GIUSEPPE VITALI

SOPRA LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE A COEFFICIENTI ALGEBRICI

INTRODUZIONE

Il signor P. Appell nella sua celebre memoria " Sur les intégrales des fonctions à moltiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonometriques „ pubblicata nel 13° volume degli *Acta Mathematica* accenna alla possibilità dello studio delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti algebrici i cui punti singolari sono punti di Fuchs con *equazione fondamentale determinante* corrispondente avente radici intere (ridotta eventualmente la variabile alla variabile principale se si tratta di punti all'infinito o di diramazione della superficie riemanniana sulla quale sono monodromi i coefficienti dell'equazione differenziale) ripeto alla possibilità dello studio analogo a quello fatto per le funzioni a moltiplicatori, le quali funzioni si possono pensare come soluzioni di equazioni differenziali lineari omogenee del 1.° ordine. Il signor Appell si limita a classificare le suddette equazioni in equazioni di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie a seconda che il loro integrale generale è privo di singolarità o ha solo singolarità polari o possiede anche singolarità logaritmiche e a dare le relazioni fra le sostituzioni che subiscono le soluzioni di dette equazioni quando si attraversano i tagli che rendono semplicemente connessa la superficie riemanniana sulla quale sono monodromi i coefficienti dell'equazione.

Io ho intrapreso lo studio accennato dal signor Appell in una mia memoria che ha lo stesso titolo di questa e che è pubblicata nel tomo XVI (anno 1902) dei *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*. In essa mi limito a fare alcuni studi sulle equazioni del 2.° ordine e di 1.ª specie. Nel presente lavoro io continuo questi studi limitandomi però sempre alle equazioni del 2.° ordine.

Farò precedere in un primo breve capitolo il riassunto dei risultati ottenuti nella mia precedente memoria. Avverto che per brevità continuerò, come ho fatto nel precedente lavoro, a chiamare *equazioni di Appell,* le equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti algebrici i cui punti singolari (mutata eventualmente, se si tratta di punti di diramazione o di punti all'infinito, la variabile nella variabile principale) sono punti della classe di Fuchs, la cui corrispondente *equazione fondamentale determinante* ha radici intere.

Se un'equazione di Appell è di 1.ª o 2.ª specie noi diremo che è di 1.ª categoria.

Capitolo I.

Sulle equazioni di Appell del 2.° ordine e di 1.ª specie.

§ 1. — Supponiamo che sia θ il gruppo di un'equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª specie.

Vi possono essere altre equazioni di prima specie aventi il medesimo gruppo θ?

Per rispondere a questa domanda supponiamo che

$$A = 0 \quad B = 0$$

siano due equazioni di Appell del 2.° ordine o di 1.ª specie aventi il medesimo gruppo θ.

Sia

$$y_1 \ , \ y_2$$

un sistema fondamentale di integrali della prima e

$$t_1 \ , \ t_2$$

il sistema degli integrali corrispondenti della seconda di dette equazioni.

Noi porremo sempre per brevità

$$\Delta (a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} .$$

Per le ipotesi fatte

$$\Delta (t \ , \ y)$$

è una funzione sempre finita su tutta la superficie riemanniana che attraversando i tagli del sistema normale viene moltiplicata per i determinanti dei coefficienti delle corrispondenti sostituzioni di θ. Allora può avvenire che i determinanti dei coefficienti di dette sostituzioni si possano assumere come i moltiplicatori di un esponenziale nel senso di Appell [1] e allora

$$\Delta (t \ , \ y)$$

può essere un tale esponenziale o essere nullo.

Se i detti determinanti non si possono assumere come i moltiplicatori di un esponenziale allora è senz'altro

$$\Delta (t \ , \ y) = 0 \ .$$

Diremo che siamo nel *1.° o nel 2.° caso* a seconda che

$$\Delta (t \ , \ y)$$

è diverso da zero o è identicamente nullo.

Se si è nel 1.° caso ed

$$E (z)$$

è l'esponenziale a cui è uguale

$$\Delta (t \ , \ y) \ ,$$

potremo porre

$$y = Y \sqrt{E (z)}$$

$$t = T \sqrt{E (z)} \ ,$$

e le nuove equazioni in Y e T a cui si riducono le date, avranno ancora uno stesso gruppo e saranno ancora di 1.ª specie.

Inoltre è

$$\Delta (T \ , \ Y) = 1 \ .$$

Questo si chiamerà il *1.° caso ridotto.*

[1] Appell, *l. c.,* pag. 14. Caso speciale.

§ 2. — Nella mia citata memoria ho dimostrato che *tutte e solo le equazioni del 1.° caso ridotto hanno la forma dell'equazione*

$$Y'' - \left(\frac{\varphi'_1}{\varphi_1} - 2\varphi\right) Y' + \varphi_1 \varphi_2 Y = 0$$

nella quale φ , φ_1 , φ_2 *sono tre qualunque derivate di integrali abeliani di prima specie.*

§ 3. — Siano

$$A_i = 0 \qquad (i = 1 , 2 , \ldots m)$$

m equazioni di Appell dell'n^o ordine aventi il medesimo gruppo θ e siano

$$Y_{i,1}\ Y_{i,2} \ldots Y_{i,n} \ (i = 1 , 2 , \ldots m)$$

i loro sistemi di integrali corrispondenti.

Noi diremo che queste equazioni sono *linearmente indipendenti* se non si possono trovare delle costanti

$$c_1\ c_2 \ldots c_m$$

non tutte nulle per cui esistano tutte le relazioni

$$\sum_{i=1}^{m} c_i Y_{i,k} = 0 \quad (k = 1 , 2 , \ldots n)$$

Nel caso contrario diremo che quelle equazioni sono *linearmente dipendenti.*

§ 4. — Nella ricordata mia memoria io ho dimostrato che *nel 1.° caso esistono soltanto due equazioni di 1.ª specie linearmente indipendenti.*

§ 5. — Sia

$$A(y) = 0$$

una equazione di 1.ª specie del 2.° caso.

La funzione

$$\Delta(y, y')$$

avrà $2p - 2$ zeri [1].

[1] APPELL, *loco citato*, pag. 22.

Supponiamo che

$$\Delta(y, y')$$

abbia degli zeri doppi situati nei punti

$$a_1\ a_2 \ldots a_m \text{ [1]};$$

sarà certo

$$m < p\ .$$

Sia τ l'eccesso di questi punti.

Io ho dimostrato che *esisteranno*

$$m - p + \tau + 1$$

equazioni di 1.ª specie linearmente indipendenti aventi il gruppo di

$$A(y) = 0$$

Ho dato inoltre degli esempi del 2.° caso, però ho dovuto notare che *nei casi* $p = 1$, $p = 2$ *non esistono equazioni del 2.° caso.*

Capitolo II.

Sulle equazioni integrali delle equazioni di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria.

Art. 1. — *Definizione delle equazioni integrali.*

" Diremo *equazione integrale* di un'equazione differenziale li-
" neare omogenea d'ordine n

$$A(y) = 0$$

" l'equazione d'ordine $n + 1$

$$A(y') = 0\ .$$

" Si dirà poi alla sua volta che

$$A(y) = 0$$

" è l'equazione *derivata* di

$$A(y') = 0\ "$$

[1] Se un punto sarà uno zero $2r^{plo}$ o $2r + 1^{plo}$ verrà contato r volte come punto doppio.

L'equazione integrale di una data equazione differenziale lineare omogenea è dunque quella equazione che ha per soluzione generale l'integrale della soluzione generale della equazione data.

Art. 2.° — *Equazioni integrali di 1.ª specie.*

§ 1. — Dato il gruppo di un'equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria esistono delle equazioni di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria aventi il medesimo gruppo di quella e la cui equazione integrale sia di 1.ª specie?

Per rispondere a questa domanda consideriamo un'equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria

$$A(y) = 0 .$$

La soluzione generale di questa equazione avrà dei poli situati in un numero finito di punti della superficie R.

Noi possiamo facilmente costruire una funzione algebrica $\Psi(z)$ che abbia almeno i medesimi poli e degli stessi ordini e che si annulli semplicemente in punti diversi dagli zeri di

$$\Delta(y, y')$$

e dai punti di diramazione e all'infinito della snperficie riemanniana.

L'equazione

$$A(\Psi(z) \,.\, y) = 0$$

che ha il medesimo gruppo della precedente è un'equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria la cui soluzione generale ha poli del 1.° ordine che non sono punti di diramazione e all'infinito della superficie riemanniana e *l'equazione fondamentale determinante* corrispondente a ognuno di questi ha le radici uguali a — 1 e 0.

Suppongo che tali proprietà siano godute senz'altro dall'equazione

$$A(y) = 0 .$$

Sia

$$y_1 \;,\; y_2$$

un sistema fondamentale di integrali di

$$A(y) = 0$$

ed N il numero dei poli della soluzione generale di detta equazione.

Il determinante

$$\Delta(y \,,\, y')$$

ha in quegli N punti dei poli del 2.° ordine.

Invero siano, nell'ipotesi che il polo che si considera corrisponda al valore $z = 0$ della variabile,

$$\frac{\alpha}{z} + \beta + \ldots$$

$$\frac{a}{z} + b + \ldots$$

gli sviluppi di y_1 e y_2 in serie di potenze nell'intorno di un tal punto.

Sarà

$$\Delta(y, y') = \frac{\alpha\, b - \beta\, a}{z^2} + \ldots..$$

e

$$\alpha\, b - \beta\, a \neq 0 .$$

Se fosse difatti

$$\alpha\, b - \beta\, a = 0 ,$$

posto

$$\frac{\alpha}{a} = K ,$$

l'integrale

$$y_1 - K\, y_2$$

sarebbe regolare nel punto considerato ed avrebbe anzi ivi uno zero almeno del 1.° ordine. Ma allora le radici dell'equazione determinante non sarebbero più — 1 e 0, ma una di esse sarebbe almeno uguale ad 1.

Il quoziente

$$\frac{\Delta(y, y')}{\varphi} ,$$

dove φ è la derivata di un'integrale abeliano di 1.ª specie, è una funzione a moltiplicatore che ha gli N poli suddetti del 2.° ordine, inoltre ha $2p - 2$ poli negli zeri di φ ed altrove è sempre finita. Esso ha quindi altrettanti zeri, ossia $2(N + p - 1)$ che indicheremo con

$$\alpha_1 \;,\; \alpha_2 \;\ldots.\; \alpha_k \;\; [k = 2(N + p - 1)]$$

Questi punti sono pienamente determinati dalla nostra equazione e dalla scelta della funzione φ.

Sia

$$B(\eta) = 0$$

un'equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria avente lo stesso gruppo di

$$A(y) = 0$$

e tale che la sua equazione integrale sia di 1.ª specie.

L'equazione

$$C(t) = B(\varphi . t) = 0$$

ha il suo integrale generale regolare dappertutto tranne che nei $2p-2$ zeri di φ dove ha $2p-2$ poli semplici.

Ricordiamo che se

$$t_1 \; , \; t_2$$

sono gli integrali di

$$C(t) = 0$$

corrispondenti agli integrali

$$y_1 \; , \; y_2$$

di

$$A(y) = 0 \; ,$$

è

$$t_i = \frac{\Delta(t, y')\, y_i - \Delta(t, y)\, y'_i}{\Delta(y, y')} \qquad (i = 1, 2)$$

Il quoziente

$$\frac{\Delta(t, y')}{\Delta(y, y')}$$

è una funzione algebrica che diventa infinita nei $2(N + p - 1)$ zeri di

$$\frac{\Delta(y, y')}{\varphi}$$

e nei $2p-2$ zeri di φ che sono i poli di t.

Indicando con

$$\alpha_{k+1} \; , \; \alpha_{k+2} \; , \; \ldots \; \alpha_{k+2p-2}$$

i $2p-2$ zeri di φ, sarà dunque

$$\frac{\Delta(t, y')}{\Delta(y, y')} = \sum_{i=1}^{\sigma} \lambda_i Z_{\alpha_i} + L$$

dove le λ_i ed L sono costanti, $\sigma = k + 2p - 2$ e $Z_{\alpha i}$ è il noto integrale abeliano normale di 2.ª specie che ha un polo del 1.° ordine nel punto α_i con residuo 1.

L'espressione

$$\frac{\Delta(t, y)\, \varphi}{\Delta(y, y')}$$

è invece una funzione algebrica che ha solo poli negli zeri di

$$\frac{\Delta(y, y')}{\varphi} \; ,$$

quindi sarà

$$\frac{\Delta(t, y)}{\Delta(y, y')} = \frac{1}{\varphi} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mu_i Z_{\alpha_i} + M \right\}$$

dove le μ_i e M sono costanti.

Sarà dunque

$$(1) \qquad t_h = \left\{ \sum_{i=1}^{\sigma} \lambda_i Z_{\alpha_i} + L \right\} y_h - \frac{1}{\varphi} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mu_i Z_{\alpha_i} + M \right\} y'_h$$

$$(h = 1, 2)$$

§ 2. — Le $4(N + p - 1) + 2p$ costanti che compariscono nella (1) non sono però da prendersi a caso.

Così per esempio, poichè i coefficienti di y_h e y'_h in (1) devono essere funzioni algebriche si deve avere

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{\sigma} \lambda_i \varphi_s(\alpha_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{k} \mu_i \varphi_s(\alpha_i) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots p) \end{cases}$$

essendo

$$\varphi_1 \; \varphi_2 \; \ldots \; \varphi_p$$

le derivate dei p integrali abeliani normali di 1.ª specie.

Siano

$$\beta_1\, \beta_2 \, \dots \, \beta_N$$

i poli dell'integrale generale di

$$A(y) = 0 .$$

La funzione

$$\frac{\Delta(t, y)\, \varphi}{\Delta(y, y')}$$

si deve manifestamente annullare in quei punti e quindi deve essere

(II) $$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \, Z\alpha_i(\beta_r) + M = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots N) .$$

Sia poi

$$C_i \{1 + \gamma_i (z - \alpha_i)\} + (z - \alpha_i)^2 \, P_i (z - \alpha_i) ,$$

dove $P_i(z - \alpha_i)$ è una funzione regolare nell'intorno del punto α_i e dove C_i e γ_i sono costanti, lo sviluppo in serie di potenze di $z - \alpha_i$ di un integrale di

$$A(y) = 0$$

che non si annulli nel punto α_i.

