EDGARDO CIANI

Le linee di curva diametrali delle curve algebriche piane in particolare i loro assi di simmetria

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, S. 1, vol. 6 (1889), p. 1-160

EDGARDO CIANI

LE LINEE DIAMETRALI
DELLE CURVE ALGEBRICHE PIANE

E IN PARTICOLARE

I LORO ASSI DI SIMMETRIA

CONSIDERAZIONI GENERALI

1. Porremo a fondamento dei nostri studi i seguenti risultati relativi alle curve polari ottenuti dal prof. Cremona nella sua importante memoria « *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* ».

Siano due curve, una C_ν di ordine ν e una C_n di cui indicheremo secondo l' uso

con	n	l' ordine	
»	m	la classe	
»	δ	il numero	dei punti doppi
»	τ	»	delle tangenti doppie
»	k	»	delle cuspidi
»	i	»	dei flessi

Se un punto P si muove sulla linea C_n la polare r^{ma} di P rispetto alla curva fondamentale C_ν inviluppa una curca Υ che si chiama polare r^{ma} di C_n rispetto a C_ν; l' ordine di Υ è

$$n_\Upsilon = (\nu-r) \{ n(n+2r-3) - (2\delta+3k) \}$$

Per il caso speciale $r=\nu-1$ si determinano con facilità le altre caratteristiche di Υ e sono le seguenti:

$$n_\Upsilon = n(n+2\nu-5)-(2\delta+3k)$$

$$m_\Upsilon = n(\nu-1)$$

$$\delta_\Upsilon = \frac{1}{2}\{ n(n+2\nu-5)-(2\delta+3k) \}^2 - n(5n+6\nu-21)+10\delta+\frac{27}{2}k$$

$$k_\Upsilon = 3n(n+\nu-4)-(6\delta+8k)$$

$$\tau_\Upsilon = \frac{1}{2}n(\nu-2)(n\nu-3)+\delta$$

$$i_\Upsilon = k$$

L' introduzione del concetto della polare di una curva rispetto a un' altra , fornisce la definizione doppia delle curve polari di punti:

« La polare r^{ma} di un punto P rispetto a una curva C_ν può considerarsi:

1.° *Come il luogo dei punti le cui* $(\nu-r)^{me}$ *polari passano per* P:

2 ° *Come l'inviluppo delle rette le polari* $(\nu-r)^{me}$ *delle quali contengono il punto* P.

2. Vediamo se è possibile dare analogamente una doppia definizone per le curve polari di curve.

Le coordinate di P entrano al grado r nella polare r^{ma} di P rispetto a C_ν; dunque per un punto qualunque M del piano delle due curve C_n, C_ν passano $n\,r$ polari r^{me} di $n\,r$ punti P situati sulla curva C_n. — Questi $n\,r$ punti costituiscono evidentemente il gruppo completo delle intersezioni della curva C_n con la polare $(n-r)^{ma}$ di M rispetto a C_ν.

Sia P_i uno qualunque di questi $n\,r$ punti; siano a_i;b_i rispettivamente la polare r^{ma}, ed $(r-1)^{ma}$ di P_i rispetto a C_ν: la a_i sarà anche la prima polare di P_i rispetto a b_i; ma a_i passa per M, dunque la retta polare di M rispetto a b_i passerà per P_i.

Supponiamo ora che due qualunque fra i punti P; per esempio P_h ; P_k si avvicinino l' uno all'altro e tendano a coincidere; la stessa cosa succederà per a_h ed a_k onde la posizione limite che assumerà il punto M sarà un punto dell' inviluppo di a_h ; a_k ; a_i ; . . . cioè un punto della polare r^{ma} di C_n rispetto a C_ν: d'altra parte b_h e b_k tenderanno pure verso una posizione limite comune e così anche per conseguenza le rette polari di M rispetto a b_h e b_k; ma abbiamo già osservato che queste rette passano rispettivamente per P_h ; P_k onde la posizione-limite che assumeranno sarà la tangente alla curva C_n nel punto posizione-limite di P_h e P_k.

Ecco quindi la definizione richiesta:

« *La polare* r^{ma} *di una curva* C_n *rispetto a un' altra* C_ν *può considerarsi:*

1.° *Come il luogo dei poli delle tangenti di* C_n *rispetto a quelle curve che sono polari* $(r-1)^{me}$ *dei punti di contatto rispetto alla curva fondamentale* C_ν, 2.° *Come l'inviluppo delle polari r^{me} dei punti di* C_n *rispetto a* C_ν ».

3. Quando il punto P è uno dei punti all' infinito di C_n, la polare r^{ma} di P rispetto a C_ν prende il nome di linea diametrale r^{ma}. Se C_n ha tutti i punti all' infinito e si riduce quindi alla retta all'infinito; mentre il punto P si sposta su di essa, la linea diametrale r^{ma} di P inviluppa la linea diametrale r^{ma} della retta all'infinito e il cui ordine sarà dato secondo le formole del §. 1. da

$$n_r = 2(\nu - r)(r - 1)$$

Abbiamo dunque due sorta di linee diametrali.

1.° Le linee diametrali che chiameremo *ordinarie* e che non sono altro che le polari rispetto a C_ν dei punti all' infinito. Queste linee sono in numero infinito e ogni punto ne individua $\nu - 1$.

2.° Le linee diametrali che chiameremo *principali* e che costituiscono le $\nu - 1$ polari della retta all' infinito rispetto a C_ν. — Queste ultime a differenza delle prime sono dunque in numero finito. — Fra di esse se ne ha una di ordine zero ed è la prima linea diametrale principale.

Essa è infatti rappresentata dai $(\nu - 1)^2$ poli della retta all' infinito che sono i $(\nu - 1)^2$ punti base del fascio delle prime linee diametrali ordinarie.

Dunque il gruppo dei $(\nu - 1)^2$ centri della curva C_ν può considerarsi come la prima linea diametrale che è di ordine zero.

Noteremo poi che dalle formule del §. 1. resultano le seguenti caratteristiche per la $(\nu-1)^{ma}$ linea diametrale principale ovvero per l' inviluppo dei diametri:

$$n_\gamma=2(\nu-2) \;;\; \delta_\gamma=2(\nu-3)(\nu-4) \;;\; \tau_\gamma=\frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2}$$

$$m_\gamma=\nu-1 \;;\; k_\gamma=3(\nu-3) \;;\; i_\gamma=0$$

Finalmente osserveremo come dal teorema del §. 2. consegua che

« *La* r^{ma} *linea diametrale principale può anche riguardarsi come il luogo dei centri delle* $(r-1)^{me}$ *linee diametrali ordinarie* ».

ASSI DI SIMMETRIA

Gli assi di simmetria considerati come linee diametrali.

4. Diremo che una curva c è simmetrica rispetto a una retta r, quando preso un punto qualunque C di c e da esso tirata la perpendicolare p a r e chiamato P il punto $p\,r$; sulla perpendicolare p esiste un punto C_1 di c tale che

$$PC=-PC_1$$

I punti C e C_1 costituiscono una *coppia simmetrica*. Noi intendiamo di riferirci in tutto quel che segue a curve generali del proprio ordine, mancanti quindi di punti multipli.

Supponiamo dapprima che l'ordine della curva sia un numero dispari. Allora il fascio delle perpendicolari a un medesimo asse di simmetria deve passare per uno dei punti all' infinito della curva giacchè ognuna di queste perpendicolari la incontra in un numero dispari di punti che debbono costituirsi in coppie simmetriche. Se quindi un asse esiste esso deve essere perpendicolare a un asintoto.

Di più, se per esempio l'asse delle y è asse di simmetria e il sistema di coord. è ortogonale l'equazione della curva non cambia per la sostituzione lineare che porta x in $-x$ dunque:

« *Tutte le curve covarianti e contravarianti della primitiva sono simmetriche rispetto al medesimo asse* ».

Così in particolare l' Hessiana che è pure di grado dispari:

Segue che essa ha a comune con la curva quell' asintoto che è perpendicolare al comune asse di simmetria, o in altre parole:

« *La condizione necessaria e sufficiente perchè una curva di grado dispari possegga un asse di simmetria è che abbia un flesso all' infinito che sia il coniugato armonico del punto all'infinito della polare armonica del flesso rispetto alla coppia dei punti ciclici del piano* ».

« *Questa polare armonica è l'asse richiesto* ».

« *Ogni retta che passa per il flesso taglia ulteriormente la curva in un numero pari di punti che si* *costituiscono in coppie in involuzione di cui i punti doppi sono il flesso e il punto d' incontro con l' asse di simmetria* ».

Se poi l' ordine della curva è pari un asse di simmetria è certamente un diametro perpendicolare al sistema di corde cui si riferisce (Cf. il capitolo « Metrical properties of Curves » dell' opera del Salmon « A treatise on the higher plane curves »).

5. Riassumendo: « Un asse di simmetria fa sempre parte delle linee diametrali ordinarie; per una curva di grado pari è un diametro; per una curva di grado dispari costituisce una conica diametrale ordinaria insieme a quell' assintoto che gli è perpendicolare ».

Condizioni analitiche che debbono verificarsi affinchè una data retta sia asse di simmetria per una data curva.

6. Per mezzo delle osservazioni seguenti si determinano queste condizioni indipendentemente dalla distinzione fatta nel §. precedente relativamente all'essere pari o dispari l'ordine della curva.

La retta data sia

$$y = m x + n$$

riferita come la curva a un sistema cartesiano ortogonale. Cambiamo sistema di coord. prendendo la retta precedente per asse delle x e una perpendioolare a essa passante per il punto (o , n) per asse delle y; se dopo fatto questo cambiamento annulliamo tutti i coefficienti dei termini che contengono la nuova y a grado dispari è certo che il nuovo asse delle x cioè la retta data sarà una retta di simmetria.

Le formole di trasformaz. delle coord. sarebbero:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left\{ X - (Y+n)m \right\}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left\{ m\,X + Y + n \right\}$$

ma per i calcoli da farsi val meglio immaginare l'equazione della curva scritta in coordinate omogenee $x_1; x_2; x_3$ essendo il triangolo fondamentale costituito dall' antico sistema cartesiano e dalla retta all'infinito: allora in luogo della trasformazione precedente.

Si può assumere l' altra

$$x_1 = y_1 - m\,y_2 - m\,n\,y_3$$
$$x_2 = m\,y_1 + y_2 + n\,y_3$$
$$x_3 = y_3$$

La legge secondo la quale si possono trovare i coefficienti della equazione trasformata per mezzo dei coefficienti della equazione primitiva e di quelli della sostituzione lineare è semplicissima e consiste in questo:

« *Se si effettua la sostituzione lineare*

$$x_i = \sum_1^n \alpha_i^{(k)}\, y_k$$

su di una ennaria qualunque $a_x^r=0$ *di grado* r *la forma trasformata si ottiene dalla primitiva cambiando ogni coefficiente simbolico,*

$$a_i$$

nel coefficiente simbolico corrispondente:

$$a_{\alpha^{(i)}}$$

Basterà dunque nel nostro caso speciale di una ternaria valersi di questa legge, osservando che si ha

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = \alpha_3^{(3)} = 1 \quad ; \qquad \alpha_3^{(1)} = \alpha_3^{(2)} = 0$$

$$\alpha_1^{(3)} = -mn \ ; \ \alpha_2^{(3)} = n \ ; \ \alpha_1^{(2)} = -\alpha_2^{(1)} = -m$$

Una volta ottenuta l'equazione trasformata, bisognerà annullare i cofficienti dei termini che contengono la y_2 a potenze dispari. — Se n è il grado della curva si hanno così

$$\frac{(n+1)^2}{4}$$

ovvero

$$\frac{n(n+2)}{4}$$

relazioni a seconda che n è dispari, o pari. Queste relazioni contengono linearmente i coefficienti della curva; d' altra parte questi coefficienti sono:

$$\frac{n(n+3)}{2}$$

dunque:

« *Presa una retta qualunque del piano, tutte le curve di ordine n simmetriche rispetto a questa retta costituiscono un sistema lineare:*

$$\infty^{\frac{n^2+4n-2}{4}}, \text{ ovvero } \infty^{\frac{n^2+4n-1}{4}}$$

a seconda che n è pari o dispari ».

Curve che posseggono più di un asse di simmetria.

7. Dopo aver determinate le condizioni analitiche che si richiedono perchè una data retta sia asse di simmetria per una curva, si affaccia naturalmente la questione relativa al numero degli assi che una curva può possedere. E questa questione si presenta e si risolve in modi abbastanza diversi a seconda che si riferisce a una curva di grado pari, o a una curva di grado dispari. Prima però di fare questa distinzione è necessario dare un limite massimo per questo numero, senza però intendere di dimostrare, almeno per ora, che questo limite massimo può essere effettivamente raggiunto.

Questo limite è uguale al grado della curva sia esso pari, o dispari e solamente per una certa classe di curve di ordine pari le considerazioni seguenti non dànno resultato decisivo.

Che una curva di grado dispari non possa possedere più di n assi di simmetria risulta subito da ciò che si disse al §. 4; ogni asse porta l' esistenza di un flesso reale all' infinito; se la curva possedesse più di n assi, avrebbe più di n punti all' infinito e si spezzerebbe.

Se poi n è un numero pari osservammo già al §. 4. che ogni asse di simmetria è un diametro perpendicolare al relativo sistema di curve. Vediamo come si può analiticamente esprimere questa condizione.

L'equazione della curva può scriversi sotto la forma

$$\begin{aligned}
& a_{0,n}\, y^n + a_{1,n-1}\, y^{n-1} + a_{2,n-2}\, y^{n-2} + \dots + a_{n,0} + \\
& + x \left\{ a_{0,n-1}\, y^{n-1} + a_{1,n-2}\, y^{n-2} + a_{2,n-3}\, y^{n-3} + \dots \right\} + \\
& + x^2 \left\{ a_{0,n-2}\, y^{n-2} + a_{1,n-3}\, y^{n-3} + a_{2,n-4}\, y^{n-4} + \dots \right\} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + x^{n-2} \left\{ a_{0,2}\, y^2 + a_{1,1}\, y + a_{2,0} \right\} + \\
& + x^{n-1} \left\{ a_{0,1}\, y + a_{1,0} \right\} + \\
& + x^n\, a_{0,0} = 0
\end{aligned}$$

dove n è pari.

Il coefficiente angolare del diametro coniugato a una direzione θ è dato da

$$\frac{a_{0,n-1} (\operatorname{tg} \theta)^{n-1} + 2 a_{0,n-2} (\operatorname{tg} \theta)^{n-2} + 3\, a_{0,n-3} (\operatorname{tg} \theta)^{n-3} + \dots + (n-2)\, a_{0,2} \operatorname{tg}^2 \theta + (n-1)\, a_{0,1} \operatorname{tg} \theta + n\, a_{0,0}}{n\, a_{0,n} (\operatorname{tg} \theta)^{n-1} + (n-1)\, a_{0,n-1} (\operatorname{tg} \theta)^{n-2} + \dots + 3\, a_{0,3} \operatorname{tg}^2 \theta + 2\, a_{0,2} \operatorname{tg} \theta + a_{0,1}}$$

Affinchè questo diametro sia perpendicolare al sistema di corde cui è relativo basta che il precedente rapporto sia uguale a $\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$:

Si ottiene allora per tg θ la seguente equazione di grado n.

$$\begin{aligned}
&a_{0,n-1}(\operatorname{tg}\theta)^n+(\operatorname{tg}\theta)^{n-1}\{2a_{0,n-2}-n\,a_{0,n}\}+\\
&+(\operatorname{tg}\theta)^{n-2}\{3a_{0,n-3}-(n-1)a_{0,n-1}\}+\\
&+(\operatorname{tg}\theta)^{n-3}\{4a_{0,n-4}-(n-2)a_{0,n-2}\}+\dots\dots+\\
&+\operatorname{tg}^5\theta\{(n-4)a_{0,4}-6a_{0,6}\}+\operatorname{tg}^4\theta\{(n-3)a_{0,3}-5a_{0,5}\}+\\
&+\operatorname{tg}^3\theta\{(n-2)a_{0,2}-4a_{0,4}\}+\\
&+\operatorname{tg}^2\theta\{(n-1)a_{0,1}-3a_{0,2}\}+\operatorname{tg}\theta\{n\,a_{0,0}-2a_{0,2}\}-a_{0,1}=0
\end{aligned}$$

Resulta intanto che « *Esistono n diametri perpendicolari ai loro corrispondenti sistemi di corde* ».

Se poi la curva è simmetrica rispetto all'asse delle y ed è di grado pari allora si ha

$$a_{0,n-1}=a_{0,n-3}=a_{0,n-5}=\dots=a_{0,5}=a_{0,3}=a_{0,1}=0$$

Se inoltre si esige che debbano esistere più di n diametri perpendicolari ai corrispondenti sistemi di corde, annullando identicamente la equazione precedente si trova:

$$a_{0,n-2}=\left(\frac{n}{2}\right)_1 a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-4}=\left(\frac{n}{2}\right)_2 a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-6}=\left(\frac{n}{2}\right)_3 a_{0,n};\dots$$

In questo caso la binaria di grado n in x e y che comparisce nell' equaziene della curva è la potenza $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{esima}}$ di

$$x^2 + y^2$$

« *La curva tocca* $\frac{n}{2}$ *volte la retta all' infinito nei punti ciclici del piano* ».

All' infuori dunqne di queste curve speciali e che noi per brevità chiameremo *ipercicliche*, siamo sicuri che anche le curve di grado pari non possono possedere un numero di assi superiore al loro grado.

Dimostreremo poi in seguito come effettivamente questo limite massimo possa essere sempre raggiunto senza che la curva si spezzi.

8. Una conseguenza del teorema ora dimostrato è anche la seguente: « ammesso che una curva possa possedere più di due assi, essi debbono passare tutti per lo stesso punto disponendosi regolarmente intorno ad esso come si dispongono i raggi di un cerchio che dal centro vanno ai vertici di un poligono regolare inscritto nel cerchio ». E infatti supponiamo pure che una curva possegga un certo numero di assi, per esempio tre, non passanti per uno stesso punto e costituenti quindi un triangolo. Facciamo compiere a questo triangolo una rotazione attorno a un lato, i lati del nuovo triangolo saranno nuovi assi della curva; ora di queste rotazioni se ne possono compiere un numero infinito e non solamente rispetto a un solo lato del triangolo primitivo; la curva verrebbe quindi a possedere un numero infinito di assi

che sarebbero tutte le rette di una rete parallelogrammica distesa sul piano; e questo il teorema del §. precedente esclude.

Se dunque arriveremo a dimostrare che una curva possiede più di due assi; ne conseguirà che essi dovranno avere un punto comune. Di più dovranno disporsi simmetricamente rispetto a questo punto altrimenti una rotazione intorno a uno qualunque di essi ne originerebbe sempre dei nuovi.

Così, ad esempio, se una curva possiede due assi soli di simmetria, essi saranno perpendicolari, se ne possiede tre saranno inclinati di 60°; se ne possiede n saranno inclinati l' uno sul consecutivo di un angolo uguale a $\frac{\pi}{n}$.

Curve di grado dispari.

9. Noi abbiamo già trattato il problema in questo caso speciale al §. 4. da un lato puramente proiettivo, ci occorre ora di riguardarlo sotto un aspetto essenzialmente diverso. È dal confronto dei resultati già ottenuti al §. 4. con quelli che ora otterremo che si può giungere a risolvere completamente la questione.

Abbiasi una curva di grado dispari simmetrica rispetto all' asse delle y. La sua equazione potrà essere scritta,

$$
\begin{aligned}
& a_{0,n}\, y^n + a_{1,n-1}\, y^{n-1} + \ldots\ldots + \\
& + x^2 \left[a_{0,n-2}\, y^{n-2} + a_{1,n-3}\, y^{n-3} \ldots\ldots \right] + \\
& + x^4 \left[a_{0,n-4}\, y^{n-4} + a_{1,n-5}\, y^{n-5} + \ldots\ldots \right] + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; + \\
& + x^{n-5} \left[a_{0,5}\, y^5 + a_{1,4}\, y^4 + \ldots\ldots \right] + \\
& + x^{n-3} \left[a_{0,3}\, y^3 + a_{1,2}\, y^2 + \ldots\ldots \right] + \\
& + x^{n-1} \left[a_{0,1}\, y + a_{1,0} \right] = 0
\end{aligned}
$$

dove n è un numero dispari.

Dalla forma di questa equazione risulta intanto che una curva di ordine dispari non può possedere un numero pari di assi reali giacchè in tal caso si richiederebbe che essa fosse simmetrica rispetto a due rette ortogonali; ma allora nella equazione precedente sarebbero certamente nulli i coefficienti dei termini che contengono potenze dispari di y e in particolare

$$a_{0,n} = 0$$

La curva si spezza allora nella retta all' infinito e in una curva di grado pari simmetrica rispetto a due rette perpendicolari.

Dunque per le curve di grado dispari la questione è ridotta ad esaminare se possono possedere: 3; 5; 7; 9 .... n assi di simmetria essendo n il grado della curva.

10. Facciamo perciò compiere al sistema cartesiano ortogonale cui è riferito la curva una rotazione di ampiezza θ mantenendo fissa l' origine ed esprimiamo analiticamente le condizioni che debbono essere verificate affinchè il nuovo asse delle y sia ancora retta di sim-

metria. Queste condizioni evidentemente si ottengono annullando i coefficienti dei termini che contengono la x a grado dispari, dopo che si è, sulla equazione, effettuata la trasformazione

$$x = X \cos \theta - Y \operatorname{sen} \theta$$
$$y = X \operatorname{sen} \theta + Y \cos \theta$$

Ora, l'annullarsi dei coefficienti di grado n complessivo in x e y e di grado dispari in x ci fornisce $\frac{n+1}{2}$ relazioni che contengono omogeneamente e linearmente le $\frac{n+1}{2}$:

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \; \ldots\ldots \; a_{0,5} \; ; \; a_{0,3} \; ; \; a_{0,1}$$

Così l'annullarsi dei coefficienti dei termini di grado $n-2$ complessivo in x e y e di grado dispari in x ci fornisce $\frac{n-1}{2}$ relazioni che legano linearmente e omogeneamente le $\frac{n-1}{2}$

$$a_{2,n-2} \; ; \; a_{2,n-4} \; ; \; a_{2,-6} \; ; \; \ldots\ldots \; a_{2,3} \; ; \; a_{2,1}$$

E in generale l'annullarsi dei coefficienti dei termini di grado $n-2m$ complessivo in x e y e di grado dispari in x ci fornisce $\frac{n-2\,m+1}{2}$ relazioni lineari e omogenee nelle $\frac{n-2\,m+1}{2}$:

$$a_{2m\,,\,n-2m}\ ;\ a_{2m\,,\,n-2m-2}\ ;\ \ldots\ a_{2m,3}\ ;\ a_{2m,1}$$

Questi diversi gruppi di relazioni presentano una certa analogia fra di loro perchè in ognuno il numero delle equazioni è uguale al numero delle variabili.

In ciascuno di questi altri gruppi di relazioni che ora esamineremo il numero delle variabili supera di una unità il numero delle equazioni.

E infatti annullando i coefficienti dei termini di grado complessivo $n-1$ in x e y e di grado dispari in x si ottengono $\frac{n-1}{2}$ relazioni lineari e omogenee nelle $\frac{n+1}{2}$:

$$a_{1,n-1}\ ;\ a_{1,n-3}\ ;\ a_{1,n-5}\ ;\ \ldots\ a_{1,4}\ ;\ a_{1,2}\ ;\ a_{1,0}$$

Similmente annullando i coefficienti dei termini di grado complessivo $n-3$ in x e y e di grado dispari in x si ottengono $\frac{n-3}{2}$ relazioni lineari e omogenee nelle $\frac{n-1}{2}$:

$$a_{3,n-3}\ :\ a_{3,n-5}\ ;\ \ldots\ a_{3,2}\ ;\ a_{3,0}$$

e in generale annullando i coefficienti dei termini di grado complessivo $n-2m-1$ in x e y e di grado dispari in x otteniamo $\frac{n-2m-1}{2}$ relazioni lineari e omogene nelle $\frac{n-2m+1}{2}$:

$$a_{2m+1\,,\,n-2m-1}\ ;\ a_{2m+1\,,\,n-2m-3}\ ;\ \ldots\ a_{2m+1,2}\ ;\ a_{2m+1,0}$$

Dunque tutte le relazioni che provengono dall' annullamento dei coefficienti dei termini di grado dispari in x possono distinguersi in queste due specie di gruppi. Per la coesistenza delle equazioni di ogni gruppo della 1.ª specie occorre una condizione per l' angolo θ che si ottiene annullando la resultante corrispondente; per la coesistenza delle equazioni di ogni gruppo di seconda specie non si richiede nessuna condizione analitica potendosi da ogni gruppo ricavare il valore di una variabile espresso per mezzo di θ e di una qualunque di esse.

Ci occorrerebbe dunque adesso costruire tutte le resultanti dei gruppi di 1.ª specie ed esaminare se possono avere soluzioni comuni.

11. Per abbreviare questo calcolo basterà tener conto dei resultati ottenuti al §. 4. Vedremo allora che sarà sufficiente studiare solamente il primo dei gruppi di 1.ª specie e cioè le $\frac{n+1}{2}$ relazioni lineari omogene nelle $\frac{n+1}{2}$:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ldots\ a_{0,5}\ ;\ a_{0,3}\ ;\ a_{0,1}$$

Se s' indicano con:

$$C_{xy^{n-1}}\ ;\ C_{x^3y^{n-3}}\ ;\ \ldots\ldots\ C_{x^n}$$

i primi membri di queste relazioni; esse possono compendiarsi nell' unica seguente:

$$C_{x^t y^{t_{n-1}}} = \sum_{p=0}^{p=n-1} a_{0,n-p} \Big\{ (n-p)_t + (\cos\theta)^{n-p-t} (\operatorname{sen}\theta)^{p+t-1} -$$

$$- p_1(n-p)_{t-1} (\cos\theta)^{n-p-t+2} (\operatorname{sen}\theta)^{p+t-3} +$$

$$+ p_2(n-p)_{t-2} (\cos\theta)^{n-p-t+4} (\operatorname{sen}\theta)^{p+t-5} -$$

$$- p_3(n+p)_{t-3} (\cos\theta)^{n-p-t+6} (\operatorname{sen}\theta)^{p+t-7} + \ldots\ldots +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots - p_t (\cos\theta)^{n-p+t} (\operatorname{sen}\theta)^{p-t-1} \Big\} = 0$$

dove t è dispari e p è pari.

Si trova una facile interpretazione geometrica di due di queste relazioni; di quella che si ottiene per $t=1$ e dell' altra per $t=n$.

La 1.ª è

$$C_{x y^{n-1}} = n\, a_{0,n} (\cos\theta)^{n-1} +$$

$$+ a_{0,n-2} \Big[(n-2) \operatorname{sen}^2\theta (\cos\theta)^{n-3} - 2(\cos\theta)^{n-1} \Big] +$$

$$+ a_{0,n-4} \Big[(n-4) \operatorname{sen}^4\theta (\cos\theta)^{n-5} - 4 (\cos\theta)^{n-3} \operatorname{sen}^2\theta \Big] +$$

$$+ a_{0,n-6} \Big[(n-6) \operatorname{sen}^6\theta (\cos\theta)^{n-7} - 6 (\cos\theta)^{n-5} \operatorname{sen}^4\theta \Big] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ a_{0,3} \Big[3 (\operatorname{sen}\theta)^{n-3} \cos^2\theta - (n-3) \cos^4\theta (\operatorname{sen}\theta)^{n-5} \Big] +$$

$$+ a_{0,1} \Big[(\operatorname{sen}\theta)^{n-1} - (n-1) \cos^2\theta (\operatorname{sen}\theta)^{n-3} \Big] = 0$$

Questa coincide con quella ottenuta al §. 7. quando sia particolarizzata a una curva simmetrica rispetto all'asse delle y. Essa ci dice dunque che esistono altri $(n-1)$ diametri (oltre l'asse delle y) perpendicolari ai corrispondenti sistemi di corde e questa è certo una delle condizioni analitiche a cui devono soddisfare gli assi.

