SUL MOTO

DI UN

ELLISSOIDE FLUIDO ED OMOGENEO

La determinazione della forma che prende una massa fluida, omogenea, ellissoidica di cui le particelle si attraggono secondo la legge di NEWTON quando è abbandonata a se stessa dopo che forze esterne hanno agito sovra di essa, costituisce una interessante questione di idrodinamica, la cui importanza, si fa maggiormente sentire quando si pensa che da questa determinazione dipende la risoluzione del problema, importantissimo per gli astronomi, della determinazione della forma attuale degli astri, supposto che questi originariamente fossero allo stato fluido e poscia abbiano conservato la forma che in quello stato possedevano.

La dipendenza che esiste tra questi due problemi di idrodinamica e di astronomia non sfuggì a NEWTON e a MACLAURIN, e quest' ultimo, supponendo che l' ellissoide di rivoluzione fosse l' unica figura di equilibrio che potesse assumere un ellissoide, che ruota attorno ad uno dei suoi assi, determinò il rapporto nel quale deve stare l'asse di simmetria al raggio dell' equatore, affinchè l'equilibrio sia stabile. Dopo di esso molti illustri geometri tra i quali basti citare: JACOBI, IVORY, PLANA, LIOUVILLE e MEYER ripresero la ricerca delle condizioni necessarie per l'equilibrio d'una massa fluida ellissoidica ed il primo dimostrò che anche l'ellissoide a tre assi può essere figura d'equilibrio qualora fra gli assi stessi esista una certa relazione.

DIRICHLET poi in una memoria pubblicata dal sig. DEDEKIND nel giornale di Crelle, ha ripreso a trattare la questione e non si è limitato a considerarla come una semplice questione di equilibrio, ma l'ha considerata invece come un problema di dinamica e determinando allora le equazioni generali del moto delle particelle fluide, ha svolto con somma chiarezza e semplicità il caso in cui l'ellissoide sia di rivoluzione, e finalmente a questa memoria tennero dietro altre dovute ai Signori DEDEKIND, BRIOSCHI e RIEMANN nelle quali la questione considerata sotto il medesimo punto di vista acquista un nuovo ed interessante sviluppo.

Scopo della presente memoria si è di coordinare in un sol corpo i risultati ottenuti dagli insigni geometri che hanno studiato la questione sotto il punto di vista più generale, e di svolgere il caso in cui periodicamente l'ellissoide riprende la stessa forma. Perciò partendo dal principio di *Hamilton* (1) ho determinato con un nuovo metodo le equazioni differenziali che han luogo fra le funzioni incognite del problema. Poscia considerando quei moti in cui non vi è rotazione che attorno agli assi principali, oppure solamente attorno ad un sistema di assi che si presenta nello studio della questione per la continuità del liquido ne determino alcune proprietà notevoli e passo a studiare quei moti dell'ellissoide di rivoluzione nei quali esso conserva la sua forma

(1) IACOBI. *Vorlesungen über Dynamik.* pag. 58.

simmetrica. Per quanto fosse semplice e chiara la discussione di questo caso, che nella memoria di DIRICHLET si trovava, ho creduto di doverla rendere anche più semplice sopprimendo la introduzione di due funzioni ausiliarie di cui DIRICHLET ha fatto uso; e il principale vantaggio che ottengo da questa semplificazione si è che questo metodo di discussione semplificato può poi applicarsi senza veruna modificazione a tutti quei casi nei quali l'ellissoide ruota attorno ad un solo asse.

Una nuova dimostrazione di un teorema di RIEMANN sulla necessità che si annullino almeno due componenti delle rotazioni quando gli assi dell' ellissoide sono costanti, serve di introduzione allo studio di quei moti nei quali l'ellissoide non muta forma, e per esclusione determino, con un processo indicato da RIEMANN, in quali casi la forma dell'ellissoide potrebbe essere stabile.

Continuando queste ricerche dimostro che mentre nelle vibrazioni piccolissime che han luogo attorno alla posizione di equilibrio stabile, per l' aggiunta di una piccola forza si può ammettere che gli assi compiono delle piccolissime oscillazioni pendolari, non possono però gli assi subire una serie di oscillazioni finite che siano sottoposte alla stessa legge di variabilità. Trovato quindi in generale il modo col quale la periodicità degli assi si collega colla periodicità del moto, passo a considerare il caso particolare in cui due sole rotazioni componenti attorno a due assi dello stesso nome in due sistemi siano diveres da zero, e quel caso ampiamente svolgo, dimostrando anche un teorema di cui uno di RIEMANN è caso particolare.

Ho creduto dover dare così ampio svolgimento allo studio di questo genere di moti perchè ritengo che, oltre all' interesse ch' esso di per se presenta perchè contiene come caso speciale quello in cui gli assi sono di lunghezza costante, se ne potrebbe fare una elegante applicazione nella Fisica Matematica, quando si volessero ricercare le forme che assumono le goccie che costituiscono una sottile vena fluida.

Ben poco mi restava a spigolare in un campo in cui avevano largamente mietuto tanti egregi matematici, ma spero che la semplicità che ho cercato di dare a queste ricerche e la considerazione dei moti periodici varranno a dare una qualche importanza a questo lavoro.

1. Alla ricerca delle equazioni differenziali del moto di un ellissoide fluido giova premettere le seguenti considerazioni sulla funzione potenziale di un ellissoide non riferito ai suoi assi principali, quando le sue molecole si attraggono secondo la legge newtoniana.

Sia

$$(1)\qquad Sx^2+S'y^2+S''z^2+2Tyz+2T'xz+2T''xy=1$$

l'equazione di un ellissoide a tre assi riferito ad un sistema qualunque di assi coordinati colla origine al centro e deduciamo la espressione che allora prende la funzione potenziale dalla nota espressione che si ha pel caso in cui esso è riferito agli assi principali (*)

$$V=\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left\{1-\frac{\xi^2}{a^2+s}-\frac{\eta^2}{b^2+s}-\frac{\zeta^2}{c^2+s}\right\},$$

ove a, b, c, sono i semi assi dell'ellissoide, ξ, η, ζ le coordinate del punto attratto relativamente agli assi principali stessi, e

$$\Delta=\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}.$$

(*) Vedi « *La teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton* » del ch. Prof. E. Betti.

Riferiamo il nostro ellissoide ai suoi assi principali e cerchiamo le espressioni dei semi assi; è noto che le tre radici reali della equazione di terzo grado in λ

$$\begin{vmatrix} S-\lambda & T'' & T' \\ T'' & S'-\lambda & T \\ T' & T & S''-\lambda \end{vmatrix}=0$$

sono l'inverse dei quadrati dei semi assi cercati, talchè si avrà l'identità

$$\begin{vmatrix} S-\lambda & T'' & T' \\ T'' & S'-\lambda & T \\ T' & T & S''-\lambda \end{vmatrix}=-\left(\lambda-\frac{1}{a^2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{b^2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{c^2}\right),$$

che moltiplicata per s^3 e cangiandovi λ in $-\frac{1}{s}$ darà

$$\begin{vmatrix} Ss+1 & T''s & T's \\ T''s & S's+1 & Ts \\ T's & Ts & S''s+1 \end{vmatrix}=\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right).$$

Ora indicando con α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' i coseni degli angoli che gli assi principali fanno cogli assi x, y, z avremo

$$\xi=\alpha x+\beta y+\gamma z\quad,\quad \eta=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z\quad,\quad \zeta=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z,$$

e sostituendo nella equazione

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,$$

ed osservando che il risultato deve essere identico alla (1) si avrà

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} S&=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\alpha'^2}{b^2}+\frac{\alpha''}{c^2} \quad ; \quad & T&=\frac{\beta\gamma}{a^2}+\frac{\beta'\gamma'}{b^2}+\frac{\beta''\gamma''}{c^2} \\ S'&=\frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}+\frac{\beta''^2}{c^2} \quad ; \quad & T'&=\frac{\alpha\gamma}{a^2}+\frac{\alpha'\gamma'}{b^2}+\frac{\alpha''\gamma''}{c^2} \\ S''&=\frac{\gamma^2}{a^2}+\frac{\gamma'^2}{b^2}+\frac{\gamma''^2}{c^2} \quad ; \quad & T''&=\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}+\frac{\alpha''\beta''}{c^2}. \end{aligned} \right.$$

Sostituendo ora nella espressione di V per ξ, η, ζ i loro valori e ponendo per brevità

$$\begin{aligned} F&=Sx^2+S'y^2+S''z^2+2Tyz+2T'xz+2T''xy, \\ F'&=(S'S''-T^2)x^2+(SS''-T'^2)y^2+(SS'-T''^2)z^2+ \\ &+2(T'T''-TS)yz+2(TT''-T'S')xz+2(TT'-T''S'')xy, \end{aligned}$$

ed indicando con G, G_1, G_2 i coefficienti di s^3, s^2, s respettivamente nello sviluppo di $\triangle^2$, cioè ponendo

$$\triangle^2=Gs^3+G_1s^2+G_2s+1,$$

sarà

$$(3)\quad V=\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\left\{1-\frac{(x^2+y^2+z^2)(sG_1+s^2G)+F-sF'}{\triangle^2}\right\},$$

che è l'espressione data da Dirichlet alla cercata funzione potenziale dell'ellissoide non riferito agli assi principali.

2. Ciò premesso osserviamo che siccome per la determinazione della forma dell'ellissoide e del moto delle sue particelle basta considerare il moto relativo delle parti stesse, così potremo riferire i punti dell'ellissoide ad un sistema di assi che abbia sempre l'origine al centro dell'ellissoide e si muova parallelamente a se stesso e non tenere conto che degli spostamenti che han luogo relativamente a questi assi. Allora indicando con x_0, y_0, z_0 le coordinate di un elemento fluido nel tempo zero, che possiamo anche sup-

porre coincidente coll'origine del moto, e con x, y, z le coordinate della stessa molecola dopo un tempo qualunque t, le relazioni che legano le coordinate x, y, z, ad x_0, y_0, z_0, se noi poniamo la condizione che la superficie esterna rimanga sempre della stessa classe durante il moto e che le molecole che si trovavano nel tempo zero sopra un ellissoide omotetico all'esterno anche dopo un tempo qualunque si trovino sopra un ellissoide omotetico a quello che costituisce allora la superficie esterna, saranno lineari e si avrà:

$$(4)\quad x=lx_0+my_0+nz_0\ ,\ y=l'x_0+m'y_0+n'z_0\ ,\ z=l''x_0+m''y_0+n''z_0$$

ove l, m, n, ecc. sono funzioni qualunque del tempo sottoposte però alla condizione di essere continue.

Ora, per la condizione d'incompressibilità dovendo essere (*)

$$(5)\quad \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix}=1,$$

si avrà, indicando con λ, μ, ν, ec. gli elementi reciproci ad l, m, n, ec. respettivamente nel precedente determinante,

$$(6)\quad x_0=\lambda x+\lambda' y+\lambda'' z\ ,\ y_0=\mu x+\mu' y+\mu'' z\ ,\ z_0=\nu x+\nu' y+\nu'' z.$$

Potendo prendere ad arbitrio la posizione degli assi $(x, y, z,)$ la sceglieremo per modo che al principio del tempo essi coincidano cogli assi principali dell'ellissoide, cosicchè l'equazione dell'ellissoide nel tempo zero sarà, essendo a_0, b_0, c_0, i semi assi in quel tempo,

$$\frac{x_0^2}{a_0^2}+\frac{y_0^2}{b_0^2}+\frac{z_0^2}{c_0^2}=1;$$

(*) Vedi Lagrange « *Mécanique Analytique* » Seconde Partie Sect. XI, 7. pag. 259 (III.ª Ediz.).

per cui dopo il tempo t, l'equazione dell'ellissoide sarà

$$\frac{(\lambda x+\lambda' y+\lambda'' z)^2}{a_0^2}+\frac{(\mu x+\mu' y+\mu'' z)^2}{b_0^2}+\frac{(\nu x+\nu' y+\nu'' z)^2}{c_0^2}=1;$$

Quindi in generale dopo il tempo t, gli assi dell'ellissoide non coincideranno con quelli delle coordinate.

Se nella (3) sostituiamo ora per x, y, z, i loro valori dati dalle (4) l'espressione della funzione potenziale diverrà una funzione pari di secondo grado in x_0, y_0, z_0, per cui potremo darle la forma

$$\text{(7)}\quad V=H-Lx_0^2-My_0^2-Nz_0^2-L'y_0z_0-2M'x_0z_0-2N'x_0y_0.$$

3. Eseguendo effettivamente le sostituzioni troveremo per L, M, N, ec. i valori seguenti

$$L=\frac{\pi}{a_0^2}\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle^3}+\left(\frac{RP-Q'^2}{b_0^2}+\frac{PQ-R'^2}{c_0^2}\right)\frac{\pi}{a_0^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\triangle^3}+\frac{P\pi}{a_0^2b_0^2c_0^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\triangle^3},$$

$$M=\frac{\pi}{b_0^2}\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle^3}+\left(\frac{PQ-R'^2}{c_0^2}+\frac{QR-P'^2}{a_0^2}\right)\frac{\pi}{b_0^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\triangle^3}+\frac{Q\pi}{a_0^2b_0^2c_0^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\triangle^3},$$

$$N=\frac{\pi}{c_0^2}\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle^3}+\left(\frac{QR-P'^2}{a_0^2}+\frac{RP-Q'^2}{b_0^2}\right)\frac{\pi}{c_0^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\triangle^3}+\frac{R\pi}{a_0^2b_0^2c_0^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\triangle^3},$$

$$L'=-\frac{(Q'R-PP')\pi}{b_0^2c_0^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\triangle^3}+\frac{P'\pi}{a_0^2b_0^2c_0^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\triangle^3},$$

$$M'=-\frac{(R'P-QQ')\pi}{a_0^2c_0^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\triangle^3}+\frac{Q'\pi}{a_0^2b_0^2c_0^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\triangle^3},$$

$$N'=-\frac{(P'Q-RR')\pi}{a_0^2b_0^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\triangle^3}+\frac{R'\pi}{a_0^2b_0^2c_0^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\triangle^3},$$

nei quali

$$\text{(8)}\ \begin{cases} P=l^2+l'^2+l''^2 & ,\quad P'=mn+m'n'+m''n'' \\ Q=m^2+m'^2+m''^2 & ,\quad Q'=ln+l'n'+l''n'' \\ R=n^2+n'^2+n''^2 & ,\quad R'=lm+l'm'+l''m'' \end{cases}$$

4. Il problema della determinazione del moto degli elementi dell'ellissoide fluido manifestamente potrà dirsi risoluto quando si conosceranno le funzioni incognite del tempo l, m, n, ec. che entrano nelle relazioni tra x, y, z, ed x_0, y_0, z_0, e che per $t=o$ prendono i valori particolari:

$$\begin{matrix} l_0=1 & m_0=o & n_0=o \\ l_0'=o & m_0'=1 & n_0'=o \\ l_0''=o & m_0''=o & n_0''=1. \end{matrix}$$

Per trovare le equazioni differenziali che debbono essere sodisfatte da quelle funzioni incognite applichiamo il principio di *Hamilton*, che è espresso dalla equazione

$$\delta\int(T+\varepsilon P)dt=o,$$

dove

$$T=\tfrac{1}{2}\int v^2dm,$$

P è il potenziale del corpo sovra se stesso, v la velocità della molecola dm, ed ε l'attrazione di due masse uguali ad uno e poste all'unità di distanza.

Ma, se a, b, c, sono i semi assi dopo il tempo t, si avrà

$$2P=\int Vdm=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}M\left(1-\tfrac{1}{5}\frac{a^2}{a^2+s}-\tfrac{1}{5}\frac{b^2}{b^2+s}-\tfrac{1}{5}\frac{c^2}{c^2+s}\right)$$

$$=\frac{\pi M}{5}\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}\left(2+\frac{s}{a^2+s}+\frac{s}{b^2+s}+\frac{s}{c^2+s}\right)$$

$$=\tfrac{2}{5}\pi M\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}+\frac{2\pi M}{5}\int_0^\infty\frac{ds\ s\frac{d\triangle}{ds}}{\triangle^2}=\tfrac{4}{5}\pi M\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle},$$

ove M è la massa dell'ellissoide. Notiamo fin d'ora che la densità del fluido, ch'è costante, la prenderemo per semplicità uguale ad uno. Calcolando ora il valore di $\int v^2 dm$ espresso per mezzo delle derivate rispetto a t di l, m, n ec. e di x_0, y_0, z_0, ed integrando col ricordare che all'origine del tempo gli assi delle coordinate sono gli assi principali di inerzia e che quindi si ha

$$\int_M x_0 y_0 dm = o, \int_M x_0 z_0 dm = o, \int_M y_0 z_0 dm = o,$$

$$\int_M x_0^2\, dm = \frac{2\pi b_0 c_0}{a_0^2}\int_0^{a_0}(a_0^2 - x_0^2) x_0^2 dx = \frac{2\pi b_0 c_0}{a_0^2}\left[\frac{a_0^5}{3} - \frac{a_0^5}{5}\right] = \frac{M}{5} a_0^2,$$

ed analogamente

$$\int_M y_0^2 dm = \frac{M}{5} b_0^2 \quad , \quad \int_M z_0^2 dm = \frac{M}{5} c_0^2,$$

si avrà

$$\int v^2 dm = \frac{M}{5}\Big\{ a_0^2\left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dl'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dl''}{dt}\right)^2\right.$$
$$+ b_0^2\left[\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm''}{dt}\right)^2\right] +$$
$$+ c_0^2\left[\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn''}{dt}\right)^2\right]\Big\};$$

e quindi l'equazione di *Hamilton* diverrà la seguente:

$$\delta \int \Big\{ a_0^2\left[\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dl'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dl''}{dt}\right)^2\right] + b_0^2\left[\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm''}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ c_0^2\left[\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn''}{dt}\right)^2\right] + 4\varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\Big\} dt = o.$$

5. Se prendiamo la variazione tenendo conto della equazione della incompressibilità, e con una integrazione per parti, decomponiamo la variazione in due, una fuori, e l'altra sotto il segno d'integrazione, le 9 equazioni che otterremo uguagliando a zero i coefficienti di δl, δm, δn, ec. sotto il segno d'integrazione, saranno le 9 equazioni differenziali che determinar ci devono le 9 funzioni del tempo l, m, n, ec.

La prima di queste 9 equazioni sarà

$$a_0^2 \frac{dl^2}{dl^2} = 2\varepsilon\pi \frac{d}{dl}\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle} + 2\delta \frac{d\theta}{dl}, \tag{9}$$

essendo θ il determinante primo membro della equazione della incompressibilità e δ una quantità finita indipendente da $l, m, n \ldots . n''$ introdotta secondo le regole del calcolo delle variazioni.

Ponendo:

$$2\varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\triangle} + 2\delta\theta = H_1,$$

ed

$$a_0 l = x_1,\ a_0 l' = x_2,\ a_0 l'' = x_3,\ b_0 m = y_1, \ldots\ldots,\ c_0 n = z_1, \ldots\ldots$$

le 9 equazioni prenderanno la forma canonica loro assegnata dal Sig. Brioschi:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{dH_1}{dx_1} \quad , \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dH_1}{dy_1} \quad , \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = \frac{dH_1}{dz_1}$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{dH_1}{dx^2} \quad , \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} = \frac{dH_1}{dy_2} \quad , \quad \frac{d^2z_2}{dt^2} = \frac{dH_1}{dz_2}$$
$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{dH_1}{dx_3} \quad , \quad \frac{d^2y_3}{dt^2} = \frac{dH_1}{dy_3} \quad , \quad \frac{d^2z_3}{dt^2} = \frac{dH_1}{dz_3}$$

ma noi daremo a queste equazioni una forma diversa.

Per questo osserveremo che si ha (n° 1)

$$\triangle^2 = \begin{vmatrix} Ss+1 & F''s & F's \\ F''s & S's+1 & Fs \\ F's & Fs & S''s+1 \end{vmatrix};$$

ossia, ponendo per S, S', S'' ec. i loro valori trovati (2),

$$\triangle^2 = \frac{s^3}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} + \frac{s^2}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}\left[a_0^2 P + b_0^2 Q + c_0^2 R\right] + \frac{s}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} \times$$
$$\left[b_0^2 c_0^2(\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2) + a_0^2 c_0^2(\mu^2+\mu'^2+\mu''^2) + a_0^2 b_0^2(\nu^2+\nu'^2+\nu''^2)\right] + 1$$

ove P, Q, R, hanno i valori (8).

