NECROLOGIO

ANGELO TONOLO

La mattina del 22 giugno scorso moriva Angelo Tonolo (1), emerito di Analisi matematica presso l'Università di Padova, che volle porgere all'Estinto l'estremo saluto con solenne rito accademico.

L'Università di Padova era veramente la *sua* Università, dove si era svolta tutta la sua carriera, da studente, assistente, incaricato, titolare, fuori ruolo, emerito. È vero che la sua nomina a professore di ruolo avvenne per l'Università di Ferrara, dalla quale ben presto venne chiamato a quella di Padova; ma anche durante il breve periodo ferrarese non abbandonò la sua Università, conservandovi un incarico.

L'aveva frequentata come studente in un periodo veramente aureo, quando quella Facoltà di Scienze si fregiava di nomi illustri: D'Arcais, Veronese, Ricci-Curbastro, Levi-Civita, Severi, e il giovane studente era stato affascinato dall'insegnamento di tali Maestri che dovevano lasciare nel suo animo una impronta indelebile, una ammirazione incondizionata, una gratitudine imperitura. E quando, nel maggio 1956, raggiunti i limiti di età, salì per l'ultima volta la sua cattedra e, alla fine della lezione, si trovò circondato da allievi ed amici che vollero, con omaggi è con parole, manifestargli la loro gratitudine e la loro ammirazione, egli, nel ringraziare commosso, non poté fare a meno di rievocare le figure dei suoi grandi Maestri cui attribuiva la maggior parte di merito nella sua formazione.

In modo particolare Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita influenzarono la sua fisionomia scientifica, dandogli il primo la padronanza di quei metodi di calcolo che dovevano in seguito ottenere il magnifico collaudo della Relatività, dandogli il secondo il gusto per le applicazioni meccaniche, fisiche, geometriche, che dovevano assai spesso offrirgli lo spunto per le sue ricerche analitiche, illuminarne i risultati, svelare, con opportuni accostamenti, interessanti analogie. E fu il gusto per le applicazioni, che egli volle appoggiato su solide basi, che lo portò nel 1924, a 16 anni di distanza dalla sua laurea in Matematica e già ben avviato nella carriera scientifica come analista, a laurearsi anche in Ingegneria civile.

A prescindere da lavori su argomenti vari, si può dire che la produzione scientifica del Tonolo ha seguito due filoni: l'uno della integrazione di equazioni di interesse fisico matematico, l'altro delle applicazioni dei metodi di Ricci, in particolare di quelli intrinseci, a questioni di Meccanica classica e di Geometria differenziale.

---

(1) Era nato a Casale sul Sile, in provincia di Treviso, il 5 dicembre 1885.

Il Tonolo esordì infatti nel 1910 con una grossa Memoria dal titolo: « Sull'integrazione delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica ». Questo problema era già stato trattato, nel caso di contorno fisso, dal Löve. Egli lo risolve, in questa Memoria, sia nel caso di contorno fisso, sia in quello di contorno mobile, si appoggia ai metodi del Tedone e del Volterra, da lui opportunamente adattati, ed arriva fino alle quadrature. Sullo stesso argomento tornò nel 1930 con due lavori dallo stesso titolo « Sulla integrazione delle equazioni elettromagnetiche di Maxwell-Hertz », indottovi da uno studio del Tedone che era apparso nel frattempo e che trattava un caso più generale del suo e con procedimento diverso. Egli volle constatare che il suo procedimento valeva anche in questo caso. Precisamente risolse il seguente problema: assegnate, per ogni istante, le forze elettriche e magnetiche in ogni punto di una superficie chiusa, fissa o mobile, in un campo elettromagnetico, e nell'istante iniziale queste stesse forze in ogni punto del campo da essa racchiuso, determinare univocamente le forze interne alla superficie per ogni istante.

Per queste integrazioni si supponeva però sempre il mezzo isotropo. Più tardi, nel periodo 1933-34, il Tonolo estese la risoluzione del problema ai mezzi cristallini, uniassici prima, biassici poi.

Dall'integrazione di queste equazioni del campo classico passò, negli anni 1935-36, all'integrazione, sempre con quadrature, delle equazioni del Dirac, che affrontò da prima in un caso particolare, per poi estendere i risultati al caso generale; e nel 1937, in una bella Memoria, diede le formole di rappresentazione degli integrali di una classe più ampia di sistemi differenziali omogenei, lineari nelle derivate parziali di primo ordine e nelle funzioni incognite, e in tal modo completò, generalizzandoli, gli studi precedenti sulle equazioni del Dirac. Una ulteriore generalizzazione, in questo indirizzo è contenuta in uno dei suoi ultimi lavori, apparso nel 1961, in cui viene data l'esplicita soluzione del problema di Cauchy per una classe ancor più ampia di sistemi lineari di equazioni a derivate parziali del primo ordine a coefficienti costanti.

