TITO CHELLA

Vantaggi che si possono trarre da noti invarianti integrali e differenziali

IN ALCUNI PROBLEMI

DI INTEGRAZIONE

In due memorie comparse nei *Leipziger Berichte* (1897, pag. 342-357 e pag. 369-410) S. Lie si occupa del concetto di invariante integrale di un gruppo di trasformazioni e dimostra come la teoria di tali invarianti possa considerarsi come un particolare capitolo della teoria degli invarianti differenziali di un gruppo qualunque di trasformazioni, da lui sviluppata, per i gruppi finiti nella sua *Theorie der Transformationsgruppen (Erster Abschnitt)* e per i gruppi infiniti nei *Leipziger Berichte* (1891, pag. 361).

Nella prima delle due memorie stabilisce le equazioni che definiscono il più generale invariante integrale di un gruppo relativo ad una varietà qualunque e osserva come per i gruppi finiti ne esistano di relativi a una varietà di qualsiasi dimensione. Nella seconda memoria mostra come altrettanto non si possa dire affatto per i gruppi infiniti, per i quali, relativamente all'esistenza sia degli invarianti integrali che degli invarianti differenziali, possono presentarsi i casi più svariati, e dà alcuni teoremi che, in casi particolari, offrono la forma più generale di essi invarianti.

In un'altra parte di quest'ultima memoria si occupa dei vantaggi che si possono trarre dalla conoscenza di noti invarianti integrali di un gruppo ad un parametro generato da una trasformazione infinitesimale Xf nell'integrazione dell'equazione $Xf=0$. Trattando dapprima il caso particolare in cui, dovendosi integrare l'equazione

$$Xf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

si conosca un invariante integrale di superficie

$$\int \varphi\,(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}\,,\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale Xf, trova il notevole risultato che, sotto certe condizioni poco restrittive, può, in taluni casi, risolversi l'equazione $Xf = 0$ senza alcuna operazione di integrazione, in altri con una quadratura, nei casi più sfavorevoli che si può ottenere un moltiplicatore di Jacobi dell'equazione $Xf = 0$. I risultati in tal modo ottenuti non sono da considerarsi come definitivi, nel senso che non è dimostrato che con essi si sieno ottenuti tutti i vantaggi possibili.

In seguito considera il problema più generale trattandolo sotto un altro punto di vista, cioè dal punto di vista della teoria dei gruppi e riducendo il problema all'integrazione di un sistema di equazioni alle derivate parziali, che ammette un gruppo, finito o infinito, di trasformazioni. È con questo metodo che si possono ottenere le operazioni che sono veramente necessarie per la risoluzione dell'equazione $Xf = 0$. Sempre sotto questo aspetto il Lie considera il problema in una memoria sui *Videnskabs selskabets Skrifter-Christiania. (Ueber Integralinvarianten und Differentialgleichungen, 1902)*, dove mostra, con la considerazione di un caso molto particolare, come queste sue teorie sieno suscettibili di una pratica applicazione.

Il presente lavoro non è svolto secondo queste ultime teorie, le quali, è bene osservarlo, sono ben lungi dall'essere complete, ma si basa sulle considerazioni stesse con cui il Lie tratta, nella seconda delle due prime memorie, il caso dell'integrazione dell'equazione: $Xf \equiv \xi \dfrac{\partial f}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial f}{\partial y} + \zeta \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$ quando la trasformazione infinitesimale Xf ammette un noto invariante integrale $\int \varphi\,(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$. In esso mi occupo di questioni analoghe a questa, o più generali, ottenendo sempre dei risultati interessanti e non privi talvolta di una certa eleganza. Così, dopo avere stabilito nel § 1 alcune proposizioni, alle quali ripetutamente devo in seguito ricorrere, considero nel § 2 i vantaggi che si possono trarre dalla conoscenza di $n-1$

integrali di ipersuperficie

$$\int \varphi_i \, (x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

con

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \; p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \; \ldots, \; p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

che rimangono invarianti per la trasformazione infinitesimale

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

e, sotto l'ipotesi che il determinante funzionale

$$\frac{\partial \, (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \xi_n p_n - \zeta)}{\partial \, (p_1, p_2, \ldots, p_n)}$$

non si annulli in conseguenza del sistema

$$\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_{n-1} = 0, \quad \xi_1 p_1 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta = 0,$$

riesco o a determinare, con sole operazioni di eliminazione e di derivazione, n trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf, o, con una operazione d'ordine uno, riduco il problema a quello dell'integrazione di una equazione $Yf = 0$ in n variabili, che ammette $n-1$ note trasformazioni infinitesimali.

Nel § 3 estendo le considerazioni del § 2 al caso in cui sia noto un invariante differenziale

$$\varphi \, (x, y, z, p, q) \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

che ammette la trasformazione infinitesimale $Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$; dimostro come in questa ipotesi si possano ottenere, in generale, senz'altre operazioni che di eliminazione e di derivazione, diversi moltiplicatori di Jacobi dell'equazione $Xf = 0$ e nei casi più sfavorevoli può ottenersi un tale moltiplicatore con sole quadrature; e che d'altra parte, appena noto un moltiplicatore, si possono determinare due trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf, indipendenti da questa e tra loro, mediante le quali l'equazione $Xf=0$ può risolversi con altre due quadrature.

Nei §§ 4, 5, 6 considero un caso più generale, nel quale si conoscono $k-1$ invarianti differenziali

$$\varphi_i\,(x_1,\ldots,x_n,z,p_1,\ldots,p_n) \quad (i=1,2,\ldots k-1)$$

ed h invarianti integrali

$$\int \psi_j\,(x_1,\ldots,x_n,z,p_1,\ldots,p_n)\,dx_1\ldots dx_n \quad (j=1,2,\ldots,h)$$

del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale

$$Xf=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z},$$

e di più sono note $n-h-k$ trasformazioni infinitesimali

$$X_2 f=\xi_1^r\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2^r\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+\xi_n^r\frac{\partial f}{\partial x_n}+\zeta^r\frac{\partial f}{\partial z}$$

ammesse dall'equazione $Xf=0$; sotto la condizione che un certo determinante non si annulli in conseguenza di un certo sistema di equazioni ottengo sempre, nei casi più sfavorevoli con qualche quadratura, o con una sola operazione d'ordine 1, di ridurre il problema dell'integrazione dell'equazione $Xf=0$ ai noti problemi di Lie dell'integrazione di una equazione $Yf=0$ in m variabili con $m-1$ note trasformazioni infinitesimali, o a quella di un sistema completo

$$Y_1 f=0\ ,\quad Y_2 f=0\,,\ldots,\ Y_q f=0$$

in m variabili con $m-q$ note trasformazioni infinitesimali.

Questi risultati si possono estendere anche al caso in cui si conosca un determinato numero di invarianti integrali e differenziali di un gruppo a più parametri. Per darne un esempio suppongo, nel § 7, che sia noto un invariante differenziale

$$\varphi\,(x,y,z,u,p,q,r) \quad \left(p=\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\quad q=\frac{\partial u}{\partial y}\ ,\quad r=\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

del gruppo a due parametri generato dalle due trasformazioni infinitesimali indipendenti

$$ {}_1f = \xi^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta^1 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega^1 \frac{\partial f}{\partial u} \, , \; \mathrm{X}_2 f = \xi^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta^2 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta^2 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega^2 \frac{\partial f}{\partial u} \, . $$

Qui la conoscenza dell'integrante differenziale ci permette, coll'ipotesi che in conseguenza del sistema

$$ \varphi = a \; , \; \pi_1 \equiv \xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1 = 0 \; , \; \pi_2 \equiv \xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2 = 0 $$

non si annulli il determinante $\frac{\partial (\varphi, \pi_1, \pi_2)}{\partial (p, q, r)}$, di determinare, con sole operazioni di eliminazione e di differenziazione in generale, alcuni moltiplicatori del sistema completo $\mathrm{X}_1 f = 0$, $\mathrm{X}_2 f = 0$, oppure di fare questa determinazione con sole quadrature: anche qui la conoscenza di un moltiplicatore del sistema completo $\mathrm{X}_1 f = 0$, $\mathrm{X}_2 f = 0$ permette di determinare 2 trasformazioni infinitesimali, indipendenti tra loro e dalle $\mathrm{X}_1 f$, $\mathrm{X}_2 f$, ammesse dal sistema

$$ \mathrm{X}_1 f = 0 \quad , \quad \mathrm{X}_2 f = 0 \, , $$

il quale può quindi risolversi con altre due quadrature.

I risultati ottenuti si possono estendere, come facilmente può vedersi, al caso in cui, invece di esser noti invarianti integrali o differenziali del 1.° ordine relativi alla varietà

$$ z = z \, (x_1, x_2, \ldots, x_n) $$

dello spazio su cui opera la trasformazione infinitesimale

$$ \mathrm{X} f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} \, , $$

sono noti invarianti integrali o differenziali del primo ordine relativi alla varietà

$$ \Phi = \Phi \, (x_1, x_2, \ldots, x_n, z) $$

dove Φ è una variabile sulla quale la $\mathrm{X} f$ non opera.

Diciamo per ultimo che non rimane affatto dimostrato che i vantaggi ottenuti in tutti questi casi dalla conoscenza degli invarianti integrali e differenziali siano tutti i possibili.

§ 1.

Proposizioni preliminari.

Nello svolgimento di questo lavoro dovremo ripetutamente servirci di alcune proposizioni; per non interrompere in seguito il corso del ragionamento colla loro dimostrazione, e per potere più facilmente e con maggiore brevità richiamarle tutte le volte che ne avremo bisogno, senza incorrere in ripetizioni, riteniamo opportuno di raccoglierle nel primo paragrafo sotto forma di altrettanti lemmi.

Lemma I. — *Se tra le due trasformazioni infinitesimali*

$$\mathrm{A}f = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$\mathrm{X}f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sussiste la relazione

$$(\mathrm{A}, \mathrm{X}) f = \bar{\nu}\, \mathrm{A}f ,$$

ove $\bar{\nu}$ *indica una funzione delle variabili* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *e si conosce una soluzione* φ *dell'equazione*

$$\mathrm{X}\varphi + \eta \bar{\nu} \varphi = 0$$

(con η *costante), la trasformazione infinitesimale*

$$\mathrm{B}f = \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{\eta}}}\, \mathrm{A}f$$

è permutabile colla $\mathrm{X}f$.

Dall'equazione $\mathrm{X}\varphi + \eta \bar{\nu} \varphi = 0$, moltiplicando per $\frac{1}{\eta} \varphi^{\frac{1}{\eta} - 1}$, si ottiene:

$$\mathrm{X}\varphi^{\frac{1}{\eta}} + \bar{\nu} \varphi^{\frac{1}{\eta}} = 0 ,$$

E siccome si ha:

$$(B, X) f = \frac{1}{\varphi^{\frac{1}{\eta}}} (A, X) f - X \left(\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{\eta}}}\right) A f ,$$

poichè è:

$$(A, X) f = \bar{\nu} A f \ , \quad X \left(\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{\eta}}}\right) = - \frac{1}{\left(\varphi^{\frac{1}{\eta}}\right)^2} X \varphi^{\frac{1}{\eta}} = \frac{\bar{\nu}}{\varphi^{\frac{1}{\eta}}} ,$$

risulta:

$$(B, X) f = 0 .$$

Lemma II. — *Se*

$$A f \equiv \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} , \ B f \equiv \beta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \beta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$X_i f \equiv \xi_1^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sono $n+2$ *trasformazioni infinitesimali tra le quali sussiste la relazione*

$$(A, B) f = \sum_1^n {}_i \lambda_i X_i f , \tag{1}$$

si ha:

$$A \left(\sum_1^n {}_j \frac{\partial \beta_j}{\partial x_j}\right) - B \left(\sum_1^u {}_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j}\right) = \sum_1^n \lambda_i \sum_1^n {}_j \frac{\partial \xi_j^{(i)}}{\partial x_j} + \sum_1^n {}_i X_i (\lambda_i) .$$

Dalla (1) si ricava infatti:

$$A (\beta_1) - B (\alpha_1) = \sum_1^n {}_i \lambda_i \xi_1^{(i)}$$

$$A (\beta_2) - B (\alpha_2) = \sum_1^n {}_i \lambda_i \xi_2^{(i)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A (\beta_n) - B (\alpha_n) = \sum_1^n {}_i \lambda_i \xi_n^{(i)} .$$

Derivando la prima di queste identità rispetto ad x_1, la seconda rispetto ad $x_2, \ldots,$ l'ultima rispetto ad x_n, e sommando membro a membro, nel primo membro otteniamo:

$$\sum_1^n{}_t \frac{\partial}{\partial x_t}\Big(\mathrm{A}(\beta_t) - \mathrm{B}(\alpha_t)\Big) = \sum_1^n{}_t \frac{\partial}{\partial x_t}\left\{\sum_1^n{}_s \alpha_s \frac{\partial \beta_t}{\partial x_s} - \sum_1^u{}_s \beta_s \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_s}\right\} =$$

$$\sum_1^n{}_t \sum_1^n{}_s \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_t}\frac{\partial \beta_t}{\partial x_s} + \sum_1^n{}_t \sum_1^n{}_s \alpha_s \frac{\partial^2 \beta_t}{\partial x_t\, \partial x_s} - \sum_1^n{}_t \sum_1^n{}_s \frac{\partial \beta_s}{\partial x_v}\frac{\partial \alpha_t}{\partial x_s} - \sum_1^n{}_t \sum_1^n{}_s \frac{\partial^2 \alpha_t}{\partial x_t\, \partial x_s} =$$

$$= \sum_1^n{}_s \alpha_s \frac{\partial}{\partial x_s} \sum_1^n{}_t \frac{\partial \beta_t}{\partial x_t} - \sum_1^n{}_s \beta_s \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\sum_1^n{}_t \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_t}\right) = \mathrm{A}\left(\sum_1^n{}_t \frac{\partial \beta_t}{\partial x_t}\right) - \mathrm{B}\left(\sum_1^n{}_t \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_t}\right).$$

E pel secondo membro si ha certamente

$$\sum_1^n{}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_1^k{}_i \lambda_i\, \xi_j^{(i)} = \sum_1^k{}_i \lambda_i \sum_1^n{}_j \frac{\partial \xi_j^{(i)}}{\partial x_j} + \sum_1^k{}_i \mathrm{X}_i(\lambda_i).$$

Ne risulta la formola (2).

Lemma III. — *Se nella trasformazione infinitesimale*

$$\mathrm{A}f \equiv \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

si eseguisce la trasformazione

$$x'_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)\ ;\ x'_1 = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n)\ ;\ \ldots\ ;\ x'_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$$

e indichiamo con

$$\alpha'_1 \frac{\partial f}{\partial x'_1} + \alpha'_2 \frac{\partial f}{\partial x'_2} + \ldots + \alpha'_n \frac{\partial f}{\partial x'_n}$$

la trasformata di $\mathrm{A}f$, *si ha:*

$$\sum_1^n{}_j \frac{\partial \alpha'_j}{\partial x'_j} = \sum_1^n{}_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \mathrm{A} \log \mathrm{D}$$

ove è:

$$\mathrm{D} = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Se nel determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

indichiamo con $D_{i,k}$ il complemento algebrico dell'elemento $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}$, si ha subito, quando si pensino $x_1, x_2, \ldots, x_n$, come funzioni di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$:

$$\frac{\partial x_k}{\partial\varphi_i} = \frac{A_{i,k}}{D},$$

ed essendo

$$\frac{\partial\alpha'_i}{\partial x'_i} = \sum_1^n{}_k \frac{\partial\alpha'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial\varphi_i}$$

otteniamo:

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial\alpha'_i}{\partial x'_i} = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k \frac{\partial\alpha'_i}{\partial x_k} \frac{A_{i,k}}{D}.$$

Ma, poichè si ha

$$\alpha'_i = \sum_1^n{}_j \alpha_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j},$$

dalla precedente eguaglianza risulta:

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial\alpha'_i}{\partial x'_i} = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k \frac{A_{i,k}}{D} \sum_1^n{}_j \frac{\partial\alpha_j}{\partial x_k} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k \frac{A_{i,k}}{D} \sum_1^n{}_j \alpha_j \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Ora, sommando rispetto ad i, si ha

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k \frac{A_{i,k}}{D} \sum_1^n{}_j \frac{\partial\alpha_j}{\partial x_k} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} = \sum_1^n{}_j \frac{\partial\alpha_j}{\partial x_j}$$

e di più

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_k \frac{A_{i,k}}{D} \sum_1^n{}_j \alpha_j \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_1^n{}_j \alpha_j \sum_{i,k}^{1-n} \frac{A_{i,k}}{D} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_1^n{}_j \alpha_j \frac{\partial \log D}{\partial x_j} = A\,(\log D$$

Segue, come volevamo:

$$\sum_1^n{}_i \frac{\partial \alpha'_i}{\partial x'_i} = \sum_1^n{}_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \mathrm{A}\,(\log \mathrm{D}).$$

Lemma IV. — *Se le n trasformazioni infinitesimali*

$$\mathrm{A}_1 f,\ \mathrm{A}_2 f, \ldots, \mathrm{A}_n f,\ \mathrm{A}_i f = \alpha_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2^i \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sono legate dalle relazioni

$$\mathrm{A}_i \left(\mathrm{A}_k (f)\right) - \mathrm{A}_k \left(\mathrm{A}_i (f)\right) = \lambda'_{i,k}\, \mathrm{A}_1 f + \ldots + \lambda^n_{i.k}\, \mathrm{A}_n f$$

e di più è il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \ldots . & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \ldots . & \alpha_n^2 \\ . & . \quad . \quad . & . \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n \ldots . & \alpha_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

si ha:

$$\mathrm{A}_i\,(\log \Delta) - \sum_1^n{}_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} = \lambda^1_{i,1} + \lambda^2_{i,2} + \ldots + \lambda^{i-1}_{i,i-1} + \lambda^{i+1}_{i,i+1} + \ldots + \lambda^n_{i,n}.$$

(Per la dimostrazione di questa proposizione si veda S. Lie, *Mathematische Annalen,* Bd. XI, pag. 510).

In ciò che segue suppongo nota la conoscenza della teoria dei moltiplicatori di un sistema completo, svolta da S. Lie nel tomo XI dei *Mathematische Annalen,* e che è la generalizzazione della teoria dei moltiplicatori di Jacobi relativi ad una sola equazione $\mathrm{A}f = 0$. Aggiungerò qui un teorema che ci permette di porre le equazioni che definiscono il più generale moltiplicatore di un sistema completo sotto una forma per noi più vantaggiosa di quella che si trova nella detta memoria (a pag. 505).

Lemma V. — *Il moltiplicatore di un sistema completo di equazioni*

$$(1)\quad \mathrm{A}_i f \equiv \alpha_1^i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2^i \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n^i \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

se sono soddisfatte le relazioni

$$(2)\qquad (A_i\,, A_k)\, f = \lambda^1_{i,k}\, A_1 f + \lambda^2_{i,k}\, A_2 f + \dots + \lambda^n_{i,k}\, A_r f\,,$$

è definito dal sistema di equazioni

$$A_i(M) + \left[\sum_1^n{}_j \frac{\partial \alpha^i_j}{\partial x_j} + \lambda^1_{i,1} + \lambda^2_{i,2} + \dots + \lambda^{i-1}_{i,i-1} + \lambda^{i+1}_{i,i+1} + \dots + \lambda^r_{i,r}\right] M = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots, r).$$

Dimostrazione. — Secondo quanto risulta dalla memoria citata (a pag. 505) il moltiplicatore M più generale del sistema

$$(1)\qquad A_i f \equiv \alpha^i_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha^i_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \alpha^i_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (i = 1, 2, \dots, r)$$

è definito dal seguente sistema di equazioni

$$(3)\quad \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\begin{vmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \dots \alpha^1_r \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \dots \alpha^2_r \\ \dots & \dots \\ \alpha^r_1 & \alpha^r_2 \dots \alpha^r_r \end{vmatrix} M\right\} + \sum_1^{n-r}{}_i \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left\{\begin{vmatrix} \alpha^1_1 \dots \alpha^1_{k-1} & \alpha^1_{r+i} & \alpha^1_{k+1} \dots \alpha^1_r \\ \alpha^2_1 \dots \alpha^2_{k-1} & \alpha^2_{r-i} & \alpha^2_{k+1} \dots \alpha^2_r \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^r_1 \dots \alpha^r_{k-1} & \alpha^r_{r+i} & \alpha^r_{k+1} \dots \alpha^r_r \end{vmatrix} M\right\} = 0$$
$$(k = 1, 2, \dots, r).$$

Poniamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \dots \alpha^1_r \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \dots \alpha^2_r \\ \dots & \dots \\ \alpha^r_1 & \alpha^r_2 \dots \alpha^r_r \end{vmatrix}\,, \quad \Delta_{k,i} = \begin{vmatrix} \alpha^1_1 \dots \alpha^1_{k-1} & \alpha^1_{r+i} & \alpha^1_{k+1} \dots \alpha^1_r \\ \alpha^2_1 \dots \alpha^2_{k-1} & \alpha^2_{r+i} & \alpha^2_{k+1} \dots \alpha^2_r \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^r_1 \dots \alpha^r_{k-1} & \alpha^r_{r+i} & \alpha^r_{k+1} \dots \alpha^r_r \end{vmatrix}$$

e notiamo che, sviluppando il determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \dots \alpha^1_r & \alpha^1_{r+i} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^r_1 & \alpha^r_2 \dots \alpha^s_r & \alpha^r_{r+i} \\ \alpha^s_1 & \alpha^s_r \dots \alpha^s_r & \alpha^s_{r+i} \end{vmatrix} = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, r)$$

per gli elementi dell' ultima linea, si ottiene immediatamente

$$(4) \qquad \sum_{1}^{r}{}_k \Delta_{k,i}\, \alpha_k^s = \Delta\, \alpha_{r+i}^s .$$

Colle posizioni fatte il sistema (3) prenderà la forma

$$\frac{\partial(\Delta M)}{\partial x_k} + \sum_{1}^{n-r}{}_i \frac{\partial(\Delta_{k,i} M)}{\partial(x_{r+i})} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

o, se si vuole,

$$\Delta \frac{\partial M}{\partial x_k} + \sum_{1}^{n-r}{}_i \Delta_{k,i} \frac{\partial M}{\partial x_{r+i}} + M\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_k} + \sum_{1}^{n-r}{}_i \frac{\partial \Delta_{k,i}}{\partial x_{r+i}}\right) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Moltiplicando per α_k^s e sommando rispetto a k da 1 ad r, quando si tenga conto della (4), risulta:

$$\Delta . A_s(M) + M \sum_{1}^{r}{}_k \alpha_k^s \frac{\partial \Delta}{\partial x_k} + M \sum_{1}^{n-r}{}_i \sum_{1}^{r}{}_k \alpha_k^s \frac{\partial \Delta_{k,i}}{\partial x_{r+i}} = 0 .$$

Ma dalla (4), derivando rispetto ad x_{r+i}, risulta:

$$\sum_{1}^{r}{}_k \alpha_k^s \frac{\partial \Delta_{k,i}}{\partial x_{r+i}} = - \sum_{1}^{r}{}_k \Delta_{k,i} \frac{\partial \alpha_k^s}{\partial x_{r+i}} + \alpha_{r+i}^s \frac{\partial \Delta}{\partial x_{r+i}} + \Delta \frac{\partial \alpha_{r+i}^s}{\partial x_{r+i}} .$$

Sostituendo nella equazione precedente troviamo:

$$(5) \quad \Delta A_s(M) + M A_s(\Delta) + M \Delta \sum_{1}^{n-r}{}_i \frac{\partial \alpha_{r+i}^s}{\partial x_{r+i}} - M \sum_{1}^{n-r}{}_i \sum_{1}^{r}{}_k \Delta_{k,i} \frac{\partial \alpha_k^s}{\partial x_{r+i}} = 0 .$$

Se ora indichiamo con $[\alpha_k^j]$ il complemento algebrico dell'elemento α_k^j nel determinante Δ, si ha da una parte

$$(6) \qquad \sum_{1}^{n-r}{}_i \sum_{1}^{r}{}_k \Delta_{k.i} \frac{\partial \alpha_k^s}{\partial x_{r+i}} = \sum_{1}^{n-r}{}_i \sum_{1}^{r}{}_k \sum_{1}^{r}{}_j \alpha_{r+k}^j [\alpha_k^j] \frac{\partial \alpha_k^s}{\partial x_{r+i}} .$$

D'altra parte si ottiene:

$$A_s(\Delta) = \sum_1^r{}_j \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots\ldots & \alpha_r^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{j-1} & \alpha_2^{j-1} & \ldots\ldots & \alpha_r^{j-1} \\ A_s(\alpha_1^j) & A_s(\alpha_2^j) & \ldots & A_s(\alpha_r^j) \\ \alpha_1^{j+1} & \alpha_2^{j+1} & \ldots\ldots & \alpha_r^{j+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \ldots\ldots & \alpha_r^r \end{vmatrix} .$$

E poichè dalla (2) segue

$$A_s(\alpha_k^j) - A_j(\alpha_k^s) = \lambda_{s,j}^1 \; \alpha_k^1 + \lambda_{s,j}^2 \; \alpha_k^2 + \ldots + \lambda_{s,j}^r \; \alpha_k^r ,$$

ponendo

$$D_{s,j} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^1 & \ldots\ldots & \alpha_r^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{j-1} & \alpha_2^{j-1} & \ldots\ldots & \alpha_r^{j-1} \\ A_j(\alpha_1^s) & A_j(\alpha_2^s) & \ldots & A_j(\alpha_r^s) \\ \alpha_1^{j+1} & \alpha_2^{j+1} & \ldots\ldots & \alpha_r^{j+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \ldots\ldots & \alpha_r^r \end{vmatrix}$$

avremo:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots\ldots & \alpha_r^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{j-1} & \alpha_2^{j-1} & \ldots\ldots & \alpha_r^{j-1} \\ A_s(\alpha_1^j) & A_s(\alpha_2^j) & \ldots & A_s(\alpha_r^j) \\ \alpha_1^{j+1} & \alpha_2^{j+1} & \ldots\ldots & \alpha_r^{j+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^r & \alpha_2^r & \ldots\ldots & \alpha_r^r \end{vmatrix} = D_{s,j} + \lambda_{s.j}^j \, \Delta$$

e perciò:

$$(7) \qquad A_s(\Delta) = \sum_1^r{}_j D_{s,j} + \Delta \sum_1^r{}'_j \lambda^j_{s,j}$$

(ove la sommatoria $\sum_1^r{}'_j$ si intende estesa da 1 fino ad r con esclusione del valore $j = s$).

Inoltre abbiamo:

$$D_{s,j} = \sum_1^r{}_k A_j(\alpha^s_k)[\alpha^j_k] = \sum_1^r{}_k \sum_1^n{}_l \alpha^j_l \frac{\partial \alpha^s_k}{\partial x_l}[\alpha^j_k],$$

quindi:

$$\sum_1^r{}_j D_{s,j} = \sum_1^r{}_l \sum_1^r{}_k \sum_1^r{}_j \alpha^j_l [\alpha^j_k] \frac{\partial \alpha^s_k}{\partial x_l} + \sum_1^{n-r}{}_i \sum_1^r{}_k \sum_1^r{}_l \alpha^j_{r+i} [\alpha^j_k] \frac{\partial \alpha^s_k}{\partial x_{r+i}};$$

e poichè è

$$\sum_1^r{}_j \alpha^j_l [\alpha^j_k] = 0 \quad , \quad \sum_1^r{}_j \alpha^j_l [\alpha^j_l] = \Delta ,$$

otteniamo:

$$\sum_1^r{}_j D_{s,j} = \Delta \sum_1^r{}_l \frac{\partial \alpha^s_l}{\partial x_l} + \sum_1^{n-r}{}_i \sum_1^r{}_k \sum_1^r{}_j \alpha^j_{r+i} [\alpha^j_k] \frac{\partial \alpha^s_k}{\partial x_{r+i}} .$$

Sostituendo nella (7) ed in seguito il valore così ottenuto per $A_s(\Delta)$ nella (5), tenendo conto della (6) si ha:

$$\Delta A_s(M) + \Delta M \sum_1^r{}_l \frac{\partial \alpha^s_l}{\partial x_l} + \Delta M \sum_1^{n-r} \frac{\partial \alpha^s_{r+i}}{\partial x_{r+i}} + \Delta M \sum_1^r{}'_j \lambda^j_{s,j} = 0;$$

più brevemente potremo scrivere

$$\Delta \left[A_s(M) + M \sum_1^n{}_l \frac{\partial \alpha^s_l}{\partial x_l} + M \sum_1^r{}'_j \lambda^j_{s,j} \right] = 0;$$

dividendo per $\Delta \neq 0$ otteniamo le equazioni volute.

§ 2.

Utilizzazione di $n-1$ invarianti integrali del primo ordine di ipersuperficie che ammettono la trasformazione infinitesimale

$$Xf \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} .$$

1. — Si conoscano $n-1$ integrali relativi ad una qualunque ipersuperficie $z = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ dello spazio $z, x_1, \ldots, x_n$ ad $n-1$ dimensioni, invarianti del primo ordine del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale

$$Xf = \xi_1(x_1, \ldots, x_n, z) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2(x_1, \ldots, x_n, z) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots +$$
$$+ \xi_n(x_1, \ldots, x_n, z) \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta(x_1, \ldots, x_n, z) \frac{\partial f}{\partial z} .$$

Supponiamo che essi siano

$$(1) \qquad \begin{cases} \int \varphi_1 \ (x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \int \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n \end{cases}$$

dove abbiamo posto

$$p_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} , \quad p_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} , \ldots , p_n = \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} .$$

Se formiamo la prolungata $X'f$ del primo ordine della Xf, considerando questa come agente sulle $p_1, p_2, \ldots, p_n$, troviamo:

$$(2) \qquad X'f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} +$$
$$+ \left\{ \zeta_{x_1} + p_1 \zeta_z - p_1 (\xi_{1,x_1} + p_1 \xi_{1,z}) - p_2 (\xi_{2,x_1} + p_1 \xi_{2,z}) - \ldots - p_n (\xi_{n,x_1} + p_1 \xi_{n,z}) \right\} \frac{\partial f}{\partial p_1} +$$
$$+ \ldots + \left\{ \zeta_{x_n} + p_n \xi_z - p_1 (\xi_{1,x_n} + p_n \xi_{1,z}) - \ldots - p_n (\xi_{n,x_n} + p_n \xi_{n,z}) \right\} \frac{\partial f}{\partial p_n}$$

o anche, se si vuole

$$(2') \quad X'f = [\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \dots + \xi_n p_n - \zeta, f] - (\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \dots + \xi_n p_n) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Poichè gli integrali (1) sono invarianti per la trasformazione infinitesimale Xf dovremo avere: (V. Leipziger Berichte 1897, pag. 347)

$$(3) \quad X'(\varphi_i) + (\xi_{1,x_1} + p_1 \xi_{1,z} + \xi_{2,x_2} + p_2 \xi_{2,z} + \dots + \xi_{n,x_n} + p_n \xi_{n,z}) \varphi_i = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Ricordiamo ora che, dalla teoria delle trasformazioni di contatto si sa che, se si pone

$$B_i f = \frac{\partial W_i}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial W_i}{\partial p_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial W_i}{\partial p_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} +$$
$$+ \left(p_1 \frac{\partial W_i}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial W_i}{\partial p_2} + \dots + p_n \frac{\partial W_i}{\partial p_n} - W_i\right) \frac{\partial f}{\partial z} -$$
$$- \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial W_i}{\partial z}\right) \frac{\partial f}{\partial p_1} - \dots - \left(\frac{\partial W_i}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial W_i}{\partial z}\right) \frac{\partial f}{\partial p_n} \quad (i = 1, 2),$$

e, se si vuole, con l'uso delle parentesi quadre di Poissons,

$$B_i f = [W_i, f] - W_i \frac{\partial f}{\partial z} \quad (i = 1, 2).$$

ed inoltre

$$Bf = [W, f] - \frac{\partial f}{\partial z}$$

con

$$W = [W_1, W_2] - W_1 \frac{\partial W_2}{\partial z} + W_2 \frac{\partial W_1}{\partial z}$$

tra le trasformazioni infinitesimali (di contatto) $B_1 f$, $B_2 f$, Bf sussiste la relazione

$$Bf = (B_1, B_2) f.$$

(Per la dimostrazione si veda S. Lie: *Theorie der Transformations gruppen.* Bd. II [1])).

Se noi facciamo

$$W_1 = \varphi_i \ , \quad W_2 = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta$$

si ottiene

$$W = [\varphi_i \, , \xi_1 p_1 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta] - \varphi_i \, (\xi_{1,z} \, p_1 + \xi_{2,z} p_2 + \ldots + \xi_{n,z} p_n - \zeta_z) +$$
$$+ \varphi_{i,z} \, (\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n \, p_n - \zeta) \, ,$$

ed aggiungendo al secondo membro di questa eguaglianza il primo membro della (3), che è identicamente nullo, si trova (tenendo conto della (2′))

$$W = \varphi_i \, (\xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z) \, .$$

Se poniamo dunque

$$A_i f = [\varphi_i \, , f] - \varphi_i \frac{\partial f}{\partial z} =$$
$$= \varphi_{i,p_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varphi_{i,p_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \varphi_{i,p_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} + (p_1 \varphi_{i,p_1} + \ldots + p_n \varphi_{i,p_n} - \varphi_i) \frac{\partial f}{\partial z} -$$
$$- (\varphi_{i,x_1} + p_1 \varphi_{i,z}) \frac{\partial f}{\partial p_1} - (\varphi_{i,x_2} + p_2 \varphi_{i,z}) \frac{\partial f}{\partial p_3} - \ldots - (\varphi_{i,x_n} + p_n \varphi_{i,z}) \frac{\partial f}{\partial p_n}$$

per la proposizione anzidetta, relativa alle trasformazioni infinitesimali di contatto, troviamo che tra le trasformazioni infinitesimali

[1]) La proprietà richiamata (delle trasformazioni infinitesime di contatto) è una conseguenza delle proprietà delle parentesi quadre di Poissons e risulta subito dall'applicazione della nota formula. (E. Goursat. *Equations aux dérivées partielles du premier ordre,* chap. VI)

$$\Big[[W_1 \, , W_2] \, , f\Big] + \Big[[W_2 \, , f] \, , W_1\Big] + \Big[[f, W_1] \, , W_2\Big] = \frac{\partial W_1}{\partial z} [f, W_2] +$$
$$+ \frac{\partial W_2}{\partial z} [W \, , f] + \frac{\partial f}{\partial z} [W_1 \, , W_2] \, .$$

$A_i f\ (i=1,2,\ldots,n-1)$ ed Xf sussistono le relazioni

$$A_i\Big(X'(f)\Big)-X'\Big(A_i(f)\Big)=\Big[\varphi_i\,(\xi_{1,x_1}+\xi_{2,x_2}+\ldots+\xi_{n,x_n}+\zeta_z\,,f)\Big]-$$
$$-\varphi_i\,(\xi_{1,x_1}+\ldots+\xi_{n,x_n}+\zeta_z)\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

o, che è lo stesso,

$$(4)\qquad A_i\Big(X'(f)\Big)-X'\Big(A_i(f)\Big)=(\xi_{1,x_1}+\ldots+\xi_{n,x_n}+\zeta_z)\,A_i f+$$
$$+\varphi_i\,[\xi_{1,x_1}+\ldots+\xi_{n,x_n}+\zeta_z\,,f].$$

Di più dalla (2') otteniamo:

$$X'(\xi_1 p_1+\xi_2 p_2+\ldots+\xi_n p_n-\zeta)=-(\xi_1 p_1+\ldots+\xi_n p_n-\zeta)\,(\xi_{1,z}\,p_1+\ldots+\xi_{n,z}\,p_n-\zeta_z)\,.$$

Questa relazione, unita alle (3), prova che il sistema delle n equazioni

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi_1\ (x_1,\ldots,x_n,z,p_1,\ldots,p_n)=0\\ \varphi_2\ (x_1,\ldots,x_n,z,p_1,\ldots,p_n)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n,z,p_1,\ldots,p_n)=0\\ \xi_1\,p_1+\xi_2\,p_2+\ldots+\xi_n\,p_n-\zeta=0\,. \end{cases}$$

ammette la trasformazione infinitesimale $X'f$.

2. — Facciamo ora l'ipotesi, che manterremo sempre nel presente paragrafo, che gli $n-1$ integrali (1) sieno tali che il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_{1,p_1} & \varphi_{1,p_2}\cdots & \varphi_{1,p_n}\\ \varphi_{2,p_1} & \varphi_{2,p_2}\cdots & \varphi_{2,p_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_{n-1,p_1} & \varphi_{n-1,p_2}\cdots & \varphi_{n-1,p_n}\\ \xi_1 & \xi_2\ \ldots\ldots & \xi_n \end{vmatrix}$$

non si annulli in conseguenza del sistema (5) e che quindi il sistema (5) sia risolubile rispetto a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ [1]). I valori di p_1, $p_2, \ldots, p_n$, che si ottengono per risoluzione da questo sistema, sieno

$$p_1 = P_1(x_1, \ldots, x_n, z) \quad , \quad p_2 = P_2(x_1, \ldots, x_n, z), \ldots ,$$
$$p_n = P_n(x_1, \ldots, x_n, z) ,$$

ed indichiamo con

$$\alpha_{i,1} \ , \ \alpha_{i,2} \ , \ \ldots \ , \ \alpha_{i,n} \ , \ \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ciò che diventano rispettivamente

$$\varphi_{i,p_1} \ ; \ \varphi_{i,p_2} \ ; \ \ldots \ ; \ \varphi_{i,p_n} \ ; \ p_1 \varphi_{i,p_1} + \ldots + p_n \varphi_{i,p_n} - \varphi_i$$

quando in queste quantità in luogo di $p_1, p_2, \ldots, p_n$ si ponga P_1, $P_2, \ldots, P_n$.

