. 18 che le linee $u_2 =$ cost. siano le rette ed u_1 misuri su queste la lunghezza. Si avrà

$$x_i = \xi_i + \eta_i u_1 \ , \ x_{i10} = \eta_i \ , x_{i01} = \frac{d\xi_i}{du_2} + \frac{d\eta_i}{du_2} u_1 \ , \ x_{i11} = \frac{d\eta_i}{du_2}$$

$\xi_i\ \eta_i$ essendo funzioni della sola u_2. La equazione $D'^2 = 0$ cui si riduce la condizione che la superficie sia sviluppabile, richiede che x_{i11} sia funzione lineare di $x_{i10}\ x_{i01}$: quindi si ha

$$\frac{d\eta_j}{du_2} = \sigma\eta_j + \beta\left(\frac{d\xi_j}{du_2} + \frac{d\eta_j}{du_2} u_1\right) .$$

Ma le η_i sono i coseni di direzione delle rette $u_2 =$ cost. Quindi

$\sum \eta_i^2 = 1 \; \sum \eta_i \frac{d\eta_i}{du_2} = 0$. Moltiplicando le precedenti equazioni per η_j e sommando rapporto a j si ottiene $\alpha = -\beta \sum_j \frac{d\xi_j}{du_2} \eta_j$, e quindi esse si riducono alle seguenti

$$\frac{d\eta_i}{du_2} = \beta \left(\frac{d\xi_i}{du_2} + \frac{d\eta_i}{du_2} u_1 - \eta_i \sum_j \frac{d\xi_j}{du_2} \eta_j \right)$$

od anche $\frac{d\eta_i}{du_2}(1 - \beta u_1) = \beta \left(\frac{d\xi_i}{du_2} - \eta_i \sum \frac{d\xi_j}{du_2} \eta_j \right)$. Noi potremo quindi indicando con β una nuova conveniente funzione di $u_1 \, u_2$ scrivere

$$\frac{d\eta_i}{du_2} = \beta \left(\frac{d\xi_i}{du_2} - \eta_i \sum \frac{d\xi_j}{du_2} \eta_j \right). \tag{1}$$

Viceversa se queste equazioni sono soddisfatte le $x_i = \xi_i + \eta_i u_1$ rappresentano una sviluppabile rigata.

Premesso ciò, cerchiamo se sulla superficie sviluppabile rigata si può tracciare una curva che in ogni punto tocchi la retta della superficie. Determineremo tale curva ponendo u_1 funzione di u_2 (con che escluderemo il caso banale che la curva sia una retta $u_2 = \text{cost.}$); dovrà aversi $\frac{dx_i}{du_2} = \rho \eta_i$ e cioè

$$\frac{d\xi_i}{du_2} + \frac{d\eta_i}{du_2} u_1 + \eta_i \frac{du_1}{du_2} = \rho \eta_i \, .$$

Moltiplichiamo per η_i e sommiamo rapporto ad i: si ottiene $\rho - \frac{du_1}{du_2} = \sum \frac{d\xi_i}{du_2} \eta_i$; quindi si ha che u_1 dovrà essere determinata u_2 per in funzione di modo da soddisfare le equazioni

$$\frac{d\eta_i}{du_2} u_1 = \left(\sum \frac{d\xi_j}{du_2} \eta_j \right) \eta_i - \frac{d\xi_i}{du_2}$$

il che è possibile allora ed allora soltanto che le (1) sono soddisfatte. Quindi esiste su una superficie rigata una curva tangente in ogni punto la retta della superficie allora ed allora soltanto che la superficie è sviluppabile. Se questa curva si riduce ad un punto si avrà un cono (col vertice al finito od all'infinito), altrimenti si avrà la superficie delle tangenti ad una curva. Con che è dimostrato l'asserto.

47. — Superficie di punti assiali sarà, ad esempio, necessariamente una superficie totalmente geodetica di una V_3 di S_4 poichè le normali principali alle geodetiche in ogni punto della superficie coincideranno colla normale alla V_3.

Supponiamo che la V_3 ammetta una famiglia di superficie totalmente geodetiche. Un teorema del Rimini [1] ci dice che condizione necessaria e sufficiente affinchè una famiglia di ipersuperficie V_{n-1} di V_n sia di una famiglia di ipersuperficie totalmente geodetiche è che le trajettorie ortogonali segnino sulle ipersuperficie della famiglia un'applicabilità. Noi conchiuderemo quindi che se una V_3 di S_4 ammette una famiglia di superficie totalmente geodetiche queste saranno tutte applicabili e quindi saranno tutte sviluppabili oppure tutte superficie dell'S_3.

Nel primo caso la V_3 contiene ∞^2 rette; nel secondo le trajettorie ortogonali alla famiglia di superficie totalmente geodetiche sono normali agli S_3 che contengono queste superficie, poichè la normale alla V_3 dovendo coincidere colla normale alla superficie totalmente geodetica giace nell'S_3.

Quindi: *una V_3 di S_4 che ammetta una famiglia di superficie totalmente geodetiche, od è composta con ∞^2 trajettorie ortogonali ad una famiglia di S_3 che sega su V_3 la famiglia di superficie totalmente geodetiche oppure è composta con ∞^2 rette e le superficie totalmente geodetiche sono sviluppabili formate con queste.*

Si potrebbe approfondire la ricerca. Si ottiene che *inversamente ogni ipersuperficie V_3 di S_4 formata con trajettorie ortogonali ad una famiglia di S_3 è segata dagli S_3 secondo superficie totalmente geodetiche*: infatti poichè gli S_3 sono ipersuperficie totalmente geodetiche in S_4, le loro trajettorie ortogonali segnano pel teorema del

[1] Cesare Rimini, *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo a 4 parametri di movimenti*. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. IX, § 16, n. 19.

Rimini una applicabilità su di essi e quindi le superficie che sono segate dagli S_3 su V_3 sono applicabili e le traiettorie ortogonali segano su esse un'applicabilità: e quindi di nuovo pel teorema del Rimini sono superficie totalmente geodetiche della V_3.

Più difficile è studiare quali sono le V_3 che quale famiglia di superficie totalmente geodetiche ammettono delle sviluppabili rigate. Facciamo la rappresentazione sferica delle ∞^2 rette di tale V_3 conducendo le parallele a tali rette per l'origine e considerandone l'intersezione colla ipersfera; si avrà una superficie sull'ipersfera di cui le linee corrispondenti alle sviluppabili sono geodetiche: ed inversamente assegnata una superficie sull'ipersfera e su essa un sistema di ∞^2 geodetiche si potrà sempre trovare una V_3 contenente ∞^2 rette aventi per immagini i punti della superficie e tale che abbia una famiglia di superficie totalmente geodetiche le cui immagini sono le geodetiche assegnate [1].