Ora per un noto teorema dei determinanti si ha senza aver bisogno di fare lo sviluppo

$$PQ - R'^2 = \nu^2+\nu'^2+\nu''^2, \quad RP - Q'^2 = \mu^2+\mu'^2+\mu''^2,$$
$$QR - P'^2 = \lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2$$

e quindi sostituendo

$$\triangle^2 = \begin{vmatrix} \frac{s}{a_0^2}+P & R' & Q' \\ R' & \frac{s}{b_0^2}+Q & P' \\ Q' & P' & \frac{s}{c_0^2}+R \end{vmatrix}$$

per cui

$$2\triangle\frac{d\triangle}{dl} = 2\left\{\frac{s^2 l}{b_0^2 c_0^2} + \frac{s}{b_0^2} l R + \frac{s}{c_0^2} l Q + l QR - P'^2 l - \right.$$
$$\left. m\left(\frac{s}{c_0^2}+R\right)R' + mP'Q' - n\left(\frac{s}{b_0^2}+Q\right)Q' + nP'R'\right\}$$
$$= 2\left\{\frac{s^2 l}{b_0^2 c_0^2} + \frac{s}{b_0^2}(lR - Q'n) + \frac{s}{c_0^2}(lQ - mR') + \right.$$
$$\left. l(QR - P'^2) + m(P'Q' - RR') + n(P'R' - QQ')\right\}$$

Ma ricordando che per la (5) si ha

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 1,$$
$$l'\lambda + m'\mu + n'\nu = 0 \text{ ec.,}$$

si dedurrà dalle (8)

$$\lambda(PR - Q'^2) - (P'Q' - RR')\mu = Rl - Q'n,$$
$$\lambda(PQ - R'^2) - (R'P' - QQ')\nu = Ql - R'm,$$
$$l(QR - P'^2) + m(P'Q' - RR') + n(P'R' - QQ') = \lambda,$$
$$P\lambda + Q'\nu + R'\mu = l;$$

e finalmente sostituendo questi valori nella precedente espressione, e poi sostituendo questa nella (9) si avrà

$$a_0^2\frac{d^2 l}{dt^2} = 2\lambda\delta - 2\varepsilon\pi\left[\lambda\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle^3} + \left\{\lambda\left(\frac{PR - Q'^2}{b_0^2} + \frac{PQ - R'^2}{c_0^2}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \mu\frac{Q'P' - RR'}{b_0^2} - \nu\frac{P'R' - QQ'}{c_0^2}\right\}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\triangle^3} + \frac{(P\lambda + R'\mu + Q'\nu)}{b_0^2 c_0^2}\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{\triangle^3}\right]$$

ossia

$$a_0^2\frac{d^2 l}{dt^2} = 2\lambda\delta - 2\varepsilon L\lambda a_0^2 - 2\varepsilon M'\nu a_0^2 - 2\varepsilon N'\mu a_0^2$$

Analogamente si avrà

$$a_0^2\frac{d^2 l'}{dt^2} = 2\lambda'\delta - 2\varepsilon L\lambda' a_0^2 - 2\varepsilon M'\nu' a_0^2 - 2\varepsilon N'\mu' a_0^2$$

$$a_0^2\frac{d^2 l''}{dt^2} = 2\lambda''\delta - 2\varepsilon L\lambda'' a_0^2 - 2\varepsilon M'\nu'' a_0^2 - 2\varepsilon N'\mu'' a_0^2$$

Volendo finalmente dar loro ancora un' altra forma moltiplichiamo la 1.ª per l, la 2.ª per l', la 3.ª per l'', poscia per m, m', m'' respettivamente e per n, n', n'', e sommiamo ogni volta; allora per la (5) avendo riguardo alle note proprietà dei determinanti si otterrà

$$
(a)\begin{cases}
l\frac{d^2l}{dt^2}+l'\frac{d^2l'}{dt^2}+l''\frac{d^2l''}{dt^2}=\frac{2\delta}{a_0^{\,2}}-2\varepsilon\mathrm{L}\\
m\frac{d^2l}{dt_2}+m'\frac{d^2l'}{dt^2}+m''\frac{d^2l''}{dt^2}=\quad-2\varepsilon\mathrm{N}'\\
n\frac{d^2l}{dt^2}+n'\frac{d^2l'}{dt^2}+n''\frac{d^2l''}{dt^2}=\quad-2\varepsilon\mathrm{M}'
\end{cases}
$$

ed analogamente troveremo

$$
(a)\begin{cases}
m\frac{d^2m}{dt^2}+m'\frac{d^2m}{dt^2}+m''\frac{d^2m''}{dt^2}=\frac{2\delta}{b_0^{\,2}}-2\varepsilon\mathrm{M}\\
l\frac{d^2m}{dt^2}+l'\frac{d^2m'}{dt^2}+l''\frac{d^2m''}{dt^2}=\quad-2\varepsilon\mathrm{N}'\\
n\frac{d^2m}{dt^2}+n'\frac{d^2m'}{dt^2}+n''\frac{d^2m''}{dt^2}=\quad-2\varepsilon\mathrm{L}'
\end{cases}
$$

$$
(a)\begin{cases}
n\frac{d^2n}{di^2}+n'\frac{d^2n'}{dt^2}+n''\frac{d^2n''}{dt^2}=\frac{2\delta}{c_0^{\,2}}-2\varepsilon\mathrm{N}\\
l\frac{d^2n}{dt^2}+l'\frac{d^2n'}{dt}+l''\frac{d^2n''}{dt}=\quad-2\varepsilon\mathrm{M}'\\
m\frac{d^2n}{dt^2}+m'\frac{d^2n'}{dt^2}+m''\frac{d^2n^2}{dt^2}=\quad-2\varepsilon\mathrm{L}';
\end{cases}
$$

e queste equazioni unite all'altra

$$
(a)\qquad \theta=1
$$

formano un sistema di 10 equazioni che possono servire a determinare le 10 funzioni incognite $l,m,n\ldots\ldots n'',\delta$.

6. Vediamo ora quale significato fisicamente abbia la quantità δ, che noi abbiamo introdotta coll'unica condizione che fosse finita ed indipendente da $l,m,n,\ldots\ldots n''$. Osserviamo perciò che le equazioni date dal Lagrange per il moto dei fluidi quando le forze che agiscono sopra ciascun elemento hanno una funzione potenziale εV, e p è la pressione sul punto (x,y,z), sono

$$
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dx_0}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dx_0}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dx_0}=\varepsilon\frac{d\mathrm{V}}{dx_0}-\frac{dp}{dx_0},
$$
$$
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dy_0}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dy_0}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dy_0}=\varepsilon\frac{d\mathrm{V}}{dy_0}-\frac{dp}{dy_0},
$$
$$
\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dz_0}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dz_0}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dz_0}=\varepsilon\frac{d\mathrm{V}}{dz_0}-\frac{dp}{dz_0};
$$

sostituendo qui per $\frac{dx}{dx_0}$, $\frac{dy}{dx_0}$, ec. $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ i loro valori tolti dalle (4) e sommando si ha una equazione che ha per primo membro quello della equazione che si ottiene moltiplicando la prima terna delle equazioni (a) per x_0, la seconda per y_0, la terza per z_0 e sommando, dunque anche i secondi membri dovranno essere uguali fra di loro e dovrà aversi per la (7)

$$
\frac{dp}{dx_0}+\frac{dp}{dy_0}+\frac{dp}{dz_0}=-2\delta\left(\frac{x_0}{a_0^{\,2}}+\frac{y_0}{b_0^{\,2}}+\frac{z_0}{c_0^{\,2}}\right);
$$

equazione alle derivate parziali di cui un integrale finito è

$$
p=\mathrm{P}+\delta\left(1-\frac{x_0^{\,2}}{a_0^{\,2}}-\frac{y_0^{\,2}}{b_0^{\,2}}-\frac{z_0^{\,2}}{c_0^{\,2}}\right),
$$

ove P che è costante o soltanto funzione del tempo indica la pressione che ha luogo alla superficie libera.

Questa equazione ci dà subito il significato fisico che si può dare a δ, poichè si vede che esso indica il modo con cui la pressione varia da strato a strato nell'interno del liquido. Ora nei liquidi la pressione non può assumere valori negativi; per cui quando P$=o$, siccome la quantità tra parentesi va da zero ad uno nell'interno del liquido, δ non potrà prendere valori negativi, e se P è diverso da zero δ non potrà prendere valori negativi se non quando questi siano in valore assoluto minori di P.

7. Sin qui abbiamo fatto dipendere la risoluzione del nostro problema dalla determinazione di quei coefficenti l,

m, n ec. che servir possono ad indicarci il luogo ove si troverà dopo un tempo qualunque una data molecola; ma a queste 9 incognite possiamo sostituirne altre 9 che facciano considerare il problema sotto un nuovo punto di vista.

Indichiamo con a, b, c i semi assi dell'ellissoide in un tempo t qualunque, e scriviamo le equazioni che legano x_0, y_0, z_0 ad x, y, z sotto la forma

$$x=l\frac{x_0}{a_0}+m\frac{y_0}{b_0}+n\frac{z_0}{c_0}\ ,\ y=l'\frac{x_0}{a_0}+m'\frac{y_0}{b_0}+n'\frac{z_0}{c_0}\ ,\ z=l''\frac{x_0}{a_0}+m''\frac{y_0}{b_0}+n''\frac{z_0}{c_0}.$$

Indichiamo inoltre con α, β, γ ; α', β', γ' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ i coseni degli angoli che gli assi principali dell'ellissoide fanno cogli assi x, y, z e con ξ, η, ζ le coordinate prese lungo gli assi principali. si ha

$$(11)\qquad x=\alpha\xi+\alpha'\eta+\alpha''\zeta\ ,\ y=\beta\xi+\beta'\eta+\beta''\zeta\ ,\ z=\gamma\xi+\gamma'\eta+\gamma''\zeta\ ;$$

inoltre siccome le molecole che si trovano sulla superficie dell'ellissoide vi rimarranno sempre per la continuità, così si deve avere

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=\frac{x_0^2}{a_0^2}+\frac{y_0^2}{b_0^2}+\frac{z_0^2}{c_0^2},$$

la quale equazione viene sodisfatta se si prende

$$(12)\qquad \frac{x_0}{a_0}=\alpha_1\frac{\xi}{a}+\alpha_1'\frac{\eta}{b}+\alpha_1''\frac{\zeta}{c}\ ;\ \frac{y_0}{b_0}=\beta_1\frac{\xi}{a}+\beta_1'\frac{\eta}{b}+\beta_1''\frac{\zeta}{c}\ ;$$

$$\frac{z_0}{c_0}=\gamma_1\frac{\xi}{a}+\gamma_1'\frac{\eta}{b}+\gamma_1''\frac{\zeta}{c},$$

purchè si abbia

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1\ ,\ \alpha_1'^2+\beta_1'^2+\gamma_1'^2=1\ ,\ \alpha_1''^2+\beta_1''^2+\gamma_1''^2=1,$$
$$\alpha_1\alpha_1'+\beta_1\beta_1'+\gamma_1\gamma_1'=o\ ,\ \alpha_1\alpha_1''+\beta_1\beta_1''+\gamma_1\gamma_1''=o\ ,\ \alpha_1'\alpha_1''+\beta_1'\beta_1''+\gamma_1'\gamma_1''=o.$$

Queste quantità $\alpha_1, \beta_1, \ldots\ldots \gamma_1''$, devono dunque sodisfare a tutte le condizioni cui necessariamente sodisfano i coseni degli angoli che un sistema di tre rette ortogonali fa cogli assi coordinati, per cui affine di dare a queste quantità un significato geometrico possiamo supporre che le $\alpha_1' \beta_1 \ldots\ldots \gamma_1''$ rappresentino effettivamente i coseni degli angoli che un sistema d'assi ξ_1, η_1, ζ_1 fa cogli assi x, y, z. Ricavando dalle (12) i valori di ξ, η, ζ e sostituendoli nelle (11) si devono riprodurre identicamente le (10) per cui uguagliando i coefficienti avremo 9 equazioni lineari rispetto a tutte le quantità che vi entrano.

Ora le quantità $\alpha, \beta \ldots\ldots \gamma''$ sono legate da 6 relazioni che necessariamente devono sempre essere verificate e quindi 3 sole di quelle 9 quantità sono arbitrarie, così pure 3 sole sono arbitrarie delle 9 quantità $\alpha_1, \beta_1 \ldots\ldots \gamma_1''$. Cosicchè queste 6 variabili indipendenti unite ai 3 assi a, b, c formeranno un sistema di 9 incognite che determineranno per mezzo delle suddette equazioni i valori di $l, m, n \ldots\ldots n''$. Geometricamente abbiamo ricondotto la determinazione del moto di ciascuna particella alla determinazione della forma dell'ellissoide dopo un tempo qualunque e della posizione di due sistemi di assi ortogonali (ξ, η, ζ) e (ξ_1, η_1, ζ_1) che hanno l'origine al centro dell'ellissoide.

8. Bisogna ora trovare le equazioni cui devono sodisfare queste quantità, od in altre parole le equazioni corrispondenti al sistema (a) che han luogo tra queste quantità. Per seguire un metodo analogo a quello tenuto per stabilire le (a) cominceremo dal determinare la forma che prende l'equazione di *Hamilton* quando viene espressa per mezzo di queste 9 incognite; essa potrebbe direttamente stabilirsi, ma è più semplice ricavarla da quella che si aveva nel n.° 4 sostituendo per $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dm}{dt}$, ec. i loro valori espressi per mezzo delle nuove quantità $a, b, c, \alpha \ldots\ldots \gamma''$ $\alpha_1, \ldots\ldots \gamma_1''$ coll'avvertenza però che nelle formole (10) sono

state chiamate l,m,n, ec. le quantità che nel n.° 2 erano state chiamate $a_0 l$, $b_0 m$, $c_0 n$, ec.

Osservando che si ha:

$$\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}+\gamma\frac{d\gamma}{dt}=0\ ,\ \alpha'\frac{d\alpha'}{dt}+\beta'\frac{d\beta'}{dt}+\gamma'\frac{d\gamma'}{dt}=0\ ,\ \alpha''\frac{d\alpha''}{dt}+\beta''\frac{d\beta''}{dt}+\gamma''\frac{d\gamma''}{dt}=0,$$

$$\alpha_1\frac{d\alpha_1}{dt}+\beta_1\frac{d\beta_1}{dt}+\gamma\frac{d\gamma_1}{dt}=0\ ,\ \alpha_1'\frac{d\alpha_1'}{dt}+\beta_1'\frac{d\beta_1'}{dt}+\gamma_1'\frac{d\gamma_1'}{dt}=0\ ,$$

$$\alpha_1''\frac{d\alpha_1''}{dt}+\beta_1''\frac{d\beta_1''}{dt}+\gamma_1''\frac{d\gamma_1''}{dt}=0,$$

e ponendo per brevità:

$$(13)\begin{cases}\alpha''\frac{d\alpha'}{dt}+\beta''\frac{d\beta'}{dt}+\gamma''\frac{d\gamma'}{dt}=-\left(\alpha'\frac{d\alpha''}{dt}+\beta'\frac{d\beta''}{dt}+\gamma'\frac{d\gamma''}{dt}\right)=p,\\ \alpha\frac{d\alpha''}{dt}+\beta\frac{d\beta''}{dt}+\gamma\frac{d\gamma''}{dt}=-\left(\alpha''\frac{d\alpha}{dt}+\beta''\frac{d\beta}{dt}+\beta''\frac{d\gamma}{dt}\right)=q,\\ \alpha'\frac{d\alpha}{dt}+\beta'\frac{d\beta}{dt}+\gamma'\frac{d\gamma}{dt}=-\left(\alpha\frac{d\alpha'}{dt}+\beta\frac{d\beta'}{dt}+\gamma\frac{d\gamma'}{dt}\right)=r,\end{cases}$$

ossia chiamando p,q,r le velocità angolari del sistema attorno agli assi ξ,η,ζ respettivamente, indicando inoltre con p_1,q_1,r_1 le quantità analoghe a p,q,r per gli assi ξ_1,η_1,ζ_1, e finalmente ponendo

$$u=\frac{p+p_1}{2}\ ,\ v=\frac{q+q_1}{2}\ ,\ w=\frac{r+r_1}{2},$$

$$u'=\frac{p-p_1}{2}\ ,\ v'=\frac{q-q_1}{2}\ ,\ w'=\frac{r-r_1}{2};$$

la forza viva T dopo un calcolo un poco laborioso ma semplice, prenderà la forma:

$$(14)\ \mathrm{T}=\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right\}+(a-b)^2w^2+(a-c)^2v^2+(b-c)^2u^2$$
$$+(a+b)^2w'^2+(a+c)^2v'^2+(b+c)^2u'^2$$

Alla funzione potenziale dell' ellissoide nel tempo t possiamo ora dare la forma:

$$\mathrm{V}=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}\left\{1-\frac{\xi^2}{a^2+s}-\frac{\eta^2}{b^2+s}-\frac{\zeta^2}{c^2+s}\right\}=\mathrm{H}-\mathrm{A}\xi_1^2-\mathrm{B}\eta^2-\mathrm{C}\zeta^2,$$

ove

$$\triangle=\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)},$$

che è quella dalla quale ci siamo partiti nel n.° 1, dove è facile vedere che H rappresenta il potenziale P dell'ellissoide sopra se stesso a meno di un fattore costante.

9. Per ottenere dalla equazione di *Hamilton*:

$$\delta\int_0^t(\mathrm{T}+2\varepsilon\mathrm{H})dt=0$$

le equazioni differenziali che unite all' equazione della incompressibilità debbono servire alla risoluzione del problema prenderemo prima le variazioni soltanto rispetto ad a,b,c e tenendo conto della equazione della incompressibilità, che ora diviene

$$(\alpha)\qquad abc=\text{cost},$$

avremo

$$(\alpha)\begin{cases}(a-b)w^2+(a-c)v^2+(a+b)w'^2+(a+c)v'^2-\frac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2}=\varepsilon a\mathrm{A}-\frac{\delta}{a},\\ (b-a)w^2+(b-c)u^2+(b+a)w'^2+(b+c)u'^2-\frac{1}{2}\frac{d^2b}{dt^2}=\varepsilon b\mathrm{B}-\frac{\delta}{b},\\ (c-a)v^2+(c-b)u^2+(c+a)v'^2+(c+b)u'^2-\frac{1}{2}\frac{d^2c}{dt^2}=\varepsilon c\mathrm{C}-\frac{\delta}{c},\end{cases}$$

ove δ è una quantità indipendente da a,b,c che è stata introdotta per le regole del calcolo delle variazioni e di cui il significato fisico potrebbe essere determinato in modo analogo a quello tenuto nel n.° 6.