La 2.ª è

$$C_{x^n} = a_{0,n}(\text{sen}\ \theta)^{n-1} + a_{0,n-2}(\text{sen}\ \theta)^{n-3}\cos^2\theta +$$

$$+ a_{0,n-4}(\text{sen}\ \theta)^{n-5}\cos^4\theta + \dots\dots$$

$$+ \dots\dots + a_{0,1}(\cos\theta)^{n-1} = 0$$

essa ci esprime che gli $n-1$ assi (se esistono); diversi dall'asse delle y; debbono passare per gli $n-1$ punti coniugati armonici degli $n-1$ punti all'infinito della curva rispetto ai punti ciclici del piano; in altre parole, se gli assi esistono, debbono essere perpendicolari agli asintoti della curva.

12. Prima di studiare la risultante delle precedenti equazioni ci occorre di esprimere analiticamente i resultati delle considerazioni fatte al §. 4.

Secondo quei risultati se una curva deve possedere n assi di simmetria le coniche polari degli n punti all'infinito della curva debbono spezzarsi in n coppie di rette ortogonali.

Sia

$$\overline{U_x} = 0$$

l'equazione della curva scritta in coord. omogenee; la conica polare di un punto $(y_1; y_2; y_3)$ è:

$$x_1^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1^2} + x_2^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2^2} + x_3^2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_3^2} +$$

$$+ 2 x_1 x_1 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1 \partial y_2} + 2 x_2 x_3 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2 \partial y_3} + 2 x_3 x_2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_3 \partial y_1} = 0$$

Se il punto $(y_1 \,;\, y_2 \,;\, y_3)$ deve appartenere contemporaneamente alla curva e alla sua hessiana, le due rette in cui si spezza la conica precedente sono:

$$x_1 \left\{ \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1 \partial y_2} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1 \partial y_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2^2}} + x_2 \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2^2} + \right.$$

$$\left. + x_3 \left\{ \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2 \partial y_3} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2 \partial y_3} \right)^2 - \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2^2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_3^2}} \right. \right. = 0$$

Se il punto $(y_1 \,;\, y_2 \,;\, y_3)$ deve essere all' infinito e le due rette precedenti debbono essere ortogonali dovrà aversi:

$$\left[\frac{\partial^2 U_y}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y_2^2} \right]_{y_3=0} = 0$$

Applicando questa condizione all'equazione della curva sotto la forma data al §. 9. si trova:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} y_1^{n-2} \Big[n(n-1)\, a_{0,n} + 2\, a_{0,n-2} \Big] + \\ + y_1^{n-4}\, y_2^2 \Big[(n-2)\,(n-3)\, a_{0,n-2} + 3\,.\,4\, a_{0,n-4} \Big] + \\ y_1^{n-6}\, y_2^4 \Big[(n-4)(n-5)\, a_{0,n-4} + 5\,.\,6\, a_{0,n-6} \Big] + \\ \quad + \quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad + \\ + y_1^3\, y_2^{n-5} \Big[5\,.\,4\, a_{0,5} + (n-3)\,(n-4)\, a_{0,3} \Big] + \\ + y_1\, y_2^{n-3} \Big[3\,.\,2\, a_{0,3} + (n-1)\,(n-2)\, a_{0,1} \Big] = 0 \end{array} \right.$$

Essa è verificata per $y_1=0$ com'è naturale perchè la curva possiede già l'asse delle y per asse di simmetria; all'infuori di questa soluzione si hanno altri $n-3$ valori del rapporto $\frac{y_1}{y_2}$ che ci individuano $n-3$ punti all'infinito le cui coniche polari si spezzano in coppie di rette ortogonali.

Tutto questo però nell'ipotesi che il punto $(y_1; y_2; 0)$ verifichi contemporaneamente l'equazione della curva e dell'hessiana.

13. L'equazione (1) del §. precedente è verificata identicamente quando sia:

$$(A)\begin{cases} a_{0,n-2} = -n_2 a_{0,n} \;;\; a_{0,n-4} = n_4 a_{0,n} \;;\; a_{0,n-6} = -n_6 a_{0,n} \;; \cdots \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{0,3} = (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_3 a_{0,n} \quad;\quad a_{0,1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_3 a_{0,n} \end{cases}$$

Ma la (1) presuppone già per y_1 ; y_2 non dei valori qualunque, o meglio non delle variabili ordinarie, ma valori tali da annullare contemporaneamente per $x_3=0$ l'equazione della curva e dell'hessiana, dunque allorchè saranno soddisfatte le relazioni ora trovate e la curva data avrà i suoi punti all'infinito comuni con l'hessiana; le coniche polari di questi n punti si spezzeranno in n coppie di rette ortogonali cioè la curva possiederà n assi di simmetria.

Però queste condizioni che si richiedono per i coefficienti

$$a_{0,n} \;;\; a_{0,n-2} \;;\; \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; a_{0,3} \;;\; a_{0,1}$$

a prima vista sembrano troppe giacchè oltre le (A) che ne lasciano uno solo indipendente occorrono anche le altre che si ottengono esprimendo che i punti all'infinito della curva appartengono anche all'hessiana, onde il problema della determinazione degli n assi di simmetria sembrerebbe impossibile. Ma non è così perchè ora noi dimostreremo che le sole relazioni (A) fra i coefficienti:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ \ldots\ldots\ a_{0,3}\ ;\ a_{0,1}$$

sono sufficienti; in altre parole dimostreremo che dalle relazioni (A) consegue anche che i punti all'infinito della curva appartengono pure all'hessiana; che finalmente queste relazioni (A) sono quelle sole che è necessario di porre fra i coefficienti suddetti affinchè la curva possegga n assi di simmetria.

14. Per convincersene, sostituiamo nelle $\frac{n+1}{2}$ equazioni:

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0 \qquad (t = 1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ \ldots\ n)$$

del §. 11. i valori dati dalle (A).

Il coefficiente di

$$(\operatorname{sen}\theta)^{p+t-1}\ (\cos\theta)^{n-p-t}$$

dopo eseguita la suddetta sostituzione nella:

$$C_{x^t\, y^{n-t}} = 0$$

è:

$$(-1)^{\frac{p}{2}}\Big((n-p)_t\, n_p + (p+2)\,(n-p-2)_{t-1}\, n_{p+2} +$$

$$+ (p+4)_2 (n-p-4)_{t-2}\, n_{p+4} + \ldots + (p+2t)_t\, n_{p+2t}\Big) =$$

$$= (-1)^{\frac{p}{2}}\Big((n-t)_p + t(n-t)_{p+1} + t_2(n-t)_{p+2} + \ldots . + $$

$$+ t(t-n)_{p+t-1} + (n-t)_{p+t}\Big)$$

ma per una proprietà fondamentale dei coefficienti binomiali per cui si ha in generale:

$$(\alpha+\beta)_n = \alpha_n + \alpha_{n-1}\,\beta + \alpha_{n-2}\,\beta_2 + \ldots\ldots + \beta_n$$

resulta:

$$(n-t)_p + t(n-t)_{p+1} + t_2(n-t)_{p+2} + \ldots + (n-t)_{p+t} = n_{p+t}$$

onde il coefficiente cercato si riduce a:

$$(-1)^{\frac{p}{2}}\; n_t\; n_{p+t}$$

per cui a meno del fattore comune a tutti i termini n_t si ha:

$$C_{x^t\, y^{n-t}} = (\mathrm{tg}\ \theta)^{n-1} - n_2\,(\mathrm{tg}\ \theta)^{n-3} +$$

$$+ n_4(\mathrm{tg}\ \theta)^{n-5} + \ldots . (-1)^{\frac{n-3}{2}}\, n_3\, \mathrm{tg}^2\,\theta + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n_1 = 0$$

la quale è indipendente da t contiene n e θ.

Se ne conclude dunque che le relazioni (A) fra i coefficienti:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{0,3}\ ;\ a_{0,1}$$

riducono a una medesima oquazione le $\frac{n+1}{2}$ equazioni :

$$C_{x^t\, y^{n-t}} = 0$$

e questa equazione non contiene più traccia dei coefficienti della equazione della curva, ma contiene semplicemente θ ed n. Essa quindi deve essere un fattore della resultante delle equazioni :

$$C_{x^t\, y^{n-t}} = 0$$

e agli n valori di θ che la soddisfano debbono corrispondere n assi di simmetria per la curva. Se questi assi saranno tutti reali; per le osservazioni fatte al §. 8; essi debbono essere disposti simmetricamente rispetto al loro punto comune.

15. Che ciò avvenga effettivamente, si rileva determinando le radici della equazione già trovata nel §. precedente e il cui primo membro indicheremo con K_{n-1}

$$(\mathrm{B}) \left\{ \begin{aligned} K_{n-1} &= (\mathrm{tg}\,\theta)^{n-1} - n_2(\mathrm{tg}\,\theta)^{n-3} + n_4(\mathrm{tg}\,\theta)^{n-5} - \ldots + \\ &+ (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_3\, \mathrm{tg}^2\,\theta + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_1 = 0 \end{aligned} \right.$$

Infatti dalla formula di *Moivre*:

$$\cos n\,x + i \operatorname{sen} n\,x = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^n$$

nell' ipotesi che n sia dispari, uguagliando i cofficienti dell' immaginario di ambo i membri si trova:

$$\operatorname{sen} n x = n_1(\cos x)^{n-1} \operatorname{sen} x - n_3(\cos x)^{n-3} \operatorname{sen}^3 x + $$
$$+ n_5 (\operatorname{sen} x)^{n-5} \operatorname{sen}^5 x + \ldots\ldots (-1)^{\frac{n-1}{2}} (\operatorname{sen} x)^n$$

facendo $x = \frac{\pi}{n}$ e dividendo qnindi per $\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$ resulta:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^{n-1} - n_2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^{n-3} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_4\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right)^2 + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_1 = 0$$

dunque la (B) ammette le radici

$$\frac{\pi}{n}\ ;\ \frac{2\pi}{n}\ ;\ \frac{3\pi}{n}\ ;\ \ldots\ldots\ldots \frac{(n-1)\pi}{n}$$

cioè le relazioni (A) fra i coefficienti

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ \ldots\ldots\ a_{0,3}\ ;\ a_{0,1}$$

sono veramente tutte e le sole che occorre stabilire fra i detti coefficienti perchè la curva possegga n assi di simmetria

16. Non ci restano ora a trovare che le relazioni fra gli altri coefficienti che compariscono nell' equazione della curva data al §. 9. per completare la dimostrazione relativa alla possibilità dell' esistenza di curve di grado

dispari con un numero di assi reali uguale al loro grado.

Queste relazioni che mancano si ottengono con grande facilità dietro le considerazioni seguenti.

La curva che si ottiene sopprimendo nella equazione del §. 9. le

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; \ldots\ldots \; a_{0,3} \; ; \; a_{0,1}$$

è di grado pari $n-1$ e deve possedere n assi di simmetria; uno più del suo grado e quindi §. 7. è una curva iperciclica; per conseguenza si ha:

$$(1) \; ; \; a_{1,n-3} = \binom{n-1}{2}_1 a_{1,n-1} \; ; \; a_{1,n-5} = \binom{n-1}{2}_2 a_{1,n-1} \; ; \ldots$$

La curva che si ottiene sopprimendo oltre le

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; \ldots\ldots \; a_{0,3} \; ; \; a_{0,1}$$

anche le

$$a_{1,n-1} \; ; \; a_{1,n-3} \; ; \; \ldots\ldots \; a_{1,2} \; ; \; a_{1,0}$$

è di grado dispari $n-2$ e deve ammettere n assi di simmetria; dunque §. 7. essa si spezza nella retta all'infinito e in una curva di grado $n-3$; segue perciò

$$a_{2,n-2} = a_{2,n-4} = a_{2,n-6} = \ldots\ldots = 0$$

Procedendo a sopprimere nuove e analoghe serie successive di coefficienti, si conclude che tutti i coefficienti il cui primo indice è pari (purchè non sia zero) si annullano; tutti i coefficienti il cui 1.° indice è dispari (a gruppi, a gruppi quelli che hanno uguali il 1.° indice) sono legati da relazioni analoghe alle (1) per cui riassumendo si ha

$$a_{0,n-p} = (n-1)^{\frac{p}{2}}\, n_p\, a_{0,n} \qquad (p=2\ ,\ 4\ ,\ \cdots\ n-1)$$

$$a_{2r+1\ ,\ n-(2r+1+2s)} = \left(\frac{n-2r-1}{2}\right)_s a_{2r+1\ ,\ n-(2r+1)}$$

$$a_{2r\ ,\ n-2r-2s} = 0 \qquad \left(r \lesseqgtr 0\right)$$

o altrimenti:

« *L' equazione di una curva di grado n dispari simmetrica rispetto a n assi reali è della forma:*

$$a_{0,n} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{\frac{p}{2}}\, n_p\, x^p\, y^{n-p} +$$

$$+ \sum_{r=0}^{r=\frac{n-1}{2}} \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{n-2r-1}{2}} a_{2r+1\ ,\ n-2r-1} = 0$$

dove p é pari ».

« *Le curve di grado n dispari simmetriche rispetto agli stessi n assi reali sono*

$$\infty^{\frac{n+1}{2}}\ » .$$

Dunque la questione propostaci al principio di questo §. è così definitivamente risolta, nè può nascere il sospetto che la curva rappresentata dalla equazione precedente possa spezzarsi: Se ciò avvenisse la retta all'infinito dovrebbe farne parte, ciò che l'equazione stessa esclude.

17. Si tratta ora di esaminare se la nostra curva può possedere un numero inferiore ad n di assi reali.

Io dico che essa può possedere $n-2$ assi reali disposti simmetricamente e passanti per un medesimo punto, non solo, ma oltre questi può possederne altri due immaginari coniugati che dal punto comune agli assi reali vanno ai punti ciclici del piano.

E infatti l'equazione di grado $n-1$:

$$K_{n-3} = \Big\{ (\operatorname{tg}\theta)^{n-3} - (n-2)_2 (\operatorname{tg}\theta)^{n-5} +$$

$$+ (n-2)_4 (\operatorname{tg}\theta)^{n-7} - (n-2)_6 (\operatorname{tg}\theta)^{n-9} + \ldots\ldots +$$

$$+ \ldots\ldots (-1)^{\frac{n-3}{2}} (n-2)_1 \Big\} \Big\{ \operatorname{tg}^2\theta + 1 \Big\} = 0$$

ammette le $n-1$ radici:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n-2} \; ; \; \operatorname{tg}\frac{2\pi}{n-2} \; ; \ldots\ldots \operatorname{tg}\frac{(n-3)\pi}{n-2} \; ; \; i \; ; \; -i$$

essa può anche scriversi sotto la forma:

$$(\mathrm{tg}\ \theta)^{n-1} + (\mathrm{tg}\ \theta)^{n-3}\left[\ 1-(n-2)_2\ \right]+$$

$$(\mathrm{tg}\ \theta)^{n-5}\left[(n-2)_4-(n-2)_2\right]+(\mathrm{tg}\ \theta)^{n-7}\left[(n-2)_4-(n-2)_6\right]+$$

$$+\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ ,\ \ .\ \ +$$

$$+(-1)^{\frac{n-5}{2}}\ \mathrm{tg}^4\ \theta\left[\ (n-2)_3-(n-2)_5\ \right]+$$

$$+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\ \mathrm{tg}^2\ \theta\left[(n-2)_1-(n-2)_3\ \right]+(-1)^{\frac{n-3}{2}}(n-2)_1=0$$

Basterà dunque dimostrare che se si prende in generale

$$(\mathrm{C})\quad ;\quad a_{0,n-p}=(-1)^{\frac{p}{2}}\left\{(n-)_p-(n-2)_{p-2}\right\}a_{0,n}$$

dove p è pari; tutte le relazioni

$$\mathrm{C}_{x^t\,y^{n-t}}=0\qquad\quad(\ t\ \text{dispari}\ )$$

vengono a coincidere in una sola; nella

$$\mathrm{K}_{n-3}=0$$

Per convincersene calcoliamo il coefficiente di

$$(\ \mathrm{sen}\ \theta\ )^{p+t-1}\ (\ \cos\theta\ )^{n-p-t}$$

nella

$$\mathrm{C}_{x^t\,y^{n-t}}=0$$

dopo che vi si sono eseguite le sostituzioni (C). — Questo coefficiente è:

$$\Upsilon=(n-2)_{p-2}(n-p)_t+(n-2)_p\Big\{(p+2)(n-p-2)_{t-1}-(n-p)_t\Big\}+$$

$$+(n-2)_{p+2}\Big\{(p+4)_2\,(n-p-4)_{t-2}-(p+2)\,(n-p-2)_{t-1}\Big\}+$$

$$+\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad+$$

$$+\,(n-2)_{p+2s}\Big\{(p+2s+2)_{s+1}\,(n-p-2s-2)_{t-s-1}\,-$$

$$-\,(p+2s)_s\,(n-p-2s)_{t-s}\Big\}+\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

$$+\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,-(n-2)_{p+2t}\,(p+2t)_t.$$

Ora il coefficiente di $(\operatorname{tg}\theta)^{p+t-1}$ nella $K_{n-5}=0$ è (a meno del segno)

$$(n-2)_{p+t-2}-(n-2)_{p+t}=\Upsilon'$$

tutto dunque si riduce a dimostrare che Υ è uguale a Υ', o almeno che ne differisce per un fattore indipendente da p.

Dimostreremo infatti che è

$$\Upsilon=\Upsilon'\,\Upsilon''$$

dove

$$\Upsilon''=(n-2)_{t-2}-(n-2)_t$$

Sviluppando il prodotto $\Upsilon'\,\Upsilon''$ è:

$$\Upsilon' \Upsilon'' = (n-2)_{p+t-2} (n-2)_{t-2} - (n-2)_{p+t-2} (n-2)_t -$$
$$- (n-2)_{p+t} (n-2)_{t-2} + (n-2)_{p+t} (n-2)_t$$

Per l' identità:

$$(n-p)_t \, n_p + (p+2)(n-p-2)_{t-1} \, n_{p+2} +$$
$$+ (p+4)_2 (n-p-4)_{t-2} . n_{p+4} + \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot +$$
$$+ (p+2t)_t \, n_{p+2t} = n_t \, n_{p+t}$$

dimostrata al §. 14; attribuendo convenienti valori a n ; p ; t si ottiene :

$$(n-2)_{p+t-2} (n-2)_{t-2} = (n-p-2)_{t-2} (n-2)_p +$$
$$+ (p+2)(n-p-4)_{t-3} (n-2)_{p+2} +$$
$$+ (p+4)_2 (n-p-6)_{t-4} (n-2)_{p+4} +$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$(n-2)_{p+t-2} (n-2)_t = (n-p)_t (n-2)_{p-2} +$$
$$+ p(n-p-2)_{t-1} (n-2)_p +$$
$$+ (p+2)_2 (n-p-4)_{t-2} (n-2)_{p+2} +$$
$$+ (p+4)_3 (n-p-6)_{t-3} (n-2)_{p+4} +$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$(n-2)_{p+t} (n-2)_{t-2} = (n-p-4)_{t-2} (n-2)_{p+2} +$$
$$+ (p+4)(n-p-6)_{t-3} (n-2)_{p+4} +$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$(n-2)_{p+t} (n-2)_t = (n-p-2)_t (n-2)_p +$$
$$+ (p+2)(n-p-4)_{t-1} (n-2)_{p+2} +$$
$$+ (p+4)_2 (n-p-6)_{t-2} (n-2)_{p+4}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ (p+2t)_t (n-2)_{p+2t}$$

$$\Upsilon'\,\Upsilon'' = -(n-2)_{p-2}\Big[\,(n-p)_t\Big] +$$

$$+\,(n-2)_p\Big[(n-p-2)_{t-2} - p(n-p-2)_{t-1} + (n-p-2)_t\Big] +$$

$$+\,(n-)_{p+2}\Big[(n-p-4)_{t-3} - (p+2)_2(n-p-4)_{t-2} - (n-p-4)_{t-2} +$$

$$+\,(p+2)\,((n-p-4)_{t-1}\Big] +$$

$$+(n-2)_{p+4}\Big[(p+4)_2\,(n-p-6)_{t-4} - (p+4)_3\,(n-p-6)_{t-3} -$$

$$-\,(p+4)\,(n-p-6)_{t-3} + (p+4)_2(n-p-6)_{t-2}\Big] +$$

$$+ \;.\;.\;.\;,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; +$$

$$+\,(n-2)_{p+2s}\Big[(p+2s)_s\,(n-p-2s-2)_{t-s-2} -$$

$$-\,(p+2s)_{s+1}\,(n-p-2s-2)_{t-s-1} -$$

$$-\,(p+2s)_{s-1}\,(n-p-2s-2)_{t-s-1} +$$

$$+\,(p+2s)_s\,(n-p-2s-2)_{t-s}\Big] +$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\; + (n-2)_{p+2t}\,(p+2t)_t$$

Abbiamo in tal modo ordinato tanto Υ quanto $\Upsilon'\,\Upsilon''$ secondo gl' indici ascendenti dei numeri figurati

$$(n-2)_{p-2} \;;\; (n-2)_p \;;\; (n-2)_{p+2} \;;\; .\;.\;.\;.\;.\;.$$

Manifestamente i coefficienti di

$$(n-2)_{p-2} \quad ; \quad \text{e di } (n-2)_{p+2t}$$

sono uguali e di segno coutrario tanto in Υ quanto in

$\Upsilon' \Upsilon''$; basterà dunque dimostrare che sono pure uguali e di segno contrario i coefficienti del termine generale

$$(n-2)_{p+2s}$$

ossia provare l' identità:

$$(p+2s)_s (n-p-2s)_{t-s} - (p+2s+2)_{s+1} (n-p-2s-2)_{t-s-1} =$$

$$=(p+2s)_s (n-p-2s-2)_{t-s-2} - (p+2s)_{s+1} (n-p-2s-2)_{t-s-1} -$$

$$-(p+2s)_{s-1} (n-p-2s-2)_{t-s-1} + (p+2s)_s (n-p-2s-2)_{t-s}$$

o, sopprimendo i fattori comuni;

$$(p+2s)_{s-1} (n-p-2s-2)_{t-s-2}$$

basterà dimostrare l' altra:

$$-\frac{(n-p-t-s)(p+2s+2)(p+2s+1)}{(t-s-1)s(s+1)}+$$

$$+\frac{(p+s+1)(n-p-2s)(n-p-2s-1)}{s(t-s)(t-s-1)}=$$

$$=\frac{p+s+1}{s}-\frac{(p+s+1)(p+s)(n-p-s-t)}{s(s+1)(t-s-1)}-$$

$$-\frac{n-p-s-t}{t-s-1}+$$

$$+\frac{(p+s+1)(n-p-s-t)(n-p-s-t-1)}{s(t-s)(t-s-1)}$$

e per verificare con facilità quest' ultima basta osservare che ambo i membri sono del 2.° grado in n; hanno uguali i coefficienti di n^2 e per i due valori di n:

$$n=p+s+t \quad ; \quad n=p+s+t+1$$

divengono identici.

Dunque i valori assoluti di Υ e di $\Upsilon' \Upsilon''$ sono uguali, inoltre i termini della

$$C_{x^t y^{n-t}}=0$$

dopo effettuata la sostituzione delle (C) divengono alternativamente positivi e negativi.

Da tutto questo si conclude che tutte le relazioni

$$C_{x^t y^{n-t}}=0$$

fra le

$$a_{0,n} \;;\; a_{0,n-2} \;;\; a_{0,n-4} \;;\; \cdots\cdots \; a_{0,3} \;;\; a_{0,1}$$

per opera delle (C) divengono tutte identiche alla

$$K_{n-3}=0$$

la quale non contiene altro che θ ed n; quindi K_{n-4} sarà un 2.° fattore (uno è già stato trovato in K_{n-1} §. 14) della risultante delle

$$C_{x^t y^{n-t}}=0$$

18. Per trovare la forma dell' equazione della curva

occorre determinare le relazioni che passano fra gli altri coefficienti e perciò seguiremo lo stesso metodo impiegato al §. 16.

Supponiamo dapprima che la curva debba possedere $n-2$ assi reali, ma non i due assi immaginarî coniugati che dal punto comune agli assi reali vanno ai punti ciclici e che noi per brevità chiameremo *assi ciclici*.

Cominciamo allora dalle relazioni che legano i coefficienti:

$$a_{1,n-1}\ ;\ a_{1,n-3}\ ;\ a_{1,n-5}\ ;\ \ldots\ldots\ a_{1,0}$$

Essi, per quanto già osservammo al §. 10., sono in numero di $\frac{n+1}{2}$ e sono legati da $\frac{n-1}{2}$ relazioni lineari e omogenee. È dunque possibile esprimerli tutti in funzione di uno di essi e di θ risolvendo un sistema di equazioni lineari. Se il determinante dei coefficienti fosse nullo, vorrebbe dire che due, invece di uno, dei coefficienti suddetti possono essere scelti arbitrariamente e niente sarebbe infirmato.

Una sola osservazione è da farsi, cioè la seguente. Una volta ottenute le espressioni letterali di questi coefficienti, occorre sostituire per tg θ uno qualunque dei valori

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n-2}\ ;\ \operatorname{tg}\frac{2\,\pi}{n-2}\ ;\ \ldots\ldots\ \operatorname{tg}\frac{(n-3)\,\pi}{n-2}\ ;\ i\ ;\ -i$$

i valori dei coefficienti non debbono naturalmente cambiare prendendo per tg θ uno, piuttosto che un altro di questi valori giacchè la curva rimane la stessa; segue che a calcoli fatti, o saranno indipendenti da θ, come in qualche esempio abbiamo potuto constatare (curve di 5.° ordine simmetriche rispetto a tre assi §. 37), o saranno tali funzioni di θ da godere le proprietà suenunciate.

La curva che si ottiene sopprimendo le

$$a_{0,n} \;;\; a_{0,n-2} \;;\; a_{0,n-4} \;;\; \ldots\ldots$$

e le

$$a_{1,n-1} \;;\; a_{1,n-3} \;;\; a_{1,n-5} \;;\; \ldots\ldots$$

è di grado $n-2$ e deve possedere $n-2$ assi reali dunque la sua equazione si otterrà da quella scritta al §. 16. cambiando n in $n-2$. D' altra parte è appunto il 1.° membro di questa equazione che costituisce la parte della equazione della curva primitiva che rimaneva a determinare.

19. Se poi si esigesse che la curva primitiva oltre a possedere $n-2$ assi reali possedesse anche i due assi ciclici; ne verrebbe che tutte le curve di ordine pari che si otterrebbero sopprimendo successivamente linee verticali di coefficienti nella equazione del §. 9. sarebbero tutte ipercicliche e quindi l' equazione della curva assumerebbe una forma determinata che è:

$$a_{0,n} \sum_{p=0}^{p=n-} (-1)^{\frac{p}{2}} \left\{ (n-2)_p - (n-2)_{p-2} \right\} x^p \, y^{n-p} + $$

$$+ \sum_{r=0}^{r=\frac{n-1}{2}} a_{2r+1,\, n-2r-1} (x^2 + y^2)^{\frac{n-2r-1}{2}} = 0$$

dove p è pari .