Dovrà essere

(III) $$\lambda_i - \frac{\gamma_i \, \mu_i}{\varphi(\alpha_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots k) .$$

Infine nei punti β_r le t_i devono essere regolari e perciò deve essere

(IV) $$\sum_{i=1}^{\sigma} \lambda_i \, Z\alpha_i(\beta_r) + L + \frac{1}{\varphi(\beta_r)} \sum_{i=1}^{k} \mu_i \, Z\alpha_i(\beta_r) = 0$$
$$(r = 1, 2, \dots N)$$

Le relazioni (I) (II) (III) (IV) sono manifestamente necessarie e sufficienti perchè le t_h definite da (1) siano gli integrali di una equazione avente le proprietà richieste per la $C(t) = 0$.

Queste relazioni sono in numero di $4(N+p-1)+2$ fra le $4(N+p-1)+2p$ costanti che compariscono in (1).

Se dette relazioni, che sono lineari in quelle costanti, sono linearmente indipendenti, le t_h si possono determinare in ∞^{2p-2} modi e quindi esisteranno $2p-2$ equazioni della natura di $C(t) = 0$ fra loro linearmente indipendenti; e tutte le altre saranno da esse linearmente dipendenti.

Il caso in cui dette relazioni non sono linearmente indipendenti noi lo chiameremo il *caso speciale*.

§ 3. — Supponiamo che il gruppo dell'equazione

$$A(y) = 0$$

sia tale che i suoi due integrali

$$y_1 \ , \ y_2$$

vengano moltiplicati per una costante quando si attraversano i tagli che rendono semplicemente connessa la superficie riemanniana.

Allora ogni equazione con quel gruppo ha per integrali fondamentali due funzioni a moltiplicatori.

Quelle fra queste equazioni che hanno per equazione integrale un'equazione di 1.ª specie hanno per soluzioni due derivate di integrali di 1.ª specie di funzioni a moltiplicatori dati.

Supponiamo che nè i moltiplicatori di y_1 nè quelli di y_2 siano moltiplicatori di funzioni del *caso speciale* così detto da Appell.

Allora si può facilmente verificare che di equazioni col gruppo di

$$A(y) = 0$$

e la cui equazione integrale è di 1.ª specie, ve ne sono proprio $2p-2$ di linearmente indipendenti.

Ve ne sono $2p-1$ o $2p$ se una o tutte e due le funzioni y_1 e y_2 hanno i moltiplicatori del caso speciale suaccennato.

Riassumendo i nostri risultati convalidati dai precedenti esempi noi abbiamo il

Teorema. " All'infuori di casi particolari, dato il gruppo di una
" equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria, esistono
" $2p-2$ equazioni di Appell del 2.° ordine appartenenti a quel
" gruppo e linearmente indipendenti, la cui equazione integrale

" sia di 1.ª specie. In casi particolari queste equazioni sono in " numero maggiore di $2p-2$ „.

§ 4. — Io dimostrerò che *il numero delle equazioni di Appell del 2.° ordine appartenenti ad un medesimo gruppo e linearmente indipendenti, la cui equazione integrale sia di 1.ª specie non è mai maggiore di* $2p$.

A tal fine è però necessario premettere alcune considerazioni.

§ 5. — Definizione. *Se l'integrale generale di un'equazione di Appell ha in un punto* α *un polo* r^{plo} *o uno zero* s^{plo} *noi diremo che quel punto* α *è un polo* r^{plo} *o uno zero* s^{plo} *dell'equazione.*

Ora noi dimostreremo il seguente

Lemma. " In un'equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª " categoria il numero complessivo degli zeri è minore o tutto al " più eguale al numero dei poli aumentato di $p-1$ „.

Dimostrazione. Sia α uno zero r^{plo} dell'equazione

$$A\ (y) = 0$$

Certamente il determinante

$$\Delta\ (y,\ y')$$

ha in quel punto uno zero almeno $2r^{plo}$.

Sia β un polo s^{plo} della medesima equazione.

Allora

$$\Delta\ (y,\ y')$$

ha in quel punto un polo tutt'al più del $2s^{mo}$ ordine.

Perciò la funzione

$$\frac{1}{\varphi}\,\Delta\ (y\ y')$$

ha al più

$$2\ \Sigma\ s + 2p - 2$$

poli.

Deve quindi avere al più

$$2\ \Sigma\ s + 2p - 2$$

zeri, ossia deve essere

$$2\ \Sigma\ r \leq 2\ \Sigma\ s + 2p - 2$$

cioè

$$\Sigma\ r \leq \Sigma\ s + p - 1 \qquad \text{c. d. d.}$$

Corollario. " Una equazione di Appell del 2.° ordine a equa- " zione integrale di 1.ª specie ha al più $3p-3$ zeri „.

Dimostrazione. Infatti se

$$A\ (y) = 0$$

è una tale equazione, l'equazione

$$A\ (\varphi.\ y) = 0$$

ha $2p-2$ poli (che sono i $2p-2$ zeri di φ), quindi ha al più

$$2p - 2 + p - 1 = 3p - 3$$

zeri.

Ma gli zeri di questa equazione sono quelli di

$$A\ (y) = 0\ ,$$

quindi gli zeri di

$$A\ (y) = 0$$

sono al più $3p-3$ c. d. d.

§ 6. — Sia

$$\xi_i = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\ \eta_k \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ -\ n)$$

Inoltre supponiamo che sia

$$\sum_{i=0}^{n} \xi_i\ v_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \eta_i\ u_{n-i}$$

identicamente in virtù delle precedenti relazioni.

Sarà

$$\Sigma_{i,k}\ a_{ik}\ \eta_k\ v_{n-i} = \Sigma_i\ \eta_i\ u_{n-i}\ ,$$

ossia

$$\Sigma_{i,k}\ a_{ki}\ \eta_i\ v_{n-k} = \Sigma_i\ \eta_i\ u_{n-i}\ ,$$

e quindi

$$u_{n-i} = \Sigma_k\ a_{ik}\ v_{n-k}\ ,$$

cioè

$$u_i = \Sigma_k\ a_{n-k,\ n-i}\, v_k\ .$$

Quindi, se

$$a_{n-k,\ n-i} = a_{i,k}\ ,$$

sarà

$$u_i = \Sigma_k\, a_{ik}\, v_k\ .$$

Perciò abbiamo il

Lemma " Se in virtù delle relazioni

" (1) $$\xi_i = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\, \eta_k \quad (i = 0, 1, 2 \ldots n)\ .$$

" nelle quali è $a_{ik} = a_{n-k,\, n-i}$, si ha identicamente l'uguaglianza

$$\Sigma_i\, \xi_i\, v_{n-i} = \Sigma\, \eta_i\, u_{n-i}\ ,$$

" è certamente

$$u_i = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\, v_k\ ,$$

" ossia le u_i e v_k sostituite in luogo delle ξ_i e η_k rispettivamente
" soddisfano alle stesse relazioni (1) „.

§ 7. — Definizione. " Chiamiamo *determinante scalato* un deter-
" minante che ha la forma seguente

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots\ldots & a_0 \end{vmatrix}\ .$$

Si può vedere che, se delle quantità

$$\xi_k\ ,\ \eta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n)$$

sono legate dalle relazioni

$$\sum_{k=0}^{n} a_{i,k}\, \xi_k = \sum_{k=0}^{n} b_{i,k}\, \eta_k \quad (i = 0, 1, 2 \ldots n)$$

e i determinanti delle $a_{i,k}$, $b_{i,k}$ sono dei determinanti scalati ed inoltre a_{00} è diverso da zero, risolvendo rispetto alle ξ_i avremo

$$\xi_i = \Sigma_k\, C_{ik}\, \eta_k\ ,$$

il determinante delle C_{ik} essendo un determinante scalato. Inoltre

è evidente che, pel fatto che il determinante delle C_{ik} è un determinante scalato, sarà

$$C_{ik} = C_{n-k,\, n-i}\ ,$$

quindi possiamo concludere che

" Se le ξ_k , η_k sono legate dalle relazioni

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik}\, \xi_k = \sum_{k=0}^{n} b_{ik}\, \eta_k \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n)$$

" e i determinanti delle a_{ik} e b_{ik} sono dei determinanti scalati,
" ed inoltre, se in virtù di queste relazioni è identicamente

$$\Sigma_i\, \xi_i\, v_{u-i} = \Sigma_i\, \eta_i\, u_{n-i}\ ,$$

" è certamente

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik}\, u_k = \sum_{k=0}^{n} b_{ik}\, v_k \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n)\ „$$

§ 8. — Ora supponiamo che

$$r\,(z)\ \text{ed}\ s\,(z)$$

siano due funzioni che nel punto $z = \alpha$ siano regolari.

Supponiamo più precisamente che $r\,(z)$ abbia nel punto $z = \alpha$ uno zero d'ordine ρ e che $s\,(z)$ abbia nel medesimo punto uno zero d'ordine non minore di ρ.

Supponiamo inoltre che

$$R\,(z)\ ,\ S\,(z)$$

siano altre due funzioni che possano avere nel punto $z = \alpha$ anche una singolarità polare. Sia σ il più grande degli ordini dei loro poli in $z = \alpha$. Non è escluso che σ sia negativo.

Infine supponiamo che la funzione

$$R\,(z)\, r\,(z) - S\,(z)\, s\,(z)$$

abbia in $z = \alpha$ un polo d'ordine

$$\sigma - \rho - n - 1\ .$$

È chiaro che se

$$R(z) = \frac{\xi_0}{(z-\alpha)^\sigma} + \frac{\xi_1}{(z-\alpha)^{\sigma-1}} + \dots \frac{\xi_n}{(z-\alpha)^{\sigma-n}} + \text{ecc.}$$

$$S(z) = \frac{\eta_0}{(z-\alpha)^\sigma} + \frac{\eta_1}{(z-\alpha)^{\sigma-1}} + \dots \frac{\eta_n}{(z-\alpha)^{\sigma-n}} + \text{ecc.},$$

certamente le ξ_k, η_k soddisfano ad un sistema di $n+1$ equazioni

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_{ik}\,\xi_k = \sum_{k=0}^{n} b_{ik}\,\eta_k \qquad (i = 0, 1, 2 \dots n)$$

dove i determinanti delle a_{ik} e delle b_{ik} sono dei determinanti scalati.

Ora supponiamo che $\varphi_r(z)$ e $\varphi_s(z)$ siano due funzioni regolari in $z=\alpha$ e che i loro sviluppi nell'intorno di un tal punto siano

$$\varphi_r(z) = u_0 + u_1(z-\alpha) + u_2(z-\alpha)^2 + \dots + u_n(z-\alpha)^n + \text{ecc.}$$

$$\varphi_s(z) = v_0 + v_1(z-\alpha) + v_2(z-\alpha)^2 + \dots + v_n(z-\alpha)^n + \text{ecc.}$$

Supponiamo inoltre che in virtù delle relazioni (1) sia identicamente

$$\Sigma_i\,\xi_i\,v_{k-i} = \Sigma_i\,\eta_i\,u_{n-i}\,.$$

Certamente è pure

$$\Sigma_k\,a_{ik}\,u_k = \Sigma\,b_{i,k}\,v_k\,.$$

Segue subito che la funzione

$$\varphi_r(z)\,r(z) - \varphi_s(z)\,s(z)$$

ha nel punto $z=\alpha$ un polo d'ordine $-\rho-n-1$, ossia uno zero d'ordine $\rho+n+1$. In particolare notiamo che, se

$$\xi_i = \lambda_i\,\underline{|n-i}$$

$$\eta_i = \mu_i\,\underline{|n-i}\,,$$

la relazione

$$\Sigma_i\,\xi_i\,v_{n-i} = \Sigma\,\eta_i\,u_{n-i}$$

si può scrivere

$$\Sigma_i\,\lambda_i\,\overset{(n-i)}{\varphi_s}(\alpha) = \Sigma_i\,\mu_i\,\overset{(n-i)}{\varphi_r}(\alpha)\,,$$

gli indici in alto sulle funzioni φ_r e φ_s dovendosi intendere come indici di derivazione.

Possiamo allora dire riassumendo:

« Se $r(z)$ ed $s(z)$ sono due funzioni regolari in $z=\alpha$ aventi « in $z=\alpha$ uno zero minimo d'ordine ρ, se $R(z)$ e $S(z)$ sono altre « due funzioni aventi nel punto α gli sviluppi

$$R(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda_i\,\underline{|n-i}\,(z-\alpha)^{h-\sigma}$$

$$S(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu_i\,\underline{|n-i}\,(z-\alpha)^{h-\sigma}\,,$$

« e sono tali che la funzione

$$R(z)\,r(z) - S(z)\,s(z)$$

« abbia in $z=\alpha$ un polo d'ordine $\sigma-\rho-n-1$, e se le $n+1$ rela- « zioni a cui per ciò devono soddisfare le λ_h, μ_h $(h = 0, 1, 2, \dots n)$ « sono tali da rendere identicamente soddisfatta la relazione

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\,\overset{(n-i)}{\varphi_s}(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i\,\overset{(n-i)}{\varphi_r}(\alpha)\,,$$

« nella quale $\varphi_r(z)$ e $\varphi_s(r)$ indicano due funzioni regolari in $z=\alpha$, « allora la funzione

$$\varphi_r(z)\,r(z) - \varphi_s(z)\,s(z)$$

« ha nel punto α uno zero d'ordine $\rho+n+1$ ».

