DOTT. ORAZIO TEDONE

IL MOTO DI UN ELLISSOIDE FLUIDO

SECONDO L'IPOTESI DI DIRICHLET

PRESENTATO ALLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
PER L'ABILITAZIONE ALL'INSEGNAMENTO

Il problema del moto di un ellissoide fluido le di cui particelle si attraggono secondo la legge di Newton, deve la sua origine alle ricerche di Maclaurin sulle figure di equilibrio di una massa fluida omogenea. La sua ragione di essere bisogna ricercarla poi negli sforzi fatti dai geometri per dare una spiegazione della forma attuale dei pianeti, partendo dall'ipotesi che inizialmente si sieno trovati allo stato fluido.

Maclaurin trovò che l'ellissoide schiacciato di rivoluzione è una figura di equilibrio di una massa fluida omogenea, e Jacobi dimostrò che tale poteva essere anche un ellissoide ad assi diseguali, purchè fra questi assi si verifichi una certa relazione. Queste due figure di equilibrio furono soggetto di studio per molti matematici.

A Dirichlet (1) *però spetta il merito di avere esteso grandemente il problema trasportandolo dal campo della idrostatica in quello molto più fecondo della idrodinamica, per cui Riemann che, dopo Dirichlet, è quegli che ha spinto il problema più innanzi, in fondo alla sua memoria* (2), *parlando del lavoro di Dirichlet, ha potuto dire trattarsi del*

(1) *Journal von Crelle.* Bd. 58.

(2) *Nachrichten von der königl. Gesell. der Wiss. von Göttingen.* Bd. 9.

" schönen Gedankens .... mit welchem Dirichlet seine wissenschaftliche Thätigkeit gekrönt hat ".

Dirichlet dimostrò infatti che un ellissoide di fluido omogeneo può muoversi in guisa che le coordinate di un suo elemento ad un tempo qualunque restino funzioni lineari delle coordinate iniziali e con grande eleganza discusse tutti quei casi in cui la forma e la condizione di movimento si conservano simmetrici rispetto ad un asse. A Riemann invece si deve la ricerca di tutti i casi in cui l' ellissoide conserva costantemente la stessa forma.

Oltre ai due lavori fondamentali di Dirichlet e di Riemann a cui abbiamo accennato, lavori di interesse si devono a Dedekind (1), *Brioschi* (2), *Padova* (3), *Betti* (4), *Basset* (5).

Il Padova fra gli altri si propone di " coordinare in un sol corpo i resultati ottenuti " precedentemente, di dar loro semplicità e " di svolgere il caso in cui periodicamente l' ellissoide riprende la stessa forma.

Mi sembra però che al modo tenuto dal Padova la limpida idea di Dirichlet venga offuscata.

Io mi sono proposto a mia volta il problema del Padova, servendomi di tutti i lavori precedenti, non escluso quello del professore testè menzionato, alla cui cortesia devo diversi schiarimenti sul problema. Non starò ad enumerare tutto quello che di diverso o di nuovo io avrò potuto fare, poichè questo risulta facilmente dal paragone con i lavori precedenti. Mi permetto soltanto di sperare che sarà perdonato al buon volere, se anche lo scopo non sia stato raggiunto.

---

(1) *Journal von Crelle.* Bd. 58.
(2) *Journal von Crelle.* Bd. 59.
(3) *Annali della R. Scuola Normale di Pisa,* v. 1.
(4) *Annali di Matem. pura ed appl.* S. II, T. X.
(5) *Lond. Mat. Soc. Proc.* V.

CAPITOLO I.

Introduzione cinematica

1. Consideriamo un sistema continuo il quale si deformi in modo che le coordinate di un suo elemento ad un tempo qualunque siano funzioni lineari e omogenee delle sue coordinate iniziali. Indicando allora con x, y, z, le coordinate di questo elemento al temppo t qualunque, con x_0, y_0, z_0 le coordinate dello stesso elemento al tempo iniziale t_0, si avrà:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0 + a_{13}\, z_0 \\ y = a_{21}\, x_0 + a_{22}\, y_0 + a_{23}\, z_0 \\ z = a_{31}\, x_0 + a_{32}\, y_0 + a_{33}\, z_0 \;, \end{cases}$$

dove le a_{11}, a_{12}, ... a_{23} sono funzioni di t che per $t{=}t_0$, dovendo essere $x{=}x_0$, $y{=}y_0$, $z{=}z_0$, hanno i valori

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1 \quad , \quad a_{12} = a_{13} = \ldots\ldots = a_{32} = 0 \,.$$

Poniamo

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

È chiaro che D non può annullarsi durante il continuo deformarsi del sistema e poichè il suo valore iniziale è 1 sarà sempre

$$D > 0 .$$

Se ora con α_{ij} indichiamo il minore complementare dell'elemento a_{ij} nel determinante D, avremo con la risoluzione delle (1):

$$(2) \qquad \begin{cases} D\,x_0 = \alpha_{11}\,x + \alpha_{21}\,y + \alpha_{31}\,z \\ D\,y_0 = \alpha_{12}\,x + \alpha_{22}\,y + \alpha_{32}\,z \\ D\,z_0 = \alpha_{13}\,x + \alpha_{23}\,y + \alpha_{33}\,z \,. \end{cases}$$

Queste formole (1), (2) stabiliscono fra la configurazione iniziale del sistema e la configurazione di esso al tempo t, quindi anche fra le configurazioni corrispondenti a due tempi qualunque t e t_1, una corrispondenza biunivoca e continua che in geometria si suole indicare col nome di *omografia affine*.

Dalle note proprietà di una simile corrispondenza ricaviamo subito che:

— Le particelle situate in un piano restano a qualunque tempo in un piano; le particelle situate in una quadrica restano in una quadrica della stessa specie.

— Le particelle situate in piani paralleli restano in piani paralleli; le particelle situate su due quadriche concentriche ed omotetiche restano sempre su due quadriche concentriche ed omotetiche.

Per es. le particelle che all'istante iniziale erano situate sull'ellissoide

$$\frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} + \frac{z_0^2}{c_0^2} = 1$$

al tempo t sono situate sull'ellissoide

$$\frac{(\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z)^2}{a_0^2} + \frac{(\alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z)^2}{b_0^2} + \frac{(\alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z)^2}{c_0^2} = D^2$$

e le particelle che all'istante iniziale erano situate sui due ellissiodi omotetici e concentrici:

$$\frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} + \frac{z_0^2}{c_0^2} = 1 \quad , \quad \frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} + \frac{z_0^2}{c_0^2} = n^2$$

al tempo t sono situate sugli ellissoidi omotetici e concentrici:

$$\frac{(\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z)^2}{a_0^2} + \frac{(\alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z)^2}{b_0^2} + \frac{(\alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z)^2}{c_0^2} = D^2$$

$$\frac{(\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z)^2}{a_0^2} + \frac{(\alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z)^2}{b_0^2} + \frac{(\alpha_{13}x+\alpha_{23}y+\alpha_{33}z)^2}{c_0^2} = n^2 D^2.$$

— Il rapporto fra i volumi corrispondenti a due tempi qualunque t e t_1 è costante. L'elemento di volume dS che al tempo t corrisponde all'elemento $dS_0 = dx_0\,dy_0\,dz_0$, considerato nell'istante iniziale, se con (dx, dy, dz), (dx', dy', dz'), (dx'', dy'', dz'') si dinotano le coordinate al tempo t dei punti che nell'istante iniziale avevano le coordinate $(dx_0, 0, 0)$, $(0, dy_0, 0)$, $(0, 0, dz_0)$, è dato da

$$dS = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ dx' & dy' & dz' \\ dx'' & dy'' & dz'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\,dx_0 & a_{12}\,dy_0 & a_{13}\,dz_0 \\ a_{21}\,dx_0 & a_{22}\,dy_0 & a_{23}\,dz_0 \\ a_{31}\,dx_0 & a_{32}\,dy_0 & a_{33}\,dz_0 \end{vmatrix} = D\,dS_0 \,.$$

Quindi il rapporto fra i volumi corrispondenti nel tempo iniziale e nel tempo t è dato dal determinante D, onde

$$(3) \qquad D = 1$$

è la condizione affinchè il nostro sistema possa essere considerato come un fluido incompressibile. Nel seguito supporremo sempre verificata questa condizione.

2. Dalle (1) si ottiene per le componenti della velocità di un punto:

$$
(4)\qquad \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{da_{11}}{dt}x_0 + \dfrac{da_{12}}{dt}y_0 + \dfrac{da_{13}}{dt}z_0 \\[2ex] v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{da_{21}}{dt}x_0 + \dfrac{da_{22}}{dt}y_0 + \dfrac{da_{23}}{dt}z_0 \\[2ex] v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{da_{31}}{dt}x_0 + \dfrac{da_{32}}{dt}y_0 + \dfrac{da_{33}}{dt}z_0 \end{cases}
$$

e per le (2), tenendo conto di (3), anche:

$$
(5)\qquad \begin{cases} v_x = \beta_{11}x + \beta_{12}y + \beta_{13}z \\ v_y = \beta_{21}x + \beta_{22}y + \beta_{23}z \\ v_z = \beta_{31}x + \beta_{32}y + \beta_{33}z\,, \end{cases}
$$

dove:

$$
(6)\qquad \begin{cases} \beta_{11} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = \alpha_{11}\dfrac{da_{11}}{dt} + \alpha_{12}\dfrac{da_{12}}{dt} + \alpha_{13}\dfrac{da_{13}}{dt}\,, \quad \beta_{21} = \dfrac{\partial v_y}{\partial x} = \alpha_{11}\dfrac{da_{21}}{dt} + \alpha_{12}\dfrac{da_{22}}{dt} + \alpha_{13}\dfrac{da_{2}}{dt} \\[2ex] \beta_{12} = \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \alpha_{21}\dfrac{da_{11}}{dt} + \alpha_{22}\dfrac{da_{12}}{dt} + \alpha_{23}\dfrac{da_{13}}{dt}\,, \quad \beta_{22} = \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = \alpha_{21}\dfrac{da_{21}}{dt} + \alpha_{22}\dfrac{da_{22}}{dt} + \alpha_{23}\dfrac{da_{23}}{dt} \\[2ex] \beta_{13} = \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = \alpha_{31}\dfrac{da_{11}}{dt} + \alpha_{32}\dfrac{da_{12}}{dt} + \alpha_{33}\dfrac{da_{13}}{dt}\,, \quad \beta_{23} = \dfrac{\partial v_y}{\partial z} = \alpha_{31}\dfrac{da_{21}}{dt} + \alpha_{32}\dfrac{da_{22}}{dt} + \alpha_{33}\dfrac{da_{23}}{dt} \\[2ex] \beta_{31} = \dfrac{\partial v_z}{\partial x} = \alpha_{11}\dfrac{da_{31}}{dt} + \alpha_{12}\dfrac{da_{32}}{dt} + \alpha_{13}\dfrac{da_{33}}{dt} \\[2ex] \beta_{32} = \dfrac{\partial v_z}{\partial y} = \alpha_{21}\dfrac{da_{31}}{dt} + \alpha_{22}\dfrac{da_{32}}{dt} + \alpha_{23}\dfrac{da_{33}}{dt} \\[2ex] \beta_{33} = \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = \alpha_{31}\dfrac{da_{31}}{dt} + \alpha_{32}\dfrac{da_{32}}{dt} + \alpha_{33}\dfrac{da_{33}}{dt}\,. \end{cases}
$$

La (3) stessa, tenendo presente la nota regola per derivare un determinante, ci da

$$
(7)\qquad \frac{dD}{dt} = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0\,.
$$

Questa relazione, che è un'altra forma della condizione di incomprensibilità, per $t=t_0$, ricordando i valori delle a_{ij} in questo istante e i conseguenti valori delle α_{ij} e delle β_{ij}:

$$
\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1\,, \quad \alpha_{12} = \alpha_{13} = \ldots = \alpha_{32} = 0\,,
$$

$$
\beta_{11} = \left(\frac{da_{11}}{dt}\right)_0\,, \quad \beta_{22} = \left(\frac{da_{22}}{dt}\right)_0\,, \quad \beta_{33} = \left(\frac{da_{33}}{dt}\right)_0\,,
$$

dove l'indice o al piede delle derivate indica che le quantità che ne sono affette devono prendersi per $t=t_0$, diventa

$$
(7')\qquad \left(\frac{da_{11}}{dt}\right)_0 + \left(\frac{da_{22}}{dt}\right)_0 + \left(\frac{da_{33}}{dt}\right)_0 = 0\,.
$$

3. Mostriamo ora che ogni movimento il quale possa essere rappresentato dalle formole (5) può essere decomposto in altri due movimenti più semplici. Per l'uno di essi il sistema rota come un corpo rigido intorno ad un asse istantaneo passante per l'origine; per l'altro invece le componenti della velocità secondo gli assi coordinati sono le derivate di una stessa funzione delle coordinate del punto, a cui ci riferiamo, rispetto a queste coordinate; esso consiste in tre dilatazioni del sistema secondo tre assi ortogonali.

Le formole (5) possono scriversi infatti:

$$
v_x = \beta_{11}x + \frac{1}{2}(\beta_{12} + \beta_{21})y + \frac{1}{2}(\beta_{13} + \beta_{31})z + \frac{1}{2}(\beta_{13} - \beta_{31})z - \frac{1}{2}(\beta_{21} - \beta_{12})y
$$

$$
v_y = \frac{1}{2}(\beta_{21} + \beta_{12})x + \beta_{22}y + \frac{1}{2}(\beta_{23} + \beta_{32})z + \frac{1}{2}(\beta_{21} - \beta_{12})x - \frac{1}{2}(\beta_{32} - \beta_{23})z
$$

$$
v_z = \frac{1}{2}(\beta_{31} + \beta_{13})x + \frac{1}{2}(\beta_{32} + \beta_{23})y + \beta_{33}z + \frac{1}{2}(\beta_{32} - \beta_{23})y - \frac{1}{2}(\beta_{13} - \beta_{31})x
$$

e se poniamo:

$$(8)\begin{cases}\beta'_{12}=\beta'_{21}=\frac{1}{2}(\beta_{12}+\beta_{21})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\ ,\ \pi=\frac{1}{2}(\beta_{32}-\beta_{23})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\ \beta'_{23}=\beta'_{32}=\frac{1}{2}(\beta_{23}+\beta_{32})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\ ,\ \chi=\frac{1}{2}(\beta_{13}-\beta_{31})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\\ \beta'_{31}=\beta'_{13}=\frac{1}{2}(\beta_{31}+\beta_{13})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\ ,\ \rho=\frac{1}{2}(\beta_{21}-\beta_{12})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\end{cases}$$

$$v'_x=\beta_{11}x+\beta'_{12}y+\beta'_{13}z\quad,\quad v''_x=\chi z-\rho y$$
$$v'_y=\beta'_{21}x+\beta_{22}y+\beta'_{23}z\quad,\quad v''_y=\rho x-\pi z$$
$$v'_z=\beta'_{31}x+\beta'_{32}y+\beta'_{33}z\quad,\quad v''_z=\pi y-\chi x\,,$$

avremo evidentemente:

$$v_x=v'_x+v''_x\quad,\quad v_y=v'_y+v''_y\quad,\quad v_z=v'_z+v''_z\ .$$

Il movimento pel quale v''_x, v''_y, v''_z sono le componenti della velocità di un punto è precisamente una rotazione del sistema, come se fosse rigido, intorno ad un asse passante per l'origine e le cui componenti sono π, χ, ρ.

In quanto, poi, al movimento pel quale le componenti della velocità di un punto sono v'_x, v'_y, v'_z si vede facilmente che se si pone

$$(9)\qquad \varphi=\frac{1}{2}(\beta_{11}x^2+\beta_{22}y^2+\beta_{33}z^2+2\beta'_{23}yz+2\beta'_{31}zx+2\beta'_{12}xy)$$

si ha:

$$v'_x=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ ,\ v'_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\ ,\ v'_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ .$$

Di più è noto che possono trovarsi tre nuovi assi x', y', z' tali che la forma φ, riferita ad essi, diventi

$$(9')\qquad 2\varphi=\alpha x'^2+\beta y'^2+\gamma z'^2\ ,$$

per cui se i coseni di direzione dei nuovi assi rispetto agli antichi si indicano come risulta dalla tabella seguente:

	x'	y'	z'
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

avremo:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}=\alpha x'=v'_x\alpha_1+v'_y\beta_1+v'_z\gamma_1=v'_{x'}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y'}=\beta y'=v'_x\alpha_2+v'_y\beta_2+v'_z\gamma_2=v'_{y'}\,,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z'}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z'}=\gamma z'=v'_x\alpha_3+v'_y\beta_3+v'_z\gamma_3=v'_{z'}\ .$$

Quindi:

$$v'_{x'}=\alpha x'\quad,\quad v_{y'}=\beta y'\quad,\quad v'_{z'}=\gamma z'$$

sono le componenti della velocità di ciascuna particella secondo gli assi x', y', z' e la loro forma dimostra, appunto come s'era enunciato, che il movimento consiste in tre dilatazioni secondo tre assi ortogonali. Un movimento di questa fatta si chiama un *movimento a potenziale* e φ si chiama il *potenziale di velocità*.

Se nella espressione (9') di φ si sostituiscono per x', y', z' i loro valori in funzione di x, y, z e si identifica il risultato con l'espressione di φ data dalla (9) si trovano le seguenti relazioni:

$$(10)\begin{cases}\beta_{11}=\alpha\alpha_1^2+\beta\alpha_2^2+\gamma\alpha_3^2\ ,\quad \beta'_{23}=\alpha\beta_1\gamma_1+\beta\beta_1\gamma_2+\gamma\beta_3\gamma_3\\ \beta_{22}=\alpha\beta_1^2+\beta\beta_2^2+\gamma\beta_3^2\ ,\quad \beta'_{31}=\alpha\gamma_1\alpha_1+\beta\gamma_2\alpha_2+\gamma\gamma_3\alpha_3\\ \beta_{33}=\alpha\gamma_1^2+\beta\gamma_2^2+\gamma\gamma_3^2\ ,\quad \beta'_{12}=\alpha\alpha_1\beta_1+\beta\alpha_2\beta_2+\gamma\alpha_3\beta_3\end{cases}$$

da cui risulta

$$\beta_{11}+\beta_{22}+\beta_{33}=\alpha(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)+\beta(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)+\gamma(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2)= \\ =\alpha+\beta+\gamma$$

e quindi a causa della (7) è

$$(7'') \qquad \alpha+\beta+\gamma=0 \ .$$

4. Supporremo da ora in poi che la massa considerata sia limitata inizialmente da un ellissoide avente il centro nell'origine delle coordinate, la cui equazione sia

$$(11) \qquad \frac{x_0^2}{a_0^2}+\frac{y_0^2}{b_0^2}+\frac{z_0^2}{c_0^2}=1 \ ,$$

per modo che al tempo t, la massa sia ancora esternamente limitata dall' ellissoide

$$\frac{(\alpha_{11}\,x+\alpha_{21}\,y+\alpha_{31}\,z)^2}{a_0^2}+\frac{(\alpha_{12}\,x+\alpha_{22}\,y+\alpha_{32}\,z)^2}{b_0^2}+\frac{(\alpha_{13}x+\alpha_{23}\,y+\alpha_{33}\,z)^2}{c_0^2}=1$$

avente per centro l'origine.

Introduciamo ora tre nuovi assi ξ, η, ζ che coincidano ad ogni istante con gli assi principali dell'ellissoide precedente in modo che riferito ad essi abbia per equazione

$$(12) \qquad \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$$

e, per non introdurre molti simboli, supponiamo che i coseni degli angoli che gli assi ξ, η, ζ formano con gli assi x, y, z siano dati sempre dalla tabella della pag. 7 in modo che al posto di x', y', z' siano sostituiti ξ, η, ζ.

Il movimento rappresentato dalle (5) si può decomporre anche nella rotazione degli assi ξ, η, ζ e nel moto relativo del sistema rispetto a questi assi.

Intanto si ha:

$$(13) \qquad \begin{cases} \xi=\alpha_1\,x+\beta_1\,y+\gamma_1\,x \quad , \quad x=\alpha_1\,\xi+\alpha_2\,\eta+\alpha_3\,\zeta \\ \eta=\alpha_2\,x+\beta_2\,y+\gamma_2\,z \quad , \quad y=\beta_1\,\xi+\beta_2\,\eta+\beta_3\,\zeta \\ \zeta=\alpha_2\,x+\beta_3\,y+\gamma_3\,z \quad , \quad z=\gamma_1\,\xi+\gamma_2\,\eta+\gamma_3\,\zeta \end{cases}$$

e se con p, q, r si indicano le componenti della rotazione degli assi ξ, η, ζ secondo questi assi, le componenti, secondo gli stessi assi, della velocità di un punto, in quanto si muove rigidamente collegato ad essi, sono date da:

$$(14) \qquad v'_\xi=q\,\zeta-r\,\eta \quad , \quad v'_\eta=r\,\xi-p\,\zeta \quad , \quad v'_\zeta=p\,\eta-q\,\xi \ .$$

Il movimento relativo del sistema rispetto agli assi ξ, η, ζ è della stessa specie del movimento generale (5) essendo ξ, η, ζ funzioni lineari ed omogenee di x_0, y_0, z_0, come risulta sostituendo nel 1° gruppo delle (13) x, y, z in funzione di x_0, y_0, z_0 dati dalle (1).

Per porre in una forma opportuna queste relazioni consideriamo le particelle che nell'istante iniziale si trovano sull' ellissoide

$$\frac{x_0^2}{a_0^2}+\frac{y_0^2}{b_0^2}+\frac{z_0^2}{c_0^2}=n^2 \qquad (n\leq 1)$$

omotetico e concentrico all'ellissoide che nello stesso istante rappresenta la figura esterna della massa; per quello che s'è visto innanzi queste particelle si troveranno al tempo t sull' ellissoide

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=n^2$$

omotetico e concentrico all'ellissoide (12) che è la figura esterna della massa al tempo t. Sarà perciò

$$(15) \qquad \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=\frac{x_0^2}{a_0^2}+\frac{y_0^2}{b_0^2}+\frac{z_0^2}{c_0^2}$$

e se le relazioni che legano ξ, η, ζ ad x_0, y_0, z_0 si pongono sotto la forma:

$$
(16)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\xi}{a} = \alpha'_1 \dfrac{x_0}{a_0} + \beta'_1 \dfrac{y_0}{b_0} + \gamma'_1 \dfrac{z_0}{c_0} \\[2ex]
\dfrac{\eta}{b} = \alpha'_2 \dfrac{x_0}{a_0} + \beta'_2 \dfrac{y_0}{b_0} + \gamma'_2 \dfrac{z_0}{c_0} \\[2ex]
\dfrac{\zeta}{c} = \alpha'_3 \dfrac{x_0}{a_0} + \beta'_3 \dfrac{y_0}{b_0} + \gamma'_3 \dfrac{z_0}{c_0} \; ,
\end{cases}
$$

le $\alpha'_1 \, \beta'_1 \ldots \gamma'_3$ saranno, per la (15), i coefficienti di una sostituzione ortogonale e possono interpretarsi come i coseni di direzione che un nuovo sistema di assi ξ', η', ζ' forma con gli assi ξ, η, ζ.

Seguendo ora la via indicata nel §. 3 otterremo per le componenti della velocità di un punto in questo movimento

$$
\frac{1}{a} v''_\xi = \frac{1}{b}\frac{d\xi}{dt} = \frac{\xi}{a^2}\frac{da}{dt} + \frac{d\alpha'_1}{dt}\frac{x_0}{a_0} + \frac{d\beta'_1}{dt}\frac{y_0}{b_0} + \frac{d\gamma'_1}{dt}\frac{z_0}{c_0} \; ,
$$

$$
\frac{1}{b} v''_\eta = \frac{1}{b}\frac{d\eta}{dt} = \ldots \; , \qquad \frac{1}{c} v''_\zeta = \frac{1}{c}\frac{d\zeta}{dt} = \ldots \; ,
$$

e sostituendo per $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$ i loro valori in funzione di $\frac{\xi}{a}, \frac{\eta}{b}, \frac{\zeta}{c}$ ricavati dalle (16), ponendo:

$$
p' = \alpha'_3 \frac{d\alpha'_2}{dt} + \beta'_3 \frac{d\beta'_2}{dt} + \gamma'_3 \frac{d\gamma'_2}{dt} \; , \quad q' = \alpha'_1 \frac{d\alpha'_3}{dt} + \beta'_1 \frac{d\beta'_3}{dt} + \gamma'_1 \frac{d\gamma'_3}{dt} \; ,
$$

$$
r' = \alpha'_2 \frac{d\alpha'_1}{dt} + \beta'_2 \frac{d\beta'_1}{dt} + \gamma'_2 \frac{d\gamma'_1}{dt} \; ,
$$

si ottiene:

$$
(17)\qquad
\begin{cases}
v''_\xi = \dfrac{1}{a}\dfrac{da}{dt}\xi + \dfrac{a}{b} r'\eta - \dfrac{a}{c} q'\zeta \\[2ex]
v''_\eta = -\dfrac{b}{a} r'\xi + \dfrac{1}{b}\dfrac{db}{dt}\eta + \dfrac{b}{c} p'\zeta \\[2ex]
v''_\zeta = \dfrac{c}{a} q'\xi - \dfrac{c}{b} p'\eta + \dfrac{1}{c}\dfrac{dc}{dt}\zeta \; .
\end{cases}
$$

In ogni istante questo movimento si scompone in una rotazione ed in un moto a potenziale. Le componenti della rotazione sono:

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)p' = -\frac{1}{2}\frac{b^2+c^2}{bc}p' \; , \quad -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)q' = -\frac{1}{2}\frac{c^2+a^2}{ca}q'
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)r' = -\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{ab}r' \; ,
$$

mentre le componenti della velocità nel moto a potenziale sono:

$$
(18)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{1}{a}\dfrac{da}{dt}\xi + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right) r'\eta + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{a}{c}\right) q'\zeta \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right) r'\xi + \dfrac{1}{b}\dfrac{db}{dt}\eta + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{c}-\dfrac{c}{b}\right) p'\zeta \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{a}{c}\right) q'\xi + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{c}-\dfrac{c}{b}\right) p'\eta + \dfrac{1}{c}\dfrac{dc}{dt}\zeta \; . \text{ (1)}
\end{cases}
$$

Se nelle (16) si suppone che $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$, $\frac{\zeta}{c}$ rappresentino le coordinate del punto $\frac{x_0}{a_0}$, $\frac{y_0}{b_0}$, $\frac{z_0}{c_0}$ rispetto agli assi ξ', η', ζ' ; p', q', r' sono le componenti della rotazione di questi assi relativamente agli assi ξ, η, ζ prese secondo questi assi stessi.