[1] Indichiamo la via per cui si provano tali affermazioni. Si riferisca la V_3 alle superficie totalmente geodetiche quali superficie $u_3 = \text{cost}$. Siano inoltre le linee $u_2 = \text{cost}$ $u_3 = \text{cost}$ le rette e misuri su di esse u_1 la lunghezza. Infine siano le $u_3 = \text{cost}$ $u_1 = 0$ gli spigoli di regresso delle sviluppabili: le $u_2 = \text{cost}$ $u_1 = 0$ le loro trajettorie ortogonali. Si avrà per i punti di V_3 le equazioni $x_i = \xi_i (u_2 u_3) + u_1 \eta_i (u_2 u_3)$; e le ξ, η soddisfaranno le equazioni $\sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u_2} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_3} = 0, \frac{\partial \xi_i}{\partial u_2} = \rho \eta_i, \sum \eta_i^2 = 1$; da cui si dedurranno le altre $\sum \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial u_2} = \sum \eta_i \frac{\partial \eta_i}{\partial u_3} = \sum \eta_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u_3} = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u_2} \frac{\partial \eta_i}{\partial u_2} = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u_2} \frac{\partial \eta_i}{\partial u_3} = 0$, $\sum \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_2}\right)^2 = \rho^2$, $\sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u_2} \eta_i = \rho$ ed infine l'altra $\frac{\partial \rho}{\partial u_3} = - \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u_3} \frac{\partial \eta_i}{\partial u_2}$ poichè si ha $\frac{\partial \rho}{\partial u_3} = \frac{\partial \rho}{\partial u_3} \sum \eta_i^2 = \sum \eta_i \frac{\partial \rho \eta_i}{\partial u_3} = \sum \eta_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial u_2 \partial u_3} = - \sum \frac{\partial \eta_i}{\partial u_2} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_3}$. Ciò posto i coefficienti dell'elemento lineare di V_3 saranno

$$a_{11} = 1 \ , \ a_{12} = \rho \ , \ a_{13} = 0 \ , \ a_{22} = \rho^2 + u_1^2 e \ , \ a_{23} = u_1 \frac{\partial \rho}{\partial u_3} + u_1^2 f \ ,$$

$$a_{33} = \sum \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u_3}\right)^2 + 2 u_1 \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u_3} \frac{\partial \eta_i}{\partial u_3} + u_1^2 g$$

dove $e = \sum \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial u_2}\right)^2, f = \sum \frac{\partial \eta_i}{\partial u_2} \frac{\partial \eta_i}{\partial u_3}, g = \sum \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial u_3}\right)^2$ sono i coefficienti della rappresentazione sferica. Per esprimere che le superficie $u_3 = \text{cost}$ sono

Le superficie di punti planari non parabolici. Sistema coniugato.

48. — Sia una superficie di punti planari: condizione necessaria e sufficiente perciò è che la matrice delle derivate prime e seconde sia nulla (cfr. n. 35). Si avranno quindi relazioni lineari della forma

$$(2) \qquad \alpha_1 x_{i,20} + 2 \alpha_2 x_{i,11} + \alpha_3 x_{i02} + \beta_1 x_{i,10} + \beta_2 x_{i,01} = 0$$

le $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\ \beta_1\, \beta_2$ restando le stesse pei varii indici. Possiamo dare una notevole riduzione di questa formula. Osserviamo perciò che se facciamo un mutamento di variabili $u_1\, u_2$ in $u'_1\, u'_2$ la (1) si muta in una dello stesso tipo

$$\alpha'_1 x_{i,20} + 2 \alpha'_2 x_{i,11} + \alpha'_3 x_{i,02} + \beta'_1 x_{i10} + \beta'_2 x_{i01} = 0$$

totalmente geodetiche basterà che scriviamo che i coefficienti Ω_{rs} della seconda forma fondamentale di tali superficie immerse in V_3 sono identicamente nulli. [Ciò in virtù di un teorema del Rimini (l. c., pag. 30) che si deduce del resto immediatamente dalla formula (33) di pag. 366 del vol. I delle *Lezioni* del prof. Bianchi che dà la curvatura assoluta $\frac{1}{R}$ della geodetica di una ipersuperficie quando si pensi che per una superficie totalmente geodetica tale curvatura deve essere sempre nulla]. Calcoleremo gli Ω_{rs} dalle formule (K) di pag. 362 del vol. I delle *Lezioni* del prof. Bianchi, che nel nostro caso si riducono a $\Omega_{rs} = \sum_{\mu=1,2,3} \begin{bmatrix} rs \\ \mu \end{bmatrix} \frac{A_{3\mu}}{\sqrt{A_{33}}}$ $(r, s = 1, 2)$. Le equazioni $\Omega_{11} = 0$ $\Omega_{12} = 0$ risulteranno identicamente soddisfatte. L'ultima $\Omega_{22} = 0$ uguagliando a 0 i coefficienti delle varie potenze di u_1 ci darà l'equazioni

$$\frac{1}{2} f \frac{\partial e}{\partial u_2} - e \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{1}{2} e \frac{\partial e}{\partial u_3} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u_2 \partial u_3} = \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial u_2} \frac{\partial \rho}{\partial u_3} + f \rho \ .$$

La prima di queste equazioni ci dice che nella rappresentazione sferica le $u_3 = \text{cost}$ sono geodetiche. Inversamente presa una superficie dell'ipersfera e soddisfatta la condizione che le $u_3 = \text{cost}$ siano geodetiche e cioè la prima equazione, si sceglierà una qualunque soluzione della seconda equazione quale ρ; si dovrà poi determinare le ξ mediante le equazioni $\sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u_2} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_3} = 0$, $\frac{\partial \xi_i}{\partial u_2} = \rho \eta_i$ e si otterrà una V_3 della proprietà voluta.

$\alpha'_1\, \alpha'_2\, \alpha'_3$ ottenendosi da $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ quasi fossero i coefficienti della equazione

$$(3) \qquad \alpha_1 \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + 2\,\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \alpha_3 \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2 = 0\,.$$

Supponiamo $\alpha_1\, \alpha_3 - \alpha_2^2 \neq 0$: allora dette $k_1\, k_2$ le radici dell'equazione $\alpha_1 + 2\,\alpha_2\, k + \alpha_3\, k^2 = 0$ questa equazione si spezza nelle due equazioni lineari

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} - k_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} = 0 \qquad \frac{df}{\partial u_1} - k_2 \frac{\partial f}{du_2} = 0\,.$$

Prese per $u'_1\, u'_2$ le soluzioni di queste due equazioni lineari, la equazione trasformata della (2) sarà $\frac{\partial f}{\partial u'_1}\frac{\partial f}{\partial u'_2} = 0$ e quindi la (1) si riduce alla forma

$$x_{i,11} = \beta_1 x_{i,10} + \beta_2 x_{i01}\,.$$

Se $\alpha_1\, \alpha_3 - \alpha_2^2 = 0$ il punto è parabolico. Infatti sostituiamo in C_2 (formula (15). n. 14 cap. II) alle x_{20} ed x_{02} successivamente i valori tratti da (2); si avrà $\alpha_1\, C_2 = -\alpha_2\, C_1$, $\alpha_3\, C_2 = -\alpha_2\, C_3$ quindi $C_2^2 = C_1\, C_3$ e per la (18) dello stesso n. 14 $\Delta_3 = 0$; quindi $N = 0$ ed il punto è parabolico, (cfr. n. 45).