Ora prendiamo successivamente le variazioni rispetto a p,q,r. Osservando che H è indipendente da queste quantità, avremo:

$$\int_o^t\left(\frac{d\mathrm{T}}{dp}\delta p+\frac{d\mathrm{T}}{dq}\delta q+\frac{d\mathrm{T}}{dr}\delta r\right)dt=o.$$

Ponendo:

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{P}&=\alpha''\delta\alpha'+\beta''\delta\beta'+\gamma''\delta\gamma'\\ \delta\mathrm{Q}&=\alpha\delta\alpha''+\beta\delta\beta''+\gamma\delta\gamma''\\ \delta\mathrm{R}&=\alpha'\delta\alpha+\beta'\delta\beta+\gamma'\delta\gamma\end{aligned}$$

abbiamo (*)

$$\delta p=\frac{d\delta\mathrm{P}}{dt}+q\delta\mathrm{R}-r\delta\mathrm{Q}$$

$$\delta q=\frac{d\delta\mathrm{Q}}{dt}+r\delta\mathrm{P}-p\delta\mathrm{R}$$

$$\delta r=\frac{d\delta\mathrm{R}}{dt}+p\delta\mathrm{Q}-q\delta\mathrm{P}$$

Quindi sostituendo questi valori, e dopo effettuata una integrazione per parti, ponendo a zero i coefficienti di δP, δQ e δR sotto il segno integrale, si ottiene:

$$\frac{d\frac{d\mathrm{T}}{dp}}{dt}+q\frac{d\mathrm{T}}{dr}-r\frac{d\mathrm{T}}{dq}=o$$

$$\frac{d\frac{d\mathrm{T}}{dq}}{dt}+r\frac{d\mathrm{T}}{dp}-p\frac{d\mathrm{T}}{dr}=o$$

$$\frac{d\frac{d\mathrm{T}}{dr}}{dt}+p\frac{d\mathrm{T}}{dq}-q\frac{d\mathrm{T}}{dp}=o$$

(*) Vedi LAGRANGE *Mécanique Analytique* T. II pag. 200.

dalle quali si deducono le tre equazioni seguenti (*):

$$\begin{aligned}\alpha\frac{d\mathrm{T}}{dp}+\alpha'\frac{d\mathrm{T}}{dq}+\alpha''\frac{d\mathrm{T}}{dr}&=g_0\\ \beta\frac{d\mathrm{T}}{dp}+\beta'\frac{\mathrm{T}d}{dq}+\beta\cdot\frac{d\mathrm{T}}{dr}&=h_0\\ \gamma\frac{d\mathrm{T}}{dp}+\gamma'\frac{d\mathrm{T}}{dq}+\gamma''\frac{d\mathrm{T}}{dr}&=k_0\end{aligned}$$

dove $g_0,h_0,k_0,$ sono le tre costanti dell' aree, e ponendo:

$$g=g_0\alpha+h_0\beta+k_0\ \gamma;\ h'=g_0\alpha'+h_0\beta'+k_0\gamma'\ ;\ k=g_0\alpha''+h_0\beta''+k_0\gamma''$$

si ottiene:

$$(15)\quad \frac{d\mathrm{T}}{dp}=g\ ,\ \frac{d\mathrm{T}}{dq}=h\ ,\ \frac{d\mathrm{T}}{dr}=k\ ,$$

Prendendo finalmente le variazioni rispetto a $p_1,q_1,r_1,$ con un processo uguale si ottengono le equazioni:

$$(15)\quad \frac{d\mathrm{T}}{dp_1}=g'\ ,\ \frac{d\mathrm{T}}{dq_1}=h'\ ,\ \frac{d\mathrm{T}}{dr_1}=k'$$

ove

$$g'=g_0'\alpha_1+h_0\beta_1+k_0\gamma'_1\ ;\ h'=g_0'\alpha_1'+h_0'\beta_1'+k_0'\gamma_1'\ ;$$
$$k'=g_0'\alpha_1''+h_0'\beta_1''+k_0'\gamma_1''$$

e g_0',h_0',k_0' sono costanti.

Sostituendo nelle (15) il valore delle derivate tolto dalla (14), avremo

(*) Vedi LAGRANGE *Mécanique Analytique* T. II pag. 375.

$$(16)\quad (a-b)^2w+(a+b)^2w'=k\ ,\ v(a-c)^2+(a+c)^2v'=h\ ,$$
$$(b-c)^2u+(b+c)^2u'=g,$$

$$(17)\quad (a-b)^2w-(a+b)^2w'=k'\ ,\ v(a-c)^2-(a+c^2v'=h'\ ,$$
$$(b-c)^2u-(b+c)^2u'=g',$$

donde ricavasi

$$(a-b)^2w^2=\tfrac{1}{4}\frac{(k+k')^2}{(a-b)^2}\ ,\ (a+b)^2w'^2=\tfrac{1}{4}\frac{(k-k')^2}{(a+b)^2},$$
$$(a-c)^2v^2=\tfrac{1}{4}\frac{(h+h')^2}{(a-c)^2}\ ,\ (a+c)^2v'^2=\tfrac{1}{4}\frac{(h-h')^2}{(a+c)^2},$$
$$(b-c)^2u^2=\tfrac{1}{4}\frac{(g+g')^2}{(b-c)^2}\ ,\ (b+c)^2u'^2=\tfrac{1}{4}\frac{(g-g')^2}{(b+c)^2},$$

talchè la funzione T diviene

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)\right\}+$$
$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{(k+k')^2}{(a-b)}+\frac{(k+k')^2}{(a+b)^2}+\frac{(h+h')^2}{(a-c)^2}+\frac{(h-h')^2}{(a+c)^2}+\frac{(g+g')^2}{(b-c)^2}+\frac{(g-g')^2}{(b+c)^2}\right]$$

Dalle equazioni (16) e (17) possiamo eliminare le costanti che vi entrano per mezzo della derivazione. Avremo infatti

$$2(b-c)u\frac{d(b-c)}{dt}+2(b+c)u'\frac{d(b+c)}{dt}+(b-c)^2\frac{du}{dt}+(b+c)^2\frac{du'}{dt}=$$
$$=g_0\frac{d\alpha}{dt}+h_0\frac{d\beta}{dt}+k_0\frac{d\gamma}{dt}$$

$$2(b-c)u\frac{d(b-c)}{dt}-2(b+c)u'\frac{d(b+c)}{dt}+(b-c)^2\frac{du}{dt}-(b+c)^2\frac{du'}{dt}=$$
$$=g_0'\frac{d\alpha_1}{dt}+h_0'\frac{d\beta_1}{dt}+k_0'\frac{d\gamma_1}{dt}$$

donde si ricava

$$2(b-c)\left\{2u\,\frac{d(b-c)}{dt}+(b-c)\frac{du}{dt}\right\}=$$
$$g_0\frac{d\alpha}{dt}+h_0\frac{d\beta}{dt}+k_0\frac{d\gamma}{dt}+g_0'\frac{d\alpha_1}{dt}+h_0'\frac{d\beta_1}{dt}+k_0'\frac{d\gamma_1}{dt},$$

$$2(b-c)\left\{2u'\frac{d(b+c)}{dt}+(b+c)\frac{du'}{dt}\right\}=$$
$$g_0\frac{d\alpha}{dt}+h_0\frac{d\beta}{dt}+k_0\frac{d\gamma}{dt}-g_0'\frac{d\alpha_1}{dt}-h_0'\frac{d\beta_1}{dt}-k_0'\frac{d\gamma_1}{dt};$$

Ma dalle (16) si ha

$$g_0=\alpha[b-c)^2u+(b+c)^2u']+\alpha'[(c-a)^2v+(c+a)^2v']+$$
$$\alpha''[(a-b)^2w+(a+b)^2w'],$$
$$h_0=\beta[(b-c)u^2+(b+c)^2u']+\beta'[(c+a)^2v+(c+a)^2v']+$$
$$\beta''[(a-b)^2w+(a+b)^2w'],$$
$$k_0=\gamma[u(b-c)^2+(b+c)^2u']+\gamma'[(c-a)^2v+(c+a)^2v']+$$
$$\gamma''[(a-b)^2w+(a+b)^2w'],$$

e dalle (17) si ricaverebbero tre equazioni analoghe per g_0', h_0', k_0'; talchè otteniamo

$$g_0\frac{d\alpha}{dt}+h_0\frac{d\beta}{dt}+k_0\frac{d\gamma}{dt}+g_0'\frac{d\alpha_1}{dt}+h_0'\frac{d\beta_1}{dt}+k_0'\frac{d\gamma_1}{dt}=$$
$$2(c-b)[vw(b+c-2a)+v'w'(b+c+2a)],$$

$$g_0\frac{d\alpha}{dt}+h_0\frac{d\beta}{dt}+k_0\frac{d\gamma}{dt}-g_0'\frac{d\alpha_1}{dt}-h_0'\frac{d\beta_1}{dt}-k_0'\frac{d\gamma_1}{dt}=$$
$$2(b+c)[vw'(c-b-2a)+v'w(c-b+2a)];$$

e per conseguenza

$$(\alpha)\begin{cases}2u\dfrac{d(b-c)}{dt}+(b-c)\dfrac{du}{dt}+vw(b+c-2a)+v'w'(b+c+2a)=0,\\[2ex]2u'\dfrac{d(b+c)}{dt}+(b+c)\dfrac{du'}{dt}+vw'(2a-c+b)+v'w(b-c-2a)=0,\end{cases}$$

ed analogamente troveremmo le altre 4 equazioni

$$(\alpha)\begin{cases} 2v\dfrac{d(c-a)}{dt}+(c-a)\dfrac{dv}{dt}+(a+c-2b)uw+(c+a+2b)u'w'=0, \\ 2v'\dfrac{d(c+a)}{dt}+(c+a)\dfrac{dv'}{dt}+(c-a+2b)u'w+(c-a-2b)uw'=0, \\ 2w\dfrac{d(a-b)}{dt}+(a-b)\dfrac{dw}{dt}+(a+b-2c)uv+(a+b+2c)u'v'=0, \\ 2w'\dfrac{d(a+b)}{dt}+(a+b)\dfrac{dw'}{dt}+(a-b+2c)uv'+(a-b-2c)u'v=0. \end{cases}$$

Il sistema (α) che si compone di 10 equazioni sarà il sistema che deve servire a determinare le 9 incognite del problema e la quantità δ che ci determina il modo col quale varia la pressione nell'interno del liquido.

10. L'integrazione completa di uno dei sistemi d'equazioni differenziali (a) ed (α) testè trovati ci darebbe la soluzione generale del problema, ma essa presenta delle gravi difficoltà e bisognerà limitarci a considerare alcuni casi particolari. Ciò non pertanto come in tutti i problemi di meccanica in cui le forze acceleratrici son dovute ad azioni reciproche degli elementi, si possono ancor quì assegnare alcune equazioni integrali in generale. Ed in primo luogo abbiamo tanto nel caso in cui si adottino le funzioni che entrano nelle (a) quanto quelle che entrano nel sistema (α), l'integrale delle forze vive:

$$T-2\varepsilon H= \textit{costante}.$$

Le equazioni (16) e (17) ci daranno poi due altri integrali delle (α) e saranno

$$(18)\quad g^2+h^2+k^2=\omega^2=\text{cost},$$
$$(19)\quad g'^2+h'^2+k'^2=\omega_1'^2=\text{cost}.$$

Per le equazioni (a) abbiamo sei integrali primi nel

seguente modo: tre vengono dati dal principio delle aree pel quale si ha

$$\int\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)dm=\text{cost}\ ,\quad \int\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)dm=\text{cost}\ ,$$
$$\int\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dm=\text{cost},$$

ove dm è l' elemento di massa e gli integrali sono estesi a tutta la massa; sostituiamo per x, y, z i loro valori in x_0, y_0, z_0 ed osservando come nel n.° 4 che al principio del tempo gli assi x,y,z sono assi principali di inerzia si avrà:

$$(20)\begin{cases} \text{cost}=\left(l'\dfrac{dl''}{dt}-l''\dfrac{dl'}{dt}\right)a_0^2+\left(m'\dfrac{dm''}{dt}-m''\dfrac{dm'}{dt}\right)b_0^2+ \\ \qquad\left(n'\dfrac{dn''}{dt}-n''\dfrac{dn'}{dt}\right)c_0^2=\left(\dfrac{dm''}{dt}\right)_0 b_0^2-\left(\dfrac{dn'}{dt}\right)_0 c_0^2, \\ \text{cost}=\left(l''\dfrac{dl}{dt}-l\dfrac{dl''}{dt}\right)a_0^2+\left(m''\dfrac{dm}{dt}-m\dfrac{dm''}{dt}\right)b_0^2+ \\ \qquad\left(n''\dfrac{dn}{dt}-n\dfrac{dn''}{dt}\right)c_0^2=\left(\dfrac{dn}{dt}\right)c_0^2-\left(\dfrac{dl''}{dt}\right)_0 a_0^2, \\ \text{cost}=\left(l\dfrac{dl'}{dt}-l'\dfrac{dl}{dt}\right)a_0^2+\left(m\dfrac{dm'}{dt}-m'\dfrac{dm}{dt}\right)b_0^2+ \\ \qquad\left(n\dfrac{dn'}{dt}-n'\dfrac{dn}{dt}\right)c_0^2=\left(\dfrac{dl'}{dt}\right)_0 a_0^2-\left(\dfrac{dm}{dt}\right)_0 b_0^2; \end{cases}$$

Tre altri integrali si potrebbero ottenere dal principio della conservazione della rotazione di HELMHOLTZ (*), ma si possono anche direttamente ricavare dalle (a); sottraendo due a due le equazioni che hanno i secondi membri uguali, osservando che

$$m\frac{d^2n}{dt^2}-n\frac{d^2m}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(m\frac{dn}{dt}-n\frac{dm}{dt}\right),$$

(*) Vedi GIORNALE DI CRELLE « *Integrale der hydrodynamischen Gleichungen* » Vol. 55

ed integrando avremo

$$(21)\quad\begin{cases} m\dfrac{dn}{dt}-n\dfrac{dm}{dt}+m'\dfrac{dn'}{dt}-n'\dfrac{dm'}{dt}+m''\dfrac{dn''}{dt}-n''\dfrac{dm''}{dt}=\mathrm{A}_0= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\left(\dfrac{dn'}{dt}\right)_0-\left(\dfrac{dm''}{dt}\right)_0, \\ n\dfrac{dl}{dt}-l\dfrac{dn}{dt}+n'\dfrac{dl'}{dt}-l'\dfrac{dn'}{dt}+n''\dfrac{dl''}{dt}-l''\dfrac{dn''}{dt}=\mathrm{B}_0= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\left(\dfrac{dl''}{dt}\right)_0-\left(\dfrac{dn}{dt}\right)_0, \\ l\dfrac{dm}{dt}-m\dfrac{dl}{dt}+l'\dfrac{dm'}{dt}-m'\dfrac{dl'}{dt}+l''\dfrac{dm''}{dt}-m''\dfrac{dl''}{dt}=\mathrm{C}_0= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\left(\dfrac{dm}{dt}\right)_0-\left(\dfrac{dl'}{dt}\right)_0, \end{cases}$$

11. Giunti a questo punto della soluzione, volgiamoci a considerare quale dei due sistemi (α) ed (a) offre maggiori vantaggi per la integrazione. Il primo (α) è dell'ordine 10 ed ha 3 integrali primi, il secondo è invece dell'ordine 16 ed ha 7 integrali primi, peraltro notiamo che mentre il sistema (a) ci dà direttamente tutte le incognite del problema, il sistema (α) invece ci dà le quantità p, q, r, p_1, q_1, r_1 dalle quali dovremo passare poi alle vere incognite $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \gamma_1''$. Vediamo ora come si possa effettuare questo passaggio.

È noto dalla Meccanica (*) che le quantità $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots \gamma''$ devono sodisfare alle equazioni differenziali della forma

$$(22)\quad \frac{d\theta}{dt}=r\theta'-q\theta'' \;,\; \frac{d\theta'}{dt}=p\theta''-r\theta \;,\; \frac{d\theta''}{dt}=q\theta-p\theta';$$

e le altre $\alpha_1'', \beta_1'', \gamma_1'' \ldots\ldots, \gamma_1''$ alle analoghe

$$(23)\quad \frac{d\theta_1}{dt}=r_1\theta_1'-q_1\theta_1'' \;,\; \frac{d\theta_1'}{dt}=p_1\theta_1''-r_1\theta_1 \;,\; \frac{d\theta_1''}{dt}=q_1\theta_1-p_1\theta_1'.$$

(*) Vedi Mossotti: « *Lezioni di Meccanica Razionale* » §. 164.

Quindi conoscendo p, q, r per avere $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β'' ; $\gamma, \gamma', \gamma''$ basta conoscere tre sistemi particolari di integrali delle (22) che per $t=o$ divengano respettivam. 1,0,0 ; 0,1,0 ; 0,0,1 ; ed analogamente per le α, $\beta_1' \ldots\ldots \gamma_1''$ tre soluzioni particolari delle (23) che per $t=o$ divengano 1,0,0 ; 0,1,0 ; 0,0,1. Ora per avere la soluzione generale delle equazioni differenziali lineari ed omogenee (22) basta conoscerne tre sistemi di integrali particolari; e conosciuta la soluzione generale, convenienti valori delle costanti arbitrarie ci daranno le $\alpha, \beta, \gamma \ldots \gamma''$. Una soluzione particolare l'avremo considerando che g, h, k sodisfano le (22). Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}&=2(b-c)\frac{d(b-c)}{dt}u+\frac{du}{dt}(b-c)^2+2(b+c)\frac{d(b+c)}{dt}u'+(b+c)^2\frac{du'}{dt}= \\ &=-[(b+c-2a)vw+(b+c+2a)v'w'](b-c)- \\ &\qquad\qquad [(b-c+2a)vw'+(b-c-2a)v'w](b+c) \\ &=(c^2-b^2)qr+(b-c)(qr_1+rq_1)a-(b+c)(rq_1-qr_1)a= \\ &=(c^2-b^2)qr+2abqr_1-2acrq_1; \end{aligned}$$

d'altra parte abbiamo

$$h=(c^2+a^2)q-2acq_1 \;,\; k=(a^2+b^2)r-2abr_1,$$

quindi:

$$(24)\quad \frac{dg}{dt}=hr-kq;$$

ed analogamente dimostreremmo che si ha

$$(24)\quad \frac{dh}{dt}=pk-rg \;,\; \frac{dk}{dt}=qg-ph.$$

Abbiamo quindi intanto una soluzione particolare delle (22); ad avere le altre due moltiplichiamo la prima delle

(22) per θ, la 2.ª per θ' la 3.ª per θ'' e sommiamo ed integriamo, otterremo così l'equazione

$$\theta^2+\theta'^2+\theta''^2=\text{cost.}$$

Moltiplichiamo poscia la prima delle (24) per θ la 2.ª per θ' la 3.ª per θ'' e sommiamo le equazioni che ne risultano con quelle che si ricavano dalle (22) moltiplicando la 1.ª per g, la 2.ª per h, la 3.ª per k; allora integrando si avrà

$$\theta g+\theta' h+\theta'' k=\text{cost.}$$

Ora, non cercando che soluzioni particolari, potremo dare valori particolari alle costanti arbitrarie che entrano nelle precedenti equazioni e per semplicità le prenderemo uguali a zero; e con questo aggiungendo al quadrato della equazione:

$$\theta g+\theta' h=-\theta'' k$$

l'equazione

$$-\theta^2-\theta'^2=\theta''^2$$

moltiplicata per g^2+h^2 avrò:

$$\theta''^2\omega^2=-(\theta h-\theta' g)^2,$$
$$\theta''\omega i=\theta h-\theta' g$$
$$\theta=-h\frac{kg-i\omega h}{g^2+h^2}\theta'' \ , \ \theta'=-\frac{g\omega i+hk}{g^2+h^2}\theta'',$$

e sostituendo nella 3.ª delle (22) si avrà

$$\log\theta''=-\tfrac{1}{2}\log(g^2+h^2)+\omega i\int\frac{pg+qh}{g^2+h^2}dt+\text{Cost.}$$

Un terzo sistema d'integrali particolari si otterrebbe

cangiando in questa equazione i in $-i$. Abbiamo così con una sola quadratura il mezzo di aver tre soluzioni dell'equazioni (22), colle quali potremo formare gli integrali generali di quelle equazioni.

Lo stesso processo di calcolo si può applicare alle (23) per la determinazione di $\alpha_1, \beta_1, \ldots . \gamma_1''$.

Alla integrazione dei due sistemi di equazioni (22) e (23) abbiamo dunque sostituito due quadrature; quindi adottando il sistema (α) si avrà un sistema d'equazioni differenziali del 7.° ordine con due quadrature da eseguire, mentre col sistema (a) invece si ha da integrare un sistema d'equazioni differenziali del 9.° ordine.