---

1) Vediamo subito che, qualunque sia la trasformazione infinitesimale Xf, esistono invarianti integrali soddisfacenti a questa condizione. Ed infatti la loro funzione integranda φ deve soddisfare alla (3); se allora scriviamo questa equazione sotto la forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = A_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \ldots + A_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + B \frac{\partial \varphi}{\partial z} + C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \ldots + C_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} + D\varphi$$

e ammettiamo che le A_i, B, C_i, D sieno funzioni olomorfe regolari nell'intorno di un punto

$$x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n \ , \ z = b \ , \ p_1 = c_1 \ldots p_n = c_n ,$$

se sono

$$\psi_1(x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) \ , \ \ldots \ , \ \psi_{n-1}(x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$$

$n-1$ funzioni regolari nell'intorno del punto $x_2 = a_2, \ldots\ldots, x_n = a_n$, $z = b$, $p_1 = c_1, \ldots\ldots, p_n = c_n$ tali che il determinante funzionale $\dfrac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}, \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta)}{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$ non si annulli in conseguenza del sistema $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_{n-1} = 0, \xi_1 p_1 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta = 0$, esisteranno $n-1$ soluzioni della (3) che per $x_1 = a_1$ si riducono rispettivamente a $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$. Corrispondentemente a queste soluzioni si avranno $n-1$ invarianti integrali soddisfacenti alla condizione voluta.

Dal fatto che il determinante funzionale

$$\frac{\partial\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \xi_1 p_1 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta)}{\partial\,(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$$

non si annulla in conseguenza del sistema (5) segue immediatamente che il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \ldots\ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \ldots\ldots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} \ldots & \alpha_{n-1,n} \\ \xi_1 & \xi_2 \ldots\ldots & \xi_n \end{vmatrix}$$

è differente da zero, e che quindi le $n-1$ trasformazioni infinitesimali

$$\overline{\mathrm{A}}_i f = \alpha_{i,1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{i,2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{i,n} \frac{\partial f}{\partial x_n} + \beta_i \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sono indipendenti tra loro e dalla trasformazione infinitesimale $\mathrm{X}f$.

Come segue dalla relazione (4), si hanno le identità

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}_i(\xi_k) - \mathrm{X}'(\varphi_{i,p_k}) &= (\xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta)\, \varphi_{i,p_k} \\ &\qquad (k = 1, \ldots, n) \\ \mathrm{A}_i(\zeta) - \mathrm{X}'(p_1 \varphi_{i,p_1} + \ldots + p_n \varphi_{i,p_n} - \varphi_i) &= \\ = (\xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta)\, &(p_1 \varphi_{i,p_1} + \ldots + p_n \varphi_{i,p_n} - \varphi_i) \end{aligned}\right\} (i = 1, 2 \ldots n-1).$$

Sostituiamo in queste, sia in un membro che nell'altro, in luogo di $p_1, p_2, \ldots, p_n$ rispettivamente $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ e rammentiamo (S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen.* Bd. I, pag. 110) che, indicando con Φ una qualunque funzione delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z, $p_1, \ldots, p_n$ e con $[\Phi]$ ciò che essa diviene quando in luogo delle $p_1, p_2, \ldots, p_n$ si mettano le $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$, dal fatto che il sistema (5) è invariante per la trasformazione infinitesimale $X'f$ segue [1]):

$$\left[X'(\Phi)\right] = \left[X'[\Phi]\right] = X[\Phi].$$

Dalle precedenti identità si deducono allora le altre

$$\left.\begin{array}{c} \overline{A}_i(\xi_k) - X(\alpha_{i,k}) = (\xi_{1,x_1} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z)\, \alpha_{i,k} \\ (k = 1, \ldots, n) \\ \overline{A}_i(\zeta) - X(\beta) = (\xi_{1,x_1} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z)\, \beta_i \end{array}\right\} (i = 1, 2, 2, \ldots, n-1),$$

le quali provano che tra le trasformazioni infinitesimali $\overline{A}_i f$, Xf sus-

---

1) Si richiede però che il determinante funzionale

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \xi_1 p_1 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta)}{\partial(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$$

non si annulli in conseguenza del sistema (5), perchè la proprietà di cui ci si vale è la seguente:

Se il sistema di equazioni

$$(a) \qquad \Omega_1(x_1, \ldots, x_n) = 0\ ;\ \ldots\ ;\ \Omega_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

ammette la trasformazione infinitesimale

$$Xf = \sum_1^n{}_i\ \xi_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

ed il determinante funzionale

$$\frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-m})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m})}$$

non si annulla in conseguenza del sistema (*a*), *ciò che porta con sè che il sistema* (*a*) *sia risolubile rispetto ad* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *supposto che esso dia per risoluzione*

$$x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1}, \ldots, x_n)\ ;\ \ldots\ ;\ x_m = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1}, \ldots, x_n)$$

ed indicando col simbolo [ ] *la sostituzione* $x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2, \ldots, x_{n-m} = \varphi_{n-m}$ *si ha:*

$$\left[X(\Phi)\right] = \left[X[\Phi]\right]$$

dove Φ *indica una qualunque funzione delle* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

sistono le relazioni

$$(6) \qquad (\bar{A}_i, X) f = (\xi_1, x_1 + \xi_2, x_2 + \ldots + \xi_n, x_n + \zeta_z) \bar{A}_i f.$$

Da queste relazioni, pel lemma II, otteniamo immediatamente

$$X \left(\frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_{i,n}}{\partial x_n} + \frac{\partial \beta_i}{\partial z} \right) +$$
$$+ (\xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z) \left(\frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \alpha_{i,n}}{\partial x_n} + \frac{\partial \beta_i}{\partial z} \right) = 0,$$

cioè che le quantità

$$(7) \qquad \frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial \alpha_{i,n}}{\partial x_n} + \frac{\partial \beta_i}{\partial z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sono altrettanti moltiplicatori dell'equazione $Xf = 0$. Per proprietà note dei moltiplicatori di Jacobi vediamo allora che le $n-1$ quantità (7), che *in generale* saranno funzioni polidrome delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, ci forniranno coi loro rapporti soluzioni dell'equazione $Xf = 0$. Potrà darsi in alcuni casi che in tal modo si possano ottenere n soluzioni indipendenti di questa equazione; essa sarebbe così integrata con sole operazioni di eliminazione e di differenziazione. Ma ciò non sempre si verificherà, anzi potrà darsi che, in casi speciali, riescano tutte le quantità (7) uguali allo zero.

Supponendo dapprima che ciò non avvenga, indichiamo con M una delle quantità (7) che non sia nulla: poichè sono soddisfatte le relazioni

$$(\bar{A}_i, X) f = (\xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z) \bar{A}_i f$$

ed è

$$X(M) + M(\xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z) = 0,$$

se ne deduce (basta fare nel lemma I $Af = A_i f$, $\mu = 1$, $\bar{\nu} = \xi_{1,x_1} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z$)

$$\left(\frac{1}{M} A_i, X \right) f = 0.$$

Raccogliamo i risultati ottenuti nel

TEOREMA 1. — *Noti $n-1$ integrali del primo ordine, dell'ipersuperficie dello spazio $z, x_1, \dots, x_n$, della forma*

$$\int \varphi_1 \, (x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) \, dx_1, \dots, dx_n \, ; \dots ;$$

$$\int \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n, z, p \, , \dots, p_n) \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n$$

che ammettono la trasformazione infinitesimale

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} \, ,$$

se il sistema delle n equazioni

$$\varphi_1 = 0 \, , \ \varphi_2 = 0 \, , \ \dots , \ \varphi_{n-1} = 0 \, , \ \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \dots + \xi_n p_n - \zeta = 0$$

non ha per conseguenza l'annullarsi del determinante funzionale

$$\frac{\partial \, (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \xi_1 p_1 + \dots + \xi_n p_n - \zeta)}{\partial \, (p_1, p_1, \dots, p_n)}$$

ed è quindi risolubile rispetto alle quantita $p_1, p_2, \dots, p_n$, e se sono

$$p_1 = P_1(x_1, \dots, x_n, z) \, ; \ p_2 = P_2(x_1, \dots, x_n, z) \, ; \dots ;$$
$$p_n = P_n(x_1, \dots, x_n, z)$$

i valori che se ne ottengono per risoluzione;
indicando con

$$\alpha_{i,1} \, , \ \alpha_{i,2} \, , \ \dots , \ \alpha_{i,n} \, , \ \beta_i$$

ciò che divengono rispettivamente le funzioni

$$\varphi_{i,p_1} \, ; \ \varphi_{i,p_2} \, ; \dots ; \ \varphi_{i,p_n} \, ; \ p_1 \varphi_{i,p_1} + \dots + p_n \varphi_{i,p_n} - \varphi_i$$

quando a $p_1, p_2, \dots, p_n$ si sostituiscono $P_1, P_2, \dots, P_n$ e ponendo

$$\overline{A}_i f = \alpha_{i,1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{i,2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \alpha_{i,u} \frac{\partial f}{\partial x_n} + \beta_i \frac{\partial f}{\partial z} \, ;$$

si ha che le quantità

$$\frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \alpha_{i,n}}{\partial x_n} + \frac{\partial \beta_i}{\partial z}$$

sono altrettanti moltiplicatori di Jacobi dell'equazione $Xf = 0$; *e, rappresentando con* M *una di esse, se v'è, diversa da zero, tra le* $n-1$ *trasformazioni infinitesimali indipendenti*

$$\frac{1}{M}\bar{A}_1 f\ ,\ \frac{1}{M}\bar{A}_2 f\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{M}\bar{A}_{n-1} f$$

e la trasformazione infinitesimale Xf *sussistono le relazioni*

$$\left(\frac{1}{M}\,A_i\,,X\right) = 0\,.$$

Vediamo così che se una almeno delle quantità (7) è differente da zero, si possono determinare (con sole operazioni di eliminazione e di differenziazione) $n-1$ trasformazioni infinitesimali ammesse dall'equazione $Xf = 0$; l'integrazione di questa equazione è quindi ricondotta ad un noto problema.

3. — Anche nel caso in cui tutte la quantità (7) sono nulle possono sempre determinarsi, con operazioni di eliminazione e di differenziazione o al più eseguendo una operazione d'ordine 1, $n-1$ trasformazioni infinitesimali ammesse dall'equazione $Xf = 0$.

Per far questo cominciamo coll'osservare che le n equazioni

(8) $$\bar{A}_1 f = 0\ ,\ \bar{A}_2 f = 0\ ,\ \ldots,\ \bar{A}_{n-1} f = 0\ ,\ Xf = 0$$

possono formare un sistema completo, o no.

Se il sistema (8) è completo potremo determinarne, con una operazione d'ordine 1, la soluzione π. Eseguiamo allora la trasformazione di variabili

$$x'_1 = x_1\ ,\ x'_2 = x'_2\ ,\ \ldots\ ,\ x'_{n-1} = x'_{n-1}\ ,\ x'_n = \pi\ ,\ z' = z$$

e indichiamo con

$$\bar{A}'_i f = \alpha'_{i,1}\frac{\partial f}{\partial x'_1} + \ldots + \alpha'_{i,n-1}\frac{\partial f}{\partial x'_{n-1}} + \beta'_i\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X'f = \xi'\frac{\partial f}{\partial x'_1} + \ldots + \xi'_{n-1}\frac{\partial f}{\partial x'_{n-1}} + \zeta'\frac{\partial f}{\partial z'}$$

le trasformate di $\overline{\mathrm{A}}_i f$ e di $\mathrm{X}f$. Si avrà:

$$(\overline{\mathrm{A}}'_i f, \mathrm{X}'f) = \nu' \,\overline{\mathrm{A}}'f$$

ove ν' è la funzione trasformata di $\nu = \sum_1^n{}_i\, \xi_{i,x_i} + \zeta_z$. Valendoci del lemma III, ed osservando che è ora:

$$\mathrm{D} = \frac{\partial \pi}{\partial x_n},$$

si avrà:

$$\sum_1^{n-1}{}_j \frac{\partial \xi'_j}{\partial x'_j} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z'} = \nu + \mathrm{X}\left(\log \frac{\partial \pi}{\partial x_n}\right).$$

D'altra parte si ottiene:

$$\left(\frac{\overline{\mathrm{A}}'_i f}{\dfrac{\partial \pi}{\partial x_n}}, \mathrm{X}'f\right) = \frac{1}{\dfrac{\partial \pi}{\partial x_n}} \nu \,\overline{\mathrm{A}}'_i f +$$

$$+ \frac{\mathrm{X}\left(\dfrac{\partial \pi}{\partial x_n}\right)}{\left(\dfrac{\partial \pi}{\partial x_n}\right)^2} \overline{\mathrm{A}}'f = \left(\nu + \mathrm{X}\left(\log \frac{\partial \pi}{\partial x_n}\right)\right) \overline{\mathrm{A}}'_i f.$$

Ponendo perciò:

$$\frac{1}{\dfrac{\partial \pi}{\partial x_n}} \mathrm{A}'_i f = \mathrm{C}_i f = \gamma_{i,1} \frac{\partial f}{\partial x'_1} + \ldots \gamma_{i,n-1} \frac{\partial f}{\partial x'_{n-1}} + \delta_i \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\mu = \sum_1^{n-1}{}_j \frac{\partial \xi'_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z}$$

potremo scrivere:

$$(\mathrm{C}_i f, \mathrm{X}'f) = \mu\, \mathrm{C}_i f.$$

Se indichiamo infine con Δ' il determinante:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,n-1} & \delta_1 \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{2,n-1} & \delta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n-1,1} & \gamma_{n-1,2} & \cdots & \gamma_{n-1,n-1} & \delta_{n-1} \\ \xi'_1 & \xi'_2 & & \xi'_{n-1} & \zeta' \end{vmatrix};$$

dal lemma IV risulta

$$X'(\log \Delta') - \mu = -(n-1)\mu ,$$

cioè:

$$X'(\log \Delta') + (n-2)\mu \Delta' = 0 ;$$

sicchè, se nel lemma I facciamo:

$$Af = \overline{A}'_i f , \quad \varphi = \Delta' , \quad \overline{\nu} = \mu , \quad \mu = n-2 ,$$

vediamo che le $n-1$ trasformazioni infinitesimali:

$$\frac{1}{\sqrt[n-2]{\Delta'}} \overline{A}'_i f , \quad \frac{1}{\sqrt[n-2]{\Delta'}} \overline{A}'_i f , \ldots , \frac{1}{\sqrt[n-2]{\Delta'}} \overline{A}'_{n-1} f$$

sono permutabili colla $X'f$: eseguendo in queste trasformazioni infinitesimali la trasformazione inversa della

$$x'_1 = x_1 , \ldots , x'_{n-1} = x_{n-1} ; \quad x'_n = \pi ; \quad z' = z$$

otteniamo, se vogliamo, $n-1$ trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf.

Se il sistema delle equazioni (8) non è un sistema completo tra le alternate delle trasformazioni infinitesimali:

$$\overline{A}_1 f , \quad \overline{A}_2 f , \ldots , \overline{A}_{n-1} f$$

ve ne sarà una almeno che non sia una combinazione lineare delle $\overline{A}_1 f, \overline{A}_2 f, \ldots, \overline{A}_{n-1} f, Xf$: supponiamo che essa sia l'alternata:

$$Bf = (\overline{A}_i , \overline{A}_k) f .$$

Ponendo allora come sopra:

$$\nu = \sum_1^n{}_j \, \xi_{j, x_j} + \zeta_z$$

e rammentando che sono soddisfatte le relazioni (6):

$$(6) \qquad (\overline{A}_i , X) f = \nu \overline{A}_i f$$

dall'identità Jacobiana:

$$\left((\overline{A}_i A_k), X\right) + \left((\overline{A}_k, X), \overline{A}_i\right) + \left((X, \overline{A}_i), \overline{A}_k\right) = 0$$

segue immediatamente:

$$(9)\ (B, X) = (\overline{A}_i, \nu \overline{A}_k) + (\nu \overline{A}_i, \overline{A}_k) = 2\nu Bf - \overline{A}_k(\nu)\overline{A}_i f + \overline{A}_i(\nu)\overline{A}_k f.$$

Poichè le $n+1$ trasformazioni infinitesimali:

$$\overline{A}_1 f,\ \overline{A}_2 f, \ldots, \overline{A}_{n-1} f,\ Bf,\ Xf$$

sono indipendenti, le loro alternate dovranno essere combinazioni lineari omogenee di esse medesime: supponiamo che sia:

$$(\overline{A}_i, B) f = \sum_1^{n-1}{}_j\ \varepsilon_j\ \overline{A}_j f + \varepsilon_n Bf + \varepsilon_{n+1} Xf$$

$$(\overline{A}_k, B) f = \sum_1^{n-1}{}_j\ \eta_j\ \overline{A}_j f + \eta_n Bf + \eta_{n+1} Xf$$

ove le ε_j, η_j sono funzioni delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Dalle identità Jacobiane:

$$\left((\overline{A}_i, B), X\right) + \left((B, X), \overline{A}_i\right) + \left((X, \overline{A}_i), B\right) = 0$$

$$\left((\overline{A}_k, B), X\right) + \left((B, X), \overline{A}_k\right) + \left((X, \overline{A}_k), B\right) = 0$$

tenendo conto delle precedenti relazioni insieme alle relazioni (6) e (9), risulta:

$$\left(\sum_1^{n-1}{}_j\ \varepsilon_j\ \overline{A}_j f + \varepsilon_n Bf + \varepsilon_{n+1} Xf, Xf\right) +$$
$$+ \left(2\nu Bf - \overline{A}_k(\nu)\ \overline{A}_i f + \overline{A}_i(\nu)\ \overline{A}_k f, \overline{A}_i f\right) + \left(B, \nu \overline{A}_i f\right) = 0$$

$$\left(\sum_1^{n-1}{}_j\ \eta_j\ \overline{A}_j f + \eta_n Bf + \eta_{n+1} Xf, Xf\right) +$$
$$+ \left(2\nu Bf - \overline{A}_k(\nu)\ \overline{A}_i f + \overline{A}_i(\nu)\ \overline{A}_k f, \overline{A}_k f\right) + \left(B, \nu \overline{A}_k f\right) = 0$$

dalle quali, eseguendo, ed eguagliando a zero i coefficienti di Bf si ha:

$$(10) \qquad \begin{cases} X(\varepsilon_n) + \nu\, \varepsilon_n + 3\, \overline{A}_i(\nu) = 0 \\ X(\eta_n) + \nu\, \eta_n + 3\, \overline{A}_i(\nu) = 0 . \end{cases}$$

Se fosse dunque ad un tempo $\varepsilon_n = \eta_n = 0$ risulterebbe $\overline{A}_i(\nu) = \overline{A}_k(\nu) = 0$ e la (9) diverrebbe semplicemente:

$$(B, X)\, f = 2\, \nu\, Bf.$$

Ma anche nel caso in cui ε_n ed η_n non siano ambedue nulle possiamo facilmente determinare una trasformazione infinitesimale $\overline{B}f$ tale che sia verificata la relazione:

$$(\overline{B}, X)\, f = 2\, \nu\, \overline{B}f.$$

Prendiamo infatti:

$$\overline{B}f = 3\, Bf + \eta_n\, \overline{A}_i f - \varepsilon_n\, \overline{A}_k f.$$

Si trova subito:

$$(\overline{B}, X) = 3\,(B, X) + \eta_n (\overline{A}_i, X) - \varepsilon_n (\overline{A}_k, X) - X(\eta_n)\, \overline{A}_i f + X(\varepsilon_n)\, \overline{A}_k f =$$

$$= 3\left(2\, \nu\, Bf - \overline{A}_k(\nu)\, \overline{A}_i f + \overline{A}_i(\nu)\, \overline{A}_k f\right) +$$

$$+ \eta_n\, \nu\, \overline{A}_i f - \varepsilon_n\, \nu\, \overline{A}_k f - X(\eta_n)\, \overline{A}_i f + X(\varepsilon_n)\, \overline{A}_k f;$$

e dalla (10) segue immediatamente:

$$(\overline{B}, X) = 2\, \nu\, (3\, Bf + \eta_n\, \overline{A}_i f - \varepsilon_n\, \overline{A}_k f) = 2\, \nu\, \overline{B}f.$$

Se ora è:

$$\overline{B}f = \alpha_{n,1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{n,2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{n,n} \frac{\partial f}{\partial x_n} + \beta_n \frac{\partial f}{\partial z} ,$$

avendo riguardo alla precedente relazione ed alle relazioni (6), il lemma IV ci dà che il determinante:

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{1,n} & \beta_1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n} & \beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n} & \beta_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n & \zeta \end{vmatrix}$$

soddisfa all'equazione:

$$X(\log \Delta'') - \nu = -(n+1)\nu,$$

cioè si ha:

$$X(\Delta'') + n\nu\Delta'' = 0.$$

(Si noti che il determinante Δ'' è certamente diverso da zero, poichè, essendo indipendenti le trasformazioni infinitesimali $\overline{A}_1 f, \ldots, \overline{A}_{n-1} f$, $B f$, $X f$, altrettanto accade delle trasformazioni infinitesimali $\overline{A}_1 f, \ldots, \overline{A}_{n-1} f$, $\overline{B} f$, $\overline{X} f$).

Possiamo ora nuovamente applicare il lemma I; e facendo in esso:

$$A f = \overline{A}_1 f \; , \quad \overline{\nu} = \nu \; , \quad \varphi = \Delta'' \; , \quad \eta = n$$

e successivamente:

$$\overline{A} f = \overline{B} f \; , \quad \overline{\nu} = 2\nu \; , \quad \varphi = \Delta'' \; , \quad \eta = \frac{n}{2}$$

vediamo che le n trasformazioni infinitesimali:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\Delta''}} \overline{A}_1 f \, , \ldots , \frac{1}{\sqrt[n]{\Delta''}} \overline{A}_{n-1} f \, , \frac{1}{\sqrt[n]{\Delta''^2}} \overline{B} f$$

sono permutabili colla Xf. Si ha così il:

TEOREMA II. — *Nelle stesse ipotesi del teorema* I, *anche se sono nulle tutte le quantità:*

$$\frac{\partial \alpha_{i,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{i,2}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_{i,n}}{\partial x_n} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \, ,$$

se le equazioni:

$$\overline{A}_1 f = 0 \ , \ \overline{A}_2 f = 0 \ , \ldots , \ \overline{A}_{n-1} f = 0 \ , \ Xf = 0$$

formano un sistema completo, determinata (con una operazione d'ordine 1) la sua soluzione, si può avere subito un conveniente fattore pel quale moltiplicando le trasformazioni infinitesimali:

$$\overline{A}_1 f \ , \ \overline{A}_2 f \ , \ldots , \ \overline{A}_{n-1} f$$

se ne ottengano altrettante trasformazioni permutabili colla Xf*; se invece le equazioni dette non formano un sistema completo potranno ottenersi con sole operazioni di eliminazione e di differenziazione n trasformazioni infinitesimali permutabili colla* Xf.

Vediamo così che il problema della integrazione dell'equazione $Xf = 0$, quando la trasformazione infinitesimale Xf ammetta $n-1$ noti invarianti integrali soddisfacenti alle condizioni imposte nei teoremi precedenti, può sempre ridursi a quello della integrazione di una equazione:

$$Yf = \eta_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \eta_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

che ammetta m note trasformazioni infinitesimali.

4. — Applichiamo i risultati ottenuti al caso speciale che sia proposto il problema di risolvere l'equazione:

$$Xf \equiv \xi_1 (x_1, x_2, x_3, z) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 (x_1, x_2, x_3, z) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \\ + \xi_3 (x_1, x_2, x_3, z) \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta (x_1, x_2, x_3, z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

quando essa lasci invarianti due integrali della forma:

$$\int \varphi_1 (x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

$$\int \varphi_2 (x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

e tali che il sistema delle tre equazioni

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3) = 0$$
$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3) = 0$$
$$\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 - \zeta = 0$$

non abbia per conseguenza l'annullarsi del determinante funzionale:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 - \zeta)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} .$$

Secondo quanto abbiamo veduto potremo determinare due trasformazioni infinitesimali:

$$\overline{A}_1 f = \alpha_{1,1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{1,2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \alpha_{1,3} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \beta_1 \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\overline{A}_2 f = \alpha_{2,1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{2,2} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{2,3} \frac{\partial f}{\partial x_3} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial x}$$

soddisfacenti alle relazioni:

$$(\overline{A}_i, X) f = (\xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \xi_{3,x_3} + \zeta_z) \overline{A}_i f \quad (i = 1, 2).$$

Se le quantità:

$$\frac{\partial \alpha_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{1,2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_{1,3}}{\partial x_3} + \frac{\partial \beta_1}{\partial x} ; \frac{\partial \alpha_{2,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{2,2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{2,3}}{\partial x_3} + \frac{\partial \beta_2}{\partial z} , \tag{11}$$

che sono due moltiplicatori dell'equazione $Xf=0$, non sono al tempo stesso tutte e due nulle, e si indica con M una di esse differente da zero, l'equazione $Xf = 0$ ammette le due trasformazioni infinitesimali $\frac{1}{M} A_1 f$, $\frac{1}{M} A_2 f$; se allora le tre equazioni:

$$\frac{1}{M} A_1 f = 0 \ , \ \frac{1}{M} A_2 f = 0 \ , \ Xf = 0$$

formano un sistema completo, determinata la sua soluzione con una operazione d'ordine 1, si avranno le altre due soluzioni dell'equazione $Xf = 0$, nei casi più sfavorevoli, con due quadrature; se il sistema detto non è completo, nella alternata:

$$\left(\frac{1}{M} A_1 f , \frac{1}{M} A_2 f\right)$$

avremo un'altra trasformazione infinitesimale ammessa dall'equazione $Xf = 0$: ed allora, essendo note tre trasformazioni infinitesimali ammesse da questa equazione, essa potrà integrarsi con quadrature (al massimo tre) o, nei casi più sfavorevoli, risolvendo una equazione di Riccati (Lie, *Scheffers Vorlesungen über Differential gleichungen mit bekanuten infinitesimalen Transformationen.* Kap. 25, § 2, Theorem 49).

Se le quantità (11) sono tutte e due nulle, potremo sempre distinguere i due casi che le equazioni:

$$A_1 f = 0 \quad , \quad A_2 f = 0 \quad , \quad Xf = 0$$

formino un sistema completo, oppur no. Nel primo caso trovata la soluzione u_1 del sistema completo basterà che consideriamo i due sistemi:

$$A_1 f = 0 \ , \ Xf = 0 \ ; \ A_2 f = 0 \ , \ Xf = 0 \ ;$$

di ciascuno di essi conoscendosi una soluzione, u_1, ed un moltiplicatore, l'unita [1]), possiamo determinare l'ulteriore soluzione con una quadratura, e così avremo altre due soluzioni u_2 ed u_3 della equazione $Xf = 0$ indipendenti tra loro e dalla soluzione u_1. Nel secondo caso noi potremo ottenere tre trasformazioni infinitesimali (cioè $A_1 f$, $A_2 f$, $(A_1 f, A_2 f)$) ammesse dall'equazione $Xf = 0$, le quali ci permetteranno di risolvere questa colla risoluzione di una equazione di Riccati. Abbiamo dunque che:

Se la trasformazione infinitesimale:

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

[1]) Per veder questo basta formare, col lemma V, le equazioni che definiscono rispettivamente i moltiplicatori dei due sistemi, tenendo conto che le quantità $\lambda^s_{i,k}$ sono nulle.

lascia invarianti due integrali:

$$\int \varphi_1 (x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$\int \varphi_2 (x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

del primo ordine, relativi all' ipersuperficie dello spazio x_1, x_2, x_3, z, *l'equazione* $Xf = 0$, *ove non sia risolubile con sole operazioni di eliminazione e di differenziazione, si può risolvere per quadrature (al massimo tre) o, nei casi più sfavorevoli, con una operazione d'ordine 1 seguita da due quadrature.*

§ 3.

Utilizzazione di un invariante differenziale, del primo ordine, di superficie che ammette la trasformazione infinitesimale

$$Xf = \xi (x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta (x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \zeta (x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

1. — Si conosca un invariante differenziale di superficie del primo ordine:

$$\varphi (x, y, z, p, q) \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}\,,\ q = \frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{1}$$

del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Ponendo:

$$\left\{\begin{aligned} X'f &= \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \left\{\zeta_x + \zeta_z p - p\,(\xi_x + \xi_z p) - q\,(\eta_x + \eta_z p)\right\} \frac{\partial f}{\partial p} + \\ &+ \left\{\zeta_y + \zeta_z\, q - p\,(\xi_y + \xi_z\, q) - q\,(\eta_y + \eta_z\, q)\right\} \frac{\partial f}{\partial q} = \\ &= [\xi p + \eta q - \zeta, f] - (\xi p + \eta q - \zeta) \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

si avrà, come risulta dalla teoria degli invarianti differenziali,

$$X'(\varphi) = 0$$

o, se si vuole, indicando con a una costante arbitraria,

(3) $$X'(\varphi - a) = 0 .$$

Questa equazione ci mostra che il sistema delle due equazioni:

(4) $$\varphi(x, y, z, p, q) = a \quad , \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

è un sistema in involuzione; perciò se risolvendolo rispetto a p e q, supposto che sia risolubile, otteniamo:

$$p = \mathrm{P}(x, x, z, a) \quad , \quad q = \mathrm{Q}(x, y, z, a)$$

l'equazione ai differenziali totali:

$$dz = \mathrm{P}(x, y, z, a)\, dx + \mathrm{Q}(x, y, z, a)\, dy$$

sarà illimitatamente integrabile e il suo integrale generale

$$u(x, y, z, a) = \text{cost.}$$

ci darà l'integrale completo del sistema (4) e quindi una soluzione dell'equazione $\mathrm{X}f = 0$ dipendente da una costante arbitraria.

Si noti ancora che dalla (3) e dall'essere

$$X'(\xi p + \eta q - \zeta) = -(\xi p + \eta q - \zeta)(\xi_z p + \eta_z q - \zeta_z)$$

segue che il sistema (4) ammette la trarformazione infinitesimale $\mathrm{X}'f$.

2. — Se, con

$$\varphi' = \varphi - a ,$$

poniamo:

$$\mathrm{A}f = [\varphi', f] - \varphi' \frac{\partial f}{\partial z} = \varphi'_p \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi'_q \frac{\partial f}{\partial y} +$$
$$+ (p\varphi'_p + q\varphi'_q - \varphi') \frac{\partial f}{\partial z} - (\varphi'_x + p\varphi''_z) \frac{\partial f}{\partial p} - (\varphi'_y + q\varphi'_z) \frac{\partial f}{\partial q} ,$$

e teniamo conto che, come risulta dalle (2) e (3), è

$$[\xi p + \eta q - \zeta, \varphi'] - (\xi p + \eta q - \zeta)\varphi'_z = 0$$

ne risulta, col medesimo procedimento del § 2, n. 1, che tra le due trasformazioni infinitesimali (di contatto) $X'f$ ed Af sussiste la relazione:

$$(A, X')\, f = [\varphi'(\zeta_z - p\xi_z - q\eta_z), f] - \varphi'(\zeta_z - p\xi_z - q\eta_z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

che si può porre sotto la forma:

$$(A, X')\, f = (\zeta_z - p\xi_z - q\eta_z)\, Af + \varphi'[\zeta_z - p\xi_z - q\eta_z, f].$$

Da tale relazione, uguagliando i coefficienti che hanno nel primo e nel secondo membro $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, troviamo:

$$A(\xi) - X'(\varphi'_p) = (\zeta_z - p\xi_z - q\eta_z)\varphi'_p + \varphi'\xi_z$$
$$A(\eta) - X'(\varphi'_q) = (\zeta_z - p\xi_z - q\eta_z)\varphi'_q + \varphi'\eta_z$$
$$A(\zeta) - X'(p\varphi'_p + q\varphi'_q - \varphi') = (\zeta_z - p\xi_z - q\eta_z)(p\varphi'_p + q\varphi'_q - \varphi') + \varphi'\zeta_z.$$

Indichiamo ora con

$$\alpha(x, y, z, a)\ ;\ \beta(x, y, z, a)\ ;\ \gamma(x, y, z, a)$$

ciò che divengono rispettivamente:

$$\varphi'_p\ ,\ \varphi'_q\ ,\ p\varphi'_p + q\varphi'_q - \varphi'$$

quando in luogo di p e di q si pongano $P(x, y, z, a)$, $Q(x, y, z, a)$, e poniamo:

$$\bar{A}f = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Supponiamo di più che il sistema (4) non abbia per conseguenza l'annullarsi del determinante $\begin{vmatrix} \varphi'_p & \varphi'_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$, cioè che sia:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \xi & \eta \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Poichè il sistema (4) ammette la trasformazione infinitesimale $X'f$, rammentando la nota a pag. 24, vediamo che, facendo nelle tre precedenti identità $p = \mathrm{P}$, $q = \mathrm{Q}$, si ha:

$$\overline{\mathrm{A}}(\xi) - \mathrm{X}(\alpha) = (\zeta_z - \mathrm{P}\,\xi_z - \mathrm{Q}\,\eta_z)\,\alpha$$
$$\overline{\mathrm{A}}(\eta) - \mathrm{X}(\beta) = (\zeta_z - \mathrm{P}\,\xi_z - \mathrm{Q}\,\eta_z)\,\beta$$
$$\overline{\mathrm{A}}(\zeta) - \mathrm{X}(\gamma) = (\zeta_z - \mathrm{P}\,\xi_z - \mathrm{Q}\,\eta_z)\,\gamma.$$

Da queste identità segue la relazione:

$$(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{X})\,f = (\zeta_z - \mathrm{P}\,\xi_z - \mathrm{Q}\,\eta_z)\,\overline{\mathrm{A}}f,$$

la quale ci mostra che le due equazioni $\overline{\mathrm{A}}f = 0$; $\mathrm{X}f = 0$ formano un sistema completo; la sua soluzione $u\,(x, y, z, a)$, che può ottenersi con una operazione d'ordine 1, ci darà una soluzione dell'equazione $\mathrm{X}f = 0$ (questa soluzione è quella stessa che, uguagliata ad una costante arbitraria, dà l'integrale generale dell'equazione a differenziali totali $dz = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$).

Notiamo subito che, se nella trasformazione infinitesimale $\mathrm{A}f$ diamo ad a due differenti valori a_1, a_2 ed indichiamo rispettivamente con gli indici 1, 2, le sostituzioni $a = a_1$, $a = a_2$, le tre trasformazioni infinitesimali

$$\overline{\mathrm{A}}_1 f\ ,\ \overline{\mathrm{A}}_2 f\ ,\ \mathrm{X}f$$

sono indipendenti. Ed infatti se così non fosse dovrebbe aversi:

$$\overline{\mathrm{A}}_2 f = \lambda\,\overline{\mathrm{A}}_1 f + \mu\,\mathrm{X}f$$

e quindi:

$$\alpha_2 = \lambda\alpha_1 + \mu.\xi_1\ ,\quad \beta_2 = \lambda\beta_1 + \mu.\eta\ ,\quad \gamma_2 = \lambda\gamma_1 + \mu.\zeta.$$

Ma essendo:

$$\gamma = (p\,\varphi'_p + q\,\varphi'_q - \varphi')_{p=\mathrm{P},\,q=\mathrm{Q}} = \mathrm{P}\,\alpha + \mathrm{Q}\,\beta\,,$$

le quantità P e Q soddisfano, oltre che all'equazione lineare $\xi p + \eta q - \zeta = 0$, anche all'altra $\alpha p + \beta q - \gamma = 0$, ciò che può esprimers dicendo che i due sistemi:

$$\varphi = a\ ,\ \xi p + \eta q - \zeta = 0\ ;\quad \alpha p + \beta q - \gamma = 0\ ,\ \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

sono equivalenti. Ora, avendosi:

$$\alpha_2 p+\beta_2 q-\gamma_2 \equiv \lambda(\alpha_1 p+\beta_1 q-\gamma_1)+\mu(\xi p+\eta q-\zeta)\,,$$

dovrebbero essere equivalenti i due sistemi:

$$\alpha_1 p+\beta_1 q-\gamma_1=0\,,\ \xi p+\eta q-\zeta=0\ ;\ \ \alpha_2 p+\beta_2 q-\gamma_2=0\,,\ \xi p+\eta q-\zeta=0$$

e quindi anche i due sistemi:

$$\varphi=a_1\,,\ \xi p+\eta q-\zeta=0\ ;\ \ \varphi=a_2\,,\ \xi p+\eta q-\zeta=0\,,$$

e questo evidentemente non può darsi.