§ 9. — È evidente che, se

$$R(z)\,r(z) - S(z)\,s(z)$$

ha in $z=\alpha$ un polo d'ordine

$$\sigma - \rho - n - 1$$

(σ essendo l'ordine massimo dei poli di $R(z)$ ed $S(z)$ in α e ρ essendo l'ordine minimo degli zeri di $r(z)$ e $s(z)$ in α) e se inoltre

$$\varphi_r(z)\,r(z) - \varphi_s(z)\,s(z)$$

ha in $z=\alpha$ uno zero d'ordine $\rho+n+1$, ($\varphi_r(z)$ e $\varphi_s(z)$ essendo finite in $z=\alpha$), certamente

$$S(z)\,\varphi_r(z) - R(z)\,\varphi_s(z)$$

ha in α un polo d'ordine

$$\sigma - n - 1$$

ossia uno zero d'ordine

$$n+1 - \sigma$$

quando è

$$\sigma \leq n + 1 \ .$$

Così noi possiamo dire:

" Se $r(z)$ ed $s(z)$ sono due funzioni regolari in $z = \alpha$ aventi " in $z = \alpha$ uno zero minimo d'ordine ρ, se $\mathrm{R}(z)$ ed $\mathrm{S}(z)$ sono " altre due funzioni aventi nel punto α gli sviluppi

$$\mathrm{R}(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda_i \left|\underline{n-i}\right. (z - \alpha)^{h-\sigma}$$

$$\mathrm{S}(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu_i \left|\underline{n-i}\right. (z - \alpha)^{h-\sigma}$$

" e sono tali che la funzione

$$\mathrm{R}(z)\, r(z) - \mathrm{S}(z)\, s(z)$$

" abbia in $z = \alpha$ un polo d'ordine

$$\sigma - \rho - n - 1 \ ,$$

" e se le $n+1$ relazioni a cui per questo devono soddisfare le

$$\lambda_h \text{ e } \mu_h \quad (h - 0, 1, 2, \ldots n)$$

" sono tali da rendere identicamente soddisfatta la relazione

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \overset{(n-i)}{\varphi_s}(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \overset{(n-i}{\varphi_r}(\alpha)$$

" nella quale $\varphi_r(z)$ e $\varphi_s(z)$ sono due funzioni regolari in $z = \alpha$, " allora la funzione

$$\mathrm{S}(z)\, \varphi_r(z) - \mathrm{R}(z)\, \varphi_s(z)$$

" ha in $z = \alpha$ uno zero d'ordine

$$n + 1 - \sigma \ ".$$

§ 10. — Ritornando alla nostra questione principale supponiamo che sia m il numero delle equazioni di Appell del 2.° ordine linearmente indipendenti e ad equazione integrale di 1.ª specie, appartenenti ad un medesimo gruppo.

Noi vogliamo dimostrare che

$$m \leq 2p \ .$$

Consideriamo pertanto due di tali equazioni

$$\mathrm{A}(\zeta) = 0 \ , \ \mathrm{B}(\theta) = 0 \ .$$

Si può supporre dapprima che in qualunque modo si prendano queste due equazioni sia sempre

$$\Delta(\zeta , \theta) = 0 \ .$$

Ciò vorrà dire che le nostre m equazioni si potranno ottenere tutte da una medesima moltiplicando per delle convenienti funzioni algebriche.

Ma siccome una qualunque delle nostre equazioni non ha mai più di $3p - 3$ zeri (vedi § 5.° Cap. II, Corollario), queste funzioni algebriche non potranno avere più di $3p - 3$ poli situati in punti fissi. Ma di funzioni algebriche che abbiano al massimo $3p - 3$ poli collocati in punti determinati ve ne sono al massimo $2p - 2$ compresa la costante additiva. Ne segue che *se, in qualunque modo si scelgano le due equazioni*

$$\mathrm{A}(\zeta) = 0 \ , \ \mathrm{B}(\theta) = 0 \ ,$$

è sempre

$$\Delta(\zeta , \theta) = 0 \ ,$$

allora è $m = 2p - 2$.

§ 11. — Supponiamo ora di potere scegliere e di avere scelto le

$$\mathrm{A}(\zeta) = 0 \ , \ \mathrm{B}(\theta) = 0$$

in guisa che sia

$$\Delta(\zeta , \theta) \neq 0 \ .$$

Supponiamo inoltre che

$$\mathrm{C}(y) = 0$$

sia una qualunque delle nostre equazioni.

Sarà

$$y\, \Delta(\zeta, \theta) + \zeta\, \Delta(\theta, y) + \theta\, \Delta(y, \zeta) = 0$$

e quindi

$$y + \zeta \frac{\Delta\,(\theta,\, y)}{\Delta\,(\zeta,\, \theta)} + \Theta \frac{\Delta\,(y,\, \zeta)}{\Delta\,(\zeta,\, \theta)} = 0\,.$$

Le funzioni

$$\frac{\Delta\,(\theta,\, y)}{\Delta\,(\zeta,\, \theta)}\,,\ \frac{\Delta\,(y,\, \zeta)}{\Delta\,(\zeta,\, \theta)}$$

saranno due funzioni algebriche con al più $4p-4$ poli posti nei $4p-4$ zeri che al massimo può avere $\Delta\,(\zeta,\,\theta)$.

Siano

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ldots\ \alpha_q$$

gli zeri di $\Delta\,(\zeta,\,\theta)$ ed

$$n_1 + 1\ ,\ n_2 + 1\ ,\ \ldots\ldots\ n_q + 1$$

i loro ordini corrispondenti.

Sarà certamente

$$\frac{\Delta\,(\theta,\, y)}{\Delta\,(\zeta,\, \theta)} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=0}^{n_k} \lambda_i^{(k)}\, Z_{\alpha_k}^{n_k - i} + L$$

$$\frac{\Delta\,(\zeta,\, y)}{\Delta\,(\zeta,\, \theta)} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=0}^{n_k} \mu_i^{(k)}\, Z_{\alpha_k}^{n_k - i} + M$$

dove le $\lambda_i^{(k)}$, $\mu_i^{(k)}$, L, M sono tante costanti il cui numero non supera certo $8p-6$.

Queste costanti sono legate dalle $2p$ relazioni

$$(\omega)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \sum_{i=0}^{n_k} \lambda_i^{(k)} \overset{(n_k - i)}{\varphi_j}(\alpha_k) = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \sum_{i=0}^{n_k} \mu_i^{(k)} \overset{(n_k - i)}{\varphi_j}(\alpha_k) = 0 \quad (j = 1,\, 2\, \ldots\, p)\,, \end{cases}$$

dove $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_p$ sono le derivate di p integrali abeliani di prima specie linearmente indipendenti. Ora la y in ogni punto α_k deve essere regolare. Inoltre se io prendo per funzione ζ una di quelle che in tutti i punti α_k ha lo zero di minore ordine possibile allora y dovrà avere in α_k uno zero dell' ordine dello zero di ζ almeno.

Da ciò scaturiscono

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q + q$$

relazioni indipendenti fra le λ e le μ e perciò, se in seguito a queste relazioni restassero indipendenti le (ω), sarebbe necessariamente

$$m = 2p - 2\ .$$

Supponiamo invece che le (ω) risultino fra loro linearmente dipendenti.

In questa ipotesi noi dobbiamo distinguere due casi

1.° Caso: $n_1 + n_2 + \ldots + n_q + q \leq 2p - 2$

2.° Caso: $n_1 + n_2 + \ldots + n_q + q > 2p - 2$.

Nel 1.° caso risulta chiaramente che $m \leq 2p$ semplicemente in virtù delle relazioni che esprimono che la y dovrà avere in α_k uno zero d'ordine non minore di quello che ha ζ nel medesimo punto.

Nel 2.° caso le prime p equazioni (ω) sono linearmente indipendenti fra loro e così pure le ultime p equazioni (ω).

Quindi, se le (ω) non sono tutte indipendenti, esisteranno due derivate di integrali abeliani di 1.ª specie, le quali indicherò con $\varphi_r\,(z)$ e $\varphi_s\,(z)$ tali che la relazione

$$\sum_{n=1}^{q} \sum_{i=0}^{n_k} \lambda_i^{(k)} \overset{(n_k - i)}{\varphi_s}(\alpha_k) = \sum_{n=1}^{q} \sum_{i=0}^{k} \mu_i^{(k)} \overset{(n_k - i)}{\varphi_r}(\alpha_k)$$

sarà identicamente soddisfatta solo in virtù delle relazioni che esprimono che la y dovrà avere in α_k uno zero d'ordine non minore di quello che ha ζ nel medesimo punto.

Da tutto ciò e da quanto è concluso nel § 9 di questo capitolo risulta che

$$\frac{\Delta\,(\zeta,\, y)}{\Delta\,(\zeta,\, \theta)}\, \varphi_r\,(z) - \frac{\Delta\,(\theta,\, y)}{\Delta\,(\zeta,\, \theta)}\, \varphi_s\,(z)$$

sarà regolare nei punti α_k .

Ne segue subito che

$$\frac{\Delta(\zeta, y)}{\Delta(\zeta, \theta)}\varphi_r(z) - \frac{\Delta(\theta, y)}{\Delta(\zeta, \theta)}\varphi_s(z)$$

non può essere che la derivata di un integrale abeliano di prima specie. Indicando tale derivata con $\varphi_\nu(z)$ avremo subito

$$\frac{\Delta(\zeta\,\varphi_r(z) - \theta\varphi_s(z), y)}{\Delta(\zeta, \theta)} = \varphi_\nu(z)$$

Ma le y sono ∞^m, le φ_ν sono ∞^p, quindi vi sono ∞^{m-p} funzioni y per cui

$$\Delta(\zeta\,\varphi_r(z) - \theta\,\varphi_s(z), y) = 0$$

Se u e v sono due di tali funzioni sarà certamente

$$\Delta(u, v) = 0\ .$$

Ora sia u una di tali funzioni e w un'altra soluzione generale di una delle nostre equazioni (ossia di quelle equazioni di Appell di cui ne vogliamo determinare il numero).

Supponiamo di aver scelto inoltre w in guisa che

$$\Delta(w, u) \neq 0$$

e che w abbia in tutti i punti nulli di $\Delta(w, u)$ degli zeri del minor ordine possibile.

Se non si vuol fare *a priori* l'ipotesi che sia $m \leq 2p$, bisognerà pure supporre che esistano due derivate di integrali abeliani di 1.ª specie, le quali indicheremo con $\varphi_h(z)$, $\varphi_k(z)$, per cui vi sono ∞^{m-p} funzioni y che soddisfano la relazione

$$\Delta(w\,\varphi_h(z) - u\,\varphi_k(z)\ ,\ y) = 0\ .$$

Ma queste ∞^{m-p} funzioni y sono linearmente indipendenti da quelle per cui

$$\Delta(\zeta\,\varphi_r(z) - \theta\,\varphi_s(z)\ ,\ y) = 0\ .$$

Infatti se ciò non fosse vi sarebbe una y per cui

$$\Delta(u\ ,\ y) = 0$$

e per cui

$$\Delta(w\,\varphi_h(z) - u\,\varphi_k(z)\ ,\ y) = 0,$$

dalle quali due relazioni risulta

$$\Delta(w, y) = 0$$

e quindi

$$\Delta(w, u) = 0$$

e ciò contro l'ipotesi.

Per quanto si è detto risulta che delle equazioni di Appell del secondo ordine linearmente indipendenti aventi il gruppo dato e a equazione integrale di 1.ª specie ne esistono almeno $2(m-p)$ linearmente indipendenti. Dunque

$$2(m - p) \leq m$$

ossia

$$m \leq 2p\ .$$

Resta così dimostrato il

Teorema. " Il numero delle equazioni di Appell del 2.° ordine " linearmente indipendenti, aventi un medesimo gruppo dato e che " hanno l'equazione integrale di 1.ª specie può essere $2p-2$, " $2p-1$ o $2p$. Vi sono esempi di tutti e tre questi casi ".

§ 12. — *Caso ellittico.* Nel caso $p = 1$ è $2p - 2 = 0$ e quindi in generale non esistono equazioni di Appell del 2.° ordine a equazione integrale di 1.ª specie essendo dato il gruppo dell'equazione.

Del resto se ci fosse un'equazione

$$A(y) = 0$$

a equazione integrale di 1.ª specie, l'equazione

$$A(\varphi . y) = 0$$

dovrebbe essere di 1.ª specie poichè la φ non si annulla; quindi il gruppo della nostra equazione deve essere di quelli a cui appartengono equazioni di 1.ª specie.

Viceversa, se ad un gruppo appartiene un'equazione di 1.ª specie, ad esso corrisponde l'equazione

$$A\left(\frac{y}{\varphi}\right) = 0$$

che è ad equazione integrale di 1.ª specie.

Dunque per $p=1$ i casi speciali sono quelli in cui si hanno equazioni di 1.ª specie.

In tali casi se l'equazione di 1.ª specie è effettivamente del 2.° ordine ve ne è un'altra ed un'altra soltanto [1] e quindi nei casi speciali del genere $p=1$ vi sono in generale due equazioni ad equazione integrale di 1.ª specie.

§ 13. *Caso del genere* $p=2$. — Anche in questo caso, se esiste un'equazione

$$A(y) = 0$$

di 1.ª specie con dato gruppo, si è nel caso speciale almeno se

$$A(y) = 0$$

è *effettivamente* del 2.° ordine.

Infatti se

$$A(y) = 0$$

è effettivamente del 2.° ordine le equazioni

$$A\left(\frac{t}{\varphi_1}\right) = 0 \quad , \quad A\left(\frac{t}{\varphi_2}\right) = 0$$

e l'equazione

$$\begin{vmatrix} t'' & t' & t \\ y_1''' & y_1'' & y_1' \\ y_2''' & y_2'' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$

(nelle quali φ_1 e φ_2 indicano le due derivate degli integrali abeliani di 1.ª specie normali che esistono sulla superficie che si considera di genere $p=2$, ed y_1 y_2 i due integrali fondamentali di

$$A(y) = 0)$$

sono tre equazioni a equazione integrale di 1.ª specie).