Potremo quindi enunciare: *Su ogni superficie di punti planari non parabolici esistono due sistemi di linee* $u_1\, u_2$ (reali od immaginarie coniugate) *che diremo sistemi coniugati e tali che le coordinate cartesiane dei punti della superficie soddisfanno all'equazione di Laplace*

$$(4) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u_1\, \partial u_2} = a \frac{\partial}{\partial u_1} + b \frac{\partial}{\partial u_2}\,.$$

In ogni punto le tangenti a queste linee sono le direzioni coniugate del n. 39. Invero: nel sistema di coordinate usato al n. 31 si ha $x_{n10} = x_{n02} = x_{n-1\,10} = x_{n-1\,01} = 0$ e quindi per (4) $x_{n-111} = x_{n11} = 0$. Sostituendo questi valori in (14) n. 35 si vede immediatamente che le normali corrispondenti ai valori $\alpha_1 = 0$ ed $\alpha_2 = 0$ sono quelle cui corrisponde una sola tangente: poichè la normale corrispondente

ad $\alpha_1 = 0$ è data da $\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} = \frac{x_{n-102}}{x_{n02}}$, ed i valori di $\alpha_1\, \alpha_2$ corrispondenti ad essa essendo soluzioni dell'equazione $\frac{x_{n-102}}{x_{n02}} = \frac{x_{n-120}\, \alpha_1^2 + x_{n-102}\, \alpha_2^2}{x_{n20}\, \alpha_1^2 + x_{n02}\, \alpha_2^2}$, debbono entrambi coincidere con $\alpha_1 = 0$ poichè non è

$$x_{n-120} : x_{n20} = x_{n-102} : x_{n02}\,.$$

Inversamente [1] l'equazione (4) è una equazione del tipo (2) quindi *se le coordinate x di una superficie soddisfanno ad una stessa equazione di Laplace* (4) *questa superficie è di punti planari non parabolici e le linee coordinate $u_1\, u_2$ sono su di essa le linee del sistema coniugato. I coefficienti della precedente equazione* (4) *sono uguali ad* $\left\{ {12 \atop 1} \right\}$, $\left\{ {12 \atop 2} \right\}$. Infatti se ricordiamo le formule della nota al n. 10 cap. II, pag. 19 si ha, per es.

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\} = \frac{\begin{vmatrix} I_{1110} & I_{1101} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_{1010} & I_{1001} \\ I_{0110} & I_{0101} \end{vmatrix}} = \frac{\left\| \begin{matrix} x_{i11} \\ x_{i01} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_{i10} \\ x_{i01} \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} x_{i10} \\ x_{i01} \end{matrix} \right\|^2} = \frac{\left\| \begin{matrix} a\, x_{i10} + b\, x_{i01} \\ x_{i01} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_{i10} \\ x_{i01} \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} x_{i10} \\ x_{i01} \end{matrix} \right\|^2} = a\,.$$

Dalla equazione (4) si deduce, come per le ordinarie superficie: *una trasformazione projettiva conserva il sistema coniugato.*

Se projettiamo la superficie ortogonalmente su un qualunque S_3 il sistema coniugato si projetta in un sistema coniugato. Basterà dimostrarlo per gli S_3 coordinati in virtù della invariantività delle (4) per movimenti. Ora per tali spazii la cosa è ben evidente. Se ricordiamo che i piani tangenti lungo una curva di una ordinaria superficie si intersecano secondo le tangenti coniugate delle tangenti alla curva dedurremo che *anche nel caso delle superficie immerse in uno spazio ad n dimensioni di punti planari i piani tangenti*

---

[1] Risulta di qui che le superficie di punti planari non parabolici sono quelle che, coi termini del Guichard, contengono un *réseau* (sistema coniugato). Cfr. GUICHARD. *Sur les sistèmes cycliques et les sistèmes ortogonaux.* Annales de l'Ecole Normale Supérieure. 1897-1898-1903.

successivi lungo una curva di uno dei sistemi coniugati si incontrano, ed inviluppano una sviluppabile che ha per generatrici le tangenti alle curve dell'altro sistema coniugato, poichè tutte le proiezioni di questi piani su S_3 *si incontrano nelle proiezioni delle stesse rette* [1].

Una molto notevole classe di superficie di punti planari non parabolici è quella delle superficie di traslazione, generate cioè da una curva che si muove mantenendosi sempre parallela a se stessa. I due sistemi di curve che possono generare la superficie per traslazione formano il sistema coniugato.

Una tale superficie infatti è data dalle formule

$$x_i = \varphi_i(u_1) + \psi_i(u_2) \tag{5}$$

quindi le x_i soddisfanno all'equazione

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_1 \partial u_2} = 0 \, .$$

Troveremo nei numeri seguenti una classe assai importante di queste superficie: le superficie minime.

Superficie di punti planari parabolici: asintotiche. Teorema di Enneper.

49. — Se la superficie è di punti parabolici, sarà soddisfatta una equazione del tipo (2) per cui $\alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2^2$. Allora la (2) diverrà della forma $\left(\overline{\alpha}_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + \overline{\alpha}_2 \frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2 = 0$. Presa una soluzione di quest' ultima equazione quale u'_2, qualunque sia la variabile u'_1 dovrà la precedente equazione divenire della forma $\frac{\partial f}{\partial u'_1} = 0$ e quindi contemporaneamente la (2) si ridurrà a $x_{i,20} = a\, x_{i10} + b x_{i01}$: quindi: *se una superficie è di punti planari parabolici può sempre prendersi*

[1] KOMMERELL, l. c § 8.

il sistema di linee $u_2 =$ cost *per modo che le coordinate* x *della superficie soddisfacciano ad una stessa equazione*

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} = a \frac{\partial}{\partial u_1} + b \frac{\partial}{\partial u_2} \, . \tag{6}$$

La direzione della linea $u_2 =$ cost *è la direzione asintotica; chiameremo quindi le* $u_2 =$ cost *asintotiche della superficie.* Infatti nel sistema di coordinate per cui sono scritte le (14) del cap. IV (n. 34) sarà $x_{n-110} = x_{n10} = x_{n-101} = x_{n01} = 0$ e per (6) quindi $x_{n-120} = x_{n20} = 0$. Sostituendo nelle citate (14) questi valori si deduce che la direzione di curvatura nulla è la $\alpha_1 = 0$.

