Dott. **FEDERIGO ENRIQUES**

ALCUNE PROPRIETÀ METRICHE

DEI

COMPLESSI DI RETTE

ED IN PARTICOLARE

DI QUELLI SIMMETRICI RISPETTO AD ASSI

INTRODUZIONE

Ho diviso questo lavoro in 5 capitoli.

Nel 1° ho dedotto dalle proprietà dei sistemi di rette polari di quelle d'un piano rispetto ad un complesso, alcune proprietà dei sistemi diametrali dei complessi (*), determinando l' ordine e la classe delle loro superfici focali, e nel caso dei complessi di 2° grado anche le loro singolarità.

Nel cap. 2° considero insieme ad un complesso quelli *omociclici-omofocali* (**); essi son generati dalle rette che hanno momento statico costante colla loro polare rispetto al complesso: il luogo delle loro congruenze singolari è luogo delle rette ortogonali alla loro polare rispetto ad ogni complesso del sistema ecc.

(*) PLUECKER « Neue Geometrie des Raumes ».

(**) BATTAGLINI « Sulla Teorica dei momenti d'inerzia » (*Acc. Nap.* 1871, pag. 9).

Nel cap. 3^0 considero gli assi di simmetria dei complessi distinguendone due specie, secondochè appartengono o nò al complesso le congruenze delle rette che li incontrano ortogonalmente, e determinandone alcune proprietà.

Nel cap. 4^0 risolvo la questione di determinare tutti i casi di simmetria rispetto ad un numero finito di assi che un complesso di dato grado può presentare, ed indico alcune proprietà per i complessi di grado minimo appartenenti a ciascun tipo.

Nel cap. 5^0 determino i casi di simmetria di un complesso rispetto ad infiniti assi, e trovo come la superficie singolare del complesso deve spezzarsi: in particolare ne segue un teorema noto per i complessi delle rette che hanno momento costante rispetto ad un asse (*).

(*) Segre « Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes » (*Crelle Bd. 97*, 1884, pag. 95).

I.

I sistemi diametrali dei complessi.

1. Assumo come coordinate di una retta i coseni di direzione $a\ b\ c$ che essa fa con una terna di assi cartesiani ortogonali $x\ y\ z$, e le quantità

$$l = \begin{vmatrix} y' & z' \\ b & c \end{vmatrix} \quad m = \begin{vmatrix} z' & x' \\ c & a \end{vmatrix} \quad n = \begin{vmatrix} x' & y' \\ a & b \end{vmatrix}$$

dove le $x'\ y'\ z'$ sono le coordinate di un punto della retta; questo sistema è un caso particolare di quello di Pluecker e Cayley, quando si considera una retta individuata da un suo punto ($x'\ y'\ z'$) e dal suo punto all' infinito: le 6 coordinate d' una retta $a\ b\ c\ l\ m\ n$ sono legate dalle relazioni

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \ , \Omega = al + bm + cn = 0.$$

L'equazione d'un complesso di grado p è una relazione omogenea del grado p

$$f(a\ b\ c\ l\ m\ n) = \varphi + \psi\,\Omega = 0 : \qquad (*)$$

(*) Voss « Ueber Complexe und Congruenzen» (*Math. Ann. Bd. IX* pag. 51).

rispetto a questo complesso una retta r ha un sistema lineare $\infty^{\frac{(p-k)(p-k+1)(p-k+2)(p-k+3)(p-k+4)}{5!}}$ di complessi polari di grado $p-k$, (k^{mo}), con una congruenza base intersezione di un complesso del sistema col complesso speciale r, e questa congruenza è la congruenza polare del grado $p-k$ della retta r.

Conduciamo un piano qualunque per la r, e prendiamolo come piano $x\,y$, ($l = m = c = 0$); in esso le $a\;b\;n$ danno un sistema lineare di coordinate di rette (poichè un' equazione lineare in $a\;b\;n$ dà nel piano $x\,y$ il fascio del complesso di 1^o grado rappresentato nello spazio dalla detta equazione) quindi si vede che la linea complesso di un complesso polare k^{mo} della retta r nel piano $x\,y$, è la linea polare di classe $p-k$ della retta r rispetto alla linea del complesso dato $f=0$ nel piano medesimo. Se ne deduce :

Rispetto ad un complesso del grado p, la congruenza polare k^{ma} di una retta è il luogo delle rette inviluppanti le linee polari k^{me} della retta nei piani per essa: dualmente è il luogo delle generatrici dei coni polari k^{mi} della retta rispetto ai coni complesso dei suoi punti.

Ciò posto consideriamo una retta $r \equiv (a\;b\;c\;l\;m\;n)$ e le rette r' le cui polari r'' incontrano la r. In un piano per r le rette r' costituiscono la linea inviluppo del dato complesso e la 1^a polare di r rispetto ad essa.

Dunque: *Le rette le cui polari incontrano una retta data r generano un complesso di grado $2\,p-1$ di cui la congruenza intersezione col complesso speciale di asse r si spezza nella congruenza delle rette del dato complesso* *che si appoggiano alla r e nella congruenza polare di grado $p-1$ della retta r rispetto al detto complesso.*

Inoltre poichè ogni retta singolare possiede fra le ∞' sue rette polari una ed una sola retta che si appoggia alla r, si ha:

Al complesso di grado $2p-1$ luogo delle rette le cui polari rispetto ad un complesso di grado p incontrano una retta data, appartiene semplicemente la congruenza singolare del complesso di grado p.

Viceversa una retta la cui polare incontra un'altra retta qualunque è singolare, quindi i complessi individuati da tutte le rette r dello spazio non hanno altri elementi fissi all'infuori delle rette singolari. Ne deduciamo:

La congruenza delle rette (non singolari) *le cui polari incontrano due rette date è di grado*

$$2\,p\,(p-1)+1.$$

Se si hanno due rette $r'\,r''$ che s'incontrano, le rette r le cui polari incontrano $r'\,r''$ danno una congruenza di grado $2\,p\,(p-1)+1$ che si spezza in due sistemi di rette tali che le polari dei raggi di uno dei sistemi A appartengono al piano $\alpha = r'\,r''$, e le polari dei raggi dell' altro sistema B appartengono alla stella $r'\,r''$ di centro O.

Per ciascuno dei due sistemi A, B, l'ordine più la classe dà $2\,p\,(p-1)+1$: ora per il sistema B la classe è il numero delle sue rette appartenenti ad un piano β per O; tali rette sono le p tangenti per O alla linea complesso del piano β e le $(p-1)^2$ rette il cui polo rispetto alla detta linea complesso è il punto O, cioè le rette base della schiera di linee di classe $p-1$ polari delle rette del fascio col centro 0; si vede perciò che la classe del sistema B è

$$p + (p-1)^2 = p\,(p-1) + 1$$

e quindi l'ordine è $p\,(p-1)$: inversamente dovrà accadere per il sistema A. Concludiamo:

Le rette le cui polari rispetto ad un complesso di grado p stanno in un piano formano un sistema ∞^2 *d'ordine* $p\,(p-1)+1$ *e di classe* $p\,(p-1)$: *le rette le cui polari passano per un punto formano un sistema d'ordine* $p\,(p-1)$ *e di classe* $p\,(p-1)+1$.

Siccome poi in un piano vi sono $p\,(p-1)+1$ rette le cui polari passano per un punto, e $p\,(p-1)$ le cui polari sono in un piano, non potendo in generale una retta essere polare di un'altra retta che appartenga ad un piano qualunque contenente una delle rette di cui essa è polare, deduciamo:

Le rette polari di quelle di un piano costituiscono un sistema razionale ∞^2 *d'ordine* $p\,(p-1)+1$ *e di classe* $p\,(p-1)$. *Dualmente le rette polari di quelle di una stella generano un sistema razionale d'ordine* $p(p-1)$ *e di classe* $p(p-1)+1$.

2. Vogliamo ora, anche in vista di successive applicazioni, studiare più da vicino il sistema A delle rette polari di quelle di un piano α.

È noto che vi sono due raggi del sistema infinitamente vicini ad un raggio di A che l'incontrano nei due *fuochi* e danno luogo ai suoi due *piani focali:* il luogo dei fuochi coincide coll'inviluppo dei piani focali e costituisce la *superficie focale* del sistema. L'ordine della superficie focale del sistema A non può determinarsi come caso particolare dei resultati di Voss (*), poichè A non è intersezione completa di due complessi: otterremo questa determinazione dipendentemente dalla rappresentazione che si ha del sistema A sul piano α.