Richiamando anche i risultati del §. 16. possiamo enunciare il seguente teorema :

« *L'equazione di una curva di grado n dispari con n assi reali; o con $n-2$ assi reali e due assi ciclici ha respettivamente le forme* :

$$a_{0,n} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{\frac{p}{2}} n_p \, x^p \, y^{n-p} + U_1 \, U_2 \ldots . U_{\frac{n-1}{2}} = 0$$

$$a_{0,n} \sum_{p=0}^{p=n-1} \left\{ (-1)^{\frac{p}{2}} (n-2)_p - (n-2)_{p-2} \right\} x^p \, y^{n-p} +$$

$$+ U_1 \, U_2 \ldots \ldots \ldots U_{\frac{n-1}{2}} = 0$$

dove p assume i soli valori pari e

$$U_1 = 0 \ ; \ U_2 = 0 \ ; \ \ldots \ldots \ U_{\frac{n-1}{2}} = 0$$

sono l'equazioni di $\frac{n-1}{2}$ cerchi concentrici al punto comune agli assi e i cui raggi sono le radici quadrate delle radici della equazione :

$$a_{1,n-1}\, z^{\frac{n-1}{2}} + a_{3,n-3}\, z^{\frac{n-3}{2}} + a_{5,n-5}\, z^{\frac{n-5}{2}} + \ldots\ldots + a_{n,0} = 0 \text{ » .}$$

20. Si tratta ora di generalizzare i resultati ottenuti nei §§. precedenti ricercando se una curva di grado n dispari può possedere un numero dispari qualunque, purchè inferiore ad n di assi reali.

Io dico che essa può in generale possedere $n-2\,r$ *assi reali; o* $n-2\,r$ *assi reali e i due ciclici:*

E infatti l' equazione di grado $n-1$:

$$\mathrm{K}_{n-2\,r-1} = \Big\{ (\operatorname{tg} \theta)^{n-2\,r-1} - (n-2\,r)_2\, (\operatorname{tg} \theta)^{n-2r-3} +$$

$$(n-2\,r)_4\, (\operatorname{tg} \theta)^{n-2\,r-5} - (n-2\,r)_6\, (\operatorname{tg} \theta)^{n-2\,r-7} +$$

$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;;\; +$$

$$(-1)^{\frac{n-2\,r-1}{2}} (n-2\,r)_1 \Big\} \Big\{ \operatorname{tg}^2 \theta + 1 \Big\}^r = 0$$

ammette le radici:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n-2r} \;;\; \operatorname{tg} \frac{2\,\pi}{n-2\,r} \;;\; \ldots\ldots \operatorname{tg} \frac{n-2\,r-1}{n-2\,r}\,\pi \;;\; i \;;\; -i$$

di cui le ultime due sono contate ognuna r volte.

Ora, in generale, il coefficiente di

$$(\operatorname{tg} \theta)^{n-p-1}$$

nella precedente equazione è:

$$(-1)^{\frac{p}{2}} \Big\{ (n-2r)_p - r_1 (n-2r)_{p-2} +$$

$$+ r_2 (n-2r)_{p-4} - r_3 (n-2r)_{p-6} + \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots (-1)^{\frac{p}{2}} r_{\frac{p}{2}} \Big\}$$

Si tratta dunque di dimostrare analogamente a quanto già facemmo ai §§. 14. e 17 che se si stabiliscono fra le

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; \ldots\ldots \; a_{0,3} \; ; \; a_{0,1}$$

le relazioni generali

$$\text{(D)} \left\{ \begin{aligned} &; \; a_{0,n-p} = (-1)^{\frac{p}{2}} \Big\{ (n-2r)_p - r_1 (n-2r)_{p-2} + \\ &\quad + r_2 (n-2r)_{p-4} \ldots\ldots + (-1)^{\frac{p}{2}} r_{\frac{p}{2}} \Big\} a_{0,n} \end{aligned} \right.$$

di cui le (A) e le (C) non sono che casi particolari ($r=0$; $r=1$); tutte le equazioni

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0$$

vengono a coincidere in una sola che è la

$$K_{n-2r-1} = 0.$$

Per persuadersene basta generalizzare i processi già impiegati ai §§. 14. e 17.

Cominciamo dal calcolare il coefficiente di:

$$(\operatorname{sen} \theta)^{p+t-1} (\cos \theta)^{n-p-t}$$

nella

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0$$

dopo che in essa si sono effettuate le sostituzioni (D).

Questo coefficiente è dato da:

$$\begin{aligned}
\Delta = (n-p)_t \Big\{ & (n-2r)_p - r_1 (n-2r)_{p-2} + \\
& + r_2 (n-2r)_{p-4} - r_3 (n-2r)_{p-6} + \dots \Big\} + \\
+(p+2)(n-p-2)_{t-1} \Big\{ & (n-2r)_{p+2} - r_1 (n-2r)_p + \\
& + r_2 (n-2r)_{p-2} - r_3 (n-2r)_{p-4} + \dots \Big\} + \\
+(p+4)_2 (n-p-4)_{t-2} \Big\{ & (n-2r)_{p+4} - r_1 (n-2r)_{p+2} + \\
& + r_2 (n-2r)_p - r_3 (n-2r)_{p-2} + \dots \Big\} + \\
+(p+6)_3 (n-p-6)_{t-3} \Big\{ & (n-2r)_{p+6} - r_1 (n-2r)_{p+4} + \\
& + r_2 (n-2r)_{p+2} - r_3 (n-2r)_p + \dots \Big\} + \\
+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots &
\end{aligned}$$

Il coefficiente di

$$(\operatorname{tg} \theta)^{p+t-1}$$

nella

$$K_{n-2r-1} = 0$$

è (a meno del segno):

$$\Delta' = (n-2r)_{p+t-2r} - r_1 (n-2r)_{p+t-2r+2} +$$
$$+ r_2 (n-2r)_{p+t-2r+4} - \dots + (-1)^{\frac{n-p-t}{2}} r_{\frac{2r-n-t-p}{2}}$$

tutto quindi si riduce a dimostrare che Δ è uguale in valore assoluto a Δ', o almeno che ne differisce per un fattore indipendente da p.

Dimostreremo infatti che in valore assoluto è

$$\Delta = \Delta' \, \Delta''$$

dove:

$$\Delta'' = (n-2r)_{t-2r} - r_1 (n-2r)_{t-2r+2} +$$
$$+ r_2 (n-2r)_{t-2r+4} - \dots + (-1)^{\frac{n-t}{2}} r_{\frac{2r-n+t}{2}}$$

Trasformiamo perciò il prodotto $\Delta' . \Delta''$ facendo uso della identità:

$$(n-p)_t \, n_p + (p+2)(n-p-2)_{t-1} \, n_{p+2} +$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +$$
$$+ (p+2t)_t \, n_{p+2t} = n_t \, n_{p+t}$$

dimostrata al §. 14, e già impiegata per un simile uso al §. 17.

Si ottiene così il vantaggio che tanto Δ quanto Λ' Λ'' vengono ordinati secondo gl'indici ascendenti dei numeri figurati:

$$\ldots (n-2)_{p-4} \,;\, (n-2)_{p-2} \,;\, (n-2)_p \,;\, (n-2)_{p+2} \,;\, (n-2)_{p+4} \,;\, \ldots$$

basta dunque dimostrare che il coefficiente di

$$(n-2)_p$$

in Δ è uguale al coefficiente di

$$(n-2)_p$$

in $\Delta' \Delta''$.

Indicandoli rispettivamente con C e con C' si ha:

$$\begin{aligned} C = {} & (n-p)_t - r_1 (p+2)(n-p-2)_{t-1} + \\ & + r_2 (p+4)_2 (n-p-4)_{t-2} - r_3 (p+6)_3 (n-p-6)_{t-3} + \ldots \\ & + \ldots\ldots (-1)^r (p+2r)_r (n-p-2r)_{t-r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C' = {} & (n-2r-p)_{t-2r} - (n-2r-p)_{t-2r+1}\, r_1 p_1 + \\ & + (n-2r-p)_{t-2r+2} \left\{ p_2 r_2 + r_1^2 \right\} - \\ & - (n-2r-p)_{t-2r+3} \left\{ r_3 p_3 + r_1 r_2 p_1 \right\} + \\ & + (n-2r-p)_{t-2r+4} \left\{ r_4 p_4 + r_1 r_3 p_2 + r_2^2 \right\} - \ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il termine generale di questo polinomio è

$$(-1)^s\,(n-2\,r-p)_{t-2\,r+s} \sum r_i\, r_k\, p_l$$

dove se s è pari i comincia da o e va fino a $\frac{s}{2}$; k va da s fino a $\frac{s}{2}$ e l va da s a o ; i e k passando per tutte le unità intermedie ; l invece assumendo i soli valori :

$$s\ ;\ s-2\ ;\ s-4\ ;\ \ldots\ldots\ 4\ ;\ 2\ ;\ 0$$

se s è dispari i va da o a $\frac{s-1}{2}$; k va da s a $\frac{s+1}{2}$ e l da s fino a 1 ; i e k passando per tutti i numeri intermedî, l invece assumendo i soli valori

$$s\ ;\ s-2\ ;\ s-4\ ;\ \ldots\ldots\ 3\ ;\ 1$$

l' ultimo termine è positivo e uguale a

$$(\,n-2\,r-p\,)_t$$

La questione è dunque ridotta a provare $C=C'$; ovvero, dopo soppressi i fattori comuni, a verificare l'identità :

$$\frac{(n-p)\ \ldots\ldots\ (n-p-2r+1)}{(t-2\,r+1)\ \ldots\ldots\ t}-$$

$$-\frac{r_1(p+2)\,(n-p-2)\ \ldots\ (n-p-2\,r+1)\ (n-p-t)}{(t-2\,r+1)\ \ldots\ldots\ (t-1)}+$$

$$+\frac{r_2(p+4)_2(n-p-4)\ \ldots\ (n-p-2\,r+1)(n-p-t)\,(n-p-t-1)}{(t-2\,r+1\ \ldots\ldots\ (t-2)}-$$

$$-\frac{r_3(p+6)_3(n-p-6)\ldots(n-p-2r+1)(n-p-t)(n-p-t-1)(n-p-t-2)}{(t-2\,r+1)\ \ldots\ldots\ (t-3)}+$$

$$+\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ +$$

$$+\frac{(-1)^r(p+2\,r)_r\,(n-p-t)\ \ldots\ldots\ (n-p-r-t+1)}{(t-2\,r+1)\ \ldots\ldots\ (t-r)}=$$

$$=1-\frac{n-p-t}{t-2\,r+1}\,r_1\,p_1+$$

$$+\frac{(n-p-t)\,(n-p-t-1)}{(t-2\,r+1)\,(t-2\,r+2)}\left\{p_2\,r_2+r_1^2\right\}-$$

$$-\frac{(n-p-t)\,(n-p-t-1)\,(n-p-t-2)}{(t-2\,r+1)\,(t-2\,r+2)\,(t-2\,r+2)}\left\{p_3r_3+r_1r_2p_1\right\}+\ldots$$

$$+\ \ldots\ +\frac{(n-p-t)\ \ldots\ldots\ (n-2\,r-p-t+1)}{(t-2\,r+1)\ \ldots\ldots\ t}$$

Per verificarla si può osservare che ambo i membri sono di grado $2\,r$ in n e che hanno uguali i coefficienti della massima potenza di n. Se dunque essi divengono uguali per $2\,r$ valori di n, saranno certamente uguali per qualunque valore di n e l' identità sarà dimostrata. È opportuno scegliere per questi valori di n successivamente:

$$p+t\ ;\ p+t+1\ ;\ p+t+2\ ;\ \ldots\ldots$$

per i primi di questi valori l'identità si manifesta immediatamente, in generale supponendola vera per

$$n = p + t + k$$

si vede subito che è pur vera per

$$n = p + t + k + 1.$$

Riassumendo: abbiamo dimostrato che in valore assoluto è

$$\Delta = \Delta' \Delta''$$

d' altra parte i coefficienti di

$$(\operatorname{sen} \theta)^{i-1} (\cos \theta)^{n-i}$$

nella

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0$$

dopo eseguite le sostituzioni (D) sono alternativamente positivi e negativi; questo basta per concludere che le relazioni

$$a_{0,n-p} = (-1)^{\frac{p}{2}} \left\{ (n-2r)_p - r_1 (n-2r)_{p-2} + r_2 (n-2r)_{p-4} - \right.$$
$$\left. - \ldots\ldots (-1)^{\frac{p}{2}} r_{\frac{p}{2}} \right\} a_n \; ; \; (p \text{ pari})$$

riducono a una sola equazione che contiene n e θ solamente, le $\frac{n+1}{2}$ relazioni:

$$C_{x^t\,y^{n-t}} = 0.$$

Questa equazione è

$$K_{n-2\,r-1} = 0$$

dunque $K_{n-2\,r-1}$ è un fattore della resultante delle

$$C_{x^t y^{n-t}} = 0$$

21. Ora, se la nostra curva deve possedere $n-2\,r$ assi reali è certo che fra i ceefficienti:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ldots$$

debbono passare le relazioni

$$a_{0,n-p} = (-1)^{\frac{p}{2}} \left\{ (n-2r)_p - r_1\,(n-2r)_{p-2} + r_2(n-2\,r)_{p-4} - \right.$$
$$\left. - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{p}{2}}\, r_{\frac{p}{2}} \right\}\ a_{0,n};\ (\,p \text{ pari})$$

Vediamo come si possa esigere che oltre questi $n-2\,r$ assi reali esistano i due assi ciclici contati un certo numero di volte e come si possa trovare l'equazione della curva corrispondente.

22. — 1.° Caso — « *La curva possiede oltre gli $n-2\,r$ assi reali, i due assi ciclici contati ognuno r volte* ».

Allora tutte le curve di grado pari che si ottengono sopprimendo colonne verticali di coefficienti nella equazione del §. 9. sono tutte ipercicliche perchè possiedono un numero di assi superiore al loro grado, quelle di grado dispari per la stessa ragione si spezzano nella retta all' infinito e in curve ipercicliche.

L' equazione richiesta è dunque:

$$a_{0,n}\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^{\frac{p}{2}}\left\{(n-2r)_p-r_1(n-r)_{p-2}+\ldots.+(-1)^{\frac{p}{2}}r_{\frac{p}{2}}\right\}\times$$

$$\times\, x^p\,y^{n-p}+\sum_{r=0}^{r=\frac{n-1}{2}}a_{2\,r+1\,,\,n-(2\,r+1)}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{n-2\,r-1}{2}}=0$$

Possiamo anche enunciare questo resultato così:

« *L'equazione di una curva di grado n dispari con $n-2\,r$ assi reali e i due assi ciclici contato ognuno r volte può mettersi sotto la forma:*

$$a_{0,n}\sum_{p=0}^{p=\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{p}{2}}\left\{(n-2\,r)_p-r_1\,(n-2\,r)_{p-2}+\right.$$

$$\left.+r_2(n-2r)_{p-4}-r_3(n-2r)_{p-6}+\ldots.+(-1)^{\frac{p}{2}}\,r_{\frac{p}{2}}\right\}x^p\,y^{n-p}+$$

$$+\,U_1\,.\,U_2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,U_{\frac{n-1}{2}}=0$$

dove p é pari e

$$U_1=0 \; ; \; U_2=0 \; ; \; \ldots\ldots \; U_{\frac{n-1}{2}}=0$$

rappresentano le equazioni di $\frac{n-1}{2}$ *cerchi concentrici al punto comune agli assi e i cui raggi sono le radici quadrate delle radici della equazione:*

$$a_{1,n-1}\, z^{\frac{n-1}{2}} + a_{3,n-3}\, z^{\frac{n-3}{2}} + a_{5,n-5}\, z^{\frac{n-5}{2}} + \ldots\ldots a_{n,0} = 0 \text{ »}$$

I teoremi del §. 19 sono dunque casi particolari di questo ($r=0$; $r=1$).

23. — 2.º Caso — « *La curva possiede oltre gli* $n-2r$ *assi reali i due assi ciclici contati ognuno* s *volte essendo* $s<r$ ».

Le relazioni che servono a determinare

$$a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \; a_{0,n-6} \; ; \; \ldots\ldots$$

in funzione di $a_{0,n}$ sono le solite

$$a_{0,n-p} = (-1)^{\frac{p}{2}} \left\{ (n-2r)_p - r_1 (n-2r)_{p-2} + \ldots + (-1)^{\frac{p}{2}} r_{\frac{p}{2}} \right\} a_{0,n}$$

La seconda serie di coefficienti:

$$a_{1,n-1} \; ; \; a_{1,n-3} \; ; \; a_{1,n-5} \; ; \; \ldots\ldots$$

dà luogo com' è noto a $\frac{n-1}{2}$ relazioni lineari omògenee con $\frac{n+1}{2}$ variabili e potremo dunque esprimerle tutte in funzione di una di esse, di n e di θ. Solamente occorre ripetere quì l' osservazione già fatta al §. 18. relativamente al calcolo di questi coefficienti.

Sopprimendo la prima e la seconda serie di coefficienti si ottiene l' equazione di una curva di grado dispari $n-2$ che possiede $n-2r$ assi reali e $2s$ assi ciclici. Le relazioni che legheranno i coefficienti della terza serie e cioè:

$$a_{2,n-2}\ ;\ a_{2,n-4}\ ;\ a_{2,n-6}\ ;\ \ldots\ldots$$

si otterranno dunque da quelle che legano le

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ldots$$

cambiando n in $n-2$.

Così il calcolo per ottenere i coefficienti della 4.ª serie:

$$a_{3,n-3}\ ;\ a_{3,n-5}\ ;\ a_{3,n-7}\ ;\ \ldots\ldots$$

sarà perfettamente simile a quello che serve per calcolare quelli della 2.ª.

Seguitando in questo modo a sopprimere a volta, a volta linee verticali di coefficienti nella equazione del §. 9. giungeremo a una curva di grado dispari

$$n-2\,r+2\,s$$

minore di n perchè $s<r$ che possiede $n-2\,r$ assi reali e $2\,s$ assi ciclici cioè in tutto un numero di assi uguale al suo grado; siamo allora ridotti al 1.° Caso §. 23. e basterà perciò ripetere il ragionamento e i risultati ivi ottenuti per trovare l'equazione di questa curva di grado

$$n-2\,r+2\,s$$

e aggiungerla a quella parte già calcolata per ottenere l' intera equazione della curva primitiva.

24. Osserveremo quì che il 1.° caso poteva includersi nel secondo supponendo $r=s$; l'abbiamo voluto distinto perchè è solamente per $s=r$ che la forma dell' equazione si manifesta immediatamente mentre per s diverso da r non si può dare che il processo per ottenerla. Se finalmente nel §. precedente si suppone $s=0$ si ottiene il modo di calcolare l' equazione di una curva di grado dispari n che possiede $n-2\,r$ assi reali e nessuna coppia di assi ciclici.

In tutti questi casi così generalmente studiati potrebbe nascere il sospetto di avere qualche volta costruito delle curve simmetriche degeneri. Ciò non è possibile: se una curva di grado dispari simmetrica si spezza, essa, come abbiamo già notato, per le osservazioni fatte al §. 4. non può farlo senza che la retta all' infinito ne costituisca parte e questo escludono tutte le equazioni che abbiamo calcolato.

25. Tntti i resultati ottenuti per gli assi reali di una curva di grado dispari possono riassumersi così:

« *Una curva di grado dispari* $2r+1$ *non degenere può essere simmetrica separatamente rispetto a:*

$$1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ \ldots\ldots\ 2r+1$$

assi reali. In ogni caso questi assi reali hanno un punto comune attorno al quale si dispongono simmetricamente.

La curva possiede un numero di flessi all'infinito uguale al numero degli assi reali e situati in direzioni a loro normali.

Non ha altri punti reali all'infinito all'infuori di questi.

Gli assi sono le polari armoniche dei flessi all'infinito.

L'Hessiana, la Steineriana e la Cayleyana godono la stessa simmetria della curva primitiva.

Gli asintoti e gli assi costituiscono coppie di tangenti ortogonali della Cayleyana ».

Curve di grado pari.

26. Noi supponiamo che la curva sia già simmetrica rispetto all' asse delle y onde la sua equazione potrà scriversi:

$$a_{0,n}\, y^n + a_{1,n-1}\, y^{n-1} + a_{2,n-2}\, y^{n-2} + \ldots\ldots +$$

$$+ x^2 \left\{ a_{0,n-2}\, y^{n-2} + a_{1,n-3}\, y^{n-3} + a_{2,n-4}\, y^{n-4} + \ldots\ldots \right\} +$$

$$+ x^4 \left\{ a_{0,n-4}\, y^{n-4} + a_{1,n-5} + a_{2,n-6}\, y^{n-6} + \ldots\ldots\ldots \right\} +$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ x^{n-4} \left\{ a_{0,4}\, y^4 + a_{1,3}\, y^3 + a_{2,2}\, y^2 + a_{3,1}\, y + a_{4,0} \right\} +$$

$$+ x^{n-3} \left\{ a_{0,2}\, y^2 + a_{0,1}\, y + a_{2,0} \right\} +$$

$$+ x^n\, a_{0,0} = 0$$

dove n è pari.

Analogamente a quanto facemmo per le curve di grado dispari trasformeremo l' equazione della curva per mezzo della sostituzione

$$x = \mathrm{X} \cos \theta - \mathrm{Y} \operatorname{sen} \theta$$

$$y = \mathrm{X} \operatorname{sen} \theta + \mathrm{Y} \cos \theta$$

ciò che corrisponde a una rotazione di ampiezza θ attorno all' origine del sistema cartesiano ortogonale a cui s'immagina riferita la curva: porremo quindi le condizioni analitiche necessarie perchè il nuovo asse delle y sia ancora asse di simmetria. Queste condizioni si ottengono evidentemente annullando tutte le potenze dispari della x nella equazione trasformata.

Si ottengono così un certo numero di relazioni che contengono linearmente e omogeneamente i coefficienti della curva.

Per queste relazioni valgono le osservazioni analoghe a quelle già fatte al §. 9. per le curve di grado dispari. Noi non staremo quì a ripeterle; piuttosto altre ne faremo che solamente sono valide per l' equazione che ora studiamo, per le curve di grado pari.

27. Prima di tutto se la curva deve possedere un numero pari di assi, essi si distribuiscono in coppie ortogonali (§. 8.) ossia se la curva ha un numero pari di assi ed è simmetrica, come nel caso nostro, rispetto all'asse delle y, lo sarà anche rispetto all' asse delle x; segue che in questo caso tutti i coefficienti il cui primo indice è un numero pari sono nulli.

Poi noteremo che l' annullarsi dei coefficienti dei termini di grado complessivo $n-2\,m$ in x e y e di grado dispari in x dà luogo all' equazione

$$C_{x^i y^{n-2m-i}} = 0 \quad ; \quad (i = 1 \; ; \; 3 \; ; \; \ldots \; n-2m-1)$$

e questa si ottiene dalla

$$C_{y^i\, x^{n-2m-i}} = 0$$

permutando fra loro senθ e cosθ. Inoltre queste $\frac{n-2\,m}{2}$ relazioni contengono linearmente e omogeneamente le

$$a_{2m, n-2m} \; ; \; a_{2m, n-2m-2} \; ; \; a_{2m, n-2m-4} \; ; \; \ldots \; a_{2m, 0}$$

che sono $\frac{n-2m}{2}+1$ e il coefficiente di

$$a_{2m\,,\,n-2m-2k} \quad ; \qquad (2k < n-2m)$$

si ottiene dal coefficiente di

$$a_{2m\,,\,2k}$$

cambiando il segno e permutando sen θ in cos θ.

Segue che se si sommano le relazioni

$$C_{x^i\,y^{n-2m-i}} = 0$$

$$C_{y^i\,x^{n-2m-i}} = 0$$

si ottiene una equazione che contiene linearmente e omogeneamente le differenze

$$a_{2m\,,\,n-2m-2k} - a_{2m\,,\,2k}$$

indicheremo questa equazione con

$$\Upsilon_{i\,,\,n-2m-i} = 0$$

Finalmente osserveremo che se la nostra curva può ammettere un numero di assi multiplo di 4, debbono seguirne le relazioni

$$a_{2m\,,\,m-2\,m-2\,k} = a_{2m\,,\,2\,k}$$

perchè la sostituzione

$$x = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$$

$$y = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$$

e il successivo annullamento dei termini di grado dispari in x portano che l'equazione della curva non deve cambiare permutando fra loro x e y.

In questo caso quindi le equazioni:

$$\Upsilon_{i\,,\,n-2m-i} = 0$$

sono soddisfatte identicamente.

28. Premesse queste considerazioni generali cominciamo a trattare il problema per le curve il cui grado è pari, ma non è multiplo di 4. S' intende naturalmente di escludere da queste ricerche le curve ipercicliche che studieremo a parte.

Esaminiamo se la curva può possedere un numero pari di assi. Per esempio n assi.

In questo caso le relazioni

$$\Upsilon_{i\,,\,n-i} = 0$$

non sono soddisfatte identicamente. Segue che per i valori di θ:

$$\frac{\pi}{n} \;;\; \frac{2\,\pi}{n} \;;\; \ldots\ldots \; \frac{(n-1)\,\pi}{n}$$

la resultante delle

$$\Upsilon_{i\,,\,n-i} = 0$$

deve annullarsi. — Ora le due equazioni:

$$C_{x^i\,y^{n-i}} = 0 \qquad ; \qquad C_{y^i\,x^{n-i}} = 0$$

la cui differenza è appunto la

$$\Upsilon_{i\,,\,n-i} = 0$$

coincidono per $i = \frac{n}{2}$ onde sarà:

$$\Upsilon_{\frac{n}{2}\,,\,\frac{n}{2}} = C_{x^{\frac{n}{2}}\,y^{\frac{n}{2}}}$$

e poichè la resultante delle Υ è nulla per i valori di θ:

$$\frac{\pi}{n} \;;\; \frac{2\,\pi}{n} \;;\; \ldots\ldots\ldots \frac{(n-1)\,\pi}{n}$$

così ne viene che per i medesimi valori di θ l' equazione :

$$C_{x^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}}} = 0$$

sarà una conseguenza delle altre:

$$C_{x^i y^{n-i}} = 0$$

Ma quest' ultime sono $\frac{n}{2}$; dunque, di indipendenti, non se ne hanno certamente più di

$$\frac{n}{2} - 1.$$

D' altra parte le

$$a_{0,n} \ ; \ a_{0,n-2} \ ; \ a_{0,n-4} \ ; \ \ldots\ldots\ldots$$

che sono i coefficienti che entrano appunto tutti (e soli essi) in ognuna delle equazioni

$$C_{x^i y^{n-i}} = 0$$

sono in numero di

$$\frac{n}{2} + 1.$$

Questo basta per concludere che risolvendo le

$$C_{x^i y^{n-i}} = 0$$

rispetto ai coefficienti

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \; \ldots\ldots$$

per i valori suddetti di θ; due di questi coefficienti almeno possono scegliersi arbitrariamente.

Ecco dunque il modo di costruire i termini di grado n complessivo in x e y.