Affinchè in ogni istante la rotazione degli assi ξ, η, ζ, rispetto agli assi ξ', η', ζ' coincida con la rotazione istantanea del sistema relativamente agli assi stessi ξ, η, ζ, se nessuna delle componenti p', q', r' è zero, dev'essere $a = b = c$. In questo caso le componenti (18) della velocità nel moto a potenziale si riducono a

$$
\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\xi \; , \quad \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\eta \; , \quad \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\zeta \; ,
$$

---

(1) Questo modo di decomporre il movimento generale in due rotazioni e in un moto a potenziale non è altro che quello di cui parla il prof. Beltrami nella sua memoria sulla cinematrea dei fluidi al §. 8.

ed essendo per l'equazione dell'incompressibilità $a = \text{cost.}$, sono identicamente nulle; il fluido si muove come un corpo rigido conservando costantemente la forma di una sfera. Se poi fosse $p' = q' = 0$ dev'essere $a = b$, e quindi il fluido conserva sempre la forma di un ellissoide di rivoluzione.

5. Il problema del movimento di una massa simile quando su di essa agiscono forze determinate consiste nel trovare i coefficienti a_{ij} in funzione del tempo. Invece però della determinazione diretta di questi coefficienti ci si può proporre di determinare le 18 variabili:

$$\alpha_1 \,,\ \alpha_2 \ldots \gamma_3 \ ;\ \alpha'_1 \,,\ \alpha'_2 \,,\ \ldots \gamma'_3 \ ;\ a, b, c \,;$$

quando infatti fossero conosciute queste quantità i coefficienti a_{ij} sarebbero determinati dalle formole:

$$(19)\quad \begin{cases} a_0 a_{11} = a\alpha_1\alpha'_1 + b\alpha_2\alpha'_2 + c\alpha_3\alpha'_3 \,, \quad a_0 a_{21} = a\beta_1\alpha'_1 + b\beta_2\alpha'_2 + c\beta_3\alpha'_3 \\ b_0 a_{12} = a\alpha_1\beta'_1 + b\alpha_2\beta'_2 + c\alpha_3\beta'_3 \,, \quad b_0 a_{22} = a\beta_1\beta'_1 + b\beta_2\beta'_2 + c\beta_3\gamma'_2 \\ c_0 a_{13} = a\alpha_1\gamma'_1 + b\alpha_2\gamma'_2 + c\alpha_3\gamma'_3 \,, \quad c_0 a_{23} = a\beta_1\gamma'_1 + b\beta_2\gamma'_2 + c\beta_3\gamma'_2 \\ \qquad a_0 a_{31} = a\gamma_1\alpha'_1 + b\gamma_2\alpha'_2 + c\gamma_3\alpha'_3 \\ \qquad b_0 a_{32} = a\gamma_1\beta'_1 + b\gamma_2\beta'_2 + c\gamma_3\beta'_3 \\ \qquad c_0 a_{33} = a\gamma_1\gamma'_1 + b\gamma_2\gamma'_2 + c\gamma_3\gamma'_3 \,, \end{cases}$$

che si ottengono immediatamente sostituendo nel secondo gruppo delle (13) i valori di ξ, η, ζ dati dalle (16) e paragonando il risultato alle (1).

Le quantità $\alpha_1 \,,\ \beta_1 \,, \ldots \gamma_3$, come pure $\alpha'_1 \,,\ \beta'_1 \,, \ldots \gamma'_3$, non sono tutte indipendenti. Come nel problema della determinazione del moto di un sistema rigido, possiamo cercare di determinare prima le componenti $p, q, r;\ p', q', r'$ delle rotazioni degli assi $\xi, \eta, \zeta\ ;\ \xi', \eta', \zeta'$, e poi da queste quantità risalire alle α_1, $\beta_1 \ldots \gamma_3\ ;\ \alpha'_1 \,, \ldots \gamma'_3$ per mezzo delle formole di Poisson. Le nostre incognite diventano:

$$p,\ q,\ r \quad ; \quad p',\ q',\ r' \quad ; \quad a,\ b,\ c$$

e la condizione $D = 1$ a cui devono soddisfare si trasforma in

$$(20)\qquad a\,b\,c = a_0\,b_0\,c_0 \,,$$

per essere

$$D = \frac{1}{a_0 b_0 c_0} \begin{vmatrix} a\alpha'_1 & a\beta'_1 & a\gamma'_1 \\ b\alpha'_2 & b\beta'_2 & b\gamma'_2 \\ c\alpha'_3 & c\beta'_3 & c\gamma'_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{a\,b\,c}{a_0\,b_0\,c_0} \,.$$

Essa esprime che il volume dell'ellissoide è costante.

Aggiungiamo qui i seguenti sistemi di formole di cui avremo bisogno nel seguito.

Le componenti della velocità totale di ciascuna particella secondo gli assi ξ, η, ζ si ottengono sommando in corrispondenza le (14) con le (17) per cui:

$$(21)\quad \begin{cases} v_\xi = v'_\xi + v''_\xi = \dfrac{da}{dt}\dfrac{\xi}{a} + (a\,r' - b\,r)\,\dfrac{\eta}{b} + (c\,q - a\,q')\,\dfrac{\zeta}{c} \\[2ex] v_\eta = v'_\eta + v''_\eta = (ar - br')\,\dfrac{\xi}{a} + \dfrac{db}{dt}\dfrac{\eta}{b} + (bp' - cp)\,\dfrac{\zeta}{c} \\[2ex] v_\zeta = v'_\zeta + v''_\zeta = (cq' - aq)\,\dfrac{\xi}{a} + (bp - cp')\dfrac{\eta}{b} + \dfrac{dc}{dt}\dfrac{\zeta}{c} \,. \end{cases}$$

Le componenti della rotazione totale di ciascuna particella secondo gli assi ξ, η, ζ sono date invece dalle formole:

$$\pi' = p - \frac{1}{2}\,\frac{b^2 + c^2}{bc}\,p' = \frac{1}{4\,bc}\left\{(b+c)^2(p-p') - (b-c)^2(p+p')\right\}$$

$$\chi' = q - \frac{1}{2}\,\frac{c^2 + a^2}{ca}\,q' = \frac{1}{4\,ac}\left\{(c+a)^2(q-q') - (c-a)^2(q+q')\right\}$$

$$\rho' = r - \frac{1}{2}\,\frac{a^2 + b^2}{ab}\,r' = \frac{1}{4\,ba}\left\{(a+b)^2(r-r') - (a-b)^2(r+r')\right\}$$

e se poniamo:

$$\frac{p+p'}{2}=u\ ,\ \frac{q+q'}{2}=v\ ,\ \frac{r+r'}{2}=w\ ;$$

$$\frac{p-p'}{2}=u'\ ,\ \frac{q-q'}{2}=v'\ ,\ \frac{r-r'}{2}=w'\ ,$$

avremo anche più brevemente:

$$(22)\qquad \begin{cases} \pi'=\dfrac{1}{2bc}\left\{(b+c)^2u'-(b-c)^2u\right\} \\[2ex] \chi'=\dfrac{1}{2bc}\left\{(c+a)^2v'-(c-a)^2v\right\} \\[2ex] \rho'=\dfrac{1}{2ab}\left\{(a+b)^2w'-(a-b)^2w\right\}\ . \end{cases}$$

CAPITOLO II.

Equazioni di Dirichlet

1. Consideriamo ora una massa fluida, avente la forma di un ellissoide, incompressibile, priva di attrito ed omogenea e cerchiamo se, ammettendo che le sue particelle si attraggano secondo la legge di Newton, essa può muoversi, conformemente all'ipotesi di Dirichlet, in modo che le coordinate di un suo elemento al tempo t, qualunque, siano funzioni lineari ed omogenee delle coordinate iniziali.

Le equazioni dell'idrodinamica di Lagrange, a cui bisogna soddisfare perchè la ipotesi fatta sia accettabile, sono:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial x_0}+\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{\partial y}{\partial x_0}+\dfrac{d^2z}{dt^2}\dfrac{\partial z}{\partial x_0}=\dfrac{\partial(\mathrm{V}-\overline{\mathrm{P}})}{\partial x_0} \\[2ex] \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial y_0}+\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{\partial y}{\partial y_0}+\dfrac{d^2z}{dt^2}\dfrac{\partial z}{\partial y_0}=\dfrac{\partial(\mathrm{V}-\overline{\mathrm{P}})}{\partial y_0} \\[2ex] \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial z_0}+\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{\partial y}{\partial z^0}+\dfrac{d^2z}{dt^2}\dfrac{\partial z}{\partial z_0}=\dfrac{\partial(\mathrm{V}-\overline{\mathrm{P}})}{\partial z_0} \\[2ex] \sum\pm\dfrac{\partial x}{\partial x_0}\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\dfrac{\partial z}{\partial z_0}=1\ , \end{cases}$$

dove V è la funzione potenziale dell'ellissoide riferita ad un punto interno e $\overline{\mathrm{P}}$, se si suppone eguale ad uno la densità costante del fluido, indica il valore della pressione nel punto considerato.

Supponiamo che nell'istante iniziale l'equazione dell'ellissoide che limita la massa fluida sia

$$\frac{x_0^2}{a_0^2}+\frac{y_0^2}{b_0^2}+\frac{z_0^2}{c_0^2}=1 \tag{2}$$

e che le relazioni che legano x, y, z ad x_0, y_0, z_0 sieno:

$$x=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0\,,\ y=a_{21}x_0+\ldots\,,\ z=a_{31}x_0+\ldots\,, \tag{3}$$

come nel Cap. prec.

Dobbiamo cominciare col trovare l'espressione di V per mezzo delle coordinate iniziali x_0, y_0, z_0. È noto che la funzione potenziale di un ellissoide omogeneo riferito ai suoi assi principali e relativa ad un punto interno è la somma di un termine costante e di una funzione omogenea di secondo grado nelle coordinate del punto a cui ci riferiamo (1). La stessa forma competerà a V quando l'ellissoide si riferisca a tre assi qualunque con l'origine nel suo centro, perchè le formole di trasformazioue delle coordinate sono lineari ed omogenee, e per la stessa ragione V conserverà la stessa forma anche quando si esprimano le coordinate di un punto (x, y, z) in funzione delle sue coordinate iniziali. Sicchè potremo porre

$$V=H-A_{11}x_0^2-A_{22}y_0^2-A_{33}z_0^2-2A_{23}y_0z_0-2A_{31}z_0x_0-2A_{12}x_0y_0\,, \tag{4}$$

riserbandoci di determinare in seguito i coefficienti H, A_{ij} in funzione delle a_{ij}.

Diamo a $\overline{P}$ la forma

$$\overline{P}=\text{cost.}+\sigma\left(1-\frac{x_0^2}{a_0^2}-\frac{y_0^2}{b_0^2}-\frac{z_0^2}{c_0^2}\right) \tag{5}$$

dove σ è una funzione ignota del tempo. Con questa scelta $\overline{P}$ ha un valore costante sulla superficie dell'ellissoide e viene a dipendere dalla sola quantità σ.

(1) BETTI. *Teorica delle forze Newtoniane* pag. 74.

Sostituendo le (3), (4) e (5) nelle prime tre equazioni (1), si ottengono a destra ed a sinistra delle espressioni lineari ed omogenee in x_0, y_0, z_0 ed osservando che esse devono essere verificate identicamente rispetto a queste variabili, si deduce che le funzioni incognite del tempo a_{ij} devono soddisfare alle condizioni:

$$\left\{\begin{aligned}
a_{11}\frac{d^2a_{11}}{dt^2}+a_{21}\frac{d^2a_{21}}{dt^2}+a_{31}\frac{d^2a_{31}}{dt^2}&=-2A_{11}+2\frac{\sigma}{a_0^2}\\
a_{11}\frac{d^2a_{12}}{dt^2}+a_{21}\frac{d^2a_{22}}{dt^2}+a_{31}\frac{d^2a_{32}}{dt^2}&=-2A_{12}\\
a_{11}\frac{d^2a_{13}}{dt^2}+a_{21}\frac{d^2a_{23}}{dt^2}+a_{31}\frac{d^2a_{33}}{dt^2}&=-2A_{13}\\
a_{12}\frac{d^2a_{11}}{dt^2}+a_{22}\frac{d^2a_{21}}{dt^2}+a_{32}\frac{d^2a_{31}}{dt^2}&=-2A_{21}\\
a_{12}\frac{d^2a_{12}}{dt^2}+a_{22}\frac{d^2a_{22}}{dt^2}+a_{32}\frac{d^2a_{32}}{dt^2}&=-2A_{22}+2\frac{\sigma}{b_0^2}\\
a_{12}\frac{d^2a_{13}}{dt^2}+a_{22}\frac{d^2a_{23}}{dt^2}+a_{32}\frac{d^2a_{33}}{dt^2}&=-2A_{23}\\
a_{13}\frac{d^2a_{11}}{dt^2}+a_{23}\frac{d^2a_{21}}{dt^2}+a_{33}\frac{d^2a_{31}}{dt^2}&=-2A_{31}\\
a_{13}\frac{d^2a_{12}}{dt^2}+a_{23}\frac{d^2a_{22}}{dt^2}+a_{33}\frac{d^2a_{32}}{dt^2}&=-2A_{32}\\
a_{13}\frac{d^2a_{13}}{dt^2}+a_{23}\frac{d^2a_{23}}{dt^2}+a_{33}\frac{d^2a_{33}}{dt^2}&=-2A_{33}+2\frac{\sigma}{c_0^2}\,.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Sostituendo invece le (3) nell'ultima delle (1) si ha:

$$D=1\,, \tag{6'}$$

dove D indica sempre il determinante dei coefficienti a_{ij}.

Se potremo dimostrare che le 10 equazioni (6) o (6') sono atte a determinarci le 10 incognite a_{ij} e σ quali funzioni finite e continue del tempo il nostro asserto sarà completamente dimostrato.

Perciò è necessario determinare dapprima le A_{ij} .

2. Supponiamo a questo fine di avere un ellissoide pieno di materia con la densità costante eguale ad uno e riferito ai suoi assi principali, sicchè abbia per equazione

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1 \ .$$

Se le particelle di questa massa si attirano conformemente alla legge di Newton il valore della funzione potenziale di questo ellissoide, relativamente ad un punto interno, sarà

$$\text{(7)} \qquad V=\pi\int_0^\infty \frac{1-\frac{\xi^2}{a^2+s}-\frac{\eta^2}{b^2+s}-\frac{\zeta^2}{c^2+s}}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}}\,ds=$$

$$=\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left\{1-\frac{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-\left(\frac{\xi^2}{b^2c^2}+\frac{\eta^2}{c^2a^2}+\frac{\zeta^2}{a^2b^2}\right)s+(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(G_1 s+G s^2)}{\Delta^2}\right\},$$

dove per brevità è posto

$$\text{(8)} \ \Delta^2=\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)=G\,s^3+G_1 s^2+G_2 s+1 \ .$$

Con un cambiamento di assi coordinati, per modo che sia:

$$\text{(9)} \ \xi=\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z \ , \ \eta=\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z \ , \ \zeta=\alpha_3 x+\dots$$

l'equazione dell'ellissoide diverrà

$$\text{(10)} \quad F=B_{11}x^2+B_{22}y^2+B_{33}z^2+2B_{23}yz+2B_{31}zx+2B_{12}xy=1 \ ,$$

mentre le forme:

$$f=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2} \ , \ \xi^2+\eta^2+\zeta^2$$

si cangeranno in:

$$F \qquad e \quad x^2+y^2+z^2 \ .$$

La forma

$$f'=\frac{\xi^2}{b^2c^2}+\frac{\eta^2}{c^2a^2}+\frac{\zeta^2}{a^2b^2} \ ,$$

che è reciproca di f, si cambierà invece nella forma F', reciproca di F, poichè la sostituzione *trasposta* della (9), per la quale la F' si cambia nella f', cioè:

$$x=\alpha_1\xi+\alpha_2\eta+\alpha_3\zeta \ , \ y=\beta_1\xi+\dots \ , \ z=\gamma_1\xi+\dots \ ,$$

coincide con la (9) stessa.

Se ora ricordiamo che, per la geometria analitica, si ha:

$$\begin{vmatrix} B_{11}-s & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22}-s & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33}-s \end{vmatrix} = -\left(s-\frac{1}{a^2}\right)\left(s-\frac{1}{b^2}\right)\left(s-\frac{1}{c^2}\right) ,$$

si trova anche, cambiando s in $-\frac{1}{s}$ e moltiplicando per s^3,

$$\text{(11)} \qquad \begin{vmatrix} B_{11}s+1 & B_{12}s & B_{13}s \\ B_{21}s & B_{22}s+1 & B_{23}s \\ B_{31}s & B_{32}s & B_{33}s+1 \end{vmatrix} =$$

$$=\left(1+\frac{s}{a}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)=\Delta^2=Gs^3+G_1s^2+G_2s+1 \ .$$

Da tutto ciò possiamo concludere che il valore della funzione potenziale in un punto interno x, y, z dell'ellissoide (10), riferito ad assi qualunque, è dato dall'espressione

$$\text{(12)} \quad V=\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left\{1-\frac{F-sF'+(x^2+y^2+z^2)(G_1 s+G s^2)}{\Delta^2}\right\} ,$$

dove F' è la forma reciproca di F e Δ è determinato dalla (11).

3. Ritornando ora al nostro caso per equazione dell'ellissoide dobbiamo prendere

$$F = \frac{(\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z)^2}{a_0^2} + \frac{(\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z)^2}{b^2} + \frac{(\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z)^2}{c_0^2} =$$

$$= B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + B_{33}z^2 + 2B_{23}yz + 2B_{31}zx + 2B_{12}xy = 1\,,$$

per cui i coefficienti B_{ij} sono dati dalle formole:

$$(13)\quad \begin{cases} B_{11} = \dfrac{\alpha_{11}^2}{a_0^2} + \dfrac{\alpha_{12}^2}{b_0^2} + \dfrac{\alpha_{13}^2}{c_0^2}\,, & B_{23} = \dfrac{\alpha_{21}\alpha_{31}}{a_0^2} + \dfrac{\alpha_{22}\alpha_{32}}{b_0^2} + \dfrac{\alpha_{23}\alpha_{33}}{c_0^2} \\[2ex] B_{22} = \dfrac{\alpha_{21}^2}{a_0^2} + \dfrac{\alpha_{22}^2}{b_0^2} + \dfrac{\alpha_{23}^2}{c_0^2}\,, & B_{31} = \dfrac{\alpha_{31}\alpha_{11}}{a_0^2} + \dfrac{\alpha_{32}\alpha_{12}}{b_0^2} + \dfrac{\alpha_{33}\alpha_{13}}{c_0^2} \\[2ex] B_{33} = \dfrac{\alpha_{31}^2}{a_0^2} + \dfrac{\alpha_{32}^2}{b_0^2} + \dfrac{\alpha_{33}^2}{c_0^2}\,, & B_{12} = \dfrac{\alpha_{11}\alpha_{21}}{a_0^2} + \dfrac{\alpha_{12}\alpha_{22}}{b_0^2} + \dfrac{\alpha_{13}\alpha_{23}}{c_0^2}\,. \end{cases}$$

Se inoltre si pone

$$F' = B'_{11}x^2 + B'_{22}y^2 + B'_{33}z + 2B'_{23}yz + 2B'_{31}zx + 2B'_{12}xy\,,$$

avremo pure:

$$(14)\quad \begin{cases} B'_{11} = B_{22}B_{33} - B_{23}^2 = \dfrac{a_0^2 a_{11}^2 + b_0^2 a_{12}^2 + c_0^2 a_{13}^2}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} \\[2ex] B'_{22} = B_{33}B_{11} - B_{13}^2 = \dfrac{a_0^2 a_{21}^2 + b_0^2 a_{22}^2 + c_0^2 a_{23}^2}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} \\[2ex] B'_{33} = B_{11}B_{22} - B_{12}^2 = \dfrac{a_0^2 a_{31}^2 + b_0^2 a_{32}^2 + c_0^2 a_{33}^2}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} \\[2ex] B'_{23} = B_{31}B_{12} - B_{32}B_{11} = \dfrac{a_0^2 a_{31}a_{21} + b_0^2 a_{32}a_{22} + c_0^2 a_{33}a_{23}}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} \\[2ex] B'_{31} = B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22} = \dfrac{a_0^2 a_{21}a_{31} + b_0^2 a_{22}a_{32} + c_0^2 a_{23}a_{33}}{a_0^2 b_0^2 c_3^2} \\[2ex] B'_{12} = B_{23}B_{31} - B_{21}B_{33} = \dfrac{a_0^2 a_{11}a_{21} + b_0^2 a_{12}a_{22} + c_0^2 a_{13}a_{23}}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}\ (^1). \end{cases}$$

(1) Per intendere facilmente queste formole bisogna tener presente che $D=1$ e che quindi il minore algebrico di un certo elemento del determinante reciproco è eguale all' elemento corrispondente di D.

Per mezzo di queste formole si può calcolare il valore di V in funzione di x, y, z; però il nostro scopo sarà raggiunto solo quando avremo determinato V in funzione di x_0, y_0, z_0.

Sostituendo effettivamente x, y, z, in funzione di x_0, y_0, z_0 e ponendo:

$$(15)\quad \begin{cases} P = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2\,, & P' = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \\ Q = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2\,, & Q' = a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} \\ R = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2\,, & R' = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}\,, \end{cases}$$

dove si può osservare che è:

$$(16)\qquad D^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} P & R' & Q' \\ R' & Q & P' \\ Q' & P' & R \end{vmatrix} = 1$$

e che

$$F = B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + \ldots = \frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} + \frac{z_0^2}{c_0^2}\,,$$

si trova:

$$(17)\quad \begin{cases} A_{11} = \dfrac{\pi}{a_0^2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta^3} + \left(\frac{RP - Q'^2}{b_0^2} + \frac{PQ - R'^2}{c_0^2}\right)\frac{\pi}{a_0^2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3} + \frac{P\pi}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{\Delta^3} \\[2ex] A_{22} = \dfrac{\pi}{b_0^2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta_3} + \left(\frac{PQ - R'^2}{c_0^2} + \frac{QR - P'^2}{a_0^2}\right)\frac{\pi}{b_0^2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3} + \frac{Q\pi}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{\Delta s} \\[2ex] A_{33} = \dfrac{\pi}{c_0^2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta^3} + \left(\frac{QR - P'^2}{a_0^2} + \frac{RP - Q'^2}{b_0^2}\right)\frac{\pi}{c_0^2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3} + \frac{R\pi}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{\Delta^3} \\[2ex] A_{23} = -\dfrac{(Q'R' - P'P)}{b_0^2 c_0^2}\ \pi\displaystyle\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3} + \frac{P'\pi}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{\Delta^3} \\[2ex] A_{31} = -\dfrac{(R'P' - Q'Q)}{c_0^2 a_0^2}\ \pi\displaystyle\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3} + \frac{Q'\pi}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{\Delta^3} \\[2ex] A_{12} = -\dfrac{(P'Q' - R'R)}{a_0^2 b_0^2}\ \pi\displaystyle\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^3} + \frac{R'\pi}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{\Delta^3}\,. \end{cases}$$

Si può osservare pure che

$$(18) \qquad \Delta^2 = \begin{vmatrix} B_{11}s+1 & B_{12}s & B_{13}s \\ B_{21}s & B_{22}s+1 & B_{23}s \\ B_{31}s & B_{32}s & B_{33}s+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{s^3}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} + \left(\frac{P}{b_0^2 c_0^2} + \frac{Q}{c_0^2 a_0^2} + \frac{R}{a_0^2 b_0^2}\right) s^2 + \left(\frac{QR - P'^2}{a_0^2} + \frac{RP - Q'^2}{b_0^2} + \frac{PQ - R'^2}{c^2}\right) s + 1 =$$

$$= \begin{vmatrix} P + \frac{s}{a_0^2} & R' & Q' \\ R' & Q + \frac{s}{b_0^2} & P' \\ Q' & P' & R + \frac{s}{c_0^2} \end{vmatrix} .$$

Di qui si deduce che i coefficienti A_{ij} dipendono soltanto dalle quantità P, Q, R, P', Q', R'.

Il valore di H è dato semplicemente da

$$(19) \qquad H = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} .$$

4. Siamo ora in grado di mostrare che le equazioni (6) determinano effettivamente per le a_{ij} delle funzioni finite e continue del tempo. Prendendo a considerare insieme quelle delle equazioni (6) che contengono le stesse seconde derivate, per esempio: $\frac{d^2 a_{11}}{dt^2}$, $\frac{d^2 a_{21}}{dt^2}$, $\frac{d^2 a_{31}}{dt^2}$, e risolvendole rispetto a queste, si ottiene:

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 a_{11}}{dt^2} = \dfrac{2\sigma}{a_0^2} \alpha_{11} - 2(A_{11}\alpha_{11} + A_{12}\alpha_{12} + A_{13}\alpha_{13}) \\[2ex] \dfrac{d^2 a_{21}}{dt^2} = \dfrac{2\sigma}{a_0^2} \alpha_{21} - 2(A_{11}\alpha_{21} + A_{12}\alpha_{22} + A_{13}\alpha_{23}) \\[2ex] \dfrac{d^2 a_{31}}{dt^2} = \dfrac{2\sigma}{a_0^2} \alpha_{31} - 2(A_{11}\alpha_{31} + A_{12}\alpha_{32} + A_{13}\alpha_{33}) . \end{cases}$$

Come questo si hanno altri due sistemi di equazioni analoghi. Se ora la funzione σ è tale che sostituita per essa, nei secondi membri delle equazioni precedenti, la sua espressione in funzione delle a_{ij} e delle derivate rispetto al tempo di queste quantità, questi secondi membri diventano funzioni finite e continue delle a_{ij}, delle derivate $\frac{da_{ij}}{dt}$ e del tempo, per un teorema noto di calcolo integrale, risulterebbe immediatamente il nostro teorema.

