GUIDO FUBINI

I PRINCIPII FONDAMENTALI

DELLA

TEORIA DELLE FUNZIONI ARMONICHE

NEGLI

SPAZI A CURVATURA COSTANTE

Questo lavoro raccoglie alcuni teoremi, che estendono allo spazio curvo alcune delle proprietà delle funzioni armoniche dello spazio piano; questi teoremi, che io spero non privi di ogni interesse, hanno lo scopo di preparare la trattazione rigorosa di alcune altre questioni.

Devo avvertire però che qui manca la trattazione di quelle proposizioni, la cui estensione è immediata, o di per sè stessa, o ricordando altri risultati del presente lavoro.

Nelle prime pagine stabilisco le proprietà di alcuni integrali, che mi permettono, fra l'altro, di estendere i metodi di Neumann.

Mi occupo quindi del problema di Dirichlet, che risolvo in modo esplicito per la sfera, deducendone infine alcuni risultati.

Dò infine degli sviluppi in serie per le funzioni armoniche negli spazii curvi, ciò che porta senz' altro alla generalizzazione di alcuni dei teoremi, che l'Appell [1] dimostra per lo spazio ordinario, tra cui un teorema analogo al teorema di Mittag-Leffler ecc.

Avverto infine che molti di questi calcoli saranno svolti nello spazio ellittico, notando però nei punti fondamentali, quando questi risultati continuano a valere nello spazio iperbolico.

Dò infine alcune generalizzazioni del processo alternato, valevoli anche nello spazio piano, (che ci saranno importanti per una ricerca, cui forse dedicherò una prossima nota, sulle funzioni armoniche che ammettono un gruppo discontinuo finito o infinito) e che non sono forse sprovviste di ogni interesse anche studiate per sè.

[1] *cta Mathematica,* tomo 4.°

§. 1. Supporremo lo spazio a curvatura $+1$, e useremo le coordinate

$$X_1, \ X_2, \ X_3, \ X_4$$

di Weierstrass, legate dalla:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 1 .$$

Potremo porre:

$$X_1 = \cos r$$
$$X_2 = \cos\theta \ \operatorname{sen} r$$
$$X_3 = \cos\varphi \ \operatorname{sen}\theta \ \operatorname{sen} r$$
$$X_4 = \operatorname{sen}\varphi \ \operatorname{sen}\theta \ \operatorname{sen} r$$

cosicchè l'elemento lineare

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2$$

diventa:

$$ds^2 = dr^2 + \operatorname{sen}^2 r \, d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 r \ \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2 .$$

Le coordinate (r, θ, φ) così definite sono le analoghe delle coordinate polari. E precisamente r è la distanza dal punto (X_1, X_2, X_3, X_4) al punto $(1, 0, 0, 0)$; θ è l'angolo che il raggio unente questi due punti fa con la retta unente $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, 0)$; e infine φ è l'angolo che il piano proiettante il punto (x_i) da questa ultima retta fa col piano $X_4 = 0$.

Se ne ha che:

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{sen}^2 r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} \right\} .$$

Facilmente si dimostra l'esistenza di funzioni V armoniche (cioè soddisfacenti alla $\Delta_2 \mathrm{V} = 0$) che dipendano dalla sola r, o dalla sola φ o dalla sola θ. In particolare cotg r è armonica.

§. 2. — Immaginiamo ora un campo τ a tre dimensioni, e indichiamo con ρ la distanza da un punto (x_i) a un punto variabile di τ. Sia infine k una funzione (integrabile) delle coordinate del punto mobile di τ.

Studieremo l'integrale

$$\mathrm{V} = \int k \operatorname{cotg} \rho \, d\tau ,$$

supposto che esista; considerazioni perfettamente analoghe a quelle che si fanno per il problema simile nello spazio euclideo dimostrano che esso rappresenta una funzione del punto (x_i) continua in tutto lo spazio; fuori di τ esso ha anche derivate finite e continue, ottenibili con derivazione sotto il segno d'integrazione.

Fuori di τ è dunque

$$\Delta_2 \mathrm{V} = 0 .$$

Fin qui le dimostrazioni di questi enunciati nulla offrirebbero di nuovo; passeremo perciò allo studio delle derivate prime entro il campo τ, p. e. secondo una direzione qualsiasi s uscente da un punto 0 di τ. Ricordiamo però che noi non vorremmo entrare in questioni di parallelismo, cosicchè sempre (quando parleremo di una direzione s) dovremo parlare di un punto, da cui essa esca.

Esaminiamo

$$\int k \, \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds} \, d\tau .$$

Questo integrale rappresenta entro τ una funzione finita e continua, come apparirà del resto tra breve. E noi dimostremo che esso è proprio uguale a

$$\frac{d\mathrm{V}}{ds} .$$

Prendiamo perciò sulla retta s uscente da 0 un punto 0′, pure dentro τ, vicinissimo al punto 0. E togliamo da τ un intorno di 0 e un intorno di 0′ non intrecciantisi e sia $\bar{\tau}$ il campo residuo.

Poniamo

$$\bar{\mathrm{V}} = \int k \operatorname{cotg} \rho \, d\bar{\tau} ,$$

indichiamo con ρ_0, $\rho_{0'}$ le distanze da un punto (x_i) ai due punti 0, 0′, e poniamo infine

$$\Delta \bar{\mathrm{V}} = \bar{\mathrm{V}}(0') - \bar{\mathrm{V}}(0) ,$$

$$\Delta s = 0\,0' .$$

Sarà

$$\frac{\bar{\mathrm{V}}(0') - \bar{\mathrm{V}}(0)}{\operatorname{sen} \Delta s} = \int k \, \frac{\operatorname{cotg} \rho_{0'} - \operatorname{cotg} \rho_0}{\operatorname{sen} \Delta s} \, d\bar{\tau}$$

$$\frac{\Delta \bar{\mathrm{V}}}{\operatorname{sen} \Delta s} = \int k \, \frac{\operatorname{sen}(\rho_{0'} - \rho_0)}{\operatorname{sen} \Delta s} \, \frac{1}{\operatorname{sen} \rho_0} \, \frac{1}{\operatorname{sen} \rho_{0'}} \, d\bar{\tau}$$

$$\left| \frac{\Delta \bar{\mathrm{V}}}{\Delta s} \right| \cdot \left| \frac{\Delta s}{\operatorname{sen} \Delta s} \right| \leq \int |k| \cdot \left| \frac{\operatorname{sen}(\rho_{0'} - \rho_0)}{\operatorname{sen} \Delta s} \right| \cdot \left| \frac{1}{\operatorname{sen} \rho_{0'}} \right| \cdot \left| \frac{1}{\operatorname{sen} \rho_0} \right| \cdot d\bar{\tau}.$$

Sia ora τ (e quindi anche $\bar{\tau}$) così piccolo, che

$$\rho_{0'} < \frac{\pi}{2} , \quad \rho_0 < \frac{\pi}{2}$$

per ogni posizione del punto (x_i) entro τ.

Allora, essendo

$$| \rho_{0'} - \rho_0 | < \Delta s$$

sarà pure

$$| \operatorname{sen}(\rho_{0'} - \rho_0) | < \operatorname{sen} \Delta s$$

e quindi:

$$\left| \frac{\Delta \bar{\mathrm{V}}}{\Delta s} \right| \cdot \left| \frac{\Delta s}{\operatorname{sen} \Delta s} \right| \leq \int |k| \cdot \left| \frac{1}{\operatorname{sen} \rho_{0'} - \operatorname{sen} \rho_0} \right| d\bar{\tau} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int |k| \, \frac{d\bar{\tau}}{\operatorname{sen}^2 \rho_0} + \frac{1}{2} \int |k| \, \frac{d\bar{\tau}}{\operatorname{sen}^2 \rho_{0'}} .$$

Nè l'ipotesi testè fatta su τ può limitare la generalità, perchè, se τ fosse più ampio, noi lo spezzeremmo in due parti, una τ' piccola a piacere, racchiudente 0, 0′ e soddisfacente alla condizione richiesta, e un'altra τ'' esterna, cui 0, 0' risulterebbero esterni. Per τ'' nulla vi sarebbe da dire, e basterebbe limitarci allo studio di τ.

Studiamo ora i due integrali del terzo membro dell'ultima formula; esprimiamo perciò $d\bar{\tau}$ con coordinate polari. Se noi prendiamo p. es. il punto 0 come punto (1, 0, 0, 0); allora

$$d\bar{\tau} = \operatorname{sen}^2 \rho_0 \operatorname{sen} \theta \, d\rho_0 \, d\theta \, d\varphi$$

e l'integrale

$$\int |k| \frac{d\bar{\tau}}{\operatorname{sen}^2 \rho_0}$$

diventa:

$$\int_{(\bar{\tau})} |k| \operatorname{sen} \theta \, d\rho_0 \, d\theta \, d\varphi ,$$

che è piccolo a piacere con $\bar{\tau}$ e quindi anche con τ.