Relativamente agli altri coefficienti osserveremo:

1.° che quelli che hanno dispari il primo indice si annullano tutti;

2.° che i rimanenti si determineranno in modo che i termini di grado $n-2$; $n-4$; $n-6$; . . . . . complessivo in x e y sieno rispettivamente la potenza $\frac{n-2}{2}$; $\frac{n-4}{2}$; $\frac{n-6}{2}$; . . . . . . di

$$x^2 + y^2$$

giacchè le curve di ordine pari che si ottengono sopprimendo linee verticali di coefficienti nella equazione del §. 26. debbono possedere un numero di assi superiore al proprio grado e sono perciò tutte ipercicliche. In conclusione la parte dell'equazione della curva che è di grado inferiore ad n è della forma:

$$(1) \qquad \sum_{q=1}^{q=\frac{n}{2}} a_{2q,n-2q} \left(x^2 + y^2 \right)^{\frac{n}{2}-q}$$

Bisogna però dimostrare che una tal curva non si spezza. E infatti se si spezzasse, non potrebbe farlo che in $\frac{n}{2}$ cerchi concentrici all' origine; ma perchè avvenisse questo occorrerebbe che i termini di grado complessivo in x e y fossero raggruppati nella potenza $\left(\frac{n}{2}\right)^{esima}$ di

$$x^2 + y^2$$

e quindi la parte che manca alla (1) precedente per formare l' equazione della curva fosse

$$(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$$

con sol parametro arbitrario, mentre nella determinazione dei coefficienti dei termini di grado n abbiamo dimostrato che si possono scegliere arbitrariamente almeno due parametri arbitrarî.

29. Rimanendo sempre nell'ipotesi che n sia multiplo di due, ma non di quattro consideriamo il caso generale in cui il numero degli assi è pure multiplo di due, ma non di quattro. Vediamo cioè come si costruisce l' equazione della curva quando il numero degli assi è $n-4m$ dove m è dispari.

Intanto osserveremo che i coefficienti il cui primo indice è dispari si annullano tutti; in secondo luogo, se si sopprimono nell' equazione del §. 26. tutti i coefficienti il cui 1.° indice è uno qualunque dei numeri

$$0\ ;\ 2\ ;\ 4\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 4\,m—2$$

otterremo l'equazione di una curva di grado $n—4m$ con $n—4m$ assi di simmetria e quindi la sua equazione sarà determinata col metodo dato nel §. precedente; questa equazione fa parte di quella che noi cerchiamo e precisamente quella parte che contiene tutti i termini il cui grado è minore, o uguale di $n—4m$.

Rimangono dunque da determinarsi solamente i coefficienti il cui primo indice è uno qualunque dei numeri

$$0\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 4m—2\ .$$

Fra questi, quelli il cui 1.° indice è

$$0\ ;\ 4\ ;\ 8\ ;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 4m—4$$

si ottengono nel modo già indicato nel §. precedente quando si è fatta l'analoga determinazione per i coefficienti il cui primo indice è lo zero.

Per quelli che rimangono e il cui primo indice è

$$2\ ;\ 6\ ;\ 10\ ;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 4\,m—2$$

il modo di calcolarli è pure semplicissimo. Per esempio prendiamo quelli che hanno per primo indice il 2 e che sono:

$$a_{2,n-2}\ ;\ a_{2,n-4}\ ;\ a_{2,n-6}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Essi compariscono linearmente e omogeneamente nelle $\frac{n-2}{2}$ relazioni

$$C_{x^i\, y^{n-2-i}} = 0$$

e sono in numero di $\frac{n-2}{2} + 1$. È dunque possibile assumerne uno di essi arbitrario ed esprimere gli altri in funzione di questo, di n e di θ. Lo stesso ragionamento vale per gli altri che hanno per primo indice 6 ; 10 ; . . . .

Una volta costruita l'equazione della curva, si vede subito che essa non può spezzarsi in $\frac{n}{2}$ cerchi concentrici contando al solito il numero delle costanti arbitrarie di cui si può disporre.

30. Per completare le ricerche relative a un numero pari di assi per una curva il cui grado è un multiplo di due, ma non di quattro non manca di studiare che il caso in cui il numero degli assi sia un multiplo di 4.

Cominciamo quindi dall' esaminare se la curva può possedere $n-2$ assi cercando i coefficienti:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ .\ .\ .\ .\ .$$

Siccome $n-2$ è multiplo di 4 secondo ciò che osservammo al §. 27. sarà in generale

$$a_{2m\,,\, n-2m-2k} = a_{2m\,,\, 2k}$$

Onde non è quì il caso di parlare delle equazioni

$$\Upsilon_{i, n-2m-i} = 0$$

esse sono soddisfatte identicamente, così è soddisfatta identicamente la

$$C_{x^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}}} = 0$$

che al §. 28 abbiamo dimostrato coincidere con

$$\Upsilon_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}} = 0.$$

In questo caso dunque le

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4};\ \ldots\ldots$$

si riducono a $\frac{n+2}{4}$ legate da $\frac{n-2}{4}$ relazioni lineari e omogenee; ne rimane quindi una di esse arbitraria.

Passiamo alle

$$a_{2,n-2}\ ;\ a_{2,n-4}\ ;\ a_{2,n-6}\ ;\ \ldots\ldots$$

Esse pure sono in numero di $\frac{n+2}{4}$ giacchè la relazione:

$$a_{2,n-2-2k} = a_{2,2k}$$

diviene una identità per $k = \frac{n-2}{4}$ e sono legate da $\frac{n-2}{4}$ relazioni lineari e omogenee, dunque anche di queste ne resta una arbitraria.

Le curve che si ottengono successivamente sopprimendo oltre le due serie di coefficienti

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{2,n-2}\ ,\ a_{2,n-4}\ a_{2,n-6}\ ;\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

altre serie analoghe di coefficienti possiedono un numero di assi superiore al loro grado e quindi sono tutte ipercicliche.

Dunque la parte dell' equazione richiesta che è di grado minore, o uguale ad $n-4$ è della forma:

$$+ \sum_{p=2}^{p=\frac{n}{2}} a_{2p\ ,\ n-2p}\,(x^2 + y^2)^{\frac{n-2p}{2}}$$

Si potrebbe però obiettare che la determinazione dei termini di grado $n-2$ e n dà luogo ad assumere altri due soli parametri arbitrarî, non potrebbe dunque darsi che i termini di grado $n-2$ e n si raggruppassero nelle due potenze:

$$\alpha\,(x^2 + y^2)^{\frac{n-2}{2}} + \beta\,(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$$

essendo α e β i parametri arbitrarî? In questo caso la curva degenererebbe in $\frac{n}{2}$ cerchì concentrici. Si risponde a questa obbiezione osservando che appunto perchè si hanno due parametri in arbitrio, si può fare in modo che questo non avvenga; per esempio scegliendo

$$a_{0,n-2} = 1 \quad ; \quad a_{2,n-4} = 1$$

e in questo caso particolarissimo si vede che la possibilità che la curva degeneri manca assolutamente.

31. In modo analogo si risolve il problema nel caso che la curva debba possedere un numero di assi multiplo di 4 e inferiore a n—2 e il grado n della curva sia multiplo di 2 e non di 4.

32. Veniamo ora a trattare delle curve il cui grado è multiplo di 4.

Il caso in cui il numero degli assi sia pure multiplo di 4 e in particolare uguale al grado della curva è considerato implicitamente al §. 30. Se infatti nelle osservazioni svolte in quel §. si suppone di aver soppresso i coefficienti

$$a_{0,n} \;;\; a_{0,n-2} \;;\; a_{0,n-4} \;;\; \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

si ottiene l' equazione di una curva di grado (n—2) simmetrica rispetto a (n—2) assi e siccome è supposto in quel §. che n sia pari ma non multiplo di 4 così segue che (n—2) è multiplo di 4.

33. Non rimane da studiare che il caso in cui l' ordine della curva sia ancora un multiplo di 4 e il nu-

mero degli assi un multiplo di due e non di 4. Prendiamo l' equazione sotto la forma scritta al §. 26. con la ipotesi che n sia multiplo di 4. Siano $n-2$ gli assi che debba ammettere la curva e di cui si voglia ora determinare l' equazione.

Cerchiamo le relazioni da cui sono legate le

$$a_{0,n} \; ; \; a_{0,n-2} \; ; \; a_{0,n-4} \; ; \; \ldots\ldots$$

In questo caso le

$$\Upsilon_{i\,,\,n-i} = 0$$

non sono soddisfatte identicamente; dunque per i valori di θ:

$$\frac{\pi}{n-2} \; ; \; \frac{2\pi}{n-2} \; ; \; \frac{3\pi}{n-2} ; \; \ldots\ldots$$

la risultante delle $\Upsilon_{i\,,\,n-i} = 0$ deve annullarsi. Però non accade come al §. 28. che la

$$\Upsilon_{\frac{n}{2}\,,\,\frac{n}{2}} = 0 \; ; \ldots\ldots$$

coincida con la $C_{x^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}}} = 0$: quest' ultima ora non esiste perchè $\frac{n}{2}$ è pari.

Dunque le

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \cdots\cdots$$

sono $\frac{n}{2}+1$ legate da $\frac{n}{2}$ relazioni. Una di esse è sempre arbitraria.

La curva che si ottiene sopprimendo le:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \cdots\cdots$$

è di grado pari non multiplo di 4 e possiede un numero di assi uguale al suo grado: la sua equazione si formerà dunque secondo i criteri stabiliti al §. 28. D'altra parte è il 1.° membro dell' equazione di questa curva che costituisce l'insieme di tutti i termini il cui grado è uguale, o minore di $(n-2)$ nella equazione richiesta.

Finalmente il caso generale in cui la curva sia di grado n multiplo di 4 con un numero di assi multiplo di 2 ma non di 4 e minore di $n-2$ è perfettamente analogo a questo, nè ci insisteremo.

34. Piuttosto noteremo come una curva di grado pari possa anche ammettere un numero dispari di assi. E infatti, tolta ora la condizione che siano nulli i coefficienti (nella equazione del §. 26) il cui primo indice è dispari supponiamo debbasi trovare l' equazione di una tal curva possedente p assi reali di simmetria essendo p un numero dispari.

Per determinare le $\frac{n}{2}+1$:

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ldots$$

abbiamo allora le $\frac{n}{2}$ relazioni :

$$C_{x^i\, y^{n-i}} = 0$$

che ne lasciano una almeno arbitraria, la quale sceglieremo in modo che la curva non sia di conseguenza iperciclica. Soppresse le

$$a_{0,n}\ ;\ a_{0,n-2}\ ;\ a_{0,n-4}\ ;\ \ldots\ldots$$

rimane una curva di ordine dispari che possiede un numero dispari di assi reali e la cui equazione sappiamo già trovare con i metodi esposti al §. 23. È il primo membro dell' equazione di questa curva che ci rappresenta tutti i termini di grado uguale o inferiore ad $n-1$ che entrano a far parte dell' equazione richiesta.

Curve ipercicliche.

35. La loro equazione è della forma

$$
\begin{aligned}
U_i = {} & \alpha\,(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} + \\
& + a_{1,n-1}\, y^{n-1} + a_{2,n-2}\, y^{n-2} + \ldots\ldots + \\
& + x^2 \left\{ a_{1,n-3}\, y^{n-3} + a_{2,n-4}\, y^{n-4} + \ldots\ldots \right\} \\
& + x^4 \left\{ a_{1,n-5}\, y^{n-5} + a_{2,n-6}\, y^{n-6} + \ldots\ldots \right\} + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + x^{n-2} \left\{ a_{1,1}\, y + a_{2,0} \right\} = 0
\end{aligned}
$$

dove si suppone che l' asse delle y sia già retta di simmetria. Notammo al §. 7. come queste curve abbiano ogni diametro perpendicolare al corrispondente sistema di corde: esse quindi non potevano fornirci per mezzo di quelle sole considerazioni un limite massimo per il numero degli assi, onde le escludemmo da tutte le ricerche successive.

Riesce però evidente che esse all' infuori di n assi possono come le altre curve di ordine pari possederne

$$n-1\ ;\ n-2\ ;\ \ldots\ldots\ 3\ ;\ 2\ ;\ 1\ ;\ 0.$$

Infatti se ne possedessero n la curva che si otterrebbe sopprimendo i termini di grado n e quelli di grado $n-1$ sarebbe di grado $n-2$ e possederebbe un numero di assi superiore al suo grado; essa e tutte le sue analoghe sarebbero pure ipercicliche onde la parte della equazione di U_i che è di grado inferiore ad n sarebbe costituita da

$$\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} a_{2p\,,\,n-2p}\,(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}-p}$$

e a questo aggiunto

$$\alpha\,(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$$

si otterrebbe l'equazione di una curva degenere in $\frac{n}{2}$ cerchi concentrici.

36. Riassumendo dunque i resultati ottenuti per le curve di grado pari possiamo enunciare il seguente teorema:

« *Una curva di grado pari non degenere può possedere separatamente un numero di assi reali uguale a uno qualunque dei numeri che precedono quello che esprime il suo grado e se non è iperciclica può anche possederne tanti quante sono le unità contenute nel suo grado* ».

37. Citeremo qui alcuni esempi:

Curve di terzo ordine

I. — Simmetria rispetto a un asse reale:

$$a_{0,3}\, y^3 + a_{1,2}\, y^2 + a_{2,1}\, y + a_{3,0} +$$
$$+ x^2 \left\{ a_{0,1}\, y + a_{1,0} \right\} = 0$$

II. — Simmetria rispetto a un asse reale e ai due ciclici contati ognuno una volta:

$$a_{0,3} \left\{ y^3 + y\, x^2 \right\} + a_{1,2} \left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{3,0} = 0$$

III. — Simmetria rispetto a tre assi reali:

$$a_{0,3} \left\{ y^3 - 3\, y\, x^2 \right\} + a_{1,2} \left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{3,0} = 0$$

Curve di quarto ordine

I. — Simmetria rispetto a un asse reale:

$$a_{0,4}\, y^4 + a_{1,3}\, y^3 + a_{2,2}\, y^2 + a_{3,1}\, y + a_{4,0} +$$
$$+ x^2 \left\{ a_{0,2}\, y^2 + a_{1,1}\, y + a_{2,0} \right\} +$$
$$+ x^4\, a_{0,0} = 0$$

II. — Simmetria rispetto a due assi reali:

$$a_{0,4}\, y^4 + a_{2,2}\, y^2 + a_{4,0} + x^2 \left\{ a_{0,2}\, y^2 + a_{2,0} \right\} + a_{0,0}\, x^4 = 0$$

III. — Simmetria rispetto a tre assi reali:

$$a_{0,4}\left\{x^2+y^2\right\}^2+a_{1,3}\left\{y^3-3\,y\,x^2\right\}+a_{2,2}\left\{x^2+y^2\right\}+a_{4,0}=0$$

IV. — Simmetria rispetto a quattro assi reali:

$$a_{0,4}\,(x^4+y^4)+a_{0,2}\,x^2\,y^2+a_{2,2}\,(x^2+y^2)+a_{4,0}=0$$

Curve di quinto ordine

I. — Simmetria rispetto a un asse reale:

$$a_{0,5}\,y^5+a_{1,4}\,y^4+a_{2,3}\,y^3+a_{3,2}\,y^2+a_{4,1}\,y+a_{5,0}+$$
$$+\,x^2\left\{a_{0,3}\,y^3+a_{1,2}\,y^2+a_{2,1}\,y+a_{3,0}\right\}+$$
$$+\,x^4\left\{a_{0,1}\,y+a_{1,0}\right\}=0$$

II. — Simmetria rispetto a un asse reale e ai due ciclici contati ognuno una volta:

$$a_{0,5}\left\{y^5-2\,x^2\,y^3-3\,x^4\,y\right\}+a_{1,4}\left\{x^2+y^2\right\}^2+$$
$$+\,a_{2,3}\left\{y^3+y\,x^2\right\}+a_{3,2}\left\{x^2+y^2\right\}+a_{5,0}=0$$

III. — Simmetria rispetto a un asse reale e ai due ciclici contati ognuno di questi ultimi due volte:

$$a_{0,5}\left\{ y^5 + 2\,y^3\,x^2 + y\,x^4 \right\} + a_{1,4}\left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 +$$
$$+ a_{3,2}\left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{5,0} = 0$$

IV. — Simmetria rispetto a tre assi reali:

$$a_{0,5}\left\{ y^5 - 2\,x^2\,y^3 - 3\,x^4\,y \right\} + a_{1,4}\left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 +$$
$$+ a_{2,3}\left\{ y^3 - 3\,y x^2 \right\} + a_{3,2}\left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{5,0} = 0$$

V. — Simmetria rispetto a tre assi reali e ai due ciclici contati ognuno una volta:

$$a_{0,5}\left\{ y^5 - 2\,x^2\,y^3 - 3\,x^4\,y \right\} + a_{1,4}\left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 +$$
$$+ a_{3,2}\left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{5,0} = 0$$

VI. — Simmetria rispetto a cinque assi reali:

$$a_{0,5}\left\{ y^5 - 10\,x^2\,y^3 + 5\,x^4\,y \right\} + a_{1,4}\left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 +$$
$$+ a_{3,2}\left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{5,0} = 0$$

Curve di sesto ordine

I. — Simmetria rispetto a un asse reale:

$$a_{0,6}\, y^6 + a_{1,5}\, y^5 + a_{2,4}\, y^4 + a_{3,3}\, y^3 + a_{4,2}\, y^2 +$$
$$+ a_{5,1}\, y + a_{6,0} +$$
$$+ x^2 \left\{ a_{0,4}\, y^4 + a_{1,3}\, y^3 + a_{2,2}\, y^2 + a_{3,1}\, y + a_{4,0} \right\} +$$
$$+ x^4 \left\{ a_{0,2}\, y^2 + a_{1,1}\, y + a_{2,0} \right\} +$$
$$+ x^6\, a_{0,0} = 0$$

II. — Simmetria rispetto a due assi reali.

$$a_{0,6}\, y^6 + a_{2,4}\, y^4 + a_{4,2}\, y^2 + a_{6,0} +$$
$$+ x^2 \left\{ a_{0,4}\, y^4 + a_{2,2}\, y^2 + a_{4,0} \right\} +$$
$$+ x^4 \left\{ a_{0,2}\, y^2 + a_{2,0} \right\} + a_{0,0}\, x^6 = 0$$

III. — Simmetria rispetto a tre assi reali:

$$a_{0,6} \left\{ y^3 - 3\, y\, x^2 \right\}^2 + a_{0,0} \left\{ x^3 - 3\, x\, y^2 \right\}^2 +$$
$$a_{1,5} \left\{ y^5 - 2\, x^2\, y^3 - 3\, x^4\, y \right\} + a_{2,4} \left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 +$$
$$a_{3,5} \left\{ y^3 - 3\, y\, x^2 \right\} + a_{4,2} \left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{6,0} = 0$$

IV. — Simmetria rispetto a quattro assi reali:

$$a_{0,6} \left\{ x^6 + y^6 \right\} + a_{0,4}\, x^2 y^2 \left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{2,4} \left\{ x^3 + y^2 \right\}^2 +$$

$$+ a_{2,2}\, x^2 y^2 + a_{4,2} \left(x^2 + y^2 \right) + a_{6,0} = 0$$

V. — Simmetrîa rispetto a cinque assi reali:

$$a_{0,6} \left\{ x^2 + y^2 \right\}^3 + a_{1,5} \left\{ y^5 - 10\, x^2 y^3 + 5\, x^4 y \right\} +$$

$$a_{2,4} \left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 + a_{4,2} \left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{6,0} = 0$$

VI. Simmetria rispetto a sei assi reali:

$$a_{0,6} \left\{ y^3 - 3\, y\, x^2 \right\}^2 + a_{0,0} \left\{ x^3 - 3\, x\, y^2 \right\}^2 +$$

$$+ a_{2,4} \left\{ x^2 + y^2 \right\}^2 + a_{4,2} \left\{ x^2 + y^2 \right\} + a_{6,0} = 0$$

Applicazione dei resultati precedenti al caso particolare delle cubiche.

Linee diametrali

38. *Diametri e coniche diametrali ordinarie.* — Prendiamo l'equazione della cubica sotto la forma:

$$U_x = a_0 x_3^3 + 3\, a_1 x_3^2 + 3\, a_2 x_3 + a_3 = 0$$

dove le a sono binarie in x_1 ; x_2 di grado uguale al loro indice

$$a_3 = \alpha_{111} x_1^3 + 3\, \alpha_{112} x_1^2 x_2 + 3\, \alpha_{122} x_1 x_2^2 + \alpha_{222} x_2^3$$

$$a_2 = \beta_{11} x_1^2 + 2\, \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{22} x_2^2$$

$$a_1 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$$

assumiamo per lato $x_3 = 0$ del triangolo fondamentale la retta all' infinito del piano della cubica.

L'equazioni del diametro e della conica diametrale di un punto di coordinate (y_1 ; y_2 ; 0) sono rispettivamente:

$$\left[x_1 \frac{\partial U_y}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial U_y}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial U_y}{\partial y_3}\right]_{y_3=0} = 0$$

$$\left[\left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3}\right)^2 U_y\right]_{y_3=0} = 0$$

Ossia eseguendo i calcoli:

$$x_1 \left[\alpha_{111} y_1^2 + 2 \alpha_{112} y_1 y_2 + \alpha_{122} y_2^2\right] +$$
$$+ x_2 \left[\alpha_{112} y_1^2 + 2 \alpha_{122} y_1 y_2 + \alpha_{222} y_2^2\right] +$$
$$+ x_3 \left[\beta_{11} y_1^2 + 2 \beta_{12} y_1 y_2 + \beta_{22} y_2^2\right] = 0$$

$$x_1^2 \left[\alpha_{111} y_1 + \alpha_{112} y_2\right] + x_2^2 \left[\alpha_{122} y_1 + \alpha_{222} y_2\right] +$$
$$+ x_3^2 (\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2) + 2 x_1 x_2 \left[\alpha_{112} y_1 + \alpha_{122} y_2\right] +$$
$$+ 2 x_1 x_3 \left[\beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2\right] + 2 x_2 x_3 \left[\beta_{12} y_1 + \beta_{22} y_2\right] = 0.$$

Segue:

« *Per un punto P qualunque del piano passano due diametri e una conica diametrale ordinarî* ».

Se (m ; n ; p) sono le coordinate omogenee di P e s' indica con λ il rapporto $\frac{y_1}{y_2}$ che serve ad individuare un punto sulla retta all' infinito; l' equazioni che determinano λ per mezzo di $(m\ ;\ n\ ;\ p)$ sono:

$$\lambda^2\left[\alpha_{111}\, m+\alpha_{112}\, n+\beta_{11}\, p\right]+2\,\lambda\left[\alpha_{112}\, m+\alpha_{122}\, n+\beta_{12}\, p\right]+$$
$$+\ \alpha_{122}\, m+\alpha_{222}\, n+\beta_{22}\, p=0$$

$$(1)\left\{\begin{array}{l}\lambda\left[\alpha_{111} m^2+\alpha_{122} n^2+\gamma_1 p^2+2\alpha_{112} m n+2 m p\,\beta_{11}+2\, n p\,\beta_{12}\right]+\\+\alpha_{112} m^2+\alpha_{222} n^2+\gamma_2 p^2+2\alpha_{122} m n+2\, m p\,\beta_{12}+2 n p\beta_{22}=0\end{array}\right.$$

Finalmente le due equazioni lineari:

$$(2)\left\{\begin{array}{l}x_1(\alpha_{111}\,\lambda+\alpha_{112})+x_2\,(\alpha_{112}\,\lambda+\alpha_{122})+x_3\,(\beta_{11}\,\lambda+\beta_{12})=0\\x_1(\alpha_{112}\,\lambda+\alpha_{122})+x_2\,(\alpha_{122}\,\lambda+\alpha_{222})+x_3\,(\beta_{12}\,\lambda+\beta_{22})=0\end{array}\right.$$

servono ad individuare il centro della conica diametrale ordinaria del punto di parametro λ.

39. *Linee diametrali principali.* — Secondo i resultati generali ottenuti al §. 3. abbiamo in questo caso due linee diametrali principali:

« *La prima linea diametrale principale cioè l'inviluppo delle prime linee diametrali ordinarie. È una curva d' ordine zero costituita dai* 4 *centri della cubica che sono i quattro punti base del fascio delle coniche diametrali ordinarie* ».

« *La seconda linea diametrale principale che può riguardarsi* (§. 3.) :

1.° *Come luogo dei centri delle coniche diametrali ordinarie;*

2.° *Come inviluppo dei diametri.*

Questa curva è una conica e la sua equazione si può ottenere in due modi:

1.° *Eliminando* λ *fra le due lineari* (2) *del* §. *precedente;*

2.° *Annullando il discriminante della binaria quadratica* (1) *considerata come tale nelle due variabili* y_1 ; y_2 *il cui rapporto è* λ.

Questa equazione è la seguente:

$$x_1^2(\alpha_{111}\,\alpha_{122}-\alpha^2_{112}) + x_2^2(\alpha_{112}\,\alpha_{222}-\alpha^2_{122}) + x_3^2(\beta_{11}\,\beta_{22}-\beta^2_{12}) +$$

$$+ x_1\,x_2(\alpha_{111}\,\alpha_{222}-\alpha_{112}\,\alpha_{122}) + x_1\,x_3(\alpha_{111}\,\beta_{22}+\beta_{11}\,\alpha_{122}-2\alpha_{112}\,\beta_{12}) +$$

$$+ x_2 x_3(\beta_{11}\,\alpha_{222}+\beta_{22}\,\alpha_{112}-\beta_{12}\,\alpha_{122}) = 0$$

Linee diametrali coniugate.

40. Chiameremo coniugati un diametro di un punto o e una conica diametrale di un punto o'; quando o è uno dei punti all' infinito del diametro di o' e quindi o' è il punto all' infinito del diametro di o. Mentre un diametro ha una sola conica diametrale coniugata; una conica diametrale ha due diametri coniugati paralleli fra loro.

Riprendiamo l' equazione di un diametro:

$$x_1\left\{\alpha_{111}\,\lambda^2+2\,\alpha_{112}\,\lambda+\alpha_{122}\right\} + x_2\left\{\alpha_{112}\,\lambda^2+2\,\alpha_{122}\,\lambda+\alpha_{222}\right\} +$$

$$+ x_3\left\{\beta_{11}\,\lambda^2+2\,\beta_{12}\,\lambda+\beta_{22}\right\} + 0$$

λ essendo il parametro del punto all' infinito del sistema di corde parallele a cui è relativo il diametro. Il parametro λ_1 del punto all' infinito del precedente diametro è:

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha_{112}\lambda^2 + 2\alpha_{122}\lambda + \alpha_{222}}{\alpha_{111}\lambda^2 + 2\alpha_{112}\lambda + \alpha_{122}}$$

L' equazione di 2.° grado in λ':

$$\lambda_1 + \frac{\alpha_{112}\lambda'^2 + 2\alpha_{122}\lambda' + \alpha_{222}}{\alpha_{111}\lambda'^2 + 2\alpha_{112}\lambda' + \alpha_{122}} = 0$$

dà i parametri dei punti all' infinito della conica diametrale coniugata al diametro che si considera e si ritrova che a un valore di λ' corrisponde un sol valore di λ_1 mentre a un valore di λ_1 corrispondono due valori di λ'.

L'equazione precedente è naturalmente soddisfatta per $\lambda' = \lambda$ giacchè se la retta polare di λ passa per λ_1, la conica polare di λ_1 passa per λ.