Per calcolare il valore di σ in funzione delle a_{ij} e delle derivate di queste quantità rispetto al tempo, osserviamo che

$$\frac{d^2 D}{dt^2} = \frac{d^2 a_{11}}{dt^2}\alpha_{11} + \frac{d^2 a_{12}}{dt^2}\alpha_{12} + \frac{d^2 a_{23}}{dt^2}\alpha_{13} + \frac{d^2 a_{21}}{dt^2}\alpha_{21} + \ldots + \frac{d^2 a_{33}}{dt^2}\alpha_{33} +$$

$$+2\left\{ \begin{vmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \frac{da_{13}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \frac{da_{23}}{dt} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \frac{da_{13}}{dt} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{da_{31}}{dt} & \frac{da_{32}}{dt} & \frac{da_{33}}{dt} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \frac{da_{23}}{dt} \\ \frac{da_{31}}{dt} & \frac{da_{32}}{dt} & \frac{da_{33}}{dt} \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

Sostituendo in questa equazione i valori delle derivate seconde delle a_{ij} date dalle (20) ed osservando che la somma degli ultimi determinanti si può porre sotto la forma

$$\sum \frac{da_{ij}}{dt} \frac{d\alpha_{ij}}{dt} ,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le combinazioni possibili $a_{ij}\ \alpha_{ij}$, avremo:

$$2\left(\frac{\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2}{a_0^2} + \frac{\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2}{b_0^2} + \frac{\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2}{c_0^2}\right)\sigma =$$

$$= 2\sum_1^3{}_i (A_{11}\alpha_{i1}^2 + A_{22}\alpha_{i2}^2 + A_{33}\alpha_{i3}^2 + 2A_{23}\alpha_{i2}\alpha_{i3} + 2A_{31}\alpha_{i3}\alpha_{i1} + 2A_{12}\alpha_{i1}\alpha_{i2}) -$$

$$- \sum \frac{d\alpha_{ij}}{dt} \frac{d\alpha_{ij}}{dt} .$$

Ora per un teorema di Poisson è

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi =$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_i \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_0^2} \alpha_{i1}^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y_0^2} \alpha_{i2}^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z_0^2} \alpha_{i3}^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y_0 \partial z_0} \alpha_{i2}\alpha_{i3} + 2 \frac{\partial\ V}{\partial z_0 \partial x_0} \alpha_{i3}\alpha_{i1} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_0 \partial y_0} \alpha_{i1}\alpha_{i2} \right) =$$

$$= -2\Sigma (A_{11}\alpha_{i1}^2 + A_{22}\alpha_{i2}^2 + A_{33}\alpha_{i3}^2 + 2A_{23}\alpha_{i2}\alpha_{i3} + 2A_{31}\alpha_{i3}\alpha_{i1} + 2A_{12}\alpha_{i1}\alpha_{i2}) ,$$

per cui la formola precedente si può scrivere

$$(21) \quad \left(\frac{\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2}{a_0^2} + \frac{\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2}{b_0^2} + \frac{\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2}{c_0^2} \right) \sigma =$$

$$= 2\pi - \frac{1}{2} \sum \frac{d\alpha_{ij}}{dt} \frac{d\alpha_{ij}}{dt} .$$

Il determinante reciproco di D , $\Sigma \pm \alpha_{11}\, \alpha_{22}\, \alpha_{33}$, è eguale ad uno. Le α_{ij} non possono, quindi, annullarsi mai tutte contemporaneamente, per cui il coefficente di σ è sempre diverso da zero.

La (21) mostra che σ e, quindi, i secondi membri delle (20) sono funzioni finite e continue delle a_{ij} e delle $\dfrac{da_{ij}}{dt}$.

5. Qui conviene notare ancora un' altra forma sotto cui si può porre l'espressione di σ. Osserviamo perciò che per le (16) del Cap. I.

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial y} = \begin{vmatrix} \alpha_{21}\dfrac{da_{21}}{dt} + \alpha_{22}\dfrac{da_{22}}{dt} + \alpha_{23}\dfrac{da_{23}}{dt} , & \alpha_{31}\dfrac{da_{21}}{dt} + \alpha_{32}\dfrac{da_{22}}{dt} + \alpha_{33}\dfrac{da_{23}}{dt} \\ \alpha_{21}\dfrac{da_{31}}{dt} + \alpha_{22}\dfrac{da_{32}}{dt} + \alpha_{23}\dfrac{da_{33}}{dt} , & \alpha_{31}\dfrac{da_{31}}{dt} + \alpha_{32}\dfrac{da_{32}}{dt} + \alpha_{33}\dfrac{da_{33}}{dt} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} \dfrac{da_{22}}{dt} & \dfrac{da_{23}}{dt} \\ \dfrac{da_{32}}{dt} & \dfrac{da_{33}}{dt} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} \dfrac{da_{23}}{dt} & \dfrac{da_{21}}{dt} \\ \dfrac{da_{33}}{dt} & \dfrac{da_{31}}{dt} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} \dfrac{da_{21}}{dt} & \dfrac{da_{22}}{dt} \\ \dfrac{da_{31}}{dt} & \dfrac{da_{32}}{dt} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \dfrac{da_{21}}{dt} & \dfrac{da_{22}}{dt} & \dfrac{da_{23}}{dt} \\ \dfrac{da_{31}}{dt} & \dfrac{da_{32}}{dt} & \dfrac{da_{33}}{dt} \end{vmatrix} ,$$

per cui la (21), ricordando l'espressione della sommatoria per mezzo di determinanti, si può scrivere:

$$\left(\frac{\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2}{a_0^2} + \frac{\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2}{b_0^2} + \frac{\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2}{c_0^2} \right) \sigma =$$

$$= 2\pi - \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial z} .$$

Ora è

$$- \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial v_x}{\partial x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} ,$$

quindi, a causa della condizione d'incompressibilità e delle (13), si può dare alla (21) la forma definitiva:

$$(22) \qquad (B_{11} + B_{22} + B_{33})\, \sigma =$$

$$= 2\pi + \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial z} .$$

Possiamo qui aggiungere l'osservazione seguente relativa alla pressione.

Perchè il movimento del fluido sia fisicamente possibile il valore della pressione nell'interno della massa fluida e alla sua superficie dev'essere positivo. Siccome poi il fattore di σ nell'espressione (5) è compreso fra 0 ed 1, se σ è negativo è necessario che la costante sia sufficientemente grande ossia che alla superficie esterna del fluido si eserciti una pressione abbastanza forte. Se invece σ è positivo il movimento sarà possibile senza supporre alcuna pressione esterna. Ora, come risulta dalle (21) e (22), il valore di σ è noto soltanto quando siano integrate le equazioni (6), quindi, in generale, allora soltanto potremo discutere della possibilità fisica del movimento.

Solo il valore iniziale di σ si ricava immediatamente, tenendo presenti le formole del Cap. prec., per $t=t_0$. Esso è dato da

$$(23)\quad \left(\frac{1}{a_0^2}+\frac{1}{b_0^2}+\frac{1}{c_0^2}\right)\sigma=2\pi+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{da_{11}}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{da_{22}}{dt}\right)_0^2+\left(\frac{da_{33}}{dt}\right)_0^2\right\}+$$
$$+\left(\frac{da_{12}}{dt}\right)_0\left(\frac{da_{21}}{dt}\right)_0+\left(\frac{da_{23}}{dt}\right)_0\left(\frac{da_{32}}{dt}\right)_0+\left(\frac{da_{31}}{dt}\right)_0\left(\frac{da_{13}}{dt}\right)_0 .$$

Alcune osservazioni generali.

6. Per trattare il nostro problema abbiamo fatto le due ipotesi che il fluido sia omogeneo e privo di attrito. Possiamo però osservare che l'attrito non ha nessuna influenza sui movimenti di cui ci occupiamo. Basta perciò notare che, se per risolvere il nostro problema, ci fossimo serviti delle equazioni di Eulero, quando si volesse considerare anche l'attrito, al secondo membro di ciascuna andrebbe aggiunto un termine che è il prodotto di una costante per il Δ^2 di una delle quantità v_x, v_y, v_z (1), e nel nostro caso è $\Delta^2 v_x=\Delta^2 v_y=\Delta^2 v_z=0$.

(1) Vedi: KIRCHHOFF, *Mechanik.* pag. 369.

Non è più lo stesso quando si supponga il fluido eterogeneo. Difatti, almeno in generale, la funzione potenziale V dell'ellissoide, riferito ad un punto interno, non è più del secondo grado rispetto alle coordinate del punto. Intanto perchè le equazioni di Lagrange, nell'ipotesi di Dirichlet, possano essere soddisfatte $V-\overline{P}$ deve essere una funzione omogenea del secondo grado, a meno di una costante, e deve dipendere da un solo parametro. $\overline{P}$ non può dunque assumere la forma che le abbiamo assegnato fin qui. Così la generalizzazione tentata dal Betti (1) del problema di Dirichlet non può ritenersi pienamente giustificata. Ritorneremo in seguito ad illustrare meglio questo punto.

Aggiungiamo ancora che se le particelle del fluido fossero soggette, oltre alle loro reciproche attrazioni, ad una stessa forza costante, come avverrebbe se si osservasse il fenomeno sulla Terra tenendo, quindi, conto della gravità, ciascuna di esse subirebbe una stessa traslazione nella direzione della forza. La forma della massa fluida ed il suo movimento relativamente al baricentro sarebbero, perciò gli stessi che nel moto assoluto di un ellissoide le cui particelle fossero soggette soltanto alle loro azioni reciproche.

Le equazioni di Dirichlet sotto la forma loro data dal prof. Brioschi. Legge di reciprocità di Dedekind.

7. Cominciamo col calcolare la derivata $\dfrac{\partial}{\partial a_{11}}\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}$.

Abbiamo intanto:

$$\frac{\partial}{\partial a_{11}}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta^3}\frac{\partial\Delta^2}{\partial a_{11}}$$

(1) Sopra i moti che conservano la forma ellissoidale a una massa fluida eterogenea. *Ann. di matem. pura e applic.* Ser. II, T. X.

e

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{11}} = \frac{\partial}{\partial a_{11}} \begin{vmatrix} P + \frac{s}{a_0^2} & R' & Q' \\ R' & Q + \frac{s}{b_0^2} & P' \\ Q' & P' & R + \frac{s}{c_0^2} \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \left\{ \frac{a_{11}}{b_0^2 c_0^2} s^2 + (a_{11} R - a_{13} Q') \frac{s}{b_0^2} + (a_{11} Q - a_{12} R') \frac{s}{c_0^2} + \right.$$

$$\left. + a_{11} (Q R - P'^2) + a_{12} (P' Q' - R R') + a_{13} (P' R' - Q Q') \right\} .$$

Per essere poi:

$$P\alpha_{11} + R'\alpha_{12} + Q'\alpha_{13} = a_{11}(a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}) + a_{21}(a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{12} + a_{23}\alpha_{13}) +$$

$$+ a_{31} (a_{31} \alpha_{11} + \ldots) = a_{11} ,$$

$$\alpha_{11} (RP - Q'^2) - \alpha_{12} (P'Q' - RR') = R (\alpha_{11} P + \alpha_{12} R' + \alpha_{13} Q') -$$

$$- Q' (\alpha_{11} Q' + \alpha_{12} P' + \alpha_{13} R) = a_{11} R - a_{13} Q' ,$$

$$\alpha_{11} (P Q - R'^2) - \alpha_{13} (R' P' - Q Q') = Q (\alpha_{11} P + \alpha_{12} R' + \alpha_{13} Q') -$$

$$- R' (\alpha_{11} R' + \alpha_{12} Q + \alpha_{13} P') = a_{11} Q - a_{12} R' ,$$

$$a_{11} (Q R - P'^2) + a_{12} (P' Q' - R R') + a_{13} (P' R' - Q Q') =$$

$$= a_{11} (\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2) + a_{12} (\alpha_{12} \alpha_{11} + \alpha_{22} \alpha_{21} + \alpha_{32} \alpha_{31}) +$$

$$+ a_{13} (\alpha_{13} \alpha_{11} + \alpha_{23} \alpha_{21} + \alpha_{33} \alpha_{31}) = \alpha_{11} (a_{11} \alpha_{11} + a_{12} \alpha_{12} + a_{13} \alpha_{13}) + \ldots = \alpha_{11} ,$$

si può scrivere anche

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{11}} = 2\alpha_{11} \left\{ 1 + s \left(\frac{R P - Q'^2}{b_0^2} + \frac{P Q - R'^2}{c_0^2} \right) + s^2 \frac{P}{b^2 c_0^2} \right\} +$$

$$+ 2 \alpha_{12} \left\{ - s \frac{P'Q' - RR'}{b_0^2} + s^2 \frac{R'}{b_0^2 c_0^2} \right\} + 2 \alpha_{13} \left\{ - s \frac{R' P' - Q Q'}{c_0^2} + s^2 \frac{Q'}{b_0^2 c_0^2} \right\} ;$$

per cui

$$2 \pi \frac{\partial}{\partial a_{11}} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} = - 2 a_0^2 (A_{11} \alpha_{11} + A_{12} \alpha_{12} + A_{13} \alpha_{12}) .$$

La prima delle (20) si può allora porre sotto la forma

$$a_0^2 \frac{d^2 a_{11}}{dt^2} = 2 \sigma \alpha_{11} + 2 \pi \frac{\partial}{\partial a_{11}} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial a_{11}} \left(2 \sigma D + 2 \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \right) .$$

Analogamente si avrebbe per le altre:

$$a_0^2 \frac{d^2 a_{21}}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial a_{21}} \left(2 \sigma D + 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \right) , \quad a_0^2 \frac{d^2 a_{31}}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial a_{31}} \left(2 \sigma D + 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \right) ,$$

$$b_0^2 \frac{d^2 a_{12}}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial a_{12}} \left(2 \sigma D + 2 \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \right) , \ldots .$$

Col porre:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \sigma D + 2 \pi \int_0^\infty \frac{dc}{\Delta} = K \\ x_1 = a_0 a_{11} \quad , \quad x_2 = a_0 a_{21} \quad , \quad x_3 = a_0 a_{31} \\ y_1 = b_0 a_{12} \quad , \quad y_2 = b_0 a_{22} \quad , \quad y_3 = b_0 a_{32} \\ z_1 = c_1 a_{13} \quad , \quad z_2 = c_0 a_{23} \quad , \quad z_3 = c_0 a_{33} , \end{array} \right.$$

le equazioni di Dirichlet si riducono alla forma seguente, loro data dal Brioschi:

$$
(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial K}{\partial x_1}\,,\quad \frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{\partial K}{\partial x_2}\,,\quad \frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{\partial K}{\partial x_3}\\
&\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{\partial K}{\partial y_1}\,,\quad \frac{d^2y_2}{dt^2}=\frac{\partial K}{dy_2}\,,\quad \frac{d^2y_3}{dt^2}=\frac{\partial K}{\partial y_3}\\
&\frac{d^2z_1}{dt^2}=\frac{\partial K}{\partial z_1}\,,\quad \frac{d^2z_2}{dt^2}=\frac{\partial K}{\partial z_2}\,,\quad \frac{d^2z_3}{dt^2}=\frac{\partial K}{\partial z_3}\,.
\end{aligned}\right.
$$

In funzione delle nuove variabili x_i, y_i, z_i è:

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{11} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\frac{1}{a_0\,b_0\,c_0}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\,,
$$

$$
\Delta^2=
$$

$$
=\frac{s^3}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}+\left(\frac{P}{b_0^2 c_0^2}+\frac{Q}{c^2 a_0^2}+\frac{R}{a_0^2 b_0^2}\right)s^2+\left(\frac{QR-P'^2}{a_0^2}+\frac{RP-Q'^2}{b^2}+\frac{PQ-R'^2}{c_0^2}\right)s+1=
$$

$$
=\frac{s^3}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}+(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+\ldots+z_3^2)\,s^2+
$$

$$
+\left[\left(\frac{\partial D}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial D}{\partial y_1}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{\partial D}{\partial z_3}\right)^2\right]s+1\,,
$$

poichè:

$$
\frac{P}{b_0^2 c_0^2}+\frac{Q}{c_0^2 a_0^2}+\frac{R}{a_0^2 b_0^2}=\left\{a_0^2(a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2)+b_0^2(a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2)+c_0^2(a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2)\right\},
$$

$$
\frac{QR-P'^2}{a_0^2}+\frac{RP-Q'^2}{b_0^2}+\frac{PQ-R'^2}{c_9^2}=
$$

$$
=\frac{1}{a_0^2}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}^2+\frac{1}{b_0^2}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33}\\ a_{11} & a_{21} & a_{31}\end{vmatrix}^2+\frac{1}{c_0^2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\end{vmatrix}^2=
$$

$$
=\frac{1}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}\left\{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3\\ x_1 & x_2 & x_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}^2\right\},
$$

8. Sotto questa forma notevole le equazioni di Dirichlet ci forniscono immediatamente la dimostrazione di un importante teorema dovuto a Dedekind. Se scambiamo x_2, x_3, y_3, con y_1, z_1, z_2 lasciando inalterati x_1, y_2, z_3, le equazioni (25) restano inalterate poichè tali restano D, Δ e quindi K. Dunque ad ogni soluzione delle equazioni (25) corrispondono i due movimenti:

$$
x=\frac{x_1}{a_0}x_0+\frac{y_1}{b_0}y_0+\frac{z_1}{c_0}z_0\quad,\quad x=\frac{x_1}{a_0}x_0+\frac{x_2}{b_0}y_0+\frac{x_3}{c_0}z_0
$$

$$
y=\frac{x_2}{a_0}x_0+\frac{y_2}{b_0}y_0+\frac{z_2}{c_0}z_0\quad,\quad y=\frac{y_1}{a_0}x_0+\frac{y_2}{b_0}y_0+\frac{y_3}{c_0}z_0
$$

$$
z=\frac{x_3}{a_0}x_0+\frac{y_3}{b_0}y_0+\frac{z_3}{c_0}z_0\quad,\quad z=\frac{z_1}{a_0}x_0+\frac{z_2}{b_0}y_0+\frac{z_3}{c_0}z_0\,.
$$

In ogni istante la figura esterna della massa fluida è la stessa nei due casi, poichè Δ, che eguagliato a zero da nelle radici s, i semiassi dell'ellissoide, è simmetrico nelle x_1, y_1 ...., z_3. Così pure la pressione ha evidentemente lo stesso valore in ciascuno dei due casi. Da un movimento si passa all'altro cambiando soltanto la condizione iniziale. Due tali movimenti li chiameremo *reciproci* e diremo che si corrispondono secondo la *legge di reciprocità*.

Integrali delle equazioni di Dirichlet.

9. Nel problema di cui ci occupiamo sussistono gli integrali del baricentro, quelli delle aree, l'integrale delle forze vive e quelli derivanti dal principio della conservazione delle rotazioni di Helmholtz, perchè le forze che agiscono sulle particelle del nostro sistema sono reciproche ed ammettono una funzione potenziale.

Gli integrali del baricentro sono verificati identicamente; essi porterebbero alla conseguenza che il baricentro del sistema, che nel nostro caso è l'origine delle coordinate stia sempre in quiete.

Pel principio delle aree le componenti della coppia di quantità di moto sono costanti, per cui:

$$\int_s \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) ds = \text{cost.} \;,\quad \int_s \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) ds = \text{cost.} \;,$$

$$\int_s \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) ds = \text{cost.}$$

dove s è lo spazio occupato dalla massa. Sostituendo per x, y, z le loro espressioni in funzione di x_0, y_0, z_0 ed osservando che

$$\int_{s_0} x_0^2 \, ds_0 = \frac{M}{5} a_0^2 \;,\quad \int_{s_0} y_0^2 \, ds_0 = \frac{M}{5} b_0^2 \;,\quad \int_{s_0} z_0^2 \, ds_0 = \frac{M}{5} c_0^2 \;,$$

$$\int_{s_0} y_0 z_0 \, ds = \int_{s_0} z_0 x_0 \, ds_0 = \int_{s_0} x_0 y_0 \, ds = o \;,$$

si trovano gli integrali corrispondenti sotto la forma:

$$(26) \left\{ \begin{aligned} & a_0^2 \left(a_{21} \frac{da_{31}}{dt} - a_{31} \frac{da_{21}}{dt} \right) + b_0^2 \left(a_{22} \frac{da_{32}}{dt} - a_{32} \frac{da_{22}}{dt} \right) + c_0^2 \left(a_{23} \frac{da_{33}}{dt} - a_{33} \frac{da_{23}}{dt} \right) \\ & \qquad = A_1 = b_0^2 \left(\frac{da_{32}}{dt} \right)_0 - c_0^2 \left(\frac{da_{23}}{dt} \right)_0 \\ & a_0^2 \left(a_{31} \frac{da_{11}}{dt} - a_{11} \frac{da_{31}}{dt} \right) + b_0^2 \left(a_{32} \frac{da_{12}}{dt} - a_{12} \frac{da_{32}}{dt} \right) + c_0^2 \left(a_{33} \frac{da_{13}}{dt} - a_{13} \frac{da_{33}}{dt} \right) \\ & \qquad = A_2 = c_0^2 \left(\frac{da_{13}}{dt} \right)_0 - a_0^2 \left(\frac{da_{31}}{dt} \right)_0 \\ & a_0^2 \left(a_{11} \frac{da_{21}}{dt} - a_{21} \frac{da_{11}}{dt} \right) + b_0^2 \left(a_{12} \frac{da_{22}}{dt} - a_{22} \frac{da_{12}}{dt} \right) + c_0^2 \left(a_{13} \frac{da_{23}}{dt} - a_{23} \frac{da_{13}}{dt} \right) \\ & \qquad = A_3 = a_0^2 \left(\frac{da_{21}}{dt} \right)_0 - b_0^2 \left(\frac{da_{12}}{dt} \right)_0 . \end{aligned} \right.$$

Il principio della conservazione della forza viva ci da subito

$$\int_s \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} ds = \text{cost.} + \int_s V \, ds$$

e quindi ricordando che il potenziale di un ellissoide omogeneo, su se stesso, è dato da

$$\frac{1}{2} \int_s V \, ds = \frac{M}{5} 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \;,\quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} P + \frac{s}{a_0^2} & R' & Q' \\ R' & Q + \frac{s}{b_0^2} & P' \\ Q' & P' & R + \frac{s}{c_0^2} \end{vmatrix} \; [1]$$

si trova per l'integrale corrispondente, delle forze vive, con un calcolo analogo al precedente,

$$(27) \quad a_0^2 \left\{ \left(\frac{da_{11}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{da_{21}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{da_{31}}{dt} \right)^2 \right\} + b^2 \left\{ \left(\frac{da_{12}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{da_{22}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{da_{32}}{dt}^2 \right) \right\}$$

$$+ c_0^2 \left\{ \left(\frac{da_{13}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{da_{23}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{da_{33}}{dt} \right)^2 \right\} = \text{cost.} + 4\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} .$$

Il principio di Helmholtz, relativo alla conservazione delle rotazioni, finalmente, viene espresso dall'equazioni:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial v_x}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial v_y}{\partial z_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial v_y}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial v_z}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial v_z}{\partial y_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} = B_1 = \text{cost.},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial z_0} - \frac{\partial v_x}{\partial z_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \ldots = B_2 = \text{cost.}, \frac{\partial v_x}{\partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} - \frac{\partial v_x}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} + \ldots = B_3 = \text{cost.} \; [2],$$

per cui sostituendo per x, y, z; v_x, v_y, v_z le loro espressioni in

---

[1] Betti. *Teorica delle forze newt.* pag. 128.