Supponiamo che il piano α coincida col piano $x\,y$ dato da $l=m=c=0$, e si abbia in α una retta r che dia una retta r_1 di A fuori di α. Le rette di A che si appoggiano ad r_1 costituiscono una superficie rigata, le cui generatrici sono le polari delle tangenti di una curva $f=0$ nel piano α: le coordinate della polare d'una retta $(a\ b\ c\ l\ m\ n)$ essendo

$$a_1 \equiv -a \sum \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial l} + p\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial l} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ,$$

l'equazione della detta curva inviluppo nel piano α è

$$f = a_1\, p\,\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial a} + b_1\, p\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial b} + c_1\left(-n\sum\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial l} + p\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) +$$

$$+\, l_1\left(-a\sum\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial l} + p\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right) +$$

$$+\, m_1\left(-b\sum\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial l} + p\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial m}\right) + n_1\, p\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

(*) Voss (op. c.) dà per la superficie focale della congruenza intersezione di due complessi dei gradi m, n,

ordine = classe = $2\,m\,n\,(m+n-2)$.

dove nell' espressione $\varphi\,(a\,b\,c\,l\,m\,n)$ che posta $=0$ dà l' equazione del dato complesso di grado p, si è posto $l=m=c=0$.

La r nel piano α è tangente doppia della $f=0$; le due tangenti alla $f=0$ infinitamente vicine alla r danno i due raggi di A infinitamente vicini ad r_1 che l' incontrano nei due fuochi.

Ora un punto 0 di r dà $2\,p-3$ tangenti alla $f=0$ fuori di r stessa, quindi $2\,p-3$ rette del sistema A che si appoggiano alla r_1 in $2\,p-3$ punti per ciascuno dei quali passano altri $p(p-1)-1$ raggi di A dati da altrettante rette del piano α tangenti ad $f=0$; si ottengono così in α $(2\,p-3)\,\{\,p\,(p-1)-1\,\}$ rette tangenti ad $f=0$ che incontrano in altrettanti punti la r; ciascuno di questi si può ottenere in modo analogo da $(2\,p-3)\,\{\,p\,(p-1)-1\,\}$ punti di r; si ha dunque sulla r una corrispondenza di Chasles

$$[(2p-3)\{p\,(p-1)-1\}\,.\,(2p-3)\{p(p-1)-1\}]$$

che ha

$$2\,\{\,p\,(p-1)-1\,\}\,(2\,p-3)$$

coincidenze. Fra questi punti di coincidenza figurano i punti che danno su r_1 quelli pei quali due dei raggi di A fuori di r_1 coincidono, ossia danno le intersezioni della r_1 colla superficie focale del sistema A fuori dei due fuochi in cui il raggio r_1 tocca la detta superficie; gli altri punti di coincidenza sulla r danno gruppi di $2\,p-3$ punti sulla r_1 di cui

2 coincidono. Ma il sistema dei gruppi di $2\,p-3$ punti su r_1 è di ordine $p\,(p-1)$ poichè ogni punto di r_1 è dato in generale da $p\,(p-1)$ punti distinti di r, quindi il numero di questi gruppi dotati di un punto doppio è

$$2\,\{\,p\,(p-1)\,\}\,(2\,p-4)\,;$$

dunque i punti d' incontro della r_1, fuori dei due fuochi, colla superficie focale, sono

$$2\,p\,(p-3)+6\,.$$

Analogamente si può costruire sulla r una corrispondenza di Chasles considerando i piani per r_1 anzichè i punti e si viene così a stabilire che i piani tangenti alla superficie focale di A che passano per r_1, fuori dei piani focali, sono

$$2\,p\,(p-3)+4\,.$$

Ne segue:

La superficie focale del sistema ∞^2 delle rette polari di quelle di un piano rispetto ad un complesso del grado p è in generale d'ordine

$$2\,\{\,p\,(p-3)+5\,\}$$

e di classe

$$2\,\{\,p\,(p-3)+4\,\}\,.$$

Se un fuoco del raggio r_1 coincide con uno degli n' teriori punti d' incontro di r_1 colla superficie focale di A, per esso tre raggi del sistema A coincidono (sono infinitamente vicini) e quindi nasce un punto doppio della detta superficie focale: perciò ponendo la condizione che una delle coincidenze della corrispondenza di Chasles costruita sulla r cada in uno dei punti di contatto della r colla $f=0$, si dovrà ottenere una curva doppia sulla superficie focale di A; e dualmente si potranno costruire i piani tangenti doppi della detta superficie focale.

Ci limiteremo a considerare il caso dei complessi di 2° grado ($p=2$), in cui l' ordine di A è 3, e la classe è 2.

Il piano α è tangente doppio per la superficie focale di A, perchè per una sua retta p si possono condurre due piani tangenti alla superficie, dati dai raggi doppi della involuzione fra le rette in α pel polo P di p, in cui si corrispondono le rette le cui polari s' incontrano.

Se vi è un piano doppio fuori di α, ad esso appartengono infinite rette del sistema A (contenendone tre infinitamente vicine), e viceversa: quindi i quattro piani singolari delle quattro rette singolari del piano α sono doppi per la superficie. Non vi possono essere altri piani doppi della superficie stessa, poichè gli infiniti raggi del sistema A appartenenti ad uno di essi sarebbero le polari dei raggi del fascio in α avente per centro il polo P della intersezione p del piano doppio con α, e quindi in un piano qualunque per p non vi sarebbero raggi di A, il che è assurdo.

I punti della conica complesso $\varphi=0$ del piano α sono tali che per essi vi sono tre raggi coincidenti del sistema A e perciò son doppi per la superficie focale di A, e poichè in ciascuno di essi il cono osculatore è il piano α, essi sono cuspidi. I quattro punti singolari delle quattro rette singolari di α sono evidentemente tripli, e non vi sono altri punti tripli nel piano α.

Ora il cono circoscritto da un punto alla superficie è di 4.ª classe e di 12º ordine, sicchè la classe delle sezioni piane è 12: a ciascuna di queste sezioni piane di 6º ordine appartengono dunque fuori della conica cuspidale del piano α, k cuspidi e τ punti doppi, essendo

$$3\,k + 2\,\tau = 12,$$

quindi la superficie ha fuori della conica o una curva doppia del 6º ordine, o una doppia del 3º e una conica cuspidale, o una quartica cuspidale: la curva totale sega la conica cuspidale del piano α in punti tripli per la superficie (giacchè in ogni punto d'una curva doppia i raggi di A coincidono nella tangente alla curva) ad ognuno dei quali punti tripli appartengono infiniti raggi di A; la detta curva sega dunque il piano α nei quattro punti singolari delle quattro rette singolari di α, e perciò è una quartica cuspidale per la superficie.

Un punto doppio di questa quartica darebbe un punto triplo della superficie (fuori del piano α) pel quale passerebbero infiniti raggi di A che non potrebbero giacere in un piano (v. rag. prec.). Tali raggi sarebbero dunque le rette polari di quelle inviluppanti una conica nel piano α (poichè le rette le cui polari si appoggiano ad una retta inviluppano una curva di 3ª classe), e la detta conica dovrebbe toccare la conica complesso secondo le quattro rette singolari ed avrebbe quindi un' equazione della forma

$$\lambda \varphi + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0 .$$

Ora è chiaro che non può determinarsi λ in modo che le polari delle tangenti di una di queste coniche a 2 a 2 s' incontrino (passino per un punto).

Concludiamo:

Il sistema delle rette polari di quelle d' un piano rispetto ad un complesso di 2° grado, (di 3° ordine e di 2ª classe), ha una superficie focale di 6° ordine e 4ª classe. Questa superficie ha 5 piani tangenti doppi, cioè il piano dato ed i 4 piani singolari delle 4 rette singolari di esso, ed ha una curva cuspidale composta della conica complesso del dato piano e di una quartica gobba (senza punti doppi) che l' incontra nei 4 punti singolari delle sue 4 tangenti singolari, i quali sono tripli per la superficie .

Limitandoci ancora alla considerazione dei complessi di 2° grado, determiniamo in breve la condizione perchè tutte le rette polari di quelle di un piano α si appoggino ad una retta, o passino per un punto.

Se questo avviene, la retta (o il punto) deve appartenere al piano α dovendo essere incontrata (o appartenere) da tutte le tangenti della conica complesso del piano α.

Ne segue:

La condizione necessaria e sufficiente perchè le polari delle rette d'un piano rispetto ad un complesso di 2° grado si appoggino ad una retta è che il piano sia singolare, e perchè le dette polari compongano una stella *è che il piano sia doppio per la superficie di Kummer singolare pel complesso.*

3. I resultati ottenuti si applicano immediatamente al sistema dei *diametri* di un complesso di grado p, cioè delle polari delle rette all' infinito.