L' altra radice è

$$\lambda'_1 = \frac{\lambda(\alpha_{111}\alpha_{222} - \alpha_{112}\alpha_{122}) + 2(\alpha_{112}\alpha_{222} - \alpha^2_{122})}{2\lambda(\alpha^2_{112} - \alpha_{111}\alpha_{122}) + \alpha_{112}\alpha_{122} - \alpha_{111}\alpha_{222}}$$

Segue:

« *I due sistemi di corde parallele aventi per parametri dei due punti all' infinito rispettivamente*

λ *e* λ'_1

annettono diametri paralleli. Queste ∞^1 *coppie di diametri paralleli sono le* ∞^1 *coppie di tangenti parallele della conica diametrale principale* ». Fra queste infinite coppie di sistemi, ve ne sono due costituite ognuna da sistemi coincidenti e corrispondono ai due casi in cui

$$\lambda = \lambda'_1$$

cioè alle due radici dell' equazione di 2.° grado:

$$\lambda^2(\alpha^2{}_{112} - \alpha_{111}\alpha_{122}) + \lambda(\alpha_{112}\alpha_{122} - \alpha_{111}\alpha_{222}) + \alpha_{112}\alpha_{222} - \alpha^2{}_{122} =$$

e questo concorda col fatto che in un fascio di coniche, e in particolare nel fascio delle coniche diametrali esistono sempre due e non più di due parabole.

41. *Centri*. — Come abbiamo già notato i quattro punti base del fascio delle coniche diametrali ordinarie sono i quattro centri della cubica e insieme costituiscono la prima linea diametrale principale che è di ordine zero. Le tre coppie di lati opposti del quadrangolo dei centri costituiscono le tre coniche diametrali ordinarie che si spezzano; i tre punti diagonali appartengono contemporaneamente alla conica diametrale principale e all'hessiana: nella corrispondenza univoca che si stabilisce fra i punti dell' hessiana di una cubica i corrispondenti di questi tre punti diagonali sono i tre punti all' infinito dell' hessiana.

Se la cubica è nodale uno dei centri cade nel nodo; se è cuspidale due centri sono riuniti nella cuspide perchè nel 1.° caso tutte le coniche polari passano per il nodo; nel 2.° caso passano per la cuspide avendo ivi per tangente comune la tangente cuspidale.

42. Premesse queste generalità ci proponiamo la seguente ricerca: se cioè i quattro centri di una cubica possono essere i vertici di un quadrilatero semplice delle specie che ordinariamente si considerano nella geometria elementare: trapezio, parallelogrammo, rombo, rettangolo, quadrato.

Intenderemo di riferirci a cubiche di genere 1, o a cubiche nodali giacchè solamente allora i quattro centri sono distinti.

Trapezio. — Sia MNPQ (Fig. III.ª) il supposto trapezio dei centri; A il punto all'infinito comune alla coppia di lati paralleli del trapezio; r_∞ la retta all'infinito. Le rette A M ; A Q costituiscono una delle tre coniche che si spezzano; il punto la cui conica polare è (A M ; A Q) sarà un punto di r_∞ giacchè ogni conica passante per M ; N ; P ; Q è una conica diametrale; non può essere A perchè A sarebbe un punto doppio e dovrebbe quindi coincidere con uno dei vertici del quadrangolo il quale non sarebbe più un trapezio; non può essere un altro punto K di r_∞ giacchè ne verrebbe che la conica polare di A si spezzerebbe in due rette parallele passanti per K; il trapezio sarebbe un parallelogrammo.

Per il trapezio dunque il problema non ha soluzione possibile.

43. *Parallelogrammo.* — Sia A B C D (Fig. V.ª) il quadrangolo dei centri; F il punto comune all'infinito dei lati A B , C D ; G quello comune alla coppia A D , B C ; E

il punto d' incontro delle diagonali del parallelogrammo. I punti F e G appartengono all' hessiana; dunque essa incontra la retta all' infinito in tre punti reali; sia E' il 3.° punto. I punti E' ed E sono punti corrispondenti dell' hessiana e infatti la conica polare di E' deve essere una delle tre,

(AB ; CD) ; (AD ; BC) ; (AC ; BD)

Se fosse una delle due prime, per esempio la prima, ne seguirebbe che la conica polare di F si spezzerebbe in due rette parallele passanti per E' e oltre alle tre coniche polari sopra scritte dei punti di r_∞ che si spezzano ce ne sarebbe una quarta; dunque i punti E ed E' sono corrispondenti. Anche G ed F sono corrispondenti e infatti il corrispondente di G deve essere sulla r_∞ perchè la conica polare che passa per G contenendo i quattro punti A ; B ; C ; D è una conica diametrale; non può essere G stesso perchè sarebbe un punto doppio e dovrebbe quindi coincidere con uno dei quattro punti A ; B ; C ; D ; non può essere E' perchè E' corrisponde ad E; non può essere un punto K di r_∞ diverso da G ; E' ; F altrimenti la conica polare di G spezzandosi in due rette passanti per K ci sarebbero nel fascio delle coniche diametrali quattro coniche che si spezzerebbero. I punti G ed F corrispondendosi, ne viene che la retta all' infinito deve essere una tangente della Cayleyana. Viceversa se questo accade il quadrangolo dei centri è un parallelogrammo.

L'equazione dalla Cayleyana in coordinate $(\alpha_1 ; \alpha_2 ; \alpha_3)$ di rette è della forma:

$$\begin{aligned} & A_{111}\, \alpha_1^3 + A_{222}\, \alpha_2^3 + A_{333}\, \alpha_3^3 + 3\, A_{113}\, \alpha_1^2\, \alpha_3 + \\ & + 3\, A_{133}\, \alpha_1\, \alpha_3^2 + 3\, A_{112}\, \alpha_1^2\, \alpha_2 + 3\, A_{122}\, \alpha_1\, \alpha_2^2 + \\ & + 3\, A_{223}\, \alpha_2^2\, \alpha_3 + 3\, A_{233}\, \alpha_2\, \alpha_3^2 + 6\, A_{123}\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

ove i coefficienti sono funzioni note dei coefficienti della cubica.

Se la retta all' infinito deve far parte di questo inviluppo, l' equazione precedente deve essere soddisfatta da:

$$\alpha_1 = 0 \quad ; \quad \alpha_2 = 0 \quad ; \quad \alpha_3 = 1$$

ossia deve essere

$$A_{333} = 0$$

sostituendo il valore cognito di A_{333} espresso con i coefficienti della cubica possiamo dire che: « *la condizione necessaria e sufficiente affinché i quattro centri di una cubica siano i vertici di un parallelogrammo è:*

$$\begin{vmatrix} \alpha_{111} & \alpha_{112} & \alpha_{122} \\ \alpha_{112} & \alpha_{122} & \alpha_{222} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0$$

In particolare questa condizione è soddisfatta se nell' equazione della cubica mancano i termini di 1.° grado in x_3.

« *Esiste un sistema* ∞^8 *di cubiche i cui quattro centri sono i vertici di un parallelogrammo* ».

44. *Rettangolo*. — Perchè i quattro centri siano vertici di un rettangolo, bisognerà prima di tutto porre la condizione

$$A_{333} = 0$$

che esprime che il quadrangolo dei centri sia un parallelogrammo e poi l'altra che i due punti all'infinito della hessiana che si corrispondono per la condizione $A_{333} = 0$ siano separati armonicamente dalla coppia dei punti ciclici del piano. Se con α' s' indicano i coefficienti dell' hessiana i quali sono funzioni note dei coefficienti della cubica, le intersezioni della hessiana con la retta all'infinito sono date da

$$(1) \quad \alpha'_{111}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + 3\,\alpha'_{112}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 3\,\alpha'_{122}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \alpha'_{222} = 0$$

Siano λ_1 ; λ_2 ; λ_3 le tre radici. Il porre $A_{333} = 0$ non porta altra conseguenza che la retta all' infinito sia tangente della Cayleyana; non porta cioè la conseguenza che due speciali fra i tre punti all'infinito dell'hessiana siano corrispondenti, ma due qualunque fra questi tre punti; quindi dopo aver messo la condizione:

$$A_{333} = 0$$

noi siamo sempre in arbitrio di scegliere due qualunque dei tre parametri λ_1 ; λ_2 ; λ_3 come parametri di punti corrispondenti.

Prendiamo i primi due, dovrà essere:

$$(\lambda_1 \lambda_2 i - i) = -1$$

ossia

$$\lambda_1 \lambda_2 = -1$$

e perciò

$$\lambda_3 = -\frac{\alpha'_{222}}{\alpha'_{111}}$$

cioè $-\frac{\alpha'_{222}}{\alpha'_{111}}$ deve essere una radice della (1). In questo caso dunque il problema è possibile quando sono soddisfatte le due relazioni fra i coefficienti della cubica:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{111} & \alpha_{112} & \alpha_{122} \\ \alpha_{112} & \alpha_{122} & \alpha_{222} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} 3(\alpha'_{112}\alpha'^2_{222} - \alpha'_{122}\alpha'_{111}\alpha'_{222}) = \\ = \alpha'^3_{222} - \alpha'_{222}\alpha'^2_{111} \end{aligned}$$

essendo le α' i coefficienti dell' hessiana.

« *Esiste un sistema* ∞^7 *di cubiche i cui centri sono i vertici di un rettangolo* ».

45. *Rombo.* — Perchè i quattro centri siano vertici

di un rombo, occorrerà prima di tutto porre $A_{333} = 0$; poi che le diagonali del parallelogrammo che così vengono a formare i centri siano ortogonali cioè che la conica polare di uno qualunque dei tre punti all' infinito della hessiana, sia costituita da tre rette ortogonali. Dunque secondo i resultati del §. 12. la nuova condizione da porsi è che

$$-\frac{\alpha_{222} + \alpha_{112}}{\alpha_{111} + \alpha_{122}}$$

sia una radice della (1) del §. precedente.

In questo caso le condizioni cercate sono quindi:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{111} & \alpha_{112} & \alpha_{122} \\ \alpha_{112} & \alpha_{112} & \alpha_{122} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} &-\alpha'_{111}(\alpha_{222}+\alpha_{112})^3+3\alpha'_{112}(\alpha_{222}+\alpha_{112})^2(\alpha_{111}+\alpha_{122}) - \\ &- 3\,\alpha'_{222}(\alpha_{222}+\alpha_{112})(\alpha_{111}+\alpha_{122})^2 + \\ &+ \alpha'_{222}(\alpha_{111}+\alpha_{122})^3 = 0 \end{aligned}$$

« *Esiste un sistema* ∞^7 *di cubiche i cui centri sono i vertici di un rombo* ».

46. *Quadrato.* — Perchè il problema sia possibile in questo caso, basta evidentemente associare le condizioni trovate per il rombo e per il rettangolo.

« *Esiste un sistema* ∞^6 *di cubiche i cui centri sono i vertici di un quadrato* ».

47. Consideriamo il caso in cui i quattro centri sono i vertici di un parallelogrammo. La conica diametrale principale è allora un' iperbole; le due parabole del fascio delle coniche diametrali sono costituite dalle due

coppie di lati opposti del parallelogrammo; l'iperbole che rappresenta la conica diametrale principale passa per il centro del parallelogrammo ed ha gli assintoti paralleli ai lati del parallelogrammo stesso e quindi è equilatera nel caso del rettangolo e del quadrato. Se una delle diagonali del parallelogrammo ha il suo punto all' infinito contemporaneamente sulla cubica e sulla hessiana essa è certamente la tangente di flesso della cubica in quel punto giacchè contiene il corrispondente del suo punto all' infinito considerato come appartenente alla hessiana; questa diagonale tangente di flesso della cubica è tangente cuspidale per la Cayleyana; la cuspide è il centro del parallelogrammo; l' altra diagonale è la polare armonica del flesso; quest'ultima è dunque un asse di simmetria quando il parallelogrammo dei centri è un rombo, o un quadrato (§. 4.), si può dunque dire che:

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una cubica i cui quattro centri sono i vertici di un rombo, o di un quadrato ammetta un asse di simmetria è che la Cayleyana abbia una cuspide nel centro del rombo, o del quadrato e per tangente cuspidale una delle diagonali* ».

48. Rimanendo sempre nella ipotesi in cui i quattro centri sono i vertici di un parallelogrammo, abbiamo già esaminato il caso in cui uno dei tre punti all' infinito della cubica è un flesso e abbiamo anche implicitamente dimostrato che quando questo avviene, il flesso deve essere il punto che sull' hessiana corrisponde al punto d'incontro delle diagonali del parallelogrammo e non può essere uno degli altri due punti dell' hessiana che si corrispondono

sulla retta all' infinito. Del resto, si può dimostrare direttamente che questo non può accadere.

Sia infatti A B C D il parallelogrammo dei centri e supponiamo che uno dei flessi della cubica sia situato in F corrispondente di G; la tangente di flesso deve passare per F e facendo parte della conica polare di questo punto deve passare anche per G cioè la retta all'infinito deve essere la tangente di flesso; facendo essa parte di una conica diametrale due centri sono situati su di essa e quindi non possono essere vertici di un parallelogrammo. Dunque i problemi dei §§. 42, 43, 44, 45, 46 non sono risolubili per le *parabole divergenti di Nenton*. Però in questo caso i centri si trovano con facilità. E infatti se r_∞ (Fig. IV.ª) è la tangente alla cubica nel flesso F; sopra r_∞ ci deve essere il corrispondente di F; sia C; la conica polare di C sarà formata da due rette parallele passanti per F; la conica polare di F è costituita da r_∞ e dalla polare armonica p passante per C. Dunque dei quattro centri due sono riuniti in F e due si trovano sulla polare armonica di F ai punti d'incontro con una qualunque delle coniche diametrali. Si può anche notare in questo caso che la retta all' infinito è una tangente cuspidale della Cayleyana; la cuspide è il punto C corrispondente al flesso F; l' hessiana ha un flesso in F e tocca la retta all' infinito in C.

49. Seguitiamo ad esaminare altri casi particolari. Supponiamo che l'hessiana sia tangente alla retta all'infinito in A. Il problema di situare i centri della cubica primitiva come vertici di un parallelogrammo non è neppure in questo caso risolubile e infatti applicando un teo-

rema che serve a determinare le posizioni dei quattro poli di nna tangente all'hessiana, si vede che dei quattro centri, due sono situati nel corrispondente di A e gli altri due nei due punti di contatto con la Cayleyana delle due rette costituenti la conica polare di A.

Se quindi l' hessiana è una parabola divergente; (A essendo il flesso all' infinito) dei quattro centri, tre si trovano nel punto d' incontro della tangente di flesso alla cubica in A con la polare armonica corrispondente e il quarto nel punto di contatto di quest' ultima con la Cayleyana.

Sulla Cayleyana si trovano dunque in questo caso i quattro centri della cubica e tre di essi riuniti nella cuspide che corrisponde al flesso A della cubica primitiva e dell' hessiana.

50. Cerchiamo le posizioni dei centri quando la cubica possiede un nodo all' infinito.

Allora una delle coniche diametrali è costituita dalla coppia di rette parallele che sono le tangenti nodali; i quattro centri dovendo appartenere a queste due rette, ne avremo uno su di ognuna a distanza finita; gli altri due cadranno nel nodo.

Se la cubica invece di un nodo possiede una cuspide all' infinito e la tangente cuspidale non è la retta all'infinito; la curva possiede un' altro punto reale all' infinito distinto dalla cuspide. Questo punto non può essere un flesso altrimenti la sua conica polare dovrebbe essere costituita da due rette passanti per la cuspide e una di esse dovendo essere la tangente di flesso, la retta all'infinito sarebbe questa tangente e incontrerebbe in più di tre punti la cubica.

« *Una cubica non può contemporaneamente avere all' infinito un flesso e una cuspide senza spezzarsi* ».

51. Facciamo finalmente il caso in cui la cubica possegga una cuspide a distanza finita. Tutte le coniche polari e quindi tutte le coniche diametrali si toccano nella cuspide avendo ivi per tangente comune la tangente cuspidale. Dei quattro centri, due sono nella cuspide; l'hessiana si spezza in tre rette passanti per la cuspide; due di queste rette coincidono con la tangente cuspidale.

Se si prende il vertice (0 ; 0 ; 1) del triangolo fondamentale nella cuspide e il lato $x_1 = 0$ per tangente cuspidale, l' equazione della cubica può mettersi sotto la forma:

$$x_1^2 \, x_3 + a_3 = 0$$

L' equazione della conica diametrale di un punto di parametro λ è

$$x_1^2 \left(\alpha_{111} \lambda + \alpha_{112} \right) + x_2^2 \left(\alpha_{122} \lambda + \alpha_{222} \right) +$$
$$+ 2 \, x_1 \, x_2 \left(\alpha_{112} \lambda + \alpha_{122} \right) + 4 \lambda \, x_1 \, x_3 = 0$$

Il discriminante si riduce a:

$$- 4 \lambda^2 \left(\alpha_{122} \lambda + \alpha_{222} \right)$$

che si annulla due volte nel vertice (0 ; 1 ; 0) del triangolo fondamentale cioè nel punto all' infinito della tangente cuspidale, come del resto è naturale, perchè tutti i punti di questa tangente sono doppi per l'hessiana. Dunque; delle tre coniche diametrali che si spezzano due coincidono e sono costituite dalle due rette :

$$\alpha_{112}\, x_1^2 + 2\, \alpha_{122}\, x_1\, x_2 + \alpha_{222}\, x_2^2 = 0$$

passanti per la cuspide; l' altra è costituita dalle due :

$$x_1 = 0 \;;\; x_1 \left\{ \alpha_{111}\, \alpha_{222} - \alpha_{112}\, \alpha_{122} \right\} +$$

$$+ 2\, x_2 \left\{ \alpha_{112}\, \alpha_{222} - \alpha_{112}\, \alpha_{122} \right\} + 2\, \alpha_{222}\, x_3 = 0.$$

In questo caso i centri sono i puuti comuni alle tre rette :

$$\alpha_{112}\, x_1^2 + 2\, \alpha_{122}\, x_1\, x_2 + \alpha_{222}\, x_2^2 = 0$$

$$x_1 \left\{ \alpha_{111}\, \alpha_{222} - \alpha_{112}\, \alpha_{222} \right\} +$$

$$+ 2\, x_2 \left\{ \alpha_{112}\, \alpha_{222} - \alpha_{112}\, \alpha_{122} \right\} + 2\, \alpha_{222}\, x_3 = 0.$$

Assi di simmetria.

52. Particolarizzando per una cubica i resultati ottenuti ai §§. 4, 5, 6, per le curve di grado dispari in generale abbiamo i teoremi seguenti :

« *La condizione necessaria sufficiente perchè una* *cubica possegga un asse di simmetria è che abbia un flesso all' infinito che sia il coniugato armonico del punto all' infinito della polare armonica del flesso rispetto alla coppia dei punti ciclici del piano ».*

« *Questa polare armonica è l' asse richiesto* ».

« *Data una retta*

$$(1) \qquad x_2 = m\, x_1 + n\, x_3$$

e una cubica

$$a_x^3 = 0$$

le condizioni che debbono essere soddisfalte perchè la retta (1) *sia un asse di simmetria della cubica sono:*

$$a_{\alpha^{(1)}}\; a^2_{\alpha^{(2)}} = 0 \quad ; \quad a_{\alpha^{(1)}}\; a^2_{\alpha^{(3)}} = 0 \quad ;$$

$$a_{\alpha^{(1)}}\; a_{\alpha^{(2)}}\; a_{\alpha^{(3)}} = 0 \quad ; \quad a^3_{\alpha^{(1)}} = 0$$

dove :

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = \alpha_3^{(3)} = 1 \quad ; \quad \alpha_3^{(1)} = \alpha_3^{(2)} = 0$$

$$\alpha_1^{(3)} = -\, m\, n \quad ; \quad \alpha_2^{(3)} = n \quad ; \quad \alpha_1^{(2)} = -\, \alpha_2^{(1)} = -\, m \text{ ».}$$

« *Tutte le cubiche simmetriche rispetto a una medesima retta costituiscono un sistema lineare* ∞^5 ».

53. Quando si sappia che la cubica possiede un flesso

all' infinito e si conosca il parametro $\lambda = \frac{m}{n}$ che individua il flesso sulla retta all' infinito, il problema precedente si risolve con grande semplicità.

E infatti l' equazione della tangente di flesso sarà della forma:

$$n\, x_1 - m\, x_2 + p\, x_3 = 0$$

dove p sarà da determinarsi in modo che fra tutte le rette parallele che rappresenta la equazione precedente; quando in essa m ed n sono costanti e p varia da retta, a retta; l'equazione precedente rappresenti la tangente di flesso. Supponiamo che ciò avvenga per il valore p' di p. Allora l' equazione della cubica può mettersi sotto la forma:

$$\left\{ n\, x_1 - m\, x_2 + p'\, x_3 \right\} \times$$
$$\times \left\{ a\, x_1^2 + b\, x_2^2 + c\, x_3^2 + 2\, h\, x_1\, x_2 + 2\, g\, x_1 x_3 + 2\, f\, x_2\, x_3 \right\} = k\, x_3^3$$

La conica polare del punto $(m\, ;\, n\, ;\, o)$ è:

$$\left\{ n\, x_1 - m\, x_2 + p'\, x_3 \right\} \times$$
$$\times \left\{ x_1\, (a\, m + h\, n) + x_2\, (h\, m + b\, n) + x_3\, (g\, m + f\, n) \right\} = 0$$

che si spezza naturalmente nella tangente di flesso:

$$n\, x_1 - m\, x_2 + p'\, x_3 = 0$$

e nella polare armonica corrispondente:

$$x_1\,(a\, m + h\, n) + x_2\,(h\, m + b\, n) + x_3\,(g\, m + f\, n) = 0$$

Se il triangolo fondamentale è stato preso rettangolo nel vertice (0 ; 0 ; 1) si passa alle coordinate cartesiane ortogonali supponendo $x_3 = 1$ e affinchè le due rette precedenti siano ortogonali deve essere

$$m\, n\,(a - b) - h\,(m^2 - n^2) = 0$$

La condizione cercata è dunque che fra il parametro λ del flesso all' infinito e i coefficienti a ; b ; h passi la relazione

$$\lambda^2 - \lambda\,\frac{a-b}{h} - 1 = 0$$

quando però l'equazione della cubica in coordinate cartesiane x e y sia ridotta della forma:

$$(x - \lambda\, y + p)\,(a\, x^2 + b\, y^2 + 2\, h\, x\, y + 2\, g\, x + 2\, f\, y + c) = h$$

I valori di λ tratti dalla equazione:

$$\lambda^2 - \lambda\,\frac{a-b}{h} - 1 = 0$$

son sempre reali perchè il discriminante è sempre positivo; questi valori sono indeterminati quando

$$a = b \quad ; \quad h = 0$$

cioè quando la ternaria quadratica; che entra nella equazione della cubica; uguagliata a zero rappresenta un cerchio. In questo caso la cubica è ciclica, cioè passa per i punti ciclici del piano: qualunque sia λ l'equazione:

$$h \lambda^2 - (a - b) \lambda - h = 0$$

è soddisfatta; dunque:

« *La condizione necessaria e sufficiente affinché una cubica ciclica abbia una retta di simmetria è che abbia un flesso all' infinito* ».

54. Se la tangente di flesso è la retta all' infinito, la cubica è una parabola divergente. Prendendo il flesso nel vertice $(0 ; 1 ; 0)$ del triangolo fondamentale, l'equazione della cubica può scriversi:

$$x_3 \left\{ a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 + 2 h x_1 x_2 + 2 g x_1 x_3 + 2 f x_2 x_3 \right\} = k x_1^3$$

la conica polare del punto $(0 ; 1 ; 0)$ è

$$x_3 \left\{ h x_1 + b x_2 + f x_3 \right\} = 0$$

che si spezza nella tangente di flesso $x_3 = 0$ e nella polare armonica corrispondente:

$$h\,x_1 + b\,x_2 + f\,x_3 = 0$$

Questa deve essere perpendicolare alle rette che hanno la direzione del flesso e per esempio alla

$$x_1 = 0$$

Se quindi il triangolo fondamentale è stato preso rettangolo in (0 ; 0 ; 1), e si passa alle coordinate cartesiane x ; y ponendo $x_3 = 1$, la condizione affinchè le due rette

$$h\,x + b\,y + f = 0 ; \qquad x = 0$$

siano ortogonali è $h=0$. Si giunge alla stessa conclusione ponendo il flesso nel vertice (1 ; 0 ; 0).

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una cubica parabola divergente ammetta una retta di simmetria è che preso per punto all' infinito di un asse di un sistema cartesiano ortogonale il flesso, l' equazione della cubica manchi del prodotto delle due variabili* x, y ».

55. Abbiamo già dàto al §. 37. la forma delle equazioni di cubiche simmetriche. Vogliamo ora mostrare come si possano riconoscere le diverse forme che può avere qualcuna di quelle curve. Fra di esse le più notevoli sono quelle simmetriche rispetto a tre assi reali. Vediamo come si possano classificare relativamente alla forma e al numero dei rami che le compongono.

Riferendo la curva a un sistema cartesiano ortogonale di cui l' asse delle x sia un asse di simmetria e l' origine il punto comune agli assi reali l' equazione di queste curve è della forma §. 37:

$$x^3 - 3\,x\,y^2 + \lambda\,(\,x^2 + y^2\,) + \mu = 0$$

essendo λ e μ i parametri che servono a individuare la curva.

L' equazioni dei tre assi sono:

$$y = 0 \quad ; \quad y = x\sqrt{3} \quad ; \quad y = -\,x\sqrt{3}$$

La curva ha tre flessi all' infinito nelle direzioni perpendicolari ai tre assi. Se si assume per triangolo fondamentale quello formato dagli assi cartesiani e dalla retta all' infinito, le coordinate dei flessi sono:

$$(0\,;\,1\,;\,0) \quad ; \quad (\sqrt{3}\,,\,1\,;\,0) \quad ; \quad (-\sqrt{3}\,;\,1\,;\,0)$$

le equazioni degli asintoti:

$$x = \frac{\lambda}{3} \quad ; \quad x - \sqrt{3}\,y + \frac{2}{3}\lambda = 0 \quad ; \quad x + \sqrt{3}\,y + \frac{2}{3}\lambda = 0$$

Essi formano un triangolo equilatero i cui vertici stanno sugli assi di simmetria; le coordinate dei vertici sono :

$$\left(\frac{\lambda}{3}\,;\,\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)\;;\;\left(\frac{\lambda}{3}\,;-\frac{\lambda}{\sqrt{3}}\right)\;;\;\left(-\frac{2\lambda}{\sqrt{3}}\,;0\right)$$

« *Tutte le cubiche simmetriche rispetto ai tre medesimi assi costituiscono una rete. In questa rete sono immersi gli infiniti fasci ognuno dei quali è formato da tutte quelle cubiche che oltre avere comuni gli assi di simmetria, hanno anche comuni gli asintoti. I nove punti base di ogni fascio si raggruppano a tre, a tre nei flessi all' infinito* ».

56. Per esaminare a quali forme diverse di curve può dar luogo la equazione del §. precedente, osserveremo che le intersezioni della cubica con la retta all' infinito sono reali e quindi la curva avrà sempre rami estendentesi indefinitamente, nè potrà essere costituita da un solo ramo tutto situato a distanza finita. Inoltre è noto che una curva di genere p possiede $p+1$ rami al massimo; dunque la nostra cubica potrà essere costituita da uno, o da due rami. In ognuno di questi casi dovrà sempre esistere un ramo esteso indefinitamente in tre direzioni. Quindi nel 1.° caso la curva possiederà questo sol ramo (Fig. 1.ª e 2.ª); nel 2.° questo ramo insieme ad un altro chiuso, simmetrico rispetto ai tre assi e perciò non avente flessi altrimenti una tangente di flesso incontra in più di tre punti la cubica; questo 2.° ramo sarà dunque un' ovale simmetrica rispetto ai tre assi e situata internamente al triangolo degli asintoti. Il ramo infinito può essere di due specie a seconda che incontra in tre punti reali, o in uno ogni perpendicolare agli assi.

Nel 1.° caso lo chiameremo ramo infinito di 1.ª specie; nel 2.° ramo infinito di 2.ª specie.