Inversamente l'equazione (6) è una equazione (2) con $\alpha_1 \alpha_3 = \alpha_2^2$, quindi *se le coordinate di una superficie soddisfanno ad una equazione di Laplace (6) la superficie è di punti planari parabolici e le* $u_2 =$ cost *sono le sue asintotiche. I coefficienti dell'equazione* (6) *sono uguali ad* $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}$.

Dalla (6) si deduce ancora: *le trasformazioni projettive conservano le asintotiche. Se si projetta una superficie di punti planari parabolici su un qualunque* S_m *si ha ancora una superficie di punti planari parabolici, oppure si ha una superficie di punti assiali (per es. ciò accadrà certamente se* $m = 3$); *in entrambi i casi le* $u_1 =$ cost *sono asintotiche anche per la projezione.*

Ricordando che in un S_3 il piano osculatore all'asintotica è tangente la superficie concludiamo che quindi *anche per una superficie di punti planari parabolici il piano osculatore all'asintotica è tangente alla superficie* od, in altri termini, *i piani tangenti ad una superficie lungo un'asintotica si incontrano ed inviluppano una sviluppabile di cui l'asintotica è spigolo di regresso.* Il che del resto è immediata conseguenza dell' ultimo teorema del num. 32 (Cap. III) poichè, o l'asintotica è una retta e quindi il suo piano osculatore è indeterminato, oppure non è una retta e quindi non ha curvatura nulla ed allora la sua normale principale deve essere irregolare e cioè trovarsi nel piano tangente. *Una notevole classe di superficie di punti planari parabolici è quella delle* *rigate non sviluppabili.* Poichè tali superficie hanno in ogni punto una direzione di curvatura nulla e non sono di punti assiali (cfr. n. 36 e 47). Del resto, assunte come linee $u_2 = \text{cost}$ le linee rette e come u_1 la lunghezza su di esse sarà $x_i = l_i(u_2) + m_i(u_2)\, u_1$ e quindi $\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u_1^2} = 0$ che è equazione della forma (6).

50. — Per le asintotiche di una superficie di punti planari parabolici si può generalizzare il teorema di Enneper. *Il quadrato della torsione di un' asintotica di una superficie di punti planari parabolici uguaglia in ogni punto la curvatura della superficie.* Stabiliremo brevemente questo risultato nel modo seguente: siano $u_2 = \text{cost}$ le asintotiche, $u_1 = \text{cost}$ le loro trajettorie ortogonali, di più supponiamo che u_1 rappresenti l'arco t di un'asintotica fissa di cui si vuol studiare la torsione per es.: la $u_2 = 0$. Su $u_2 = 0$ si ha allora $\mathrm{I}_{1001} = 0 \quad \mathrm{I}_{1010} = 1 \quad \mathrm{I}_{1020} = 0$, $\left\{ {11 \atop 1} \right\} = 0$ quindi $\dfrac{dx}{dt} = x_{10}$, e per (6) $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_{01}$, $\dfrac{d^3 x}{dt^3} = \dfrac{\partial}{\partial u_1} \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_{01} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_{11}$. Quindi, se ricordiamo le formule (1) e (2) del cap. III fattovi $\nu = 2$ si avrà per la torsione

$$\frac{1}{\rho_2^2} = \frac{\mathrm{M}_3}{\mathrm{M}_2^2} = \frac{\left\| \begin{matrix} x_{10} \\ \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_{01} \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_{01} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_{11} \end{matrix} \right\|^2}{\left\| \begin{matrix} x_{10} \\ \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_{01} \end{matrix} \right\|^4} = \frac{\left\{ {11 \atop 2} \right\}^4 \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{11} \end{matrix} \right\|^2}{\left\{ {11 \atop 2} \right\}^4 \left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \end{matrix} \right\|^4}$$

Donde per la (15) del n. 8 (cap. I), ricordando che per (6) $\mathrm{D} = 0$ si deduce

$$\frac{1}{\rho_2^2} = \frac{\mathrm{D}'^2}{\mathrm{I}_{1010}\,\mathrm{I}_{0101} - \mathrm{I}_{1001}^2} = -\mathrm{K}, \tag{7}$$

che dimostra il teorema enunciato.

Inversione di alcuni risultati precedenti.

51. — In generale in uno spazio ad n dimensioni una semplice infinità di piani non inviluppano una sviluppabile perchè due piani consecutivi o non si incontrano o si incontrano in un solo punto. Presi i piani tangenti una superficie lungo una sua linea quando avverrà che questi piani inviluppino una sviluppabile? Si è visto nei numeri precedenti due casi in cui ciò avviene; quando la linea sia una linea di uno dei sistemi coniugati di una superficie di punti planari od una asintotica di una superficie di punti planari parabolici. Vogliamo dimostrare che *eccetto che in questi casi e nel caso ovvio di una linea qualunque di una superficie di punti assiali non mai i piani tangenti ad una superficie lungo una linea inviluppano una sviluppabile.*

Ricordiamo la definizione di angolo di due piani data dal Jordan. Considerati due piani di S_n conduciamo per un punto A dello spazio i piani $\alpha\,\beta$ paralleli a questi: si assumono come seni degli angoli dei due piani i massimi ed i minimi del rapporto delle distanze di un punto di α da β e dal punto A. Se restiamo nel campo reale i due piani si incontreranno in una retta allorquando uno di questi angoli è nullo.

Sia il piano tangente nell'origine il piano $x_1\, x_2$: supponiamo che l'elemento lineare nel punto sia ridotto alla forma $du_1^2 + du_2^2$ anzi più particolarmente che le u_1 ed u_2 pel punto siano tangenti alle direzioni $x_1\, x_2$; sarà $x_{1,10} = x_{2,01} = 1, x_{101} = x_{210} = 0, x_{i\,10} = x_{i\,01} = 0, i \geq 3$. Le equazioni del piano tangente nell'origine sono

$$x_i = 0 \qquad (i \geq 3) \tag{8}$$

le equazioni del piano parallelo per l'origine al piano tangente nel punto che sulla superficie ha le coordinate du_1, du_2 sono date da

$$\left| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_i \\ x_{1,10} + (x_{1,20}\, du_1 + x_{1,11}\, du_2) + \ldots & x_{210} + (x_{2,20}\, du_1 + x_{2,11}\, du_2) + \ldots & x_{i\,10} + (x_{i\,20}\, du_1 + x_{i\,11}\, du_2) + \ldots \\ x_{1,01} + (x_{1,11}\, du_1 + x_{1,02}\, du_2) + \ldots & x_{2,01} + (x_{211}\, du_1 + x_{202}\, du_2) + \ldots & x_{i\,01} + (x_{i\,11}\, du_1 + x_{i\,02}\, du_2) + \ldots \end{matrix} \right| = 0$$

o, trascurando i termini di ordine superiore al primo in du_1, du_2 e ricordando i precedenti valori per le derivate prime, le equazioni di tale piano sono

$$x_i = (x_{i20}\, du_1 + x_{i,11}\, du_1)\, x_1 + (x_{i11}\, du_1 + x_{i02}\, du_2)\, x_2 . \tag{10}$$