[2] Kirchhoff. *Mechanik,* pag. 165.

funzione di x_0, y_0, z_0 si ottiene:

$$(28)\quad \begin{cases} a_{12}\dfrac{da_{13}}{dt}-a_{13}\dfrac{da_{12}}{dt}+a_{22}\dfrac{da_{23}}{dt}-a_{23}\dfrac{da_{22}}{dt}+a_{32}\dfrac{da_{33}}{dt}-a_{33}\dfrac{da_{32}}{dt}= \\ \qquad =B_1=\left(\dfrac{da_{23}}{dt}\right)_0-\left(\dfrac{da_{32}}{dt}\right)_0 \\ a_{13}\dfrac{da_{11}}{dt}-a_{11}\dfrac{da_{13}}{dt}+a_{23}\dfrac{da_{21}}{dt}-a_{21}\dfrac{da_{23}}{dt}+a_{33}\dfrac{da_{31}}{dt}-a_{31}\dfrac{da_{33}}{dt}= \\ \qquad =B_2=\left(\dfrac{da_{31}}{dt}\right)_0-\left(\dfrac{da_{13}}{dt}\right)_0 \\ a_{11}\dfrac{da_{12}}{dt}-a_{12}\dfrac{da_{11}}{dt}+a_{21}\dfrac{da_{22}}{dt}-a_{22}\dfrac{da_{21}}{dt}+a_{31}\dfrac{da_{32}}{dt}-a_{32}\dfrac{da_{31}}{dt}= \\ \qquad =B_3=\left(\dfrac{da_{12}}{dt}\right)_0-\left(\dfrac{da_{21}}{dt}\right)_0 . \end{cases}$$

Moltiplicando le (28) successivamente per a_{11}, a_{12}, a_{13} e sommando, tenendo conto delle (6), (8) del Cap. I, si trova

$$\beta_{23}-\beta_{32}=B_1 a_{11}+B_2 a_{12}+B_3 a_{13}=2\pi .$$

Similmente si troverebbe:

$$\beta_{31}-\beta_{13}=B_1 a_{21}+B_2 a_{22}+B_3 a_{23}=2\chi , \ \beta_{12}-\beta_{21}=B_2 a_{32}+B_3 a_{33}=2\rho.$$

Facendo $t=t_0$ in queste formole risulta:

$$B_1=2\pi_0 , \ B_2=2\chi_0 , \ B_3=2\rho_0$$

e quindi si può scrivere:

$$(28')\quad \begin{cases} \pi=a_{11}\pi_0+a_{12}\chi_0+a_{13}\rho_0 \\ \chi=a_{21}\pi_0+a_{22}\chi_0+a_{23}\rho_0 \\ \rho=a_{31}\pi_0+a_{32}\chi_0+a_{33}\rho_0 . \end{cases}$$

10. Mostriamo ora brevemente come questi integrali possono dedursi direttamente dalle equazioni di Dirichlet.

Considerando queste, nella forma (20), si può scrivere:

$$a_0^2\frac{d^2a_{11}}{dt^2}=2\sigma\alpha_{11}+2\pi\frac{\partial}{\partial a_{11}}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta} , \quad a_0^2\frac{d^2a_{21}}{dt^2}=2\sigma\alpha_{21}+2\pi\frac{\partial}{\partial a_{21}}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}$$

$$b_0^2\frac{d^2a_{12}}{dt^2}=2\sigma\alpha_{12}+2\pi\frac{\partial}{\partial a_{12}}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta} , \quad b_0^2\frac{d^2a_{22}}{dt^2}=2\sigma\alpha_{22}+2\pi\frac{\partial}{\partial a_{22}}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}$$

$$c_0^2\frac{d^2a_{13}}{dt^2}=2\sigma\alpha_{13}+2\pi\frac{\partial}{\partial a_{13}}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta} , \quad c_0^2\frac{d^2a_{23}}{dt^2}=2\sigma\alpha_{23}+2\pi\frac{\partial}{\partial a_{23}}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta} .$$

Moltiplicando le equazioni della prima terna per a_{21}, a_{22}, a_{23} rispettivamente, quelle della seconda terna per a_{11}, a_{12}, a_{13} e sommando ciascuna volta, indi sottraendo i due risultati, si trova:

$$a_0^2\left(a_{21}\frac{d^2a_{11}}{dt^2}-a_{11}\frac{d^2a_{21}}{dt^2}\right)+b_0^2\left(a_{22}\frac{d^2a_{12}}{dt^2}-a_{12}\frac{d^2a_{22}}{dt^2}\right)+c_0^2\left(a_{23}\frac{d^2a_{13}}{dt^2}-a_{13}\frac{d^2a_{23}}{dt^2}\right)$$

$$=-\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta^3}\left\{a_{21}\frac{\partial\Delta^2}{\partial a_{11}}-a_{11}\frac{\partial\Delta^2}{\partial a_{12}}+a_{22}\frac{\partial\Delta^2}{\partial a_{22}}-a_{12}\frac{\partial\Delta^2}{\partial a_{22}}+a_{23}\frac{\partial\Delta^2}{\partial a_{13}}-a_{13}\frac{\partial\Delta^2}{\partial a_{23}}\right\}=$$

$$=-\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta^3}\left\{\frac{\partial\Delta^2}{\partial P}\sum_1^3\left(a_{2i}\frac{\partial P}{\partial a_{1i}}-a_{1i}\frac{\partial P}{\partial a_{1i}}\right)+\frac{\partial\Delta^2}{\partial Q}\sum_1^3\left(a_{2i}\frac{\partial Q}{\partial a_{1i}}-a_{1i}\frac{\partial Q}{\partial a_{1i}}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\Delta^2}{\partial R'}\sum_1^3\left(a_{2i}\frac{\partial R'}{\partial a_{1i}}-a_{1i}\frac{\partial R'}{\partial a_{2i}}\right)\right\}=0 ,$$

poichè

$$\sum_1^3\left(a_{2i}\frac{\partial P}{\partial a_{1i}}-a_{1i}\frac{\partial P}{\partial a_{2i}}\right)=a_{21}a_{11}-a_{11}a_{21}=0 , \ \ldots .$$

Con una integrazione, di cui l'equazione precedente è suscettibile, si trova immediatamente il primo degli integrali (26). Con analogo processo si troverebbero gli altri due.

L'integrale delle forze vive si deduce ancora più semplicemente. Consideriamo perciò le tre equazioni:

$$a_0^2 \frac{d^2 a_{11}}{dt^2} = 2\sigma \alpha_{11} + 2\pi \frac{\partial}{\partial a_{11}} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} , \quad a_0^2 \frac{d^2 a_{21}}{dt^2} = 2\sigma \alpha_{21} + 2\pi \frac{\partial}{\partial a_{21}} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} ,$$

$$a_0^2 \frac{d^2 a_{31}}{dt^2} = 2\sigma \alpha_{31} + 2\pi \frac{\partial}{\partial a_{31}} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} .$$

Moltiplichiamole rispettivamente per $\frac{da_{11}}{dt}$, $\frac{da_{21}}{dt}$, $\frac{da_{31}}{dt}$ e sommiamo; troveremo a questo modo

$$\frac{1}{2} a^2 \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{da_{11}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_{21}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_{31}}{dt}\right)^2 \right\} = 2\sigma \sum_1^3 \alpha_{i1} \frac{da_{i1}}{dt} + 2\pi \sum_1^3 \frac{da_{i1}}{dt} \frac{\partial}{\partial a_{i1}} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} .$$

Sommiamo ora questa equazione con le due analoghe che si ottengono scambiando a_0^2 con b_0^2 e con c_0^2 e il secondo indice 1 con 2, e con 3; ricaviamo così, osservando che $\frac{dD}{dt} = 0$,

$$a_0^2 \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{da_{11}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_{21}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_{31}}{dt}\right)^2 \right\} + b_0^2 \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{da_{12}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_{22}}{dt}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{da_{32}}{dt}\right)^2 \right\} + c_0^2 \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{da_{13}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_{23}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_{33}}{dt}\right)^2 \right\} = 4\pi \frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}$$

e con una integrazione ritroviamo subito l'integrale della forze vive.

Se ora finalmente sottragghiamo a due a due quelle delle equazioni (6) che hanno uno stesso secondo membro troviamo delle combinazioni integrabili che ci conducono agli integrali (28).

11. Prendiamo ora a considerare gli integrali di Helmholtz sotto la forma:

$$\pi = a_{11}\pi_0 + a_{12}\chi_0 + a_{13}\rho_0 \; ; \; \chi = a_{21}\pi_0 + a_{22}\chi_0 + a_{23}\rho_0 \; ; \; \rho = a_{31}\pi_0 + \ldots$$

e cerchiamo di trarre da essi alcune conseguenze.

Intanto si deduce immediatamente che, se nell'istante iniziale e, poichè questo è arbitrario, in un istante qualunque, π, χ, ρ si annullano, essi sono sempre nulli. In questo caso sussistono le eguaglianze (vedi form. 18 Cap. I):

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y} , \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z} , \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} ,$$

per cui l'espressione

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

è certamente positiva e la (22) mostra che tale è anche σ. Possiamo concludere perciò che se il fluido non rota, il movimento di esso è sempre fisicamente possibile anche nell'assenza di qualunque pressione esterna.

Le linee vorticose

$$\frac{dx}{\pi} = \frac{dy}{\chi} = \frac{dz}{\rho} ,$$

nel nostro caso, sono rette. Di queste consideriamo quella che passa per il centro dell'ellissoide che possiamo chiamare *linea vorticosa centrale*. Questa linea, nell'istante iniziale, avrà per equazioni:

$$x_0 = k\pi_0 , \quad y_0 = k\chi_0 , \quad z_0 = k\rho_0 ,$$

dove k è un fattore di proporzionalità. Al tempo t una sua particella $(x_0 \; y_0 \; z_0)$ sarà andata nel punto

$$x = a_{21} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} z_0 \ , \ y = a_{21} x_0 + \dots. \ , \ z = a_{31} x_0 + \dots$$

ossia nel punto

$$x = k (a_{11} \pi_0 + a_{12} \chi_0 + a_{13} \rho_0) = k\pi \ , \ y = k\chi \ , \ z = k\rho \ .$$

Perciò tutte le particelle che all'istante iniziale formavano la linea vorticosa centrale, al tempo t saranno situate ancora sulla linea vorticosa centrale corrispondente a questo tempo. Ciò vale di qualunque altra linea vorticosa.

A causa ora della linearità delle relazioni che legano le coordinate x, y, z alle x_0, y_0, z_0 ne viene che le particelle del fluido che nell' istante iniziale giacevano su di un diametro dell' ellissoide e sul piano diametrale coniugato, saranno rimaste in questa relazione anche al tempo t, rispetto all'ellissoide corrispondente. Ne segue che anche il piano diametrale coniugato alla linea vorticora centrale contiene sempre le stesse particelle fluide e ciò vale anche di ogni piano parallelo.

Consideriamo ancora sulla linea vorticosa centrale, al tempo iniziale, la particella $x_0 \, y_0 \, z_0$. Il quadrato della sua distanza dall' origine sarà

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = k^2 (\pi_0^2 + \chi_0^2 + \rho_0^2) = k^2 \omega_0^2$$

se si pone $\omega_0 = \sqrt{\pi_0^2 + \chi_0^2 + \rho_0^2}$. Al tempo t, qualunque, come si è visto, essa sarà situata ancora sulla linea vorticosa centrale e le sue coordinate saranno:

$$x = k\pi \ , \ y = k\chi \ , \ z = k\rho \ ,$$

quindi il quadrato della sua distanza dall' origine sarà data da

$$r^2 = k^2 (\pi^2 + \chi^2 + \rho^2) = k^2 \omega^2 \ ,$$

dove $\omega = \sqrt{\pi^2 + \chi^2 + \rho^2}$. Dalle precedenti relazioni si deduce

$$\frac{r}{r_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

e quindi che la distanza di una particella appartenente alla linea

vorticosa centrale dal centro dell' ellissoide è proporzionale alla grandezza della rotazione comune a tutte le particelle. In particolare, la lunghezza del diametro dell' ellissoide che coincide con la linea vorticosa centrale varia proporzionalmente alla grandezza della rotazione di ciascuna particella (1).

---

(1) Questo teorema, per quanto contenuto nei teoremi generali della dinamica, non è stato rilevato nei lavori precedenti sul soggetto che in casi particolari.

CAPITOLO III.

Equazioni differenziali di Riemann

1. Abbiamo visto nel Cap. I che il movimento più generale di un ellissoide fluido, nell'ipotesi che le coordinate di un elemento si conservino funzioni lineari ed omogenee delle coordinate iniziali, si può far dipendere dalla determinazione: della rotazione di un sistema di assi ξ, η, ζ che in ogni istante coincide col sistema degli assi principali dell'ellissoide, della rotazione di un altro sistema di assi ξ', η', ζ', relativamente al primo e dei semi assi a, b, c.

Indichiamo ora con p, q, r ; p', q', r' le componenti delle rotazioni dei due sistemi di assi, secondo ξ, η, ζ, come in quel capitolo è stato fatto, e proponiamoci il problema di trovare le equazioni differenziali a cui soddisfano le quantità p, q, r, ; p', q', r' ; a, b, c, quando al fluido si impongono le altre condizioni complementari della ipotesi di Dirichlet.

Ci serviremo per ciò del principio di Hamilton. Se con T si indica la forza viva del sistema, con P', il potenziale, notando che fra a, b, c esiste la relazione $abc = \text{cost.}$, all'equazione che deriva da questo principio, si può dare la forma

$$(1) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T} + \mathrm{P}' + 2\lambda \log (abc))\, dt = 0 \;,$$

dove si suppone che il sistema ai tempi t_0, t_1 abbia delle configurazioni assegnate.

Eseguendo la variazione indicata in (1), si trova:

$$(2) \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_{abc} \left\{ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial a} \delta a + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \frac{da}{dt}} \delta \frac{da}{dt} + \frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial a} \delta a + 2 \frac{\lambda}{a} \delta a \right\} + \sum_{pqr} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} \delta p + \sum_{p'q'r'} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p'} \delta p' \right] = 0 \,.$$

Supporremo ora che ogni movimento variato che, secondo il principio accennato di Hamilton, bisogna considerare, soddisfi sempre alla ipotesi fatta pel moto reale e individueremo ognuno di essi per mezzo delle variazioni di a, b, c e delle rotazioni infinitesime p_1, q_1, r_1; p'_1, q'_1, r'_1 dei due sistemi di assi ξ, η, ζ; ξ', η', ζ', secondo gli assi ξ, η, ζ.

Se i coseni degli angoli che questi sistemi di assi fanno fra loro e con gli assi fissi x, y, z sono indicati come nel Cap. I, p_1, q_1, r_1; p'_1, q'_1, r'_1 saranno determinati dalle espressioni:

$$p_1 = \alpha_3 \delta \alpha_2 + \beta_3 \delta \beta_2 + \gamma_3 \delta \gamma_2 \;, \quad q_1 = \alpha_1 \delta \alpha_3 + \ldots\ldots \;, \quad r_1 = \alpha_2 \delta \alpha_1 + \ldots\ldots$$

$$p'_1 = \alpha'_3 \delta \alpha'_2 + \beta'_3 \delta \beta'_2 + \gamma'_3 \delta \gamma'_2 \;, \quad q'_1 = \alpha'_1 \delta \alpha'_3 + \ldots\ldots \;, \quad r'_1 = \alpha'_2 \delta \alpha'_1 + \ldots\ldots$$

Sostituendo in (2) per $\delta p, \delta q, \ldots. \delta r'$ le espressioni note:

$$\delta p = \frac{dp_1}{dt} + q r_1 - q_1 r \qquad \delta p' = \frac{dp'_1}{dt} + q' r'_1 - q'_1 r'$$

$$\delta q = \frac{dq_1}{dt} + r p_1 - r_1 p \qquad \delta q' = \frac{dq'_1}{dt} + r' p'_1 - r'_1 p'$$

$$\delta r = \frac{dr_1}{dt} + p q_1 - p_1 q \qquad \delta r' = \frac{dr'_1}{dt} + p' q'_1 - p'_1 q' \text{ (1)}$$

con delle integrazioni per parti, si ha

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\sum_{abc} \left\{ \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \frac{da}{dt}} + \frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial a} + 2 \frac{\lambda}{a} \right\} \delta a + \right.$$

$$\left. + \sum_{pqr} p_1 \left\{ - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} r - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} q \right\} + \sum_{p'q'r'} p'_1 \left\{ - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p'} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} r' - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r'} q' \right\} \right] .$$

(1) Vedi: Kirchhoff. *Mechanik*, pag. 58.

Poichè le quantità $\delta a,\ \delta b,\ \delta c;\ p_1,\ q_1,\ r_1;\ p'_1,\ q'_1,\ r'_1$ debbono riguardarsi, nell'equazione precedente, come completamente arbitrarie troviamo le equazioni cercate sotto la forma:

$$
(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \frac{da}{dt}} &= \frac{\partial(\mathrm{T}+\mathrm{P}')}{\partial a} + 2\frac{\lambda}{a} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \frac{db}{dt}} &= \frac{\partial(\mathrm{T}+\mathrm{P}')}{\partial b} + 2\frac{\lambda}{b} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \frac{dc}{dt}} &= \frac{\partial(\mathrm{T}+\mathrm{P}')}{\partial c} + 2\frac{\lambda}{c}
\end{aligned}\right.
$$

$$
(4')\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} &= \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}r - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}q \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} &= \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}p - \frac{\partial \mathrm{T}}{d p}r \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} &= \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}q - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}p
\end{aligned}\right.
\qquad
(4'')\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p'} &= \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'}r' - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r'}q' \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'} &= \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r'}p' - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p'}r' \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r'} &= \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p'}q' - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'}p'.
\end{aligned}\right.
$$

2. Passiamo ora a calcolare la forza viva del sistema. Ricordando le formole (21) del Cap. I, si trova:

$$
\mathrm{T} = \frac{1}{2}\int\left[\left\{\frac{\xi}{a}\frac{da}{dt} + (ar'-br)\frac{\eta}{b} + (aq'-cq)\frac{\zeta}{c}\right\}^2 + \right.
$$

$$
\left. + \left\{\frac{\eta}{b}\frac{db}{dt} + (bp'-cp)\frac{\zeta}{c} - (br'-ar)\frac{\xi}{a}\right\}^2 + \left\{\frac{\zeta}{c}\frac{dc}{dt} + (cq'-aq)\frac{\xi}{a} - (cp'-bp)\frac{\eta}{b}\right\}^2\right] ds
$$

e poichè:

$$
\int \xi^2 ds = \frac{\mathrm{M}}{5}a^2\ ,\quad \int \eta^2 ds = \frac{\mathrm{M}}{5}b^2\ ,\quad \int \zeta^2 ds = \frac{\mathrm{M}}{5}c^2
$$

$$
\int \xi\eta\, ds = \int \eta\zeta\, ds = \int \zeta\xi\, ds = 0\ ,
$$

risulta

$$
\mathrm{T} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{M}}{5}\left\{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2 + \right.
$$

$$
\left. + (ar'-br)^2 + (aq'-cq)^2 + (bp'-cp)^2 + (br'-ar)^2 + (cq'-aq)^2 + (cp'-bp)^2\right\}.
$$

Se poniamo:

$$
(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
u &= \frac{p+p'}{2}\ ,\quad v = \frac{q+q'}{2}\ ,\quad w = \frac{r+r'}{2} \\
u' &= \frac{p-p'}{2}\ ,\quad v' = \frac{q-q'}{2}\ ,\quad w' = \frac{r-r'}{2}\ ,
\end{aligned}\right.
$$

l'espressione di T si può scrivere anche così:

$$
(6)\qquad \mathrm{T} = \frac{\mathrm{M}}{5}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right\} + \right.
$$

$$
\left. + (b-c)^2u^2 + (c-a)^2v^2 + (a-b)^2w^2 + (b+c)^2u'^2 + (c+a)^2v'^2 + (a+b)^2w'^2\right].
$$

Qui conviene pure ricordare che il potenziale dell'elissoide sopra a se stesso è dato da

$$
(7)\quad \mathrm{P}' = 2\pi\frac{\mathrm{M}}{5}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c_2}\right)}} = 2\frac{\mathrm{M}}{5}\mathrm{H}
$$

e che, se indichiamo la funzione potenziale dello stesso elissoide riferito ad un punto interno con

$$
(8)\qquad \mathrm{V} = \text{cost.} - (\mathrm{A}\,\xi^2 + \mathrm{B}\,\eta^2 + \mathrm{C}\,\zeta^2)\ ,
$$

notando che

$$
\left((1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right) = \frac{1}{a^2b^2c^2}(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)\ ,
$$

abbiamo:

$$
(9)\qquad \frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial a} = -2a\mathrm{A}\frac{\mathrm{M}}{5}\ ,\quad \frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial b} = -2b\mathrm{B}\frac{\mathrm{M}}{5}\ ,\quad \frac{\partial \mathrm{P}'}{\partial c} = -2c\mathrm{C}\frac{\mathrm{M}}{5}\ .
$$

Sostituendo l'espressione di T e di P' nelle (4), (4'), (4'') e trascurando il fattore $\frac{M}{5}$ che comparirebbe a fattore comune in tutte, quando si fosse cambiato opportunamente il valore di λ, si avranno senz'altro le equazioni differenziali a cui soddisfano a, b, c; p, q, r; p', q', r'. Con una leggera trasformazione possiamo far in modo da far comparire in tutte le u, v, w; u', v', w', definite dalle (5), al posto delle p, q, r; p', q', r'. Prendiamo perciò a considerare le equazioni che risultano dal sostituire l'espressione (6) di T nelle ultime equazioni (4') e (4'') cioè:

$$2(a-b)w\frac{d(a-b)}{dt}+(a-b)^2\frac{dw}{dt}+2(a+b)w'\frac{d(a+b)}{dt}+(a+b)^2\frac{dw'}{dt}+$$
$$+p\{(c-a)^2v+(c+a)^2v'\}-q\{(b-c)^2u+(b+c)^2u'\}=0$$

$$2(a-b)w\frac{d(a-b)}{dt}+(a-b)^2\frac{dw}{dt}-2(a+b)w'\frac{d(a+b)}{dt}-(a+b)^2\frac{dw'}{dt}+$$
$$+p'\{(c-a)^2v-(c+a)^2v'\}-q'\{(b-c)^2u-(b+c)^2u'\}=0.$$

Sommando queste due equazioni ed osservando che

$$(c-a)^2-(b-c)^2=(a-b)(a+b-2c)\,,\quad (c+a)^2-(b+c)^2=(a-b)(a+b+2c)$$

si trova, dividendo il risultato per $2(a-b)$,

$$2w\frac{d(a-b)}{dt}+(a-b)\frac{dw}{dt}+(a+b-2c)uv+(a+b+2c)u'v'=0.$$

Se le stesse equazioni invece di sommarle, le avessimo sottratte e avessimo diviso il risultato per $2(a+b)$, avremmo trovato

$$2w'\frac{d(a+b)}{dt}+(a+b)\frac{dw'}{dt}+(a-b-2c)u'v+(a-b+2c)uv'=0.$$

Si possono ottenere con calcolo analogo altre due coppie di equazioni; esse risultano dalle due già scritte scambiando ciclicamente a, b, c; u, v, w.

Le equazioni di Riemann, si presentano perciò nella forma seguente:

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
&(a-b)w^2+(a-c)v^2+(a+b)w'^2+(a+c)v'^2-\frac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2}=\mathrm{A}\,a-\frac{\lambda}{a}\\
&(b-c)u^2+(b-a)w^2+(b+c)u'^2+(b+a)w'^2-\frac{1}{2}\frac{d^2b}{dt^2}=\mathrm{B}\,b-\frac{\lambda}{b}\\
&(c-a)v^2+(c-b)u^2+(c+a)v'^2+(c+b)u'^2-\frac{1}{2}\frac{d^2c}{dt^2}=\mathrm{C}\,c-\frac{\lambda}{c}\\
&2u\frac{d(b-c)}{dt}+(b-c)\frac{du}{dt}+(b+c-2a)vw+(b+c+2a)v'w'=0\\
&2u'\frac{d(b+c)}{dt}+(b+c)\frac{du'}{dt}+(b-c-2a)v'w+(b-c+2a)vw'=0\\
&2v\frac{d(c-a)}{dt}+(c-a)\frac{dv}{dt}+(c+a-2b)wu+(c+a+2b)w'u'=0\\
&2v'\frac{d(c+a)}{dt}+(c+a)\frac{dv'}{dt}+(c-a-2b)w'u+(c-a+2b)wu'=0\\
&2w\frac{d(a-b)}{dt}+(a-b)\frac{dw}{dt}+(a+b-2c)uv+(a+b+2c)u'v'=0\\
&2w'\frac{d(a+b)}{dt}+(a+b)\frac{dw'}{dt}+(a-b-2c)u'v+(a-b+2c)uv'=0
\end{aligned}\right.$$

$$(10')\quad a\,b\,c=\text{cost.}$$

3. Il calcolo che abbiamo fatto per trovare le equazioni (10) è soltanto una generalizzazione di quello fatto da Kirchhoff quando ha voluto dedurre le equazioni del moto di un corpo rigido dal principio di Hamilton. Si può anzi aggiungere che se nei calcoli precedenti si fossero supposti a, b, c costanti e in quiete gli assi ξ', η', ζ' avremmo trovato le equazioni del moto di un ellissoide rigido, mentre se si fossero supposti a, b, c costanti ed in quiete gli assi ξ, η, ζ si sarebbero trovate le equazioni di un moto di fluido in un involucro ellissoidico solido.

Però le equazioni (9) possono dedursi senza grande difficoltà dalle equazioni di Lagrange. Questo calcolo anzi diventa necessario quando si voglia trovare la relazione che lega l'indeterminata λ alla pressione che noi dobbiamo supporre sempre data dall'espressione

$$\overline{\mathrm{P}} = \text{cost.} + \sigma\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2}\right). \tag{11}$$

Vogliamo indicare brevemente questo calcolo. Le equazioni di Lagrange si possono porre facilmente sotto la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\alpha_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\beta_1 + \frac{d^2z}{dt^2}\gamma_1 = \frac{\partial(\mathrm{V} - \overline{\mathrm{P}})}{\partial\xi}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}\alpha_2 + \frac{d^2y}{dt^2}\beta_2 + \ldots = \frac{\partial(\mathrm{V} - \overline{\mathrm{P}})}{\partial\eta}. \tag{12}$$

Basta perciò moltiplicarle successivamente per $\frac{\partial x_0}{\partial\xi}$, $\frac{\partial y_0}{\partial\xi}$, $\frac{\partial z_0}{\partial\xi}$, per $\frac{\partial x_0}{\partial\eta}$, $\frac{\partial y_0}{\partial\eta}$, $\frac{\partial z_0}{\partial\eta}$ e per $\frac{\partial x_0}{\partial\zeta}$, $\frac{\partial y_0}{\partial\zeta}$, $\frac{\partial z_0}{\partial\zeta}$ e sommare ciascuna volta. I primi membri delle equazioni precedenti non sono altro che le componenti dell'accelerazione del punto (x, y, z) secondo gli assi ξ, η, ζ e possono perciò scriversi:

$$\frac{dv_\xi}{dt} - rv_\eta + qv_\zeta, \quad \frac{dv_\eta}{dt} - pv_\zeta + qv_\xi, \quad \frac{dv_\zeta}{dt} - qv_\xi + rv_\eta$$ (1)

dove v_ξ, v_η, v_ζ sono, come nel Cap. I, le componenti della velocità del punto che consideriamo rispetto agli assi corrispondenti. La prima equazione di Lagrange si può porre perciò anche nella forma che segue:

$$\frac{dv_\xi}{dt} - rv_\eta + qv_\zeta = \frac{\partial(\mathrm{V} - \mathrm{P})}{\partial\xi}. \tag{13}$$

Sostituendo in questa equazione e nelle analoghe per V l'espressione (8), per v_ξ, v_η, v_ζ le (21) del Cap I. e notando che è:

$$\frac{d}{dt}\frac{\xi}{a} = r'\frac{\eta}{b} - q'\frac{\zeta}{c}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\eta}{b} = p'\frac{\zeta}{c} - r'\frac{\xi}{a}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\zeta}{c} = q'\frac{\xi}{a} - r'\frac{\eta}{b} \tag{14}$$

(1) Queste formole valgono tutte le volte che si ha da considerare la derivata geometrica di una grandezza geometrica rispetto ad assi mobili. Osservando che la velocità del punto $\frac{\xi}{a}$, $\frac{\eta}{b}$; $\frac{\xi}{c}$ rispetto agli assi ζ', η', ζ' è nulla ne discendono le (14).

si ottengono facilmente le equazioni richieste. La prima di esse è

$$\frac{d^2a}{dt^2} + 2\,b\,r\,r' + 2\,c\,q\,q' - a\,(r^2 + q^2 + r'^2 + q'^2) = 2\,\frac{\sigma}{a} - 2\,a\,\mathrm{A}$$

che può anche scriversi

$$(a-b)\,w^2 + (a-c)\,v^2 + (a+b)\,w'^2 + (a+c)\,v'^2 - \frac{1}{2}\,\frac{d^2a}{dt^2} = a\mathrm{A} - \frac{\sigma}{a}$$

da cui si deduce $\lambda = \sigma$.