Siamo così condotti ad enunciare i teoremi seguenti:

Ad ogni sistema di piani paralleli è coniugato un diametro luogo dei centri delle linee complesso di classe p di questi piani (*).

Vi sono infinite giaciture di piani di sezione parabolica (la cui linea complesso ha il centro all' infinito) ; *quelli per un punto proiettano da esso le rette all' infinito del complesso e inviluppano un cono di classe p (cono asintotico del complesso).*

La corrispondenza fra le giaciture di piani e i diametri coniugati é data da quella fra i piani e le rette polari rispetto al cono asintotico di un punto dello spazio.

Il sistema diametrale è d' ordine $p(p-1)+1$ e di classe $p(p-1)$, quindi:

Un punto qualunque è centro per $p(p-1)+1$ linee complesso.

La superficie focale del sistema diametrale può denominarsi *superficie centrale* del complesso. Allora si ha:

La superficie centrale del complesso è il luogo dei punti pei quali due delle $p(p-1)+1$ linee complesso

---

(*) Cfr. per i complessi di 2° grado PLUECKER « Neue Geometrie des Raumes ».

di cui esso è centro, coincidono : questa superficie è di ordine

$$2 \{ p (p-3) + 5 \}$$

e di classe

$$2 \{ p (p-3) + 4 \}$$

In particolare:

Per un complesso di 2° grado un punto dello spazio é centro di tre coniche complesso. Il cono asintotico d'un punto è di 2° grado e le coniche complesso dei suoi piani sono parabole. La superficie centrale, di 6° ordine e 4ª classe, ha il piano all'infinito ed i piani singolari delle quattro rette singolari all' infinito come piani tangenti doppi, ed ha come curva cuspidale la conica complesso all' infinito ed una quartica che le si appoggia in quattro punti tripli.

Tutti i diametri son paralleli ad un piano se il piano all' infinito è singolare, e sono paralleli ad una retta se esso è doppio per la superficie di Kummer singolare per il complesso di 2° grado.

Insieme al sistema dei diametri di un complesso si possono considerare anche le rette le cui polari sono all' infinito, che possono dirsi *assi-cilindri* del complesso, e si ha:

Gli assi cilindri del complesso sono assi dei cilindri complesso dei loro punti all' infinito e diametri delle linee complesso dei loro piani.

Le direzioni coniugate a questi diametri delle linee *complesso sono parallele ad un piano, che dà una giacitura coniugata all' asse cilindro.*

Il sistema degli assi cilindri è d'ordine $p\,(p-1)$ e di classe $p\,(p-1)+1$.

Pluecker (op. c.) ha considerato le terne di diametri e di assi cilindri di un complesso di 2⁰ grado corrispondenti ai triangoli coniugati della conica complesso all' infinito ed ha mostrato come essi costituiscono tre coppie di spigoli opposti di un parallelepipedo (*centrale*), e come tutti questi parallelepipedi hanno lo stesso centro (*centro del complesso*).

Si presenta ora la ricerca dei diametri ortogonali alla giacitura coniugata, che potranno dirsi *assi centrali* del complesso. Essi debbono corrispondere alle rette polari dei piani ortogonali rispetto al cono asintotico p. e. dell'origine: se questo cono ha per equazione

$$f\,(\alpha\,\beta\,\gamma) = 0$$

in coordinate di piani

$$\alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,z = 0,$$

il diametro polare del piano $(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ è

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\,\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta'}\,\beta + \frac{\partial f}{\partial \gamma'}\,\gamma = 0,$$

e risulta quindi ortogonale al piano $(\alpha'\,\beta'\,\gamma')$ se

$$\alpha' \equiv \frac{\partial f}{\partial \alpha'} \quad \beta' \equiv \frac{\partial f}{\partial \beta'} \quad \gamma' \equiv \frac{\partial f}{\partial \gamma'}\;;$$

queste equazioni hanno in generale un numero finito (al massimo p^2) di soluzioni.

Dunque:

Un complesso di grado p ha in generale un numero finito (al massimo p^2) di assi centrali.

Il complesso di 2º grado ha tre assi centrali due a due ortogonali (*) .

(*) Pluecker (op. c.).

II.

Le proprietà focali dei complessi.

1. L' equazione

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

rappresenta il complesso *(ciclico)* delle rette che si appoggiano al cerchio immaginario all' infinito (*).

Dato un complesso di grado p

$$\varphi = 0,$$

i complessi

$$\varphi = k\,(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{p}{2}}$$

o

$$\varphi = k^2\,(a^2 + b^2 + c^2)^p$$

(secondochè p è pari o dispari), compongono un fascio a cui appartiene il dato complesso e quello ciclico; estendendo la definizione nota (**) per il caso $p = 2$ li diremo *omoci-*

(*) Segre « Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere, e sulle loro mutue analogie » (*Atti della R. Acc. di Torino* Vol. XIX, pag. 159).

(**) Battaglini « Sulla Teorica dei momenti d'inerzia » (*Rendiconti Acc.* Napoli 1871, fasc. 3°, pag. 9).

clici-omofocali di $\varphi=0$, o più brevemente omofocali.

Si ha evidentemente:

Per i complessi d' un sistema omofocale le linee complesso in un piano sono omofocali ed i coni complesso d' un punto sono omociclici, ossia hanno le stesse sezioni cicliche (contenenti i punti ciclici del loro piano).

L' espressione

$$\varphi(a\,b\,c\,l\,m\,n) = \sum_1^i d_r(a_r l + b_r m + c_r n + l_r a + m_r b + n_r c)^p ,$$

rappresenta il momento di grado p della retta $(a\,b\,c\,l\,m\,n)$ rispetto al gruppo delle i rette $(a_r b_r c_r l_r m_r n_r)$ ciascuna col coefficiente d_r (*), e quindi il complesso

$$\varphi = 0$$

è il luogo delle rette di *momento di grado p nullo* rispetto al gruppo delle i rette: è poi chiaro che prendendo i abbastanza grande, ogni complesso può essere così rappresentato. Allora i complessi generati dalle rette di *momento costante k* rispetto al detto gruppo, hanno per equazione

$$\varphi = k,$$

ossia

$$\varphi = k\,(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{p}{2}}$$

(*) SEGRE (op. c.).

o

$$\varphi^2 = k^2 \left(a^2 + b^2 + c^2 \right)^p,$$

(poichè $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ per le rette che non si appoggiano al cerchio immaginario all' infinito), e quindi sono quelli omofocali a $\varphi = 0$.

Dunque (*)

I complessi omofocali ad un dato complesso sono quelli delle rette di momento costante rispetto ai gruppi di rette rispetto a cui è nullo il momento dei raggi del dato complesso.

Le coordinate delle polari della retta ($a\ b\ c\ l\ m\ n$) rispetto al complesso

$$\varphi = 0$$

sono

$$a_1 \equiv - a \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial \varphi}{\partial l} + p \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial l}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ,$$

quindi il momento statico delle due rette ($a\,b\,c\,l\,m\,n$), ($a_1 b_1 c_1 l_1 m_1 n_1$), è

$$a_1 l + b_1 m + c_1 n + l_1 a + m_1 b + n_1 c \equiv \varphi^2.$$

Dunque:

(*) Cfr, Reye « Trägheits und höhere Momente eines Massen systemes in Bezug auf Ebenen » (*Crelle Bd. 72*, 1870).

I complessi omofocali ad uno dato sono il luogo delle rette che hanno con la loro polare un momento statico costante.

2. Eliminando il parametro costante k dalle equazioni delle congruenze singolari dei complessi d'un sistema omofocale, si ha l'equazione di un complesso del grado $2p$

$$p\varphi\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial l}+b\frac{\partial\varphi}{\partial m}+c\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)=(a^2+b^2+c^2)\sum\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial l}$$

che diremo *complesso focale* del complesso dato $\varphi=0$.

Se $(a_1 b_1 c_1 l_1 m_1 n_1)$ è la polare della retta $(abclmn)$, a distanza finita, rispetto al complesso $\varphi=0$, la condizione di ortogonalità delle due rette è

$$a\,a_1+b\,b_1+c\,c_1=0\,,$$

ossia è l'equazione del complesso focale: una retta r del complesso focale è dunque ortogonale alla sua polare r'.

Per la r c'è un piano π parallelo alla r', nel quale la r è un diametro della linea complesso di un qualunque complesso del sistema ortogonale alla direzione coniugata, ossia un *asse* della linea. Sulla r c'è poi il punto P d'incontro del piano perpendicolare ad essa per la r', il cui cono-complesso ha la retta r come *asse* (ortogonale al piano polare).