Analogamente per

$$\int |k| \frac{d\bar{\tau}}{\operatorname{sen}^2 \rho_{0'}} .$$

Facciamo ora tendere a zero gli intorni esclusi, cioè facciamo tendere $\bar{\tau}$ verso τ; le proprietà precedenti continueranno a sussistere. Ma anche

$$\int k \frac{d \operatorname{cotg} \rho_0}{ds} d\tau$$

è piccolo a piacere con τ; ciò dimostra un'asserzione precedentemente fatta e si verifica passando al solito a coordinate polari, e osservando che

$$\left| \int k \frac{d \operatorname{cotg} \rho_0}{ds} d\tau \right| \leq \int | k \cos (\rho_0, ds) \, d\theta \, d\varphi \, d\rho_0 | \, d\tau$$

dove (ρ_0, ds) è l'angolo delle due rette s, ρ_0.

Premesso questo, spezziamo τ in due parti, una τ' piccola a piacere, racchiudente i punti 0, 0', e una τ'' residua, a cui 0 sarà esterno.

Avremo:

$$\left| \int k \frac{\Delta \operatorname{cotg} \rho}{\Delta s} d\tau - \int k \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int k \frac{\Delta \operatorname{cotg} \rho}{\Delta s} d\tau'' - \int k \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds} d\tau'' \right| +$$

$$+ \left| \int k \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds} d\tau' \right| + \left| \int k \frac{\Delta \operatorname{cotg} \rho}{\Delta s} d\tau' \right| .$$

Se ne trae che

$$\int k \frac{\Delta \operatorname{cotg} \rho}{\Delta s} d\tau - \int k \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds} d\tau$$

è piccola a piacere con Δs, e quindi:

$$\lim_{\Delta s = 0} \int \frac{\Delta \operatorname{cotg} \rho}{\Delta s} k \, d\tau = \int k \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds} d\tau$$

ossia:

$$\frac{d}{ds} \int k \operatorname{cotg} \rho \, d\tau = \int k \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds} d\tau .$$

§. 3. — Più complicata è invece la discussione, quando si vogliano studiare le derivate seconde di V dentro τ, sebbene anche qui la trattazione ricordi in parte qua e là quanto si fa nello spazio piano. Immagineremo di voler studiare

$$\frac{d^2 V}{ds^2}$$

nel punto 0 interno a τ, e dove s indica una direzione uscente da 0.

Spezzeremo V in due altri integrali, uno in cui k abbia un valore costante k_0 (il valore di k nel punto 0) e l'altro in cui k assume nel punto 0 un valore nullo, e sia continuo in 0.

Cominciamo dal secondo, ammettendo che

$$\frac{k}{\operatorname{sen} \rho_0} , \quad \frac{k}{\operatorname{tg} \rho_0}$$

restino uniformemente integrabili su ogni direzione uscente dal punto 0.

Dimostreremo che

$$\frac{d^2 V}{ds^2} = \int k \, \frac{d^2 \operatorname{cotg} \rho}{ds^2} \, d\tau$$

nel punto 0.

Immaginiamo, come prima, un punto 0′ pure interno a τ, vicinissimo al punto 0 ed escludiamo da τ un intorno di 0 e un intorno di 0′ (escludentisi) e sia $\bar{\tau}$ il campo residuo.

Osserviamo che

$$-\frac{d \operatorname{cotg} \rho_0}{ds} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \rho_0} \cos(\rho_0, ds)$$

col solito significato dei simboli.

Sia

$$0 \equiv (1, 0, 0, 0)$$
$$0' \equiv (\cos s, \operatorname{sen} s, 0, 0).$$

Sia infine

$$C \equiv (\cos r, x_2, x_3, x_4)$$

un punto variabile nel campo τ, e sia r' la distanza da C al punto 0′.

Avremo, per quanto abbiamo visto:

$$-\frac{\Delta \operatorname{cotg} \rho_0}{ds} = -\frac{x_2}{\operatorname{sen}^3 r} + \frac{x_2 \cos s - \cos r \operatorname{sen} s}{\operatorname{sen}^3 r'} =$$

$$= (x_2 \cos s - \cos r \operatorname{sen} s)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^3 r'} - \frac{1}{\operatorname{sen}^3 r}\right) -$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}^3 r}\left[x_2(1 - \cos s) + \operatorname{sen} s \cos r\right] =$$

$$= (x_2 \cos s - \cos r \operatorname{sen} s)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^3 r'} - \frac{1}{\operatorname{sen}^3 r}\right) -$$

$$-2 \operatorname{sen}\frac{s}{2}\left[x_2 \operatorname{sen}\frac{s}{2} + \cos r \cos\frac{s}{2}\right]\frac{1}{\operatorname{sen}^3 r}.$$

Notiamo che:

$$x_2 \cos s - \cos r \operatorname{sen} s$$

misura il coseno della distanza dal punto C al punto

$$0'_1 \equiv (-\operatorname{sen} s, \cos s, 0, 0)$$

coniugato di 0′ sulla retta 0 0′ ed e perciò uguale a

$$\operatorname{sen} r' \cos \gamma$$

dove γ è l'angolo, che la retta τ' forma con la retta $0' 0'_1$.

Avremo:

$$-\frac{\Delta \dfrac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds}}{\operatorname{sen} s} =$$

$$= \frac{x_2 \cos s - \cos r \operatorname{sen} s}{\operatorname{sen} r'} \, \frac{\operatorname{sen} r - \operatorname{sen} r'}{\operatorname{sen} s} \, \frac{1}{\operatorname{sen} r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 r} + \frac{1}{\operatorname{sen} r \operatorname{sen} r'} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 r'}\right] -$$

$$-\frac{1}{\cos\dfrac{s}{2}}\left[x_2 \operatorname{sen}\frac{s}{2} + \cos\frac{s}{2}\right]\frac{1}{\operatorname{sen}^3 r}.$$

Per quanto abbiamo detto è:

$$\left|\frac{x_2 \cos s - \cos r \operatorname{sen} s}{\operatorname{sen} r'}\right| = |\cos \gamma| \leq 1.$$

Così pure, essendo:

$$|\operatorname{sen} r - \operatorname{sen} r'| = 2 \operatorname{sen}\left|\frac{r - r'}{2}\right| \cos\frac{r + r'}{2}$$

$$\operatorname{sen} s = 2 \operatorname{sen}\frac{s}{2} \cos\frac{s}{2}$$

$$|r - r'| \leqq s$$

ed s abbastanza piccolo, e quindi $\cos\frac{s}{2}$ abbastanza prossimo a 1,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} r - \operatorname{sen} r'}{\operatorname{sen} s}\right|$$

resta inferiore a un limite finito.

Ricordiamo ora l'ipotesi fatta per k.

Ne dedurremo che

$$\int k \frac{\Delta \dfrac{d \operatorname{cotg} \rho_0}{ds}}{\Delta s} d\tau$$

è piccolo a piacere con τ.

Osserviamo ora che:

$$\frac{d^2 \operatorname{cotg} \rho_0}{ds^2} = \frac{\cos r}{\operatorname{sen}^3 r} \left\{ \frac{3 x_2^2}{\operatorname{sen}^2 r} - 1 \right\}$$

e che

$$\left| \frac{x_2}{\operatorname{sen} r} \right|^2 = |\cos \theta|^2 \leq 1$$

resta inferiore a un limite determinato e finito.

Ne dedurremo, ricordando le solite ipotesi, che anche

$$\int k \frac{d^2 \operatorname{cotg} \rho}{ds^2} d\tau$$

è piccolo a piacere con τ; basta, per veder questo, passare a coordinate polari.

Il resto della discussione è ora privo di qualsiasi difficoltà: spezziamo il campo τ in due pezzi: uno τ' piccolo rinchiudente i punti $0, 0'$, e l'altro τ'', cui 0 è esterno; V sarà somma di due funzioni V', V'' date da:

$$V' = \int k \operatorname{cotg} \rho \, d\tau'$$

$$V'' = \int k \operatorname{cotg} \rho \, d\tau''.$$

Ora:

$$\left| \int k \frac{\Delta \dfrac{d \operatorname{cotg} \rho}{\Delta s}}{ds} d\tau - \int k \frac{d^2 \operatorname{cotg} \rho}{ds^2} d\tau \right| \leq$$

$$\leq \left| \int k \frac{\Delta \dfrac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds}}{\Delta s} d\tau'' - \int k \frac{d^2 \operatorname{cotg} \rho}{ds^2} d\tau'' \right| +$$

$$+ \left| \int k \frac{\Delta \dfrac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds}}{\Delta s} d\tau' \right| + \left| \int k \frac{d^2 \operatorname{cotg} \rho}{ds^2} d\tau' \right| .$$

La differenza del primo membro si può perciò rendere piccola a piacere con Δs, (ossia con la distanza $0\,0'$) e col campo τ', da cui essa è indipendente. Quindi:

$$\int k \frac{d^2 \operatorname{cotg} \rho}{ds^2} d\tau = \lim_{\Delta s = 0} \int k \frac{\Delta \dfrac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds}}{\Delta s} d\tau =$$

$$= \frac{d}{ds} \int k \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{ds} d\tau = \frac{d^2 V}{ds^2} .$$

Anche per derivate seconde è legittima dunque la derivazione sotto il segno, e vale la formola di Poisson

$$\Delta_2 V = 0 .$$

Vogliamo ora studiare l'altro caso, il caso cioè in cui k è una costante k_0.