57. Esaminiamo ora se esistono condizioni analitiche a cui debbono soddisfare i parametri λ ; μ corrispondenti a questi diversi casi.

1.° *Caso.* — « *La curva è costituita da un sol ramo infinito* » (Fig. 1.ª e 2.ª).

La condizione analitica corrispondente si trova esprimendo che l' asse delle x incontri la curva in un sol punto reale, ossia che l' equazione:

$$x^3 + \lambda x^2 + \mu = 0 \tag{1}$$

abbia una sola radice reale. Ora il suo discriminante è

$$\mu \left(\frac{4}{27} \lambda^3 + \mu \right)$$

Se dunque si pone

$$4 \lambda^3 + 27 \mu = \Delta$$

la condizione richiesta è che $\Delta \mu$ sia positivo. Per distinguere ulteriormente il ramo infinito di 1.ª specie da quello di 2.ª specie occorre osservare che nel 1.° caso l' equazione

$$\lambda y^2 + \mu = 0$$

che dà le intersezioni (le due che sono a distanza finita) dell' asse delle y con la curva debbono essere reali (Fig. 2.ª); nel 2.° immaginarie (Fig. 1.ª) nel 1.° caso si richiederà quindi che $\lambda\,\mu$ sia negativo, positivo nel 2.°

2. *Caso.* — « *La curva oltre il ramo infinito possiede anche l' ovale* » (Fig. 6.ª).

L' equazione (1) del caso precedente possiede allora tre radici reali e quindi

$$\Delta\,\mu < 0$$

Il ramo infinito non può essere in questo caso di 1.ª specie altrimenti l' asse delle y avrebbe con la curva più di tre punti a comune.

58. Se $\Delta = 0$ la curva si spezza in tre rette; se $\lambda = 0$ il discriminante della (1) è positivo e quindi si ha un ramo infinito di 2.ª specie; se finalmente si annulla μ la curva possiede un punto isolato all'origine e il rimanente è un ramo infinito di seconda specie.

Possiamo riunire questa discussione nel seguente quadro:

- $\lambda \lessgtr 0$
  - $\Delta\mu > 0$
    - $\lambda\mu < 0$
      - **Un ramo infinito di 1.ª specie**
      - *Es.*: ($\lambda = -1$; $\mu = 1$) *Fig.* 2.ª
    - $\lambda\mu > 0$
      - **Un ramo infinito di 2.ª specie**
      - *Es.*: ($\lambda = 1$; $\mu = 1$) *Fig.* 1.ª
  - $\Delta\mu < 0$
    - **Un ramo infinito di 2.ª specie e un'ovale**
    - *Es.*: ($\lambda = 3$; $\mu = -1$) *Fig.* 6.ª
  - $\Delta\mu = 0$
    - $\Delta = 0$
      - **La curva si spezza in tre rette**
      - *Es.*: ($\lambda = -3$; $\mu = 4$)
    - $\mu = 0$
      - **Un punto isolato all'origine e un ramo infinito di 2.ª specie**
      - *Es.*: ($\lambda = 1$; $\mu = 0$)
- $\lambda = 0$
  - **Un ramo infinito di 2.ª specie**
  - *Es.*: ($\lambda = 0$; $\mu = 1$) *Fig.* 1.ª

Applicazione dei risultati generali al caso particolare delle quartiche.

Linee diametrali.

59. L' equazione di una quartica può porsi sotto la forma:

$$U_x = a_0\, x_3^4 + 4\, a_1\, x_3^3 + 6\, a_2\, x_3^2 + 4\, a_3\, x_3 + a_4 = 0$$

dove le a sono binarie in x_1 ; x_2 di grado uguale al loro indice:

$$a_4 = \alpha_{1111}\, x_1^4 + 4\, \alpha_{1112}\, x_1^3\, x_2 + 6\, \alpha_{1122}\, x_1^2\, x_2^2 +$$
$$+ 4\, \alpha_{1222}\, x_1\, x_2^3 + \alpha_{2222}\, x_2^4$$
$$a_3 = \beta_{111}\, x_1^3 + 3\, \beta_{112}\, x_1^2\, x_2 + 3\, \beta_{122}\, x_1\, x_2^2 + \beta_{222}\, x_2^3$$
$$a_2 = \gamma_{11}\, x_1^2 + 2\, \gamma_{12}\, x_1\, x_2 + \gamma_{22}\, x_2^2$$
$$a_1 = \delta_1\, x_1 + \delta_2\, x_2$$

L' equazione della cubica diametrale di un punto (y_1 ; y_2 ; 0) è:

$$y_1 \frac{\partial U_x}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial U_x}{\partial x_2} = 0$$

ossia

$$x_1^3 \left\{ \alpha_{1111}\, y_1 + \alpha_{1112}\, y_2 \right\} + x_2^3 \left\{ \alpha_{1222}\, y_1 + \alpha_{2222}\, y_2 \right\} +$$

$$+ x_3^3 \left\{ \delta_1\, y_1 + \delta_2\, y_2 \right\} + 3\, x_1^2\, x_2 \left\{ \alpha_{1112}\, y_1 + \alpha_{1122}\, y_2 \right\} +$$

$$+ 3\, x_1\, x_2^2 \left\{ \alpha_{1122}\, y_1 + \alpha_{1222}\, y_2 \right\} + 3\, x_1^2\, x_3 \left\{ \beta_{111}\, y_1 + \beta_{112}\, y_2 \right\} +$$

$$+ 3\, x_1\, x_3^2 \left\{ \gamma_{11}\, y_1 + \gamma_{12}\, y_2 \right\} + 3\, x_2^2\, x_3 \left\{ \beta_{122}\, y_1 + \beta_{222}\, y_2 \right\} +$$

$$+ 3\, x_2\, x_3^2 \left\{ \gamma_{12}\, y_1 + \gamma_{22}\, y_2 \right\} + 6\, x_1\, x_2\, x_3 \left\{ \beta_{112}\, y_1 + \beta_{122}\, y_2 \right\} = 0$$

« *Tutte le cubiche diametrali formano un fascio i cui 9 punti base sono i 9 centri della quartica e costituiscono insieme la* 1.ª *linea diametrale principale che è di ordine zero* ».

Per un punto $(m\ ;\ n\ ;\ p)$ del piano passa una sola cubica diametrale; il parametro λ corrispondente è dato dalla equazione:

$$\lambda \left\{ \alpha_{1111} m^3 + \alpha_{1222} n^3 + \delta_1 p^3 + 3 m^2 n \alpha_{1112} + \right.$$
$$+ 3 m n^2 \alpha_{1122} + 3 m^2 p \beta_{111} + 3 m p^2 \gamma_{11} +$$
$$\left. + 3 n^2 p \beta_{122} + 3 n p^2 \gamma_{12} + 6 m n p \beta_{112} \right\} +$$
$$+ \alpha_{1112} m^3 + \alpha_{2222} n^3 + \delta_2 p^3 + 3 m^2 n \alpha_{1122} +$$
$$+ 3 m n^2 \alpha_{1222} + 3 m^2 p \beta_{112} + 3 m p^2 \gamma_{12} +$$
$$+ 3 n^2 p \beta_{222} + 3 n p^2 \gamma_{22} + 6 m n p \beta_{122} = 0$$

60. L'equazione della conica diametrale di un punto $(y_1 ; y_2 ; 0)$ è:

$$\left[\left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial y_3} \right)^2 U_y \right]_{y_3=0} = 0$$

Ovvero:

$$x_1^2 \left\{ \alpha_{1111} y_1^2 + 2 \alpha_{1112} y_1 y_2 + \alpha_{1122} y_2^2 \right\} +$$
$$+ x_2^2 \left\{ \alpha_{1122} y_1^2 + 2 \alpha_{1222} y_1 y_2 + \alpha_{2222} y_2^2 \right\} +$$
$$+ x_3^2 \left\{ \gamma_{11} y_1^2 + 2 \gamma_{12} y_1 y_2 + \gamma_{22} y_2^2 \right\} +$$
$$+ 2 x_1 x_2 \left\{ \alpha_{1112} y_1^2 + 2 \alpha_{1122} y_1 y_2 + \alpha_{1222} y_2^2 \right\} +$$
$$+ 2 x_1 x_3 \left\{ \beta_{111} y_1^2 + 2 \beta_{112} y_1 y_2 + \beta_{122} y_2^2 \right\} +$$
$$+ 2 x_2 x_3 \left\{ \beta_{112} y_1^2 + 2 \beta_{122} y_1 y_2 + \beta_{222} y_2^2 \right\} = 0$$

Per un punto (m ; n ; p) del piano passano due coniche diametrali.

I parametri dei punti all' infinito di cui esse sono coniche diametrali sono le due radici della quadratica:

$$\lambda^2 \left\{ \alpha_{1111}\, m^2 + \alpha_{1122}\, n^2 + \gamma_{11}\, p^2 + \right.$$

$$\left. + 2\, m\, n\, \alpha_{1112} + 2\, m\, p\, \beta_{111} + 2\, n\, p\, \beta_{112} \right\} +$$

$$+ 2\, \lambda \left\{ \alpha_{1112}\, m^2 + \alpha_{1222}\, n^2 + \gamma_{12}\, p^2 + \right.$$

$$\left. + 2\, m\, n\, \alpha_{1122} + 2\, m\, p\, \beta_{112} + 2\, n\, p\, \beta_{122} \right\} +$$

$$+ \alpha_{1122}\, m^2 + \alpha_{2222}\, n^2 + \gamma_{22}\, p^2 +$$

$$+ 2\, m\, n\, \alpha_{1222} + 2\, m\, p\, \beta_{122} + 2\, n\, p\, \beta_{222} = 0$$

Se s' indica con U il coefficiente di λ^2; con V quello di $2\,\lambda$ e con W quello indipendente, l' equazione della conica diametrale di un punto di parametro λ assume la forma

$$\lambda^2\, U + 2\, \lambda\, V + W = 0$$

dove

$$U = 0 \quad ; \quad V = 0 \quad ; \quad W = 0$$

Allora da questa equazione e dai resultati generali ottenuti ai §§. 2. e 3. resulta:

« *La seconda linea diametrale principale è una quartica* ».

Essa può riguardarsi:

1.° *Come il luogo dei centri delle cubiche diametrali ordinarie ;*

2.° *Come il luogo dei punti le cui coniche polari sono parabole;*

3.° *Come l' inviluppo delle coniche diametrali ordinarie* ».

L' equazione di questa curva è

$$U\,W - V^2 = 0$$

« *Sei coniche diametrali si spezzano ognuna in due rette. Queste* 12 *rette sono* 12 *bitangenti della seconda linea diametrale principale* ».

Per uno qualunque dei sei punti doppi P_i delle coniche diametrali passano le quattro seguenti curve:

1.° *La terza linea diametrale principale*;

2.° *La steineriana della quartica primitiva*;

3.° *La jacobiana della rete di coniche individuata dalle tre* U ; V ; W;

4.° *L'hessiana della cubica diametrale del punto all'infinito la cui conica diametrale ha per punto doppio il punto* P_i.

La jacobiana della rete individuata da U ; V ; W contiene pure i tre punti diagonali di ogni quadrangolo determinato dai quattro centri di ogni cubica diametrale.

Le sei coppie di rette in cui si spezzano le coniche diametrali essendo bitangenti della quartica :

$$U\,W - V^2 = 0$$

sono anche tangenti semplici della Cayleyana della rete individuata da U ; V ; W.

I sei valori di λ che annullano il discriminante di

$$\lambda^2\,U + 2\,\lambda\,V + W = 0$$

sono i sei parametri dei sei punti all' infinito dell' hessiana della quartica primitiva. Se quindi dai sei punti P_i si tirano delle rette che abbiano per parametri dei punti all'infinito i corrispondenti sei valori di λ suddetti, si otterranno sei tangenti della Cayleyana della quartica data.

La jacobiana della rete individuata da U ; V ; W incontra la seconda linea diametrale principale in 12 punti; esistono dunque 12 coniche diametrali ognuna delle quali ha a comune con questa linea un quadri-punto e due bi-punti: ma ogni quaderna di punti di contatto di una conica diametrale con la seconda linea diametrale principale; costituisce quattro centri di una cubica diametrale e se due di questi centri coincidono la cubica è cuspidale ; d' altra parte nel fascio delle cubiche diametrali ve ne sono 12 e non più con un punto doppio, dunque se ne conclude che :

« *Tutte le cubiche diametrali di genere zero sono cuspidali* » .

61. **La terza linea diametrale principale e l'ipocicloide di Steiner.**

Fra tutte le linee diametrali di una quartica, la più notevole è la terza linea diametrale principale. Secondo i resultati generali questa linea può riguardarsi:

1.° *Come il luogo dei centri delle coniche diametrali ordinarie;*

2.° *Come il luogo dei punti le cui cubiche polari toccano la retta all' infinito;*

3.° *Come l' inviluppo dei diametri.*

Questa curva è del 4.° ordine e di 3.ª classe; possiede quindi tre cuspidi e una bitangente. Si presenta perciò naturalmente la questione di ricercare se essa può essere un ipocicloide di Steiner.

Vediamo intanto come si possa trovarne l'equazione. Ponendo

$$b_0 = \alpha_{1111}\, x_1 + \alpha_{1112}\, x_2 + \beta_{111}\, x_3$$

$$b_1 = \alpha_{1112}\, x_1 + \alpha_{1122}\, x_2 + \beta_{112}\, x_3$$

$$b_2 = \alpha_{1122}\, x_1 + \alpha_{1222}\, x_2 + \beta_{122}\, x_3$$

$$b_3 = \alpha_{1222}\, x_1 + \alpha_{2222}\, x_2 + \beta_{222}\, x_3$$

il diametro di un punto $(y_1 ; y_2 ; 0)$ è

$$(1) \quad b_0\, y_1^3 + 3\, b_1\, y_1^2\, y_2 + 3\, b_2\, y_1\, y_2^2 + b_3\, y_2^3 = 0$$

Resulta intanto che per un punto P del piano passano tre diametri della quartica. Si ritrova così che la curva di cui si cerca l' equazione è di 3.ª classe.

D' altra parte essa fa certamente parte del luogo di un punto P tale che coincidano due dei tre diametri della curva che passano per esso. Siano l ; m ; n questi diametri.

Due di queste tre rette; per esempio l ; m possono coincidere per due ragioni diverse; o perchè un polo di l e uno di m coincidono in uno stesso punto all'infinito e allora il luogo del punto P è l'inviluppo dei diametri; o perchè due poli di l sono situati all' infinito (coincidenti, o no); in quest'ultimo caso il luogo del punto P costituisce l' insieme delle bitangenti dell' inviluppo precedente.

È per questo che quando si annulla il discriminante della binaria (1) in y_1 , y_2 si ottiene una equazione cui soddisfa il solo inviluppo, ma non l' insieme delle sue bitangenti, quantunque tanto per un punto di una bitangente quanto per un punto dell' inviluppo passino due diametri coincidenti della quartica.

L' equazione dell' inviluppo è dunque:

$$P_x = b_0^2 b_3^2 - 6 b_0 b_1 b_2 b_3 + 4 b_1^3 b_3 + 4 b_0 b_2^3 - 3 b_1^2 b_2^2 = 0$$

cioè una curva del 4.° ordine.

L' equazione precedente può anche porsi sotto la forma di determinante:

$$P_x = \begin{vmatrix} b_0 & 2 b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & 2 b_1 & b_2 \\ b_1 & 2 b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_1 & 2 b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

62. Se si annulla identicamente l' hessiano della binaria (1) si ottengono le condizioni che devono essere soddisfatte affinchè le tre radici della (1) nel rapporto $\frac{y_1}{y_2}$ siano coincidenti. Queste condizioni sono le seguenti:

$$\frac{b_0}{b_1} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2}{b_3}.$$

Dunque i tre punti comuni alle tre coniche:

$$U_x = b_0\, b_2 - b_1^2 = 0$$

$$V_x = b_0\, b_3 - b_1\, b_2 = 0$$

$$W_x = b_1\, b_3 - b_2^2 = 0$$

saranno tali che i tre diametri l ; m ; n passanti per ognuno di essi coincideranno perchè un polo di l; uno di m; e uno di n sono riuniti in un sol punto all' infinito. È per questo che le tre coniche precedenti non passano per i punti di contatto della bitangente quantunque ognuno di questi punti sia tale che coincidano in una sola retta i tre diametri della quartica passanti per esso: questa coincidenza avviene ivi perchè due poli di l sono all' infinito non coincidenti e un polo del diametro rimanente m coincide con uno dei poli di l all' infinito.

Le tre coniche u_x ; v_x ; w_x passano per le tre cuspidi della quartica P_x. Gli altri due punti in cui v_x incontra u_x e w_x sono quelli in cui P_x è toccato dalle rette b_0 , b_3 e anche appartengono il primo alla retta b_1; il secondo alla retta b_2.

Il punto comune a u_x e w_x non giacente su v_x sta sulle rette b_1 e b_2 contemporaneamente ma non appartiene a P_x.

Queste proprietà si verificano direttamente sulle equazioni di u_x ; v_x ; w_x e su quella di P_x la quale può anche scriversi sotto la forma :

$$v_x(b_0 b_3 - 4 b_1 b_2) + 4 (b_1^2 w_x - b_2^2 u_x) = 0 .$$

63. Se si sostituiscono per b_0 ; b_1 ; b_2 ; b_3 i loro valori si trova:

$$\begin{aligned} u_x = x_1^2 & \left\{ \alpha_{1111} \alpha_{1122} - \alpha^2_{1112} \right\} + x_2^2 \left\{ \alpha_{1112} \alpha_{1222} - \alpha^2_{1122} \right\} + \\ & + x_3^2 \left\{ \beta_{111} \beta_{122} - \beta^2_{112} \right\} + x_1 x_2 \left\{ \alpha_{1111} \alpha_{1222} - \alpha_{1112} \alpha_{1122} \right\} + \\ & + x_1 x_3 \left\{ \alpha_{1111} \beta_{122} + \alpha_{1122} \beta_{111} - 2\alpha_{1122} \beta_{112} \right\} + \\ & + x_2 x_3 \left\{ \alpha_{1112} \beta_{122} + \beta_{122} \alpha_{1222} - 2\alpha_{1122} \beta_{112} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_x = x_1^2 & \left\{ \alpha_{1112} \alpha_{1222} - \alpha^2_{1122} \right\} + x_2^2 \left\{ \alpha_{1122} \alpha_{2222} - \alpha^2_{1222} \right\} + \\ & + x_3^2 \left\{ \beta_{112} \beta_{222} - \beta^2_{122} \right\} + x_1 x_2 \left\{ \alpha_{1112} \alpha_{2222} - \alpha_{1122} \alpha_{1222} \right\} - \\ & + x_1 x_3 \left\{ \alpha_{1112} \beta_{222} + \alpha_{1222} \beta_{112} - 2\alpha_{1122} \beta_{122} \right\} + \\ & + x_2 x_3 \left\{ \alpha_{1122} \beta_{222} + \alpha_{2222} \beta_{112} - 2\alpha_{1222} \beta_{122} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Segue per i resultati del §. 49. che le due coniche:

$$u_x = 0 \quad ; \quad w_x = 0$$

coincidono con le coniche diametrali principali delle due cubiche:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ a_4 + a_3 x_3 \right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ a_4 + a_3 x_3 \right\} = 0$$

onde ogni cuspide della quartica P_x è centro comune a due delle coniche diametrali ordinarie delle cubiche precedenti.

64. È noto che la caratteristica della ipocicloide steineriana è di toccare la retta all'infinito nei punti ciclici del piano. Se dunque riesciamo a trovare le condizioni analitiche che debbono essere soddisfatte affinchè la bitangente della quartica tricuspidale P_x sia la retta all'infinito e i punti di contatto sieno i punti ciclici, i diametri della quartica primitiva invilupperanno l' ipocicloide suddetta.

Ora le condizioni perchè una curva di grado n pari tocchi $\frac{n}{2}$ volte la retta all' infinito nei punti ciclici sono state trovate in generale al §. 7. e chiamammo allora ipercicliche le curve che godevano questa proprietà.

Nel caso nostro queste condizioni si riducono a che la binaria biquadratica in x_1 ; x_2 che entra nell' equazione della curva sia la potenza seconda, a meno di un coefficiente esterno, di

$$x_1^2 + x_2^2.$$

Se quindi s'indicano con A_{1111} ; A_{1112} ; . . . , i coefficienti di questa binaria nella equazione di P_x dovremo avere:

$$A_{1111} = A_{2222} = \frac{1}{2} A_{1122}$$

$$A_{1112} = A_{1222} = 0$$

Ma la binaria biquadratica in x_1 ; x_2 nell' equazione di P_x è evidentemente il determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1111} x_1 + \alpha_{1112} x_2 ; & 2(\alpha_{1112} x_1 + \alpha_{1122} x_2) ; & \alpha_{1122} x_1 + \alpha_{1222} x_2 ; & 0 \\ 0 ; & \alpha_{1111} x_1 + \alpha_{1112} x_2 ; & 2(\alpha_{1112} x_1 + \alpha_{1122} x_2) ; & \alpha_{1122} x_1 + \alpha_{1222} x_2 \\ \alpha_{1112} x_1 + \alpha_{1122} x_2 ; & 2(\alpha_{1122} x_1 + \alpha_{1222} x_2) ; & \alpha_{1222} x_1 + \alpha_{2222} x_2 ; & 0 \\ 0 ; & \alpha_{1112} x_1 + \alpha_{1122} x_2 ; & 2(\alpha_{1122} x_1 + \alpha_{1222} x_2) ; & \alpha_{1222} x_1 + \alpha_{2222} x_2 \end{vmatrix}$$

Le condizioni richieste sono dunque le quattro seguenti :

$$2 \begin{vmatrix} \alpha_{1111} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1122} & 0 \\ 0 & \alpha_{1111} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1122} \\ \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} \\ \alpha_{1122} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{2222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1122} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{2222} \end{vmatrix} =$$

$$
= \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_{1111} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1111} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} \\ \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{2222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{2222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1122} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1122} \\ \alpha_{1122} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1122} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} \end{vmatrix} + \right.
$$

$$
+ \begin{vmatrix} \alpha_{1111} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1122} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1222} \\ \alpha_{1112} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1122} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{2222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{1112} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1111} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1122} \\ \alpha_{1122} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{2222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{1222} \end{vmatrix} +
$$

$$
\left. + \begin{vmatrix} \alpha_{1111} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1122} \\ \alpha_{1112} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{2222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1122} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{1222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{1112} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1122} & 0 \\ 0 & \alpha_{1111} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1222} \\ \alpha_{1122} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{2222} \end{vmatrix} \right\} ;
$$

$$
\begin{vmatrix} \alpha_{1111} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1122} & 0 \\ 0 & \alpha_{1111} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1222} \\ \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{2222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{1111} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1111} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1122} \\ \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{2222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{1222} \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \begin{vmatrix} \alpha_{1111} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1122} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1122} \\ \alpha_{1112} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1122} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{2222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{1112} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1122} & 0 \\ 0 & \alpha_{1111} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1122} \\ \alpha_{1122} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} \end{vmatrix} =
$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{1111} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} \\ \alpha_{1112} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{2222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1122} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{2222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{1112} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1111} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{1222} \\ \alpha_{1122} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{2222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{2222} \end{vmatrix} -$$

$$+ \begin{vmatrix} \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1122} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1112} & \alpha_{1222} \\ \alpha_{1122} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1122} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{2222} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1112} & 2\alpha_{1122} & \alpha_{1122} \\ \alpha_{1122} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{2222} & 0 \\ 0 & \alpha_{1122} & 2\alpha_{1222} & \alpha_{1222} \end{vmatrix} = 0$$

« *Esiste un sistema* ∞^{10} *di quartiche tali che il luogo dei centri delle loro coniche diametrali é l'ipocicloide di Steiner; ovvero tali che ogni loro diametro è la retta che unisce i piedi delle perpendicolari abbassate da un punto qualunque di un determinato cerchio del piano sopra i lati di un triangolo iscritto nel cerchio* ».

65. C' è un caso assai semplice in cui le condizioni precedenti sono soddisfatte.

Se nelle equazioni trovate poniamo:

$$\alpha_{1112} = \alpha_{1222} = 0$$

si ottiene:

$$\alpha_{1111} = \alpha_{2222} = 3\,\alpha_{1122}$$

cioè anche nella equazione della quartica primitiva U_x la binaria biquadratica in x_1 ; x_2 è il quadrato di $x_1^2+x_2^2$; o altrimenti anche U_x tocca la retta all'infinito nei punti ciclici .

Possiamo dunque dare quest' altra generazione dell' ipocicloide di Steiner:

« *Essa è il luogo dei centri delle coniche diametrali ordinarie, o l'inviluppo dei diametri di una quartica di terzo genere bitangente alla retta all'infinito nei punti ciclici del piano della quartica* ».

66. I diametri di questa curva potranno quindi accoppiarsi in modo che quelli di ciascuna coppia siano ortogonali fra loro ; i punti d' incontro dei diametri di ciascuna coppia sono situati sopra un cerchio che vogliamo ora determinare. Basta perciò rammentare che secondo i resultati di Steiner relativamente a questa ipocicloide il centro di questo cerchio e il suo raggio possono trovarsi così :

Sia M il punto comune a due tangenti ortogonali a e b ; N e P i punti di contatto di a e b, se Q è il punto di mezzo di N P (la quale è un'altra tangente) il cerchio che ha per diametro M Q e per centro il punto di mezzo di M Q è il cerchio richiesto.

Nel caso del §. precedente posto $\alpha_{1111} = 1$; ciò che è sempre possibile , perchè basta dividere tutti gli altri coefficienti della quartica per α_{1111}; abbiamo :

$$b_0 = x_1 + \beta_{111}\, x_3 \quad ; \quad b_1 = \frac{x_2}{3} + \beta_{112}\, x_3 \ ;$$

$$b_2 = \frac{x_1}{3} + \beta_{122}\, x_3 \quad ; \quad b_3 = x_2 + \beta_{222}\, x_3 \ .$$

Se quindi il triangolo fondamentale è preso rettangolo in (0 ; 0 ; 1) le rette b_0 ; b_3 sono ortogonali ; ma abbiamo veduto §. 62. che esse sono tangenti alla quartica P_x nei loro punti d' incontro con b_1 ; b_2 rispettivamente; dunque per punti N e P possono prendersi i punti:

$$(b_0 \; ; \; b_1) \quad ; \quad (b_2 \; ; \; b_3)$$

e per punto M l'altro $(b_0 \; ; \; b_3)$; per punto Q il punto di mezzo del segmento che unisce i punti $(b_0 \; ; \; b_1)$; $(b_2 \; ; \; b_3)$.

Ora è

$$M \equiv (- \beta_{111} \; ; \; - \beta_{222})$$

$$N \equiv (- \beta_{111} \; ; \; - 3 \, \beta_{112}) \; ; \; P \equiv (- 3 \, \beta_{122} \; ; \; - \beta_{222})$$

e quindi :

$$Q \equiv \left(- \frac{\beta_{111} + 3 \, \beta_{122}}{2} \; ; \; - \frac{3 \, \beta_{112} + \beta_{222}}{2} \right)$$

perciò le coordinate del centro del cerchio da determinarsi sono:

$$x_0 = - \frac{3}{4} \left\{ \beta_{111} + \beta_{122} \right\} \; ; \; y_0 = - \frac{3}{4} \left\{ \beta_{112} + \beta_{222} \right\}$$

il suo raggio:

$$\frac{1}{4}\sqrt{(\beta_{111}-3\beta_{112})^2+(\beta_{222}-3\beta_{112})^2}$$

e la sua equazione:

$$\left\{16\,x+3\,(\beta_{111}+\beta_{122})\right\}^2+\left\{16\,y+3\,(\beta_{112}+\beta_{222})\right\}^2=$$
$$=(\beta_{111}-3\beta_{122})^2+(\beta_{222}-3\beta_{112})^2$$

Conosciuto questo cerchio, esiste una costruzione semplicissima data dal prof. Cremona per mezzo della quale si ottengono quante tangenti si vogliono di P_x; ma il cerchio precedente si costruisce subito date le rette b_0 ; b_1 ; b_2 ; b_3; ecco dunque come mediante la costruzione suddetta si possano costruire quanti diametri si vogliono di una quartica bitangente alla retta all' infinito nei punti ciclici.