Concludiamo:

Il complesso focale di un complesso di grado p è di *grado 2 p, ed è comune a tutti i suoi complessi omofocali.*

Esso è il luogo delle rette singolari di questi complessi. Le sue rette a distanza finita sono ortogonali alla loro polare. A ciascuna delle sue rette appartiene un punto (singolare per un complesso del sistema) pel quale essa è respettivamente un asse della linea complesso o del cono complesso di un qualunque complesso del sistema.

3. Se si ha un complesso $\varphi = 0$, del grado p, poichè le rette all'infinito appartengono al complesso ciclico, la sua linea-complesso A all'infinito è comune a tutti i suoi complessi omofocali: se B è la linea del complesso focale nello stesso piano all' infinito, una retta di B è singolare per un complesso del sistema omofocale e quindi appartiene ad A, ossia A e B coincidono.

Dunque:

Tutti i complessi omofocali hanno lo stesso cono asintotico per un punto dello spazio, e questo è il cono asintotico del comune complesso focale.

Ne segue che è comune ai complessi omofocali la corrispondenza fra le giaciture di piani e le direzioni dei diametri coniugati, e poichè le linee omofocali di un piano hanno lo stesso centro, si deduce:

Tutti i complessi omofocali hanno lo stesso sistema diametrale, la stessa superficie centrale, e gli stessi assi centrali.

III.

Gli assi di simmetria dei complessi.

1. Una retta si dirà un *asse di simmetria* per un complesso di grado p

$$f = 0,$$

quando il complesso è trasformato in se stesso da una simmetria ortogonale rispetto alla retta.

Data una retta $(a' \, b' \, c' \, l' \, m' \, n')$, se è $(a'' \, b'' \, c'' \, l'' \, m'' \, n'')$ la sua simmetrica rispetto all' asse z, si ha

$$a' = -a'' \, , \; b' = -b'' \, , \; c' = +c'',$$

e poichè $l' \, m' \, n'$, $l'' \, m'' \, n''$, sono i minori tratti dalle matrici

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \, , \quad \begin{vmatrix} -a' & -b' & +c' \\ -x' & -y' & +z' \end{vmatrix}$$

si ha

$$l' = -l'' \, , \; m' = -m'' \, , \; n' = +n'',$$

od anche (poichè il segno delle coordinate d' una retta è indeterminato se non è fissata la sua direzione positiva) possiamo porre

$$a'=a'' \ , \ b'=b'' \ , \ c'=-c'' \ , \ l'=l'' \ , \ m'=m'' \ , \ n'=-n''.$$

Il complesso

$$c = 0$$

è quello speciale delle rette ortogonali all' asse z, mentre

$$n = 0$$

è il complesso speciale delle rette che si appoggiano all' asse z.

Allora se l' asse z deve essere asse di simmetria per il complesso di 1° grado

$$f= \mathrm{A}\, l + \mathrm{B}\, m + \mathrm{C}\, m + \mathrm{L}\, a + \mathrm{M}\, \mathrm{b} + \mathrm{N}\, \mathrm{c} = 0,$$

la $f=0$ dovendo essere inalterata per la sostituzione $\begin{pmatrix} -c & -n \\ c & n \end{pmatrix}$, si ha

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{L} = \mathrm{M} = 0\,,$$

o

$$\mathrm{C} = \mathrm{N} = 0:$$

il 2° caso ci dice che l' asse z e la sua retta ortogonale all' ∞ appartengono al complesso, il 1° caso si presenta quando gli assi x, y, sono assi di simmetria corrispondenti al 2° caso. È quindi facile determinare gli assi di simmetria d' un complesso lineare. Invero si hanno ∞^2 rette che insieme alle loro ortogonali all' ∞ appartengono al complesso e sono quelle che incontrano ortogonalmente l' asse centrale (*) (coniugato della sua retta ortogonale all'∞); l'asse centrale stesso è pure un asse di simmetria del complesso.

Dunque:

Un complesso lineare è simmetrico rispetto all' asse centrale e alle sue ∞^2 rette ortogonali che gli appartengono.

Consideriamo ora un complesso di grado $p>1$ che supponiamo simmetrico rispetto all' asse z, e sia

$$f = \varphi + \psi\,\Omega = a_{00}\, c^p{}_{p-1} + a_{10}\, c^{p-1} n + \dots + a_{p0}\, n^p +$$

$$+ a_{01}\, c^{p-1} + a_{11}\, c^{p-2} n + \dots + a_{p-11}\, n^{p-1} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ A(a\, b\, l\, m) + \psi \,.\, (a\, l + b\, m + c\, n) = 0$$

la sua equazione.

La sostituzione $\begin{pmatrix} -c & -n \\ c & n \end{pmatrix}$ deve cambiare $f=0$ in

---

(*) Battaglini « Sulla teorica dei Momenti » (*Acc. Napoli* fasc. 5, pag. 6).

$f + \theta\,\Omega = 0$, dove θ è (come ψ) una forma arbitraria di grado $p-2$ in a, b, c, l, m, n; si vede quindi che l'insieme di tutti i termini di grado dispari o di tutti quelli di grado pari deve equivalere ad una funzione $\theta\,\Omega$, e poichè in tal caso questi termini possono includersi in $\psi\,\Omega$, si ha che dalla φ spariscono tutti i termini di grado dispari o tutti quelli di grado pari in c, n: a questi due casi corrispondono *due specie* di simmetria del complesso $f=0$, rispetto all' asse z, e si ha evidentemente:

Se un complesso gode simmetria di 1ª *specie rispetto ad un asse, la congruenza delle rette che incontrano ortogonalmente l'asse di simmetria non appartiene al complesso (o gli appartiene contata un numero pari di volte).*

Se un complesso ha simmetria di 2ª *specie rispetto ad un asse contiene (una volta o un numero dispari di volte) la congruenza delle rette che incontrano ortogonalmente l' asse di simmetria.*

Quindi:

Un asse di 2.ª *specie e la sua retta ortogonale all'*∞ *appartengono alla superficie singolare del complesso e sono almeno doppie per essa se il grado del complesso è* > 2.

Se il complesso $f=0$ è simmetrico rispetto agli assi z, y, in ogni termine le a, l, compariscono complessivamente al grado pari o al grado dispari, e quindi l'asse x, è pure un asse di simmetria del complesso. Considerando i casi che si possono presentare per p pari o dispari, si conclude :

Se un complesso è simmetrico rispetto a due assi *ortogonali per un punto è simmetrico anche rispetto all'asse ortogonale ai due per il punto stesso.*

La simmetria rispetto al 3^0 *asse è di* 2ª *specie* | *di* 1ª | *per i complessi di grado dispari* | *pari* | *se rispetto agli altri due assi è della stessa specie: è di* 1ª *specie* | *di* 2ª | *per i complessi di grado dispari* | *pari* | *se rispetto agli altri due assi è di specie diversa.*

2. Una retta si dirà *multipla* secondo k per un complesso se la sua congruenza polare di grado $k-1$ è indeterminata.

Una retta si dirà *hessiana* per un complesso se la sua congruenza polare quadratica si spezza, ossia se appartiene ai coni hessiani dei coni complesso dei suoi punti e alle linee inviluppo hessiane delle linee complesso dei suoi piani: si può vedere che l'esistenza d'una retta hessiana porta 5 condizioni per il complesso, esigendosi 9 condizioni perchè si spezzi una congruenza quadratica.

Una retta di un complesso, non tripla, ed hessiana per esso, si dirà *cuspidale* per il complesso: essa è tangente cuspidale delle linee complesso dei suoi piani e generatrice di flesso pei coni complesso dei suoi punti: la congruenza polare quadratica di una retta cuspidale si spezza in due congruenze lineari di cui una è specializzata una volta (2 se la retta è singolare), l'altra ha una ulteriore direttrice che si dirà *polare armonica* della retta cuspidale ed è luogo dei poli armonici di essa rispetto alle linee complesso dei suoi piani, e inviluppo dei piani polari armonici rispetto ai coni complesso dei suoi punti.

Ciò posto andiamo a considerare alcune proprietà degli assi di simmetria dei complessi.

Consideriamo un asse di simmetria di 1ª specie per un complesso di grado dispari, o di 2ª specie per un complesso di grado pari.

La linea complesso di classe p in un piano qualunque ortogonale all' asse di simmetria (quando se ne stacchi il fascio di raggi col centro sull'asse, se esiste), è di grado dispari con un centro di simmetria: per un punto all' ∞ del piano vi è un gruppo di rette tangenti ad essa non passanti per il centro, quindi la retta all' ∞ è tangente alla linea; ma la sua conica polare è una parabola che deve esser simmetrica rispetto al detto centro di simmetria, dunque si spezza in due fasci di raggi uno col centro all'∞ e l' altro col centro nel centro di simmetria; la detta retta all' ∞ è dunque tangente cuspidale per la linea complesso a meno che non sia tripla, ed il suo polo armonico è il centro di simmetria (*). Una considerazione analoga può ripetersi per i piani per l' asse di simmetria.