Inoltre esse sono linearmente indipendenti. Invero se ciò non fosse si dovrebbero trovare tre costanti λ, μ, ν per cui fosse

$$\lambda\, y_1\, \varphi_1 + \mu\, y_1\, \varphi_2 + \nu\, y_1' = 0$$

$$\lambda\, y_2\, \varphi_1 + \mu\, y_2\, \varphi_2 + \nu\, y_2' = 0$$

[1] Vedere la mia memoria citata § 6, pag. 63.

Da queste relazioni risulterebbe

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2}$$

e quindi

$$y_1 = y_2 \,.\, \text{cost.}$$

e l'equazione

$$A(y) = 0)$$

non sarebbe più effettivamente del 2.° ordine come noi abbiamo supposto fino dal principio di questo paragrafo.

§ 14. *Genere qualunque. Caso in cui esistono due equazioni di prima specie col medesimo gruppo.* Nella mia citata memoria ho, come ho già detto, [1] passato in rassegna i casi in cui esistono almeno due equazioni di 1.ª specie col medesimo gruppo ed ho visto che si presentano due casi differenti che io ho chiamato 1.° e 2.° caso. Ho visto pure che le equazioni del 1.° caso si riducono ad una forma particolare moltiplicando la funzione incognita per un conveniente esponenziale [2].

Ora un'equazione a equazione integrale di 1.ª specie resta ancora tale se ne moltiplico la funzione incognita per un conveniente esponenziale, perciò per contare le equazioni a equazione integrale di 1.ª specie appartenenti ad un medesimo gruppo del 1.° caso basta contarle per il gruppo di quelle equazioni di 1.ª specie che sono ridotte alla forma particolare accennata.

Se

$$A(y) = 0$$

è un'equazione di 1.ª specie di questa forma particolare e

$$y_1 \;,\; y_2$$

è un suo sistema d'integrali fondamentali, esiste una φ (derivata di integrali abeliani di prima specie) per cui è pure un'equazione di prima specie quella i cui integrali sono

$$\frac{y_1'}{\varphi} \quad \frac{y_2'}{\varphi} \quad [3].$$

[1] V. Capitolo 1.°, § 1.° del presente lavoro.

[2] V. la mia memoria citata § 4, pag. 59.

[3] V. la mia memoria citata, § 4, pag. 59.

Sono allora equazioni a equazione integrale di 1.ª specie quelle i cui integrali sono

$$\varphi_i\, y_1\ ,\ \varphi_i\, y_2 \quad (i = 1, 2, \dots p)$$

e quelle i cui integrali sono

$$\varphi_i \frac{y_1'}{\varphi}\ ,\ \varphi_i \frac{y_2'}{\varphi} \quad (1 = 1, 2, \dots, p)$$

Queste $2p$ equazioni sono linearmente indipendenti se non esistono due φ per es. φ_h e φ_k per cui

$$\varphi_h\, y_\lambda = \varphi_k \frac{y'_\lambda}{\varphi} \quad (\lambda = 1, 2)$$

il che non avviene se

$$\mathrm{A}\,(y) = 0$$

è un'effettiva equazione del 2.° ordine. Infatti altrimenti y_1 e y_2 differirebbero solo per un fattore costante.

Inoltre si vede che i due integrali

$$y_1 \quad y_2$$

dovrebbero essere uguali ad un medesimo esponenziale, cosicchè le due equazioni di 1.ª specie non sarebbero neanche linearmente distinte.

Tuttavia se noi vogliamo tener conto anche di questo caso particolare possiamo vedere che esistono anche per esso $2p$ equazioni linearmente indipendenti ad equazione integrale di 1.ª specie. Infatti se $\mathrm{E}\,(z)$ è il detto esponenziale sono equazioni a equazione integrale di 1.ª specie quelle le cui soluzioni sono

$$\varphi_i\, \mathrm{E}\,(z)\ ,\ \varphi_j\, \mathrm{E}\,(z)$$

$(i, j = 1, 2, \dots p)$.

Noi possiamo quindi concludere col

Teorema. “Se un gruppo cui appartengono due equazioni di “1.ª specie è del 1.° caso esso è un gruppo del caso speciale, e “precisamente ad esso corrispondono $2p$ equazioni linearmente in- “dipendenti e ad equazione integrale di 1.ª specie „.

§ 15. — Nei §§ precedenti noi abbiamo passati in rassegna dei casi nei quali l'esistenza di equazioni di prima specie indica che il gruppo che si considera è un gruppo speciale. Non è però a credersi che l'esistenza di una equazione di 1.ª specie appartenente ad un dato gruppo indichi che quel gruppo è speciale.

Dimostreremo invece più avanti che *è speciale un gruppo quando al gruppo aggiunto appartiene un'equazione di 1.ª specie.*

Art. 3. - *Relazione fra i poli e i residui degli integrali delle equazioni di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria.*

Sia

$$\mathrm{A}\,(y) = 0$$

un'equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria e indichiamo con

$$y_1 \quad y_2$$

un sistema di integrali fondamentali di essa.

Questi due integrali possederanno dei poli sulla superficie riemanniana, che noi supporremo semplici e distinti dai punti di diramazione e all'infinito della superficie stessa.

Indicheremo con

$$\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_q$$

questi poli e con

$$\mathrm{R}_1^{(i)}\ \mathrm{R}_2^{(i)} \dots \mathrm{R}_q^{(i)}$$

i residui di

$$y_i \quad (i = 1, 2)$$

in essi.

Se è

$$p > 1\ ,$$

noi possiamo sempre costruire una equazione

$$\mathrm{B}\,(t) = 0$$

a equazione integrale di 1.ª specie, le cui soluzioni

$$t_1 \quad t_2$$

abbiano il medesimo gruppo della soluzione dell'equazione aggiunta di

$$\mathrm{A}\,(y) = 0\ .$$

È ben noto che la funzione

$$y_1 t_1 + y_2 t_2$$ [1]

resta inalterata quando si attraversano i tagli che rendono semplicemente connessa la superficie riemanniana.

Essa è dunque una funzione algebrica e quindi avrà nulla la somma di tutti i suoi residui.

Ma essa non ne ha nè all'infinito nè ai punti di diramazione e però viene senz'altro

$$\sum_{s=1}^{q} \left\{ R_s^{(1)}\, t_1(\alpha_s) + R_s^{(2)}\, t_2(\alpha_s) \right\} = 0 \quad .$$

Ma in generale delle equazioni a equazione integrale di 1.ª specie aventi il gruppo dell'equazione aggiunta di

$$A\,(y) = 0$$

ve ne sono $2p-2$ linearmente indipendenti e perciò si avranno $2p-2$ relazioni simili a quella trovata.

Se il gruppo dell'equazione aggiunta di

$$A\,(y) = 0$$

è speciale il numero di tali relazioni sarà $2p-1$ o $2p$. Si capisce come queste relazioni si modificano se si tolgono le ipotesi particolari fatte sulla natura dei punti α_i.

Art. 4. — *Moduli di periodicità delle equazioni integrali di 1.ª categoria.*

§ 1. — Sia

$$A\,(y) = 0$$

un'equazione a equazione integrale di 1.ª categoria e sia

$$y_1 \quad y_2$$

un sistema fondamentale di integrali di essa.

Indicando, come ha fatto l'Appell nella sua memoria citata, con λ la variabile sul lembo positivo di un taglio e con ρ la variabile

[1] V. SCHLESINGER. *Theorie des linearen differential gleichungen,* t. II, parte 2ª, pag. 409.

sul lembo opposto, allora lungo un medesimo taglio le

$$y_1(\lambda) \quad y_2(\lambda)$$

saranno combinazioni lineari omogenee a coefficienti costanti di

$$y_1(\rho) \quad y_2(\rho) \; .$$

Se il taglio che si considera è il taglio a_i noi porremo

$$y_h(\lambda) = s_h^{(i)}\, y\,(\rho) \; .$$

Al taglio b_i porremo

$$y_h(\lambda) = \tau_h^{(i)}\, y\,(\rho)$$

e al taglio c_i porremo

$$y_h(\lambda) = \sigma_h^{(i)}\, y\,(\rho) \qquad (h = 1, 2)$$

Se

$$Y_1 \quad Y_2$$

sono le soluzioni corrispondenti ad

$$y_1 \quad y_2$$

dell'equazione integrale di

$$A\,(y) = 0$$

avremo lungo il taglio a_i

$$Y_h(\lambda) = s_h^{(i)}\, Y\,(\rho) + A_h^{(i)} \; ,$$

lungo il taglio b_i

$$Y_h(\lambda) = \tau_h^{(i)}\, Y\,(\rho) + B_h^{(i)} \; ,$$

lungo il taglio c_i

$$Y_h(\lambda) = \sigma_h^{(i)}\,(Y)\,(\rho) + C_h^{(i)} \qquad (h = 1, 2),$$

dove le quantità

$$A_h^{(i)} \; , \; B_h^{(i)} \; , \; C_h^{(i)}$$

sono costanti.

Esse si dicono i *moduli di periodicità* o più brevemente i *periodi di* Y_h .

§ 2. — Conveniamo di porre

$$y_h(\rho) = s_h^{(-i)}\, y\,(\lambda)$$

le relazioni che vengono risolvendo le

$$y_h(\lambda) = s_h^{(i)}\, y\,(\rho)$$

rispetto alle $y\,(\rho)$ e analogamente dicasi per le relazioni dei valori delle y lungo i lembi dei tagli b_i e c_i .

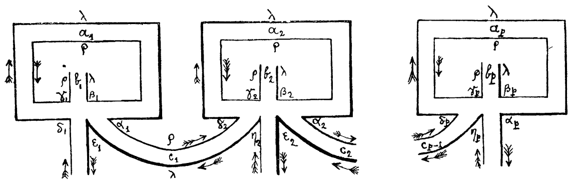
Ne verrà allora per es. lungo il taglio a_i

$$s_h^{(-i)}\,\mathrm{Y}\,(\lambda) = \mathrm{Y}_h\,(\rho) + s_h^{(-i)}\,\mathrm{A}^{(i)}$$

ossia

$$\mathrm{Y}_h\,(\rho) = s_h^{(i)}\,\mathrm{Y}\,(\lambda) - s_h^{(-i)}\,\mathrm{A}^{(i)}\ .$$

§ 3. — Ora ci occorre di precisar meglio il sistema di tagli che noi assumeremo per rendere semplicemente connessa la superficie riemanniana. Noi terremo sempre presente la disposizione suggerita dalla seguente figura.



In essa le freccie indicano il senso positivo del contorno, i lembi più marcati sono i lembi positivi, le lettere all'esterno dei tagli danno il nome della variabile sul lembo su cui è posta la lettera, le lettere ai vertici danno il nome della variabile nel punto quando questo si pensi appartenente all'angolo su cui giace la lettera.

§ 4. — Noi avremo

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}_h\,(\alpha_i) &= s_h^{(i)}\,\mathrm{Y}\,(\beta_i) + \mathrm{A}_h^{(i)}\\ &= s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,\mathrm{Y}\,(\gamma_i) + s_h^{(i)}\,\mathrm{B}^{(i)} + \mathrm{A}_h^{(i)}\\ &= s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\mathrm{Y}\,(\delta_i) - s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\mathrm{A}^{(i)} + s_h^{(i)}\,\mathrm{B}^{(i)} + \mathrm{A}_h^{(i)}\,.\end{aligned}$$

Inoltre, se i è diverso di 1 e da p

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}_h\,(\alpha_i) &= s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\sigma^{(1-i)}\,\mathrm{Y}\,(\eta_i) - s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\sigma^{(1-i)}\,\mathrm{C}^{(i-1)} -\\ &- s_h{}^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\mathrm{A}^{(i)} + s_h^{(i)}\,\mathrm{B}^{(i)} + \mathrm{A}_h^{(i)}\\ &= s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\sigma^{(1-i)}\,\tau^{(-i)}\,\mathrm{Y}\,(\varepsilon^i) - s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\sigma^{(1-i)}\,\tau^{(-i)}\,\mathrm{B}^{(i)} -\\ &- s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i}\,\sigma^{(1-i)}\,\mathrm{C}^{(i-1)} - s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\mathrm{A}^{(i)} + s^{(i)}\,\mathrm{B}^{(i)} + \mathrm{A}_h^{(i)}\\ &= s_h{}^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\sigma^{(1-i)}\,\tau^{(-i)}\,\sigma^{(i)}\,\mathrm{Y}\,(\alpha_i) + s_h{}^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\sigma^{(1-i)}\,\tau^{(-i)}\,\mathrm{C}^{(i)} -\\ &- s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\sigma^{(1-i)}\,\tau^{(-i)}\,\mathrm{B}^{(i)} - s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\sigma^{(1-i)}\,\mathrm{C}^{(i-1)} -\\ &\qquad - s_h^{(i}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\mathrm{A}^{(i)} + s_h^{(i)}\,\mathrm{B}^{(i)} + \mathrm{A}_h^{(i)}\,,\end{aligned}$$

e poichè per i diverso da 1 e da p è

$$s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\sigma^{(1-i)}\,\tau^{(-i)}\,\sigma^{(i)}\,\theta = \theta_h\ ,$$

ne viene

$$\begin{aligned}&s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\sigma^{(1-i)}\,\tau^{(-i)}\,(\mathrm{C}^{(i)} - \mathrm{B}^{(i)}) - s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\sigma^{(1-i)}\,\mathrm{C}^{(i-1)} -\\ &\qquad - s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\mathrm{A}^{(i)} + s_h^{(i)}\,\mathrm{B}^{(i)} + \mathrm{A}_h^{(i)} = 0\ ,\end{aligned}$$

o volendo scriver meno

$$\begin{aligned}\text{(I)}\qquad &\sigma_h^{(-i)}\,(\mathrm{C}^{(i)} - \mathrm{B}^{(i)}) - \sigma_h^{(-i)}\,\tau^{(i)}\,\mathrm{C}^{(i-1)} - s_h^{(i)}\,\tau^{(i)}\,s^{(-i)}\,\mathrm{A}^{(i)} +\\ &\qquad + s_h^{(i)}\,\mathrm{B}^{(i)} + \mathrm{A}_h^{(i)} = 0\ .\end{aligned}$$