Abbiamo dunque che:

TEOREMA I. — *Noto un invariante differenziale di superficie del primo ordine:*

$$\varphi(x,y,z,p,q)$$

del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:

$$Xf=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

se il sistema delle due equazioni:

$$\varphi(x,y,z,p,q)=a\ ,\ \ \xi p+\eta q-\zeta=0$$

non ha per conseguenza l'annullarsi del determinante $\begin{vmatrix}\varphi_p & \varphi_q\\ \xi & \eta\end{vmatrix}$ *ed è quindi risolubile rispetto alle quantità* p *e* q, *e se sono:*

$$p=P(x,y,z,a)\ ,\ \ q=Q(x,y,z,a)$$

i valori che se ne ottengono per risoluzione;
indicando con:

$$\alpha(x,y,z)\ ,\ \ \beta(x,y,z)\ ,\ \gamma(x,y,z)$$

ciò che divengono rispettivamente le funzioni:

$$\varphi'_p\ ,\ \ \varphi'_q\ ,\ \ p\varphi'_p+q\varphi'_q-\varphi'\quad (\text{con } \varphi'=\varphi-a)$$

quando a p, q *si sostituiscano* P, Q *e ponendo:*

$$\overline{A}f=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}+\beta\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

si ha che tra le trasformazioni infinitesimali $\overline{\mathrm{A}}f$ *ed* $\mathrm{X}f$ *sussiste la relazione:*

$$(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{X})\, f = (\zeta_z - \mathrm{P}\,\xi_z - \mathrm{Q}\,\eta_z)\, \overline{\mathrm{A}}f$$

e che, se indichiamo con $\overline{\mathrm{A}}_1 f$, $\overline{\mathrm{A}}_2 f$ *le trasformazioni infinitesimali che si ottengono dalla* $\overline{\mathrm{A}}f$ *dando ad a due valori distinti* a_1, a_2 *le tre trasformazioni infinitesimali*

$$\overline{\mathrm{A}}_1 f \;,\quad \overline{\mathrm{A}}_2 f \;,\quad \mathrm{X}f$$

sono indipendenti tra loro.

Da quest'ultimo fatto segue anche che, se nella anzidetta soluzione $u(x, y, z, a)$ diamo ad a due valori distinti a_1 ed a_2, essa deve fornirci due soluzioni indipendenti dell'equazione $\mathrm{X}f = 0$; così vediamo già che l'equazione $\mathrm{X}f = 0$ può, nelle ipotesi fatte, integrarsi con una operazione d'ordine 1.

3\. — Poichè la funzione $\varphi(x, y, z, p, q)$ soddisfa all'equazione $\mathrm{X}'\varphi = 0$, se ne deduce, per derivazione rispetto a p e q:

$$\mathrm{X}'(\varphi_p) = (p\,\xi_z + q\,\eta_z - \zeta_z)\,\varphi_p + (\xi_x + p\,\xi_z)\,\varphi_p + (\xi_y + q\,\xi_z)\,\varphi_q$$
$$\mathrm{X}'(\varphi_q) = (p\,\xi_z + q\,\eta_z - \zeta_z)\,\varphi_q + (\eta_x + p\,\eta_x)\,\varphi_p + (\eta_y + q\,\eta_z)\,\varphi_q\,.$$

Applicando la trasformazione infinitesimale $\mathrm{X}'f$ al determinante $\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$ si trova subito:

$$\mathrm{X}'\left(\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix}\right) = \eta\,\mathrm{X}'(\varphi_p) - \xi\,\mathrm{X}'(\varphi_q) + \varphi_p\,\mathrm{X}(\eta) - \varphi_q\,\mathrm{X}(\xi)$$

e, tenendo conto delle due precedenti identità,:

$$\mathrm{X}'\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = (p\,\xi_z + q\,\eta_z - \zeta_z)\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} + \Big\{\eta\,(\xi_x + p\,\xi_z) - \xi\,(\eta_x + p\,\eta_z) + \mathrm{X}(\eta)\Big\}\,\varphi_q +$$
$$+ \Big\{\eta\,(\xi_y + q\,\xi_z) - \xi\,(\eta_y + q\,\eta_z) - \mathrm{X}(\xi)\Big\}\,\varphi_q =$$
$$= (p\,\xi_z + q\,\eta_z - \zeta_z)\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} + (\xi_x + \eta_y)\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} + \zeta\,(\eta_z\,\varphi_p - \xi_z\,\varphi_q) + (\xi_z\,\eta - \xi\,\eta_z)\,(p\,\varphi_p + q\,\varphi_q)\,.$$

Poniamo ora in questa in luogo di p e q le funzioni $\mathrm{P}(x,y,z,a)$, $\mathrm{Q}(x,y,z,a)$ ed indichiamo con $\Phi(x,y,z,a)$ il determinante:

$$\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix}_{p=\mathrm{P},\ q=\mathrm{Q}} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \xi & \eta \end{vmatrix}.$$

Rammentando la nota a pag. 24, si ha:

$$\mathrm{X}(\Phi) = (\mathrm{P}\,\xi_z + \mathrm{Q}\,\eta_z - \zeta_z)\,\Phi + (\xi_x + \eta_y)\,\Phi + \zeta\,(\eta_z\alpha - \xi_z\beta) +$$
$$+ (\xi_z\eta - \xi\eta_z)\,(\mathrm{P}\alpha + \mathrm{Q}\beta).$$

Se osserviamo poi che è $\zeta = \mathrm{P}\xi + \mathrm{Q}\eta$, vediamo che è anche:

$$\zeta\,(\eta_z\alpha - \xi_z\beta) + (\xi_z\eta - \xi\eta_z)\,(\mathrm{P}\alpha + \mathrm{Q}\beta) = (\xi_z\mathrm{P} + \eta_z\mathrm{Q})\,(\eta\alpha - \xi\beta) =$$
$$= (\xi_z\mathrm{P} + \eta_z\mathrm{Q})\,\Phi$$

e quindi:

$$\mathrm{X}(\Phi) = \left\{(\xi_x + \eta_y + \zeta_z) + 2\,(\mathrm{P}\,\xi_z + \mathrm{Q}\eta_z - \zeta_z)\right\}\Phi. \tag{5}$$

Consideriamo allora, invece della trasformazione infinitesimale $\overline{\mathrm{A}}f$, l'altra:

$$\frac{\overline{\mathrm{A}}f}{\sqrt{\Phi}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\Phi}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\beta}{\sqrt{\Phi}}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\gamma}{\sqrt{\Phi}}\frac{\partial f}{\partial z}$$

e formiamo l'alternata:

$$\left(\frac{\overline{\mathrm{A}}f}{\sqrt{\Phi}},\, \mathrm{X}f\right) = \frac{(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{X})f}{\sqrt{\Phi}} + \frac{1}{2\Phi\sqrt{\Phi}}\,\mathrm{X}(\Phi)\,.\,\overline{\mathrm{A}}f.$$

Siccome è $(\overline{\mathrm{A}}, \mathrm{X})f = (\zeta_z - \mathrm{P}\,\xi_z - \mathrm{Q}\eta_z)\,\overline{\mathrm{A}}f$ si ottiene:

$$\left(\frac{\overline{\mathrm{A}}f}{\sqrt{\Phi}},\, \mathrm{X}f\right) = \left\{\zeta_z - \mathrm{P}\,\xi_z - \mathrm{Q}\,\eta_z + \frac{\mathrm{X}(\Phi)}{\sqrt{\Phi}}\right\}\frac{\overline{\mathrm{A}}f}{\sqrt{\Phi}}$$

e in forza della (5):

$$\left(\frac{\overline{\mathrm{A}}f}{\sqrt{\Phi}},\, \mathrm{X}f\right) = \frac{\xi_x + \eta_y + \zeta_z}{2}\,\frac{\overline{\mathrm{A}}f}{\sqrt{\Phi}}.$$

Aggiungiamo anche che dalla trasformazione infinitesimale $\dfrac{\overline{A}f}{\sqrt{\Phi}}$, dando ad a due valori distinti a_1, a_2, si possono ottenere due trasformazioni infinitesimali indipendenti tra di loro e dalla Xf. Possiamo dunque dire che:

TEOREMA II. — *Nelle stesse ipotesi e colle stesse posizioni del teorema* I, *se si indica con* $\Phi(x, y, z, a)$ *la quantità* $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$, *tra le due trasformazioni* Xf *ed* $\dfrac{\overline{A}f}{\sqrt{\Phi}}$ *sussiste la relazione:*

$$\left(\frac{\overline{A}f}{\sqrt{\Phi}}, Xf\right) = \frac{\xi_x + \eta_y + \zeta_z}{z} \frac{\overline{A}f}{\sqrt{\Phi}}.$$

Inoltre se indichiamo con Φ_1 *e* Φ_2 *ciò che diventa* Φ *rispettivamente per* $a = a_1$, $a = a_2$ *le tre trasformazioni infinitesimali:*

$$\frac{\overline{A}f}{\sqrt{\Phi}}, \quad \frac{\overline{A}f}{\sqrt{\Phi}}, \quad Xf$$

sono indipendenti.

4. — Per brevità facciamo ancora le posizioni seguenti:

$$B_1f = \frac{\overline{A}_1f}{\sqrt{\Phi}} \; ; \; B_2f = \frac{\overline{A}_2f}{\sqrt{\Phi}} \; ; \; Cf = (B_1, B_2)\, f$$

$$\nu = \xi_x + \eta_y + \zeta_z.$$

Sarà Cf una combinazione lineare delle trasformazioni infinitesimali B_1f, B_2f, Xf:

$$Cf = \pi\, B_1f + \rho\, B_2f + \sigma\, Xf$$

dove π, ρ, σ, sono funzioni note delle variabili x, y, z.

Essendo soddisfatte le relazioni:

(6) $$(B_1, X)\, f = \frac{\nu}{2}\, B_1f \;,\; (B_2, X)\, f = \frac{\nu}{2}\, B_2f$$

dall' identità Jacobiana:

$$\Big((B_1, B_2), X\Big) + \Big((B_2, X), B_1\Big) + \Big((X, B_1), B_2\Big) = 0,$$

che può anche scriversi:

$$(\pi B_1 f + \rho B_2 f + \sigma X f, X f) + \left(\frac{\nu}{2} B_2 f, B_1 f\right) + \left(-\frac{\nu}{2} B_1 f, B_2 f\right) = 0,$$

si ricava:

$$(7) \qquad \begin{cases} X(\pi) + \dfrac{\nu}{2}\pi - B_2\left(\dfrac{\nu}{2}\right) = 0 \\ X(\rho) + \dfrac{\nu}{2}\rho + B_1\left(\dfrac{\nu}{2}\right) = 0 \\ X(\sigma) + \nu\sigma = 0. \end{cases}$$

Di più se è:

$$B_1 f = \alpha^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x} + \beta^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma^{(1)} \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$B_2 f = \alpha^{(2)} \frac{\partial f}{\partial x} + \beta^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma^{(2)} \frac{\partial f}{\partial z}$$

dalle relazioni (6), per il lemma II, si ricava:

$$(8) \qquad \begin{cases} B_1\left(\dfrac{\nu}{2}\right) - X(\alpha^{(1)}_x + \beta^{(1)}_y + \gamma^{(1)}_z) - \dfrac{\nu}{2}(\alpha^{(1)}_x + \beta^{(1)}_y + \gamma^{(1)}_z) = 0 \\ B_2\left(\dfrac{\nu}{2}\right) - X(\alpha^{(2)}_x + \beta^{(2)}_y + \gamma^{(2)}_z) - \dfrac{\nu}{2}(\alpha^{(2)}_x + \beta^{(2)}_y + \gamma^{(2)}_z) = 0. \end{cases}$$

Sottraendo dalla 2.ª delle (7) la 1.ª delle (8) e aggiungendo alla 1.ª delle (7) la 2.ª delle (8) si ottiene:

$$X(\rho + \alpha^{(1)}_x + \beta^{(1)}_y + \gamma^{(1)}_z) + \frac{\nu}{2}(\rho + \alpha^{(1)}_x + \beta^{(1)}_y + \gamma^{(1)}_z) = 0$$

$$X(\pi - \alpha^{(2)}_x - \beta^{(2)}_y - \gamma^{(2)}_z) + \frac{\nu}{2}(\pi - \alpha^{(2)}_x - \beta^{(2)}_y - \gamma^{(2)}_z) = 0,$$

dalle quali risulta immediatamente:

$$X\left([\rho+\alpha_x^{(1)}+\beta_y^{(1)}+\gamma_z^{(1)}]^2\right)+\nu\,[\rho+\alpha_x^{(1)}+\beta_y^{(1)}+\gamma_z^{(1)}]^2=0$$

$$X\left([\pi-\alpha_x^{(2)}-\beta_y^{(2)}-\gamma_z^{(2)}]^2\right)+\nu\,[\pi-\alpha_x^{(2)}-\beta_y^{(2)}-\gamma_z^{(2)}]^2=0,$$

cioè che le quantità:

$$[\rho+\alpha_x^{(1)}+\beta_y^{(1)}+\gamma_z^{(1)}]^2\quad,\quad[\pi-\alpha_x^{(2)}-\beta_y^{(2)}-\gamma_z^{(2)}]^2$$

sono, come la quantità σ, dei moltiplicatore dell'equazione $Xf=0$.

Se è $\sigma=0$ possiamo ottenere un altro moltiplicatore dell'equazione $Xf=0$ nel modo seguente. Applicando l'operazione B_1f al primo membro della prima delle (7) e l'operazione B_2f al primo membro della 2.ª delle (7) si trova:

$$B_1\left(X(\pi)\right)+\frac{\nu}{2}B_1(\pi)+\pi B_1\left(\frac{\nu}{2}\right)-B_1\left(B_2\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)=0$$

$$B_2\left(X(\rho)\right)+\frac{\nu}{2}B_2(\rho)+\rho B_2\left(\frac{\nu}{2}\right)+B_2\left(B_1\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)=0$$

e, tenendo presente che, per essere $(B_1,X)f=\frac{\nu}{2}B_1f$, $(B_2,X)f=\frac{\nu}{2}B_2f$, si ha:

$$B_1\left(X(\pi)\right)=X\left(B_1(\pi)\right)+\frac{\nu}{2}B_1(\pi)$$

$$B_2\left(X(\rho)\right)=X\left(B_2(\rho)\right)+\frac{\nu}{2}B_2(\rho),$$

sostituendo nelle precedenti identità otteniamo:

$$X\left(B_1(\pi)\right)+\nu B_1(\pi)+\pi B_1\left(\frac{\nu}{2}\right)-B_1\left(B_2\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)=0$$

$$X\left(B_2(\rho)\right)+\nu B_2(\rho)+\rho B_2\left(\frac{\nu}{2}\right)-B_2\left(B_1\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)=0.$$

Sommando, e osservando che per essere $\sigma=0$ si ha

$$B_1\left(B_2\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)-B_2\left(B_1\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)=\pi B_1\left(\frac{\nu}{2}\right)+\rho B_2\left(\frac{\nu}{2}\right),$$

otteniamo

$$\mathrm{X}\left(\mathrm{B}_1(\pi)+\mathrm{B}_2(\rho)\right)+\nu\left(\mathrm{B}_1(\pi)+\mathrm{B}_2(\rho)\right)=0,$$

cioè che la quantità $\mathrm{B}_1(\pi)+\mathrm{B}_2(\rho)$ è un moltiplicatore dell'equazione $\mathrm{X}f=0$.

Possiamo allora enunciare il

Teorema III. — *Se, nelle ipotesi dei due teoremi precedenti, indichiamo con:*

$$\mathrm{B}_1 f=\frac{\overline{\mathrm{A}}_1 f}{\sqrt{\Phi}}=\alpha^{(1)}\frac{\partial f}{\partial x}+\beta^{(1)}\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma^{(1)}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\mathrm{B}_2 f=\frac{\overline{\mathrm{A}}_2 f}{\sqrt{\Phi}}=\alpha^{(2)}\frac{\partial f}{\partial x}+\beta^{(2)}\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma^{(2)}\frac{\partial f}{\partial z}$$

le due trasformazioni infinitesimali indipendenti tra loro e dalla $\mathrm{X}f$ *dedotte dalla* $\frac{\overline{\mathrm{A}}f}{\sqrt{\Phi}}$ *per* $a=a_1$, $a=a_2$, *l'alternata* $(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2)f$ *si comporrà linearmente colle* $\mathrm{B}_1 f, \mathrm{B}_2 f, \mathrm{X}f$ *e, posto che sia:*

$$(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2)f=\mathrm{C}f=\pi\,\mathrm{B}_1 f+\rho\,\mathrm{B}_2 f+\sigma\,\mathrm{X}f$$

le tre quantità:

$$\sigma\ ,\quad [\pi-\alpha_x^{(2)}-\beta_y^{(2)}-\gamma_z^{(2)}]^2\ ,\quad [\rho+\alpha_x^{(1)}+\beta_y^{(1)}+\gamma_z^{(1)}]^2$$

sono tre moltiplicatori dell'equazione $\mathrm{X}f=0$.

Inoltre, se è $\sigma=0$ *si ha un moltiplicatore di questa equazione anche nella quantità:*

$$\mathrm{B}_1(\pi)+\mathrm{B}_2(\rho).$$

5. — Siamo ora in grado di dimostrare, coi teoremi premessi, che la conoscenza dell'invariante differenziale $\varphi(x,y,z,p,q)$, soddisfacente alle condizioni imposte, ci permette di integrare l'equazione $\mathrm{X}f=0$ nei casi più sfavorevoli con quadrature.

È evidente intanto che, se una delle tre quantità:

$$\sqrt{\sigma}\ ,\quad \pi-\alpha_x^{(2)}-\beta_y^{(2)}-\gamma_z^{(2)}\ ,\quad \rho+\alpha_x^{(1)}+\beta_y^{(1)}+\gamma_z^{(1)}$$

è differente da zero, essa ci fornisce una soluzione $\overline{\mu}$ dell'equazione:

$$X(\mu) + \frac{\nu}{2}\mu = 0$$

e quindi noi abbiamo nelle

$$\frac{1}{\overline{\mu}} B_1 f \;,\quad \frac{1}{\overline{\mu}} B_2 f$$

due trasformazioni infinitesimali indipendenti tra loro e dalla trasformazione infinitesimale Xf, permutabili con quest'ultima (per ottener questo basta fare nel lemma I $Af = B_i f$ $(i = 1, 2)$; $\overline{\nu} = \frac{\nu}{2}$, $\varphi = \overline{\mu}$, $\eta = 1$); l'equazione $Xf = 0$ è allora, per un noto teorema. (Vedi per es. L. BIANCHI, *Teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, § 154), integrabile per quadrature.

Inoltre, essendo zero σ, la quantità $B_1(\pi) + B_2(\rho)$ è pur essa un moltiplicatore dell'equazione $Xf = 0$; vediamo dunque che, ove fossero nulle le tre sopraddette quantità, sarebbe $B_1(\alpha_x^{(2)} + \beta_y^{(2)} + \gamma_z^{(2)}) - B_2(\alpha_x^{(1)} - \beta_y^{(1)} - \gamma_z^{(1)})$ un moltiplicatore dell'equazione $Xf = 0$ e quindi la quantità:

$$\sqrt{B_1(\alpha_x^{(2)} + \beta_y^{(2)} + \gamma_z^{(2)}) - B_2(\alpha_x^{(1)} - \beta_y^{(1)} - \gamma_z^{(1)})}$$

una soluzione dell'equazione $X\mu + \frac{\nu}{2}\mu = 0$: così si potrebbero ancora ottenere due trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf e quindi avere le soluzioni dell'equazione $Xf = 0$ con quadrature.

Come si vede rimane escluso dalle considerazioni fatte il caso in cui sia ad un tempo:

$$\sigma = 0 \;,\quad \pi = \alpha_x^{(2)} + \beta_y^{(2)} + \gamma_z^{(2)} \;,\quad \gamma = -(\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)}) \tag{9}$$

$$B_1(\alpha_x^{(2)} + \beta_y^{(2)} + \gamma_z^{(2)}) - B_2(\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)}) = 0. \tag{9'}$$

Dobbiamo quindi considerare a parte questo caso: avremo allora insieme alle relazioni:

$$(B_1, X) = \frac{\nu}{2} B_1 f \;,\quad (B_2, X) f = \frac{\nu}{2} B_2 f$$

l'altra:

$$(B_1, B_2)\, f = (\alpha^{(2)}_x + \beta^{(2)}_y + \gamma^{(2)}_z)\, B_1 f - (\alpha^{(1)}_x + \beta^{(1)}_y + \gamma^{(1)}_z)\, B_2 f .$$

Da queste segue immediatamente, per il lemma IV, che, posto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^{(1)} & \beta^{(1)} & \gamma^{(1)} \\ \alpha^{(2)} & \beta^{(2)} & \gamma^{(2)} \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

si ha:

$$B_1 (\log \Delta) = 0 \;\; , \;\; B_2 (\log \Delta) = 0 \;\; , \;\; X (\log \Delta) = 0 ;$$

ne risulta subito che deve essere:

$$\Delta = \text{Cost.}$$

È noto d'altra parte che, ammettendo il sistema completo delle equazioni $B_1 f = 0$, $B_2 f = 0$ la trasformazione infinitesimale Xf, l'inversa del determinante Δ è un moltiplicatore del sistema stesso e perciò anche un fattore integrante dell'equazione a differenziali totali corrispondente:

$$(\beta^{(1)}\gamma^{(2)} - \beta^{(2)}\gamma^{(1)})\, dx + (\gamma^{(1)}\alpha^{(2)} - \gamma^{(2)}\alpha^{(1)})\, dy + (\alpha^{(1)}\beta^{(2)} - \alpha^{(2)}\beta^{(1)})\, dz = 0 .$$

Ma poichè Δ è costante il primo membro di questa equazione sarà un differenziale esatto e se indichiamo con ψ l'integrale:

$$\psi = \int \left\{ (\beta^{(1)}\gamma^{(2)} - \beta^{(2)}\gamma^{(1)})\, dx + (\gamma^{(1)}\alpha^{(2)} - \gamma^{(2)}\alpha^{(1)})\, dy + (\alpha^{(1)}\beta^{(2)} - \alpha^{(2)}\beta^{(1)})\, dz \right\}$$

sarà:

$$B_1 (\psi) = 0 \;\; , \;\; B_2 (\psi) = 0$$

e di più, come subito si vede:

$$X (\psi) = \Delta = \text{Cost} = k .$$

Si consideri ora l'equazione:

$$(\alpha^{(2)}_x + \beta^{(2)}_y + \gamma^{(2)}_z)\, B_1 f - (\alpha^{(1)}_x + \beta^{(1)}_y + \gamma^{(1)}_z)\, B_2 f = 0$$

di cui la ψ è una soluzione; essendo:

$$B_1 (\alpha^{(2)}_x + \beta^{(2)}_y + \gamma^{(2)}_z) - (\alpha^{(1)}_x + \beta^{(1)}_y + \gamma^{(1)}_z) = 0 \tag{10}$$

è evidente che questa equazione ammette il moltiplicatore di Jacobi 1 e che quindi la sua seconda soluzione χ potrà ottenersi con una quadratura.

È facile vedere, dopo questa osservazione, che può determinarsi, sempre con quadrature, un moltiplicatore comune $\bar{\mu}$ delle due equazioni $B_1 f = 0$, $B_2 f = 0$, cioè una soluzione del sistema:

$$(11) \quad B_1(\mu) + (\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)})\,\mu = 0 \;\; , \;\; B_2(\mu) + (\alpha_x^{(2)} + \beta_y^{(2)} + \gamma_z^{(2)})\,\mu = 0 .$$

(Queste due equazioni possiedono soluzioni comuni, poichè le due equazioni:

$$B_1 f - (\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)})\,\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \quad ; \quad B_2 f - (\alpha_x^{(2)} + \beta_y^{(2)} + \gamma_z^{(2)})\,\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$$

nell' ipotesi (9) formano un sistema completo). Dal sistema (10), moltiplicando la prima equazione per $\alpha_x^{(2)} + \beta_y^{(2)} + \gamma_z^{(2)}$ e la seconda per $\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)}$, si ottiene :

$$(12) \qquad (\alpha_x^{(2)} + \beta_y^{(2)} + \gamma_z^{(2)})\,B_1(\mu) - (\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)})\,B_2(\mu) = 0 ,$$

Il sistema (10) è dunque equivalente all' altro :

$$B_1(\mu) + (\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)})\,\mu = 0$$
$$(\alpha_x^{(2)} + \beta_y^{(2)} + \gamma_z^{(2)})\,B_1(\mu) - (\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)})\,B_2(\mu) = 0 .$$

Dovendo $\bar{\mu}$ soddisfare alla seconda equazione si vede intanto che deve essere $\bar{\mu}$ funzione di ψ e di χ :

$$\mu = F(\psi , \chi) .$$

Sostituendo nella prima equazione si trova, poichè è $B_1(\psi) = 0$,:

$$B_1(\chi)\frac{\partial f}{\partial \chi} + (\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)})\,F = 0 .$$

Per avere la soluzione $\bar{\mu}$ bisognerà dunque determinare F in guisa che sia soddisfatta l'equazione:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \chi}}{F} = -\frac{\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)}}{B_1(\chi)}.$$

Il secondo membro di questa dovrà evidentemente essere una funzione delle sole ψ e χ (del resto si verifica subito che nelle ipotesi (9) e (9') la quantità $\frac{\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)}}{B_1(\chi)}$ è una soluzione dell'equazione (12)). Poniamo:

$$-\frac{\alpha_x^{(1)} + \beta_y^{(1)} + \gamma_z^{(1)}}{B_1(\chi)} = H(\psi, \chi);$$

sarà $H(\psi, \chi)$ una funzione nota di ψ, χ ed avremo:

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \chi} = H(\psi, \chi),$$

quindi:

$$\bar{\mu} = F = e^{\int H(\psi, \chi)\, d\chi}.$$

È dunque chiaro che può ottenersi, con sole quadrature, la soluzione più generale del sistema (11).

D'altra parte, essendo $\bar{\mu}$ un moltiplicatore comune delle due equazioni $B_1 f = 0$, $B_2 f = 0$, e poichè sono soddisfatte le relazioni

$$(B_1 X) = \frac{\nu}{2} B_1 \; ; \; (B_2 X) = \frac{\nu}{2} B_2,$$

per un noto teorema [1]) si ottiene che la quantità:

[1]) Il teorema è questo: Se la $Xf \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ ha il moltiplicatore M ed ammette la trasformazione infinitesima Xf, per modo che:

$$(X, A) = \lambda\, Af$$

l'espressione:

$$X(\log M) + \sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \lambda$$

sarà una soluzione di $Af = 0$, ovvero una costante.

$$\mathrm{X}\,(\log \bar{\mu}) + \frac{\nu}{2}$$

è una soluzione del sistema $\mathrm{B}_1 f = 0$, $\mathrm{B}_2 f = 0$ e quindi una funzione della sola ψ:

$$\mathrm{X}\,(\log \bar{\mu}) + \frac{\nu}{2} = \mathrm{K}\,(\psi)\,; \tag{13}$$

ed essendo $\bar{\mu}$ una funzione nota sarà K una funzione nota di ψ.

Ora, per essere Δ una costante ed $\mathrm{X}\,(\psi) = \Delta$, si ha:

$$\mathrm{X}\left(\frac{1}{\Delta}\int \mathrm{K}\,(\psi)\,d\,\psi\right) = \mathrm{K}\,(\psi)\,\frac{\mathrm{X}\,(\psi)}{\Delta} = \mathrm{K}\,(\psi)$$

e quindi dalla (13):

$$\mathrm{X}\left[\log\left(\bar{\mu} - e^{\frac{1}{\Delta}\int \mathrm{K}\,(\psi)\,d\,\psi}\right)\right] + \frac{\nu}{2} = 0\,.$$

La funzione, nota per quadrature, $\bar{\mu} - e^{\frac{1}{\Delta}\int \mathrm{K}\,(\psi)\,d\,\psi}$ ci permette (lemma I) di ricavare dalle due trasformazioni infinitesimali $\mathrm{B}_1 f$, $\mathrm{B}_2 f$ due altre trasformazioni infinitesimali:

$$\frac{1}{\bar{\mu} - e^{\frac{1}{\Delta}\int \mathrm{K}\,d\,\psi}}\,\mathrm{B}_1 f \qquad\qquad \frac{1}{\bar{\mu} - e^{\frac{1}{\Delta}\int \mathrm{K}\,d\,\psi}}\,\mathrm{B}_2 f$$

permutabili colla $\mathrm{X}f$ e quindi di integrare l'equazione $\mathrm{X}f = 0$ con sole quadrature. Otteniamo così il:

TEOREMA IV. — *Se si conosce un invariante differenziale* $\varphi\,(x\,, y\,, z\,, p\,, q)$ *del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:*

$$\mathrm{X}f \equiv \xi\,(x, y, z)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\,(x\,, y\,, z)\,\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\,(x, y\,, z)\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

tale che in forza del sistema:

$$\varphi\,(x\,, y\,, z\,, p\,, q) = a \qquad\qquad \xi\,p + \eta\,q - \zeta = 0$$

non si annulli il determinante $\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$, *l'equazione* $Xf=0$ *è risolubile, nei casi più sfavorevoli, con quadrature.*

Che il caso in cui sono soddisfatte ad un tempo le (9) e le (9') possa presentarsi si può vedere con un esempio. Si consideri il gruppo ad un parametro definito dalla trasformazione infinitesimale:

$$Xf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

La funzione $\varphi = p$ è un invariante del gruppo; e si ha $\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = y.$

In questo caso risolvendo il sistema:

$$p = a \quad xp + yq - z = 0$$

rispetto a p e q si trova:

$$p = a \quad q = \frac{z - xa}{y}$$

e quindi:

$$\frac{\bar{A}f}{\sqrt{\Phi}} = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{y}}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Facendo $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ si ha dunque:

$$B_1 f = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad B_2 f = \frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

da cui risulta $(B_1, B_2) = 0$: si vede subito che le condizioni sopraddette sono verificate. Si verifica anche che è $\Delta = \text{cost}$: si ha infatti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{y}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1.$$

Si trova $\psi = \log \frac{1}{y}$, $\mu = \text{cost}$ ed essendo $\nu = 3$ la soluzione dell' equazione:

$$Xf + \frac{\nu}{2} f = 0$$

ci è data da $f = y^{-\frac{3}{2}}$.

6. — Tutto ciò che abbiamo detto sta nell' ipotesi che il determinante $\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$ non si annulli in conseguenza del sistema di equazioni $\varphi = a$, $\xi p + \eta q - \zeta = 0$.

Ora può vedersi che, se supponiamo che questo sistema sia risolvibile rispetto a p e q e dia per risoluzione due funzioni P e Q derivabili rispetto ad a e che, essendo x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 un sistema iniziale di valori soddisfacenti al sistema delle due stesse equazioni, nell' intorno del punto x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 la funzione φ sia una funzione regolare, il determinante $\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$ non può annullarsi in conseguenza del sistema (4). Se infatti questo sistema dà per risoluzione

$$p = P(x, y, z, a) \quad , \quad q = Q(x, y, z, a)$$

e poniamo, come precedentemente, :

$$(\varphi_p)_{p=P, q=Q} = \alpha \quad ; \quad (\varphi_q)_{p=P, q=Q} = \beta ,$$

dalle identità:

$$\varphi(x, y, z, P, Q) = a \quad ; \quad \xi P + \eta Q - \zeta = 0$$

derivando rispetto ad a si ottiene:

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial a} + \beta \frac{\partial Q}{\partial a} = 1 \qquad \xi \frac{\partial f}{\partial a} + \eta \frac{\partial f}{\partial a} = 0 .$$

Di qui vediamo che il sistema $\alpha R + \beta S = 1$; $\xi R + \eta S = 0$ è compatibile, essendo soddisfatto per $R = \frac{\partial P}{\partial a}$, $S = \frac{\partial Q}{\partial a}$; non può dunque essere: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \xi & \eta \end{vmatrix} = 0$.

Il TEOREMA IV può allora enunciarsi come segue:

Se si conosce un invariante differenziale $\varphi(x, y, z, p, q)$ del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:

$$Xf = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

tale che il sistema di equazioni:

$$\varphi(x, y, z, p, q) = a \quad ; \quad \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

sia risolubile rispetto a p e q e dia per risoluzione due funzioni derivabili rispetto ad a, ed esiste un sistema iniziale di valori soddisfacenti al sistema nell' intorno del quale la funzione φ è regolare colle sue derivate prime φ_p e φ_q, la equazione $Xf = 0$ si può integrare, nei casi più sfavorevoli, con quadrature.

7. — La conoscenza dell' invariante differenziale $\varphi(x, y, z\, p, q)$ può utilizzarsi, nell' integrazione dell' equazione $Xf = 0$, anche quando il sistema $\varphi = a$, $\xi p + \eta q - \zeta = 0$ non sia risolvibile rispetto a p e q. Supponiamo appunto di essere in questo caso, ma manteniamo l'ipotesi che la funzione $\varphi(x, y, z, p, q)$, nel campo in cui la consideriamo, sia regolare.

Se risolviamo l' equazione $\xi p + \eta q - \zeta = 0$ rispetto a p e sostituiamo il valore ricavato in φ, indicando con $\bar{\varphi}$ ciò che diventa φ per la sostituzione fatta, la funzione $\bar{\varphi}$ non conterrà solo p, ma neanche q, che altrimenti il sistema (4) sarebbe risolubile rispetto a p e q. È chiaro allora che φ dovrà essere della forma:

$$\varphi = \bar{\varphi}(x, y, z) + (\xi p + \eta q - Z)^n \psi(x, y, z, p, q)$$

con n intero [1]. Poichè l' equazione $\xi p + \eta q - \zeta = 0$ ammette la trasformazione infinitesimale $X'f$, pel teorema di Lie più volte ri-

[1]) dove la $\psi(x, y, z, p, q)$ non diventa infinita e non perde significato per $p = \dfrac{\zeta - \eta q}{\xi}$.

chiamato (vedi nota a pag. 24) dall'essere $X'\varphi = 0$ si ricava:

$$X\left(\varphi_{\left(p=\frac{\zeta-\eta q}{\xi}\right)}\right)=0$$

cioè: $X\overline{\varphi} = 0$. Ma allora dovrà essere ancora:

$$X'\left[(\xi p+\eta q-\zeta)^n \psi\right]=0,$$

ossia:

$$X'\psi - n\,(\xi_z p+\eta_z q-\zeta_z)\,\psi = 0\,.$$

Potendosi evidentemente anche scrivere:

$$X'\left(\frac{1}{\sqrt[n]{\psi}}\right)+(\xi_z p+\eta_z q-\zeta_z)\,\frac{1}{\sqrt[n]{\psi}}=0\,,$$

se poniamo per semplicità:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\psi}}=\pi$$

e inoltre:

$$Af=\pi_p\frac{\partial f}{\partial x}+\pi_q\frac{\partial f}{\partial y}+(p\,\pi_p+q\,\pi_q-\pi)\frac{\partial f}{\partial z}-$$
$$-(\pi_x+p\,\pi_z)\frac{\partial f}{\partial p}-(\pi_y+q\,\pi_z)\frac{\partial f}{\partial q}\,,$$

con considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte in principio del paragrafo troviamo:

$$(A\,,X')\,f=0\,.$$

Se di più supponiamo che il sistema di equazioni:

$$\pi\,(x\,,y\,,z\,,p\,,q)=0 \quad , \quad \xi p+\eta q-\zeta=0$$

non abbia per conseguenza l'annullarsi di $\pi_p\,\eta-\pi_q\,\xi$ e dia per risoluzione:

$$p=P\,(x\,,y\,,z) \quad , \quad q=Q\,(x\,,y\,,z)\,,$$

colle posizioni:

$$(\pi_p)_{p=P,\,q=Q} = \alpha \;;\quad (\pi_q)_{p=P,\,q=Q} = \beta\;;$$

$$(p\,\pi_p + q\,\pi_q - \pi)_{p=P,\,q=Q} = \gamma\,.$$

$$\overline{A}f = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z},$$

avremo:

$$(\overline{A}\,, X) = 0$$

ottenendosi così una trasformazione infinitesimale ammessa dalla $Xf = 0$. Vediamo dunque che anche nel caso presentemente considerato il problema dell'integrazione dell'equazione $Xf = 0$ è reso più semplice dalla conoscenza dell' invariante differenziale.

§ 4.

Integrazione di una equazione $Xf = 0$ con certi noti invarianti integrali e differenziali e con certe note trasformazioni infinitesime.

1. — Si conoscano h invarianti integrali del primo ordine relativi ad una qualunque varietà ad n dimensioni dello spazio z, $x_1, \ldots, x_n$:

$$(1)\qquad \begin{cases} \int \psi_1(x_1\,,\ldots,x_n\,,z\,,p_1\,,\ldots,p_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int \psi_h(x_1\,,\ldots,x_n\,,z\,,p_1\,,\ldots,p_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n \end{cases}$$

e $k - 1$ invarianti differenziali, pure del primo ordine,:

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x_1\,,\ldots,x_n\,,z\,,p_1\,,\ldots,p_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{k-1}(x_1\,,\ldots,x_n\,,z\,,p_1\,,\ldots,p_n) \end{cases}$$

che ammettono la trasformazione infinitesimale:

$$\mathrm{X}f = \xi_1(x_1, \ldots, x_n, z)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n(x_1, \ldots, x_n, z)\frac{\partial f}{\partial x_n} + \\ + \zeta(x_1, \ldots, x_n, z)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Di più l'equazione $\mathrm{X}f = 0$ ammetta $n - h - k$ note trasformazioni infinitesimali:

$$\mathrm{X}_r f = \xi_1^r \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^r \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n^r \frac{\partial f}{\partial x_n} + \\ + \zeta^r \frac{\partial f}{\partial z} \quad (r = 1, 2, \ldots, n - h - k)$$

soddisfacenti alle relazioni:

(3) $$(\mathrm{X}_r, \mathrm{X}) f = \lambda_r \mathrm{X}f.$$

Se indichiamo, come al § 2, con $\mathrm{X}'f$ la trasformazione infinitesimale ottenuta prolungando la $\mathrm{X}f$ una prima volta, considerando questa come agente su $p_1, p_2, \ldots, p_n$, potremo scrivere brevemente:

(4) $$\mathrm{X}'f = [\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta, f] - \\ - (\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta)\frac{\partial f}{\partial z};$$

ed esprimendo che gli integrali (1) e le funzioni (2) sono invarianti per la trasformazione infinitesimale $\mathrm{X}f$ si ha:

(5) $$\mathrm{X}'(\psi_i) + (\xi_{1,x_1} + p_1 \xi_{1,z} + \xi_{2,x_2} + p_2 \xi_{2,z} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \\ + p_n \xi_{n,z}) \psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, h) \\ \mathrm{X}'(\varphi_j) = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, k - 1)$$

le ultime delle quali possono anche scriversi:

(5') $$\mathrm{X}'(\varphi_j - \alpha_j) = 0 \quad , \quad (j = 1, 2, \ldots, k - 1)$$

dove con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ intendiamo indicare $k-1$ costanti arbitrarie.