Qui cade opportuno di notare che abbiamo potuto applicare il principio di Hamilton per dedurre le equazioni differenziali del nostro problema, soltanto perchè la esistenza di movimenti soddisfacenti alla ipotesi di Dirichlet è stata già provata nel Cap. II. Le ipotesi da noi fatte sulla natura del movimento impongono al fluido dei legami, tali che le coordinate di un elemento ad un tempo qualunque restino sempre funzioni lineari ed omogenee delle coordinate iniziali, e non è affatto evidente che lasciando al fluido tutta la sua libertà esso si muoverebbe nel modo determinato dalle nostre equazioni per una conveniente determinazione dello stato iniziale soltanto. È questa la circostanza a cui il prof. Betti non ha posto mente nel tentare di generalizzare il problema di cui ci occupiamo.

Altra dimostrazione della legge di reciprocità di Dedekind.

4. Dalla forma che hanno le equazioni di Riemann risulta immediatamente che esse restano inalterate cangiando i segni ad u', v', w'. Con questo cambiamento si permutano le p, q, r con le p', q', r' e quindi anche, i coseni α_1, α_2 .... γ_3 con α_1', , $\alpha'_2 \ldots \gamma'_3$. Dalle (19) del Cap. I segue poi che i coefficienti $a_0\,a_{11}$, $b_0\,a_{22}$, $c_0\,a_{33}$ restano inalterati, mentre $b_0\,a_{12}$, $c_0\,a_{13}$, $c_0\,a_{33}$ si scambiano con $a_0\,a_{21}$, $a_0\,a_{31}$, $b_0\,a_{32}$. Le due soluzioni delle equazioni di Riemann che si ottengono con questo scambio determinano due movimenti

tali che ad uno stesso tempo i due ellissoidi hanno gli stessi assi e in punti corrispondenti la pressione ha uno stesso valore, come risulta dal fatto che tanto l'equazione (18) del Cap. II, che determina i semi assi dell'ellissoide, quanto il valore di σ dato dalla (21) dello stesso Cap., restano inalterati con lo scambio indicato. Questi due movimenti si corrispondono secondo la legge di reciprocità di Dedekind.

Risulta pure da questa dimostrazione che quello che c'è di differente nei due movimenti è il diverso ufficio che compiono i due sistemi di assi ξ, η, ζ ; ξ', η', ζ''. Nell'uno gli assi principali dell'ellissoide coincidono continuamente con gli assi ξ, η, ζ ; nell'altro con gli assi ξ', η', ζ'.

Nelle equazioni di Riemann si può cambiare il segno anche a due delle coppie di quantità u, u' ; v, v' ; w, w' senza che esse si alterino. Però questo cambiamento di segno equivale al cambiamento del segno di uno degli assi ξ, η, ζ ; cangiando il segno p. es. ad u, u' ; v, v' si vengono a cambiare i segni di p, p' ; q, q' e ciò equivale a cambiare il segno ad α_3, β_3 γ_3 ; α'_3, β'_3, γ'_3, come risulta dalle formole di Poisson, ossia a cambiare il segno all'asse ζ.

Le due soluzioni dell'equazioni di Riemann che così si ottengono corrispondono a due movimenti simmetricamente eguali di uno stesso ellissoide.

Integrali delle equazioni di Riemann.

5. Per trovare gli integrali delle aree cominciamo a calcolare le componenti della coppia di quantità di moto. Abbiamo

$$\int_S \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} \right) ds =$$

$$= \alpha_1 \int \left(\eta v_\zeta - \zeta v_\eta \right) ds + \alpha_2 \int_S \left(\zeta v_\xi - \xi v_\zeta \right) ds + \alpha_3 \int_S \left(\xi v_\eta - \eta v_\xi \right) ds \ .$$

Ora sostituendo per v_ξ , v_η , v_ζ i loro valori dati dalle (21) del Cap. I, si trova

$$\int_S \left(\eta v_\zeta - \zeta v_\eta \right) ds = \frac{M}{5} \left\{ (bp - cp')\, b + (cp - bp')\, c \right\} =$$

$$= \frac{M}{5} \left\{ (b-c)^2 v + (b-c)^2 v' \right\} = \frac{\partial T}{\partial p}$$

e similmente:

$$\int_S \left(\zeta v_\xi - \xi v_\zeta \right) ds = \frac{\partial T}{\partial q} \ , \quad \int_S \left(\xi v_\eta - \eta v_\xi \right) ds = \frac{\partial T}{\partial r} \ ,$$

donde:

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.}$$

In modo analogo si troverebbe:

$$\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.}$$

$$\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.}$$

Quadrando e sommando queste relazioni risulta l'integrale delle aree sotto la forma

$$(15) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 = \text{cost.}$$

Se poniamo:

$$(b+c)^2 u' + (b-c)^2 u = g \ , \ (c+a)^2 v' + (c-a)^2 v = h \ , \ (a+b)^2 w' + (a-b)^2 w = k$$

la (15) si potrà scrivere anche

$$(15') \qquad g^2 + h^2 + k^2 = \text{cost.}$$

Per trovare gli integrali di Helmholtz si può procedere come segue. Dalle (28′) del Cap. II si ha:

$$\pi = a_{11}\,\pi_0 + a_{12}\,\chi_0 + a_{13}\,\rho_0 \;=\; a_0\,a_{11}\,\frac{\pi_0}{a^0} + b_0\,a_{12}\,\frac{\chi_0}{b_0} + c_0\,a_{13}\,\frac{\rho_0}{c_0}$$

$$\chi = a_{21}\,\pi_0 + a_{22}\,\chi_0 + a_{13}\,\rho_0 \;=\; a_0\,a_{21}\,\frac{\pi_0}{a_0} + b_0\,a_{22}\,\frac{\chi_0}{b_0} + c_0\,a_{23}\,\frac{\rho_0}{c_0}$$

$$\rho = a_{31}\,\pi_0 + a_{32}\,\chi_0 + a_{33}\,\rho_0 \;=\; a_0\,a_{31}\,\frac{\pi_0}{a_0} + b_0\,a_{32}\,\frac{\chi_0}{b_0} + c_0\,a_{33}\,\frac{\rho_0}{c_0}\;.$$

Moltiplicando queste equazioni per α_1, β_1, γ_1 e sommando si trova

$$\pi' = \alpha_1\,\pi + \beta_1\chi + \gamma_1\,\rho = a\,\frac{\pi_0}{a_0}\,\alpha'_1 + a\,\frac{\chi_0}{b_0}\,\beta' + a\,\frac{\rho_0}{c_0}\,\gamma'_1\;,$$

dove π', χ', ρ' dinotano, come al Cap. I, le componenti della rotazione secondo gli assi ξ, η, ζ; per cui tenendo presenti le (22) dello stesso Capitolo, si può scrivere anche

$$\frac{1}{2\,bc}\left\{(b+c)^2\,u' - (b-c)^2\,u\right\} = a\,\frac{\pi_0}{a_0}\,\alpha'_1 + a\,\frac{\chi_0}{b_0}\,\beta'_1 + a\,\frac{\rho_0}{c_0}\,\gamma'_1\;,$$

ossia

$$(b+c)^2\,u' - (b-c)^2\,u = 2\,b_0\,c_0\,\pi_0\,\alpha'_1 + 2\,c_0\,a_0\,\chi_0\,\beta'_1 + 2\,a_0\,b_0\,\rho_0\,\gamma'_1\,.$$

Se poniamo:

$$(b+c)^2u' - (b-c)^2u = g'\;,\quad (c+a)^2v' - (c-a)^2v = h'\;,\quad (a+b)^2w' - (a-b)^2w = k_1$$

$$2\,b_0\,c_0\,\pi_0 = g'_0 \qquad 2\,c_0\,a_0\,\chi_0 = h'_0 \qquad 2\,a_0\,b_0\,\rho_0 = k'_0$$

abbiamo finalmente

$$g' = g'_0\,\alpha'_1 + h'_0\,\beta'_1 + k'_0\,\gamma'_1$$

e così pure:

$$h' = g'_0\,\alpha'_2 + h'_0\,\beta'_2 + k'_0\,\gamma'_2$$

$$k' = g'_0\,\gamma'_3 + h'_0\,\beta'_3 + k'_0\,\gamma'_3\;.$$

Quadrando e sommando queste equazioni si avrà l'integrale cercato sotto la forma:

$$g'^2 + h'^2 + k'^2 = \text{cost.} \tag{16}$$

Dalla forma di questi integrali risulta che in due movimenti di uno stesso ellissoide, che si corrispondono secondo la legge di reciprocità di Dedekind, gli integrale delle aree e quelli di Helmholtz si scambiano il loro significato.

Ricordando l'espressione della forza viva e del potenziale (6), (7) si ha finalmente l'ultimo ingrale proveniente dal principio della conservazione della forza viva:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right\} + \tag{17}$$

$$+(b-c)^2u^2 + (c-a)^2v^2 + (a-b)^2w^2 + (b+c)^2u'^2 + (c+a)^2v'^2 + (a+b)^2w'^2 =$$

$$= 2\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}} + \text{cost.}$$

6. Questi integrali possono dedursi molto facilmente dalle equazioni differenziali stesse del problema.

Così se moltiplichiamo le (4′) rispettivamente per $\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial q}$, $\frac{\partial T}{\partial r}$ e sommiamo, troviamo un'espressione suscettibile di una integrazione immediata e che ci conduce all'integrale delle aree.

Se invece moltiplichiamo le (4″) successivamente per $\frac{\partial T}{\partial p'}$, $\frac{\partial T}{\partial q'}$, $\frac{\partial T}{\partial r'}$ e procediamo allo stesso modo si arriva all'integrale di Helmholtz.

Per ricavare l'integrale delle forze vive poi moltiplichiamo le (4) successivamente per $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ le (4') per p, q, r e le (4'') per p', q', r' e sommiamo ciascuna volta, avremo:

$$-\sum \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \frac{da}{dt}} \frac{da}{dt} + \sum \frac{\partial T}{\partial a} \frac{da}{dt} + \sum \frac{\partial P'}{\partial a} \frac{da}{dt} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial T}{\partial \frac{da}{dt}} \frac{da}{dt}\right) + \sum \frac{\partial T}{\partial \frac{da}{dt}} \frac{d^2a}{dt^2} + \sum \frac{\partial T}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{dP'}{dt} = 0$$

$$\sum p \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{d}{dt}\left(\sum p \frac{\partial T}{\partial p}\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial p} \frac{dp}{dt} = 0$$

$$\sum p' \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p'} = \frac{d}{dt}\left(\sum p' \frac{\partial T}{\partial p'}\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial p'} \frac{dp'}{dt} = 0 .$$

Sommando le 3 relazioni così ottenute, si trova

$$-\frac{d}{dt}\left\{\sum \frac{\partial T}{\partial \frac{\partial a}{dt}} \frac{da}{dt} + \sum \frac{\partial T}{\partial p} p + \sum \frac{\partial T}{\partial p'} p'\right\} +$$

$$+ \sum \frac{\partial T}{\partial \frac{da}{dt}} \frac{d^2a}{dt^2} + \sum \frac{\partial T}{\partial a} \frac{da}{dt} + \sum \frac{\partial T}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \sum \frac{\partial T}{\partial p'} \frac{dp'}{dt} + \frac{dP'}{dt} = 0 .$$

Siccome ora T è una funzione omogenea del secondo grado in $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$; p, q, r ; p', q', r' le prime tre sommatorie formano $-2\frac{dT}{dt}$, mentre le altre tre formano $\frac{dT}{dt}$, per cui l'equazione precedente ci da senz'altro

$$\frac{d}{dt}(T - P') = 0 .$$

Paragone fra le equazioni di Dirichlet e quelle di Riemann.

7. Cerchiamo ora, dei due sistemi di equazioni differenziali, (6) del Cap. II e (10) del presente, quale offre maggiori vantaggi per la trattazione di casi speciali.

Poniamo mente, perciò, al fatto che le equazioni di Dirichlet formano un sistema del sedicesimo ordine, poichè in esse si possono far comparire le derivate seconde di 8 variabili soltanto, eliminandone una per mezzo dell'equazione dell'incompressibilità. Di questo sistema si conoscono 7 integrali, sicchè prima di ridurre il problema alle quadrature bisogna integrare ancora un sistema del 9° ordine.

Le equazioni di Riemann, invece, formano un sistema del 10° ordine e di esso conosciamo tre integrali, per cui resta solo da integrare un sistema del 7° ordine. Ma, per la soluzione completa del problema, bisogna determinare ancora i coseni:

(18) $$\alpha_1 , \alpha_2 \ldots \gamma_3 ; \alpha'_1 , \alpha'_2 \ldots \gamma'_3 .$$

Siccome poi questa determinazione dipende da due quadrature, come ora mostreremo, possiamo dire che la trasformazione operata da Riemann delle equazioni di Dirichlet equivale alla ricerca di due integrali primi.

Per la trattazione di casi speciali, dunque, le equazioni di Riemann sono da preferirsi a quelle di Dirichlet, quantunque per ricerche generali, a causa della loro simmetria, possono essere utili anche quest'ultime.

8. Per trattare ora della determinazione dei coseni (18) osserviamo che le tre terne di coseni:

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 ; \beta_1 , \beta_2 , \beta_3 ; \gamma_1 , \gamma_2 , \gamma_3$$

sono tre sistemi d'integrali particolari del sistema di equazioni:

(19) $$\frac{d\theta_1}{dt} = q\theta_3 - r\theta_2 , \quad \frac{d\theta_1}{dt} = r\theta_1 - p\theta_3 , \quad \frac{d\theta_3}{dt} = p\theta_2 - q\theta_1 ;$$

mentre le tre terne:

$$\alpha'_1\ ,\ \alpha'_2\ ,\ \alpha'_3\ ;\ \beta'_1\ ,\ \beta'_2\ ,\ \beta'_3\ ;\ \gamma'_1\ ,\ \gamma'_2\ ,\ \gamma'_3\ ,$$

sono tre sistemi d'integrali particolari del sistema di equazioni:

$$(20)\qquad \frac{d\theta_1}{dt}=q'\theta_3-r'\theta_2\ ;\ \frac{d\theta_2}{dt}=r'\theta_1-p'\theta_3\ ,\ \frac{d\theta_3}{dt}=p'\theta_2-q'\theta_1\ .$$

Di ciascuno di questi sistemi di equazioni si conosce un sistema di integrali particolari. Infatti ogni sistema di soluzioni di (19) rappresenta delle quantità proporzionali ai coseni di direzione che una retta fissa nello spazio forma con gli assi ξ, η, ζ e viceversa e quindi g, h, k che sono le componenti della coppia di quantità di moto rispetto agli assi ξ, η, ζ soddisfano alle (19).

Similmente g', h', k' sono un sistema d'integrali particolari di (20) perchè, come lo mostrano gli integrali di Helmholtz, la retta che fa con gli assi ξ', η', ζ' angoli i cui coseni sono proporzionali a g', h', k' si muove rigidamente unita agli assi ξ, η, ζ (1) e ogni soluzione di (20) rappresenta quantità proporzionali ai coseni che una retta rigidamente unita al sistema ξ, η, ζ forma con gli assi ξ', η', ζ'.

Introduciamo, ora un nuovo sistema di assi X, Y, Z congruente col sistema x, y, z ed in modo che l'asse Z coincida con l'asse della coppia di quantità di moto. La posizione del primo sistema rispetto al secondo dipende dalla condizione iniziale del movimento e deve considerarsi come nota. Basterà allora, per conoscere i coseni degli angoli che formano i sistemi x, y, z ; ξ, η, ζ, determinare i coseni degli angoli che gli assi ξ, η, ζ formano con gli assi X, Y, Z.

Indicandoli con gli stessi simboli, per brevità, poniamo:

$$\gamma_1=\cos f\ \mathrm{sen}\,\theta\ ,\ \gamma_2=\mathrm{sen}\,f\ \mathrm{sen}\,\theta\ ,\ \gamma_3=\cos\theta$$
$$\alpha_3=\cos\varphi\ \mathrm{sen}\,\theta\ ,\ \beta_3=\mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,\theta\ ,\ \gamma_3=\cos\theta\ .$$

(1) I coseni che questa retta fa con gli assi ξ, η, ζ sono proporzionali a $g'\alpha'_1+h'\alpha'_2+k'\alpha'_3=g'_0, h'_0, k'_0$.

È noto che tutti i coseni $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \gamma_3$ saranno conosciuti quando avremo determinato φ, f, θ.

Ora, evidentemente, si ha:

$$\gamma_1:\gamma_2:\gamma_3=g:h:k$$

per cui:

$$\cos\theta=\gamma_3=\frac{k}{\sqrt{g^2+h^2+k^2}}\ ,\ \mathrm{tang}\,f=\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\frac{h}{g}\ .$$

Da $\mathrm{tang}\,\varphi=\dfrac{\beta_3}{\alpha_3}$ si ottiene poi, servendoci delle (19)

$$d\varphi=\frac{\alpha_3\,d\beta_3-\beta_3\,d\alpha_3}{1-\gamma_3^2}=\frac{\gamma_1 p+\gamma_2 q}{1-\gamma_3^2}\,dt=\frac{p\cos f+q\,\mathrm{sen}\,f}{\mathrm{sen}\,\theta}\,dt$$

onde

$$\varphi=\int\frac{p\cos f+q\,\mathrm{sen}\,f}{\mathrm{sen}\,\theta}\,dt\ .$$

Per determinare gli altri coseni $\alpha'_1 \ldots \gamma'_3$ si procederà analogamente introducendo un altro sistema di assi Ξ, H, Z rigidamente legati al sistema ξ, η, ζ ed in modo che l'asse Z coincida con la retta i cui coseni degli angoli che forma con gli assi ξ', η', ζ' sono proporzionali a g', h', k'.

CAPITOLO IV.

Casi in cui la forma dell'ellissoide e la condizione di movimento presentano completa simmetria intorno ad un asse

1. Supponiamo ora che l'ellissoide limitante la massa fluida sia di rotazione ed intorno al suo asse di simmetria il movimento si mantenga pure continuamente simmetrico.

Se l'asse di rotazione dell'ellissoide è l'asse z dovremo supporre allora che sia $z \equiv \zeta \equiv \zeta'$. L'ipotesi che gli assi ζ e ζ' coincidano continuamente con l'asse z, a cui siamo condotti dall'altra che il movimento debba mantenersi simmetrico intorno a quest'asse, richiede:

$$p = p' = q = q' = 0 \text{ ossia } u = u' = v = v' = 0. \tag{1}$$

Potendo poi anche osservare che gli altri due assi principali dell'ellissoide, avendo una posizione arbitraria nel piano $x\ y$, si possono supporre in quiete, si può aggiungere anche la condizione:

$$r = 0 \ , \ w = -\, w' = \frac{\rho}{2} \ . \tag{2}$$

Le equazioni di Riemann, quando in esse si portano le ipotesi (1), (2) e l'altra:

$$a = b \tag{3}$$

diventano:

$$\tag{4} \left\{ \begin{aligned} a\rho^2 - \frac{d^2a}{dt^2} &= 2\,\mathrm{A}\,a - 2\,\frac{\sigma}{a} \\ -\frac{d^2c}{dt^2} &= 2\,\mathrm{C}\,c - 2\,\frac{\sigma}{c} \\ a^2\rho = \text{cost.} \ &, \ a^2c = \text{cost.}\ ^{(1)}. \end{aligned} \right.$$

Per effettuare l'integrazione di questo sistema riferiamoci all'equazione delle forze vive che, nel nostro caso, si riduce a

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dc}{dt}\right)^2 + a^2\rho^2 = 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{c^2}}} + \text{cost.} \tag{5}$$

Poniamo:

$$a^2c = \Theta^3 \ , \ \frac{c}{\Theta} = \alpha \tag{6}$$

$$\omega = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{c}{c_0} = \frac{\omega_0}{c_0}\,c = \frac{\omega_0}{\alpha_0}\,\alpha \ , \tag{7}$$

dove l'indice o al piede di ciascuna quantità indica che essa viene considerata nell'istante iniziale. Con queste posizioni si ha, cambiando s in $\Theta^2 s$:

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\sqrt{1+\frac{s}{c^2}}} = \Theta^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(1+\alpha s)\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^2}}}$$

(1) Le ultime due equazioni ci danno immediatamente $\frac{\rho}{c} = $ cost. caso particolare del teorema generale dimostrato in fine al Cap. II.

e quindi la (5) si può scrivere:

$$(8)\qquad \left(2+\frac{1}{\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+8\pi\left\{\frac{\omega_0^2}{\alpha_0^2}\,\alpha-\int_0^\infty\frac{ds}{\left(1+\alpha s\right)\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^2}}}\right\}=\text{cost.}$$

Trovato α da questa equazione, le (6), (7) danno c, a e ρ.

Dividendo poi la prima delle (4) per a, la seconda per $2c$ e sommando, facendo uso dell'equazione $a^2 c = \text{cost.}$ derivata logaritmicamente due volte, si ottiene per σ, che solo resta da determinare:

$$\left(\frac{2}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\sigma=2\pi-\rho^2+\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{a}\frac{d^2a}{dt^2}+\frac{1}{c}\frac{d^2c}{dt^2}\right\}=$$

$$=2\pi-\rho^2+\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{a^2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right\}=2\pi-\rho^2+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{c}\frac{dc}{dt}\right)^2$$

la quale equazione, ponendo mente a (6) e (7), si può anche scrivere:

$$(9)\qquad \frac{\sigma}{\Theta^2}\left(2\alpha+\frac{1}{\alpha^2}\right)=2\pi\left(1-\omega^2\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right)^2.$$

2. Prima di passare allo studio delle particolarità che offrono i nostri movimenti, premettiamo le considerazioni che seguono. Ponendo:

$$(\alpha)\qquad f(\alpha)=\int_0^\infty\frac{ds}{(1+\alpha s)\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^2}}}$$

e cambiando nell'integrale s in $\frac{s}{\alpha}$, si trova:

$$(\beta)\qquad f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\frac{ds}{(1+s)\sqrt{1+\frac{s}{\alpha^3}}}=\sqrt{\alpha}\int_0^\infty\frac{ds}{(1+s)\sqrt{\alpha^3+s}};$$

mentre cambiando s in $\alpha^2 s$, si ha:

$$(\gamma)\qquad f(\alpha)=\alpha^2\int_0^\infty\frac{ds}{(1+\alpha^3 s)\sqrt{1+s}}=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty\frac{ds}{\left(\frac{1}{\alpha^3}+s\right)\sqrt{1+s}}.$$

Dalla forma (β) di $f(\alpha)$, poichè il secondo fattore resta finito anche per $\alpha=0$, si deduce che $f(0)=0$; mentre dalla forma (γ), poichè il secondo fattore resta finito anche per $\alpha=\infty$ si deduce che $f(\infty)=0$.

Da una qualunque delle forme date ad $f(\alpha)$ risulta poi immediatamente:

$$f(1)=\int_0^\infty\frac{ds}{(1+s)^{\frac{3}{2}}}=2.$$

La derivata di $f(\alpha)$ è data da

$$f'(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha^3}-1\right)\int_0^\infty\frac{s\,ds}{(1+\alpha s)^2\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3}}$$

e si ha:

$$f'(0)=\lim_{\alpha=0}\frac{1-\alpha^3}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty\frac{s\,ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^3}}=\infty$$

$$f'(1)=0.$$

Quando α varia con continuità da 0 ad 1, $f'(\alpha)$ è positiva e decresce costantemente da $+\infty$ a 0, poichè la derivata di

$$f'(\alpha)=\frac{1-\alpha^3}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty\frac{s\,ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^3}}$$

cioè:

$$-\frac{5\,\alpha^3+1}{2\,\alpha^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^3}} - \frac{9}{2}\,(1-\alpha^3)\,\alpha^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^5}}$$

è negativa per α compresa fra 0 ed 1. $f'(\alpha)$ è invece negativa per $\alpha > 1$.

Dunque quando α cresce da 0 ad 1, $f(\alpha)$ cresce continuamente da 0 a 2, per questo valore diventa massima, indi decresce continuamente un'altra volta fino a 0.

Se k è una costante qualunque positiva l'equazione $f(\alpha) = k$, ha perciò due radici α', α'' tali che $0 \leq \alpha' < 1 < \alpha'' \leq \infty$ quando $0 \leq k < 2$, le quali coincidono nel limite $k = 2$ e spariscono per $k > 2$. L'equazione $f'(\alpha) = k$ ha invece sempre una sola radice.

Riguardo alla funzione

$$\psi(\alpha) = f'(\delta)\,\alpha - f(\alpha),$$

dove δ è la radice dell'equazione

$$f'(\alpha) = \frac{\omega_0^2}{\alpha_0^2} \text{ e quindi } 0 < \delta < 1,$$

osserviamo che la derivata

$$\psi'(\alpha) = f'(\delta) - f'(\alpha)\ ,$$

è negativa per α compreso fra 0 e δ, per $\alpha = \delta$ si annulla ed è positiva per $\alpha < \delta$. Perciò quando α cresce da 0 a δ, $\psi(\alpha)$ diminuisce costantemente da 0 a $\psi(\delta)$, quivi acquista il suo minimo valore, per crescere poi continuamente insieme ad α sino all'infinito. L'equazione $\psi(\alpha) = -k$, con $0 \geq -k > \psi(\delta)$, ammette due radici α', α'' tali che $0 \geq \alpha' > \delta > \alpha''$ le quali coincidono per $-k = \psi(\delta)$. Invece l'equazione $\psi(\alpha) = k$, con $k > 0$, ha una sola radice maggiore di δ.