Sia $x_1 x_2, \ldots x_n$ un punto di questo ultimo piano; la distanza Δ dall'origine sarà, a meno di infinitesimi data da $\Delta^2 = x_1^2 + x_2^2$; la distanza dal piano tangente nell'origine è data, (per (10)) a meno di infinitesimi di ordine superiore, da $\delta^2 = \sum_3^n{}_i\, x_i^2 = \sum (x_{i20}\, du_1 + x_{i11}\, du_2)^2 x_1^2 + \sum (x_{i11} du_1 + x_{i02} du_2)^2 x_2^2 + 2 \sum (x_{i20} du_1 + x_{i11} du_1)(x_{i11} du_1 + x_{i02} du_2)\, x_1 x_2$.

I massimi ed i minimi di $\frac{\delta^2}{\Delta_2}$, e cioè i quadrati dei seni degli angoli di due piani tangenti consecutivi, sono le radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} \sum_3^n (x_{i20} du_1 + x_{i11} du_2)^2 - \lambda & \sum_3^n (x_{i20} du_1 + x_{i11} du_2)(x_{i11} du_1 + x_{i02} du_2) \\ \sum_3^n (x_{i11} du_1 + x_{i02} du_2)(x_{i20} du_1 + x_{i11} du_2) & \sum_3^n (x_{i11} du_1 + x_{i02} du_2)^2 - \lambda \end{vmatrix} = \tag{11}$$

Quando i due piani si incontrino in una retta, dovrà questa equazione essere soddisfatta da $\lambda = 0$: ma postovi $\lambda = 0$ il suo primo membro diventa il quadrato della matrice

$$\left\| \begin{matrix} x_{i20}\, du_1 + x_{i11}\, du_2 \\ x_{i11}\, du_1 + x_{i02}\, du_2 \end{matrix} \right\| \quad (i \geq 3) . \tag{12}$$

Quindi tale matrice dovrà essere nulla: cioè in coordinate generali, come immediatamente si vede, dovrà essere

$$\left\| \begin{matrix} x_{10} \\ x_{01} \\ x_{20}\, du_1 + x_{11}\, du_2 \\ x_{11}\, du_1 + x_{02}\, du_2 \end{matrix} \right\|^2 = 0 \tag{13}$$

o simbolicamente (cfr. cap. I n. 14, formule (15))

$$(C_1\, du_1^2 + 2\, C_2\, du_2\, du_1 + C_3\, du_2^2)^2 = 0 . \tag{14}$$

Detti cioè $\gamma_{1j}\, \gamma_{2j}\, \gamma_{3j}$ i minori corrispondenti di $C_1 C_2 C_3$ deve essere

$$\Sigma (\gamma_{j1}\, du_1^2 + 2\, \gamma_{2j}\, du_1\, du_2 + \gamma_{3j}\, du_2^2)^2 = 0 . \tag{15}$$

La condizione di realità richiede che i singoli trinomii siano nulli. Consideriamo tre qualunque di queste equazioni: il determinante dei loro coefficienti sarà nullo. Consideriamo in particolare le tre equazioni in cui i determinanti γ hanno quali prime due colonne due colonne fisse, per es. la prima e la seconda colonna della matrice, e la terza e quarta colonna scelte fra tre qualunque colonne residue; per esempio la 3ª, la 4ª, la 5ª colonna della matrice, il determinante dei γ di queste equazioni è il determinante formato cogli aggiunti del determinante

$$\begin{vmatrix} x_{110} & x_{210} & x_{310} & x_{410} & x_{510} \\ x_{101} & x_{201} & x_{301} & x_{401} & x_{501} \\ x_{120} & x_{220} & x_{320} & x_{420} & x_{520} \\ x_{111} & x_{211} & x_{311} & x_{411} & x_{511} \\ x_{102} & x_{202} & r_{302} & x_{402} & x_{502} \end{vmatrix} \tag{16}$$

che contengono il primo minore principale di 2° ordine. Affinchè questo sia nullo, supposto come sempre $\begin{vmatrix} x_{110} & x_{210} \\ x_{101} & x_{201} \end{vmatrix} \neq 0$, deve essere nullo il determinante (16) stesso: mutando gli indici 3, 4, 5 in indici qualunque, si dedurrà anzitutto che la matrice delle derivate prime e seconde è nulla: il punto è planare. Se poi il punto è planare sarà per (3) $\alpha_1 C_2 = - \alpha_2 C_1$, $\alpha_3 C_3 = - \alpha_2 C_3$ e quindi la (14) si riduce all'unica equazione $\alpha_1\, du_1^2 - 2\, \alpha_2\, du_1\, du_2 + \alpha_3\, du_2^2 = 0$: che, se teniamo conto della relazione $\frac{du_1}{du_2} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_2}}{\frac{\partial f}{\partial u_1}}$, si riduce all'equazione (3) che individua le direzioni coniugate o l'asintotica. Se in tutte le direzioni i piani tangenti consecutivi si incontrano, l'equazione (14) deve essere una identità quindi $C_1 = C_2 = C_3 = 0$: il punto è assiale.

Le superficie di area minima sono superficie di punti planari.

52. — Sia una superficie σ riferita alle coordinate $u_1\, u_2$. Per esprimere che la superficie è minima, dobbiamo uguagliare a 0 la variazione prima dell'area $\sigma = \int\int \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}\, du_1\, du_2$.