Avremo poi analogamente

$$s_h^{(1)}\,\tau^{(1)}\,s^{(-1)}\,\tau^{(-1)}\,(\mathrm{C}^{(1)} - \mathrm{B}^{(1)}) - s_h^{(1)}\,\tau^{(1)}\,s^{(-1)}\,\mathrm{A}^{(1)} + s_h^{(1)}\,\mathrm{B}^{(1)} + \mathrm{A}_h^{(i)} = 0$$

e

$$\begin{aligned}&s_h^{(p)}\,\tau^{(p)}\,s^{(-p)}\,\sigma^{(1-p)}\,\tau^{(-p)}\,\mathrm{B}^{(p)} + s_h^{(p)}\,\tau^{(p)}\,s^{(-p)}\,\sigma^{(1-p)}\,\mathrm{C}^{(p-1)} +\\ &\qquad + s_h^{(p)}\,\tau^{(p)}\,s^{(-p)}\,\mathrm{A}^{(p)} - s_h^{(p)}\,\mathrm{B}^{(p)} - \mathrm{A}_h^{(p)} = 0\end{aligned}$$

o anche

$$\begin{aligned}\text{(II)}\qquad &\sigma_h^{(-1)}\,(\mathrm{C}^{(1)} - \mathrm{B}^{(1)}) - \sigma_h^{(-1)}\,\tau^{(1)}\,\mathrm{A}^{(1)} + s_h^{(1)}\,\mathrm{B}^{(1)} + \mathrm{A}_h^{(1)} = 0\\ &\mathrm{B}_h^{(p)} + \tau^{(p)}\,\mathrm{C}^{(p-1)} + \tau^{(p)}\,\sigma^{(p-1)}\,\mathrm{A}^{(p)} - s_h^{(p)}\,\mathrm{B}^{(p)} - \mathrm{A}_h^{(p)} = 0\ .\end{aligned}$$

Le (I) e (II) sono $2p$ relazioni che esistono necessariamente fra i $6p-2$ moduli di periodicità delle Y_h .

Abbiamo quindi il

Teorema. " I $6p-2$ periodi delle soluzioni delle equazioni in-
" tegrali di 1.ª categoria sono legati dalle $2p$ relazioni (I) e (II)
" alle sostituzioni del gruppo ".

Art. 5.° — *Relazioni fra i moduli di periodicità delle soluzioni di due equazioni integrali di 1.ª specie di equazioni a soluzioni contragredienti.*

§ 1. — Siano

$$\mathrm{A}\,(y) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{B}\,(t) = 0$$

due equazioni di Appell del 2.° ordine a equazioni integrali di 1.ª specie a soluzioni contragredienti.

Indichiamo le sostituzioni generatrici del gruppo di

$$\mathrm{A}\,(y) = 0$$

allo stesso modo come si è fatto all'articolo precedente.

Indichiamo le corrispondenti sostituzioni dell'equazione aggiunta cambiando le lettere s, τ, η, in S, T, H rispettivamente.

Siano

$$y_1 \quad y_2$$

gli integrali di

$$A(y) = 0$$

e

$$t_1 \quad t_2$$

i corrispondenti di

$$B(t) = 0$$

e

$$Y_1 \quad Y_2 \quad , \quad \theta_1 \quad \theta_2$$

le soluzioni corrispondenti delle loro equazioni integrali.

L'espressione

$$Y_1 t_1 + Y_2 t_2$$

è una funzione che sulla superficie riemanniana resa semplicemente connessa non ha residui ed è monodroma.

Perciò

$$\int_{abc} (Y_1 t_1 + Y_2 t_2)\, dz = 0$$

essendo l'integrale pensato esteso nel senso positivo al contorno formato da tutti i tagli a, b, c.

Indicando con

$$A_h^{(i)} \ , \ B_h^{(i)} \ , \ C_h^{(i)}$$

i periodi di Y_h abbiamo subito

$$\int_{a,b,c} (Y_1 t_1 + Y_2 t_2)\, dz = -\sum_{i=1}^{p} \int_{\overline{a}_i} (A_1^{(i)} S_1^{(i)} t + A_2^{(i)} S_2^{(i)} t)\, dz -$$

$$-\sum_{i=1}^{p} \int_{\overline{b}_i} (B_1^{(i)} T_1^{(i)} t + B_2^{(i)} T_2^{(i)} t)\, dz$$

$$-\sum_{i=1}^{p-1} \int_{\overline{c}_i} (C_1^{(i)} H_1^{(i)} t + C_2^{(i)} H_2^{(i)} t)\, dz$$

gli integrali

$$\int_{\overline{a}_i} \quad \int_{\overline{b}_i} \quad \int_{\overline{c}_i}$$

pensandosi estesi in senso positivo sui lembi negativi dei tagli.

Viene allora facilmente

$$0 = \sum_{h=1}^{2} \Big\{ \sum_{i=1}^{p} A_h^{(i)} \Big(S_h^{(i)} \theta(\gamma_i) - S_h^{(i)} \theta(\beta_i) \Big) + \sum_{i=2}^{p} B_h^{(i)} \Big(T_h^{(i)} \theta(\eta_i) - T_h^{(i)} \theta(\gamma_i) \Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p-1} C_h^{(i)} \Big(H_h^{(i)} \theta(\delta_{i+1}) - H_h^{(i)} \theta(\alpha_i) \Big) + B_h^{(1)} \Big(T_h^{(1)} \theta(\delta_1) - T_h^{(1)} \theta(\gamma_1) \Big) \Big\}$$

§ 2. — Indichiamo con

$$\mathbf{A}_h^{(i)} \quad \mathbf{B}_h^{(i)} \quad \mathbf{C}_h^{(i)}$$

i periodi di θ_h .

Sarà

$$\theta_h(\beta_i) = T_h^{(i)} \theta(\gamma_i) + \mathbf{B}_h^{(i)}$$

e per $i \neq 1$

$$\theta_h(\eta_i) = H_h^{(i-1)} S^{(i)} \theta(\gamma_i) + H_h^{(i-1)} \mathbf{A}^{(i)} + \mathbf{C}_h^{(i-1)}$$

e per ogni i

$$\theta_h(\delta_i) = S_h^{(i)} \theta(\gamma_i) + \mathbf{A}_h^{(i)}$$

$$\theta_h(\alpha_i) = S_h^{(i)} T^{(i)} \theta(\gamma_i) + S_h^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} + \mathbf{A}_h^{(i)}$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{2} \Big\{ \sum_{i=1}^{p} A_h^{(i)} \Big(S_h^{(i)} \theta(\gamma_i) - S_h^{(i)} T^{(i)} \theta(\gamma_i) - S_h^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} \Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} B_h^{(i)} \Big(T_h^{(i)} H^{(1-i)} S^{(i)} \theta(\gamma_i) + T_h^{(i)} H^{(1-i)} \mathbf{A}^{(i)} + T_h^{(i)} \mathbf{C}^{(i-1)} - T_h^{(i)} \theta(\gamma_i) \Big)$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} C_h^{(i)} \Big(H_h^{(i)} S^{(i+1)} \theta(\gamma_{i+1}) + H_h^{(i)} \mathbf{A}^{(i+1)} - H_h^{(i)} S^{(i)} \mathbf{T}^{(i)} \theta(\gamma_i) -$$

$$- H_h^{(i)} S^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} - H_h^{(i)} \mathbf{A}^{(i)} \Big)$$

$$+ B_h^{(i)} \Big(T_h^{(1)} S^{(1)} \theta(\gamma_1) + T_h^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} - T_h^{(1)} \theta(\gamma_1) \Big) \Big\} = 0$$

Ma questa relazione deve essere indipendente dalle γ_i, perchè spostando leggermente i tagli si può fare in modo che si muova uno qualunque dei punti γ_i, mentre non muteranno affatto nè sostituzioni nè periodi; e però le espressioni

$$(\alpha) \quad \sum_{h=1}^{2} \Big\{ A_h^{(1)} \Big(S_h^{(1)} \theta - S_h^{(1)} T^{(1)} \theta \Big) + B_h^{(1)} \Big(T_h^{(1)} S^{(1)} \theta - T_h^{(1)} \theta \Big) - $$
$$- C_h^{(1)} H_h^{(1)} S\, T^{(1)} \theta \Big\} ,$$

$$(\beta) \quad \sum_{h=1}^{2} \Big\{ A_h^{(i)} \Big(S_h^{(i)} \theta - S_h^{(i)} T^{(i)} \theta \Big) + B_h^{(i)} \Big(T_h^{(i)} H^{(i-1)} S^{(i)} \theta - T_h^{(i)} \theta \Big) + $$
$$+ C_h^{(i-1)} H_h^{(i-1)} S^{(i)} \theta - C_h^{(i)} H_h^{(i)} S^{(i)} T^{(i)} \theta \Big\} \quad (i = 2, 3, \dots p-1)$$

$$(\gamma) \quad \sum_{h=1}^{2} \Big\{ A_h^{(p)} \Big(S_h^{(p)} \theta - S_h^{(p)} T^{(p)} \theta \Big) + B_h^{(p)} \Big(T_h^{(p)} H^{(p-1)} S^{(p)} \theta - T_h^{(p)} \theta \Big) + $$
$$+ C_h^{(p-1)} H_h^{(p-1)} S^{(p)} \theta \Big\}$$

dovranno essere costanti.

Ma

$$t_1 \quad t_2$$

sono linearmente indipendenti e perciò le espressioni precedenti saranno identicamente nulle in θ_1 e θ_2 .

Noi possiamo stare fin da ora sicuri di questa affermazione, ma io farò vedere che ciò è una conseguenza delle formule (I) e (II), così potremo avere maggior fiducia sull'esattezza dei calcoli fatti.

L'espressione (α) si può scrivere

$$\sum_{h=1}^{2} \Big\{ s_h^{(1)} s^{(-1)} A^{(1)} . S_h^{(1)} \theta - s_h^{(1)} \tau^{(1)} \tau^{(-1)} s^{(-1)} A^{(1)} . S_h^{(1)} T^{(1)} \theta + $$
$$+ \tau_h^{(1)} s^{(1)} s^{(-1)} \tau^{(-1)} B^{(1)} . T_h^{(1)} S^{(1)} \theta - \tau_h^{(1)} \tau^{(-1)} B^{(1)} . T_h^{(1)} \theta - $$
$$- \sigma_h^{(1)} s^{(1)} \tau^{(1)} \tau^{(-1)} s^{(-1)} \sigma^{(-1)} C^{(1)} . H_h^{(1)} S^{(1)} T^{(1)} \theta \Big\}$$

e, ricordando la proprietà delle sostituzioni contragredienti di lasciare inalterata l'espressione

$$u_1 v_1 + u_2 v_2$$

quando si applica una di esse sulle

$$u_1 \quad u_2$$

e l'altra sulle

$$v_1 \quad v_2 \quad ,$$

vediamo che la (α) è uguale a

$$\sum_{h=1}^{2} \theta_h \Big\{ s_h^{(-1)} A^{(1)} - \tau_h^{(1)} s^{(-1)} A^{(1)} + s_h^{(1)} \tau^{(-1)} B^{(1)} - \tau_h^{(-1)} B^{(1)} - \tau_h^{(-1)} s^{(-1)} \sigma^{(-1)} C^{(1)} \Big\}$$

o anche a

$$\sum_{h=1}^{2} \theta_h . \tau_h^{-1)} s^{(-1)} \Big\{ \sigma^{(-1)} \tau^{(1)} A^{(1)} - A^{(1)} + \sigma^{(-1)} B^{(1)} - s^{(1)} B^{(1)} - \sigma^{(-1)} C^{(1)} \Big\}$$

Ora la quantità che comparisce fra le parentesi è il primo membro cambiato di segno della prima delle relazioni (II); perciò appunto la (α) è identicamente nulla.

Analogamente le (β) si possono scrivere:

$$\sum_{h=1}^{2} \theta_h \Big\{ s_h^{(-i)} A^{(i)} - \tau_h^{(-i)} s^{(-i)} A^{(i)} + s_h^{(-i)} \sigma^{(1-i)} \tau^{(-i)} B^{(i)} - \tau_h^{(-i)} B^{(i)} + $$
$$+ s_h^{(-i)} \sigma^{(1-i)} C^{(i-1)} - \tau_h^{(-i)} s^{(-i)} \sigma^{(-i)} C^{(i)} \Big\}$$

e la (γ)

$$\sum_{h=1}^{2} \theta_h \Big\{ s_h^{(-p)} A^{(p)} - \tau_h^{(-p)} s^{(-p)} A^{(p)} + s_h^{(-p)} \sigma^{(1-p)} \tau^{(-p)} B^{(p)} - \tau_h^{(-p)} B^{(p)} + $$
$$+ s^{(-p)} \sigma^{(1-p)} C^{(p-1)} \Big\}$$

a sotto questa forma si vede facilmente come esse siano identicamente nulle in conseguenza delle relazioni (I) e della seconda delle (II) rispettivamente.