12. Osserviamo che variando i segni delle quantità uu', vv', ww' le equazioni che compongono il sistema (α) restano invariate se la mutazione dei segni è tale che rimangano inalterati i segni delle quantità

$$uvw \ , \ u'vw' \ , \ uv'w' \ , \ u'v'w.$$

Quindi possiamo cangiare i segni delle 3 quantità u', v', w' ed allora p, q, r si cangiano in p_1, q_1, r_1 e viceversa, conseguentemente le $\alpha, \beta, \ldots\ldots \gamma''$ si cangiano in $\alpha_1, \beta_1, \ldots . \gamma_1''$; ma dalla semplice ispezione delle equazioni che han luogo tra $l, m \ldots . n''$ ed $a, b, c, \alpha, \beta, \ldots . \gamma_1''$, che nel n° 7 abbiamo indicato come si possono trovare, e che sono:

$$l=\alpha_1\alpha a+\alpha_1'\alpha' b+\alpha_1''\alpha'' c \ , \ m=\beta_1\alpha a+\beta_1'\alpha' b+\beta_1''\alpha'' c \ ,$$
$$n=\gamma_1\alpha a+\gamma_1'\alpha' b+\gamma_1''\alpha'' c,$$
$$l'=\alpha_1\beta a+\alpha_1'\beta' b+\alpha_1''\beta'' c \ , \ m'=\beta_1\beta a+\beta_1'\beta' b+\beta_1''\beta'' c \ ,$$
$$n'=\gamma_1\beta a+\gamma_1'\beta' b+\gamma_1''\beta'' c,$$
$$l''=\alpha_1\gamma a+\alpha_1'\gamma' b+\alpha_1''\gamma'' c \ , \ m''=\beta_1\gamma a+\beta_1'\gamma b+\beta_1''\gamma'' c \ ,$$
$$n''=\gamma_1\gamma a+\gamma_1'\gamma' b+\gamma_1''\gamma'' c \ ,$$

si vede che questo cangiamento fa permutare fra loro le quantità:

$$(l', m) \qquad (l'', n) \qquad (n', m'')$$

e ciò ci mostra che ad ogni moto espresso dalle equazioni:

$$(10) \qquad x = l\frac{x_0}{a_0} + m\frac{y_0}{b_0} + n\frac{z_0}{c_0} \; ; \; y = l'\frac{x_0}{a_0} + m'\frac{y_0}{b_0} + n'\frac{z_0}{c_0} \; ;$$
$$z = l''\frac{x_0}{a_0} + m''\frac{y_0}{b_0} + n''\frac{z_0}{c_0}$$

corrisponde un' altro moto cui appartengono le equazioni:

$$(25) \qquad x = l\frac{x_0}{a_0} + l'\frac{y_0}{b_0} + l''\frac{z_0}{c_0} \; , \; y = m\frac{x_0}{a_0} + m'\frac{y_0}{b_0} + m''\frac{z_0}{c_0} \; ,$$
$$z = n\frac{x_0}{a_0} + n'\frac{y_0}{b_0} + n''\frac{z_0}{c_0} ;$$

vale a dire, le equazioni (α) mentre ci stanno a definire un moto capace di portare nel tempo t la molecola dm dal punto (x_0, y_0, z_0) al punto (x, y, z) di cui le coordinate sono date dalle (10), possono anche definirci un moto che porterebbe una molecola dm dal punto (x_0, y_0, z_0) al punto $(x, y, z,)$ di cui le coordinate sono date dalle (25). Evidentemente il seguire l'una o l'altra via, il giungere all'uno od all'altro punto dipenderà dalle forze che agiranno sull'ellissoide al principio del tempo, peraltro le equazioni differenziali dei due moti rimanendo sempre le stesse si vede che i valori che esse daranno per a, b, c alla fine del tempo t saranno sempre gli stessi tanto nell' un moto come nell'altro; cioè tanto se le particelle seguono le vie date dalle (10) quanto quelle determinate dalle (25), alla fine del medesimo tempo, l'ellissoide prende la stessa forma. Se noi dunque supponiamo di avere due ellissoidi uguali e che uno di essi sia messo in moto, potremo sempre dare un moto all' altro

per modo che mentre i moti di due particelle corrispondenti dei due ellissoidi sono diversi pure nell'istesso istante i due ellissoidi abbiano la stessa forma. In ciò consiste il teorema detto di reciprocità del sig. R. DEDEKIND.

Possiamo anche per le ragioni suddette variare i segni di due delle coppie di quantità uu', vv', ww', se per es. si cangiano i segni ad uu', vv', si viene a cangiare il segno alle quantità $pp_1 qq_1$ e per ciò basta cangiare il segno alle quantità $\alpha''\beta''\gamma'\alpha_1''\beta_1''\gamma_1''$ ossia agli assi ζ, ζ, quindi le equazioni differenziali del moto non cambiano se noi cangiamo il segno a due assi dell' istesso nome dei due sistemi ζ, η, ξ ξ_1, η_1, ζ_1.

13. Prendiamo ora a studiare alcuni casi particolari del moto. Ed in primo luogo supponiamo che si abbia:

$$u = u' \; , \; v = v' \; , \; w = w',$$

vale a dire che non vi sia rotazione attorno agli assi ξ_1, η_1, ζ_1 e quindi la loro posizione sia fissa, talchè le equazioni (17) ci daranno

$$(a-b)^2 w - (a+b)^2 w' = cost. \; , \; (a-c)^2 v - (a+c)^2 v' = cost.,$$
$$(b-c)^2 u - (b+c)^2 u' = cost.,$$

ossia per le poste condizioni,

$$abw = cost. \; , \; acv = cost. \; , \; bcu = cost.,$$

od anche, poichè ora u, v, w non sono altro che la metà delle velocità angolari attorno agli assi ξ, η, ζ che abbiamo chiamate p, q, r, avremo:

$$abr = cost \; , \; acq = cost \; , \; bcp = cost.$$

donde si ricava, a causa della equazione della continuità, che, detti p_0, q_0, r_0 i valori iniziali di p, q, r, si ha:

$$(26) \qquad \frac{p}{p_0}=\frac{a}{a_0}\,,\ \frac{q}{q_0}=\frac{b}{b_0}\,,\ \frac{r}{r_0}=\frac{c}{c_0}\,;$$

quindi in questo caso la velocità angolare attorno a ciascun asse è proporzionale alla lunghezza dell' asse stesso.

I moti che secondo il teorema del sig. DEDEKIND sono reciproci a questi ora considerati si otterranno cangiando i segni delle quantità u', v', w' nelle precedenti equazioni, ponendo cioè,

$$u=-u' \ ,\ v=-v' \ ,\ w=-w';$$

per cui ora saranno nulle le rotazioni attorno agli assi principali e detti $p_{1,0}, q_{1,0}, r_{1,0}$ i valori iniziali di p_1, q_1, r_1 avremo:

$$(27) \qquad \frac{p_1}{p_{1,0}}=\frac{a}{a_0}\,,\ \frac{q_1}{q_{1,0}}=\frac{b}{b_0}\,,\ \frac{r_1}{r_{1,0}}=\frac{c}{c_0}\,.$$

Ma gli assi principali rimanendo fissi coincidono costantemente cogli assi delle coordinate (x,y,z) coi quali coincidevano al principio del moto, per cui avremo:

$$x=\xi \ ,\ y=\eta \ ,\ z=\zeta,$$

e le (12) del n° 7 diverranno quindi:

$$x_0=\alpha_1\frac{p_{1,0}}{p_1}\quad x+\alpha_1'\frac{q_{1,0}\,a_0}{q_1\ \ b_0}y+\alpha_0^{1}{}''\frac{r_{1,0}\,a_0}{r_1\ \ c_0}z,$$

$$y_0=\beta_1\frac{p_{1,0}\,b_0}{p_1\ \ a_0}x+\beta_1'\frac{q_{1,0}}{q_1}\quad y+\beta_1''\frac{r_{1,0}\,b_0}{r_1\ \ c_0}z,$$

$$z_0=\gamma_1\frac{p_{1,0}\,c_0}{p_1\ \ a_0}x+\gamma_1'\frac{q_{1,0}\,c_0}{q_1\ \ b_0}y+\gamma_1''\frac{r_{1,0}}{r_1}\quad z.$$

Ora queste devono essere identiche alle (6) del n° 2, talchè si vede che pei moti nei quali gli assi principali coincidono sempre cogli assi coordinati (x,y,z) i coefficenti delle equazioni (6) sodisfano alle condizioni seguenti:

$$\frac{\lambda\mu}{a_0^2}+\frac{\lambda'\mu'}{b_0^2}+\frac{\lambda''\mu''}{c_0^2}=0\,,\ \frac{\lambda\nu}{a_0^2}+\frac{\lambda'\nu'}{b_0^2}+\frac{\lambda''\nu''}{c_0^2}=0\,,\ \frac{\mu\nu}{a_0^2}+\frac{\mu'\nu'}{b_0^2}+\frac{\mu''\nu''}{c_0^2}=0\,,$$

14 Prendiamo adesso particolarmente a studiare il moto di un ellissoide di rotazione che ruota solamente attorno all' asse di simmetria, che supporremo essere quello delle z. Allora detta r la velocità angolare attorno a questo asse, la terza delle (26) darà

$$\frac{c}{c_0}=\frac{r}{r_0},$$

ossia c indicherà che in questo caso la velocità angolare è proporzionale alla lunghezza dell' asse di simmetria. Stante poi la simmetria di questo moto attorno all'asse, è manifesto che se l' ellissoide al principio era di rotazione tale sempre si manterrà durante il moto.

Determiniamo ora la forma che prendono le equazioni differenziali (α) in questo caso particolare in cui si ha

$$a=b \ ,\ u=0 \ ,\ v=0 \ ,\ u'=0 \ ,\ v'=0 \ ,\ w=w'=\frac{r}{2} \ ,\ \frac{c}{c_0}=\frac{r}{r_0}.$$

Le ultime 6 sono identicamente verificate e le due prime si riducono a una sola, talchè le equazioni differenziali distinte che han luogo tra queste quantità sono

$$\tfrac{1}{2}\frac{r_0^2\,a\,c^2}{c_0^2}-\tfrac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2}=\varepsilon\pi a\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\frac{1}{a^2+s}-\frac{\delta}{a},$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{d^2c}{dt^2}=\varepsilon\pi c\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\frac{1}{c^2+s}-\frac{\delta}{c},$$

le quali unite alle due equazioni finite

$$\frac{r}{r_0}=\frac{c}{c_0}\ ,\ a^2c=a_0^{\,2}c_0,$$

ci determineranno le 4 incognite funzioni del tempo: a, c, r, δ. A queste equazioni però si può dare una forma diversa chiamando n'' il rapporto $\frac{c}{c_0}$; si ha infatti allora

$$n''^2r_0^{\,2}-\tfrac{3}{4}\frac{1}{n''^2}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2+\frac{1}{2n''}\frac{d^2n''}{dt^2}=2\varepsilon\pi n''\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}\frac{1}{a_0^{\,2}+n''s}-2\frac{\delta n''}{a_0^{\,2}},$$

$$-\frac{1}{2n''}\frac{d^2n''}{dt^2}=\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}\frac{1}{c_0^{\,2}n''^2+s}-\frac{\delta}{c_0^{\,2}n''^2},$$

$$a^2c=a_0^{\,2}c_0\qquad,\qquad r=n''r_0;$$

e sommando le due prime si ha

$$(28)\qquad \delta\left(\frac{2n''}{a_0^{\,2}}+\frac{1}{c_0^{\,2}n''^2}\right)=-n''^2r_0^{\,2}+\tfrac{3}{4}\frac{1}{n''^2}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2+2\varepsilon\pi,$$

giacchè

$$\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}\left\{\frac{1}{\frac{a_0^{\,2}}{n''}+s}+\frac{1}{2(c_0^{\,2}n''^2+s)}\right\}=\int_0^\infty\frac{ds}{2c_0^{\,2}n''^2\left(1+\frac{n''s}{a_0^{\,2}}\right)\left(1+\frac{s}{c_0^{\,2}n''^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\int_0^\infty\frac{dsn''}{a_0^{\,2}\left(1+\frac{n''s}{a_0^{\,2}}\right)^2\left(1+\frac{s}{c_0^{\,2}n''^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=-\left[\frac{1}{\left(1+\frac{n''s}{a_0^{\,2}}\right)\left(1+\frac{s}{c_0^{\,2}n''^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^\infty=1,$$

L'equazione poi delle forze vive diviene

$$a^2r^2+\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{dc}{dt}\right)^2=2\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}+\text{Cost.}$$

ossia

$$(29)\qquad \left(\frac{a_0^{\,2}}{2n''^3}+c_0^{\,2}\right)\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2+2a_0^{\,2}r_0^{\,2}n''=4\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}+\text{Cost.}$$

e finalmente poi eliminando δ tra le trovate equazioni si ha

$$\frac{r_0^{\,2}}{2}a_0^{\,2}n''-\tfrac{1}{2}a\frac{d^2a}{dt^2}+\tfrac{1}{2}c\frac{d^2c}{dt^2}=\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{(a_0^{\,2}-n''^3c_0^{\,2})sds}{\triangle(a_0^{\,2}+sn'')(c_0^{\,2}n''^2+s)}$$

donde

$$(30)\qquad r_0^{\,2}a_0^{\,2}-\tfrac{3}{5}\frac{a_0^{\,2}}{n''}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2+\frac{d^2n''}{dt^2}\left(\frac{a_0^{\,2}}{2n''^3}+c_0^{\,2}\right)$$

$$=2\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{(a_0^{\,2}-n''^3c_0^{\,2})\,sds}{\triangle n''(a_0^{\,2}+sn'')(c_0^{\,2}n''^2+s)}.$$

Le tre equazioni (28) (29) (30) ci daranno le 3 incognite n'',c,δ dalle quali facilissimamente si passa alle 4 incognite del problema a,c,r,δ.

Notiamo però che l'ultima delle (10) prende in questo caso la forma $z=n''z_0$, donde si vede che se la rotazione è variabile essa genera nelle particelle liquide un moto parallelo all'asse z che, per essere simmetrico attorno a quest'asse, conserverebbe esso pure, anche se fosse solo, all' ellissoide la sua forma simmetrica. Le formole che converrebbero a questo moto preso isolatamente si otterrebbero con facilità dalle precedenti supponendovi nullo il valore di r.

15. Alla discussione però di questi moti che conservano ad un ellissoide di rivoluzione la sua forma simmetrica giova premettere lo studio delle variazioni che subisce il potenziale di un'ellissoide quando variano le lunghezze dei suoi semi assi.

Indicando con H il potenziale di un ellissoide di cui i semi assi sono a, b, c, e con h il prodotto costante a, b, c, sarà, tralasciando il fattore costante $\frac{4}{3}$ M:

$$H = h\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}.$$

Ora affinchè la quantità h resti costante e finita è necessario che se uno degli assi diviene infinitesimo un'altro divenga infinito e viceversa, talchè il caso in cui uno degli assi diviene infinito non è distinto essenzialmente da quello in cui uno diviene infinitesimo; ora quando un'asse diviene infinitamente grande gli elementi dell'integrale si annullano e quindi in questo caso $H = o$. Siccome poi tutti gli elementi dell'integrale sono positivi H diverrà un massimo quando la funzione

$$Q = (a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)$$

diviene un minimo; ora se differenziamo questa equazione tenendo conto della condizione d'incompressibilità che dà tra le quantità a, b, c la relazione

$$\frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c} = o,$$

avremo denotando con λ un coefficiente indeterminato:

$$\left(\frac{a^2}{a^2+s} + \lambda\right) da + \left(\frac{b^2}{b^2+s} + \lambda\right) db + \left(\frac{c^2}{c^2+s} + \lambda\right) dc = o,$$

onde

$$\frac{a^2}{a^2+s} = \frac{b^2}{b^2+s} = \frac{c^2}{c^2+s},$$

e quindi:

$$a = b = c;$$

Quindi la funzione H diviene un massimo quando si ha

$$a = b = c = \sqrt[3]{h},$$

cioè quando l'ellissoide diviene una sfera.

Pel caso speciale di un ellissoide di rotazione si vede che il potenziale cresce quando gli assi a e c tendono a divenire uguali e si annulla quando l'ellissoide si schiaccia o si allunga indefinitamente. Per cui volendo considerarlo come funzione di n'' si vede che mentre si annulla con n'', cresce fino a divenire massimo per il valore di n'' che rende gli assi uguali cioè per $n'' = \sqrt[3]{\frac{a_0^2}{c_0^2}}$, e decresce fino ad annullarsi nuovamente quando n'', oltrepassando questo valore, cresce al di là d'ogni limite.

16. Cominciamo dal considerare il caso in cui non vi è rotazione allora la (29) darà

$$\left(\frac{a_0^2}{2n''^3} + c_0^2\right)\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 = 4\varepsilon(H - H_0) + \left(\frac{a_0^2}{2} + c_0^2\right)\left(\frac{dn''}{dt}\right)_0^2,$$

avendo determinato la costante col valore che prende il primo membro nel tempo zero e coll'osservare che n'' nel tempo zero è $= 1$; H_0 indica il valore di H al tempo zero.

Se al principio del tempo non vi fosse stato moto allora sarebbe stato

$$\left(\frac{dn''}{dt}\right)_0 = o;$$

e in questo caso affinchè potesse essere reale $\frac{dn''}{dt}$, bisognerebbe che H fosse maggiore di H_0: se quindi al principio del tempo l'ellissoide fosse stato una sfera tale sempre si sarebbe conservato, se invece fosse stato di forma diversa dalla sfera allora per due valori distinti di n'' sarebbe stato $H=H_0$, talchè n'' potrebbe oscillare tra questi due valori estremi, e mentre n'' va da un valore all' altro gli assi tendono a divenire uguali ed oltrepassando questo stato di eguaglianza divengono disuguali in senso inverso, vale a dire per modo che se prima era $a>c$ dopo è $a<c$, finchè giunto n'' a quel valore pel quale è $H=H_0$ torna a retrocedere, e si hanno quindi nell' ellissoide delle oscillazioni, e tanto nell' andata quanto nel ritorno l' ellissoide passa per lo stato sferico. Il periodo di queste oscillazioni si ricava dalla stessa (29), giacchè detto n_1'' il 2.° valore di n'' pel quale è $H=H_0$, e detto τ il tempo dell'oscillazione, si ha

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}\int_1^{n_1''} dn''\sqrt{\frac{\frac{a_0^2}{2n''^3}+c_0^2}{H-H_0}},$$

e non ostante che la funzione sotto il segno integrale diventi infinita ai limiti, coll'applicazione di un teorema noto, si potrebbe vedere che l' integrale è finito.

Supponiamo invece che $\left(\frac{dn''}{dt}\right)_0$ sia diverso da zero, allora dovrà essere

$$H>H_0-\frac{1}{4\varepsilon}\left(\frac{a_0^2}{2}+c_0^2\right)\left(\frac{dn''}{dt}\right)_0^2.$$

Due casi ora si presentano, o il 2.° membro di questa disuguaglianza è positivo oppure è negativo o nullo. Se il secondo membro è positivo dovrà n'' mantenersi dentro dati

limiti e quindi si hanno delle oscillazioni come prima, ed il periodo facilmente si troverebbe essere

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}\int_1^{n_1''} dn''\sqrt{\frac{\frac{a_0^2}{2n''^3}+c_0^2}{H-H_0+\frac{1}{4\varepsilon}\left(\frac{a_0^2}{2}+c_0^2\right)\left(\frac{dn''}{dt}\right)_0^2}},$$

e per il valore di questo integrale valgono le stesse osservazioni fatte precedentemente.

Se il 2.° membro invece è negativo o nullo, allora qualunque sia il valore di n'' sarà sempre verificata la disuguaglianza; se quindi $\frac{dn''}{dt}$ è negativo ossia se l' ellissoide tende a schiacciarsi allora questo schiacciamento potrà avere continuamente luogo fino a che l' asse c divenga nullo, e se invece $\frac{dn''}{dt}$ è positivo si avrà nell' ellissoide un allungamento indefinito, ed il tempo necessario a questo allungamento o a questo schiacciamento indefinito verrà dato da

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}\int_1^{n_1''} dn''\sqrt{\frac{\frac{a_0^2}{2n''^3}+c_0^2}{H-K}},$$

ove K indica brevemente la costante del 2.° membro dell' equazione delle forze vive, e il limite superiore sarà zero od ∞ a seconda che si avrà uno schiacciamento od un allungamento indefinito; e in ambedue i casi, applicando dei teoremi noti, si riscontra che il valore dell' integrale è infinito.

17. Consideriamo adesso il caso in cui vi sia rotazione ma che questa sia costante; allora sarà pure costante n'' e la forma esterna dell'ellissoide non muterà, e si vede così verificarsi in un caso particolare un teorema che dimostreremo in seguito in modo generale, che cioè ad un moto uniforme è collegata l'invariabilità della forma. Però affinchè il moto sia reale è necessario che tra gli assi abbia luogo una condizione, poichè allora essendo $n''=1$ durante tutto il moto si avrà dalla (30)

$$a_0^2 r_0^2 = 2\varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\triangle} \frac{s(a_0^2 - c_0^2)}{(s+c_0^2)(s+a_0^2)},$$

e quindi affinchè sia reale la rotazione dovrà essere $a_0 > c_0$, ossia l'ellissoide non può conservare la sua forma altro che se è schiacciato.