Deduciamo:

Un asse di simmetria di 1ª *specie* | *di* 2ª | *per un complesso di grado dispari* | *pari* | *e la sua retta ortogonale all'* ∞, *sono rette cuspidali per il complesso e polari armoniche l' una dell' altra, se non sono triple.*

Consideriamo invece un asse di simmetria di 1ª specie

(*) Cfr. il teorema duale per le linee simmetriche rispetto ad un asse: E. Ciani « Le linee diametrali delle curve algebriche piane e in particolare i loro assi di simmetria » (*Annali della R. Scuola Normale* Pisa 1889, pag. 8).

per un complesso di grado pari, o di 2ª specie per uno di grado dispari. Nei piani ortogonali all' asse si vede che il punto d' intersezione coll' asse è centro (polo della retta all'∞) della linea complesso se la retta all'∞ non è doppia: analogamente l'asse di simmetria è un asse (diametro ortogonale alla direzione del polo) per le linee del complesso, se non è retta doppia (*).

Dunque:

Un asse di simmetria di 1ª specie | di 2ª | per un complesso di grado pari | dispari | è un asse centrale se la sua retta ortogonale all' ∞ non è doppia, ed è un asse cilindro ortogonale alla giacitura coniugata se esso stesso non è retta doppia per il complesso.

Un asse di 1ª specie | di 2ª | per un complesso di grado pari | dispari | che incontra ortogonalmente un asse di 2ª specie, appartiene al complesso, e perciò:

Se un complesso di grado pari (dispari) ha un asse di simmetria di 2ª specie, un altro asse di 1ª specie | di 2ª | per il complesso, che l'incontri ortogonalmente, è una retta doppia per il complesso stesso.

È naturale che i resultati ottenuti possono enunciarsi dal punto di vista proiettivo per gli assi di una involuzione biassiale trasformante in se stesso un complesso di rette.

Si ha poi evidentemente:

Gli elementi covarianti e quindi la congruenza e la superficie singolare di un complesso godono la medesima simmetria.

(*) Salmon « A treatise on the higer plane curves (Cap. Metrical properties of curves) ».

I complessi omofocali ad uno che ha un asse di simmetria di 1ª specie, sono simmetrici rispetto a questo asse, mentre si aggruppano in coppie simmetriche se l'asse è di 2ª specie.

Quindi:

Il complesso focale di un dato complesso, gode la medesima simmetria di esso.

Infine poichè una simmetria rispetto ad un asse trasforma in se stesso il piano all' ∞, si ha:

Il sistema diametrale e la superficie centrale di un complesso hanno la stessa simmetria di esso.

IV.

I complessi con un numero finito di assi di simmetria.

1. Se si ha un complesso simmetrico rispetto a più assi, (in numero finito), questi passano tutti per un punto, altrimenti si dedurrebbe l' esistenza di ∞ assi di simmetria. Inoltre questi assi danno rotazioni in se stessa di una sfera, e tali rotazioni dovendo evidentemente appartenere ad un gruppo finito di rotazioni della sfera, i detti assi sono necessariamente gli assi di simmetria di uno dei poliedri regolari (*).

Il caso della piramide corrisponde ad un solo asse di simmetria (se vi è un numero pari di lati).

Il caso del tetraedro regolare si distingue da quello della doppia piramide quadrata solamente per riguardo alla simmetria rispetto a piani (che noi non consideriamo), e non per quella rispetto ad assi.

Si ha dunque:

Un complesso con un numero finito di assi di simmetria deve avere,

a) o un numero finito di assi di un fascio simmetricamente disposti attorno al centro, e l'asse ortogonale al fascio se il detto numero è pari;

b) o i **9** *assi di simmetria di un cubo, cioè le* **3** *congiungenti i centri delle facce opposte (assi principali)*

(*) KLEIN « Vorlesungen über das Jkosaeder ».

e le 6 *congiungenti i punti medi degli spigoli opposti (assi secondari);*

c) o i 15 *assi di simmetria di un icosaedro regolare, cioè le* 15 *congiungenti i punti medi dei suoi spigoli opposti .*

2. Vogliamo ora procedere alla determinazione dei tipi di simmetria che possono presentare i complessi di dato grado p.

Notiamo in generale che:

Se vi sono complessi di dato grado p con una data simmetria rispetto ad un numero finito di assi, ve ne sono anche di qualsiasi grado maggiore che abbia la stessa parità.

Infatti basta unire ad un complesso di grado p il complesso delle tangenti ad una sfera collo stesso centro del complesso per ottenere un complesso di grado $p+2$ colla medesima simmetria: anche i complessi del fascio dato da due di questi complessi spezzati del grado $p+2$, hanno la stessa simmetria.

L'osservazione fatta ci sarà utile per la proposta determinazione dei complessi simmetrici di dato grado, bastando determinare quelli di grado minimo pari e dispari, di ciascun tipo.

a) Le formule di trasformazione delle coordinate per una rotazione degli assi coordinati attorno all' asse z sono le seguenti

$$a_1 = \alpha\, a + \beta\, b \quad b_1 = \beta\, a - \alpha\, b \quad c_1 = c$$

$$l_1 = \alpha\, l + \beta\, m \quad m_1 = \beta\, l - \alpha\, m \quad n_1 = n\,.$$

Allora se per un complesso simmetrico di grado p l'asse z è la retta ortogonale al fascio degli assi di simmetria nel suo centro, eseguendo una rotazione attorno all'asse z fino a far coincidere l'asse x con uno di questi assi di simmetria, debbono annullarsi nell'equazione del complesso tutti i coefficienti dei termini di grado dispari in a, l, o di tutti quelli di grado pari: così si ottengono tante equazioni di grado $\leq p$ omogenee in α, β.

Ora o queste equazioni sono incompatibili e non si hanno quindi assi di simmetria del complesso nel fascio $x\,y$; o esse sono compatibili e danno un numero finito $\leq p$ di valori di $\frac{\alpha}{\beta}$, e quindi un numero $\leq p$ di assi di simmetria del complesso nel detto fascio, o finalmente esse sono identiche, ed allora tutti gli assi del fascio sono assi di simmetria per il dato complesso. In conclusione un complesso di grado p, con un numero finito di assi di simmetria, non può averne più di p della stessa specie in un fascio.

Ciò posto si abbiano p assi di un fascio simmetricamente disposti attorno ad un centro, e si seghino in p punti con un cerchio col centro nel centro del fascio; in uno di questi punti si conduca la perpendicolare al piano del fascio e presala come asse centrale si costruisca un complesso lineare; ruotando dell'angolo $\frac{4\,\pi}{p}$ attorno alla retta perpendicolare al fascio nel suo centro si ottiene un gruppo di p complessi lineari, ossia un complesso di grado p, simmetrico rispetto ai p assi di 1ª specie: anche tutti i complessi del fascio dato da due di questi complessi composti di p lineari, hanno la stessa simmetria.

Se invece nella costruzione precedente si fosse preso uno degli assi come asse centrale di un complesso lineare, si avrebbe ottenuto un complesso di grado p con p assi di simmetria di 2ª specie e p di 1ª.

Che il numero degli assi d' una specie debba essere eguale a quello degli assi dell'altra specie, è cosa che deve avvenire in generale, poichè gli uni debbono bisecare gli angoli di due consecutivi degli altri.

Finalmente si può costruire anche un complesso di grado p con soli p assi di 2ª specie in un fascio: invero tale è il complesso

$$\varphi(a\,b\,c\,l\,m\,n) + \sum a_i (a\,m - b\,l)^k c^i\, n^{p-(i+2k)} = 0,$$

dove k è dispari e

$$\varphi(a\,b\,c\,l\,m\,n) = 0$$

rappresenta un complesso con p assi di 1ª specie e p di 2ª nel fascio $x\,y$, ed

$$a\,m - b\,l = 0$$

rappresenta evidentemente il complesso di 2º grado delle rette che incontrano ortogonalmente i raggi del detto fascio (ossia il complesso che ha quei raggi come assi di 2ª specie).