Viste con chiarezza queste cose noi possiamo allora dire che si dovrà avere l'uguaglianza

$$(\mathrm{III}) \quad \sum_{h=1}^{2} \Big\{ - \sum_{i=1}^{p} A_h^{(i)} . S_h^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} + \sum_{i=2}^{p} B_h^{(i)} . \Big(\mathbf{T}_h^{(i)} \mathbf{H}^{(i-1)} \mathbf{A}^{(i)} + \mathbf{T}_h^{(i)} \mathbf{C}^{(i-1)} \Big) + $$
$$+ \sum_{i=1}^{p-1} C_h^{(i)} . \Big(H_h^{(i)} \mathbf{A}^{(i+1)} - H_h^{(i)} S^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} - H_h^{(i)} \mathbf{A}^{(i)} \Big) + B_h^{(1)} . T_h^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} \Big\} = 0 .$$

§ 3. — Per maggior comprensività noi possiamo scrivere tutte le formule (I) e (II) sotto la forma (I), e possiamo anche scrivere la (III) sotto la forma

$$\sum_{h=1}^{2} \sum_{i=1}^{p} \Big\{ - A_h^{(i)} . S_h^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} + B_h^{(i)} . \Big(T_h^{(i)} H^{(i-1)} \mathbf{A}^{(i)} + T_h^{(i)} \mathbf{C}^{(i-1)} \Big) +$$
$$+ C_h^{(i)} . \Big(H_h^{(i)} \mathbf{A}^{(i+1)} - H_h^{(i)} S^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} - H_h^{(i)} \mathbf{A}^{(i)} \Big\} = 0$$

purchè si supponga

$$C_h^{(0)} = C_h^{(p)} = \mathbf{C}_h^{(0)} = \mathbf{C}_p^{(p)} = 0$$

e

$$\sigma_h^{(0)} \theta = \sigma_h^{(p)} \theta = H_h^{(0)} \theta = H_h^{(p)} \theta = \theta_h \quad (h = 1, 2)$$

Art. 6. — *Equazioni integrali di terza specie.*

§ 1. — Fra le equazioni integrali di terza specie di equazioni di Appell di prima categoria le più semplici a pensarsi sono quelle il cui integrale generale è regolare su tutta la superficie riemanniana salvo che in un punto z_0 in cui si comporta come

$$K \log (z - z_0) + \text{funz. reg.}$$

dove K è una costante.

Noi chiameremo per brevità una tale equazione integrale una equazione $l z_0$, ed in generale indicheremo con $l z_1, z_2, \ldots z_q$ un'equazione integrale che si comporti in $z_1, z_2, \ldots z_q$ come una $l z_0$ in z_0 e tale che altrove il suo integrale generale sia regolare.

Noi ci faremo dapprima la domanda:

" Data un'equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria
" esistono equazioni aventi il gruppo di quella e la cui equazione
" integrale sia una $l z_0$? „

§ 2. — Supponiamo che

$$A(y) = 0$$

sia la solita equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria assunta all'articolo 2.° di questo capitolo per definire un gruppo, e che

$$B(\eta) = 0$$

sia, se esiste, un' equazione pure del 2.° ordine e di 1.ª categoria la cui equazione integrale sia una $l z_0$.

L' equazione

$$C(t) = B(\varphi . t) = 0$$

ha il suo integrale generale regolare dappertutto tranne che nei $2p-2$ zeri di φ e nel punto z_0, nei quali punti ha $2p-1$ poli semplici.

Ora conservando qui tutte le notazioni del § 1.° dell'art. 2 di questo secondo capitolo e ragionando al medesimo modo che là, si trova

$$(1) \quad t_h = \Big\{ \sum_{i=1}^{\sigma} \lambda_i Z_{\alpha_i} + L + \varepsilon Z_{z_0} \Big\} y_h -$$
$$- \frac{1}{\varphi} \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \mu_i Z_{\alpha_i} + M + \eta Z_{z_0} \Big\} y'_h \qquad (k = 1, 2)$$

essendo qui anche ε ed η due costanti e dovendo tutte le $4(N + p - 1) + 2p + 2$ costanti che compariscono soddisfare a $4(N + p - 1) + 2$ relazioni che si scrivono subito mutando leggermente le relazioni (I) (II) (III) (IV) dell'articolo citato.

Si conclude che in generale vi sono almeno $2p$ equazioni linearmente indipendenti che possiedono il gruppo di

$$A(y) = 0$$

e le cui equazioni integrali sono $l z_0$.

Il numero di queste equazioni è proprio $2p$ se le $4(N+p-1)+2$ relazioni di cui si è parlato (che sono lineari nelle costanti che compariscono in (1)) sono linearmente indipendenti.

Ciò sarà nei casi più generali, poichè si possono trovare degli esempi in cui ciò succede.

Per es. ciò accade se i due integrali di

$$A(y) = 0$$

sono due funzioni a moltiplicatori tali che *di nessuna delle due* i moltiplicatori siano moltiplicatori del *caso speciale di Appell.*

§ 3. — Indichiamo con δ il numero delle equazioni col gruppo di

$$A(y) = 0$$

aventi per equazioni integrali delle $l z_0$.

È certo

$$\delta \geq 2p$$

Sia δ_1 il numero delle equazioni col gruppo di

$$A(y) = 0$$

e ad equazione integrale di prima specie.

Sarà

$$\delta_1 \geq \delta - 2$$

Potrebbe darsi che fosse

$$\delta_1 > \delta - 2$$

e quindi o

$$\delta_1 = \delta - 1$$

o

$$\delta_1 = \delta$$

Per la disuguaglianza

$$\delta \geq 2p$$

si vede che in tutti e due questi casi siamo in *casi speciali*.

Nel caso generale

$$\delta_1 = \delta - 2$$

esistono due equazioni del 2.° ordine linearmente indipendenti a equazioni integrali l_{z_0} le cui soluzioni possiedono effettivamente la singolarità logaritmica in z_0, e queste due equazioni sono linearmente indipendenti con qualsiasi equazione a equazione integrale di 1.ª specie.

Indicando con

$$B_1(\eta) = 0 \quad B_2(\eta) = 0$$

quelle due equazioni e con

$$A_1(\eta) = 0 \; A_2(\eta) = 0 \; \ldots \; A_{\delta_1}(\eta) = 0$$

le δ_1 equazioni a equazione integrale di 1.ª specie, ogni equazione avente per equazione integrale una l_{z_0} è linearmente dipendente dal sistema di equazioni

$$B_1(\eta) = 0 \; B_2(\eta) = 0 \quad A_1(\eta) = 0 \quad A_2(\eta) = 0 \ldots A_{\delta_1}(\eta) = 0 \,.$$

Nel caso

$$\delta_1 = \delta - 1$$

esiste un' equazione

$$B(\eta) = 0$$

la cui equazione integrale è una l_{z_0} la cui soluzione generale possiede effettivamente la singolarità logaritmica nel punto z_0.

Ogni altra equazione la cui equazione integrale sia una l_{z_0} è linearmente dipendente dal sistema di equazioni

$$B(\eta) = 0 \; A_1(\eta) = 0 \; A_2(\eta) = 0 \ldots A_{\delta_1}(\eta) = 0$$

di cui le ultime δ_1 sono le δ_1 equazioni a equazione integrale di 1.ª specie.

Finalmente nel caso

$$\delta_1 = \delta$$

qualunque equazione integrale l_{z_0} è un'equazione di 1.ª specie.

Esempi di questi due ultimi tipi li abbiamo nei gruppi tali che le equazioni corrispondenti hanno per soluzioni due funzioni a moltiplicatori di cui una o tutte e due sono funzioni del caso speciale di Appell.

§ 4. — Supponiamo di avere un gruppo che non sia del caso speciale.

Allora è certamente

$$\delta_1 = \delta - 2 \,.$$

Possiamo allora scegliere un'equazione

$$B(\eta) = 0$$

tale che la sua equazione integrale sia una l_{z_0}, delle cui due soluzioni la prima possegga effettivamente la singolarità logaritmica e la seconda sia regolare.

Indico con

$$\eta_1 \quad \eta_2$$

gli integrali fondamentali di

$$B(\eta) = 0 \,.$$

Supponiamo, se è possibile, che esista un'equazione del 2.° ordine di 1.ª specie che abbia il gruppo dell'aggiunta di

$$B(\eta) = 0 \,.$$

Sia essa

$$C(t) = 0$$

e

$$t_1 \quad t_2$$

siano i suoi integrali corrispondenti ad

$$\eta_1 \quad \eta_2 \; .$$

La funzione

$$\eta_1 t_1 + \eta_2 t_2$$

è una funzione algebrica e quindi è nulla la somma dei suoi residui.

Indicando con R il residuo di η_1 nel punto z_0 è dunque

$$R\, t_1(z_0) = 0 \; .$$

Ma

$$R \neq 0 \; ,$$

dunque

$$t_1(z_0) = 0 \; .$$

Ma z_0 è qualunque, quindi senz'altro

$$t_1(z) = 0 \; .$$

Analogamente si trova

$$t_2(z) = 0 \; .$$

Possiamo quindi concludere che un'equazione del 2.° ordine e di 1.ª specie avente il gruppo dell'aggiunta di

$$B(\eta) = 0$$

non può esistere.

Abbiamo perciò il

Teorema. " Se il gruppo dell'equazione aggiunta di

$$A(y) = 0$$

" possiede un'equazione di 1.ª specie il gruppo di

$$A(y) = 0$$

" è un gruppo speciale ".

§ 5. — Fra i risultati del signor Appell sulle funzioni a moltiplicatori abbiamo il seguente:

" Dati i moltiplicatori di una funzione, si sarà nel caso speciale " (ossia esisteranno p invece di $p - 1$ funzioni aventi quei moltiplicatori e ad integrale di 1.ª specie linearmente indipendenti) " se esiste una funzione di 1.ª specie avente quei moltiplicatori ".

Questo fatto si può anche enunciare così:

" Dati i moltiplicatori si sarà in un caso speciale se esiste " una funzione di 1.ª specie ai moltiplicatori inversi ".

Si potrebbe vedere con esempi che al 1.° enunciato non ne corrisponde uno analogo per le equazioni di Appell del 2.° ordine.

Qualche cosa di corrispondente noi l'abbiamo solo nel teorema alla fine del § 14 dell'art. 2 di questo capitolo.

Invece al secondo enunciato noi abbiamo una corrispondenza perfetta col teorema del § precedente.

Il teorema del § 14 dell'art. 2 di questo capitolo è una conseguenza del teorema del § precedente. Invero si può vedere facilmente che il gruppo dell'equazione aggiunta di un'equazione del 1.° caso è un gruppo che possiede esso pure delle equazioni di 1.ª specie.

Basta perciò tener conto del fatto che i determinanti dei coefficienti delle sostituzioni sono moltiplicatori di un esponenziale.

Art. 7.° — *Moduli di periodicità delle soluzioni delle equazioni integrali di terza specie* $l_{z_1}, z_2, \ldots z_q$.

§ 1. — Per avere una superficie semplicemente connessa su cui sia monodroma la soluzione generale di un'equazione $l_{z_1} z_2, \ldots z_q$ sarà bene aggiungere ai tagli che rendono semplicemente connessa la superficie riemanniana altri q tagli

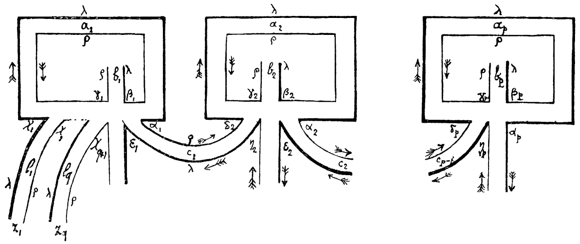
$$l_1 \; , \; l_2 \; , \; \ldots \; l_q$$

che escono dal contorno di quelli e che vadano ai punti

$$z_1 \; , \; z_2 \; , \; \ldots \; z_q$$

Noi converremo di fare uscire tutti questi tagli dall'angolo δ_1 della figura al § 3 dell'art. 4 del presente capitolo.

Il loro succedersi, il senso positivo del percorso dei loro lembi, quale si assuma dei due lembi di un taglio come positivo o negativo, tutto è indicato dalla seguente figura.



§ 2. — Sia

$$\mathrm{A}\; y) = 0$$

un'equazione di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria la cui equazione integrale sia una $l z_1 \, z_2 \, , \, \ldots \, z_q$

Siano

$$y_1 \quad y_2$$

due suoi integrali fondamentali.

Per indicare le sostituzioni che questi integrali subiscono ai tagli a_i, b_i, c_i noi useremo le notazioni introdotte al § 1 dell'articolo 4 di questo capitolo.

Indicheremo pure come in quel paragrafo con

$$\mathrm{Y}_1 \quad \mathrm{Y}_2$$

le soluzioni di

$$\mathrm{A}\;(\mathrm{Y}') = 0$$

corrispondenti ad

$$y_1 \quad y_2$$

Come là noi avremo lungo i lembi del taglio a_i

$$\mathrm{Y}_h\;(\lambda) = s_h^{(i)}\;\mathrm{Y}\;(\rho) + \mathrm{A}_h^{(i)}$$

lungo il taglio b_i

$$\mathrm{Y}_h\;(\lambda) = \tau_h^{(i)}\;\mathrm{Y}\;(\rho) + \mathrm{B}_h^{(i)}$$

lungo il taglio c_i

$$\mathrm{Y}_h\;(\lambda) = \sigma_h^{(i)}\;\mathrm{Y}\;(\rho) + \mathrm{C}_h^{(i)}$$

dove le

$$\mathrm{A}_h^{(i)} \quad \mathrm{B}_h^{(i)} \quad \mathrm{C}_h^{(i)}$$

sono delle costanti.

Inoltre lungo il taglio l_r si avrà

$$\mathrm{Y}_h\;(\lambda) - \mathrm{Y}_h\;(\rho) = -\,2\;\pi\;i\;\mathrm{R}_h^{(r)}$$

se $\mathrm{R}_h^{(r)}$ è il residuo logaritmico nel punto z_r di Y_h .

Le quantità costanti

$$\mathrm{A}_h^{(i)}\;,\;\mathrm{B}_h^{(i)}\;,\;\mathrm{C}_h^{(i)}\;,\;-\,2\;\pi i\;\mathrm{R}_h^{(r)}$$

si chiameranno i moduli di periodicità delle Y_h .

Art. 8.° — *Relazione fra i moduli di periodicità delle soluzioni delle equazioni integrali di 3.ª specie* $l z_1\;,\;z_2\;,\;\ldots\;z_q$.

Fra i periodi delle equazioni integrali $l z_1\;,\;z_2\;,\;\ldots\;z_q$ valgono manifestamente le relazioni (I) del § 4 dell'art. 4 di questo capitolo e la seconda delle (II) del medesimo paragrafo.

La prima delle (II) vuol essere invece convenientemente mutata.