Si ha

$$\delta \int\int \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}\, du_1\, du_2 = \int\int \sum \left(\frac{\partial \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}}{\partial x_{i10}}\, \delta x_{i10} + \frac{\partial \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}}{\partial x_{i01}}\, \delta x_{i01} \right) du_1\, du_2 =$$

$$= - \int\int \sum \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}}{\partial x_{i10}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}}{\partial x_{i01}} \right] \delta x_i\, du\, dv.$$

Quindi, affinchè la superficie sia minima, dovranno essere soddisfatte le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}}{\partial x_{i10}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}}{\partial x_{i01}} = 0 \quad (i = 1 \ldots n). \tag{18}$$

Ma si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}}{\partial x_{i10}} &= \frac{1}{\sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}} [I_{0101}\, x_{i10} - I_{0110}\, x_{i01}] \\ \frac{\partial \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}}{\partial x_{i01}} &= \frac{1}{\sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}} [I_{1010}\, x_{i01} - I_{0110}\, x_{i10}] \end{aligned} \tag{19}$$

Quindi derivando rapporto ad u e v rispettivamente la prima e la seconda delle (19) e sommando si ottiene che le equazioni (18) si possono scrivere

$$I_{0101}\, x_{i20} - 2\, I_{1001}\, x_{i11} + I_{1010}\, x_{i02} = A\, x_{i10} + B\, x_{i01} \tag{20}$$

dove le A e B sono certe funzioni delle I di primo e secondo ordine e precisamente

$$\begin{aligned} A &= - \frac{1}{\sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2}} \left[I_{1101} - I_{0210} - \frac{1}{2\,(I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2)} \times \right. \\ &\qquad \left. \left(I_{0101} \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2} - I_{0110} \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2} \right) \right] \\ B &= - \frac{1}{\sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}}} \left[I_{1110} - I_{2001} - \frac{1}{2\,(I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2)} \times \right. \\ &\qquad \left. \times \left(I_{1010} \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2} - I_{0110} \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{I_{1010}\, I_{0101} - I_{1001}^2} \right) \right]. \end{aligned} \tag{21}$$

Le equazioni (21) si possono anche riassumere dicendo che deve essere

$$\left\| \begin{matrix} x_{i10} \\ x_{i01} \\ I_{1010}\, x_{i02} + I_{0101}\, x_{i20} - 2\, I_{1001}\, x_{i11} \end{matrix} \right\| = 0 \tag{22}$$

e cioè $I_{1010}\, D'' + I_{0101}\, D - 2\, I_{1001}\, D' = 0$. Per la (12) del cap. II (n. 14) quindi si ha $\Delta_1 = 0$ ossia (cap. IV, n. 41) $H = 0$. Quindi *affinchè una superficie sia superficie minima è necessario e sufficiente che la curvatura media sia nulla.* Ne segue *una superficie minima che non sia di S_3 è una superficie di punti planari non parabolici* [1]. Infatti la curvatura media rappresenta la distanza del punto dal centro della conica delle curvature, essa non può quindi essere nulla che quando

[1] Il Kommerell in una memoria recente *Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen,* pubblicata nei *Math. Ann.* Bd. 60 quando questo lavoro era già in corso di stampa, dopo aver riprodotto parte dei risultati della sua tesi già citata, studia le superficie dello spazio a 4 dimensioni le cui coordinate x_1, x_2, x_3 x_4 sono legate dall' equazione $x_1 + i x_2 = F(x_3 + i x_4)$ e che egli dice Riemanniane. Egli dimostra tra l'altro (pag. 586) che queste superficie sono minime. La proposizione del testo mostra come questo teorema sia immediata conseguenza del teorema del K. (pag. 580) per cui le sezioni normali in un punto di una tale superficie hanno tutte ugual curvatura.

il piano della conica delle curvature passa per il punto, quando cioè il punto è planare od assiale. È ben chiaro che, se il punto è planare, non è parabolico poichè esso deve coincidere col centro della conica delle curvature e non può stare quindi sulla conica. Se i punti della superficie minima sono assiali essa è una superficie di S_3 od una sviluppabile rigata: ma questo ultimo caso non può avvenire poichè, avendosi allora una superficie di curvatura media ed assoluta nulla, la curvatura di una qualunque sezione normale sarebbe nulla, e quindi la superficie sarebbe un piano.

Risulta di qui in particolare che *l'unica superficie minima rigata è l'elicoide dello spazio ordinario* poichè una superficie rigata è di punti assiali o di punti parabolici; non potendo perchè minima, essere di punti parabolici, essa sarà di punti assiali e quindi immersa in un S_3: essa è quindi un elicoide [1].

Le superficie minime come superficie di traslazione.

53. — L'equazione differenziale cui devono soddisfare le coordinate di una superficie minima è per (22)

$$\mathrm{I}_{1010}\, x_{i03} + \mathrm{I}_{0101}\, x_{i20} - 2\,\mathrm{I}_{1001}\, x_{i11} + \mathrm{A}\, x_{i10} + \mathrm{B} x_{i01} = 0 \tag{23}$$

Riferiamoci alle linee di lunghezza nulla; sarà $\mathrm{I}_{1010} = \mathrm{I}_{0101} = 0$: quindi la (23) diverrà della forma

$$x_{i11} = \mathrm{A}\, x_{i10} + \mathrm{B}\, x_{i01}\,. \tag{24}$$

Ma dalle $\mathrm{I}_{1010} = \mathrm{I}_{0101} = 0$ si deduce $\mathrm{I}_{1011} = \mathrm{I}_{0111} = 0$. Moltiplicando (24) successivamente per $x_{i10}\, x_{i01}$ e sommando, si dedurrà $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$ [2]. Quindi *le superficie minime, riferite alle linee di lunghezza nulla, soddisfanno all'equazione*

$$x_{i11} = 0 \tag{25}$$

Esse quindi sono superficie di traslazione lungo le curve di lunghezza nulla; la più generale superficie minima è data dalle equazioni

$$x_i = f_i\,(u_1) + \varphi_i\,(u_2) \tag{26}$$

dove $f_i\ \varphi_i$ soddisfanno le equazioni

$$\Sigma\, f'^2_i\,(u_1) = 0 \qquad \Sigma\, \varphi'^2_i\,(u_2) = 0 \tag{27}$$

[1] Cfr. Bianchi, *Lezioni,* II cap. XXII, § 345.

[2] Cfr. anche le equazioni (21).

Lo stesso ragionamento mostra che, *se sopra una superficie di punti planari le linee coniugate sono linee di lunghezza nulla la superficie è minima.*

Affinchè una superficie minima sia reale è necessario che le $u_1\ u_2$ siano immaginarie coniugate e f_i e φ_i funzioni coniugate. Le formule (26) estendono anche la generazione del Lie delle superficie minime.

54. — Segue dalle (25) che *una superficie minima è individuata da una sua striscia analitica.* Essendo le (25) invariantive per movimenti, seguono i teoremi di Schwarz: [1]

Se una retta appartiene ad una superficie minima questa è simmetrica rispetto alla retta.

Se una superficie minima sega normalmente un iperpiano è simmetrica rispetto all'iperpiano.

Superficie minime associate.

55. — Molte delle proprietà delle superficie minime dello spazio ordinario si generalizzano in virtù dell'integrale (26) dell'equazione delle superficie minime agli spazi a più dimensioni: però noi non seguiteremo in questa generalizzazione: ci limiteremo ad estendere il concetto di superficie associate a una superficie minima. Se nelle formule (26) sostituiamo ad $f_i\,(u_1)$, $e^{-i\alpha} f_i\,(u_1)$ dove α è una costante ed a $\varphi_i\,(u_2)$, $e^{-i\sigma}\varphi_i\,(u_2)$ la nuova superficie

$$x'_i = e^{-i\alpha}\, f_i\,(u_1) + e^{-i\sigma}\, \varphi_i\,(u_2) \tag{28}$$

[1] Cfr. Bianchi, *Lezioni*. II. cap. XXII, §347.