18. Consideriamo finalmente il caso più generale di una rotazione variabile; allora dalla (29) abbiamo

$$2a_0^2 r_0^2 n'' + \left(\frac{a_0^2}{2n''^3} + c_0^2\right)\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 = 4\varepsilon(\mathrm{H}-\mathrm{H}_0) +$$
$$\left(\frac{a_0^2}{2} + c_0^2\right)\left(\frac{dn''}{dt}\right)_0^2 + 2a_0^2 r_0^2 = 4\varepsilon(\mathrm{H}-\mathrm{H}_0) + \mathrm{K}_0,$$

indicando per brevità con K_0 gli ultimi due termini; quindi affinchè il moto sia reale bisogna che si abbia

$$4\varepsilon\mathrm{H} - 2a_0^2 r_0^2 n'' > 4\varepsilon\mathrm{H}_0 - \mathrm{K}_0 .$$

Per vedere da quali valori di n'' sarà verificata questa disuguaglianza, cerchiamo come varia la funzione

$$\varphi = 4\varepsilon\mathrm{H} - 2a_0^2 r_0^2 n'',$$

che costituisce il primo membro della stessa disuguaglianza. Perciò osserviamo che si ha

$$\frac{d\varphi}{dn''} = 4\varepsilon\frac{d\mathrm{H}}{dn''} - 2a_0^2 r_0^2,$$

ossia

$$\frac{d\varphi}{dn''} = 4\varepsilon\pi \int_0^\infty \frac{ds\ s(a_0^2 - n''^3 c_0^2)}{n''(a_0^2 + sn'')(c_0^2 n''^2 + s)\triangle} - 2a_0^2 r_0^2,$$

e quindi questa derivata mentre è positiva per $n''=o$, è negativa per $n'' = \sqrt[3]{\frac{a_0^2}{c_0^2}}$, e si mantiene sempre negativa mentre n'' cresce al di là di ogni limite. Quindi se ne può conchiudere che mentre φ cresce a partire dal valore zero, corrispondente al valore $n''=o$, fino a divenire massimo per un valore di n'' compreso tra zero e $\sqrt[3]{\frac{a_0^2}{c_0^2}}$, al di là di questo valore di n'' decresce continuamente ed indefinitamente.

Ciò posto se la quantità $4\varepsilon\mathrm{H}_0 - \mathrm{K}_0$ ha il valore massimo che possa prendere φ, n'' dovrà durante l'intero moto conservare il valore che rende massima la funzione φ e si ricade nel caso del moto uniforme.

Se invece il 2.° membro della disuguaglianza è positivo ma diverso dal valore massimo di φ, allora per due diversi valori di n'' il primo membro della disuguaglianza diviene uguale al secondo, talchè come nel caso considerato nel n.° 16 si avrà una serie di oscillazioni periodiche di cui il periodo è dato da

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}} \int_1^{n_1''} dn'' \sqrt{\frac{\frac{a_0^2}{2n''^3} + c_0^2}{\mathrm{H} - \mathrm{H}_0 + \frac{1}{4\varepsilon}(\mathrm{K}_0 - a_0^2 r_0^2 n'')}}.$$

Se invece il 2.° membro è negativo, allora qualunque valore di n'' minore di quello che rende il primo membro uguale al secondo verifica la disuguaglianza e conseguentemente il valore di n'' dovrà sempre decrescere fino ad annullarsi, per cui l'ellissoide tenderà continuamente a schiacciarsi. Ma dalla equazione

$$\frac{r}{r_0}=\frac{c}{c_0},$$

si vede che quando al principio ha luogo una rotazione attorno all'asse di simmetria, non potendo ammettersi che la velocità angolare attorno a questo divenga infinita, l'ellissoide non potrà indefinitamente allungarsi.

Per tutti questi moti si vede dalla (28) che δ si manterrà positivo finchè $n''^2 r_0^2$ ossia r^2 non oltrepasserà certi valori, ed al di là di questi bisognerebbe per la fisica possibilità del moto che vi fosse una sufficiente pressione esterna.

19. Prendiamo ora a considerare il caso in cui gli assi dell'ellissoide mobile rimangono costanti durante l'intero moto, e vedremo che in questo caso almeno una delle 3 coppie di quantità u, u', v, v', w, w', deve esser zero.

Per dimostrare ciò riprendiamo le 3 equazioni (α) che hanno il secondo membro diverso da zero moltiplichiamole respettivamente per a, per b, per c, e sommiamole; avremo

$$\begin{aligned}(31)\quad 3\delta+u^2(b-c)^2+v^2(a-c)^2+w^2(a-b)^2+u'^2(b+c)^2+v'^2(c+a)^2&\\ +w'^2(a+b)^2=\varepsilon(a^2\mathrm{A}+b^2\mathrm{B}+c^2\mathrm{C})=\varepsilon\mathrm{H},&\end{aligned}$$

poichè, essendo costanti i semi assi, si annullano le derivate seconde che entrano nei primi membri ed inoltre si ha

$$a^2\mathrm{A}+b^2\mathrm{B}+c^2\mathrm{C}=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}\left\{\frac{a^2}{a^2+s}+\frac{b^2}{b^2+s}+\frac{c^2}{c^2+s}\right\}=$$

$$=3\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}-\pi\int_0^\infty\frac{sds}{\triangle}\left\{\frac{1}{a^2+s}+\frac{1}{b^2+s}+\frac{1}{c^2+s}\right\}=$$

$$=3\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}+2\pi\left[\frac{s}{\triangle}\right]_0^\infty-2\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}=\pi\int\frac{ds}{\triangle}=\mathrm{H}.$$

Sottraendo la (31) dalla equazione delle forze vive che immediatamente si forma colla espressione di T trovata nel n.° 8 osservando che adesso gli assi sono di grandezza costante e quindi i primi tre termini sono nulli, si avrà

$$3\delta=-\varepsilon\mathrm{H}+\mathrm{Cost},$$

donde si vede che δ è costante poichè tale è anche H a causa della immutabilità della forma dell'ellissoide.

Indicando adesso con $\partial g, \partial h, \partial k$, $\partial g', \partial h', \partial k'$ gli accrescimenti delle quantità g, h, k, g', h', k' respettivamente nel tempo dt, e tenendo conto delle equazioni (18) (19) avremo

$$g\delta g+h\delta h+k\delta k=0 \quad , \quad g'\delta g'+h'\delta h'+k'\delta k'=0,$$

per cui dalla equazione delle forze vive posta sotto la forma

$$\left(\frac{g+g'}{b-c}\right)^2+\left(\frac{h+h'}{c-a}\right)^2+\left(\frac{k+k'}{a-b}\right)^2+\left(\frac{g-g'}{b+c}\right)^2+\left(\frac{h-h'}{c+a}\right)^2+\left(\frac{k-k'}{a+b}\right)^2=$$

$$2\pi\varepsilon\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}+\mathrm{Cost}.$$

avremo

$$\delta g\left[\frac{g+g'}{(b-c)^2}+\frac{g-g'}{(b+c)^2}-\frac{g}{k}\left\{\frac{k+k'}{(a-b)^2}+\frac{k-k'}{(a+b)^2}\right\}\right]+$$
$$\delta h\left[\frac{h+h'}{(a-c)^2}+\frac{h-h'}{(c+a)^2}-\frac{h}{k}\left\{\frac{k+k'}{(a-b)^2}+\frac{k-k'}{(a+b)^2}\right\}\right]+$$
$$\delta g'\left[\frac{g+g'}{(b-c)^2}-\frac{g-g'}{(b+c)^2}+\frac{g'}{k'}\left\{\frac{k+k'}{(a-b)^2}-\frac{k-k'}{(a+c)^2}\right\}\right]+$$
$$\delta h'\left[\frac{h+h'}{(c-a)^2}-\frac{h-h'}{(c+a)^2}-\frac{h'}{k'}\left\{\frac{k+k'}{(a-b)^2}-\frac{k-k'}{(a+b)^2}\right\}\right]=0,$$

ossia per le (16) e (17)

$$\delta g\left\{u+u'-\frac{g}{k}(w+w')\right\}+\delta h\left\{v+v'-\frac{h}{k}(w+w')\right\}+$$
$$+\delta g'\left\{u-u'-\frac{g'}{k'}(w-w')\right\}+\delta h'\left\{v-v'-\frac{h'}{k'}(w-w')\right\}=0,$$

od anche

$$\delta g(p-\frac{g}{k}r)+\delta h(q-\frac{h}{k}r)+\delta g'(p_1-\frac{g'}{k'}r_1)+\delta h'(q_1-\frac{h'}{k'}r_1)=0;$$

e siccome δg, δh, $\delta g'$, $\delta h'$ sono indipendenti fra loro, dovrà aversi

$$p-\frac{g}{k}r=0\ ,\ q-\frac{h}{k}r=0\ ,\ p_1-\frac{g'}{k'}r_1=0\ ,\ q_1-\frac{h'}{k'}r_1=0,$$

Ora g,h,k sodisfano alle equazioni (24), quindi queste prime due equazioni ci dicono che g ed h e conseguentemente anche k sono costanti, come pure g',h',k' che debbono sodisfare le (23). Quando dunque i semi assi dell' ellissoide sono costanti le quantità g,h,k, g',h',k' sono pure costanti, e quindi lo sono anche le altre u,u', v,v', w,w'. Ma se le

quantità g,h,k sono costanti e differenti da zero gli assi principali dell' ellissoide sono fissi; come pure se sono costanti e differenti da zero le quantità g',h',k' non vi sarà moto attorno agli assi ξ_1,η_1,ζ_1. Ora eccettuando il caso in cui l'ellissoide si muta in una sfera e costantemente conserva quella forma, è chiaro che non possono gli assi principali e gli assi $\xi_1\eta_1\zeta_1$ essere fissi di posizione e le costanti delle aree projettate sopra i vari piani avere tutte valori diversi da zero. Bisogna quindi, se l' ellissoide non è una sfera, che almeno una delle 6 quantità g,h,k, g',h',k' sia nulla. Supponiamo quindi per es. $g=0$, allora bisognerà distinguere due casi 1.° $b=c$ 2.° b diverso da c.

Nel 1.° caso avremo $u'=0$ e la seconda coppia delle 6 ultime equazioni (α) darà:

$$u(c+a-2b)w=0\ ,\ u(c-a-2b)w'=0\ ,$$

ossia

$$uw(a-b)=0\ ,\ uw'(a+b)=0\ ;$$

Quindi o sarà $u=0$ ed il teorema è dimostrato, oppure giacchè a deve essere diversa da b, altrimenti si ricadrebbe nel caso di una sfera, sarà

$$w=w'=0,$$

e quindi il teorema è dimostrato per gli ellissoidi di rotazione.

Nel 2.° caso le ultime 4 equazioni (α) daranno

$$u\left\{w(c+a-2b)(b+c)^2-w'(c+a+2b)(b-c)^2\right\}=0,$$

$$u\left\{w(c-a+2b)(b-c)^2-w'(c-a-2b)(b+c)^2\right\}=o,$$

$$u\left\{v(b+a-2c)(b+c)^2-v'(b+a+2c)(b-c)^2\right\}=o,$$

$$u\left\{v(b-a+2c)(b-c)^2-v'(b+a-2c)(b+c)^2\right\}=o;$$

e quindi od u e per conseguenza u' è zero ed il teorema è dimostrato, oppure uno dei due sistemi di incognite v, v', w, w' deve essere zero altrimenti si avrebbe che ciascuno dei determinanti dei due sistemi di equazioni dovrebbe essere nullo ossia si dovrebbe avere

$$(b+c)^4[(c-2b)^2-a^2]-(b-c)^4[(c+2b)^2-a^2]=o,$$

$$(b+c)^4[(b-2c)^2-a^2]-(b-c)^4[(b+2c)^2-a^2]=o,$$

donde si ricaverebbe

$$3(b^2-c^2)[(b-c)^4-(b+c)^4]=o,$$

ossia, dovendo essere b diverso da c,

$$(b-c)^4=(b+c)^4,$$

equazione assurda a meno che non si ammetta che uno degli assi sia sempre zero caso che si esclude da per se, ed il teorema resta completamente dimostrato.

20. La condizione che una delle coppie di quantità u, u', v, v', w, w' si annulli per es: $u=u'=o$, non solamente è necessaria ogni qualvolta gli assi sono costanti, ma è altresì sufficiente perchè gli assi siano costanti, ed infatti le ultime quattro equazioni (α) integrate in

questo caso ci danno

$$(c-a)^2v=\text{cost}\,,\ (c+a)^2v'=\text{cost}\,,\ (a-b)^2w=\text{cost}\,,\ (a+b)^2w'=\text{cost},$$

ed ora se nelle altre equazioni (α)

$$(b+c-2a)vw+(b+c+2a)v'w'=o,$$

$$(b-c+2a)vw'+(b-c-2a)v'w=o,$$

sostituiremo per v, v', w, w' i valori tolti dalle precedenti equazioni, avremo due relazioni distinte tra a, b, c e delle costanti, e queste unite alla equazione

$$abc=\text{cost},$$

ci determineranno valori costanti per a, b, c.

Manifestamente però si vede che questo ragionamento non può più farsi se due sono le coppie di quantità che si annullano, perchè allora quelle equazioni divengono delle identità.

21. Abbiamo veduto nel numero 19 che se gli assi sono costanti sono pure costanti le quantità u, u', v, v', w, w' e quindi possiamo dire che ad una forma esterna costante corrisponde sempre un moto uniforme; ora possiamo dimostrare la reciproca che cioè ad un moto uniforme corrisponde una forma esterna costante. Infatti sostituendo nelle equazioni (16) e (17) per g, h, k, g', h', k' i loro valori espressi per mezzo degli assi e delle quantità u, u', v, v', w, w' avremo due relazioni tra a, b, c e delle costanti che unite alla solita equazione della incompressibilità determineranno per a, b, c valori costanti. Non possiamo dunque supporre che le quantità u, u', v, v', w, w' abbiano tutte valori costanti a meno che non si ammetta che una coppia almeno sia zero.

22. Consideriamo ora più estesamente il caso in cui, gli assi essendo costanti, una sola coppia di quantità per es: u, u' sia zero e le altre diverse da zero.

Dalle (α) si avrà:

$$(b+c-2a)vw+(b+c+2a)v'w'=o,$$
$$(b-c+2a)vw'+(b-c-2a)v'w=o,$$

donde si cava

$$\frac{v'^2}{v^2}=\frac{(2a-b-c)(2a+b-c)}{(2a+b+c)(2a+c-b)}=\text{cost.}$$
$$\frac{w'^2}{w^2}=\frac{(2a-b-c)(2a-b+c)}{(2a+b+c)(2a-c+b)}=\text{cost};$$

e ponendo

$$\mathrm{S}=\frac{v'^2}{(2a-b-c)(2a+b-c)}=\frac{v^2}{(2a+b+c)(2a+c-b)},$$
$$\mathrm{T}=\frac{w'^2}{(2a-b-c)(2a-b+c)}=\frac{w^2}{(2a+b+c)(2a+b-c)},$$

ed introducendo queste quantità nelle equazioni (α) che hanno il secondo membro diverso da zero troveremo con un calcolo assai semplice:

$$(4a^2-b^2-3c^2)\mathrm{S}+(4a^2-3b^2-c^2)\mathrm{T}+\frac{\delta}{2a^2}=\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{A},$$
$$(b^2-c^2)\,\mathrm{T}+\frac{\delta}{2b^2}=\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{B},$$
$$(c^2-b^2)\mathrm{S}\qquad\qquad+\frac{\delta}{2c^2}=\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{C}.$$

Da questo sistema di equazioni si possono ricavare i valori di S, T e δ col noto mezzo dei determinanti.

Il denominatore, ponendo per brevità

$$\mathrm{D}=4a^4-(b^2+c^2)a^2+b^2c^2,$$

e trascurando il fattore $\frac{1}{2}$ che è anche al numeratore, sarà

$$\frac{1}{a^2}\begin{vmatrix}4a^4-(b^2+c^2)a^2-2c^2a^2\,, & 4a^4-(b^2+c^2)a^2-2b^2a^2 & 1\\ o & b^2-c^2 & \frac{1}{b^2}\\ c^2-b^2 & o & \frac{1}{c^2}\end{vmatrix}=$$
$$=\mathrm{D}\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2b^2c^2};$$

per cui

$$\mathrm{S}=\frac{\varepsilon}{2(c^2-b^2)\mathrm{D}}\begin{vmatrix}1-4\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2} & \mathrm{A} & b^2c^2\\ 1 & \mathrm{B} & a^2c^2\\ 0 & \mathrm{C} & a^2b^2\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{a^2-b^2}{(c^2-b^2)\mathrm{D}}\frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty\left\{\frac{b^2-c^2+4a^2}{c^2+s}-\frac{b^2}{a^2+s}\right\}\frac{sds}{\triangle(b^2+s)};$$

e siccome T si ricava da S cangiando b in c e c in b sarà:

$$\mathrm{T}=\frac{a^2-c^2}{(b^2-c^2)\mathrm{D}}\frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty\left\{\frac{c^2-b^2+4a^2}{b^2+s}-\frac{c^2}{a^2+s}\right\}\frac{sds}{\triangle(c^2+s)},$$

e finalmente

$$\delta=\frac{\pi\varepsilon a^2b^2c^2}{\mathrm{D}}\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}\left\{\frac{1}{a^2+s}+\frac{4a^2-b^2-c^2+2s}{(b^2+s)(c^2+s)}\right\};$$

donde si rileva ciò che d'altra parte già sapevamo che cioè δ è costante.

Determinate così le quantità S, T e δ in funzione delle costanti a, b, c noi potremo avere facilmente i valori di v^2, v'^2, w^2, w'^2; ma appunto perchè di queste quantità ci vengono dati i quadrati è necessario determinare a quali condizioni devono sodisfare le costanti a,b,c affinchè questi quadrati risultino positivi e quindi reali le rotazioni.

Noi abbiamo

$$v^2=\left\{(2a-c)^2-b^2\right\}S \quad , \quad v'^2=\left\{(2a+c)^2-b^2\right\}S,$$

$$w^2=\left\{(2a-b)^2-c^2\right\}T \quad , \quad w'^2=\left\{(2a+b)^2-c^2\right\}T,$$

quindi si fa luogo a considerare quattro casi:

$$\begin{array}{lll} 1^0) & (2a-c)^2-b^2>o \;, & S>o \;; \\ & (2a-b)^2-c^2>o \;, & T>o \;; \\ 2^0) & (2a+c)^2-b^2<o \;, & S<o \;; \\ & (2a-b)^2-c^2>o \;, & T>o \;; \\ 3^0) & (2a-c)^2-b^2>o \;, & S>o \;; \\ & (2a+b)^2-c^2<o \;, & T<o \;; \\ 4^0) & (2a+c)^2-b^2<o \;, & S<o \;; \\ & (2a+b)^2-c^2<o \;, & T<o \;; \end{array}$$

Ma se noi supponiamo che b sia maggiore di c allora i casi 3) e 4) non possono più aver luogo e si hanno soltanto a considerare i casi 1) e 2)

1) Sommando le due prime disuguaglianze esse ci danno

$$a>\frac{c+b}{2},$$

e quindi $D>o$, e l'integrale contenuto in S è positivo poichè può scriversi sotto la forma:

$$\int_o^\infty \frac{ds}{\Delta^3}\frac{s}{a^2b^2c^2}\left\{a^2(4a^2+b^2-c^2)-b^2c^2+s(4a^2-c^2)\right\}$$

ed ora si ha

$$4a^2>c^2 \;,\; (4a^2+b^2-c^2)a^2>2a^2(b^2+bc)>\tfrac{1}{2}(b+c)^2(b^2+bc)>b^2c^2.$$

Parimenti si vedrebbe che l'integrale contenuto in T è positivo; quindi affinchè contemporaneamente siano

$$T>o \quad , \quad S>o,$$

è necessario che si abbia $a<b$, e perciò sarà

$$\frac{b+c}{2}\leqq a\leqq b,$$

e b può crescere all'infinito.