Avremo

$$\mathrm{Y}_h\;(\alpha_1) = s_h^{(1)}\;\tau^{(1)}\;s^{(-1)}\;\mathrm{Y}_h\;(\chi_1) - s_h^{(1)}\;\tau^{(1)}\;s^{(-1)}\;\mathrm{A}^{(1)} + s_h^{(1)}\;\mathrm{B}^{(1)} + \mathrm{A}_h^{(1)}$$

Ma

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_h\;(\chi_1 &= \mathrm{Y}_h\;(\chi_2) - 2\;\pi i\;\mathrm{R}_h^{(1)} \\ &= \mathrm{Y}_h\;(\chi_3) - 2\;\pi i\;(\mathrm{R}_h^{(1)} + \mathrm{R}_h^{(2)}) \\ &= \mathrm{Y}_h\;(\chi_q + 1) - 2\;\pi i \sum_{r=1}^{q} \mathrm{R}_h^{(r)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_h\;(\chi_{q+1}) &= \tau_h^{(-1)}\;\mathrm{Y}\;(\varepsilon_1) - \tau_h^{(-1)}\;\mathrm{B}^{(1)} \\ &= \tau_h^{(-1)}\;\sigma^{(1)}\;\mathrm{Y}\;(\alpha_1) - \tau_h^{(-1)}\;\mathrm{B}^{(1)} + \tau_h^{(-1)}\;\mathrm{C}^{(1)} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_h\;(\alpha_1) = {} & s_h^{(1)}\;\tau^{(1)}\;s^{(-1)}\;\tau^{(-1)}\;\sigma^{(1)}\;\mathrm{Y}\;(\alpha_1) + s_h^{(1)}\;\tau^{(1)}\;s^{(-1)}\;\tau^{(1)}\;(\mathrm{C}^{(1)} - \mathrm{B}^{(1)}) - \\ & - 2\;\pi i\;s_h^{(1)}\;\tau^{(1)}\;s^{(-1)} \sum_{r=1}^{q} \mathrm{R}^{(r)} - s_h^{(1)}\;\tau^{(1)}\;s^{(-1)}\;\mathrm{A}^{(1)} + s_h^{(1)}\;\mathrm{B}^{(1)} + \mathrm{A}_h^{(1)}\;, \end{aligned}$$

e poichè

$$\theta_h = s_h{}^{(1)}\;\tau^{(1)}\;s^{(-1)}\;\tau^{(-1)}\;\sigma^{(1)}\;\theta$$

ne viene

$$\sigma^{(-1)}\,(\mathrm{C}^{(1)} - \mathrm{B}^{(1)}) - s_h^{(1)}\,\tau^{(1)}\,s^{(-1)}\,\mathrm{A}^{(1)} + s_h^{(1)}\,\mathrm{B}^{(1)} + \mathrm{A}_h^{(1)} =$$
$$= 2\pi\,i\,s_h^{(1)}\,\tau^{(1)}\,s^{(-1)}\sum_{r=1}^{q}\mathrm{R}^{(r)} = 2\pi\,i\,\sigma_h^{(-1)}\,\tau^{(1)}\sum_{r=1}^{q}\mathrm{R}^{(r)}$$

Questa e le altre formule ricordate si possono tutte scrivere per comprensività sotto la forma delle (l) al § 4 dell'art. 4, facendo variare in esse la i da *1* a p purchè si supponga

$$\mathrm{C}_h^{(0)} = 2\pi\,i\sum_{r=1}^{q}\mathrm{R}_h^{(r)},\quad \mathrm{C}_h^{(p)} = 0$$
$$\sigma_h^{(0)}\,(\theta) = \sigma_h^{(p)}\,(\theta) = \theta_h$$

Art. 9.° — *Relazione fra i moduli di periodicità di un'equazione integrale lz_1, z_2, ... z_q e di un'equazione integrale di prima specie le cui equazioni derivate abbiano soluzioni contragredienti.*

Sia
$$\mathrm{B}\,(t) = 0$$
un'equazione del 2.° ordine a soluzioni contragredienti a quelle di
$$\mathrm{A}\,(y) = 0$$
e ad equazione integrale di prima specie.

Siano
$$\mathrm{T}_1 \quad \mathrm{T}_2$$
le soluzioni di questa sua equazione integrale corrispondenti alle soluzioni considerate di
$$\mathrm{A}\,(y) = 0\ .$$

Noi andremo a considerare l'espressione
$$\mathrm{T}_1\,y_1 + \mathrm{T}_2\,y_2\ .$$

Sopra la superficie riemanniana resa semplicemente connessa dai tagli a_i, b_i, c_i l'espressione suddetta è monodroma.

La somma dei suoi residui sarà dunque uguale a
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{abc}(\mathrm{T}_1\,y_1 + \mathrm{T}_2\,y_2)\,dz\ ,$$
l'integrale essendo calcolato lungo i lembi dei tagli a_i, b_i, c_i percorsi in senso positivo.

D'altra parte la funzione
$$\mathrm{T}_1\,y_1 + \mathrm{T}_2\,y_2$$
ha tutti i suoi residui nei punti
$$z_1\,z_2\,\ldots\,z_q$$
e precisamente nel punto z_r ha il residuo
$$\mathrm{T}_1\,(z_r)\,\mathrm{R}_1^{(r)} + \mathrm{T}_2\,(z_r)\,\mathrm{R}_2^{(r)}$$
quindi
$$2\pi i\sum_{h=1}^{2}\sum_{r=1}^{q}\mathrm{T}_h\,(z_r)\,\mathrm{R}_h^{(r)} = \int_{abc}(\mathrm{T}_1\,y_1 + \mathrm{T}_2\,y_2)\,dz$$

Noi indicheremo colle lettere
$$\mathbf{A}_h^{(i)}\quad \mathbf{B}_h^{(i)}\quad \mathbf{C}_h^{(i)}$$
i moduli di periodicità di T_h .

Si capisce subito che sarà
$$\int_{abc}(\mathrm{T}_1\,y_1 + \mathrm{T}_2\,y_2)\,dz = \sum_{h=1}^{2}\sum_{i=1}^{p}\Big\{\mathbf{A}_h^{(i)}\,.\,s_h^i\,\mathrm{B}^{(i)} -$$
$$- \mathbf{B}_h^{(i)}\,(\tau_h^{(i)}\,\sigma^{(i-1)}\,\mathrm{A}^{(i)} + \tau_h^{(i)}\,\mathrm{C}^{(i-1)}) - \mathbf{C}_h^{(i)}\,(\sigma_h^i\,\mathrm{A}^{(i+1)} - \sigma_h^{(i)}\,s^{(i)}\,\mathrm{B}^{(i)} - \sigma_h^i\,\mathrm{A}^{(i)}\Big\}$$
dove si deve pensare
$$\mathbf{C}_h^{(0)} = \mathbf{C}_h^{p} = \mathbf{C}_h^{(p)} = 0 \quad \mathrm{C}_h^{(0)} = 2\pi i\sum_{r=1}^{q}\mathrm{R}_h^{(r)}$$
$$\sigma_h^{(0)}\,\theta = \sigma_h^{(p)}\,\theta = \mathrm{H}_h^{(0)}\,\theta = \mathrm{H}_h^{(p)}\,\theta = \theta_h\ .$$

Dunque avremo
$$2\pi i\sum_{h=1}^{2}\sum_{r=1}^{q}\mathrm{T}_h\,(z_r)\,\mathrm{R}_h^{(r)} =$$
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{h=1}^{p}\Big\{\mathbf{A}_h^{(i)}\,s_h^{(i)}\,\mathrm{B}^{(i)} - \mathbf{B}_h^{(i)}\,(\tau_h^{(i)}\,\mathrm{A}^{(i)} + \tau_h^{(i)}\,\mathrm{C}^{(i-1)}) -$$
$$- \mathbf{C}_h^{(i)}\,(\sigma_h^{(i)}\,\mathrm{A}^{(i+1)} - \sigma_h^{(i)}\,s^{(i)}\,\mathrm{B}^{(i)} - \sigma_h^{(i)}\,\mathrm{A}^{(i)})\Big\}$$
insieme alle convenzioni suddette.

Art. 10.° — *Equazioni integrali di seconda specie.*

§ 1. — Fra le equazioni integrali di seconda specie di equazioni di Appell del secondo ordine e di prima categoria le più semplici a pensarsi sono quelle il cui integrale generale è regolare su tutta la superficie riemanniana salvo che in un punto z_0 in cui si comporta come

$$\frac{k}{z - z_0} + \text{funzione regolare,}$$

dove k è una costante.

Noi chiameremo per brevità una tale equazione integrale una equazione L_{z_0}, ed in generale indicheremo con $L_{z_1}, z_2, \ldots z_q$ una equazione integrale che si comporti in

$$z_1, z_2, \ldots z_q$$

come una L_{z_0} in z_0, e tale che altrove il suo integrale generale sia regolare.

Noi ci faremo la domanda:

" Data un' equazione di Appell di prima categoria esistono " equazioni aventi il gruppo di quella e la cui equazione integrale " sia una L_{z_0} ? „

§ 2. — Supponiamo che

$$A(y) = 0$$

sia la solita equazione di Appell del secondo ordine e di prima categoria assunta all' articolo 2 di questo capitolo per definire un gruppo e che

$$B(\eta) = 0$$

sia, se esiste, un' equazione pure del secondo ordine e di prima categoria, appartenente allo stesso gruppo, la cui equazione integrale sia una L_{z_0}.

L' equazione

$$C(t) = B(\varphi . t) = 0$$

ha il suo integrale generale regolare dappertutto tranne che nei $2p-2$ zeri di φ nei quali ha $2p-2$ poli semplici e nel punto z_0 nel quale ha un polo doppio privo di residuo.

Ora conservando qui tutte le notazioni del § 1 dell' art. 2 di questo secondo capitolo e ragionando nel medesimo modo che là,

si trova

$$(2) \qquad t_h = \left\{ \sum_{i=1}^{\sigma} \lambda_i Z_{\alpha_i} + L + \varepsilon Z_{z_0} + \varepsilon_1 Z'_{z_0} \right\} y_h +$$
$$+ \frac{1}{\varphi} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mu_i Z_{\alpha_i} + M + \eta Z_{z_0} + \eta_1 Z'_{z_0} \right\} y'_h$$

essendo qui anche ε, ε_1, η, η_1 quattro costanti, e dovendo tutte le

$$4(N + p - 1) + 2p + 4$$

costanti che compariscono soddisfare a

$$4(N + p - 1) + 2$$

relazioni che si scrivono subito mutando leggermente le relazioni (I), (II), (III), IV) dell' articolo citato, ed inoltre dovendo essere

$$\varepsilon \eta_h(z_0) + \varepsilon_1 y'_h(z_0) + \eta y'_h(z_0) + \eta_1 y''_h(z_0) = 0$$

per i valori 1 e 2 di h.

§ 3. — Indicando con δ_2 il numero delle equazioni col gruppo di

$$A(y) = 0$$

aventi per equazioni integrali delle L_{z_0} è certo

$$\delta_2 \geq 2p .$$

Sia δ_1 il numero delle equazioni col gruppo di

$$A(y) = 0$$

e ad equazione integrale di prima specie.

Sarà

$$\delta_1 \geq \delta_2 - 2 .$$

Potrebbe darsi che fosse

$$\delta_1 > \delta_2 - 2$$

e quindi o

$$\delta_1 = \delta_2 - 1$$

oppure

$$\delta_1 = \delta_2 .$$

Per la disuguaglianza

$$\delta_2 \geq 2p$$

si vede che in tutti e due questi casi siamo in *casi speciali*.

Nel caso generale

$$\delta_1 = \delta_2 - 2$$

esistono due equazioni del 2.° ordine linearmente indipendenti ad equazioni integrali L_{z_0}, le cui soluzioni possiedono effettivamente la singolarità polare in $z = z_0$ e queste due equazioni sono linearmente indipendenti con qualsiasi equazione ad equazione integrale di 1.ª specie.

Indicando con

$$C_1(\eta) = 0 \quad C_2(\eta) = 0$$

quelle due equazioni e con

$$A_1(\eta) = 0 \; A_2(\eta) = 0 \; \ldots \; A_{\delta_1}(\eta) = 0$$

le δ_1 equazioni ad equazione integrale di 1.ª specie, ogni equazione avente per equazione integrale una L_{z_0} è linearmente dipendente dal sistema

$$C_1(\eta) = 0 \; C_2(\eta) = 0 \; A_1(\eta) = 0 \; A_2(\eta) = 0 \; \ldots \; A_{\delta_1}(\eta) = 0 \; .$$

Nel caso

$$\delta_1 = \delta_2 - 1$$

esiste un'equazione

$$C(\eta) = 0$$

la cui equazione integrale è una L_{z_0} la cui soluzione generale possiede effettivamente la singolarità polare nel punto z_0.

Ogni altra equazione la cui equazione integrale sia una L_{z_0} è linearmente dipendente dal sistema di equazioni

$$C(\eta) = 0 \; , \; A_1(\eta) = 0 \; A_2(\eta) = 0 \; \ldots \; A_{\delta_1}(\eta) = 0$$

di cui le ultime δ_1 sono le δ_1 equazioni ad equazione integrale di 1.ª specie.

Finalmente nel caso

$$\delta_1 = \delta_2$$

qualunque equazione integrale L_{z_0} è un'equazione di 1.ª specie.

Esempi dei tre casi

$$\delta_1 = \delta_2 - 2$$
$$\delta_1 = \delta_2 - 1$$
$$\delta_1 = \delta_2$$

li abbiamo nei gruppi tali che le equazioni corrispondenti hanno per soluzioni due funzioni a moltiplicatori di cui nessuna, una o tutte e due sono funzioni del *caso speciale* di Appell.

§ 4. — Al § 2 di questo articolo noi abbiamo dato la formula per determinare le soluzioni delle equazioni ad equazione integrale L_{z_0}.