I soliti spezzamenti rendono ben chiaro che basterà limitarci allo studio di un intorno di 0 piccolo a piacere, tutto interno a τ, e di forma qualsiasi, p. es. di forma sferica col centro in 0.

Prendiamo 0 come punto $(1, 0, 0, 0)$ e usiamo coordinate polari; calcoliamo

$$\int k_0 \operatorname{cotg} \rho \, d\tau$$

in un punto (r, θ, φ), supposto (ciò che abbiamo visto non limitare la generalità) che τ sia una sfera di centro 0 e raggio ε. Ciò si fa facilmente, spezzando questa sfera τ in due parti, di cui una sia una sfera tangente a τ e col centro in (r, θ, φ) e l'altra la parte residua. Otterremo:

$$V(r, \theta, \varphi) = 4 \pi k_0 \left\{ \frac{r}{2} \operatorname{cotg} r - \frac{\cos^2 r}{2} + \frac{\cos 2r - \cos 2\varepsilon}{4} \right\} .$$

Donde ricaviamo che varrà sempre, sotto le ammesse condizioni, la formola di Poisson:

$$\Delta_2 V = -4 \pi k ,$$

che dimostra non potersi ottenere le derivate seconde derivando sotto il segno d'integrazione.

Tacerò qui delle estensioni di altri teoremi (p. es. di Newton ecc.) affatto immediate.

§. 4 — Accennerò di volo alle formule relative allo spazio di Lobacevskij a cui i risultati precedenti si possono ancora generalizzare, sebbene per le derivate seconde occorra uno studio leggermente differente.

Se lo spazio è a curvatura -1, le coordinate di Weierstrass

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4$$

sono legate dalla

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$$

cosicchè si può porre

$$\begin{aligned} x_1 &= \cosh r \\ x_2 &= \operatorname{senh} r \cos\theta \\ x_3 &= \operatorname{senh} r \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ x_4 &= \operatorname{senh} r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

col precedente significato dei simboli.

L'elemento lineare

$$ds^2 = dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 - dx_1^2$$

assume la forma:

$$ds^2 = dr^2 + \operatorname{senh}^2 r\, d\theta^2 + \operatorname{senh}^2 r \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

L'integrale, finora studiato, ha l'analogo in

$$\int k \cosh\rho\ d\tau\,,$$

mentre si ha

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\operatorname{senh}^2 r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{senh}^2 r\,\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

§. 5. — Ci volgiamo ora a studiare altri integrali, e precisamente gli integrali che si presentano nella seguente formula, estensione di quella di Green

$$V' = \int\left(\frac{V}{4\pi}\,\frac{d \operatorname{cotg}\rho}{dn} - \frac{\operatorname{cotg}\rho}{4\pi}\,\frac{dV}{dn}\right) d\sigma$$

col solito significato dei simboli. Essi sono di due forme:

$$\int k \operatorname{cotg}\rho\ d\sigma$$

$$\int k\ \frac{d\operatorname{cotg}\rho}{dn}\ d\sigma.$$

Noi cominceremo col primo, dove con ρ indichiamo al solito la distanza da un punto (x_i) dello spazio a un punto mobile su σ, e con σ intendiamo un pezzo di superficie, dotato delle proprietà, cui più tardi accenneremo, e regolare in ognuno dei punti, che esamineremo [1].

La seguente discussione, sebbene applicabile anche allo spazio euclideo, è, credo, assolutamente differente da quanto si fa di solito in questo spazio, anche perchè nel nostro caso non possiamo parlare di derivate secondo una direzione.

L'integrale

$$V = \int k \operatorname{cotg}\rho\ d\sigma$$

ci rappresenta una funzione esistente in tutto lo spazio, finita e continua, le cui derivate, eccetto al più su σ, sono ottenibili con derivazione sotto il segno d'integrazione, cosicchè eccetto al più su σ

$$\Delta_2 V = 0.$$

Per fare queste verifiche basta ripetere parola per parola le cose analoghe dello spazio piano, appena si sappia mutare il nostro

---

[1] Con la parola «regolare» intendiamo che le equazioni, che troveremo, definenti σ ammettano, derivate finite e continue, fino all'ordine che ci occorrerà.

integrale in un altro integrale esteso a un'area piana; siccome questo passaggio ci sarà anche utile più tardi, noi ne svolgeremo effettivamente il calcolo.

Consideriamo a tal fine un elemento $d\sigma$ e il piano Ω tangente a σ in un suo punto B; sia t l'angolo, che Ω forma con un piano ω; sia α la distanza da B al punto L del piano ω, coniugato alla retta (ω, Ω). Il piano ω sia il piano $x_4 = 0$, il punto L sia il punto $(0, 0, 1, 0)$ cosicchè sulla retta (ω, Ω) esisteranno i punti $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, 0)$; queste ipotesi nulla tolgono alla generalità. Le coordinate di B siano $\left(\text{posto } \nu = \dfrac{\cos \alpha}{\cos t}\right)$

$$x_1 \quad x_2 \quad \nu \cos t \quad \nu \operatorname{sen} t$$

dove

$$x_1^2 + x_2^2 + \nu^2 = 1 .$$

Le coordinate di due altri punti di $d\sigma$ siano

$$x_1 + dx_1 \,,\; x_2 + dx_2 \,,\; (\nu + d\nu) \cos t \,,\; (\nu + d\nu) \operatorname{sen} t$$

$$x_1 + \delta x_1 \,,\; x_2 + \delta x_2 \,,\; (\nu + \delta\nu) \cos t \,,\; (\nu + \delta\nu) \operatorname{sen} t .$$

Le proiezioni ortogonali di questi tre punti sul piano ω saranno rispettivamente (posto $\Delta = x_1^2 + x_2^2 + \nu^2 \cos^2 t$):

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{llll} \dfrac{x_1}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{x_2}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{\nu \cos t}{\sqrt{\Delta}} & 0 \\[2ex] \dfrac{x_1 + dx_1}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{x_1}{2\sqrt{\Delta^3}}\, d\Delta \,, & \dfrac{x_2 + dx_2}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{x_2}{2\sqrt{\Delta^3}}\, d\Delta \,, & \dfrac{(\nu + d\nu) \cos t}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{\nu \cos t}{2\sqrt{\Delta^3}}\, d\Delta \,, & 0 \\[2ex] \dfrac{x_1 + \delta x_1}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{x_1}{2\sqrt{\Delta^3}}\, \delta\Delta \,, & \dfrac{x_2 + \delta x_2}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{x_2}{2\sqrt{\Delta^3}}\, \delta\Delta \,, & \dfrac{(\nu + \delta\nu) \cos t}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{\nu \cos t}{2\sqrt{\Delta^3}}\, \delta\Delta \,, & 0 \end{array} \right.$$

I quadrati delle aree dei triangoli formati da queste due terne di punti (una su Ω, e una su ω) saranno date, a meno di uno stesso

fattore numerico da:

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \nu \cos t & \nu \operatorname{sen} t \\ x_1 + dx_1 & x_2 + dx_2 & (\nu + d\nu) \cos t & (\nu + d\nu) \operatorname{sen} t \\ x_1 + \delta x_1 & x_2 + \delta x_2 & (\nu + \delta\nu) \cos t & (\nu + \delta\nu) \operatorname{sen} t \end{array} \right\|^2 = \\ = \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \nu \\ dx_1 & dx_2 & d\nu \\ \delta x_1 & \delta x_2 & \delta\nu \end{array} \right|^2$$

e da:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \dfrac{x_1}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{x_2}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{\nu \cos t}{\sqrt{\Delta}} & 0 \\[2ex] \dfrac{x_1 + dx_1}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{x_1}{2\sqrt{\Delta^3}}\, d\Delta \,, & \dfrac{x_2 + dx_2}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{x_2}{2\sqrt{\Delta^3}}\, d\Delta \,, & \dfrac{(\nu + d\nu) \cos t}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{\nu \cos t}{2\sqrt{\Delta^3}}\, d\Delta \,, & 0 \\[2ex] \dfrac{x_1 + \delta x_1}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{x_1}{2\sqrt{\Delta^3}}\, \delta\Delta \,, & \dfrac{x_2 + \delta x_2}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{x_2}{2\sqrt{\Delta^3}}\, \delta\Delta \,, & \dfrac{(\nu + \delta\nu) \cos t}{\sqrt{\Delta}} - \dfrac{\nu \cos t}{2\sqrt{\Delta^3}}\, \delta\Delta \,, & 0 \end{array} \right\|^2 = \\ = \frac{\cos^2 t}{\Delta^3} \left| \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & \nu \\ dx_1 & dx_2 & d\nu \\ \delta x_1 & \delta x_2 & \delta\nu \end{array} \right|^2 .$$

Dunque il rapporto R tra le aree della proiezione su ω di $d\sigma$ e di $d\sigma$ stesso è

$$R = \frac{\cos t}{\sqrt{\Delta^3}} = \frac{\cos t}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \nu^2 \cos^2 t}} = \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \operatorname{tang}^2 t}} .$$

Prendiamo come piano ω su cui si proietta il piano tangente a σ in un suo punto O; e su ω prendiamo come coordinate la distanza ρ' dal punto O e l'anomalia θ (contata a partire da un raggio qualunque).