è ancora minima, poichè sono per essa soddisfatte le equazioni analoghe a (27) e (25), ed è applicabile sulla superficie (26). Queste ∞^1 superficie (28) diremo *associate in applicabilità* alla (26); esse sono tutte reali se è reale la $x'_i = f_i(u_1) + \varphi_i(u_2)$. È ben evidente che: 1° *esse si corrispondono per parallelismo* in quanto che in punti corrispondenti i piani tangenti sono paralleli; 2° *le linee omologhe su* (28) *e* (26) *formano un angolo uguale ad* σ.

Superficie parallele.

56. — Ritorniamo ora alla teoria generale delle superficie di punti planari per riconoscerne un'altra notevole proprietà caratteristica. Supponiamo di considerare una superficie qualunque $x'_i(u_1 u_2)$, quando avverrà che esista una superficie che le corrisponda per parallelismo? Sia $x'_i(u_1 u_2)$ la nuova superficie riferita alle linee corrispondenti alle linee $u_1 u_2$, dovrà aversi:

$$(29)\qquad \begin{aligned} x'_{i10} &= \lambda\, x_{i10} + \mu\, x_{i01} \\ x'_{i01} &= \nu\, x_{i10} + \rho\, x_{i01} \end{aligned}$$

Deriviamo la prima di queste equazioni rapporto ad u_2, la seconda rapporto ad u_1 si avrà ambedue le volte x'_{i11}; uguagliando i due valori ottenuti si deduce l'equazione

$$(30)\qquad -\nu x_{i20} + (\lambda - \rho) x_{i11} + \mu x_{i02} + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} - \frac{\partial\nu}{\partial u_1}\right) x_{i10} + \left(\frac{\partial\mu}{\partial u_2} - \frac{\partial\rho}{\partial u_1}\right) x_{i01} = 0 .$$

Questa equazione è della forma (2), a meno che tutti i suoi coefficienti siano nulli. Perchè questo si verifichi è necessario che si abbia $\nu = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = \rho =$ cost., allora le (29) divengono $x'_{i10} = \lambda x_{i10}$ $x'_{i01} = \lambda x_{i01}$ dove λ è una costante e quindi le due superficie saranno omotetiche. Escluso quindi questo caso ovvio, la (30) è una effettiva equazione del tipo (2), quindi la superficie è di punti planari o assiali. Supponiamo che essa sia di punti planari non parabolici; riferiamola al sistema coniugato, la (30) dovrà divenire del tipo (4), quindi si avrà $\nu = 0$ $\mu = 0$ e le (29) diverranno $x'_{i10} = \lambda x_{i10}$ $x'_{i01} = \rho\, x_{i01}$. Quindi sulla superficie parallela le linee corrispondenti alle linee dei sistemi coniugati saranno parallele a queste. Se la superficie è di punti planari parabolici, supposto che le u_2 siano le asintotiche, la (30) deve avere la forma (6); e perciò dovrà essere $\mu = 0$, $\lambda = \rho$ e le (29) diverranno $x'_{i10} = \lambda\, x_{i10}$, $x'_{i01} = \nu\, x_{i10} + \lambda\, x_{i01}$ quindi le linee corrispondenti alle asintotiche della superficie sono parallele all'asintotiche stesse. Essendo poi la relazione di parallelismo involutoria le linee parallele alle linee dei sistemi coniugati od alle asintotiche di una superficie sono le linee dei sistemi coniugati o le asintotiche della superficie parallela.

Inversamente ad una superficie di punti planari sono corrispondenti per parallelismo infinite altre superficie pure di punti planari: presa ad esempio una superficie di punti planari parabolici le cui linee u_2 siano asintotiche e per cui valgono le (6), per ottenere delle superficie parallele basterà determinare ν e λ in modo che rendano integrabile il sistema $x'_{i10} = \lambda\, x_{i10}$, $x'_{i01} = \nu\, x_{i10} + \lambda\, x_{i01}$ e cioè, tali che

$$\frac{\partial^2\nu}{\partial u_1^2} + \frac{\partial\nu}{\partial u_1}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \frac{\partial\nu}{\partial u_2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} + \nu\left(\frac{\partial\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}}{\partial u_1} + \frac{\partial\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{\partial u_2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} = -\nu\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial\lambda}{\partial u_2} = \frac{\partial\nu}{\partial u_1} + \nu\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}$$

E, se su due superficie parallele esistono due sistemi di linee corrispondenti e parallele, questi sono i sistemi coniugati sulle due superficie; e se esiste un solo sistema di linee corrispondenti parallele, questo sistema è il sistema delle asintotiche della superficie che è allora di punti parabolici. Concludendo: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie ammetta superficie parallele non omotetiche è che sia di punti planari od assiali. Se è di punti assiali esistono due sistemi coniugati cui corrispondono due sistemi coniugati paralleli sulla superficie parallela oppure ad un sistema di asintotiche corrisponde un sistema di asintotiche parallele. Se di punti planari, sulle superficie parallele le linee corrispondenti* *ai sistemi coniugati od alle asintotiche sono parallele ad esse e sono i sistemi coniugati o le asintotiche delle superficie stesse* [1].

Superficie parallele applicabili.

57. — Esistono coppie di superficie parallele in cui la corrispondenza per parallelismo sia una applicabilità? Supposto che tali superficie siano di punti planari non parabolici (o di punti assiali), riferite al sistema coniugato (permanente per parallelismo), la corrispondenza per parallelismo è data dalle formule $x'_{i10} = \lambda x_{i10}$, $x'_{i01} = \rho x_{i01}$ (λ e $\rho \neq 0$). Affinchè le due superficie siano applicabili per mezzo della corrispondenza di parallelismo è necessario e sufficiente che sia $I'_{1010} = I_{1010}$ $I'_{1001} = I_{1001}$ $I'_{0101} = I_{0101}$. Supponiamo anzitutto che non siano nulli due dei coefficienti I_{1010} I_{1001} I_{0101}: si dedurrà dalle uguaglianze precedenti $\lambda = \rho = \pm 1$. Le due superficie saranno quindi differenti per una traslazione o per una traslazione ed una simmetria. Siano nulli due dei coefficienti dell'elemento lineare: e quindi necessariamente I_{1010} ed I_{0101}. Allora si avrà l'unica equazione $\lambda\rho = 1$. Ma in tal caso sulla superficie il sistema coniugato è di linee di lunghezza nulla, quindi (n. 53) la superficie è di area minima: sarà $x_{i10} = f'_i(u_1)$ $x_{i01} = \varphi'_i(u_2)$ $f'_i(u_1)$ e $\varphi'_i(u_2)$ essendo immaginarii coniugati. Confrontando (25) e (30), risulta $\dfrac{\partial\lambda}{\partial u_2} = \dfrac{\partial\rho}{\partial u_1} = 0$, quindi λ è funzione della sola u_1 e ρ della sola u_2: ma deve essere $\lambda\rho = 1$, quindi λ e ρ saranno costanti. Di più affinchè la nuova superficie sia reale λ e ρ debbono essere immaginarii coniugati, quindi dovrà essere $|\lambda| = |\rho| = 1$ e cioè $\lambda = e^{i\alpha}$, $\rho = e^{-i\alpha}$ dove α è una costante. Le due superficie saranno quindi superficie minime associate. Quindi (n. 55): *se fra due superficie parallele la corrispondenza per parallelismo è un'applicabilità, le due superficie sono superficie minime associate* [2].