Possiamo dunque concludere: (*)

Un complesso del grado p, può avere un numero

(*) Cfr. Ciani « Sulle linee diametrali ec. » (op. c.).

qualunque $\leq p$ *di assi di* 1ª *specie o di* 2ª *appartenenti ad un fascio, e la retta ortogonale al fascio nel suo centro risulta o nò un asse di simmetria del complesso secondochè il detto numero è pari o dispari.*

Un complesso del grado p può anche avere un numero pari qualunque $\leq 2p$ *di assi di specie mista (metà di una specie e metà dell'altra) appartenenti ad un fascio, e la retta ortogonale al fascio nel suo centro è sempre un asse di simmetria del complesso.*

Per i complessi di 2º grado simmetrici rispetto a più assi si hanno i seguenti casi (che poi vedremo essere i soli casi di simmetria rispetto ad un numero finito di assi, poichè risulterà che non vi sono complessi di 2º grado simmetrici appartenenti ai tipi del cubo e dell' icosoedro):

1º) tre assi ortogonali di 1ª specie;

2º) tre assi ortogonali, uno di 1ª specie e due di 2ª;

3º) tre assi ortogonali di 1ª specie, e due assi di 2ª specie bisettori degli angoli di due degli assi di 1ª specie.

L' equazione del complesso assume rispettivamente la forma

$$1^0)\ \alpha_1 a^2+\alpha_2 a\, l+\alpha_3 l^2+\alpha_4 b^2+\alpha_5 b m+\alpha_6 m^2+\alpha_7 c^2+\alpha_8 c n+\alpha_9 n^2=0$$

$$2^0)\ \alpha_1 a\, b+\alpha_2 a\, m+\alpha_3 b\, l+\alpha_4\, l\, m=0$$

$$3^0)\ \alpha_1 a\, b+\alpha_2(a\, m+b\, l)+\alpha_4\, l\, m=0$$

o

$$\alpha_1(a^2-b^2)+2\,\alpha_2(a\, l-b\, m)+\alpha_3(l^2-m^2)=0.$$

È notevole che il 1° caso corrisponde ad un complesso di 2° grado generale dal punto di vista proiettivo.

Infatti è facile verificare analiticamente che una retta è asse di simmetria per un complesso di 2° grado se è per esso un asse centrale e asse cilindro ortogonale alla giacitura coniugata, ossia generalizzando dal punto di vista proiettivo, che due rette di cui una è la polare dell'altra sono assi di un'involuzione biassiale trasformante il complesso in sè stesso: tali rette sono spigoli opposti di un tetraedro coniugato al gruppo dei 6 complessi lineari 2 a 2 in involuzione che il complesso di 2° grado individua (*); ed uno di tali tetraedri può sempre trasformarsi proiettivamente in un altro con 3 spigoli 2 a 2 ortogonali per un punto e gli altri nel piano all' ∞.

Dunque:

Un complesso di 2° grado può trasformarsi proiettivamente in ∞^3 *modi, in un altro con* 3 *assi di simmetria di* 1ª *specie.*

b) Si hanno 3 assi principali e 6 secondari, ed è chiaro che per trasformazioni del gruppo del cubo i 3 assi principali possono essere trasformati l'uno nell'altro, e così i 6 secondari l'uno nell'altro, dunque i 3 assi principali sono tutti della stessa specie, e così i secondari. Distingueremo i due casi in cui la specie degli assi principali e dei secondari è la stessa *(simmetria omogenea)* o è diversa *(simmetria eterogenea)*.

Nel caso della simmetria omogenea di un complesso di grado p, siccome i 3 assi principali sono di 1ª o di 2ª spe-

(*) Klein (*Math. Ann. Bd. II* pag. 213 — *Bd. V.* pag. 295).

cie secondochè p è pari o dispari (cap. prec. paragr. 1), tutti gli assi sono di 1ª o di 2ª specie secondochè p è pari o dispari.

Non vi sono complessi di 2⁰ e 3⁰ grado che hanno la simmetria omogenea del cubo, poichè avrebbero 4 assi della stessa specie appartenenti ad un fascio (paragr. 2).

Se si costruisce un complesso lineare avente per asse centrale una diagonale del cubo, colle trasformazioni del gruppo del cubo si ottiene un gruppo di 4 complessi lineari, ossia un complesso del 4⁰ grado che ha evidentemente la simmetria omogenea del cubo: anche tutti i complessi di un fascio determinato da due di questi complessi spezzati del 4⁰ grado, hanno la stessa simmetria.

Se si prendono per assi $x\ y\ z$ gli assi principali del cubo, l' equazione

$$(a\,m-b\,l)\sum \alpha_i\,c^i\,a^{3-i}+(b\,n-c\,m)\sum \alpha_i\,l^i\,a^{3-i}+$$
$$+(c\,l-a\,n)\sum \alpha_i\,b^i\,m^{3-i}=0$$

rappresenta un complesso del 5⁰ grado colla simmetria omogenea del cubo, come si può verificare osservando che esso ha in ciascuno dei piani coordinati anche i due assi secondari del cubo come assi di 2ª specie (cioè mutando $a\,b\,l\,m$ in $a+b$, $a-b$, $l+m$, $l-n$ ec.). Si potrebbe vedere inoltre che la detta equazione rappresenta il più generale complesso di 5⁰ grado colla simmetria omogenea del cubo.

Consideriamo ora il caso della simmetria eterogenea.

Per p dispari è subito possibile il caso $p=3$, poichè si può p. e. costruire un complesso composto di 3 lineari cogli assi principali per assi centrali e che abbia la data simmetria: il fascio dato da due di questi complessi spezzati è tutto composto di complessi del 3° grado colla medesima simmetria.

Che non vi sieno complessi di 2° grado colla simmetria eterogenea del cubo risulta subito, perchè un tale complesso (avendo tre assi di 1ª specie e due di 2ª in uno dei piani principali) avrebbe un' equazione della forma (v. paragr. prec.).

$$\varphi_1 = \alpha_1 (a^2 - b^2) + 2 \alpha_2 (a l - b m) + \alpha_3 (l^2 - m^2) = 0$$

dove non entrano c, n; ed analogamente altre due forme di equazione in cui non entrano $a\ l$, $b\ m$.

Esistono invece complessi del 4° grado colla detta simmetria, poichè se indichiamo con $\varphi_2\ \varphi_3$ le forme ottenute colle sostituzioni cicliche $(a\ b\ c)$, $(l\ m\ n)$ da φ_1, l'equazione

$$\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_3 + \varphi_2 \varphi_3 = 0$$

(che non è identica) rappresenta un complesso che gode appunto la simmetria eterogenea del cubo.

Possiamo dunque concludere:

Un complesso di grado qualunque $p > 2$ *può avere gli assi di simmetria d' un cubo.*

Per i complessi di grado pari questi assi possono essere o tutti di 1ª *specie, o i tre principali di* 1ª, *e i* 6 *secondari di* 2ª.

Per i complessi di grado dispari questi assi possono *essere, o tutti di 2ª specie (se* $p \geq 5$*), o i tre principali di 2ª ed i* 6 *secondari di* 1ª.

c) I 15 assi di simmetria d'un icosaedro sono trasformabili l'uno nell' altro con trasformazioni del gruppo dell' icosaedro e perciò tutti della stessa specie: ma i 15 assi si distribuiscono in 5 terne ortogonali percui essi sono di 1ª specie o di 2ª secondochè il grado del complesso è pari o dispari.

Ora non vi possono esser complessi di 3° o 4° grado colla simmetria dell' icosaedro poichè avendo 5 assi in un piano ortogonale ad un diametro dell' icosaedro ne avrebbero infiniti.

Invece prendendo un complesso lineare che abbia per asse centrale un diametro, si costruisce subito un gruppo di 6 complessi lineari, ossia un complesso del 6⁰ grado colla detta simmetria: anche i complessi di un fascio ottenuto da due di questi complessi hanno la medesima simmetria.

Se esiste un complesso del 5⁰ grado colla simmetria dell' icosaedro, (15 assi di 2ª specie), per un punto di un asse il cono complesso deve spezzarsi nel fascio ortogonale all' asse ed in un cono del 4⁰ ordine per il quale l' asse stesso è retta doppia; questo cono di 4⁰ ordine si spezza nel fascio del piano per l' asse ortogonale ad un diametro dell' icosaedro (che contiene 5 assi), nel fascio nel piano per questo diametro, e nel cono di rotazione i cui raggi incontrano l' asse che si considera secondo l'angolo $\frac{\pi}{3}$; e poichè la stella delle rette pel centro appartiene al complesso, essa deve esser doppia per la congruenza delle rette del complesso che si appoggiano ad un asse di simmetria: questa congruenza è così perfettamente determinata.

Inoltre se il complesso esiste, deve contenere come doppia la stella delle rette per il centro.

Ciò posto fissiamo di considerare un asse r dell' icosaedro. Per un punto qualunque 0 dello spazio preso come vertice, possiamo costruire un cono del 5^0 ordine che abbia come retta doppia la congiungente il centro dell' icosaedro, e che contenga come generatrici le 15 perpendicolari ai 15 assi e le due rette inclinate di $\frac{\pi}{3}$ su r nel piano $0\, r$.