L'integrale precedente diventa:

$$\iint h \operatorname{cotg} \rho \operatorname{sen} \rho' \, d\rho' \, d\theta$$

dove

$$h = \frac{k}{R} .$$

Le verifiche dei fatti enunciati sono allora immediate.

Vogliamo ora esaminare sotto quali condizioni risulta vera in questo caso la formola di Poisson relativa alle derivate normali del precedente integrale, cosa per noi interessante, perchè si ricollega a una formula della teoria dei doppi strati, donde anche in questo spazio si ricava un metodo (di Neumann) per la risoluzione del problema di Dirichlet.

Immaginiamo un punto A posto sulla normale n a σ in un suo punto 0, che si muova su n. Calcoliamo per ogni posizione di A l'integrale

$$\frac{dV}{dn} = \int k \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{dn} d\sigma ,$$

dove però (a differenza di quanto avviene per i doppi strati) la derivata è da prendersi secondo la citata direzione fissa n.

Spezziamo V in due parti, una V' relativa a un piccolo intorno σ' di 0, e una V'' relativa al campo residuo σ''.

Nulla v'è a dire in quanto a σ'', perchè $\frac{dV''}{dn}$ è chiaramente continua su tutta la retta n. Occupiamoci perciò di

$$\frac{dV'}{dn} .$$

Si ha se k_0 è il valore di k nel punto 0,

$$\frac{dV'}{dn} = k_0 \int \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{dn} d\sigma' + \int\int \frac{k - k_0}{R} \frac{d \operatorname{cotg} \rho}{dn} \operatorname{sen} \rho' \, d\rho' \, d\theta .$$

Per l'ipotesi della regolarità di σ nel punto 0 si vede facilmente che il secondo integrale del secondo membro di questa formula è piccolo a piacere con σ', appena si ammetta che $k - k_0$ sia un conveniente infinitesimo. Di esso è perciò inutile occuparci. Studiamo dunque il primo dei due integrali citati, che noi indicheremo con (1).

Per conservare la massima generalità studiamo insieme un altro integrale, che indicheremo con (2), e che si ottenga da quello, cambiando n in n' (dove n' è la direzione della solita normale in 0 opposta alla n). E indichiamo con Σ la somma di questi due integrali. Ora osserviamo che la derivata

$$\frac{d \operatorname{cotg} \rho}{dn} d\sigma' ,$$

è presa secondo una direzione fissa n; perciò questa espressione misura l'angolo solido sotto cui da un punto B di $d\sigma$ si vede un elemento equivalente a $d\sigma'$, posto in A normalmente alla n. E sotto la parola " *angolo solido* „ intendiamo la proiezione di questo elemento fatta dal punto B considerato sul suo piano polare.

Un risultato analogo vale per l'integrando relativo all'integrale, che abbiamo indicato con (2).

La somma Σ di (1) e (2) si può dunque presentare come un integrale esteso a σ', dove il differenziale integrando è la somma degli angoli infinitesimi sotto cui da un punto B variabile di σ' si vedono due elementi $d\sigma'$ normali a n e posti a distanze (in verso opposto) n ed n' dal piede 0 della normale n. Consideriamo la proiezione B' del punto B sul piano ω tangente a σ nel punto 0. E nel computo della somma di questi due angoletti sostituiamo il punto B' al punto B; indichiamo Σ' ciò che diventa Σ dopo questa modificazione.

La differenza delle due funzioni sotto il segno integrale in Σ e Σ' è dunque una funzione del punto variabile di σ', infinitesima con la distanza s da esso al piano tangente in 0, ed evidentemente nulla in 0, qualunque siano n, n'. La distanza s è per la supposta regolarità di σ in 0 infinitesima di second'ordine rispetto a ρ'; ma checchè sia di questo, noi supporremo soltanto che, per la supposta regolarità, si possa scegliere σ' tanto piccolo, in modo che questa differenza, già nulla in 0, resti inferiore a un valore finito per tutti i punti di σ', qualunque siano n, n' [1].

E allora è ben chiaro che alla considerazione di σ' (o di σ per quanto abbiamo già visto) si potrà sostituire la considerazione di

[1] Basterebbe anzi supporla uniformemente integrabile (rispetto ad n e n') in un intorno di 0.

un'area piana piccola a piacere, posta nel piano tangente di σ nel punto 0, e con un valore k_0 costante di k. A quest'area piana potremo evidentemente supporre una forma qualunque, p. e. circolare col centro nel punto 0.

Sia $0A = n$; sia C un punto variabile della nostra area piana, e sia

$$0C = \rho'.$$

Sarà

$$\cos\rho = \cos\rho' \cos n.$$

E il nostro integrale diventa così la derivata rapporto a n di

$$2\pi k_0 \int \operatorname{cotg}\rho \operatorname{sen}\rho'\, d\rho' = 2\pi k_0 \left\{ \sqrt{\sec^2 n - \mathrm{R}} - \operatorname{tang} n \right\}$$

dove R è una costante dipendente dal raggio del cerchio.

La nostra derivata sarà:

$$2\pi k_0 \frac{\sec^3 n}{\sqrt{\sec^3 n - \mathrm{R}}} \operatorname{sen} n - 2\pi k_0 \cos n.$$

Essa ha perciò un limite determinato quando n tende a zero, ossia quando A tende verso il punto 0. Facciamo tendere A verso 0 dalle due parti di σ; i suoi limiti, che, indicheremo con $\frac{d\mathrm{V}}{dn}, \frac{d\mathrm{V}}{dn'}$ sono legati dalla

$$\frac{d\mathrm{V}}{dn} + \frac{d\mathrm{V}}{dn'} = -4\pi k_0,$$

che, sotto le fatte ipotesi, vale in generale.

Osservazione I.ª — Con una ipotesi relativa agli integrali (1), (2) analoga a quella fatta per la loro somma Σ, troveremmo che anche le derivate secondo n, n' tendono a un limite determinato per

$$n = 0$$
$$n' = 0.$$

Se l'ipotesi da noi fatta per Σ vale solo, quando n ed n' tendono a zero in modo determinato, il nostro risultato vale solo in questo caso.

Osservazione II.ª — Invece di un piano tangente, si potrebbe usare una sfera osculatrice, o un'altra superficie qualunque tangente in 0 per cui si potesse verificare in un modo qualsiasi la formula di Poisson relativa almeno al caso di $k =$ costante. Ammettendo per questa superficie un'ipotesi analoga a quella fatta dianzi relativamente al piano tangente, estenderemmo la formula di Poisson ad altri casi.

Osservazione III.ª — Per lo spazio iperbolico valgono tutte le precedenti discussioni, e i precedenti risultati, com'è senz'altro evidente.

§. 6. — Studiamo ora l'integrale

$$\int k \frac{d \operatorname{cotg}\rho}{dn} d\sigma,$$

dove k, σ hanno il solito significato; n è la normale nel punto variabile di σ.

Qui le considerazioni sono identiche a quanto si fa nello spazio euclideo [1], perchè qui $\int \frac{d \operatorname{cotg}\rho}{dn} d\sigma$ misura l'angolo solido (Cfr. §. 5) sotto cui σ è visto dal punto, cui si riferisce ρ.

Posto questo, i metodi di Neumann sono *senz'altro* applicabili [2]; i pochi cangiamenti da introdursi non sarebbero che verbali, e io ne sopprimerò la discussione.

§. 7. — Ci sarà molto utile più tardi il seguente teorema:

Se è data su una superficie Σ chiusa convessa (p. es. su una sfera) una catena T *di valori a cui il metodo di Neumann sia applicabile, la funzione* U *armonica entro Σ che ne viene definita è in ogni punto interno a Σ il limite di una funzione armonica* U' *che su Σ prende gli stessi valori* T *di* U, *tranne che negli intorni ω di uno o più*

[1] Cfr. NEUMANN. *Logaritmisches und Newtonsches Potential.* S. 136.

[2] NEUMANN. *L. cit.,* pag. 160.

punti 0 *di* Σ, *in numero finito, in cui essa si annulla, col tendere a zero di questi intorni.*

La dimostrazione di questo teorema per noi fondamentale, sarà da noi svolta dapprima nel caso particolare che U è nullo e continuo in 0.