Procedendo ora come a § 2, n. 1, per gli invarianti integrali, e come a § 3, n. 2, per gli invarianti differenziali troviamo che le trasformazioni infinitesime:

$$\mathrm{A}_i f = \varphi'_{i,p_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varphi'_{i,p_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \varphi'_{i,p_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} +$$

$$+ (p_1 \varphi'_{i,p_1} + p_2 \varphi'_{i,p_2} + \ldots + p_n \varphi'_{i,p_n} - \varphi'_i) \frac{\partial f}{\partial z} -$$

$$-(\varphi'_{i,x_1} + p_1 \varphi'_{1,z}) \frac{\partial f}{\partial p_1} - \ldots - (\varphi'_{i,x_n} + p_n \varphi'_{i,z}) \frac{\partial f}{\partial p_n} \quad \begin{array}{l}(\varphi'_i = \varphi_i - a_i) \\ (i = 1, 2, \ldots, k-1)\end{array}$$

$$\mathrm{B}_j f = \psi_{j,p_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \psi_{j,p_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \psi_{j,p_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} +$$

$$+ (p_1 \psi_{j,p_1} + \ldots + p_n \psi_{j,p_n} - \psi_i) \frac{\partial f}{\partial z} - (\psi_{j,x_1} + p_1 \psi_{j,z}) \frac{\partial f}{\partial p_1} -$$

$$- \ldots - (\psi_{j,x_n} + p_n \psi_{j,z}) \frac{\partial f}{\partial p_n} (j = 1, 2, \ldots, h)$$

soddisfano alle relazioni:

$$(\mathrm{A}_i, \mathrm{X}') f = (\xi_z - p_1 \xi_1 - p_2 \xi_2 - \ldots - p_n \xi_n) \mathrm{A}_i f +$$

$$+ \varphi'_i [\zeta_z - p_1 \xi_{1,z} - \ldots - p_n \xi_{n,z}, f]$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

$$(\mathrm{B}_j, \mathrm{X}') f = (\xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z) \mathrm{B}_j f +$$

$$+ \psi_j [\xi_{1,x_1} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z, f]$$

$$(j = 1, 2, \ldots, h).$$

2. — Sviluppando la parentesi di Poissons:

$$\pi = [\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta, \xi_1^r p_1 + \xi_2^r p_2 + \ldots + \xi_n^r p_n - \zeta^r]$$

otteniamo :

$$\pi = \xi_1 \{ \xi^r_{1,x_1} p_1 + \dots + \xi^r_{n,x_1} p_n - \zeta^r_{x_1} + p_1 (\xi^r_{1,z} p_1 + \dots + \xi^r_{n,z} p_n - \zeta^r_z) \} -$$

$$- \xi^r_1 \{ \xi_{1,x_1} p_1 + \dots + \xi_{n,x_1} p_n - \zeta_{x_1} + p_1 (\xi_{1,z} p_1 + \dots + \xi_{n,z} p_n - \zeta_z) \} +$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ \xi_n \{ \xi^r_{1,x_n} p_1 + \dots + \xi^r_{n,x_n} p_n - \zeta_{x_n} + p_n (\xi^r_{1,z} p_1 + \dots + \xi^r_{n,z} p_n - \zeta^r_z) \} -$$

$$- \xi^r_n \{ \xi_{1,x_n} p_1 + \dots + \xi_{n,x_n} p_n - \zeta_{x_n} + p_n (\xi_{1,z} p_1 + \dots + \xi_{n,z} p_n - \zeta_z) \} =$$

$$= \{ X(\xi^r_1) - X_r(\xi_1) \} p_1 + \dots + \{ X(\xi^r_n) - X_r(\xi_n) \} p_n -$$

$$- \{ X(\zeta^r) - X_r(\zeta) \} + (\xi^r_{1,z} p_1 + \xi^r_{2,z} p_2 + \dots + \xi^r_{n,z} p_n - \zeta^r_z)$$

$$(\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \dots + \xi_n p_n - \zeta) - (\xi_{1,z} p_1 + \xi_{2,z} p_2 + \dots +$$

$$+ \xi_{n,z} p_n - \zeta_z)(\xi^r_1 p_1 + \xi^r_2 p_2 + \dots + \xi^r_n p_n - \zeta^r).$$

Ma poichè, come risulta dalla (3), è $X(\xi^r_t) - X_r(\xi_t) = -\lambda_r \xi_t$, si avrà :

$$\pi - (\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \dots + \xi_n p_n - \zeta)$$

$$(\xi^r_{1,z} p_1 + \xi^r_{2,z} p_2 + \dots + \xi^r_{n,z} p_n - \zeta^r_z) = -\lambda_r (\xi_1 p_1 + \dots + \xi_n p_n - \zeta) -$$

$$- (\xi_{1,z} p_1 + \dots + \xi_{n,z} p_n - \zeta_z)(\xi^r_1 p_1 + \dots + \xi^r_n p_n - \zeta^r),$$

che, tenendo conto della (4), può anche scriversi :

$$(7) \quad X'(\xi^r_1 p_1 + \dots + \xi^r_n p_n - \zeta^r) = -\lambda_r (\xi_1 p_1 + \dots + \xi_n p_n - \zeta) -$$

$$- (\xi_{1,z} p_1 + \dots + \xi_{n,z} p_n - \zeta_z)(\xi^r_1 p_1 + \dots + \xi^r_n p_n - \zeta^r).$$

Basta osservare questa identità insieme colle (5) e (5') e coll' altra :

$$X'(\xi_1 p_1 + \dots + \xi_n p_n - \zeta) = -(\xi_1 p_1 + \dots + \xi_n p_n - \zeta)$$

$$(\xi_{1,z} p_1 + \dots + \xi_{n,z} p_n - \zeta_z)$$

per vedere che il sistema delle n equazioni:

$$
(8) \left\{ \begin{array}{c}
\varphi_1 = a \; ; \; \varphi_2 = a_2 \; ; \; \dots \; ; \; \varphi_{k-1} = a_{k-1} \\
\psi_1 = 0 \; ; \; \psi_2 = 0 \; ; \; \dots \; ; \; \psi_h = 0 \\
\pi_1 \equiv \xi'_1 p_1 + \dots + \xi'_n p_n - \zeta' = 0 \; ; \dots ; \; \pi_{n-h-k} \equiv \xi_1^{n-h-k} p_1 + \dots \xi_n^{n-h-k} p_n - \zeta^{n-h-k} = 0 \\
\pi \equiv \xi_1 p_1 + \dots + \xi_n p_n - \zeta = 0
\end{array} \right.
$$

ammette la trasformazione infinitesimale $X'f$.

Proseguendo allora il ragionamento del § 2 e del § 3 rispettivamente per gli invarianti integrali e differenziali, quando si faccia l' ulteriore ipotesi che, in forza del sistema (8), non si annulli il determinante funzionale:

$$
\frac{\partial\left(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}, \psi_1, \dots \psi_h, \pi_1, \dots, \pi_{n-h-k}, \pi\right)}{\partial\left(p_1, p_2 \dots, p_n\right)},
$$

otterremo che, indicando con $A_i f$, $B_i f$ le trasformazioni accorciate ottenute dalle $A_i f$, $B_i f$ sopprimendo i termini in $\frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n}$ e sostituendo nei coefficienti degli altri termini a $p_1, p_2, \dots, p_n$ rispettivamente i loro valori $P_1, P_2, \dots, P_n$, ottenuti dal sistema (8) in funzione di $x_1, \dots, x_n, z, a_1, \dots, a_{k-1}$, saranno soddisfatte le relazioni seguenti:

$$
(\overline{A}_i, X) f = (\xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \dots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z) \, \overline{A}_i f \quad (i = 1, 2, \dots k-1)
$$

$$
(B_j, X) f = (\zeta_z - P_1 \xi_{1,z} - P_2 \xi_{2,z} - \dots P_n \xi_{n,z}) \, \overline{B}_j f, \quad (j = 1, 2, \dots, h)
$$

quindi il:

Teorema I. — *Se del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:*

$$
Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}
$$

si conoscono $k-1$ invarianti differenziali del primo ordine re-

lativi all' ipersuperficie $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ *dello spazio* $x_1, \ldots, x_2, z$:

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)\ ;\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)\ ; \ldots ;$$
$$\varphi_{k-1}(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$$

ed h invarianti integrali del primo ordine, relativi all' ipersuperficie stessa:

$$\int \psi_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\ ;$$
$$\int \psi_2(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)\, dx_1, dx_2 \ldots dx_n\ ; \ldots ;$$
$$\int \psi_h(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

e di più sono note $n-h-k$ *trasformazioni infinitesimali:*

$$\mathrm{X}_r f = \xi_1^r \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^r \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n^r \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta^r \frac{\partial f}{\partial z} \quad (r = 1, 2, \ldots, n-h-k)$$

ammesse dall' equazione $\mathrm{X}f = 0$;
se inoltre il determinante funzionale:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}, \psi_1, \ldots, \psi_h, \pi_1, \ldots, \pi_{n-h-k}, \pi)}{\partial\, p_1, p_2, \ldots, p_n)}$$

con:

$$\pi_r = \xi_1^r p_1 + \xi_2^r p_2 + \ldots + \xi_n^r p_n - \zeta^r\ ;$$
$$\pi = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta \quad (r = 1, 2, \ldots, n-h-k)$$

non si annulla in forza del sistema:

$$\varphi_1 = a_1\ ,\ \varphi_2 = a_2, \ldots, \varphi_{k-1} = a_{k-1}\ ,\ \psi_1 = 0, \ldots, \psi_h = 0\ ,$$
$$\pi_1 = 0, \ldots, \pi_{n-h-k} = 0\ ,\ \pi = 0$$

e questo sistema, che in tale ipotesi sarà risolubile rispetto a p_1, $p_2, \ldots, p_n$, *dà per risoluzione:*

$$p_1 = \mathrm{P}_1(x_1, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_{k-1})\ ;$$
$$p_2 = \mathrm{P}_2(x_1, \ldots, x_n, x, a_1, \ldots, a_{k-1})\ ; \ldots ;$$
$$p_n = \mathrm{P}_n(x_1, \ldots, x_n, z, a_1, \ldots, a_{k-1}),$$

ponendo:

$$(\varphi'_{1},_{p_m})_{p_1=P_1,\dots,p_n=P_n}=\alpha^i_m \quad (m=1\,,2\,,\dots,n)$$

$$(p_1\varphi'_{i},_{p_1}+p_2\varphi'_{i},_{p_2}+\dots+p_n\varphi'_{i p_n}-\varphi'_i)_{p_1=P_1,\dots,p_n=P_n}=\alpha^i_{n+1}$$

$$\varphi'_i=\varphi_i-a_i$$

$$(i=1,2,\dots,k-1)$$

$$(\psi_j,_{p_m})_{p_1=P_1,\dots,p_n=P_n}=\beta^j_m \quad (m=1\,,2\,,\dots,n)$$

$$(p_1\psi_j,_{p_1}+p_2\psi_j,_{p_2}+\dots+p_n\psi_j,_{p_n}-\psi_j)_{p_1=P_1,\dots,p_n=P_n}=\beta^j_{n+1}$$

$$(j=1\,,2\,,\dots,h)$$

e infine [1]*:*

$$A_if=\alpha^i_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\alpha^i_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+\alpha^i_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+\alpha^i_{n+1}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$B_jf=\beta^j_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\beta^j_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+\beta^j_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+\beta^j_{n+1}\frac{\partial f}{\partial x}$$

si ha:

$$(9)\quad\begin{cases}(A_i\,,X)f=(\zeta_z-\xi_{1,z}p_1-\xi_{2,z}p_2-\dots-\xi_{n,z}p_n)A_if & (i=1,2\,,\dots,k-1)\\ (B_j\,,X)f=(\xi_{1,x_1}+\xi_{2,x_2}+\dots+\xi_{n,x_n}+\zeta_z)\,B_jf & (j=1,2\,,\dots,h)\end{cases}$$

3. — Teorema. — *Nelle stesse ipotesi e colle stesse posizioni del teorema* I *il determinante:*

$$D=\begin{vmatrix}\alpha^1_1 & \alpha^1_2\dots\dots & \alpha^1_n\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha^{k-1}_1 & \alpha^{k-1}_2\dots\dots & \alpha^{k-1}_n\\ \beta^1_1 & \beta^1_2\dots\dots & \beta^1_n\\ \dots & \dots & \dots\\ \beta^h_1 & \beta^h_2\dots\dots & \beta^h_n\\ \xi^1_1 & \xi^1_2\dots\dots & \xi^1_n\\ \dots & \dots & \dots\\ \xi^{n-h-k}_1 & \xi^{n-h-k}_2\dots & \xi^{n-h-k}_n\\ \xi_1 & \xi_2\dots\dots & \xi_n\end{vmatrix}$$

[1]) Indicheremo qui e nel seguito coi simboli $A_i\,f$ e $B_j\,f$ le trasformazioni infinitesimali accorciate ottenute dalle (6), invece che, come precedentemente, con $\overline{A}_i\,f,\overline{B}_j\,f$.

soddisfa all'equazione:

$$(10)\qquad X(D) = \{k(P_1\,\xi_{1,z} + P_2\,\xi_{2,z} + \ldots + P_n\,\xi_{n,z} - \zeta_z) - \\ - (h-1)\,(\xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \ldots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z)\}\,D.$$

DIMOSTRAZIONE. — Per semplicità muteremo alcune delle precedenti notazioni ponendo:

$$\beta^j_m = \alpha^{k-1+j}_m \quad B^j f = A_{k-1+j} f \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \ldots, h \\ m = 1, 2, \ldots, n+1 \end{pmatrix}$$

$$\xi^r_m = \alpha^{h+k-1+r}_m \quad \zeta^r = \alpha^{h+k-1+r}_{n+1} \quad X^r f = A_{h+k-1+r} f \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, n-h-k \\ m = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

$$\xi_m = \alpha^n_m \quad \zeta = \alpha^n_{n+1} \quad Xf = A_n f \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Potremo allora scrivere:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \ldots \alpha^1_n \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 \ldots \alpha^2_n \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \alpha^n_1 & \alpha^n_2 \ldots \alpha^n_n \end{vmatrix}.$$

Se indichiamo con D_s il determinante:

$$D_s = \begin{vmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 \ldots\ldots & \alpha^1_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{s-1}_1 & \alpha^{s-1}_2 & \alpha^{s-1}_n \\ A_n(\alpha^s_1) & A_n(\alpha^s_2) & A_n(\alpha^s_n) \\ \alpha^{s+1}_1 & \alpha^{s+1}_2 & \alpha^{s+1}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^n_1 & \alpha^n_2 \ldots\ldots & \alpha^n_n \end{vmatrix}$$

otteniamo subito:

$$(a)\qquad X(D) = D_1 + D_2 + \ldots + D_n = \sum_{s=1}^{s=n} D_s.$$

Poniamo ancora:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \ldots\ldots & \alpha_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{s-1} & \alpha_2^{s-1} & \alpha_n^{s-1} \\ A_s(\alpha_1^n) & A_s(\alpha_2^n) & A_s(\alpha_n^n) \\ \alpha_1^{s+1} & \alpha_2^{s+1} & \alpha_n^{s+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Se osserviamo che le trasformazioni infinitesimali $A_1 f$, $A_2 f, \ldots,$ $A_n f$ soddisfano alle relazioni:

$$(A_i\,, X)f = \left(\frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial x} - P_1 \frac{\partial \alpha_1^n}{\partial x} - \ldots - P_n \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial x}\right) A_i f \quad (i = 1,2\,, \ldots, k-1)$$

$$(A_j, X)f = \left(\frac{\partial \alpha_1^n}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial x_n} + \frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial x}\right) A_j f \ (j = k, k+1, \ldots, k+h-1)$$

$$(A_r\,, X)f = \mu_r\, Xf \quad (r = k+h\,, \ldots, n-1)$$

e che quindi si ha:

$$A_i(\alpha_m^n) - A_n(\alpha_m^i) = \left(\frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial x} - P_1 \frac{\partial \alpha_1^n}{\partial x} - \ldots - P_n \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial x}\right) \alpha_m^i \ (i = 1,2,\ldots,k-1)$$

$$A_j(\alpha_m^n) - A_n(\alpha_m^j) = \left(\frac{\partial \alpha_1^n}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial x_n} + \frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial x}\right) \alpha_m^j \ (j = k\,, k+1, \ldots, k+h-1)$$

$$A_r(\alpha_m^n) - A_n(\alpha_m^r) = \mu_r\, \alpha_m^n \quad (r = k+h\,, \ldots, n-1)$$

risulta:

$$D_i = \Delta_i + \left(P_1 \frac{\partial \alpha_1^n}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial x} + \ldots + P_n \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial x}\right) D \ (i = 1,2,\ldots,k-1)$$

$$D_j = \Delta_j - \left(\frac{\partial \alpha_1^n}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial x_n} + \frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial x}\right) D \quad (j = k, k+1, \ldots, k+h-1)$$

$$D_r = \Delta_r \quad (r = k+h\,, \ldots, n-1)$$

e quindi per la (a) :

$$(b) \quad \mathrm{X}(\mathrm{D}) = \sum_{s=1}^{s=n} \Delta_s + \left\{(k-1)\left(\mathrm{P}_1 \frac{\partial \alpha_1^n}{\partial z} + \mathrm{P}_2 \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial z} + \ldots + \mathrm{P}_n \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial z}\right) - \right.$$

$$\left. - h\left(\frac{\partial \alpha_1^n}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial x_n} + \frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial z}\right)\right\} \mathrm{D}\,.$$

Rappresentiamo ora con $\overline{\mathrm{A}}_s f$ la trasformazione infinitesimale accorciata che si ottiene sopprimendo nella $\mathrm{A}_s f$ il termine che contiene $\dfrac{\partial f}{\partial z}$:

$$\overline{\mathrm{A}}_s f = \alpha_1^s \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2^s \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n^s \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Si avrà allora :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \ldots\ldots & \alpha_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{s-1} & \alpha_2^{s-1} \ldots & \alpha_n^{s-1} \\ \overline{\mathrm{A}}_s(\alpha_1^n) & \overline{\mathrm{A}}_s(\alpha_2^n) \ldots & \overline{\mathrm{A}}_s(\alpha_n^n) \\ \alpha_1^{s+1} & \alpha_2^{s+1} \ldots & \alpha_n^{s+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n \ldots\ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} + \alpha_{n+1}^s \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \ldots & \alpha_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{s-1} & \alpha_2^{s-1} \ldots & \alpha_n^{s-1} \\ \dfrac{\partial \alpha_1^n}{\partial z} & \dfrac{\partial \alpha_2^n}{\partial z} \ldots & \dfrac{\partial \alpha_n^n}{\partial z} \\ \alpha_1^{s+1} & \alpha_2^{s+1} \ldots & \alpha_n^{s+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Indicando con $[\alpha_m^s]$ il complemento algebrico dell'elemento α_m^s nel determinante D , come è noto, si ha :

$$\sum_s \alpha_l^s\,[\alpha_m^s] = \varepsilon_{l,m}\mathrm{D} \quad \begin{cases} \varepsilon_{l,m} = 0 & l \neq m \\ \varepsilon_{l,m} = 1 & l = n \end{cases};$$

ne segue :

$$(c) \qquad \sum_{s=1}^{s=n} \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \ldots\ldots & \alpha_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{s-1} & \alpha_2^{s-1} \ldots\ldots & \alpha_n^{s-1} \\ \overline{\mathrm{A}}_s(\alpha_1^n) & \overline{\mathrm{A}}_s(\alpha_2^n) \ldots & \overline{\mathrm{A}}_s(\alpha_n^n) \\ \alpha_1^{s+1} & \alpha_2^{s+1} \ldots\ldots & \alpha_n^{s+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n \ldots\ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{m=1}^{m=n} \overline{\mathrm{A}}_s(\alpha_m^n)\,[\alpha_m^s] = \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{m=1}^{m=n} \sum_{l=1}^{l=n} \alpha_l^s \frac{\partial \alpha_m^n}{\partial x_l}\,[\alpha_m^s] = \mathrm{D} \sum_{m=1}^{m=n} \frac{\partial \alpha_m^n}{\partial x_m}$$

Osservando poi che, dovendo soddisfare $P_1, P_2, \ldots, P_n$ al sistema (8), deve aversi:

$$\alpha_{n+1}^s = \alpha_1^s P_1 + \alpha_2^s P_2 + \ldots + \alpha_n^s P_n ,$$

si ottiene:

$$(d) \qquad \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_{n+1}^s \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \ldots\ldots & \alpha_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{s-1} & \alpha_2^{s-1} \ldots & \alpha_n^{s-1} \\ \frac{\partial \alpha_1^n}{\partial z} & \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial z} \ldots & \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial z} \\ \alpha_1^{s+1} & \alpha_2^{s+1} \ldots & \alpha_n^{s+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n \ldots\ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{s=1}^{s=n} \alpha_{n+1}^s \sum_{m=1}^{m=n} \frac{\partial \alpha_m^n}{\partial z} [\alpha_m^s] = \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{r=1}^{r=n} \alpha_r^s P_r \sum_{m=1}^{m=n} \frac{\partial \alpha_m^n}{\partial z} [\alpha_m^s] = D \sum_{m=1}^{m=n} P_m \frac{\partial \alpha_m^n}{\partial z} .$$

Dalle (*c*) e (*d*) risulta finalmente:

$$\sum_{s=1}^{s=n} \Delta_s = D \left\{ \frac{\partial \alpha_1^n}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial x_n} + P_1 \frac{\partial \alpha_1^n}{\partial z} + P_2 \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial z} + \ldots + P_n \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial z} \right\} =$$

$$= D \left\{ \left(\frac{\partial \alpha_1^n}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial x_n} + \frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial z} \right) + \left(P_1 \frac{\partial \alpha_1^n}{\partial z} + P_2 \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial z} + \ldots + P_n \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial z} \right) \right\} .$$

Sostituendo nella (*b*) per $\sum_{s=1}^{s=n} \Delta_s$ l'espressione così ottenuta, ne risulta la formula:

$$A_n(D) = D \left\{ k \left(P_1 \frac{\partial \alpha_1^n}{\partial z} + P_2 \frac{\partial \alpha_2^n}{\partial z} + \ldots + P_n \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial z} \right) - \right.$$

$$\left. - (h-1) \left(\frac{\partial \alpha_1^n}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \alpha_n^n}{\partial z} + \frac{\partial \alpha_{n+1}^n}{\partial z} \right) \right\}$$

la quale, quando si introducano le primitive notazioni, è appunto la formula che si doveva dimostrare.

4. — Facciamo, per brevità, le seguenti posizioni:

$$\nu = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

$$\nu' = P_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial z} + P_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial z} + \ldots + P_n \frac{\partial \xi_n}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

La formula del teorema precedente può scriversi, in modo più semplice, :

$$\text{(10)} \qquad X(D) = D \{ k\nu' - (h-1)\nu \}$$

dalla quale si ha:

$$\text{(10')} \qquad X\left(\frac{1}{\sqrt[k]{D}}\right) = \frac{h-1}{k}\,\nu\,\frac{1}{\sqrt[k]{D}} - \nu'\frac{1}{\sqrt[k]{D}}.$$

Se allora, in luogo delle trasformazioni infinitesimali:

$$A_1 f,\ A_2 f,\ \ldots,\ A_{k-1} f$$

soddisfacenti alle relazioni:

$$(A_i, X)f = -\nu' A_i f \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

introduciamo le:

$$\frac{1}{\sqrt[k]{D}} A_i f \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

queste soddisferanno alle relazioni:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[k]{D}} A_i, X\right) f = -\frac{h-1}{k}\,\nu\,\frac{1}{\sqrt[k]{D}} A_i f;$$

dunque:

Teorema II. — *Nelle stesse ipotesi e colle stesse notazioni del* *teorema I, se si pone di più:*

$$\nu = \xi_{1,x_1} + \xi_{2,x_2} + \dots + \xi_{n,x_n} + \zeta_z$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \dots\dots & \alpha_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} \dots & \alpha_n^{k-1} \\ \beta_1^1 & \beta_2^1 \dots\dots & \beta_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^h & \beta_2^h \dots\dots & \beta_n^h \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 \dots\dots & \xi_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-h-k} & \xi_2^{n-h-k} \dots & \xi_n^{n-h-k} \\ \xi_1 & \xi_2 \dots\dots & \xi_n \end{vmatrix}$$

insieme colle relazioni:

$$(B_j\,, X)f = \nu\, B_j f \qquad (j = 1\,, 2\,, \dots, h)$$

si hanno le altre:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[k]{D}} A_i\,, X\right) f = -\frac{h-1}{k}\,\nu\,\frac{1}{\sqrt[k]{D}} A_i f \quad (i = 1\,, 2\,, \dots, k-1)$$

5. — Le trasformazioni infinitesimali:

$$A_1 f\,, \dots, A_{k-1} f\;,\; B_1 f\,, \dots, B_h f$$

contengono $k-1$ costanti arbitrarie e, finchè almeno queste costanti non prendono dei particolari valori, esse sono indipendenti tra di loro e dalle trasformazioni infinitesimali:

$$X_1 f\,, \dots, X_{n-h-k} f\,, Xf.$$

Diamo ad una di queste costanti, per esempio ad a_1, due valori distinti a'_1 ed a''_1 tali, che le n dette trasformazioni infinitesimali conservino la loro indipendenza, ed indichiamo con uno o con due apici la corrispondente sostituzione, in una qualunque quantità [1]). Possiamo provare che *le trasformazioni infinitesimali:*

$$A''_1 f, \ldots, A''_{k-1} f \;,\; B''_1 f, \ldots, B''_h f$$

non possono essere tutte combinazione lineari omogenee delle:

$$A'_1 f, \ldots, A'_{k-1} f \;,\; B'_1 f, \ldots, B'_h f \;,\; X_1 f, \ldots, X_{n-h-k} f, Xf.$$

Ove infatti accadesse questo, dovrebbero essere equivalenti i due sistemi

$$S' \begin{cases} \alpha_1^{i'} p_1 + \alpha_2^{i'} p_2 + \ldots + \alpha_n^{i'} p_n - \alpha_{n+1}^{i'} = 0 & (i = 1,2, \ldots, k-1) \\ \beta_1^{j'} p_1 + \beta_2^{j'} p_2 + \ldots + \beta_n^{j'} p_n - \beta_{n+1}^{j'} = 0 & (j = 1, 2, \ldots, h) \\ \xi_1^r p_1 + \xi_2^r p_2 + \ldots + \xi_n^r p_n - \zeta^r = 0 & (r = 1,2, \ldots, n-h-k) \\ \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta = 0 & \end{cases}$$

$$S'' \begin{cases} \alpha_1^{i''} p_1 + \alpha_2^{i''} p_2 + \ldots + \alpha_n^{i''} p_n - \alpha_{n+1}^{i''} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, (k-1) \\ \beta_1^{j''} p_1 + \beta_2^{j''} p_2 + \ldots + \beta_n^{j''} p_n - \beta_{n+1}^{j''} = 0 & (j = 1,2, \ldots, h) \\ \xi_2^r p_1 + \xi_2^r p_2 + \ldots + \xi_n^r p_n - \zeta_r = 0 & (x = 1,2, \ldots, n-h-k) \\ \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta = 0 \,. & \end{cases}$$

E poichè i due sistemi S′ ed S″ sono rispettivamente equivalenti ai due sistemi seguenti Σ' e Σ'':

$$\Sigma' \begin{cases} \varphi_1 = a'_1 \;;\; \varphi_2 = a_2 \;; \ldots ; \varphi_{k-1} \;;\; \psi_1 = 0 \;; \ldots ; \psi_h = 0 \\ \xi_1^r p_1 + \ldots + \xi_n^r p_n - \zeta^r = 0 \\ \xi_1 p_1 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma'' \begin{cases} \varphi_1 = a''_1 \;;\; \varphi_2 = a_2 \;; \ldots ; \varphi_{k-1} = a_{k-1} \;;\; \psi_1 = 0 \;; \ldots ; \psi_h = 0 \\ \xi_1^r p_1 + \ldots + \xi_n^r p_n - \zeta_r = 0 \\ \xi_1 p_1 + \ldots + \xi_n p_n - \zeta = 0 \end{cases}$$

---

[1]) Si suppone naturalmente che sia almeno $k-1=1$, vale a dire che sia noto almeno un invariante differenziale. Il caso $k-1=0$ si è trattato a parte al § 2 con $h=n-1$; con $h < n-1$ si può svolgere ancora la stessa trattazione fatta al § 2, salvo ovvie modificazioni, ottenendo sempre che il problema dell'integrazione dell'equazione $Xf=0$ può ridursi, nei casi più sfavorevoli con una operazione d'ordine 1, all' integrazione di una equazione:

$$Yf \equiv \eta_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \eta_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0$$

con m note trasformazioni infinitesimali, (con $m=n$, oppure $m=n-1$).

dovrebbero essere equivalenti anche i due sistemi Σ' e Σ'', mentre invece sono incompatibili. Resta così provato quanto volevamo.

Ne risulta che anche *le trasformazioni infinitesimali:*

$$\text{(11)} \qquad \frac{1}{\sqrt[k]{D''}} A''_1 f , \ldots , \frac{1}{\sqrt[k]{D''}} A''_{k-1} f , B''_1 f , \ldots , B''_h f$$

non possono essere tutte combinazioni lineari omogenee delle;

$$\text{(12)} \ \frac{1}{\sqrt[k]{D'}} A' f , \ldots , \frac{1}{\sqrt[k]{D'}} A'_{k-1} f , B'_1 f , \ldots , B'_h f , X f , \ldots , X_{n-h-k} f , X f .$$

Ora potrà darsi che una tra quelle trasformazioni infinitesimali 11) che sono indipendenti dalle (12) sia una B''_j, per un certo valore di j tra i numeri $1, 2, \ldots, h$, oppure che ciascuna di esse sia una $\frac{1}{\sqrt[k]{D''}} A''_i f$, per un certo valore di i tra i numeri $1,2,\ldots,k-1$. Supponiamo di essere nel primo caso ed indichiamo con Δ il determinante dei coefficienti in $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial z}$ delle trasformazioni infinitesimali:

$$\frac{1}{\sqrt[k]{D'}} A'_1 f , \ldots , \frac{1}{\sqrt[k]{D'}} A'_{k-1} f , B'_1 f , \ldots , B'_h f , B''_j f , X_1 f , \ldots , X_{n-h-k} f , X f .$$

Se teniamo conto delle relazioni:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[k]{D'}} A'_i , X\right) = \frac{1-h}{k} \, \nu \, \frac{1}{\sqrt[k]{D'}} A'_i f \quad (i = 1 , 2 , \ldots , k-1)$$

$$(B'_j , X) = \nu \, B'_j \qquad (j = 1 , 2 , \ldots , h)$$

$$(B''_{\bar{j}} , X) = \nu \, B''_{\bar{j}} f \quad (X_r , X) = \lambda_r X f \quad (r = 1 , 2 , \ldots , n - h - k)$$

il lemma IV ci dà:

$$X (\log \Delta) - \nu = - (k - 1) \frac{1 - h}{k} \nu - (h + 1) \nu$$

ossia :

$$\mathrm{X}(\Delta) + \left(1 + \frac{h-1}{k}\right) \nu \, \Delta = 0 \, .$$

Allora, facendo nel lemma I successivamente :

$$\mathrm{A}f = \frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}'}} \mathrm{A}'_i f; \quad \bar{\nu} = \frac{1-h}{k} \nu \, ; \quad \varphi = \Delta ; \quad \eta = \frac{k+h-1}{1-h}$$

$$\mathrm{A}f = \mathrm{B}'_j f ; \quad \bar{\nu} = \nu \, ; \quad \varphi = \Delta \, ; \quad \eta = \frac{k+h-1}{k} \, ,$$

$$\mathrm{A}f = \mathrm{B}''_{\bar{j}} f ; \quad \bar{\nu} = \nu \, ; \quad \varphi = \Delta \, ; \quad \eta = \frac{k+h-1}{k} \, ,$$

si hà che le trasformazioni infinitesimali :

$$\frac{\Delta^{\frac{h-1}{k+h-1}}}{\sqrt[k]{\mathrm{D}'}} \mathrm{A}'_1 f, \ldots, \frac{\Delta^{\frac{h-1}{k+h-1}}}{\sqrt[k]{\mathrm{D}'}} \mathrm{A}'_{k-1} f, \quad \Delta^{-\frac{k+h-1}{k}} \mathrm{B}'_1 f, \ldots, \Delta^{-\frac{k}{k+h-1}} \mathrm{B}'_h f, \Delta^{-\frac{k}{k+h-1}} \mathrm{B}''_{\bar{j}} f$$

sono permutabili colla $\mathrm{X}f$; vediamo così che nel caso considerato si conoscono n trasformazioni infinitesimali, dipendenti da $k-2$ costanti arbitrarie, che lasciano invariante l'equazione $\mathrm{X}f = 0$.

Nel secondo caso, in cui una delle $\frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}}} \mathrm{A}''_{\bar{i}} f$ è indipendente dalle (12), la considerazione del determinante Δ dei coefficienti delle trasformazioni infinitesimali :

$$(13) \; \frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}'}} \mathrm{A}'_1 f, \ldots, \frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}'}} \mathrm{A}'_{k-1} f, \frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}''}} \mathrm{A}''_{\bar{i}} f, \mathrm{B}'_1 f, \ldots, \mathrm{B}'_h f, \mathrm{X}_1 f, \ldots, \mathrm{X}_{n-h-k} f, \mathbf{X} f$$

ci porta, come subito si vede, ad una soluzione dell' equazione $\mathrm{X}f = 0$; questo caso richiede ulteriori considerazioni per la riduzione del problema dell' integrazione $\mathrm{X}f = 0$. Adoperando di nuovo, per semplicità, i simboli $\mathrm{A}_1 f, \mathrm{A}_2 f, \ldots, \mathrm{A}_k f, \mathrm{B}_1 f, \ldots, \mathrm{B}_h f$, per indicare le prime $h+k$ delle (13) possiamo dire che, nel caso considerato, si possono determinare $h+k$ trasformazioni infinitesimali, contenenti $k-2$ costanti arbitrarie e che soddisfano alle relazioni:

$$(\mathrm{A}_i\,,\mathrm{X}) = \frac{1-h}{k}\,\nu\,\mathrm{A}_i f \qquad (i=1\,,2\,,\ldots,k)\,;$$

$$(\mathrm{B}_j\,,\mathrm{X}) = \nu\,\mathrm{B}_j f \qquad (j=1\,,2\,,\ldots,h)\,.$$

Concludiamo dunque:

Teorema III. — *Indicando con:*

$$\frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}'}}\mathrm{A}'_1 f\,;\ldots;\frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}'}}\mathrm{A}'_{k-1}f\,;\ \mathrm{B}'_1 f\,;\ldots;\ \mathrm{B}'_h f$$

e

$$(a) \qquad \frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}''}}\mathrm{A}''_1 f\,;\ldots;\frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}''}}\mathrm{A}''_{k-1}f\,;\mathrm{B}''_1 f\,;\ldots;\ \mathrm{B}''_h f$$

rispettivamente ciò che divengono le trasformazioni infinitesimali:

$$\frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}}}\mathrm{A}_1 f\,;\ldots;\frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}}}\mathrm{A}_{k-1}f\,;\ \mathrm{B}_1 f\,;\ldots;\ \mathrm{B}_h f$$

facendovi $a_1 = a'_1\,,\ a_1 = a''_1$ *una almeno delle* (a) *deve essere indipendente dalle:*

$$\frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}'}}\mathrm{A}'_1 f\,;\ \frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}'}}\mathrm{A}'_2 f\,;\ldots;\frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}'}}\mathrm{A}'_{k-1}f, \mathrm{B}'_1 f,\ldots,\mathrm{B}'_h f, \mathrm{X}_1 f,\ldots,\mathrm{X}_{n-h-k}f; \mathrm{X}f.$$

Se essa è una $\mathrm{B}''_{\bar{j}} f$ *si possono ottenere (senza alcuna quadratura)* $h+k$ *trasformazioni infinitesimali, indipendenti tra loro e dalle* $\mathrm{X}_1 f\,,\ldots,\mathrm{X}_{n-h-k}f\,,\mathrm{X}f$, *che contengono* $k-2$ *costanti arbitrarie, permutabili colla* $\mathrm{X}f$ *e quindi ammesse dall' equazione* $\mathrm{X}f = 0$.