Ritornò negli anni 1955-56 sull'integrazione delle equazioni del campo elettromagnetico per riesporre, organizzandoli e perfezionandoli, i risultati ottenuti, con ipotesi sempre più generali e infine sviluppò uno studio analogo sulla teoria del De Broglie, mostrando come gli integrali delle equazioni corrispondenti prendano una forma analitica simile a quella da lui stabilita per le equazioni del Maxwell.

Altri problemi di integrazione, altre questioni di Fisica matematica vennero studiati dal Tonolo durante la sua carriera scientifica. Per richiamarne solo gli estremi in ordine di tempo, ricorderò alcuni studi sul comportamento asintotico di un potenziale di linea, il primo dei quali porta la data del 1912, e una Memoria sopra una classe di forze vive del Painlévé, pubblicata nel 1960, nella quale si determina la forma dell'energia cinetica per un sistema a vincoli fissi e libero da forze, quando le corrispondenti equazioni dinamiche ammettono integrali primi di forma particolare.

Vengo al secondo filone di ricerche: quello del calcolo di Ricci e delle sue applicazioni.

Il primo lavoro, del 1912, è una generalizzazione della teoria del triedro mobile a una generica varietà riemanniana. In esso, sfruttando le proprietà delle ennuple di congruenze ortogonali, il Tonolo stabilisce una estensione delle corrispondenti formole di Poisson e le rispettive condizioni di integrabilità. Le ennuple di congruenze ortogonali forniscono, nelle varietà riemanniane in generale e in quelle euclidee in particolare, uno strumento di calcolo che permette di operare sopra invarianti anzichè su sistemi covarianti o controvarianti. È questo lo strumento che il Tonolo usò in questa prima ricerca e che preferì nelle ricerche successive. Egli lo applicò in un bel gruppo di lavori riguardanti la Meccanica dei mezzi deformabili. Incominciò nel 1931 col dar forma intrinseca alle equazioni di equilibrio dei mezzi elastici ispirandosi ad una elegante trattazione del Lamé che però non era corretta. Il Lamé infatti, per dar forma geometrica a tali equazioni di equilibrio, si era riferito a un sistema di tre famiglie di superficie isostatiche mutuamente ortogonali, cioè a un sistema triplo di superficie dotate della proprietà di essere sollecitate solo normalmente dalle forze elastiche; ma tali superficie non esistono, almeno in generale, mentre esiste sempre una terna di congruenze ortogonali, corrispondenti in ogni punto alle direzioni principali di sforzo, direzioni per le quali gli elementi superficiali ad esse perpendicolari sono sottoposti a sforzi puramente normali; queste direzioni coincidono, se il corpo è isotropo, con le direzioni principali di deformazione; se il corpo è anisotropo le due terne sno distinte. Trattando da prima il caso più generale dei corpi anisotropi, il Tonolo si riferisce a quest'ultima terna di congruenze e riesce a dare forma corretta alla trattazione del Lamé. Si ferma poi sul caso particolare dei corpi isotropi e tratta infine il caso dei mezzi omogenei ed isotropi appartenenti a spazi di curvatura costante.

L'errore del Lamé era stato notato fin dal 1880 dal Weingarten il quale aveva stabilito le condizioni che debbono verificarsi perchè sia lecito il presupposto del Lamé, cioè le condizioni per l'esistenza di un *sistema isostatico* in un corpo continuo. Il Tonolo tornò sull'argomento negli anni 1931-32 per determinare tutti i sistemi isostatici le cui superficie sono soggette a sforzi che sono invariabili col mutare del punto a cui si riferiscono, ed estese anche questa ricerca al caso di spazi con curvatura costante. Più tardi diede forma intrinseca alle condizioni del Weingarten sopra richiamate e ad una estensione, dovuta al Somigliana, dell'ordinaria teoria dell'elasticità, nella quale si suppone che ogni elemento del corpo sia sottoposto, oltre che all'azione di una forza, anche a quella di una coppia, così che il tensore degli sforzi risulta asimmetrico. Infine nel 1943 sviluppò in modo organico, in una grossa Memoria, una teoria tensoriale delle deformazioni finite dei corpi elastici. In essa vengono da prima richiamate le lezioni del Ricci sulla teoria ordinaria dell'elasticità, lezioni che allora non erano ancora pubblicate, e, seguendo lo spirito di queste lezioni, viene proseguita la trattazione per il caso delle deformazioni finite, riottenendo, in forma tensoriale, le equazioni di Kirchhoff-Brillouin, Boussinesq e Signorini. Anche qui, come negli altri lavori sopra ricordati, l'Autore ha di mira di mostrare l'eleganza e l'efficacia del calcolo del Ricci che porta a dar forma compendiosa e invariantiva a risultati per loro natura alquanto complicati.