Ci sarà pure utile aggiungere qualche considerazione sulla funzione

$$\alpha^2 f'(\alpha) = \frac{1-\alpha^3}{\alpha}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+\alpha s)^2\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3}} = \alpha^{\frac{3}{2}}(1-\alpha^3)\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^3}}$$

Per α compreso fra 0 e 1, $\alpha^2 f'(\alpha)$ è positiva, si annulla per $\alpha = 1$ e, come risulta dalla seconda forma in cui si è messa, anche per $\alpha = 0$. La funzione $\alpha^2 f'(\alpha)$ deve dunque avere un massimo almeno nell'intervallo 0, 1. Dimostriamo che ne ha uno solo. La sua derivata è

$$\frac{3}{2}\,\alpha^{\frac{1}{2}}\,(1-3\,\alpha^3)\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^5}} - 3\,\alpha^{\frac{7}{2}}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^5}}$$

che si può scrivere

$$\frac{3}{2}\alpha^{\frac{7}{2}}\left\{\left(\frac{1}{\alpha^3}-3\right)\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^5}} - 2\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^5}}\right\}.$$

Quando α cresce da 0 ad 1, $\left(\frac{1}{\alpha^3}-3\right)\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^5}}$ diminuisce da $+\infty$ a $-2\int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(1+s)^{\frac{9}{2}}}$, mentre $2\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+s)^2\sqrt{(\alpha^3+s)^5}}$ diminuisce da $2\int_0^\infty \frac{ds}{(1+s)^2\sqrt{s^5}}$ a $2\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+s)^{\frac{9}{2}}}$; vi sarà quindi un solo valore di α fra 0 ed 1 per cui le due espressioni diventano eguali e la derivata si annulla.

L'equazione $\alpha^2 f'(\alpha) = k$, con $0 \leq k < 2$, ha perciò due radici che coincidono per $k = 2$ e spariscono per $k > 2$.

Calcolando questo valore si trova $\alpha = 0,135\ldots.$ e pel corrispondente valore della funzione $\alpha^2 f'(\alpha) = 0,2246\ldots.$

3. Dopo ciò passiamo a studiare dapprima il caso in cui le particelle del fluido non rotano e quindi sia $\omega = \omega_0 = 0$. La (8) diventa allora:

$$(10) \quad \left(2+\frac{1}{\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 8\pi\left\{f(\alpha_0) - f(\alpha)\right\} = \left(2+\frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2.$$

Se il fluido comincia il suo movimento dal riposo sarà anche $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = 0$ per cui la (10) si semplificherà ancora come segue:

$$(10') \quad \left(2+\frac{1}{\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 8\pi\left\{f(\alpha_0) - f(\alpha)\right\} = 0.$$

Questa equazione da con una quadratura t in funzione di α,

$$(11) \quad t = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{\alpha^3}}}{\sqrt{8\pi\{f(\alpha) - f(\alpha_0)\}}}\, d\alpha\,,$$

ed invertendo α in funzione di t.

L'integrale (11) è finito, poichè la funzione sotto il segno integrale al limite inferiore diventa infinita soltanto d'ordine $\frac{1}{2}$.

Affinchè il movimento sia reale, risulta da (10') o da (11) che dev'essere:

$$(12) \quad f(\alpha) \geq f(\alpha_0)\,.$$

Tenendo presenti le proprietà della funzione $f(\alpha)$, possiamo fare sul valore di α_0 tre ipotesi:

1.ª $\quad \alpha_0 = 1\,.$

A questo valore di α_0 corrisponde il massimo di $f(\alpha)$ e quindi affinchè (12) sia verificata, dev'essere sempre:

$$f(\alpha) = f(\alpha_0) \quad , \quad \alpha = \alpha_0 \quad , \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0\,.$$

Il fluido è in equilibrio e la sua forma esterna è quella di una sfera.

2.ª $\quad 0 \leq \alpha_0 < 1\,.$

L'equazione $f(\alpha) = f(\alpha_0)$ ha in questo caso due radici α_0, α_1, tali che

$$0 \leq \alpha_0 < 1 < \alpha_1\,.$$

A causa della (12) α può variare soltanto fra σ_0 e α_1, quindi α crescerà a partire da α_0 fino ad α_1, pel quale valore acquista il suo massimo, essendo $\frac{d\alpha}{dt}$ nulla e $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ negativa, come risulta da (10') e dalla equazione:

$$(13) \quad 2\left(2+\frac{1}{\alpha_3}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{3}{\alpha^4}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 8\pi f'(\alpha)$$

derivata della (10') stessa. Acquistato questo valore, α comincia a decrescere fino ad α_0 in cui acquista il minimo valore per poi ritornare ad aumentare. L'ellissoide oscilla continuamente fra due configurazioni determinate e cominciando coll'essere schiacciato per $\alpha = \alpha_0$ passa alternativamente per la forma sferica e per la forma di un ellissoide allungato [1]. Il tempo che impiega a descrivere una oscillazione è

---

[1] Nel caso limite di $\alpha_0 = 0$ l'ellissoide comincia coll'essere un disco circolare e termina per essere un cilindro circolare infinitamente lungo. In questo caso T è infinito.

$$\mathrm{T} = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{\alpha^3}}}{\sqrt{8\pi\{f(\alpha) - f(\alpha_0)\}}} \, d\alpha$$

3.ª $\alpha_0 > 1$.

Questo caso non differisce dal precedente che per lo scambio di α_0 in α_1. Il movimento consisterà in vibrazioni isocrone e l'ellissoide, cominciando il suo movimento dall'essere allungato, passa alternativamente per la forma sferica e per quella di un ellissoide schiacciato.

Nel caso generale in cui $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ è diverso da zero la (10) ci da per la realità del movimento:

$$8\pi\left\{f(\alpha) - f(\alpha_0)\right\} + \left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 \geq 0$$

ossia

$$8\pi f(\alpha) \geq 8\pi f(\alpha_0) - \left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 . \tag{13}$$

Se

$$8\pi f(\alpha_0) - \left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 \geq 0$$

l'equazione

$$8\pi f(\alpha) = 8\pi f(\alpha_0) - \left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 \tag{14}$$

è soddisfatta da due valori α', α'' di a tali che $0 < \alpha' < 1 < \alpha''$. Il moto consiste, come prima, in oscillazioni isocrone ed α', α'' hanno l'ufficio di α_0, α_1. La sola differenza è che nel primo caso per tempo iniziale si sceglie una di quelle configurazioni in cui $\frac{d\alpha}{dt}$ si annulla.

Se poi

$$8\pi f(\alpha_0) - \left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 < 0$$

l'equazione (14) non ha radici, $\frac{d\alpha}{dt}$ non si annulla mai, conserva un segno costante, per cui l'ellissoide si allunga o si schiaccia indefinitamente secondo che il segno di $\frac{d\alpha}{dt}$ è positivo o negativo.

Questi movimenti sono tutti fisicamente possibili, senza supporre l'esistenza di una pressione esterna alla superficie dell'ellissoide.

4. Osserviamo ancora che nel caso in cui le particelle di fluido non rotano, ma l'ellissoide può essere anche ad assi disuguali, l'equazioni del problema si riducono a:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2} = a\mathrm{A} - \frac{\sigma}{a}, \quad -\frac{1}{2}\frac{d^2b}{dt^2} = b\mathrm{B} - \frac{\sigma}{b}, \quad -\frac{1}{2}\frac{d^2c}{dt^2} = c\mathrm{C} - \frac{\sigma}{c},$$

$$a\,b\,c = \text{cost.}$$

e coincidono con le equazioni differenziali del moto del punto (a, b, c) di massa 1, soggetto a restare sulla superficie $abc = \text{cost.}$ quando le forze esterne ammettono un potenziale 2H. Il problema non si riduce alle quadrature.

5. Consideriamo ora il caso in cui le particelle di fluido rotano e quindi, tenendo presenti le notazioni introdotte nel §. 2, si abbia:

$$\left(2 + \frac{1}{\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 8\pi\psi(\alpha) = \left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 + 8\pi\psi(\alpha_0) \tag{15}$$

In questo caso per la realità del movimento si richiede che sia

$$\psi(\alpha) \leq \psi(\alpha_0) + \frac{1}{8\pi}\left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 . \tag{16}$$

$\psi(\alpha)$, e quindi α, non può crescere perciò indefinitamente.

Risulta quindi che l'esistenza del più piccolo movimento di rotazione delle particelle fluide impedisce un illimitato allungamento dell' ellissoide.

Ponendo mente alle proprietà di $\psi(\alpha)$ anche qui possiamo fare tre ipotesi:

1.ª $$\psi(\alpha_0) + \frac{1}{8\pi}\left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 = \psi(\delta) .$$

Essendo $\psi(\delta)$ il minimo valore che può acquistare $\psi(\alpha)$ deve essere:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = 0 \ , \ \psi(\alpha_0) = \psi(\delta) \ , \ \alpha_0 = \delta \ ,$$

e la (16) ci mostra che dev' essere continuamente,

$$\psi(\alpha) = \psi(\delta) \ , \ \alpha = \delta \ , \ \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = 0$$

Siccome $\delta < 1$ si deduce che, in questo caso, il movimento consiste nella rotazione uniforme, come un corpo rigido, di un ellissoide schiacciato intorno all' asse di rivoluzione. Questo è il caso studiato da Maclaurin. La relazione $\frac{\omega_0^2}{\alpha_0^2} = f'(\delta)$ ci da, togliendo l'indice zero:

$$\omega^2 = \frac{\rho^2}{2\pi} = \alpha^2 f'(\alpha) \ . \tag{17}$$

Ad ogni valore di α corrisponde, quindi, a meno del segno, un solo valore di ρ; invece come risulta dalle proprietà della funzione $\alpha^2 f'(\alpha)$, ad ogni valore di $\omega^2 < 0,2246$ ..... corrispondono due valori di α e quindi due ellissoidi distinti di Maclaurin che possono rotare con la stessa velocità angolare. Questi due ellissoidi coincidono in un solo quando ω^2 raggiunge il limite 0, 2246... e non esistono più quando lo supera.

Essendo $\omega < 1$ la (9) mostra che σ è positivo e che quindi il moto è possibile fisicamente senza che alla superficie dell'ellissoide si eserciti alcuna pressione esterna.

2.ª $$\psi(\delta) < \psi(\alpha_0) + \frac{1}{8\pi}\left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 \leq 0$$

In questo caso l' equazione

$$\psi(\alpha) = \psi(\alpha_0) + \frac{1}{8\pi}\left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 \tag{18}$$

è soddisfatta da due valori distinti α', α'' di α tali che $0 \leq \alpha' < \delta < \alpha''$.

Poichè $\psi(\alpha_0) < \psi(\alpha') = \psi(\alpha'')$, α_0 è compreso fra α' e α''; se $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ è positivo α cresce da α_0 ad α'', quivi acquista il suo massimo valore indi decresce fino ad α' per tornare poi a crescere un' altra volta. Se invece $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ è negativo, α diminuisce fino ad α' per poi tornare a crescere. L' ellissoide oscilla continuamente fra due sue configurazioni determinate [1].

Se all'epoca del massimo allungamento dell' ellissoide, la rotazione supera un certo valore, per la possibilità fisica del movimento si richiede che alla superficie dell' ellissoide si eserciti una pressione abbastanza forte.

3.ª $$\psi(\alpha_0) + \frac{1}{8\pi}\left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 > 0 .$$

Se si verifica infine questa condizione l'equazione (18) ammette una sola radice $\alpha' > \alpha_0$. Se $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ è negativo α diminuisce co-

---

[1] Nel caso in cui $\alpha' = 0$ l'ellissoide però finisce con lo schiacciarsi indefinitamente.

stantemente a cominciare da α_0; se invece $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ è positivo α cresce da α_0 ad α' in cui acquista il suo valore massimo, indi diminuisce indefinitivamente. L'ellissoide, quindi, o dal principio del movimento o dopo il decorso di un tempo finito si schiaccia indefinitamente.

Anche qui vale, rispetto alla pressione, l'osservazione fatta nel caso 2.°

CAPITOLO V.

Casi in cui la forma dell'ellissoide resta costantemente la stessa

1. Cominciamo prima di tutto a mostrare che il valore di σ si può esprimere per mezzo di a, b, c soltanto. Perciò moltiplichiamo la prima delle equazioni (10) del Cap. III per a, la seconda per b e la terza per c e sommiamo. Avremo così:

$$Aa^2+Bb^2+Cc^2-3\sigma=(a-b)^2w^2+(a+b)^2w'^2+(a-c)^2v^2+(a+c)^2v'^2+$$
$$+(b-c)^2u^2+(b+c)^2u'^2-\frac{1}{2}\left(a\frac{d^2a}{dt^2}+b\frac{d^2b}{dt^2}+c\frac{d^2c}{dt^2}\right)$$

che, facendo uso dell'equazione delle forze vive, si può ridurre anche ad

$$Aa^2+Bb^2+Cc^2-3\sigma=$$
$$=\text{cost.}+2H-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right\}-\frac{1}{2}\left(a\frac{d^2a}{dt^2}+b\frac{d^2b}{dt^2}+c\frac{d^2c}{dt^2}\right)$$
$$=\text{cost.}+2H-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}(a^2+b^2+c^2)\ .$$

Se poi si osserva che è

$$Aa^2+Bb^2+Cc^2=H\ ,$$

l'equazione precedente si può scrivere nel modo più semplice:

$$(1) \qquad 3\sigma = \text{cost.} - \mathrm{H} + \frac{1}{4}\frac{d^2}{dt^2}(a^2 + b^2 + c^2) \; .$$

Risulta quindi che se a, b, c sono costanti, ossia se la forma dell'ellissoide si mantiene sempre la medesima, è costante anche σ.

2. In ciò che segue si supporrà sempre escluso il caso in cui tutte le u, u' ; ..... w' si annullino contemporaneamente, caso che, del resto, è stato considerato nel Cap. precedente.

Osserviamo poi che se è continuamente $a = b = c$ non si può avere che una sfera in riposo. L'equazione dell'incompressibilità ci mostra che a è costante. Siccome poi gli assi principali hanno una posizione indeterminata essi si possono supporre in quiete, per cui $p = q = r = 0$ ossia $u = -u'$, $v = -v'$, $w = -w'$. Le ultime sei equazioni (10) del Cap. III ci danno allora:

$$4 a v' w' = 0 \quad , \quad 4 a w' u' = 0 \quad , \quad 4 a u' v' = 0 \quad ,$$

da cui segue p. es. $u' = v' = 0$. La terza mostra quindi che $\sigma = a^2 \mathrm{A}$ e le due prime, che diventano identiche, danno $2 a w'^2 = 0$. Dunque è $a = b = c =$ cost., $u = u' = v = v' = w = w' = 0$. Intenderemo escluso anche questo caso.

Ciò posto dimostriamo che, nel caso in cui nessuna delle $u, u' \ldots w'$ si annulla, l'ipotesi che a, b, c siano costanti, richiede che tali siano anche u, u', ... w'.

Se a, b, c sono costanti, la prima delle (10) del Cap. III diventa

$$(a-b) w^2 + (a-c) v^2 + (a+b) w'^2 + (a+c) v'^2 = \text{cost.}$$

la quale derivata rispetto a t e facendo uso dei valori:

$$(a-b)\frac{dw}{dt} \;,\; (a+b)\frac{dw'}{dt} \;,\; \ldots\ldots$$

ricavati dalle ultime 6, diventa

$$(a+b-2c)uvw + (a+b+2c)u'v'w - (c+a-2b)uvw - (c+a+2b)u'vw' +$$
$$+ (a-b-2c)u'vw' + (a-b+2c)uv'w' + (c-a-2b)w'uv' + (c-a+2b)wu'v' = 0$$

ossia, riducendo,

$$(b-c)\, u\,(vw - v'w') + (b+c)\, u'\,(v'w - vw') = 0 \; .$$

Si ottengono due equazioni analoghe scambiando ciclicamente a, b, c ; u, v, w ; u', v', w', sicchè:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(b-c)\; u\; (vw - v'w') \;+\; (b+c)\; u'\; (u'w - vw') = 0 \\ &(c-a)\; v\; (wu - w'u') \;+\; (c+a)\; v'\; (w'u - wu') = 0 \\ &(a-b)\; w\; (uv - u'v') \;+\; (a+b)\; w'\; (u'v - uv') = 0 \; . \end{aligned} \right.$$

Se ora nessuna delle u, u' ; .... w' è nulla le (2) possono mettersi sotto un'altra forma. Le ultime due, ordinate rispetto ad u ed u', si possono scrivere:

$$\{ (c-a)vw + (c+a)v'w' \} u - \{ (c-a)vw' + (c+a)v'w \} u' = 0$$

$$\{ (a-b)vw - (a+b)v'w' \} u - \{ (a-b)v'w - (a+b)vw' \} u' = 0$$

e poichè u e u' si suppongono differenti da zero il determinante delle due equazioni in u e u' dev'esser nullo, il che ci porta all'equazione

$$-2a(c-a)v^2wu' - 2a(a-b)vw^2v' - 2a(a+b)v'w'^2v + 2a(c+a)v'^2ww' = 0$$

che divisa per $2\, a\, v\, v'\, w\, w'$ si può scrivere

$$(a-c)\frac{v}{v'} + (a+c)\frac{v'}{v} = (a-b)\frac{w}{w'} + (a+b)\frac{w'}{w} \; .$$

Se si tien conto delle altre due equazioni analoghe che si deducono col solito scambio circolare, possiamo porre:

$$(3)\quad \begin{cases} (a-c)\dfrac{v}{v'}+(a+c)\dfrac{v'}{v}=(a-b)\dfrac{w}{w'}+(a+b)\dfrac{w'}{w}=2\,a' \\[2ex] (b-a)\dfrac{w}{w'}+(b+a)\dfrac{w'}{w}=(b-c)\dfrac{u}{u'}+(b+c)\dfrac{u'}{u}=2\,b' \\[2ex] (c-b)\dfrac{u}{u'}+(c+b)\dfrac{u'}{u}=(c-a)\dfrac{v}{v'}+(c+a)\dfrac{v'}{v}=2\,c' \end{cases}$$

e di queste equazioni una è conseguenza delle altre.

Per dimostrare che le u, u' ; .... w' sono costanti, basterebbe dimostrare che tali sono a', b', c' poichè allora dall'equazioni precedenti ne risulterebbe subito la costanza delle quantità $\dfrac{u}{u'}, \dfrac{u'}{u}$, ecc. Dalle (3) si deduce facilmente:

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \quad , \quad b'^2 - c'^2 = b^2 - c^2 \; .$$

Possiamo perciò porre:

$$(4)\qquad a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2 = \vartheta$$

e sarà dimostrato che a', b', c' sono costanti, quando avremo dimostrato che tale è ϑ.

Se ora poniamo:

$$\lambda = vv' + ww' \quad , \quad \mu = ww' + uu' \quad , \quad \nu = uu' + vv'$$

le prime tre equazioni (10) del Cap. III si scrivono semplicemente:

$$(5)\qquad 2\lambda a' = \text{cost.} \quad , \quad 2\mu b' = \text{cost.} \quad , \quad 2\nu c' = \text{cost.}$$

e queste costanti sono nulle soltanto nel caso di una sfera in equilibrio.

Dagli integrali delle aree e da quelli di Helmholtz, se poniamo:

$$g^2 + h^2 + k^2 = \Omega^2 \quad , \quad g'^2 + h'^2 + k'^2 = \Omega'^2 \; ,$$

si deduce, sottraendole,

$$\frac{1}{4}(\Omega^2 - \Omega'^2) = (b^2-c^2)^2 uu' + (c^2-a^2)^2 vv' + (a^2-b^2)^2 ww' =$$
$$= (a^2-b^2)(a^2-c^2)(vv'+ww') + (b^2-a^2)(b^2-c^2)(ww'+uu') +$$
$$+ (c^2-a^2)(c^2-b^2)(uu'+vv')$$

e quindi:

$$(6)\quad (a^2-b^2)(a^2-c^2)\lambda + (b^2-a^2)(b^2-c^2)\mu + (c^2-a^2)(c^2-b^2)\nu = \frac{1}{4}(\Omega^2 - \Omega'^2)$$

equazione che è un'indennità soltanto nel caso in cui $a=b=c$. In ogni altro caso rappresenta una relazione effettiva fra λ, μ e ν.

Ora le (4) e (5) permettono di esprimere λ, μ, ν per mezzo di ϑ e di costanti e queste espressioni sostituite nelle (6) mostrano che ϑ è realmente costante.

3. Portiamo ora nelle solite equazioni (10) del Cap. III le ipotesi che a, b, c ; u, v, w ; u', v', w' siano costanti. La 4ª e 5ª ci danno:

$$(b+c-2a)vw + (b+c+2a)v'w' = 0, (b-c-2a)v'w + (b-c+2a)vw' = 0$$

e affinchè queste due equazioni possano coesistere, dev' essere

$$(7)\begin{vmatrix} (b+c-2a)w & (b+c+2a)w' \\ (b-c+2a)w' & (b-c-2a)w \end{vmatrix} = \{(b-2a)^2 - c^2\}w^2 - \{(b+2a)^2 - c^2\}w'^2 = 0 .$$

Affinchè invece possano coesistere le due equazioni:

$$(c+a-2b)wu + (c+a+2b)w'u' = 0 \; , \; (c-a-2b)w'u + (c-a+2b)wu' = 0 \; ,$$

che risultano dalla 6ª e 7ª delle stesse equazioni si richiede che sia analogamente

$$\{c^2-(a-2b)^2\}\,w^2-\{c^2-(a+2b)^2\}\,w'^2=0 \tag{8}$$

Le (7), (8) poi considerate come equazioni lineari in w^2 e w'^2 per coesistere devono essere tali che il loro determinante

$$\begin{vmatrix} (b-2a)^2-c^2 \,, & (b+2a)^2-c^2 \\ c^2-(a-2b)^2 \,, & c^2-(a+2b)^2 \end{vmatrix} = 24\,a\,b\,(b^2-a^2)$$

si annulli, per cui $a=b$. Similmente si troverebbe $b=c$.

Dunque finchè le u, u' ; v, v' ; w, w', sono tutte differenti da zero, a, b, c non possono essere costanti.

4. Supponiamo ora che a, b, c siano costanti e che una delle quantità u, u' ; .... w' si annulli.

Vogliamo dimostrare che allora deve annullarsi almeno una delle tre coppie di quantità u, u' ; v, v' ; w, w'.

Si annulli dapprima una delle u', v', w', p. es. u'. Allora le (2) diventano:

$$(b-c)\,(u\,v\,w-u\,v'\,w')=0$$

$$(c-a)\,u\,v\,w+(c+a)\,u\,v'\,w'=0\ ,\quad (a-b)\,u\,v\,w-(a+b)\,u\,v'\,w'=0\,.$$

Sommando le ultime due, risulta:

$$(b-c)\,(u\,v\,w+u\,v'\,w')=0\ ,$$

quindi dev'essere:

$$(b-c)\,u\,v\,w=0\quad ,\quad (b-c)\,u\,v'\,w'=0\ .$$

Queste due equazioni possono essere soddisfatte in uno dei modi seguenti:

1.° $u=o$; 2.° $v=v'=0$ o pure $w=w'=0$; 3° $v=w'=0$ o pure $w=v'=0$, 4° $b=c$.

Nei primi due casi si annulla una delle coppie di quantità u, u' ; v, v' ; w, w' ; nel quarto caso u resta inderminata e quindi si può supporre nulla, per cui anche in questo caso si annulla una delle tre solite coppie di quantità. Se poi, finalmente, fosse $v=w'=0$ p. es. le equazioni di Riemann darebbero:

$$(b-c-2a)\,v'\,w=0\ ,\quad (c+a-2b)\,w\,u=0\ ,\quad (a-b+2c)\,u\,v'=0\,.$$

Se u, v' sono diversi da zero, moltiplicando la 1ª per u, la 2ª per v' e sommando si ottiene:

$$-(b+a)\,u\,v'\,w=0$$

la quale equazione richiede che sia nulla w; dunque in ognuno di questi casi si conclude secondo l'enunciato.

Supponiamo ora che sia nulla una delle quantità u, v, w, p. es. u; le equazioni (2) ci danno:

$$(b+c)\,(u'\,v'\,w-u'\,v\,w')=0$$

$$-(c-a)\,u'\,v\,w'-(c+a)\,u'\,v'\,w=0\ ,\quad (a+b)\,u'\,v\,w'-(a-b)\,u'\,v'\,w=0$$

e sottraendo le ultime due si ottiene

$$(b+c)\,(u'\,v\,w'+u'\,v'\,w)=0$$

che paragonata colla prima ci porta all'equazioni:

$$u'\,v\,w'=0\ ,\quad u'\,v'\,w=0\ .$$

Queste due equazioni possono essere soddisfatte in una delle seguenti ipotesi:

1° $u'=0$; 2° $v=v'=0$ o pure $w=w'=0$; 3° $v'=w'=0$; 4° $v=w=0$.

Nei primi due casi si conclude secondo il teorema, il terzo non è essenzialmente diverso dall'altro ($u'=v=w'=0$) che abbiamo esaminato e conduce alle stesse conclusioni; nel quarto poi le equazioni Riemann ci danno:

$$v'\,w'=0\ ,\quad w'\,u'=0\ ,\quad u'\,v'=0$$

e debbono esser nulle ancora due delle quantità u' v' w' per cui il teorema resta completamente dimostrato.

Supponiamo ora inversamente che si annulli una delle coppie di quantità u, u' ; v, v' ; w, w' ed esaminiamo i risultati ai quali si perviene.

Caso in cui si annulla una sola coppia di quantità u, u' ; v, v' ; w, w' .

5. Supponiamo dapprima che si annulli soltanto la coppia u, u'. In questo caso si annullano g e g' e quindi la componente della coppia di quantità di moto e quella della rotazione secondo l'asse ξ. L'asse principale a dell'ellissoide giace sempre nel piano invariabile della massa in movimento e la linea vorticosa centrale è normale a quest'asse.