Se è una $\frac{1}{\sqrt[k]{\mathrm{D}''}}\mathrm{A}''_{\bar{j}} f$ *si hanno (sempre senza quadrature)* $h+k$ *trasformazioni infinitesimali* $\mathrm{A}_1 f\,,\ldots,\mathrm{A}_k f\,,\mathrm{B}_1 f\,,\ldots,\mathrm{B}_h f$, *indipendenti tra loro e dalle* $\mathrm{X}_1 f\,,\ldots,\mathrm{X}_{n-h-k}f\,,\mathrm{X}f$, *che contengono*

k—2 costanti arbitrarie e soddisfano alle relazioni:

$$(A_i, X) = \frac{1-h}{k} A_i f \ (i = 1, 2, ..., k) \quad (B_j, X)f = \nu B_j f \ (j = 1, 2, ..., h).$$

Notiamo che il secondo caso si presenterà certamente quando sia $h=0$, cioè non sieno noti invarianti integrali che ammettono la Xf.

§ 5.

Integrazione dell'equazione $Xf = 0$ colla conoscenza delle n trasformazioni infinitesime $A_1 f, \ldots, A_k f$; $B_1 f, \ldots, B_h f$; $X_1 f, \ldots, X_{n-h-k} f$ soddisfacenti alle relazioni $(A_i, X) f = = \frac{1-h}{k} \nu A_i f$; $(B_j, X) f = \nu B_j f$; $(X_r, X) f = \lambda_r Xf$. Caso in cui è $h+k=n$.

Nel presente paragrafo ci serviremo ripetutamente di questa osservazione: che in seguito al lemma I, tutte le volte che noi conosceremo una soluzione φ dell'equazione $X\varphi + \eta \nu \varphi = 0$ con η costante, potremo determinare due convenienti fattori, per i quali moltiplicando rispettivamente le $A_i f, B_j f$, se ne ottengano altrettante trasformazioni permutabili colle Xf: i due fattori sono, come subito si vede, $\dfrac{1}{\varphi^{\frac{1-h}{k\eta}}}$ per le $A_i f$ e $\dfrac{1}{\varphi^{\frac{1}{\eta}}}$ per le $B_j f$. In tal modo si otterranno, oltre le n—h—k trasformazioni infinitesimali $X_1 f, \ldots, X_{n-h-k} f$ ammesse dall'equazione $Xf = 0$, altre $h + k$ trasformazioni infinitesimali ammesse dalla stessa equazione, di modo che questa ammetterà n trasformazioni infinitesimali note.

1. — Nel secondo caso considerato nel teorema III del paragrafo precedente se poniamo

$$\varepsilon = \frac{1-h}{k}$$

possiamo scrivere che le trasformazioni infinitesimali $A_1 f, \ldots, A_k f$;

$B_1 f, \ldots, B_h f$ soddisfano alle relazioni :

(1) $(A_i, X)f = \varepsilon\,\nu\, A_i f \;\; (i=1,2,\ldots,k) \quad (B_j, X)f = \nu\, B_j f \;\; (j=1,2,\ldots,h)$;

di più si avrà :

(2) $$(X_r, X)f = \lambda_r\, Xf \quad (r = 1, 2, \ldots, n-h-k).$$

Le operazioni alternate fatte colle $n+1$ trasformazioni infinitesime :

(3) $$A_1 f, \ldots, A_k f, B_1 f, \ldots, B_h f, X_1 f, \ldots, X_{n-h-k} f, Xf$$

si comporranno linearmente ed omogeneamente colle trasformazioni stesse. Avremo perciò :

$$(A_i, A_s)f = \sum_1^k{}_l\, a^l_{i,s}\, A_l f + \sum_1^h{}_m\, b^m_{i,s}\, B_m f + $$
$$+ \sum_1^{n-h-k}{}_r\, c^r_{i,s}\, X_r f + c_{i,s}\, Xf \quad \left(\begin{matrix} s \\ i \end{matrix} = 1, 2, \ldots, k\right)$$

dove le $a^l_{i,s}$; $b^m_{i,s}$; $c^r_{i,s}$; $c_{i,s}$ sono convenienti funzioni delle $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$.

Dall'identità Jacobiana :

$$\Big((A_i, A_s), X\Big) + \Big((A_s, X), A_i\Big) + \Big((X, A_i), A_s\Big)$$

servendoci della relazione precedente e delle (1) si ottiene :

$$-\sum_1^k{}_l\, X(a^l_{i,s})\, A_l f + \sum_1^k{}_l\, \varepsilon\,\nu\, a^l_{i,s}\, A_l f - \sum_1^h{}_m\, X(b^m_{i,s})\, B_m f +$$
$$+ \sum_1^h{}_m\, \nu\, b^m_{i,s}\, B_m f - \sum_1^{n-h-k}{}_r\, X(c^r_{i,s})\, X_r f + \sum_1^{n-h-k}{}_r\, c^r_{i,s}\, \lambda_r\, Xf -$$
$$- X(c_{i,s})\, Xf - \varepsilon\, A_i(\nu)\, A_s f + \varepsilon\, A_s(\nu)\, A_i f -$$
$$- 2\,\varepsilon\,\nu\left(\sum_1^k{}_l\, a^l_{i,s}\, A_l f + \sum_1^h{}_m\, b^m_{i,s}\, B_m f + \sum_1^{n-h-k}{}_r\, c^r_{i,s}\, X_r f + c_{i,s}\, Xf\right) = 0$$

da cui, per essere le (3) indipendenti, si ricava:

$$(4)\begin{cases} X(a^l_{i,s}) + \varepsilon\nu a^l_{i,s} = 0 \quad (l \neq i) & X(b^m_{i,s}) + (2\varepsilon - 1)\nu b^m_{i,s} = 0 \\ X(c^r_{i,s}) + 2\varepsilon\nu c^r_{i,s} = 0 & X(c_{i,s}) - \sum_1^{n-h-k}{}_r c^r_{i,s}\lambda_r + 2\varepsilon\nu c_{i,s} = 0 \end{cases}$$

di più:

$$(4'') \quad X(a^s_{i,s}) + \varepsilon\nu a^s_{i,s} + \varepsilon A_i(\nu) = 0$$

$$X(a^i_{i,s}) + \varepsilon\nu a^s_{i,s} - \varepsilon A_s(\nu) = 0\,.$$

D'altra parte dalle relazioni: $(A_i, X) = \varepsilon\nu A_i f$; $(A_s, X) = \varepsilon\nu A_s f$, pel lemma II, si deduce:

$$A_i(\nu) - X\left(\sum_1^n{}_j \frac{\partial\alpha^i_j}{\partial x_j} + \frac{\partial\alpha^i_{n+1}}{\partial z}\right) = \varepsilon\nu\left(\sum_1^n{}_j \frac{\partial\alpha^i_j}{\partial x_j} + \frac{\partial\alpha^i_{n+1}}{\partial z}\right) + \varepsilon A_i(\nu)$$

$$A_s(\nu) - X\left(\sum_1^n{}_j \frac{\partial\alpha^s_j}{\partial x_j} + \frac{\partial\alpha^s_{n+1}}{\partial z}\right) = \varepsilon\nu\left(\sum_1^n{}_j \frac{\partial\alpha^s_j}{\partial x_j} + \frac{\partial\alpha^s_{n+1}}{\partial z}\right) + \varepsilon A_s(\nu)$$

o, se si vuole,

$$(4''')\begin{cases} A_i(\nu) - \dfrac{1}{1-\varepsilon} X\left(\sum_1^n{}_j \dfrac{\partial\alpha^i_j}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\alpha^i_{n+1}}{\partial z}\right) - \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\nu\left(\sum_1^n \dfrac{\partial\alpha^i_j}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\alpha^i_{n+1}}{\partial z}\right) = 0 \\ A_s(\nu) - \dfrac{1}{1-\varepsilon} X\left(\sum_1^n{}_j \dfrac{\partial\alpha^s_j}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\alpha^s_{n+1}}{\partial z}\right) - \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\nu\left(\sum_1^n \dfrac{\partial\alpha^s_j}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\alpha^s_{n+1}}{\partial z}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Eliminando tra la prima delle (4″) e la prima delle (4‴) $A_i(\nu)$, tra la seconda delle (4″) e la seconda (4‴) $A_s(\nu)$ si ha:

$$(4')\begin{cases} X\left(a^s_{i,s} + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\sigma_i\right) + \varepsilon\nu\left(a^s_{i,s} + \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\sigma_i\right) = 0 \text{ con } \sigma_i = \sum_1^n{}_j \dfrac{\partial\alpha^i_j}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\alpha^i_{n+1}}{\partial z} \\ X\left(a^i_{i,s} - \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\sigma_s\right) + \varepsilon\nu\left(a^i_{i,s} - \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\sigma_s\right) = 0 \text{ con } \sigma_s = \sum_1^n{}_j \dfrac{\partial\alpha^s_j}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\alpha^s_{n+1}}{\partial z} \end{cases}$$

Se allora teniamo presente l'osservazione fatta al principio di questo paragrafo, dalle (4) e (4′) noi vediamo che, ove *almeno una* delle quantità:

$$\left.\begin{array}{l} a^l_{i,s}\ (l=1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,s-1,s+1,\ldots,k)\,;\, a^s_{i,s}+\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\sigma_i\,; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a^i_{i,s}-\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\sigma_s \\ b^m_{i,s}\ (m=1,2,\ldots,h)\,;\ c^r_{i,s}\ (r=1,2,\ldots,n-h-k) \end{array}\right\}\ \begin{matrix} i \\ s \end{matrix}=1,2,\ldots,k$$

sia diversa da zero, se è $\varepsilon \neq 0$, si possono ottenere, moltiplicando per dei convenienti fattori le $A_1f,\ldots,A_kf,B_1f,\ldots,B_hf$, altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf. Se invece le quantità dette sono tutte nulle dovranno essere soddisfatte le relazioni:

$$(A_i\,,A_s)f=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left\{\sigma_s\,A_if-\sigma_i\,A_sf\right\}\quad \left(\begin{matrix} i \\ s \end{matrix}=1,2,\ldots,k\right).$$

Poichè queste relazioni sono della forma:

$$(A_i\,,A_s)\,f=a^i_{i,s}\,A_if+a^s_{i,s}\,A_sf$$

e le A_if, A_sf soddisfano alle relazioni $(A_i\,,X)f=\varepsilon\nu A_if$; $(A_s\,,X)f=\varepsilon\nu A_sf$ noi troveremo come al § 3 n. 4 (pag. 45) che la quantità:

$$\left\{A_i\,(a^i_{i,s})+A_s\,(a^s_{i,s})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

è una soluzione dell' equazione $X\varphi+\varepsilon\nu\varphi=0$. Potremo dunque supporre, sempre nell' ipotesi $\varepsilon\neq 0$, che sia nulla anche quest' ultima quantità [1], che si abbia cioè:

$$A_i\,(\sigma_s)=A_s\,(\sigma_i)\,.$$

[1]) Diciamo che si può supporre $\left\{A_i\,(a^i_{i,s})+A_s\,(a^i_{i,s})\right\}^{\frac{1}{2}}=0$ nel senso che, in caso contrario, si possono ottenere, moltiplicando per dei convenienti fattori le $A_1f,\ldots,A_kf,B_1f,\ldots,B_hf$, altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf.

Concludendo :

Se è $\varepsilon \neq 0$ *si può supporre che sieno soddisfatte le relazioni:*

$$\text{(I)} \qquad (A_i, A_s) f = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \left\{ \sigma_s A_i f - \sigma_i A_s f \right\} \qquad \left({i \atop s} = 1, 2, \ldots, k \right)$$

con

$$\text{(I*)} \qquad A_i(\sigma_s) = A_s(\sigma_i) \qquad \sigma_t = \sum_1^n {}_j \frac{\partial \alpha_j^t}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_{n+1}^t}{\partial x} \quad (t = i, s).$$

2. — Consideriamo ora le alternate $(A_i, B_j)f$ e poniamo che sia:

$$(A_i, B_j) f = \sum_1^k {}_l e_{i,j}^l A_l f + \sum_1^h {}_m f_{i,j}^m B_m f + \sum_1^{n-h-k} {}_r g_{i,j}^r X_r f + g_{i,j} X f$$
$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 1, 2, \ldots, h \end{pmatrix}.$$

Dall' identità Jacobiana :

$$\Big((A_i, B_j), X \Big) + \Big((B_j, X), A_i \Big) + \Big((X, A_i), B_j \Big) = 0,$$

badando alla relazione precedente ed alle (1), si ottiene:

$$- \sum_1^k {}_l X(e_{i,j}^l) A_l f + \sum_1^k {}_l \varepsilon \nu e_{i,j}^l A_l f - \sum_1^h {}_m X(f_{i,j}^m) B_m f +$$
$$+ \sum_1^h {}_m \nu f_{i,j}^m B_m f - \sum_1^{n-h-k} {}_r X(g_{i,j}^r) X_r f + \sum_1^{n-h-k} {}_r g_{i,j}^r \mu_r X f - X(g_{i,j}) X f -$$
$$- A_i(\nu) B_j f + \varepsilon B_j(\nu) A_i f - (1+\varepsilon)\nu \Big(\sum_1^k {}_l e_{i,j}^l A_l f +$$
$$+ \sum_1^h {}_m f_{i,j}^m B_m f + \sum_1^{n-h-k} {}_r g_{i,j}^r X_r f + g_{i,j} X f \Big) = 0 \; ;$$

e quindi :

$$\text{(5)} \quad \begin{cases} X(e_{i,j}^l) + \nu e_{i,j}^l = 0 & (l = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k); \\ X(f_{i,j}^m) + \varepsilon \nu f_{i,j}^m = 0 & (m = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, h) \\ X(g_{i,j}^r) + (1+\varepsilon) \nu g_{i,j}^r = 0 & (r = 1, 2, \ldots, n-h-k); \\ X(g_{i,j}) - \sum_1^{n-h-k} {}_r g_{i,j}^r \mu_r + (1+\varepsilon) \nu g_{i,j} = 0 & \end{cases}$$

ed inoltre

$$(5''')\quad \mathrm{X}\,(e^i_{i,j})+\nu\, e^i_{i,j}-\varepsilon\,\mathrm{B}_j\,(\nu)=0\ ,\ \ \mathrm{X}\,(f^i_{i,j})+\varepsilon\,\nu\, f^i_{i,j}+\mathrm{A}_i\,(\nu)=0\,.$$

Dall' ultima equazione e dalla prima delle (4''') eliminando $\mathrm{A}_i\,(\nu)$ si ricava:

$$(5')\qquad \mathrm{X}\left(f^j_{i,j}+\frac{1}{1-\varepsilon}\sigma_i\right)+e\,\nu\left(f^j_{i,j}+\frac{1}{1-\varepsilon}\sigma_i\right)=0\,.$$

Si osservi di più che dalla relazione $(\mathrm{B}_j\,,\mathrm{X})\,f=\nu\,\mathrm{B}_j f$ segue:

$$(5'')\qquad \mathrm{X}\left(\sum_1^n{}_m\frac{\partial\,\beta^j_m}{\partial\,x_m}+\frac{\partial\,\beta^j_{n+1}}{\partial\,z}\right)+\nu\left(\sum_1^n{}_m\frac{\partial\,\beta^j_m}{\partial\,x_m}+\frac{\partial\,\beta^j_{n+1}}{\partial\,z}\right)=0\,.$$

Possiamo perciò senz'altro dire che si può ritenere che sieno nulle tutte le quantità:

$$e^l_{i,j}\quad (l=1\,,2,\ldots,i-1\,,i+1,\ldots,k)\,;$$
$$f^m_{i,j}\quad (m=1\,,2,\ldots,j-1\,,j+1,\ldots,h)\ ;\ \ f^j_{i,j}+\frac{1}{1-\varepsilon}\sigma_i$$
$$\sum_1^n{}_m\frac{\partial\,\beta^j_m}{\partial\,x_m}+\frac{\partial\,\beta^j_{n+1}}{\partial\,z}\ (j=1,2,\ldots,h)\ \ ;\ g^r_{i,j}\ \ (r=1\,,2,\ldots,n-h-k)\,;g_{i,j}$$

purchè però sia oltrechè $\varepsilon \neq 0$, anche $1+\varepsilon\neq 0$. Dunque:

Se è $\varepsilon\neq 0$ *ed* $\varepsilon\neq -1$ *si può supporre che sia:*

$$(\mathrm{II})\qquad (\mathrm{A}_i\,,\mathrm{B}_j)\,f=e^i_{i,j}\,\mathrm{A}_i f+f^j_{i,j}\,\mathrm{B}_j f\quad \begin{pmatrix} i=1\,,2,\ldots,k\\ j=1\,,2,\ldots,h\end{pmatrix}$$

con:

$$(\mathrm{II}^*)\qquad f^j_{i,j}=-\frac{1}{1-\varepsilon}\sigma_i\ ;\quad \sum_1^n{}_m\frac{\partial\,\beta^j_m}{\partial\,x_m}+\frac{\partial\,\beta^j_{n+1}}{\partial\,z}=0\,.$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, dalla (6), per il lemma II, si ricava:

$$-\,\mathrm{B}_j\,(\sigma_i)=e^i_{i,j}\,\sigma_i+\mathrm{A}_i\,(e^i_{i,j})+\mathrm{B}_j\,(f^j_{i,j})\,,$$

e, per essere $f^j_{i,j}=-\dfrac{1}{1-\varepsilon}\sigma_i$:

$$(6)\qquad \mathrm{A}_i\,(e^i_{i,j})+e^i_{i,j}\,\sigma_i-\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\,\mathrm{B}_j\,(\sigma_i)=0\,.$$

3. — Dalle due identità Jacobiane:

$$\Big((B_i\,,B_j)\,,X\Big)+\Big((B_j\,,X),B_i\Big)+\Big((X\,,B_i),B_j\Big)=0\,,$$

se si pone:

$$(B_i\,,B_j)=\sum_1^k{}_l\, p^l_{i,j}\,A_lf+\sum_1^h{}_m q^m_{i,j}\,B_mf+\sum_1^{n-h-k}{}_r\, t^r_{i,j}\,X_rf+t_{i,j}\,Xf,$$

si ottiene:

$$(7)\quad\begin{cases} X\,(p^l_{i,j})+(2-\varepsilon)\,\nu\, p^l_{i,j}=0 & (l=1\,,2,\ldots,k)\,;\\ X\,(q^m_{i,j})+\nu\, q^m_{i,j}=0 & (m\neq i\,,j)\\ X\,(t^r_{i,j})+2\,\nu\, t^r_{i,j}=0 & (r=1\,,2,\ldots,n-h-k)\,;\\ X\,(t_{i,j})-\sum\limits_1^{n-h-k} t^r_{i,j}\,\lambda_r+2\,\nu\, t_{i,j}=0 & \end{cases}$$

$$(7')\quad X\,(q^i_{i,j})+\nu\, q^i_{i,j}-B_j\,(\nu)=0\,;\quad X\,(q^j_{i,i})+\nu\, q^j_{i,j}+B_i\,(\nu)=0\,.$$

Dalle (7) vediamo intanto che si possono ritenere nulle le quantità:

$$\left.\begin{array}{l} p^l_{i,j}\ \ (l=1\,,2\,,\ldots,k)\,;\\ q^m_{i,j}\ \ (m=1\,,2\,,\ldots,i-1\,,i+1\,,\ldots,j-1\,,j+1\,,\ldots,h)\\ t^r_{i,j}\ \ (r=1\,,2\,,\ldots,n-h-k)\,;\ t_{i,j}\end{array}\right\}\begin{matrix}i\\j\end{matrix}=1,2,\ldots,h$$

nel qual caso saranno soddisfatte, tra le B_jf, relazioni della forma:

$$(B_i\,,B_j)f=q^i_{i,j}\,B_if+q^j_{i,j}\,B_jf\,.$$

Si ha così che:

Si può supporre che sieno soddisfatte, tra le B_jf, le relazioni:

$$(\mathrm{III})\qquad (B_i\,B_j)\,f=q^i_{i,j}\,B_if+q^j_{i,j}\,B_jf\quad\left(\begin{matrix}i\\j\end{matrix}=1\,,2\,,\ldots,h\right)$$

4. — Dalle due identità Jacobiane:

$$\Big((A_i\,,X_r),X\Big)+\Big((X_r\,,X),A_i\Big)+\Big((X\,,A_i),X_r\Big)=0$$

$$\Big((B_j\,,X_r)\,,X\Big)+\Big((X_r\,,X)\,,B_j\Big)+\Big((X\,,B_j)\,,X_r\Big)=0\,,$$

se poniamo:

$$(A_i, X_r) = \sum_1^k {}_l\, \alpha^l_{i,r}\, A_l f + \sum_1^h {}_m\, \beta^m_{i,r}\, B_m f + \sum_1^{n-h-k} {}_s\, \gamma^s_{i,r}\, X_s f + \gamma_{i,r}\, Xf$$

$$(B_j, X_r) = \sum_1^k {}_l\, \bar{\alpha}^l_{j,r}\, A_l f + \sum_1^h {}_m \bar{\beta}^m_{j,r}\, B_m f + \sum_1^{n-h-k} {}_s\, \bar{\gamma}^s_{j,r}\, X_s f + \bar{\gamma}_{i,r}\, Xf\,,$$

si ricava rispettivamente, dalla prima

$$(8)\quad \begin{cases} X(\alpha^l_{i,r}) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k)\,; \\ X(\alpha^i_{i,r}) + \varepsilon\lambda_r \nu - \varepsilon X_r(\nu) = 0 \\ X(\beta^m_{i,r}) + (\varepsilon - 1)\nu\beta^m_{i,r} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, h)\,; \\ X(\gamma^s_{i,r}) + \varepsilon\varkappa\gamma^s_{i,r} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-h-k) \\ \sum_1^{n-h-k} {}_s\, \gamma^s_{i,r}\lambda_s - X(\gamma_{i,r}) - A_i(\lambda_r) - \varepsilon\nu\gamma_{i,r} = 0 \end{cases}$$

e dalla seconda

$$(9)\quad \begin{cases} X(\bar{\alpha}^l_{j,r}) + (1-\varepsilon)\nu\bar{\alpha}^l_{j,r} = 0\,; \quad (l = 1, 2, \ldots, k)\,; \\ X(\bar{\beta}^m_{i,r}) = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, h) \\ X(\bar{\beta}^j_{j,r}) + \lambda_r \nu - X_r(\nu) = 0\,; \\ X(\bar{\gamma}^s_{j,r}) + \nu\bar{\gamma}^s_{j,r} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n-h-k) \\ \sum_1^{n-h-k} {}_s\, \bar{\gamma}^s_{j,r}\lambda_s - X(\bar{\gamma}_{j,r}) - B_j(\lambda_r) - \nu\bar{\gamma}_{j,r} = 0\,. \end{cases}$$

Dalle (8) risulta subito, in seguito all'osservazione fatta al principio del paragrafo, che si possono ritener nulle, sempre se è $\varepsilon \neq 0$, le quantità:

$$\beta^m_{i,r} \quad (m = 1, 2, \ldots, h)\ ;\quad \gamma^s_{i,r} \quad (s = 1, 2, \ldots, n-h-k)$$

e dalle (9) analogamente vediamo che si può supporre che sieno uguali a zero le quantità:

$$\bar{\alpha}^l_{j,r} \quad (l = 1, 2, \ldots, k)\ ;\quad \bar{\gamma}^s_{j,r} \quad (s = 1, 2, \ldots, n-h-k)\,.$$

Saranno allora soddisfatte relazioni della forma:

$$(\mathrm{A}_i\,,\mathrm{X}_r)=\sum_1^k{}_l\,\alpha^l_{i,r}\,\mathrm{A}_l f+\gamma_{i,r}\,\mathrm{X}f$$

$$(\mathrm{B}_j\,,\mathrm{X}_r)=\sum_1^h{}_m\,\bar\beta^m_{j,r}\,\mathrm{B}_m f+\bar\gamma_{i,r}\,\mathrm{X}f\,.$$

Se poniamo infine:

$$(\mathrm{X}_s\,,\mathrm{X}_t)=\sum_1^k{}_l\,\varepsilon^l_{s,t}\,\mathrm{A}_l f+\sum_1^h{}_m\,\zeta^m_{s,t}\,\mathrm{B}_m f+\sum_1^{n-h-k}{}_r\,\eta^r_{s,t}\,\mathrm{X}_r f+\theta_{s,t}\,\mathrm{X}f\,,$$

dall' identità Jacobiana:

$$\Big((\mathrm{X}_s\,,\mathrm{X}_t)\,,\mathrm{X}\Big)+\Big((\mathrm{X}_t\,,\mathrm{X})\,,\mathrm{X}_s\Big)+\Big((\mathrm{X}\,,\mathrm{X}_s)\,,\mathrm{X}_t\Big)=0$$

risulta:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{X}\,(\varepsilon^l_{s,t})-\varepsilon\,\nu\,\varepsilon^l_{s,t}=0 &&(l=1\,,2,\ldots,k)\,;\\
&\mathrm{X}\,(\zeta^m_{s,t})-\nu\,\zeta^m_{s,t}=0 &&(m=1\,,2,\ldots,h)\,;\\
&\mathrm{X}\,(\eta^r_{s,t})=0 &&(r=1\,,2,\ldots,n-h-k).
\end{aligned}$$

Potremo dunque supporre senz'altro (con $\varepsilon \neq 0$):

$$\varepsilon^l_{s,t}=0 \quad (l=1\,,2,\ldots,k)\,;$$

$$\zeta^m_{s,t}=0 \quad (m=1\,,2,\ldots,h) \quad \left(\begin{matrix}s\\t\end{matrix}=1\,,2,\ldots,n-h-k\right)$$

e quindi:

$$(\mathrm{X}_s\,,\mathrm{X}_t)=\sum_1^{n-h-k}\eta^r_{s,t}\,\mathrm{X}_r f+\theta_{s.t}\,\mathrm{X}f.$$

Si ha così:

Sempre supponendo che sia $\varepsilon \neq 0$, *si può ritenere che sieno soddisfatte le relazioni:*

$$\text{(IV)}\qquad\left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{A}_i\,,\mathrm{X}_r)=\sum_1^k{}_l\,\alpha^l_{i,r}\,\mathrm{A}_l f+\gamma_{i,r}\,\mathrm{X}f\\
&(\mathrm{B}_j\,,\mathrm{X}_r)=\sum_1^h{}_m\,\bar\beta^m_{j.r}\,\mathrm{B}_m f+\bar\gamma_{i,r}\,\mathrm{X}f
\end{aligned}\right.$$

ove per le $\alpha^l_{i,r}$; $\gamma_{i,r}$; $\bar{\beta}^m_{j,r}$; $\bar{\gamma}_{i,r}$ *si ha:*

$$(\mathrm{IV}^*)\begin{cases} X(\alpha^l_{i,r}) = 0 \ (l \neq i) \ ; \ X(\alpha^i_{i,r}) + \varepsilon\lambda_r \nu - \varepsilon X_r(\nu) = 0 \ ; \\ X(\gamma_{i,r}) + \varepsilon\nu\gamma_{i,r} + A_i(\lambda_r) = 0 \ \ X(\bar{\beta}^m_{j,r}) = 0 \ (m \neq j) \\ X(\bar{\beta}^j_{j,r}) + \lambda_r \nu - X_r(\nu) = 0 \ ; \ X(\bar{\gamma}_{j,r}) + \nu\bar{\gamma}_{j,r} + B_j(\lambda_r) = 0 \, , \end{cases}$$

e di più che sia:

$$(\mathrm{V}) \qquad (X_s, X_t) = \sum_1^{n-h-k}{}_r \, \eta^r_{s,t} \, X_r f + \theta_{s,t} \, X f$$

con:

$$(\mathrm{V}^*) \qquad X(\eta^r_{s,t}) = 0 \, .$$

5. — Osservazione. *Tutte le volte che noi conosciamo una soluzione* φ *dell'equazione* $Xf = 0$, *che non sia ad un tempo soluzione di tutte le equazioni* $A_i f = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ $B_j f = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$, *noi possiamo determinare (con sole operazioni di derivazione) convenienti fattori, per i quali moltiplicando le trasformazioni infinitesimali* $A_i f$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; $B_j f$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ *se ne ottengano altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colla* Xf.

Ed infatti dalle relazioni $(A_i, X) = \varepsilon \nu A_i f$; $(B_j, X) = \nu B_j f$, ponendo $f = \varphi$, si ricava:

$$X\Big(A_i(\varphi)\Big) + \varepsilon \nu A_i(\varphi) = 0 \, ; \ X\Big(B_j(\varphi)\Big) + \nu B_j(\varphi) = 0 \, ;$$

ed in seguito all' osservazione fatta al principio del paragrafo da una delle quantità $A_i(\varphi)$, $B_j(\varphi)$, differente da zero, si possono ricavare immediatamente i detti fattori.

Noi vediamo così che, tutte le volte che riusciamo ad ottenere delle soluzioni dell'equazione $Xf = 0$, o esse ci permettono di ottenere, moltiplicando le $A_i f$, $B_j f$ per convenienti fattori, $h+k$ trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf, o potremo supporre che esse soluzioni sieno anche soluzioni delle equazioni:

$$A_i f = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \ ; \quad B_j f = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, h) \, .$$

Senza ripetere questo ogni volta, noi supporremo sempre di essere nel secondo caso.

Se *supponiamo che sia* $\varepsilon \neq 0$ saranno soddisfatte le relazioni (I), (III), (IV), (V) colle (I*), (III*), (IV*), (V*): se di più si abbia $1+\varepsilon \neq 0$ potremo supporre soddisfatte le (II) colle (II*), ma invece con $1+\varepsilon = 0$ potremo soltanto supporre che sieno soddisfatte in luogo delle (II), le relazioni:

$$(\mathrm{A}_i\,,\mathrm{B}_j) = e^i_{i,j}\,\mathrm{A}_i f + f^j_{i,j}\,\mathrm{B}_j f + \sum_1^{n-h-k} g^r_{i,j}\,\mathrm{X}_r f + g_{i,j}\,\mathrm{X} f$$

$$\begin{pmatrix} i = 1\,,2,\ldots,k \\ j = 1\,,2,\ldots,h \end{pmatrix}$$

con:

$$f^j_{i,j} = -\frac{1}{1-\varepsilon}\,\sigma_i\,;\; \sum_1^n{}_m \frac{\partial\,\beta^j_m}{\partial x_m} + \frac{\partial \beta^j_{n+1}}{\partial z} = 0\,;$$

$$\mathrm{X}\,(g^r_{i,j}) = 0 \quad (r = 1\,,2,\ldots,n-h-k)\,.$$

Per ora, fino a che non diciamo espressamente il contrario, intendiamo di considerare assieme i due casi $1+\varepsilon \neq 0$ (con $\varepsilon \neq 0$) e $1+\varepsilon = 0$.

Indicando con Δ il determinante dei coefficienti di $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial f}{\partial z}$ nelle trasformazioni infinitesimali:

$$\mathrm{A}_1 f, \ldots, \mathrm{A}_k f, \mathrm{B}_1 f, \ldots, \mathrm{B}_h f, \mathrm{X}_1 f, \ldots, \mathrm{X}_{n-h-k} f, \mathrm{X} f$$

si ha, come risulta dal lemma IV, :

$$\mathrm{X}\,(\Delta) = 0\,.$$

In seguito all'osservazione fatta pocanzi si può ritenere dunque che Δ sia soluzione anche delle equazioni:

$$\mathrm{A}_i f = 0 \quad (i = 1\,,2,\ldots,k)\;;\quad \mathrm{B}_j f = 0 \quad (i = 1\,,2,\ldots,h)\,.$$

Ma, per lo stesso lemma IV, si ha, tenendo conto delle relazioni tra la $\mathrm{B}_j f$ e le altre trasformazioni infinitesimali, :

$$\mathrm{B}_j\,(\log \Delta) - \left(\sum_1^n{}_m \frac{\partial\,\beta^j_m}{\partial x_m} + \frac{\partial\,\beta^j_{n+1}}{\partial z}\right) = -\sum_1^k{}_i\, e^i_{i,j} - \sum_1^h{}_i\, q^i_{i,j}\;;$$

e, poichè è $B_j\ (\Delta) = 0$ e $\sum_1^n {}_m \frac{\partial \beta_m^j}{\partial x_m} + \frac{\partial \beta_{n+1}^j}{\partial z} = 0$ (vedi le (II*)), si trova:

$$\sum_1^k {}_i\, e_{i,j}^i + \sum_1^h {}_i\, q_{i,j}^i = 0\,.$$

Ora dalla prima delle (5‴) sommando rispetto ad i (da 1 a k), e dalla prima delle (7′) sommando rispetto ad i (da 1 ad h) segue:

$$X\left(\sum_1^k e_{i,j}^i + \sum_1^h q_{i,j}^i\right) + \nu\left(\sum_1^k e_{i,j}^i + \sum_1^h q_{i,j}^i\right) - (k\varepsilon + h)\, B_j\,(\nu) = 0$$

e quindi, per la precedente eguaglianza, e poichè è $k\varepsilon + h = k\frac{1-h}{k} + h = 1$,:

$$B_j\,(\nu) = 0\,.$$

La prima delle (5‴) e la prima delle (7′) ci dànno allora rispettivamente:

$$X\,(e_{i,j}^i) + \nu\, e_{i,j}^i = 0\,; \qquad \begin{pmatrix} i = 1\,,2,\ldots,k \\ j = 1\,,2,\ldots,h \end{pmatrix}$$

$$X\,(q_{i,j}^i) + \nu q_{i,j}^i = 0 \qquad \left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} = 1\,,2\,,\ldots,h\right).$$

Possiamo perciò supporre che sieno nulle tutte le quantità:

$$e_{i,j}^i \begin{pmatrix} i = 1\,,2,\ldots,k \\ j = 1\,,2,\ldots,h \end{pmatrix}; \qquad q_{i,j}^i \left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} = 1\,,2,\ldots,h\right).$$

Abbiamo così il:

Teorema I. — *Essendo proposta l' integrazione dell' equazione* $Xf = 0$ *colla conoscenza delle* n *trasformazioni infinitesimali:*

$$A_1 f\,,\ldots,A_k f\,,B_1 f\,,\ldots,B_h f\,,X_1 f\,,\ldots,X_{n-h-k} f$$

soddisfacenti alle relazioni

$$(A_i\,, X) = \varepsilon\nu\, A_i f \left(\varepsilon = \frac{1-h}{k}\right) \quad (i = 1\,,2,\ldots,k)\,;$$

$$(B_j\,, X) = \nu\, B_j f \qquad (j = 1\,,2\,,\ldots,h)$$

$$(X_r\,, X) = \lambda_r\, Xf \qquad (r = 1\,,2\,,\ldots,n-h-k)$$

se è $\varepsilon \neq 0$ ed $\varepsilon \neq -1$, *o si potranno determinare (senza alcuna operazione d'integrazione) convenienti fattori, pei quali moltiplicando le* $A_i f$, $B_j f$ *se ne ottengano altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colla* Xf, *oppure si potrà supporre che sieno soddisfatte le relazioni:*

$$\text{(I)} \qquad (A_i, A_s) f = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \{\sigma_s A_i f - \sigma_i A_s f\} \quad \left(\begin{matrix} i \\ s \end{matrix} = 1, 2, \ldots, k\right),$$

dove è:

$$\text{(I*)} \qquad A_i(\sigma_s) = A_s(\sigma_i) \quad \sigma_t = \sum_1^n{}_j \frac{\partial \alpha_j^t}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_{n+1}^t}{\partial z} \quad (t = 1, 2, \ldots, k),$$

e le altre:

$$\text{(II')} \qquad (A_i, B_j) = -\frac{1}{1-\varepsilon} \sigma_i B_j f \qquad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 1, 2, \ldots, h \end{matrix}\right)$$

$$\text{(III')} \qquad (B_i, B_j) = 0 \qquad \left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} = 1, 2, \ldots, h\right)$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} (A_i, X_r) f = \sum_1^k{}_l \alpha_{i,r}^l A_l f + \gamma_{i,r} Xf & \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ r = 1, 2, \ldots, n-h-k \end{matrix}\right) \\ (B_j, X_r) f = \sum_1^h{}_m \bar{\beta}_{j,r}^m B_m f + \bar{\gamma}_{i,r} Xf & \left(\begin{matrix} j = 1, 2, \ldots, h \\ r = 1, 2, \ldots, n-h-k \end{matrix}\right) \end{cases}$$

$$\text{(V)} \quad (X_s, X_t) = \sum_1^{n-h-k}{}_r \eta_{s,t}^r X_r f + \theta_{s,t} Xf \quad \left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} = 1, 2, \ldots, n-h-k\right)$$

con:

$$X(\alpha_{i,r}^l) = 0 \quad (l \neq i); \quad X(\alpha_{i,r}^i) + \varepsilon \lambda_r \nu - \varepsilon X_r(\nu) = 0;$$
$$X(\gamma_{i,r}) + \varepsilon \nu \gamma_{i,r} + A_i(\lambda_r) = 0$$

$$X(\bar{\beta}_{j,r}^m) = 0 \quad (m \neq j); \quad X(\bar{\beta}_{j,r}^j) + \lambda_r \nu - X_r(\nu) = 0;$$
$$X(\bar{\gamma}_{j,r}) + \nu \bar{\gamma}_{j,r} + B_j(\lambda_r) = 0$$
$$X(\eta_{s,t}^r) = 0.$$

Se è invece $\varepsilon = -1$ *sono soddisfatte le stesse relazioni, salvo* *che in luogo delle* (II') *si possono porre le:*

$$(\mathrm{II}'') \qquad (\mathrm{A}_i\,, \mathrm{B}_j) = -\frac{1}{1-\varepsilon}\,\sigma_i\,\mathrm{B}_j f + \sum_1^{n-h-k}{}_r\, g^r_{i,j}\,\mathrm{X}_r f + g_{i,j}\,\mathrm{X}f$$

$$\mathrm{X}\,(g^r_{i,j}) = 0\,.$$

6. — Trattiamo innanzi tutto il *caso* $h+k=n$ e supponiamo dapprima che sia $\varepsilon \neq 0$ ed $\varepsilon \neq -1$. Potremo supporre di essere nelle condizioni a cui ci siamo ridotti col teorema precedente.