In tal caso osserviamo che

$$U' - U$$

rappresenta una funzione armonica, i cui massimi e minimi sono su Σ, ossia (se non sono nulli) si trovano su ω; e col tendere a zero degli intorni ω, questi massimi e minimi tenderanno perciò a zero.

Consideriamo ora il caso generale; e immaginiamo U' sviluppata in serie al modo di Neumann. Immaginiamo poi gli intorni ω definiti da un parametro λ, che si annulli con essi; le funzioni, che costituiscono i singoli termini dello sviluppo di U' saranno, per note proprietà degli integrali definiti continui in λ. Se noi dimostreremo che la nostra serie è uniformemente convergente anche rispetto a λ, il nostro teorema sarà dimostrato. Ma questo fatto è immediatamente evidente, quando si pensi [1] che la convergenza di quella serie si dimostra confrontando la serie stessa con una progressione geometrica decrescente, il cui primo termine è l'oscillazione al contorno, oscillazione che non può superare contemporaneamente, qualunque sia λ, il massimo valore assoluto e la massima oscillazione della catena data T.

§. 8. — Noi ci proponiamo ora la risoluzione del problema di Dirichlet nel caso della sfera per mezzo di un integrale definito.

Questo problema riesce determinato in modo univoco, dando la forma che deve avere questo integrale; e noi seguendo le cose analoghe dello spazio piano, ci proporremo che questo integrale debba avere la forma

$$\int V \Lambda \, d\sigma ,$$

[1] NEUMANN. *L. cit.*, pag. 187-188.

dove V sia la catena prefissata di valori sul contorno σ della nostra sfera, e Λ sia una funzione da determinarsi del punto variabile di σ, e del punto, in cui noi vogliamo calcolare la nostra funzione.

Noi ora costruiremo effettivamente questa funzione Λ risolvendo così la nostra questione in modo completo.

Osserviamo intanto che nella

$$\Delta_2 U =$$

$$= \frac{1}{\text{sen}^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\text{sen}^2 r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2 r \, . \, \text{sen}\, \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \text{sen}\, \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right\} + \frac{1}{\text{sen}^2 r} \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

la somma del secondo e del terzo termine coincidono a meno di un fattore, funzione della sola r, con la espressione analoga dello spazio piano.

E siccome precisamente da questa somma si deduce nello spazio piano l'equazione, cui devono soddisfare le funzioni sferiche, si può pensare che la teoria di queste funzioni, tanto nello spazio piano che nello spazio curvo deve avere analoghe applicazioni.

Cerchiamo perciò di determinare una funzione armonica nel nostro spazio e che sia il prodotto di una funzione sferica di indice n, che indicheremo con S_n, per una funzione R della sola r. Ne avremo:

$$\frac{d}{dr} \left(\text{sen}^2 r \frac{dR}{dr} \right) = n\,(n+1)\, R .$$

Posto $t = \text{cotg}\, r$, questa equazione diventa:

$$(1+t^2) \frac{d^2R}{dt^2} = n\,(n+1)\, R$$

e, fatto

$$\rho = \frac{1}{t} = \text{tang}\, r ,$$

essa diventa:

$$\rho^2 (1+\rho^2) \frac{d^2R}{d\rho^2} + 2\rho\,(1+\rho^2) \frac{dU}{d\rho} - n\,(n+1)\, U = 0 .$$

Le varie forme date a questa equazione dimostrano che unici punti singolari sono i punti

$$\rho = 0 \ , \ \rho = +i \ , \ \rho = -i \, .$$

Nello spazio iperbolico le formule analoghe sarebbero

$$\Delta_2 \mathrm{U} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{senh}^2 r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\operatorname{senh}^2 r \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \varphi^2} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\operatorname{senh}^2 r \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} \right) = n\,(n+1)\,\mathrm{R}$$

e, posto, $t = \operatorname{cotgh} r$

$$(t^2 - 1) \frac{d^2 \mathrm{R}}{dt^2} = n\,(n+1)\,\mathrm{R}$$

ossia, posto $\rho = \frac{1}{t} = \operatorname{tangh} r$

$$\rho^2 (1 - \rho^2) \frac{d^2 \mathrm{R}}{d\rho^2} + 2\rho\,(1 - \rho^2) \frac{d\mathrm{R}}{d\rho} - n\,(n+1)\,\mathrm{R} = 0 \, .$$

i cui punti singolari sono

$$\rho = 0 \ , \ \rho = \pm 1$$

ossia

$$r = 0 \ , \ r = \infty \, .$$

Considerate le R solo sull'asse reale del piano complesso della r, esse, a distanza finita, non hanno, in entrambe le metriche citate, che il punto singolare

$$r = 0 \, .$$

Vediamo, p. es. nello spazio ellittico, che cosa capita in questo punto.

Calcoliamo facilmente l'equazione determinante, le cui radici sono

$$n \ , \ -n - 1 \, .$$

E siccome noi supponiamo che

$$n > 0$$

ne ricaviamo che certamente alla radice n corrisponde un integrale uniforme nel punto $\rho = 0$, ossia $r = 0$.

Di più vediamo, con le solite formule, che anche alla radice

$$-n - 1$$

corrisponde in $\rho = 0$, $(r = 0)$ un integrale uniforme, dotato però di singolarità polare.

L'integrale corrispondente alla radice n è

$$\rho^n \left\{ 1 - \frac{n\,(n+1)}{2} \rho^2 + \ldots\ldots\ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{n\,(n+2) \ldots\ldots (n+2\,k-2)\,(n+3)\,(n+5) \ldots\ldots (n+2\,k-1)}{2^k\,\Pi\,(k)\,(2\,n+3)\,(2\,n+5) \ldots\ldots (2\,n+2\,k+1)} \rho^{2k} + \ldots\ldots \right\} .$$

Questo integrale si esprime facilmente *per funzioni ipergeometriche o per integrali definiti.*

Alla radice $-n - 1$ corrispondono rispettivamente i seguenti integrali:

per $n = 0$	$\frac{1}{\rho}$
per $n = 1$	$1 + \frac{1}{\rho^2}$
per $n = 2$	$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^3}$
per $n = 3$	$\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^4}$
. . . .	. . . .

Studiamo frattanto i primi di questi integrali, corrispondenti alla radice n.

Noi li indicheremo indifferentemente con

$$\mathrm{R}_n(r) \quad \text{o} \quad \text{con } \mathrm{R}_n(\rho) \, ;$$

e noi vediamo che in tutta una striscia (del piano complesso ρ) comprendente l'asse reale, ma non i punti

$$\rho = \pm i$$

(in cui ci è inutile studiare questi integrali) le nostre funzioni R_n

si ottengono con prolungamenti analitici dappertutto finite, continue e monodrome e, per i teoremi di Mittag-Leffler si possono esprimere quindi con una serie di funzioni razionali convergente in tutta la striscia.

Le espressioni

$$R_n \, S_n \, (\theta, \varphi)$$

sono dunque funzioni armoniche.

Ora il nostro integrale

$$\int V \, \Lambda \, d\sigma \, ,$$

deve, per ipotesi, entro σ rappresentare una funzione armonica; facciamo per un momento l'ipotesi che esso sia sviluppabile in una serie della forma

$$\sum_0^\infty S_n \, R_n \, .$$

Si tratta di determinare le funzioni S_n; sia P il raggio della nostra sfera $\left(< \frac{\pi}{2}\right)$.

Se noi immaginiamo che il nostro sviluppo debba valere anche al contorno σ della sfera, (su cui la nostra funzione armonica prende i valori prefissati V) ne dedurremo

$$V = \sum_0^\infty S_n \, R_n \, (P) \, .$$

E noi ammetteremo di più per un momento che V sia su σ sviluppabile per funzioni sferiche, e che unico sviluppo sia con le solite notazioni

$$(\alpha) \qquad V = \sum \frac{2n+1}{4\pi} \int V \, P_n \, d\sigma$$

Ne deduciamo

$$S_n = \frac{2n+1}{4\pi \, R_n \, (P)} \int V \, P_n \, d\sigma \, .$$

Se dunque tutte queste nostre ipotesi sono conformi al vero ne dedurremo che sarà

$$(\beta) \qquad \int V \, \Lambda \, d\sigma = \sum \frac{2n+1}{4\pi} \frac{R_n \, (\rho)}{R_n \, (P)} \int V \, P_n \, d\sigma$$

che ci permette di supporre che sarà:

$$(\gamma) \qquad \Lambda = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \frac{R_n \, (r)}{R_n \, (P)} \, P_n \, .$$

Scopo nostro è ora di stabilire rigorosamente queste due ultime formule, al cui proposito osserveremo che ogni termine di questi sviluppi si può esprimere semplicemente per mezzo di integrali definiti.

Questa dimostrazione sarà intanto svolta nel caso che lo sviluppo (α) sia effettivamente possibile, e che la serie del secondo membro di (α) sia uniformemente convergente.