Le ultime sei equazioni (10) del Cap. III, diventano:

$$
(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&(b+c-2a)\,v\,w + (b+c+2a)\,v'\,w' = 0 \\
&(b-c+2a)\,v\,w' + (b-c-2a)\,v'\,w = 0 \\
&2\,v\,\frac{d(c-a)}{dt} + (c-a)\frac{dv}{dt} = 0\ ,\quad 2\,v'\,\frac{d(c+a)}{dt} + (c+a)\frac{dv'}{dt} = 0 \\
&2w\,\frac{d(a-b)}{dt} + (a-b)\frac{dw}{dt} = 0\ ,\quad 2w'\,\frac{d(a+b)}{dt} + (a+b)\frac{dw'}{dt} = 0
\end{aligned}\right.
$$

e le ultime quattro equazioni possono anche scriversi:

$$
(9')\quad (c-a)^2 v = \text{cost.},\ (c+a)^2 v' = \text{cost.},\ (a-b)^2 w = \text{cost.},\ (a+b)^2 w' = \text{cost.}
$$

Da queste equazioni discende che se a, b, c sono costanti, sono costanti pure v, v'; w, w', anche nel caso in cui due assi, p. es., a, b siano eguali, poichè allora si può supporre $w' = w$. Dunque *alla costanza di forma dell'ellissoide corrisponde sempre una costante condizione di movimento.*

Dalle prime due (9), nel caso in cui v' e w' sono diversi da zero, si ottiene poi:

$$
(10)\quad \frac{v^2}{v'^2} = \frac{(2a+b+c)\,(2a-b+c)}{(2a-b-c)\,(2a+b-c)}\ ,\quad \frac{w^2}{w'^2} = \frac{(2a+b+c)\,(2a+b-c)}{(2a-b+c)\,(2a-b-c)}
$$

e queste equazioni combinate con le (9') danno:

$$
(11)\quad \frac{(2a+b+c)\,(2a-b+c)}{(2a-b-c)\,(2a+b-c)} = \left(\frac{a+c}{a-c}\right)^4 .\,\text{cost.},
$$

$$
\frac{(2a+b+c)\,(2a+b-c)}{(2a-b+c)\,(2a-b-c)} = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^4 .\ \text{cost.}
$$

le quali insieme all'equazione dell'incompressibilità dimostrano che: *Se soltanto una delle coppie di quantità u, u'; v, v'; w, w' è nulla, la forma dell'ellissoide resta sempre la stessa* (¹).

6. Nell'ipotesi che sia soltanto $u = u' = 0$, poniamo:

$$
(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{v^2}{(2a+b+c)\,(2a-b+c)} = \frac{v'^2}{(2a-b-c)\,(2a+b-c)} = \mathrm{S} \\
&\frac{w^2}{(2a+b+c)\,(2a+b-c)} = \frac{w'^2}{(2a-b+c)\,(2a-b-c)} = \mathrm{T}.
\end{aligned}\right.
$$

Le prime tre equazioni di Riemann, possono scriversi allora come segue:

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&(4a^2-b^2-3c^2)\,\mathrm{S} + (4a^2-3b^2-c^2)\,\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{A} - \frac{\sigma}{2a^2} \\
&(b^2-c^2)\,\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{B} - \frac{\sigma}{2b^2} \\
&(c^2-b^2)\,\mathrm{S} = \frac{1}{2}\mathrm{C} - \frac{\sigma}{2c^2}
\end{aligned}\right.
$$

le quali risolute rispetto ad S, T e σ ci danno:

(¹) Qui osserviamo che se oltre ad $u = u' = 0$, fosse $v = 0$, senza esserlo anche v', la 1ª della (9) richiederebbe che fosse anche $w' = 0$ e se fosse $v' = 0$ senza esserlo v, le prime due (9) ci darebbero facilmente $2\,b\,v\,w\,w' = 0$ e quindi richiederebbero $w = 0$ o pure $w' = 0$. In ciascuno di questi casi diventano identiche tre delle equazioni (9), ed il teorema enunciato non ha più luogo.

$$(14)\quad\begin{cases} \delta\dfrac{b^2-c^2}{b^2-a^2}\mathrm{S}=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{s\,ds}{\Delta\,(b^2+s)}\left(\frac{4\,a^2-c^2+b^2}{c^2+s}-\frac{b^2}{a^2+s}\right)\\[2ex] \delta\dfrac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\mathrm{T}=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{s\,ds}{\Delta\,(c^2+s)}\left(\frac{4\,a^2-b^2+c^2}{b^2+s}-\frac{c^2}{a^2+s}\right)\\[2ex] \dfrac{\delta\sigma}{2\,a^2b^2c^2}=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{ds}{\Delta}\left(\frac{2\,s+4\,a^2-b^2-c^2}{(b^2+s)(c^2+s)}+\frac{1}{a^2+s}\right), \end{cases}$$

dove

$$\delta=4\,a^4-a^2\,(b^2+c^2)+b^2c^2.$$

Se a, b, c; S, T; v, v'; w, w', σ soddisfano alle equazioni (12) e (14) tutte le condizioni del problema saranno soddisfatte.

Ricerchiamo se e come si possono scegliere a, b, c in modo che v, v'; w, w' siano reali e σ sia positivo.

Dalle (12) abbiamo:

$$(12')\quad\begin{cases} v^2=\{(2a+c)^2-b^2\}\,\mathrm{S}\quad,\quad v'^2=\{(2a-c)^2-b^2\}\,\mathrm{S}\\ w^2=\{(2a+b)^2-c^2\}\,\mathrm{T}\quad,\quad w'^2=\{(2a-b)^2-c^2\}\,\mathrm{T}. \end{cases}$$

Nelle nostre equazioni b e c entrano in modo simmetrico per cui possiamo supporre che sia $b \geq c$. Allora non potendo essere $(2a+b)^2-c^2<0$, possiamo fare soltanto una delle ipotesi seguenti:

$$1^{a}\quad\begin{cases} (2a-c)^2-b^2>0 \quad \text{e quindi} \quad (2a+c)^2-b^2>0\\ (2a-b)^2-c^2>0 \quad \text{e quindi} \quad (2a+b)^2-c^2>0 \end{cases}$$

$$2^{a}\quad\begin{cases} (2a+c)^2-b^2<0 \quad \text{e quindi} \quad (2a-c)^2-b^2<0\\ (2a-b)^2-c^2>0 \quad \text{e quindi} \quad (2a+b)^2-c^2>0\,. \end{cases}$$

Affinchè v, v'; w, w' siano reali, come risulta dalle (12'), dev'essere nel primo caso

$$\mathrm{S}>0\quad,\quad\mathrm{T}>0$$

e nel secondo

$$\mathrm{S}<0\quad,\quad\mathrm{T}>0\,.$$

Se è

$$(2\,a-c)^2-b^2>0\quad,\quad(2a-b)^2-c^2>0$$

risulta, sommando le due equazioni;

$$a>\frac{b+c}{2}\ \text{ e quindi }\ \delta>0\,.$$

L'integrale che comparisce nella prima delle (14) si può porre sotto la forma

$$(15)\qquad \frac{\pi}{2\,a^2b^2c^2}\int_0^{\infty}\frac{s\,ds}{\Delta^3}\,\{(4a^2-c^2)\,s+a^2\,(4a^2+b^2-c^2)-b^2c^2\}$$

e poichè dall'essere $a>\dfrac{b+c}{2}$ segue:

$$4a^2-(b+c)^2>0\,,\ 4a^2-c^2>0\,,\ 4a^2+b^2-c^2>(b+c)^2+b^2-c^2=2b\,(b+c)$$

$$a^2\,(4a^2+b^2-c^2)>2a^2b\,(b+c)>\frac{1}{2}\,b\,(b+c)^3>b^2c^2\,,$$

risulta che esso è positivo, per cui affinchè sia $\mathrm{S}>0$ si richiede che sia $a<b$, come risulta dalla 1ª delle (14).

L'integrale che comparisce nella 2ª delle (14) si può scrivere

$$(15')\qquad \frac{\pi}{2\,a^2b^2c^2}\int_0^{\infty}\frac{s\,ds}{\Delta^3}\,\{(4a^2-b^2)\,s+a^2(4a^2-b^2+c^2)-b^2c^2\}$$

e con analogo ragionamento si può mostrare che esso pure è positivo per cui affinchè sia $\mathrm{T}>0$, come risulta dalla 2ª delle (14) dev'essere $a>c$, la quale condizione è inclusa nelle precedenti.

Se poi è

$$(2a+c)^2-b^2<0\quad,\quad(2a-b)^2-c^2>0\,,$$

cambiando il segno alla seconda e sommandola con la prima, si ha:

$$a<\frac{b-c}{2}\,.$$

Poichè allora:

$$4a^2-(b-c)^2<0 \;, \quad 4a^2-b^2<0 \;,$$

$$4a^2-b^2+c^2<4a^2-b^2-c^2+2bc=4a^2-(b-c)^2<0$$

risulta che l'integrale (15') è negativo ed affinchè sia $T>0$ dev' essere

$$\delta\,(c^2-a^2)>0 \text{ ossia } \{4a^4-a^2(b^2+c^2)+b^2c^2\}\,(c^2-a^2)>0 \,.$$

Questa disuguaglianza può essere soddisfatta sia supponendo $c^2>a^2$, poichè allora è anche $c^2>a^2\dfrac{b^2-4a^2}{b^2-a^2}$ ossia $4a^4-a^2(b^2+c^2)+b^2c^2>0$, sia supponendo $4a^4-a^2(b^2+c^2)+b^2c^2<0$ ovvero $c^2<a^2\dfrac{b^2-4a^2}{b^2-a^2}$, poichè allora è anche $c^2<a^2$.

Nel primo caso affinchè risulti $S<0$ si richiede che l'integrale (15) sia negativo; nel secondo caso quest'integrale è positivo ed è effettivamente $S<0$, poichè $\dfrac{b^2-a^2}{b^2-a^2}c^2-a^2\dfrac{b^2-4a^2}{b^2-a^2}=\dfrac{\delta}{b^2-a^2}<0$.

I tre casi possibili in cui il movimento è reale sono:

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{b+c}{2}<a<b & & \\[2ex] \dfrac{b-c}{2}>a & , & \displaystyle\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta\,(b^2+s)}\left\{\frac{4a^2+b^2-c^2}{c^2+s}-\frac{b^2}{a^2+s}\right\}<0 \text{ [1]}. \\[2ex] \dfrac{b-c}{2}>a & , & c^2<a^2\dfrac{b^2-4a^2}{b^2-a^2} \,. \end{array}\right.$$

(1) Quest'integrale è negativo finchè $a\leq\dfrac{c}{2}$, ma la determinazione precisa dei limiti entro i quali esso si mantiene negativo dipende dalla risoluzione di un'equazione trascendente.

Riguardo a σ osserviamo che la terza delle (14) si può scrivere:

$$\sigma=\frac{\pi}{\delta}\int_0^\infty \frac{3s^2+6a^2s+\delta}{\Delta^3}\,ds$$

e poichè nei primi due casi $\delta>0$ è pure $\sigma>0$; nel terzo caso σ può essere negativo ed allora per la possibilità fisica del movimento si richiede una pressione esterna sufficientemente forte.

7. Cerchiamo ora di formarci un'idea del movimento del fluido. Dall' essere $u=u'=0$ discende $p=p'=0$, perciò tanto gli assi ξ,η,ζ, quanto gli assi ξ',η',ζ' rotano con velocità costante intorno ad assi i quali si conservano sempre normali a ξ e quindi sono situati nel piano $\eta\,\zeta$. Le particelle fluide che si trovano sull'asse di rotazione di ξ',η',ζ' sono in quiete relativamente agli assi principali dell'ellissoide ξ,η,ζ, e perciò anche le particelle che giacciono in un piano coniugato a quest'asse restano in un tale piano rispetto all'ellissoide. Questi piani, in cui giacciono le traiettorie delle singole particelle, sono perpendicolari al piano $\eta\,\zeta$ poichè l'asse di rotazione di $\xi'\,\eta'\,\zeta'$, a cui sono coniugati, appartiene ad esso. Ciascuna particella, relativamente agli assi ξ,η,ζ, descrive la sua traiettoria nel tempo $\dfrac{2\pi}{\sqrt{q'^2+r'^2}}$, mentre l'ellissoide riprende la sua posizione nello spazio dopo il tempo $\dfrac{2\pi}{\sqrt{q^2+r^2}}$.

Caso in cui si annullano due delle coppie di quantità

$$u\,,\; u'\,;\; v\,,\; v'\,;\; w\,,\; w'\,.$$

8. Supponiamo ora che durante il movimento sia sempre $u=u'=v=v'=0$. In questo caso è pure $g=h=g'=h'=0$ e quindi tanto l'asse della coppia di quantità di moto, quanto la

linea vorticosa centrale coincidono con l'asse ζ. Le ultime 6 equazioni di Riemann si riducono ad:

$$(a-b)^2 w = \text{cost.} = \tau \quad , \quad (a+b)^2 w' = \text{cost.} = \tau' \ ;$$

mentre le prime tre si possono scrivere:

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\tau^2}{(a-b)^3} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^3} - \frac{1}{2}\frac{d^2 a}{dt^2} &= a\,\mathrm{A} - \frac{\sigma}{a} \\ \frac{\tau^2}{(b-a)^3} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^3} - \frac{1}{2}\frac{d^2 b}{dt^2} &= b\,\mathrm{B} - \frac{\sigma}{b} \\ -\frac{1}{2}\frac{d^2 c}{dt^2} &= c\,\mathrm{C} - \frac{\sigma}{c} \, , \end{aligned} \right.$$

a cui bisogna aggiungere l'equazione dell'incompressibilità

$$(17') \qquad a\,b\,c = \text{cost.}$$

Le equazioni (17) e (17') sono anche le equazioni differenziali del moto del punto (a, b, c) di massa 1 sulla superficie $a\,b\,c = \text{cost.}$, quando su di esso agiscono forze aventi il potenziale

$$2\mathrm{H} - \frac{\tau^2}{(a-b)^2} - \frac{\tau'^2}{(a+b)^2} \, .$$

Se supponiamo che sia anche continuamente $a = b$ ritroviamo i movimenti studiati nel Cap. IV.

9. Occupiamoci ora di quei movimenti durante i quali a, b, c si mantengono costanti [1]. Allora le (17), eliminando σ, diventano:

[1] Questi movimenti si possono studiare direttamente, come è stato fatto da Kirchhoff, come un un caso di moti relativi. Mechanik, pag. 352.

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\tau'^2}{(b+a)^3} + \frac{\tau^2}{(b-a)^3} &= \frac{\pi}{b}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\,\frac{(b^2-c^2)\,s}{(b^2+s)\,(c^2+s)} = \mathrm{K} \\ \frac{\tau'^2}{(b+a)^3} - \frac{\tau^2}{(b-a)^3} &= \frac{\pi}{a}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\,\frac{(a^2-c^2)\,s}{(a^2+s)\,(c^2+s)} = \mathrm{L} \end{aligned} \right.$$

ossia anche:

$$(18') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\tau'^2}{(b+a)^4} = w'^2 &= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left\{ \frac{s+ab}{(a^2+s)\,(b^2+s)} - \frac{c^2}{ab\,(c^2+s)} \right\} \\ \frac{\tau^2}{(b-a)^4} = w^2 &= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left\{ \frac{s-ab}{(a^2+s)\,(b^2+s)} + \frac{c^2}{ab\,(c^2+s)} \right\} . \end{aligned} \right.$$

Siccome in queste formole b ed a compariscono in modo simmetrico possiamo supporre $b \geq a$ ed allora perchè w e w' siano reali K ed L devono esser tali che $\mathrm{K} > 0$ ed in valore assoluto $\mathrm{L} < \mathrm{K}$. La prima condizione richiede che sia $b > c$. La seconda è soddisfatta se $c = a$ e quindi anche quando c, rimanendo costanti a e b, varia nell'interno di un campo finito contenente il valore a, poichè K ed L variano continuamente con c. Però c non può raggiungere il limite superiore b poichè allora sarebbe $\mathrm{K} = 0$, nè può divenire infinitamente piccolo, poichè in questo caso sarebbe:

$$\frac{\mathrm{K}}{c} = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{b^2}{a^2}s\right)^{\frac{1}{2}}} \, , \quad \frac{\mathrm{L}}{c} = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}}(1+s)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{a^2}{b^2}s\right)^{\frac{1}{2}}} \, ,$$

come risulta subito cambiando in K s in $b^2 s$, in L s in $a^2 s$ ed abbandonando infinitesimi di ordine superiore; quindi $\mathrm{K} > \mathrm{L}$.

Se b cresce indefinitamente, mentre a e c restano finiti, essendo

$\lim K = 0$, affinchè sia sempre $K > L$ si richiede che $a^2 - c^2$ diminuisca indefinitamente. L'intervallo di variabilità di c diminuisce indefinitamente comprendendo sempre il valore a di c. Se invece b si avvicina ad a anche il limite superiore di c si avvicina ad a, mentre il limite inferiore si avvicina a quel valore per cui si annulla il secondo integrale che comparisce nelle (18') poichè quest'integrale diminuisce con c e c è soggetto alla sola condizione di renderlo positivo.

Un caso particolare importante è quello in cui sia

$$w^2 = w'^2 .$$

In questo caso, come risulta dalle (18'), si verifica la relazione

$$(19) \qquad \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \frac{a^2 b^2}{(a^2+s)(b^2+s)} = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \frac{c^2}{c^2+s} = c^2 C = \sigma .$$

Se è $w = w'$ è pure $r' = 0$; l'ellissoide si muove come un corpo rigido e si ha il movimento trovato da Iacobi. Se invece è $w = -w'$ si ottiene il movimento reciproco del primo, scoperto da Dedekind; in questo caso gli assi dell'ellissoide hanno una posizione fissa nello spazio ed il fluido si muove come se fosse contenuto in un involucro solido.

La relazione (19) può scriversi

$$\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta^3} \frac{s^2}{a^2 b^2} = \pi \int_0^\infty \frac{s ds}{\Delta^3} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

e mostra che dev'essere $\frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ e quindi $> \frac{1}{a^2}$ e $> \frac{1}{b^2}$, onde c dev'essere il minimo degli assi dell'ellissoide. Dalla stessa relazione risulta $\frac{1}{c^2} > \frac{2}{b^2}$ e quindi $b > c\sqrt{2}$, per cui la forma dell'ellissoide non può mai avvicinarsi troppo a quella di una sfera.

Risulta pure che ad ogni sistema di assi a, b, c, soddisfacenti alla relazione (19), corrisponde a meno del segno un solo valore della velocità angolare e si potrebbe anche facilmente dimostrare che data la velocità angolare ρ se $\frac{\rho^2}{2\pi} < 0,18711.....$ esiste pure un solo ellissoide ad assi disuguali che vi corrisponde, che al limite si confonde con uno degli ellissoidi di rotazione di Maclaurin trovati nel Cap. IV. Al valore 0 di ρ corrisponde un cilindro di rotazione infinitamente sottile.

10. Nel caso che abbiamo esaminato, in cui a, b, c sono costanti e $u = u' = v = v' = 0$, gli assi ζ e ζ' coincidono fra loro e con l'asse principale c dell'ellissoide. L'ellissoide, quindi, mantenendo costante la sua forma, rota intorno all'asse c con la velocità angolare r; mentre relativamente ai suoi assi principali ogni particella descrive un'ellisse in un piano normale allo stesso asse come se fosse attratta dal suo centro in ragione diretta della distanza (¹). Gli assi dell'ellissoide descrivono un giro completo nel tempo $\frac{2\pi}{r}$; mentre ciascuna particella fluida riattraversa uno stesso piano fisso nello spazio e passante per l'asse z dopo il tempo $\frac{2\pi}{r+r'} = \frac{\pi}{w}$. È evidente che se r è commensurabile con w il movimento sarà periodico, ossia tanto la posizione assoluta dell'ellissoide quanto la posizione relativa del fluido in quest'ellissoide ritornerà ad intervalli eguali ad essere sempre la stessa.

Continuazione. Movimenti nei quali gli assi principali dell'ellissoide conservano una direzione fissa nello spazio e movimenti nei quali gli assi principali sono formati sempre dalle stesse particelle.

11. Nel §. 5 abbiamo visto che ad una forma costante del-

(¹) Ciò si deduce facilmente dalle formole (16) del Capitolo I che nel nostro caso possono scriversi:

$$\xi = \frac{a_0}{a} x_0 \cos r' t + \frac{a}{b_0} y_0 \operatorname{sen} r' t , \; \eta = -\frac{b}{a_0} x_0 \operatorname{sen} r' t + \frac{b}{b_0} y_0 \cos r' t , \; \zeta = z_0$$

l'ellissoide corrisponde sempre una condizione costante di movimento. Possiamo ora dimostrare anche il teorema inverso:

Se sono costanti le u, u' ; v, v' ; w, w', *ossia se la condizione del movimento è sempre la stessa,* a, b, c, *e quindi* σ *sono costanti.*

Infatti i due integrali delle aree e di Helmholtz diventano allora due equazioni nelle a, b, c e se sono distinte insieme all'equazione dell'incompressibilità dimostrano l'enunciato. Può darsi però che i due nominati integrali diventino identici. Ciò si verifica quando sia

$$\frac{1}{4}(\Omega^2 - \Omega'^2) = (b^2 - c^2)^2\, u u' + (c^2 - a^2)^2\, v v' + (a^2 - b^2)\, w w' = 0\,;$$

ma allora l'equazione precedente da un'altra relazione fra a, b, c a meno che non si verifichi uno dei seguenti casi:

$$u' = v' = w' = 0 \quad , \quad u = v = w = 0\,,$$

ovvero sono nulle due delle u, v, w e una delle u', v', w' e viceversa. In ciascuno di questi casi però le ultime 6 equazioni di Riemann danno facilmente un'altra relazione fra a, b e c.

Nel 1.° caso queste equazioni diventano:

$$2u\frac{d(b-c)}{dt} + (b+c-2a)vw = 0 \ , \ 2v\frac{d(c-a)}{dt} + (c+a-2b)wu = 0 \ ,$$

$$2w\frac{d(a-b)}{dt} + (a+b-2c)\, uv = 0$$

e moltiplicando la 1.ª per vw, la 2.ª per wu, la 3.ª per uv e sommando, si ha

$$(b+c-2a)\, v^2w^2 + (a+c-2b)\, w^2u^2 + (a+b-2c)\, u^2v^2 = 0\,.$$

Questa è effettivamente una nuova relazione fra a, b, c perchè non può essere contemporaneamente $u = v = w = 0$ senza ricadere in uno dei casi che abbiamo, fin dal principio del Cap., escluso.

Nel secondo caso poi le stesse equazioni ci danno:

$$(b+c+2a)\, v'w' = 0 \ , \ (c+a+2b)\, w'u' = 0 \ , \ (a+b+2c)\, u'v' = 0$$

e poichè non può essere contemporaneamente $u' = v' = w' = 0$ il teorema resta tuttora provato.

Se poi fosse, p. es. $u = v = w' = 0$ si avrebbe:

$$2u'\frac{d(b+c)}{dt} + (b-c-2a)\, v'w = 0 \ , \ 2v'\frac{d(c+a)}{dt} + (c-a+2b)\, wu' = 0$$

$$2w\frac{d(a-b)}{dt} + (a+b+2c)\, u'v' = 0\,.$$

Moltiplicando la 1.ª per $v'w$, la 2.ª wu' la 3.ª per $u'v'$ e sottraendo dalla 1.ª la differenza delle due ultime risulta

$$(b-c-2a)\, v'^2w^2 - (c-a+2b)\, w^2u'^2 + (a+b+2c)\, u'^2v'^2 = 0\,.$$

e non può essere contemporaneamente $u' = v' = w = 0$.

Se finalmente fosse, p. es., $u' = v' = w = 0$ si avrebbe:

$$(b-c+2a)vw' = 0 \ , \ (c-a-2b)w'u = 0 \ , \ (a+b-2c)uv = 0$$

e poichè non può essere contemporaneamente $u = v = w' = 0$ così il teorema resta dimostrato completamente.

12. Per completare queste ricerche proponiamoci ora di trovare in quali casi l'ellissoide si muove come un corpo rigido. Si richiede perciò evidentemente che a, b, c siano costanti e quindi che sia p. es. $u = u' = 0$, poi che gli assi ξ', η', ζ' restino in quiete e quindi $p' = q' = r' = 0$ ossia $u = u' = 0$, $v = v'$, $w = w'$. Le ultime 6 equazioni di Riemann, quando in esse si portano queste ipotesi, danno

$$(b + c)\, vw = 0 \ ,$$

e questa equazione richiede che sia $v = 0$ ovvero $w = 0$. Dunque:

Affinchè un ellissoide si muova come un corpo rigido deve rotare con velocità angolare costante intorno ad uno dei suoi assi principali.

I soli movimenti di questa natura sono quelli trovati da Maclaurin e da Iacobi. Abbiamo anche l'altro teorema che si deduce per mezzo della legge di reciprocità dal precedente.

Affinchè un ellissoide si muova in modo che i suoi assi abbiano una grandezza costante e conservino una direzione costante nello spazio, le particelle devono rotare con velocità costante intorno ad uno dei suoi assi principali.

13. Facciamo ora, senza supporre nè la costanza della forma nè quella della condizione di movimento, l'ipotesi che sia semplicemente:

$$u = u' \ , \ v = v' \ , \ w = w'$$

Quest'ipotesi equivale all'altra $p' = q' = r' = 0$ ed allora gli assi principali dell'ellissoide sono costituiti sempre dalle stesse particelle fluide.