In queste ipotesi è facile mostrare che può, con sole quadrature nei casi più sfavorevoli, determinarsi un moltiplicatore di Jacobi comune alle singole equazioni:

$$\mathrm{A}_1 f = 0\ ,\ \mathrm{A}_2 f = 0\ ,\ldots,\ \mathrm{A}_k f = 0\ \mathrm{B}_1 f\ ,\ldots,\ \mathrm{B}_h f = 0\,,$$

cioè una soluzione $\bar{\mu}$ del sistema:

$$(10)\quad \begin{cases} \mathrm{A}_1(\mu)+\mu\sigma_1=0\ ;\ \mathrm{A}_2(\mu)+\sigma_2\mu=0\ ;\ldots;\ \mathrm{A}_k(\mu)+\sigma_k\mu=0 \\ \mathrm{B}_1(\mu)=0\qquad ;\ \mathrm{B}_2(\mu)=0\qquad ;\ldots;\ \mathrm{B}_h(\mu)=0. \end{cases}$$

Il sistema (10) è equivalente all'altro:

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{A}_1(\mu)+\sigma_1\mu=0 \\ \mathrm{C}_2 f \equiv \sigma'_1\,\mathrm{A}_2(\mu)-\sigma'_2\,\mathrm{A}_1(\mu)=0 \\ \mathrm{C}_3 f \equiv \sigma'_1\,\mathrm{A}_3(\mu)-\sigma'_3\,\mathrm{A}_1(\mu)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{C}_k(\mu) \equiv \sigma'_1\,\mathrm{A}_k(\mu)-\sigma'_k\,\mathrm{A}_1(\mu)=0 \\ \mathrm{B}_1(\mu)=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{B}_h(\mu)=0\,. \end{cases} \qquad \left(\sigma'_t = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\sigma_t\right)$$

Lasciamo da parte per un momento la prima equazione di questo sistema e consideriamo il sistema formato dalle equazioni rimanenti. Si vede subito che esso è un sistema completo formato da $n-1$ equazioni indipendenti e che ammette quindi due soluzioni Φ e Ψ, Per avere la prima delle due soluzioni basta determinare la soluzione del sistema completo:

$$A_1 f = 0 \ , \ldots , \ A_k f = 0 \ , \ B_1 f = 0 \ , \ldots , \ B_h f = 0 \ ,$$

il che si può fare con una quadratura, perchè questo sistema ammette la trasformazione infinitesimale Xf.

Formiamo l'alternata delle due trasformazioni infinitesimali:

$$C_i f = \sigma'_1 A_i f - \sigma'_i A_1 f \quad ; \quad C_s f = \sigma'_1 A_s f - \sigma'_s A_1 f \ ;$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}(C_i , C_s) f = & \{ \sigma'_1 A_i (\sigma'_1) - \sigma'_i A_1(\sigma'_1) \} A_s f - \{ \sigma'_1 A_i (\sigma'_s) - \sigma'_i A_1(\sigma'_s) \} A_1 f - \\ & - \{ \sigma'_1 A_s (\sigma'_1) - \sigma'_s A_1(\sigma'_1) \} A_i f + \{ \sigma'_1 A_s (\sigma'_i) - \sigma'_s A_1(\sigma'_i) \} A_1 f + \sigma'^2_1 (A_i , A_s) f - \\ & - \sigma'_1 \sigma'_s (A_i , A_1) f - \sigma'_i \sigma'_1 (A_1 , A_s) f \ ;\end{aligned}$$

e se si osserva che è, per le (I),:

$$(A_i , A_s) f = \sigma'_s A_i f - \sigma'_i A_s f \ ; \ (A_i , A_1) = \sigma'_1 A_i f - \sigma'_i A_1 f \ ;$$
$$(A_1 , A_s) f = \sigma'_s A_1 f - \sigma'_1 A_s f \ ,$$

lasciando da parte i termini che si elidono risulta:

$$\begin{aligned}(C_i , C_s) f = & \{ \sigma'_1 A_i (\sigma'_1) - \sigma'_i A_1(\sigma'_1) \} A_s f - \{ \sigma'_1 A_s (\sigma'_1) - \sigma'_s A_1 (\sigma'_1) \} A_i f + \\ & + \{ \sigma'_i A_1 (\sigma'_s) - \sigma'_s A_1 (\sigma'_1) \} A_1 f \ .\end{aligned}$$

E siccome, per le (I*), è:

$$A_i (\sigma'_1) = A_1 (\sigma'_i) \qquad A_s (\sigma'_1) = A_1 (\sigma'_s) ,$$

potremo anche scrivere:

$$\begin{aligned}(C_i , C_s) f = & A_i (\sigma'_1) \{ \sigma'_1 A_s f - \sigma'_s A_1 f \} - A_s (\sigma'_1) \{ \sigma'_1 A_i f - \sigma'_i A_1 f \} - \\ & - A_1 (\sigma'_1) \{ \sigma'_i A_s f - \sigma'_s A_i f \} \ .\end{aligned}$$

Ma, poichè, com'è chiaro, si ha:

$$\sigma'_i A_s f - \sigma'_s A_i f = \frac{\sigma'_i C_s f - \sigma'_s C_i f}{\sigma'_1} \ ,$$

risulta finalmente:

$$(\mathrm{C}_i\,,\mathrm{C}_s)f = \mathrm{A}_i(\sigma'_1)\,\mathrm{C}_s f - \mathrm{A}_s(\sigma'_1)\,\mathrm{C}_i f - \frac{\sigma'_i\,\mathrm{C}_s f - \sigma'_s\,\mathrm{C}_i f}{\sigma'_1}\,\mathrm{A}_1(\sigma'_1) =$$

$$= \frac{\sigma'_1\,\mathrm{A}_i(\sigma'_1) - \sigma'_i\,\mathrm{A}_1(\sigma'_1)}{\sigma'_1}\,\mathrm{C}_s f - \frac{\sigma'_1\,\mathrm{A}_s(\sigma'_1) - \sigma'_s\,\mathrm{A}_1(\sigma'_1)}{\sigma'_1}\,\mathrm{C}_i f =$$

$$= \mathrm{C}_i(\log\sigma'_1)\,\mathrm{C}_s f - \mathrm{C}_s(\log\sigma'_1)\,\mathrm{C}_i f\,.$$

D'altra parte, osservando che, poichè si suppone $e^i_{i,j}=0$, dalla (6) si ha:

$$\mathrm{B}_j(\sigma'_i) = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1\,,2\,,\dots,\,k \\ j = 1\,,2\,,\dots,\,h \end{pmatrix}$$

si trova:

$$(\mathrm{C}_i\,,\mathrm{B}_j)f = \sigma'_1\,(\mathrm{A}_i\,,\mathrm{B}_j)f - \sigma'_i\,(\mathrm{A}_1\,,\mathrm{B}_j)\,f$$

e quindi, per le (II'),:

$$(\mathrm{C}_i\,,\mathrm{B}_j)f = 0\,.$$

Se ora alle relazioni trovate uniamo le altre:

$$(\mathrm{B}_i\,,\mathrm{B}_j) = 0\,,$$

valendoci del lemma V vediamo che le equazioni, che definiscono il più generale moltiplicatore M del sistema completo:

(12) $\mathrm{C}_2 f = 0$; $\mathrm{C}_3 f = 0$;...; $\mathrm{C}_k f = 0$; $\mathrm{B}_1 f = 0$;...; $\mathrm{B}_h f = 0$.

sono [1]):

$$\mathrm{C}_i(\mathrm{M}) + (k-2)\,\mathrm{C}_i(\log\sigma'_1)\,\mathrm{M} = 0$$
$$\mathrm{B}_j(\mathrm{M}) = 0\,.$$

---

[1]) Si noti che, insieme ad avere $\sum_1^n{}_m \dfrac{\partial\beta^j_m}{\partial x_m} + \dfrac{\partial\beta^j_{n+1}}{\partial x} = 0$, se si pone:

$$\mathrm{C}_i f = \eta^i_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \eta^i_n\frac{\partial f}{\partial x_n} + \eta^i_{n+1}\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

Queste equazioni, quando si osservi che è $B_j(\sigma'_1) = 0$, mostrano che si ha un moltiplicatore del sistema (12) nella quantità:

$$\overline{M} = \frac{1}{(\sigma'_1)^{k-2}}.$$

Allora, conoscendo del sistema (12) la soluzione Φ, ed il moltiplicatore $\overline{M}$, potremo determinare l'altra soluzione Ψ con un'altra quadratura. Si ha così che:

Essendo $\varepsilon \neq 0$ *ed* $\varepsilon \neq 1$ *e supponendo di essere nel caso a cui ci siamo ridotti secondo il teorema precedente, se è di più* $h+k=n$ *e si pone:*

$$C_i f = \sigma'_1 A_i f - \sigma'_i A_1 f \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

con:

$$\sigma'_t = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sigma_t ,$$

il sistema completo formato dalle equazioni:

$$(a) \quad C_2 f = 0 \;,\; C_3 f = 0 \;, \ldots ,\; C_k f = 0 \;,\; B_1 f = 0 \;, \ldots ,\; B_h f = 0$$

ammette il moltiplicatore:

$$(b) \qquad \overline{M} = \frac{1}{(\sigma'_1)^{k-2}}.$$

Determinata la soluzione del sistema:

$$A_1 f = 0 \;, \ldots ,\; A_k f = 0 \;,\; B_1 f = 0 \;, \ldots ,\; B_h f = 0 ,$$

il che si può fare con una quadratura per la conoscenza della trasformazione infinitesimale Xf *ammessa da questo sistema, la*

---

si ha anche,

$$\sum_1^n \frac{\partial \eta^i_m}{\partial x_m} + \frac{\partial \eta^i_{n+1}}{\partial z} = \sigma'_1 \sigma_i - \sigma'_i \sigma_1 + A_i(\sigma'_1) - A_1(\sigma'_i)$$

e per le (I*):

$$\sum_1^n \frac{\partial \eta^i_m}{\partial x_m} + \frac{\partial \eta^i_{n+1}}{\partial z} = 0 .$$

rimanente soluzione Ψ del sistema (a) può ottenersi con un'altra quadratura colla conoscenza del moltiplicatore (b) del sistema.

Vediamo di qui che il sistema (a) è risolubile per quadrature, naturalmente se è $\sigma'_1 \neq 0$, poichè è chiaro che il caso $\sigma'_1 = 0$ va escluso dalle considerazioni testè fatte. Però queste stesse considerazioni ci mostrano che il sistema (a) è risolubile per quadrature se una almeno delle quantità $\sigma'_i \, (i = 1 \, , 2 \, , \ldots , k)$ è differente da zero. Rimane perciò escluso soltanto il caso in cui sia ad un tempo:

$$\sigma'_1 = 0 \ ; \ \sigma'_2 = 0 \ ; \ldots ; \ \sigma'_k = 0 \, .$$

Ora in questo caso il più generale moltiplicatore delle singole equazioni:

$$(13) \qquad A_1 f = 0 \ , \ldots , \ A_k f = 0 \ , \ B_1 f = 0 \ , \ldots , \ B_h f = 0$$

è dato manifestamente da $F(\Phi)$, con F simbolo di funzione arbitraria, ed è quindi evidente che esso può ottenersi con sole quadrature.

Nel caso invece in cui una almeno delle quantità σ'_i, per esempio σ'_1, sia diversa da zero, ottenute con due quadrature le soluzioni Φ ed Ψ del sistema (a), per trovare la soluzione più generale del sistema (11) e quindi anche del sistema (10), basta determinare una funzione F dei due argomenti Φ e Ψ che soddisfi alla prima equazione del sistema (11), cioè in modo che si abbia:

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} A_1(\Psi) + F \sigma'_1 = 0 \, .$$

Ora poichè il sistema (10), o (11), ammette delle soluzioni F, vediamo che la quantità

$$- \frac{\sigma'_1}{A_1(\Psi)}$$

dovrà essere una funzione delle sole Φ e Ψ:

$$- \frac{\sigma'_1}{A_1(\Psi)} = D(\Phi , \Psi)$$

ed allora si avrà F con un' altra quadratura dall'equazione:

$$\frac{\partial \log F}{\partial \psi} = D(\Phi, \psi).$$

Teorema II. — *Se è* $h+k=n$, *e al tempo stesso* $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \neq -1$, *nel caso al quale permette di ridurci il teorema* I *potrà determinarsi, con sole quadrature, il più generale moltiplicatore comune delle singole equazioni:*

$$A_1 f = 0 ; \ldots ; A_k f = 0 ; B_1 f = 0 ; \ldots ; B_h f = 0 .$$

Se chiamiamo $\bar{\mu}$ un moltiplicatore comune di ciascuna di queste equazioni, poichè ciascuna di esse ammette la trasformazione infinitesimale Xf, vediamo (v. nota a pagina 50) che la quantità:

$$X(\log \bar{\mu}) + \nu - \varepsilon\nu = X(\log \bar{\mu}) + \frac{h+k-1}{k} \nu$$

è una soluzione di ciascuna delle equazioni:

$$A_1 f = 0 , A_2 f = 0 , \ldots , A_k f = 0 ,$$

mentre la quantità;

$$X(\log \bar{\mu}) + \nu - \nu = X(\log \bar{\mu})$$

è una soluzione delle singole equazioni:

$$B_1 f = 0 , \ldots\ldots , B_h f = 0 .$$

Ma poichè, nel caso che stiamo considerando, è, come si è veduto [1]: $B_j(\nu) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$, possiamo dire in conclusione che la quantità:

$$X(\log \bar{\mu}) + \frac{h+k-1}{k} \nu$$

è una soluzione del sistema (13), cosicchè dovrà essere:

$$X(\log \bar{\mu}) + \frac{h+k-1}{k} \nu = K(\Phi). \tag{14}$$

---

[1]) Vedi a pag. 84.

D'altro canto, essendo, nel caso da noi considerato, il determinante Δ tale da aversi ad un tempo (lemma IV):

$$A_1(\Delta)=0\,,\ldots,A_k(\Delta)=0\,,\,B_1(\Delta)=0\,,\ldots,B_h(\Delta)=0\,,\,X(\Delta)=0\,,$$

dovrà essere Δ uguale ad una costante ω:

$$\Delta=\omega=\text{cost.}$$

Ma $\frac{1}{\Delta}$ è, come già si è detto, un moltiplicatore del sistema completo (13), il quale dunque ammette per moltiplicatore una co stante. È chiaro allora che l'equazione a differenziali totali:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots\ldots & \alpha_n^1 & \alpha_{n+1}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \ldots\ldots & \alpha_n^k & \alpha_{n+1}^k \\ \beta_1^1 & \beta_2^1 & \ldots\ldots & \beta_n^1 & \beta_{n+1}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1^h & \beta_2^h & \ldots\ldots & \beta_n^h & \beta_{n+1}^h \\ dx_1 & dx_2 & \ldots\ldots & dx_n & dx \end{vmatrix}=0\,,$$

che ha per integrale la soluzione Φ di detto sistema, e per fattore di integrabilità il moltiplicatore del sistema stesso, ha per primo membro un differenziale esatto: potrà dunque prendersi:

$$\Phi=\int\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots\ldots & \alpha_n^1 & \alpha_{n+1}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \ldots\ldots & \alpha_n^k & \alpha_{n+1}^k \\ \beta_1^1 & \beta_2^1 & \ldots\ldots & \beta_n^1 & \beta_{n+1}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_1^h & \beta_2^h & \ldots\ldots & \beta_n^h & \beta_{n+1}^h \\ dx_1 & dx_2 & \ldots\ldots & dx_n & dx \end{vmatrix}$$

e sarà allora $X(\Phi)=\Delta=\text{Cost}=\omega$. Ne segue che dovrà essere:

$$X\left(\frac{1}{\Delta}\int K(\Phi)\,d\Phi\right)=K(\Phi)\,\frac{X(\Phi)}{\Delta}=K(\Phi)\,,$$

dimodochè l'equazione (14) potrà scriversi:

$$\mathrm{X}\left[\log\left(\bar{\mu}-e^{\frac{1}{\Delta}\int \mathrm{K}(\Phi)d\Phi}\right)\right]+\frac{h+k-1}{k}\,\nu=0$$

o, che fa lo stesso,:

$$\mathrm{X}\left(\bar{\mu}-e^{\frac{1}{\Delta}\int \mathrm{K}(\Phi)d\Phi}\right)+\frac{h+k-1}{k}\,\nu\left(\bar{\mu}-e^{\frac{1}{\Delta}\int \mathrm{K}(\Phi)d\Phi}\right)=0\,.$$

Servendoci ora del lemma I potremo ottenere dalla quantità:

$$\bar{\mu}-e^{\frac{1}{\Delta}\int \mathrm{K}(\Phi)d\Phi}$$

convenienti fattori, pei quali moltiplicando le trasformazioni infinitesimali:

$$\mathrm{A}_1 f\,,\ldots,\,\mathrm{A}_k f\ ,\ \mathrm{B}_1 f\,,\ldots,\,\mathrm{B}_h f$$

se ne ottengano altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colla $\mathrm{X}f$.

7. — Essendo sempre $h+k=n$, supponiamo però $\varepsilon=-1$. Secondo il teorema I, potremo supporre che sieno soddisfatte le medesime relazioni del caso ora trattato all'infuori delle relazioni (II'), al posto delle quali dovranno esser messe le seguenti:

$$(\mathrm{A}_i\,,\mathrm{B}_j)=-\frac{1}{1-\varepsilon}\,\sigma_i\,\mathrm{B}_j f+g_{i,j}\,\mathrm{X}f.$$

E se le $g_{i,j}$ sono tutte nulle potremo applicare qui le stesse considerazioni del caso precedente. In caso contrario osserviamo che dalla relazione che precede, per il lemma II, si ha:

$$\mathrm{B}_j(\sigma_i)+2g_{i,j}\,\nu=0\,,$$

e che di più dalle (5'''), insieme con $\mathrm{B}_j(\nu)=0$, risulta:

$$\mathrm{A}_i(\nu)=\frac{1}{2}\,\mathrm{X}(\sigma_i)-\frac{\nu}{2}\,\sigma_i\qquad(i=1\,,\,2\,,\ldots,\,k).\tag{15}$$

Se allora, in luogo delle trasformazioni infinitesimali $A_i f$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, consideriamo le:

$$\overline{A}_i f = \nu A_i f - \frac{\sigma_i}{2} X f,$$

tenendo conto delle relazioni che sono soddisfatte nel nostro caso $(\varepsilon = -1)$ e dalle uguaglianze stabilite [1]), troviamo le relazioni:

$$16)\qquad \begin{cases} (\overline{A}_i, \overline{A}_s) f = \overline{A}_i (\log \nu) \overline{A}_s f - \overline{A}_s (\log \nu) \overline{A}_i f \\ (\overline{A}_i, B_j) = 0 . \end{cases}$$

Di più:

$$(\overline{A}_i, X) = -\nu^2 A_i f + X\left(\frac{\sigma_i}{2}\right) X f - X(\nu) A_i f =$$

$$= -(X(\log \nu) + \nu)\left(\nu A_i f - \frac{\sigma_i}{2} X f\right) + \left\{X\left(\frac{\sigma_i}{2}\right) - \frac{\sigma_i}{2}(X(\log \nu) + \nu)\right\} X f.$$

Per la (15) possiamo anche scrivere:

$$(\overline{A}_i, X) f = -(X(\log \nu) + \nu)\left(\nu A_i f - \frac{\sigma_i}{2} X f\right) + \left\{A_i(\nu) - \frac{\sigma_i}{2} X(\log \nu)\right\} X f,$$

cioè:

$$(17)\qquad (\overline{A}_i, X) f = -(X(\log \nu) + \nu)\, \overline{A}_i f + \overline{A}_i (\log \nu) X f .$$

Le equazioni:

$$\overline{A}_1 f = 0, \ldots, \overline{A}_k f = 0, \quad B_1 f = 0, \ldots, B_h f = 0$$

ammettono ora tutte il moltiplicatore di Jacobi 1: osservando questo, si vede subito (lemma V) che le equazioni, che definiscono il più generale moltiplicatore del sistema completo da esse formato, sono le seguenti:

$$\overline{A}_i(M) + (k-1) M \overline{A}_i (\log \nu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

$$B_j(M) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, h).$$

---

[1]) Bisogna anche notare che è $B_j(\nu) = 0$.

Da esse vediamo che è noto un moltiplicatore del detto sistema nella quantità [1]):

$$M = \frac{1}{\nu^{k-1}};$$

potremo dunque determinare con una quadratura la soluzione Φ del sistema.

Ora dalle relazioni $(B_j, X) = \nu B_j f$ si deduce:

$$B_j (X(\Phi)) = 0,$$

e dalla (17):

$$\overline{A}_i (X(\Phi)) = \overline{A}_i (\log \nu) X(\Phi)$$

o, se vogliamo,:

$$\overline{A}_i \left(\log \frac{X(\Phi)}{\nu}\right) = 0.$$

Queste eguaglianze ci mostrano [1]) che la quantità $\frac{X(\Phi)}{\nu}$ deve essere una soluzione del sistema:

$$\overline{A}_1 f = 0, \ldots, \overline{A}_k f = 0, \quad B_1 f = 0, \ldots, B_h f = 0,$$

e quindi una funzione della sola Φ:

$$\frac{X(\Phi)}{\nu} = F(\Phi).$$

Se poniamo allora:

$$e^{\int \frac{d\Phi}{F(\Phi)}} = E(\Phi)$$

si ha subito:

$$X(\log E) = \frac{\partial \log E}{\partial \Phi} X(\Phi) = \frac{X(\Phi)}{F(\Phi)} = \nu,$$

e quindi:

$$X(E) - \nu E = 0.$$

---

[1]) Vedi la nota alla pagina precedente.

Applicando il lemma I vediamo ora che dalla funzione E, ottenuta con due quadrature, potranno ricavarsi convenienti fattori per le $A_i f$, $B_j f$, che ci permettano di ottenere altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colle Xf.

Si ha così il:

Teorema III. — *Se del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:*

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

si conoscono $k-1$ *invarianti differenziali:*

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n); \dots; \varphi_{k-1}(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$$

ed $n-k$ *invarianti integrali:*

$$\int \Psi_1(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)\, dx_1 \dots dx_n; \dots;$$
$$\int \Psi_{n-k}(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

e non è $n-k=1$, *possono determinarsi (nei casi più sfavorevoli con quadrature) n trasformazioni infinitesimali ammesse dall'equazione* $Xf=0$, *indipendenti tra loro e dalla* Xf.

8. — Supponiamo infine che sia, insieme con $h+k=n$, $h=1$ e quindi $k=n-1$. In questo caso sono evidentemente soddisfatte le relazioni seguenti:

$$(A_1, X) = 0 \ , \ (A_2, X) = 0 \ , \dots, (A_{n-1}, X) = 0 \ , (B, X) = 0 \ ,$$

dove può al solito supporsi che sia $\sum_1^n \frac{\partial \beta'_m}{\partial x_m} + \frac{\partial \beta'_{n+1}}{\partial z} = 0$. Dalle (5), (5‴) del numero 2 del presente paragrafo, facendovi $\varepsilon=0$, si vede subito che possono supporsi nulle tutte le quantità $e^l_{i,j}$, anche con $l=i$, e quindi si possono supporre soddisfatte relazioni della forma:

$$(A_i, B)f = f'_{i,1} Bf + g_{i,j} Xf$$

(del resto le (5) ci mostrano che con $\varepsilon = 0$ può supporsi nullo anche

$g_{i,j}$). Soddisfatte queste condizioni è chiaro che il sistema delle due equazioni:

$$B_1 f = 0 \quad , \quad X f = 0$$

ammette le $n-1$ trasformazioni infinitesimali:

$$A_1 f, \ldots, A_{n-1} f.$$

Secondo la teoria di Lie la conoscenza di queste potrà essere utilizzata nella integrazione del sistema completo

$$B_1 f = 0 \ , \ X f = 0 .$$

E siccome dal lemma V segue che questo sistema ammette per moltiplicatore una costante, determinate $n-2$ delle sue soluzioni, la rimanente soluzione potrà determinarsi con una quadratura. La determinazione dell'ultima soluzione dell'equazione $Xf=0$ richiederà, nei casi più sfavorevoli, una operazione d'ordine 1. Dunque:

Se è $h=1$, $k=n-1$ o si può determinare una funzione tale, che, moltiplicando per essa la trasformazione infinitesimale $B_1 f$, *ne risulti una permutabile colla* Xf *ed allora si conosceranno n trasformazioni infinitesimali:*

$$A_1 f, A_2 f, \ldots, A_{n-1} f, B_1 f$$

ammesse dall'equazione $Xf=0$; *o potrà supporsi che il sistema completo:*

$$B_1 f = 0 \quad , \quad X f = 0$$

ammetta le $n-1$ trasformazioni infinitesimali:

$$A_1 f, A_2 f, \ldots, A_{n-1} f$$

ed il moltiplicatore 1.

Per conseguenza:

Teorema IV. — *Se del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:*

$$X f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial x}$$

si conoscono $n-2$ invarianti differenziali:

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n); \dots; \varphi_{n-2}(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$$

ed un invariante integrale:

$$\int \Psi_1(x_1, \dots, x_n, z\, p_1, \dots, p_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n,$$

o si possono determinare (con sole operazioni di derivazione e di eliminazione) n trasformazioni infinitesimali ammesse dall'equazione $Xf=0$, indipendenti tra loro e dalla Xf; oppure (sempre con sole operazioni di derivazione e di eliminazione) può unirsi all'equazione $Xf=0$ un'altra equazione $Bf=0$, tale che il sistema completo:

$$Bf=0 \quad , \quad Xf=0$$

ammetta il moltiplicatore 1 ed $n-1$ note trasformazioni infinitesimali indipendenti tra loro e dalle Xf, Bf.

§ 6.

Integrazione dell'equazione $Xf=0$ colla conoscenza delle n trasformazioni infinitesime $A_1f, \dots, A_kf$; $B_1f, \dots, B_hf$; $X_1f, \dots, X_{n-h-k}f$ soddisfacenti alle relazioni:

$$(A_i, X)f = \frac{1-h}{k} A_if\,;\ (B_j, X)f = \nu B_jf\,;\ (X_r, X) = \lambda_r Xf.$$

Caso in cui è $h+k<n$.

Indicando, come nel paragrafo precedente, con ε il numero frazionario $\frac{1-h}{k}$, potremo ancora distinguere i tre casi:

$$\varepsilon \neq -1\ ,\ \varepsilon \neq 0 \quad ; \quad \varepsilon = -1\ ;\ \varepsilon = 1$$

9. — *Caso in cui ε è differente da -1 e da zero* —. Secondo il teorema del numero 5 del paragrafo precedente noi possiamo dire

subito che, o si potranno moltiplicare le trasformazioni infinitesimali:

$$\mathrm{A}_1 f, \ldots, \mathrm{A}_k f, \mathrm{B}_1 f, \ldots, \mathrm{B}_h f$$

per dei convenienti fattori (ottenuti senza alcuna operazione di integrazione), in modo che ne risultino $h+k$ trasformazioni infinitesimali permutabili colla $\mathrm{X}f$, ed allora l'equazione $\mathrm{X}f=0$ ammetterà n note trasformazioni infinitesimali, oppure si potrà supporre che sieno soddisfatte le relazioni:

$$\text{(I)} \qquad (\mathrm{A}_i, \mathrm{A}_s)f = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left\{\sigma_s \mathrm{A}_i f - \sigma_i \mathrm{A}_s f\right\} \quad \left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} = 1, 2, \ldots, k\right)$$

dove è:

$$\mathrm{A}_i(\sigma_s) = \mathrm{A}_s(\sigma_i) \quad \sigma_t = \sum_1^n{}_j \frac{\partial \alpha_j^t}{\partial x_j} + \frac{\partial \alpha_{n+1}^t}{\partial z} \quad (t=1, 2, \ldots, k)$$

e le altre:

$$\text{(II}'\text{)} \qquad (\mathrm{A}_i, \mathrm{B}_j) = -\frac{1}{1-\varepsilon}\sigma_i \mathrm{B}_j f \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \ldots, k \\ j=1, 2, \ldots, h \end{matrix}\right)$$

$$\text{(III}'\text{)} \qquad (\mathrm{B}_i, \mathrm{B}_j) = 0 \quad \left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix} = 1, 2, \ldots, h\right)$$

$$\text{(IV)} \begin{cases} (\mathrm{A}_i, \mathrm{X}_r)f = \sum_1^k{}_l \alpha_{i,r}^l \mathrm{A}_l f + \gamma_{i,r} \mathrm{X}f & \left(\begin{matrix} i=1, 2, \ldots, k \\ r=1, 2, \ldots, n-k-h \end{matrix}\right) \\ (\mathrm{B}_j, \mathrm{X}_r)f = \sum_1^k{}_m \bar{\beta}_{j,r}^m \mathrm{B}_m f + \bar{\gamma}_{i,r} \mathrm{X}f & \left(\begin{matrix} j=1, 2, \ldots, h \\ r=1, 2, \ldots, n-h-k \end{matrix}\right) \end{cases}$$

$$\text{(V)} \qquad (\mathrm{X}_s, \mathrm{X}_t) = \sum_1^{n-h-k}{}_r \eta_{s,t}^r \mathrm{X}_r f + \Theta_{s,t} \mathrm{X}f \quad \left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} = 1, 2, \ldots n-h-k\right).$$

Queste relazioni ci mostrano che il sistema completo:

$$\mathrm{A}_1 f=0, \ldots, \mathrm{A}_k f=0 \;,\; \mathrm{B}_1 f=0, \ldots, \mathrm{B}_h f=0 \;,\; \mathrm{X}f=0$$

ammette le trasformazioni infinitesimali:

$$\mathrm{X}_1 f \;,\; \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_{n-h-k} f.$$

Colla conoscenza di queste il sistema completo potrà integrarsi servendoci della nota teoria di Lie.

Determinate le $n-h-k$ soluzioni $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-h-k}$ di questo sistema, noi introdurremo le nuove variabili:

$$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, \ldots, x'_{h+k} = x_{h+k}, x'_{h+k+1} = \Pi_1, \ldots, x'_n = \Pi_{n-h-k}, z' = z.$$

Con ciò il sistema prenderà la forma:

$$\overline{A}_i f \equiv \overline{\alpha}_1^i \frac{\partial f}{\partial x'_1} + \ldots + \overline{\alpha}_{h+k}^i \frac{\partial f}{\partial x'_{h+k}} + \overline{\alpha}_{n+1}^i \frac{\partial f}{\partial z'} = 0$$

$$\overline{B}_j f \equiv \overline{\beta}_1^j \frac{\partial f}{\partial x'_1} + \ldots + \overline{\beta}_{h+k}^j \frac{\partial f}{\partial x'_{h+k}} + \overline{\beta}_{n+1}^j \frac{\partial f}{\partial z'} = 0$$

$$Xf \equiv \overline{\xi}_1 \frac{\partial f}{\partial x'_1} + \ldots + \overline{\xi}_{h+k} \frac{\partial f}{\partial x'_{h+k}} + \overline{\zeta} \frac{\partial f}{\partial z'} = 0$$

(si può notare che le $\overline{\alpha}_s^i, \overline{\beta}_s^j, \overline{\xi}_s, \overline{\zeta}$ non sono altro che le stesse funzioni $\alpha_s^i, \beta_s^j, \xi_s, \zeta$ espresse per le nuove variabili). Indicando con $\overline{f}$ la funzione $f(x, \ldots, x_n, z)$ espressa per le $x'_1, \ldots, x'_n, z$ è chiaro che si avrà:

$$(\overline{A}_i, \overline{X})\overline{f} = \varepsilon \overline{\nu} \overline{A}_i \overline{f} \quad ; \quad (\overline{B}_j, \overline{X})\overline{f} = \overline{\nu} \overline{B}_j \overline{f}.$$

Se poniamo allora:

$$\overline{\nu} = \frac{\partial \overline{\xi}_1}{\partial x'_1} + \ldots + \frac{\partial \overline{\xi}_{h+k}}{\partial x'_{h+k}} + \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial z'} \; ; \; D = \frac{\partial(x'_1, \ldots, x'_n, z')}{\partial(x_1, \ldots, x_n, z)} = \frac{\partial(\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-h-k}, z')}{\partial(x_{h+k+1}, \ldots, x_n, z)},$$

per il lemma III si ha:

$$(D^{-\varepsilon}\overline{A}_i, \overline{X}) = -X(D^{-\varepsilon})\overline{A}_i f + \varepsilon \nu D^{-\varepsilon} \overline{A}_i f = [\varepsilon X(\log D) + \varepsilon \nu] D^{-\varepsilon} \overline{A}_i f = \varepsilon \nu' D^{-\varepsilon} \overline{A}_i f;$$

nello stesso modo:

$$(D^{-1}\overline{B}_j, \overline{X})f = \nu' D^{-1} \overline{B}_j f.$$

Se consideriamo allora le trasformazioni infinitesimali:

$$A'_i f = D^{-\varepsilon} \overline{A}_i f = \alpha_1^{i'} \frac{\partial f}{\partial x'_1} + \ldots + \alpha_{h+k}^{i'} \frac{\partial f}{\partial x'_{h+k}} + \alpha_{n+1}^{i'} \frac{\partial f}{\partial z'}$$

$$B'_j f = D^{-1} \overline{B}_j f = \beta_1^{j'} \frac{\partial f}{\partial x'_1} + \ldots + \beta_{h+k}^{j'} \frac{\partial f}{\partial x'_{h+k}} + \beta_{n+1}^{j'} \frac{\partial f}{\partial z'}$$

esse saranno tali da soddisfare alle relazioni:

$$(\mathrm{A}'_i\,,\overline{\mathrm{X}})f=\varepsilon\nu'\,\mathrm{A}'_i f\ ;\ (\mathrm{B}'_j\,,\overline{\mathrm{X}})f=\nu'\,\mathrm{B}'_j f\,.$$

Servendoci ora dei risultati ottenuti al numero 6 del paragrafo precedente vediamo che, nei casi più sfavorevoli con *due* quadrature, si potranno determinare dei convenienti fattori, pei quali moltiplicando A'_i, B'_j se ne ottengano altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colla $\overline{\mathrm{X}}f$, dimodochè la ricerca delle ulteriori soluzioni della $\mathrm{X}f=0$ è ridotta ancora al problema dell'integrazione di una equazione $\overline{\mathrm{X}}f=0$ in $h+k+1$ variabili con $h+k$ note trasformazioni infinitesimali.

Teorema. — *Se del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:*

$$\mathrm{X}f=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+\xi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

si conoscono $k-1$ *invarianti differenziali:*

$$\varphi_1(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots;p_n)\ ;\ \varphi_2(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots,p_n)\,;\dots;$$
$$\varphi_{k-1}(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots,p_n)$$

ed h *invarianti integrali:*

$$\int\psi_1(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots,p_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n\,;\dots;$$
$$\int\psi_h(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots,p_n)\,dx_1\dots dx_n$$

e di più sono note $n-h-k$ *trasformazioni infinitesimali:*

$$\mathrm{X}_r f=\xi_1^r\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2^r\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+\xi_n^r\frac{\partial f}{\partial x_n}+\zeta^r\frac{\partial f}{\partial z}\ (r=1\,,2\,,\dots,n-h-k)$$

ammesse dall'equazione $\mathrm{X}f=0$;
se inoltre il determinante funzionale:

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{k-1},\psi_1,\dots,\psi_h,\pi_1,\dots,\pi_{n-h-k},\pi)}{\partial(p_1,p_2,\dots,p_n)}\,,$$

con :

$$\pi_r = \xi_1^r p_1 + \xi_2^r p_2 + \dots + \xi_n^r p_n - \zeta^r \ (r = 1, 2, \dots, n-h-k) ;$$
$$\pi = \xi_1 p_1 + \dots + \xi_n p_n - \zeta ,$$

non si annulla in forza del sistema :

$$\varphi_1 = a_1 , \varphi_2 = a_2 , \dots , \varphi_{k-1} = a_{k-1} , \ \psi_1 = 0 , \dots , \psi_h = 0 ,$$
$$\pi_1 = 0 , \dots , \pi_{n-h-k} = 0 , \pi = 0 ,$$

quando il numero frazionario $\frac{1-h}{k}$ *sia differente tanto da zero che da* -1*, o si potranno determinare, oltre le* $X_1 f, \dots, X_{n-h-k} f$*, altre* $h+k$ *trasformazioni infinitesimali ammesse dall'equazione* $Xf = 0$*, oppure si potranno determinare* $k+h$ *equazioni :*

$$A_1 f = 0 , \dots , A_k f = 0 \ , \ B_1 f = 0 , \dots , B_h f = 0$$

che insieme con la $Xf = 0$ *formino un sistema completo che ammetta le trasformazioni infinitesimali* $X_1 f, \dots, X_{n-h-k} f$*. In quest'ultimo caso, trovate le* $n-h-k$ *soluzioni di detto sistema, si potranno moltiplicare le* $A_i f, B_j f$ *per delle convenienti funzioni, determinate nei casi più sfavorevoli con due quadrature, tali da ottenerne altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colla* Xf *e quindi ammesse dall'equazione* $Xf = 0$ *.*

10. — *Caso in cui è* $\varepsilon = -1$ *.* — In questo caso dovranno potersi determinare dei convenienti fattori, pei quali moltiplicando le trasformazioni infinitesimali $A_1 f, \dots, A_k f, B_1 f, \dots, B_h f$ se ne ottengano altrettante permutabili colla Xf, oppure potremo supporre che sieno soddisfatte le relazioni stesse del caso precedente, salvo che, invece delle (II'), avremo le :

$$\text{(II'')} \qquad (A_i , B_j) f = -\frac{1}{1-\varepsilon} \sigma_i B_j f + \sum_{1}^{n-h-k}{}_r \, g_{i,j}^r X_r f + g_{i,j} X f .$$

Le funzioni, che compariscono come coefficienti delle $A_i f, B_j f$ $X_r f, Xf$ in tutte queste relazioni, soddisfano alle equazioni stabilite nei numeri 2 , 3 , 4 , 5 del paragrafo precedente nelle quali si faccia $\varepsilon = -1$.