2) In questo caso la prima e la seconda disuguaglianza danno

$$\frac{b-c}{2}>a,$$

e poichè l'integrale contenuto in T diviene

$$\int_o^\infty \frac{ds}{\Delta^3}\left\{a^2(4a^2-b^2+c^2)-b^2c^2+(4a^2-b^2)s\right\}\frac{s}{a^2b^2c^2},$$

e si ha

$$4a^2-b^2<o \quad , \quad 4a^2-b^2+c^2<o,$$

si vede che l'integrale è negativo, e volendo che T sia negativo bisognerà prendere gli assi per modo che sia

$$D(c^2-a^2)>o.$$

Ora qui abbiamo due casi da considerare cioè quello di

$$c^2>a^2, \text{ e quello di } c^2\leqq\frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2},$$

ciò che ci mostra che nel valore di c vi è una discontinuità.

Consideriamo separatamente questi due casi, ed osserviamo che nel primo alla condizione $T>o$ dovendo andare collegata l'altra $S<o$, siccome il segno di S è uguale a quello del numeratore dell'integrale in esso contenuto poichè D ora è positivo, questo caso non potrà avverarsi che quando l'integrale sarà negativo.

Nel secondo caso $c^2<a^2$, e quindi essendo

$$c^2(b^2-a^2)<a(b^2-4a^2).$$

sarà $D<o$, e l'integrale contenuto in S sarà positivo perchè

$$4a^2+b^2-c^2>o.$$

Quindi vi saranno i seguenti tre casi distinti da considerare:

1.º) $\frac{b+c}{2}\leqq a\leqq b$;

2.º) $\frac{b-c}{2}\geqq a,\qquad \int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\frac{s}{(b^2+s)}\left\{\frac{b^2-c^2+4a^2}{c^2+s}-\frac{b^2}{a^2+s}\right\}\leqq o$;

3.º) $\frac{b-c}{2}\geqq a,\qquad c^2\leqq\frac{a^2(b^2-4a^2)}{(b^2-a^2)}$.

Nei casi 1.° e 2.° $D>o$, e quindi δ che può scriversi sotto la forma

$$\delta=\frac{\varepsilon\pi}{D}\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle^3}\left\{3s^2+6a^2s+D\right\}$$

è positivo; ma nell'ultimo caso $D<o$ ed allora il valore

di δ è positivo solo dentro certi limiti, e quindi al di là di questi limiti il moto non sarà fisicamente possibile senza una sufficiente pressione esterna.

23. Supponiamo ora che due siano le coppie di quantità che si annullano, che si abbia cioè contemporaneamente

$$u=o\quad,\quad u'=o\quad,\quad v=o\quad,\quad v'=o.$$

Allora, come abbiamo veduto, non ne viene la conseguenza che gli assi siano costanti, ma possiamo peraltro limitarci a considerare questo caso.

Indicando con τ, τ' due costanti, si avrà dalle ultime equazioni (α)

$$(a-b)^2w=\text{cost.}=\tau\quad,\quad (a+b)^2w'=\text{cost.}=\tau',$$

e le tre equazioni (α) che hanno il secondo membro diverso da zero diverranno:

$$\frac{\tau^2}{(a-b)^3}+\frac{\tau'^2}{(a+b)^3}=\varepsilon a\mathrm{A}-\frac{\delta}{a},$$
$$\frac{\tau^2}{(a-b)^3}+\frac{\tau'^2}{(a+b)^3}=b\mathrm{B}-\frac{\delta}{b},$$
$$o=\varepsilon c\mathrm{C}-\frac{\delta}{c};$$

e l'equazione delle forze vive ora si ridurrà a

$$\frac{\tau^2}{(a-b)^2}+\frac{\tau'^2}{(a+b)^2}=2\varepsilon\mathrm{H}+\text{cost.}$$

Eliminando δ dalle precedenti equazioni si ha

$$\frac{\varepsilon\pi}{b}\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\frac{(b^2-c^2)s}{(b^2+s)(c^2+s)}=\frac{\tau'^2}{(a+b)^3}-\frac{\tau^2}{(a-b)^3}=\mathrm{K},$$

$$\frac{\varepsilon\pi}{a}\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\frac{(a^2-c^2)s}{(a^2+s)(c^2+s)}=\frac{\tau'^2}{(a+b)^3}+\frac{\tau^2}{(a-b)^3}=\mathrm{L};$$

e se si ammette che b sia maggiore di a, allora sommando e sottraendo queste due equazioni si avrà

$$2\frac{\tau'^2}{(a+b)^3}=\mathrm{K}+\mathrm{L} \quad , \quad 2\frac{\tau^2}{(a-b)^3}=\mathrm{K}-\mathrm{L};$$

per cui affinchè w e w' abbiano valori reali dovrà essere $\mathrm{L}<\mathrm{K}$ e K positivo, ossia $c<b$. La prima condizione è soddisfatta per $c=a$, quindi lo sarà anche per valori di c dalle due parti di a in un campo finito; non pertanto essi non potranno estendersi fino a $c=b$ nè a $c=o$, perchè per $c=b$ sarebbe $\mathrm{K}=o$, $\mathrm{L}<o$ e quindi τ'^2 sarebbe negativo e w' immaginario; e per $c=o$ siccome abbiamo:

$$\frac{\mathrm{K}}{c}=\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{(b^2-c^2)s\,ds}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}(b^2+s)^{\frac{3}{2}}(c^2+s)^{\frac{3}{2}}},$$

sarebbe

$$\lim_{c=o}\frac{k}{c}=\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{sb^2ds}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}(b^2+s)^{\frac{3}{2}}s^{\frac{3}{2}}}$$

e ponendo b^2s in luogo di s, avremmo

$$\lim_{c=o}\frac{\mathrm{K}}{c}=\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{sb^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

ed analogamente

$$\lim_{c=o}\frac{\mathrm{L}}{c}=\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{sa^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

ossia

$$\lim\frac{\mathrm{L}}{c}>\lim\frac{\mathrm{K}}{c},$$

e quindi

$$\mathrm{L}>\mathrm{K},$$

contro la condizione posta.

Ciò premesso, onde chiaramente svolgere la discussione dei diversi casi nei quali possono trovarsi gli assi sarà utile il determinare le espressioni di $\mathrm{K}-\mathrm{L}$ e di $\mathrm{K}+\mathrm{L}$, per le quali coll' effettiva sottrazione si trova

$$\mathrm{K}-\mathrm{L}=\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds.s.}{\triangle}\cdot\frac{a(b^2-c^2)(a^2+s)-(a^2-c^2)b(b^2+s)}{ab(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$$

$$=\varepsilon\pi(b-a)\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\left\{\frac{s-ab}{(a^2+s)(b^2+s)}+\frac{c^2}{ab(c^2+s)}\right\},$$

$$\mathrm{K}+\mathrm{L}=\varepsilon\pi(b+a)\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\left\{\frac{s+ab}{(a^2+s)(b^2+s)}-\frac{c^2}{ab(c^2+s)}\right\};$$

e ora per queste si ha

$$(31)\left\{\begin{aligned} w^2&=\frac{\tau^2}{(b-a)^4}=\frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\left\{\frac{s-ab}{(a^2+s)(b^2+s)}+\frac{c^2}{ab(c^2+s)}\right\},\\ w'^2&=\frac{\tau'^2}{(b+a)^4}=\frac{\varepsilon\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\left\{\frac{s+ab}{(a^2+s)(b^2+s)}-\frac{c^2}{ab(c^2+s}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Ora quando b tende verso l' infinito, K che è dell' ordine —,1 rispetto a b tenderà verso zero, e quindi, se a e c conservano valori finiti, affinchè sia sempre sodisfatta la condizione $K > L$ è necessario che $a^2 - c^2$ tenda verso zero.

Quando invece b tende verso a, allora il valore massimo che possa prendere c, il quale non può raggiungere il valore b, sarà a; e per avere il minimo che possa prendere c, osserveremo che, siccome la differenza K—L decresce con c, e c non ha altra restrizione che di rendere positiva quella differenza, così il valore minimo di c sarà quello che renderà un minimo quella differenza ossia l' annullerà. Bisogna quindi, per avere questo limite minimo, cercare il valore di c che annulla l' integrale che entra in quella differenza quando b tende verso a; e siccome il fare $b=a$ nell' integrale non lo rende infinito, così per determinare il limite di c potremo fare $b=a$ nell' integrale stesso. Per ottenere questo valore di c siamo quindi condotti alla determinazione dell' integrale

$$T=\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\left\{\frac{s-a^2}{(a^2+s)^2}+\frac{c^2}{a^2(c^2+s)}\right\},$$

ove però ora

$$\triangle=\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{c^2}}.$$

Per eseguire questa integrazione riduco allo stesso denominatore le due frazioni sotto il segno, e pongo per brevità

$$\frac{c}{a}=\text{sen}\varphi=x,$$

ciò che è lecito poichè abbiamo osservato che $c < a$; si ha allora

$$T=\int_0^\infty \frac{ds}{a^6x^2\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{a^2x^2}\right)^{\frac{2}{3}}}\left\{s^2(1+x^2)+s(3x^2-1)a^2\right\}a,$$

e ponendo successivamente s in luogo di $\frac{s}{a^2}$ e poi y^2 in luogo di $s+x^2$, si ottiene

$$T=2\int_x^\infty \frac{dy.x.}{(1+y^2-x^2)^3y^2}\left\{(1+x^2)y^4+(x^2-1-2x^4)y^2+x^2(x^2-1)^2\right\}.$$

Pongo ora $z^2=\frac{x^2}{y^2}$, e con una serie semplice di trasformazioni trovo

$$T=2\int_0^1 \frac{x^2z^2dz}{x^2+(1-x^2)z^2}+2\int_0^1 \frac{x^2z^2dz}{(x^2+(1-x^2)z^2)^2}-4\int_0^1 \frac{x^2z^4dz}{[x^2+(1-x^2)z^2]^3},$$

ossia

$$T=2\frac{x^2}{1-x^2}+\tfrac{3}{2}\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\left\{\frac{x^2}{1-x^2}-\tfrac{3}{2}\frac{x^2}{(1-x^2)}\right\}\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\times$$
$$\text{Arc. tang.}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-2\frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\text{Arc. tang.}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

Ma ricordando la (32) si ha

$$\text{Arc. tang.}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{\pi}{2}-\varphi,$$

quindi

$$T=2\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi}+\frac{3}{2}\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{\cos^4\varphi}+\left\{\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos^3\varphi}-\frac{3}{2}\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos^5\varphi}\right\}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)-2\frac{\mathrm{sen}^3\varphi}{\cos^3\varphi}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right);$$

e uguagliando a zero ed introducendo i coseni ed i seni degli archi multipli si avrà l'equazione in φ

$$(\pi-2\varphi)\{-5+2\cos2\varphi+\cos4\varphi\}+2\,\mathrm{sen}4\varphi+10\,\mathrm{sen}2\varphi=o,$$

che ha soltanto una radice tra o e $\frac{\pi}{2}$ alla quale corrisponde per $sen\ \varphi$ il valore 0,303327 . . . . ; talchè il limite inferiore di c sarà dato da

$$a\times 0,\,303327\ \ldots\ldots$$

Se poi b divenisse uguale ad a, τ necessariamente sarebbe zero poichè non possono esservi velocità angolari infinite, ed allora c può prendere qualunque valore positivo purchè minore di a altrimenti w' sarebbe immaginario.

24. Un caso particolare che merita speciale menzione si è quello in cui $w=w'$ poichè il moto allora si riduce ad una semplice rotazione attorno all'asse c. Ora, la condizione $w=w'$ può esprimersi diversamente, giacchè essa corrisponde all'altra

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\frac{a^2b^2}{(a^2+s)(b^2+s)}=\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}\frac{c^2}{c^2+s},$$

ossia

$$(33)\qquad \int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\frac{1}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)}=\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}\frac{1}{1+\frac{s}{c^2}};$$

quindi quando tra gli assi a, b, c di un ellissoide a tre assi ha luogo la relazione (33), l'ellissoide potrà conservare la sua forma esterna mentre ruota colla velocità angolare r attorno all'asse principale c; ed in tal caso, il moto dovendo essere uniforme, questa velocità angolare r dovrà essere costante. Questo è il teorema di Jacobi. Noi possiamo ancora mercè le (31) determinare il valore di r in funzione degli assi; difatti, osservando che ora $2w=r$, si ha

$$r^2=2\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\triangle}\frac{s}{(a^2-s)(b^2-s)};$$

e siccome dopo il tempo t ogni molecola avrà ruotato d'un angolo rt attorno all'asse z ed in un piano ad esso normale, così

$$x=x_0\cos rt+y_0\,\mathrm{sen}\,rt\ \ ,\ \ y=-x_0\,\mathrm{sen}\,rt+y_0\cos rt\ \ ,\ \ z=z_0$$

saranno le equazioni che ci daranno dopo un tempo qualunque t le coordinate di una molecola che originariamente si trovava nel punto $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Mutando ora il segno a w avremo il moto reciproco pel teorema di Dedekind; ma se $w=-w'$ non vi sarà rotazione attorno all'asse ζ, e quindi gli assi principali dell'ellissoide coincideranno cogli assi coordinati durante l'intero moto; e quindi se la rotazione è costante l'ellissoide conserva sempre la stessa forma tanto se ruota attorno all'asse ζ

quanto se le sue particelle ruotano attorno all'asse ζ. Ora in questo secondo caso avendosi una rotazione uniforme r_1 tale che

$$r_1^2=2(w^2+w'^2)=w'^2=2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}\frac{s}{(a^2+s)(b^2+s)}$$

gli assi ξ_1, η_1 avranno ruotato dopo il tempo t dell'angolo $r_1 t$ attorno all'asse ζ_1, talchè sarà

$$\begin{array}{lll} \alpha_1=\cos r_1 t \;, & \beta_1=\mathrm{sen}\, r_1 t \;, & \gamma_1=0, \\ \alpha_1'=-\mathrm{sen}\, r_1 t \;, & \beta_1'=\cos r_1 t \;, & \gamma_1'=0, \\ \alpha_1''=0 \;, & \beta_1''=0 \;, & \gamma_1''=1; \end{array}$$

per cui siccome ξ, η, ζ ora sono eguali a x, y, z respettivamente, le equazioni (12) daranno

$$x=x_0\cos r_1 t+\frac{a_0}{b_0}y_0\,\mathrm{sen}\, r_1 t \;,\quad y=-x_0\,\mathrm{sen}\, r_1 t.\frac{b_0}{a_0}+y_0\cos r_1 t \;,\quad z=z_0;$$

ed allora le particelle fluide si muoveranno uniformemente attorno all'asse ζ_1 (che, per essere nulle le rotazioni p_1, q_1, coinciderà coll'asse z) per modo da descrivere delle ellissi aventi il centro sull'asse z ed omotetiche alla sezione principale (a_0, b_0).

25. Allorquando gli assi si mantengono costanti durante il moto ed una sola coppia di quantità u, u', v, v', w', w' è zero, per es. $u=o$, $u'=o$, siccome non vi è rotazione attorno all'asse ξ nè attorno all'asse ξ_1, così l'asse della rotazione totale dovrà essere perpendicolare al piano di questi due assi.

Il moto generale può scomporsi in due, uno composto delle due rotazioni q ed r attorno agli assi b e c, l'altro delle due rotazioni q_1, ed r_1, attorno agli assi η_1 e ζ_1. Il primo

equivarrà ad una rotazione attorno ad un asse che passando per l'origine fa cogli assi principali angoli i di cui coseni sono

$$o, \quad \frac{q}{\sqrt{q^2+r^2}} \;, \quad \frac{r}{\sqrt{q^2+r^2}} \;,$$

e che possono, giacchè g è nullo e quindi

$$rh=qk,$$

essere indicati con

$$o, \quad \frac{k}{\omega} \;, \quad \frac{h}{\omega} \;,$$

essendo ora (N. 10) $\omega=\sqrt{h^2+k^2}$.

Il secondo moto poi equivarrà ad un moto attorno ad un asse che farà cogli assi ξ_1, η_1, ζ_1, angoli i cui coseni sono dati da

$$o, \quad \frac{h_1}{\omega_1} \;, \quad \frac{k_1}{\omega_1} \;,$$

essendo ora

$$\omega_1=\sqrt{h_1^2+k_1^2},$$

ed affinchè le molecole per effetto di questo secondo moto si conservino sulla superficie esterna o su quella di un ellissoide omotetico all'esterno bisognerà che le vie percorse dagli elementi siano ellissi omotetiche alla sezione che è coniugata alla direzione dell'asse.

La velocità angolare attorno al primo asse sarà data da

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{qh+rk}{\omega}=\sqrt{q^2+r^2},$$

e quindi, essendo q ed r costanti, il tempo totale della rotazione sarà

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{q^2+r^2}}.$$

Parimenti il tempo della rotazione totale attorno al secondo asse sarà dato da

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{q_1^2+r_1^2}},$$

26. Una delle parti più importanti di questo studio si è certamente quella di stabilire in quali casi la massa fluida prenderà una forma tale che essa la possa conservare durante il moto, imperocchè è in uno di questi stati soltanto che potevano trovarsi gli astri se prima di solidificarsi essi erano allo stato fluido. È anche perciò che negli ultimi numeri ho svolto ampiamente tutti i casi in cui la forma dell'ellissoide si manteneva sempre la stessa. Spingendo più oltre le nostre ricerche, vediamo in quali casi la forma è stabile vale a dire tale che per una piccola alterazione essa tenda oscillando a ritornare nel primitivo stato. Per ciò cominciamo dal dare alle nostre equazioni differenziali (α) un nuovo significato nel caso che si abbia un moto uniforme, vale a dire che $u, u', \ldots g, h, k, g', h', k'$ siano costanti.

Consideriamo il moto di un punto di coordinate $(a,b,c,)$ che è obbligato a rimanere sopra una superficie $abc=cost$, ed è soggetto a forze di cui la funzione potenziale è $-G$, essendo

$$G=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{g+g'}{b-c}\right)^2+\left(\frac{h+h'}{c-a}\right)^2+\left(\frac{k+k'}{a-b}\right)^2+\right.$$
$$\left.\left(\frac{g-g'}{b+c}\right)^2+\left(\frac{h-h'}{c+a}\right)^2+\left(\frac{k-k'}{a+b}\right)\right\}-2\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta},$$

vale a dire uguale ai termini dell' equazione delle forze vive che sono indipendenti dalla variabilità della forma dell'ellissoide. Le equazioni differenziali di questo moto, sono come è noto,

$$\frac{d^2a}{dt^2}=lR+N\lambda\ ,\ \frac{d^2b}{dt^2}=mR+\mu N\ ,\ \frac{d^2c}{dt^2}=nR+\nu N\ ,$$

dove R è la risultante delle forze attive, $l, m, n,$ i coseni degli angoli che la sua direzione fa cogli assi coordinati, e λ,μ,ν i coseni degli angoli che la normale alla superficie fa cogli assi, ed N la resistenza che presenta la superficie.

Ma

$$lR=-2\varepsilon aA+2\left\{(a-c)v^2+(a-b)w^2+(a+c)v'^2+(a+b)w'^2\right\},$$

$$\lambda=\frac{1}{a\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}};$$

e quindi ponendo

$$N=\delta\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\ ,$$

la prima equazione non è altro che la prima delle (α), ed analogamente si vedrebbe che le altre due sono la seconda e la terza delle equazioni (α). Inoltre le altre 6 sono implicite poichè abbiamo conservato tra le quantità u,u', v,v', w,w', g,h,k, g',h',k', le relazioni che abbiamo già trovato nel n.° 9 e di cui le (α) sono una conseguenza; quindi le equazioni del moto di un punto (a,b,c) sopra una superficie d' equazione $abc{=}cost.$ soggetto a forze che hanno la funzione potenziale —G coincidono perfettamente colle equazioni (α).