67. Cerchiamo le tangenti cuspidali. È noto che esse passano per il centro del cerchio precedente e sono ugualmente inclinate l' una sull' altra di $\frac{\pi}{3}$. Queste tre tangenti sono i tre diametri di U_x che passano per il punto (x_0 ; y_0) e quindi i parametri dei punti all'infinito di cui esse sono diametri si otterranno sostituendo nell'equazione del diametro x_0 ; y_0 ; 1 per x_1 ; x_2 ; x_3 e risolvendo rispetto a λ la cubica che ne resulta la quale è:

$$(1)\quad ;\quad \lambda^3\left\{3\,\beta_{122}-\beta_{111}\right\}+3\,\lambda^2\left\{\beta_{222}-3\,\beta_{112}\right\}+$$
$$+3\,\lambda\left\{\beta_{111}-3\,\beta_{122}\right\}+3\,\beta_{112}-\beta_{222}=0$$

Se λ_1 è una radice della precedente equazione, l'angolo ω che una retta passante per λ_1 all' infinito fa con l' asse delle x sarà dato da

$$\cot g\ \omega = \lambda_1$$

Siccome ogni diametro di U_x è perpendicolare al suo corrispondente sistema di corde; così ne viene che le tre radici λ_1 ; λ_2 ; λ_3 della equazione precedente devono essere parametri di punti all'infinito di rette facenti a due, a due un angolo di $\frac{\pi}{3}$; o $\frac{2\pi}{3}$, dunque sarà:

$$\lambda_2 = \cot g \left(\omega + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3} + \lambda_1}{1 - \lambda_1 \sqrt{3}}$$

$$\lambda_3 = \cot g \left(\omega + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\lambda_1 - \sqrt{3}}{1 + \lambda_1 \sqrt{3}}$$

Dunque le tangenti cuspidali saranno le tre rette passanti per $(x_0 \ ; \ y_0)$ e aventi per coefficienti angolari :

$$\lambda_1 \ ; \quad \frac{\lambda_1 + \sqrt{3}}{1 - \lambda_1 \sqrt{3}} \ ; \quad \frac{\lambda_1 - \sqrt{3}}{1 + \lambda_1 \sqrt{3}}$$

dove λ_1 è una radice della (1).

Le tre tangenti di P_x perpendicolari rispettivamente a queste tre tangenti cuspidali si otterranno sostituendo successivamente nell' equazione del diametro di U_x a λ :

$$\frac{1}{\lambda_1} \quad ; \quad \frac{1-\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1+\sqrt{3}} \quad ; \quad \frac{1+\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1-\sqrt{3}}$$

Esse saranno dunque:

$$p_x = b_0 + 3\, b_1\, \lambda_1 + 3\, b_2\, \lambda_1^2 + b_3\, \lambda_1^3 = 0$$

$$q_x = b_0 \left\{ \frac{1-\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1+\sqrt{3}} \right\}^3 + 3\, b_1 \left\{ \frac{1-\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1+\sqrt{3}} \right\}^2 +$$

$$+ 3\, b_2 \left\{ \frac{1-\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1+\sqrt{3}} \right\} + b_3 = 0$$

$$r_x = b_0 \left\{ \frac{1+\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1-\sqrt{3}} \right\}^3 + 3\, b_1 \left\{ \frac{1+\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1-\sqrt{3}} \right\}^2 +$$

$$+ 3\, b_2 \left\{ \frac{1+\lambda_1\sqrt{3}}{\lambda_1-\sqrt{3}} \right\} + b_3 = 0.$$

Se s' indicano con p_x' ; q_x' ; r_x' le tangenti cuspidali di P_x e dal punto (x_0 ; y_0) nelle direzioni rispettive:

$$\begin{array}{ll} (p_x\, p_x') & (x_0\ ;\ y_0) \\ (q_x\, q_x') & (x_0\ ;\ y_0) \\ (r_x\, r_x') & (x_0\ ;\ y_0) \end{array}$$

(essendo ($p_x\, p_x'$) il punto comune a p_x ; p_x' ; ec.) si porta un segmento uguale a

$$\frac{3}{4}\sqrt{(\beta_{111} - 3\,\beta_{122})^2 + (\beta_{222} - 3\,\beta_{112})^2}$$

si trovano le tre cuspidi della curva P_x.

68. Riassumendo: « *Possiamo costruire il luogo dei centri delle coniche diametrali di una quartica di terzo genere bitangente alla retta all' infinito nei punti ciclici, facendo rotolare nell' interno del cerchio:*

$$\left\{ 16\,x + 3(\beta_{111} + \beta_{122}) \right\}^2 + \left\{ 16\,y + 3\,(\beta_{122} + \beta_{222}) \right\}^2$$
$$= 9 \left\{ (\beta_{111} - 3\,\beta_{122})^2 + (\beta_{222} - 3\,\beta_{112})^2 \right\}$$

un altro cerchio di raggio

$$\frac{1}{4}\sqrt{(\beta_{111} - 3\,\beta_{122})^2 + (\beta_{222} - 3\,\beta_{112})^2}$$

il quale nella posizione iniziale tocca il cerchio precedente in uno dei tre punti $(p_x p_x')$; $(q_x q_x')$; $(r_x r_x')$ *antecedentemente determinati; il luogo è allora descritto da questo punto di contatto.*

L' insieme delle tangenti a questo luogo cioè tutti i diametri della quartica data è costituito dall' insieme di tutte le rette che uniscono i piedi delle perpendicolari tirate sui lati del triangolo delle tre rette p_x ; q_x ; r_x *da un punto del cerchio circoscritto a questo triangolo* ». *Il raggio di questo cerchio è:*

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\beta_{111} - 3\,\beta_{122})^2 + (\beta_{222} - 3\,\beta_{112})^2}$$

69. **Linee diametrali coniugate.** — La cubica diametrale di un punto A ha tre punti all'infinito B; C; D; i diametri di questi tre punti passando per A sono paralleli: questi tre diametri li chiameremo coniugati alla cubica di A e viceversa. Resulta quindi che tre tangenti parallele della terza linea diametrale principale costituiscono tre diametri coniugati a una stessa cubica diametrale.

Dalla equazione del diametro di un punto di parametro λ segue che il parametro λ_1 del punto all' infinito di questo diametro è dato da

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha_{1112}\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2\,\alpha_{1122} + 3\,\lambda\,\alpha_{1222} + \alpha_{2222}}{\alpha_{1111}\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2\,\alpha_{1112} + 3\,\lambda\,\alpha_{1122} + \alpha_{1222}}$$

e si ritrova che per un valore di λ c'è un sol valore di λ_1 mentre per un valore di λ_1 ci sono tre valori per λ.

L' equazione di 3.° grado in λ' :

$$(1) \qquad \lambda_1 + \frac{\alpha_{1112}\,\lambda'^3 + 3\,\lambda'^2\,\alpha_{1122} + 3\,\lambda'\,\alpha_{1222} + \alpha_{2222}}{\alpha_{1111}\,\lambda'^3 + 3\,\lambda'^2\,\alpha_{1122} + 3\,\lambda'\,\alpha_{1122} + \alpha_{1222}}$$

dà i tre valori dei parametri dei punti all' infinito della cubica diametrale di λ_1. Uno di questi è λ naturalmente; gli altri due vengono quindi a dipendere da una equazione di secondo grado.

Se si pone per brevità:

$$\alpha_{1112}\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2\,\alpha_{1122} + 3\,\lambda\,\alpha_{1222} + \alpha_{2222} = a$$

$$\alpha_{1111}\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2\,\alpha_{1112} + 3\,\lambda\,\alpha_{1122} + \alpha_{1222} = b$$

Il coefficiente di λ'^3 nella (1) è:

$$\alpha_{1112}\,b - \alpha_{1111}\,a$$

Il coefficiente di λ'^2 :

$$3\,(\,\alpha_{1122}\,b - \alpha_{1112}\,a\,)$$

Il termine indipendente:

$$\alpha_{2222}\,b - \alpha_{1222}\,a$$

Dunque la somma e il prodotto delle radici saranno rispettivamente:

$$\frac{3\,(\,\alpha_{1112}\,a - \alpha_{1122}\,b)}{\alpha_{1112}\,b - \alpha_{1111}\,a}\;,\;\frac{\alpha_{1222}\,a - \alpha_{2222}\,b}{\alpha_{1112}\,b - \alpha_{1111}\,a}$$

Perciò gli altri due valori di λ' che si cercano saranno le radici della equazione di 2.° grado:

$$\lambda'^2 + \left\{\frac{3\,(\,\alpha_{1122}\,b - \alpha_{1112}\,a\,)}{\alpha_{1112}\,b - \alpha_{1111}\,a} + \lambda\right\}\lambda' +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\,\frac{\alpha_{1222}\,a - \alpha_{2222}\,b}{\alpha_{1112}\,b - \alpha_{1111}\,a} = 0\,.$$

Se λ_1' ; λ_2' sono le radici di questa equazione se ne conclude :

« *I tre sistemi di corde parallele aventi per parametri dei punti all'infinito:*

$$\lambda \ ; \ \lambda_1' \ ; \ \lambda_2'$$

ammettono diametri paralleli ».

Il discriminante della (1) è di 12.° grado in λ; dunque fra queste infinite terne ve ne sono 12 ognuna delle quali possiede due sistemi coincidenti .

70. La conica diametrale k di un punto A ha due punti all' infinito B ; C; le coniche diametrali h ; l di questi due punti passano per A; chiameremo h ; l le due coniche diametrali coniugate della conica diametrale k.

Dall'equazione della conica diametrale di un punto di parametro λ, si deduce che i parametri dei punti all'infinito di essa sono le radici della equazione di 2.° grado in λ_1:

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2 \left\{ \alpha_{1111}\lambda^2 + 2\ \alpha_{1112}\lambda + \alpha_{1122} \right\} + \\ (2) \qquad &+ 2\lambda_1 \left\{ \alpha_{1112}\lambda^2 + 2\,\alpha_{1122}\lambda + \alpha_{1222} \right\} + \\ &+ \alpha_{1122}\lambda^2 + 2\,\alpha_{1222}\lambda + \alpha_{2222} = 0 \end{aligned}$$

se λ_1' ; λ_1'' sono queste radici le coniche diametrali di λ_1' ; λ_1'' hanno comune la direzione di un asintoto.

71. Dai resultati precedenti apparisce chiaro che i

punti all' infinito dei diametri e quelli delle cubiche diametrali individuano sulla retta all' infinito una corrispondenza di Chasles (1 ; 3); al punto all' infinito di un diametro corrispondendo i tre punti all'infinito della cubica diametrale coniugata. Così dalla (2) del §. precedente resulta che le coniche diametrali coniugate individuano sulla retta all' infinito una corrispondenza di Chasles (2 ; 2), però quest' ultima è più notevole giacchè la (2) essendo simmetrica in λ e λ_1 succede che preso un punto sulla retta all' infinito, questo individua sempre gli stessi due corrispondenti tanto se si considera appartenente all' una o all'altra delle due punteggiate, proiettive sovrapposte.

Queste due corrispondenze di Chasles hanno evidentemente a comune i quattro punti uniti e sono i quattro punti all' infinito della quartica.

Quartiche di primo genere.

72. I teoremi precedenti si applicano senza notevoli modificazioni alle quartiche di secondo genere. Fra quelle di 1.° genere sono interessanti quelle i cui due punti doppi sono all' infinito.

Se si prendono questi due punti per i due vertici (0 ; 1 ; 0) ; (1 ; 0 ; 0) del triangolo fondamentale, l' equazione di queste quartiche può porsi sotto la forma.

$$x_1^2\, x_2^2 + 2\, x_1\, x_2\, x_3\, (l\, x_1 + m\, x_2) +$$

$$+ x_3^2 \left\{ a\, x_1^2 + b\, x_2^2 + c\, x_3^2 + 2\, f\, x_2 x_3 + 2\, g\, x_3 x_1 + 2\, h\, x_1 x_2 \right\} = ($$

Confrontandola con l'equazione generale di una quartica sotto la forma data nel §. 59. si ha:

$$\alpha_{1111} = \alpha_{1112} = \alpha_{1222} = \alpha_{2222} = 0 \quad ; \quad \alpha_{1122} = \frac{1}{6}$$

$$\beta_{111} = \beta_{222} = 0 \quad ; \quad \beta_{112} = \frac{l}{6} \quad ; \quad \beta_{122} = \frac{m}{6} \; ;$$

$$\gamma_{11} = \frac{a}{6} \quad ; \quad \gamma_{12} = \frac{h}{6} \quad ; \quad \gamma_{22} = \frac{b}{6}$$

$$\delta_1 = \frac{g}{2} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{f}{2}$$

$$a_0 = c$$

L'equazione del diametro di un punto (y_1 ; y_2 ; 0) si riduce a:

$$y_1\, y_2^2 \left\{ x_1 + m\, x_3 \right\} + y_1^2\, y_2 \left\{ x_2 + l\, x_3 \right\} = 0$$

I tre diametri passanti per un punto P qualunque del piano sono dunque costituiti da due rette aventi le direzioni dei punti doppi all'infinito e dalla congiungente di P col punto di coordinate (— m ; — l ; 1); dunque la terza linea diametrale principale si spezza nei due punti doppi e nel punto (— m ; — l ; 1). Segue che tutte le coniche diametrali sono concentriche eccettuate le due coppie di tangenti nei punti doppi le quali costituiscono le coniche diametrali di quei punti stessi.

« *Tutte le quartiche la cui equazione può dedursi dalla:*

$$x_1^2 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 (l x_1 + m x_2) + x_3^2 \mathrm{U}=0$$

mantenendo fissi l ed m e facendo variare i coefficienti della U=0 *in modo da portarla a coincidere con qualunque conica del piano; hanno a comune il centro delle coniche diametrali* ».

73. L' equazione della conica diametrale di un punto all' infinito di parametro λ è:

$$x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + x_3^2 \left\{ a \lambda^2 + 2 h \lambda + b \right\} +$$

$$+ 4 x_1 x_2 \lambda + 2 x_1 x_3 \left\{ 2 l \lambda + m \right\} +$$

$$+ 2 x_2 x_3 \left\{ l \lambda^2 + 2 m \lambda \right\} = 0$$

Le coordinate del centro sono:

$$- 3 m \lambda^2 \quad ; \quad - 3 l \lambda^2 \quad ; \quad 3 \lambda^2 .$$

Si ha così una conferma di un resultato ottenuto nel §. precedente.

Se si pone

$$\mathrm{U} = x_2^2 + a x_3^2 + 2 l x_2 x_3$$

$$\mathrm{V} = 2 h x_3^2 + 2 x_1 x_2 + 2 l x_1 x_3 + 2 m x_2 x_3$$

$$\mathrm{W} = x_1^2 + b x_3^2 + 2 m x_1 x_3$$

l'equazione della seconda linea diametrale principale è:

$$U\,W - V^2 = 0$$

cioè:

$$x_1^2\,x_2^2 + 2\,x_1\,x_2\,x_3 \left\{ \frac{l}{3}\,x_1 + \frac{m}{3}\,x_2 \right\} +$$

$$+ x_3^2 \left\{ x_1^2 \left(\frac{4}{3} l^2 - \frac{a}{3} \right) + x_2^2 \left(\frac{4}{3} m^2 - \frac{b}{3} \right) + \right.$$

$$+ x_3^2 \left(\frac{4}{3} h^2 - \frac{a\,b}{3} \right) + 2 \frac{2\,h}{3}\,x_1\,x_2 +$$

$$\left. +2\,x_2\,x_3 \left(\frac{2\,h\,m}{3} - \frac{b\,l}{3} \right) + 2\,x_1\,x_3 \left(\frac{2\,h\,l}{3} - \frac{a\,m}{3} \right) \right\} = 0$$

Questa equazione è della forma di quella della quartica data, dunque:

« *La seconda linea diametrale principale è una quartica che ha gli stessi punti doppi della quartica primitiva* ».

La seconda linea diametrale principale ha per centro delle sue coniche diametrali il punto $(-l\,;\,-m\,;\,3)$; se ora di questa curva si cercasse ancora la seconda linea diametrale principale troveremmo analogamente $(-l;-m;9)$ per centro delle sue coniche diametrali e così continuando ne concludiamo che:

« *I centri delle coniche diametrali di quartiche dedotte l'una dall'altra in modo che ognuna sia la* *seconda linea diametrale principale della precedente; e la prima (e quindi tutte) abbiano due punti doppi all' infinito; si muovono sopra una retta avvicinandosi continuamente fra loro e tendendo verso un punto fisso il quale è il vertice* (0 ; 0 ; 1) *del triangolo fondamentale se gli altri due sono situati nei due punti doppi* ».

74. L' equazione della cubica diametrale di un punto $(y_1 ; y_2 ; 0)$ diviene:

$$x_3^3 \left\{ g\, y_1 + f\, y_2 \right\} + x_1^2\, x_2\, y_2 + x_1\, x_2^2\, y_1 +$$

$$+ x_1\, x_3^2 \left\{ a\, y_1 + h\, y_2 \right\} + x_1^2\, x_3\, l\, y_2 + x_2\, x_3^2 \left\{ h\, y_1 + b\, y_2 \right\} +$$

$$+ x_2^2\, x_3\, m\, y_1 + 2\, x_1\, x_2\, x_3 \left\{ l\, y_1 + m\, y_2 \right\} = 0$$

Tutte le cubiche diametrali passano per i punti doppi della curva e quindi la corrispondenza (1 ; 3) di Chasles sulla retta all' infinito viene ad essere un po' modificata, giacchè un punto di parametro λ ha per corrispondenti i due punti doppi che naturalmente non variano al variare di λ e uno solo che dipende da λ; questa dipendenza si ricava dalle formole del §. 69, da esse resulta che il punto corrispondente di λ diverso dai punti doppi della quartica è il punto di parametro $-\lambda$.

In questo caso dunque i due punti doppi nei quali vengono a cadere i quattro punti uniti della corrispondenza corrispondono a qualunque punto P della retta all' infinito insieme al coniugato armonico di P rispetto ad essi; o in altre parole, la corrispondenza (1 ; 3) di Chasles si riduce in questo caso a una involuzione ordinaria i cui punti doppi sono i punti doppi della quartica.

« *Il coniugato armonico di P rispetto a questi punti doppi è il punto all' infinito P' del diametro di P; se questo diametro è un asse, la coppia P, P' separa armonicamente anche la coppia dei punti ciclici del piano cioè P , P' sono gli elementi doppi dell' involuzione individuata sulla retta all' infinito dai punti doppi della quartica e dai punti ciclici del suo piano* ».

75. **La lemniscata di Bernoulli, la conchiglia di Pascal e la cardioide.**

Se il triangolo fondamentale è rettangolo nel vertice (1 ; 0 ; 0), se in questo punto è situato quello fra i punti doppi di queste tre curve che è a distanza finita e il lato $x_3=0$ è la retta all'infinito del loro piano, l' equazioni di queste tre curve possono dedursi dall' unica

$$(x_1^2 + x_2^2 - 2\,r\,x_1\,x_3)^2 = a^2\,x_3^2\,(x_1^2 \pm x_2^2)$$

Tutte e tre queste curve sono quartiche di genere zero. Se nel 2.° membro si prende il segno superiore si ha la conchiglia di Pascal; r essendo il raggio del cerchio generatore; a la lunghezza costante che si riporta sul raggio vettore: questa curva ha un nodo all'origine e come caso particolare ne viene la cardioide quando $2\,r = a$, essa ha una cuspide all' origine; tanto la conchiglia quanto la cardioide sono quartiche *cartesiane* cioè hanno due cuspidi nei punti ciclici, le loro tangenti cuspidali essendo le due rette che partono dal centro del cerchio generatore e vanno ai punti ciclici stessi; il lato $x_2 = 0$ del triangolo fondamentale è per entrambe una retta di simmetria e per la cardioide è la 3.ª tangente cuspidale mentre per la conchiglia è una delle bissettrici dell' angolo delle tangenti nodali.

Se poi nell' equazione precedente si fa $r = 0$ e si prende il segno inferiore nel 2.º membro, si ottiene l'equazione della lemniscata di Bernoulli la quale ha tre nodi, uno all' origine e gli altri due nei punti ciclici: è dunque una quartica *bicircolare.* La distanza dei due punti fissi (tali che è costante il prodotto delle loro distanze da qualunque punto della curva) dal nodo, origine delle coordinate, è $\pm \frac{a}{\sqrt{2}}$. Questa curva è una quartica simmetrica rispetto a due rette ortogonali. Le tangenti nodali nei punti ciclici sono:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + i\left(x_2 + \frac{a}{\sqrt{2}} x_3\right) = 0 \\ x_1 + i\left(x_2 - \frac{a}{\sqrt{2}} x_3\right) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 - i\left(x_2 + \frac{a}{\sqrt{2}} x_3\right) = 0 \\ x_1 - i\left(x_2 - \frac{a}{\sqrt{2}} x_2\right) = 0 \end{array}\right.$$

cioè le due coppie di rette che partono dai due punti fissi suddetti e vanno ai punti ciclici del piano. Questi due punti sono quindi due fuochi della lemniscata come è un fuoco della conchiglia e della cardioide il centro del cerchio generatore.

76. Noi porremo l'equazione del §. precedente sotto la solita forma

$$x_3^2 \left\{ x_1^2 (a^2 - 4 r^2) \pm a^2 x_2^2 \right\} +$$

$$+ x_3 \left\{ 4 r x_1^3 + 4 r x_1 x_2^2 \right\} - (x_1^2 + x_2^2)^2 = 0$$

L'equazione del diametro di un punto di coordinate $(y_1 ; y_2 ; 0)$ è

$$\left\{ y_1^2 + y_2^2 \right\} \left\{ y_1 (x_1 - r x_3) - x_2 y_2 \right\} = 0$$

La terza linea diametrale si spezza quindi in tre punti che sono i tre punti doppi. Così tutte le coniche diametrali della conchiglia e della cardioide sono concentriche al cerchio generatore, quelle della lemniscata al nodo che è a distanza finita.

Le coniche diametrali che si spezzano sono sei ed hanno per punto doppio il centro del cerchio generatore nel caso della conchiglia e della cardioide; questo punto sarà dunque almeno sestuplo per le Steineriane delle due curve. Nel caso della lemniscata solamente quattro delle coniche diametrali che si spezzano hanno per punto doppio il nodo reale perchè le altre due sono le due coppie di tangenti nei punti ciclici; ma per l'origine passano pure le due tangenti nodali le quali costituiscono la conica polare dell'origine stessa; dunque la steineriana della lemniscata ha almeno un punto quintuplo nel nodo reale della lemniscata stessa.

77. L'equazione della conica diametrale di un punto $(y_1 ; y_2 ; 0)$ è

$$-x_1^2 \left\{ y_1^2 + \frac{y_2^2}{3} \right\} - x_2^2 \left\{ \frac{y_1^2}{3} + y_2^2 \right\} +$$

$$+ x_3^2 \left\{ \frac{a^2 - 4r^2}{6} y_1^2 \pm \frac{a^2}{6} y_2^2 \right\} - \frac{4}{3} x_1 x_2 y_1 y_2 +$$

$$+ 2 x_1 x_3 \left\{ r y_1^2 + \frac{r}{3} y_2^2 \right\} + 2 x_2 x_3 \cdot \frac{2}{3} r y_1 y_2 = 0$$

Le coordinate del centro sono:

$$-\frac{r}{3}(y_1^2 + y_2^2)^2 \quad ; \quad 0 \quad ; \quad -\frac{1}{3}(y_1^2 + y_2^2)^2$$

ciò che conferma i resultati del §. precedente. Se si pone:

$$U = -x_1^2 - \frac{x_2^2}{3} + \frac{a^2 - 4r^2}{6} x_3^2 + 2 r x_1 x_3$$

$$V = -\frac{2}{3} x_1 x_2 + \frac{2}{3} r x_2 x_3$$

$$W = -\frac{x_1^2}{3} - x_2^2 \pm x_3^2 \frac{a^2}{6} + \frac{2r}{3} x_1 x_3$$

L'equazione della seconda linea diametrale principale è:

$$U\,W - V^2 = 0$$

Ossia:

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2 x_3^2 \left\{ 4\,r^2 - \frac{a^2 - 4\,r^2}{6} \mp \frac{a^2}{2} \right\} +$$

$$+ x_2^2 x_3^2 \left\{ \mp \frac{a^2}{6} - \frac{a^2 - 4\,r^2}{2} - \frac{4}{3}\,r^2 \right\} \pm$$

$$\pm \frac{a^2 - 4\,r^2}{12}\,a^2 x_3^4 - 4\,r\,x_1^3 x_3 +$$

$$+ x_1 x_3^3 \left\{ \frac{r}{3}(a^2 - 4\,r^2) \pm \frac{a^2 r}{2} \right\} - 4\,r\,x_1 x_2^2 x_3 = 0$$

Se si adottano i segni superiori dove se ne hanno due si ottiene la seconda linea diametrale principale della conchiglia. È una quartica bicircolare, non passa per l'origine, ammette la retta $x_2=0$ per asse di simmetria: per $2r=a$ si ottiene la seconda linea diametrale principale della cardioide:

$$\left\{ x_1^2 + x_2^2 - 2\,r\,x_1 x_3 \right\}^2 =$$

$$= x_3^2 \left\{ 2\,r^2 (x_1^2 + x_2^2 - 2\,r\,x_1 x_3) \right\}.$$

Questa curva è cartesiana, passa per la cuspide reale della cardioide avendo ivi per tangente l'asse $x_1=0$; è simmetrica rispetto alla retta $x_2=0$. La seconda linea diametrale principale della lemniscata è

$$\left(x_1^2+x_2^2\right)^2+\frac{a^4}{12}x_3^4=\frac{a^2}{3}x_3^2\left(x_2^2-x_1^2\right)$$

è una curva bicircolare non passante per il nodo reale della lemniscata; è simmetrica rispetto a $x_1=0$; $x_2=0$.

78. L'equazione della cubica diametrale di un punto $(y_1\,;\,y_2\,;\,0)$ è:

$$-x_1^3y_1-x_2^3y_2-x_1^2x_2y_2-x_1x_2^2y_1+3x_1^2x_3ry_1+$$
$$+x_1x_3^2y_1\frac{a^2-4r^2}{2}+x_2^2x_3ry_1\pm\frac{a^2}{2}x_2x_3^2y_2+$$
$$+2x_1x_2x_3ry_2=0\,.$$

In particolare le cubiche diametrali dei punti $(1\,;\,0\,;\,0)$; $(0\,;\,1\,;\,0)$ sono:

$$x_1\left\{(x_1-\frac{3}{2}r\,x_3)^2+x_2^2-x_3^2\frac{2\,a^2+r^2}{4}\right\}-x_2^2x_3r=0$$

$$x_2\left\{(x_1-r\,x_3)^2+x_2^2-x_3^2\left(\frac{\pm\,a^2+2\,r^2}{2}\right)\right\}=0\,.$$

Dunque nel caso della conchiglia e della cardioide la cubica diametrale del coniugato armonico (rispetto alla coppia dei punti ciclici) del punto all'infinito dell'asse si spezza nell'asse e in un cerchio concentrico al cerchio generatore il cui raggio è $\sqrt{\frac{a^2+2r^2}{2}}$ per la conchiglia e $r\sqrt{3}$ per la cardioide. I nove centri di queste due curve si trovano con facilità. La conchiglia ne ha quattro nei punti ciclici, uno nel nodo reale; gli altri quattro sono i due punti d'incontro del cerchio

$$\left(x_1 - r\,x_3\right)^2 + x_2^2 - x_3^2\left(\frac{a^2+4\,r^2}{2}\right) = 0$$

col lato $x_1=0$ e i due punti d'incontro del cerchio

$$\left(x_1 - \frac{3}{2}r\,x_3\right)^2 + x_2^2 - x_3^2\left(\frac{2\,a^2+r^2}{4}\right) = 0$$

col lato $x_2=0$ del triangolo fondamentale.