Supponendo di essere nell' ultimo caso valiamoci del fatto che deve essere soddisfatta l' identità Jacobiana:

$$\big((A_i\,, A_s)\,, X_r\big) + \big((A_s\,, X_r)\,, A_i\big) + \big((X_r\,, A_i)\,, A_s\big) = 0\,.$$

Se poniamo per brevità $\eta = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, richiamando le relazioni (I) e (IV) vediamo che questa identità può scriversi:

$$\Big(\eta\,[\sigma_s\, A_i f - \sigma_i\, A_s f]\,, X_r\Big) + \Big(\sum_1^k{}_l\, \alpha^l_{s,r}\, A_l f + \gamma_{s,r}\, Xf,\, A_i f\Big) +$$
$$+ \Big(A_s f,\, \sum_1^k{}_l\, \alpha^l_{i,r}\, A_l f + \gamma_{i,r}\, Xf\Big) = 0\,.$$

Eseguendo le alternate che compariscono nel primo membro, col tener conto sempre delle (I) e (IV) ed eguagliando a zero il coefficiente di $A_i f$, si ha:

$$\eta\, \sigma_s\, \alpha^i_{i,r} - \eta\, \sigma_i\, \alpha^i_{s,r} - \eta\, X_r\,(\sigma_s) - A_i\,(\alpha^i_{s,r}) -$$
$$- \eta \sum_1^k{}_l\, \alpha^l_{s,r}\, \sigma_l - \gamma_{s,r}\, \varepsilon\, \nu + A_s\,(\alpha^i_{i,r}) - \eta\, \sigma_s\, \alpha^i_{i,r} = 0\,.$$

Rammentiamo l'osservazione già fatta, che si può ritenere che le soluzioni dell'equazione $Xf = 0$ lo sieno anche delle equazioni $A_i f = 0$, $B_j f = 0$; poichè le quantità $\alpha^i_{s,r}$ $(s \neq i)$ sono appunto soluzioni dell'equazione $Xf = 0$ (vedi le (8) del § 5) e tali sono anche le quantità $\alpha^i_{i,r} - \alpha^s_{s,r}$ (sempre per le (8) del § 5), potremo supporre che nell'equazione precedente sia:

$$(18) \qquad A_i\,(\alpha^i_{s,r}) = 0 \;\; ; \;\; A_s\,(\alpha^i_{i,r}) = A_s\,(\alpha^s_{s,r})\,.$$

Avremo dunque:

$$(19) \quad \frac{1}{\eta}\, A_s\,(\alpha^s_{s,r}) - \sigma_i\, \alpha^i_{s,r} - X_r\,(\sigma_s) - \sum_1^k{}_l\, \alpha^l_{s,r}\, \sigma_l - \frac{\varepsilon}{\eta}\, \nu\gamma_{s,r} = 0\,.$$

D'altra parte dalle relazioni

$$(A_s\,, X_r) = \sum_1^k \alpha^l_{s,r}\, A_l f + \gamma_{s,r}\, Xf$$

si ricava, per il lemma II, :

$$A_s\left(\sum_1^n{}_m \frac{\partial \xi_m^r}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta^r}{\partial z}\right) - X_r(\sigma_s) = \sum_1^k{}_l \alpha_{s,r}^l \sigma_l + $$
$$+ \sum_1^k{}_l A_l(\alpha_{s,r}^l) + \nu \gamma_{s,r} + X(\gamma_{s,r}),$$

e, per le (18), :

$$A_s\left(\sum_1^n{}_m \frac{\partial \xi_m^r}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta^r}{\partial z}\right) - X_r(\sigma_s) - A_s(\alpha_{s,r}^s) -$$
$$- \sum_1^k{}_l \alpha_{s,r}^l \sigma_l - \gamma_{s,r}\nu - X(\gamma_{s,r}) = 0 .$$

Togliendo da questa la (19) si ricava :

$$A_s\left(\sum_1^n{}_m \frac{\partial \xi_m^r}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta^r}{\partial z}\right) + \sigma_i \alpha_{s,r}^i + \frac{\varepsilon}{\eta}\gamma_{s,r} -$$
$$-\left(1+\frac{1}{\eta}\right) A_s(\alpha_{s,r}^s) - \nu \gamma_{s,r} - X(\gamma_{s,r}) = 0 ,$$

e, per essere $1+\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\varepsilon}$, dall'ultima delle (8) (in cui si faccia $\gamma_{i,r}^s = 0$ $(s=1,2,\ldots,n-h-k)$) si ha infine:

$$A_s\left(\sum_1^n{}_m \frac{\partial \xi_m^r}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta^r}{\partial z} + \lambda_r - \frac{1}{\varepsilon}\alpha_{s,r}^s\right) + \sigma_i \alpha_{s,r}^i = 0 . \tag{20}$$

Ma è facile vedere che la quantità :

$$\sum_1^n{}_m \frac{\partial \xi_m^r}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta^r}{\partial z} + \lambda_r - \frac{1}{\varepsilon}\alpha_{s,r}^s$$

è una soluzione dell'equazione $Xf=0$. Dalla seconda delle (8) si ha infatti :

$$X(\alpha_{s,r}^s) + \varepsilon \lambda_r \nu - \varepsilon X_r(\nu) = 0$$

e dalla relazione $(X_r, X) = \lambda_r Xf$, pel lemma II, si deduce :

$$X_r(\nu) - X\left(\sum_1^n{}_m \frac{\partial \xi_m^r}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta^r}{\partial z}\right) = \lambda_r \nu + X(\lambda_r) .$$

Togliendo quest'uguaglianza membro a membro dalla precedente si ha subito:

$$X\left(\sum_1^n{}_m \frac{\partial \xi_m^r}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta^r}{\partial z} + \lambda_r - \frac{1}{\varepsilon}\alpha_{s,r}^s\right) = 0$$

come volevamo. Da quest'ultima noi vediamo che può senz'altro supporsi che le quantità:

$$\sum_1^n{}_m \frac{\partial \xi_m^r}{\partial x_m} + \frac{\partial \zeta^r}{\partial z} + \lambda_r - \frac{1}{\varepsilon}\alpha_{s,r}^s$$

sieno soluzioni dell'equazioni:

$$A_1 f = 0, \ldots, A_k f = 0 \;,\; B_1 f = 0, \ldots, B_h f = 0$$

e dalle (20) vediamo di conseguenza che possiamo supporre che sia:

$$\sigma_i \, \alpha_{s,r}^i = 0 \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, k & r = 1, 2, \ldots, n-h-k \\ s = 1, 2, \ldots, k & s \neq i \end{pmatrix}.$$

Distinguiamo allora due casi:

1.° Una almeno delle quantità $\sigma_i, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, per es. σ_i, è diversa da zero.

2.° Tutte le quantità $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ sono nulle.

Nel *primo caso* dovrà essere:

$$\alpha_{s,r}^i = 0 \left(\begin{matrix} i \\ s \end{matrix} = 1, 2, \ldots, k \;;\; r = 1, 2, \ldots, n-h-k\right).$$

Dalle (IV) segue allora che le alternate $(A_s, X_r)f$ $(s \neq i)$ si compongono linearmente colle $A_1 f, \ldots, A_{i-1} f, A_{i+1} f, \ldots, A_k f, Xf$ e quindi, tenendo conto di tutte le altre relazioni, che sappiamo esser soddisfatte, risulta che il sistema:

$$A_1 f, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k f, B_1 f, \ldots, B_h f, X_1 f, \ldots, X_{n-h-k} f, Xf$$

è un sistema completo. Di esso con una operazione di ordine uno, potremo determinare l'unica soluzione φ. La quantità $A_i(\varphi)$ ci permetterà allora, come già più volte si è detto, di dedurre dalle $A_i f$,

$B_j f$ altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf (moltiplicandole per dei convenienti fattori) [1].

Supponiamo ora che sieno nulle tutte le $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Le equazioni $A_1 f = 0$, $A_2 f = 0, \ldots, A_k f = 0$, $Xf = 0$ formano un sistema completo, che, come risulta dalle (IV), ammette le trasformazioni infinitesimali $X_1 f, \ldots, X_{n-h-k} f$. Altrettanto avviene, sempre per le (IV), del sistema completo formato dalle $B_1 f = 0$, $B_2 f = 0, \ldots, B_h f = 0$, $Xf = 0$. Le alternate (A_i, B_j) $\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 1, 2, \ldots, h \end{pmatrix}$ non si compongono in generale linearmente colle $A_1 f, \ldots, A_k f$, $B_1 f, \ldots, B_h f$, Xf per cui non si può dire che il sistema delle equazioni:

$$(21) \qquad A_1 f = 0, \ldots, A_k f = 0, B_1 f, \ldots, B_h f = 0, \quad Xf = 0$$

sia un sistema completo. Tra le alternate $C_{i,j} f = (A_i, B_j) f$ ve ne saranno alcune linearmente indipendenti dalle:

$$(22) \qquad A_1 f, \ldots, A_k f, B_1 f, \ldots, B_h f, Xf;$$

formando le alternate delle $C_{i,j} f$ tra loro se ne potranno ottenere delle nuove linearmente indipendenti dalle (22) e dalle $C_{i,j} f$ stesse; in tal modo o arriveremo ad ottenere $n-h-k$ trasformazioni infinitesimali indipendenti tra loro e dalle (22), oppure otterremo un certo numero di trasformazioni infinitesimali, che, uguagliate allo zero, formeranno colle (22) un sistema completo, come ora proveremo. Se indichiamo con Hf una qualunque delle trasformazioni infinitesimali ottenute, noi vediamo facilmente che essa soddisfa alla relazione:

$$(H, X) f = 0.$$

Per veder ciò si rammenti che può sempre supporsi $B_j(\nu) = 0$ (vedi a pag. 84), e che, nel caso considerato, dobbiamo supporre anche:

$$A_i(\nu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

---

[1]) Vedi l'osservazione a principio del n.° 5 del § 5.

(Questo segue immediatamente dalla seconda delle (5‴) a pag. 78 facendovi $f^j_{i,j} = -\frac{1}{1-\varepsilon}\sigma_i = 0$). Dall'identità Jacobiana:

$$((A_i , B_j) , X) + ((B_j , X) , A_i) + ((X , A_i) , B_j) = 0 ,$$

che può anche scriversi (essendo $\varepsilon = -1$)

$$(C_{i,j} , X) + (\nu B_j , A_i) + (B_j , -\nu A_i) = 0 ,$$

segue subito:

$$(C_{i,j} , X) = 0 .$$

Sempre valendoci dell'identità Jacobiana troviamo che le alternate delle $C_{i,j}f$ tra loro danno luogo a trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf.

Supponiamo che dalle trasformazioni infinitesimali $C_{i,j}f$ e dalle loro alternate possa ottenersi un certo numero di trasformazioni infinitesimali indipendenti tra loro e dalla Xf:

$$Y_1 f , Y_2 f , \ldots , Y_q f .$$

Queste devono essere evidentemente combinazioni lineari delle:

$$X_1 f , X_2 f , \ldots , X_{n-h-k} f , Xf$$

poichè tali sono le $C_{i,j}f$ ed inoltre le $X_r f$ $(r = 1, 2, \ldots, n-h-k)$, Xf, come risulta dalle (V), formano un sistema completo. Se si pone allora:

$$Y_p f = \varepsilon_{p,1} X_1 f + \ldots + \varepsilon_{p,n-h-k} X_{n-h-k} + \varepsilon_p Xf ,$$

dall'essere $(Y_p , X) = 0$, segue che le quantità:

$$\varepsilon_{p,1} ; \varepsilon_{p,2} , \ldots , \varepsilon_{p,n-h-k}$$

dovranno essere soluzioni dell'equazione $Xf = 0$ e quindi si potranno supporre anche soluzioni di tutte le (21). Ne viene di conseguenza che sarà:

$$(A_i , Y_p) f = \varepsilon_{p,1} (A_i , X_1) f + \ldots + \varepsilon_{p,n-h-k} (A_i , X_{n-h-k}) f + X(\varepsilon_p) Xf - \varepsilon_p \nu A_i f ,$$

$$(B_j , Y_p) f = \varepsilon_{p,1} (B_j , X_1) f + \ldots + \varepsilon_{p,n-h-k} (B_j , X_{n-h-k}) f + X(\varepsilon_p) Xf + \varepsilon_p \nu B_j f$$

dalle quali vediamo, per le IV, che le alternate $(A_i, Y_p)f$; $(B_j, Y_p)f$ si compongono linearmente colle $A_1f, \ldots, A_kf, Xf$; $B_1f, \ldots, B_hf, Xf$ rispettivamente. Questo ci prova che si può supporre che, nel caso in cui sia $p < n-h-k$, le equazioni:

$$(23) \quad A_1 = 0, \ldots, A_kf = 0 \,;\, B_1f = 0, \ldots, B_hf = 0 \,;\, Y_1f = 0, \ldots, Y_qf = 0 \,,\, Xf = 0$$

formino un sistema completo.

Si osservi di più che, ove le (21) ammettano una soluzione comune φ, questa sarà anche soluzione del sistema (23) (ciò che segue immediatamente dal modo con cui sono state ottenute le Y_1f, $Y_2f, \ldots, Y_qf$). Notiamo anche che, per essere:

$$\sigma_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, k) \,;\, \sum_1^n \frac{\partial \beta_m^j}{\partial x_m} + \frac{\partial \beta_{n+1}^j}{\partial z} = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, h),$$

se si pone.

$$Y_p f = \eta_1^p \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \eta_n^p \frac{\partial f}{\partial x_n} + \eta_{n+1}^p \frac{\partial f}{\partial z},$$

risulta dal lemma II:

$$\sum_1^n {}_m \frac{\partial \eta_m^p}{\partial x_m} + \frac{\partial \eta_{n+1}^p}{\partial z} = 0,$$

ciò che potremo esprimere brevemente dicendo che le singole equazioni (23), tolta l'ultima, ammettono il moltiplicatore di Jacobi 1.

Distingueremo ora i due casi $q = n-h-k$, $q < n-h-k$.

Sia $q = n-h-k$. Dalle (I), (II'), (III'), (IV), (V) vediamo che saranno soddisfatte le relazioni seguenti [1]):

$$(a) \quad (A_i, A_s)f = 0 \qquad \begin{pmatrix} i \\ s \end{pmatrix} = 1, 2, \ldots, k$$

$$(b) \quad (A_i, B_j)f = \sum_1^{n-h-k} {}_r\, g_{i,j}^r Y_r f + g_{i,j} Xf \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 1, 2, \ldots, h \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad (B_i, B_j)f = 0 \qquad \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = 1, 2, \ldots, h$$

---

[1]) Adoperiamo in queste relazioni gli stessi simboli ($g_{i,j}^r$; $g_{i,j}$; $a_{i,r}^l$ ecc.) che nelle relazioni analoghe a pag. 85; essi però qui non rappresentano evidentemente le stesse funzioni di prima.

$$(d)\quad (A_i, Y_r)f = \sum_{1}^{n-h-k}{}_l\, \alpha^l_{i,r} A_l f + \gamma_{i,r} Xf \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,k \\ r=1,2,\dots,n-h-k \end{pmatrix}$$

$$(e)\quad (B_j, Y_r)f = \sum_{1}^{k}{}_l\, \bar{\beta}^m_{j,r} B_m f + \bar{\delta}_{j,r} Xf \quad \begin{pmatrix} j=1,2,\dots,h \\ r=1,2,\dots,n-h-k \end{pmatrix}$$

$$(f)\quad (Y_s, Y_t)f = \sum_{1}^{n-h-k} \eta^r_{s,t} Y_r f + \theta_{s,t} Xf \quad \left(\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} = 1,2,\dots,n-h-k\right)$$

dove le quantità $g^r_{i,j}$; $\alpha^l_{i,r}$ $(l \neq i)$; $\bar{\beta}^m_{j,r}$ $(m \neq j)$; $\eta^r_{s,t}$ sono altrettante soluzioni dell'equazione $Xf=0$ e quindi potranno supporsi soluzioni di tutte le equazioni (21), in conseguenza anche delle (23), cioè costanti.

E poichè ν è una soluzione delle equazioni $A_i(f)=0$, $B_j(f)=0$, dovrà essere ancora:

$$Y_p(\nu) = 0 \qquad (p=1,2,\dots,q)\,;$$

ponendo allora nelle (8) e (9) del paragrafo precedente le $Y_r f$ in luogo delle $X_r f$ e facendovi $\lambda_r = 0$ otteniamo:

$$X(\alpha^i_{i,r}) = 0 \qquad X(\bar{\beta}^j_{j,r}) = 0\,;$$

potremo dunque supporre anche le quantità:

$$\alpha^i_{i,r} \quad , \quad \bar{\beta}^j_{j,r}$$

soluzioni di ciascuna delle (23) e perciò costanti.

Col tener conto di queste ultime condizioni e del fatto che, tolta la Xf, tutte le altre trasformazioni infinitesimali, che stiamo considerando, eguagliate allo zero dànno equazioni che ammettono il moltiplicatore 1, applicando alle (b), (d), (e), (f) il lemma II troviamo:

$$\begin{aligned} X(g_{i,j}) + \nu g_{i,j} &= 0 \\ X(\gamma_{i,r}) + \nu \gamma_{i,r} &= 0 \\ X(\bar{\gamma}_{j,r}) + \nu \bar{\gamma}_{j,r} &= 0 \\ X(\theta_{s,t}) + \nu \theta_{s,t} &= 0\,. \end{aligned}$$

Possono perciò ritenersi nulle anche tutte le quantità:

$$g_{i,j}\ ;\ \gamma_{i,r}\ ;\ \bar{\gamma}_{j,r}\ ;\ \theta_{s,t}\,.$$

Ma in quest' ultimo caso il sistema delle equazioni :

$$A_1 f = 0 ,\dots, A_k f = 0 \ , \ B_1 f = 0 ,\dots, B_h f , \ Y_1 f = 0 ,\dots, Y_q f = 0$$

è un sistema completo, che per di più ammette la trasformazione infinitesimale Xf. La soluzione Φ del sistema potrà dunque determinarsi con una quadratura : e poichè insieme con Φ anche $X(\Phi)$ e ν saranno soluzioni del sistema stesso, sarà :

$$\frac{X(\Phi)}{\nu} = F(\Phi) .$$

Con :

$$E(\Phi) = e^{\int \frac{d(\Phi)}{F(\Phi)}}$$

avremo quindi :

$$X(E) - \nu E = 0$$

e la funzione E, nota mediante due quadrature, ci permetterà di dedurre dalle $A_i f$, $B_j f$ altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf.

Sia $q < n - h - k$. — In questo caso, come abbiamo già detto, le equazioni :

$$(23') \qquad \begin{gathered} A_1 f = 0 ,\dots, A_k f = 0 ; B_1 f = 0 ,\dots, B_h f = 0 ; \\ Y_1 f = 0 ,\dots, Y_q f = 0 , Xf = 0 \end{gathered}$$

formano un sistema completo. Si vede subito che questo sistema *ammette le trasformazioni infinitesimali :*

$$X_1 f , X_2 f ,\dots, X_{n-h-k} f .$$

Infatti se φ è una soluzione del sistema (23'), siccome i due sistemi completi :

$$(24) \quad A_1 f = 0 ,\dots, A_k f = 0 , Xf = 0 ; B_1 f = 0 ,\dots, B_h f = 0 , Xf = 0$$

ammettono ambedue le trasformazioni infinitesimali $X_r f$ ($r = 1, 2, \dots, n-h-k$), $X_r(\varphi)$ sarà una soluzione di ciascuna delle equazioni (24) e quindi del sistema completo (23'). Valendoci della nota teoria di Lie noi potremo utilizzare la conoscenza delle trasformazioni infinitesimali $X_1 f, \dots, X_{n-h-k} f$ per determinare le soluzioni φ_1, $\varphi_2, \dots, \varphi_{n-h-k-q}$ del sistema (23). Introducendo in seguito le nuove variabili:

$$x'_1 = x_1 \,;\, x'_2 = x_2 \,;\dots;\, x'_m = x_m \,;\, x'_{m+1} = \varphi_{m+1} \,;\dots;\, x'_n = \varphi_{n-m} \,;\, z' = z$$
$$(m = h+k+q)$$

ed indicando con $\overline{A}_1 f, \dots, \overline{A}_k f, \overline{B}_1 f, \dots, \overline{B}_h f, \overline{Y}_1 f, \dots, \overline{Y}_q f, \overline{X} f$ le trasformate delle $A_1 f \dots A_k f$; $B_1 f, \dots, B_h f, Y_1 f, \dots, Y_q f, X f$ rispettivamente, con D il determinante funzionale $\dfrac{\partial (x'_1, \dots, x'_n, z')}{\partial (x_1, \dots, x_u, z)}$, se si pone inoltre:

$$A'_i f = D^{-\varepsilon} \overline{A}_i f \;\; (i = 1, 2, \dots, k) \quad ; \quad B'_j f = D^{-1} \overline{B}_j f \;\; (j = 1, 2, \dots, h)$$

$$\nu' = \sum_1^m {}_t \frac{\partial \overline{\xi}_t}{\partial x'_t} + \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial z'},$$

si avranno le relazioni:

$$(A'_i, \overline{X}) f = \varepsilon \nu' A'_i f \;\; (i = 1, 2, \dots, k) \,;\, (B'_j, \overline{X}) = \nu' B'_j f \, (j = 1, 2, \dots, h)$$

$$(\overline{Y}_p, \overline{X}) f = 0 \quad p = 1, 2, \dots, q.$$

Ed ora per determinare le ulteriori soluzioni dell'equazione $Xf = 0$ dovremo integrare l'equazione in $m+1$ variabili $\overline{X} f = 0$. Il problema è così ricondotto ad un altro della stessa natura, ma nel quale le variabili sono $m+1 < n+1$ e di più, indicando con σ'_i le quantità relative alle trasformazioni infinitesimali $A'_i f$, analoghe delle quantità σ_i relative alle $A_i f$, potremo ora dire che tanto se una almeno delle σ'_i è diversa da zero, tanto se sono le σ'_i tutte nulle, dobbiamo rientrare nei casi precedentemente trattati (questo perchè le equazioni $\overline{A}_1 f = 0, \dots, \overline{A}_k f = 0$; $\overline{B}_1 f = 0, \dots, \overline{B}_h f = 0$ possono avere al massimo una soluzione a comune oltre le $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{n-m}$). Concludendo si ha il

Teorema VI. — *Se del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:*

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

si conoscono $k-1$ *invarianti differenziali:*

$$\varphi_1(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots,p_n)\ ;\ \varphi_2(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots,p_n)\ ;\dots;\ \varphi_{k-1}(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots,p_n)$$

e $k+1$ *invarianti integrali:*

$$\int\psi_1(x_1,\dots,x_n,z,p_1,\dots,p_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n\ ;\dots;\ \int\psi_{k+1}(x_1,\dots,x_n\,z,p_1,\dots,p_n)\,dx_1\dots dx_n)$$

e di più sono note $n-2k-1$ *trasformazioni infinitesimali:*

$$X_r f=\xi_1^r\frac{\partial f}{\partial x_1}+\xi_2^r\frac{\partial f}{\partial x_2}+\dots+\xi_n^r\frac{\partial f}{\partial x_n}+\zeta^r\frac{\partial f}{\partial z}\qquad(r=1,2,\dots,n-k-1)$$

ammesse dall'equazione $Xf=0$;
se inoltre il determinante funzionale:

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{k-1},\psi_1,\dots,\psi_{k+1},\pi_1,\dots,\pi_{n-2k-1},\pi)}{\partial(p_1,p_2,\dots,p_n)}$$

con:

$$\pi_r=\xi_1^r p_1+\xi_2^r+\dots+\xi_n^r p_n-\zeta^r\ ;\ \pi=\xi_1 p_1+\dots+\xi_n p_n-\zeta$$
$$(r=1,2,\dots,n-2k-1)$$

non si annulla in forza del sistema:

$$\varphi_1=a_1,\ \varphi_2=a_2,\dots,\ \varphi_{k-1}=a_{k-1},\ \psi_1=0,\dots,\ \psi_{k+1}=0,\ \pi_1=0,\dots,\ \pi_{n-2k-1}=0,\ \pi=0$$

o si potranno determinare, senza alcuna operazione di integrazione o con quadrature o, nei casi più sfavorevoli, con una operazione d'ordine 1, *oltre le* $X_1f,\dots,X_{n-2k-1}f$, *altre* $2k-1$ *trasformazioni infinitesimali permutabili colla* Xf, *e così il problema dell'integrazione dell'equazione* $Xf=0$ *sarà ricondotto a quello di una equazione in* $n+1$ *variabili, che ammette* n *note trasformazioni infinitesimali; oppure dopo aver integrato un sistema di* $m+1=2k+q+2$ *equazioni (tra le quali è la* $Xf=0$), *che ammette le* $n-2k-1$ *trasformazioni infinitesimali* $X_1f,\dots,X_{n-2k-1}f$, *la determinazione delle ulteriori soluzioni dell'equazione* $Xf=0$ *si potrà ridurre, nei casi più sfavorevoli con una operazione d'ordine* 1, *all'integrazione di una equazione in* $m+1$ *variabili che ammette* m *note trasformazioni infinitesimali.*

11. — *Caso in cui è* $\varepsilon = 0$ — Tenendo conto delle (5), (5‴), (9) del paragrafo precedente (pag. 77, 78, 80) noi vediamo subito che, o riusciremo a dedurre dalla $B_1 f$, moltiplicandola per un conveniente fattore, una trasformazione infinitesimale che sia permutabile colla Xf, come lo sono le $A_1 f, \ldots, A_k f$, ed in tal caso l'equazione $Xf = 0$ ammetterà n note trasformazioni infinitesimali, indipendenti tra loro e dalla Xf; oppure potremo supporre, come nel caso corrispondente ($\varepsilon = 0$), ma con $h + k = n$ (vedi a pag. 96, 97), che il sistema completo delle due equazioni:

$$B_1 f = 0 \quad , \quad Xf = 0$$

ammetta le $n - 1$ trasformazioni infinitesimali:

$$A_1 f, \ldots, A_k f, X_1 f, \ldots, X_{n-k-1} f$$

e si abbia di più:

$$\sum_1^n \frac{\partial \beta'_m}{\partial x_m} + \frac{\partial \beta'_{n+1}}{\partial z} = 0 \, .$$

Risulta allora (come nel caso $\varepsilon = 0$, $h + k = n$) che, determinate $n - 2$ soluzioni del sistema completo $B_1 f = 0$, $Xf = 0$, colla conoscenza delle trasformazioni infinitesimali che esso ammette, l'ulteriore soluzione del sistema potrà ottenersi con una quadratura; l'ultima soluzione dell'equazione $Xf = 0$ si avrà infine, nei casi più sfavorevoli, con una operazione d'ordine 1.

In questo caso possiamo dunque dire:

Teorema VII. — *Se del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:*

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

si conoscono $k - 1$ *invarianti differenziali:*

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) ; \ldots ; \varphi_{k-1}(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$$

ed un invariante integrale:

$$\int \psi_1(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

e di più sono note $n-k-1$ trasformazioni infinitesimali:

$$X_r f = \xi_1^r \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2^r \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n^r \frac{\partial f}{\partial x_n} + \zeta^r \frac{\partial f}{\partial z} \; (r = 1, 2, \dots, n-k-1)$$

ammesse dall'equazione $Xf = 0$;
se inoltre il determinante funzionale:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}, \psi_1, \pi_1, \dots, \pi_{n-k-1}, \pi)}{\partial(p_1, p_2, \dots, p_n)}$$

con:

$$\pi_r = \xi_1^r p_1 + \xi_2^r p_2 + \dots + \xi_n^r p_n - \zeta^r \; (r = 1, 2, \dots, n-k-1); \; \pi = \xi_1 p_1 + \dots + \xi_n p_n - \zeta$$

non si annulla in forza del sistema:

$$\varphi_1 = a, \; \varphi_2 = a_2, \dots, \varphi_{k-1} = a_{k-1}; \; \psi_1 = 0, \; \pi_1 = 0, \dots, \pi_{n-k-1} = 0; \; \pi = 0$$

o si potranno determinare, senza alcuna operazione di integrazione, oltre le $X_1 f, X_2 f, \dots, X_{n-k-1} f$, altre $k+1$ trasformazioni infinitesimali ammesse dall'equazione $Xf = 0$, oppure, sempre con sole operazioni di eliminazione e di derivazione, può unirsi all'equazione $Xf = 0$ un'altra equazione $Bf = 0$ tale che il sistema completo:

$$Bf = 0 \quad , \quad Xf = 0$$

ammetta il moltiplicatore 1 ed $n-1$ note trasformazioni infinitesimali indipendenti tra loro e dalle Xf, Bf.

12. — Come applicazione dei risultati precedenti noi vediamo che, se del gruppo ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesimale:

$$Xf = \xi_1(x_1, x_2, x_3, z) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2(\dots\dots) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3(\dots\dots) \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta(\dots\dots) \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

si conoscono due invarianti differenziali di ipersuperficie e del primo ordine:

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3); \; \varphi_2(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3),$$

e, con $\pi = \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 - \zeta$, il determinante funzionale:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \pi)}{\partial(p_1, p_2, p_2)}$$

non si annulla in conseguenza del sistema:

$$\varphi_1 = a_1 \; , \; \varphi_2 = a_2 \; , \; \pi = 0 \; ;$$

oppure se dello stesso gruppo si conosce un solo invariante differenziale

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3)$$

ma di più l'equazione $Xf = 0$ ammette una nota trasformazione infinitesimale:

$$X_1 f = \xi'_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi'_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi'_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z},$$

e, con $\pi_1 = \xi'_1 p_1 + \xi'_2 p_2 + \xi'_3 p_3 - \zeta'_1$, il determinante funzionale:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \pi_1, \pi)}{\partial(p_1, p_2, p_3)}$$

non si annulla in conseguenza del sistema:

$$\varphi_1 = a_1 \; , \; \pi_1 = 0 \; , \; \pi = 0 \; ;$$

si potranno sempre, nei casi più sfavorevoli con due quadrature, ottenere *tre* trasformazioni infinitesimali, indipendenti tra loro e dalla Xf, ammesse dall'equazione $Xf = 0$, e quindi (Lie-Scheffers-Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Kap. 25, § 2, Theorem 49) *l'equazione* $Xf = 0$ *potrà integrarsi nei casi più sfavorevoli o con 5 quadrature, o con 2 quadrature e risolvendo in seguito una equazione di Riccati.*

Considerazioni analoghe alle precedenti possono farsi quando si conosca un determinato numero di invarianti differenziali o integrali di ipersuperficie e del primo ordine, che ammettono un gruppo finito di trasformazioni con più di un parametro. Tratteremo rapidamente, come esempio, un solo caso.

§ 7.

Utilizzazione di un invariante differenziale di ipersuperficie e del primo ordine, che ammette il gruppo a due parametri generato dalle trasformazioni infinitesimali:

$$X_1 f = \xi^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta^1 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega^1 \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$X_2 f = \xi^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta^2 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta^2 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega^2 \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Si conosca un invariante differenziale d'ipersuperficie e del primo ordine:

$$\varphi(x, y, z, u, p, q, r) \left\{ p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad r = \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \tag{1}$$

che ammetta due trasformazioni infinitesimali:

$$X_1 f = \xi^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta^1 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega^1 \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$X_2 f = \xi^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta^2 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta^2 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega^2 \frac{\partial f}{\partial u},$$

per le quali si abbia:

$$(X_1, X_2) f = \lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f \tag{2}$$

dove, per il momento, vogliamo ancora ammettere che le λ_1, λ_2 possano essere funzioni delle x, y, z, u.

Se indichiamo con $X'_1 f, X'_2 f$ le trasformazioni infinitesimali ottenute prolungando le $X_1 f, X_2 f$, considerando queste come agenti sulle p, q, r, potremo scrivere brevemente:

$$\left\{ \begin{aligned} X'_1 f &= [\xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1 f] - (\xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1) \frac{\partial f}{\partial z} \\ X'_2 f &= [\xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2 f] - (\xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2) \frac{\partial f}{\partial z}; \end{aligned} \right. \tag{3}$$

ed esprimendo che la funzione (1) è invariante per le trasformazioni infinitesimali $X_1 f$, $X_2 f$ avremo:

$$X'_1(\varphi) = 0 \quad ; \quad X'_2(\varphi) = 0 ,$$

o anche, indicando con a una costante arbitraria e ponendo $\varphi' = \varphi - a$, avremo:

$$X'_1(\varphi') = 0 \quad ; \quad X'_2(\varphi') = 0 . \tag{4}$$

Inoltre — seguendo il medesimo procedimento che si è tenuto a pag. 58, 59 per stabilire la formola (7) (a pag. 59), — troviamo:

$$\tag{5} \left\{ \begin{aligned} & X'_1(\xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2) = \lambda_1 (\xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1) + \\ & + \lambda_2 (\xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2) - (\xi^1_u p + \eta^1_u q + \zeta^1_u r - \omega^1_u) \times \\ & \qquad \times (\xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2) \\ & X'_2(\xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1) = -\lambda_1 (\xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1) - \\ & - \lambda_2 (\xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2) - (\xi^2_u p + \eta^2_u q + \zeta^2_u r - \omega^2_u) \times \\ & \qquad \times (\xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1) . \end{aligned} \right.$$

Di più si ha evidentemente dalle (3):

$$\tag{6} \left\{ \begin{aligned} & X'_1(\xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1) = -(\xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1) \times \\ & \qquad \times (\xi^1_u p + \eta^1_u q + \zeta^1_u r - \omega^1_u) \\ & X'_2(\xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2) = -(\xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2) \times \\ & \qquad \times (\xi^2_u p + \eta^2_u q + \zeta^2_u r - \omega^2_u) \end{aligned} \right.$$

Dalla (4), (5), (6) risulta evidentemente che il sistema delle tre equazioni:

$$\tag{7} \left\{ \begin{aligned} & \xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1 = 0 \\ & \xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2 = 0 \\ & \varphi(x, y, z, u, p, q, r) = a \end{aligned} \right.$$

ammette le due trasformazioni infinitesimali $X'_1 f$, $X'_2 f$.