Affinchè il punto (a,b,c) sia in equilibrio sulla superficie $abc=cost.$ basta che la funzione G sia un massimo od un minimo rispetto alle quantità a,b,c che determinano la posizione del punto, quindi ogni qualvolta questa condizione sarà verificata l'ellissoide conserverà la sua forma. Ora se la funzione G diviene un minimo rispetto ad a,b,c l'equilibrio del punto sulla superficie è stabile e mutando infinitamente poco la posizione del punto, questi dopo una serie di oscillazioni tenderà a riprendere la primitiva posizione, cioè variando allora un poco le lunghezze degli assi dell' ellissoide, queste tenderanno a riprendere i primitivi valori. Ma per la stabilità della forma dell' ellissoide, che è collegata alla stabilità del moto, non basta che gli assi riprendano le loro lunghezze dopo che sono state un poco mutate ma occorre altresì che per piccole mutazioni nel suo moto, questo tenda a riprendere il suo primitivo andamento. Per ciò è necessario che la forza viva dell'ellissoide sia un massimo non solo rispetto alle quantità a, b, c ma anche rispetto alle g,h,k, g',h',k'. Bisognerà quindi trovare i valori di tutte queste quantità che mentre annullano la prima variazione della forza viva rendano negativa la seconda variazione. Ma per la indipendenza che esiste fra le quantità a,b,c da un lato e g,h,k, g',h',k' dall' altro possiamo considerare separatamente queste due parti della variazione.

La prima parte della ricerca abbiamo osservato che si collega colla determinazione dell'equilibrio stabile del punto (a,b,c) sulla superficie $abc{=}cost$, per cui si riduce a rendere un minimo la funzione G ove si considerino come variabili solamente a,b,c. In quanto alla seconda parte della variazione osserviamo che i termini della forza viva dell' ellissoide che dipendono da g,h,k, g',h',k' sono contenuti in —G, che non contiene altri termini dipendenti da queste stesse quantità, talchè la ricerca del massimo della forza viva rispetto alle quantità g,h,k, g',h',k' corrisponde a cercare i valori di queste quantità che rendono un minimo G.

La determinazione adunque della stabilità della forma e del moto dell'ellissoide equivale a quella dei valori che rendono un minimo G.

Le equazioni che si ottengono annullando la prima variazione di G rispetto ad a, b, c sono già state considerate, per ciò ora ci limiteremo a considerare soltanto le equazioni che provengono dall'annullarsi delle altre variazioni.

Per questo osserviamo che essendo:

$$\frac{dG}{dg}=p,\ \frac{dG}{dh}=q,\ \frac{dG}{dk}=r,\ \frac{dG}{dg'}=p_1,\ \frac{dG}{dh'}=q_1,\ \frac{dG}{dk'}=r_1,$$

le equazioni (24) e (23) prendono la forma

$$\frac{dg}{dt}=h\frac{dG}{dk}-k\frac{dG}{dh},\ \frac{dh}{dt}=k\frac{dG}{dg}-g\frac{dG}{dk},\ \frac{dk}{dt}=g\frac{dG}{dh}-h\frac{dG}{dg},$$

$$\frac{dg'}{dt}=h'\frac{dG}{dk'}-k'\frac{dG}{dh'},\ \frac{dh'}{dt}=k'\frac{dG}{dg'}-g'\frac{dG}{dk'},\ \frac{dk'}{dt}=g'\frac{dG}{dh'}-h'\frac{dG}{dg'}.$$

donde si vede che affinchè si annulli la parte della variazione di G dovuta al variare delle quantità g,h,k, g',h',k' è necessario e sufficiente che queste quantità siano costanti.

Dunque la conservazione della forma dell' ellissoide corrisponde sempre all' equilibrio del punto sulla superficie $abc=cost.$ nel caso considerato, cioè non si può avere la conservazione della forma se $g\ h$ . . non sono costanti.

Se nella massa fluida non vi fosse moto, se cioè fosse

$$u=u'=v=v'=w=w'=o.$$

la forma di equilibrio stabile corrisponderebbe a quei valori degli assi che rendono un massimo la quantità

$$H=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta},$$

ed abbiamo già veduto che ciò succede quando gli assi sono uguali fra loro; ossia la forma d' equilibrio stabile d'una massa fluida immobile è la forma sferica.

Per trovare i casi in cui vi è equilibrio stabile e moto nell'istesso tempo, osserviamo che stante la invariabilità della forma della massa fluida una almeno delle coppie di quantità u,u', v,v', w,w' deve essere zero. Supponiamo da prima che sia zero una sola coppia per es. $u=u'=o$ e per conseguenza $g=g=o$.

Può accadere che sia zero anche una delle due quantità ω od ω_1 definite dalle equazioni (18) (19), e tanto che sia zero la prima quanto che sia zero la seconda per le (16) e (17) e per le (α) della pag. 23 si avrà

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{v'^2}{v^2}&=\frac{(a-c)^4}{(a+c)^4}=\frac{(2a-b-c)(2a+b-c)}{(2a+b+c)(2a-b+c)},\\ \frac{w'^2}{w^2}&=\frac{(a-b)^4}{(a+b)^4}=\frac{(2a-b-c)(2a-b+c)}{(2a+b+c)(2a+b-c)};\end{aligned}\right.$$

dalla prima di queste ponendo per brevità

$$-E=3a^4-a^2(b^2+c^2)-b^2c^2,$$

si ottiene

$$(35)\qquad E=o,$$

e siccome la seconda delle (34) si ottiene dalla prima cangiando b in c e c in b, così la seconda ridarebbe la stessa equazione (35). Donde si vede che quando si annulla una delle quantità ω od ω_1 si ottiene tra gli assi la relazione (35).

Dimostriamo ora come in questo caso in cui $u=u'=o$ ed una delle quantità ω, ω_1, per es: ω_1 è nulla non vi può essere nel fluido equilibrio stabile. Infatti abbiamo in questo caso:

$$\delta g^2+2h\delta h+2k\delta k=o$$

ed inoltre per la prima delle (24) si ha ora

$$q : r=h : k,$$

e quindi ora si avrà

$$\frac{dG}{dh} : \frac{dG}{dk}=h : k,$$

talchè, per essere ora anche $\omega'=o$ e quindi $g'=h'=k'=o$, e $\delta g'=\delta h'=\delta k'=o$, la variazione di G dovuta al variare delle quantità $g,h,\ldots$ sarà

$$\delta G=\frac{dG}{dg}\delta g+\frac{dG}{dh}\delta h+\frac{dG}{dk}\delta k=\frac{1}{2}\left[\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2}\right]\delta g^2+q\left[\delta h+\frac{k}{h}\delta k\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2}-\frac{q}{h}\right]\delta g^2.$$

Ma già sappiamo dalla prima delle (34) che posto

$$R^2=[(2a-b)^2-c^2][(2a+b)^2-c^2],$$

si ha

$$\frac{v'^2}{v^2}=\frac{(2a-b-c)(2a+b-c)}{(2a+b+c)(2a-b+c)}=\frac{R^2}{(2a+b+c)^2(2a-b+c)^2}.$$

e siccome

$$\frac{v'}{v}=\frac{q+q_1}{q-q_1},$$

così

$$\frac{q}{q_1}=\frac{(2a+c)^2-b^2\pm R}{\pm R-(2a+c)^2+b^2},$$

e sostituendo nella equazione

$$\frac{h}{q}=(c^2+a^2)-2ca\frac{q_1}{q}$$

trovata alla pag. 23, abbiamo a riduzioni fatte

$$2\frac{h}{q}=b^2+c^2-2a^2\pm R.$$

ed analogamente

$$\frac{2h'}{q_1}=b^2+c^2-2a^2\mp R.$$

Nel nostro caso però, stante l'equazione (35), si ha

$$R=b^2+c^2-2a^2,$$

per cui essendo h diverso da zero sarà

$$\frac{h}{q}=b^2+c^2-2a^2.$$

e quindi

$$\delta G=\frac{1}{2}\left[\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-2a^2)-(b^2-c^2)^2}{(b^2-c^2)(b^2+c^2-2a^2)}\right]\delta g^2$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{a^2(b^2+c^2)-2b^2c^2}{(b^2-c^2)(b^2+c^2-2a^2)}\delta g^2.$$

Ma dovendo le quantità a, b, c, sodisfare alla (35), a dovrà essere compresa tra

$\frac{b+c}{2}$ e b se $c<b$, talchè essendo

$a>\frac{b+c}{2}$, sarà $a^2-bc>o$.

e per conseguenza giacchè

$$b^2+c^2-2a^2=a^2-\frac{b^2c^2}{a^2},$$

sarà

$$b^2+c^2-2a^2>o.$$

ed

$$a^2(b^2+c^2)-2b^2c^2=3a^4-3b^2c^2=3(a^4-b^2c^2)>o.$$

Dunque δG è negativo, ossia il valore di G corrispondente a quei valori di $a,b,c,g\ldots .k'$ non è un minimo poichè lo si può fare decrescere per convenienti variazioni di $g,h\ldots..k'$.

Dimostriamo ora analogamente che in nessuno dei casi in cui una sola coppia u,u' è zero non può il valore di G essere un minimo.

Difatti noi abbiamo

$$\delta G=\tfrac{1}{4}\left[\left(\frac{\delta g+\delta g'}{b-c}\right)^2+\left(\frac{\delta g-\delta g'}{c+b}\right)^2\right]-\frac{q}{2h}\delta g^2-\frac{q_1}{2h'}\delta g'^2 \; .$$

ma dalle formole testè trovate abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{4hh'}{qq_1}&=(b^2+c^2-2a^2)^2-\{4a^2-(b+c)^2\}\{4a^2-(b-c)^2\}\\&=(b^2+c^2)^2+4a^2(b^2+c^2)-12a^4-(b^2-c^2)^2\\&=4\{b^2c^2+a^2(b^2-c^2)-3a^4\}=4\;\mathrm{E};\end{aligned}$$

quindi per questo e per le formule precedenti il discriminante D della espressione di 2.° grado trovata per δG, a riduzioni fatte, sarà

$$\mathrm{D}=\tfrac{3}{4}\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{\mathrm{E}(b^2-c^2)^2}\;.$$

Ora ricordiamo che quando si discussero questi moti nei quali una coppia delle quantità si $u,u'\ldots$ annullava e gli assi

rimanevano costanti (n.° 22) si vide che affinchè il moto sia reale, ammesso che fosse $b>c$. si presentavano i casi distinti seguenti:

$$1^0)\, b\geqq a\geqq\frac{b+c}{2}=2^0)\,\frac{b-c}{2}\geqq a\quad .\quad \int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\frac{s}{b^2+s}\left\{\frac{b^2-c^2+4a^2}{c^2+s}-\frac{b^2}{a^2+s}\right\}\leqq o;$$

$$3^0)\quad \frac{b-c}{2}\geqq a\qquad , \quad . \quad c^2\leqq\frac{a^2(b^2-4a^2)}{b^2-a^2}.$$

Ora nel primo caso il determinante è negativo quando $\mathrm{E}>o$; ed è invece positivo quando $\mathrm{E}<o$; nel 2.° caso poi come nel terzo, si ha $\mathrm{E}>o$ poichè dalla prima disuguaglianza che in questi casi vien verificata si ricava

$$a^2(b^2+c^2)-3a^4+b^2c^2\geqq a^4+2bca^2+b^2c^2>o;$$

quindi poichè in ambedue i casi si ha $a<b$, e nel secondo caso si ha $a<c$ e nel terzo $a>c$, così il determinante nel secondo caso è negativo, e nel terzo è positivo. — Quindi nel terzo caso il determinante è positivo e può esserlo anche nel primo, ma nel secondo e talvolta anche nel primo è negativo.

Quando il determinante è positivo il segno di δG varia col valore di δg e di $\delta g'$ per cui potremo allora prendere i due accrescimenti in modo che δG sia negativo, e per conseguenza G non può per quei valori essere un minimo.

Nei casi 1.° e 2.°, quando il determinante è negativo, il segno di δG è sempre lo stesso. Ora per $\delta g=-\delta g'$ si ha

$$\delta G=\frac{\delta g^2}{(b+c)^2}-\left\{\frac{q}{2h}+\frac{q_1}{2h'}\right\}\delta g^2=\delta g^2\left(\frac{1}{(b+c)^2}-\frac{b^2+c^2-2a^2}{2\mathrm{E}}\right)=$$

$$\delta g^2\left(\frac{2\mathrm{E}-(b+c)^2(b^2+c^2-2a^2)}{2\mathrm{E}(b+c)^2}\right).$$

quindi poichè

$$E=\tfrac{1}{4}\left\{(b^2+c^2-2a^2)^2-R^2\right\},$$

sarà

$$\delta G=\frac{\delta g^2}{4}\left\{\frac{-R^2+(b^2+c^2-2a^2)(b^2+c^2+4bc+a^2)}{E(b+c)^2}\right\}.$$

Ora dalla disuguaglianza $E>o$ si ricava

$$b^2+c^2-2a^2\geqq a^2\left(1-\frac{b^2c^2}{a^4}\right),$$

e di quì risulta intanto che finchè $b^2c^2\leqq a^4$ sarà

$$b^2+c^2-2a^2\geqq o.$$

Quando poi sia $b^2c^2>a^4$, allora si avrà altresì

$$2bc-2a^2>o,$$

e siccome

$$b^2+c^2>2bc,$$

così si avrà sempre

$$b^2+c^2-2a^2>o,$$

e quindi per questo e per essere $E>o$ e $R^2>o$ giacchè $\frac{h}{q}$ è una quantità reale, se ne conclude ora che ∂G è negativo, e resta così dimostrato che ogni qualvolta la sola coppia u, u' si annulla il fluido non può essere in equilibrio stabile.

Consideriamo adesso il caso in cui due sono le coppie di

quantità che si annullano contemporaneamente per es. u,u' e v,v'; allora si ha

$$g=g'=h=h'=o.$$

e la funzione G può porsi sotto la forma:

$$G=\tfrac{1}{4}\left\{\left(\frac{k+k'}{a-b}\right)^2+\left(\frac{k-k'}{a+b}\right)^2\right\}-2\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}$$

$$=w^2(a-b)^2+w'^2(a+b)^2-2\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}$$

che per le posizioni fatte nel n.° 23 può anche scriversi

$$G=\frac{\tau^2}{(a-b)^2}+\frac{\tau'^2}{(a+b)^2}-2\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}.$$

Escludendo dalle nostre considerazioni il caso in cui l'ellissoide è di rotazione, ossia il caso in cui due assi sono uguali fra loro, per le formole dei N. 9 e 10 noi abbiamo:

$$k=\omega\ ,\ k=\omega_1$$
$$\tau=\frac{\omega+\omega_1}{2}\ ,\ \tau'=\frac{\omega-\omega_1}{2}\ ,$$

per cui ogni qualvolta ω e ω_1 hanno lo stesso segno si ha $\tau^2>\tau'^2$ e viceversa; e gli incrementi che potremo dare alle quantità g,h,k , g',h',k' saranno legati dalle condizioni:

$$\delta g^2+\delta h^2+2k\delta k=o\quad .\quad \delta g'^2+\delta h'^2+2k'\delta k'=o;$$

talchè avendosi

$$\delta G=\tfrac{1}{4}\left[\left(\frac{\delta g+\delta g'}{b-c}\right)^2+\left(\frac{\delta g-\delta g'}{b+c}\right)^2+\left(\frac{\delta h+\delta h'}{c-a}\right)^2+\left(\frac{\delta h-\delta h'}{c+a}\right)^2\right]$$
$$+r\delta k+r'\delta k'.$$

e essendo

$$r=\frac{k}{2}\left[\frac{1+\frac{\omega_1}{\omega}}{(a-b)^2}+\frac{1-\frac{\omega_1}{\omega}}{(b+a)}\right] \quad . \quad r'=\frac{k'}{2}\left[\frac{1+\frac{\omega}{\omega_1}}{(a-b)^2}+\frac{1-\frac{\omega}{\omega_1}}{(a+b)^2}\right],$$

si avrà

$$\delta G=\tfrac{1}{4}\left[\left(\frac{\delta g+\delta g'}{b-c}\right)^2+\left(\frac{\delta g-\delta g'}{b+c}\right)^2+\left(\frac{\delta h+\delta h'}{c-a}\right)^2+\left(\frac{\delta h-\delta h'}{c+a}\right)^2\right]$$
$$-\tfrac{1}{4}\left[\frac{1+\frac{\omega_1}{\omega}}{(a-b)^2}+\frac{1-\frac{\omega_1}{\omega}}{(a+b)^2}\right](\delta g^2+\delta h^2)-\tfrac{1}{4}\left[\frac{1+\frac{\omega}{\omega_1}}{(a-b)^2}+\frac{1-\frac{\omega}{\omega_1}}{(a+b)^2}\right](\delta g'^2+\delta h'^2);$$

e siccome gli incrementi δg , δh , $\delta g'$, $\delta h'$ sono arbitrarj potremo prendere $\delta g=-\delta g'$, $\delta h=0$, $\delta h'=0$, ed avremo

$$\delta G=\left\{\frac{1}{(b+c)^2}-\frac{1}{(a+b)^2}-\tfrac{1}{4}\left[\frac{(\omega+\omega_1)^2}{\omega\omega_1(a-b)^2}-\frac{(\omega+\omega_1)^2}{\omega\omega_1(a+b)^2}\right]\right\}\delta g^2=$$
$$=\left\{\frac{1}{(b+c)^2}-\frac{1}{(a+b)^2}-\tfrac{1}{4}\frac{(\omega+\omega_1)^2}{\omega\omega_1}\left[\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{1}{(a+b)^2}\right]\right\}\delta g^2.$$

Ora

$$\frac{1}{(a-b)^2}>\frac{1}{(a+b)^2}.$$

ed osservando le equazioni trovate nel n.° 23. affinchè fosse $c<a$ e quindi

$$\frac{1}{(b+c)^2}>\frac{1}{(a+b)^2}.$$

bisognerebbe che fosse

$$\tau^2(a+b)^3<\tau'^2(b-a)^3.$$

ossia

$$\tau'^2>\tau^2.$$

Ma se ora supponiamo che ω e ω_1 abbiano lo stesso segno certamente è

$$\tau'^2<\tau^2;$$

conseguentemente in questo caso è $c\geqq a$ ed il valore di δG è negativo. Quindi la funzione G non può essere un minimo quando l'ellissoide essendo a tre assi, $\tau^2>\tau'^2$, il che implica che le quantità ω ed ω_1 abbiano lo stesso segno.

Dunque quando l'ellissoide è a tre assi ed **in** moto esso non può essere in equilibrio stabile altro che nel caso in cui siano zero due coppie delle quantità u,u' , v,v' . w,w' ed inoltre $\tau^2\leqq\tau'^2$.

L'annullarsi della prima variazione in questo caso conduce alle note equazioni del n.° 23 mentre la ricerca delle condizioni cui deve essere sottoposta la variazione seconda perchè la funzione sia un minimo conduce a calcoli complicatissimi. Ciò non pertanto possiamo affermare l'esistenza di un minimo poichè la quantità

$$H=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}$$

prende il suo valore massimo per $a=b=c$, come già vedemmo, si annulla quando uno degli assi diviene infinito e quindi un'altro infinitesimo dello stesso ordine perchè il prodotto abc rimanga finito, quindi la funzione G è tale che quando un'asse diventa infinitamente grande essa tende verso un limite positivo che potrebbe anche essere zero; ed in questi casi limiti scegliendo convenientemente gli assi si potrà rendere infinitesima di 2.° ordine la parte positiva di G ed infinitesima di 1.° ordine la parte negativa donde si vede che per convenienti valori degli assi potrà rendersi negativa la funzione G, senza però mai poterla rendere infinitamente negativa. Dall'insieme di queste considerazioni risulta la possibilità di rendere un minimo la funzione G e quindi l'esistenza di una stabilità in questo genere di moto.