Posto ciò, dobbiamo intanto far vedere, come prima cosa, che i nostri sviluppi hanno effettivamente un significato, cioè che

$$R_n \, (P)$$

che comparisce nel denominatore del termine generale non è nullo per nessun valore di $P \, (P \neq 0)$, ossia che *le funzioni* $R_n \, (\rho)$ *non hanno, oltre l'origine, alcun altro zero sull'asse reale.* Questo fatto riesce immediato con la seguente considerazione. Si osservi che la funzione

$$U = R_n \, P_n$$

è una funzione armonica dentro una qualsiasi sfera di raggio $< \frac{\pi}{2}$.

Supponiamo che per

$$\rho = \tau$$

sia

$$R_n \, (\rho) = 0 \, .$$

Allora U sul contorno della sfera di raggio ridotto τ è dappertuto nulla.

Allora U, essendo armonica, dovrebbe essere dappertutto nulla anche dentro questa sfera, ossia, come se ne ricava facilmente, la funzione

$$R_n \, (\rho)$$

dovrebbe essere nulla in tutto il pezzo dell'asse reale dall'origine a τ; ciò che è evidentemente assurdo.

Ma possiamo dire di più:

Le funzioni $R_n(\rho)$ sul semiasse reale positivo del piano complesso ρ sono funzioni positive crescenti con ρ.

Consideriamo la nostra solita sfera e sia

$$P_n(\cos\gamma)$$

la solita funzione della distanza sferica γ di un punto generico della sfera a un punto fisso 0 della sfera stessa.

Lungo il diametro passante per il punto 0, sarà:

$$P_n(\cos\gamma) = \pm 1$$

per note proprietà delle funzioni P_n.

Quindi su questo diametro la nostra funzione U avrà semplicemente i valori

$$U = \pm R_n(\rho).$$

Nel punto 0 e nel punto diametralmente opposto la funzione U avrà dunque i valori

$$U = \pm R_n(\tau).$$

Ma, poichè i massimi e minimi di una funzione armonica si trovano al contorno del campo e: $|P_n(\cos\gamma)| \leq 1$ sarà (per $\rho < \tau$)

$$|R_n(\rho)| < |R_n(\tau)|.$$

Ma per ρ prossimo a zero $R_n(\rho)$ è positivo evidentemente. E poichè non si annulla mai sull'asse reale, $R_n(\rho)$ sarà sempre positivo e di più

$$R_n(\rho) < R_n(\tau).$$

Passiamo ora allo studio degli sviluppi (β) e (γ). E cominciamo dallo sviluppo del secondo membro della (β)

$$(\delta) \qquad \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \frac{R_n(r)}{R_n(P)} \int V P_n \, d\sigma.$$

Dimostreremo che (per le fatte ipotesi sullo sviluppo (α)) esso è convergente, e rappresenta proprio quella funzione armonica U che sul contorno di σ prende i valori prefissati V, e della cui esistenza ci accertano i metodi di Neumann.

Consideriamo infatti la differenza

$$(\varepsilon) \qquad U - \sum_0^n \frac{2n+1}{4\pi} \frac{R_n(r)}{R_n(P)} \int V P_n \, d\sigma$$

Essa rappresenta chiaramente una funzione armonica dentro la nostra sfera; quindi i suoi massimi e minimi sono al contorno σ della sfera, ossia, poichè su questo contorno

$$U = V,$$

essi coincidono coi massimi e minimi della differenza

$$V - \sum_0^n \frac{2n+1}{4\pi} \int V P_n \, d\sigma.$$

Ma per la (α) abbiamo subito, ricordando che abbiamo supposto il secondo membro della (α) uniformemente convergente su σ, che questi massimi e minimi sono per n abbastanza grandi piccoli a piacere. Anche (ε) è dunque per n abbastanza grande piccolo a piacere e si ha dunque proprio

$$V = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \frac{R_n(\rho)}{R_n(P)} \int V P_n \, d\sigma.$$

Posto questo, passiamo ora allo studio della (γ), e cerchiamo intanto di vedere se la serie che vi comparisce nel secondo membro è convergente.

Osserviamo intanto che, essendo evidentemente:

$$r < P$$

sarà, per quanto abbiamo dimostrato,

$$0 < \frac{R_n(r)}{R_n(P)} < 1.$$

Di più se in

$$P_n(\cos\gamma)$$

il valore di γ è compreso tra

$$\varepsilon, \quad \pi - \varepsilon$$

è certamente

$$|P_n| < (1-\operatorname{sen}^4 \varepsilon)^{\frac{n}{2}} \; (\pi-\varepsilon).$$

Per mezzo di queste disuguaglianze si vede ben facilmente che la nostra serie è convergente, tranne *al massimo* sopra il diametro, che proietta il punto, dove noi vogliamo calcolare la nostra funzione U; anzi se noi escludiamo dalla sfera un piccolo cono, di cui questo diametro sia l'asse, e di cui il centro della sfera sia il vertice, la nostra serie sarà uniformemente convergente dentro il campo residuo. Questo cono determinerà sulla superficie della sfera due piccole aree ω, ω'.

Immaginiamo ora sulla sfera una catena di valori W, che coincida con V in tutti i punti, tranne che su

$$\omega,\ \omega'$$

in cui si annulla.

E pensiamo alla funzione armonica T (della cui esistenza ci accertano i metodi di Neumann) esistente dentro la nostra sfera, e che al contorno assume i valori W. Indichiamo con s la parte della superficie della nostra sfera, che se ne ricava, togliendone le piccole aree ω, ω'.

Per quanto abbiamo già dimostrato, sarà

$$T = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \frac{R_n(r)}{R_n(P)} \int W \, P_n \, d\sigma = \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \frac{R_n(r)}{R_n(P)} \int V \, P_n \, ds.$$

Ma ora ricordiamo quanto abbiamo dimostrato per la serie del secondo membro di (γ). Ne avremo:

$$T = \int W \Lambda \, d\sigma = \int V \Lambda \, ds.$$

Facciamo ora tendere a zero il nostro cono e quindi insieme gli intorni ω, ω'. Questa ultima uguaglianza continuerà sempre a valere. Ma per il teorema dimostrato al §. 7, la funzione T tende in ogni punto della nostra sfera alla nostra funzione U; dunque esisterà e sarà proprio uguale a U il

$$\lim_{\omega=0,\ \omega'=0} \int V \Lambda \, ds,$$

ossia per definizione di integrale definito, esisterà l'integrale

$$\int V \Lambda \, d\sigma$$

e sarà proprio

$$U = \int V \Lambda \, d\sigma.$$

Questo importante risultato fu soltanto dimostrato nel caso che sia vera la (α) e che la serie nel secondo membro di (α) sia uniformemente convergente. Una semplice considerazione indiretta permette di estendere immediatamente questa formula a ogni caso, in cui U esista, e la V sia generalmente continua. Perciò faremo due osservazioni:

I. — Se la U è a derivate regolari al contorno, i metodi di Green [1] assicurano che si può porre sempre

$$U = \int V \, \Phi \, d\sigma \tag{κ}$$

dove Φ è una funzione del punto variabile di σ, e del punto in cui vogliamo calcolare la funzione U.

II. — È senz'altro ben chiaro che se abbiamo espresso con due metodi distinti una funzione U sotto la forma (κ),

$$U = \int V \, \Phi \, d\sigma$$

$$U = \int V \, \Psi \, d\sigma$$

e se queste formule devono valere qualunque sia V, o anche soltanto se V è assoggettato a essere sviluppabile per funzioni sferiche nel modo supposto, allora è certamente

$$\Phi = \Psi$$ [2].

[1] L'esistenza della funzione di Green cioè di una funzione armonica che su σ prende i valori $-\operatorname{cotg} r$, ci è accertata dal metodo di Neumann.

[2] Per dimostrare questo basta dare valori nulli a V su tutta la sfera, tranne che in un piccolo intorno, in cui le si dà il valore 1, e ricordare che $\int (\Phi-\Psi) \, V \, d\sigma = 0$. La Φ e la Ψ si ammettono continue.

Ne resta senz'altro evidente che la nostra formula

$$U = \int V \, \Lambda \, d\sigma$$

varrà *per tutte le funzioni armoniche con derivate regolari al contorno,* sia poi V sviluppabile o no nel modo supposto.

E ne deduciamo non soltanto questo, ma poichè anche è per la ($\varkappa$)

$$\Lambda = \Phi$$

noi penetriamo meglio nella natura della Λ, anche su quel diametro, su cui non sapevamo ancora se la Λ fosse finita.

Ora procediamo oltre; studiamo cioè il caso, in cui la U non è a derivate regolari su σ. Costruiamo una sfera interna σ' concentrica a σ. Sul contorno di σ' la U è certo finita e continua e a derivate regolari.

Se la U su σ' assume dei valori V', avremo certamente per ogni punto A interno a σ'

$$U = \int V' \, \Lambda \, d\sigma'.$$

Facciamo tendere σ' verso σ; il primo membro di questa uguaglianza resta chiaramente inalterato; lo stesso avverrà del secondo. Ma ora, quando σ' tende verso σ, è certamente

$$\int V' \, \Lambda \, d\sigma' - \int V \, \Lambda \, d\sigma$$

piccolo a piacere [1].