[1] Questo teorema era già stato incompletamente enunciato dal Guichard l. c.

[2] Bianchi, *Lezioni* II, cap. XXII § 344.

Osserviamo però che bisogna ancora studiare il caso delle superficie di punti parabolici o di punti assiali in cui si corrispondono per parallelismo un sistema di linee asintotiche. Questo caso non può mai dare una soluzione del problema. Le formule della corrispondenza sono allora $x'_{i10} = \lambda x_{i10}$, $x'_{i01} = \nu x_{i10} + \lambda x_{i01}$; si avranno le equazioni

$$\lambda^2 I_{1010} = I_{1010} \quad \lambda\nu I_{1010} + \lambda^2 I_{1001} = I_{1001} \quad \nu^2 I_{1010} + 2\nu\lambda I_{1001} + \lambda^2 I_{0101} = I_{0101}.$$

Queste equazioni ammettono la sola soluzione $\lambda = 1$, $\nu = 0$; quindi sempre la nuova superficie coincide colla primitiva a meno di una traslazione.

Superficie parallele in rappresentazione conforme.

58. — Analogamente: esistono coppie di superficie parallele per cui la rappresentazione determinata dal parallelismo sia conforme? Sia una di queste superficie di punti planari non parabolici (o di punti assiali) riferita al sistema coniugato (che si mantiene per parallelismo). Siano ancora $x'_{i10} = \lambda x_{i10}$, $x'_{i01} = \rho x_{i01}$ le formule di corrispondenza: sia U il modulo della rappresentazione. Si hanno le equazioni

$$\lambda^2 I_{1010} = U I_{1010}, \quad \lambda\rho I_{1001} = U I_{1001}, \quad \rho^2 I_{0101} = U I_{0101}.$$

Se $I_{1010} = I_{0101} = 0$ sarà $\lambda\rho = U$: la superficie sarà ancora una superficie minima come al n. precedente, e sarà una superficie minima anche la superficie parallela. Inversamente è chiaro che due superficie minime parallele sono sempre in rappresentazione conforme. Supponiamo ora I_{1010} ed I_{0101} diversi da 0. Sarà $\lambda^2 = \rho^2 = U$ e quindi $\lambda = \pm\rho$. Se $\lambda = \rho$ è facile vedere che necessariamente λ e ρ sono costanti: le superficie sono omotetiche. Se $\lambda = -\rho$ non potrà essere $I_{1001} \neq 0$ poichè se così fosse $\lambda\rho = \lambda^2$ e quindi $\lambda = \rho = 0$. Quindi il sistema coniugato è ortogonale. Ma si ha di più: la (30) diviene

$$x_{i11} + \frac{\partial \log \sqrt{\lambda}}{\partial u_2} x_{i10} + \frac{\partial \log \sqrt{\lambda}}{\partial u_1} x_{i01} = 0.$$

Ma confrontando con (4) si ha $-\frac{\partial \log \sqrt{\lambda}}{\partial u_2} = a = \left\{ {12 \atop 1} \right\} = \frac{I_{1110}}{I_{1010}} = \frac{\partial \log \sqrt{I_{1010}}}{\partial u_2}$, $-\frac{\partial \log \sqrt{\lambda}}{\partial u_1} = b = \left\{ {12 \atop 2} \right\} = \frac{I_{1101}}{I_{0101}} = \frac{\partial \log \sqrt{I_{0101}}}{\partial u_1}$. Quindi $I_{1010} = \frac{1}{\lambda} U_1^2$, $I_{0101} = \frac{1}{\lambda} U_2^2$ dove U_1 U_2 sono funzioni rispettivamente di u_1 u_2 soltanto. L'elemento lineare della superficie è quindi della forma $ds^2 = \frac{1}{\lambda}(U_1^2 du_1^2 + U_2^2 du_2^2)$: posto $du'_1 = U_1\, du_1$, $du'_2 = U_2\, du_2$ esso si ridurrà alla forma isoterma $ds^2 = \frac{1}{\lambda}(du'^2_1 + du'^2_2)$. Quindi noi concludiamo che su questa superficie il sistema coniugato traccia un sistema isotermo. Inversamente se su una superficie di punti planari non parabolici o di punti assiali il sistema coniugato è isotermo per modo che il ds^2 della superficie sia $\Lambda(du_1^2 + du_2^2)$, posto nelle formule $x'_{i10} = \lambda x_{i10}$, $x'_{i01} = \rho x_{i01}$, $\lambda = -\rho = \frac{1}{\Lambda} + c$, si avranno delle superficie parallele in rappresentazione conforme.

Resta a studiare il caso in cui le due superficie siano di punti planari parabolici o di punti assiali e che su esse si corrispondano le asintotiche. Essendo le formule della corrispondenza $x'_{i10} = \lambda x_{i10}$, $x'_{i01} = \nu x_{i10} + \lambda x_{i01}$ si avranno le equazioni:

$$\lambda^2 I_{1010} = U I_{1010}, \quad \lambda\nu I_{1010} + \lambda^2 I_{1001} = U I_{1001}, \quad \nu^2 I_{1010} + 2\lambda\nu I_{1001} + \lambda^2 I_{0101} = U I_{0101}.$$

Questo sistema di equazioni non ha mai altra soluzione che $\lambda^2 = U$, $\nu = 0$; abbiamo dunque una corrispondenza per parallelismo in cui $\lambda = \rho$, $\mu = \nu = 0$; quindi come nella pagina precedente si conchiude che λ e ρ sono costanti e che quindi le due superficie sono omotetiche. Raccogliamo: *Se su due superficie parallele la corrispondenza per parallelismo dà una rappresentazione conforme, le due superficie sono omotetiche, o sono superficie minime, od infine su di esse il sistema coniugato è isotermo* [1].

[1] Cfr. Bianchi, *Lezioni* II, cap. XV, § 234.

INDICE