Una questione analoga a quella del Weingarten porta a caratterizzare tutte le deformazioni di un mezzo continuo nel quale le faccie del triedro principale di deformazione, relativo ai vari punti del corpo, sono tangenti a tre famiglie di superficie. Il Tonolo risolse questa questione e ciò lo portò a studi di natura geometrica sulle varietà riemanniane, normali nel senso del Bianchi.

Altre ricerche di geometria riemanniana vennero ispirate al Tonolo da questioni meccaniche, come lo studio delle varietà la cui metrica è riducibile al tipo di Liouville, o per cui le equazioni delle geodetiche ammettono integrali primi quadratici, o come lo studio, già ricordato, sopra una classe di forze vive del Painlévé. Accanto a queste, il Tonolo studiò anche questioni di pura geometria, riguardanti le varietà riemanniane e lo spazio Hilbertiano.

Un altro cospicuo gruppo di lavori venne dedicato dal Tonolo alla trigonometria dei piccoli triangoli, anche non geodetici, tracciati sopra una generica superficie. Indotto ad entrare in questo argomento da uno studio del Levi-Civita apparso nel 1934, il Tonolo vi dedicò una decina di lavori, pubblicati dal 1934 al 1940, ed espose una buona parte dei risultati in una Conferenza tenuta a Milano nel 1939. Egli usò i metodi dell'ordinaria Geometria differenziale, si spinse, quando era necessario, fino alla terza approssimazione e additò possibili applicazioni dei risultati alla Geodesia.

La fisionomia scientifica del Tonolo non sarebbe fedelmente tracciata se non aggiungessi che la cospicua mole di lavoro cui ho accennato è stata sempre accompagnata da studi di analisi pura, dedicati ad argomenti vari. Anche per questi studi mi contento di citare gli estremi in ordine di tempo: uno sopra l'esistenza di soluzioni fondamentali di una equazione alle derivate parziali del tipo ellittico, apparso nel 1912, ed uno sullo sviluppo di funzioni implicitamente definite da un sistema di equazioni nel campo reale, apparso nel 1960.

Quest'ultima data, che cito già per la seconda volta, e quella del 1961, che pure ho incontrato, indicano che il Tonolo non lasciò il suo lavoro scientifico col cessare dei suoi Corsi universitari, ma vi attese, si può dire, fino all'ultimo; nè lasciò del tutto il suo lavoro didattico, ma si occupò dei Corsi di perfezionamento per laureati, della biblioteca e del Seminario matematico di Padova. Egli fu sempre membro attivo di quell'istituto matematico finchè l'ultima malattia non lo confinò, per circa un anno, in casa di cura. Uno dei lavori che portò a termine dopo aver lasciato l'insegnamento ufficiale fu la pubblicazione delle opere del Ricci, cui si dedicò con vera passione di discepolo, coordinando e controllando l'opera di vari collaboratori. E l'ultimo dei suoi lavori pubblicati in Italia fu una ricerca sulle origini del calcolo del Ricci, fondata sullo studio di due fra le prime Memorie di questo matematico.

I suoi meriti scientifici e didattici ebbero numerosi riconoscimenti. Era socio dell'Accademia dei Lincei, membro effettivo dell'Istituto Veneto di Scienze e Lettere, dell'Accademia Patavina di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze di Ferrara, medaglia d'oro dei benemeriti della Scuola e della Cultura, medaglia d'oro dell'Università di Ferrara, oltre che, come ho già ricordato, professore emerito dell'Università di Padova.

Di carattere aperto, gioviale, allegro, poteva sembrare talora spensierato, egli che, non essendosi formato una famiglia, non aveva conosciuto le preoccupazioni e i dolori che la famiglia suol riservare, accanto alle gioie. Non che gli siano mancati affetti familiari, chè anzi fu circondato dall'affetto, apprezzato e ricambiato, di fratelli, sorelle, nipoti. Sotto l'aspetto abitualmente lieto celava un serio e profondo attaccamento al dovere, un impegno appassionato e costante verso la ricerca scientifica, un vero culto per la scienza e per i suoi rappresentanti.

Lascia nei colleghi e negli amici un sereno ricordo, pieno di sincero rimpianto; lascia, per usare le parole del giornale universitario di Padova, in quelli « che ebbero la fortuna d'averlo Maestro, una impronta che nemmeno il lungo volger di anni potrà cancellare ».

MARIA PASTORI