Ora le generatrici dei coni di 5^0 ordine determinati per tutti i punti dello spazio presi come vertici; o soddisfano ad una condizione e generano un complesso del 5^0 grado, o sono tutte le rette dello spazio: ma il 2^o caso è impossibile poichè non si possono ottenere colla costruzione prec. tutte le rette che si appoggiano ad uno degli assi di simmetria dell' icosaedro incontrante r sotto l'angolo $\frac{2\pi}{3}$; dunque le generatrici dei coni di 5^0 ordine ottenuti colla costruzione precedente pei punti dello spazio presi come vertici, appartengono ad un complesso del 5^0 grado.

Possiamo costruire analogamente un complesso del 5^o grado partendo anzichè dall'asse r, da un altro asse r' dell' icosaedro; ma questi due complessi coincidono avendo comuni le congruenze intersezione coi 15 assi (complessi speciali) dell'icosaedro: ne segue che il complesso del 5^0 grado costruito è simmetrico rispetto ai 15 assi dell' icosaedro, e che è l' unico complesso del 5^0 grado colla detta simmetria.

Concludiamo:

Vi sono complessi di grado $p>4$ *coi* 15 *assi di simmetria d' un icosaedro.*

Essi sono di 1ª o 2ª specie secondo la parità o disparità del grado p.

3. Ci limiteremo ora ad enunciare brevemente alcune proprietà dei complessi simmetrici di grado minimo pari e dispari, appartenenti ai tipi di simmetria considerati.

a) Il complesso di 2° grado con tre assi ortogonali di 1ª specie, generale dal punto di vista proiettivo, ha i tre assi come assi centrali (v. par. 2. *a*).

Il complesso di 2° grado con un asse di 1ª specie e due di 2ª, ha l' asse di 1ª specie e la retta ortogonale all' ∞ come rette doppie (v. cap. III. par. 2).

Il complesso di 3° grado con tre assi di 1ª specie appartenenti ad un fascio ha i tre assi come rette cuspidali (v. cap. III. par. 2).

Il complesso di 3° grado con 3 assi di 2ª specie in un fascio ha come punto e piano triplo il centro ed il piano del fascio.

Il complesso di 3° grado con tre assi di 1ª specie e tre di 2ª in un fascio, ha l'asse di 2ª specie ortogonale al fascio come retta doppia.

Il complesso di 3° grado con tre assi ortogonali uno di 1ª e due di 2ª specie, ha l' asse di 1ª specie come retta cuspidale e i due assi di 2ª come rette doppie.

Il complesso di 3° grado con tre assi di 2ª specie ortogonali, ha i tre assi come rette doppie.

b) Per l' ultimo teorema del caso *a*, abbiamo:

Il complesso di 3° grado colla simmetria del cubo ha i tre assi principali come rette doppie ed i sei secondari come rette cuspidali (v. par. 2. *b*).

Consideriamo il complesso di 4^0 grado colla simmetria omogenea del cubo.

È facile vedere che:

Per il complesso di 4^0 *grado che ha la simmetria omogenea del cubo, il cono asintotico del centro o è il cono ciclico contato due volte, o si compone delle quattro diagonali del cubo; corrispondentemente il cono complesso del detto centro è il cono ciclico contato due volte, o si spezza nei quattro fasci ortogonali alle diagonali.*

Si ha poi evidentemente:

Il complesso del 4^0 *grado che ha la simmetria eterogenea del cubo contiene come rette doppie i tre assi principali (di* 1^a *specie), e come rette cuspidali i sei secondari: ad esso appartiene la stella delle rette pel centro ed il piano rigato all' infinito.*

Il complesso del 5^0 *grado che ha la simmetria omogenea del cubo possiede i nove assi (di* 2^a *specie) come rette doppie; ad esso appartiene la stella delle rette pel centro ed il piano rigato all' infinito.*

c) Analogamente al 2^0 teorema *b*, si vede che:

Per il complesso di 6^0 *grado colla simmetria dell'icosaedro il cono asintotico del centro o è il cono ciclico contato tre volte, o si compone dei sei diametri dell'icosaedro; corrispondentemente il cono complesso del detto centro è il cono ciclico contato tre volte, o si spezza nei fasci ortogonali ai sei diametri.*

Si ha poi (v. par. 2. *c*).

Il complesso del 5° *grado unico che ha la simmetria di un dato icosaedro, contiene (oltre le* 15 *congruenze* *delle rette incontranti ortogonalmente i* 15 *assi), i sei piani rigati ortogonali ai sei diametri, le sei quintine di piani rigati passanti pei sei diametri e per gli assi ortogonali, la stella delle rette pel centro come doppia, il piano rigato all'* ∞*, e le sei stelle delle rette parallele ai sei diametri.*

L' ultima proprietà risulta dal fatto che per il punto all' ∞ di un diametro vi sono 5 fasci di raggi del complesso fuori di quello all' ∞ .

V.

I complessi con infiniti assi di simmetria.

1. Se un complesso ha ∞' assi di simmetria, i loro punti all' ∞ generano una linea o un gruppo di punti.

Nel 1° caso per un punto qualunque della detta linea vi è un asse r che incontra tutti quelli che fanno con esso un angolo commensurabile con π (altrimenti si dedurrebbero infiniti assi paralleli ad r), e quindi, per la continuità, incontra tutti gli assi del complesso i cui punti all'∞ sono sulla detta linea: evidentemente questi assi incontrandosi due a due generano un fascio, e la retta ortogonale al fascio nel suo centro risulta pure un asse di simmetria pel complesso; è poi chiaro che non vi sono in tal caso altri assi se non ve n' è ∞^2.

Nel 2° caso si hanno tanti fasci paralleli di assi, poichè due assi paralleli ne danno infiniti di un fascio e tre paralleli non appartenenti ad un fascio danno una stella di assi paralleli; ma se per un punto vi è un numero finito di assi > 1, questi debbono costituire una delle figure *a) b) c)* enumerate nel cap. prec.; quindi se tutti i fasci di assi paralleli non appartengono ad un piano, essi debbono ottenersi dalla traslazione degli assi di uno di questi tipi *a) b) c)* muovendosi il centro sopra una retta (comune ai piani dei fasci); in questo 2° caso i piani dei fasci si dispongono simmetricamente rispetto alla loro retta comune, e questa retta è pure un asse di simmetria del complesso.

Se gli assi di simmetria sono ∞^2, essi compongono un sistema di rette A di un dato ordine k.

Nel piano all' ∞ vi è un numero finito di rette di A, o ve n'è infinite inviluppanti una linea.

Nel 1° caso, non può essere $k > 1$, poichè per ogni punto all' ∞ vi sarebbero almeno due raggi di A e quindi un fascio di rette parallele di A, ossia il sistema A non sarebbe più ∞^2: ma se $k=1$, A è una congruenza lineare o una stella; e se è una congruenza lineare è evidentemente quella delle rette che si appoggiano ortogonalmente ad un' altra retta, tipo possibile, ma che dà un numero infinito di raggi di A nel piano all' ∞.

Nel 2° caso, la linea inviluppata dai raggi di A nel piano all' ∞, dev'essere (per le considerazioni precedenti), o di classe $k-1$, o di classe k. Se è di classe $k-1$, per un qualunque punto all' ∞ si conduca il raggio r di A al finito che gli appartiene (asse di simmetria del complesso parallelo a quella direzione): sia r' la retta ortogonale all' ∞ di r; per un punto di r' il raggio r'' di A (al finito) incontra r, altrimenti vi sarebbero per esso due e quindi un fascio di raggi di A; per il punto $r\,r''$ vi è quindi un 3° asse r''' ortogonale ai due, e perciò il piano ortogonale ad r in quel punto è piano di simmetria ed analogamente i piani $r\,r'''$, $r''\,r'''$: ora o ogni piano ortogonale ad r'' è piano di simmetria, o il piano $r\,r'$ contiene pel punto $r\,r'''$ un fascio di assi di simmetria, ed analogamente si dica per r'''; il 1° caso è assurdo, poichè porta ad aversi un fascio di assi paralleli ad r, il 2° dà una stella di assi di simmetria pel punto $r\,r''$. Se invece la linea inviluppo dei raggi di A nel piano all' ∞ è di classe k, i punti all' ∞ dei raggi di A

(assi del complesso) generano una linea c, se A non si spezza in stelle di rette parallele: per ogni punto della linea c vi è un fascio di raggi di A; i piani di due di questi fasci, inclinati d'un angolo arbitrario, s'incontrano secondo una retta pei cui punti vi è un fascio di rette di A, ed evidentemente perpendicolare alla retta stessa.