Noi abbiamo notato che le

$$4(N + p - 1) + 2p + 4$$

costanti che vi compariscono devono soddisfare a

$$4(N + p - 1) + 4$$

relazioni lineari di cui

$$4(N + p - 1) + 2$$

si ottengono con leggiera variazione dalle (I), (II), (III), (IV) del § 1, art. 2 di questo capitolo e le altre due sono

$$\varepsilon\, y_h(z_0) + (\varepsilon_1 + \eta)\, y'_h(z_0) + \eta_1\, y''_h(z_0) = 0 \quad (h = 1, 2) \; .$$

Se noi sopprimiamo queste due relazioni, le t_h definite dalle (2) non avranno più nel punto z_0 un polo del 2.° ordine necessariamente privo di residuo.

Essendo questo residuo diverso da zero l'equazione

$$B(\eta) = 0$$

del § 2 del presente articolo non ha più per equazione integrale una L_{z_0}, ma bensì avrebbe per equazione integrale un'equazione di 3.ª specie la cui soluzione generale è regolare sempre in tutti i punti diversi dal punto z_0, ma nel punto z_0 si comporterebbe come

$$\frac{\alpha}{z - z_0} + \beta \log(z - z_0) + \text{funz. reg.} \; ,$$

α e β essendo delle costanti.

Come si vede una tale equazione gode contemporaneamente della proprietà delle l_{z_0} e delle L_{z_0} e si chiamerà una $(l\,L)_{z_0}$.

Ora si può domandare:

" Data un'equazione la cui equazione integrale sia un'equa-
" zione $(l\ \mathrm{L})\, z_0$, si potrà la sua soluzione generale pensare come
" la combinazione lineare delle soluzioni di due equazioni, una ad
" equazione integrale $l z_0$ e l'altra ad equazione integrale $\mathrm{L} z_0$? ".

La risposta a questa domanda è negativa.

Basta perciò pensare ad un gruppo le cui equazioni corrispondenti hanno per soluzioni due funzioni a moltiplicatori del caso speciale e non funzioni algebriche e supporre che il punto z_0 sia generico.

Tuttavia si ha che

" Se il gruppo non è speciale, ogni equazione a equazione in-
" tegrale $(l\ \mathrm{L}) z_0$ è conseguenza lineare di due equazioni l'una delle
" quali sia ad equazione integrale $l z_0$ e l'altra ad equazione inte-
" grale $\mathrm{L} z_0$ ".

Ciò è evidente.

Art. 11.° — *Relazione fra i moduli di periodicità di un' equazione integrale* $\mathrm{L} z_0$ *e di un' equazione ad equazione integrale di prima specie le cui equazioni derivate abbiano soluzioni contragredienti.*

Siano

$$\mathrm{A}(y) = 0 \quad \mathrm{B}(t) = 0$$

due equazioni di Appell del 2.° ordine di 1.ª categoria a soluzioni contragredienti, inoltre supponiamo che

$$\mathrm{A}(y') = 0$$

sia un'equazione integrale di 1.ª specie e che

$$\mathrm{B}(t') = 0$$

sia un' equazione integrale $\mathrm{L} z_0$.

Per rappresentare le sostituzioni delle soluzioni delle equazioni

$$\mathrm{A}(y) = 0 \ , \ \mathrm{B}(t) = 0$$

e per rappresentare i periodi delle soluzioni di

$$\mathrm{A}(y') = 0 \ , \ \mathrm{B}(t') = 0$$

noi useremo tutte le notazioni usate all'art. 5 ed useremo pure le notazioni di detto articolo per rappresentare le soluzioni corrispondenti di tutte queste quattro equazioni.

L' espressione

$$\mathrm{Y}_1 t_1 + \mathrm{Y}_2 t_2$$

è una funzione algebrica che sulla superficie riemanniana è monodroma e non ha residui altro che nel punto $z = z_0$.

Precisamente se nel punto z_0 la T_1 si comporta come

$$\frac{\mathrm{R}_1}{z - z_0} + \text{funzione regolare}$$

e T_2 come

$$\frac{\mathrm{R}_2}{z - z_0} + \text{funzione regolare}$$

il residuo di

$$\mathrm{Y}_1 t_1 + \mathrm{Y}_2 t_2$$

nel punto z_0 sarà

$$-\left(y_1(z_0)\, \mathrm{R}_1 + y_2(z_0)\, \mathrm{R}_2\right) .$$

Quindi

$$-2\pi i \left(y_1(z_0)\, \mathrm{R}_1 + y_2(z_0)\, \mathrm{R}_2\right) = \int_{abc} (\mathrm{Y}_1 t_1 + \mathrm{Y}_2 t_2)\, dz$$

l' integrale pensandosi esteso ai lembi dei tagli a_i, b_i, c_i percorsi in senso positivo.

Avremo infine

$$2\pi i \Big(\mathrm{R}_1 y_1(z_0) + \mathrm{R}_2 y_2(z_0)\Big) = \sum_{h=1}^{2} \sum_{i=1}^{p} \Big\{ -\mathrm{A}_h^{(i)} . \mathrm{S}_h^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} +$$
$$+ \mathrm{B}_h^{(i)} . \Big(\mathrm{T}_h^{(i)} \mathrm{H}^{(i-1)} \mathbf{A}^{(i)} + \mathrm{T}_h^{(i)} \mathbf{C}^{(i-1)}\Big) + \mathrm{C}_h^{(i)} . \Big(\mathrm{H}_h^{(i)} \mathbf{A}^{(i+1)} - \mathrm{H}_h^{(i)} \mathrm{S}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} - \mathrm{H}^{(i)} \mathbf{A}^{(i)}\Big) \Big\}$$

dove si deve pensare

$$\mathrm{C}_h^{(0)} = \mathrm{C}_h^{(p)} = \mathbf{C}_h^{(0)} = \mathbf{C}_h^{(p)} = 0$$
$$\sigma_h^0\, \theta = \sigma_h^{(p)}\, \theta = \mathrm{H}_h^{(0)}\, \theta = \mathrm{H}_h^{(p)}\, \theta = \theta_h .$$

Art. 12.° — *Decomposizione in elementi semplici delle soluzioni delle equazioni di Appell del secondo ordine e di prima categoria non appartenenti ad un gruppo speciale.*

§ 1. — Se un dato gruppo non è speciale esiste un'equazione

$$\mathrm{B} z_0^{(n\,,\,k)}(y) = 0$$

che gli appartiene e la cui equazione integrale ha la sua soluzione generale regolare su tutta la superficie riemanniana resa semplicemente connessa salvo che nel punto z_0 nel quale il k^{esimo} integrale si comporta come

$$\frac{1}{(z - z_0)^n} \text{ funzione regolare}$$

e l' altro è ancora regolare.

L' equazione

$$\mathrm{B}_{z_0}^{(n\,,\,k)}(y) = 0$$

non è pienamente determinata potendo le soluzioni della sua equazione integrale mutare per una combinazione lineare delle soluzioni delle $2p-2$ equazioni integrali di 1.ª specie corrispondenti al medesimo gruppo.

Noi assumeremo per equazione

$$\mathrm{B}_{z_0}^{(n\,,\,k)}(y) = 0$$

quella che più ci piace.

Indicheremo con

$$\mathrm{Y}_h^{(n\,,\,k)}(z, z_0) \quad (h = 1, 2)$$

i due integrali fondamentali dell' equazione integrale di

$$\mathrm{B}_{z_0}^{(n\,,\,k)}(y) = 0 \ .$$

Inoltre noi considereremo $2p - 2$ equazioni

$$\mathrm{A}_r(y) = 0 \quad (r = 1.\ 2, \ldots\ 2p - 2)$$

linearmente indipendenti ad equazione integrale di 1.ª specie ed aventi il gruppo dato ed indicheremo con

$$\mathrm{Y}_h^{(r)}(z) \quad (h = 1, 2)$$

i due integrali fondamentali dell' equazione integrale di

$$\mathrm{A}_r(y) = 0 \ .$$

È ben chiaro che se

$$\mathrm{A}(y) = 0$$

è una equazione di Appell del 2.º ordine e di 1.ª categoria la cui soluzione generale ha dei poli generici in punti generici della superficie riemanniana

$$z_1, z_2, \ldots z_m$$

di cui w sia l' ordine massimo e se

$$y_h \quad (h = 1, 2)$$

sono i suoi integrali fondamentali sarà

$$y_h = \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{w} \sum_{k=1}^{2} \mathrm{R}_j^{(n\,,\,k)} \mathrm{Y}_h^{(n\,,\,k)}(z, z_j) + \sum_{r=1}^{2p-2} \mathrm{R}^{(r)} \mathrm{Y}_h^{(r)}(z) \quad (h = 1, 2)$$

dove le

$$\mathrm{R}_j^{(n\,,\,k)} \quad \mathrm{R}^{(r)}$$

sono tutte convenienti costanti e le

$$\mathrm{R}_j^{(w\,,\,k)}$$

non sono tutte nulle.

Questa formula ci dà appunto la decomposizione delle soluzioni dell' equazione

$$\mathrm{A}(y) = 0$$

in elementi semplici.

§ 2. — Se $w = 1$ sarà

$$y_h = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{2} \mathrm{R}_j^{(1\,,\,k)} \mathrm{Y}_h^{(1\,,\,k)}(z\,, z_j) + \sum_{r=1}^{2p-2} \mathrm{R}^{(r)} \mathrm{Y}_h^{(r)}(z) \quad (h = 1, 2)$$

Siano

$$\mathrm{A}_h^{(k\,,\,j\,,\,i)} \ \mathrm{B}_h^{(k\,,\,j\,,\,i)} \ \mathrm{C}_k^{(k,\,j,\,i)}$$

i periodi di

$$\mathrm{Y}_h^{(1\,,\,k)}(z, z_j)$$

e

$$\mathrm{A}_h^{(r\,,\,i)} \ \mathrm{B}_h^{(r\,,\,i)} \ \mathrm{C}_h^{(r\,,\,i)}$$

i periodi di

$$\mathrm{Y}_h^{(r)} \quad (h = 1, 2) \ .$$

Sarà manifestamente

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{2} \mathrm{R}_j^{(1\,k)} \mathrm{A}_h^{(k\,,\,j\,,\,i)} + \sum_{r=1}^{2p-2} \mathrm{R}^{(r)} \mathrm{A}_h^{(r\,,\,i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots\ p)$$

ed analogamente

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{2} \mathrm{R}_j^{(1\,,\,k)} \mathrm{B}_h^{(k\,,\,j\,,\,i)} + \sum_{r=1}^{2p-2} \mathrm{R}^{(r)} \mathrm{B}_h^{(r\,,\,i)} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{2} \mathrm{R}_j^{(1\,,\,k)} \mathrm{C}_h^{(k\,,\,j\,,\,i)} + \sum_{r=1}^{2p-2} \mathrm{R}^{(r)} \mathrm{C}_h^{(r\,,\,i)} = 0 \ .$$

Sia

$$C(t) = 0$$

un'equazione ad equazione integrale di 1.ª specie ed avente il gruppo dell'aggiunta di

$$A(y) = 0$$

Siano

$$T_1 \;,\; T_2$$

gli integrali fondamentali della sua equazione integrale ed infine siano

$$A_h^{(i)} \quad B_h^{(i)} \quad C_h^{(i)}$$

i suoi periodi.

Conveniamo di usare le notazioni del § 1 dell'art. 4 di questo capitolo per indicare le sostituzioni del gruppo di

$$A(y) = 0$$

e le notazioni del § 1 dell'art. 5 per indicare le sostituzioni del gruppo dell'aggiunta di

$$A(y) = 0 \;.$$

Naturalmente

$$\sum_{h=1}^{2} \sum_{i=1}^{p} \Big\{ A_h^{(i)} \,.\, S_h^{(i)}\, B^{(r,i)} + B_h^{(i)} \,.\, \Big(C_h^{(i)}\, H^{(i-1)}\, A^{(r,i)} + T_h^{(i)}\, C^{(r,i)} \Big) + \\ + C_h^{(i)} \,.\, \Big(H_h^{(i)}\, A^{(r,i+1)} - H_h^{(i)}\, S^{(i)}\, B^{(r,i)} - H_h^{(i)}\, A^{(r,i)} \Big) \Big\} = 0$$

colle ipotesi

$$C_h^{(r,0)} = C_h^{(r,p)} = C_h^{(0)} = C_k^{(p)} = 0$$

e

$$\sigma_h^{(0)}\, \theta = \theta \;\; \sigma_h^{(p)}\, \theta = H_h^{(0)}\, \theta = H_h^{(p)}\, \theta = \theta_h$$

(v. art. 5, § 3).

Così pure indicando con

$$t_1 \quad t_2$$

le soluzioni di

$$C(t) = 0$$

sarà

$$2\pi i\, t_k(z_i) = \sum_{h=1}^{2} \sum_{i=1}^{p} \Big\{ - A_h^{(i)} \,.\, S_h^{(i)}\, B^{(k,j,i)} + B_h^{(i)} \,.\, \Big(T_h^{(i)}\, H^{(i-1)}\, A^{(k,j,i)} + \\ + T_h^{(i)}\, C^{(k,j,i)} \Big) + C_h^{(i)} \,.\, \Big(H_h^{(i)}\, A^{(k,j,i+1)} - H_h^{(i)}\, S^{(i)}\, B^{(k,j,i)} - H_h^{(i)}\, A^{(k,j,i)} \Big) \Big\}$$

colle solite ipotesi (v. art. 11).

Quindi moltiplicando queste ultime equazioni per $R^{(i,k)}$ e le precedenti per $R^{(r)}$ e sommando tutto avremo, tenendo conto delle relazioni determinate in principio di questo §,

$$2\pi i \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{2} R_j^{(i,k)}\, t_k(z_j) = 0$$

o anche

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{2} R^{(i,k)}\, t_k(z_j) = 0 \,.$$

Così per altra via vengono fuori le relazioni dell'art. 3 fra i poli ed i residui degli integrali delle equazioni di Appell del 2.° ordine e di 1.ª categoria.