Le solite ultime equazioni (10) del Cap. III, ci danno:

$$(20) \quad \begin{cases} 2u \dfrac{d(b-c)}{dt} + (b-c)\dfrac{du}{dt} + 2(b+c)\,vw = 0 \ . \\ 2u \dfrac{d(b+c)}{dt} + (b+c)\dfrac{du}{dt} + 2(b-c)\,vw = 0 \\ 2v \dfrac{d(c-a)}{dt} + (c-a)\dfrac{dv}{dt} + 2(c+a)\,wu = 0 \\ 2v \dfrac{d(c+a)}{dt} + (c+a)\dfrac{dv}{dt} + 2(c-a)\,wu = 0 \\ 2w \dfrac{d(a-b)}{dt} + (a-b)\dfrac{dw}{dt} + 2(a+b)\,uv = 0 \\ 2w \dfrac{d(a+b)}{dt} + (a+b)\dfrac{dw}{dt} + 2(a-b)\,uv = 0 \ . \end{cases}$$

Sommando le due prime e dividendo per b, si trova:

$$(21) \qquad 2u\,\frac{1}{b}\,\frac{db}{dt} + \frac{du}{dt} + 2\,vw = 0 \ ;$$

mentre sottraendole e dividendo per c si trova:

$$(21') \qquad 2u\,\frac{1}{c}\,\frac{dc}{dt} + \frac{du}{dt} - 2\,v\,w = 0 \ .$$

Sottraendo ora la (21') dalla (21) si trova pure:

$$(22) \qquad 2u\left(\frac{1}{b}\,\frac{db}{dt} - \frac{1}{c}\,\frac{dc}{dt}\right) + 4\,vw = 0$$

ed analogamente si avrebbe:

$$(22') \qquad \begin{cases} 2v\left(\dfrac{1}{c}\,\dfrac{dc}{dt} - \dfrac{1}{a}\,\dfrac{da}{dt}\right) + 4\,wu = 0 \\ 2w\left(\dfrac{1}{a}\,\dfrac{da}{dt} - \dfrac{1}{b}\,\dfrac{db}{dt}\right) + 4\,uv = 0 \ . \end{cases}$$

Moltiplicando ora la (22) per vw, la prima delle (22') per wu e la seconda per uv e sommando si deduce:

$$v^2w^2 + w^2u^2 + u^2v^2 = 0 \ .$$

Affinchè questa equazione possa essere soddisfatta si richiede che sia

$$vw = wu = uv = 0 \ \text{ e quindi per es. } \ u = v = 0 \ .$$

Supponiamo soddisfatta questa condizione. Le (20) si riducono allora a:

$$2w\,\frac{d(a-b)}{dt} + (a-b)\,\frac{dw}{dt} = 0 \quad , \quad 2w\,\frac{d(a+b)}{dt} + (a+b)\,\frac{dw}{dt} = 0$$

ossia ad:

$$(a-b)^2 w = \text{cost.} \qquad (a+b)^2 w = \text{cost.}$$

Queste due equazioni, insieme all'altra $a\,b\,c = \text{cost.}$, permettono di esprimere b, c e w per mezzo di a. Esse possono essere sostituite dalle altre:

$$\text{(23)} \qquad \frac{w}{c} = \text{cost.} \quad , \quad \frac{b}{a} = \text{cost.} \quad , \quad a\,b\,c = \text{cost.}$$

Per mezzo della seconda la terza può anche scriversi $a^2 c = \text{cost.}$ e derivata logaritmicamente ci da:

$$\text{(24)} \qquad \frac{2}{a}\frac{da}{dt} + \frac{1}{c}\frac{dc}{dt} = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{dc}{dt} + \frac{\text{cost.}}{a^3}\frac{da}{dt} = 0 \ .$$

L'ultima derivata un'altra volta ci da pure:

$$\text{(25)} \qquad \frac{d^2c}{dt^2} + \frac{\text{cost.}}{a^4}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{\text{cost.}}{a^3}\frac{d^2a}{dt^2} = 0 \ .$$

Ora dalle tre prime equazioni (10) del Cap. III si ha:

$$2a\,w^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2a}{dt^2} = a\,\mathrm{A} - \frac{\sigma}{a} \ , \quad 2b\,w^2 - \frac{1}{2}\frac{d^2b}{dt^2} = b\,\mathrm{B} - \frac{\sigma}{b}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2c}{dt^2} = c\,\mathrm{C} - \frac{\sigma}{c}$$

e, tenendo presenti le (23), permettono di esprimere $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2c}{dt^2}$ e σ in funzione di a e di costanti. Sostituendo i valori che si possono così ottenere per $\frac{d^2a}{dt^2}$ e $\frac{d^2c}{dt^2}$ nell'equazione (25) se ne ottiene un'altra che può servire a determinare $\left(\frac{da}{dt}\right)^2$ in funzione di a soltanto e di certe costanti.

L'integrale delle forze vive che, nel nostro caso, si scrive

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right\} + 2\,(a^2+b^2)\,w =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}} \ ,$$

per mezzo delle (23), della seconda delle (24) e dell'ultima espressione accennata di $\left(\frac{da}{dt}\right)^2$, può ridursi ad un'equazione in termini finiti, contenente a soltanto, e affinchè possa essere soddisfatta si richiede che a e quindi tutte le altre incognite sieno costanti. I soli movimenti di questa natura, se si fa eccezione del caso in cui l'ellissoide è di rotazione, sono quelli trovati da Iacobi.

Similmente resta dimostrato il teorema reciproco che i soli movimenti per cui è $u = -u'$, $v = -v'$, $w = -w'$ ossia $p = q = r = 0$ e quindi gli assi principali dell'ellissoide conservano una direzione costante nello spazio, sono i movimenti scoperti da Dedekind.

Il teorema precedente mostra pure che i movimenti che il prof. Padova, nella sua memoria, credeva di aver trovati non sono possibili.

Sui casi in cui l'ellissoide conserva stabilmente la sua forma. Piccole oscillazioni.

14. Introducendo al posto delle $u, u', \ldots . w'$ le nuove variabili g, g' ; h, h' ; k, k' (1) la forza viva T acquista la forma:

---

(4) Le relazioni che legano $g', \ldots . k'$ ad $u, \ldots . w'$, lo ricordiamo, sono:

$$g=(b-c)^2u+(b+c)^2u' \ , \quad h=(c-a)^2v+(c+a)^2v' \ , \quad k=(a-b)^2w+(a+b)^2w'$$

$$g'=(b-c)^2u-(b+c)^2u' \ , \quad h'=(c-a)^2v-(c+a)^2v' \ , \quad k'=(a-b)^2w-(a+b)^2w' \ ,$$

dalle quali segue:

$$u = \frac{1}{2}\frac{g+g'}{(b-c)^2} \ , \quad u' = \frac{1}{2}\frac{g-g'}{(b+c)^2} \ ; \quad v = \frac{1}{2}\frac{h+h'}{(c-a)^2} , \ldots$$

$$(26)\qquad T=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right\}+$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{g+g'}{b-c}\right)^2+\left(\frac{h+h'}{c-a}\right)^2+\left(\frac{k+k'}{a-b}\right)^2+\left(\frac{g-g'}{b+c}\right)^2+\left(\frac{h-h'}{c+a}\right)^2+\left(\frac{k-k'}{a+b}\right)^2\right\}$$

e se si pone:

$$(27)\quad G=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{g+g'}{b-c}\right)^2+\left(\frac{h+h'}{c-a}\right)^2+\left(\frac{k+k'}{a-b}\right)^2+\left(\frac{g-g'}{b+c}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{h-h'}{c+a}\right)^2+\left(\frac{k-k'}{a+b}\right)^2\right\}-2\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}}$$

le equazioni (4), (4') e (4'') del Cap. III si potranno scrivere:

$$(28)\quad \frac{d^2a}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial a}-2\frac{\sigma}{a}=0\,,\ \frac{d^2b}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial b}-2\frac{\sigma}{b}=0\,,\ \frac{d^2c}{dt^2}+\frac{\partial G}{\partial c}-2\frac{\sigma}{c}=0$$

$$(28')\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dg}{dt}=h\dfrac{\partial G}{\partial k}-k\dfrac{\partial G}{\partial h} & , & \dfrac{dg'}{dt}=h'\dfrac{\partial G}{\partial k'}-k'\dfrac{\partial G}{\partial h'} \\ \dfrac{dh}{dt}=k\dfrac{\partial G}{\partial g}-g\dfrac{\partial G}{\partial k} & , & \dfrac{dh'}{dt}=k\dfrac{\partial G}{\partial g'}-g'\dfrac{\partial G}{\partial k'} \\ \dfrac{dk}{dt}=g\dfrac{\partial G}{\partial h}-h\dfrac{\partial G}{\partial g} & , & \dfrac{dk'}{dt}=g'\dfrac{\partial G}{\partial h'}-h'\dfrac{\partial G}{\partial g'}\,, \end{array}\right.$$

per essere:

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} p=\dfrac{\partial G}{\partial g}\,,\ q=\dfrac{\partial G}{\partial h}\,,\ r=\dfrac{\partial G}{\partial k} \\ p'=\dfrac{\partial G}{\partial g'}\,,\ q'=\dfrac{\partial G}{\partial h'}\,,\ r'=\dfrac{\partial G}{\partial k'}\,. \end{array}\right.$$

Segue quindi che l'annullarsi della variazione prima di G, con-

siderata come funzione di a, b, c ; g, h, k ; g', k', k' fra cui passino le relazioni:

$$(30)\quad a\,b\,c=\text{cost.}\ ,\ g^2+h^2+k^2=\Omega=\text{cost.}\ ,\ g'^2+h'^2+k'^2=\Omega'=\text{cost.}$$

è condizione necessaria e sufficiente, se si annullano nell'istante iniziale $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$, perchè la forma e quindi la condizione di movimento dell'ellissoide restino continuamente le stesse.

Si può ora, ripetere nel nostro caso la dimostrazione di Dirichlet sulla stabilità dell'equilibrio di un sistema di punti e pervenire così al risultato che, ogni volta che la funzione G, disponendo di tutte le variabili a, b, c ; $g, \ldots k'$, acquista un valore minimo, a, b, c non possono eseguire che delle piccole oscillazioni intorno ai valori che essi hanno nella posizione di equilibrio; mentre se G ha un valore massimo a, b, c possono acquistare anche valori molto diversi e l'equilibrio è generalmente instabile.

15. I casi in cui l'ellissoide mantiene costantemente la stessa forma li abbiamo discussi in modo completo nei §§. precedenti. Consideriamo dapprima i tre casi distinti in cui si annulla soltanto una coppia delle quantità u, u' ; v, v' ; w, w', p. es. u e u'. Se, oltre ad essere $u=u'=0$ e quindi $g=g'=0$, fosse Ω ovvero $\Omega'=0$ sarebbe anche $g=h=k=0$ ovvero $g'=h'=k'=0$ per tutta la durata del movimento. Se è per es. $g'=h'=k'=0$, tenendo presenti le (10), si può scrivere:

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{v'^2}{v^2}=\dfrac{(a-c)^4}{(a+c)^4}=\dfrac{(2a-b-c)\,(2a+b-c)}{(2a+b+c)\,(2a-b+c)} \\ \dfrac{w'^2}{w^2}=\dfrac{(a-b)^4}{(a+b)^4}=\dfrac{(2a-b-c)\,(2a-b+c)}{(2a+b+c)\,(2a+b-c)} \end{array}\right.$$

Da queste equazioni segue allora che a, b, c devono esser legati dall'equazione

$$(32)\qquad E=3a^4-a^2(b^2+c^2)-b^2c^2=0$$

che ammette per a una sola radice positiva giacente fra $\frac{b+c}{2}$ e b, nell'ipotesi che sia $b \geq c$, e questa condizione può essere soddisfatta soltanto nel primo caso.

Mostriamo ora che, eccettuando, pel momento, il caso in cui $E = 0$, si possono variare sempre le quantità $g, h \ldots\ldots k'$, ritenendo a, b, c costanti, in modo che G in ciascuno dei tre casi citati diminuisca ancora. Le variazioni delle nostre quantità sono soggette alle condizioni:

$$\delta g^2 + 2h\,\delta h + 2k\,\delta k = 0 \quad , \quad \delta g'^2 + 2h'\,\delta h' + 2k'\,\delta k' = 0 \; ;$$

mentre la variazione di G può scriversi

$$\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\delta g + \delta g'}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{\delta g - \delta g'}{b+c}\right)^2\right\} + \frac{\partial G}{\partial h}\delta h + \frac{\partial G}{\partial k}\delta k + \frac{\partial G}{\partial h'}\delta h' + \frac{\partial G}{\partial k'}\delta k' .$$

Ora essendo $g = g' = 0$ e quindi, come risulta dalle (28'):

$$\frac{\partial G}{\partial h} : \frac{\partial G}{\partial k} = h : k \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial h'} : \frac{\partial G}{\partial k'} = h' : k'$$

si avrà

$$\delta G = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\delta g + \delta g'}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{\delta g - \delta g'}{b+c}\right)^2\right\} + \frac{1}{h}\frac{\partial G}{\partial h}(h\,\delta h + k\,\delta k) +$$

$$+ \frac{1}{h'}\frac{\partial G}{\partial h'}(h'\,\delta h' + k'\,\delta k') ,$$

ossia

$$(33) \quad \delta G = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\delta g + \delta g'}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{\delta g - \delta g'}{b+c}\right)^2\right\} - \frac{q}{2h}\delta g^2 - \frac{q'}{2h'}\delta g'^2 .$$

Osserviamo ancora che, se poniamo

$$R_1^2 = [4a^2 - (b+c)^2]\,[4a^2 - (b-c)^2] ,$$

abbiamo

$$\frac{v'^2}{v^2} = \frac{(2a-b-c)(2a+b-c)}{(2a+b+c)(2a-b+c)} = \frac{R_1^2}{(2a+b+c)^2(2a-b+c)^2}$$

e siccome $\frac{v}{v'} = \frac{q+q'}{q-q'}$, abbiamo pure

$$\frac{q}{q'} = \frac{1+\frac{v'}{v}}{1-\frac{v'}{v}} = \frac{(2a+c)^2 - b^2 \pm R_1}{(2a+c)^2 - b^2 \mp R_1} .$$

Sostituendo questo valore di $\frac{q}{q'}$ nell'equazione

$$\frac{h}{q} = c^2 + a^2 - 2ac\frac{q'}{q} ,$$

che discende immediatamente dall'espressione di h, abbiamo

$$\frac{h}{q} = c^2 + a^2 - 2ac\frac{(2a+c)^2 - b^2 \mp R_1}{(2a+c)^2 - b^2 \pm R_1} = c^2 + a^2 - \frac{1}{4}\frac{[(2a+c)^2 - b^2]^2 + R_1^2}{(2a+c)^2 - b^2} \mp \frac{1}{2}R_1 =$$

$$= \frac{1}{2}[c^2 + b^2 - 2a^2 \mp R_1] .$$

Potremo dunque scrivere, tenendo presente l'espressione analoga di $\frac{h'}{q'}$:

$$(34) \quad 2\frac{h}{q} = c^2 + b^2 - 2a^2 \mp R_1 \quad , \quad 2\frac{h'}{q'} = c^2 + b^2 - 2a^2 \pm R_1 ,$$

donde

$$(35) \qquad 4\frac{hh'}{qq'} = [c^2 + b^2 - 2a^2]^2 - R_1^2 = -4E .$$

Per il determinante di δG, considerata come una forma quadratica in δg e $\delta g'$, si ha, usando dei valori trovati per $\frac{h}{q}$ e $\frac{h'}{q'}$,

$$\left| \begin{matrix} \frac{b^2+c^2}{2(b^2-c^2)^2} - \frac{q}{2h} & \frac{bc}{(b^2-c^2)^2} \\ \frac{bc}{(b^2-c^2)^2} & \frac{b^2+c^2}{2(b^2-c^2)^2} - \frac{q'}{2h'} \end{matrix} \right| = \tag{36}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(b^2+c^2)^2}{(b^2-c^2)^4} - \frac{b^2c^2}{(b^2-c^2)^4} - \frac{1}{4\,\mathrm{E}} - \frac{1}{4}\left(\frac{q}{h}+\frac{q'}{h'}\right)\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4\mathrm{E}}\frac{1}{(b^2-c^2)^2}\left[2\,a^2(b^2+c^2)-4\,b^2c^2-\mathrm{E}\right] = \frac{3(a^2-c^2)\,(a^2-b^2)}{4\,\mathrm{E}\,(b^2-c^2)^2}\ .$$

Nel primo caso, essendo $b > a > c$, esso è positivo se $\mathrm{E} < 0$ e negativo se $\mathrm{E} > 0$. Nel secondo e nel terzo caso $\mathrm{E} < 0$, poichè essendo $a < \frac{b-c}{2}$, si ha

$$a^2(b^2+c^2)-3a^4+b^2c^2 = 4a^2\left[\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 - a^2\right] + a^4 + 2a^2bc + b^2c^2 > 0\,;$$

in ambedue questi casi è anche $a < b$, ma nel secondo è $a < c$, nel terzo $a > c$; dunque nel secondo caso il determinante è negativo e nel terzo è positivo.

Nel 1° caso, poichè E si annulla per un valore di a compreso fra $\frac{b+c}{2}$ e b, E e quindi anchè il determinante (36) ha valori positivi e negativi. Ogni volta che il determinante è positivo e ciò avviene anche nel terzo caso $\delta\,\mathrm{G}$ non ha un segno costante quindi G non è né massimo né minimo. Invece ogni volta che il determinante è negativo, e ciò avviene anche nel secondo caso $\delta\,\mathrm{G}$ ha un segno costante che ora vogliamo passare ad esaminare. Se facciamo $\delta g' = -\,\delta g$, abbiamo:

$$\delta\mathrm{G} = \frac{\delta g^2}{(b+c)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{q}{h}+\frac{q'}{h'}\right)\delta g^2 = \left(\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{b^2+c^2-2\,a^2}{2\mathrm{E}}\right)\delta g^2 =$$

$$= \frac{2\mathrm{E}+(b+c)^2\,(b^2+c^2-2\,a^2)}{2\,\mathrm{E}\,(b+c)^2}\,\delta g^2 = \frac{\mathrm{R}_1^2+(b^2+c^2-2a^2)\,(b^2+c^2+4bc+2a^2)}{4\,\mathrm{E}\,(b+c)^2}\ \delta g^2$$

a causa della (35). Dall'essere poi $\mathrm{E} < 0$ risulta, se $bc \leq a^2$,

$$b^2+c^2-2a^2 > a^2\left(1-\frac{b^2c^2}{a^4}\right) \geq 0\,;$$

mentre se $bc > a^2$, sarà:

$$b^2+c^2-2a^2 > 2bc - 2a^2 > 0\,.$$

In ogni caso dunque il segno costante di $\delta\mathrm{G}$ è il negativo e quindi cambiando i valori di $g \ldots . k'$ opportunamente si può far diminuire il valore di G.

Nel caso poi in cui $\Omega' = 0$ è semplicemente

$$\delta\,\mathrm{G} = \frac{1}{2}\left\{\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2} - \frac{q}{h}\right\}\delta g^2,$$

perciò bastando porre $\delta g' = 0$ nell'espressione di $\delta\mathrm{G}$ trovata precedentemente. Poichè $\frac{h'}{q'} = 0$ da (34) risulta

$$\frac{h}{q} = b^2+c^2-2a^2\,.$$

Introducendo questo valore nell'espressione di $\delta\mathrm{G}$, si ha

$$\delta\mathrm{G} = \frac{1}{2}\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-2a^2)-(b^2-c^2)^2}{(b^2-c^2)^2(b^2+c^2-2a^2)}\,\delta g^2 = -\frac{a^2(b^2+c^2)-2b^2c^2}{(b^2-c^2)^2(b^2+c^2-2\,a^2)}\delta g^2.$$

In questo caso è $a > \frac{b+c}{2}$ e quindi $a^2 > bc$, per cui dall' equazione $\mathrm{E} = 0$, discende

$$a^2(b^2+c^2) - 2\,b^2c^2 = 3\,(a^4 - b^2c^2) > 0\,.$$

Dunque $\delta\mathrm{G}$ ha anche adesso il segno negativo.

16. Occupiamoci ora dei casi in cui si annullano due coppie di quantità $u, u'; v, v'; w, w'$, per es., sia $u = u' = v = v' = 0$ e quindi $g = g' = h = h' = 0$. Allora

$$G = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{k+k'}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{k-k'}{a+b}\right)^2\right\} - 2\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} = \frac{\tau^2}{(a-b)^2} + \frac{\tau'^2}{(a+b)^2} - 2\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}.$$

Abbiamo, ritenendo sempre costanti a, b, c,

$$\delta G = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\delta g+\delta g'}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{\delta h+\delta h'}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{\delta g-\delta g'}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{\delta h-\delta h'}{c+a}\right)^2\right\} + r\,\delta k + r'\,\delta k',$$

mentre le variazioni di $g, h, \ldots\ldots k'$, soddisfano alle condizioni:

$$\delta g^2 + \delta h^2 + 2k\,\delta k = 0 \quad , \quad \delta g'^2 + \delta h'^2 + 2k'\,\delta k' = 0 \quad ,$$

per cui si ha anche

$$\delta G = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\delta g+\delta g'}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{\delta h+\delta h'}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{\delta g-\delta g'}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{\delta h-\delta h'}{c+a}\right)^2\right\} -$$

$$- \frac{r}{2k}(\delta g^2 + \delta h^2) - \frac{r'}{2k'}(\delta g'^2 + \delta h'^2) .$$

Possiamo ora mostrare facilmente che se k e k' hanno segni eguali e quindi $\tau^2 > \tau'^2$, poichè $\tau = \frac{k+k'}{2}$, $\tau' = \frac{k-k'}{2}$, G non ha un valore minimo. Difatti se supponiamo $\delta h = \delta h' = 0$, $\delta g' = -\delta g$, abbiamo

$$\delta G = \frac{1}{(b+c)^2}\delta g^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{k} + \frac{r'}{k'}\right)\delta g^2 .$$

Ora è:

$$r = w + w' = \frac{k}{2}\left[\frac{1+\frac{k'}{k}}{(a-b)^2} + \frac{1-\frac{k'}{k}}{(a+b)^2}\right] \quad , \quad r' = \frac{k'}{2}\left[\frac{1+\frac{k}{k'}}{(a-b)^2} + \frac{1-\frac{k}{k'}}{(a+b)^2}\right] ,$$

donde

$$\delta G = \left\{\frac{1}{(b+c)^2} - \frac{1}{(a+b)^2} + \left[\frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(b-a)^2}\right]\frac{(k+k')^2}{4kk'}\right\}\delta g^2$$

e siccome $\frac{1}{(b+a)^2} < \frac{1}{(b-a)^2}$, come pure $\frac{1}{(b+c)^2} < \frac{1}{(a+b)^2}$, se $\tau^2 > \tau'^2$ e quindi $\frac{\tau^2}{(b-a)^3} > \frac{\tau'^2}{(b+a)^3}$, poichè, come risulta dalla seconda delle (18), è allora $c > a$, δG avrebbe il segno negativo. Resterebbe da esaminare il caso in cui fosse $\tau^2 \leq \tau'^2$.

Ci contenteremo qui di osservare che effettivamente G deve avere un valore minimo come risulta dal fatto che la funzione G nei casi limiti in cui qualcuno degli assi cresce indefinitamente converge verso valori che non sono negativi, mentre per opportuni valori delle variabili può diventare negativa senza poter mai raggiungere l'infinito negativo. Queste proprietà della funzione G risultano immediatamente dalle proprietà della funzione H di tendere a zero quando qualcuno degli assi cresce indefinitamente, mentre acquista il valore massimo nel caso in cui l'ellissoide diventi una sfera. Lo studio dei casi in cui questo effettivamente si verifica conduce a calcoli molto complicati.

17. Sottoponendo la massa fluida alla condizione di non poter muoversi che secondo l'ipotesi di Dirichlet si possono facilmente studiare le piccole oscillazioni che eseguiscono gli assi a, b, c intorno ai valori che rendono minima la funzione G. Eliminando infatti la quantità σ fra le (28) si ottiene:

$$\frac{d^2a}{dt^2} - \frac{c}{a}\frac{d^2c}{dt^2} = -\frac{\partial G}{\partial a} + \frac{c}{a}\frac{\partial G}{\partial c} = -\frac{\partial G_1}{\partial a}$$

$$\frac{d^2b}{dt^2} - \frac{c}{b}\frac{d^2c}{dt^2} = -\frac{\partial G}{\partial b} + \frac{c}{b}\frac{\partial G}{\partial c} = -\frac{\partial G_1}{\partial b}$$

G_1 essendo ciò che diviene G quando si costituisca a c, $\frac{abc}{ab}$.

Pongasi, chiamando a_0, b_0, c_0 i valori iniziali di a, b, c:

$$a = a_0 + \delta a \quad , \quad b = b_0 + \delta b \quad , \quad c = c_0 + \delta c ;$$

$\delta a, \delta b, \delta c$ saranno piccolissimi e potranno trascurarsi le loro potenze e quelle delle loro derivate. Indicando allora con degli indici le derivate rispetto al tempo dovremo soddisfare alle relazioni:

$$
(37)\qquad \begin{cases}
\dfrac{(\delta a)''}{a_0} + \dfrac{(\delta b)''}{b_0} + \dfrac{(\delta c)''}{c_0} = 0 \\[2ex]
(\delta a)'' - \dfrac{c_0}{a_0}(\delta c)'' + \left(\dfrac{\partial^2 G_1}{\partial a^2}\right)_0 \delta a + \left(\dfrac{\partial^2 G_1}{\partial a\, \partial b}\right)_0 \delta b = 0 \\[2ex]
(\delta b)'' - \dfrac{c_0}{b_0}(\delta c)'' + \left(\dfrac{\partial^2 G_1}{\partial a \partial b}\right)_0 \delta a + \left(\dfrac{\partial^2 G_1}{\partial b^2}\right)_0 \delta b = 0.
\end{cases}
$$

A queste equazioni si può soddisfare ponendo:

$$
(38)\qquad \delta a = C_1 \operatorname{sen} \varkappa\, t \ , \quad \delta b = C_2 \operatorname{sen} \varkappa t \ , \quad \delta b = C_3 \operatorname{sen} \varkappa\, t
$$

e determinando C_1, C_2, C_3 in modo che soddisfino alla prima di esse e rendino identiche le altre due; allora per determinare $\varkappa$ si avrà un'equazione di secondo grado che deve avere radici reali. Sommando le due soluzioni (38) che corrispondono ai due valori di $\varkappa$ moltiplicati per costanti arbitrarie si trova la soluzione generale delle (37), sicchè si può dire che qualsiasi oscillazione dell'ellissoide si compone sempre di due oscillazioni pendolari della forma (38).