Quindi abbiamo in ogni caso:

$$U = \int V \, \Lambda \, d\sigma \text{ [2]}.$$

[1] Per vedere questo si osservi che tranne, se si vuole, al più sul diametro per A, Λ è finito e continuo; isoliamo questo diametro con un piccolo cono

Basta scindere nella precedente differenza il contributo portato dalle parti di σ e σ' interne a questo cono, (contributo che già sappiamo piccolo a piacere) e quello portato dalla parte restante che è pur piccolo a piacere perchè U è continuo e quindi uniformemente continuo.

[2] Come nello spazio piano, si vede facilmente che questa formula vale anche se V rappresenta una catena soltanto generalmente continua.

Da ciò, o anche da quanto abbiamo visto nel caso precedente, deduciamo

$$\int \Lambda \, d\sigma = 1$$

$$\Delta_2 \Lambda = 0 \quad \text{ecc. ecc.}$$

§. 9. — Noi abbiamo così dato tanto sotto forma di serie, quanto sotto forma di integrale definito la nostra funzione armonica U; occupiamoci di quest'ultima formula. Essa ci dimostra, (come la formula analoga dello spazio piano) che:

Una funzione armonica in un campo è nell'interno del campo una funzione analitica delle coordinate del punto del campo.

Da essa si può anche dedurre il teorema:

Una serie di funzioni armoniche uniformemente convergente al contorno di un campo, è uniformemente convergente anche all'interno del campo stesso e rappresenta in tutto il campo, compreso il contorno, una funzione armonica.

Questo teorema, fondamentale per tante ricerche sulle funzioni armoniche, permette di estendere senz'altro i metodi di Schwarz e Neumann. Per. es. sia un campo $Z_{\alpha\gamma}$ limitato da due contorni α, γ, di cui il secondo esterno al primo per cui si sappia risolvere il problema di Dirichlet. Dico che esso si potrà risolvere per il campo Z_γ limitato da γ. Circondo α con una superficie β tale che nel campo Z_β limitato esternamente da β si sappia ancora risolvere il problema di Dirichlet. Sia Γ la catena di valori data su γ; si prenda su α una catena arbitraria e si costruisca iu $Z_{\alpha\gamma}$ la corrispondente funzione armonica φ_0; quindi in Z_β la funzione armonica Ψ_0 tale che su β

$$\varphi_0 = \Psi_0$$

ecc. ecc. Le funzioni φ_n, Ψ_n tendono a uno stesso limite che è la funzione chiesta. La dimostrazione è la stessa come nello spazio piano.

§. 10. — Noi possiamo però proseguire nello studio di queste funzioni armoniche, ricordando che la nostra equazione

$$\rho^2 (1+\rho^2) \frac{d^2U}{d\rho^2} + 2\rho (1+\rho^2) \frac{dU}{d\rho} - n(n+1) U = 0.$$

ha nell'intorno di $\rho = r = 0$ un altro integrale uniforme con singolarità polare in $\rho = 0$. Anzi questo integrale è altrove dappertutto monodromo e regolare perchè è un polinomio in $\frac{1}{\rho}$. Lo stesso fatto si presenta nello spazio iperbolico; la ripetizione dei ragionamenti già fatti al §. 8 dimostrerebbe senza alcuna difficoltà che anche in questo spazio l'integrale infinitesimo per $\rho = r = 0$ può servire allo sviluppo di una funzione armonica nell'interno di un campo sferico.

Queste considerazioni ci permettono senz'altro di portare nella teoria, p. e., dello spazio iperbolico molti dei teoremi che l'Appell nella memoria citata dà per lo spazio piano. Noi indicheremo gli integralí polari in $\rho = r = 0$ rispettivamente così:

$$R_{-1}\ ,\ R_{-2}\ ,\ R_{-3}\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ R_{-n-1}\ \ldots$$

E allora noi diremo che una funzione armonica è regolare in un punto se essa è sviluppabile in una serie

$$\sum_0^\infty R_n\, S_n$$

dove n assume solo valori positivi. Diremo che è singolare, se è sviluppabile in una serie

$$\sum_0^\infty R_n\, S_n + \sum_{n=0}^{n=m} R_{-(n+1)}\, S_n .$$

Se m è finito, diremo che la singolarità è polare; altrimenti diremo che è essenziale.

Il coefficiente di R_{-1} che è chiaramente costante, sarà per noi il residuo della funzione nel punto singolare considerato.

Potremo allora enunciare senz'altro i seguenti teoremi:

È possibile costruire una funzione armonica con un insieme assegnato di punti singolari (se l'insieme non ha punti limiti a distanza finita) con date singolarità.

Data una funzione armonica (regolare o no) esistente entro un campo Σ, l'integrale

$$\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{dU}{dn}\, d\sigma$$

(se σ è il contorno di Σ) è uguale alla somma dei residui di U dentro Σ e così via.

§. 11. — Voglio ora indicare una modificazione al processo alternato, che ci sarà utile in alcune questioni, che tratterò forse in una prossima nota. E per semplicità mi riferirò al piano, avendo già noi visto nei precedenti paragrafi che i metodi usati per questo si possono estendere allo spazio curvo. Siano dati due campi Σ, Σ' che si intreccino nel modo che fanno due cerchi che si segano. Siano β ed α i pezzi del contorno di Σ', e di Σ interni rispettivamente a Σ, Σ' e siano β', α' due pezzi del contorno rispettivamente di Σ, Σ' che con quelli non abbiano alcun punto comune, tali però che i punti di β e β' siano in relazione biunivoca, (p. e. che β, β' sieno uguali nella metrica dello spazio ambiente) e così pure α ed α'. Siano γ, δ le porzioni residue del contorno di Σ e Σ'. Voglio costruire una funzione armonica esistente nel campo $\Sigma+\Sigma'$, che su γ, δ prenda valori Γ, Δ prefissati a piacere e tale che in punti corrispondenti di β, β' (α, α') riprenda gli stessi valori. Questa funzione armonica, se esiste, è completamente determinata; perchè se ve ne fossero due la loro differenza sarebbe nulla su γ, δ e avrebbe valori uguali in punti corrispondenti di β, β' e di α, α'. Essa dovrebbe avere il suo massimo positivo o il suo minimo negativo su α', β' nel caso che non fosse identicamente nulla e quindi avrebbe questo valore massimo o questo valore minimo anche in un punto di α o di β interno al campo; ciò che è assurdo.

Veniamo ora alla sua effettiva costruzione. Si costruisca in Σ' una funzione armonica u_0 qualunque che su δ assuma i valori Δ prefissi; quindi in Σ prendiamo una funzione armonica v_1 tale che su α abbia gli stessi valori di u_0, nei punti di β' gli stessi valori che u_0 ha nei punti di β, e in γ assuma i valori Γ, tale insomma che

$$v_1^{(\alpha)} = u_0^{(\alpha)}\ \ ,\ \ v_1^{(\beta')} = u_0^{(\beta)}\ \ ,\ \ v_1^{(\gamma)} = \Gamma .$$

Si costruisca ora in Σ' una funzione u_1 tale che

$$u_1^{(\beta)} = v_1^{(\beta)}\ \ ,\ \ u_1^{(\alpha')} = v_1^{(\alpha)}\ \ ,\ \ u_1^{(\delta)} = \Delta$$

e così di seguito.

Dico che esistono $\lim\limits_{n=\infty} u_n$, $\lim\limits_{n=\infty} v_n$, che questi limiti coincidono nl campo limitato da α, β e rappresentano in tutto $\Sigma+\Sigma'$ la funzione cercata. Osserviamo che:

$$\left(v_{n+1}^{(\gamma)}-v_n^{(\gamma)}\right)=0\,,\ \left(v_{n+1}^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)}\right)=u_n^{(\alpha)}-u_{n-1}^{(\alpha)},\ v_{n+1}^{(\beta')}-v_n^{(\beta')}=u_n^{(\beta)}-u_{n-1}^{(\beta)}$$

$$\left(u_{n+1}^{(\delta)}-u_n^{(\delta)}\right)=0\,,\ \left(u_{n+1}^{(\alpha')}-u_n^{(\alpha')}\right)=v_{n+1}^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)}\,,\ u_{n+1}^{(\beta)}-u_n^{(\beta)}=v_{n+1}^{(\beta)}-v_n^{(\beta)}.$$

Indichiamo con A una quantità più grande o uguale al più grande dei massimi valori assoluti di

$$u_1^{(\alpha)}-u_0^{(\alpha)} \quad \text{e di} \quad u_1^{(\beta)}-u_0^{(\beta)}.$$