Quindi i quattro centri della conchiglia che non cadono nei punti doppi hanno per coordinate:

$$\left.\begin{array}{lll} 0 \;; & \frac{3}{2}r - \sqrt{\frac{2\,a^2+r^2}{4}} \;; & 1 \\ 0 \;; & \frac{3}{2}r + \sqrt{\frac{2\,a^2+r^2}{4}} \;; & 1 \end{array}\right\}\text{situati sulla retta di simmetria},$$

$$\left.\begin{array}{lll} \sqrt{\frac{a^2-4\,r^2}{2}} \;; & 0 \;; & 1 \\ -\sqrt{\frac{a^2-4\,r^2}{2}} \;; & 0 \;; & 1 \end{array}\right\}\text{situati sulla perpendicolare alla retta di simmetria}$$

La cardioide ha quattro centri nei punti ciclici, uno nella cuspide reale (considerata come punto doppio); in essa per le formole precedenti ne vengono a coincidere altri tre, onde questa cuspide contiene quattro centri della curva; il centro rimanente; l'unico che non sia situato nei punti doppi; sì trova sulla retta di simmetria distante dall' origine il triplo del raggio del cerchio generatore nel senso del segmento che va dal nodo reale al centro del suddetto cerchio.

Le cubiche diametrali dei punti (1 ; 0 ; 0) ; (0 ; 1 ; 0) rispetto alla lemniscata sono:

$$x_1 \left\{ x_1^2 + x_2^2 - \frac{a^2}{2} x_3^2 \right\} = 0$$

$$x_2 \left\{ x_1^2 + x_2^2 + \frac{a^2}{2} x_3^2 \right\} = 0$$

esse dunque si spezzano nei due assi di simmetria della curva e in due cerchi concentrici al nodo reale e di raggio uguale ma reale nell' uno, immaginario nell'altro.

Questi due cerchi si toccano dunque nei punti ciclici. Nasce quindi una contraddizione apparente giacchè la curva ha quattro centri nei punti ciclici non avendo ivi due cuspidi. Questa contraddizione si toglie osservando che se una curva ha un nodo o la prima polare di un punto o' passa semplicemente per o essendo ivi tangente alla coniugata armonica della retta $o\ o'$ rispetto alle tangenti nodali, segue che le prime polari di due punti o', o'' in linea retta con o si toccano in o e questo è appunto il caso nostro.

I nove centri della lemniscata sono dunque costituiti dai due punti ciclici contati ognuno due volte; dal nodo reale; dai due punti fissi tali che è costante il prodotto delle loro distanze da un punto della curva e da due altri punti immaginarî coniugati situati sulla congiungente i due punti fissi precedenti e alla distanza stessa dall' origine.

Noteremo finalmente come per tutte queste tre curve la corrispondenza (1 ; 3) di Chasles individuata sulla retta all' infinito dai diametri e dalle loro cubiche diametrali coniugate, si riduca alla involuzione segnata sulla stessa retta dai lati di un angolo retto che ruota attorno al vertice e i cui punti doppi sono i punti ciclici del piano.

Assi di simmetria.

79. Particolarizzando a una quartica i resultati ottenuti al §. 6. possiamo dire che:

« *Data una retta*

$$x_2 = m\, x_1 + n\, x_3$$

e una quartica

$$a_x^4 = 0$$

le condizioni che devono essere soddisfatte perchè la retta sia un asse di simmetria della quartica sono:

$$a_{\alpha^{(1)}}a^3_{\alpha^{(2)}}=0\ ;\ a^3_{\alpha^{(1)}}\,a_{\alpha^{(2)}}=0\,;\ a_{\alpha^{(1)}}a^3_{\alpha^{(3)}}=0\ ;\ a^3_{\alpha^{(1)}}a_{\alpha^{(3)}}=$$

$$a_{\alpha^{(1)}}a^2_{\alpha^{(2)}}\,a_{\alpha^{(3)}}=0\ ;\ a_{\alpha^{(1)}}\,a_{\alpha^{(2)}}a^2_{\alpha^{(3)}}=0$$

dove:

$$\alpha_1^{(1)}=\alpha_2^{(2)}=\alpha_3^{(3)}=1\ ;\ \alpha_3^{(1)}=\alpha_3^{(2)}=0$$

$$\alpha_1^{(3)}=-m\,n\ ;\ \alpha_2^{(3)}=n\ ;\ \alpha_1^{(2)}=-\alpha_2^{(1)}=-m.\ \text{»}$$

« *Tutte le quartiche simmetriche rispetto a una medesima retta costituiscono un sistema* ∞^8 ».

80. Noi abbiamo già dato al §. 37 l'equazione di quartiche simmetriche rispetto a uno, due, tre, quattro assi. Vogliamo ora, analogamente a quanto si fece per le cubiche, dare un saggio del modo con cui si può studiare ed esaminare la forma di queste quartiche simmetriche.

Prendiamo per esempio a classificare quelle simmetriche rispetto a tre assi.

Riferendo la curva a un sistema cartesiano ortogonale di cui l'asse delle x sia una retta di simmetria e l'origine il punto comune ai tre assi, l'equazione può porsi sotto la forma:

$$(1);\quad (x^2+y^2)^2+p\,(x^2+y^2)+q\,(x^3-3x\,y^2)+r=0$$

dove p ; q ; r sono i tre parametri che servono ad individuare la curva.

Essa tocca la retta all' infinito nei punti ciclici; dunque (§. 65) segue:

« *La terza linea diametrale principale di una quartica di 3.° genere simmetrica rispetto a tre assi è un' ipocicloide di Steiner* ».

81. Una curva del 4.° ordine non singolare possiede sempre quattro e non più bitangenti di prima specie annoverando fra queste anche le tangenti isolate.

Le quartiche che noi studiamo hanno dunque solamente tre bitangenti di prima specie situate a distanza finita; la simmetria richiede quindi che ognuna di esse sia perpendicolare a un asse. Le loro equazioni saranno dunque della forma:

$$x - k = 0$$

$$x + \sqrt{3} \,.\, y + 2k = 0$$

$$x - \sqrt{3} \,.\, y + 2k = 0$$

Gli otto punti di contatto delle quattro bitangenti di 1.ª specie stanno sopra una conica; siccome fra queste figura anche la retta all' infinito la quale tocca la quartica nei punti ciclici, così questa conica sarà un cerchio; se $\sqrt{\rho}$ è il suo raggio, per un noto teorema di Plücker l'equazione della quartica può scriversi:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &(x^2 + y^2 - \rho)^2 - l(x - k)(x - \sqrt{3} \,.\, y + 2k) \times \\ &\qquad \times (x + \sqrt{3} \,.\, y + 2k) = 0 \end{aligned} \right.$$

Confrontando questa equazione con la (1), se ne deducono le altre:

$$q + l = 0 \ ; \ p + 2\rho + 3\,k\,l = 0 \ ; \ r - \rho^2 - 4\,k^3\,l = 0$$

ovvero:

$$(\alpha) \ ; \ 16\,k^3\,q - 9\,k^2\,q^2 + 6\,p\,q\,k + 4\,r - p^2 = 0$$

$$(\beta) \ ; \ 32\,\rho^3 + \rho^2 \left\{ 48\,p - 27\,q^2 \right\} + 24\,p^2\,\rho + 4\,p^3 + 27\,q^2\,r = ($$

« *Nove bitangenti della quartica si dispongono dunque in tre triangoli equilateri godenti la stessa simmetria della quartica; di queste nove bitangenti tre sole sono di prima specie* ».

82. L' equazione che dà i punti d' incontro della quartica con un asse di simmetria (per esempio con l' asse delle x) è

$$(\gamma) \qquad x^4 + q\,x^3 + p\,x^2 + r = 0$$

Valendosi di questa equazione si può interpretare geometricamente il fatto che la (α) possegga due, o tre radici uguali.

I discriminanti della (α) e della (γ) sono rispettivamente dati da:

$$256\,q^2 \left\{ 16\,r^2 - 8\,p^2\,r + p^4 + 9\,p\,q^2\,r - \frac{27}{16}\,q^4\,r - \frac{q^2\,p^3}{4} \right\}$$

$$256\,r \left\{ 16\,r^2 - 8\,p^2\,r + p^4 + 9\,p\,q^2\,r - \frac{27}{16}\,q^4\,r - \frac{q^2\,p^3}{4} \right\}$$

essi hanno dunque a comune il fattore

$$\Delta = 16\, r^2 - 8\, p^2\, r + p^4 + 9\, p\, q^2\, r - \frac{27}{16} q^4\, r - \frac{q^2\, p^3}{4}$$

esclusi quindi i casi $q=0$; $r=0$, segue che quando la (γ) ha una radice doppia l' ha anche la (α).

Ma quando la (γ) ha una radice doppia la curva ha tre punti doppi; dunque se la (α) ha una radice doppia la quartica è di genere zero.

La (α) ha una radice tripla se il suo hessiano si annulla identicamente, se cioè sono verificate le due relazioni:

$$r = -\frac{p^2}{12} \quad ; \quad q = \frac{4}{3} \sqrt{2p}$$

la (γ) ha una radice tripla se è nullo il suo armonizzante e l' armonizzante di essa e del suo hessiano. Eseguiti i debiti calcoli si trova che queste due condizioni coincidono con le precedenti; dunque quando la (γ) ha una radice tripla l' ha anche la (α), ma se la (α) ha una radice tripla la curva possiede tre cuspidi anzi è una ipocicloide di Steiner perchè tocca la retta all'infinito nei punti ciclici; dunque se la (γ) ha una radice tripla la curva sarà una ipocicloide Steineriana.

Se $q=0$ si annulla il discriminante della (α) senza che si annulli quello della (γ); la curva si spezza allora in due cerchi concentrici; se invece è $r=0$ si annulla il discriminante della (γ) senza che si annulli quello della (α) e la quartica possiede un punto isolato all'origine.

83. Premesse queste generalità vediamo quali ipotesi relativamente alla natura dei rami della curva non sono in contraddizione con i principi già esposti e con i resultati ottenuti da Zeuthen nella già citata memoria. Queste ipotesi si possono raggruppare nel quadro seguente, osservando che ogni ramo deve chiudersi a distanza finita perchè la curva non ha punti reali all'infinito.

Quartiche non singolari	**I.° Un ramo** (*racchiude l'origine*)	**1.ª Un'ovale** *fig.* VII **2.ª Un trifolio** *fig.* VIII
	II.° Due rami (*entrambi racchiudono l'origine*)	**1.ª Due ovali** *fig.* IX **2.ª Un'ovale e un trifolio** *fig.* X (*l'ovale interna al trifolio*)
	III.° Tre rami (*nessuno racchiude l'origine*)	**1.ª Tre ovali** *fig.* XI **2.ª Tre unifolii** *fig.* XIII
	IV.° Quattro rami (*uno solo racchiude l'origine*)	**1.ª Tre ovali e un trifolio** *fig.* XI **2.ª Un'ovale e tre unifolii** *fig.* XIV **3.ª Quattro ovali** *fig.* XV

Quartiche singolari

- **I.º Tre punti doppi** (*uno sopra ogni asse*)
  - **1.º Tre nodi**
    - **di 1.ª specie** *fig.* XVII
    - **2.ª** » *fig.* XVIII
  - **2.º Tre cuspidi** *fig.* XVI
  - **3. Tre punti isolati e**
    - **Un' ovale** (*nota fig.* XV)
    - **Un trifolio** (» » XII)
- **II.º Un punto doppio**
  - **1.º Un punto isolato all' origine e**
    - **Un' ovale** (*nota fig.* IX)
    - **Un trifolio** (» » X)
    - **Tre ovali** (» » XII)
    - **Tre unifolii** (» » XIV)

84. Cerchiamo le corrispondenti condizioni analitiche.

Quartiche non singolari.

Per esse soltanto è il prodotto $\Delta\ r$ diverso da zero. Ora Δ ha segno uguale al discriminante della (α) e potrà essere positivo, o negativo. Nel 1.º caso la (α) ha una sola radice reale; nel secondo le ha tutte e tre reali; nel 1.º si ha quindi un solo triangolo di bitangenti (quelle di 1.ª specie) che goda la stessa simmetria della quartica; nel secondo se ne hanno tre: dunque quando $\Delta > 0$ siamo nel I.º o nel II.º dei casi considerati nel quadro precedente; quando invece $\Delta < 0$ siamo nel III.º o nel IV.º.

Per distinguere il I.º dal II.º osserveremo che nel I.º l' asse delle y incontra la curva in due soli punti reali e quindi deve essere $r < 0$; nel II.º lo stesso asse l'incontra in quattro punti reali onde dovrà aversi contemporaneamente $r > 0$; $p < 0$; $p^2 > 4\ r$.

Se, essendo $r > 0$, non fossero contemporaneamente adempiute le altre due condizioni $p < 0$; $p^2 > 4r$; la curva sarebbe immaginaria giacchè non incontrandola in punti reali le tre perpendicolari agli assi passanti per l'origine e dovendo la parte reale della curva chiudersi a distanza finita essa dovrebbe essere costituita da sei rami chiusi situati nelle sei regioni in cui le 3 suddette rette dividono il piano. Ora una quartica di 3.° genere non può possedere più di quattro rami.

Lo stesso criterio che vale per distinguere il I.° dal II.° caso, vale per distinguere il III.° dal IV.°

85. Rimanendo sempre nel campo delle quartiche non singolari abbiamo così esposto come si possono distinguere i casi I.° ; II.° ; III.° ; IV.° fra di loro. Vediamo ora come in ognuno di essi si possono distinguere ulteriormente i sotto-casi stabiliti nel quadro precedente. Cominciamo dal 1.° e dal II.° insieme.

In entrambi il criterio che ci servirà per distinguere i sotto-casi sarà di considerare le bitangenti di prima specie.

Se la curva è costituita da una sola ovale, o da due ovali; le bitangenti di 1.ª specie sono isolate; se invece la curva è costituita da un trifolio; o da un' ovale e un trifolio le bitangenti di 1.ª specie all' infuori della retta all' infinito avranno reali i loro punti di contatto. Ora l' equazione :

$$(2) \qquad p + 2\rho - 3kq = 0$$

ci fornisce il raggio $\sqrt{\rho}$ del cerchio che contiene i punti di contatto delle bitangenti di 1.ª specie; se dunque ρ è negativo, o se anche essendo positivo; $\sqrt{\rho}$ è minore della distanza che passa fra l'origine e una delle tre bitangenti di 1.ª specie; queste non avranno punti reali comuni con la curva, saranno cioè tangenti isolate; se invece ρ è positivo e $\sqrt{\rho}$ è maggiore della distanza suddetta le bitangenti di 1.ª specie toccheranno in punti reali la curva.

Nei casi I.° e II.° la (α) ha una sola radice reale; se la indichiamo con k_r e chiamiamo ρ_r il valore che si deduce dalla (2) quando in essa per k si sostituisce k_r; posto

$$\Omega_r = \rho_r - k_r^2$$

il criterio richiesto ci sarà fornito dal segno di Ω_r negativo nel 1.° e positivo nel 2.° dei due sotto-casi di I.° e II.°

86. Questo medesimo criterio può valere a farci distinguere anche nei casi III.° e IV.° i respettivi sottocasi fra di loro: però è necessario fare le seguenti considerazioni.

Prima di tutto la (α) possiede allora tre radici reali; se s'indicano con k_1 ; k_2 ; k_3 e con ρ_1 ; ρ_2 ; ρ_3 i valori corrispondenti di ρ che se ne deducono per mezzo della equazione del §. precedente, si hanno tre quantità Ω del cui segno bisogna accertarsi e cioè:

$$\Omega_1 = \rho_1 - k_1^2 \ ; \ \Omega_2 = \rho_2 - k_2^2 \ ; \ \Omega_3 = \rho_3 - k_3^2$$

e di queste tre non più di una può essere negativa, giacchè dal segno negativo di una sola di esse consegue l'esistenza di tre tangenti isolate che sono bitangenti di 1.ª specie; se avessimo due Ω negative avremmo sei tangenti isolate cioè più di quattro bitangenti di 1.ª specie il che secondo un teorema di *Zeuthen* è impossibile. Potremo dunque nei casi III.° e IV.° far consistere il criterio atto a distinguere i sotto-casi rispettivi nell'esame del prodotto

$$\Omega_1\ \Omega_2\ \Omega_3\,.$$

Questo criterio non può sembrar decisivo nel caso IV.° giacchè tanto nel 1.° che nel 2.° dei due sotto-casi relativi, le tre bitangenti di 1.ª specie che sono situate a distanza finita non sono isolate e quindi in entrambe il prodotto precedente è positivo. Però è facile assicurarsi che l'ipotesi relativa al 2.° sotto-caso del IV.° porta condizioni analitiche contraddittorie e quindi deve essere esclusa. Infatti: essa richiede $\Delta < 0$; $r < 0$: da esse consegue $p > 0$. Ora dalla (2) del §. precedente resulta:

$$p = -2\,\rho_1 + 3\,k_1\,q = -2\,\rho_2 + 3\,k_2\,q = -2\,\rho_3 + 3\,k_3 q$$

ρ_1 ; ρ_2 ; ρ_3 debbono essere positivi altrimenti fra le bitangenti ve ne sono delle isolate ciò che questa ipotesi esclude (eccezion fatta per la retta all'infinito); essendo $p > 0$ segue che

$$k_1\,q \quad ; \quad k_2\,q \quad ; \quad k_3\,q$$

devono essere positivi ossia k_1 ; k_2 ; k_3 di segno uguale a quello di q e quindi di segno uguale fra loro, mentre l'esame della figura XIV.ª mostra che ciò non può avvenire. Nessuna delle altre ipotesi già fatte al §. 83. porta condizioni analitiche contraddittorie e di ciò fanno prova gli esempî che in ogni sotto-caso si sono adotti al §. 87. Finalmente noteremo che nessuna delle espressioni Ω può annullarsi senza che la quartica si spezzi giacchè l'annullarsi anche di una sola Ω porta l'esistenza di tre flessi uno su di ogni asse e quindi di tre tac-nodi.

Quartiche singolari.

87. Allora è $r\,\Delta = 0$. Si hanno quindi le tre ipotesi ugualmente possibili:

$$(r=0\ ;\ \Delta \gtrless 0)\ ;\ (r \lessgtr 0\ ;\ \Delta=0)\ ;\ (r=0\ ;\ \Delta=0)$$

Nella 1.ª la curva possiede un punto isolato all'origine. Se Δ è positivo la (α) ha una sola radice reale e quindi il rimanente della curva non può essere che un'ovale, o un trifolio a seconda che Ω_r è negativa, o positiva. Questi due sotto-casi sono limiti del II.º (l'ovale interna ridotta infinitesima). Se Δ è negativo la (α) ha tre radici reali e il rimanente della curva sarà costituito da tre ovali, nè potrà essere costituito da tre unifolii per le ragioni addotte nel §. precedente relativamente alla esistenza di un ovale con tre unifolii.

Se poi è $r \lessgtr 0$; $\Delta=0$ la curva ha tre punti doppi, uno su di ogni asse. Questi punti doppi possono essere nodi di 1.ª, o di 2.ª specie, punti isolati, o cuspidi. Nel 1.º caso solamente avviene che l'asse delle y incontri la curva in quattro punti reali: le condizioni analitiche corrispondenti sono :

$$r > 0 \quad ; \quad p < 0 \quad ; \quad p^2 > 4\,r$$

se è $r > 0$ ma non $p < 0$, oppure non $p^2 > 4\,r$ la curva è immaginaria; se finalmente $r < 0$ i punti doppi possono essere nodi di secondo tipo, punti isolati, o cuspidi. Per suddistinguere fra loro questi ultimi casi occorre intanto osservare che nel caso delle cuspidi la (α) e la (γ) hanno una radice tripla cioè debbono essere soddisfatte le relazioni :

$$r = -\frac{p^2}{12} \quad ; \quad q = \frac{4}{3}\sqrt{2\,p}$$

Rimane dunque a conoscere il criterio atto a far distinguere i punti isolati dai nodi di 2.ª specie. È perciò necessario conoscere le radici della (α) e osservare che la radice doppia dà luogo al triangolo dei punti doppi; la radice semplice a tre bitangenti vere e proprie. Se s'indicano con k_d ; k_s le radici doppia e semplice della (α); con ρ_s il raggio relativo a k_s e si pone

$$\Omega_s = \rho_s - k_s^2$$

il segno negativo di Ω_s ci dirà che i tre punti doppi sono tre punti isolati e di più che il rimanente della curva è costituito da un' ovale. Se invece Ω_s è positivo ne viene un' ambiguità perchè può darsi che la curva possegga tanto tre punti isolati accompagnati da un trifolio, quanto tre nodi di 2.ª specie.

E per togliere quest' ultima ambiguità occorre confrontare i valori assoluti k'_s ; k'_d di k_s ; k_d e osservare che se i punti doppi sono punti isolati accompagnati da un trifolio è $k'_d > k'_s$ e che avviene il contrario se i punti doppi sono nodi di 2.ª specie.

Le condizioni analitiche trovate caso per caso anche per le quartiche non singolari non sono riscontrate incompatibili fra loro e per prova se ne sono addotti nel quadro seguente i relativi esempi.

$\Delta\, r \gtrless 0$

Quartiche non singolari

- $\Delta > 0$
  - $r < 0$
    - $\Omega_r < 0$
      - **Un' Ovale** *fig.* VII
      - *Es*: $p = 16$; $q = 4$; $r = -1$
    - $\Omega_r > 0$
      - **Un trifolio** *fig.* VIII
      - *Es*: *la quartica di Klein i cui coefficienti-coordinate sono:* $p = -\frac{1}{7}$; $q = -\frac{2}{3}$; $r = -\frac{1}{147}$
  - $r > 0$ ($p < 0; p^2 > 4r$ *altrimenti la curva è immaginaria*)
    - $\Omega_r < 0$
      - **Due Ovali** *fig.* IX
      - *Es*: $p = -64$; $q = 1$; $r = 1$
    - $\Omega_r > 0$
      - **Un' Ovale e un trifolio** *fig.* X
      - *Es.* $p = -16$; $q = 4$; $r = 1$
- $\Delta < 0$
  - $r < 0$
    - $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 < 0$
      - **Quattro Ovali** *fig.* XV
      - *Es*: $p = \frac{136}{3}$; $q = \frac{128}{9}$; $r = -\frac{496}{9}$
    - $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 > 0$
      - **Tre Ovali e un trifolio** *fig,* XII
      - *Es*: $p = \frac{208}{3}$; $q = 16$; $r = -\frac{3308}{9}$
  - $r > 0$
    - $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 < 0$
      - **Tre Ovali** *fig,* XI
      - *Es*: $p = \frac{16}{3}$; $q = \frac{80}{9}$; $r = \frac{2624}{9}$
    - $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 > 0$
      - **Tre unifolii** *fig.* XIII
      - *Es*: $p = -\frac{104}{3}$; $q = -\frac{32}{9}$; $r = \frac{1424}{9}$

Quartiche singolari ($\Delta r = 0$)

- $r = 0$, $\Delta \gtrless 0$
  - $\Delta > 0$
    - $\Omega_s < 0$: **Un punto isolato e un'ovale**. *Es*: $p = -64$; $q = 1$
    - $\Omega_s > 0$: **Un punto isolato e un trifolio**. *Es*: $p = -4$; $q = 2$
  - $\Delta < 0$: **Tre Ovali e un punto isolato**. *Es*: $p = \frac{160}{3} + 8\sqrt{32}$; $q = \frac{16}{9}\sqrt{32} + 16$
- $\Delta = 0$, $r \lessgtr 0$
  - $r < 0$
    - $\Omega_s < 0$: **Tre punti isolati e un'ovale**. *Es*: $p = 40$; $q = \frac{112}{9}$; $r = -48$
    - $\Omega_s > 0$
      - $k'_d > k'_s$: **Tre punti isolati e un trifolio**. *Es*: $p = \frac{64}{3}$; $q = \frac{80}{9}$; $r = -\frac{256}{9}$
      - $k'_d < k'_s$: **Tre nodi di 2.ª specie** *fig.* XVIII. *Es*. $p = 64$; $q = 16$; $r = -256$
    - $q = \frac{4}{3}\sqrt{2p}$; $r = -\frac{p^2}{12}$: **Ipocicloide di Steiner** *fig.* XVI
  - $r > 0$ ($p < 0$; $p^2 > 4r$ *altrimenti la curva é immaginaria*): **Tre nodi 1.ª specie** *fig.* XVII. *Es*. $p = -104$; $q = \frac{32}{9}$; $r = 1680$

NOTE ALLE FIGURE

Fig. VI. — Quando l' ovale interna al triangolo degli asintoti impiccolisce indefinitamente si ottiene l' unica cubica di genere zero che possegga tre assi di simmetria. Essa è costituita quindi da un ramo infinito di 2.ª specie e da un punto isolato all'origine.

Fig. VIII — È di questa forma la quartica già citata di Klein.

Fig. IX. — Se l'ovale interna si riduce a un punto la curva possiede un' ovale e un punto isolato all' origine.

Fig. X. — Anche in questa quando l'ovale interna è ridotta a un punto la quartica consta di un trifolio e di un punto isolato all' origine.

Fig. XII. — Questa quartica ha reali distinte tutte le sue 28 bitangenti, e di queste una sola è isolata; la retta all' infinito. Essa dà luogo a due casi limiti. Il trifolio interno ridotto a un punto isolato nel qual caso la curva consta di questo punto isolato e di tre ovali, oppure le tre ovali ridotte a tre punti e allora la curva è costituita di tre punti isolati e un trifolio.

Fig. XIV. — Abbiamo già dimostrato al §. 86 che la curva corrispondente a questa figura non può esistere; l' abbiamo quì disegnata perchè è anche dalla disposizione delle sue bitangenti di 1.ª specie che si riconosce non esservi alcuna quartica capace di assumere tale forma. È per questo che abbiamo tralasciato di disegnare tutte le bitangenti: se la curva esistesse le avrebbe tutte reali. Neppure esiste la quartica corrispondente al caso limite in cui l' ovale interna è ridotta a un punto isolato.

Fig. XV. — Essa come la XII. ha reali e distinte tutte le sue 28 bitangenti di cui 27 a distanza finita e una all' infinito. Però a differenza della XII. possiede 4 tangenti isolate invece di una sola.

Ammette due casi limiti: l'ovale interna ridotta a un punto: allora come nel 1.° dei casi limiti della figura XII. la curva consta di un punto isolato all' origine e di tre ovali; oppure le tre ovali ridotte a tre punti e la curva consta di tre punti isolati e un' ova'e.

Fig. XVIII -- Ha per caso limite la XVI. che è l' ipocicloide di Steiner.