Se vi sono più stelle di assi paralleli, gli assi per un punto debbono formare una delle figure corrispondenti ai tipi *a) b) c)* del capitolo precedente. Se vi è una congruenza di assi che incontrano ortogonalmente un altro asse, non si possono avere evidentemente altri assi di simmetria; lo stesso avviene se si hanno gli assi di una stella col centro a distanza finita.

Se un complesso ha ∞^3 assi di simmetria costituenti un complesso, per ogni punto ve n'è un fascio e la retta r ortogonale ad esso è evidentemente luogo di centri di fascî del complesso ortogonali ad essa: gli assi r così ottenuti sono evidentemente i raggi paralleli d'una stella, e perciò gli assi di simmetria del complesso sono tutti quelli paralleli ad una giacitura, e le rette r ortogonali alla giacitura stessa.

Finalmente se un complesso ha tutte le rette dello spazio come assi di simmetria è il complesso ciclico contato una o più volte, caso che escludiamo.

Concludiamo:

Se un complesso ha infiniti assi di simmetria questi debbono presentare uno dei casi seguenti:

α) gli assi di un fascio col centro a distanza finita e la retta ortogonale al fascio nel suo centro;

β) gli assi di un numero finito di fasci di raggi

paralleli, i quali, o appartengono ad un piano e sono in numero dispari simmetricamente disposti rispetto ad un punto del piano, o appartengono ad un numero pari di piani di un fascio disposti simmetricamente rispetto alla retta comune che è pure un asse di simmetria del complesso ;

γ) *gli assi di una stella col centro a distanza finita;*

δ) *gli assi di una o più stelle coi centri all'* ∞, *le cui direzioni sono quelle degli assi di simmetria d'un poliedro regolare;*

ε) *gli assi di una congruenza di rette ortogonali ad una direttrice e questa direttrice:*

λ) *gli assi paralleli ad una giacitura e quelli ortogonali alla giacitura stessa.*

Si ha poi evidentemente:

Il caso γ) *dà un complesso che si spezza in complessi di tangenti a sfere concentriche.*

Il caso δ) *dà un complesso che si spezza in tanti complessi le cui rette fanno un angolo costante dato con ciascuna direzione degli assi: la superficie singolare è il piano all'* ∞.

Il caso λ) *dà il complesso lineare delle rette parallele ad una giacitura.*

Perciò escluderemo i casi γ) δ) λ) dalle successive considerazioni, limitandoci ai tre casi α) β) ε).

2. Consideriamo dapprima il caso di un fascio di assi di simmetria di 1ª specie, e l'asse ortogonale al fascio nel suo centro.

Ponendo la condizione che un complesso di 2º grado abbia quattro assi di 1ª specie in un fascio, si trova che l'equazione di un complesso di 2° grado con un fascio di assi di 1ª specie può assumere la forma

$$\varphi = \alpha_1 c^2 + \alpha_2 c n + \alpha_3 n^2 + \\ + \beta_1 (a^2 + b^2) + \beta_2 (l^2 + m^2) = 0.$$

Quindi il prodotto di k funzioni della forma φ, o di k di queste funzioni per la $k_1 c + k_2 n$ (che posta $=0$ dà un complesso lineare coll'asse centrale z), rappresenta un complesso di grado $2k$ o $2k+1$ col fascio di assi di 1ª specie che si considera, e l'asse ortogonale (principale) di 1ª o 2ª specie secondo la parità o disparità del grado: il fascio di due di tali complessi simmetrici è composto di complessi colla medesima simmetria.

Riguardo alle proprietà dei complessi colla detta simmetria, osserviamo che essi rimangono invariati per una rotazione di un angolo arbitrario attorno all' asse principale, e perciò la superficie singolare è di rotazione.

Concludiamo:

Vi sono complessi di grado qualunque > 1 con un fascio di assi di 1ª specie e l' asse ortogonale al fascio nel suo centro (principale) di 1ª o 2ª specie secondo la parità o disparità del detto grado .

La superficie singolare è di rotazione attorno all'asse principale e simmetrica rispetto al piano del fascio di assi. Se il grado è dispari si staccano dalla superficie singolare i piani ciclici per l' asse principale (contati un certo numero di volte).

Si ha poi evidentemente:

Se gli assi di simmetria del fascio sono di 2ª specie, il complesso si spezza nel complesso delle rette ortogonali ai raggi del fascio che è di 2° grado ed ha per equazione (v. cap. prec.).

$$a\, m = b\, l,$$

ed in un complesso col fascio di assi di 1ª specie.

Il cono complesso di un punto, rispetto a questo complesso di 2° grado, è quello che proietta la sezione del piano del fascio di assi colla sfera che ha per diametro il segmento congiungente il detto punto col centro del complesso.

Da questa costruzione geometrica si deduce inoltre:

La superficie singolare del detto complesso di 2° grado si spezza nel piano del fascio di assi di 2ª specie, nel piano all'∞, e nella coppia di piani ciclici per l'asse principale.

3. Se un complesso ha un fascio di assi paralleli, evidentemente la congruenza intersezione di esso con uno degli assi genera tutto il complesso mediante una traslazione parallelamente al piano degli assi nella direzione ad essi ortogonale.

Dunque:

Esistono complessi di grado qualunque >1 con un fascio di assi paralleli: questi complessi sono generati da una traslazione della congruenza delle rette di un complesso simmetrico rispetto ad uno degli assi che si appoggiano ad esso, *nella direzione parallela al piano degli assi e normalmente ad essi.*

La superficie singolare è un cilindro parallelo alla direzione suddetta.

I complessi con più fasci paralleli di assi di simmetria si spezzano in tanti complessi simmetrici rispetto agli assi di ciascun fascio rispettivamente.

Da un complesso che ha un fascio di assi paralleli, di 2ª specie, si stacca quello di 1° grado delle rette ortogonali agli assi stessi.

4. Finalmente consideriamo i complessi che hanno gli assi di simmetria di una congruenza di rette che incontrano ortogonalmente un' altra retta (asse principale).

Le formule di traslazione degli assi coordinati secondo l' asse z, sono evidentemente

$$a_1 = a \qquad b_1 = b \qquad c_1 = c$$

$$l_1 = l - k\,b \quad m_1 = m - k\,a \quad n_1 = n,$$

quindi l'equazione di un complesso di 2° grado che ha come assi di simmetria le rette che incontrano ortogonalmente l' asse z è (v. par. 2):

$$(1) \quad \alpha_1\,c^2 + \alpha_2\,c\,n + \alpha_3\,n^2 + \beta\,(a^2 + b^2) = 0\,.$$

Ne segue analogamente al par. 2 che vi sono complessi di tutti i gradi con questi assi di simmetria.

Ciò posto se per un punto qualunque all'∞ si considera un raggio del complesso a distanza finita, questo dà un fascio di raggi del complesso nel piano per esso parallelo all' asse principale, e quindi il cilindro complesso di un qualunque punto all' ∞ si spezza in un numero pari di fasci a coppie simmetrici rispetto all' asse principale, più il fascio nel piano all'∞ se il grado del complesso è dispari. Tenendo presenti i resultati dei par 2 e 3 si vede poi che la residua parte della superficie singolare deve comporsi di cilindri di rotazione, e perciò il piano all'∞ appartiene un numero pari di volte alla detta superficie singolare di ordine $2p(p-1)^2$.

Possiamo dunque concludere:

Vi sono complessi di qualunque grado p simmetrici rispetto ad un asse (principale) ed alle rette che gli si appoggiano ortogonalmente.

Per essi la superficie singolare si spezza in cilindri di rotazione attorno all'asse principale (e i piani ciclici per esso se p è dispari), e nel piano all'∞ contato un numero pari (≥ 2) di volte, luogo di punti il cui cono complesso si spezza in tanti fasci.

Il piano rigato all'∞ appartiene sempre un numero dispari di volte ai detti complessi di grado dispari, ed un numero pari ≥ 2 di volte ai detti complessi il cui grado pari è un numero intero della forma $4\pi + 2$.

In particolare:

Per i complessi di 2° grado che godono questa simmetria la superficie singolare si spezza nel piano all'∞ doppio e in un cilindro di rotazione.

Infine notiamo che (v. cap. III.):

I complessi omofocali ad un complesso di 1° *grado contato* $2p$ *volte, sono simmetrici rispetto alle rette ortogonali all' asse centrale di esso ed all'asse stesso.*

Nel caso in cui il complesso lineare suddetto sia speciale si ottengono, per $p=1$, i *complessi delle rette che hanno momento costante rispetto ad un asse*, pei quali il teorema dato relativamente alla loro superficie singolare esprime una proprietà nota (*).

(*) Segre « Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes » (*Crelle Bd. 97*, 1884, pag. 95).