Senza stare ora a ripetere punto per punto il medesimo ragionamento fatto nei paragrafi precedenti possiamo dire subito che, se si suppone che il determinante:

$$\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q & \varphi_r \\ \xi^1 & \eta^1 & \zeta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 \end{vmatrix}$$

non si annulli in conseguenza del sistema (7), ciò che porta con sè che quest'ultimo sia risolvibile rispetto a p, q, r, supposto ancora che esso dia per risoluzione:

$$p = \mathrm{P}(x, y, z, u, a)\,; \quad q = \mathrm{Q}(x, \ldots, a)\,; \quad r = \mathrm{R}(x, \ldots, a)\,,$$

quando si ponga:

$$(\varphi'_p)_{p=\mathrm{P},\, q=\mathrm{Q},\, r=\mathrm{R}} = \alpha\,; \quad (\varphi'_q)_{p=\mathrm{P},\, q=\mathrm{Q},\, r=\mathrm{R}} = \beta\,;$$

$$(\varphi'_r)_{p=\mathrm{P},\, q=\mathrm{Q},\, r=\mathrm{R}} = \gamma\ ; \quad (p\,\varphi'_p + q\,\varphi'_q + r\,\varphi'_r - \varphi')_{p=\mathrm{P},\, q=\mathrm{Q},\, r=\mathrm{R}} = \delta$$

$$\mathrm{A}f = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} + \delta \frac{\partial f}{\partial u}$$

saranno soddisfatte le relazioni:

$$(8) \qquad \begin{cases} (\mathrm{A}, \mathrm{X}_1)f = (\omega^1_u - \mathrm{P}\,\xi^1_u - \mathrm{Q}\,\eta^1_u - \mathrm{R}\,\zeta^1_u)\,\mathrm{A}f \\ (\mathrm{A}, \mathrm{X}_2)f = (\omega^2_u - \mathrm{P}\,\xi^2_u - \mathrm{Q}\,\eta^2_u - \mathrm{Q}\,\zeta^2_u)\,\mathrm{A}f\,. \end{cases}$$

Possiamo poi dimostrare, in modo analogo a quello con cui abbiamo dimostrato il teorema del n.º 3 del § 4 (pag. 62) che il determinante:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi^1 & \eta^1 & \zeta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 \end{vmatrix}$$

è tale che si ha:

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}_1(\mathrm{D}) = \mathrm{D}\left\{ \nu_1 + 2\,(\mathrm{P}\,\xi^1_u + \mathrm{Q}\,\eta^1_u + \mathrm{R}\,\zeta^1_u - \omega^1_u) + \lambda_2 \right\} \\ \mathrm{X}_2(\mathrm{D}) = \mathrm{D}\left\{ \nu_2 + 2\,(\mathrm{P}\,\xi^2_u + \mathrm{Q}\,\eta^2_u + \mathrm{R}\,\zeta^2_u - \omega^2_u) - \lambda_1 \right\} \end{cases}$$

ove si è posto per brevità:

$$\nu_1 = \xi^1_x + \eta^1_y + \zeta^1_z + \omega^1_u \;;\; \nu_2 = \xi^2_x + \eta^2_y + \zeta^2_z + \omega^2_u .$$

Dalle (8) e (9) si deduce allora subito:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{D}}\,Af, X_1f\right) = \frac{\nu_1 + \lambda_2}{2}\,\frac{1}{\sqrt{D}}\,Af$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{D}}\,Af, X_2f\right) = \frac{\nu_2 - \lambda_1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{D}}\,Af .$$

Inoltre possiamo ancora aggiungere che, dando alla costante a, che comparisce nei coefficienti della trasformazione infinitesimale Af, due valori distinti a_1, a_2, si devono ottenere due trasformazioni infinitesimali indipendenti tra loro e dalle X_1f, X_2f: altrettanto deve avvenire della $\frac{1}{\sqrt{D}}\,Af$; se indichiamo con B_1f e B_2f rispettivamente le due trasformazioni infinitesimali, che si ottengono dalla $\frac{1}{\sqrt{D}}\,Af$ dando ad a i due valori a_1, a_2, dovremo avere:

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} (B_1\,, X_1)f = \dfrac{\nu_1 + \lambda_2}{2}\,B_1f & (B_2\,, X_1)f = \dfrac{\nu_1 + \lambda_2}{2}\,B_2f \\[2ex] (B_1\,, X_2)f = \dfrac{\nu_2 - \lambda_1}{2}\,B_1f & (B_2\,, X_2)f = \dfrac{\nu_2 - \lambda_1}{2}\,B_2f. \end{array}\right.$$

Si ha quindi:

TEOREMA I. — *Se si conosce un invariante differenziale di ipersuperficie e del 1.° ordine*

$$\varphi\,(x\,, y\,, z\,, u\,, p\,, q\,, r)$$

che ammette due trasformazioni infinitesimali:

$$X_1f = \xi^1\,\frac{\partial f}{\partial x} + \eta^1\,\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta^1\,\frac{\partial f}{\partial z} + \omega^1\,\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$X_2f = \xi^2\,\frac{\partial f}{\partial x} + \eta^2\,\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta^2\,\frac{\partial f}{\partial z} + \omega^2\,\frac{\partial f}{\partial u}$$

per le quali si ha:

$$(X_1, X_2)f = \lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f,$$

se inoltre il determinante;

$$\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q & \varphi_r \\ \xi^1 & \eta^1 & \zeta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 \end{vmatrix}$$

non si annulla in conseguenza del sistema:

$$\varphi = a\,;\ \xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega^1 = 0\ ;\ \xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2 = 0$$

e questo sistema, che, in tale ipotesi, è risolubile rispetto a p, q, r, *dà per risoluzione:*

$$p = P(x, y, z, u, a)\ ;\ q = Q(x, y, z, u, a)\ ;\ r = R(x, y, z, u, a);$$

ponendo:

$$\left.\begin{array}{l} (\varphi'_p)_{p=P,\, q=Q,\, r=R} = \alpha\ ;\ (\varphi'_q)_{p=P,\, q=Q,\, r=R} = \beta\ ; \\ (\varphi'_r)_{p=P,\, q=Q,\, r=R} = \gamma\ \ (p\varphi'_p + q\varphi'_q + r\varphi'_r - \varphi')_{p=P,\, q=Q,\, r=R} = \delta \end{array}\right\}\ \varphi' = \varphi - a$$

e infine:

$$Af = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} + \delta \frac{\partial f}{\partial u},$$

si ha:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{D}} Af, X_1 f\right) = \frac{\nu_1 + \lambda_2}{2} \frac{1}{\sqrt{D}} Af$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{D}} Af, X_2 f\right) = \frac{\nu_2 - \lambda_1}{2} \frac{1}{\sqrt{D}} Af$$

dove è:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi^1 & \eta^1 & \zeta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 \end{vmatrix},$$

$$\nu_1 = \xi^1_x + \eta^1_y + \zeta^1_z + \omega^1_u\ ;\ \nu_2 = \xi^2_x + \eta^2_y + \zeta^2_z + \omega^2_u\,.$$

Di più la trasformazione infinitesimale $\frac{1}{\sqrt{D}} \Delta f$, *sostituendo in essa per* a *due valori distinti* a_1, a_2, *deve dar luogo a due trasformazioni infinitesimali* $B_1 f, B_2 f$, *indipendenti tra loro e dalle* $X_1 f, X_2 f$.

2. — Formiamo l'alternata $(B_1, B_2)f$ che dovrà comporsi linearmente colle $B_1 f, B_2 f, X_1, X_2 f$, e supponiamo che sia:

$$(B_1, B_2)f = \pi B_1 f + \rho B_2 f + \sigma X_1 f + \tau X_2 f. \tag{11}$$

Dalle identità Jacobiane:

$$\big((B_1, B_2), X_1\big) + \big((B_2, X_1), B_1\big) + \big((X_1, B_1), B_2\big) = 0$$

$$\big((B_1, B_2), X_2\big) + \big((B_2, X_2), B_1\big) + \big((X_2, B_1), B_2\big) = 0$$

si ricava, quando si suppongano costanti le λ_1, λ_2,:

$$\left\{\begin{aligned} & X_1(\pi) + \frac{\nu_1 + \lambda_2}{2}\pi - B_2\left(\frac{\nu_1}{2}\right) = 0 \\ & X_1(\rho) + \frac{\nu_1 + \lambda_2}{2}\rho + B_1\left(\frac{\nu_1}{2}\right) = 0 \\ & X_2(\pi) + \frac{\nu_2 - \lambda_1}{2}\pi - B_2\left(\frac{\nu_2}{2}\right) = 0 \\ & X_2(\rho) + \frac{\nu_2 - \lambda_1}{2}\rho + B_1\left(\frac{\nu_2}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right. \tag{12}$$

ed inoltre:

$$\left\{\begin{aligned} & X_1(\sigma) + \lambda_1 \tau + (\nu_1 + \lambda_2)\sigma = 0 \\ & X_1(\tau) + \lambda_2 \tau + (\nu_1 + \lambda_2)\tau = 0 \\ & X_2(\sigma) - \sigma\lambda_1 + (\nu_2 - \lambda_1)\sigma = 0 \\ & X_2(\tau) - \lambda_2 \sigma + (\nu_2 - \lambda_1)\tau = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

D'altra parte dalle (10), per il lemma II, quando si ponga:

$$B_1 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta^1 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma^1 \frac{\partial f}{\partial z} + \delta^1 \frac{\partial f}{\partial u} \qquad \sigma_1 = \frac{\partial \alpha^1}{\partial x} + \frac{\partial \beta^1}{\partial y} + \frac{\partial \gamma^1}{\partial z} + \frac{\partial \delta^1}{\partial u}$$

$$B_2 f = \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial f}{\partial z} + \delta^2 \frac{\partial f}{\partial u} \qquad \sigma_2 = \frac{\partial \alpha^2}{\partial x} + \frac{\partial \beta^2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma^2}{\partial z} + \frac{\partial \delta^2}{\partial u},$$

si ottiene:

$$(14)\qquad \begin{cases} B_1\left(\frac{\nu_1}{2}\right) - X_1(\sigma_1) - \frac{\nu_1+\lambda_2}{2}\sigma_1 = 0 \\ B_2\left(\frac{\nu_1}{2}\right) - X_1(\sigma_2) - \frac{\nu_1+\lambda_2}{2}\sigma_2 = 0 \\ B_1\left(\frac{\nu_2}{2}\right) - X_2(\sigma_1) - \frac{\nu_2-\lambda_1}{2}\sigma_1 = 0 \\ B_2\left(\frac{\nu_2}{2}\right) - X_2(\sigma_2) - \frac{\nu_2-\lambda_1}{2}\sigma_2 = 0\,. \end{cases}$$

Per somma e differenza dalle (12) e dalle (14) (eliminando le quantità $B_1\left(\frac{\nu_1}{2}\right)$, $B_2\left(\frac{\nu_1}{2}\right)$, $B_1\left(\frac{\nu_2}{2}\right)$, $B_2\left(\frac{\nu_2}{2}\right)$) si deduce:

$$X_1(\pi-\sigma_2) + \frac{\nu_1+\lambda_2}{2}(\pi-\sigma_2) = 0 \qquad X_1(\rho+\sigma_1) + \frac{\nu_1+\lambda_2}{2}(\rho+\sigma_1) = 0$$

$$X_2(\pi-\sigma_2) - \frac{\nu_2-\lambda_1}{2}(\pi-\sigma_2) = 0 \qquad X_2(\rho+\sigma_1) + \frac{\nu_2-\lambda_1}{2}(\rho+\sigma_1) = 0\,.$$

Se noi, richiamando il lemma V, osserviamo che le equazioni che definiscono il più generale moltiplicatore del sistema completo:

$$(15)\qquad X_1 f = 0 \quad , \quad X_2 f = 0$$

sono le seguenti:

$$X_1(M) + (\nu_1+\lambda_2)M = 0 \quad ; \quad X_2(M) + (\nu_2-\lambda_1)M = 0\,,$$

vediamo che le quantità:

$$(\pi-\sigma_2)^2 \quad , \quad (\rho+\sigma_1)^2$$

sono moltiplicatori del sistema (15) [1]).

[1]) Se si suppongono le λ_1, λ_2 non costanti, ma funzioni delle x, y, z, u, dalle identità Jacobiane:

$$((B_1, X_1), X_2) + ((X_1, X_2), B_1) + ((X_2, B_1), X_1) = 0$$
$$((B_2, X_1), X_2) + ((X_1, X_2), B_2) + ((X_2, B_2), X_1) = 0$$

Dalle (13) poi, moltiplicando la 2.ª per λ_1 e sottraendola dalla 1.ª moltiplicata per λ_2, e altrettanto facendo per le due ultime, si ha:

$$X_1(\lambda_2\sigma-\lambda_1\tau)+(\nu_1+\lambda_2)(\lambda_2\sigma-\lambda_1\tau)=0$$
$$X_2(\lambda_2\sigma-\lambda_1\tau)+(\nu_2-\lambda_1)(\lambda_2\sigma-\lambda_1\tau)=0\ ;$$

possiamo dunque dire che la quantità $\lambda_2\sigma-\lambda_1\tau$ è un moltiplicatore del sistema (15).

Poichè ora le tre quantità:

$$\pi-\sigma_2\ ;\ \rho+\sigma_1\ ;\ \sqrt{\lambda_2\sigma-\lambda_1\tau}$$

soddisfano alle equazioni:

$$X_1(\mu)+\frac{\nu_1+\lambda_2}{2}\mu=0$$

$$X_2(\mu)+\frac{\nu_2-\lambda_1}{2}\mu=0\ ,$$

vediamo che indicando con $\bar{\mu}$ una qualunque di esse, che non sia zero, le trasformazioni infinitesimali:

$$\frac{1}{\bar{\mu}}B_1f\quad,\quad\frac{1}{\bar{\mu}}B_2f$$

sono permutabili colle X_1f, X_2f ed allora il sistema completo (15) ammetterà due note trasformazioni infinitesimali.

Supponiamo al contrario:

$$\pi-\sigma_2=0\quad,\quad\rho+\sigma_1=0\quad,\quad\lambda_2\sigma-\lambda_1\tau=0\ .$$

Se fosse al tempo stesso $\lambda_1=\lambda_2=0$, le (13) ci provano che σ e τ sono moltiplicatori del sistema (15) e, supposto che una di queste

---

risulta subito:

$$B_1(\lambda_1)=B_2(\lambda_1)=B_1(\lambda_2)=B_2(\lambda_2)=0\ .$$

Ne segue, come facilmente può vedersi, che valgono ancora le (12) e (14), dimodochè anche in questo caso potremo dire che le quantità:

$$(\pi-\sigma_2)^2\quad;\quad(\rho+\sigma_1)^2$$

sono moltiplicatori del sistema completo $X_1f=0$, $X_2f=0$.

due quantità, per es. σ, non sia nulla, le trasformazioni infinitesimali $\frac{1}{\sqrt{\sigma}} B_1 f$, $\frac{1}{\sqrt{\sigma}} B_2 f$ saranno permutabili colle $X_1 f$, $X_2 f$: se invece le λ_1, λ_2 non sono ambedue nulle potremo porre:

$$\sigma = \varepsilon\lambda_1 \quad \tau = \varepsilon\lambda_2,$$

ed avremo dalla (11):

$$(B_1, B_2)f = \sigma_2 B_1 f - \sigma_1 B_2 f + \varepsilon(\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f),$$

cioè con:

$$Yf = \lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f$$

$$(B_1, B_2)f = \sigma_2 B_1 f - \sigma_1 B_2 f + \varepsilon\, Yf. \tag{11'}$$

Di più dalle (10) si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} (B_1, Y)f &= \frac{\lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2}{2} B_1 f \\ (B_2, Y)f &= \frac{\lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2}{2} B_2 f. \end{aligned} \right. \tag{16}$$

Da queste due relazioni riunite colla precedente si vede che le equazioni:

$$B_1 f = 0, \quad B_2 f = 0, \quad Yf = 0 \tag{17}$$

formano un sistema completo; e poichè il più generale moltiplicatore M di questo sistema è definito (lemma V) dalle equazioni:

$$B_1(M) = 0, \quad B_2(M) = 0, \quad Y(M) = 0$$

esso sistema ammetterà per moltiplicatore una costante: ne segue che l'espressione:

$$\begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \lambda_1 \xi^1 + \lambda_2 \xi^2 & \lambda_1 \eta^1 + \lambda_2 \eta^2 & \lambda_1 \zeta^1 + \lambda_2 \zeta^2 & \lambda_1 \omega^1 + \lambda_2 \omega^2 \\ dx & dy & dz & du \end{vmatrix}$$

è un differenziale esatto e si avrà la soluzione del sistema (17) nella funzione:

$$\Phi = \int \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \lambda_1 \xi^1 + \lambda_2 \xi^2 & \lambda_1 \eta^1 + \lambda_2 \eta^2 & \lambda_1 \zeta^1 + \lambda_2 \zeta^2 & \lambda_1 \omega^1 + \lambda_2 \omega^2 \\ dx & dy & dz & du \end{vmatrix} .$$

Ora, se si pone:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \xi^1 & \eta^1 & \zeta^1 & \omega^1 \\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 & \omega^2 \end{vmatrix} ,$$

si trova:

$$(18) \quad X_1(\Phi) = \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \lambda_1 \xi^1 + \lambda_2 \xi^2 & \lambda_1 \eta^1 + \lambda_2 \eta^2 & \lambda_1 \zeta^1 + \lambda_2 \zeta^2 & \lambda_1 \omega^1 + \lambda_2 \omega^2 \\ \xi^1 & \eta^1 & \zeta^1 & \omega^1 \end{vmatrix} = -\lambda_2 \Delta ;$$

analogamente:

$$(18') \qquad X_2(\Phi) = \lambda_1 \Delta .$$

D'altra parte, per il lemma IV, valendoci delle relazioni (10) si ottiene:

$$B_1(\Delta) = 0 \,, \; B_2(\Delta) = 0 \,, \; X_1(\Delta) = 0 \,, \; X_2(\Delta) = 0$$

e quindi che la quantità Δ (differente da zero a causa dell' indipendenza delle trasformazioni infinitesimali $B_1 f$, $B_2 f$, $X_1 f$, $X_2 f$) deve essere una costante.

Distinguiamo ora i due casi seguenti:

1.° Le costanti λ_1 e λ_2 sono ambedue nulle: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

2.° Una almeno di esse è differente da zero.

Nel primo caso o si potranno ottenere due trasformazioni infinitesimali permutabili colle $X_1 f$, $X_2 f$, o si potrà supporre soddisfatta la relazione:

$$(B_1, B_2)f = \sigma_2 B_1 f - \sigma_1 B_2 f$$

Nel secondo caso, se è $\varepsilon = 0$, sarà ancora soddisfatta questa relazione; in caso contrario $(\varepsilon \neq 0)$ dalle (13), col farvi:

$$\sigma = \varepsilon \lambda_1 \ , \ \tau = \varepsilon \lambda_2$$

si ottiene:

$$X_1(\varepsilon) + \lambda_2 \varepsilon + (\nu_1 + \lambda_2)\varepsilon = 0$$

$$X_2(\varepsilon) - \lambda_1 \varepsilon + (\nu_2 - \lambda_1)\varepsilon = 0 \, .$$

Queste eguaglianze, dividendo per ε e avendo riguardo alle (18), (18'), possono anche scriversi:

$$X_1 \left[\log \left(\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\Phi}{\Delta}}} \right) \right] + \nu_1 + \lambda_2 = 0$$

$$X_2 \left[\log \left(\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\Phi}{\Delta}}} \right) \right] + \nu_2 - \lambda_1 = 0 \, .$$

Con $\varepsilon \neq 0$ si ha dunque un moltiplicatore del sistema (15) nella quantità:

$$\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\Phi}{\Delta}}}$$

e perciò due trasformazioni infinitesimali permutabili colle $X_1 f$, $X_2 f$ nelle:

$$\frac{e^{\frac{\Phi}{2\Delta}}}{\sqrt{\varepsilon}} B_1 f \, , \quad \frac{e^{\frac{\Phi}{2\Delta}}}{\sqrt{\varepsilon}} B_2 f \, .$$

Vediamo così che, o potranno determinarsi due trasformazioni infinitesimali, indipendenti tra loro e dalle $X_1 f$, $X_2 f$, e permutabili con queste ultime, oppurre potrà supporsi soddisfatta la relazione.

$$(B_1, B_2)f = \sigma_2 B_1 f - \sigma_1 B_1 f.$$

In quest'ultimo caso troviamo (nello stesso modo come al n. 4 del § 3 (pag. 45, 46)) dalle (12) che la quantità:

$$B_1(\pi) + B_2(\rho) = B_1(\sigma_2) - B_2(\sigma_1)$$

è anch'essa un molliplicatore del sistema (15); e, dato che non sia nulla, essa ci permetterà di ricavare dalle B_1f, B_2f due trasformazioni infinitesimali ammesse dal sistema (15), moltiplicando le B_1f, B_2f per un conveniente fattore.

Teorema II. — *Nelle stesse ipotesi e colle stesse posizioni del teorema I, supponendo di più che le λ_1, λ_2 sieno costanti ed indicando con:*

$$B_1 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta^1 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma^1 \frac{\partial f}{\partial z} + \delta^1 \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$B_2 f = \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial f}{\partial z} + \delta^2 \frac{\partial f}{\partial u}$$

le due trasformazioni infinitesimali, indipendenti dalle X_1f, X_2f e tra loro, ottenute dalla $\dfrac{Af}{\sqrt{D}}$ col dare ad a i due valori a_1, a_2, ponendo inoltre:

$$(B_1, B_2)f = \pi B_1 f + \rho B_2 f + \sigma X_1 f + \tau X_2 f \tag{I}$$

e

$$\sigma_1 = \frac{\partial \alpha^1}{\partial x} + \frac{\partial \beta^1}{\partial y} + \frac{\partial \gamma^1}{\partial z} + \frac{\partial \delta^1}{\partial u} \qquad \sigma_2 = \frac{\partial \alpha^2}{\partial x} + \frac{\partial \beta^2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma^2}{\partial z} + \frac{\partial \delta^2}{\partial u}$$

le quantità:

$$(\pi - \sigma_2)^2 \quad ; \quad (\rho + \sigma_1)^2 \quad ; \quad \lambda_2 \sigma - \lambda_1 \tau \tag{II}$$

sono altrettanti moltiplicatori del sistema completo

$$X_1 f = 0 \quad , \quad X_2 f = 0. \tag{III}$$

Se è ad un tempo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *si hanno altri due moltiplicatori del sistema* (III) *nelle quantità:*

$$\text{IV)} \qquad \sigma \ , \ \tau \, .$$

Se invece una almeno delle λ_1, λ_2 *è differente da zero e sono al tempo stesso nulle tutte e tre le* (II), *o può, con una sola quadratura determinarsi un moltiplicatore del sistema* (III), *oppure potrà supporsi soddisfatta la relazione:*

$$\text{(V)} \qquad (B_1 \, , B_2)f = \sigma_2 B_1 f - \sigma_1 B_2 f \, .$$

Questa sarà soddisfatta anche con $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, *se al tempo stesso sono nulle le* (II) *e le* (IV).

Soddisfatta la (V) *si ha un moltiplicatore del sistema* (III) *in:*

$$B_1(\sigma_2) - B_2(\sigma_1) \, .$$

Ove uno almeno dei moltiplicatori trovati sia una quantità M *diversa da zero, le trasformazioni infinitesimali*

$$\frac{1}{\sqrt{M}} B_1 f \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{M}} B_2 f$$

saranno permutabili colle $X_1 f \, , X_2 f$; *in caso contrario sarà soddisfatta la relazione:*

$$(B_1 \, , B_2)f = \sigma_2 B_1 f - \sigma_1 B_2 f$$

con:

$$B_1(\sigma_2) = B_2(\sigma_1) \, .$$

3. — Se una almeno delle quantità che, secondo il teorema (II), sono moltiplicatori del sistema (15) è diversa da zero, si avranno subito due trasformazioni infinitesimali $\overline{B}_1 f$, $\overline{B}_2 f$ ammesse dal sistema stesso e questo potrà quindi integrarsi con due altre quadrature [1]), nei casi più sfavorevoli.

---

[1]) Oltre quella che può essere occorsa eventualmente per determinare il moltiplicatore M.

Ma anche nel caso opposto, in cui, come abbiamo veduto, è soddisfatta la relazione:

$$(19) \qquad (B_1, B_2)f = \sigma_2 B_1 f - \sigma_1 B_2 f \qquad (B_1(\sigma_2) - B_2(\sigma_1) = 0).$$

può vedersi che può, con sole quadrature, ottenersi un moltiplicatore del sistema (15).

Cominciamo col provare che, con una quadratura, oltre quella occorsa per la determinazione della funzione Φ, può determinarsi la più generale soluzione μ del sistema:

$$(20) \qquad \begin{cases} B_1(\log\mu) + \sigma_1 = 0 \\ B_2(\log\mu) + \sigma_2 = 0 \\ Y(\log\mu) + \dfrac{\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2}{2} = 0 \end{cases}$$

cioè la più generale funzione che sia insieme un moltiplicatore di Jacobi delle equazioni $B_1 f = 0$, $B_2 f = 0$ e tale che μ^2 lo sia dell'equazione $Yf = 0$.

La risoluzione del sistema precedente si riduce, come è noto, a quella del sistema:

$$(21) \qquad \begin{cases} \overline{B}_1 f \equiv B_1 f - \sigma_1 \mu \dfrac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \\ \overline{B}_2 f \equiv B_2 f - \sigma_2 \mu \dfrac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \\ \overline{Y} f \equiv Y f - \dfrac{\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2}{2} \mu \dfrac{\partial f}{\partial \mu} = 0 . \end{cases}$$

Ora per questo sistema osserviamo innanzi tutto che, dalle (12), quando si faccia $\pi = \sigma_2$, $\rho = -\sigma_1$, moltiplicando la 1.ª per λ_1 e la 3.ª per λ_2 e sommando, e moltiplicando la 2.ª per λ_1 e la 4.ª per λ_2 e sommando ancora, si ottiene:

$$Y(\sigma_2) - B_2\left(\frac{\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2}{2}\right) = -\sigma_2 \frac{\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2}{2}$$

$$Y(\sigma_1) - B_1\left(\frac{\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2}{2}\right) = -\sigma_1 \frac{\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2}{2}$$

e che quindi, come facilmente si vede, sono soddisfatte le relazioni:

$$(\overline{B}_1, \overline{B}_2)f = \sigma_2 \overline{B}_1 f - \sigma_1 \overline{B}_2 f$$

$$(\overline{B}_1, \overline{Y})f = \frac{\lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2}{2} \overline{B}_1 f$$

$$(\overline{B}_2, \overline{Y})f = \frac{\lambda_1 \nu_1 + \lambda_1 \nu_2}{2} \overline{B}_2 f \,.$$

Da queste vediamo subito (lemma V) che il sistema completo (21) ammette per moltiplicatore $\frac{1}{\mu}$, e poichè di esso si conosce già una soluzione, la funzione Φ, l'altra potrà ottenersi con una quadratura.

È dunque provato che il sistema (20) può risolversi con quadrature.

Servendoci ora del teorema richiamato nella nota a pag. 50 otteniamo che, siccome le equazioni:

$$B_1 f = 0 \quad , \quad B_2 f = 0 \quad , \quad Y f = 0$$

ammettono singolarmente le $X_1 f, X_2 f$, indicando con μ una qualunque soluzione del sistema (20), la quantità:

$$X_1 (\log \mu) + \frac{\nu_1 - \lambda_2}{2}$$

deve essere una soluzione delle equazioni $B_1 f = 0$, $B_2 f = 0$, e l'altra $X_1 (\log \mu^2) + \nu_1 + \lambda_2$, o se si vuole anche:

$$X_1 (\log \mu) + \frac{\nu_1 + \lambda_2}{2} \,,$$

è una soluzione della $Yf = 0$: in sostanza vediamo che è

$$X_1 (\log \mu) + \frac{\nu_1 + \lambda_2}{2} \tag{22}$$

una soluzione del sistema completo:

$$B_1 f = 0 \;,\; B_2 f = 0 \;,\; Y f = 0 .$$

Analogamente si ha che altrettanto avviene per l'espressione:

$$(23) \qquad X_2(\log\mu) + \frac{\nu_2-\lambda_1}{2}.$$

Possiamo dunque dire che le quantità (22) e (23) devono essere ambedue funzioni della sola Φ: e se si pone:

$$(24) \qquad \begin{cases} X_1(\log\mu) + \dfrac{\nu_1+\lambda_2}{2} = E(\Phi) \\ X_2(\log\mu) + \dfrac{\nu_2-\lambda_1}{2} = F(\Phi) \end{cases}$$

moltiplicando per λ_1 la prima uguaglianza, per λ_2 la 2.ª e sommando si ha.

$$\lambda_1 E + \lambda_2 F = Y(\log\mu) + \frac{\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2}{2} = 0$$

dimodochè, se *ambedue le quantità* λ_1, λ_2 *sono diverse da zero,* potremo scrivere:

$$\frac{E}{\lambda_2} = -\frac{F}{\lambda_1}.$$

Vediamo subito allora, rammentando le (18), (18'), che, se si pone:

$$H(\Phi) = -\frac{1}{\lambda_2\Delta}\int E\,d\Phi = \frac{1}{\lambda_1\Delta}\int F\,d\Phi$$

si ha:

$$X_1(H) = E \quad , \quad X_2(H) = F,$$

e quindi, dalle (24),

$$(25) \qquad \begin{cases} X_1(\log[\mu.e^{-H}]) + \dfrac{\nu_1+\lambda_2}{2} = 0 \\ X_2(\log[\mu.e^{-H}]) + \dfrac{\nu_2-\lambda_1}{2} = 0. \end{cases}$$

Il moltiplicatore voluto è

$$\mu^2 e^{-2H}$$

ed esso appunto si è ottenuto con quadrature.

Se una delle λ_1, λ_2 *è nulla, per es. se è* $\lambda_2 = 0$, si trova $\lambda_1 E = 0$ cioè $E = 0$; ed osservando che ora è:

$$X_1(\Phi) = \frac{1}{\lambda_1} Y(\Phi) = 0\,,$$

ponendo:

$$H(\Phi) = \frac{1}{\lambda_1 \Delta} \int F\, d\Phi\,,$$

stanno ancora le (25).

Se è infine $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ occorre modificare alquanto il ragionamento fatto.

In questo caso saranno soddisfatte le relazioni:

$$(B_1, X_1) = \frac{\nu_1}{2} B_1 f \qquad (B_2, X_1) = \frac{\nu_1}{2} B_2 f$$

$$(B_1, X_2) = \frac{\nu_2}{2} B_1 f \qquad (B_2, X_2) = \frac{\nu_2}{2} B_2 f$$

$$(X_1, X_2) = 0\,.$$

Da queste segue immediatamente che si ha la soluzione del sistema completo:

$$B_1 f = 0 \quad , \quad B_2 f = 0 \quad , \quad X_1 f = 0$$

nella funzione:

$$\Phi_1 = \int \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \xi^1 & \eta^1 & \zeta^1 & \omega^1 \\ dx & dy & dz & du \end{vmatrix}$$

e la soluzione del sistema:

$$B_1 f = 0 \quad , \quad B_2 f = 0 \quad , \quad X_1 f = 0$$

nella funzione:

$$\Phi_2 = \int \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ dx & dy & dz & du \\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 & \omega^2 \end{vmatrix};$$

e per le funzioni Φ_1, Φ_2 si ha:

(26) $$X_1(\Phi_1) = 0 \quad , \quad X_2(\Phi_1) = \Delta \quad ; \quad X_1(\Phi_2) = \Delta \quad , \quad X_2(\Phi_2) = 0 \, .$$

D'altra parte vediamo subito che, con un'altra quadratura, oltre quelle due fatte per ottenere Φ_1, Φ_2, si ha il moltiplicatore di Jacobi più generale comune alle equazioni:

$$B_1 f = 0 \quad , \quad B_2 f = 0 \, .$$

Infatti del sistema completo:

$$B_1 f - \sigma_1 \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \qquad B_2 f - \sigma_2 \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$$

conoscendo due soluzioni, Φ_1 e Φ_2, ed un moltiplicatore, cioè $\frac{1}{\mu}$, potrà determinarsi con un'altra quadratura l'ulteriore soluzione.

Se indichiamo con μ un moltiplicatore di Jacobi comune alle due equazioni $B_1 f = 0$, $B_2 f = 0$, ottenuto con quadrature, saranno le due quantità:

$$X_1(\log \mu) + \frac{\nu_1}{2} \quad , \quad X_2(\log \mu) + \frac{\nu_2}{2}$$

ambedue soluzioni del sistema:

$$B_1 f = 0 \quad , \quad B_2 f = 0 \, ,$$

cioè funzioni di Φ_1 e Φ_2. Poniamo che sia:

(27) $$\left\{ \begin{aligned} X_1(\log \mu) + \frac{\nu_1}{2} &= E(\Phi_1, \Phi_2) \\ X_2(\log \mu) + \frac{\nu_2}{2} &= F(\Phi_1, \Phi_2) \end{aligned} \right.$$

Essendo nel nostro caso:

$$(X_1, X_2) f = 0$$

e quindi anche:

$$X_1(\nu_2) - X_2(\nu_1) = 0 \, ,$$

dalle due precedenti uguaglianze otteniamo subito:

$$X_2(E) = X_1(F),$$

da cui:

$$\frac{\partial E}{\partial \Phi_1} X_2(\Phi_1) + \frac{\partial E}{\partial \Phi_2} X_2(\Phi_2) = \frac{\partial F}{\partial \Phi_1} X_1(\Phi_1) + \frac{\partial F}{\partial \Phi_2} X_1(\Phi_2)$$

e per le (26):

$$\frac{\partial E}{\partial \Phi_1} = \frac{\partial F}{\partial \Phi_2}.$$

Sarà dunque:

$$F\, d\Phi_1 + E\, d\Phi_2$$

un differenziale esatto, e se si pone:

$$K(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{1}{\Delta} \int (F\, d\Phi_1 + E\, d\Phi_2)$$

risulta anche:

$$X_1(K) = \frac{1}{\Delta} \Big[F\, X_1(\Phi_1) + E\, X_1(\Phi_2) \Big] = E$$

$$X_2(K) = \frac{1}{\Delta} \Big[F\, X_2(\Phi_1) + E\, X_2(\Phi_2) \Big] = F$$

Dalle (27) si ha infine:

$$X_1(\log \mu\, e^{-K}) + \frac{\nu_1}{2} = 0$$

$$X_2(\log \mu\, e^{-K}) + \frac{\nu_2}{2} = 0,$$

ossia che la quantità:

$$\mu^2 e^{-2K}$$

è un moltiplicatore del sistema.

$$X_1 f = 0 \ , \ X_2 f = 0 .$$

Dunque:

Teorema III. — *Anche nel caso in cui è soddisfatta la relazione:*

$$(B_1, B_2)f = \sigma_2 B_1 f - \sigma_1 B_2 f$$

con:

$$B_1(\sigma_2) - B_2(\sigma_1) = 0$$

si può determinare con quadrature un moltiplicatore μ *del sistema*

$$X_1 f = 0 \;,\; X_2 f = 0$$

ed ottenere con ciò due trasformazioni infinitesimali:

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} B_1 f \;,\; \frac{1}{\sqrt{\mu}} B_2 f \,.$$

ammesse dal sistema stesso.

4. — Poichè in tutti i casi possiamo, nei più sfavorevoli con quadrature, ottenere due trasformazioni infinitesimali $\overline{B}_1 f$, $\overline{B}_2 f$ ammesse dal sistema:

$$X_1 f = 0 \;,\; X_2 f = 0 \,,$$

questo potrà risolversi con altre due quadrature. Concludendo:

Teorema IV. — *Se si conosce un invariante differenziale* $\varphi(x, y, z, u, p, q, r)$ *che ammette il gruppo a due parametri:*

$$X_1 f = \xi^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta^1 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega^1 \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$X_2 f = \xi^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta^2 \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta^2 \frac{\partial f}{\partial z} + \omega^2 \frac{\partial f}{\partial u}$$

tale che in forza del sistema:

$$\varphi = a \;,\; \xi^1 p + \eta^1 q + \zeta^1 r - \omega = 0 \quad \xi^2 p + \eta^2 q + \zeta^2 r - \omega^2 = 0$$

non si annulli il determinante;

$$\begin{vmatrix} \varphi_p & \varphi_q & \varphi_r \\ \xi^1 & \eta^1 & \zeta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 \end{vmatrix} ,$$

il sistema completo:

$$X_1 f = 0 \;,\; X_2 f = 0$$

è risolubile, nei casi più sfavorevoli, con quadrature.

Nota. — Al n. 6 del § 5 abbiamo provato come, nei casi più sfavorevoli con quadrature, si possano determinare convenienti fattori pei quali moltiplicando le $A_1f, \dots, A_nf, B_1f, \dots, B_hf$ se ne ottengano altrettante trasformazioni infinitesimali permutabili colla Xf. La stessa cosa può provarsi con un procedimento più semplice, simile a quello tenuto al n. 7 dello stesso paragrafo per il caso $\varepsilon = -1$, col quale si può diminuire il numero delle quadrature da darsi per avere i detti fattori, dimostrando, come segue, che bastano per la loro determinazione due quadrature.

Se in luogo delle trasformazioni infinitesimali

$$A_1f, A_2f, \dots, A_kf$$

consideriamo le altre

$$\overline{A}_if = \nu A_if - \frac{1}{1-\varepsilon}\sigma_i Xf \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

noi troviamo che sono soddisfatte le relazioni:

$$(1) \quad (\overline{A}_i, \overline{A}_s)f = \overline{A}_i(\log\nu)\overline{A}_sf - \overline{A}_s(\log\nu)\overline{A}_if; \quad (\overline{A}_i, B_j) = 0$$

$$(2) \quad (\overline{A}_i . X)f = -(X(\log\nu) - \varepsilon\nu)\overline{A}_if + \overline{A}_i(\log\nu)Xf.$$

Dalle (1), se si rammenta che è:

$$B_j(\nu) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, h),$$

risulta (lemma V) che si ha un moltiplicatore del sistema

$$\overline{A}_if = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \qquad B_jf = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, h)$$

nella quantità ν; per cui la soluzione Φ di questo sistema può determinarsi con una quadratura.

Dalla (2) si ha allora:

$$\overline{A}_i(X(\Phi)) = \overline{A}_i(\log\nu)X(\Phi),$$

ossia:

$$\overline{A}_i(\log X(\Phi)) = \overline{A}_i(\log\nu)$$

$$\overline{A}_i\left(\log\frac{X(\Phi)}{\nu}\right) = 0;$$

cioè deve essere $\frac{X(\Phi)}{\nu}$ una funzione della sola Φ:

$$\frac{X(\Phi)}{\nu} = E(\Phi).$$

Se dunque si pone:

$$e^{\int \frac{d\Phi}{E}} = K(\Phi)$$

sarà:

$$X(K) = \nu K$$

ed applicando il lemma I si ottiene quanto volevamo.

Se noi teniamo conto di questa nota al § 3 n. 5, vediamo che bastano due quadrature nei casi più sfavorevoli, per ottenere due trasformazioni, infinitesimali permutabili colla

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

e che l'equazione $Xf = 0$, della quale è noto un invariante differenziale soddisfacente alle imposte condizioni, è risolubile, sempre nei casi più sfavorevoli, con 4 quadrature. Dell'osservazione fatta ora si è poi tenuto conto nel teorema del n. 9 del § 6 (pag. 101, 102) e nel n. 12 dello stesso paragrafo (pag. 114, 115).