27. Ora possiamo osservare che quando si abbia stabilità nel moto dell'ellissoide, il punto di coordinate (a,b,c) obbligato a rimanere sopra la superficie $abc=cost.$ sotto l'azione delle forze che abbiamo considerato sarà in equilibrio stabile, e quindi per le considerazioni fatte da *Duhamel* nel §. 226 del secondo Volume della Meccanica (2.ª edizione), se aggiungiamo una piccolissima forza, farà una serie di piccolissime oscillazioni in modo che avremo:

$$(A)\quad \left\{ \begin{aligned} a&=a_0+\mathrm{R}\,\mathrm{sen}(rt+s)+\mathrm{R}'\,\mathrm{sen}(r't+s') \\ b&=b_0+\mathrm{R}\mathrm{R}_1\mathrm{sen}(rt+s)+\mathrm{R}'\mathrm{R}'_1\mathrm{sen}(r't+s') \\ c&=c_0+\mathrm{R}\mathrm{R}_2\mathrm{sen}(rt+s)+\mathrm{R}'\mathrm{R}'_2\mathrm{sen}(r't+s'). \end{aligned} \right.$$

ove a_0 , b_0 , c_0 sono i valori corrispondenti iniziali di a, b , c; r e r' sono radici sempre reali di una equazione di secondo grado, R_1 e R'_1 sono funzioni determinate di r : R_2, R'_2 sono le medesime funzioni di r'; $\mathrm{R},\mathrm{R}',s,s'$ sono quattro costanti che si determinano mediante i valori iniziali di a, b, $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$; c e $\frac{dc}{dt}$ essendo determinati dalle due condizioni:

$$abc=\text{cost.}\quad .\quad \frac{da}{dt}\frac{1}{a}+\frac{db}{dt}\frac{1}{b}+\frac{dc}{dt}\frac{1}{c}=o.$$

Se r è differente da r' e quindi R_1 da R'_1, R_2 da R'_2 sarà;

$$s=o\ ,\ s'=o.$$

Se poi $r=r'$ o più generalmente se $\frac{r}{r'}$, è commensurabile il moto sarà periodico.

Osserviamo inoltre che tutto ciò accade solo per oscillazioni piccolissime, perchè dovendo essere sempre:

$$abc=\text{cost.}$$

si vede facilmente che non possono aversi per gli assi variazioni finite secondo la legge espressa dalle formule (A). Pertanto abbiamo il seguente teorema:

Quando si abbia stabilità nel moto e nella forma di un ellissoide fluido omogeneo, per l'aggiunta di una piccolissima forza, gli assi compiono delle oscillazioni composte di due piccolissime oscillazioni pendolari; le variazioni degli assi sono periodiche se le durate dei periodi delle due oscillazioni componenti sono commensurabili; non possono però aversi oscillazioni finite sottoposte alla stessa legge di variabilità.

28. Ricerchiamo ora se negli ellissoidi a tre assi vi sono dei moti periodici finiti e determiniamone alcune proprietà. Le funzioni $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ che possono rappresentare a, b, c, dovranno in tal caso essere periodiche e dovendo esserne costante il prodotto se due di esse hanno lo stesso periodo anche la terza deve essere periodica ed avere lo stesso periodo delle prime due. Indichiamo con s questo periodo. Se dopo questo tempo s gli assi ξ_1,η_1,ζ , ξ,η,ζ riprendono le stesse posizioni nello spazio, anche le velocità angolari attorno a questi assi saranno periodiche ed avranno il periodo s. Infatti noi abbiamo:

$$u=\frac{g+g'}{2(b-c)^2}\,,\ v=\frac{h+h'}{2(a-c)^2}\,,\ w=\frac{k+k'}{2(b-a)^2}$$

$$u'=\frac{g-g'}{2(b+c)^2}\,,\ v'=\frac{h-h'}{2(a+c)^2}\,,\ w'=\frac{k-k'}{2(a+b)^2}$$

e giacchè gli assi a,b,c riprendono dopo il tempo s le stesse lunghezze, e gli assi ξ,η,ζ, ξ_1,η_1,ζ_1, le stesse posizioni, le costanti delle aree che variano solo al variare della posizione di questi assi dovranno riprendere gli stessi valori e per conseguenza anche gli stessi valori riprenderanno le quantità u,u' ecc. e conseguentemente le velocità angolari p,p', q,q', r,r'.

Reciprocamente se le velocità angolari sono periodiche ed hanno lo stesso periodo s e se gli assi riprendono dopo il tempo s le stesse posizioni nello spazio, la lunghezza dei semi assi principali e quindi la forma dell'ellissoide sarà periodica.

Infatti dalle precedenti equazioni ricaviamo subito

$$a=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{h+h'}{2v}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{h-h'}{2v'}}\,,\qquad b=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g+g'}{2u}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g-g'}{2u'}}$$

$$c=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{h+h'}{2v}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{h-h'}{2v'}}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g+g'}{2u}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g-g'}{2u'}}$$

ove i segni dei radicali vengono determinati dalle seguenti considerazioni: in primo luogo i secondi devono tutti essere positivi perchè se nò le somme $a+c$, $b+a$ sarebbero negative il che è assurdo; in secondo luogo, ammettendo come si deve che le variazioni degli assi debbano essere continue ossia che durante il moto le lunghezze non subiscano dei bruschi cangiamenti, dovranno i radicali conservare sempre lo stesso segno durante tutto il moto, talchè i segni dei primi radicali che soli potevano offrire dubbio vengono determinati dai valori iniziali. Quindi se le quantità u, v, w...... riprendono dopo il tempo s gli stessi valori anche gli assi saranno periodici ed i loro valori sincronicamente oscil-

leranno coi valori delle velocità angolari e coi coseni degli angoli che determinano le posizioni degli assi ξ,η,ζ, ξ_1,η_1,ζ_1.

Noi abbiamo veduto nel n.° 20 che se due delle coppie di quantità u,u', v,v', w,w', si annullavano non ne veniva per conseguenza che gli assi fossero costanti, come quando era una sola coppia che si annullava; osserviamo ora che quando si annullano due coppie per es. u,u', v,v' non essendovi più rotazione che attorno agli assi ζ e ζ_1 la posizione di questi assi è fissa e quindi k e k' sono costanti, per conseguenza se w e w' sono periodici ed hanno lo stesso periodo, saranno pure periodici e collo stesso periodo a e b e quindi c dovrà pure oscillare sincronicamente colle altre quantità, si ha quindi questo teorema: *Se due delle coppie di quantità u,u', v,v', w,w' si annullano e se le due quantità che costituiscono la rimanente coppia sono periodiche ed hanno lo stesso periodo gli assi oscillano periodicamente ed hanno per periodo comune quello che è comune alle due quantità della rimanente coppia.* La reciproca è parimente vera.

Questo teorema comprende in se quello di Riemann che cioè se due coppie di quantità si annullano e la rimanente è costante, è pure costante la forma dell' ellissoide.

Ora nel caso in cui due coppie di quantità si annullano per es. $u=u'=0$, $v=v'=0$, si avrà

$$(a-b)^2w=\text{cost.}=\tau^2\ ,\ (a+b)^2w'=\text{cost.}=\tau'^2$$

donde

$$a=\frac{\tau}{2\sqrt{w}}+\frac{\tau'}{2\sqrt{w'}}\,,\qquad b=-\frac{\tau}{2\sqrt{w}}+\frac{\tau'}{2\sqrt{w'}}$$

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\tau}{4w^{\frac{3}{2}}}\frac{dw}{dt}-\frac{\tau'}{4w'^{\frac{3}{2}}}\frac{dw'}{dt}\quad,\quad\frac{db}{dt}=\frac{\tau}{4w^{\frac{3}{2}}}\frac{dw}{dt}-\frac{\tau'}{4w'^{\frac{3}{2}}}\frac{dw'}{dt};$$

e siccome dalla equazione della incompressibilità si ha

$$\frac{da}{a}+\frac{db}{b}+\frac{dc}{c}=0,$$

e quindi

$$\frac{dc}{dt}=-\frac{c}{a}\frac{da}{dt}-\frac{c}{b}\frac{db}{dt}.$$

e per conseguenza

$$\frac{dc}{dt}=\frac{c}{a}\left[\frac{\tau}{4w^{\frac{3}{2}}}\frac{dw}{dt}+\frac{\tau'}{4w'^{\frac{3}{2}}}\frac{dw'}{dt}\right]-\frac{c}{b}\left[\frac{\tau}{4w^{\frac{3}{2}}}\frac{dw}{dt}-\frac{\tau'}{4w'^{\frac{3}{2}}}\frac{dw'}{dt}\right];$$

così l' equazione delle forze vive prenderà la forma

$$\frac{1}{16}\left[\frac{\tau}{w^{\frac{3}{2}}}\frac{dw}{dt}+\frac{\tau'}{w'^{\frac{3}{2}}}\frac{dw'}{dt}\right]^2+\frac{1}{16}\left[\frac{\tau}{w^{\frac{3}{2}}}\frac{dw}{dt}-\frac{\tau'}{w'^{\frac{3}{2}}}\frac{dw'}{dt}\right]^2$$
$$+\frac{1}{32}\left[\frac{c}{a}\left(\frac{\tau}{w^{\frac{3}{2}}}\frac{dw}{dt}+\frac{\tau'}{w'^{\frac{3}{2}}}\frac{dw'}{dt}\right)-\frac{c}{b}\left(\frac{\tau}{w^{\frac{3}{2}}}\frac{dw}{dt}-\frac{\tau'}{w'^{\frac{3}{2}}}\frac{dw'}{dt}\right)\right]^2$$
$$+\tau^2 w+\tau'^2 w'=2\varepsilon\mathrm{H}+\mathrm{Cost.}$$

ossia

$$(36)\quad \frac{1}{32}\left\{\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\frac{\tau^2}{w^3}\left[2+\left(\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^2\right]+2\frac{dw}{dt}\,\frac{dw'}{dt}\frac{\tau\tau'}{w^{\frac{3}{2}}w'^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{c^2}{a^2}-\frac{c^2}{b^2}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{dw'}{dt}\right)^2\frac{\tau'^2}{w'^3}\left[2+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2\right]\right\}=2\varepsilon\mathrm{H}-\tau^2 w-\tau'^2 w'+\mathrm{Cost.}$$

Ora il discriminante della forma di secondo grado che comparisce nel primo membro di questa equazione non può mai essere positivo, quindi il primo membro si mantiene sempre positivo e tale dovrà pure essere il secondo: e

perciò osservando che in questo secondo membro H non cresce mai indefinitamente, e la parte negativa col crescere indefinitamente di w e w' diverrebbe negativamente infinita, così pel moto generale si può dire che w e w' dovranno sempre mantenersi compresi entro dati limiti.

Passiamo ora a considerare il caso particolare in cui non si ha rotazione che attorno all' asse principale ζ, il caso cioè in cui si ha

$$w=w'=\frac{r}{2},$$

e per conseguenza l' equazione (36) diviene

$$(37)\quad \frac{1}{16}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\left\{2(\tau^2+\tau'^2)+\frac{c^2}{a^2}(\tau+\tau')^2+\frac{c^2}{b^2}(\tau-\tau')^2+\frac{2c^2}{ab}(\tau'^2-\tau^2)\right\}\frac{1}{w^3}$$
$$=4\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}-2(\tau^2+\tau'^2)w+\mathrm{Cost.}$$

Osserviamo perciò che per essere $\frac{r}{r_0}=\frac{c}{c_0}$ come già abbiamo notato nel n° 13, la quantità r non può mutare segno durante il moto, cioè non si può supporre che la rotazione muti direzione, quando, come nel nostro caso, le forze acceleratrici sono date dalle sole attrazioni reciproche degli elementi fluidi; quindi se noi prendiamo come positivo il verso della rotazione al principio del tempo, esso si manterrà sempre positivo od in altre parole supponendo r_0 positivo, anche r sarà sempre positivo. Per questo il coefficente di $\left(\frac{dw}{dt}\right)^2$ nella equazione (37) (o se si vuole di $\frac{1}{4}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ poichè ora $w=\frac{1}{2}r$) sarà sempre positivo, e quindi affinchè il moto sia reale è necessario che la quantità

$$4\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}-2(\tau^2+\tau'^2)w+\text{Cost}$$

sia positiva.

Prima quindi di intraprendere la discussione di questo caso, conviene studiare il modo col quale varia la funzione

$$G=4\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}-2(\tau^2+\tau'^2)w$$

col variare di w. Per ciò cominciamo dal considerare separatamente il primo termine e sostituiamovi per a^2, b^2, c^2 i loro valori espressi in funzione di w, τ e τ', valori che (chiamando per brevità λ il prodotto costante abc) sono dati da

$$a^2=\frac{1}{4w}(\tau+\tau')^2\ ,\ b^2=\frac{1}{4w}(\tau-\tau')^2\ ,\ c^2=\frac{\lambda^2}{a^2b^2}=\frac{16w^2\lambda^2}{(\tau^2-\tau'^2)^2};$$

si ha allora

$$\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle}=\text{H}=\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left\{\left(1+\frac{4sw}{(\tau+\tau')^2}\right)\left(1+\frac{4sw}{(\tau-\tau')^2}\right)\left(1+\frac{(\tau^2-\tau'^2)^2 s}{16\,\lambda^2 w^2}\right)\right\}}}$$

$$=\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left((\tau^2+\tau'^2+4sw)^2-4\tau^2\tau'^2\right)\left(\frac{1}{(\tau^2-\tau'^2)^2}+\frac{s}{16\lambda^2w^2}\right)}},$$

e per conseguenza

$$\frac{d\text{H}}{dw}=-\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\triangle^3}\left\{s\left[\frac{4(\tau^2+\tau'^2)}{(\tau^2-\tau'^2)^2}-\frac{(\tau^2-\tau'^2)^2}{16\lambda^2w^3}\right]+s^2\left[\frac{16w}{(\tau^2-\tau'^2)^2}-\frac{\tau^2+\tau'^2}{4\lambda^2w^2}\right]\right\}.$$

Ora essendo

$$(\tau^2-\tau'^2)^2<(\tau^2+\tau'^2)^2,$$

quando si supponga, come è necessario, che le costanti del problema siano reali, questa derivata sarà negativa quando si avrà

$$64w^3\lambda^2>(\tau^2-\tau'^2)^2(\tau^2+\tau'^2),$$

e sarà positiva quando si avrà

$$64w^3\lambda^2<\frac{(\tau^2-\tau'^2)^4}{(\tau^2+\tau'^2)};$$

quindi tra il valore reale di w che rende il primo membro della prima disuguaglianza uguale al secondo membro e quello che rende il primo membro della seconda disuguaglianza uguale al secondo ve ne sarà uno che chiameremo w_1 cui corrisponderà per $\frac{d\text{H}}{dw}$ il valore zero. Quindi H, che per $w=0$ e per $w=\infty$, si annulla, cresce a partire dal valore zero fino ad un certo valore corrispondente al valore w_1 di w e poi decresce continuamente.

La funzione G invece per $w=0$ si annulla ed ha una derivata, che, mentre (come si vede facilmente) è positiva per $w=0$, diviene negativa ed uguale a $-2(\tau^2+\tau'^2)$ per $w=w_1$, quindi tra zero e w_1 vi sarà un valore w_2 di w

che annullerà la derivata di G, e perciò G cresce da zero ad un valore massimo G_1 corrispondente al valore w_2 di w e poi decresce continuamente fino a divenire $=-\infty$.

Ciò posto riprendiamo la discussione dell'equazione (37). Se chiamiamo K_0 la quantità

$$\frac{1}{16}\left(\frac{dw}{dt}\right)_0^2 \frac{1}{w_0^3}\left[2(\tau^2+\tau'^2)+\frac{c_0^2}{a_0^2}(\tau+\tau')^2+\frac{c_0^2}{b_0^2}(\tau-\tau')^2+\frac{2c_0^2}{a_0 b_0}(\tau'^2-\tau^2)\right]$$
$$+2(\tau^2+\tau'^2)w_0,$$

la condizione che deve essere verificata affinchè il moto sia reale, sarà (riportandoci alla (37))

$$(38) \qquad 4\varepsilon\pi H-2(\tau^2+\tau'^2)w \geqq 4\varepsilon\pi H_0-K_0$$

Supponiamo che abbia luogo rotazione attorno all'asse z al principio del tempo e quindi anche durante tutto il moto per le già fatte osservazioni; allora se il valore del secondo membro è uguale al valore G_1 dovrà sempre essere $w=w_2$ ed il moto consisterà in una rotazione uniforme attorno all'asse z, ed il periodo delle oscillazioni sarà nullo poichè in questo caso già sappiamo che la forma dell'ellissoide non varia. Se il valore del secondo membro è minore di G_1 e positivo vi saranno due valori positivi di w che renderanno il primo membro uguale al secondo, talchè w andrà dall'uno all'altro periodicamente ed il periodo T sarà dato da

$$T=-\int_{w_0}^{w_0'}\frac{dw\sqrt{2(\tau^2+\tau'^2)+\frac{c^2}{a^2}(\tau+\tau')^2+\frac{c^2}{b^2}(\tau-\tau')+\frac{2c^2}{ab}(\tau'^2-\tau^2)}}{\sqrt{w^3[4\varepsilon\pi(H-H_0)+K_0-4(\tau^2+\tau'^2)w}}$$

ove si suppone che w'_0 sia il secondo valore di w pel quale si ha

$$G=4\varepsilon\pi H_0-K_0\,;$$

e in ognuna di queste oscillazioni tanto all'andata quanto al ritorno w passerà per il valore w_2 che è intermedio tra i valori w_0 e w_0' a cui corrisponde il valore G_1 di G, e per conseguenza l'ellissoide nelle sue oscillazioni passerà tanto all'andata quanto al ritorno per quello stato nel quale potrebbe conservare la sua forma.

Se il secondo membro della (38) fosse negativo vi sarebbe un sol valore di w che renderebbe il primo membro uguale al secondo e tutti i valori minori di quello verificano la disuguaglianza talchè l'ellissoide tenderà indefinitamente a schiacciarsi ed il tempo impiegato a questo schiacciamento dell'asse c sarà dato dal limite verso il quale tende la quantità

$$T=\frac{1}{4}\int_{w_0}^{w}\frac{dw\sqrt{2(\tau^2+\tau'^2)+\frac{c^2}{a^2}(\tau+\tau')^2+\frac{c^2}{b^2}(\tau-\tau')^2+\frac{2c^2}{ab}(\tau'^2-\tau^2)}}{\sqrt{w^3[4\varepsilon\pi(H-H_0)+K_0-(\tau^2+\tau'^2)w]}}$$

quando w tende verso zero, limite che è uguale all'∞.

29. L'equazione delle forze vive nel caso in cui non vi siano che le due sole velocità angolari r, r_1 diverse da zero si riduce alla equazione

$$(39) \quad \left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right]=2\varepsilon H-\frac{2\tau^4}{(a-b)^2}+\frac{2\tau'^4}{(a+b)^2}+\text{cost}$$

Se i valori iniziali son tali che la costante divenga uguale e di segno opposto al valore massimo della funzione G gli assi dovranno sempre conservare i valori iniziali affinchè non divengano immaginarj i valori delle loro derivate, per cui la forma in questo caso rimane sempre la stessa. Ma se i valori iniziali non sono tali che la costante sia uguale e di segno contrario al valore massimo di G, i valori degli assi potranno oscillare dentro certi limiti ma non potremo asserire che il moto sia periodico altro che quando vi sarà una relazione tra gli assi o che uno di questi assi sarà dato o debba sodisfare a certe condizioni. Ed infatti se si lasciano gli assi interamente indipendenti, a, b, c, potrebbero, giusta le osservazioni fatte nel n° 24, essere considerate come le coordinate d'un punto che si muove arbitrariamente sopra la superficie di equazione $abc = cost.$ ed i sistemi di valori di a, b e c che renderebbero la funzione G uguale alla costante dell' equazione (39), non essendo allora G nè massimo nè minimo, determinerebbero sulla superficie una linea L che non potrebbe essere oltrepassata, e che dividerebbe la superficie in due regioni, nell'una delle quali si avrebbero punti di coordinate a, b, c, tali che il valore di G corrispondente sarebbe minore del valore della costante, e nell'altra punti ai quali corrisponderebbero valori di G maggiori di quello della costante; e il punto potrebbe muoversi liberamente nella seconda ma non potrebbe mai andare nella prima. Questa libertà però che ha di muoversi in qualunque verso fa sì che non si può dire che le coordinate compiano oscillazioni perchè nulla le obbliga a riprendere i valori che precedentemente avevano. Se al contrario uno degli assi è determinato oppure tra due ha luogo una relazione, ne viene che il punto non potrà muoversi che sopra una certa linea L', e quindi non potendo oltrepassare certi valori che sarebbero quelli corrispondenti alle intersezioni di questa linea L' con quella L sulla quale G prende il valore della costante dell' equazione (39), se queste intersezioni saranno situate a distanza finita,

e se sarà finito il tempo che impiega il punto a andare dall' una all' altra, allora il detto punto dovrà oscillare su quella linea, e le coordinate (cioè gli assi del nostro ellissoide) oscilleranno esse pure e si avrà così in generale un moto periodico.

D. Ernesto Padova