Immaginiamo ora una funzione armonica in Σ', nulla su δ e uguale all'unità su α', β. E sia $\lambda'<1$ il massimo valore che riceve su α. E sia $\lambda''<1$ il massimo valore che prende su β una funzione armonica in Σ, nulla su γ ed eguàle a 1 su α, β' (cfr. l'osservazione finale). Sia λ il più grande dei numeri λ', λ''. Avremo

$$\left|v_2^{(\alpha)}-v_1^{(\alpha)}\right|\leq \mathrm{A} \quad \left|v_2^{(\beta')}-v_1^{(\beta')}\right|\leq \mathrm{A} \quad \left|v_2^{(\beta)}-v_1^{(\beta)}\right|\leq \lambda\mathrm{A}$$

$$\left|u_2^{(\alpha')}-u_1^{(\alpha')}\right|\leq \mathrm{A} \quad \left|u_2^{(\beta)}-u_1^{(\beta)}\right|=\left|v_2^{(\beta)}-v_1^{(\beta)}\right|\leq\lambda\mathrm{A} \quad \left|u_2^{(\alpha)}-u_1^{(\alpha)}\right|\leq\lambda\mathrm{A}$$

$$\left|v_3^{(\alpha)}-v_2^{(\alpha)}\right|=\left|u_2^{(\alpha)}-u_2^{(\alpha)}\right|\leq\lambda\mathrm{A} \quad \left|v_3^{(\beta')}-v_2^{(\beta')}\right|=\left|u_2^{(\beta)}-u_1^{(\beta)}\right|\leq\lambda\mathrm{A}$$

$$\left|v_3^{(\beta)}-v_2^{(\beta)}\right|\leq\lambda^2\mathrm{A}$$

$$\left|u_3^{(\alpha')}-u_2^{(\alpha')}\right|=\left|v_3^{(\alpha)}-v_2^{(\alpha)}\right|\leq\lambda\mathrm{A} \quad \left|u_3^{(\beta)}-u_2^{(\beta)}\right|=\left|v_3^{(\beta)}-v_2^{(\beta)}\right|\leq\lambda^2\mathrm{A}$$

ecc. ecc.

Se ne deduce che le serie

$$u_1+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\ldots\ldots$$
$$v_1+(v_2-v_1)+(v_3-v_2)+\ldots\ldots$$

sono assolutamente e uniformemente convergenti al contorno dei campi rispettivi e quindi che i due $\lim\limits_{n=\infty} u_n$, $\lim\limits_{n=\infty} v_n$ esistono e rappresentano due funzioni armoniche U, V in Σ', Σ. Poichè poi

$$v_{n+1}^{(\alpha)}=u_n^{(\alpha)}\,,\ v_n^{(\beta)}=u_n^{(\beta)}\,,\ v_{n+1}^{(\beta')}=u_n^{(\beta)}\,,\ u_{n+1}^{(\alpha')}=v_n^{(\alpha)}$$

si avrà

$$\mathrm{U}^{(\alpha)}=\mathrm{V}^{(\alpha)}\,,\ \mathrm{U}^{(\beta)}=\mathrm{V}^{(\beta)}\,,\ \mathrm{U}^{(\beta)}=\mathrm{V}^{(\beta')}\,,\ \mathrm{V}^{(\alpha)}=\mathrm{U}^{(\alpha')}.$$

Essi perciò coincidono nel campo comune a Σ, Σ' e rappresentano la funzione cercata.

Possiamo usare dello stesso metodo, applicandolo a un esempio ulteriore. Sia il campo $\Sigma+\Sigma'$ precedente e sia $\mathrm{T}+\mathrm{T}'$ un campo analogo. Immaginiamo che i due campi si taglino vicendevolmente; e, per fissare le idee, supponiamo p. es. che i campi Σ e T' siano esterni vicendevolmente e così pure i campi Σ' e T, mentre invece Σ, T si taglino e così pure Σ' e T'. Indichiamo con a, b, $\overline{a}$, $\overline{b}$ quelle porzioni del contorno di Σ, Σ', T, T' interne rispettivamente a Σ', Σ, T', T e siano a', b', $\overline{a'}$, $\overline{b'}$ delle porzioni del contorno di Σ', Σ, T', T a esse in relazione biunivoca (p. es. uguali nella metrica ambiente). Siano α, β le porzioni (nel nostro caso ciascuna formata di due pezzi) del contorno di $\Sigma+\Sigma'$, $\mathrm{T}+\mathrm{T}'$ interne a $\mathrm{T}+\mathrm{T}'$, $\Sigma+\Sigma'$ e siano α', β' due pezzi del contorno di $\mathrm{T}+\mathrm{T}'$, $\Sigma+\Sigma'$ con quelle in corrispondenza biunivoca (p. es. uguali nella metrica ambiente, nel qual caso α' e β' dovranno pure resultare di tanti pezzi distinti, di quanti sono composti α, β tali che ogni pezzo di α' (β') sia uguale al corrispondente di α (β)). E immaginiamo che i tratti α, β, α', β', $\overline{a}$, $\overline{b}$, a, b, a', b', $\overline{a'}$, $\overline{b'}$ non abbiano porzioni comuni. Diciamo γ la porzione residua del contorno di $\Sigma+\Sigma'$, δ la porzione residua del contorno di $\mathrm{T}+\mathrm{T}'$. Si tratta di costruire una funzione armonica in $\Sigma+\Sigma'+\mathrm{T}+\mathrm{T}'$ che in punti corrispondenti di α, α', di β, β', di a, a', di b, b', di $\overline{a}$, $\overline{a'}$, di $\overline{b}$, $\overline{b'}$ assuma gli stessi valori e che su γ, δ assuma valori prefissi Γ, Δ. Si comincierà allora a costruire comunque in $\mathrm{T}+\mathrm{T}'$ una funzione armonica u_0, tale che

$$u_0^{(\overline{a})}=u_0^{(\overline{a'})}\ ,\ u_0^{(\overline{b})}=u^{(\overline{b'})}\ ,\ u_0^{(\delta)}=\Delta\,.$$

Per quanto si disse testè noi sappiamo costruire infinite di queste funzioni, prefissandone i valori anche su β, α'.

Quindi si costruisca in $\Sigma+\Sigma'$ la funzione v_1 tale che:

$$v_1^{(\gamma)} = \Gamma\,,\ v_1^{(a')} = v_1^{(a)},\ v_1^{(b)} = v_1^{(b')},\ v_1^{(\alpha)} = u_0^{(\alpha)},\ v_1^{(\alpha')} = u_0^{(\beta)}.$$

Quindi in T+T′ una funzione u_1 tale che

$$u_1^{(\delta)} = \Delta\,,\ u_1^{(\overline{a})} = u_1^{(\overline{a'})},\ u_1^{(\overline{b})} = u_1^{(\overline{b'})},\ u_1^{(\alpha')} = v_1^{(\alpha)},\ u_1^{(\beta)} = v_1^{(\beta)} \text{ ecc. ecc.}$$

Le considerazioni precedenti dimostrano senz'altro che $\lim\limits_{n=\infty} u_n$, $\lim\limits_{n=\infty} v_n$ rappresentano in $\Sigma+\Sigma'$+T+T′ la funzione cercata. Basterà soltanto vedere precisamente che cosa significheranno nel caso attuale le costanti λ', λ''.

Perciò immaginiamo in $\Sigma+\Sigma'$ una funzione armonica t tale che sia

$$t^{(\alpha)} = 1\ ,\ \ t^{(\beta')} = 1\ ,\ \ t^{(\gamma)} = 0\ ,\ \ t^{(a')} = t^{(a)}\ ,\ \ t^{(b')} = t^{(b)}.$$

Dovendo questa funzione avere sul contorno il suo massimo positivo o il suo minimo negativo non lo potrà avere che su α, β perchè se lo avesse su a', b' lo dovrebbe pure avere nel punto corrispondente di a, b interno al campo. Quindi essa è positiva e su β (che non è tangente per ipotesi al contorno del campo) non potrà superare una quantità minore di 1. Una tale quantità si indichi con λ'; la analoga nel campo T+T′ si indichi con λ''. Posto questo nuovo significato delle costanti λ', λ'' le altre considerazioni restano inalterate.

Come precedentemente si può pure dimostrare l'unicità della soluzione.

Il metodo alternato così modificato può servire quindi in certi casi alla costruzione di funzioni armoniche in un dato campo, su una parte del contorno del quale la funzione deve prendere valori prestabiliti, mentre nella parte residua la funzione assume valori che deve avere in tratti interni al campo.

Osservazione. — Per far vedere che anche allo spazio curvo si estende il concetto di costante di posizione per una superficie σ

interna a un campo semplicemente connesso Σ non tangente al suo contorno G e dividente questo contorno in due pezzi G′, G″ si costruisca col metodo di Neumann la funzione U armonica in Σ che su G′ è uguale a 1, su G″ è nulla. Tranne il primo termine, tutti gli altri termini sono continui. E siccome il primo termine rappresenta a meno d'un fattore costante l'angolo sotto cui G′ è visto dal punto A in cui si vuole calcolare U è facile studiarne la discontinuità. Se ne deduce tosto che se noi facciamo muovere A verso un punto B del contorno di G′ la U tenderà proprio a un limite compreso tra lo zero e l'unità, se la direzione BA non tende a essere tangente a G′, ecc. ecc.